



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

José Luiz Rosas Pinho

**APRENDER A FORMULAR PARA APRENDER A RESOLVER: REGISTROS DE
REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E A CRIATIVIDADE NA APRENDIZAGEM DA
GEOMETRIA**

Florianópolis
2021

José Luiz Rosas Pinho

**APRENDER A FORMULAR PARA APRENDER A RESOLVER: REGISTROS DE
REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E A CRIATIVIDADE NA APRENDIZAGEM DA
GEOMETRIA**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Educação Científica e Tecnológica da Universidade
Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de
Doutor em Educação Científica e Tecnológica.
Orientador: Prof. Dr. Mérciles Thadeu Moretti

Florianópolis

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pinho, José Luiz Rosas

Aprender a formular para aprender a resolver: registros de representação semiótica e a criatividade na aprendizagem da geometria / José Luiz Rosas Pinho ; orientador, Méricles Thadeu Moretti, 2021.

179 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Educação Científica e Tecnológica. 2. Criatividade em Geometria. 3. Registros de Representação Semiótica. 4. GeoGebra. 5. Formação do professor. I. Moretti, Méricles Thadeu. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. III. Título.

José Luiz Rosas Pinho

Aprender a formular para aprender a resolver: registros de representação semiótica e a criatividade na aprendizagem da geometria

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud
(Examinador – PUC/SP)

Prof. Dr. David Antonio da Costa
(Examinador – PPGECT/UFSC)

Prof.(a) Dra. Cíntia Rosa da Silva
(Examinadora – UFSC/Campus Blumenau)

Profa. Dra. Daiana Zanelato dos Anjos
(Examinadora suplente – SED/SC)

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Doutor em Educação Científica e Tecnológica.

Prof. Dr. Juliano Camillo
Coordenador do Programa de Pós-Graduação

Prof. Dr. Mércles Thadeu Moretti
Orientador

Florianópolis, 2021.

Dedico este trabalho às pessoas mais importantes da minha vida:
minha esposa Isabel e meu filho especial Pedro, que talvez nunca
irá entender a razão de tudo isto.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas que participaram e me auxiliaram direta ou indiretamente neste trabalho.

Agradeço em primeiro lugar ao meu orientador Dr. Mércles Thadeu Moretti, a todos os professores do PPGECT e a todos os colegas da turma de 2015/2.

Agradeço também a todos os meus alunos que me iluminaram a cada instante desses 40 anos de docência na UFSC. Agradeço em especial aos incógnitos alunos do Curso de Matemática que participaram desta pesquisa. Agradeço especialmente a todos os alunos do Curso de Matemática que foram meus bolsistas nos meus 24 anos de tutoria do Programa de Educação Tutorial (PET).

Agradeço aos meus colegas do Departamento de Matemática da UFSC por toda sua atenção para comigo.

No plano pessoal, agradeço a todos os meus familiares e amigos que sempre torceram muito por mim: pais, irmãos e aquelas pessoas com quem convivi mais intensamente e que, passe o tempo que for, continuam meus amigos.

Agradeço em especial a Giovanna Artigiani, terapeuta educacional de meu filho, um anjo que surgiu para deixar minha família mais tranquila e estável.

Agradeço, com um carinho especial, à minha sogra, Nilza Caroli Rezende, uma mulher notável, que nos deixou aos 99 anos de idade e que muito rezou para que eu alcançasse meus objetivos.

Por último, e não menos, agradeço à minha esposa Isabel, companheira de 48 anos de convivência, e ao meu filho Pedro, por toda a paciência e carinho que sempre me dedicaram.

“Et cependant - étrange contradiction pour ceux qui croient au temps – l’histoire géologique nous montre que la vie n’est qu’un court épisode entre deux éternités de mort, et, que, dans cet épisode même, la pensée consciente n’a duré et ne durera qu’un moment. La pensée n’est qu’un éclair au milieu d’une longue nuit. Mais c’est cet éclair qui est tout.”

(POINCARÉ, 1905, p. 301-302)

RESUMO

Este trabalho aborda a criatividade matemática no meio educacional, em particular no Ensino Superior, com um recorte para a geometria. O objetivo da pesquisa é desenvolver processos e métodos que estimulem a criatividade na resolução e na formulação de problemas de geometria na formação de um aluno de Licenciatura em Matemática, futuro professor do Ensino Básico. Uma prioridade e um desafio hoje em dia, apontados na maioria dos planos curriculares escolares em todo o mundo, é despertar a criatividade em matemática nos alunos, desde seus primeiros contatos com o sistema educacional. É necessário que o professor de matemática esteja consciente da importância desse fato e que esteja preparado para esse desafio, para que esse despertar venha a ocorrer. Em experimentos de atividades com alunos universitários em sala de aula, em particular alunos de Licenciatura em Matemática, e em diversos encontros com um grupo de alunos voluntários foi possível desenvolver e aplicar aqueles métodos. O foco do trabalho foi na geometria sintética, mais intuitiva, visual e qualitativa do que a geometria analítica. Diversos exemplos de abordagem de problemas via geometria sintética estão aqui presentes. O uso intensivo de um software de geometria dinâmica, o GeoGebra, foi fundamental para que questionamentos e problemas emergissem de alguma configuração geométrica. Os processos de descrição postos em evidência na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval tiveram um papel importante na elaboração e na análise das atividades realizadas com os alunos. Explorar esses processos será uma tônica das pesquisas educacionais no futuro. Há ainda muito trabalho a ser feito.

Palavras-chave: Criatividade. Geometria sintética. Processos de descrição. Registros de Representações Semióticas. GeoGebra. Formação do professor.

ABSTRACT

This work addresses mathematical creativity in the educational environment, particularly in the Superior Education system, with a focus on geometry. The aim of the research is to develop processes and methods to foster creativity in solving and posing geometry problems in academic qualification of pre-service teachers. Nowadays, a priority and a key challenge pointed out in the curricular structures of the majority of the countries is to spark mathematical creativity in the students since early ages. Teachers must be aware of its significance and be prepared for that challenge. In many experiments in doing activities with undergraduate students, in particular in classes of pre-service teachers, and with a group of volunteers, it was possible to apply those methods. We focused this work in synthetic geometry, more intuitive, visual and qualitative rather than analytic geometry. Many examples of problems approach through synthetic geometry are present here. The intensive use of a dynamic geometry software like GeoGebra was essential for questioning and the rise of problems from a geometric configuration. The description processes that emerged in Duval's Theory of Semiotic Registers of Representations have an important role in the elaboration and analysis of the activities made by the students. To explore those processes will be an important point on educational research in the future. There is a lot of work ahead.

Keywords: Creativity. Synthetic geometry. Descriptions processes. Registers of Semiotic Representations. GeoGebra. Teacher Education.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	11
1.1	MEMORÍE (UMA TRAJETÓRIA).....	11
1.2	CRIATIVIDADE EM GEOMETRIA: VISUALIZAÇÃO, INTUIÇÃO E PROCESSOS DE DESCRIÇÃO.....	21
1.3	PROBLEMA PRELIMINAR DE PESQUISA.....	25
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO.....	26
2	CRIATIVIDADE SEGUNDO FILÓSOFOS, PSICÓLOGOS, MATEMÁTICOS E EDUCADORES MATEMÁTICOS – UMA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	28
2.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE CRIATIVIDADE.....	28
2.2	PROBLEMA DE PESQUISA DEFINITIVO E OBJETIVOS.....	34
3	GEOMETRIA.....	35
3.1	GEOMETRIA E VISUALIZAÇÃO.....	35
3.2	GEOMETRIA ANALÍTICA VERSUS GEOMETRIA SINTÉTICA.....	49
3.3	GEOMETRIA SINTÉTICA E O RIGOR MATEMÁTICO: AXIOMÁTICA DE EUCLIDES VERSUS AXIOMÁTICA DE HILBERT?.....	58
4.	SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA.....	65
4.1	CARACTERÍSTICAS DOS SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA.....	65
4.2	O POTENCIAL SEMIÓTICO DE UM SGD.....	69
4.3	EXEMPLOS DE SITUAÇÕES QUE EVIDENCIAM AS LIMITAÇÕES DE UM SGD CAUSANDO INCONSISTÊNCIAS TEÓRICAS.....	71
4.3.1	Inconsistências na tangência.....	71
4.3.2	Sensibilidade de medida.....	74
4.3.3	Impossibilidade de obter interseção com lugares geométricos.....	75
4.4	PRECISÃO E NÃO EXATIDÃO: ERROS DE CÁLCULO E A REPRESENTAÇÃO FÍSICA LIMITADA DO PLANO COMO UM CONJUNTO DE PONTOS DISCRETOS.....	79
4.5	PROBLEMAS DE GEOMETRIA COM O ACOMPANHAMENTO DO GEOGEBRA.....	86
4.5.1	Problemas históricos de máximos e de mínimos em geometria.....	86
4.5.1.1	<i>Problema de Heron.....</i>	86
4.5.1.2	<i>Problema de Fagnano.....</i>	90
4.5.1.3	<i>Problema de Fermat.....</i>	92
4.5.1.4	<i>Problema de Regiomontanus.....</i>	94

4.5.1.5	<i>Problema de Dido ou problema isoperimétrico</i>	96
4.5.2	Um problema de inscrição de um triângulo equilátero em polígonos regulares	96
5	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	106
5.1	AS FUNÇÕES COGNITIVAS DISCURSIVAS E AS OPERAÇÕES DE DESCRIÇÃO.....	106
5.2	UM EXEMPLO DE CRIAÇÃO DE PROBLEMAS A PARTIR DE UMA DESCRIÇÃO COMPLETA DE UM PROBLEMA.....	117
6	METODOLOGIA	125
6.1	METODOLOGIA EMPREGADA NOS EXPERIMENTOS EM SALA DE AULA.....	132
6.2	METODOLOGIA EMPREGADA NOS EXPERIMENTOS COM UM GRUPO DE ALUNOS VOLUNTÁRIOS.....	133
6.3	FONTES DE PROBLEMAS EM GEOMETRIA.....	134
7	EXPERIMENTOS COM OS ESTUDANTES	139
7.1	EXPERIMENTOS EM SALA DE AULA.....	139
7.1.1	Primeira atividade	139
7.1.1.1	<i>O exemplo fornecido de início</i>	140
7.1.1.2	<i>O problema-base para a atividade</i>	142
7.1.1.3	<i>A atividade proposta</i>	143
7.1.1.4	<i>Resultados da atividade</i>	144
7.1.1.5	<i>Comentários e análises</i>	144
7.1.2	Segunda atividade	145
7.1.2.1	<i>A atividade proposta</i>	145
7.1.2.2	<i>Resultados da atividade</i>	146
7.1.2.3	<i>Comentários e análises</i>	148
7.2	EXPERIMENTOS COM O GRUPO DE ESTUDANTES VOLUNTÁRIOS.....	150
7.2.1	Primeira atividade (e única a ser relatada)	152
7.2.1.1	<i>O problema-base para a atividade</i>	152
7.2.1.2	<i>Desenvolvimento e resultados da atividade</i>	153
7.2.1.3	<i>Comentários e análises</i>	162
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	165
	REFERÊNCIAS	170

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho aborda a criatividade em Matemática ou, mais especificamente, criatividade na Educação Matemática com o foco no Ensino Superior. Em seu desenvolvimento surgiram diversos temas, ideias, conceitos e construtos tais como: filosofia e criatividade, psicologia e criatividade, educação e criatividade, criatividade em matemática, educação matemática e criatividade, insubordinação criativa, visualização, percepção, intuição, semiótica, matemática qualitativa, registros de representação semiótica, geometria, geometria sintética, geometria analítica, softwares de geometria dinâmica, potencial semiótico de um software de geometria dinâmica, pensamento divergente e pensamento convergente, processos heurísticos, domínio específico e domínio geral de criatividade. Todos esses termos poderiam ser palavras-chave deste trabalho. Será preciso dar uma ordem em tudo isso, mas antes, uma pergunta deve ser formulada, justificada e respondida: O que leva uma pessoa de 72 anos de idade a apresentar uma tese, ou alternativamente, quais são os caminhos percorridos por essa pessoa até esse ponto?

1.1 MEMÓRIA (UMA TRAJETÓRIA)

Nesta seção, e somente nela, será empregada a primeira pessoa do singular.

A pergunta formulada acima permitirá que, em sua resposta, eu possa descrever os caminhos por mim percorridos relacionados à matemática, e justificar a escolha do tema de pesquisa.

O título desta seção denuncia a minha idade. Sou da época em que se estudava latim na escola e cheguei a estudar uma ano dessa “língua morta” no primeiro ano do chamado ginásial (hoje sexto ano do Ensino Fundamental) em 1960. O primeiro momento marcante de minha formação matemática ocorreu ainda no Ensino Básico, no terceiro ano ginásial, em 1962. Àquela época as disciplinas do ginásio eram apresentadas separadamente, tal como hoje no Ensino Fundamental – Anos Finais. Na disciplina de Matemática daquele ano comecei a ter contato com a Geometria de uma forma estruturada: o livro didático, e o professor, apresentavam os postulados de Euclides e seguiam-se teoremas e suas “demonstrações”. Não pretendo aqui defender que esse fosse o melhor currículo possível, mas o fato é que, tudo aquilo me impressionou e me fascinou sobremaneira. Sim, mas havia um professor excelente que cativava a todos nós, eu e meus colegas. Isso era unânime. Além de nos provocar para que

fizéssemos perguntas, ele propunha alguns problemas básicos de construções geométricas baseados na teoria desenvolvida. Até mesmo “demonstrações” fora do currículo, como a não existência de um número racional cujo quadrado fosse igual a 2, o que está relacionado à incomensurabilidade entre o lado de um quadrado unitário e sua diagonal. No Ensino Médio, chamado naquela época de Científico (havia também o Clássico, para aqueles que quisessem seguir a área de humanas depois), cursei várias disciplinas de matemática, dentre as quais as “geométricas”: Geometria (plana e espacial), Desenho Geométrico (construções geométricas), Geometria Descritiva, Perspectiva, além de Geometria Analítica. Nessa época, por recomendação de professores, travei contato com o livro do matemático dinamarquês Julius Petersen (1963), editado no Brasil e atualmente esgotado, cuja primeira edição dinamarquesa data de 1866. Outras edições se seguiram após a edição dinamarquesa de 1879, seja em francês (PETERSEN, 1880), seja em inglês (PETERSEN, 1927) e em outros idiomas. Esse livro é um tratado sobre construções geométricas em que constam 410 problemas utilizando diversas técnicas baseadas na teoria. Petersen deu importantes contribuições à Teoria dos Grafos e forneceu uma solução original para o problema de Apolônio utilizando a transformação inversão: “A teoria da inversão, desenvolvida durante a primeira metade do século XIX, foi utilizada por Julius Petersen (1839-1910) para produzir uma elegante solução do problema de Apolônio” (COURT, 1961, p. 451, tradução nossa). Cito aqui o livro de Petersen devido à sua influência na minha formação matemática e pelo fato de que os problemas de construção geométrica, problemas esses que fazem parte do que eu chamo de uma *matemática qualitativa*, se constituíram em boas fontes de criação de problemas de geometria, como será esclarecido neste trabalho.

Apesar de uma forte formação matemática no Ensino Médio (que incluiu um pouco de Cálculo Diferencial e Integral), graduei-me em Química (bacharelado) pela UFRJ.

Meu reencontro com a matemática se deu quando fui fazer uma pós-graduação em matemática no Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) em 1977. Obtive o grau de mestre em matemática em janeiro de 1980. Dessa época tenho uma valiosa (para mim e para os propósitos desta tese) recordação da disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, especialmente devido à Teoria *Qualitativa* das Equações Diferenciais desenvolvida principalmente pelo matemático francês Henri Poincaré, que a descreve em detalhes em um trabalho seu (POINCARÉ, 1881) e citada em diversos artigos da primeira metade do século XX como, por exemplo, o artigo do também matemático francês Jacques Hadamard (1921, p. 240). Hoje em dia a Teoria Qualitativa faz parte da maioria dos livros de equações diferenciais ordinárias. A Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais permite que possamos descrever o

comportamento das soluções de uma equação, ou de um sistema de equações diferenciais sem resolvê-lo diretamente. Na prática, não se pode resolver a maioria das equações diferenciais porque as soluções (que em muitos casos sabemos que existem devido ao teorema de existência de soluções) não podem ser escritas por meio de funções elementares. Há métodos numéricos de aproximação, mas não soluções exatas. A Teoria Qualitativa nos diz como as soluções se comportam próximo aos equilíbrios (singularidades) de um sistema e no infinito. Por exemplo, a equação diferencial de um pêndulo simples sem atrito (modelo do pêndulo ideal) de comprimento ℓ , massa m e *ângulo de deslocamento com a vertical* θ é dada por (HIRSCH; SMALE; DEVANEY, 2004, p. 196):

$$m\ell\theta'' = -mg \cdot \text{sen}\theta ,$$

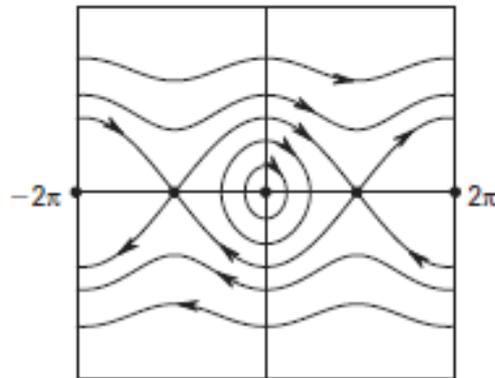
em que g é a aceleração da gravidade. A variável independente da função θ não aparece explicitamente na equação. Do ponto de vista do modelo mecânico essa variável independente é o tempo t . Essa equação é não linear, devido ao termo $\text{sen}\theta$ ali presente. Essa equação diferencial de segunda ordem pode ser transformada no seguinte sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem por meio da introdução da variável $\omega = \theta'$ (Ibid., p.196):

$$\begin{aligned}\theta' &= \omega \\ \omega' &= -\frac{g}{\ell} \cdot \text{sen}\theta\end{aligned}$$

A variável ω , derivada da função posição angular, é portanto, a *velocidade angular* do pêndulo no tempo t . O sistema acima é dito autônomo, que é o caso dos sistemas em que a variável independente não aparece explicitamente.

Essa transformação de equação para sistema de equações é um caso de um *tratamento* de registro semiótico, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2004). A Teoria Qualitativa nos permite obter o *retrato de fase* do sistema. O retrato de fase é um gráfico formado pelo conjunto de *órbitas* (ou *trajetórias*) do sistema que correspondem a cada uma das soluções do sistemas em cada conjunto de *condições iniciais* do sistema. No eixo horizontal está representada a variável θ e no eixo vertical a variável ω . O transcorrer do tempo fica indicado pelas direções das setas em cada órbita, conforme a figura 1:

Figura 1- Retrato de fase do sistema do pêndulo simples.



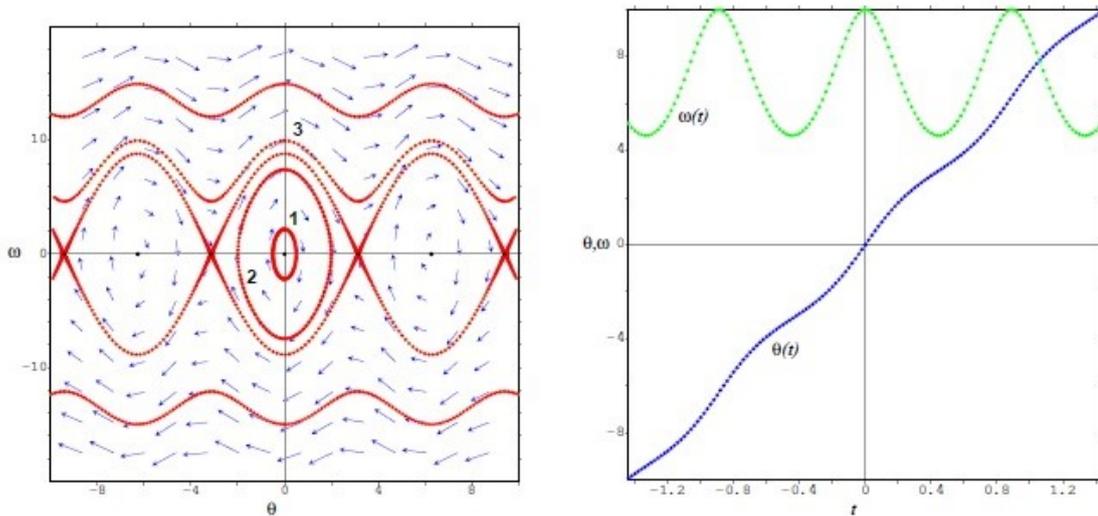
Fonte: Hirsch, Smale e Devaney (2004, p. 197).

Observe-se que há órbitas fechadas (no centro da figura), o que indica soluções periódicas, e há órbitas não fechadas (mais para as partes superior e inferior da figura), o que corresponde à situação em que o pêndulo ficaria dando voltas completas (e infinitamente) em torno do ponto de fixação, e isso depende do valor inicial da velocidade angular (impulso dado no início).

A transformação do registro de representação algébrico (equações do sistema) para o registro figural é o que Duval denomina de *conversão* de registro semiótico. Essa conversão é complexa e não congruente¹ (há poucos pontos de correspondência em cada registro). No entanto, uma conversão mais congruente é aquela em que no gráfico o *campo de direções* das soluções é apresentado graficamente: a cada ponto do plano do retrato de fase, de coordenadas (θ, ω) , é associado o vetor (θ', ω') , cujos valores são dados pelo sistema de equações, tangente a cada órbita naquele ponto. Esse vetor é representado por uma seta com módulo, direção e sentido. Na figura 2 abaixo pode-se ver, na parte esquerda, o retrato de fase do sistema do pêndulo simples juntamente com o campo de direções, e na parte direita o gráfico de uma solução θ e da correspondente velocidade angular ω em função de t :

¹ As conversões não congruentes entre registros diferentes podem ocorrer e obedecem determinados critérios.

Figura 2 - Retrato de fase do pêndulo simples com campo de direções e gráficos da solução θ (azul) e da correspondente velocidade angular ω (verde) em função de t dadas pela órbita 3.



Fonte: Villate (2007, p. 103).

Na parte esquerda figura 2 a órbita numerada como 3 representa, como todas as órbitas, uma infinidade de pares de funções θ e ω , distintas a menos de constantes, que são soluções do sistema de equações diferenciais. Na parte da direita da mesma figura estão representados os gráficos de um desses pares de funções, segundo *condições iniciais* determinadas. Os gráficos dessa figura foram obtidos por meio de um computador. As funções soluções não são conhecidas exatamente em seu registro algébrico, pois nenhum método de resolução é aplicável nesse sistema. No entanto, o retrato de fase pode ser esboçado sem o auxílio computacional graças à Teoria Qualitativa das equações diferenciais e a outros teoremas (por exemplo, sobre estabilidade de equilíbrios).

Esse aspecto qualitativo da matemática, em que conclusões podiam ser tiradas a partir da *visualização* de gráficos, influenciaria a minha maneira de pensar matemática, embora eu não percebesse o quanto àquela época².

Em março de 1980 ingressei no Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) lecionando várias disciplinas em vários cursos. Na década de 90 algumas mudanças importantes ocorreram no Curso de Matemática da UFSC: em 1991 foi implantado o Programa Especial de Treinamento, atual Programa de Educação Tutorial (PET) do Curso de Matemática e de 1992 a 1994 um grupo de professores do departamento, mais

² Essa visualização inclui não somente o processo perceptivo do gráfico, mas também o processo de desvendar esse gráfico, ou seja, de “operar” com esse gráfico. Ver DUVAL(2012, p. 120).

comprometidos com o Curso de Matemática, se dedicou a estudar uma reforma curricular com a criação de disciplinas não tradicionalmente ensinadas em cursos de matemática do país. Essa reforma foi implantada em 1994. Além disso, o Departamento de Matemática criou um conjunto especial de disciplinas de Cálculo e Álgebra Linear, para alunos interessados dos cursos de engenharias e de matemática, denominado Programa Avançado de Matemática (PAM).

Particpei do PAM em sua fase inicial lecionando a disciplina de Cálculo. O livro utilizado para cálculo de funções de uma variável era o livro “Calculus” de Michael Spivak (1980). No livro, ao apresentar uma definição informal e depois uma definição formal de função, Spivak comenta: “[...]nem a definição intuitiva nem a formal indicam a melhor maneira de pensar sobre funções. A melhor maneira consiste em *desenhar figuras*[...]” (SPIVAK, 1980, p.48, tradução nossa, grifo nosso). Spivak refere-se aos gráficos de funções, mas aí surge um paradoxo: para se obter gráficos de funções, sem apenas traçar alguns pontos (conversão congruente, abordagem ponto a ponto) é preciso estudá-las antes (por meio de resultados do Cálculo Diferencial). Além de insinuar o que Duval chama de *abordagem de interpretação global de propriedades figurais*³ (DUVAL, 2011), o autor quer dizer é que desenhar gráficos é a melhor maneira para se resolver problemas sobre funções. De fato, em muitos problemas do livro a resolução se revela por meio de gráficos. Por exemplo, no problema 20 do capítulo 8, denominado poeticamente por Spivak de “Lema do sol nascente” (ibid., p. 129), um esboço de gráfico fornece um vislumbre de como iniciar a resolução do problema. Eu apliquei diversas vezes o uso de gráficos para resolver problemas (essencialmente problemas de demonstração de afirmações em Cálculo) do livro. Nesse espírito é possível desenvolver uma demonstração essencialmente visual⁴ do chamado “Lema das Contrações”, que é usualmente demonstrado via sequências, inclusive por Spivak em seu livro (ibid., p. 433). Esse autor apresenta ainda algumas funções cujo registro gráfico não é muito simples de se obter, mesmo com algum conhecimento operacional de Cálculo. Por exemplo, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por⁵ (ibid., p. 64):

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{se } x = 0 \end{cases},$$

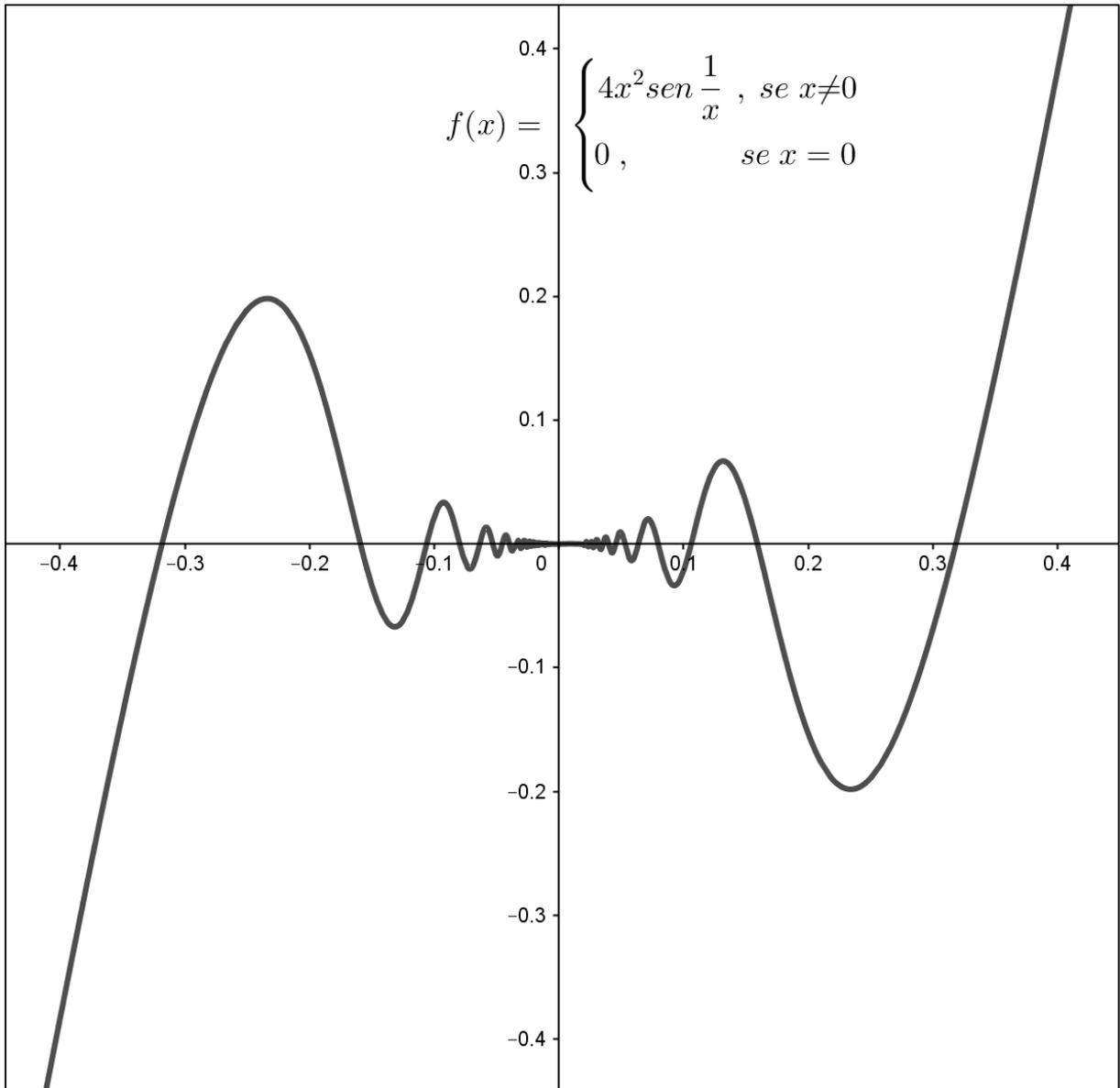
³ Essa interpretação global refere-se à relação entre gráfico e expressão algébrica, ou como a modificação de um deles implica na modificação do outro.

⁴ Comunicação oral do autor em seminário interno do PET Matemática da UFSC em 2019.

⁵ A função apresentada no livro é ligeiramente diferente, com $f(0) = 0$ e $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, se $x \neq 0$.

é derivável em todos os pontos, com $f'(0) = 0$. Isso indica que a reta tangente ao gráfico no ponto $x = 0$ é o eixo x , e esse eixo cruza o gráfico em uma infinidade de pontos em qualquer intervalo em torno de $x = 0$, um resultado a princípio nada evidente. Seu gráfico, obtido no GeoGebra, está apresentado na figura 3:

Figura 3 - Gráfico da função f dada por $f(0) = 0$, se $x = 0$, e $f(x) = 4x^2 \text{sen} \frac{1}{x}$, se $x \neq 0$.



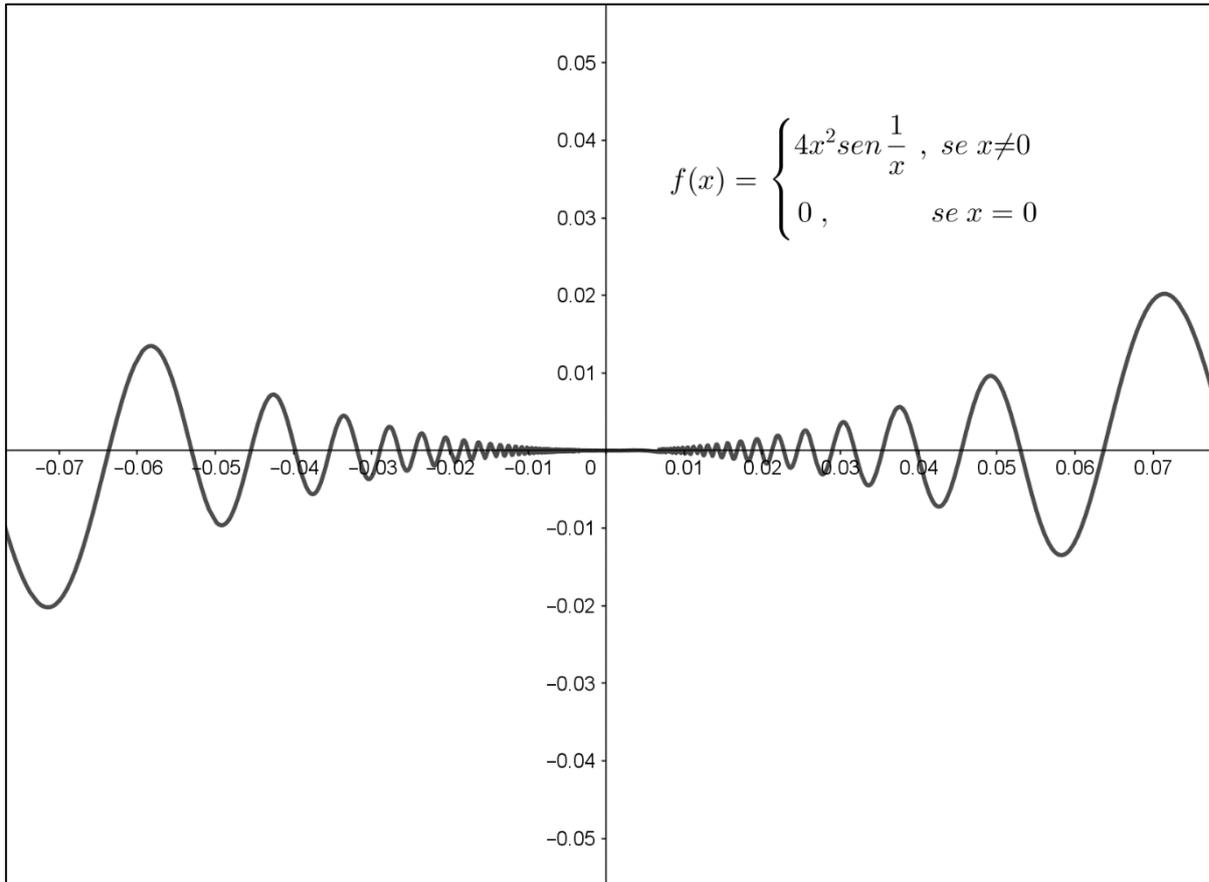
Fonte: O autor, usando o GeoGebra⁶.

Observe que o gráfico, obtido por meio de um software, não esclarece o que ocorre na vizinhança da origem. Uma aproximação (*zoom*) no gráfico, possível no GeoGebra, passando

⁶ O software GeoGebra foi utilizado em todas as figuras geométricas e gráficos deste trabalho feitos pelo autor.

de uma escala décimos de unidade para centésimos de unidade, apenas confirma o caráter oscilatório do gráfico, mas ficamos com a mesma dúvida em uma vizinhança menor da origem. A Figura 4 mostra o que ocorre.

Figura 4 – Gráfico da mesma função da Figura 3 com *zoom*.



Fonte: O autor.

A conversão do registro algébrico para o gráfico não é simples aqui. Uma informação adicional pode ser obtida observando-se que, de

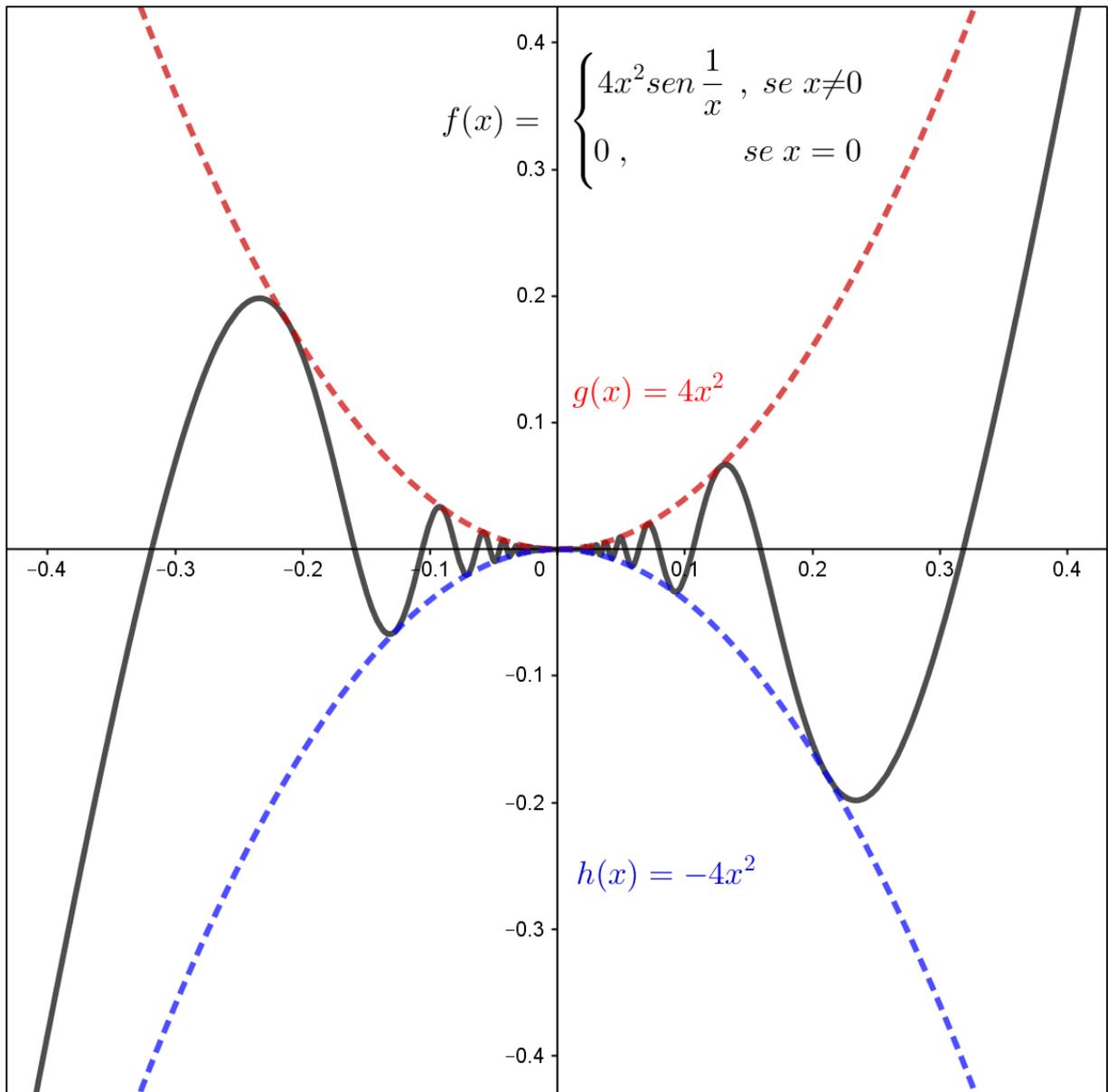
$$|f(x)| = \left| 4x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = 4x^2 \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq 4x^2$$

Obtemos

$$h(x) = -4x^2 \leq f(x) \leq 4x^2 = g(x)$$

Na Figura 5 vemos o gráfico de f , na escala da Figura 3, juntamente com os gráficos das funções limitantes g e h .

Figura 5 – Gráfico da mesma função da Figura 3 com as funções limitantes g e h .



Fonte: O autor.

O fato de que o gráfico da função f está “ensanduichado” entre os gráficos das funções quadráticas h e g torna mais aceitável, intuitivamente, que f seja derivável em $x = 0$, e que a sua derivada seja igual a zero nesse ponto. Mas essa derivada não pode ser obtida através de regras de derivação, derivando f para $x \neq 0$ e calculando o limite dessa derivada em $x = 0$, pois essa derivada não é contínua nesse ponto. A única maneira de se obter a derivada aí é através da definição de derivada em um ponto.

A experiência lecionando Cálculo (de funções reais de uma variável real) usando o livro de M. Spivak mostrou-me como os *processos de visualização* podem influenciar o ensino e a aprendizagem de matemática.

Em 1994 o Colegiado do Curso de Matemática da UFSC aprovou uma reforma curricular “radical”, comparando com os currículos de outras universidades, principalmente para a licenciatura, com a introdução de diversas disciplinas “básicas” e a retirada de outras mais avançadas.

A partir do ano de 1996 assumi a tutoria do PET Matemática da UFSC, cargo que ocupo até o momento. Por uma questão de coerência e de compromisso com o Curso de Matemática, passei a lecionar então somente disciplinas do Curso (licenciatura e bacharelado). Na maior parte do tempo, e cada vez mais, lecionei as disciplinas de geometria “básica”, das primeiras fases do Curso: Geometria Quantitativa I, Geometria Quantitativa II e Geometria Euclidiana (mais teórica e com rigor matemático). A primeira delas, apesar do nome, tornou-se, em minha docência durante a primeira década do ano 2000, mais qualitativa (sintética) do que quantitativa. Foi uma escolha pessoal e intuitiva, desviando-se um pouco do programa da disciplina, porém baseada em minha experiência de docência em Geometria até aquele momento. Foi uma ação de *insubordinação criativa*, embora eu não o soubesse àquela época, pois esse movimento ainda não havia sido desenvolvido e exposto no Brasil (D’AMBROSIO; LOPES, 2015). Eu entendia, e ainda entendo, que no início de um curso clássico de Geometria Euclidiana para futuros professores do Ensino Básico (licenciatura), quando são apresentados os primeiros objetos geométricos, uma ampla exploração de suas propriedades se faz necessária. Essa exploração, de ordem qualitativa, exige algum tipo de prova, ou justificativa, mas não necessariamente um formalismo excessivo e rigor absoluto (BALACHEFF, 1987; DUVAL, 1991; LAKATOS, 1998). Sugeri ainda, em uma pequena reforma curricular que fizemos posteriormente, que problemas de construção geométrica constassem do programa da disciplina Geometria Quantitativa I e, como consequência, as disciplinas Desenho Geométrico I e II foram reduzidas a uma única disciplina.

Em 1998 iniciamos a Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina, sob minha coordenação e com a participação de um grupo de professores do Departamento de Matemática e do PET Matemática. Decidimos manter o padrão das últimas fases da Olimpíada Brasileira de Matemática e de outras olimpíadas internacionais com a aplicação de problemas “originais”. Um amplo exercício de criatividade ocorria a cada ano pelo grupo de professores. No meu caso, passei a me concentrar, cada vez mais, em problemas de geometria.

Um novo fator surgiu na década de 90 e que veio a influenciar muito a criação de problemas em geometria e que está presente em todo este trabalho: os Softwares de Geometria Dinâmica (SGD). Meu primeiro contato com um desses softwares foi com o Cabri Géomètre, de Jean-Marie Laborde e Franck Bellemain da Université Joseph Fourier de Grenoble, França (BELLEMAIN, 1992). Posteriormente surgiu o GeoGebra de Markus Hohenwarter (Linz, Áustria), de livre distribuição. Percebendo a importância de um SGD no ensino e aprendizagem de geometria, passei a utilizar, a partir de 2012, o GeoGebra em todas as minhas aulas e a solicitar de meus estudantes trabalhos com esse software.

As minhas orientações em trabalhos de conclusão de curso (quase todas em geometria), as aulas de geometria e os “problemas olímpicos” me levaram a questionar o significado na Educação Matemática da criação de problemas em geometria ou, mais geralmente, da criação de problemas em matemática, se é que havia algum significado. Em 2015 ingressei como aluno no Programa de Pós-Graduação em Educação científica e Tecnológica (PPGECT) da UFSC. Haveria ainda uma longa trajetória a ser percorrida.

Quero deixar claro aqui que nunca ministrei aulas no Ensino Básico (exceto uma vez, em 1973, em que lecionei aulas de laboratório de química para alunos do Ensino Médio de uma escola particular). A minha experiência é com o Ensino Superior (40 anos). A maior parte dos trabalhos nacionais e internacionais sobre criatividade em matemática aborda, como será visto nos próximos capítulos, o Ensino Básico. Se há algum sentido em tudo isso, se a criatividade em matemática tem alguma importância na formação de estudantes, então é preciso começar nas origens, na aprendizagem dos alunos do Ensino Fundamental, ou na formação do professor. A opção que tenho é começar no ensino e aprendizagem no Ensino Superior com os futuros professores. O sujeito desta tese é o professor de matemática em formação.

1.2 CRIATIVIDADE EM GEOMETRIA: VISUALIZAÇÃO, INTUIÇÃO E PROCESSOS DE DESCRIÇÃO

Neste trabalho pesquisamos a criatividade em matemática, com recorte para a Geometria e sob o ponto de vista educacional. Deixando de lado, por um momento, uma discussão mais aprofundada sobre o que é criatividade em matemática, vamos assumir que “ela” (esse construto) se manifesta nos processos de resolução e de invenção de problemas de matemática. Segundo Mann (2006), escrevendo especificamente sobre o desenvolvimento do talento em matemática, criatividade é a essência da matemática: “A essência da matemática

consiste em pensar criativamente e não simplesmente chegar à resposta certa” (MANN, op. cit., p.239, tradução nossa). É claro que há muito mais do que isso e veremos, no capítulo 2, como filósofos, psicólogos, educadores e matemáticos abordam essa questão.

A escolha da Geometria para esta pesquisa foi pessoal, como explicado na seção anterior, e baseada em nossa experiência em lecionar essa área da matemática para as turmas de Licenciatura (e também Bacharelado) do Curso de Matemática da UFSC. Essa experiência nos tem mostrado também que os estudantes chegam ao nível superior com falhas e obstáculos em sua formação em Geometria. Isso se deve a uma formação deficiente do professor nessa área, tanto para o docente dos anos iniciais do Ensino Fundamental, como para o docente dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, o que tem causado uma certa insegurança por parte do docente em trabalhar conteúdos desse campo, relegando-os, muitas vezes, para o final do ano quando já não há mais tempo (ALMOULOU et al., 2004; LORENZATO, 1995). As poucas oportunidades de uma formação continuada dos professores e os problemas atuais de indisciplina em sala de aula possivelmente também contribuem para essas falhas. As perguntas dos alunos também podem incomodar o docente que não está preparado para responder aos “por quês” dos alunos: “Os professores detêm os conhecimentos necessários para responder aos POR QUÊS corretamente?” (LORENZATO, 1993, p.73). Além disso, a Geometria nos currículos escolares quase que desapareceu em todos os países devido ao movimento da Matemática Moderna dos anos 60: “A proposta da Matemática Moderna de algebrizar a Geometria não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior, criando assim uma lacuna nas nossas práticas pedagógicas, que perdura até hoje” (LORENZATO, 1995, p. 4). Esse movimento, que favoreceu a Álgebra em detrimento da Geometria, ou a “algebrização da geometria”, gerou também muitas críticas. Como escreveu Thom:

[...] os problemas clássicos de geometria apresentam uma grande gama de desafios. [...] Problemas de geometria exigem uma combinação de tempo, esforço concentração e poderes de associação [...] seria um grave erro esperar simplificar o aprendizado de matemática substituindo geometria por estruturas algébricas, que tem sido largamente e prematuramente ensinadas sem a motivação adequada. (THOM, 1998, p. 70, tradução nossa).

A lacuna nas práticas pedagógicas (no Ensino Fundamental – Anos Finais) a que se refere Lorenzato (1995) ocorre entre o ensino de geometria antes do movimento da Matemática Moderna (com um estilo definição-teorema-demonstração) e o “quase nada” de ensino de geometria após esse movimento. Alcançou-se assim uma situação paradoxal: os estudantes chegando à universidade para um Curso de Licenciatura em Matemática com falhas na

formação em geometria, e o currículo universitário do curso assumindo que esses estudantes estariam preparados para ir adiante. A Geometria Analítica e o Cálculo passavam a ser as primeiras disciplinas cursadas. Isso ocorria na maioria dos currículos dos cursos de matemática para licenciatura no Brasil, o que contribuía para a perpetuação desse ciclo de lacunas. Essa situação tem se modificado nos últimos 25 anos: no Curso de Matemática para Licenciatura da UFSC a geometria clássica foi introduzida no currículo em 1994, juntamente com algumas disciplinas “básicas”.

Qual o significado da geometria clássica na matemática? Ou melhor, qual a importância de estudar geometria, ou então quais as falhas na formação do aluno ao não estudar geometria? Segundo Lorenzato:

Na verdade, para justificar a necessidade de se ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida (LORENZATO, 1995, p. 5).

Duval (2012) chama a atenção para a grande originalidade dos problemas de geometria, em relação a outros problemas de matemática propostos aos alunos, por exigir um raciocínio que se desenvolve no registro da língua natural, mas referenciando-se a uma axiomática local (Euclides, Hilbert), conduzindo um tipo de discurso como se fosse uma língua formal. Dessa maneira, os problemas de geometria exigem uma forma de expressão não estritamente na língua natural, nem em línguas formalizadas. Essa originalidade de raciocínio, por si só, já justificam a importância de estudar geometria. Para Thom (1998);

[...] a geometria é um intermediário natural e possivelmente insubstituível entre a linguagem natural e o formalismo matemático [...] Desse ponto de vista, *o estágio [do ser humano] do pensamento geométrico pode ser um estágio que é impossível de se omitir no desenvolvimento normal da atividade racional humana* (THOM, 1998, p. 74, grifo nosso, tradução nossa).

Mas a geometria, e portanto, a criatividade em geometria, exige três tipos de processos cognitivos: processos de *visualização*, com relação à representação espacial e para a exploração heurística de situações complexas; processos de *construção* (com instrumentos) de configurações que servirão como modelos geométricos, representações de objetos geométricos; e o *raciocínio*, em relação aos processos discursivos para descrição e explicação (DUVAL, 1998, p.38). Em outro trabalho Duval (2002) afirma que representação e visualização são a

essência da compreensão em matemática. Enquanto que representação se refere a um amplo leque de atividades significativas (crenças em algo, maneiras de evocar e denotar objetos, como a informação é codificada), a visualização enfatiza imagens e a intuição empírica das ações e dos objetos físicos (DUVAL, 2002, p. 312). Ainda, segundo Duval, a *intuição* (matemática) é uma forma de compreensão intimamente relacionada com representação e visualização, e por consequência, com a criatividade matemática. Piaget (1961 apud DUVAL, 2002, p.312) afirmava a dificuldade de compreender o que era o que os matemáticos chamavam de intuição: “nada é mais difícil de compreender para um psicólogo o que os matemáticos chamam de intuição”.

Efraim Fischbein, convidado a dar uma palestra na 4th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (IGPME) em agosto de 1980 em Berkeley, que depois foi publicada (FISCHBEIN, 1982), discorre sobre vários aspectos da intuição matemática. Ele distingue o que chama de *intuições antecipatórias* (ou esquemas antecipatórios, ou *insight* – da *Gestalt* - ou pensamento intuitivo), que são aquelas relacionadas à resolução de problemas, das *intuições afirmatórias*, relacionadas à simples aceitação de certas noções, representações e interpretações – evidência intuitiva. Parece-nos que os postulados de Euclides seriam intuições afirmatórias (de onde Euclides tirou sua reta, ou sua régua? De um fio de prumo, ou da linha do horizonte, tão familiar para os gregos?). Fischbein diferencia intuição, uma forma específica e derivada de conhecimento, da percepção, que parece ser a própria realidade e não mera aparência. Ele ainda destaca que há dois caminhos básicos para o conhecimento: o analítico e o intuitivo. A esse respeito, Poincaré afirmava que havia dois tipos de matemático, o analista e o geômetra (ao qual ele se dizia pertencer), e que os geômetras trabalhavam mais com a intuição: “Alguns, são antes de tudo preocupados com a lógica [...] os outros se deixam guiar pela intuição e fazem o primeiro passo para conquistas rápidas, mas algumas vezes precárias, como destemidos cavaleiros de vanguarda” (POINCARÉ, 1889b, p. 115, tradução nossa). Em um artigo um pouco anterior, no primeiro número do *L'Enseignement Mathématique*, Poincaré escrevia:

O objetivo principal matemático é desenvolver certas faculdades do espírito, e entre elas a intuição não é a menos preciosa. É através dela que o mundo matemático permanece em contato com o mundo real [...] para o próprio geômetra puro essa faculdade é necessária; *é pela lógica que se demonstra, mas é pela intuição que se cria* (POINCARÉ, 1889a, p. 160-161, grifo nosso, tradução nossa).

Já o matemático francês Émile Borel, contemporâneo de Poincaré, escreveu na mesma época: “[...] o objetivo essencial do ensino de matemática, do ponto de vista da formação do

espírito, tem sido desenvolver as qualidades lógicas. Esse objetivo deve permanecer, mas não deve ser o único: o ensino de matemática deve desenvolver também as qualidades da intuição” (BOREL, 1907, p.283).

Por fim, e no que diz respeito também à criatividade em matemática, Duval (2003) discorrendo sobre os processos de visualização, raciocínio e descrição, colocando este último em primeiro lugar na aprendizagem matemática ressalta:

[...] as tarefas de descrição são fundamentais para a aquisição do conhecimento científico: eles contribuem para a obtenção ou para a descoberta de novos dados, base de todo desenvolvimento do conhecimento. Em seguida, as tarefas de descrição mobilizam os processos cognitivos de representação que são heterogêneos, e elas requerem, por outro lado, sua coordenação (DUVAL, 2003, p. 15, tradução nossa).

Duval destaca a importância, nesse trabalho, das tarefas de descrição na formulação de conjecturas. Iremos explorar esse lado com mais detalhes no capítulo referente à fundamentação teórica.

1.3 PROBLEMA PRELIMINAR DE PESQUISA

Nosso primeiro contato com a bibliografia sobre criatividade em matemática foi através de um artigo de Edward Silver (1994). Por meio desse artigo sabemos que o termo usado em inglês para “criação de problemas” era *problem posing* e, por sua ampla lista de referências, passamos a conhecer os trabalhos de Kilpatrick (1987) e de Brown & Walter (2005), que cunharam o termo em inglês. Um pouco depois tive notícia da tese de doutorado e da tese de livre docência de Luiz Roberto Dante, textos aos quais não tive acesso⁷. Foram poucos os trabalhos sobre criatividade encontrados em língua portuguesa, exceto, posteriormente, a tese de doutorado de Gontijo (2007) e mais alguns trabalhos do mesmo autor.

Para um começo de pesquisa, não tínhamos muita informação e material para trabalhar. Porém, como já estávamos trabalhando nessa direção (de criação em matemática), acreditávamos que deveria haver mais pesquisadores da área de Educação Matemática expondo suas ideias.

A formulação inicial do problema de pesquisa se deu através de algumas perguntas gerais:

⁷ DANTE, Luiz Roberto. **Incentivando a criatividade através da Educação Matemática**. Tese (Doutorado em Psicologia Educacional)- PUC_SP, São Paulo, 1980.

DANTE, Luiz Roberto. **Criatividade e resolução de problemas na prática educativa de matemática**. Tese (Livre Docência) - IGCE-UNESP, Rio Claro, 1988.

- 1) Todas as pessoas são criativas?
- 2) É possível estimular a criatividade em nossos estudantes?
- 3) Se for possível estimular essa criatividade, como fazê-lo?

Essas perguntas formariam nosso núcleo de investigação, mas seria necessário uma ampla revisão bibliográfica, não somente sobre criatividade em matemática, mas também sobre a filosofia e a psicologia da criatividade. Em paralelo, começamos a desenvolver um trabalho mais específico com estudantes universitários, sem saber ainda exatamente que metodologia empregar. Com a orientação da tese, por parte do Dr. Mércles Thadeu Moretti, entramos em contato com os trabalhos de Duval sobre a teoria dos registros de representação semiótica (DUVAL, 2004) e pudemos, com maior clareza, estabelecer o problema de pesquisa, que será exposto no próximo capítulo.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho do está estruturado em oito capítulos. Além desta introdução teremos, o capítulo dois em que apresentaremos algumas seções com uma revisão bibliográfica sobre a criatividade do ponto de vista dos filósofos, dos psicólogos, dos matemáticos e dos educadores matemáticos. Definições de criatividade, pensamento divergente e convergente, se a criatividade é um construto de domínio geral ou se é de domínio específico, serão alguns dos conceitos abordados aqui. A importância da criatividade no ensino e na aprendizagem de matemática, segundo vários autores da Educação Matemática, será exposta aqui. Na última seção do capítulo apresentaremos o nosso problema de pesquisa bem delineado.

No capítulo três discorreremos sobre a Geometria: dificuldades dos estudantes com geometria; geometria sintética versus geometria analítica; visualização, prova e argumentação em geometria; rigor versus intuição.

No capítulo quatro discutiremos os softwares de geometria dinâmica (SGD) - potencialidades e limitações; potencial semiótico de um SGD; gênese de problemas em geometria, com vários exemplos, alguns em parceria com estudantes em trabalhos de conclusão de curso e outros de nossa autoria utilizados em aulas da disciplina de Geometria quantitativa I do Curso de Matemática da UFSC.

No capítulo cinco apresentaremos os referenciais teóricos que fundamentarão nosso trabalho e justificará nossa metodologia.

No sexto capítulo será apresentada a metodologia e alguns procedimentos de trabalho, com propostas de fontes de problemas em geometria, de onde partir e o que sugerir para os estudantes (problemas estruturados ou problemas semi-estruturados).

No capítulo sete descreveremos alguns experimentos com os estudantes. Serão basicamente dois experimentos, um com turmas da disciplina de Geometria Quantitativa I e outro com um grupo de estudantes voluntários e com interesse particular em geometria.

Por último, no capítulo oito faremos nossas considerações finais e apresentaremos algumas ideias sobre uma possível continuação deste trabalho.

2 CRIATIVIDADE SEGUNDO FILÓSOFOS, PSICÓLOGOS, MATEMÁTICOS E EDUCADORES MATEMÁTICOS – UMA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE CRIATIVIDADE

Criatividade, com um sentido de “imaginação”, “expressão”, “inspiração” ou “emoção” tem sido historicamente abordada de uma maneira geral, por filósofos da antiguidade e da era moderna. Segundo Platão, a inspiração é uma espécie de loucura e para Kant criatividade e imaginação (a faculdade de intuir mesmo quando um objeto não está presente) estão relacionadas (PAUL; KAUFMAN, 2014, p. 3) . Gaut (2010) observou que poucos trabalhos sobre criatividade foram escritos por filósofos na segunda metade do século XX, mas que o mesmo não se podia dizer dos psicólogos.

Durante os anos de 1905 e 1908 foi realizada pela revista de Genebra *L'Enseignement Mathématique* uma pesquisa (com questionários) por dois psicólogos suíços, Théodore Flournoy e Édouard Claparède, sobre o método de trabalho dos matemáticos. Essa pesquisa foi posteriormente compilada e publicada por completo por Henri Fehr, um dos fundadores e diretor da revista (FEHR, 1908). Nela os dois psicólogos tentavam descobrir e analisar como pensavam os matemáticos da época. No mesmo ano de 1908 o matemático francês Henri Poincaré profere uma palestra, no dia 23 de maio, no *Institut Général Psychologique*, intitulada *L'Invention Mathématique* publicada em seguida, sob sua autorização, na *L'Enseignement Mathématique* (POINCARÉ, 1908). Poincaré escreve, prevendo a atenção que os psicólogos dedicariam à criatividade no futuro, logo na primeira frase de seu artigo:

A gênese da invenção matemática é um problema que deve inspirar o mais vivo interesse ao psicólogo (POINCARÉ, 1908, p. 347, tradução nossa).

Nesse trabalho Poincaré relata com detalhes as etapas de seus processos mentais relacionados com a descoberta das funções Fuchsianas (automórficas) e esse artigo é considerado um dos primeiros verdadeiros esforços para se explicar o processo de intuição ou da criação matemática (HERSCH, 2011). Poincaré descreve essas etapas como um período de trabalho árduo e consciente seguido de outro período em que o problema é deixado de lado (trabalho inconsciente), ocorrendo depois uma “iluminação”, e por fim, uma etapa de verificação. Em 1926 o cientista político Wallas analisa essas etapas denominando-as: preparação (trabalho consciente), incubação (trabalho inconsciente), iluminação e verificação (WALLAS, 2014, p. 37-55). De todas essas etapas, a iluminação parece ser a mais misteriosa.

A esse respeito, Liljedahl se pergunta: “Qual é a natureza da iluminação em matemática, ou seja, o que coloca a iluminação à parte de outras experiências matemáticas?” (LILJEDAHN, 2013, p. 253, tradução nossa).

Em 1943 o matemático francês Jacques Hadamard profere uma série de palestras na *École Libre des Hautes Études* em New York, em seguida publicadas como um livro, tratando da psicologia da criação no campo da Matemática:

Por outro lado, nosso título é “A psicologia da invenção no campo da matemática”, e não “Psicologia da invenção matemática”. É interessante lembrar que a invenção matemática não é mais que um caso de invenção em geral, um processo que pode ocorrer em vários domínios, seja em ciência, literatura em arte e também em tecnologia (HADAMARD, 1944, p. xi, tradução nossa).

Hadamard acrescenta ainda, ressaltando o duplo caráter da invenção matemática:

[...] o que quero dizer é o fato de que o assunto envolve duas disciplinas, psicologia e matemática, o que necessita, para ser adequadamente tratado, que a pessoa seja tanto um psicólogo como um matemático (HADAMARD, 1944, p. 1, tradução nossa).

Tanto Poincaré como Hadamard referiam-se ao processo de criação do pesquisador, embora Hadamard escrevesse, já indicando um possível viés educacional:

Entre o trabalho do estudante que tenta resolver um problema em geometria ou álgebra e o trabalho de criação, pode-se dizer que existe apenas uma diferença em grau, uma diferença de nível, ambos os trabalhos sendo de natureza semelhante (HADAMARD, 1944, p. 104, tradução nossa).

Essa semelhança é reafirmada posteriormente em 1977 por Karl Popper e John Eccles⁸ *apud* Singer, Ellerton e Cai (2013, p. 1) que, trabalhando em conjunto para tentar explicar o processo de descoberta científica, concluem “que o processo de *compreensão* e o processo real de produção ou descoberta de teorias, leis científicas etc são muito parecidos. Ambos são processos de elaboração e verificação”.

Os trabalhos da primeira metade do século XX citados acima são os primeiros sinais do interesse que a criatividade despertaria entre os psicólogos. Estranhamente pouco mais foi escrito sobre esse assunto nesse meio século. Foi Guilford (1950, p. 445), em sua palestra inaugural como presidente da *American Psychological Association*, que chama a atenção de seus colegas para a negligência dos psicólogos em tratar do tema. Guilford examinou o índice do *Psychological Abstracts* em cada ano até aquele momento e encontrou que, do total de aproximadamente 121.000 títulos publicados naqueles 23 anos, apenas 186 (0,15 %) abordavam o tema da criatividade. Nos anos que se seguiram após a palestra de Guilford muitos

⁸ POPPER, K. R., ECCLES, J. A. The self and its brain: An argument for interactionism. Berlin: Springer, 1977.

trabalhos começaram a ser publicados sobre o tema (RHODES, 1961, p. 306). O estado da arte no assunto é bem amplo e relataremos aqui alguns trabalhos dos mais importantes (mais citados) pesquisadores em criatividade. Seus trabalhos estabeleceram diversas definições de criatividade, destacaram seus componentes e desenvolveram teorias e tipos de criatividade.

Segundo Weisberg (2006, p. 95-96) foi Guilford na década de 50 do século passado quem cunhou os termos *pensamento divergente* e *pensamento convergente* para explicar o pensamento criativo. O pensamento divergente é aquele que rompe os laços com o passado, divergindo do antigo e produzindo numerosas e novas ideias que irão alimentar o pensamento convergente, e este selecionará essas ideias para torná-las em algo produtivo. Tarefas “com final aberto” (*open-ended* em inglês), que são aquelas que permitem ou solicitam diversas ideias, são estimulantes para o uso do pensamento divergente. Essas ideias podem ser categorizadas segundo: (i) *fluência*, que corresponde a um grande número de ideias em um mesmo nível; (ii) *flexibilidade*, que indica ideias variadas, em níveis distintos; e (iii) *originalidade*, que corresponde a ideias não usuais (RUNCO, 1993, p. xiii).

O termo “com final aberto”⁹ para problemas relativos ao ensino de matemática foi introduzido por Shimada¹⁰ apud KOSYVAS (2010, p.45-46) nos anos 70 e tinha por objetivo reformar o ensino de matemática com abordagens abertas na prática de ensino. Durante os anos de 1993 a 1996 o grupo de discussão PME (Psychology of Mathematics Education) sobre o tema “O que é um problema com final aberto em Matemática?” estabeleceu os seguintes tipos de problemas como “problema com final aberto”: “*investigations*”, “*problem posing*”, “*real life situations*”, “*projects*”, “*problems without questions*”, “*problem variations*” (“*what if method*”) e “*problem fields*” (ou “*problem sequences*”)¹¹.

Um problema com final aberto pode ser explicado através do seu oposto: um problema é dito fechado se tanto a situação inicial como a situação final são fechadas, isto é, estão exatamente definidas. Caso contrário, o problema é dito com final aberto. Pehkonen propôs usar o termo “problema em aberto” como uma classe contendo todos os tipos de problemas descritos acima (PEHKONEN, 1997, p. 8). A Figura 6 esquematiza as possíveis situações, inicial e final, sobre os problemas.

⁹ Para diferenciar o termo “aberto”, usado em pesquisa matemática, dos termos com enfoque aberto no ensino de matemática.

¹⁰ SHIMADA, S. **Open-ended approach in arithmetic and mathematics. A new proposal towards teaching improvement.** Tokyo: Mizuumishobo, 1977.

¹¹ Tradução: “investigações”, “criação/formulação de problemas”, “situações da vida real”, “projetos”, “problemas sem perguntas”, “variações de problemas” (método “e se”) e “problemas de várias áreas” (ou “problemas sequenciais”).

Figura 6- Problemas fechados e em aberto.

Situação final	FECHADO (isto é, exatamente definido)	EM ABERTO
Situação inicial		
FECHADO (isto é, exatamente definido)	Problemas Fechados	Problemas de final aberto situações reais investigações problemas de campo variações de problemas
EM ABERTO	situações reais variações de problemas	situações reais variações de problemas projetos criação de problemas (problem posing)

Fonte: Pehkonen, 1997, p. 9.

Segundo Boden (2004, p. 1-2) criatividade é a habilidade de produzir ideias e artefatos que são novos, surpreendentes e úteis. A condição de originalidade no entanto pode ser contestada. Boden difere entre *criatividade histórica* (quando ninguém teve certa ideia antes) e *criatividade psicológica* (uma ideia original para um indivíduo). Uma distinção semelhante é dada por Beghetto&Kaufman¹² apud Papaleontiou-Louca et al (2014, p. 132): criatividade “grande C” (nível de pessoas eminentes ou gênios) e criatividade “pequeno c” (criatividade comum). É esta última (psicológica) que justifica o estímulo à criatividade na educação. Em seu artigo com extensa bibliografia Papaleontiou-Louca et al afirmam:

Assim, a criatividade pequeno c parece particularmente apropriada a Educação Superior, onde sua prioridade deve ser encorajar todos os estudantes a alcançar seu pleno potencial [...] Portanto, argumentamos aqui que a criatividade na educação é não somente essencial, mas também vital para promover a oportunidade de nossos estudantes de estender seus conhecimentos e dar-lhes a chance e a possibilidade de criar novos conhecimentos e ideias (PAPALEONTIOU-LOUCA et al, p. 133, 2014, tradução nossa).

Csikszentmihalyi (1996) dá um enfoque sociocultural à criatividade com seu modelo de sistemas e apresenta três fatores importantes para que a criatividade ocorra: um domínio (cultura) que contém regras simbólicas, um indivíduo (que aporta novidade para o domínio

¹² BEGHETTO, R. A., KAUFMAN, J. C. Beyond bis and litle: The Four C model of creativity. **Review of General Psychology**, vol 13, p. 1-12, 2009.

simbólico) e um campo (sociedade) formado por *experts* que reconhecem e validam a inovação em um meio de aprendizagem.

Para o psicólogo John Baer, criatividade é um construto de *domínio específico* e não de domínio geral, ou seja, as pessoas são criativas em seus domínios de conhecimento (BAER, 2016). Em seu livro ele pergunta: “Que diferença faz se a criatividade é de domínio geral ou de domínio específico? [...] Quais são as implicações educacionais?” (BAER, 2016, p. 5, tradução nossa). Mais adiante Baer escreve: “O objetivo [dessas questões] é contemplar a possibilidade de que a criatividade possa ser mais como uma habilidade [“*expertise*”] do que inteligência, que ela possa ser seja muito mais de domínio específico do que de domínio geral, e evidenciar o que isso possa significar” (BAER, 2016, p. 6, tradução nossa).

Pólya foi um dos pioneiros a abordar a questão realmente do ponto de vista da Educação Matemática, tanto no que se refere aos processos criativos (PÓLYA, 1954), como na resolução de problemas (PÓLYA, 1957). Kilpatrick, discípulo de Pólya, foi mais incisivo no que se refere à criação/invenção de problemas por parte dos estudantes em sala de aula:

A formulação de problemas é uma importante acompanhante da resolução de problemas. No entanto ela tem recebido pouca atenção nos currículos dos cursos de matemática. Professores e estudantes igualmente assumem que os problemas estão simplesmente lá, como montanhas a serem escaladas [...] A formulação de problemas deve ser vista não somente como um objetivo de instrução, mas também como um meio de instrução (KILPATRICK, 1987, p. 123, grifos nossos, tradução nossa).

E acrescenta:

A experiência de descobrir e criar seus próprios problemas deveria ser parte da educação de todo estudante. Pelo contrário, ela é uma experiência que poucos estudantes têm hoje em dia – exceto talvez se eles forem candidatos a graus avançados em matemática [...] Pesquisadores, como os professores, tendem a ignorar os processos de criação e formulação de problemas. Como Getzels (1979) observou, ‘embora haja dúzias de referências teóricas, centenas de instrumentos psicométricos, e literalmente milhares de estudos empíricos sobre resolução de problemas, dificilmente se encontra um trabalho sistemático sobre criação de problemas’ [...] A pesquisa pode nos ajudar a entender alguns processos de formulação de problemas, mas não pode-nos dar um panorama completo até que mais pesquisadores (em educação) olhem para a formulação de problemas em situações em que um problema ainda não tenha sido proposto (KILPATRICK, 1987, p.134, grifos nossos, tradução nossa).

Por outro lado, Feyerabend (1987, p. 701) analisando o papel da criatividade nas ciências, critica a visão de que nossa cultura necessita de criatividade individual.

O mito da criatividade como uma iluminação, alcançável apenas por uns poucos ‘gênios’ é pouco a pouco desbancado e, na última década do século XX, Silver escreve:

Uma nova visão de criatividade tem surgido de pesquisas contemporâneas – uma visão que se contrapõe em agudo contraste com a visão do gênio. Essas pesquisas sugerem que a criatividade está intimamente relacionada com um saber profundo e flexível em domínios específicos; ela está frequentemente associada com longos períodos de trabalho e de reflexão ao invés de um raciocínio (*insight* no original) rápido e excepcional; *além disso, ela é suscetível a influências instrucionais e experimentais*. A visão contemporânea de criatividade também sugere que pessoas que são criativas em um domínio demonstram possuir uma disposição criativa ou uma orientação à sua atividade nesse domínio. Isto é, a atividade criativa resulta de uma inclinação a pensar e a se comportar criativamente. *Essa nova visão de criatividade fornece uma fundamentação muito mais forte para construir aplicações educacionais. De fato, essa visão sugere que uma formação rica em criatividade deva ser apropriada para uma larga faixa de estudantes, e não meramente para uns poucos indivíduos excepcionais* (SILVER, 1997, p. 75-76, grifos nossos, tradução nossa).

Sternberg, um psicólogo da área da psicologia cognitiva que vem analisando e estudando a natureza da criatividade em geral afirma, em sua “teoria de investimento em criatividade”, que a criatividade resulta da confluência de seis recursos: habilidade intelectual, conhecimento, estilos de pensamento, personalidade, motivação e ambiente (STERNBERG, 2006, p. 88). Entendendo criatividade como uma atitude de decisão, Sternberg sugere que ela pode ser desenvolvida no âmbito educacional:

Criatividade, de acordo com a teoria de investimento, é em grande parte uma decisão. *A visão de criatividade como uma decisão sugere que a criatividade pode ser desenvolvida [...] Criatividade é tanto uma decisão a respeito e uma atitude sobre a vida quanto uma questão de habilidade. A criatividade é frequentemente óbvia em crianças pequenas, mas ela pode ser difícil de se encontrar em crianças maiores ou em adultos porque seu potencial criativo foi suprimido por uma sociedade que encoraja a conformidade intelectual [...] Podemos ensinar os estudantes a pensar de forma mais criativa [...] Motivando este trabalho está a crença de que os sistemas em muitas escolas tendem a favorecer as crianças com potencial em memória e habilidades analíticas* (STERNBERG, 2006, p.90-93, grifos nossos, tradução nossa).

As referências citadas acima indicam a necessidade, e a possibilidade, de estimular a criatividade matemática no meio educacional (BRASIL, 1997, 1998, 1999). Mais recentemente, a Base Nacional Comum Curricular, nas Competências Gerais da Educação Básica descreve:

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2018, p. 9).

Isso exige que o professor (pedagogo, licenciado – Ensino Superior) esteja preparado e tenha consciência de uma atitude criativa. Essa atitude implica em um “custo”, um redirecionamento do currículo, ou uma atitude independente, de rompimento com o estabelecido, porém responsável, “...em prol da melhoria e do bem estar da comunidade educacional de modo a preservar princípios éticos, morais e de justiça social” (LOPES;

D'AMBROSIO, 2015, p. 2). Craft (2003, p.115-116) estudando os dilemas do professor e as limitações da criatividade em sala de aula afirma que a criatividade pode ser ensinada.

As atividades de criação de problemas em sala de aula podem se inserir em uma abordagem educacional mais ampla que é aquela das investigações em sala de aula. Neste aspecto encontramos várias referências em língua portuguesa (PONTE et al, 2003; SERRAZINA, 2002; GALVÃO et al, 2017). Gontijo et al (2019) apresentam um importante texto atual sobre criatividade em matemática. A abordagem investigativa para o ensino de matemática requer uma atitude crítica, tanto no estudo de conceitos, como na resolução de problemas e na (re)descoberta de propriedades ou criação de problemas.

Algumas estratégias de abordagem na criação de problemas têm sido propostas por alguns autores. Brown e Walter (2005) sugeriram a estratégia WIN (“*what if not?*”) que consiste em listar e modificar certos atributos dos problemas criando assim novos problemas. Pólya (1957) sugeriu a estratégia “*looking back*”, ou formular um problema mais simples.

O filósofo Berys Gaut, em uma artigo recente sobre a atitude de ensinar por meio de criatividade, argumenta positivamente sobre a seguinte afirmação: “Pode-se ensinar *algumas* pessoas a serem *mais* criativas” (GAUT, 2014, grifos do autor, tradução nossa). É principalmente com essa visão que desenvolveremos nosso projeto de pesquisa.

2.2 PROBLEMA DE PESQUISA DEFINITIVO E OBJETIVOS

Considerando os diversos pontos de vista sobre criatividade em geral e criatividade em matemática, pretendemos responder em nosso problema de pesquisa: quais métodos podem ser elaborados de modo a levar os estudantes de Licenciatura em Matemática a serem mais criativos na resolução e na criação de problemas em geometria?

O *objetivo geral* deste trabalho é, como dito no parágrafo anterior, proporcionar meios e desenvolver métodos para que os estudantes de Licenciatura em Matemática se tornem mais criativos. O *objetivo específico* é realizar esse trabalho na área de geometria, com um forte apelo para a intuição.

3 GEOMETRIA

Neste capítulo iremos nos aprofundar um pouco mais em diversos aspectos da geometria: processos de visualização e as dificuldades que podem surgir ao se trabalhar com a representação figural, geometria analítica versus geometria sintética, argumentação e demonstração, rigor matemático e intuição, axiomas de Euclides versus axiomas de Hilbert.

3.1 GEOMETRIA E VISUALIZAÇÃO

A palavra geometria deriva do grego *γεωμετρία*, que significa medição de terra. O historiador grego Heródoto (século V AC) usou a palavra em sua obra épica *Histórias*, parte sobre as guerras pérsicas (grego-pérsicas ou médicas), referindo-se aos antigos egípcios que faziam uma distribuição justa de terras entre seu povo, após as inundações anuais do rio Nilo. Apesar de que resultados de geometria já fossem conhecidos pelos povos mesopotâmicos há cerca de 5000 anos atrás, foi com a civilização grega antiga que o estudo sistemático da geometria começou a ocorrer, com o uso do método dedutivo que conhecemos hoje. Mas foi aí também que começou a ocorrer a discussão sobre a existência das formas geométricas, o que nos levou à noção de representação atual. Platão (427-348 AC) supunha que as *formas* tinham uma vida independente no mundo das ideias, o qual ele assumia ser real. Seu mais importante discípulo, Aristóteles (384-322 AC), passou a distinguir o mundo real e o mundo das ideias. Para ele, as figuras concretas existem no mundo real, enquanto as formas abstratas no mundo das ideias. Essa separação entre o concreto e o abstrato é uma das mais importantes heranças que os matemáticos atuais receberam dos filósofos gregos antigos (HANSEN, 1998, p. 12).

Não é nossa intenção aqui discorrer sobre toda a história da geometria, mas sim estabelecer algumas conexões visando a criatividade nessa área, em especial em geometria sintética (não desprezando a geometria analítica) e ressaltando os aspectos cognitivos e intuitivos que ela requer. Vamos nos posicionar então no começo do século XX, quando na França, país de conhecidos geômetras, é estabelecida a reforma matemática de 1902. Essa reforma não se referiu somente à geometria e foi “[...] fortemente apoiada por famosos matemáticos como Borel, Poincaré, Hadamard, Darboux, Tannery, Appell, Bourlet e outros que tomaram para si a elaboração e a negociação política do novo currículo[...]” (ARTIGUE, 1977, p. 478, tradução nossa).

Na década de 50 o currículo da matemática na França parecia obsoleto, surgindo uma nova reforma, a Nova Matemática, ou Matemática Moderna, termo que empregamos no Brasil. Essa reforma foi também apoiada por famosos matemáticos franceses, como Choquet, Dieudonné, Lichnerowicz e Revuz (ARTIGUE, op. cit.). Com essa reforma houve um excesso de formalismo e, na geometria, uma tendência “algebrizante”, com fortes reflexos no ensino e aprendizagem. A geometria passou quase a ser “esquecida” e, no Brasil, e em vários outros países, “deixada para o final”, como já foi comentado aqui no primeiro capítulo.

Com uma grande preocupação com o ensino da geometria nas escolas a International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) lançou em 1995 uma chamada de artigos para uma conferência a ser realizada em Catania, Itália, sobre as perspectivas do ensino da geometria para o século XXI (ICMI, 1995) e que resultou em um livro (MAMMANA; VILLANI, 1998) com 36 artigos de autores de várias partes do mundo. Um desses autores é Duval (1998), que faz uma abordagem da geometria do ponto de vista cognitivo em que os processos de visualização têm um papel crucial na exploração heurística dos problemas. Em geometria é muito importante considerar as maneiras de ver as figuras, e portanto, uma discussão sobre as diversas apreensões e sobre os olhares das figuras será considerada aqui (DUVAL, 2012).

Em matemática é necessário lidar com vários registros de representação e suas transformações e, em particular na geometria, com o registro figural. No entanto, tanto na resolução como na criação de problemas, o registro discursivo é fundamental para se poder expressar as ideias corretamente. *Ver* uma figura em geometria é uma atividade bem mais complexa comparada a um simples olhar e o reconhecer o que uma imagem nos mostra. Segundo Duval, os processos heurísticos de resolução de problemas em geometria estão associados a registros de representação espaciais originando formas de interpretações independentes: as apreensões perceptiva, discursiva, operatória e sequencial das figuras (DUVAL, 2012, p. 120).

Ainda segundo Duval (2012), a *apreensão sequencial* é exigida em atividades de descrição (capítulo 4), seja para a reprodução de uma dada figura no enunciado de um problema, seja para a construção geométrica como problema em si. Por exemplo, é comum encontramos problemas de geometria enunciados sem uma figura. O aluno precisa saber transpor para uma figura as hipóteses do problema. No caso de problemas de construção geométrica também encontramos problemas enunciados sem figuras. Aqui há uma grande diferença entre um problema de construção com os dados apresentados “no papel” (segmentos, ângulos etc.) e o problema enunciado em que o aluno escolherá os dados como quiser, mas deverá fazer uma análise *a posteriori* sobre todos os possíveis casos que o enunciado do problema implica.

As outras três formas de apreensão muitas vezes confundem-se entre si pelo fato das figuras serem consideradas apenas como um suporte para a demonstração. O desenvolvimento do raciocínio para a resolução (e a criação) de problemas em geometria depende da conscientização da distinção entre essas formas de apreensão das figuras e depende ainda de uma análise das funções cognitivas envolvidas na demonstração em geometria.

A *apreensão perceptiva* refere-se a um reconhecimento visual, imediato e automático da forma. Uma figura geométrica, segundo Duval (2012) “é uma organização de elementos de um campo perceptivo não homogêneo que constitui um objeto que se destaca deste campo”. Esses elementos, segundo as dimensões zero, um ou dois, são, respectivamente, *pontos*, *traços* (linhas) e *regiões*. Os pontos, os traços e as regiões caracterizam-se, respectivamente, pelo aspecto discreto, contínuo e pela forma ou contorno.

A organização perceptiva de uma figura segue a lei do fechamento e da continuidade, fazendo com que os traços que formam um contorno fechado se destaquem como uma figura sobre um fundo. Isso é importante em muitas figuras usadas pelos alunos mas, por outro lado, os impede de ver outras formas na figura. É aí que devemos considerar a *apreensão discursiva* de uma figura: uma interpretação necessariamente comandada pelas hipóteses.

Posteriormente ao artigo de Duval (2012), que na versão francesa original é de 1988, Laborde (1993) estabelece uma clara distinção entre figura e desenho:

Como representações materiais (desenhos) as figuras dão lugar a impressões visuais ao mesmo tempo que apontam para conceitos teóricos. Por conta deste papel dual, *desenho* e *figura* devem ser diferenciados. Um *desenho* refere-se a uma entidade material, enquanto que uma *figura* refere-se a um objeto teórico ou, nas palavras de Parzysz (1988, p. 80): ‘o objeto geométrico que é descrito pelo texto que o define’ (Laborde, 1993, p.49, tradução nossa).

Por outro lado, Fischbein (1993) estabelece a noção de *conceitos figurais* para dar conta dessa distinção entre figura e desenho:

Devemos considerar então três categorias de entidades mentais quando nos referimos a figuras geométricas: a definição, a imagem (baseada na experiência sensorial perceptiva com a imagem de um desenho) e o conceito figurado. O conceito figurado é uma realidade mental, é o construto utilizado pelo raciocínio matemático no domínio da geometria. Ele é isento de quaisquer propriedades sensoriais concretas (como cor, peso, densidade etc) mas apresenta propriedades figurais. Esse construto figurado é controlado e manipulado, em princípio sem resíduos, por leis lógicas e procedimentos no contexto de um sistema axiomático. A dificuldade em aceitar a existência desse terceiro tipo de entidade mental está determinada pelo fato de que estamos somente *diretamente* conscientes de representações mentais (incluindo várias propriedades sensoriais como cor) e o conceito correspondente. Nós necessitamos de um esforço intelectual para compreender que as operações lógico-matemáticas manipulam somente uma versão purificada da imagem, o conteúdo espacial-figurado da imagem (Fischbein, 1993, p. 148, tradução nossa).

Os problemas de geometria em que os enunciados são acompanhados de figuras podem gerar confusões e dificuldades para os alunos quando a combinação entre figura e enunciado não é semanticamente congruente¹³. Duval (2012) em seu artigo apresenta dois exemplos em que há a primazia exclusiva da apreensão discursiva e observa:

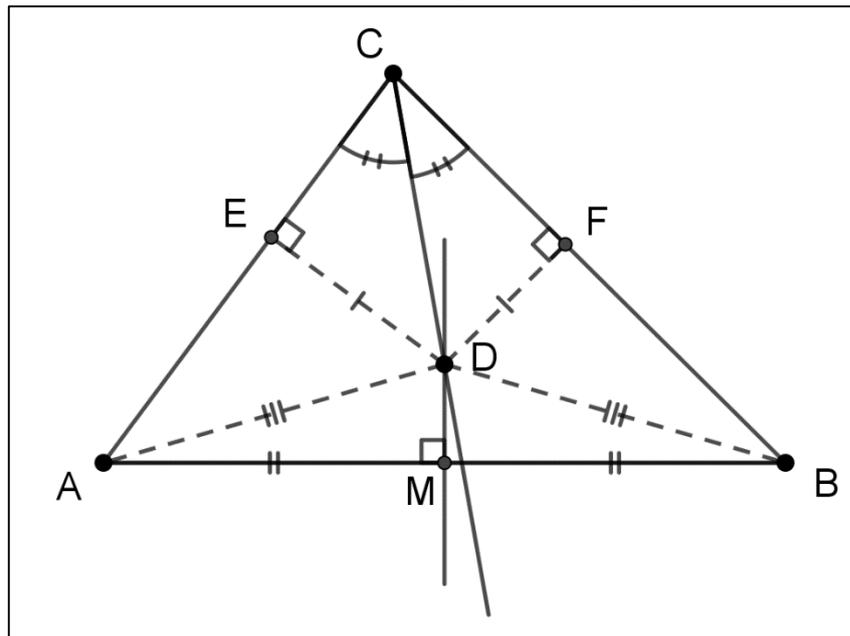
...os alunos se apegam, na grande maioria, à apreensão perceptiva: estes não se dão conta de que uma figura deve ser olhada não mais do que através ou em função das propriedades, ou das condições formuladas como hipóteses. Isto pode ser observado pelas suas atitudes diante de um problema: eles leem o enunciado, constroem a figura e, em seguida, concentram-se na figura sem retornar ao enunciado. Este esquecimento ou abandono do enunciado marca a ausência da atitude que chamamos de interpretação discursiva da figura. É por isso que os problemas que são acessíveis a estes alunos são aqueles cujos enunciados são semanticamente congruentes à figura construída ou a construir (Duval, 2012, p. 124-125).

Devemos lembrar que, embora Duval se refira a dificuldades, e apresente exemplos, dos alunos do Ensino Básico, os estudantes do Ensino Superior, com os quais estivemos trabalhando, carregam consigo essas mesmas dificuldades decorrentes do não esclarecimento das mesmas no Ensino Básico. Isso se torna mais grave ainda quando, em situação de demonstração, uma figura é apresentada, ou construída com falhas conceituais induzindo os estudantes ao erro. Abaixo apresentamos dois exemplos que mostram essas falhas.

Exemplo 1 - É o caso da conhecida “demonstração” da afirmação de que todo triângulo acutângulo é isósceles! Na figura da “demonstração”, em que se parte de um esboço (uma representação não exata) de um triângulo acutângulo qualquer (“sem perda de generalidade”), o ponto de intersecção da bissetriz de um ângulo interno de um triângulo com a mediatriz do lado oposto a esse ângulo é apresentado *no interior* do triângulo.

¹³ Segundo Duval (2004) a congruência semântica entre dois registros em uma conversão ocorre quando há correspondência semântica entre as unidades significantes de cada uma das representações.

Figura 7 - “Demonstração” da afirmação de que todo triângulo acutângulo é isósceles.



Fonte: O autor.

A “demonstração”, baseada na Figura 7, seguiria da seguinte maneira:

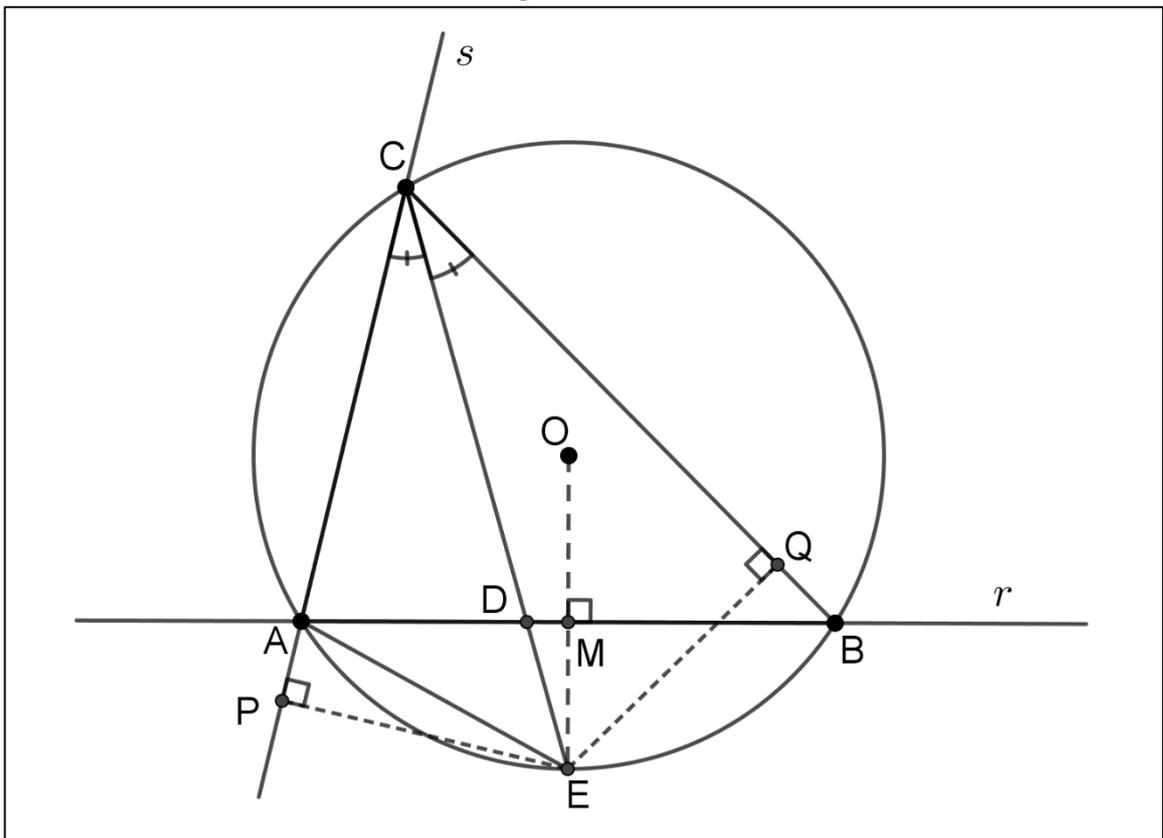
- O ponto D está na mediatriz do lado \overline{AB} do triângulo ΔABC . Então. $DA = DB$.
- O ponto D está na bissetriz do ângulo $\angle ACB$ do triângulo ΔABC e em seu interior. Então $DE = DF$.
- Segue que os triângulos retângulos ΔDEA e ΔDFB são congruentes (caso hipotenusa-cateto de congruência de triângulos retângulos). Como consequência dessa congruência, temos que $AE = BF$.
- Segue igualmente que os triângulos retângulos ΔDEC e ΔDFC são congruentes e, como consequência, temos que $EC = FC$.
- Dos dois passos anteriores obtemos: $AC = AE + EC = BF + FC = BC$. Logo, o triângulo ΔABC é isosceles.

Observemos que, “sem muito esforço”, poderíamos ainda justificar porque as projeções E e F do ponto D sobre as retas \overleftrightarrow{AC} e \overleftrightarrow{BC} , respectivamente, estão de fato nos lados \overline{AC} e \overline{BC} do triângulo e não coincidindo com suas extremidades (se, por exemplo, E coincidisse com o vértice A, então $90^\circ = \widehat{D\hat{A}C} < \widehat{B\hat{A}D} < 90^\circ$, e se o ponto A estivesse entre os pontos E e C, então $\widehat{D\hat{A}E} > \widehat{B\hat{A}E} > 90^\circ$ e o triângulo retângulo ΔDEA teria um ângulo obtuso).

O que está errado nessa argumentação? Conhecendo os resultados sobre ângulos inscritos em uma circunferência e sobre a mediatriz de uma corda nessa circunferência, é possível perceber que a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo nunca intersecta a

mediatriz do lado oposto a esse ângulo no interior do triângulo. Essa interseção ocorre, ou no lado oposto, portanto no ponto médio desse lado (e nesse caso, o triângulo é isósceles), ou ocorre no exterior do triângulo. Nesse último caso é também possível argumentar que a perpendicular traçada por esse ponto médio a um dos outros dois lados do triângulo intersectará a reta suporte desse outro lado em um ponto que não está no lado do triângulo. Isso destrói completamente o argumento usado na “demonstração”. Mas essa percepção só é possível se olharmos a figura “completando-a” usando a circunferência circunscrita ao triângulo, por meio das modificações mereológicas de reconfiguração e mergulhamento (DUVAL, 2012, p. 127). Na Figura 8 é possível “ver” como isso ocorre (embora, com mais rigor, seria preciso provar que o vértice do ângulo do qual se traça a bissetriz e o outro ponto de interseção dessa bissetriz com a circunferência estão em lados opostos da reta suporte do lado oposto ao ângulo):

Figura 8 – A interseção da bissetriz \overrightarrow{CD} com a circunferência é um ponto E que não está no interior do triângulo $\triangle ABC$.



Fonte: O autor.

Podemos observar na Figura 8 que a reta suporte r do lado \overline{AB} do triângulo divide a circunferência em dois arcos, \widehat{ACB} e \widehat{AEB} , que estão em semiplanos distintos em relação a essa reta. Assim, o ponto E, interseção da bissetriz \overrightarrow{CD} com o arco \widehat{AEB} , e o vértice C do triângulo,

estão em lados opostos da reta r . Portanto, o ponto E não está no interior do ângulo $\angle BAC$ e, como consequência, E não está no interior do triângulo $\triangle ABC$. Mas E é também ponto da mediatriz do lado \overline{AB} do triângulo. Então a bissetriz do ângulo $\angle C$ não cruza a mediatriz do lado \overline{AB} no interior do triângulo. Segue que, ou a corda \overline{CE} está contida na mediatriz do lado \overline{AB} (nesse caso o ponto D coincide com o ponto M) e passa pelo ponto O, centro da circunferência (que é o caso do triângulo isósceles), ou a corda \overline{CE} não passa pelo centro O. Se a corda \overline{CE} não passa pelo centro O, então um dentre os dois ângulos $\angle CAE$ ou $\angle CBE$ será necessariamente obtuso, pois um dos dois arcos que a corda \overline{CE} divide a circunferência terá medida maior do que o outro, ou seja, terá medida maior do que 180° . No caso da Figura 8, o arco \widehat{CBE} é maior do que o arco \widehat{CAE} , tornando $\widehat{CAE} > 90^\circ$. Como consequência, a perpendicular ao lado \overline{AC} cruza a reta suporte desse lado no ponto P que não está no lado \overline{AC} do triângulo, pois, caso contrário, o $\triangle AEP$ seria um triângulo retângulo com um ângulo obtuso, o que é impossível.

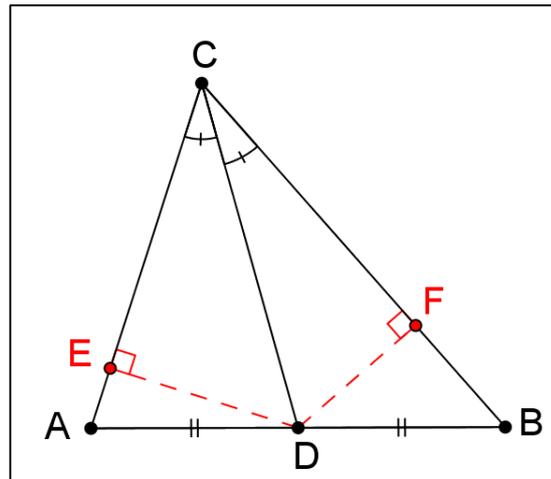
Em uma variante do problema do exemplo 1, em que o triângulo $\triangle ABC$ é retângulo, com $\angle A$ (ou $\angle B$) reto, Clements (1981, p.2) comenta uma “demonstração” de que todo triângulo retângulo possui dois lados paralelos.

Exemplo 2 - Outro exemplo, talvez até mais sutil, é a demonstração da seguinte afirmação (verdadeira):

Se, em um triângulo, a bissetriz de um ângulo interno (*bissetriz aqui considerada como o segmento de reta contido na bissetriz (semirreta) do ângulo e com extremidades no vértice do ângulo e no ponto de intersecção dessa bissetriz com o lado oposto ao ângulo*) coincide com a mediana relativa ao lado oposto a esse ângulo, então esse triângulo é isósceles e esse lado oposto é a sua base.

Neste caso a figura de partida também é um triângulo “qualquer”.

Figura 9: Se uma mediana coincide com a bissetriz, então o triângulo é isósceles.

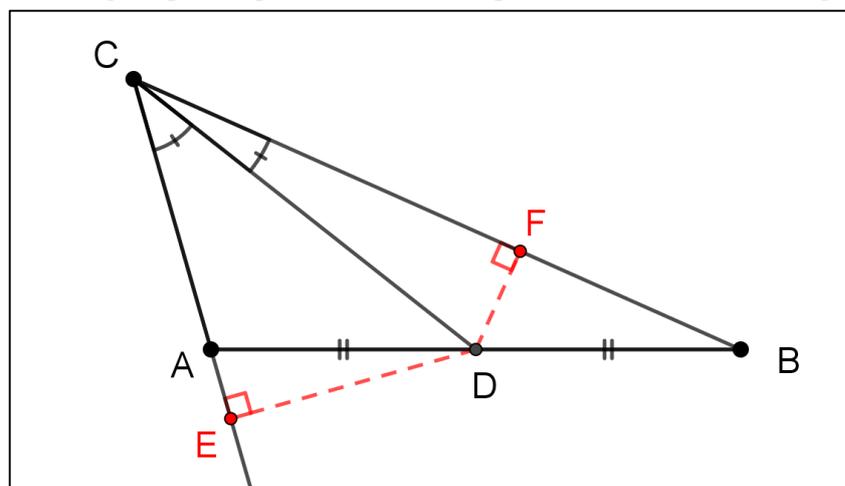


Fonte: o autor.

A demonstração que em geral muitos estudantes apresentam é a seguinte: considerando os elementos da figura, traça-se as perpendiculares \overline{DE} e \overline{DF} aos lados \overline{AC} e \overline{BC} , respectivamente. Como D é um ponto da bissetriz do ângulo $\angle C$, então $DE = DF$. Prova-se então que os triângulos $\triangle CDE$ e $\triangle CDF$ são congruentes e que os triângulos $\triangle DAE$ e $\triangle DBF$ também são congruentes, obtendo-se então, respectivamente, $CE = CF$ e $AE = BF$. Como consequência tem-se que $AC = AE + CE = BF + CF = BC$.

Essa demonstração não é válida porque a figura está induzindo uma situação particular que é o fato dos ângulos $\angle A$ e $\angle B$ serem apresentados como agudos o que, a priori, não se pode admitir. Se um desses ângulos for desenhado como não agudo, então a demonstração não funciona mais (Figura 10).

Figura 10 – Figura para o problema do exemplo 2 com $\triangle ABC$ obtusângulo.



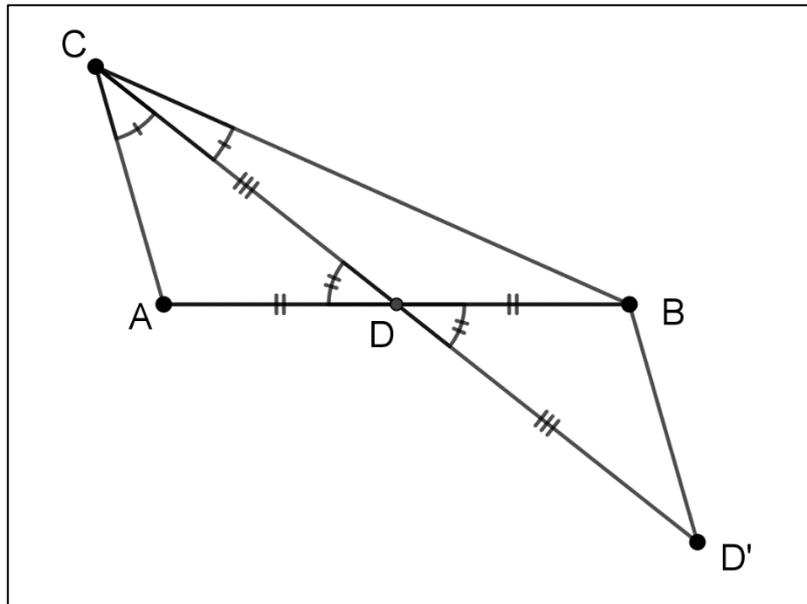
Fonte: O autor.

Observemos que, com essa figura, teríamos, das congruências $\triangle ADE \equiv \triangle BDF$ e $\triangle CDE \equiv \triangle CDF$, que $AE = FB$ e $CA = CF$, resultando em

$$CA < CE = CA + AE = CF + FB = CB.$$

Existe uma outra maneira de provar a afirmação que não exige nenhuma condição sobre a figura, e é essa a abordagem que deve ser feita, porém ela exige o auxílio de “linhas escondidas”. Na Figura 11 consideremos um ponto D' na semirreta \overrightarrow{CD} , com o ponto D entre os pontos C e D' e tal que $CD = DD'$.

Figura 11 – Uma demonstração independente da figura do problema do exemplo 2.



Fonte: O autor.

Então $\widehat{ADC} = \widehat{BDD'}$ (opostos pelo vértice), e portanto, $\triangle ADC \equiv \triangle BDD'$ (caso lado-ângulo-lado de congruência de triângulos). Segue que $\widehat{ACD} = \widehat{BD'D}$ (por hipótese, opostos a lados respectivamente congruentes nos triângulos) e que $AC = BD'$ (pelo argumento anterior, opostos a dois ângulos opostos pelo vértice nos triângulos). Mas então, o triângulo $\triangle CD'B$ é isósceles de base $\overline{CD'}$ (pois os ângulos da base são congruentes). Portanto, $BC = BD'$. Concluímos finalmente que $AC = BC$.

Os exemplos 1 e 2 nos revelam as dificuldades geradas por problemas de congruência entre figura e enunciado e entre figura tratamento matemático. Mas eles revelam algo mais: a congruência semântica entre enunciado e figura é uma condição necessária para se entrar no modo de demonstração/resolução de um problema, mas não é suficiente. Nesse caso devemos

considerar a *apreensão operatória* das figuras, que é uma apreensão que considera as possíveis modificações de uma figura inicial e as reorganizações dessas modificações. Essas modificações são de três tipos: (1) *Modificação mereológica*, em que a figura é repartida em subfiguras ou então, ela é olhada como uma subfigura de outra figura maior. Essa modificação se faz em função da parte com o todo. (2) *Modificação ótica*, em que a figura é transformada, mudando sua orientação (reflexão), aumentando-a, diminuindo-a ou deformando-a em outra, chamada sua imagem. (3) *Modificação posicional*, de orientação ou de lugar, que corresponde às isometrias translação ou rotação. Para cada tipo de modificação há várias operações possíveis conforme a figura abaixo.

Figura 12 - Modificações na apreensão operatória.

Tipo de modificação figural	Operações que constituem a produtividade heurística	Fatores que interferem na visibilidade
Modificações mereológicas	- Reconfiguração intermediária - Mergulhamento	- Característica convexa ou não convexa das partes elementares
Modificações óticas	- Superposibilidade - Anamorfose	- Recobrimento parcial - Orientação
Modificações posicionais	- Rotação - Translação	- Estabilidade das referências do campo perceptivo para o suporte das figuras.

Fonte: Duval (2012).

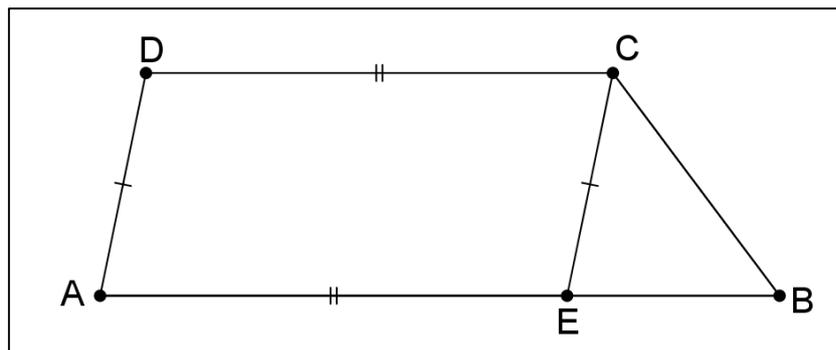
A *produtividade heurística de uma figura* em um problema de geometria depende de como a apreensão operatória conduz à solução do problema e está relacionada à existência da congruência entre uma das operações citadas na Figura 12 e um dos tratamentos possíveis para o problema. A não congruência entre o tratamento matemático do problema e a apreensão operatória gera obstáculos para os estudantes na utilização das transformações em geometria.

Uma importante operação relacionada às modificações mereológicas, e muito usada na resolução de problemas de geometria, é a *reconfiguração intermediária*, que consiste no fracionamento de uma figura em subfiguras, através de linhas auxiliares, permitindo diversos tratamentos tais como medidas e equivalência de áreas, congruências de triângulos e reconhecimento das subfiguras que podem ser construídas para reconstruir a figura inicial. É como se as linhas auxiliares que fracionam a figura sempre estivessem lá traçadas, estando apenas “escondidas”. Em seu artigo Duval (2012) apresenta dois exemplos de resolução por meio de reconfiguração intermediária por alunos do Ensino Básico e um exemplo histórico.

Daremos aqui mais dois exemplos, a título de enriquecer essa proposta, que foram discutidos em 2016, na disciplina Geometria Quantitativa I da primeira fase do Curso de Matemática (Licenciatura) da Universidade Federal de Santa Catarina.

Exemplo 3 – Trata-se da construção de um trapézio sendo dados seus quatro lados, dois deles não congruentes e sendo identificados como suas bases. Observamos que, na figura de análise do problema, ao traçarmos o segmento \overline{CE} paralelo ao lado \overline{DA} estamos realizando uma modificação figural, obtendo o triângulo $\triangle EBC$ como uma subfigura que pode ser construída, pois conhecemos seus três lados: dois deles são os lados opostos e não paralelos e o terceiro é um lado de comprimento igual à diferença dos comprimentos das bases. A figura original pode então ser reconstituída a partir desse triângulo por translação.

Figura 13 - Figura de análise para a construção de um trapézio sendo dados os quatro lados, dois deles como bases.



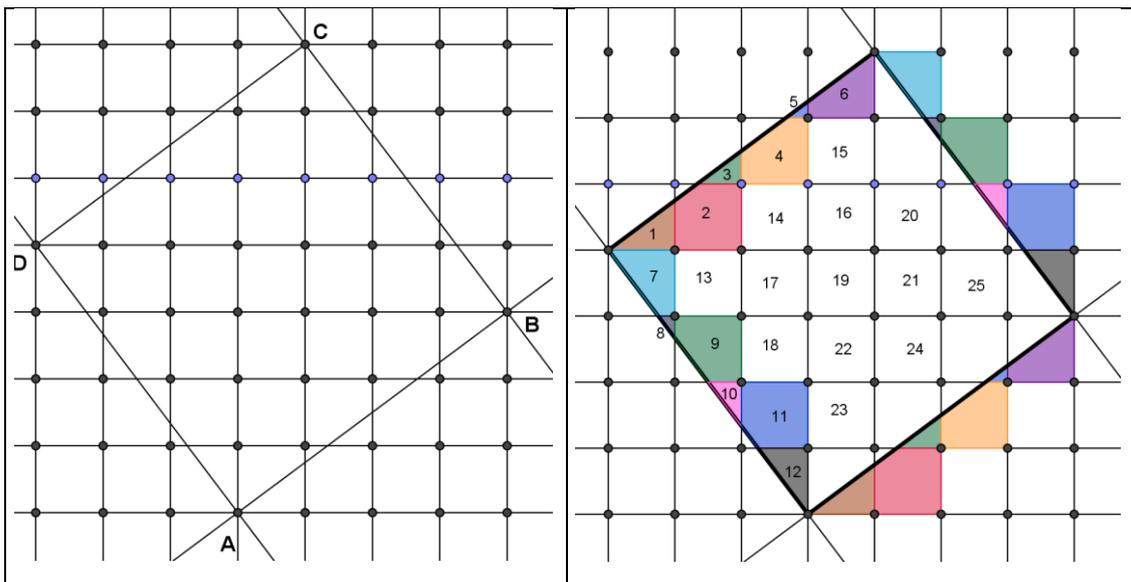
Fonte: o autor.

Uma análise a posteriori nos indica que o problema terá solução (no caso única) se o triângulo $\triangle EBC$ existir de fato, o que dependerá da desigualdade triangular ser ou não satisfeita. Essa análise permite-nos criar um novo problema de final aberto: Dados quatro segmentos quaisquer, quais são os trapézios que podem ser construídos com esses quatro lados? (a nossa definição de trapézio elimina os paralelogramos, ou seja, os trapézios são os quadriláteros que possuem um único par de lados paralelos). Aqui há $C_4^2 = 6$ casos a considerar, segundo os possíveis pares de bases. As soluções dependerão da existência ou não do $\triangle EBC$. E ainda formulamos uma “provocação”: é possível que tenhamos seis soluções para o problema? Podemos ver aqui como alguns problemas levam à criação de outros e que, muitas vezes, esses novos problemas não são mais do que perguntas que fazemos (que os estudantes fazem) ao discutir um problema. De fato, o problema do exemplo 3 surgiu de uma pergunta de uma aluna em sala de aula quando eu argumentava que quatro segmentos quaisquer não determinam

necessariamente um (e mesmo algum) quadrilátero. A pergunta foi: “E um trapézio (pode ser determinado)?”

Exemplo 4 – Neste exemplo, que pode ser considerado bem elementar, dependendo dos conteúdos conhecidos pelos alunos, trata-se de calcular a área de um quadrado em um reticulado unitário dado, cujos vértices são pontos do reticulado, e colocado em uma posição não trivial (Figura 14).

Figura 14 - Reconfiguração intermediária na resolução de um problema.

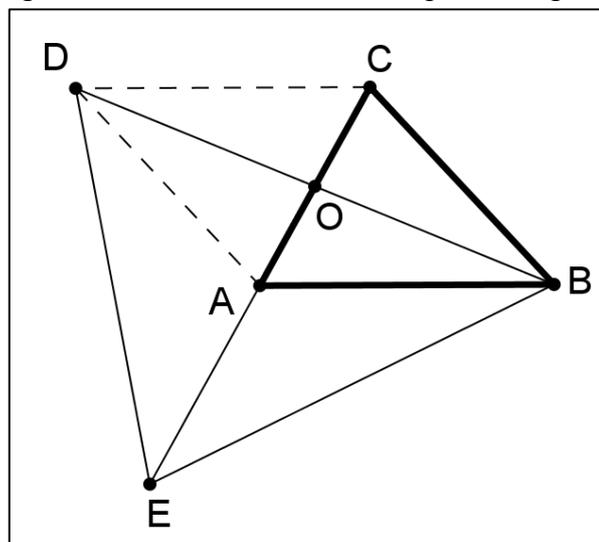


Fonte: o autor.

O quadrado nesse caso já é apresentado como uma união de subfiguras evidentes no reticulado. Uma simples aplicação do teorema de Pitágoras permite obter a medida do lado do quadrado (que é igual a 5), e portanto, calcular sua área. Mas um tratamento alternativo seria identificar, através da reconfiguração intermediária da figura, áreas equivalentes (de subfiguras no caso congruentes) de partes de cada quadrado unitário do reticulado que, alternadamente compõem o quadrado original e que não compõem. Assim, a parte que compõe um quadrado unitário e o *complemento* da correspondente parte que não compõe, formam um quadrado unitário completo. Cada par dessas partes está identificado com uma cor diferente na figura abaixo (há 12 desses pares). A resolução do problema resume-se então à contagem de uma quantidade inteira (que é 25) de quadrados unitários que compõem o quadrado original. Aqui a equivalência de áreas se dá mais por meio de uma apreensão perceptiva e intuitiva do que de maneira rigorosa.

As apreensões das figuras não são somente importantes na resolução de problemas, mas também contribuem para a criação de problemas em geometria, como foi o caso do problema do exemplo 4 acima. Outra operação relacionada às modificações mereológicas é o “mergulhamento”, que é uma operação inversa ao fracionamento de uma figura que passa a ser, também através do traçado de linhas auxiliares, uma subfigura de outra figura o que permite um tratamento possível para a resolução de problemas. Um exemplo interessante de mergulhamento e que contribui para diversos problemas de construção de triângulos pode ser encontrado em Petersen (1963, p. 74).

Figura 15 - Estrutura de Petersen para triângulos.



Fonte: Petersen, 1963, p.74 (reconstruído pelo autor).

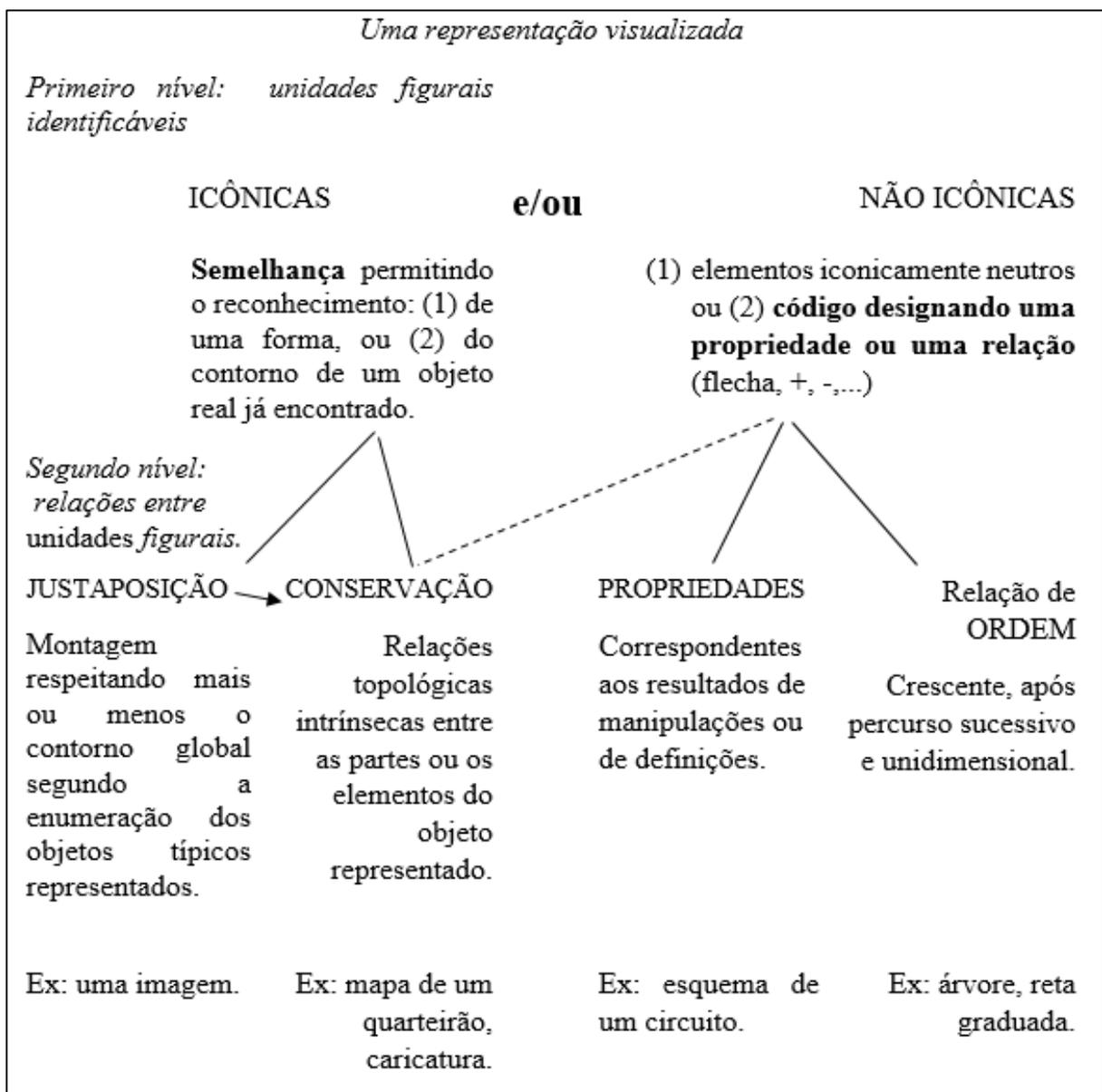
Nessa figura o triângulo $\triangle ABC$ está mergulhado no quadrilátero $BCDE$ que, por sua vez contém o triângulo $\triangle BDE$, cujos lados são iguais ao dobro das medianas do $\triangle ABC$. Além disso, os três triângulos $\triangle ABD$, $\triangle ADE$ e $\triangle ABE$ têm a mesma área do triângulo $\triangle ABC$, e cada um desses três triângulos tem duas alturas congruentes a duas das três alturas do triângulo $\triangle ABC$. Se for possível construir qualquer um dos quatro triângulos $\triangle BDE$, $\triangle ABD$, $\triangle ADE$ ou $\triangle ABE$, então será possível reconstituir o triângulo $\triangle ABC$.

As apreensões têm um papel decisivo na compreensão dos problemas de geometria. A apreensão perceptiva se manifesta de imediato, mas uma figura só poderá fazer sentido dentro de um problema se considerarmos a apreensão discursiva. Observemos que uma mesma figura pode fazer parte de enunciados de problemas com hipóteses distintas, como é o caso da figura do exemplo do problema 2 desta seção em que, retiradas as marcações icônicas de congruência, a hipótese sobre a coincidência do segmento \overline{CD} poderá ser feita como dois dentre os três casos: bissetriz do ângulo $\angle C$, altura ou mediana relativas ao lado oposto ao ângulo $\angle C$. A tese será

sempre a mesma, a de que o triângulo será isósceles com $AC = BC$. Isso confunde muito os estudantes, que têm a impressão de ter que provar sempre o mesmo teorema. A apreensão operatória contribui aí para esclarecer essa situação.

Segundo Duval (2003) é necessário distinguir dois tipos de visualização: a *visualização icônica*, baseada em critérios de semelhança entre os elementos da representação e o objeto representado, e a *visualização não-icônica*, baseada em regras de organização interna das figuras.

Figura 16 - Os dois níveis de articulação do sentido em uma visualização semiótica



Fonte: Duval, 2003, p. 40.

Em geometria uma figura se apresenta, de início, por meio do olhar icônico através do jogo dos mecanismos gestálticos¹⁴ de organização perceptiva. A dificuldade de se ver logo em seguida outra coisa que não o que foi identificado pela primeira olhada é muito difícil. Os professores sabem as dificuldades que têm os alunos em enxergar linhas auxiliares ou em prolongar uma linha além do contorno fechado de uma figura. Torna-se então necessário não somente perceber as unidades figurais em suas diversas dimensões, como também considerar as propriedades intrínsecas a uma figura (olhar não icônico): “As unidades figurais discerníveis em uma figura não são constantes mas podem variar dimensionalmente e gestalticamente em função do problema a ser resolvido” (Duval, 2003, p. 46).

Segundo uma recente revisão feita por Sinclair et al. (2017), as teorias sobre educação em geometria que continuam em evidência são o modelo de van Hiele (1986 apud SINCLAIR et al, 2017, p.278), a teoria dos conceitos figurais (FISCHBEIN, 1993; MARIOTTI e FISCHBEIN, 1997) e a teoria das apreensões figurais (DUVAL, 1998). Duval, que aborda a geometria de um ponto de vista cognitivo e perceptual, analisando a semiótica das figuras geométricas, é quem detalhamos neste trabalho.

Além de Duval, vários outros autores pesquisaram sobre o papel da visualização no ensino e no aprendizado: Presmeg (1986a, 1986b, 2006a, 2006b), Dreyfus (1991), Mariotti (1994), Charalambos (1997), Arcavi (2003), Rösken e Rolka (2006), Giaquinto (2007), Clements (2014) e Miragliotta e Baccaglioni-Frank (2017). Sobre visualização e raciocínio geométrico (prova): Jones (1998) e Hanna e Sidoli (2007).

3.2 GEOMETRIA ANALÍTICA VERSUS GEOMETRIA SINTÉTICA

Neste trabalho, de criatividade em geometria euclidiana plana, a ênfase é sobre geometria sintética, de propriedades das figuras, qualitativa, evitando métodos analíticos, ou seja, evitando trabalhar com geometria analítica. Qual a razão disso? Foi uma escolha nossa, observando três aspectos: o primeiro, histórico, de uma geometria clássica pré-cartesiana em que muitos problemas eram resolvidos sem a necessidade de cálculos; o segundo, relacionado

¹⁴ Duval chama de Gestalt aos constituintes dimensionais de uma figura. Mecanismos gestálticos são os mecanismos levam à percepção da figura em todos os seus elementos.

a problemas de construção geométrica, essencialmente qualitativos, em que os elementos dados para uma construção são dados desenhados (pontos no plano, segmentos e ângulos sem explicitar medidas); e o terceiro, considerando que o sujeito desta pesquisa é, principalmente (mas não somente) o professor de matemática em formação para lecionar no Ensino Básico, em que a geometria plana é (deveria ser, por currículo) apresentada com mais detalhes nos últimos anos do Fundamental II e os alunos não têm ainda, naquele momento, a formação em geometria analítica (PINHO, 2013).

A Geometria Analítica é essencial no desenvolvimento da geometria, por exemplo, na obtenção de propriedades das cônicas, e como um suporte fundamental para o Cálculo. Descartes (1596-1650) desenvolveu a “geometria de coordenadas” para algebrizar as seções cônicas em oposição aos argumentos de Euclides e Apolônio, que ele criticava por carecer de um método geral. Ele lançou as bases da geometria analítica em seu livro “*La Géométrie*”, publicado em 1637. Fermat (1601-1665) também trabalhou com a geometria das coordenadas desde 1629, mas seus trabalhos só foram publicados em 1679. Fermat, ao contrário de Descartes, pensava na geometria analítica como uma extensão das ideias de Euclides e Apolônio. Os métodos desenvolvidos por Euclides, Apolônio e seus sucessores, e anteriores ao desenvolvimento da geometria analítica passaram a ser chamados de geometria sintética (HANSEN, 1998, p. 12).

No entanto, desprezar a geometria sintética achando que é possível fazer qualquer coisa com geometria analítica seria uma atitude um tanto pretenciosa. Alguns problemas de geometria mostram que uma abordagem via geometria sintética, ou via construção geométrica, podem facilitar bastante sua resolução. Um desses problemas é o clássico problema de Heron de minimização de uma soma de distâncias. Esse problema pode ser resolvido analiticamente com as ferramentas do Cálculo, porém ele possui uma solução extremamente simples, conforme o trabalho original de Heron (PASQUALI, 2004, p. 20-21).

Apresentaremos aqui dois problemas, que discutimos em sala de aula com os estudantes da disciplina Geometria Analítica do Curso de Matemática da UFSC, nos quais é mais vantajoso, em termos de cálculos, o emprego de propriedades da geometria sintética sobre o emprego de equações da geometria analítica. Esses problemas envolvem circunferências tangentes entre si e, basicamente, a diferença entre as duas abordagens é que, com a geometria analítica, será necessário trabalhar com sistemas de duas equações quadráticas.

Problema 1 – Determinar a equação de uma circunferência que passa pelos pontos de coordenadas (2,0) e (8,0) e que tangencia o eixo y das coordenadas cartesianas.

Resolução 1 (analítica) – Sem se preocupar com figuras (e esse poderia ser o maior mérito de uma geometria analítica), escrevamos a equação geral de uma circunferência com centro no ponto (x_0, y_0) e raio r (a existência ou não de solução para o problema dependerá da(s) soluções encontradas analiticamente):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (*)$$

Substituindo as coordenadas dos dois pontos do eixo x , por onde deve passar a circunferência, obtemos:

$$(2 - x_0)^2 + y_0^2 = r^2 \quad (1)$$

$$(8 - x_0)^2 + y_0^2 = r^2, \quad (2)$$

implicando em

$$(2 - x_0)^2 = (8 - x_0)^2 \implies |2 - x_0| = |8 - x_0|.$$

Então há duas possibilidades:

$$\text{ou } 2 - x_0 = 8 - x_0, \text{ impossível,}$$

$$\text{ou } 2 - x_0 = x_0 - 8 \implies x_0 = 5.$$

Substituindo esse valor de x_0 na equação original (*), obtemos

$$(x - 5)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Agora vamos impor a condição de que a circunferência tangencia o eixo y (reta $x = 0$), e isso requer que a equação

$$25 + (y - y_0)^2 = r^2, \quad \text{ou} \quad y^2 - 2y_0y + y_0^2 + 25 - r^2 = 0$$

tenha uma única solução (tangência), o que significa que o discriminante Δ da equação seja igual a zero:

$$\Delta = 4y_0^2 - 4(y_0^2 + 25 - r^2) = 0 \implies 4r^2 = 100 \implies r = 5.$$

Levando os valores de r e de x_0 em qualquer uma das equações (1) ou (2), obtemos:

$$9 + y_0^2 = 25 \implies y_0^2 = 16 \implies |y_0| = 4 \implies y_0 = 4 \quad \text{ou} \quad y_0 = -4.$$

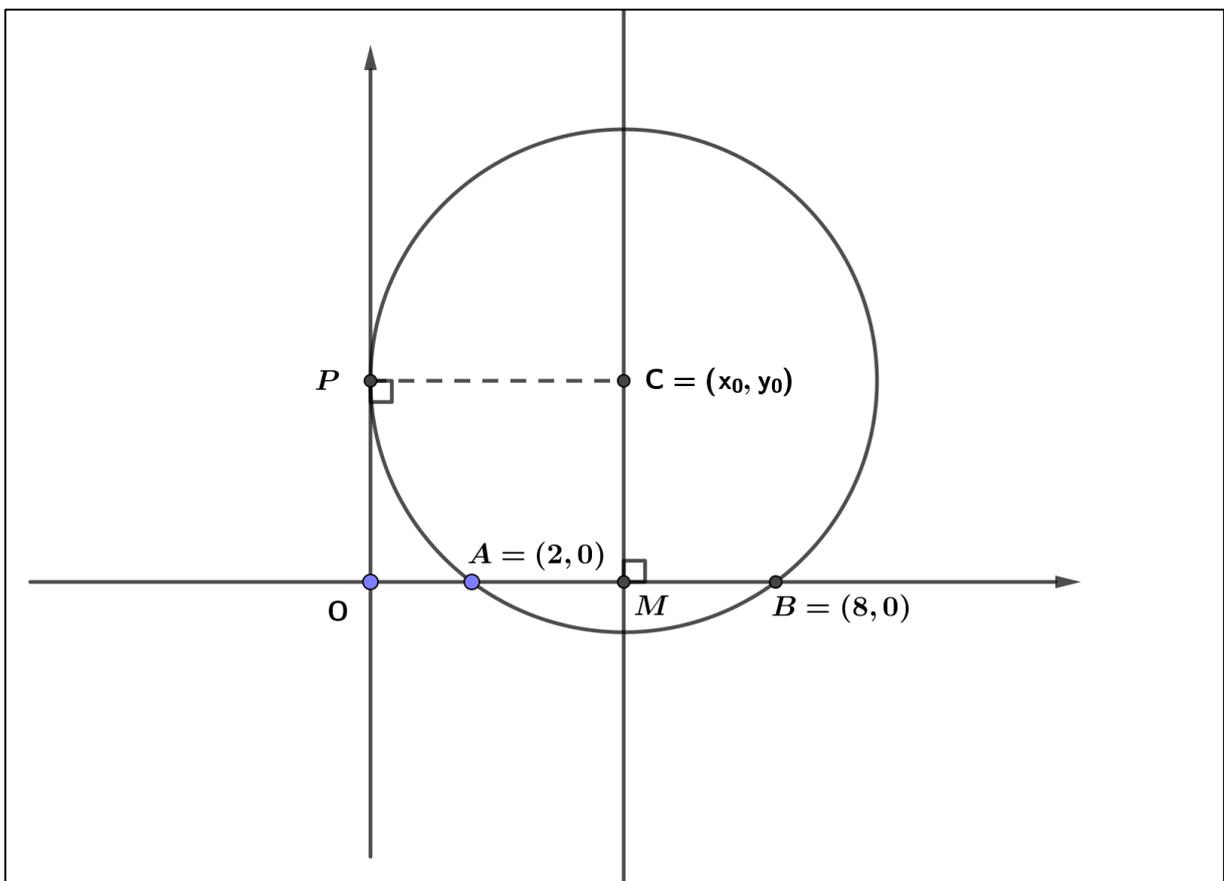
Há, portanto, duas soluções:

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 25 \quad \text{e}$$

$$(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 25.$$

Resolução 2 (sintética) – Essa resolução exige que façamos uma figura (um esboço) da situação geométrica, o que implica em admitir, a priori, uma solução para o problema. Essa é uma barreira para os lógicos e analistas. Por outro lado, é possível considerar o problema de construção com régua e compasso e chegar a uma solução (seguindo a visão dos antigos geômetras gregos, “o que se pode construir existe” – como a diagonal de um quadrado de lado conhecido). Mas para analisar o problema de construção é necessário considerar o problema resolvido, isto é, trabalhar com a representação figural. A figura geométrica foi construída com o auxílio do GeoGebra sem no entanto utilizar os eixos disponíveis no software.

Figura 17– Figura de análise para o Problema 1.



Fonte: O autor.

Observemos dois resultados: 1) Se uma circunferência passa por dois pontos, então seu centro está na mediatriz da corda cujas extremidades são esses pontos; 2) Uma reta é tangente a uma circunferência em um ponto P se, e somente se essa reta é perpendicular ao raio da circunferência nesse ponto.

Da observação (1) concluímos que, como os pontos A e B estão no eixo x, então a mediatriz do segmento \overline{AB} , que passa pelo ponto médio de \overline{AB} , é perpendicular ao eixo x. O ponto médio M de \overline{AB} tem coordenadas (5,0) (não é preciso usar geometria analítica aqui –

basta ver que o comprimento de \overline{AB} é igual a $8 - 2 = 6$, que $AM = BM = 3$, e portanto, $OM = OA + AM = 2 + 3 = 5$). Então a abscissa do centro C , de coordenadas (x_0, y_0) , é dada por $x_0 = 5$. Da observação (2) concluímos que o raio \overline{CP} é perpendicular ao eixo y e, como o quadrilátero $OMCP$ é um retângulo, então $r = CP = OM = 5$. Obtivemos assim, sem quase conta nenhuma, os valores de r e de x_0 . Falta encontrar o valor de y_0 . Observe que $y_0 = CM = OP$.

Consideremos agora um terceiro resultado: *potência de ponto*. Se um ponto O está no exterior de um círculo de raio R , então a potência do ponto O em relação a esse círculo (ou em relação à circunferência correspondente) é o número dado por $d^2 - R^2$, em que d é a distância do ponto O ao centro da círculo. Esse número é igual ao quadrado dos comprimentos (iguais) dos segmentos de reta tangentes à circunferência com uma extremidade em O e também é igual ao produto $OE \cdot OF$, dos comprimentos de dois segmentos em que E e F são os pontos de interseção de qualquer semirreta de origem O que intersecte a circunferência.

Portanto, olhando para a Figura 17, obtemos

$$y_0^2 = OP^2 = OA \cdot OB = 2 \cdot 8 = 16 \Rightarrow |y_0| = 4.$$

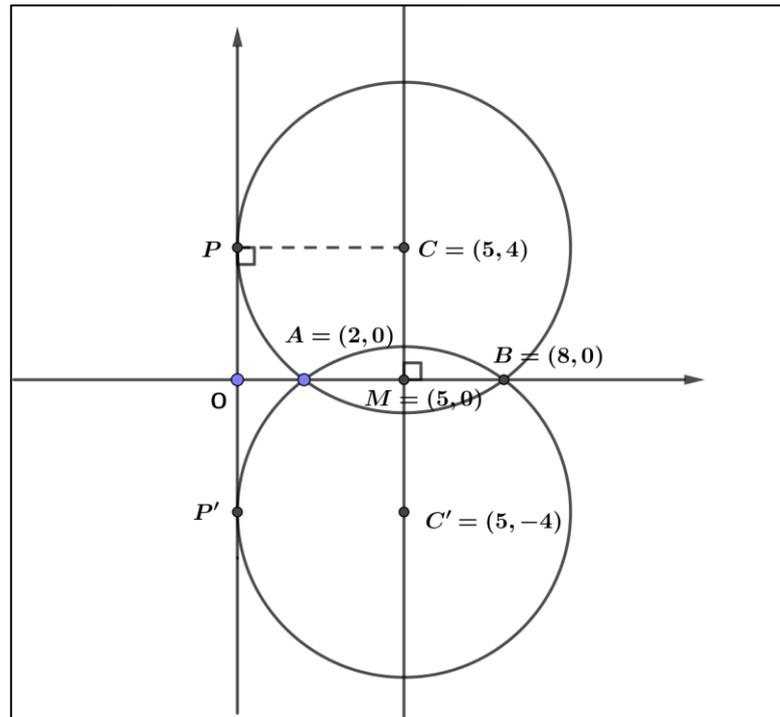
Esse resultado nos alerta para a existência de duas soluções: uma para $y_0 = 4$, e outra para $y_0 = -4$. As equações das circunferências são então:

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 25 \quad e$$

$$(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 25 \quad .$$

As duas soluções estão representadas na Figura 18 a seguir:

Figura 18 – As duas soluções para o Problema 1.



Fonte: O autor.

O segundo problema exigirá o emprego de equações da geometria analítica, mas suas soluções são obtidas através de um atalho por meio da geometria sintética e, mais interessante ainda, por meio de construção geométrica. Trata-se de um problema de encontrar uma circunferência tangente a duas circunferências dadas e em um ponto dado em uma delas.

Problema 2 – Determinar a equação de uma circunferência tangente à circunferência

$$(x - 4)^2 + y^2 = 4 ,$$

e tangente à circunferência

$$x^2 + y^2 = 1 , \text{ em seu ponto}$$

$$P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) .$$

Resolução 1 (analítica) – Não vamos apresentar aqui toda a resolução do problema por via analítica, mas vamos mostrar a dificuldade que aparecerá nessa resolução (não intransponível, mas cansativa).

Começando, como no problema 1, com a equação geral

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 ,$$

e observando que, como o ponto de tangência na segunda circunferência, de centro na origem, é um ponto da reta $y = x$, podemos então assumir que o centro $C = (x_0, y_0)$ da circunferência procurada está nessa reta, e portanto, suas coordenadas se escrevem como (x_0, x_0) . A equação fica sendo

$$(x - x_0)^2 + (y - x_0)^2 = r^2.$$

Substituindo nessa equação as coordenadas do ponto P, obtemos

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - y_0\right)^2 = r^2 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2} |\sqrt{2} - 2x_0|.$$

Até aqui não fizemos muitas contas e obtivemos a relação entre a abscissa do centro e o raio da circunferência, mas agora será necessário obter um desses dois valores. Isso pode ser feito “forçando” a interseção, da primeira circunferência da hipótese com a circunferência procurada em um ponto único (de modo que elas sejam tangentes), ou seja, devemos trabalhar algebricamente com o sistema *não-linear*

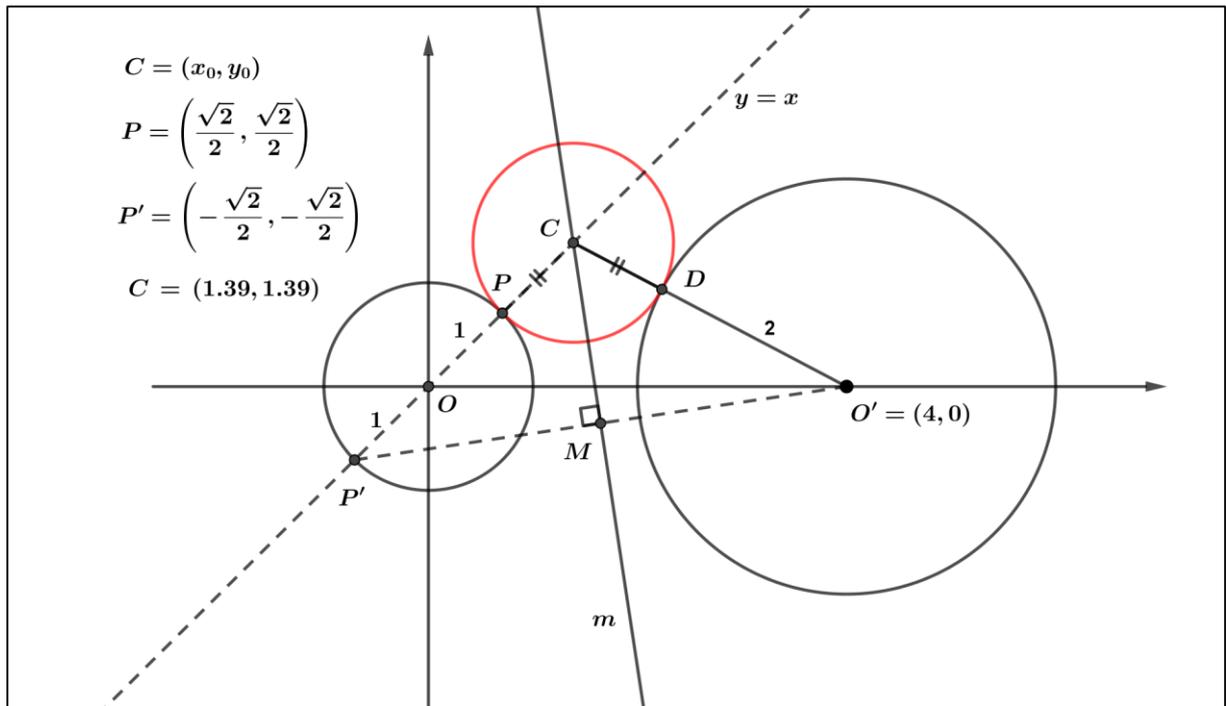
$$(x - 4)^2 + y^2 = 4$$

$$(x - x_0)^2 + (y - x_0)^2 = r^2,$$

para obter uma equação linear (relação entre x e y) que, em conjunto com a primeira equação (ou seja, um novo sistema não-linear) produzirá uma equação quadrática em uma das variáveis, x ou y . Essa equação quadrática resultará em um ou dois resultados para x_0 , ao forçarmos uma solução única para tal equação, igualando seu discriminante a zero e obtendo uma equação quadrática agora em x_0 .

Resolução 2 (sintética/analítica) – Essa resolução exige que façamos novamente uma figura (um esboço) da situação geométrica, admitindo, a priori, o problema resolvido. Na Figura 19, feita com o auxílio do GeoGebra, vemos o caminho para a construção (e para a resolução do problema) que detalhamos a seguir:

Figura 19 – Análise para a construção da solução (em vermelho) do problema 2.



Fonte: O autor.

Observemos da figura que $CP = CD = r$, em que C e r são, respectivamente, o centro e o raio da circunferência procurada. Como $DO' = 2$ (raio da circunferência de centro O'), se traçarmos, na semirreta \overrightarrow{CP} um ponto P' , com P entre C e P' , de modo que $PP' = DO' = 2$, o que pode ser feito, pois o ponto P é dado e C, P, O e P' são colineares (propriedade da tangência de duas circunferências – o ponto de tangência de duas circunferências está na reta dos centros dessas circunferências), teremos que o triângulo $\triangle CP'O'$ (que ainda não temos) será isósceles com $CP' = CO'$. Então, o ponto C estará necessariamente na mediatriz m do segmento $\overline{P'O'}$ (que temos). Por coincidência dos dados aqui, o ponto P' está na circunferência de centro O .

Portanto, para encontrar o centro C , basta encontrar a interseção da mediatriz m do segmento $\overline{P'O'}$ com a reta $y = x$. Analiticamente isso significa encontrar a solução de um sistema linear (dado pelas equações das duas retas), o que é mais simples do que trabalhar com um sistema não-linear e com equações quadráticas.

Achamos então o ponto médio M do segmento $\overline{P'O'}$

$$M = \left(\frac{8 - \sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

e depois escrevemos a equação da reta $\overleftrightarrow{P'O'}$ (equação de reta que passa por dois pontos):

$$y = \frac{\sqrt{2}}{8 + \sqrt{2}}(x - 4).$$

Em seguida escrevemos a equação da reta perpendicular à reta $\overline{P'O'}$ que passa pelo ponto M (que será a mediatriz m do segmento $\overline{P'O'}$)

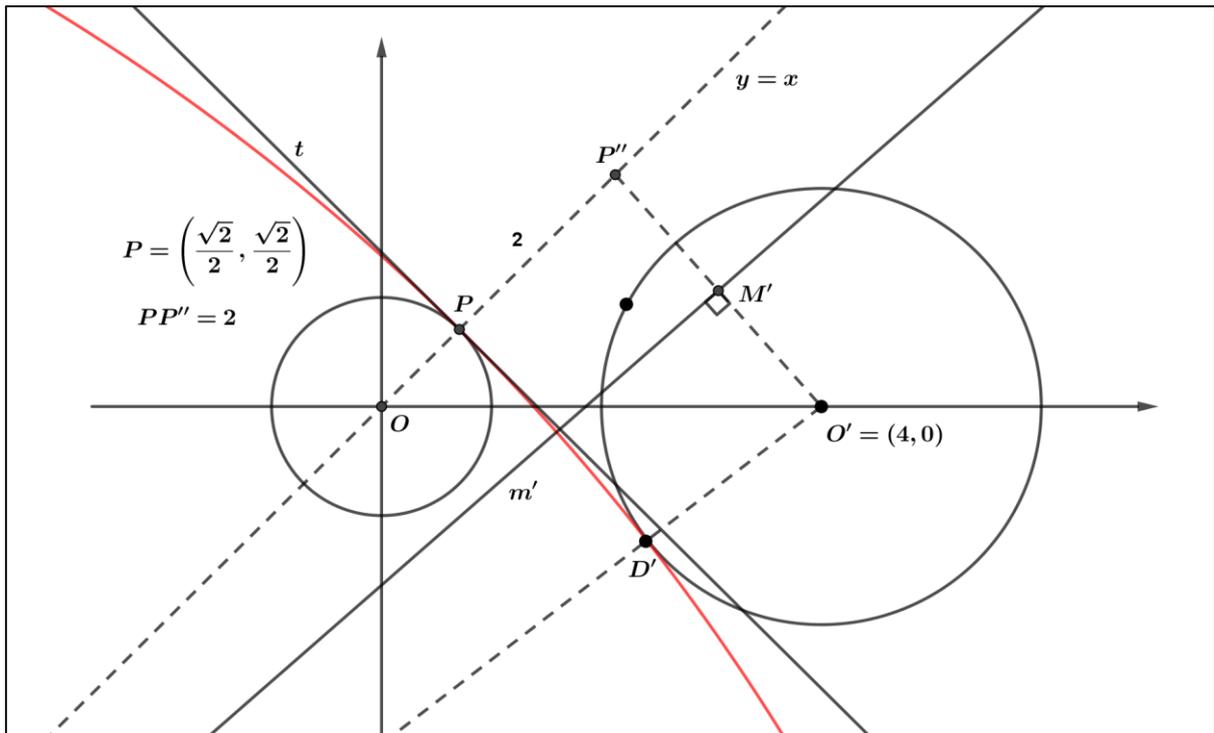
$$y + \frac{\sqrt{2}}{4} = -\frac{8 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{8 - \sqrt{2}}{4} \right),$$

e finalmente achamos a interseção dessa reta com a reta $y = x$ (basta substituir y por x na equação da reta m), obtendo as coordenadas do ponto C (e comprovadas pelo GeoGebra - Figura 19):

$$x_0 = y_0 = \frac{240(4 - \sqrt{2})}{448} \approx 1,39 .$$

Uma última observação: um problema desse tipo em geral tem uma segunda solução (como observado na resolução analítica). Na Figura 20 apresentamos essa solução. Nesse caso é preciso marcar um ponto P'' na semirreta \overline{OP} , com P entre O e P'' , e traçar a mediatriz m' do segmento $\overline{P''O'}$. A interseção da mediatriz m' com a reta $y = x$ revelará o centro C' (não mostrado na figura) da circunferência solução. A mediatriz m' poderia não intersectar a reta $y = x$ e, nesse caso, o problema não teria uma segunda solução. Essa situação ocorreria se a reta tangente t à circunferência de centro O no ponto P fosse também tangente à circunferência de centro O' , o que não ocorre no caso do problema.

Figura 20 – Segunda solução para o problema 2 (em vermelho).



Fonte: O autor.

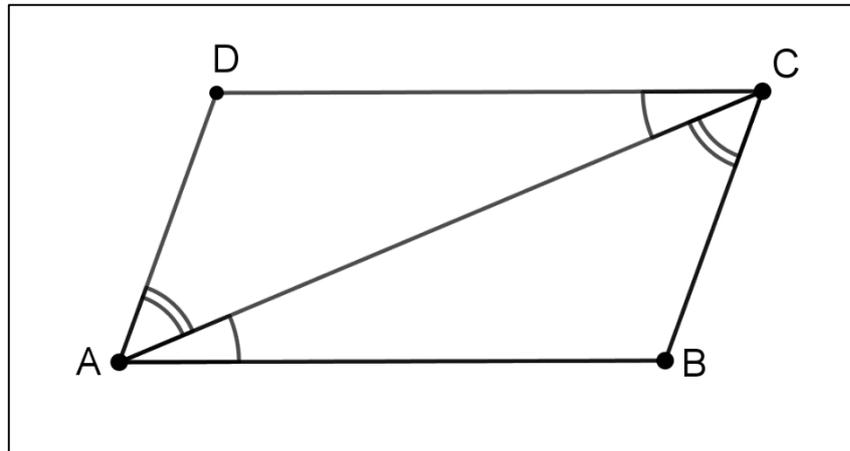
3.3 GEOMETRIA SINTÉTICA E O RIGOR MATEMÁTICO: AXIOMÁTICA DE EUCLIDES VERSUS AXIOMÁTICA DE HILBERT?

A interrogação do título desta seção pode ser respondida imediatamente. Os dois conjuntos de axiomas geram a mesma geometria (euclidiana), mas o conjunto de axiomas de Hilbert (1950) é mais rigoroso formalmente e abre caminhos para as geometrias não-euclidianas (GREENBERG, 1994). Euclides, em seus *Elementos* (EUCLIDES, 2009) não se preocupa em provar, por exemplo, que a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo intersecta o lado oposto a esse ângulo. Assumiremos esse resultado e muitos outros, mas é preciso ser cauteloso quando trabalhamos com figuras que podem estar falsamente construídas (como no caso da “demonstração” de que todo triângulo é isósceles) ou quando obter propriedades em que a figura, desenhada em uma situação particular, precisa ser considerada em todas as suas possibilidades.

O raciocínio em geometria sintética se apoia nos processos cognitivos intuitivos. Segundo Fischbein (1987 apud DREYFUS, 1991, p.33) a visualização está frequentemente

envolvida nesses processos. Stenius (1981 apud DREYFUS, 1991, p. 38-39) analisa a função epistêmica de uma figura em uma demonstração de que os lados opostos de um paralelogramo são respectivamente congruentes:

Figura 21 – Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.



Fonte: O autor, segundo Dreyfus (1991).

A hipótese é $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ (ABCD paralelogramo) e o que se deseja provar é que $AB = CD$ e que $BC = AD$. Isso é feito mostrando que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle CDA$ são congruentes usando um teorema de congruência de triângulos (caso ângulo-lado-ângulo). Como resultado dessa congruência, e da definição de congruência de triângulos, segue a tese. Porém, Stenius (1981 apud DREYFUS, p. 39) pergunta: “[...]como sabemos que $\angle BAC$ e $\angle DCA$ são ângulos alternos internos com relação às retas paralelas \overline{AB} e \overline{CD} ? Não seria possível o ponto D estar no interior do triângulo $\triangle ABC$? A questão é como sabemos sem o recurso de uma figura?”

A pergunta incomoda a quem argumenta via geometria sintética, da mesma forma que incomoda a afirmação que fizemos anteriormente sobre a interseção da bissetriz de um ângulo interno de um triângulo com seu lado oposto. Esses resultados podem ser provados por meio da axiomática de Hilbert. Para ilustrar, vamos mostrar como se prova, usando essa axiomática, que o ponto D do problema do paralelogramo, tomado como exemplo por Stenius, não pode estar no interior do triângulo $\triangle ABC$.

Os resultados necessários para apoiar essa demonstração se baseiam em dois grupos de axiomas: os axiomas de incidência e os axiomas de ordem (GREENBERG, 1994, p. 50 e 72;

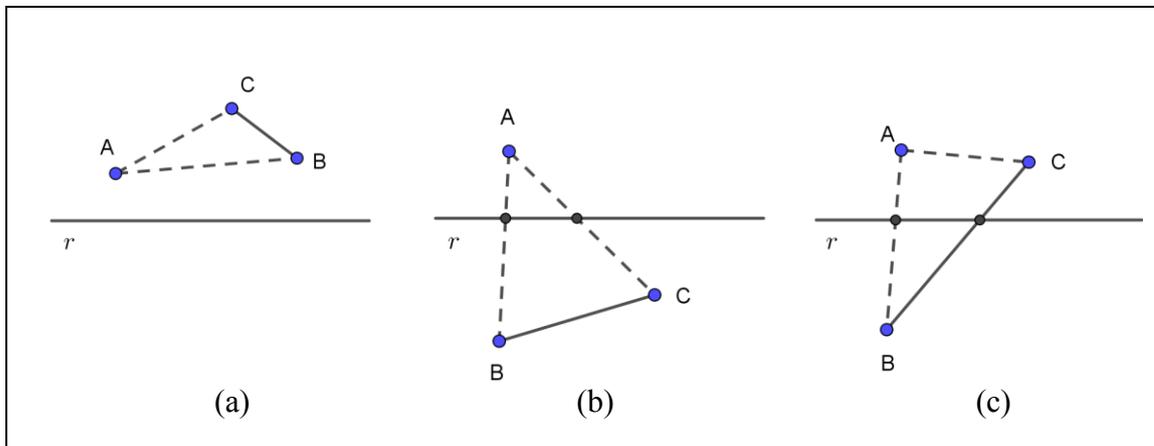
HILBERT, 1950, p. 3-5). Com os termos primitivos¹⁵ *ponto*, *reta* e *estar entre* podemos enunciar alguns axiomas, teoremas e definições:

- i. (axioma 2 de ordem de Hilbert) Se A e B são dois pontos (distintos) quaisquer, então existem pontos C e D tais que B está entre A e C , e tais que A está entre B e D .
- ii. (axioma 3 de ordem de Hilbert) Dados três pontos distintos e colineares, um, e somente um deles está entre os outros dois.
- iii. (teorema) Toda reta possui uma infinidade de pontos.
- iv. (definição) Se A e B são dois pontos (distintos) quaisquer não incidentes a uma reta r , então dizemos que os pontos A e B estão em lados opostos da reta r se essa reta intersectar o segmento \overline{AB} em um ponto que está entre A e B . Caso contrário, dizemos que os pontos A e B estão do mesmo lado da reta r .
- v. (definição) Um ponto P é dito ponto interior a um ângulo $\angle AOB$ se os pontos P e A estiverem do mesmo lado da reta \overrightarrow{OB} , e se os pontos P e B estiverem do mesmo lado da reta \overrightarrow{OA} . O interior de um ângulo é o conjunto dos pontos interiores desse ângulo.
- vi. (teorema) O interior de qualquer ângulo é não vazio.
- vii. (definição) Um ponto P é dito ponto interior de um triângulo ΔABC se esse ponto estiver na interseção dos interiores dos três ângulos internos do triângulo ΔABC .
- viii. (teorema) Uma consequência do chamado axioma de separação (ou axioma de Pasch), do grupo dos axiomas de ordem é:
 - a) Se os pontos A e B estão do mesmo lado de uma reta r e se os pontos A e C estão do mesmo lado da reta r , então os pontos B e C estão do mesmo lado da reta r .
 - b) Se os pontos A e B estão em lados opostos da reta r e se os pontos A e C estão em lados opostos da reta r , então os pontos B e C estão do mesmo lado da reta r .
 - c) Se os pontos A e B estão em lados opostos da reta r e se os pontos A e C estão do mesmo lado da reta r , então os pontos B e C estão em lados opostos da reta r .

¹⁵ Na axiomática de Hilbert termos primitivos são termos sem definição, sujeitos a interpretações. Essas interpretações abrem caminho para modelos de geometrias não euclidianas, como os de Klein e Poincaré (GREENBERG, 1994, p. 232-238).

Na Figura 22 estão ilustrados os três casos desse teorema. As linhas tracejadas referem-se às hipóteses e as linhas cheias à tese.

Figura 22 – Os três casos do teorema do item vii.



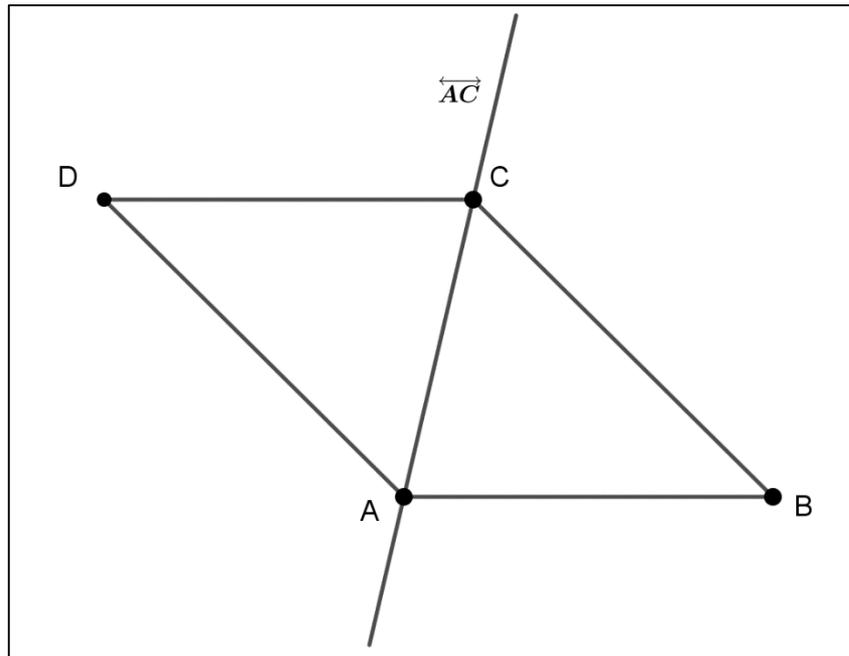
Fonte: O autor.

A demonstração (um tanto árida, nós diríamos) agora segue as seguintes etapas:

- 1) Os pontos A, B, C e D são quatro pontos distintos. Esses quatro pontos são não colineares e não há três deles colineares (por exemplo, se A, B e C fossem colineares, então as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} não seriam distintas, o que contradiz a hipótese).
- 2) Consideremos os pontos A e B fixados e consideremos a reta \overleftrightarrow{AC} . Agora observamos que os pontos B e D não são incidentes à \overleftrightarrow{AC} (caso contrário, três dos quatro pontos seriam colineares). Há então duas possibilidades (segundo a definição em iv): ou os pontos B e D estão em lados opostos da reta \overleftrightarrow{AC} , ou os pontos B e D estão do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{AC} .

Neste ponto vamos apresentar uma figura (não era sem figuras?) apenas para orientar o raciocínio:

Figura 23 – Os pontos B e D estão em lados opostos da reta \overleftrightarrow{AC} .

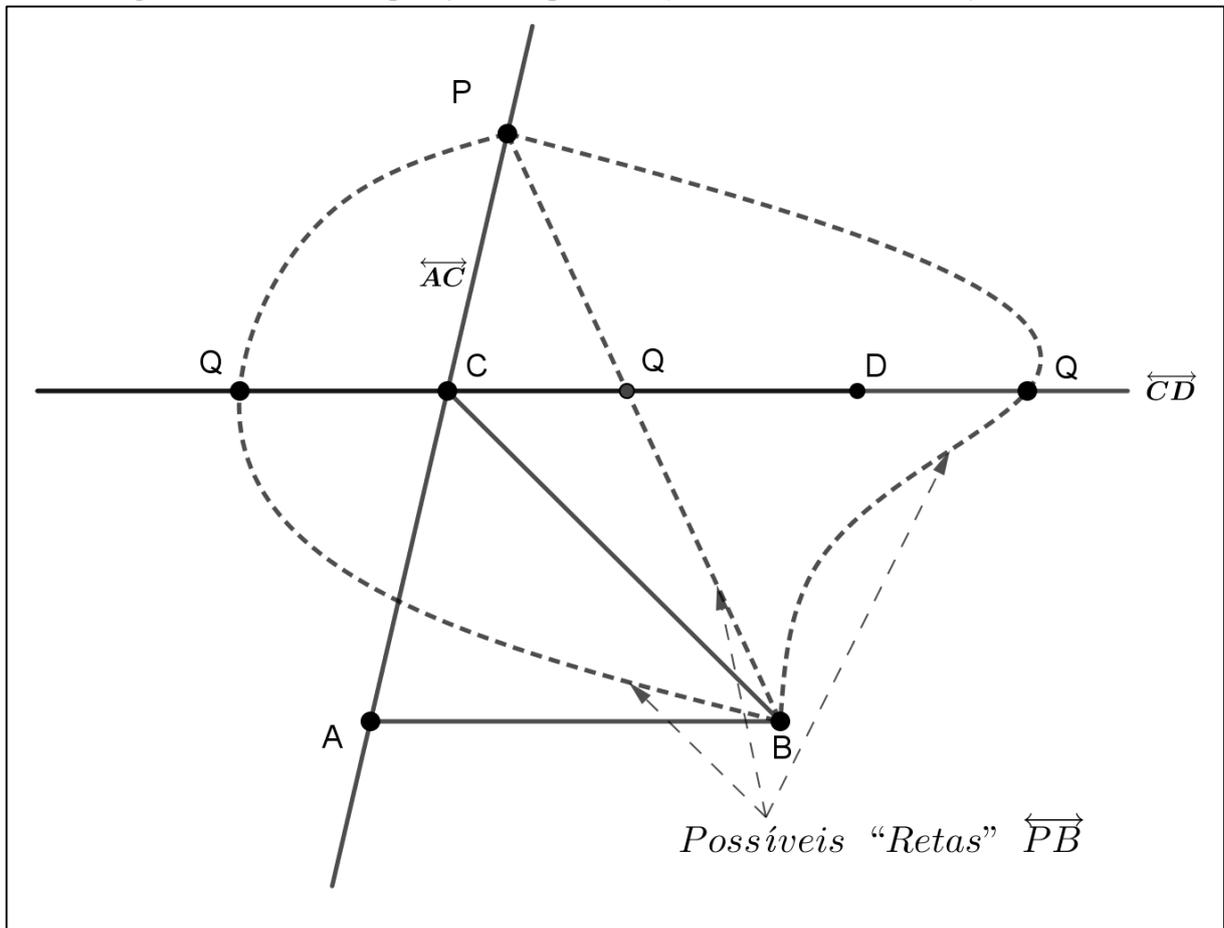


Fonte: O autor.

- 3) Se os pontos B e D estão em lados opostos da reta \overleftrightarrow{AC} , então o ponto D não está no interior do ângulo $\angle BAC$ (definição em v), e portanto, D não está no interior do $\triangle ABC$.
- 4) Se os pontos B e D estão do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{AC} , considere então um ponto P tal que o ponto C está entre os pontos A e P (axioma em i). Então os pontos A e P estão em lados opostos da reta \overleftrightarrow{CD} (definição em iv). Mas os pontos A e B estão do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{CD} , pois as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} são paralelas. Segue, do teorema em viii, item c, que os pontos B e P estão em lados opostos da reta \overleftrightarrow{CD} . Portanto, existe um ponto Q, na *reta* \overleftrightarrow{CD} , que está entre os pontos B e P.
- 5) O ponto Q é distinto dos pontos C e D, pois caso contrário, se, por exemplo, o ponto Q coincidisse com o ponto C, então os pontos os pontos B, C (que seria Q) e P seriam colineares. Por outro lado, os pontos A, C e P são colineares. Concluiríamos então que os pontos A, C e B são colineares, o que contradiz a hipótese de paralelismo das retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} .
- 6) Então um, e somente um dos casos pode ocorrer (axioma em iii):
 - a. O ponto C está entre os pontos Q e D;
 - b. O ponto Q está entre os pontos C e D;
 - c. O ponto D está entre os pontos C e Q.

Vamos apresentar mais uma figura (um tanto incoerente) para orientar o raciocínio:

Figura 24 – Possíveis posições do ponto Q (tomados um a cada vez) na reta \overleftrightarrow{CD} .



Fonte: O autor.

- 7) Se o ponto C estivesse entre os pontos Q e D, então os pontos Q e D estariam em lados opostos da reta \overleftrightarrow{AC} (definição em iv). Os pontos B e Q estão do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{AC} , pois, caso contrário, existiria um ponto dessa reta que estaria entre os pontos B e Q (definição em iv). Mas então, tal ponto só poderia ser o ponto P (o ponto de interseção das retas \overleftrightarrow{AC} e \overleftrightarrow{BQ}). Nesse caso, teríamos que o ponto P estaria entre os pontos Q e B, contradizendo o axioma em ii pelo que foi afirmado em (4). Seguiria que os pontos B e D estariam em lados opostos da reta \overleftrightarrow{AC} (teorema em viii, item c), o que contradiz a hipótese feita em (4).
- 8) Então, pelo axioma em ii temos que ou o ponto Q está entre os pontos C e D, ou o ponto D está entre os pontos C e Q. Em qualquer um dos casos, os pontos D e Q estão do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{BC} , pois, caso contrário, existiria um ponto dessa reta que estaria entre os pontos D e Q (definição em iv). Mas então, tal ponto só poderia ser o ponto C

- (o ponto de interseção das retas \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{CD}). Nesse caso, teríamos que o ponto C estaria entre os pontos Q e P, contradizendo a hipótese deste item.
- 9) Por outro lado, os pontos P e Q estão do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{BC} , pois, caso contrário, existiria um ponto dessa reta que estaria entre os pontos P e Q (definição em iv). Mas então, tal ponto só poderia ser o ponto B (o ponto de interseção das retas \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{PQ}). Nesse caso, teríamos que o ponto B estaria entre os pontos Q e P, contradizendo o axioma em ii pelo que foi afirmado em (4).
- 10) De (8) e (9) segue que os pontos P e D estão do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{BC} (teorema em viii, item a).
- 11) Os pontos P e A estão em lados opostos da reta \overleftrightarrow{BC} (pois o ponto C está entre os pontos P e A (por 4)).
- 12) Finalmente, de (10) e (11) temos que D e A estão em lados opostos da reta \overleftrightarrow{BC} . Segue que o ponto D não está no interior do ângulo $\angle ACB$ (definição em v), e portanto, D não está no interior do $\triangle ABC$ (definição em vii). Na verdade, o que provamos é que o caso em os pontos B e D estão do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{AC} é impossível pois, a conclusão de que D e A estão em lados opostos da reta \overleftrightarrow{BC} implica que as retas \overleftrightarrow{AD} e \overleftrightarrow{BC} não são paralelas, o que contradiz a hipótese.

Essa cansativa e rigorosa argumentação nos mostra uma demonstração independente de uma figura, apesar que uma figura nos auxilia a descrever os passos da demonstração. Observe-se que, no passo (4), ressaltamos que o ponto Q, que está entre os pontos B e P, situa-se na reta \overleftrightarrow{CD} , mas não admitimos de imediato qual a sua posição relativa aos pontos C e D.

Seria todo esse rigor necessário para trabalharmos em investigações com o intuito de criarmos problemas em geometria? Se sempre é possível demonstrar resultados rigorosamente com a axiomática de Hilbert, por que fazê-lo? Não seria melhor simplesmente assumir os resultados intuitivos, dados pela figura? O problema é que não sabemos quando podemos assumir esses resultados. O GeoGebra pode ser usado no caso em que haja alguma dúvida, mas o conhecimento das propriedades dos objetos geométricos ajuda muito a compreender o valor epistêmico de uma figura. Por exemplo, na “demonstração” da afirmação (falsa) de que todo triângulo acutângulo é isósceles, feita na seção 3.1, é possível perceber, usando o GeoGebra, que a figura utilizada apresenta uma impossibilidade. Essa é uma ferramenta que veio para ficar, mesmo que os SGD tenham suas limitações e falhas (que discutiremos no próximo capítulo).

4. SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA

Neste capítulo abordaremos uma importante ferramenta para o estudo da geometria, especialmente para investigações e a criação de problemas: os *softwares de geometria dinâmica* (SGD), também chamados de *ambientes de geometria dinâmica*, suas limitações e suas potencialidades. Veremos que essa ferramenta deve estar associada a conhecimentos teóricos de geometria, contribuindo para a sua função epistêmica, o chamado *potencial semiótico* de um SGD. Não se trata apenas de saber usar a ferramenta, como se seguissemos um manual. É muito mais que isso. É poder e saber explorar ao máximo as propriedades dos objetos geométricos através de sua representação figural, analisar, resolver e criar problemas de geometria utilizando sua característica dinâmica, via a ferramenta “Mover” (no caso do GeoGebra). Apresentaremos aqui exemplos de problemas históricos de extremos em geometria (problemas de maximização ou de minimização de medidas de segmentos, ângulos e áreas) por meio da geometria sintética e (paradoxalmente, de uma certa forma) não quantitativa, ou seja, sem contas. Daremos ainda vários exemplos do processo de criação de problemas que desenvolvemos para discussão em sala de aula ou que surgiram no acompanhamento de trabalhos de conclusão de curso de estudantes do curso de Matemática da UFSC.

4.1 CARACTERÍSTICAS DOS SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA

Uma grande parte do conteúdo desta seção e da seguinte foi por nós publicado recentemente (PINHO; MORETTI, 2020).

O uso de Softwares de Geometria Dinâmica (SGD) em seus diversos aspectos (construções geométricas, prova, potencial semiótico, criação e resolução de problemas) como uma ferramenta auxiliar no ensino e aprendizagem da Geometria nas escolas do Ensino Básico e nas universidades têm sido amplamente discutido e divulgado (BUSSI, MARIOTTI, 2008; GRAVINA, 1996; GRAVINA, 2015; KONDRATIEVA, 2013; LABORDE, 2000,2001; LEIKIN, 2015; MARIOTTI, 2013; NÓBREGA, SIPLER, 2020; STORMOWSKI, GRAVINA, LIMA, 2013; VILLIERS, 2014). Pode-se descrever primariamente um SGD como “uma régua e um compasso computacionais”, o que deveria aliviar as dificuldades e imprecisões do manuseio das ferramentas régua, compasso e lápis. De fato, isso ocorre. O uso das ferramentas tradicionais muitas vezes “não dá certo”. Veja-se, por exemplo, a construção, com aquelas ferramentas, de um hexágono regular inscrito em uma circunferência dada, ou de um pentágono

regular nessa circunferência. Devido às imprecisões das três ferramentas, em geral o polígono “não fecha”, embora a construção seja exata em termos de sua justificativa teórica. Um SGD é mais *preciso* do que as três ferramentas citadas, porém não é *exato*, e será visto aqui a razão disso. Antes, é necessário diferenciar *precisão* de *exatidão*. Precisão diz respeito à medição com erro calculável. Na prática, todas as medições estão sujeitas a um erro. Exatidão é a idealização platônica de uma medição. Uma medida não sendo exata implica, portanto, em algum tipo de erro, e esse erro, se não controlado, pode afetar resultados.

A maior potencialidade de um SGD porém, não é a sua precisão. Há outra potencialidade mais importante ainda caracterizada pelo adjetivo “Dinâmica”: a possibilidade de modificar uma figura mantendo determinados atributos invariantes relacionados a essa figura dinâmica. Por exemplo, ao se traçar as alturas de um triângulo e posteriormente modificar esse triângulo, os segmentos traçados como alturas também se modificam para novas alturas do triângulo modificado. Isso abre um mundo inteiramente novo em termos de ensino-aprendizagem e investigação em Geometria. No exemplo citado, pode-se observar ainda a propriedade da intersecção das retas suporte das três alturas em um ponto chamado ortocentro do triângulo. No caso do GeoGebra, essa característica dinâmica se realiza na ferramenta “Mover”. Esse movimento das figuras é aparentemente contínuo, mas só aparentemente.

Um paralelo interessante, e que ajuda a entender esse aspecto da percepção da continuidade de um movimento, seria a projeção de um filme em modo analógico (como antigamente, através de material de celuloide): o que é percebido como contínuo é na verdade uma sucessão rápida da projeção (homotética) em uma tela de muitos quadros gravados em um rolo de celuloide que o nosso olho capta como algo contínuo. Uma grande quantidade de quadros, mas uma quantidade *finita* e, portanto, *discreta* de quadros é que gera o filme que assistido. Compreender esse aspecto de um SGD ajuda a entender suas limitações. Se bem compreendidas essas limitações, que podem gerar certas inconsistências com relação à teoria, será possível verificar que elas são próprias de qualquer SGD. Deve-se ressaltar aqui que destacar e tentar entender as limitações de uma ferramenta não diminui o seu valor utilitário. A compreensão dessas limitações permite que se possa trabalhar melhor e corretamente com essa ferramenta e até mesmo tirar proveito delas. Esses softwares são muito semelhantes em suas propriedades, mas alguns deles permitem realizar certas ações de forma mais vantajosa em termos de suas potencialidades. Por outro lado, será visto aqui porque algumas limitações comuns a todos eles são intransponíveis.

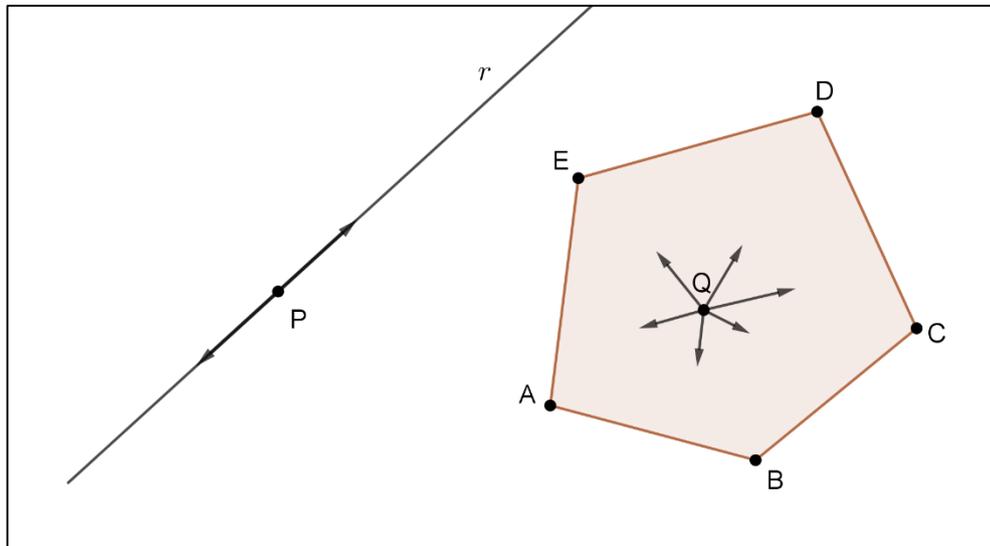
O GeoGebra, que é o SGD que será utilizado neste trabalho, apresenta alguns aspectos vantajosos em relação a outros SGD. Em primeiro lugar, o GeoGebra é um software livre, o que permite ampla acessibilidade. Em segundo lugar, o GeoGebra introduziu a ideia de, conjuntamente, apresentar as representações algébrica (analítica) e figural (sintética) de um objeto geométrico, respectivamente, por meio de suas “Janela de Álgebra” e “Janela de Visualização”. A “Janela de Álgebra” informa dados quantitativos importantes (área e perímetros de figuras, comprimentos de segmentos, coordenadas de pontos) que poderão ser usados em investigações qualitativas (sintéticas). Além disso, essa janela permite que alguns dos elementos da figura possam ser “escondidos” ou “exibidos” (o que significa que esses elementos não foram apagados, podendo ser exibidos de volta) com mais facilidade.

Em terceiro lugar, o GeoGebra com a possibilidade de se rotular automaticamente um objeto geométrico permite, em alguns casos, perceber de imediato certas inconsistências (como o surgimento de dois pontos onde deveria haver apenas um), consequência de suas próprias limitações, algo que pode passar despercebido com outros SGD. Pouca atenção tem sido dada a essa qualidade do GeoGebra, talvez porque pouco se chame atenção para as limitações dos SGD. Em quarto lugar, o GeoGebra traz, na opção “Arredondamento”, uma precisão numérica de até 15 casas decimais, o que permite também entender melhor a dualidade *precisão/exatidão* em medidas. Em quinto lugar, a possibilidade de aproximar ou afastar (“zoom”) uma figura na “Janela de Visualização” permite que se possa analisar uma figura em seus detalhes e, mais importante ainda, que se possa realizar um teste de arrasto (“drag test”) com maior precisão.

Um teste de arrasto ocorre quando é utilizada a ferramenta “Mover” para comprovar, por exemplo, uma determinada propriedade geométrica, como citado acima no caso do ortocentro de um triângulo. Esse teste pode ser realizado também para verificações quantitativas, por exemplo, no caso da determinação de máximos ou de mínimos de áreas, perímetros ou medidas de segmentos e de ângulos. Deve-se ressaltar que há uma grande diferença, em termos de uma verificação em um teste de arrasto, entre mover um ponto sobre uma reta, uma semirreta ou um segmento e mover um ponto no plano. No primeiro caso, unidimensional, o ponto se move com um grau de liberdade e no segundo caso, bidimensional, o ponto se move com dois graus de liberdade. A Figura 25 mostra as situações de ponto movendo-se com um grau e com dois graus de liberdade: O ponto P pode se mover na reta r em uma única direção (e dois sentidos possíveis), enquanto que o ponto Q pode se mover em uma infinidade de direções no interior do polígono ABCDE, mas em duas dimensões. Qual a diferença, em termos de análise de uma situação geométrica? Por exemplo, se essa situação for

a determinação da posição do ponto (P ou Q) em que um certo valor, associado a esses pontos (como um valor máximo ou um valor mínimo) deve ser atingido, então é mais difícil “controlar” a posição do ponto no caso bidimensional devido à infinidade de direções possíveis para mover o ponto, enquanto que no caso unidimensional há somente uma única direção (e dois sentidos).

Figura 25 – Os pontos P e Q podem se mover em espaços dimensionais distintos.



Fonte: O autor.

Essa problemática dimensional, abordada por Duval (2012), influencia nossa capacidade de perceber propriedades geométricas das figuras. Um exemplo para o primeiro caso é a investigação, via um SGD, do problema de minimização de Heron e, para o segundo caso, o problema de minimização de Fermat (PASQUALI, 2004, p. 20 e 61).

Há outras potencialidades importantes do GeoGebra, comuns a outros SGD que não serão destacadas aqui. A seguir serão analisadas as razões das limitações de um SGD.

As razões que explicam porque podem ocorrer inconsistências causadas pelas limitações de um SGD são duas: uma de ordem epistemológica e outra de ordem física (material/tecnológica). A explicação epistemológica tem suas origens há cerca de dois mil e quinhentos anos atrás com a descoberta pelos matemáticos (geômetras) gregos da existência de pares de segmentos incomensuráveis (FRITZ, 1944). Esse talvez tenha sido um dos momentos mais dramáticos da história da matemática, em que a exatidão platônica deu lugar à precisão, ou à aproximação das medidas. E com razão: os matemáticos só vieram a compreender esse fato, de forma consistente, no final do século XIX. Os números irracionais vieram adicionar a não exatidão às nossas máquinas, por mais modernas que elas sejam. A impossibilidade de se obter uma medida com exatidão permanece em nosso mundo essencialmente dos racionais e os

SGD não fogem disso. A segunda explicação é de ordem física: a tela de um computador não é (também como consequência da razão epistemológica citada acima), e nem poderá ser, um “*continuum*” e nem sequer um conjunto denso (no sentido topológico) de pontos no plano. Ela não passa de um conjunto finito, portanto discreto, de pontos (pixels) que geram as imagens. Por esse motivo, o processo de medição em um SGD pode ficar comprometido.

4.2 O POTENCIAL SEMIÓTICO DE UM SGD

A relação entre o conhecimento das potencialidades e limitações de uma ferramenta como um SGD, bem como todos os conceitos que emergem quando cada estudante usa a ferramenta para resolver problemas geométricos, e o significado teórico desses conhecimentos, é o que caracteriza o chamado *potencial semiótico* da ferramenta (BUSSI, MARIOTTI, 2008; MARIOTTI, 2009; MARIOTTI, 2013; STORMOWSKI, GRAVINA, LIMA, 2013). O que se segue é um dos aspectos do potencial semiótico do GeoGebra.

Os Softwares de Geometria Dinâmica (SGD) são ferramentas que podem servir de apoio no ensino e nas investigações em Geometria, tanto para a resolução como para a criação de problemas e conjecturas. Além de ser uma *régua e um compasso no computador*, o que permite uma maior precisão no traçado dos objetos geométricos, um SGD possui uma qualidade essencial para o estudo de investigações, que é o seu dinamismo. O adjetivo *dinâmica* significa que, além da possibilidade de se construir uma figura (representação figural), sob certas hipóteses e com determinadas propriedades, é possível modificar essa figura, por meio de deslocamento de alguns de seus elementos, e manter aquelas propriedades se elas forem características invariantes da figura. Por exemplo, se são dados uma reta e um ponto quaisquer (na reta ou não incidente a ela), e traçarmos por esse ponto a reta perpendicular àquela reta, e se modificarmos um daqueles dois elementos (movendo-se), então a reta perpendicular inicialmente traçada modificar-se-á mantendo a propriedade de passar pelo ponto dado (ou modificado) e ser perpendicular à reta dada (ou modificada).

Um software por si só não produz nada. É preciso que haja um usuário que interaja com ele através de algum processo. Rabardel (1995) utiliza os termos *artefato* (material ou simbólico) e *esquema de utilização associado*. O artefato se transforma em *instrumento* à medida que são aplicados os esquemas de utilização através de um processo denominado *Gênese instrumental* (Rabardel, 1995, p. 109) que, por sua vez, é “articulada através de dois processos: a *instrumentalização*, relativa à emergência e evolução dos diferentes componentes do artefato, por exemplo, o progressivo reconhecimento de suas potencialidades e suas

limitações; e a *instrumentação*, relativa à emergência e desenvolvimento dos esquemas de utilização” (Bussi; Mariotti, 2008). Segundo o próprio Rabardel:

As Gêneses instrumentais resultam de um duplo processo de instrumentalização e de instrumentação:

- os processos de instrumentalização são dirigidos ao artefato: seleção, reagrupamento, produção e estabelecimento de funções, redirecionamentos, atribuições de propriedades, transformação do artefato, de sua estrutura, de seu funcionamento etc...até a produção integral do artefato pelo sujeito;
- os processos de instrumentação são relativos ao sujeito: à emergência e à evolução de esquemas de utilização e de ação instrumentada: sua constituição, sua evolução por acomodação, coordenação e assimilação recíproca, a assimilação de artefatos novos a esquemas já constituídos etc... (RABARDEL, 1995, p. 4-5, tradução nossa).

A matemática tem como objetos de estudo entes abstratos e somente através dos signos que representam esses entes é que é possível acessá-los e tratá-los, ou seja, através da representação semiótica. O ser humano se relaciona com o mundo por meio da mediação de signos e artefatos. Bussi e Mariotti (2008) desenvolveram a Teoria da Mediação Semiótica para analisar os diferentes tipos de signos envolvidos em atividades de ensino-aprendizagem com o apoio de artefatos. É no desenvolvimento do processo de mediação semiótica que pode ser descrita a evolução de significados que emergem da interação desses signos e “Promover e orientar este processo é uma questão crucial e uma tarefa exigente para o professor” (MARIOTTI, 2012 apud STORMOWSKI; GRAVINA; LIMA, 2013, p. 6).

Ao fazer isso, o professor agirá tanto no nível cognitivo como no nível metacognitivo, ambos estimulando a evolução dos significados e guiando os alunos para terem consciência de seu *status* matemático. Em suma, por um lado, significados pessoais estão relacionados ao uso do artefato, em particular em relação ao objetivo de realizar a tarefa; por outro lado, significados matemáticos podem estar relacionados ao artefato e seu uso. Essa dupla relação semiótica será chamada de *potencial semiótico do artefato* (Bussi; Mariotti, 2008, p. 754, tradução nossa).

Resumindo: “O potencial semiótico dos SGD, estabelece exatamente esta relação entre os signos que emergem da relação com o artefato e aqueles conceitos estabelecidos culturalmente como conhecimento matemático” (STORMOWSKI; GRAVINA; LIMA, 2013, p. 8).

Nos próximos capítulos serão dados exemplos em que o potencial semiótico do software GeoGebra, emergente da relação dos autores com o artefato, será explorado. Destaca-se aqui, além da consciência das limitações do software por razões epistemológicas (a impossibilidade de se realizar medidas exatas e a limitação de precisão, causando erros de arredondamento) e físicas (o plano, na tela de um computador não é um *continuum*), o emprego do teste de arrasto (*dragging test*, em inglês) para verificação de propriedades e medidas em linhas (um grau de

liberdade), em regiões planas (dois graus de liberdade), em regiões planas através de um procedimento de varredura em uma família de linhas e depois em outra linha, o emprego do lugar geométrico e a aproximação (*zoom*) de objetos.

Neste trabalho descrevemos as atividades com estudantes do Ensino Superior e o potencial semiótico desenvolvido com o uso do GeoGebra por esses estudantes. Também sugerimos algumas fontes de investigação para a criação de problemas: construções geométricas, problemas de otimização (extremos) e recíprocas de resultados.

4.3 EXEMPLOS DE SITUAÇÕES QUE EVIDENCIAM AS LIMITAÇÕES DE UM SGD CAUSANDO INCONSISTÊNCIAS TEÓRICAS

Nesta seção apresentamos três situações que evidenciam as limitações que podem gerar inconsistências com o uso do GeoGebra (ou qualquer outro SGD). Os exemplos descritos nessas situações foram utilizados em atividades com estudantes do Curso de Matemática (tanto Licenciatura como Bacharelado) da UFSC para que eles pudessem tomar consciência das limitações dos SGD. É importante ressaltar aqui que, como estudantes de um curso superior de Matemática, eles já possuíam noções dos fundamentos de matemática (por exemplo, conhecimento aprofundado dos números reais). Essas atividades com os alunos (suas respostas) não são relatadas neste trabalho. Esses exemplos tratam de possíveis inconsistências nas tangências de reta com circunferência e de circunferência com circunferência, na identificação de retas devido à sensibilidade de medida e na impossibilidade de obter intersecção com lugares geométricos ou mesmo na imprecisão de lugares geométricos. Como será visto aqui, essas limitações podem causar confusões nos estudantes e não contribuir para investigações que visem criar novos problemas e conjecturas em geometria. Possivelmente, com a melhoria das definições das imagens nas telas dos computadores (resolução de tela), algumas das inconsistências poderão vir a não mais ocorrer, porém os processos de medição nunca serão exatos.

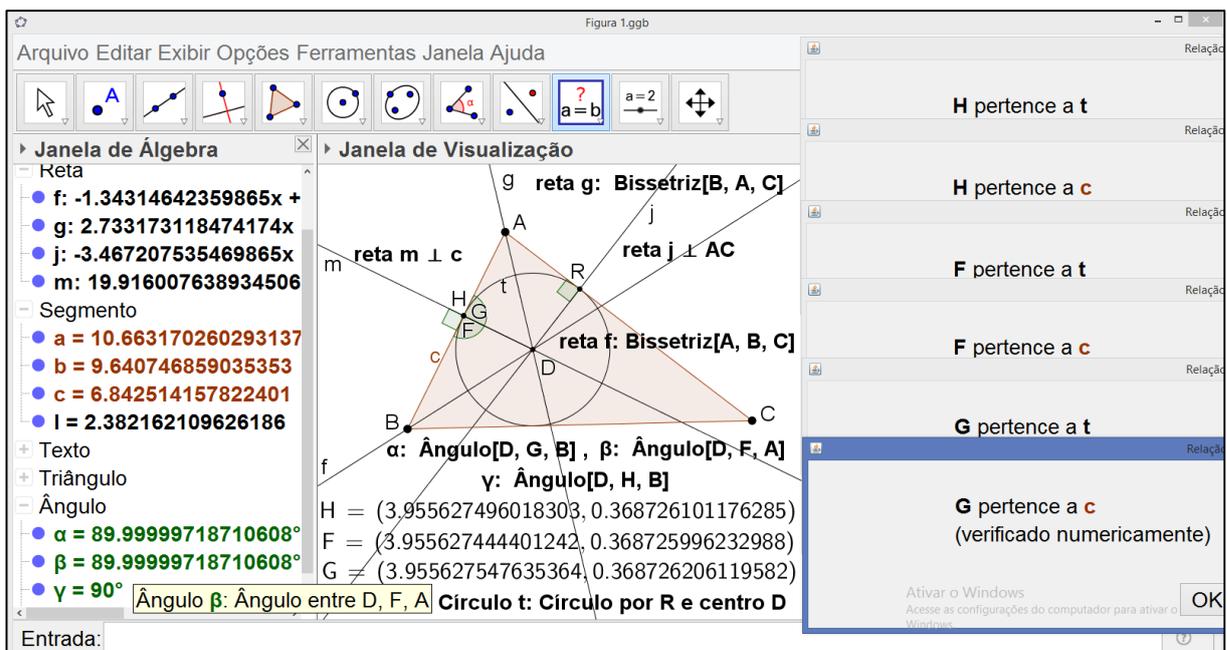
4.3.1 Inconsistências na tangência

Esse tipo de inconsistência pode ocorrer quando se constrói corretamente, do ponto de vista teórico, uma reta tangente a uma circunferência e, na sua intersecção (usando a ferramenta “Intersecção de Dois Objetos”) surgem dois pontos de contato. Os dois pontos são denunciados

não visualmente (aparecem sobrepostos), mas por seus rótulos automáticos (se mantivermos essa opção em “Rotular”). Mais especificamente, pediu-se aos alunos que construíssem um triângulo qualquer e traçassem a circunferência nele inscrita. Uma inconsistência na tangência foi verificada. Para efeito de uma explicação mais clara e completa, será apresentada a nossa construção.

A Figura 26 a seguir é uma cópia da captura de tela de uma construção no GeoGebra em que se tentou colocar o máximo possível de informações, seja na “Janela de Álgebra”, seja na “Janela de Visualização” utilizando rótulos, textos, marcação de ângulos e texto de redefinição de pontos, de modo a expor convincentemente a inconsistência na tangência. Os detalhes a figura são explicados a seguir. Todos os valores e objetos citados na explicação encontram-se na Figura 26.

Figura 26 - Inconsistência na tangência da circunferência inscrita em um triângulo.



Fonte: O autor.

Em um triângulo ΔABC qualquer traçamos as bissetrizes f e g dos ângulos de vértices B e A respectivamente, encontrando-se o incentro D do triângulo. Essas bissetrizes foram traçadas segundo o método de construção com régua e compasso (teoria), mas o mesmo resultado foi obtido por meio da construção usando a ferramenta “Bissetriz”. Em seguida traçamos por D a perpendicular j ao lado \overline{AC} do triângulo, encontrando-se o ponto R na intersecção de j com esse lado. Então DR é o raio da circunferência t inscrita no triângulo, ou seja, essa circunferência deve ser tangente aos três *lados* do triângulo. Usando a ferramenta “Intersecção de Dois Objetos”

procurou-se obter o ponto de tangência da circunferência inscrita t com o lado c (\overline{AB}) do triângulo. Esse ponto deveria ser o ponto de interseção da circunferência inscrita com c . Surpreendentemente surgiram dois pontos, F e G , denunciados pelo GeoGebra por seus respectivos rótulos (estávamos usando a opção “Rotular – Para todos os Objetos Novos”). A seguir foram traçados os ângulos α ($\angle DGB$) e β ($\angle DFA$), obtendo-se medidas menores do que 90° , mas bem “próximas” a esse valor (conferir a “Janela de Álgebra”). Em seguida traçamos pelo centro D a perpendicular m ao lado c (\overline{AB}) do triângulo, obtendo na interseção de m com esse lado o ponto H . Um ângulo reto γ é assim obtido com vértice nesse ponto. Com a opção de arredondamento de 15 casas decimais (comprovada pelos valores na “Janela de Álgebra”) foi possível observar que os três pontos F , G e H são todos distintos (essas coordenadas foram transportadas para a parte inferior da “Janela de Visualização”). Por outro lado, usando a “Relação” de pontos (ver a parte direita da “Janela de Visualização”), pode-se verificar que esses três pontos são colineares (todos estão no lado c do triângulo) e estão na circunferência inscrita t , o que, teoricamente é impossível!

Deve-se destacar aqui que o surgimento dos dois pontos de “tangência” pode não ocorrer inicialmente, mas uma pequena perturbação do triângulo (movendo um de seus vértices) pode levar ao aparecimento desses pontos. A versão do GeoGebra que foi usada em todo este trabalho é a do GeoGebra Classic 5.0.562.0-d. Testou-se também com o GeoGebra Classic 6 e com outro software conhecido¹⁶ obtendo-se os mesmos resultados.

Essa inconsistência com a teoria pode causar uma limitação em um estudo investigativo. Suponha que uma circunferência, obtida através de algumas propriedades, aparente ser tangente a uma reta dada na figura. Gostaríamos de saber, usando o GeoGebra, se de fato a tangência ocorre. O teste da interseção dos dois objetos poderá indicar que não há tangência e sim concorrência devido ao aparecimento de dois pontos, o que pode estar errado. É claro que é sempre possível mover alguns pontos, usando a dinâmica do software, para verificar a veracidade ou a falsidade da tangência.

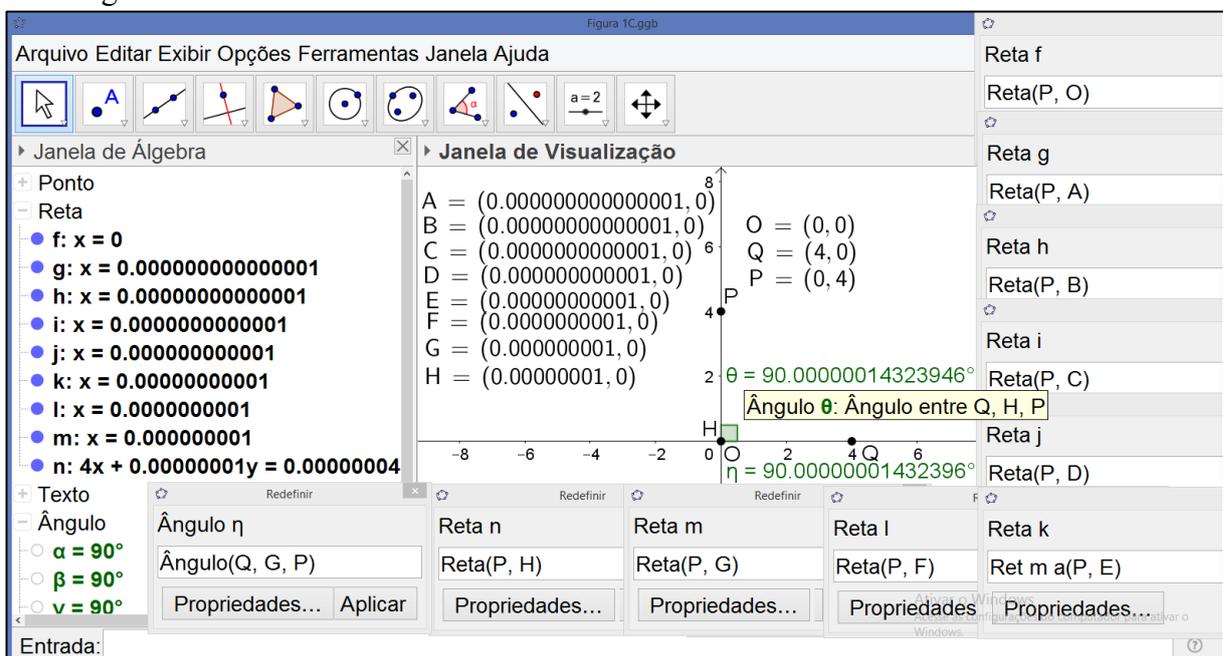
¹⁶ Esse outro software foi o Cabri® II Plus, versão 1.4.3. Nesse caso aparentemente surgia um único ponto, mas isso devido ao fato de que o Cabri não rotulava automaticamente seus pontos. Quando colocamos o cursor sobre o ponto o software perguntava “Que objeto?”, indicando a existência de um segundo ponto ali, o que não era alertado de imediato.

4.3.2 Sensibilidade de medida

Neste exemplo realizamos um experimento que está registrado na Figura 27 que é a cópia da captura de tela da construção descrita a seguir.

Na “Janela de Visualização” foram exibidos os eixos, estabeleceu-se a opção de arredondamento para 15 casas decimais e foram marcados três pontos: a origem $O = (0,0)$, o ponto $P = (0,4)$ no eixo y e o ponto $Q = (4,0)$ no eixo x . Em seguida construiu-se, por meio de suas coordenadas, um conjunto de pontos no eixo x positivo “bem próximos” da origem, as respectivas retas passando por P e por cada um desses pontos.

Figura 27 - Inconsistência de medida – retas distintas e simultaneamente coincidentes



Fonte: O autor

Medimos então os respectivos ângulos com vértices nesses pontos e passando por P e Q:

ponto $A = (10^{-15}, 0)$, reta g (\overrightarrow{PA}) e medimos $\alpha = \widehat{QAP} = 90^\circ$,

ponto $B = (10^{-14}, 0)$, reta h (\overrightarrow{PB}) e medimos $\beta = \widehat{QBP} = 90^\circ$,

ponto $C = (10^{-13}, 0)$, reta i (\overrightarrow{PC}) e medimos $\gamma = \widehat{QCP} = 90^\circ$, ζ

ponto $D = (10^{-12}, 0)$, reta j (\overrightarrow{PD}) e medimos $\delta = \widehat{QDP} = 90^\circ$,

ponto $E = (10^{-11}, 0)$, reta k (\overrightarrow{PE}) e medimos $\varepsilon = \widehat{QEP} = 90^\circ$,

ponto $F = (10^{-10}, 0)$, reta l (\overrightarrow{PF}) e medimos $\zeta = \widehat{QFP} = 90^\circ$,

ponto $G = (10^{-9}, 0)$, reta m (\overrightarrow{PG}) e medimos $\eta = \widehat{QGP} = 90.00000001432396^\circ$,

ponto $H = (10^{-8}, 0)$, reta n (\overrightarrow{PH}) e medimos $\theta = \widehat{QP} = 90.00000001432396^\circ$.

Traçamos ainda a reta f que passa por P e O (coincidindo com o eixo y). As coordenadas dos pontos O , P e Q e dos pontos de A até H foram transcritas para a “Janela de Visualização” de maneira a deixar as equações das retas de f até n visíveis na “Janela de Álgebra”. Ainda nessa janela ficaram visíveis as medidas de três dos ângulos listados acima, α , β e γ . Os rótulos de todos os ângulos foram escondidos, exceto os rótulos dos dois últimos, η e θ , que foram transcritos para a “Janela de Visualização”, sendo a informação sobre a definição do ângulo θ exposta nessa janela (em amarelo). Finalmente, através do dispositivo “Redefinir” pode-se exibir nessa janela quais pontos definem as retas de f até n e ainda quais pontos definem o ângulo η (essa informação cobrindo uma parte inferior da “Janela de Álgebra”).

Quais são as inconsistências reveladas na Figura 2? As retas de g a m passam por P e portanto, cruzam o eixo y , mas suas equações na “Janela de Álgebra” revelam que essas retas são paralelas a esse eixo. Os ângulos medidos com vértices nos pontos de A até F e de lados passando por P e Q (ângulos α , β , γ , δ , ϵ e ζ) mediram 90° (nem todos expostos na figura) e, a partir do ângulo η , de vértice no ponto G , essa medida passa a ser coerentemente um “pouco” maior do que 90° , embora a reta correspondente m seja ainda, segundo sua equação na “Janela de Álgebra”, perpendicular ao eixo x . A partir do ponto H passa-se a ter então de fato nessa janela uma reta (n) com coeficiente angular negativo e o correspondente ângulo θ com medida “ligeiramente” maior do que 90° , o que também é consistente matematicamente. Pode-se então dizer que a sensibilidade na medida (permitindo distinguir os objetos geométricos) é da ordem de 10^{-8} unidades.

4.3.3 Impossibilidade de obter interseção com lugares geométricos

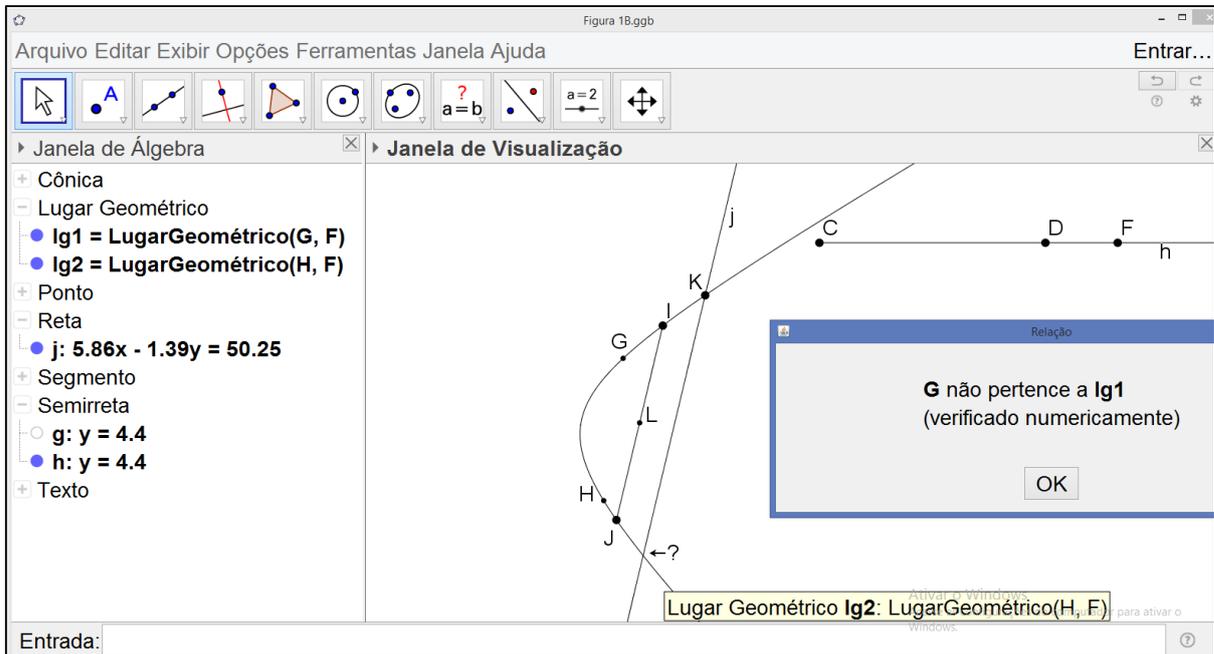
Suponhamos que, estudando uma construção em uma figura, queira-se estabelecer o lugar geométrico de um ponto com certas propriedades nessa figura. A ferramenta “Lugar Geométrico” possibilita encontrar esse conjunto de uma maneira melhor que habilitando o “Rastro” do ponto. Esse lugar geométrico – em geral uma curva – aparece desenhada na “Janela de Visualização” e indicada na “Janela de Álgebra” como **lg...= Lugar Geométrico...** Não é possível saber a equação de tal curva ou a que classe de curvas ela pertence. No entanto, se houver uma suspeita (intuição) de qual curva ela possa ser, então pode-se tentar caracterizá-la por meio de alguma propriedade geométrica (não necessariamente analítica) que seja satisfeita

por essa curva. Por exemplo, se a curva traçada como um lugar geométrico parecer uma circunferência, pode-se traçar três segmentos com extremidades nessa curva (cordas), sem que dois quaisquer sejam paralelos, e verificar se as mediatrizes dos três segmentos são concorrentes. Isso pode ser feito, de fato, porque é possível marcar um ponto em um lugar geométrico usando a ferramenta “Ponto em Objeto”. No caso de uma cônica há uma propriedade, demonstrada via geometria analítica, que diz que os pontos médios de “cordas” (segmentos com extremidades na cônica) paralelas são colineares, sendo que as retas que contêm os pontos médios de cada família de cordas paralelas são concorrentes no ponto de interseção dos eixos da cônica, se ela for uma elipse ou uma hipérbole, e são paralelos ao eixo da cônica se ela for uma parábola (YEFIMOV, 1964, p.109). Mas no caso da cônica como lugar geométrico obtido pelo software, a propriedade descrita acima é impossível de se tentar verificar, e no caso da circunferência, pode ocorrer uma inconsistência com a teoria, como veremos a seguir.

A Figura 28 é a cópia de uma captura de tela de uma construção no GeoGebra em que se obteve, usando a ferramenta “Lugar Geométrico”, o lugar geométrico dos centros de circunferências tangentes simultaneamente a duas circunferências dadas e de raios distintos (escondidas na figura). Esse lugar geométrico é sabidamente uma hipérbole. Na figura aparece apenas um ramo da hipérbole construído em duas partes, que aparecem como lg_1 e lg_2 . Tentando aplicar a propriedade citada no parágrafo anterior, marcamos os pontos I em lg_1 e J em lg_2 , traçamos a corda \overline{IJ} e marcamos seu ponto médio L. Em seguida, marcamos um ponto K em lg_1 e traçamos a reta paralela j ao segmento \overline{IJ} . Finalmente tentamos marcar a interseção de j com lg_2 (por meio da ferramenta “Interseção de Dois Objetos”), mas o software não executa interseção de objetos em que um deles é um lugar geométrico provavelmente porque o lugar geométrico é obtido numericamente. Assim, ficamos impossibilitado de verificar uma possível conjectura¹⁷ caso fosse possível intuir que a curva pudesse ser uma cônica.

¹⁷ O Cabri© II Plus marca essa interseção, mas constatou-se que a propriedade não se verificava, indicando problemas com o software. Na verdade é mais confuso do que isso. Um ponto de interseção é marcado, mas o software não confirma que esse ponto está sobre o objeto.

Figura 28 - Impossibilidade de marcar pontos de interseção com um lugar geométrico: o software não indica a interseção da reta j com $lg2$.



Fonte: O autor.

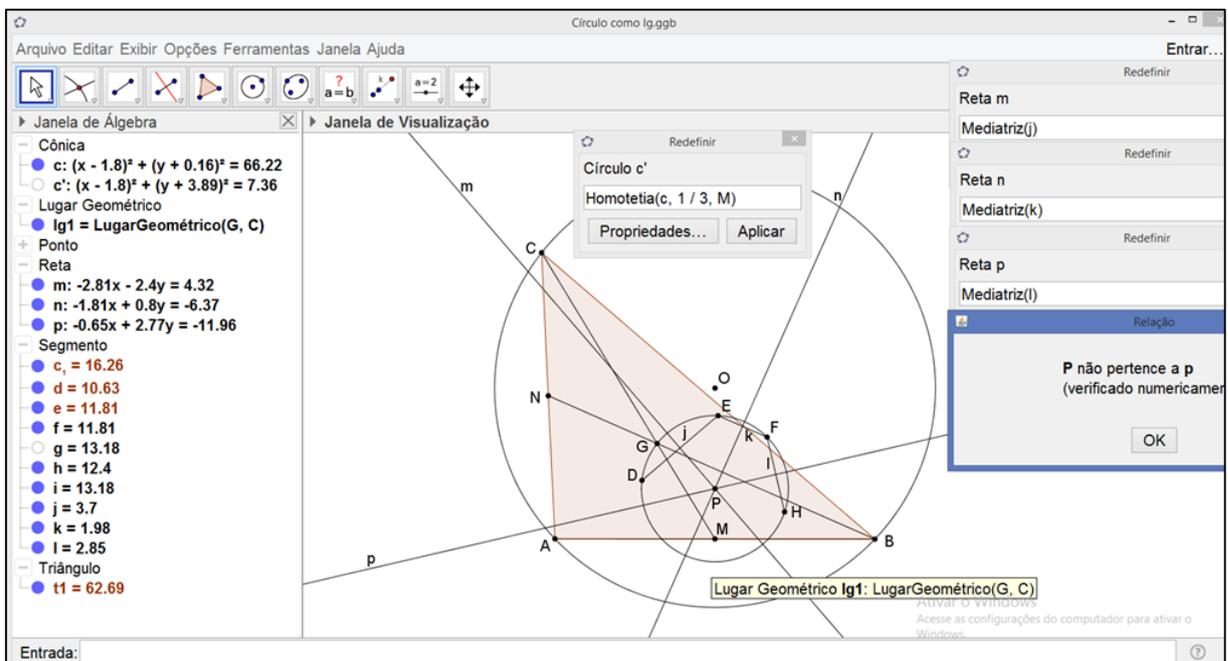
Além disso, há outra inconsistência, como se pode ver na Figura 28. O lugar geométrico $lg1$ foi gerado pelo ponto G conforme o ponto F variava na semirreta h (CF e DF são as duas distâncias do ponto G aos focos da hipérbole – que não aparecem na figura – sendo CD sua diferença constante), mas a relação no quadro à direita nos diz que G não pertence a $lg1$.

No entanto, pode-se tentar contornar esse problema de duas maneiras. A primeira seria marcar cinco pontos distintos sobre o lugar geométrico obtido, usando a ferramenta “Ponto Sobre Objeto”, e traçar a cônica que passa por esses cinco pontos (usando a ferramenta “Cônica por Cinco Pontos”). Porém, isso foi testado e também não funciona, o que permite suspeitar que o lugar geométrico obtido não é exato. A outra maneira seria marcar cinco pontos distintos por meio da propriedade geradora da curva (sem no entanto usar o lugar geométrico) e traçar uma cônica por esses cinco pontos. Depois, obtendo mais pontos pela propriedade geradora, seria feita uma verificação para saber se os pontos pertenceriam ou não àquela cônica (usando a ferramenta “Relação”, que diria se o ponto pertence ou não sobre o objeto). Esta maneira é mais efetiva e comprovaria, por meio de uma verificação de um número finito de casos, se a curva é ou não uma cônica (“provando” através da figura).

No caso de uma investigação em que o lugar geométrico indique que a curva é uma circunferência (o que sempre é suspeito, pois poderia ser uma elipse de excentricidade muito “próxima” de zero, ou uma curva fechada qualquer), a propriedade a ser verificada é,

aparentemente, mais simples. De fato, não seria necessário obter interseções de retas com lugares geométricos, bastando apenas marcar três cordas da curva dada pelo lugar geométrico e verificar se suas mediatrizes seriam concorrentes. Mas isso não ocorre, pois, como foi observado anteriormente, o lugar geométrico não é exato. A Figura 29 é uma cópia da captura de tela do estudo do lugar geométrico do baricentro de triângulos de base fixada \overline{AB} e inscritos em uma circunferência fixada c . Como a distância do baricentro ao ponto médio M de \overline{AB} é igual a um terço do comprimento da mediana \overline{CM} , então esse lugar geométrico é uma circunferência c' homotética à circunferência c com centro de homotetia M e razão um terço.

Figura 29 - O ponto P , interseção das mediatrizes m e n das cordas \overline{DE} e \overline{EF} , respectivamente, não está na mediatriz p da corda \overline{FH} .



Fonte: O autor.

Na Figura 29 podemos ver o lugar geométrico $lg1$ na “Janela de Visualização”. A circunferência c' , homotética à circunferência c não aparece nessa janela, mas está destacada em um quadro “Redefinir” no alto da janela e está indicada na “Janela de Álgebra”. Os pontos D , E , F e H foram tomados em $lg1$. Pode-se ver que o ponto de interseção P das mediatrizes m e n das cordas \overline{DE} e \overline{EF} , respectivamente, não está na mediatriz p da corda \overline{FH} , como indicado no quadro de “Relação”, e portanto, $lg1$ não seria uma circunferência. Aqui também o problema poderia ser contornado escolhendo três posições distintas para o vértice C na circunferência c e, em seguida, marcando os três baricentros correspondentes aos três triângulos ΔABC , e traçar a circunferência que passa por esses três baricentros. Depois bastaria verificar se qualquer outro baricentro do triângulo ΔABC , com C percorrendo c , estaria naquela circunferência. Essa

maneira de contornar o problema causado pela não exatidão do software foi utilizada nos experimentos realizados com os estudantes e que iremos descrever no penúltimo capítulo desta trabalho.

Essas inconsistências não impedem que se possa fazer um bom trabalho investigativo, mas o usuário do software (professores e estudantes) deve estar consciente de que elas podem ocorrer e ter conhecimento das razões (epistemológica e física) que as causam.

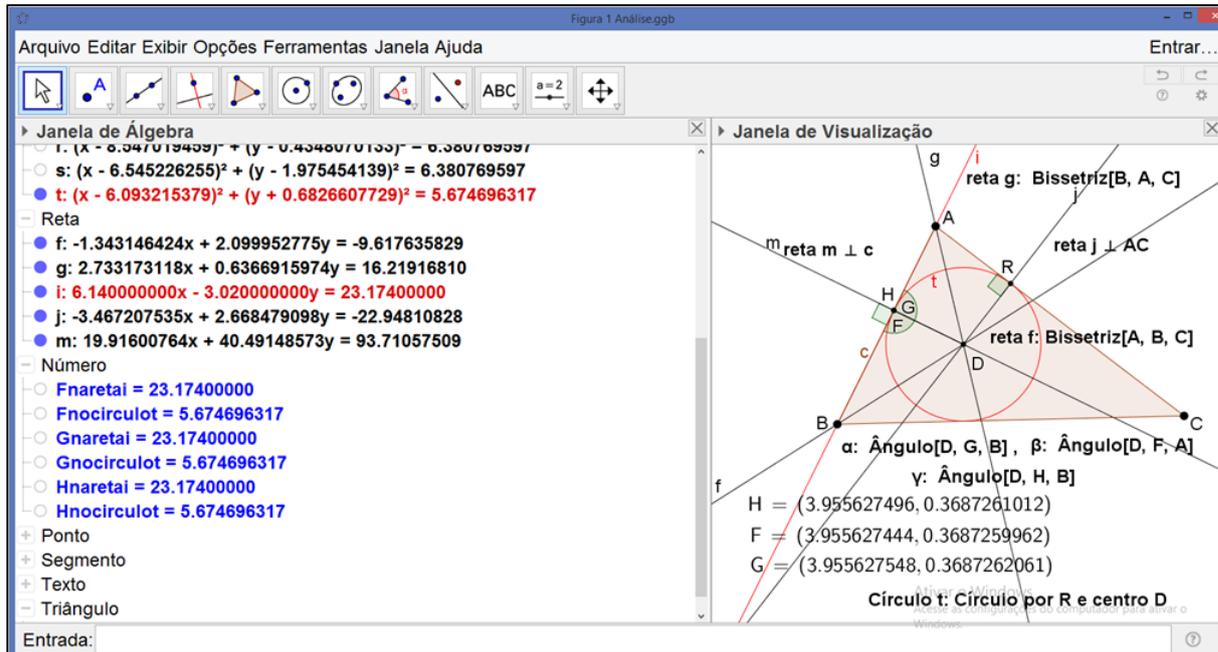
Na próxima seção serão analisados os tipos de erro que implicam em cálculos que levam a algumas imprecisões e uma simulação do plano será apresentada para que se possa entender como três pontos distintos e sabidamente colineares apareçam também como pertencentes a uma circunferência, como na situação do exemplo na Figura 29.

4.4 PRECISÃO E NÃO EXATIDÃO: ERROS DE CÁLCULO E A REPRESENTAÇÃO FÍSICA LIMITADA DO PLANO COMO UM CONJUNTO DE PONTOS DISCRETOS

Como é possível que tenha ocorrido a inconsistência verificada no exemplo da figura 26? Como o GeoGebra realiza seus cálculos? A Figura 30 é uma cópia da captura de tela da mesma situação, porém com os cálculos realizados pelo GeoGebra para verificar se os três pontos colineares F, G e H podem estar na mesma circunferência através da substituição de suas respectivas coordenadas nas equações da reta i (que contém o lado c do triângulo) e da circunferência t .

As coordenadas dos pontos distintos F, G e H (transportadas para a parte inferior da “Janela de Visualização”) foram substituídas nas equações da reta i e da circunferência t (ambas em vermelho na “Janela de Álgebra”). Os resultados obtidos (Números em azul na “Janela de Álgebra”), com arredondamento de 10 algarismos significativos, pela substituição das coordenadas dos pontos F, G e H na equação da reta i estão identificados como “Fnaretai”, “Gnaretai” e “Hnaretai”, respectivamente, e os valores obtidos pela substituição das coordenadas dos pontos F, G e H na equação da circunferência t como “Fnocirculot”, “Gnocirculot” e “Hnocirculot”, respectivamente. Observe-se que esses valores são idênticos. Isso está consistente com a pertinência daqueles pontos tanto na reta como na circunferência.

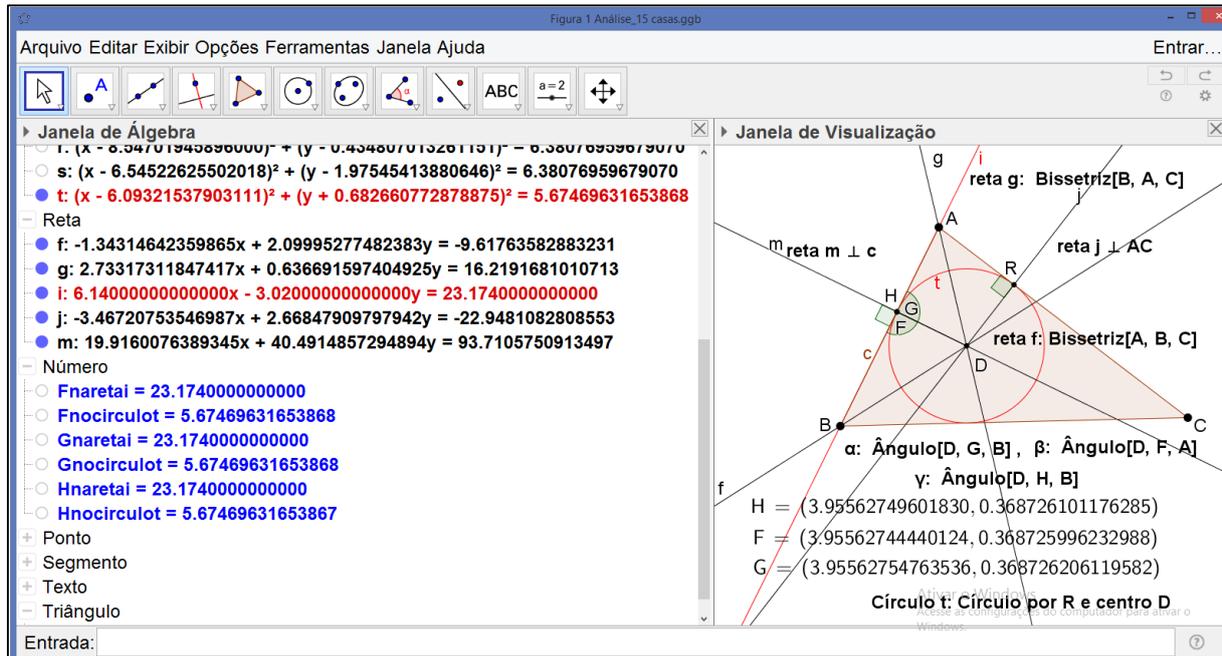
Figura 30 - Cálculos do GeoGebra para as coordenadas dos pontos F, G e H nas equações da reta i e da circunferência t com arredondamento de 10 algarismos significativos.



Fonte: O autor.

Porém, se a mesma construção for feita com arredondamento de 15 algarismos significativos, então o resultado para “Hnocirculot” já fica (minimamente) diferente dos outros dois, o que seria esperado teoricamente. A Figura 31 mostra esse fato.

Figura 31 - Cálculos do GeoGebra para as coordenadas dos pontos F, G e H na reta i e da circunferência t com arredondamento de 15 algarismos significativos.



Fonte: O autor.

Esses resultados mostram que o GeoGebra identifica seus objetos na “Janela de Visualização” segundo cálculos que indicam *erros de arredondamento*.

Erros de arredondamento estão associados ao número de algarismos significativos com que um determinado sistema, ou software, trabalha. Já os chamados *erros de truncamento* ocorrem em processos com uma infinidade de operações ou com um grande número de casas (inteiras ou decimais) e que, por razões práticas são truncados (BARROSO et al., 1987, p. 12). Os erros de arredondamento podem se propagar em sucessivas operações e os resultados podem também depender da ordem com que são realizadas as operações. Em Barroso et al. (1987, p. 14) pode-se encontrar um interessante exemplo que será reproduzido aqui.

Considere o seguinte sistema de duas equações lineares

$$0,0030 x_1 + 30,0000 x_2 = 5,0010$$

$$1,0000 x_1 + 4,0000 x_2 = 1,0000$$

A solução exata desse sistema é $x_1 = 1/3$ e $x_2 = 1/6$.

O GeoGebra resolve corretamente o sistema com arredondamento, conforme se pode ver na Figura 32, que é cópia da captura de tela da resolução do sistema por escalonamento de matrizes (matrizes m_1 e a correspondente matriz escalonada m_2). O problema que pode ocorrer é que se o arredondamento é precoce, em que $5001/3$, que surge da multiplicação da primeira

equação por $1/0,003 = 1666,66\dots$, é arredondado para 1667, então o sistema passaria a ser, após mais algumas operações entre linhas

$$x_1 + 10000 x_2 = 1667$$

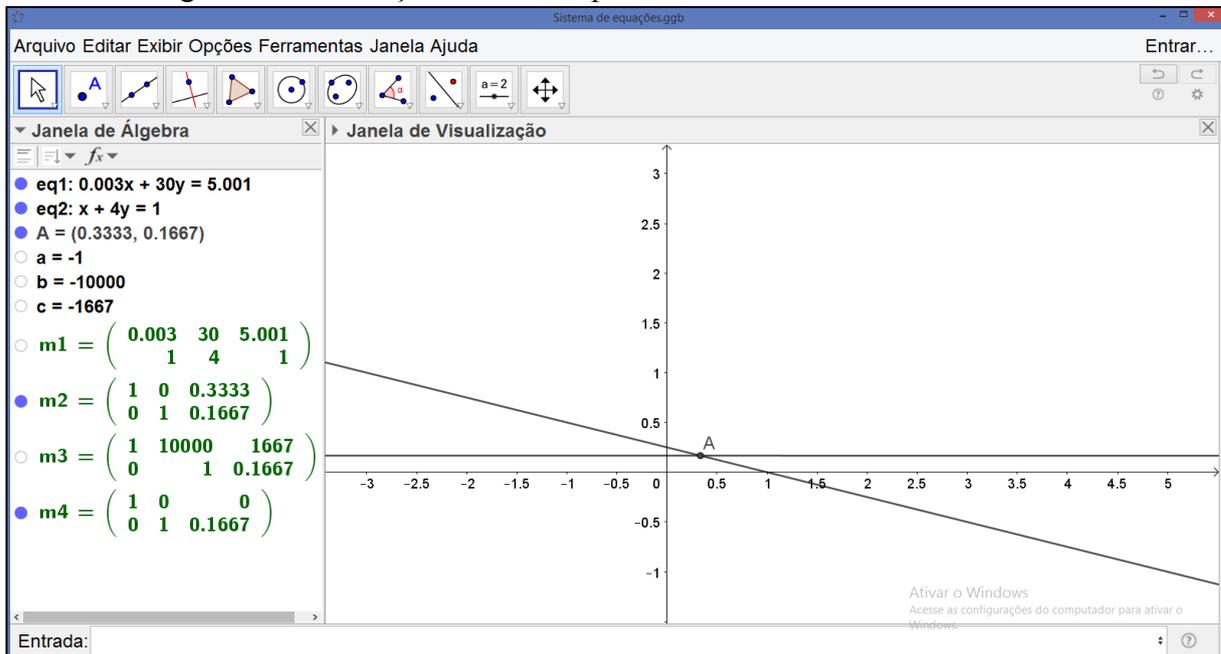
$$x_2 = 0,1667$$

Esse sistema daria soluções $x_1 = 0$ e $x_2 = 0,1667$, sendo o valor de x_1 errado para o sistema original. Ver na Figura 32 as matrizes m_3 e sua escalonada m_4 .

Observe ainda que, na Figura 32, as representações figurais das duas equações na “Janela de Visualização” mostram duas retas cuja interseção é o ponto A, cujas coordenadas dão a solução do sistema.

Nesse exemplo não há, de fato, nenhum problema com os cálculos do GeoGebra, mas esses cálculos podem ser alterados por arredondamento como visto nas Figuras 30 e 31.

Figura 32 - Resolução do sistema por escalonamento de matrizes no GeoGebra.

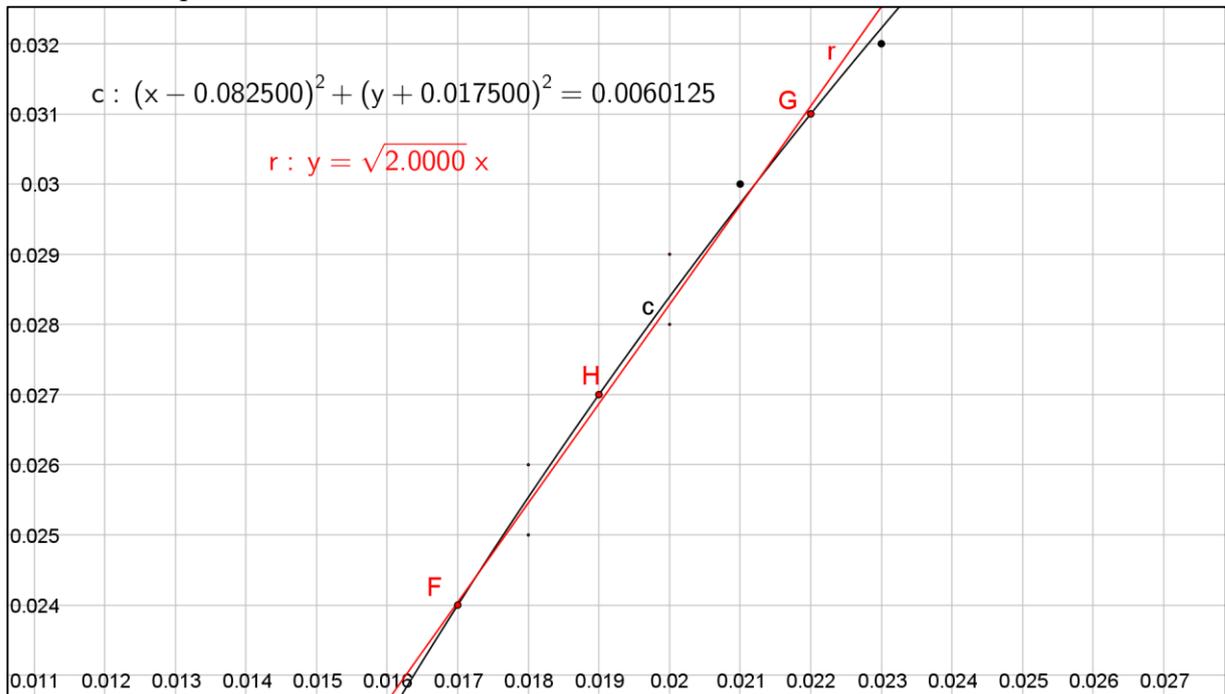


Fonte: O autor.

Voltando ao exemplo da Figura 26, seria interessante abordá-lo sob o ponto de vista figural e considerando que o plano da tela do computador não é um *continuum*. Fazendo uma simulação, suponha que os pixels da tela do computador sejam representados pelos pontos de interseção de uma malha de distância de 0,001 como na Figura 33. Nessa figura, a reta r (em vermelho), dada pela equação $y = \sqrt{2}x$, tem coeficiente angular irracional, e portanto, não

passaria por nenhum dos vértices da malha. Então, nessa malha, a reta seria dada por pontos discretos (isolados), alguns marcados em preto na figura mais os três pontos F, G e H (em vermelho). Além disso, está desenhada a circunferência c que passa por esses três pontos. Tanto a reta r como a circunferência c estão representadas na figura apenas como referência e suas equações estão ali representadas.

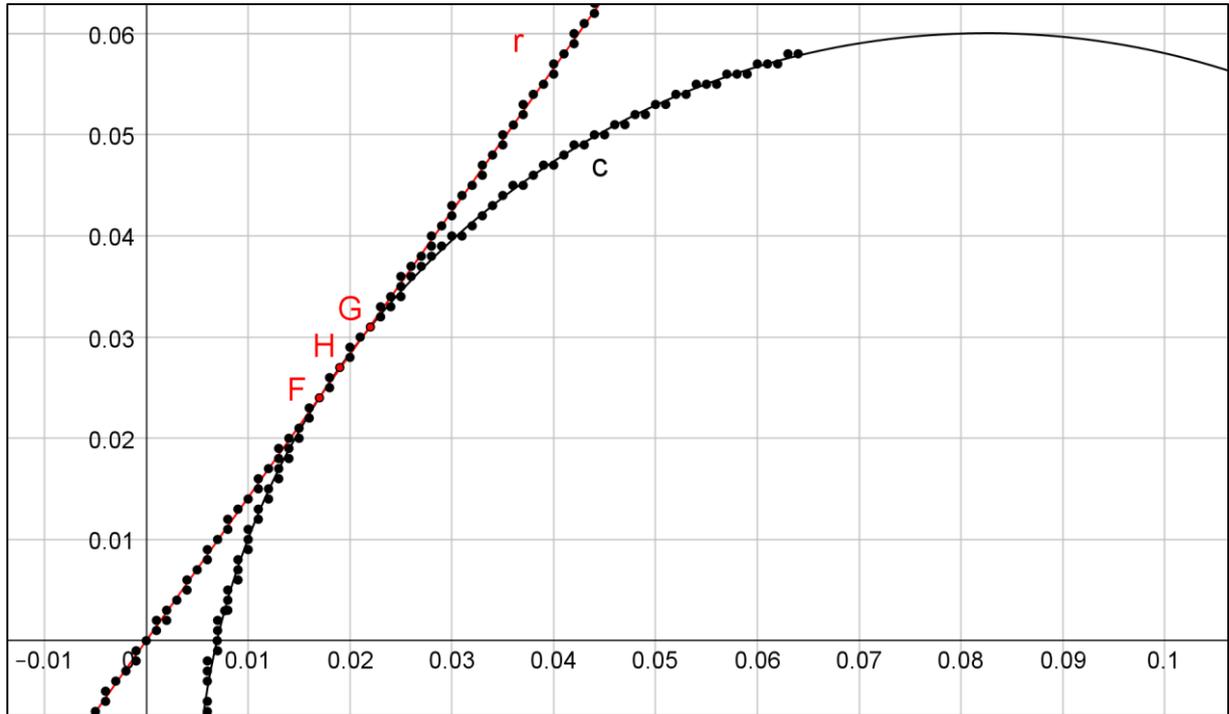
Figura 33 - Reta e circunferência dadas por pontos discretos, em uma simulação da malha de pixels.



Fonte: O autor.

O distanciamento na figura (através do *zoom*) permite perceber os pontos da malha que compõem a reta e a circunferência (Figura 34). Observemos os pontos da malha se acumulando nas duas curvas:

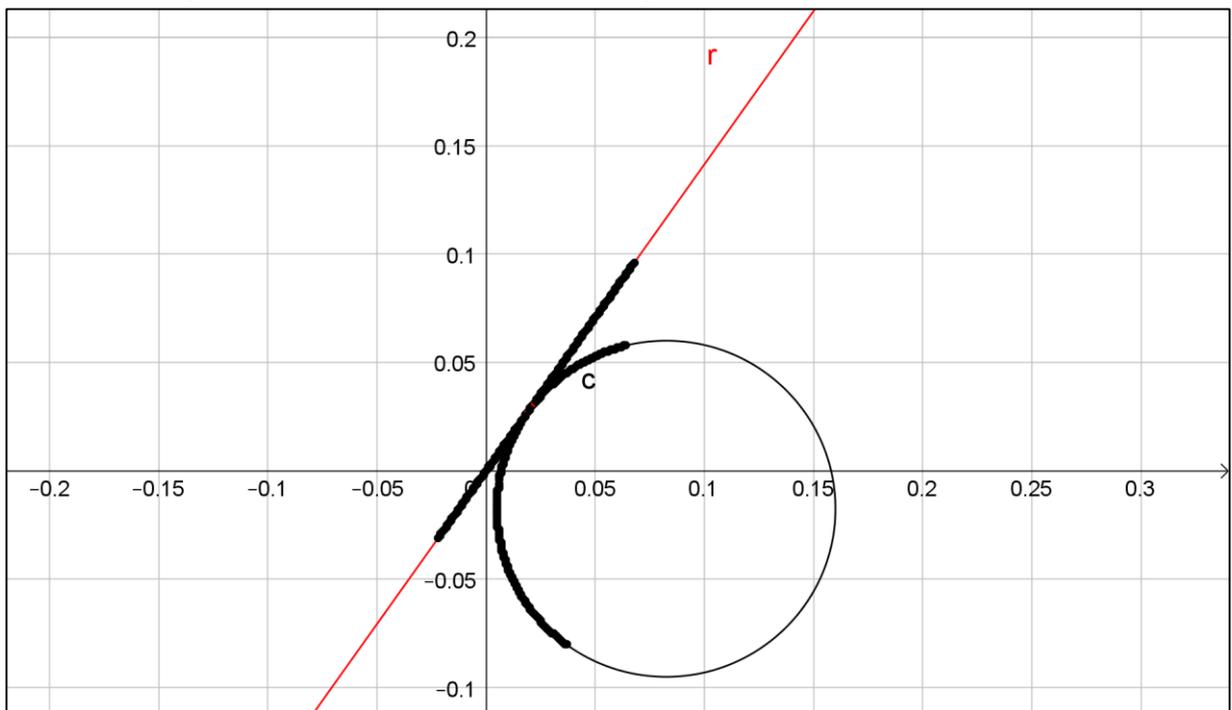
Figura 34 - Reta e circunferência dadas por pontos discretos, em uma simulação da malha de pixels e com distanciamento por *zoom*.



Fonte: O autor.

Com um distanciamento ainda maior já se pode ver os pontos da malha acumulados formando aparentes curvas contínuas (Figura 35).

Figura 35 - Reta e circunferência dadas por pontos discretos, em uma simulação da malha de pixels e com maior distanciamento por *zoom*.



Fonte: O autor.

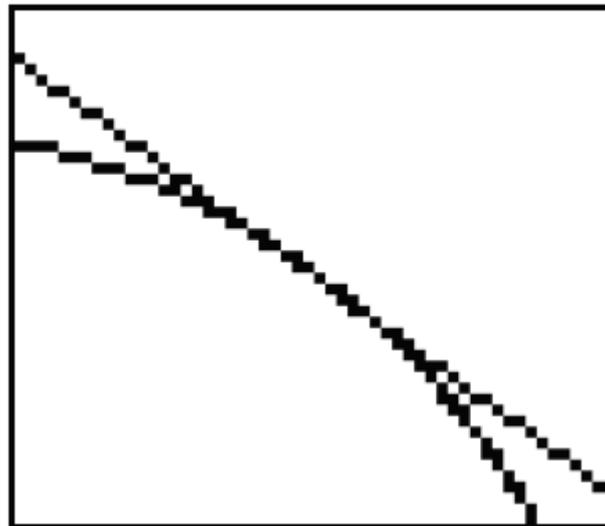
As simulações observadas nas Figuras 33, 34 e 35 mostram como seria possível que o GeoGebra reconhecesse três pontos distintos e colineares F, G e H estando em uma mesma circunferência. Na Figura 35 tem-se a impressão de que a reta e a circunferência são tangentes.

Segundo Bellemain (1992) em sua tese de doutorado estudando o desenvolvimento do Cabri Géomètre, os computadores usam dois tipos algoritmos para calcular as figuras:

Dois algoritmos são essencialmente aplicados para a representação dos objetos geométricos clássicos: segmentos, circunferências e elipses. Um deles é utilizado para representar os segmentos, chamado algoritmo de Bresenham. Outro, chamado de algoritmo de Michener, é usado para representar circunferências e elipses. O algoritmo de Bresenham determina os pixels devem ser enegrecidos entre dois pontos para representar o segmento cujas extremidades são esses pontos. A forma de “escada” (isto é, o comprimento e a altura dos traçados) que representa um segmento na tela depende da inclinação e do sentido do traçado. [...] Para o traçado de uma circunferência, o algoritmo de Michener determina por meio de cálculos somente um oitavo da circunferência e representa o resto baseando-se nas simetrias em relação aos eixos horizontal, vertical, pelas bissetrizes e pelo centro da circunferência. (BELLEMAIN, 1992, p. 185-187, tradução nossa).

Em sua tese Bellemain mostra figuras bem semelhantes às nossas. Ele afirma que as particularidades da geometria da tela aparecem notadamente quando os objetos são tangentes ou confundidos (como sobrepostos). A Figura 36 (Bellemain) é de fato bem parecida com a nossa Figura 34:

Figura 36 – Figura 65 da tese de Bellemain mostrando a tangência entre uma reta e uma circunferência, com vários possíveis “pontos de tangência”.



Fonte: Bellemain (1992, p. 185)

Embora o trabalho de Bellemain fosse sobre desenvolvimento do Cabri, as ideias ali descritas se aplicam a qualquer software de geometria dinâmica, pelos motivos epistemológicos

já descritos aqui. Talvez o GeoGebra de Hohenwarter (2007) utilize outros algoritmos. Não tivemos acesso à dissertação e à tese de Hohenwarter, mas, conforme pudemos comprovar nesta seção as limitações são as mesmas do Cabri. Porém, as vantagens, as potencialidades desses softwares superam, em termos de ensino e aprendizagem de geometria, as suas desvantagens.

Nas próximas seções deste capítulo veremos essas vantagens, através de problemas históricos de extremos (otimização, ou de máximos e mínimos em geometria) e de um problema que criamos, ainda sem a aplicação da metodologia de criação/invenção de problemas com os estudantes, que desenvolvemos para este trabalho.

4.5 PROBLEMAS DE GEOMETRIA COM O ACOMPANHAMENTO DO GEOGEBRA

4.5.1 Problemas históricos de máximos e de mínimos em geometria

Os problemas a seguir podem ser encontrados em Pasquali (2004) e em muitos livros de geometria, como, por exemplo Andreescu, Mushkaro, Stoyanov (2006).

Problemas de extremos em geometria são problemas nos quais deseja-se encontrar valores máximos ou mínimos de medidas de segmentos, perímetros, áreas, ângulos etc. em uma figura dada, ou determinar quais objetos geométricos satisfazem uma condição de extremo tal como perímetro, área etc.

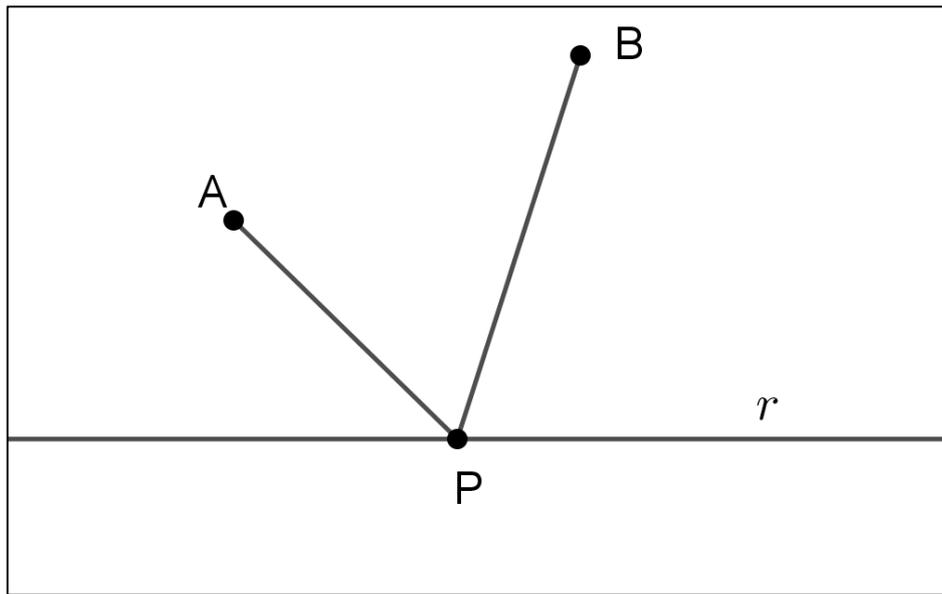
Problemas de extremo em geometria nem sempre possuem solução. Exemplo: determinar os polígonos de área mínima e de área máxima inscritos em uma circunferência dada.

4.5.1.1 Problema de Heron

Heron de Alexandria viveu entre 150 a.C. e 250 D.C. O seu problema é o seguinte:

Dada uma reta r e dados dois pontos A e B , não incidentes a r e no mesmo semiplano em relação a r , encontrar um ponto P incidente a r tal que a soma $AP+BP$ seja mínima.

Figura 37 – O problema de Heron.

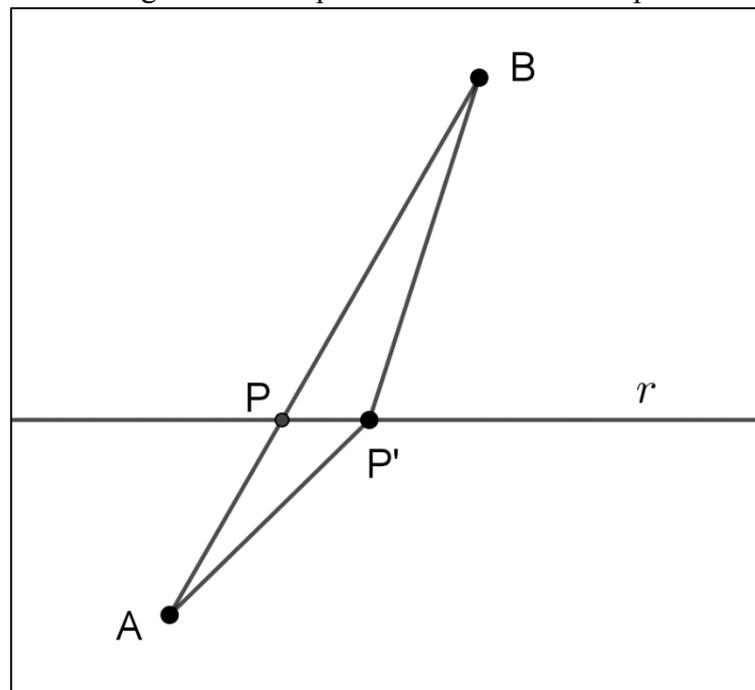


Fonte: O autor.

Da maneira que problema foi enunciado, devemos encontrar um ponto na reta r , ou seja, é um problema de construção geométrica. Alguns dados quantitativos poderiam ter sido fornecidos, tais como as distâncias dos pontos A e B à reta r e a distância entre as projeções desses dois pontos na reta r . Observemos que esses dados determinam completamente o problema, tornando-o de cunho quantitativo, Mas veremos aqui uma resolução puramente qualitativa (construção).

Observemos que se os dois pontos estivessem em lados opostos da reta r , então a resolução do problema “saltaria aos olhos”. O conceito que justifica essa resolução é a *desigualdade triangular* no plano. Observemos a Figura 38.

Figura 38 – O “problema de Heron” simplificado.

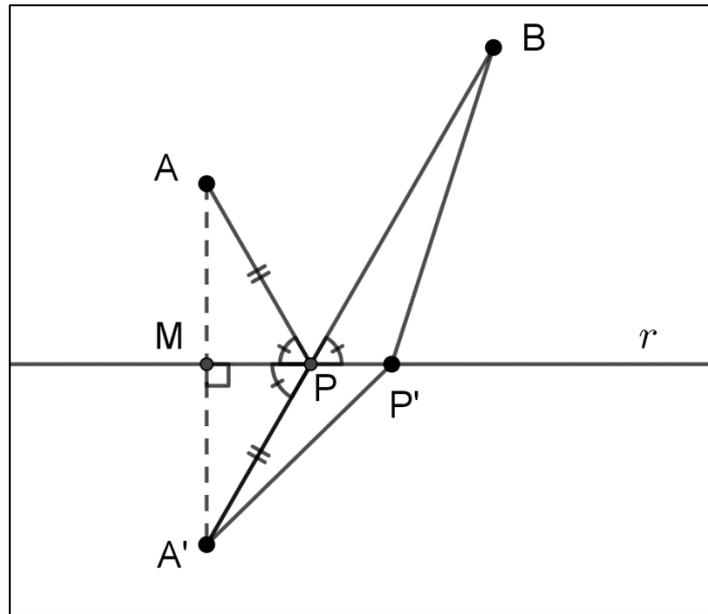


Fonte: O autor.

Observemos que o ponto P procurado é o ponto de interseção do segmento \overline{AB} com a reta r , pois, para qualquer que seja um ponto P' na reta r e distinto de P , teremos, pela desigualdade triangular aplicada ao $\triangle ABP'$, que $AP + BP = AB < AP' + BP'$.

Essa figura nos dá uma indicação de como resolver o problema original: se, ao invés de trabalharmos com o ponto A no mesmo semiplano de B , trabalharmos com o simétrico A' do ponto A em relação à reta r (Figura 39). Por quê?

Figura 39 – Trabalhando com o simétrico no problema de Heron.

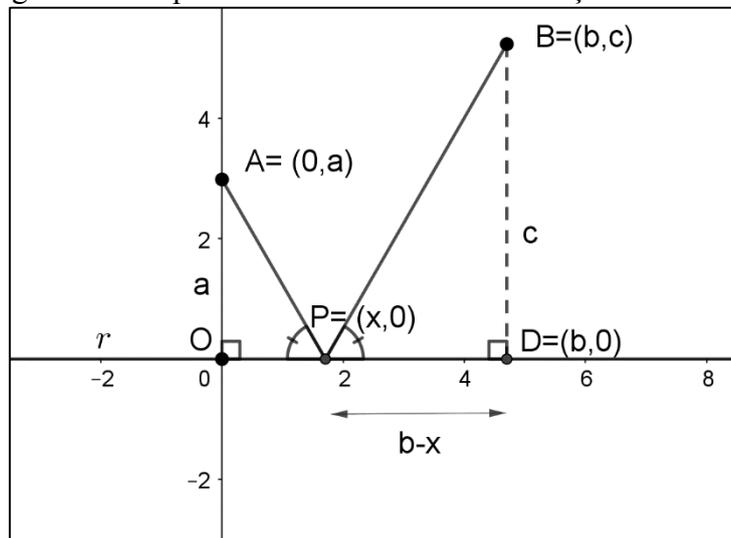


Fonte: O autor.

Observemos que, ao se considerar o simétrico A' do ponto A em relação à reta r , a reta r passa a ser a mediatriz do segmento $\overline{AA'}$ e obtemos o ponto P como o ponto de interseção do segmento \overline{AB} com a reta r . Portanto, $AP = AP'$. Como consequência, para todo ponto P' na reta r e distinto de P , teremos $AP + BP = A'P + BP = AB < AP' + BP'$. Além disso, na Figura 39, $\widehat{APM} = \widehat{A'PM} = \widehat{BPP'}$ (ângulo de incidência igual a ângulo de reflexão).

Vamos mostrar aqui, e somente nesse caso, como seria a resolução analítica, usando Cálculo. Considere novamente a Figura 37, agora com eixos coordenados (Figura 40).

Figura 40 – O problema de Heron com resolução analítica.



Fonte: O autor

Então a resolução se daria assim:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(x - b)^2 + c^2}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x - b}{\sqrt{(x - b)^2 + c^2}} = 0$$

$$x^2((x - b)^2 + c^2) = (x - b)^2(x^2 + a^2)$$

$$x^2(c)^2 = a^2(x - b)^2$$

$$\left| \frac{x}{x - b} \right| = \frac{a}{c}$$

$$x = \frac{ab}{a + c} \quad \text{ou} \quad x = \frac{ab}{a - c}$$

Por outro lado, na Figura 40 vemos que os triângulos ΔAOP e ΔBDP são semelhantes (retângulos e um ângulo agudo congruente). Então, obtemos a solução de maneira muito mais simples e sem derivação:

$$\left| \frac{x}{b - x} \right| = \frac{a}{c} \Rightarrow x = \frac{ab}{a + c} \quad \text{ou} \quad x = \frac{ab}{a - c}.$$

O primeiro valor de x é que corresponde à figura.

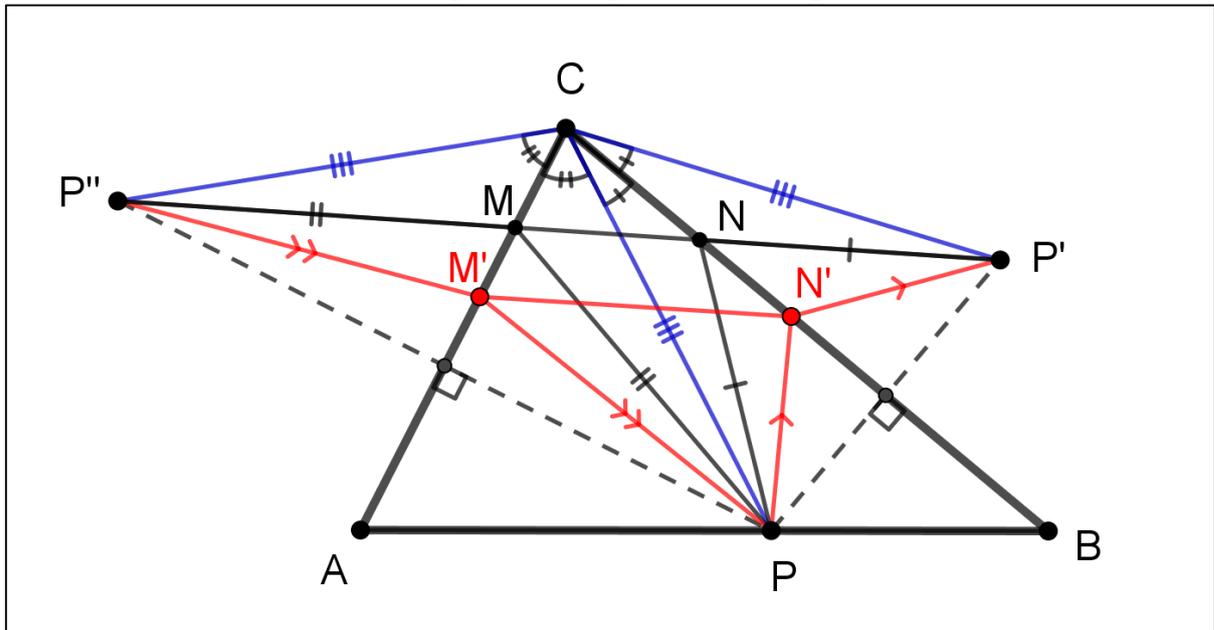
4.5.1.2 Problema de Fagnano

Foi proposto pelo matemático italiano Giulio Carlo Fagnano dei Toschi (1682-1766). A resolução que apresentaremos é a do matemático húngaro Lipót Fejér (1880-1959). O problema é o seguinte:

Inscrever em um triângulo acutângulo um triângulo de perímetro mínimo.

A resolução de Fejér desse problema é basicamente uma dupla aplicação do problema de Heron. A Figura 41, já com elementos da resolução, nos mostra isso.

Figura 41 – O problema de Fagnano.



Fonte: O autor.

Seja P um ponto qualquer fixado no lado \overline{AB} de um triângulo acutângulo ΔABC qualquer. Sejam P' e P'' os pontos simétricos de P aos lados \overline{BC} e \overline{AC} , respectivamente. Então \overline{BC} e \overline{AC} são as mediatrizes dos segmentos $\overline{PP'}$ e $\overline{PP''}$, respectivamente. Segue que $CP' = CP = CP''$ (em azul). Se M' e N' são dois pontos quaisquer nos lados \overline{AC} e \overline{BC} , respectivamente, então o perímetro do triângulo $\Delta PM'N'$ (em vermelho) será igual ao comprimento da poligonal $P''M'N'P'$, pois $PM' = P''M'$ e $PN' = P'N'$. Mas, pela desigualdade triangular, o comprimento da poligonal $P''M'N'P'$ é maior do que $P''P'$ e, como

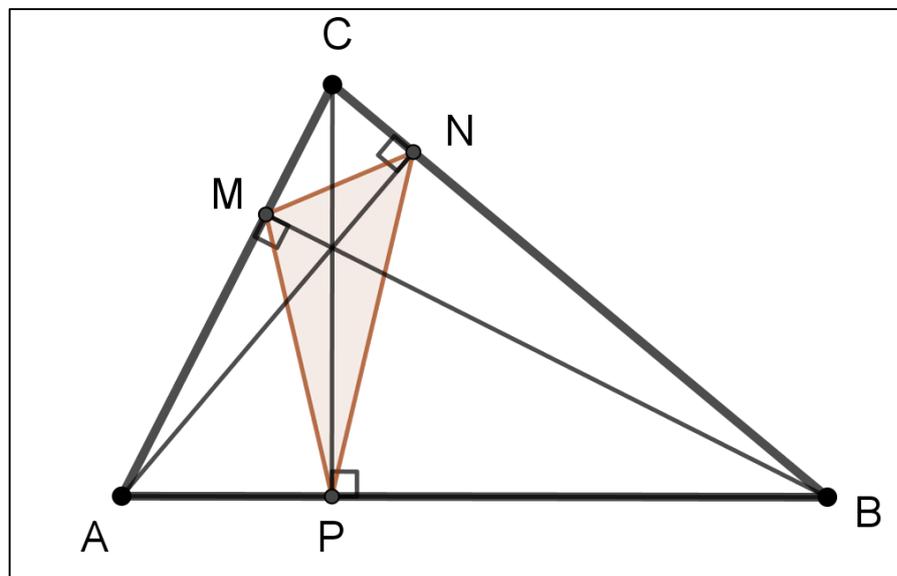
$$P''P' = P''M + MN + MP' = PM + MN + PN,$$

então o perímetro do triângulo ΔPMN será menor do que o perímetro do triângulo $\Delta PM'N'$, ou seja, o triângulo ΔPMN é o triângulo de menor perímetro inscrito no triângulo ΔABC , com P um ponto fixado no lado \overline{AB} . Resta agora descobrir onde deve estar o ponto P no lado \overline{AB} de maneira que obtenhamos um triângulo de perímetro mínimo dentre todos os possíveis pontos P sobre o lado \overline{AB} .

Observemos agora que os triângulo $\Delta PP''C$ e $\Delta PP'C$ são isósceles com \overline{AC} e \overline{BC} , respectivamente, mediatrizes de suas bases. Segue que $P\hat{C}A = P''\hat{C}A$ e $P\hat{C}B = P'\hat{C}B$. Como consequência, $P''CP' = 2 \cdot A\hat{C}B$, ou seja, medida constante.

A pergunta agora é: qual deve ser o comprimento das laterais $\overline{P''C}$ e $\overline{P'C}$ do triângulo isósceles $\Delta P''P'C$ (de ângulo constante no vértice C) de modo que sua base $\overline{P''P}$ (cujo comprimento é igual ao perímetro do ΔPMN) tenha o menor comprimento possível? Isso vai ocorrer quando o comprimento das laterais for o menor possível, ou seja, quando o comprimento do segmento \overline{CP} for o menor possível. Isso ocorrerá quando $\overline{CP} \perp \overline{AB}$. Raciocinando de forma análoga para os outros lados do triângulo ΔABC , concluímos que o triângulo inscrito no ΔABC , dentre todos os triângulos nele inscritos, de perímetro mínimo é o triângulo cujos vértices são as projeções dos vértices do triângulo ΔABC sobre seus lados (chamado triângulo órtico – Figura 42).

Figura 42 – $\Delta APMN$ triângulo órtico do triângulo ΔABC e solução do problema de Fagnano.



Fonte: O autor.

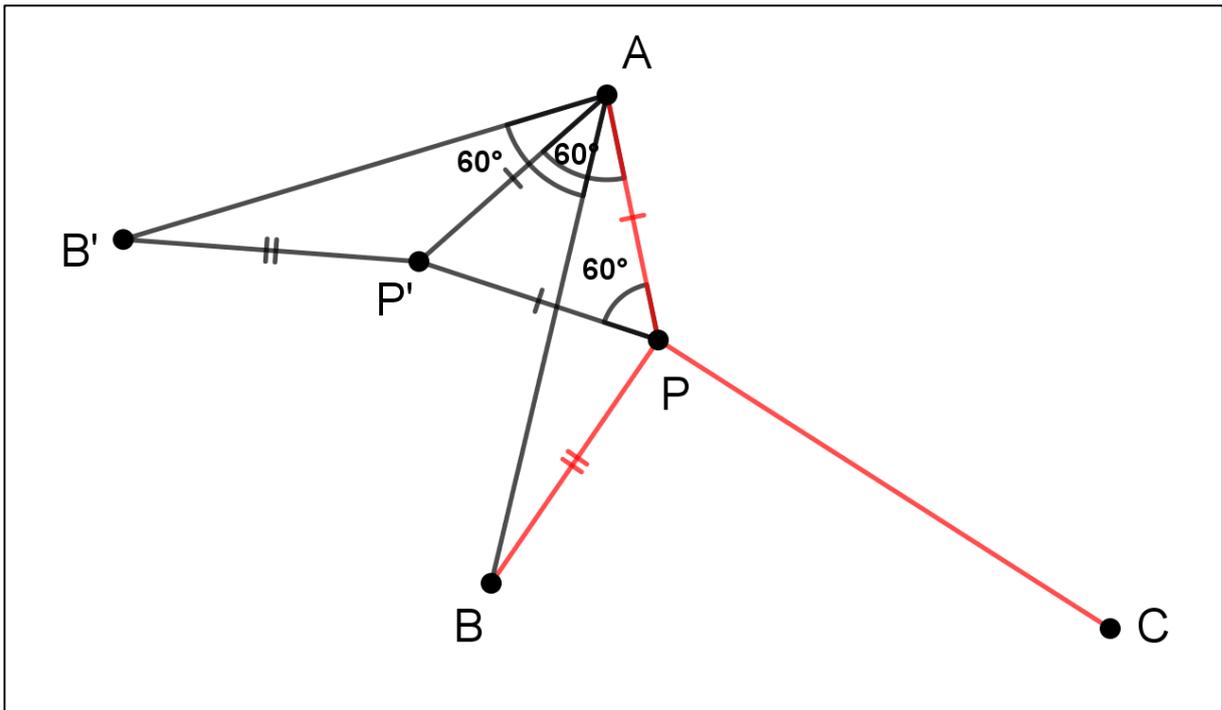
4.5.1.3 Problema de Fermat

Proposto por Pierre de Fermat (1601-1665) em seu “Métodos de determinação de máximos e mínimos, e de tangentes a curvas”. Seu enunciado é:

Encontrar um ponto do plano cuja soma das distâncias a três outros pontos dados é mínima.

Vamos considerar aqui apenas o caso em que os três pontos são não colineares (o caso em que são colineares é simples e será o ponto que está entre os outros dois). A Figura 43 já apresenta a ideia da solução. Estamos considerando também apenas a situação em que os ângulos do triângulo formado pelos três pontos têm medida menor do que 120° . Este problema terá sua resolução também baseada na desigualdade triangular. Sejam então três pontos não colineares A, B e C.

Figura 43 – A soma das três distâncias é igual ao comprimento da poligonal B'P'PC



Fonte: O autor.

Mais uma condição nessa resolução: vamos considerar apenas que o ponto solução está no interior do triângulo de vértices nos pontos A, B e C. Apliquemos uma rotação do triângulo $\triangle APB$ de 60° em torno do ponto A no sentido horário, obtendo o triângulo $\triangle AP'B'$. Então o triângulo $\triangle AP'P$ é equilátero e $PA = P'P$. Além disso, $PB = P'B'$. Então a soma $PB + PA + PC = P'B' + P'P + PC$, ou seja, é o comprimento da poligonal $B'P'PC$. Notemos agora que as duas extremidades dessa poligonal estão fixadas (B' só depende de B, que está fixado). Essa poligonal terá comprimento mínimo quando ela for retilínea, ou seja, quando os quatro pontos B', P', P e C. Mas quando isso ocorre, o ângulo $\angle APC$ deverá ter medida 120° , pois os ângulos $\angle APC$ e $\angle APP'$ deverão ser adjacentes suplementares.

Concluimos então que o ponto P que é a solução do problema é um ponto tal que $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = 120^\circ$ (tal ponto é chamado de ponto de Fermat do triângulo $\triangle ABC$).

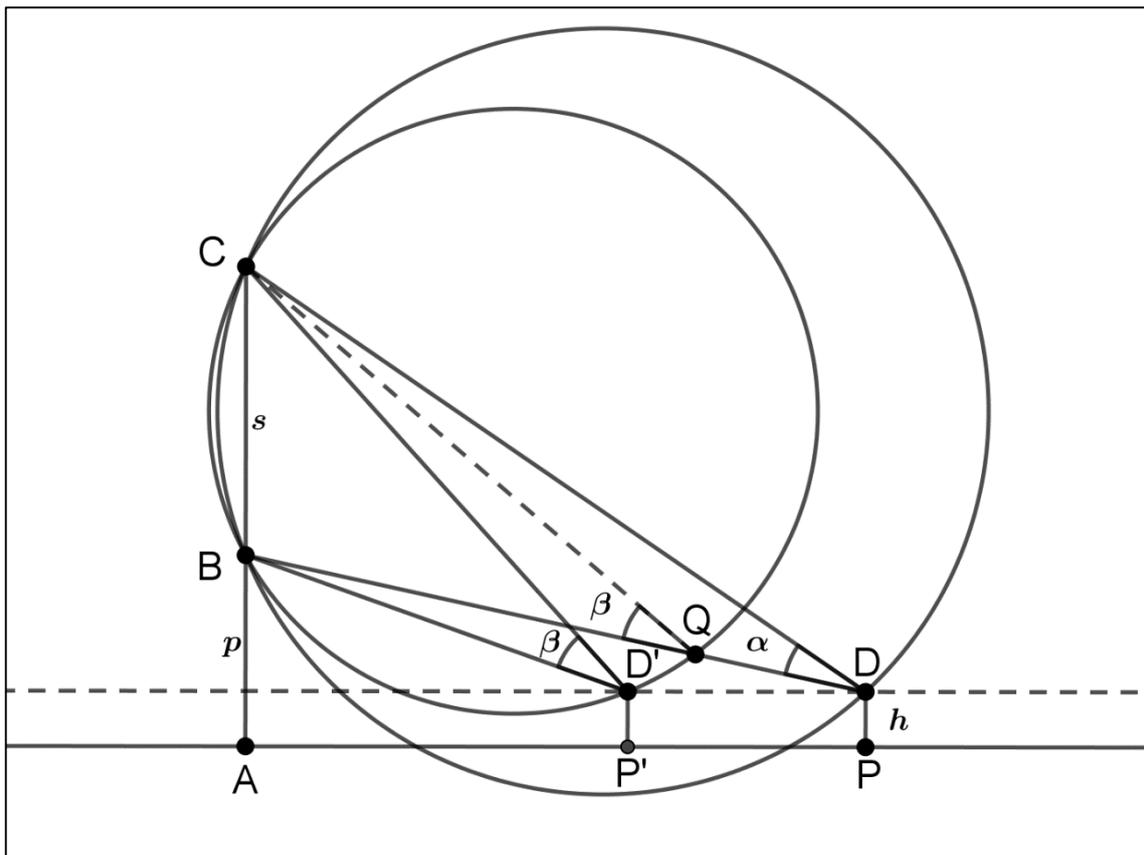
4.5.1.4 Problema de Regiomontanus

Foi proposto por Johann Müller (1436-1476), um dos maiores matemáticos do século XV. Nasceu na cidade alemã de Königsberg in Bayern, Bavaria (não confundir com a cidade homônima na antiga Prússia, hoje chamada Kaliningrado na Rússia, conhecida pelo famoso problema das pontes de Euler). Seu pseudônimo, Regiomontanus, é proveniente da latinização do nome de sua cidade. O problema é o seguinte:

Determinar a distância que um observador de altura h deve ficar da base do pedestal de altura p de uma estátua, de altura s , de modo que seu ângulo de visão dessa estátua seja máximo.

Este problema, ao contrário dos três anteriores, é um problema de maximização, e da medida de um ângulo, e não mais de somas das medidas de segmentos. A Figura 44 evidencia o raciocínio, mas requer uma explicação.

Figura 44 – Análise do problema de Regiomontanus.

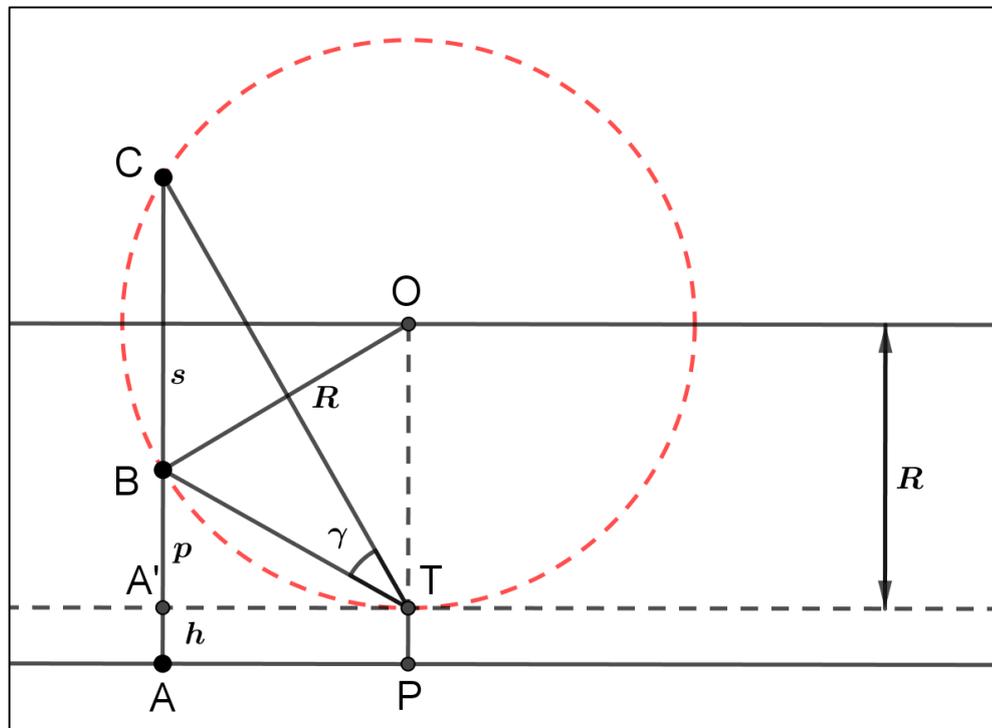


Fonte: O autor.

O observador está de pé no ponto P e vê a estátua \overline{BC} de seus olhos em D sob um ângulo α . Se o observador se aproxima do pedestal, por exemplo com os pés em P', então ele tem um ângulo de visão igual a β . Agora notemos que $\beta > \alpha$, pois os arcos dos pontos D' e D são arcos capazes dos ângulo β e α , respectivamente, relativos *ao mesmo* segmento \overline{BC} e o raio do primeiro é menor do que o raio do segundo. Observe que $\widehat{BQC} = \widehat{BD'C} = \beta$, e que o ângulo $\angle BQC$ é ângulo externo ao triângulo $\triangle CQD$ relativo ao seu ângulo interno $\angle CQD$. Portanto, pelo teorema do ângulo externo, $\beta > \alpha$.

O ângulo β pode ser “melhorado”, ou seja, aumentado? Sim, enquanto os arcos capazes intersectarem a reta tracejada que passa pela cabeça do observador, podemos aproximar esse observador do pedestal. A posição ótima será aquela em que o arco capaz tangenciar aquela linha tracejada. O problema então (como problema de construção) passa a ser; construir uma circunferência passando pelos pontos B e C que seja tangente à reta tracejada da figura. Isso é simples, pois sabemos que o centro dessa circunferência deve estar na mediatriz de \overline{BC} . Portanto, o raio R da circunferência é conhecido. Vejamos a Figura 45.

Figura 45 – A solução do problema de Regiomontanus: a cabeça do observador deve estar no ponto T.



Fonte: O autor.

Se quisermos calcular a distância AP do observador até o pedestal basta observar que $AP = A'T$ e usar potência de ponto:

$$AP^2 = A'T^2 = A'B \cdot A'C = (p - h) \cdot (s + (p - h)) \Rightarrow AP = \sqrt{(p - h) \cdot (s + (p - h))}.$$

4.5.1.5 Problema de Dido ou problema isoperimétrico

Sugerido na lenda da criação da cidade de Cartago, cujas ruínas se encontram na atual Tunísia, pela princesa fenícia Dido (ou Elisa, ou Elisha). A lenda de Dido ficou bem conhecida através da obra épica “Eneida” do poeta romano Virgílio (Publius Vergilius Maro - 70 a.C. a 19 a.C.). A lenda foi anteriormente relatada pelo historiador grego Timaeus de Tauromenium (cerca de 356-260 a.C.), em sua “Geografia do Mundo Ocidental”, e posteriormente pelo historiador romano Marcus Junianus Justinus (século II ou III d.C.) em sua obra “Epítome da História Filípica de Pompeius Trogus”.

O problema de Dido não pode ser resolvido rigorosamente só com métodos qualitativos. É necessário usar o Cálculo Variacional (em que as minimizações ou maximizações são feitas sobre um espaço de funções) para resolvê-lo.

O problema é o seguinte:

Dentre todas as curvas simples fechadas de comprimento L determinar aquela que engloba a maior área.

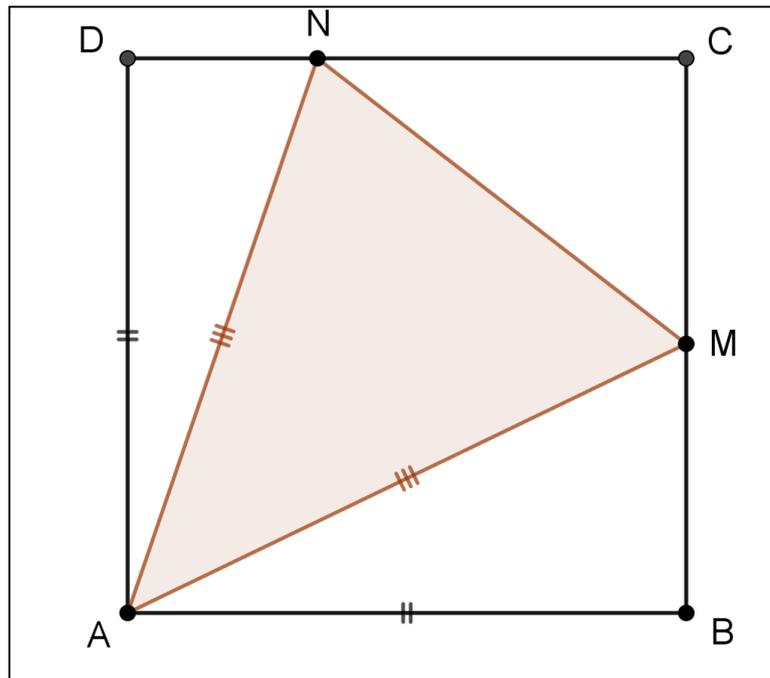
O problema tem um enunciado simples e uma solução (não a resolução) mais simples ainda: a curva que delimita a maior área é aquela mais homogênea, a circunferência. Não vamos apresentar aqui alguma resolução do problema. Steiner acreditava tê-lo resolvido por métodos qualitativos, mas sua resolução apresentava uma falha: a de assumir, *a priori*, que o problema tinha solução (PASQUALI, 2004, p. 70-74).

4.5.2 Um problema de inscrição de um triângulo equilátero em polígonos regulares

Este problema se originou de um conhecido exercício de cálculo de áreas que pode ser encontrados em muitos livros de geometria (DOLCE; POMPEO, 1997, p. 357). O exercício pedia para calcular a área de um triângulo equilátero, inscrito em um quadrado de lado dado e com um de seus vértices coincidindo com um vértice do quadrado, em função desse lado. Além disso, o exercício dava uma informação de *como* o triângulo equilátero estava inscrito no quadrado (por meio de uma figura), informação essa que não era necessária. Interessante observar que, se considerássemos o problema como um problema de construção geométrica,

iríamos constatar que só há uma maneira de inscrever um triângulo equilátero em um quadrado com um de seus vértices coincidindo com um vértice do quadrado. Façamos uma análise do problema por meio de uma figura (um esboço: o quadrado pode ser exato, pois sabemos construí-lo, mas o triângulo *ainda* não sabemos construir):

Figura 46 – Análise para a construção de um triângulo equilátero inscrito em um quadrado.



Fonte: O autor.

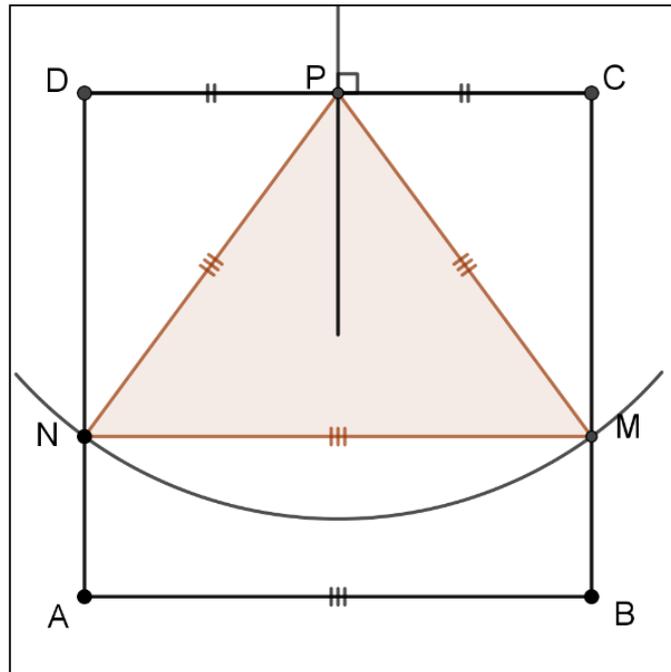
No livro, a informação desnecessária dada era que $CM = CN$. Vejamos porque isso não é preciso. Se o triângulo $\triangle AMN$ *deve ser* equilátero, então deve ocorrer $AM = AN$. Mas então, os triângulos retângulos $\triangle ADN$ e $\triangle ABM$ são congruentes pelo caso hipotenusa-cateto de congruência de triângulos retângulos. Segue que $BM = DN$, e portanto, $CM = CN$. Além disso, $\widehat{BAM} = \widehat{DAN} = 15^\circ$, pois $\widehat{MAN} = 60^\circ$. Podemos assim construir o triângulo equilátero, bastando para isso traçar a semirreta de origem no vértice A fazendo um ângulo de 15° com o lado \overline{AB} do quadrado e internamente a este. A interseção dessa semirreta com o lado \overline{BC} do quadrado será o ponto M . traçando uma circunferência de centro A e raio AM obtemos o ponto N no lado \overline{CD} do quadrado.

Observemos que a figura feita, embora não exata, é uma representação da situação, com todas as informações conceituais necessárias (quadrado e seus ângulos – usados implicitamente aqui – e os signos icônicos de congruência de segmentos). Como sabemos que essa construção está certa ou, de outra forma, como sabemos que obtivemos mesmo um triângulo equilátero sem realizar medições? Com certeza o triângulo construído é isósceles, pois $AM = AN$ por

construção. Uma possibilidade seria realizar alguns cálculos de medidas, mas aí temos que ser cuidadosos. Não podemos, por exemplo, assumir que a altura do triângulo ΔAMN , relativa ao lado \overline{MN} , é igual a $\frac{AM\sqrt{3}}{2}$, pois nesse caso já estaríamos assumindo que o triângulo ΔAMN é equilátero. A melhor maneira de comprovar, teoricamente, que essa construção gerou um triângulo equilátero é através de medidas de ângulos. Por um lado $B\hat{A}M = 15^\circ \Rightarrow B\hat{M}A = 75^\circ$. Por outro lado, $CM = CN \Rightarrow C\hat{M}N = C\hat{N}M = 45^\circ$. Segue que $A\hat{M}N = A\hat{N}M = 60^\circ$, e portanto, o triângulo ΔAMN é equilátero. A partir dessa construção podemos resolver o problema. É o que Duval (1998, p. 38) chama de interação cognitiva entre as funções de construção, visualização e raciocínio.

Mas o problema despertou, de imediato, um novo problema que submetemos aos estudantes em sala de aula: construir um outro triângulo equilátero inscrito no quadrado (obviamente, com nenhum vértice coincidindo com os vértices do quadrado). Nesse caso, um raciocínio por simetria (que aliás ocorreu no primeiro caso, sugerida pela figura dada, em relação à diagonal quadrado) leva a uma outra figura. A simetria mais evidente agora é em relação à mediatriz de dois lados opostos. A Figura 47, traçada novamente como um esboço, representa a situação, com o lado \overline{MN} do triângulo ΔPMN , suposto equilátero, paralelo ao lado \overline{AB} do quadrado. Seria possível que o triângulo ΔPMN fosse, de fato, equilátero? O que fazemos, na construção, é traçar os segmentos \overline{PM} e \overline{PN} congruentes ao lado \overline{AB} , com P ponto médio do lado \overline{CD} do quadrado.

Figura 47 – Triângulo equilátero com lado \overline{MN} paralelo ao lado \overline{AB} do quadrado.



Fonte: O autor.

Então, $PM = PN \Rightarrow \triangle PCM \cong \triangle PDN \Rightarrow CM = DN \Rightarrow BM = AN$, e o paralelismo do lado \overline{MN} com o lado \overline{AB} fica evidente, comprovando a construção correta. Nesse caso, teremos $BM = AN = AB - \frac{AB\sqrt{3}}{2} = AB \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2} \right)$.

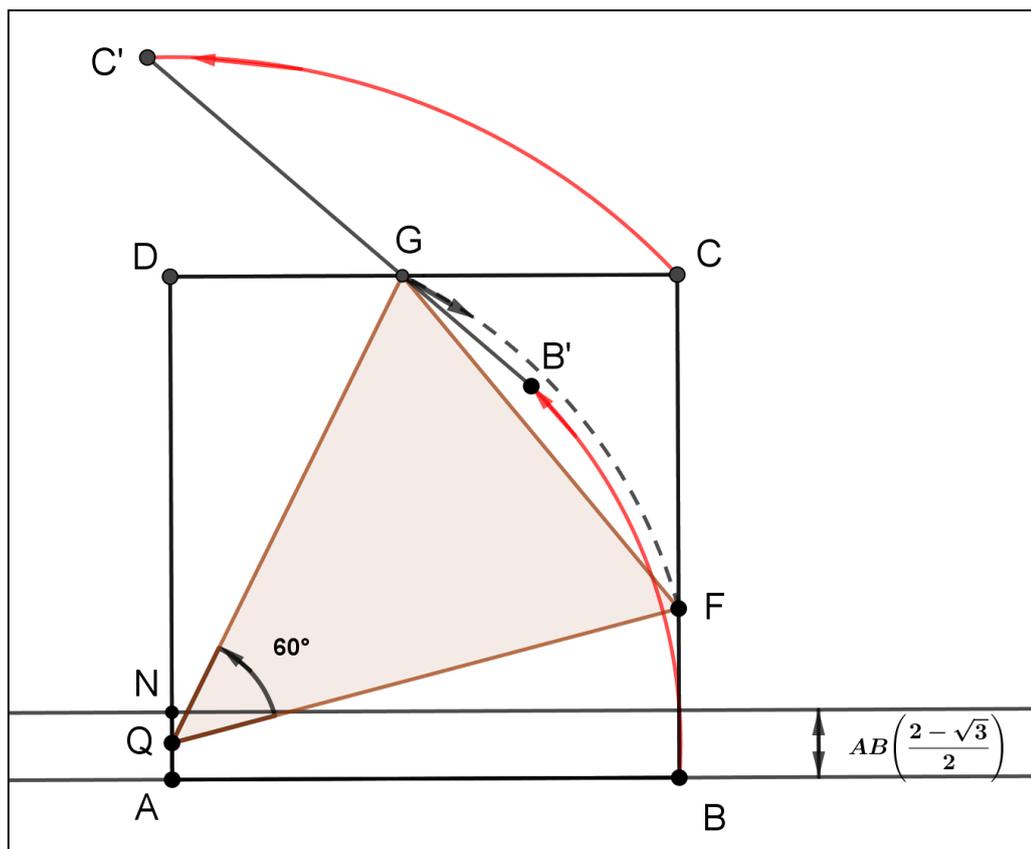
Esse novo problema levou-nos a fazer a seguinte pergunta (novo problema), que submetemos aos estudantes: é possível inscrever um terceiro triângulo equilátero, distinto dos dois anteriores, no quadrado? (distinto no sentido em que não tenha vértice coincidindo com algum vértice do quadrado, nem tenha algum lado paralelo a algum lado do quadrado – observemos a importância da *descrição* no enunciado do novo problema). Mais geralmente: seria possível, dado um *ponto qualquer*, em um dos lados do quadrado, é possível inscrever um triângulo equilátero nesse quadrado com um de seus vértices naquele ponto? Novamente ressaltamos a importância da *descrição* do problema. Veremos, no próximo capítulo, a importância, segundo Duval (2003) dos processos de descrição na criação de um problema. Agora não podemos mais nos apoiar em alguma simetria evidente.

O problema agora deve ser analisado em um outro contexto de conhecimentos: o das transformações geométricas, mais especificamente das isometrias, do ponto de vista sintético (e não, via álgebra linear). Sugerimos então aos estudantes, que tomassem inicialmente um ponto Q qualquer no lado \overline{AD} (por exemplo) do quadrado tal que sua distância ao vértice A do

quadrado fosse menor do que $AB \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2} \right)$, ou seja, um ponto Q que ficasse entre os pontos A e N da Figura 47.

Na Figura 48 (feita como um esboço, sem exatidão) fazemos a análise do problema com Q na posição apropriada. Se supomos que o triângulo ΔQFG seja equilátero, então a rotação do ponto F, em torno do ponto Q de um ângulo de 60° no sentido anti-horário, leva aquele ponto no ponto G. Mas os alunos não sabiam ainda onde estaria o ponto F (nem G). Como o ponto F deve estar no lado \overline{BC} do triângulo, então efetuamos a rotação de todo esse lado em torno do ponto Q de um ângulo de 60° no sentido anti-horário e obtemos o segmento $\overline{B'C'}$. A interseção de $\overline{B'C'}$ com o lado \overline{CD} resultará no ponto G. Do ponto G, voltando por rotação de 60° (sentido horário) obtemos no lado \overline{BC} o ponto F.

Figura 48 – Análise do problema para a obtenção de um triângulo equilátero, sem coincidência de vértices com os vértices do quadrado e com lados não paralelos aos lados desse quadrado inscrito.

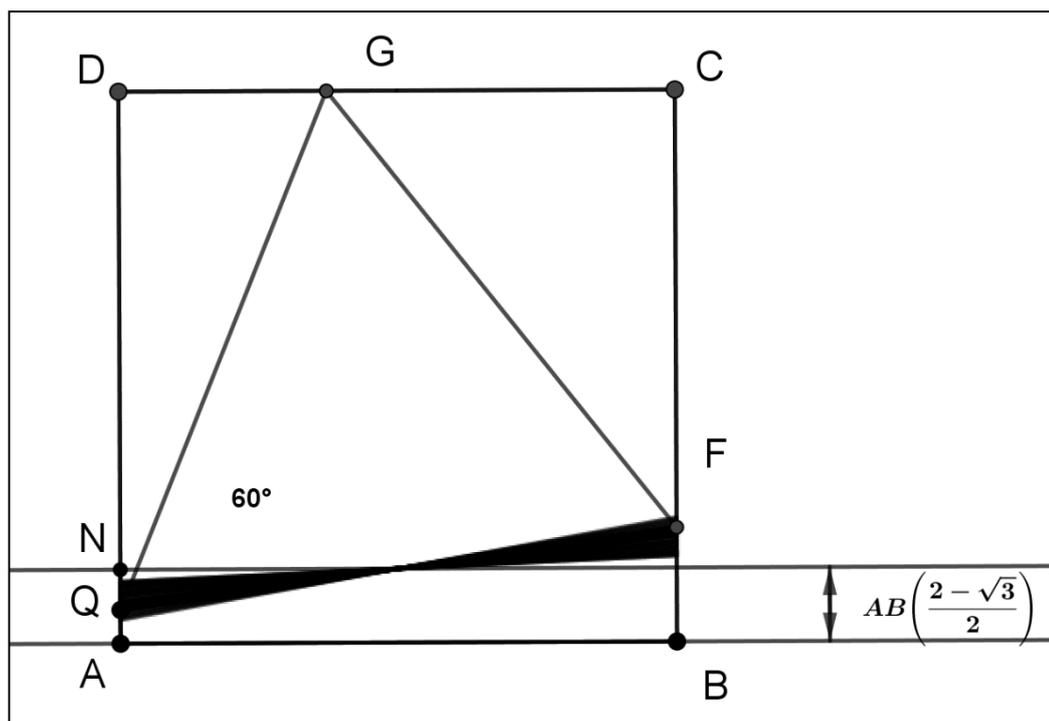


Fonte: O autor.

Apesar de que a figura não seja exata, esse processo produzirá um triângulo equilátero, pois a medida do ângulo $\angle FQG$ será 60° e $QF = QG$.

Concluimos que, qualquer que seja um ponto Q em um lado do quadrado, é sempre possível inscrever um triângulo equilátero nesse quadrado com um de seus vértices nesse ponto. Uma conclusão disso é que há uma infinidade de triângulos equiláteros inscritos no quadrado. Ou será que todos eles seriam congruentes? Os estudantes verificaram, através do GeoGebra, que os lados desses triângulos variavam em medida, dependendo da posição do ponto Q no lado \overline{AD} (basta analisar em um lado somente, devido às simetrias no quadrado). Feita a construção, solicitamos aos estudantes que movessem o ponto Q somente entre os pontos A e N, movendo assim todo o triângulo ΔQFG , e tentassem descobrir um *invariante*, ou seja, um ponto comum a todos esses triângulos. De antemão já sabíamos que esse invariante estaria no lado \overline{QF} desses triângulos, e sugerimos que os alunos usassem o rastro do lado \overline{QF} , o que produziu a Figura 49:

Figura 49 – Rastro do lado \overline{QF} indicando um invariante dos triângulos equiláteros inscritos.



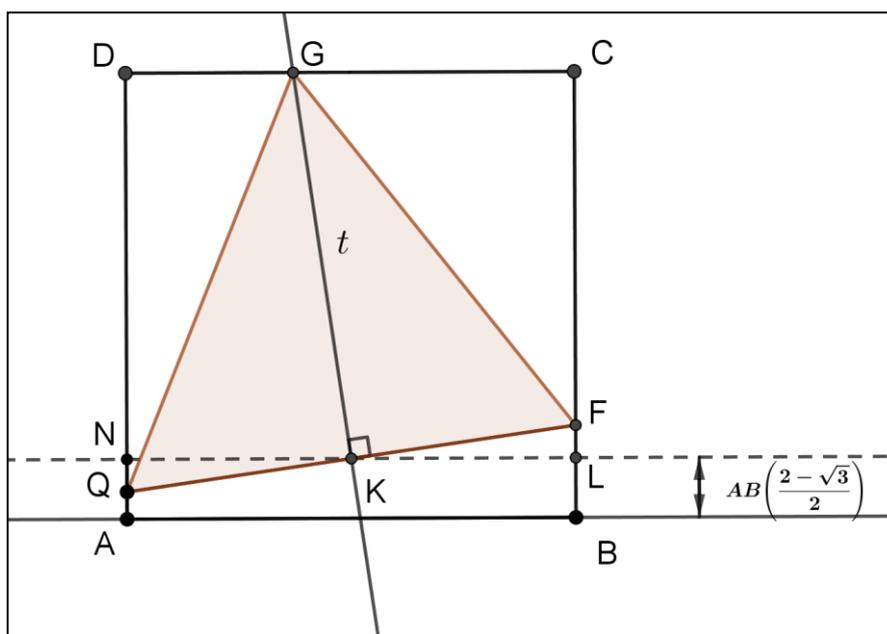
Fonte: O autor.

Esse tipo de atividade contribuiu para o potencial semiótico do GeoGebra para os alunos. Não se trata de saber usar uma ferramenta, mas sim de como, quando e porque usá-la. O GeoGebra mostrou que um ponto aparentava ser invariante, e que esse ponto seria médio de todos os possíveis lados \overline{QF} naquele caso (Q entre os pontos A e N). Isso pode ser comprovado através da invariância das coordenadas do ponto médio de qualquer segmento \overline{QF} pelo

GeoGebra. Mas isso pode ser também provado como um problema que propusemos aos alunos (Figura 50):

Seja K o ponto médio do segmento \overline{NL} , paralelo ao lado \overline{AB} do quadrado e tal que N é o ponto do lado \overline{AD} do quadrado tal que $AN = AB \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2} \right)$. Seja t a reta perpendicular a \overline{NL} por K e seja G o ponto de interseção de t com o lado \overline{CD} do quadrado. Então o triângulo ΔQFG é equilátero.

Figura 50 – Triângulo equilátero inscrito no quadrado a partir do ponto médio K do lado \overline{NL} .



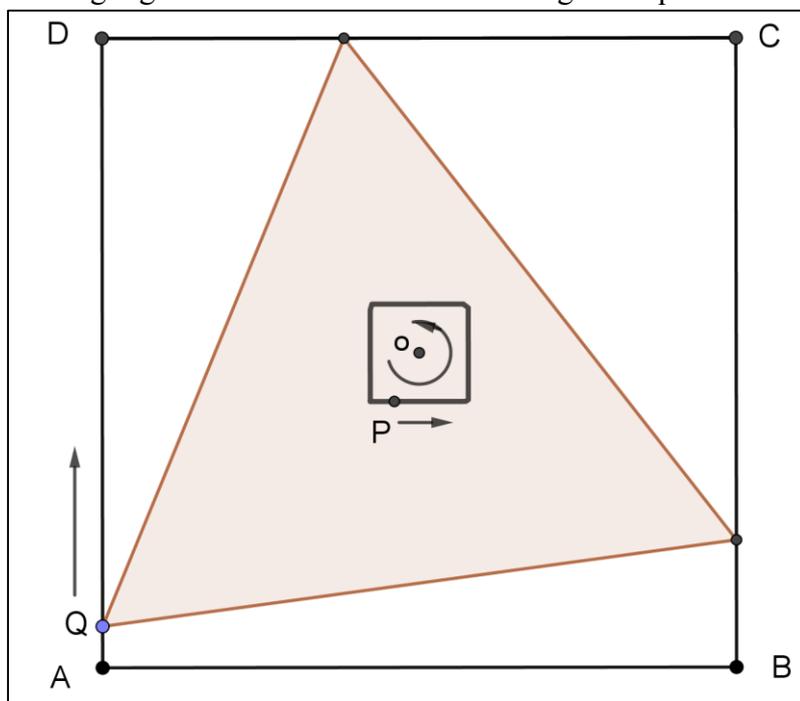
Fonte: O autor.

Outra pergunta que fizemos (não para os alunos, de início) foi: o que acontece com o centro P dos triângulos equiláteros quando variamos o ponto Q nos lados do quadrado? Fica constante? Pelo GeoGebra verificamos que isso não ocorria. Então a pergunta foi: qual o lugar geométrico desses centros?

A ferramenta “Lugar Geométrico” do GeoGebra nos mostrou que esse lugar geométrico é um quadrado menor cujo centro O coincide com o centro do quadrado ABCD e com lados paralelos aos lados de ABCD (Figura 51). Não demonstramos esse resultado e nos propusemos a investigar (já não com a participação dos alunos) o que acontece com triângulos equiláteros inscritos em polígonos regulares em geral. Constatamos que para qualquer ponto em um lado de um polígono regular de n lados existe um triângulo equilátero nele inscrito com um de seus vértices naquele ponto. Além disso, o lugar dos centros desses triângulos equiláteros é um *polígono regular estrelado* se $n > 4$ e n não múltiplo de 3. Nos casos em que n é múltiplo de 3

os centros dos triângulos equiláteros não variam e coincidem com o centro do polígono regular (que é centro comum das circunferências inscrita e circunscrita ao polígono).

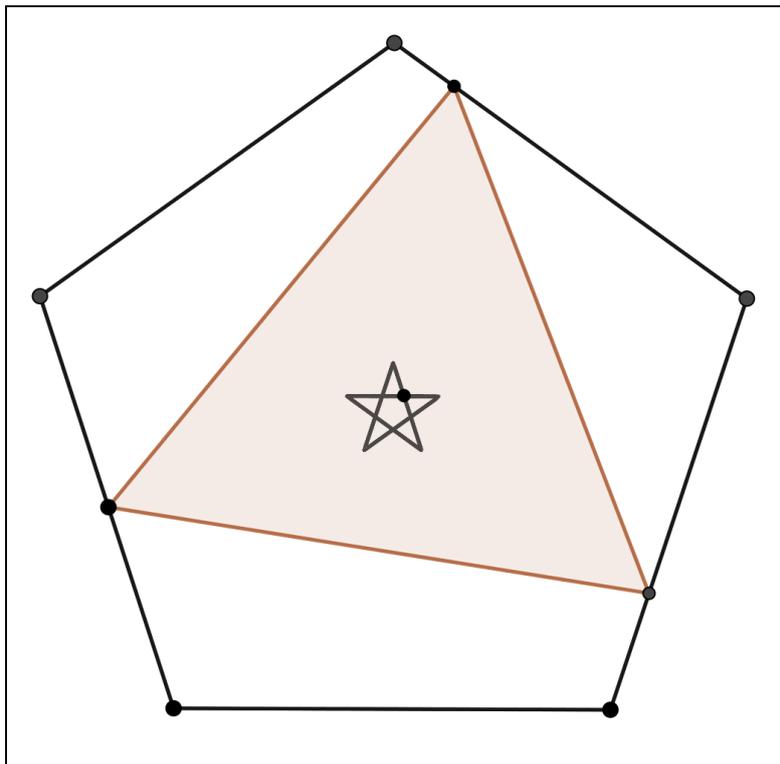
Figura 51 – O lugar geométrico dos centros dos triângulos equiláteros inscritos em ABCD.



Fonte: O autor.

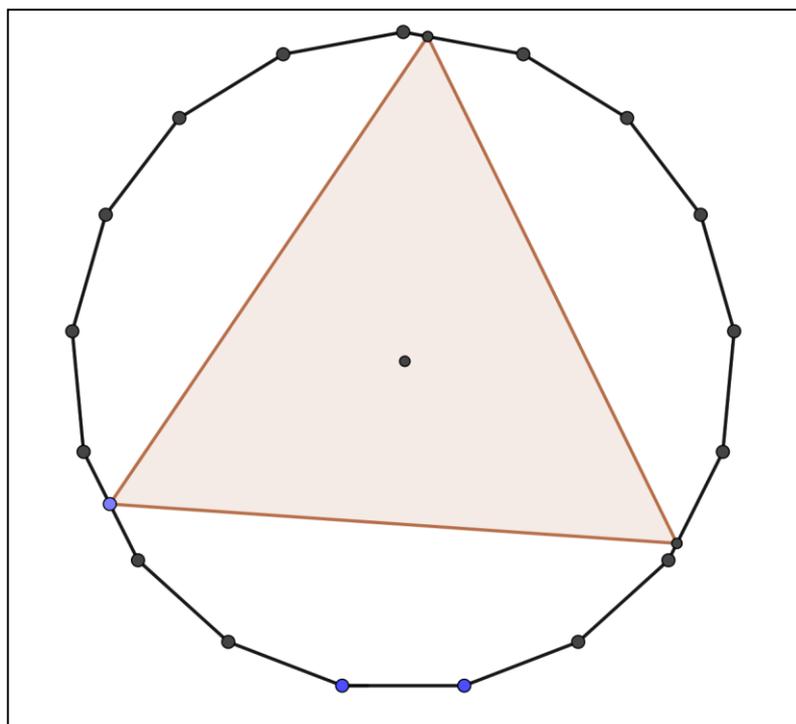
As Figuras 52, 53 e 54 mostram o caso do pentágono regular e (uma homenagem a Gauss!) do heptadecágono regular (17 lados).

Figura 52 – O pentágono estrelado, lugar geométrico dos centros dos triângulos equiláteros inscritos no pentágono original.



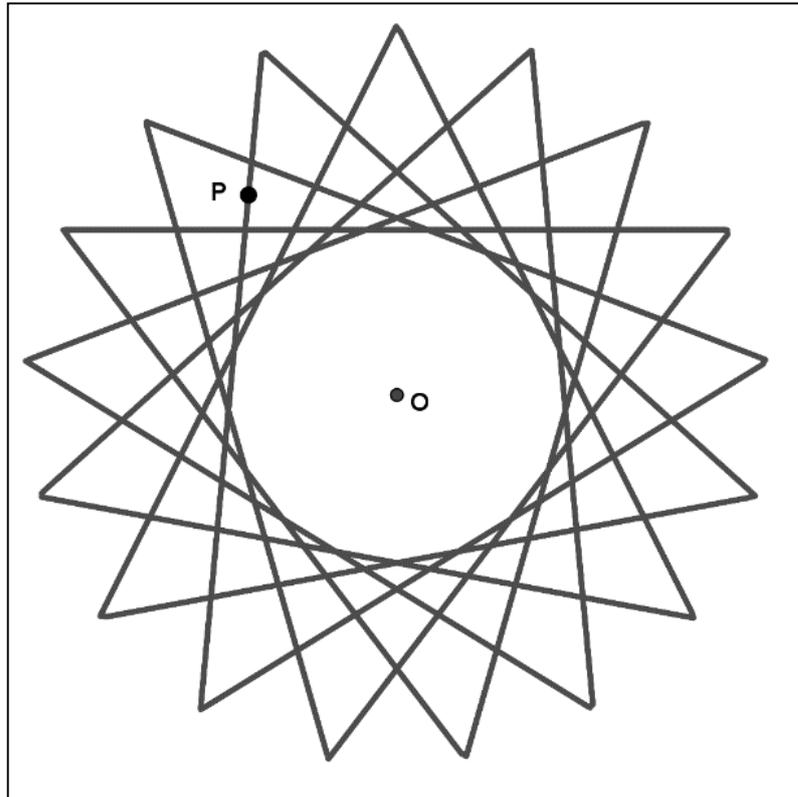
Fonte: O autor.

Figura 53 – O heptadecágono regular. Observe que o heptadecágono estrelado em seu interior não fica visível devido ao seu tamanho, em proporção ao lado original.



Fonte: O autor.

Figura 54 – O heptadecágono regular estrelado com zoom, lugar geométrico dos centros dos triângulos equiláteros inscritos no heptadecágono original.



Fonte: O autor.

A conjectura feita sobre o lugar geométrico dos centros dos triângulos equiláteros inscritos em polígonos regulares é um exemplo em que um SGD é essencial em sua formulação. É praticamente impossível chegar a essa conjectura usando apenas régua e compasso.

Um outro aspecto desse problema é perguntar: para um certo polígono regular de n lados, quais são os triângulos equiláteros nele inscritos de área máxima e de área mínima? Observemos que problemas de extremos podem surgir com facilidade, Talvez a pergunta seja “natural” demais, quase *naïve*, mas devemos observar que a pergunta por uma pessoa com um raciocínio mais analítico torna o problema diferente daquele formulado por uma pessoa que pensa na pergunta de um ponto vista sintético. Essas duas pessoas terão abordagens e diferentes e enfrentarão dificuldades diferentes em suas resoluções.

5 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Esta tese está fundamentada nos trabalhos de Duval (2003, 2004) da *Teoria dos Registros de Representação Semióticas* e, em particular, sobre as operações de descrição. Criar um problema de matemática envolve conhecimento, intuição, visualização e uma clara descrição desses problemas e de suas resoluções. A criação de problemas a partir de uma *descrição completa* de um problema é um dos possíveis métodos para se obter novos problemas. Veremos, neste capítulo, um exemplo típico de criação de problemas a partir de uma descrição completa de um problema até obter uma *descrição mínima* desse problema.

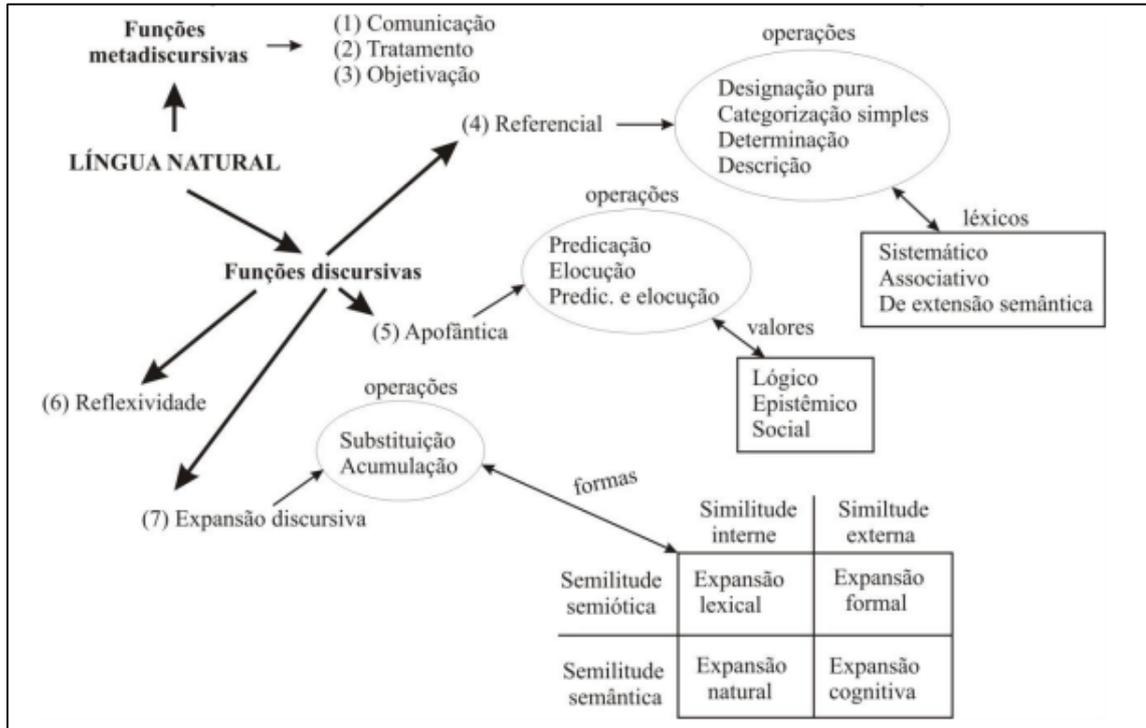
5.1 AS FUNÇÕES COGNITIVAS DISCURSIVAS E AS OPERAÇÕES DE DESCRIÇÃO

Em matemática, bem como em qualquer ciência, o papel da linguagem sobre o pensamento e sobre a aprendizagem em sala de aula é fundamental. Veremos nesta seção, sem muito aprofundamento, as funções cognitivas discursivas e as operações a elas relacionadas, em especial as operações de descrição, que são essenciais para quaisquer atividades matemáticas. As referências principais são Duval (2004), uma tradução de seu livro de 1995 e Duval (2003). Abordaremos ainda alguns outros aspectos mais gerais da teoria dos registros de representação semiótica, que fundamenta todo este trabalho.

A finalidade de uma linguagem é produzir um discurso, isto é, uma expressão referencial a tudo que nos rodeia com fins de comunicação entre as pessoas. O discurso é o resultado do emprego da linguagem para se falar de objetos físicos reais e objetos idealizados ou imaginários, sejam estes existentes ou não. É próprio da matemática, mas não somente dela, o emprego da linguagem natural bem como de linguagem que recorre a símbolos, a linguagem formal. Além disso, recorre-se ainda a outros sistemas semióticos como esquemas e imagens (figuras e gráficos). Para que se possa entender os diversos discursos empregados em matemática é necessário analisar as funções que deve cumprir o emprego de uma linguagem. Uma dessas funções é, obviamente, a função de comunicação. Essas funções podem ser consideradas em dois níveis diferentes: o das funções cognitivas comuns a todos os registros de representação linguísticos, simbólicos ou figurativos (*funções meta-discursivas*) e o das funções específicas no emprego de uma linguagem (*funções discursivas*). As funções meta-discursivas são três: de comunicação, de transformação de representações (tratamento) e de objetivação de representações visuais. Mais detalhes sobre essas funções podem ser encontrados em Duval

(2004, p. 87-89) ou em Moretti, Brandt e Bassoi (2014), de onde transcrevemos a seguinte figura explicativa sobre os dois tipos de funções.

Figura 55 - Funções meta-discursivas e discursivas no uso de uma linguagem.



Fonte: Moretti, Brandt e Bassoi (2014, p. 480).

As funções discursivas, que permitem que se realize um discurso, são quatro: a *função referencial*, de designação de objetos; a *função apofântica*, de constituição de um enunciado completo; a *função de expansão discursiva*, de articulação desses enunciados em um todo coerente; e a *função de reflexividade discursiva*, de transformação de um enunciado completo. Agora, em cada uma dessas funções discursivas podem ocorrer diferentes *operações discursivas*, relativas a produção do discurso considerado ao nível de sua produção por um locutor. No caso da função referencial são quatro as operações discursivas: de *designação pura* (identificação de um objeto), de *categorização simples* (identificação de um objeto por suas características), de *determinação* (torna preciso o campo de aplicação da operação de categorização) e de *descrição* (identificação de um objeto cruzando os resultados de várias operações de categorização) (MORETTI; BRANDT; BASSOI, 2014).

A operação de descrição permite identificar um objeto que não pode ser nomeado diretamente, pois nenhuma linguagem pode ter um nome para cada objeto. Esta operação introduz ainda uma possibilidade paradoxal: não somente podemos designar objetos que não existem, como também os objetos impossíveis e, portanto, impossíveis de serem identificados.

Observemos que, em matemática, é muito comum a designação de objetos que, a priori, não existem, mas cuja existência pode ser demonstrada a posteriori. Por exemplo, nos seus *Elementos*, Euclides define ângulo reto a partir dos conceitos de ângulos adjacentes suplementares e de congruência de ângulos para depois mostrar a sua existência. Por outro lado, podemos usar a expressão “um poliedro regular de faces hexagonais” para designar algo impossível de existir.

A análise da função referencial permite destacar a diferença entre dois empregos contrários da linguagem natural: o comum e o especializado, ou lógico-matemático (não confundir com a linguagem simbólica). Essa diferença deve ser encontrada na maneira de efetuar as operações da função referencial e a importância da operação de descrição é aí evidenciada. Segundo Duval (2004):

De fato, uma das características de um emprego especializado da linguagem natural é a importância que toma a operação de descrição. Essa importância não se reflete somente na frequência de expressões referenciais dependente desta operação; ela aparece sobretudo com o caráter recorrente que toma essa *operação de descrição* em seu emprego especializado e, em particular, em seu emprego “lógico-matemático” (Duval, 2004, p.102).

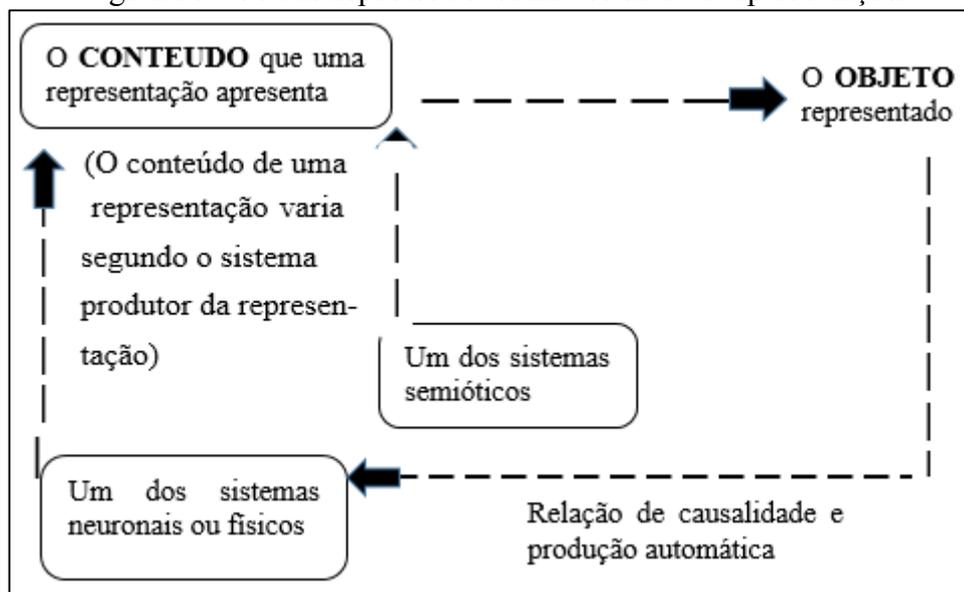
As operações, ou processos de descrição são fundamentais para a aquisição dos conhecimentos científicos, contribuindo para a descoberta de novos dados, base de todo desenvolvimento do conhecimento. A atividade de resolução de problemas propostos aos alunos com fins didáticos, bem como outras atividades matemáticas tais como generalização, produção de contraexemplos, definições, questionamentos e, por conseguinte, de criação de problemas se desenvolvem a partir de um trabalho anterior de descrição. Todo processo de descrição é uma atividade complexa de representação, tanto mental e interior, como semiótica e material, que dá lugar a uma grande variedade de atividades para o desenvolvimento do conhecimento. A atividade de descrição refere-se tanto a situações de transmissão como a situações de observação e mobiliza dois registros de representação distintos: o verbal ou escrito e o figural.

Segundo Duval (2003, p. 48) a análise dos processos de descrição, bem como da variedade das possíveis descrições, nos levam à questão da produção das representações e da compreensão das representações produzidas, indicando que a atividade de representação está no cerne de todo processo de descrição. Por exemplo, não há conhecimento em ciências sem as descrições relativas às observações e à coleta de dados (relativas a tais tipos de fenômenos). Em seu artigo Duval (2003) procura verificar como esses processos influenciam a aprendizagem matemática. Todo o desenvolvimento de uma reflexão epistemológica e

cognitiva sobre a construção do conhecimento matemático está ligado ao reconhecimento do caráter semiótico das representações bem como à elaboração de métodos para analisar tais representações (DUVAL, 1998, p. 178-179).

É preciso não confundir representação e registro de representação. “A grosso modo, uma *representação* é qualquer coisa que se coloca no lugar de outra coisa” (DUVAL, 2003, p. 50, tradução nossa). O interesse metodológico e teórico da noção de registro reside no fato de ele permitir analisar a complexidade cognitiva própria aos diferentes tipos de representações semióticas que são mobilizadas em uma atividade matemática e suas variações introduzidas pelo ensino da matemática (DUVAL, 2003, p.43-44; DUVAL, 2004). As representações devem ser analisadas: (i) com relação àquilo que ela de fato representa e (ii) com relação ao sistema pelo qual ela é produzida. Há dois tipos de sistemas que produzem uma representação: (i) os sistemas físicos e neuronais, que produzem automaticamente as representações; e (ii) os sistemas semióticos, que contemplam a produção intencional das representações. A Figura 56 mostra essa relação de produção entre os dois sistemas.

Figura 56 - Os três aspectos constitutivos de uma representação.



Fonte : DUVAL, 2003, p. 50.

Não se pode distinguir de fato o conteúdo de uma representação do objeto que ela representa sem considerar o sistema que a produziu. Os chamados *registros de representação semiótica* formam um subconjunto dos sistemas semióticos. Os registros devem obedecer um mínimo de regras para que as representações produzidas por uma pessoa possam ser identificadas por outra pessoa e também para permitir transformações controláveis das

representações, sejam elas tratamentos (internas relativa ao registro inicial) ou conversões (externas relativas ao registro inicial) (DUVAL, 2004, p. 44-46).

Outra questão fundamental é a análise das produções dos alunos. Segundo Duval, é no contexto dos processos de descrição que se obtém as produções mais pessoais e mais diversificadas desses alunos. Do ponto de vista da pesquisa (em educação) trata-se de uma questão metodológica e do ponto de vista dos professores de uma questão de diagnóstico (DUVAL, 2003, p. 16).

Um processo de descrição envolve três polos: o objeto (situação, transformação, sequência de operações, fenômenos) que é descrito, uma descrição verbal, ou discursiva e uma descrição não discursiva (mapas, esquemas, figuras, diagramas). E toda atividade de descrição se aplica tanto a situações de transmissão de informação como de situações de observação, e ela envolve dois registros de representação diferentes.

Ainda segundo Duval (2003) é necessário distinguir o que é chamado de tarefa real de descrição de tarefa puramente formal de descrição. Uma tarefa real de descrição requer uma observação de um objeto ou de uma situação a ser descrita, enquanto que uma tarefa de descrição puramente formal limita-se a uma mudança de registro de representação e que procura respeitar a invariância daquilo que se quer representar. Em geometria, por exemplo, as tarefas exigidas para descrever os passos de uma construção geométrica são tarefas formais de descrição. Ainda, segundo Duval (2003, p. 19), os processos de descrição impõem que se diferenciem vários níveis de correspondência entre a descrição verbal ou a descrição gráfica e os fenômenos descritos, lembrando que muitas dessas tarefas se mostram difíceis para os alunos.

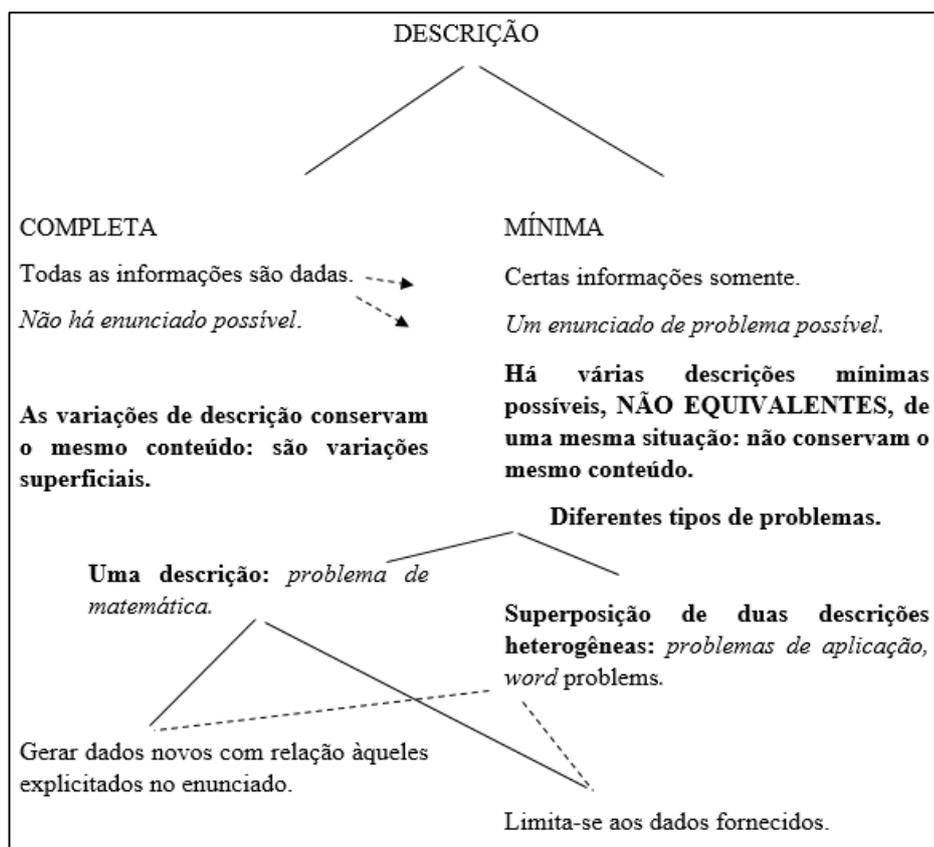
Compreender uma descrição é visualizar o que está descrito, e isso significa que não é somente reconhecer o objeto descrito, mas também poder colocar em correspondência as unidades do desenho e o traçado do objeto descrito. Portanto, o problema da compreensão das descrições não é saber se um tipo de representação visual é preferível a outra ou se deve acompanhá-la como um suporte secundário, mas sim conhecer as correspondências entre uma descrição verbal e um dos diferentes tipos de descrição por visualização.

A importância dos processos de descrição se evidenciam através de seu papel heurístico no desenvolvimento dos conhecimentos científicos. Esse desenvolvimento depende da observação dos fenômenos e da coleta de dados sobre esses fenômenos. Em matemática isso não é evidente de imediato, pois os objetos matemáticos são fenomenologicamente e

instrumentalmente acessíveis, o que faz com que as atividades de descrição fiquem em segundo plano em relação às atividades de raciocínio para fins de prova ou justificação. Uma exceção refere-se ao ensino da geometria, com a introdução de tarefas de descrição de construção de figuras nos anos 1970-1980, após a constatação de que um enfoque excessivamente axiomático não permitia que os alunos tomassem consciência de denominações precisas e da existência de regras figurais intrínsecas às figuras geométricas (o que motivou o estabelecimento de uma diferenciação entre desenho e figura por parte de Laborde (1993) e a noção de conceitos figurais de Fischbein (1993), conforme no capítulo 3).

Se considerarmos a resoluções de problemas como o ponto forte no aprendizado de matemática, devemos compreender então as características e a estrutura de um enunciado de um problema. Basicamente um enunciado de um problema proposto aos alunos (no Ensino Básico, mas muitas vezes também no Ensino Superior) consiste na descrição parcial de uma certa situação. Tal enunciado é obtido de uma *descrição completa* de uma situação (que não é, portanto, um problema) por meio da omissão de alguns dados (diminuição ou “enfraquecimento” de hipóteses) até a obtenção de uma *descrição mínima* (que permite ainda recuperar a descrição completa) ou uma descrição intermediária. A Figura 57 resume a análise em retrospectiva dos enunciados.

Figura 57 - Descrições completa e mínima de um problema.



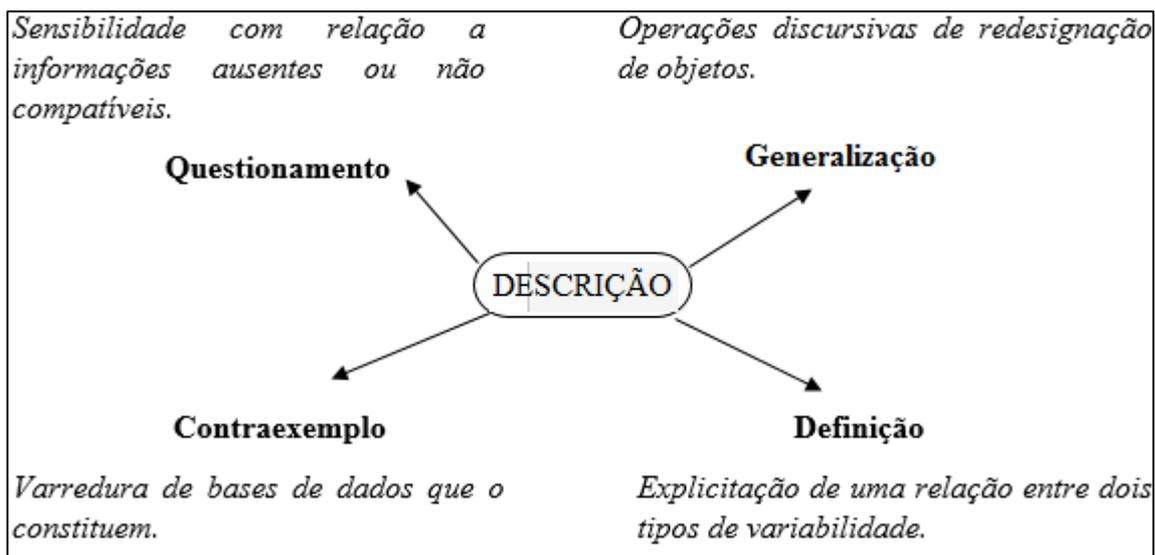
Fonte: Duval, 2003, p. 23.

A análise didática prospectiva centrada na resolução de problemas considera somente a passagem do enunciado dado aos seus diversos tratamentos, sem considerar a passagem de uma descrição completa a uma descrição mínima. A Figura 57 mostra a diferença entre as duas descrições. Segundo Duval (2003) essa passagem é fundamental:

É portanto decisivo que se introduza os alunos nesse jogo particular que constitui a *fabricação de problemas matemáticos didáticos* e, em seguida, sua resolução (DUVAL, 2003, p. 23, grifo nosso, tradução nossa).

Quanto ao papel das descrições no desenvolvimento de outros processos cognitivos podemos citar, além da tarefa de criação de problemas, as tarefas de generalização, de encontrar contraexemplos e de definir. A Figura 58 mostra as tarefas que podem ser geradas a partir dos processos de descrição.

Figura 58 – O papel das descrições no desenvolvimento de outros processos cognitivos.



Fonte: Duval, 2003, p. 28, tradução nossa.

A formulação de perguntas, analogamente à fabricação de problemas é também extremamente importante:

...a importância, na aquisição de conhecimentos científicos, do fato de se formular perguntas: trata-se, aí também, de uma condição necessária para o desenvolvimento da compreensão na aprendizagem (DUVAL, 2003, p.29, tradução nossa).

Mais adiante Duval comenta:

Para responder a essa questão...é que se propõe aos alunos que fabriquem eles mesmos enunciados de problemas. É uma atividade pedagogicamente estimulante (pois os alunos são conduzidos a mudar de posição: produzir uma descrição e não mais somente compreender aquela que foi formulada por outra pessoa), mas didaticamente estéril (pois os alunos reproduzem estereótipos de enunciados sem tomar consciência das possíveis variações de descrições mínimas e, portanto, de enunciados)...Para introduzir os alunos na dinâmica, bem particular, do questionamento gerador de problemas matemáticos de natureza “didática”, é necessário fazê-los inicialmente trabalhar sobre a descrição completa de uma situação e em seguida fazê-los listar as diferentes maneiras de recortar essa descrição completa para obter descrições mínimas. (DUVAL, 2003, p. 30-31, grifos nossos, tradução nossa).

Ora, esse trabalho que, segundo Duval, deve ser feito com os alunos (do Ensino Básico) que é o questionamento de problemas de natureza didática, é um trabalho dos professores que, por sua vez devem tomar consciência, e ter a experiência de vivenciar, em sua formação no Ensino Superior, ou em programas de aperfeiçoamento qual seja, a criação de problemas, que é o que propomos aqui.

E consideráramos que um tal trabalho seria também talvez necessário de ser feito com os futuros professores (DUVAL, 2003, p.31, grifo nosso, tradução nossa).

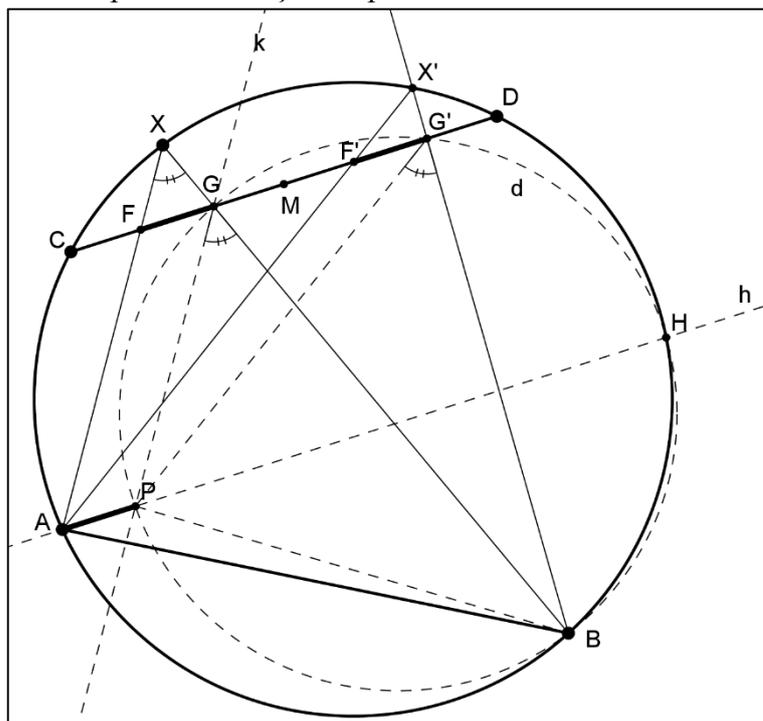
Esse procedimento de passar de uma descrição completa para uma descrição mínima é um tipo de procedimento metódico que está incluído, mas não explicitado, na estratégia WIN (What if not?), para gerar problemas, que citamos anteriormente (Brown&Walter, 2005). Duval (2003, p. 23) comenta que em geometria, pode-se propor aos alunos do Ensino Básico, em se tratando de resolução de problemas, tarefas de reconstituição ou de restauração de figuras que foram truncadas. O correspondente em um nível mais avançado são os problemas de construção geométrica (régua e compasso) que, por sua vez são excelentes fontes de geração de problemas de geometria.

Um exemplo disso é o seguinte problema, gerado durante a orientação de trabalho de conclusão de curso de uma aluna que estudava a transformação translação com problemas complexos propostos no livro de Petersen (1963). O problema número 260 (PETERSEN, 1963, p.78) diz o seguinte:

“Numa circunferência, traçamos duas cordas \overline{AB} e \overline{CD} . Encontrar sobre a circunferência um ponto X tal que as cordas \overline{XA} e \overline{XB} determinem sobre a corda \overline{CD} um segmento \overline{FG} , igual a um segmento dado”.

Pelo enunciado depreendemos que o ponto X deve estar no arco \widehat{CD} de modo que este arco e a corda \overline{AB} estejam em semiplanos distintos em relação à reta que contém a corda \overline{CD} . O problema pode ser resolvido por translação conforme se pode ver na Figura 59 de análise do problema:

Figura 59 - Análise para a resolução do problema 260 do livro de Petersen (op.cit.).

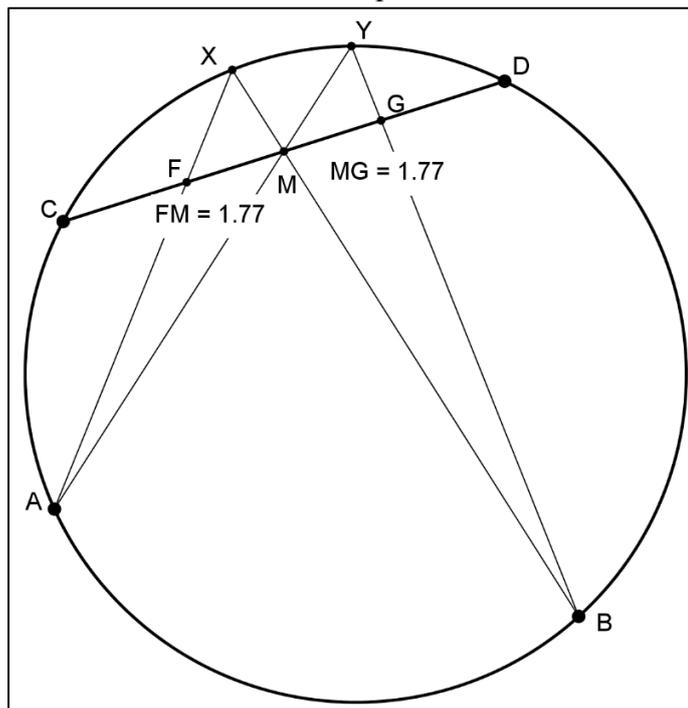


Fonte: O autor.

Sem entrar em detalhes, pela figura vemos que basta traçar a reta h paralela à corda \overline{CD} e marcar o ponto P nessa reta de modo que $AP = FG$ (cujo comprimento é dado). Então $APGF$ é um paralelogramo, e portanto $\overline{PG} \parallel \overline{AX}$. Segue que os ângulos $\angle PGB$ e $\angle X$ (que é conhecido, pois o arco \widehat{ACDB} é o arco capaz desse ângulo em relação ao segmento \overline{AB}) são congruentes. Então o ponto G está no arco capaz d daquele ângulo $\angle X$ em relação ao segmento \overline{PB} (que temos) e o problema é resolvido. Observa-se que pode haver uma segunda solução $\overline{F'G'}$, como se pode ver na Figura 59. Note-se que esse arco capaz passa pelo ponto H , ponto de interseção da reta h com a circunferência dada inicialmente, qualquer que seja o ponto P nessa reta.

Movendo o ponto X no arco \widehat{CD} (na figura de análise no GeoGebra) é possível perceber que o comprimento de \overline{FG} aumenta conforme o ponto X se afasta do ponto C no arco \widehat{CD} , mas até um certo limite, quando volta a decrescer. Essa análise sobre a construção do segmento, nos levou à seguinte pergunta (criação de um problema): como achar o segmento \overline{FG} de comprimento máximo sobre a corda \overline{CD} ? A solução é obtida traçando-se a circunferência que passa pelos pontos B e H e é tangente à corda \overline{CD} (PINHO, 2017, p. 74-75). Notamos também que os segmentos \overline{FG} e $\overline{F'G'}$ pareciam ser simétricos em relação ao ponto médio M da corda \overline{CD} , o que de fato ocorre. Além disso, conseguimos ainda obter um resultado interessante (PINHO, op.cit.), que é uma nova demonstração do conhecido teorema da borboleta (BOGOLMONY, 2016; COXETER;GREITZER, 1967). A Figura 60 se refere a esse resultado:

Figura 60 -Teorema da borboleta: M ponto médio de $\overline{CD} \Rightarrow FM = MG$.



Fonte: O autor.

O teorema diz que pelo ponto médio \mathbf{M} de uma corda $\overline{\mathbf{CD}}$ em uma circunferência traçam-se duas cordas $\overline{\mathbf{YA}}$ e $\overline{\mathbf{XB}}$. Se \mathbf{F} e \mathbf{G} são, respectivamente, os pontos de interseção da corda $\overline{\mathbf{CD}}$ com as cordas $\overline{\mathbf{XA}}$ e $\overline{\mathbf{YB}}$, então $\mathbf{FM} = \mathbf{MG}$. Pelo que vimos anteriormente o segmento $\overline{\mathbf{FM}}$, resultante das interseções de $\overline{\mathbf{XA}}$ e $\overline{\mathbf{XB}}$ com a corda $\overline{\mathbf{CD}}$, deve ter o mesmo comprimento do que seu equivalente simétrico em relação a \mathbf{M} nessa corda. Mas esse simétrico só pode ser o segmento $\overline{\mathbf{MG}}$, que é resultante da interseção das interseções de $\overline{\mathbf{YA}}$ e $\overline{\mathbf{YB}}$, que passam por \mathbf{M} , com a corda $\overline{\mathbf{CD}}$.

Não vamos aqui entrar em mais detalhes sobre o papel das descrições no desenvolvimento de outros processos cognitivos, mas vamos analisar um pouco mais a complexidade da relação entre discurso e visualização. Considerando que toda descrição verbal vai ao encontro do princípio de economia¹⁸ na medida em que sua compreensão implica a conversão em uma representação permitindo a visualização (DUVAL, 2003, p. 37-38), transcrevemos aqui uma nota ao pé da página do artigo de Duval sobre o termo figura:

Frequentemente as figuras em geometria tem sido consideradas como satisfazendo esse princípio de economia para a compreensão de uma situação geométrica. Constata-se que essa já antiga explicação com a oposição recente do termo “figura” ao termo “desenho” não são tão distantes assim; dois papéis ao menos podem ser atribuídos às figuras em geometria: “de um lado elas **ilustram as situações** estudadas, e de outro lado elas servem de suporte à intuição permitindo aparecer sobre um objeto visível relações ou hipótese de relações **que não são claramente evidentes em um enunciado verbal**” (BESSOT¹⁹ apud DUVAL, 2003, p. 38).

Considerando apenas as representações semióticas, é necessário distinguir, para poder analisar o conteúdo de uma visualização, dois níveis de articulação dos sentidos: as unidades figurais que podem ser reconhecidas (que tomam um valor representativo elementar) e as relações entre as unidades figurais que podem ser reconhecidas (aquelas que têm um valor representativo de composição).

A pergunta que fazemos aqui “o que é criar um problema de matemática, em particular, de geometria?”, deve ser precedida pelas perguntas “o que é um problema de matemática?” e “o que é resolver um problema de matemática?”. Vimos que Duval (2003) aborda essas duas últimas questões introduzindo a distinção entre descrição completa de uma situação e descrição mínima de uma situação. A geração de problemas de matemática para o Ensino Básico nos dá uma indicação do que se pode fazer, através de processos de descrição, para o Ensino Superior.

¹⁸ Provavelmente Duval se refere ao que ele mesmo chama de “economia de tratamento”.

¹⁹ BESSOT, D. *Problèmes de représentation de l'espace*. Enseignement de la géométrie, Bulletin Inter-Irem, 23, p.33 - 40, 1982.

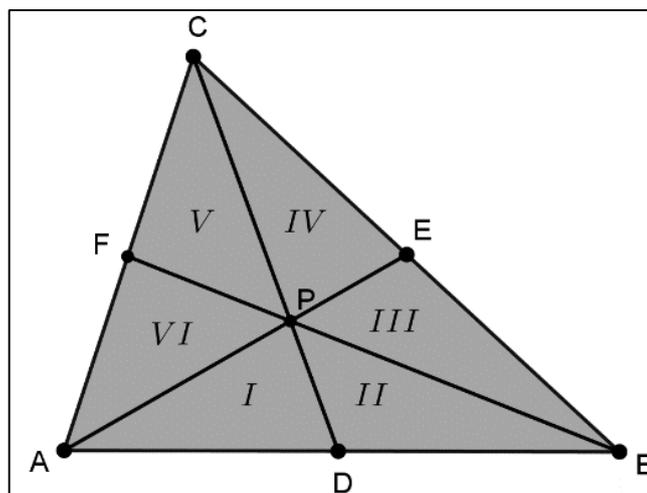
5.2 UM EXEMPLO DE CRIAÇÃO DE PROBLEMAS A PARTIR DE UMA DESCRIÇÃO COMPLETA DE UM PROBLEMA

Optamos por dar esse exemplo neste capítulo porque ele mostra claramente como se pode partir de uma descrição completa de um problema para chegar em uma descrição mínima de um (novo) problema, segundo o trabalho de Duval (2003). Entenda-se aqui como uma descrição completa de um problema um problema com excesso de hipóteses. Os matemáticos chamam isso de hipóteses fortes, ou de um problema fraco. O objetivo é chegar em problemas mais fortes, com hipóteses fracas.

Boa parte desta seção foi reproduzida de um trabalho nosso (PINHO, MORETTI, 2020). Consideremos o seguinte teorema da Geometria Plana:

As três medianas de um triângulo qualquer são concorrentes em um único ponto (no interior do triângulo) e essas medianas dividem o triângulo em seis outros triângulos de mesma área.

Figura 61 - Os seis triângulos equivalentes obtidos pelas medianas do triângulo ABC.



Fonte: Os autores (PINHO, MORETTI, 2020)

Há aqui dois resultados: um que diz que as três medianas concorrem em um ponto (que é chamado baricentro do triângulo) e outro que diz que os seis triângulos formados por essas medianas são equivalentes (mesma área). Uma recíproca para a segunda parte desse resultado é:

Sejam três cevianas quaisquer concorrentes em um ponto no interior de um triângulo qualquer. Se os seis triângulos contidos naquele triângulo e obtidos pela subdivisão das três

cevianas tiverem a mesma área, então aquelas cevianas são as medianas do triângulo (e o ponto de intersecção delas é o baricentro do triângulo).

Esse resultado tem uma demonstração simples: como, por hipótese, na Figura 61 os triângulos *I* e *II* têm a mesma área e como suas alturas relativas ao vértice comum *P* são congruentes, então $AD = BD$. Analogamente, obtém-se $BE = CE$ e $CF = AF$. Logo as cevianas *AE*, *BF* e *CD* são medianas do triângulo *ABC*. Pode-se considerar esse resultado como um problema completo, na terminologia de Duval (2003), por seu excesso de hipóteses, como veremos a seguir.

Aplicando-se as ideias de Duval (2003), é possível obter descrições menores, até se chegar a uma descrição mínima (em termos de hipóteses necessárias) do problema. O que será feito aqui será uma análise dos vários problemas possíveis e suas soluções, um tanto complexa para ser discutida no Ensino Básico (embora envolva Geometria Plana “elementar”), mas passível de discussão com alunos de um Curso de Licenciatura em Matemática, futuros professores do Ensino Básico.

Uma pergunta generalizada, a título de recíproca do resultado do exercício clássico enunciado anteriormente seria:

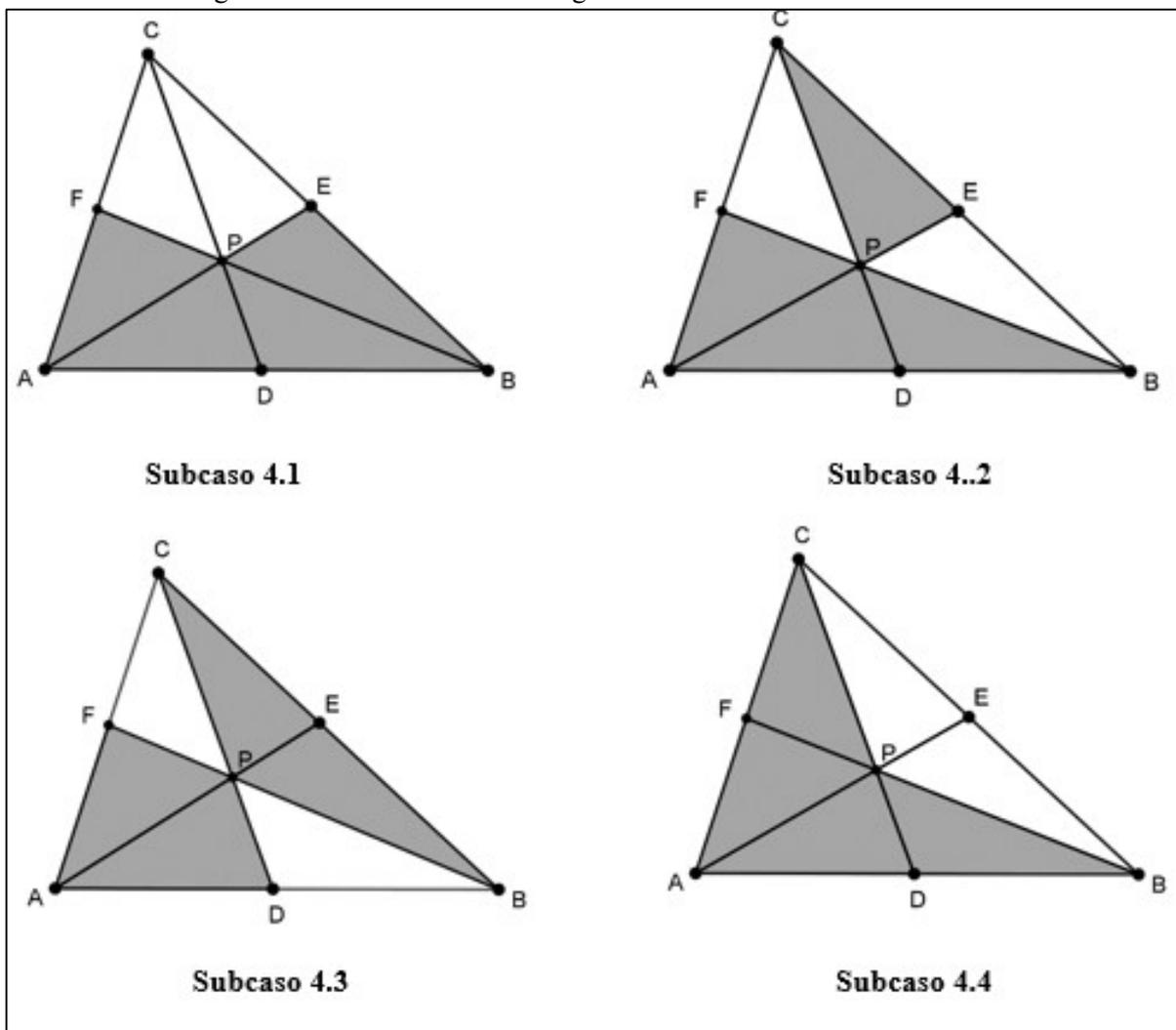
Sejam três cevianas quaisquer concorrentes em um ponto no interior de um triângulo qualquer. Se n ($1 < n < 6$) dentre os seis triângulos contidos naquele triângulo e obtidos pela subdivisão das três cevianas tiverem a mesma área, então aquelas cevianas são as medianas do triângulo?

O caso $n = 5$ é bem simples e dá uma resposta afirmativa para o enunciado pois, usando a mesma argumentação da demonstração da descrição completa do problema, é possível verificar que duas das cevianas da hipótese são medianas do triângulo, o que implica que, pela concorrência das três cevianas, a terceira também é uma mediana.

Os casos $n = 4$ e $n = 3$ são os que exigirão uma análise mais detalhada e complexa. Cada caso desses abrange quatro subcasos. Para listá-los, um procedimento sistemático será necessário. Considera-se inicialmente os três pares de triângulos que compartilham, em cada par, um mesmo vértice do triângulo *ABC*: par *I* e *II*; par *III* e *IV*; e par *V* e *VI* (Figura 61). No caso $n = 4$, necessariamente dois dos quatro triângulos devem estar contido em algum daqueles pares e os outros dois podem estar contido em outro par (subcaso 4.1), ou um em cada par de três maneiras distintas (subcasos 4.2, 4.3 e 4.4). No caso $n = 3$, pode-se ter dois triângulos em um mesmo par e o terceiro em outro, de duas maneiras distintas (subcasos 3.1 e 3.2), ou pode-

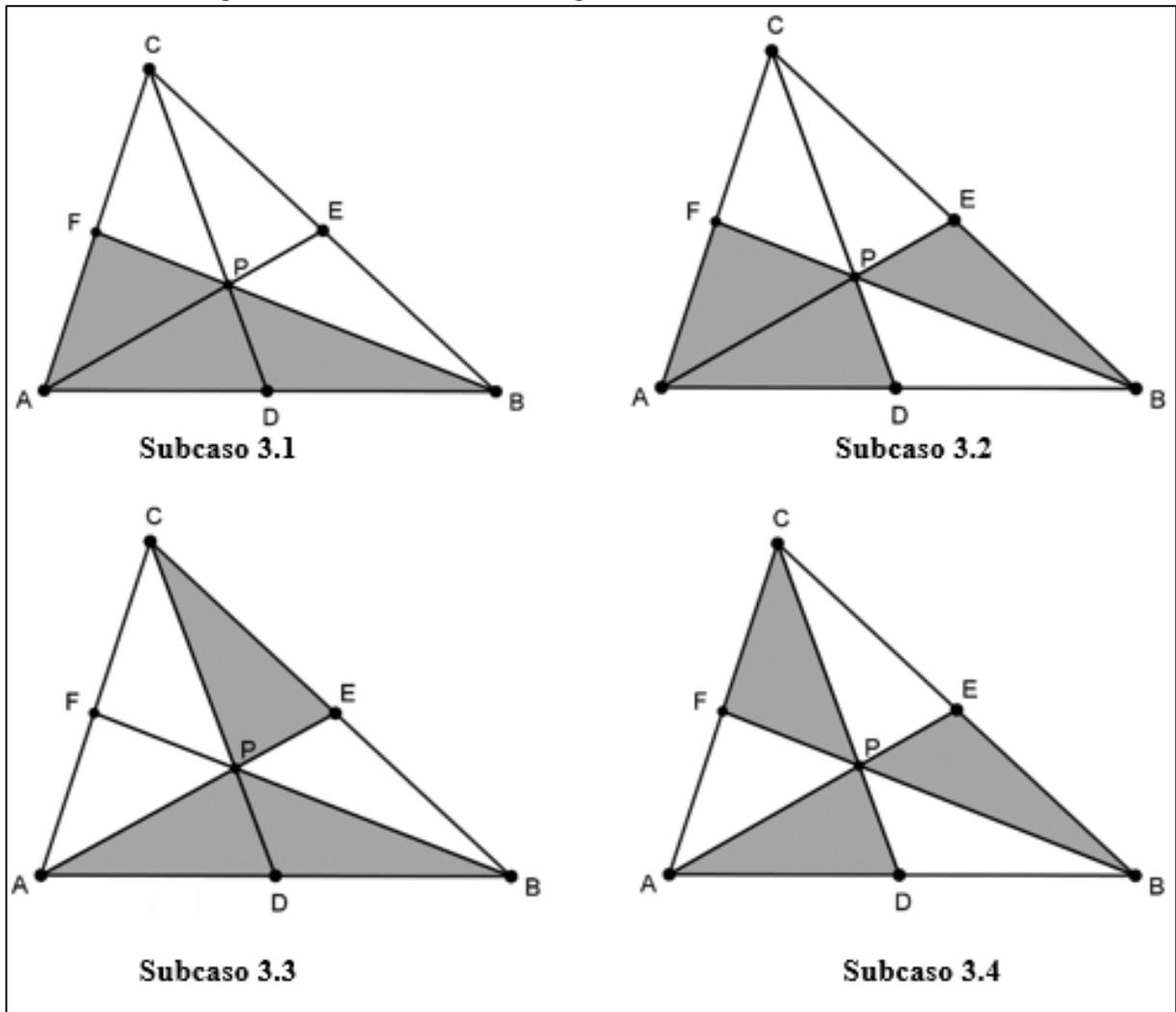
se ter um triângulo em cada par, de duas maneiras distintas (subcasos 3.3 e 3.4). As Figuras 62 e 63 ilustram essas situações.

Figura 62 – Casos $n = 4$. Os triângulos sombreados têm a mesma área.



Fonte: Os autores (PINHO, MORETTI, 2020)

Figura 63 – Casos $n = 3$. Os triângulos sombreados têm a mesma área.



Fonte: Os autores (PINHO, MORETTI, 2020)

Analisando os casos $n = 4$ na Figura 62, pode-se ver que os correspondentes subcasos 4.1, 4.2 e 4.4 teriam resposta afirmativa para a pergunta feita se o subcaso 3.1 da Figura 63 tiver resposta afirmativa, e que o subcaso 4.3 teria resposta afirmativa se o subcaso 3.2 também tiver.

Considerando então os casos em que $n = 3$:

i) **Subcaso 3.3** – é o mais simples dos quatro.

O ponto D é o ponto médio do lado AB do triângulo, pois os triângulos ADP e BDP têm a mesma área (por hipótese) e a mesma altura relativa ao vértice comum P . Os triângulos ACE e ACD têm a mesma área, pois o triângulo ACP é comum aos dois e os triângulos ADP e CEP têm a mesma área (por hipótese). Então, os triângulos ACE e ACD têm as mesmas medidas das alturas relativas ao lado comum AC . Portanto, o segmento DE é paralelo ao lado AC . Pelo teorema da base média para triângulos, o ponto E é o ponto

médio do lado BC. Logo, CD e AE são medianas, e portanto BF também é mediana do triângulo ABC.

ii) **Subcaso 3.2** – aqui será necessário usar o Teorema de Ceva.

Os triângulos ABE e ABF têm a mesma área, pois cada um contém dois triângulos de mesma área e o triângulo BDP é comum a ambos. Portanto, as medidas das alturas relativas ao lado comum AB são iguais. Portanto, o segmento FE é paralelo ao lado AB. Pelo Teorema de Tales, tem-se

$$\frac{CF}{AF} = \frac{CE}{BE} \Rightarrow \frac{BE \cdot CF}{CE \cdot AF} = 1 \cdot$$

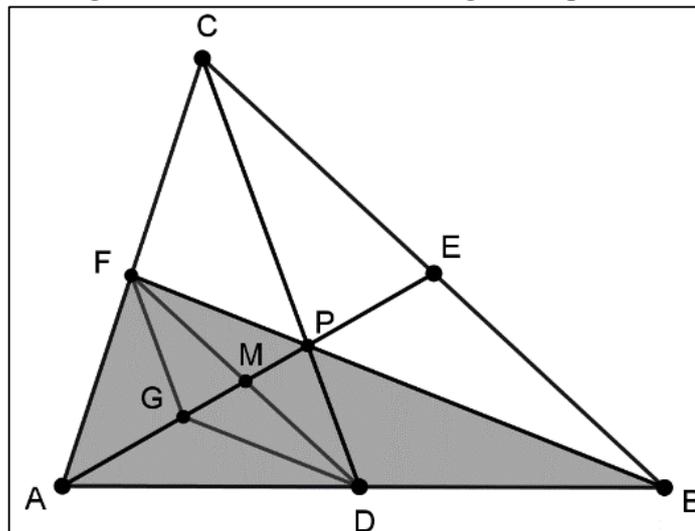
Pelo Teorema de Ceva obtém-se, da igualdade acima,

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = 1 \Rightarrow AD = BD \cdot$$

Portanto, os triângulos ADP e BDP têm a mesma área, pois têm a mesma altura relativa ao vértice comum P. Cai-se então no subcaso 4.1 que, por sua vez, terá resposta afirmativa se o subcaso 3.1 também tiver.

iii) **Subcaso 3.1** – a resposta será afirmativa, mas a demonstração é mais elaborada, exigindo o traçado de linhas auxiliares (Figura 64).

Figura 64 – Subcaso 3.1 com figura ampliada.



Fonte: Os autores (PINHO, MORETTI, 2020)

D é ponto médio do lado AB do triângulo ABC, ou seja, CD é uma mediana desse triângulo.

Os triângulos APD e APF têm, por hipótese, a mesma área. Como esses triângulos têm base comum AP, então suas alturas relativas a esse lado comum têm a mesma medida, o que acarreta que o ponto M é ponto médio do segmento DF. Seja G o ponto do segmento AM talque $MG = MP$. Então, o quadrilátero DPMG é um paralelogramo, pois tem diagonais cruzando-se em seus pontos médios. Portanto, DG é paralelo a CP e DP é paralelo a BP. Logo, os triângulos AGF e APC são semelhantes e os triângulos AGD e APB também são semelhantes. Conclui-se que

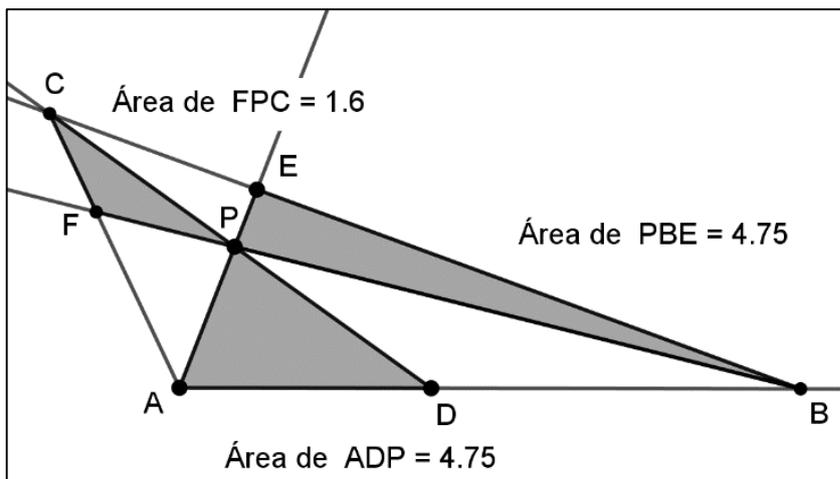
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AG}{AP} = \frac{AF}{AC} .$$

Pelo Teorema de Tales, DF é paralelo ao lado BC do triângulo ABC. Como M é ponto médio de DF, então E será o ponto médio de BC. Logo, AE é uma mediana do triângulo ABC, e portanto, BF também é mediana.

- iv) **Subcaso 3.4** – para esse caso será explorado o potencial semiótico do GeoGebra, tentando reconstruir, a partir de um dos seis triângulos da subdivisão, a figura no subcaso 3.4.

Considere então um triângulo ADP, como da figura deste subcaso. Traça-se as semirretas AP e AD, e escolhe-se na semirreta AP um ponto E qualquer de modo que o ponto P esteja entre A e E. Agora, usando a quarta proporcional obtemos um ponto B na semirreta AD, com D entre A e B, de modo que as áreas dos triângulos ADP e BEP sejam iguais. Se movermos o ponto E na semirreta AP, o ponto B será movido na semirreta AD de modo que a igualdade das áreas de ADP e BEP seja mantida. Finalmente, traçam-se as semirretas BE e DP e, em sua intersecção, encontra-se um ponto C. Na intersecção da semirreta BP com o lado AC encontra-se um ponto F (pode ocorrer alguma situação de impossibilidade, mas é possível ajustar o ponto E de modo a se obter os pontos B e F). Verifica-se agora as áreas dos três triângulos ADP, BEP e CPF.

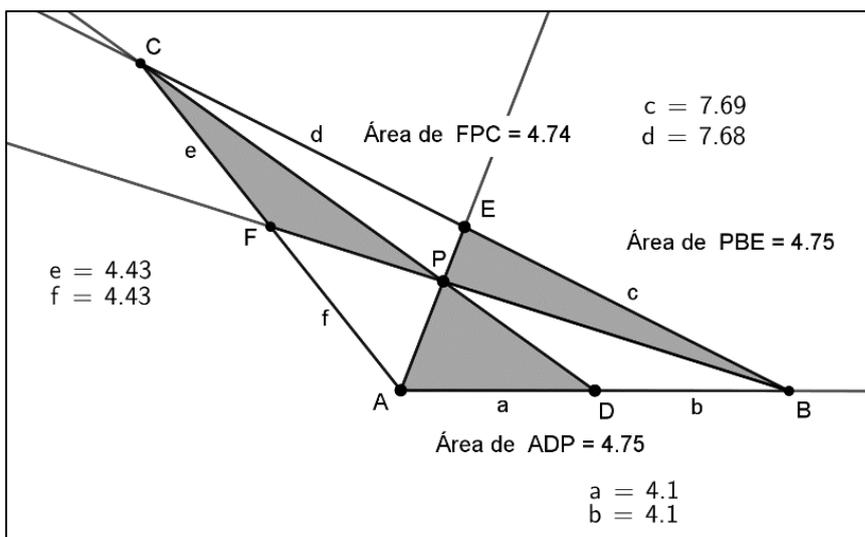
Figura 65 – Situação em que a área do triângulo CPF não é igual às áreas dos triângulos ADP e BEP.



Fonte: Os autores (PINHO, MORETTI, 2020)

Agora movemos o ponto E na semirreta AP de modo que a área do triângulo CPF se iguale às áreas dos outros dois triângulos (ou fique bem “próxima”, pois é muito difícil realizar esse movimento). Verifica-se então se os pontos D, E e F são (aproximadamente) os pontos médios dos lados do triângulo ABC, que é o que ocorre. Conclui-se, por meio desta “prova” que a pergunta no subcaso 3.4 é respondida também afirmativamente.

Figura 66 - Situação em que a área do triângulo CPF é quase igual às áreas dos triângulos ADP e BEP.



Fonte: Os autores (PINHO, MORETTI, 2020)

Finalmente, o caso $n = 2$ pode ser verificado, também explorando o potencial semiótico do GeoGebra, e constatado que é falso, ou seja, dois quaisquer dos seis triângulos serem congruentes não implica que o ponto de interseção das três cevianas é o baricentro.

6 METODOLOGIA

No início de nosso trabalho nos dedicamos à busca, leitura e análise de artigos, livros, teses e dissertações relacionados com criatividade em geral, criatividade em matemática e em Educação Matemática. Este trabalho não é uma continuidade de uma dissertação anterior. Porém, como foi relatado aqui no capítulo primeiro, este trabalho é mais uma consequência de uma experiência lecionando no Ensino Superior, uns bons anos em geometria, e de experiências pessoais envolvendo criatividade na matemática. Após algum tempo de leituras (revisão bibliográfica) e, claramente, após as disciplinas cursadas e a nossa orientação no programa de pós-graduação, nossa pesquisa tomou contornos mais definidos.

As leituras continuaram durante todo o trabalho. O que identificamos foi a existência de um núcleo bastante amplo de pesquisadores em todo o mundo escrevendo sobre criatividade em geral e na Educação Matemática. A maior parte das nossas referências foi escrita em inglês por todos esses pesquisadores, mas houve leituras em francês (Poincaré, Balacheff, Duval, por exemplo) e em espanhol (em geral títulos traduzidos do inglês ou do francês). Buscamos, sempre que possível, fontes primárias, mas não evitamos trabalhos decorrentes dessas fontes.

Já durante as aulas de geometria preocupávamos em fazer perguntas de geometria “incomuns” aos alunos, por exemplo:

- Você está em sala de aula, em uma turma de 9º ano trabalhando em geometria com a noção de circuncentro de um triângulo. Você não dispõe de um software de geometria no momento, mas dispõe de régua e compasso para quadro. Você desenha, de início, um triângulo acutângulo no quadro, traça as mediatrizes dos lados (por um processo de construção correto, e não por medição para achar os pontos médios dos lados, ou de um esquadro para traçar perpendiculares), e constata, juntamente com os alunos que as mediatrizes dos três lados do triângulo se cruzam em um ponto único (o que, infelizmente, não dá muito certo devido às imprecisões dos aparelhos de traçado) e que *surge no interior do triângulo*. Finalmente você coloca a ponta seca do compasso nesse ponto e, com um raio igual à distância de ponto a um dos vértices você traça *uma* circunferência circunscrita ao triângulo. O centro obtido é chamado de circuncentro do triângulo. Perguntas:

- 1) Como você justifica que essa circunferência é a única circunferência que passa pelos três vértices do triângulo? Ou, de outra maneira, porque aquele centro é único?

Resposta: A discussão com nossos alunos passaria pelo conhecimento prévio da propriedade da mediatriz de um segmento como o lugar geométrico dos pontos equidistantes das extremidades do segmento.

- 2) O circuncentro está sempre no inteiro do triângulo? Dê uma resposta criativa.

Resposta: Uma possibilidade é desenhar no quadro outros triângulos e perceber que quando o triângulo é obtusângulo o circuncentro fica no exterior do triângulo. Com o GeoGebra, por exemplo, isso seria facilmente verificável devido à dinâmica do software. Mas você (como professor do Ensino Básico) não tem ali o GeoGebra. Há uma maneira mais eficaz de responder a essa pergunta, sem sofisticação e apenas esboçando uma figura. Basta desenhar no quadro uma circunferência e dizer: “esta circunferência é a circunferência circunscrita a muitos triângulos”. Em seguida trace um triângulo com os vértices de modo que o centro da circunferência fique no interior da circunferência (basta desenhar uma corda que não seja um diâmetro e tomar o terceiro vértice no arco “maior”). Depois trace um triângulo tomando uma corda que não seja um diâmetro e tome o terceiro vértice no arco “menor”. Finalmente trace um triângulo com um lado que seja um diâmetro. Pronto, apresentamos três tipos de triângulos com seus circuncentros nas três situações possíveis (o circuncentro não pode ser um vértice do triângulo). Esse é um argumento visual convincente e definitivo.

- Mesma situação do exemplo anterior. Você está apresentando para seus alunos do 9º ano alguns quadriláteros inscritos em uma circunferência (por exemplo, o quadrado, um retângulo qualquer, ou um trapézio isósceles). Então algum aluno pergunta: todos os quadriláteros são inscritíveis em alguma circunferência, ou seja, para todo quadrilátero existe uma circunferência circunscrita a ele? Como você responderia a essa pergunta sem ter que usar a condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja inscritível?²⁰

Resposta: desenhe uma circunferência no quadro e, nessa circunferência marque quatro pontos quaisquer. Esses quatro pontos formam um quadrilátero, que está inscrito nela. Agora trace um ponto que não esteja na circunferência e forme com esse ponto e com três dos pontos que já estão na circunferência um outro quadrilátero, ignorando o quarto ponto da circunferência (de preferência faça isso

²⁰ O autor, apesar de não ter experiência no Ensino Básico tem ideia de que tudo isso possa ser uma fantasia: “os alunos não chegaram a esse nível de perguntas”; “não há tempo de discutir isso”; não pudemos estudar a geometria como seria devido, segundo o currículo”.

de modo que o quadrilátero seja ainda convexo, para não gerar uma discussão ali de que somente os quadriláteros não convexos são não inscritíveis).

Também aprofundávamos uma discussão sobre alguma pergunta de um aluno em sala. Simplificando um pouco, podemos dizer que um ato de criação por parte de um aluno ocorre quando ele faz uma pergunta. Os alunos fazem perguntas porque não entenderam o que foi explanado (e muitas vezes têm razão – entram aí os processos de descrição) ou quando dão um passo adiante e perguntam: “e se fosse assim...?” ou, “e se não fosse dessa maneira?”, o que nos remete para a estratégia WIN de Brown e Walter (2005) para a criação de problemas.

Paralelamente a essas atividades, começamos a fazer alguns experimentos em sala sobre criatividade em geometria, no início sem uma metodologia definida. Tal metodologia tomou forma quando formulamos nosso problema de pesquisa definitivamente.

Nossa pesquisa é de cunho qualitativo. Não fizemos estatísticas e trabalhamos com pequenos grupos, no máximo turmas de cerca de 20 alunos.

Dois tipos de experimentos foram feitos:

1. Um com turmas de licenciatura na disciplina Geometria Quantitativa I (que aborda quase toda a geometria plana), da primeira fase do Curso de Matemática da UFSC, durante três semestres.
2. Com um grupo de alunos voluntários do Curso de matemática com grande motivação.

Os trabalhos dos alunos foram, em geral, coletivos, mas algumas individualidades se fizeram evidentes.

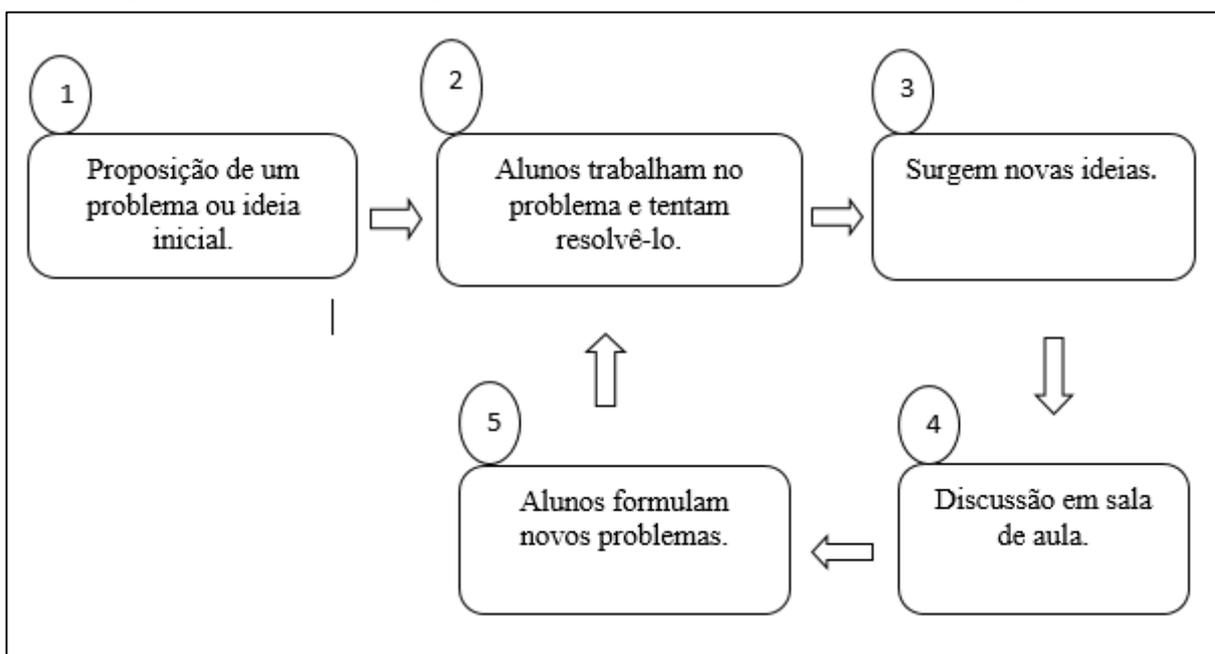
Como estabelecer um processo que permitisse e estimulasse os alunos a serem criativos na formulação de problemas de geometria? Um procedimento em etapas se mostrou mais conveniente e efetivo. Além disso, seria interessante ter “pontos de partida”, ou seja, algumas ideias que fornecessem o começo, a gênese de um problema.

O procedimento estabelecido consiste, em uma primeira etapa, fornecer uma ideia inicial para os alunos, com algumas pequenas sugestões. É o que é chamado de uma situação de criação de problema semi-estruturado, isto é, aquela em que é dada para os estudantes uma situação aberta (sem um final pré-estabelecido) e os estudantes são convidados (estimulados) a explorar a estrutura e completá-la aplicando conhecimentos. Essa ideia inicial – uma “semente” – é analisada e discutida pelos alunos (de preferência em grupos) em uma segunda etapa. Ela pode ser um problema aberto (de final aberto), no qual os alunos têm que trabalhar ou resolver.

Em seguida, vem uma terceira etapa, em que algumas ideias “novas” podem surgir, individualmente ou em pequeno grupos. Em uma quarta etapa a discussão é trazida para a sala de aula ou para uma reunião nossa com o grupo de voluntários. Finalmente, em uma quinta etapa, os alunos formulam novos problemas. Esse processo deve ser cíclico, com a quinta etapa alimentando novamente a etapa dois. A nossa participação nesse procedimento é a de mediar o processo alimentando a discussão como se fosse mais um aluno. Nós não devemos *dirigir* o processo, tendo o controle total dele. A contribuição dos alunos deve ficar clara em todo o processo.

Um esquema do procedimento pode ser visto na Figura 67:

Figura 67 –Procedimento para desenvolver a criação de problemas em geometria



Fonte: O autor.

Vamos detalhar um pouco mais esse esquema. Na etapa 2 os alunos podem resolver ou não o problema, mas o importante é que, nesse processo surjam novas ideias (etapa 3). Essas novas ideias já podem ser novos problemas (etapa 5), o que pode ocorrer com ou sem a discussão em sala de aula (etapa 4). No caso do grupo de alunos voluntários, essa discussão ocorreu nas reuniões do grupo. Resolver um problema significa não apenas efetuar cálculos. O problema (pergunta formulada) pode ser, e na maioria das vezes é, uma afirmação que não se sabe se é verdadeira ou falsa. Essa afirmação exige então uma prova de sua veracidade ou de sua falsidade. A busca de contraexemplos deve ser uma opção viável.

Surge então uma questão importante: como sabemos que estamos formulando um problema? O problema tem que ter uma certa consistência e os alunos já devem conhecer um conjunto de propriedades dos objetos geométricos. Eles já devem estar minimamente preparados ou equipados com uma certa quantidade de informação em geometria. Por esse motivo, as investigações em sala de aula ficam dificultadas, pois os alunos cursam a disciplina de Geometria Quantitativa I na primeira fase do curso de Matemática e muitas vezes vêm do Ensino Básico apenas um formação mínima nessa área ou nenhuma formação.

Um recurso fundamental para todo esse trabalho com os alunos foi o uso de um SGD que, no nosso caso é o GeoGebra. De imediato os alunos foram colocados em contato com essa ferramenta. Comentamos com eles algumas características dessa ferramenta. Não é preciso fazer um curso completo sobre o GeoGebra antes de qualquer outra coisa. O GeoGebra passou a fazer parte de todas as nossas aulas, sempre de forma dinâmica, que é a principal potencialidade da ferramenta²¹. Utilizamos sempre em nossas aulas um data show, não para projetar slides de uma apresentação, mas para projetar a tela do GeoGebra e começar ali mesmo, de forma dinâmica, uma discussão sobre alguma propriedade ou teorema que estávamos estudando. Usamos o quadro com desenhos feitos à mão, como esboços, para reforçar também as características conceituais de uma figura (FISCHBEIN, 1983; DUVAL, 1998, 2002, 2012). O GeoGebra estava ali, sempre ao lado, para dirimir dúvidas ou, o que é mais importante, ampliar a discussão.

Em contato com o artefato, os alunos precisam desenvolver o *potencial semiótico* dele. Também, logo no início da disciplina, apresentamos as limitações dos SGD e apresentamos vários exemplos que evidenciam suas potencialidades. Os alunos logo descobriram, por eles mesmos, características do GeoGebra, muitas vezes não conhecidas por nós. Era o desenvolvimento do potencial semiótico do artefato.

Voltando à questão de como podemos saber se um problema é, de fato, um problema? Tentar resolvê-lo é uma boa maneira de comprovar se temos um problema. Mas um problema pode não ter resposta, ou uma única resposta (problemas com final aberto). Em geral, o que é necessário é verificar a consistência interna do problema proposto. As hipóteses têm que ser consistentes, não contraditórias. Muitas vezes os alunos não sabem, nem nós sabemos, resolver um problema. Quando se trata de uma afirmação, e não sabemos se ela é verdadeira ou falsa, se ninguém sabe, então temos uma conjectura. Como sabemos que ninguém sabe? Em

²¹ Artefato, no sentido de Rabardel (1995). Veja-se também Gravina (1996, 2015) e Mariotti (1997, 2013).

geometria é muito comum desenvolver problemas novos. As olimpíadas de matemática sempre contemplam problemas desse tipo. O GeoGebra se apresenta como um auxiliar bastante eficiente para comprovar a veracidade ou a falsidade de certas afirmações, mas suas limitações (como a de todos os SGD) podem acarretar em resultados falsos (ver o capítulo 4 deste trabalho).

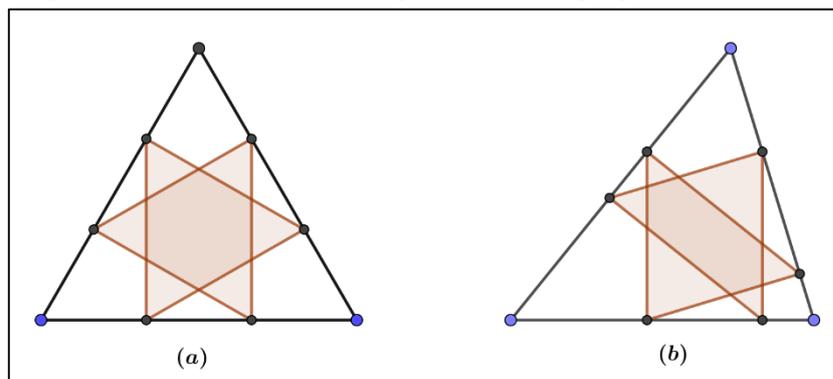
Um exemplo disso é um problema que resultou de um problema clássico de geometria e da orientação nossa de um trabalho de conclusão de curso de uma aluna da licenciatura. A aluna investigava os chamados centros de um triângulo (além dos quatro centros mais conhecidos – circuncentro, incentro, baricentro e ortocentro – há muitos outros, como pontos de Brocard, ponto de Nagel, ponto de Fermat etc.). Nós comentamos com a aluna o seguinte problema clássico: “Mostrar que a razão entre as áreas de um triângulo equilátero e de um triângulo nele inscrito, tais que seus lados sejam respectivamente perpendiculares, é igual a 3”.

Esse problema levanta algumas questões: 1) Como se inscreve um triângulo de lados respectivamente perpendiculares em um triângulo equilátero? 2) É possível fazer isso para qualquer triângulo? 3) Se é possível, como varia essa razão entre as áreas dos dois triângulos?

Fornecemos aqui algumas respostas: 1) A inscrição é feita usando a transformação homotetia. Verifica-se que há dois triângulos inscritos com aquela propriedade de perpendicularismo, mas eles são congruentes. 2) Isso só é possível fazer com triângulos acutângulos. A própria construção mostra o porquê disso. 3) Essa terceira pergunta não sabíamos responder.

A Figura 68 nos mostra os dois casos, um particular, para o triângulo equilátero, e outro para um triângulo acutângulo qualquer.

Figura 68 – Triângulos inscritos, de lados respectivamente perpendiculares, em dois casos:



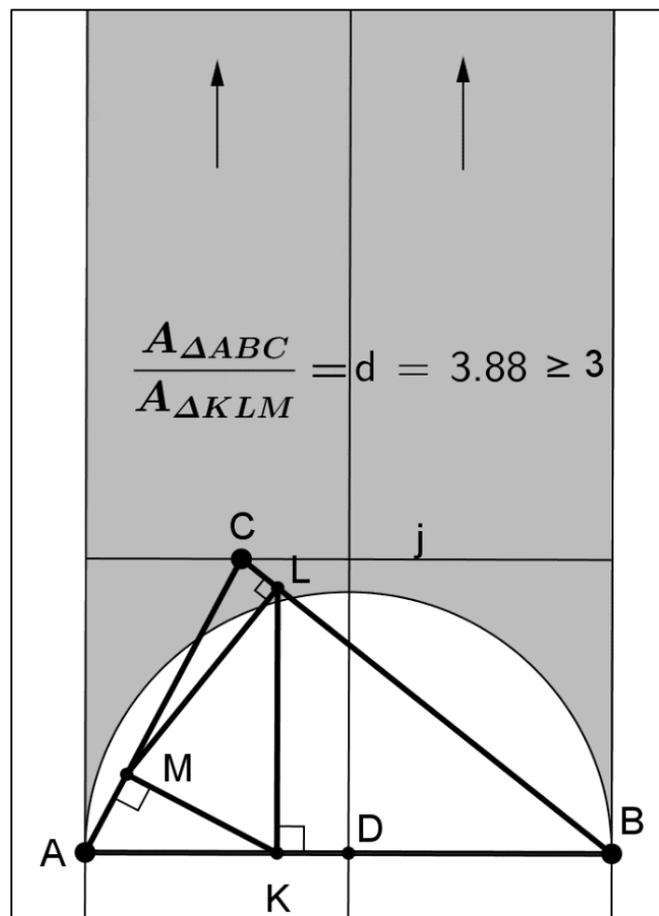
a) equilátero;

b) acutângulo qualquer.

Fonte: O autor.

Pedimos à aluna que investigasse a pergunta 3, o que ela fez usando um SGD (o Cabri àquela época). Pensamos que, talvez, ela encontrasse algum centro de triângulo em particular. A aluna fez uma construção de um triângulo acutângulo, usou o Cabri para modificar (movendo vértices) o triângulo e fez o cálculo da razão entre as áreas, respondendo: “Professor, a razão nunca dá menor do que 3”. Perguntei como ela podia ter certeza do “nunca” em sua resposta e ela respondeu que era aparente, pois ela tinha que mover os vértices no plano, com dois graus de liberdade (veja-se a dificuldade aqui). Posteriormente restringimos essa análise para triângulos acutângulos somente e produzimos a Figura 69. Percebemos que bastava deixar um lado fixo e variar o terceiro vértice em uma faixa em que todos os triângulos acutângulos estariam representados, a menos de semelhança.

Figura 69 – A faixa onde o vértice C varia mantendo ΔABC acutângulo.



Fonte: O autor.

Dessa forma, o vértice C varia em uma região (ainda dois graus de liberdade) restrita, porém não limitada. Outro fato que constatamos é que a razão entre as áreas varia para um valor mínimo quando o vértice C varia em um segmento paralelo à base \overline{AB} do triângulo ΔABC e em

direção à mediatriz daquele lado. Por exemplo, o vértice C variando no segmento j da Figura 69. Esse fato (não provado) permitiu que a nossa análise das razões fosse feita somente na mediatriz do lado \overline{AB} do triângulo ΔABC .

Por outro lado, após algum tempo, provamos que a conjectura estava correta (na verdade, de que a razão entre as áreas é sempre maior ou igual a 3, a igualdade se verificando somente no caso do triângulo equilátero. Essa prova envolveu o ponto fixo da transformação entre os dois triângulos (que são semelhantes) e a constatação de que esse ponto fixo²² era um centro de triângulo estudado pela aluna: o primeiro ponto de Brocard do triângulo ΔABC (SOUZA; PINHO, 2011).

Vejamos a seguir a metodologia empregada em cada um dos dois casos: em sala de aula e com um grupo de alunos.

6.1 METODOLOGIA EMPREGADA NOS EXPERIMENTOS EM SALA DE AULA

Trabalhamos com turmas de alunos da primeira fase do curso de Matemática na disciplina Geometria Quantitativa I em três semestres distintos.

No início da disciplina apresentamos o GeoGebra e fizemos algumas atividades que ressaltassem as vantagens de usar um software de geometria dinâmica bem como as limitações desses softwares.

Após mais de um mês de aulas, em que os alunos puderam se iniciar nos conteúdos geométricos, começamos a propor atividades visando a criação de problemas. Essas atividades contariam para a avaliação geral do aluno na disciplina. As exigências não eram de que os alunos tivessem que propor e resolver os problemas. O que se esperava era que ideias brotassem a partir dos estímulos que já vinham sendo dados em aula com a apresentação de problemas de geometria “não usuais” dos livros e a partir de uma ideia ou um problema inicial.

Os alunos poderiam trabalhar em pequenos grupos de no máximo quatro pessoas, mas alguns preferiram trabalhar individualmente. Nós estimulamos o trabalho em grupo, pois assim as discussões poderiam ser mais profícuas.

²² Um ponto P é chamado ponto fixo de uma transformação T entre duas figuras do plano se $T(P) = P$. O chamado lema das contrações diz que toda contração possui um único ponto fixo. Intuitivamente, o ponto fixo é o ponto que, nos dois “mapas” triangulares semelhantes, um inteiramente dentro do outro, é o mesmo local “geográfico”, mantendo, por exemplo, as distâncias aos vértices na mesma proporção de semelhança.

Nós tínhamos aulas duas ou três vezes por semanas, dependendo de como era feita a grade de horários das disciplinas de cada fase. Porém, a carga horária da disciplina sempre foi a mesma (6 horas-aula semanais).

As atividades relacionadas à criação de problemas foram passadas como tarefas. Os alunos deveriam comunicar seus resultados através da plataforma moodle da UFSC. Havia duas exigências aí: os alunos deveriam necessariamente usar e anexar arquivos do GeoGebra (.ggb) juntamente com suas ideias e anexar arquivos de texto (.doc, .pdf, .txt) ou arquivos de imagem, caso escrevessem suas ideias à mão (e por que não?) e fotografassem seus textos.

Nós lemos essas tarefas e procuramos alimentar as discussões em sala de aula, tendo os textos dos alunos como anotações de experimento e anotações pessoais das aulas em que houve discussões. Não fizemos entrevistas nem gravamos vídeos.

Os grupos poderiam se comunicar e trocar ideias, mas a maior troca de informações deveria ser feita em sala de aula (cumprindo a etapa 4) para que algumas conclusões surgissem e pudéssemos passar para a etapa 5. Então o processo retornaria à etapa 2 para mais uma fase de análise de problemas (a mudança do tempo nos verbos desse parágrafo foi intencional, pois o parágrafo reflete uma intenção – o que ocorreu de fato será relatado no próximo capítulo).

6.2 METODOLOGIA EMPREGADA NOS EXPERIMENTOS COM UM GRUPO DE ALUNOS VOLUNTÁRIOS

A situação nesse caso seria completamente diferente. Reunimos um pequeno grupo de alunos interessados e motivados para o estudo de geometria. Esse trabalho com o grupo começou quando o trabalho em sala estava em andamento ou finalizando. Esses alunos já haviam cursado as disciplinas de Geometria Quantitativa I e II, e portanto, já tinham uma formação na área.

Fizemos reuniões semanais com o grupo para discutir as questões que iam surgindo.

O registro das reuniões foi feito por nós, em anotações escritas e por atas das reuniões feitas pelos alunos. As discussões fluíram mais facilmente, provavelmente porque os alunos estavam dedicados, naqueles momentos, exclusivamente à atividade.

Os procedimentos detalhados na seção anterior foram os mesmos.

Um detalhe importante se impôs, a partir de 2020, nessa metodologia. Devido à pandemia da COVID-19, não foi mais possível fazer reuniões diretas com os alunos. Tais reuniões, sempre semanais, passaram a ser à distância com o uso da plataforma Discord, o que funcionou muito bem, pois pudemos trocar ideias transmitindo as nossas telas, como se estivéssemos em uma sala com um quadro para escrever. Essa parte de escrever foi um pequeno problema, já que nenhum de nós dispúnhamos de uma mesa digitalizadora. Porém, no nosso caso, utilizamos o GeoGebra, não apenas para fazer as figuras, mas também para digitar textos usando a ferramenta “Texto”. Ali é possível digitar textos com símbolos usando também usando a “Fórmula LaTeX”.

6.3 FONTES DE PROBLEMAS EM GEOMETRIA

Usamos aqui o termo fontes de problemas para tipos de problemas de geometria que poderiam iniciar um processo de criação.

Neste trabalho propomos três tipos de problemas matemáticos (dois especificamente na área de geometria):

1. Problemas de extremos, ou de otimização em geometria.

São problemas que consistem em determinar um valor máximo ou mínimo para algum tipo de medida em geometria (segmentos, ângulos, perímetros, área), ou determinar situações de máximo ou de mínimo (quando ou em que situações o perímetro, ou a área de um certo polígono é máxima ou mínima?). Exemplos dessas duas situações são: a) calcular a área do triângulo inscrito em uma circunferência dada de modo que a soma de um lado seu com a altura relativa a esse lado seja máximo (ou calcular esse valor máximo); b) caracterizar o triângulo em que o máximo do caso (a) ocorre (curiosamente, só é possível resolver o problema na situação (a) – sem as ferramentas do Cálculo – se resolvermos primeiro o caso (b)).

Veremos, nos experimentos, que esse tipo de problema surgia frequentemente. Não é comum encontrar esse tipo de problema em livros de geometria. Aparentemente os matemáticos preferem lidar com esses problemas de forma analítica e não com o enfoque sintético. Por essa razão, apresentamos no capítulo 4 alguns problemas históricos (alguns deles da época pré-Cálculo) resolvidos via geometria sintética. Além disso, esse enfoque via geometria sintética é passível de apresentação e discussão no Ensino Básico, levados pelos professores.

2. Problemas de construção geométrica.

Esses problemas têm sido relegados a uma categoria de “Desenho Geométrico”, como se fossem problemas do manuseio técnico da régua e do compasso. Esses problemas são os típicos problemas de final aberto, com possíveis diferentes soluções. No Ensino Básico não é comum que os alunos tenham contato com problemas de final aberto. Há um uso coloquial para o termo exato, quando alguém afirma que matemática é uma ciência exata, como se nela não fossem permitidas dúvidas e questionamentos. Há um senso comum de que os problemas matemáticos sempre têm solução e apenas uma única solução. Os problemas de construção geométrica são excelentes problemas para exercitar o *pensamento divergente*.

Segundo Guilford (1950) o *pensamento divergente* (que é aquele que busca múltiplas soluções para um problema) é um componente essencial da criatividade. Em matemática, em especial em geometria, bons exemplos da aplicação desse pensamento, e do estímulo para desenvolvê-lo, são os problemas de construção geométrica. Esse tipo de problema não recebe, em nossa opinião (baseada em nossa prática docente) o tratamento adequado nos cursos de matemática do Ensino Superior.

Abandonados definitivamente dos currículos do Ensino Básico desde a reforma da matemática moderna, os problemas de construção geométrica passaram a fazer parte dos currículos dos cursos de matemática do Ensino Superior muitas vezes como uma disciplina “paralela”, o Desenho Geométrico. Como se essa disciplina e a disciplina de Geometria (Euclidiana plana), que foi introduzida mais recentemente em vários currículos dos cursos de matemática do país, não tivessem nenhuma relação uma com a outra. De fato, se por um lado na disciplina Desenho Geométrico aplicam-se técnicas para resolver problemas de construção geométrica (lugares geométricos, transformações) que, na maioria das vezes não são devidamente justificadas e tornam-se “receitas de bolo”, por outro lado na disciplina Geometria os problemas de construção geométrica nem sequer eram abordados. Além disso, no Desenho Geométrico há uma ênfase nas técnicas de manuseio dos dois instrumentos de construção, a régua e o compasso, o que atualmente com o aparecimento dos Softwares de Geometria Dinâmica (SGD) deixou de ter tanta importância. Mas os SGD não são somente uma régua e um compasso no computador. Como vimos anteriormente, eles têm essa característica *dinâmica* que pode nos levar a formular conjecturas praticamente impossíveis de serem feitas somente com o uso de régua e compasso. Por essa razão, os problemas de construção geométrica são uma excelente fonte de geração de novos problemas.

Um problema de construção geométrica é um problema que consiste em *obter* (*construir*) um objeto geométrico (uma representação) a partir de alguns elementos conhecidos sobre esse objeto. As duas únicas ferramentas de construção permitidas são a régua não graduada e o compasso, segundo o estabelecido pelos geômetras gregos da antiguidade. O primeiro postulando de Euclides define ou valida, de certa forma, a régua não graduada e o terceiro postulando define o compasso. Desde a percepção da existência de segmentos não comensuráveis, ficou claro para esses geômetras a impossibilidade de se medir com *exatidão* (que é diferente de precisão, que pressupõe algum erro) comprimentos de segmentos, áreas de figuras e ângulos. Assim, instrumentos de medição, como a régua graduada e o transferidor, e operações como escorregar um esquadro encostado em outro, não eram – e não são – considerados como válidos para a realização de uma construção geométrica. Essas restrições, de natureza epistemológica, levantam a questão da possibilidade ou a impossibilidade de se realizar certas construções. Os geômetras gregos conheciam três problemas que eles não sabiam como resolver: a duplicação do cubo, a trissecção de um ângulo qualquer e quadratura da circunferência. Somente séculos mais tarde é que se pode provar a impossibilidade de se resolver esses três problemas (e outros mais).

O que significa construir um objeto geométrico? Além da ação física de operar os dois instrumentos para obter um desenho no final, há uma ação conceitual para se obter de uma representação de um objeto geométrico (uma *figura*, segundo o conceito de Laborde (1993, p. 49), um *conceito figural*, segundo Fischbein (1993)), um procedimento para se resolver um certo tipo de problema. Isso indica que o processo de construção exige uma *análise* inicial do problema para depois se realizar a *síntese*. Aristóteles empregou o termo *análise* para indicar uma forma de argumentação e o termo *síntese* (uma única vez) para descrever exclusivamente o processo que segue a análise em um problema de construção geométrica.

Depois de Aristóteles os filósofos passaram a chamar de *análise* um procedimento em que se supõe conhecido aquilo que se deseja encontrar e trabalha-se sobre isso como se ele fosse dado. Desde essa época os matemáticos passaram a distinguir claramente os dois termos. Pappus utiliza os dois termos ao se referir a um método geral, realizado em duas fases distintas e sucessivas, para abordar um problema (PANZA, 2007, p. 88). A fase de *análise* em um problema de construção geométrica consiste, portanto, em considerar o problema resolvido, esboçando-se uma figura (como esboço, um desenho feito à mão livre mesmo, mas com todos os elementos conceituais), sem precisão e provisória, na qual se destacam todos os elementos conhecidos ou dados no problema, e buscar novos elementos (pontos que definirão segmentos,

semirretas, ângulos) intermediários que levarão à obtenção definitiva do objeto que se quer construir. A fase de *síntese* consiste em reunir todos esses elementos para realizar a construção propriamente dita, mas ela inclui também uma análise a posteriori, que consiste em verificar quantas soluções o problema admite, o que dependerá das posições relativas dos elementos dados.

Assim o foco da resolução de um problema de construção geométrica deixa de ser a ação física de utilização das duas ferramentas (que é, em geral, a ênfase nas disciplinas de Desenho Geométrico) para ser a *justificativa* dessa construção que se encontra na fase da análise do problema. Observe que a fase da análise do problema exige a desconstrução de um objeto bidimensional em seus componentes unidimensionais e a obtenção de novos elementos (*reconfiguração intermediária*: linhas auxiliares ou “escondidas”), enquanto que na fase da síntese ocorre a união de todos esses elementos para se realizar a construção (DUVAL, 2012). É nessa última fase, em que ocorre a análise a posteriori e em que se discute quantos métodos de *resolução* há e quantas *soluções* o problema pode ter, que se exercita o pensamento divergente. Além disso, é nesse momento que podem surgir ideias ao se sugerir ou modificar os elementos dados, ou os atributos do problema proposto inicialmente (BROWN&WALTER, 2005) para a formulação/criação de problemas, o que pode ser auxiliado com o uso de um SGD.

No capítulo 5 (seção 5.1) vimos um exemplo que mostra como os problemas de construção geométrica podem levar a novos problemas.

3. Recíprocas de afirmações.

Talvez a perguntar por recíprocas de teoremas seja uma das maneiras mais comuns de se criar novos problemas. No entanto, teoremas são afirmações bem estabelecidas, e a veracidade ou não de suas recíprocas já forma analisadas ou já estão incluídas no próprio teorema como uma afirmação bicondicional. Aparentemente não há então aí espaço para desenvolver novos problemas. No entanto, isso não é verdade. As recíprocas que pensamos aqui são recíprocas de resultados que surgem muitas vezes em afirmações simples durante uma aula. O exemplo visto no capítulo 5 (seção 5.2) é um excelente exemplo do uso de recíprocas para iniciar a formulação de problemas. Um problema associado àqueles problemas é o seguinte:

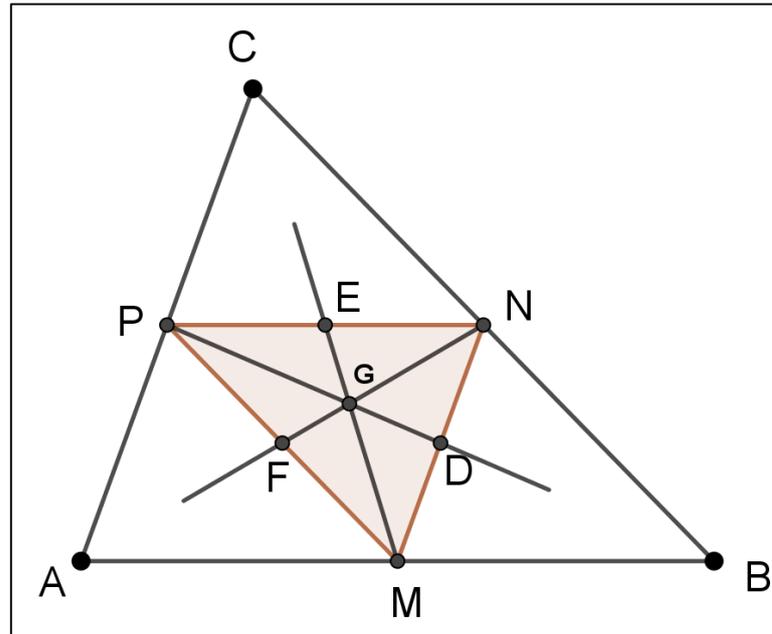
“Se G é o baricentro de um triângulo ΔABC , então G é o baricentro do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados do triângulo ΔABC ”.

Recíproca:

“Se G é o baricentro do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados do triângulo ΔABC , então G é o baricentro do triângulo ΔABC ”.

A primeira afirmação não é muito difícil de demonstrar, mas a segunda é um pouco sutil. Vejamos porque (Figura 70):

Figura 70 – G baricentro do triângulo ΔMNP implica em G baricentro do triângulo ΔABC ?



Fonte: O autor.

Na Figura 70, por hipótese os pontos M, N e P são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ e \overline{AC} do triângulo ΔABC e o ponto G é o baricentro do ΔMNP . Então os pontos D, E e F são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{MN}, \overline{NP}$ e \overline{PM} do ΔMNP . É preciso garantir que as semirretas $\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{NF}$ e \overrightarrow{PD} passam, respectivamente, pelos vértices C, A e B do triângulo ΔABC , o que não é imediato, mas não complicado de resolver.

Uma outra afirmação, a título de uma recíproca da primeira afirmação feita anteriormente, e bem mais complexa, é:

“Sejam $\overline{AN}, \overline{BP}$ e \overline{CM} três *cevianas* do triângulo ΔABC concorrentes em um ponto G do interior desse triângulo. Se G é o baricentro do triângulo ΔMNP , então G é o baricentro do triângulo ΔABC ”.

A resolução deste (novo) problema agora é bem mais difícil, pois não temos mais a hipótese de que pontos M, N e P são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ e \overline{AC} do triângulo ΔABC . Sua resolução passa por alguns dos casos do problema do exemplo da seção 5.2.

7 EXPERIMENTOS COM OS ESTUDANTES

Descreveremos neste capítulo os experimentos realizados com os alunos do Curso de Matemática sobre criatividade em geometria.

7.1 EXPERIMENTOS EM SALA DE AULA

Realizamos atividades com três turmas da disciplina Geometria Quantitativa I, em três semestres distintos. Relataremos somente os experimentos de duas turmas, que foram os experimentos que puderam ser realizados aplicando a metodologia estabelecida definitivamente. No início de cada semestre, nas duas turmas os alunos tiveram atividades com o GeoGebra para se familiarizarem com o software e, principalmente, para compreender as suas limitações e as potencialidades (desenvolvendo o potencial semiótico do artefato).

7.1.1 Primeira atividade

Na primeira atividade, realizada no segundo semestre de 2016, propusemos uma tarefa de criação de problemas em uma situação semiestruturada, isto é, uma situação de problema aberto em que os estudantes são convidados a explorar sua estrutura por meio do conhecimento. Essa tarefa, brevemente relatada em Pinho (2017)²³, está descrita aqui com mais detalhes. Antes da atividade propriamente dita, um exemplo de investigação foi apresentado e discutido com os alunos, para que eles pudessem compreender o significado de criar um problema de matemática.

Constatamos, em uma discussão inicial, que o que os alunos entendiam por problema de geometria era um problema do tipo: “Calcule...”, ou seja, um problema de “fazer contas”. E o que eles entendiam por criar um problema era tomar um problema de algum livro e mudar os dados. Os alunos estavam se acostumando com problemas envolvendo propriedades geométricas com “demonstrações”, ou problemas conceituais do tipo falso-verdadeiro.

Após esse “aquecimento”, um problema base foi fornecido aos alunos para a tarefa como uma ideia inicial e um ponto de partida. Os alunos deveriam trabalhar em grupos de no máximo quatro pessoas e entregar por escrito em texto seus comentários e observações, bem como as

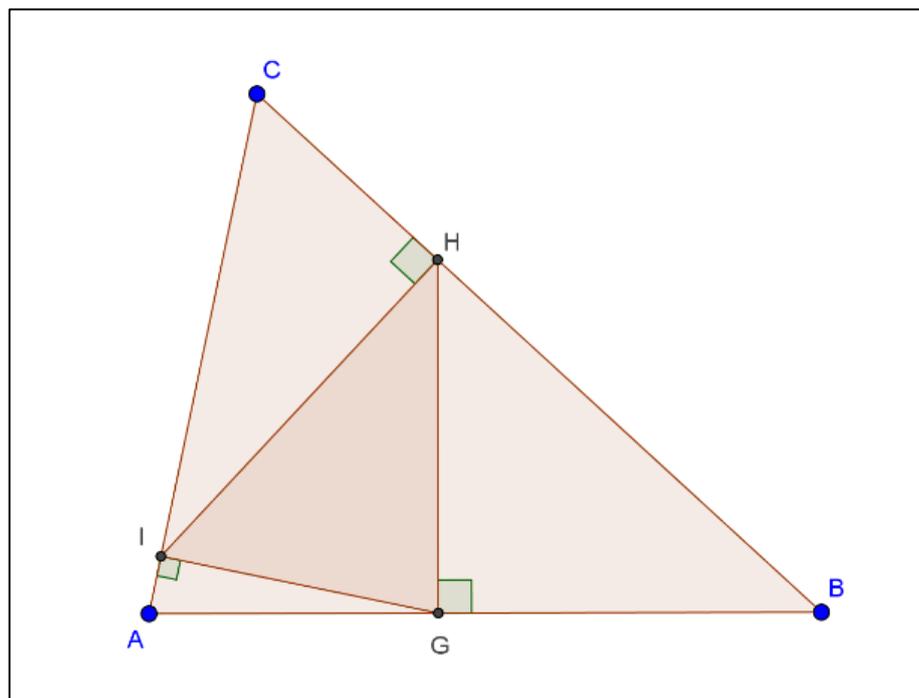
²³ Pôster apresentado no ICOCIME1 (sem anais). O título que foi registrado no certificado é o que está nas referências, mas o pôster foi, de fato, apresentado em inglês (congresso internacional) com o título original: “Geometry Problem Posing in Classroom: Fostering Creativity in Mathematics as a means to Creative Insubordination”.

construções realizadas impressas, utilizando o GeoGebra. Não foi utilizada a plataforma moodle para esse registro. A turma estava composta de 27 alunos que se dividiram em nove grupos com três alunos em cada um deles. Cada grupo deveria escrever com detalhes as suas ideias, como surgiram, como evoluíram etc.

7.1.1.1 O exemplo fornecido de início

Foi o problema de minimização sobre a razão entre as áreas de dois triângulos, um inscrito no outro triângulo (acutângulo), cujos lados são respectivamente perpendiculares aos lados do triângulo maior (SOUZA & PINHO, 2011). Esse problema foi descrito no capítulo 6 deste trabalho, mas vamos repeti-lo aqui com as observações trocadas com os alunos. Chamamos a atenção dos alunos para o fato de que os dois triângulos tinham, em qualquer situação, ângulos respectivamente congruentes, ou seja, são semelhantes (apresentamos a figura na sala, sem no entanto, dizer como obtê-la):

Figura 71 – O exemplo do triângulo inscrito em outro com lados respectivamente perpendiculares.



Fonte: O autor.

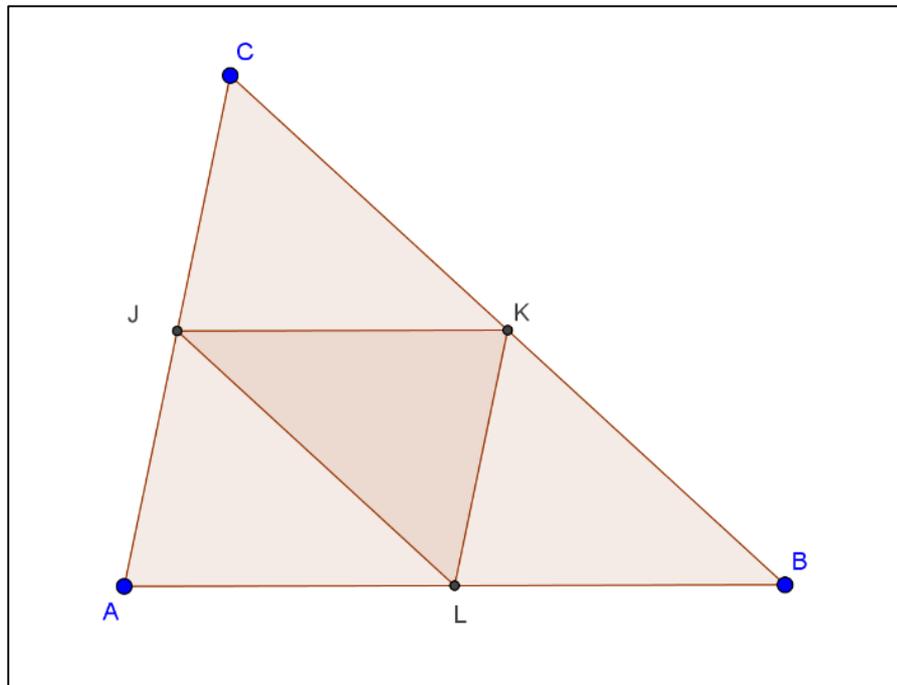
Fizemos então as seguintes perguntas para uma discussão em sala. Não registamos essa conversa porque o objetivo, naquele momento, era apenas promover uma discussão que contribuísse para o entendimento sobre criação de problemas em geometria.

1) Existem outros triângulos semelhantes ao triângulo ΔABC nele inscritos? Com a mesma orientação e com orientação inversa? Se há vários, qual o que tem área mínima/máxima?

2) Existem triângulos equiláteros inscritos no triângulo ΔABC ? Como construí-los com régua e compasso? Se há vários, qual o que tem área mínima/máxima?

A resposta parcial para (1), obtida na discussão com os alunos foi: sim. Há pelo menos um outro triângulo, e bem “óbvio” (após sugerirmos que os alunos tentassem algum triângulo particular inscrito no triângulo um aluno apontou tal triângulo):

Figura 72: O triângulo “óbvio” inscrito no triângulo ΔABC e semelhante a ele.



Fonte: O autor.

O triângulo ΔKJL , cujos vértices são pontos médios dos lados do triângulo ΔABC , é um deles, mas é possível construir outros a partir da análise na resolução do problema em Souza e Pinho (op. cit.).

Observamos aos alunos que os dois triângulos têm a mesma orientação, isto é, ao percorrermos os vértices A, B e C do triângulo ΔABC no sentido anti-horário percorremos os vértices correspondentes (homólogos, no conceito de semelhança) K, J e L do triângulo ΔKJL no mesmo sentido.

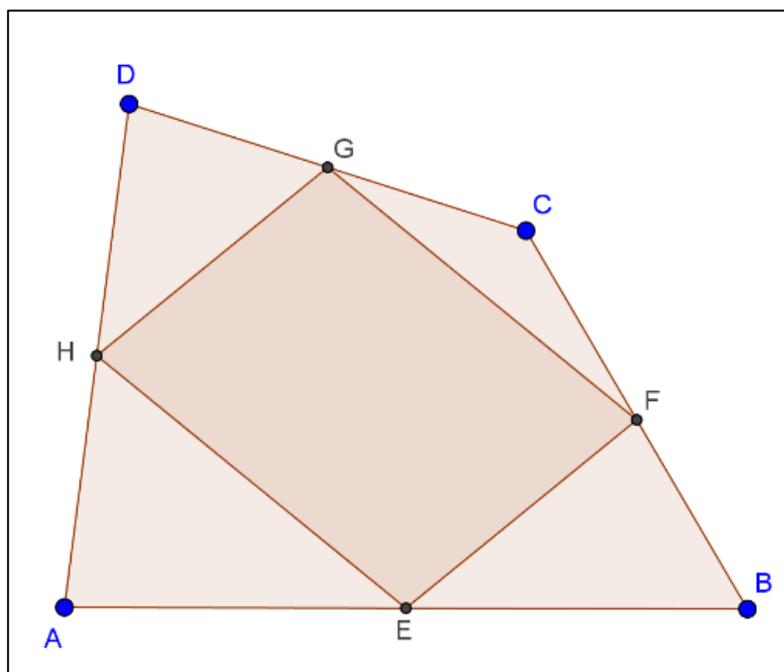
A resposta parcial para (2) é sim. A construção requer o uso da transformação rotação.

A questão de extremos permaneceu em aberto na pergunta 1 e não exploramos mais o problema.

7.1.1.2 O problema-base para a atividade

Um resultado conhecido em geometria é o seguinte: dado um quadrilátero qualquer, os pontos médios de seus lados formam um outro quadrilátero cujos lados opostos são respectivamente paralelos e congruentes (Teorema de Varignon). Tal quadrilátero é um paralelogramo (por definição: lados opostos respectivamente paralelos).

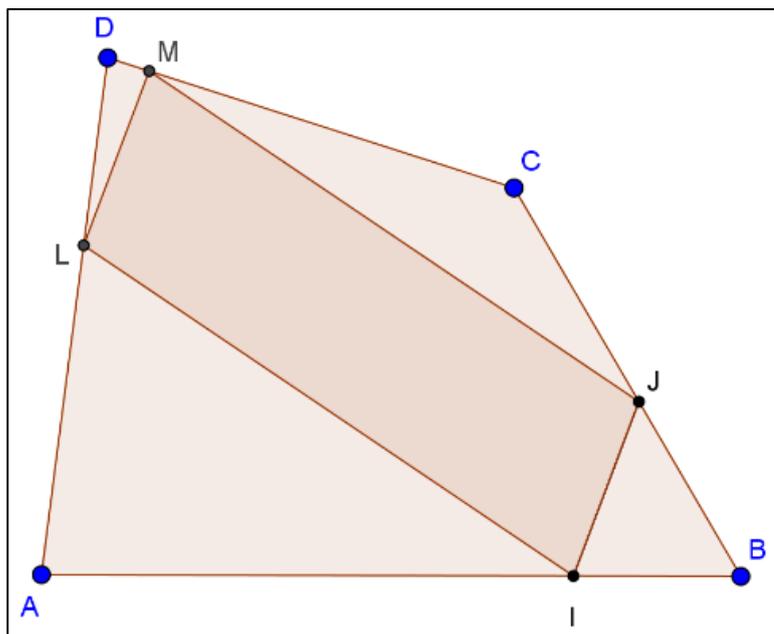
Figura 73 – Teorema de Varignon.



Fonte: O autor.

Sabe-se também que (problema-base), dado um segmento com extremidades em dois lados (não necessariamente os pontos médios desses lados) consecutivos de um quadrilátero, então pode existir um paralelogramo inscrito nesse quadrilátero. Foi dado uma quadrilátero ABCD (de fato, os alunos deveriam fixar algum quadrilátero, de preferência convexo).

Figura 74 - Paralelogramo com um lado dado inscrito no quadrilátero ABCD dado.



Fonte: O autor.

7.1.1.3 A atividade proposta

O problema-base proposto na seção anterior e a observação complementar abordam paralelogramos inscritos em um quadrilátero qualquer.

Procure elaborar/criar/propor problemas/perguntas a partir desse tema considerando que:

- 1) Um retângulo é um paralelogramo.
- 2) Um quadrado é um retângulo.
- 3) Questões de área e de perímetro podem ser interessantes.
- 4) Trocar inscrito por circunscrito pode ser interessante.
- 5) Utilize o GeoGebra em suas análises. Ele pode indicar novas ideias e conjecturas.

Cada grupo deveria propor o maior número de problemas possível e atentar para a consistência do problema proposto ou que ele estivesse, de preferência, associado ao tema do problema-base.

7.1.1.4 Resultados da atividade

- Todos os nove grupos apresentaram duas perguntas (as mesmas): 1) Como construir o paralelogramo inscrito no quadrilátero dado? 2) Quantos paralelogramos inscritos nesse quadrilátero existem?
- Três grupos apresentaram o seguinte problema: como construir um *quadrado* inscrito no quadrilátero dado.
- Um único grupo propôs o seguinte problema: como construir um *retângulo qualquer* inscrito no quadrilátero dado?
- Também um único grupo propôs o problema: como *circunscrever* um paralelogramo no quadrilátero dado.
- Um outro grupo propôs uma pergunta em outra direção: como inscrever um trapézio de base dada que tenha área máxima?
- Ainda outro grupo perguntou: como construir um paralelogramo cujo ponto de interseção de suas diagonais esteja sobre a bissetriz de algum dos quatro ângulos internos do paralelogramo?
- Finalmente um grupo expressou sua dificuldade em realizar a tarefa devido a não ter compreendido bem o problema base.

7.1.1.5 Comentários e análises

Nenhum grupo conseguiu propor uma resolução para os problemas propostos por eles. O procedimento relatado no capítulo 6 (metodologia) ficou prejudicado por diversas razões: somente as etapas 1, 2 e 3 foram cumpridas (a etapa 2 não cumprida inteiramente). A etapa 4 não chegou a ser cumprida porque os grupos demoraram a executar a tarefa (e porque deixamos que isso acontecesse). Verificamos que a dificuldade com a tarefa, confessada por um grupo, ocorreu também com os outros grupos. Essa foi uma das causas do atraso na entrega da tarefa. O grupo que fez a pergunta sobre inscrever um retângulo foi o mesmo grupo que propôs a pergunta sobre como circunscrever um paralelogramo no quadrilátero dado. Excetuando-se as duas perguntas que os nove grupos propuseram, não houve mais nenhuma que fosse compartilhada por dois grupos ou mais.

Os grupos não apresentaram detalhes de como as perguntas surgiram ou como evoluíram, passando para perguntas em outras direções e com alguma originalidade.

Consideramos que, para um primeiro experimento metodologicamente controlado, os resultados foram razoáveis. Algumas perguntas apresentaram um alto grau de originalidade (perguntas não esperadas, em outra direção).

7.1.2 Segunda atividade

A segunda atividade, realizada no primeiro semestre de 2017 em uma turma de 22 alunos, foi dividida em quatro tarefas, sendo as três primeiras de caráter exploratório do GeoGebra e da tomada de consciência de suas limitações. Na quarta tarefa propusemos a criação de problemas em uma situação semiestruturada.

A tarefa foi entregue pelos grupos na plataforma moodle da disciplina. A seguir apresentamos essa tarefa como foi apresentada aos alunos, também pela plataforma.

7.1.2.1 A atividade proposta

Tarefa 4

- Esta tarefa consiste em trabalhar um problema aberto (isto é, um problema em que não há perguntas definidas nem conclusões específicas a serem obtidas).
- A tarefa deve ser realizada em grupos de no máximo quatro pessoas.
- O uso do GEOGEBRA é obrigatório.
- Cada grupo discutirá o problema, anotará todas as observações que forem feitas e conclusões obtidas. Anotem tudo que for observado, discutido e concluído. Anotem as dúvidas ou outras perguntas.
- Cada grupo deverá entregar a tarefa em dois tipos de arquivos: um com as observações/conclusões e outro (ou outros) com figuras do GEOGEBRA (.ggb). Vocês podem anexar mais de um arquivo .ggb. As figuras podem até ser copiadas para o outro arquivo, mas os arquivos .ggb são imprescindíveis. Não esqueçam de colocar os nomes de cada um dos participantes do grupo.

Seguir os seguintes passos:

- 1) Abrir o GeoGebra e esconder os eixos deixando em branco a janela de visualização.
- 2) Ajustar para só rotular os pontos novos (em opções).
- 3) Traçar um triângulo ΔABC .
- 4) Marcar um ponto P no lado BC do triângulo traçado em (3).
- 5) Construir um triângulo equilátero ΔPMN com M em AB e N em AC.
- 6) Variando o ponto P em BC você terá vários triângulos equiláteros inscritos no ΔABC . Localize o triângulo de perímetro (ou área) mínimo/máximo.
- 7) Tente fazer alguma conjectura sobre esse triângulo de área mínima/máxima usando o GeoGebra.

Os alunos se dividiram em 10 grupos da seguinte maneira: grupo A (quatro alunos), grupo B (dois alunos), grupo C (um aluno), grupo D (três alunos), grupo E (três alunos), grupo

F (um aluno), grupo G (dois alunos), grupo H (um aluno), grupo I (dois alunos) e grupo J (três alunos).

Embora três alunos tenham feito a atividade individualmente, foram realizadas algumas discussões em sala de aula em que os alunos compartilharam suas ideias e antes que entregassem a tarefa. A construção de um triângulo equilátero inscrito em um triângulo qualquer foi feita por todos os grupos usando a transformação rotação que estávamos estudando em sala naquele momento. Exemplos do uso da rotação na construção geométrica feitos em sala de aula (por exemplo, dadas três retas paralelas, construir um triângulo equilátero que tenha um vértice em cada uma das retas) levaram os alunos a fazer a construção solicitada na tarefa. As perguntas/conjecturas sugeridas pelos alunos levaram a uma única discussão, após a entrega da atividade.

7.1.2.2 Resultados da atividade

Vejam a seguir as observações textuais de cada grupo a respeito da tarefa 4, em especial as conjecturas relativas ao triângulo equilátero de área mínima inscrito no triângulo ΔABC construído:

Grupo A - Notamos que o triângulo inscrito terá área máxima quando ele se aproximar mais da forma do triângulo externo, ou seja, quando os vértices do triângulo inscrito se aproximarem dos vértices do triângulo exterior. Pensamos então que a área mínima seria quando os vértices do triângulo interior se distanciasse do externo. Notamos que se o triângulo exterior é também equilátero, isso ocorrerá quando os vértices do triângulo interior estiverem nos pontos médios dos lados do triângulo exterior, mas não conseguimos ver para o caso geral.

Grupo B - Ao variar as posições do triângulo PMN e do triângulo ABC, deixando o triângulo PMN inscrito e equilátero, podemos perceber que quando o triângulo ABC é equilátero a bissetriz do ângulo B encontra o segmento AC no seu ponto médio (sendo assim no mesmo lugar que a mediana desse mesmo vértice B) e a intersecção da bissetriz com o segmento é o vértice N do triângulo PMN. [...] Portanto, o ponto de encontro entre as bissetrizes, medianas e alturas do triângulo ABC e os seus respectivos lados foram os vértices do triângulo equilátero PMN. E esse triângulo PMN formado por essas bissetrizes é o triângulo de área e perímetro mínimo inscrito em ABC (equilátero). Porém, também podemos perceber que o mesmo não ocorre quando o triângulo ABC é qualquer e não equilátero.

Grupo C - Única relação encontrada, quando as três linhas passando por cada vértice do ΔABC e pelo vértice correspondente do ΔPMN no lado oposto forem concorrentes, é quando ΔPMN será mínimo.

Grupo D - Os triângulos ABC e PMN estão aqui apresentados, sendo o triângulo PMN um triângulo equilátero, com o ponto P sobre o segmento BC. O triângulo ABC, conforme podemos verificar, pelas dimensões de seus vértices e o valor de seus ângulos, é um triângulo escaleno. O triângulo equilátero PMN com a menor área e o menor perímetro encontrado é aquele em que pelo ponto P passa a reta que é a bissetriz do ângulo α . As retas que passam pelas bissetrizes dos ângulos γ e β , quando cruzam com os pontos N e M respectivamente também estarão em pontos com a mínima área e mínimo perímetro desse triângulo, ainda que nesses casos, o ponto P não coincida com a reta que passa pela bissetriz do ângulo α . Pelos vértices do triângulo de área mínima PMN passa uma circunferência inscrita no triângulo ABC e circunscrita ao triângulo PMN e o raio ao quadrado dessa circunferência coincide com a medida do segmento AM. A distância do incentro (do triângulo ABC) até o ponto de intersecção de quaisquer dos lados do triângulo PMN que intersectam as retas das bissetrizes de seus ângulos será a mesma, por se tratar de um triângulo equilátero. Existe um triângulo NPC cujo perímetro será ainda menor do que o perímetro do menor triângulo equilátero PMN encontrado.

Grupo E - Foram feitas várias tentativas acerca desse exercício. Como os 4 centros do triângulo PMN coincidem por ser equilátero, fizemos alguma comparação com ele e os centros do triângulo ABC que circunscribe o mesmo. Foram feitos os pontos O_1 , B_1 , C_1 , I_1 , correspondendo respectivamente ao Ortocentro, Baricentro, Circuncentro, Incentro do triângulo ABC, porém como visto no anexo do Geogebra mandado não foi possível fazer alguma comparação com o triângulo PMN. Algumas observações que devemos tomar é: o triângulo do qual queremos fazer uma conjectura é equilátero, por tanto a área mínima corresponde com o perímetro mínimo; além disso, o segmento do baricentro ao vértice do triângulo também será o menor possível, pois esse segmento equivale a $2/3$ da altura, que é relativo à área e ao perímetro. Como não conseguimos chegar a alguma conjectura, decidimos especificar o triângulo ABC qualquer para chegarmos em alguma solução. Fizemos ABC equilátero, então nesse caso, o equilátero inscrito de menor área (ou perímetro) era aquele do qual o vértice correspondia ao ponto médio dos lados do triângulo ABC. No caso dele ser isósceles o triângulo PMN teria um dos seus vértices no ponto médio de um dos lados de ABC, no caso aquele que corresponde a base (diferente dos outros lados, que são iguais entre si). Nos restou tirar alguma conclusão no caso do triângulo ABC ser escaleno, onde houve um impasse, pois não chegamos à uma resposta clara...Uma das ideias dadas por um dos membros do grupo é que a área seria menor quando os incentros dos triângulos tivessem a menor distância entre eles. Percebemos que o raio (R_1) da circunferência que inscreve o triângulo ABC é menor

(somente no caso dos escalenos) do que o raio (R_2) que circunscribe o triângulo PMN. E a menor área será quando o valor de R_2 for o mais próximo de R_1 .

Grupo F - Analisando a figura no GeoGebra, para encontrar o triângulo equilátero inscrito de menor área e, conseqüentemente, menor perímetro, pode-se observar que o ΔPMN tem menor área à medida que se aproxima do incentro do ΔABC , então pelas observações, pode-se conjecturar que a menor área do ΔPMN é obtida quando este tem os seus centros (todos são comuns, pois o triângulo é equilátero) coincidindo com o incentro I do ΔABC .

Grupo G - Conjectura 1: o triângulo PNM possui área mínima quando seu baricentro coincide com o baricentro do triângulo ABC. Conjectura 2: o centro do triângulo PNM (por ser um triângulo equilátero, seu baricentro, incentro, ortocentro e circuncentro coincidem, estou me referindo a esse encontro) não coincide com o circuncentro ou incentro ou ortocentro do triângulo ABC, sendo ABC um triângulo não equilátero e não retângulo

Grupo H - O triângulo de área e perímetro mínimo é formado quando o ponto P se localiza sobre o ponto H_a (cruzamento da altura relativa ao vértice A com o lado BC).

Grupo I - Após muita observação, percebemos que o triângulo equilátero de menor perímetro e área é aquele que possui os vértices nos pontos de intersecção dos segmentos AB, BC e AC rotacionados 60 graus (com centro nos vértices do triângulo equilátero) nos respectivos lados onde intersectarem.

Grupo J - Variando o ponto P em BC, o triângulo equilátero em que a área é mínima é também o que tem perímetro mínimo (este triângulo é o que aparece no arquivo ggb.) . Em determinado momento o triângulo PMN desaparece, pois o ponto M foi obtido a partir da rotação do segmento AC, que sai do triângulo ABC em determinado momento. Tentamos fazer algumas conjecturas, porém não obtivemos sucesso. Aparentemente este exercício parece não ter nenhuma propriedade e não segue nenhum padrão para encontrar área e ou perímetro mínimos. Um fato interessante é que no arquivo ggb enviado a circunferência que circunscribe o triângulo equilátero, aparenta ser inscrita no triângulo inicial quando o perímetro é mínimo.

7.1.2.3 Comentários e análises

No início deixamos claro aos alunos que, quando a atividade foi proposta, não tínhamos nenhuma conjectura sobre o triângulo inscrito de área mínima e não sabíamos como obtê-lo.

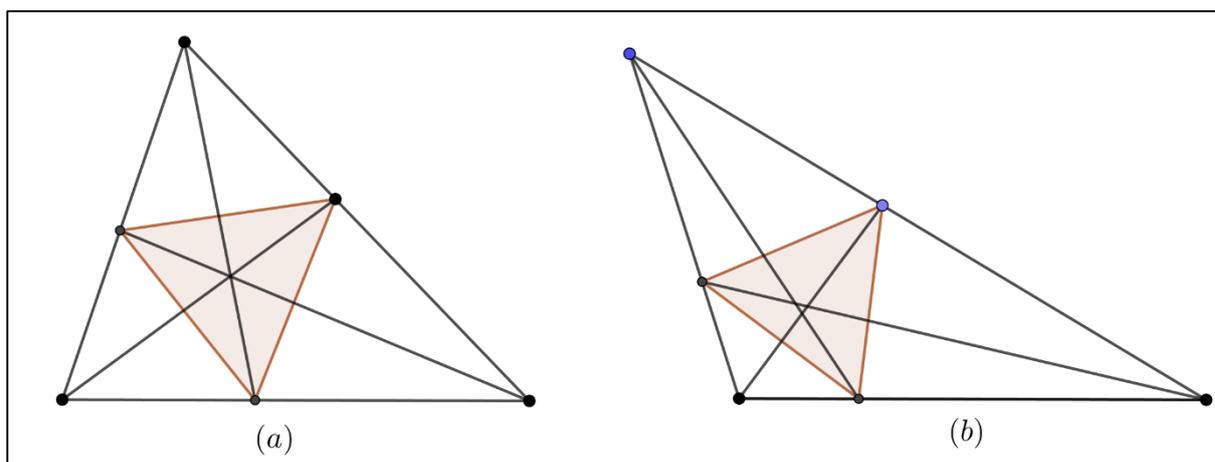
As etapas do processo estabelecido no capítulo de metodologia foram cumpridas até a etapa 4, embora a etapa 1 tenha sido diferente pois aqui especificamos o problema e o deixamos aberto para conjecturas. Não houve exatamente um problema-base.

Observamos que muitas das observações dos grupos foram obtidas em casos particulares (por exemplo, triângulo equilátero) ou quando os alunos não faziam uma verificação mais detalhada usando o teste de arrasto. A conjectura formulada pelo aluno do grupo C foi curiosa:

Grupo C - Única relação encontrada, quando as três linhas passando por cada vértice do ΔABC e pelo vértice correspondente do ΔPMN no lado oposto forem concorrentes, é quando ΔPMN será mínimo.

Discutimos as ideias desse aluno em sala de aula, de como havia percebido o que afirmava. Ele confirmou ter feito o teste de arrasto, variando o triângulo ΔABC e, em cada caso, verificando a conjectura. Repetimos os testes desse aluno e verificamos que a conjectura era consistente. A Figura 75 mostra esse caso:

Figura 75 – Dois exemplos em que os triângulos sombreados estão em “posição de área mínima” não exata.



Fonte: O autor.

Essas figuras foram exibidas em sala de aula projetando a tela do GeoGebra. Observemos que, no caso (a) a conjectura parece verdadeira, mas no caso (b) não. O que seria possível é aplicar um zoom na figura (b) para comprovar em definitivo a falsidade da afirmação. Discutimos que essa ideia, e mesmo algumas outras ideias de outros grupos não poderiam ser comprovadas como verdadeiras ou como falsas. Por quê? Pode-se usar a dinâmica do Geogebra para comprovar, por exemplo, que nem todo quadrilátero é inscritível em alguma circunferência, ou que as diagonais de um paralelogramo não são bissetrizes de seus ângulos internos (a menos que esse paralelogramo seja um losango). E por que não pode provar, nem

falsear a conjectura do aluno? A resposta é simples: porque o triângulo de área mínima foi obtido “a olho”, ou seja, por aproximação no teste de arrastro. Nunca conseguimos obter uma figura com alguma propriedade em posição exata, apenas movendo pontos. É o que acontece, por exemplo, se tentamos traçar uma paralela a uma reta por um ponto apenas olhando para a tela, ou traçar um ângulo reto dessa maneira.

Chegamos então à conclusão de que a única maneira de se obter uma conjectura para o triângulo equilátero inscrito de área mínima seria descobrindo uma maneira de construí-lo exatamente. Se isso for feito, então poderemos confirmar se a conjectura feita pelo aluno é verdadeira ou se é falsa!

Mas, naquele semestre não obtivemos resultado de como obter essa triângulo mínimo.

Nessa segunda atividade, com uma segunda turma, e posterior à primeira atividade, comprovamos que a participação dos alunos foi mais efetiva e que o GeoGebra foi mais utilizado. Os grupos já forneceram mais detalhes de seus raciocínios, embora ainda estivessem utilizando o GeoGebra de uma forma não eficiente.

7.2 EXPERIMENTOS COM O GRUPO DE ESTUDANTES VOLUNTÁRIOS

Esse grupo foi formado no início de 2019, por convite nosso feito a alunos que já haviam cursado a disciplina de Geometria Quantitativa I (em geral comigo como professor) e alunos do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática da UFSC e do qual sou o tutor. Esse fato já facilitou em muito o entendimento com os alunos e o estabelecimento e a aplicação de uma metodologia de trabalho. Esses alunos, independentemente de pertencer ou não ao PET, tinham uma motivação que não era uma recompensa em termos de avaliação ou nota. Os alunos gostavam de geometria e esse tipo de motivação é, segundo vários autores, um elemento importante para a criação de problemas. O outro fator, no caso desse grupo, era o conhecimento das propriedades geométricas dos objetos em geometria plana.

De início nos reunimos com os alunos para eles entendessem os objetivos da minha pesquisa. Um dos alunos havia participado anteriormente de uma das turmas em que fizemos os experimentos em sala de aula. Portanto, esse aluno já estava mais familiarizado com o meu projeto de pesquisa.

O grupo não era grande (variando entre três a sete alunos) e se modificou um pouco durante o processo todo. Alguns alunos deixavam de participar e outros entravam no grupo.

Três desse alunos permaneceram no grupo desde o início, sendo que dois deles eram bolsistas do PET (um deles deixou o PET, mas permaneceu no grupo). A todo instante, a maioria dos alunos do grupo pertenciam ao PET. Em 2020 o grupo estava formado por quatro alunos do PET e dois que não eram do programa. Em termos da composição do grupo em gênero, sempre havia mais alunos do que alunas. Em 2020, dos seis alunos participantes eram alunas. Em nossos relatos faremos sempre referência a cada integrante do grupo como “aluno” (sem culpa nem preconceito...).

O projeto com esse grupo tornou-se rapidamente um projeto do planejamento do PET, como projeto de pesquisa. Os alunos apelidaram o projeto, sem que eu houvesse sugerido, de ProGeoPinho – Projeto de Geometria do Prof. Pinho. Esse nome ficou formalizado como atividade do PET.

Os alunos estavam bem preparados para desenvolverem esses estudos. Mesmo assim, no começo, quando ainda eu lhes explicava o tema da minha pesquisa de doutorado, mostrei e discuti com eles alguns exemplos de experiência própria (em preparo para aulas ou na preparação de problemas das olimpíadas de matemática) sobre a criação de problemas.

Aqui, diferentemente dos grupos de experimentos em sala de aula, foram apresentados aos alunos o que chamei de fontes de problemas em geometria, ou tipos de problemas que podem gerar novos problemas e que eu havia proposto em minha pesquisa. Lembrando aqui que são três tipos de problemas: 1) problemas de extremos (máximos e mínimos) em geometria; 2) problemas construção geométrica; 3) recíprocas de afirmações. Os alunos já ficavam assim munidos de “pontos de partida” ou de ideias geradoras de problemas.

Os alunos estavam cientes de que a pesquisa se centrava em métodos de geometria sintética (pré-analítica), mas os alunos, que já tinham a formação em geometria analítica do currículo universitário, não se furtaram em tentar usá-la. Porém, nas atividades realizadas, verificaram que o trabalho operacional poderia ser exaustivo (como explicamos no capítulo 3, seção 3.2 – Geometria Analítica versus Geometria sintética) e eles logo abandonavam essa abordagem.

Fizemos reuniões em 2019 quase que semanalmente, nas salas do PET e, em 2020, à distância utilizando a plataforma Discord que foi sugerida e preparada por um dos alunos (no sentido de incluir os demais alunos do grupo e nós mesmos, além de nos ensinar como usá-la). Esses alunos já estão muito acostumados a tomar iniciativas e, sendo jovens, têm uma desenvoltura digital quase que natural.

Os alunos deste grupo, durante as atividades, estiveram muito empenhados em provar resultados, embora eu tenha dito que o foco era *criar* problemas. Por outro lado, a atividade de

prova, justificativa, demonstração, em seus mais diversos aspectos (BALACHEFF, 1987), tinha que fazer parte necessariamente das atividades (por exemplo, na etapa 2).

Durante todas as atividades, fizemos o máximo possível de anotações das discussões em reuniões e, além disso, os alunos faziam uma ata resumida do que havia acontecido em cada reunião. Nós queríamos registrar todas as ideias de cada aluno. O grupo, devido às suas características próprias de formação, mostrou-se bastante homogêneo em sua participação nas atividades e mesmo em suas ideias. Optamos então por fazer um relato das atividades sem individualizar nenhum integrante do grupo. Usamos as expressões “um aluno teve a ideia...”, ou “dois alunos observaram...”, ou “o grupo percebeu...” para relatar as atividades. Como a pesquisa é de cunho qualitativo, entendemos que o mais importante aqui são as ideias que circularam nos encontros.

As atividades deveriam seguir o procedimento explicado no capítulo 6, com cinco etapas e em que, na primeira delas, sugeríamos uma ideia, um problema-base, uma semente para ser germinada e brotada. Por outro lado, deixamos claro que os alunos estariam totalmente livres para propor quaisquer problemas que tivessem em mente, fosse esse problema uma dúvida em algum problema de geometria ou fosse alguma ideia que tiveram através de alguns esboços à mão de figuras ou por meio do GeoGebra. Dessa forma, estaríamos em uma situação não somente semiestruturada, mas também aberta (em que os alunos ficam livres para propor os problemas que quiserem, sem uma situação inicial proposta pelo professor).

Os problemas-base nas duas atividades em situação semiestruturada foram basicamente os mesmos utilizados nas atividades em sala de aula, apenas trocando a ordem temporal. Isso também permitiu fazer algumas comparações entre os comportamentos e as ideias dos alunos do grupo e dos alunos em sala de aula. Foi preciso levar em conta as diferenças existentes nos dois casos: os alunos do grupo já tinham cursado as disciplinas de geometria, eram mais experientes e dispunham de um tempo diferenciado para as discussões entre eles ou com a nossa presença. Apresentaremos aqui apenas a primeira atividade.

7.2.1 Primeira atividade (e única a ser relatada)

A primeira atividade foi realizada durante o ano de 2019. Iniciamos fornecendo um problema-base, para ser desenvolvido e gerar novas ideias.

7.2.1.1 O problema-base para a atividade

O problema proposto foi um problema de construção geométrica (etapa 1):

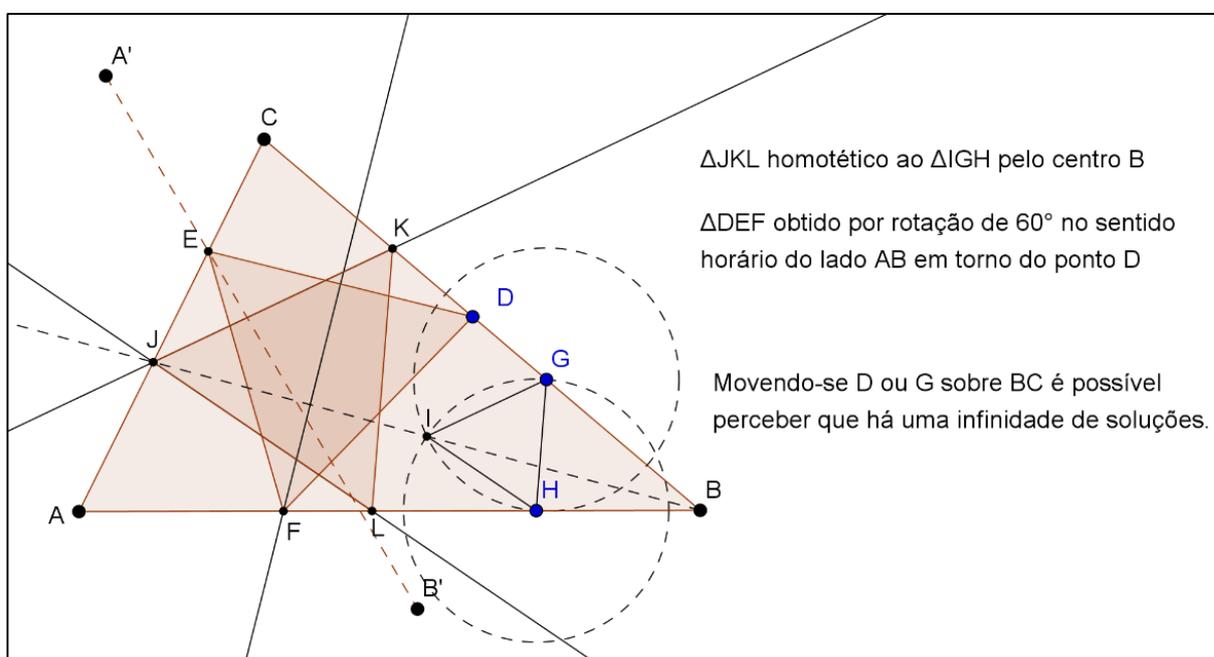
“Dado um triângulo acutângulo qualquer, inscrever nesse triângulo um triângulo equilátero. Discutir as resoluções apresentadas. Fazer afirmações (ou perguntas) sobre o triângulo equilátero construído.”

7.2.1.2 Desenvolvimento e resultados da atividade

Descreveremos cada momento do desenvolvimento da atividade, ressaltando a qual etapa esse momento pertence. Para objetivar um pouco os relatos, esclarecemos que esses momentos podem ter ocorrido em mais de uma reunião de discussão. Outro aspecto dos relatos é que as etapas do procedimento às vezes se misturam, em um ir-e-vir de momentos de reflexão, de discussão e de criação.

- Todos os alunos, alguns individualmente outros em duplas, fizeram a construção. Mas aqui já surgiu imediatamente uma surpresa. Nós sempre fizemos essa construção usando rotação (como no caso do estudo apresentado na seção 4.5.2). Dois alunos apresentaram um processo de resolução usando homotetia, que também é correto (etapa 2). A Figura 76 mostra as construções pelos dois métodos.

Figura 76 - Triângulos equiláteros ΔJKL e ΔDEF inscritos no ΔABC , obtidos por homotetia e por rotação, respectivamente



Fonte: Elaborada pelo autor em colaboração com os alunos.

Os dois métodos de resolução são bem distintos em relação aos objetos iniciais empregados. Na resolução por rotação, partiu-se de um ponto em um dos lados do triângulo

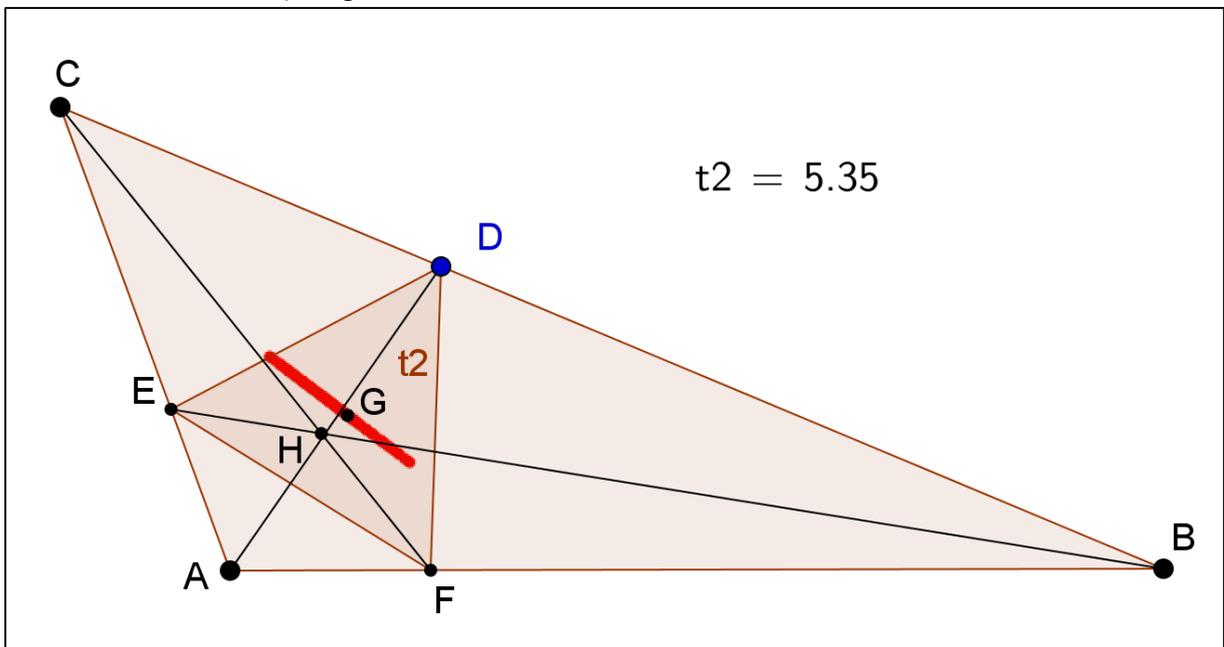
ΔABC , enquanto que na resolução por homotetia, partiu-se de um segmento com extremidades em dois lados do triângulo ΔABC ou, de outra forma, partiu-se de uma direção dada. Isso terá efeitos sobre o raciocínio dos alunos na etapa 3.

- Os alunos discutiram os dois métodos, verificando que ambos são válidos e iniciaram uma análise (*a posteriori*) da construção feita. Perceberam que, usando a dinâmica do GeoGebra, podiam modificar suas soluções. Para os alunos que usaram rotação (marcando inicialmente um ponto D no lado \overline{BC} do ΔABC , bastava mover aquele ponto sobre esse lado. Os alunos que usaram homotetia verificaram que podiam mover qualquer um dos dois pontos do segmento escolhido (como \overline{GH} na Figura 76) ou mover uma reta, caso tivessem partido de uma direção (a reta) alterando como consequência o segmento \overline{GH} . Um cuidado que tomaram foi constatar pelo GeoGebra que as medidas dos lados dos triângulos equiláteros variavam, conforme moviam os pontos. Concluíram então a existência de mais de uma solução do problema e, na verdade, de uma infinidade delas (essa conclusão – epistemológica - está relacionada à compreensão que os alunos têm da infinidade de pontos em qualquer segmento; cada ponto gerando um triângulo diferente). Outras observações dos alunos foram se o triângulo ΔABC tem que ser necessariamente acutângulo (etapa 3).
- Em reunião com os alunos (etapa 4) discutimos as ideias dos alunos. Fizemos com que eles percebessem a diferença entre os dois métodos de construção e perguntamos se eles haviam chegado a alguma pergunta que pudesse levar a novos problemas. Os alunos disseram que ainda não haviam concluído nada. Sugeri então que, já que perceberam que havia uma infinidade de triângulos equiláteros inscritos, que eles olhassem para as medidas (de lado, perímetro, área). Essa medidas, no caso do triângulo equilátero, estão todas diretamente relacionadas ((maior lado \rightarrow maior perímetro \rightarrow maior área), o que não ocorre com um triângulo qualquer.
- Os alunos então verificaram, pela variação da figura no GeoGebra, que deveria haver um triângulo equilátero de área mínima (lado mínimo). O caso da área máxima foi deixado para mais adiante. A proposta que fizeram então foi a de construir esse triângulo. Outra ideia, de um aluno, foi calcular, usando geometria analítica, a posição desse triângulo no triângulo ΔABC (etapa 5 e ciclo completo).
- Voltando à etapa 2, os alunos tentaram resolver o problema de construção do triângulo ou tentaram encontrar alguma relação que pudesse caracterizar o triângulo de área mínima.
- Os alunos pensam sobre o problema, tentam encontrar algumas relações entre segmentos na figura que estivessem ligados ao triângulo equilátero. O aluno que havia

participado dos experimentos em sala de aula lembrou-se da conjectura que ele havia formulado sobre a concorrência dos segmentos que uniam cada vértice do triângulo $\triangle ABC$ a cada vértice do triângulo equilátero *em posição de mínimo* (não exata). Surgiu também uma ideia de examinar o que ocorria com os centros desses triângulos equiláteros. Para isso usaram o rastro desses centros usando a ferramenta “Habilitar rastro” (etapa 3).

- Levando essa ideias para discussão conosco, os alunos apresentaram as ideias que tiveram na nova etapa 3 (Figura 77). O rastro do centro parecia ser um segmento de reta.

Figura 77 - Triângulo $\triangle DEF$ (t_2) de área aproximadamente mínima e de centro G . Observe-se a “concorrência” em H dos segmentos \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} . O traço dos centros (linha vermelha) sugere colinearidade.



Fonte: O autor, juntamente com os alunos.

Nessa discussão (etapa 4) fiz ver a eles, como já havia feito anteriormente com os alunos em sala de aula, que a conjectura de concorrência não poderia ser confirmada, nem poderia ser falseada usando o GeoGebra. A parte do falseamento é interessante, pois pode-se usar o GeoGebra para, por exemplo, verificar que é falso assumir que a interseção da bissetriz de um ângulo interno de um triângulo com a mediatriz do lado oposto a esse ângulo fica no interior do triângulo. No nosso caso, a falsidade da conjectura não pode ser verificada simplesmente porque o triângulo em posição de mínimo não é exato! Todos nós concordamos que seria preciso obter esse triângulo com exatidão. Conteí a eles que nós não sabíamos como construir esse triângulo de área mínima. Fiz mais uma sugestão a eles: que investigassem se havia algum invariante, ou seja, um ponto, ou pontos estáticos que pertenceriam a todos os triângulos

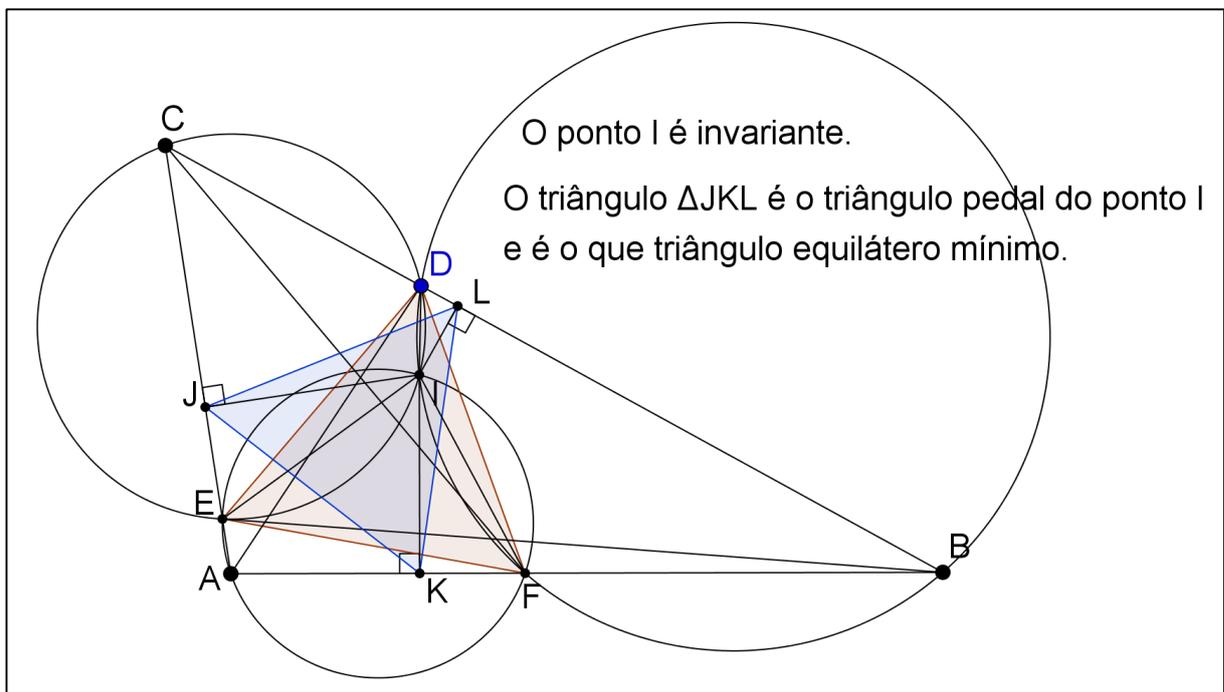
equiláteros. Outra questão é que eles deveriam formular a conjectura sobre os centros dos triângulos equiláteros e tentar verificá-la usando o GeoGebra.

- A etapa 5 foi pulada, e os alunos se concentraram (nova etapa 2) em encontrar um ponto invariante e em provar a conjectura sobre os centros.
- Os alunos não conseguiram provar o resultado principal sobre o triângulo mínimo e nem encontrar um invariante. No entanto, tiveram a ideia de tentar verificar se o lugar geométrico dos centros dos triângulos equiláteros era mesmo um segmento de reta tomando dois pontos nesse lugar geométrico, *passando uma reta por eles* e, movendo o triângulo equilátero, comprovar que os centros estavam nessa *reta* (etapa 3).
- Na etapa 4 seguinte os alunos comunicaram a comprovação sobre o lugar geométrico dos centros, mas não sabiam como provar. Chamamos a atenção para esse método de comprovação tomando *pontos no lugar geométrico*. Isso nem sempre funciona, como já pudemos comprovar no capítulo 4, na seção sobre as limitações dos SGD (a outra opção, mais segura, seria colocar o triângulo equilátero em duas posições particulares, marcar seus centros e traçar a reta por esses dois centros). Porém, pareceu que o teste com pontos no lugar geométrico funcionou bem: de fato, o lugar geométrico desses centros estava descoberto. Argumentei com eles se esse lugar geométrico poderia nos levar a uma solução da construção do triângulo mínimo, mas ninguém conseguiu perceber nada naquele momento. Sobre os invariantes fiz uma sugestão, lembrando-nos de que há um teorema que diz que se tomarmos três pontos quaisquer, um em cada lado de um triângulo (não nos vértices), então as três circunferências que passam, cada uma por par daqueles pontos e pelo vértice mais próximo do triângulo àqueles dois pontos, têm um ponto comum de concorrência (esse foi um daqueles momentos de intuição alimentada pela experiência, ingredientes importantes na criação de problemas). Pedimos que os alunos investigassem se esse ponto poderia ser um ponto especial dos triângulos.
- Os alunos investigaram o que havíamos sugerido e verificaram que esse ponto era um invariante dos triângulos! Isso foi verificado com o GeoGebra, através das coordenadas do ponto em questão, usando o arredondamento usual de duas casa decimais e de 10 casas decimais. A conjectura foi formulada. Observe-se a importância do GeoGebra para indicar uma conjectura (etapa 5).
- Os alunos tentaram provar a conjectura, mas não conseguiram. Posteriormente nós provamos – veja-se a diferença: provado que o ponto comum de concorrência não varia (e isso sendo feito via geometria sintética através de alguma outra invariância, ou sendo feito via

geometria analítica com uma grande quantidade de cálculos), nós temos a conjectura *a posteriori*. Verificando através do GeoGebra, nós temos a conjectura *a priori*. Nessa nova etapa 2 em que estamos os alunos ainda não tinham conseguido provar nem a conjectura dos centros, nem algum resultado sobre como achar o triângulo equilátero mínimo.

- A etapa 3 não existiu e passamos a uma discussão sobre o ponto invariante que havíamos percebido (novamente a intuição): se há um ponto invariante dentre todos os triângulos equiláteros qual deve ser a relação desse ponto com o triângulo mínimo? Aqui foi um momento intuitivo-criativo que não podemos creditar aos alunos (há uma certa analogia com o raciocínio usado na resolução do problema de Fagnano (seção 4.5.1.2). Pelo menos os alunos perceberam que as distâncias desse ponto invariante aos vértices do triângulo mínimo deveriam ser as menores possíveis. Portanto, o triângulo mínimo deveria ser o triângulo pedal²⁴ desse ponto invariante!
- A verificação desse fato, comprovado pelo GeoGebra (Figura 78), permitiu que os alunos formulassem essa conjectura (etapa 5).

Figura 78 – O triângulo pedal do ponto invariante.

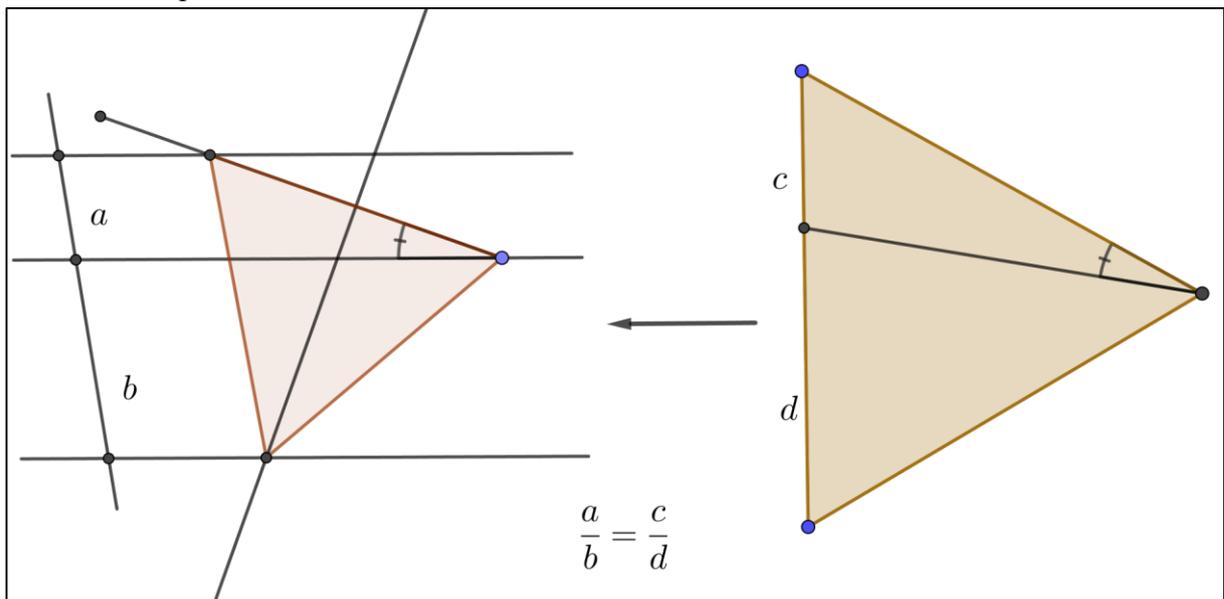


Fonte: O autor com a colaboração dos alunos.

²⁴ O triângulo pedal de um ponto e relativo a um triângulo ΔABC é o triângulo cujos vértices são as projeções desse ponto nos lados (ou nas retas suporte) do triângulo ΔABC .

- Como os alunos não conseguiram provar mais nada e nem sugeriram outros problemas associados ao problema-base, passamos diretamente para a etapa 4, para uma discussão que nos levasse a novas ideias. Às vezes, pensamos, é necessário mudar de ponto de vista, olhar o problema de outra maneira. Lembramo-nos da resolução de um problema de construção geométrica que consistia em construir um triângulo equilátero cujos vértices estivesse, cada um, sobre três retas paralelas. O problema se resolve rapidamente por rotação, mas há uma outra maneira de pensar deslocando a atenção para o triângulo equilátero, escolhendo um qualquer deles (todos são semelhantes entre si) e tentar passar, pelos seus vértices três retas paralelas que mantivessem as relações de distância entre elas. Isso é o que chamamos de um problema dual do problema original. Colocado dessa maneira, isso não parece ainda muito fácil de se fazer, mas então percebe-se que tudo o que é necessário é dividir um dos lados de algum triângulo equilátero segundo as distâncias entre cada par de retas paralelas vizinhas (Figura 79).

Figura 79 – Passando do triângulo equilátero à esquerda para o triângulo equilátero com paralelas dadas.

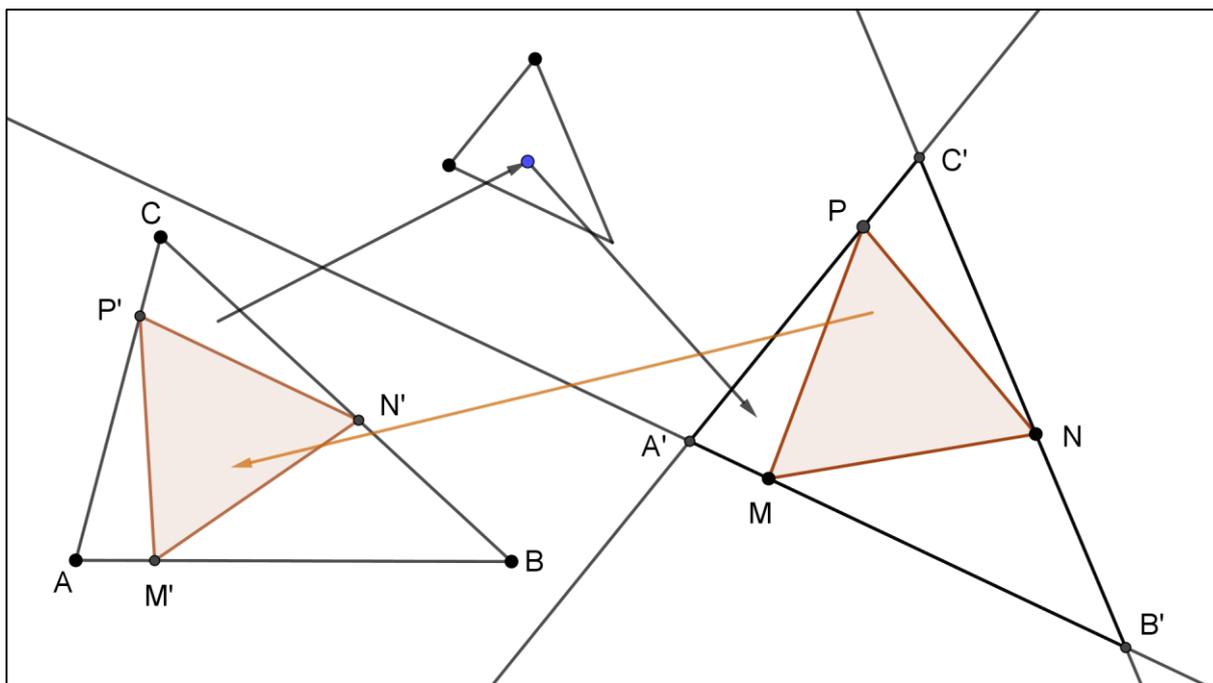


Fonte: O autor.

Fizemos a proposta aos alunos de pensarem de forma dual: tomar um triângulo equilátero qualquer e *circunscrever* a ele um triângulo semelhante ao triângulo ΔABC . Feito isso, bastaria transportar proporcionalmente o triângulo equilátero para o triângulo ΔABC original. Essa seria uma terceira maneira de realizar a construção.

- Novamente pulamos a etapa 5 e os alunos resolvem o problema da maneira proposta (etapa 2). Como eles fizeram isso. Para nossa surpresa, fizeram de uma maneira não esperada por nós (Figura 80).

Figura 80 – Construção do triângulo equilátero $\Delta M'N'P'$ inscrito no ΔABC através de um triângulo rígido semelhante ao ΔABC .



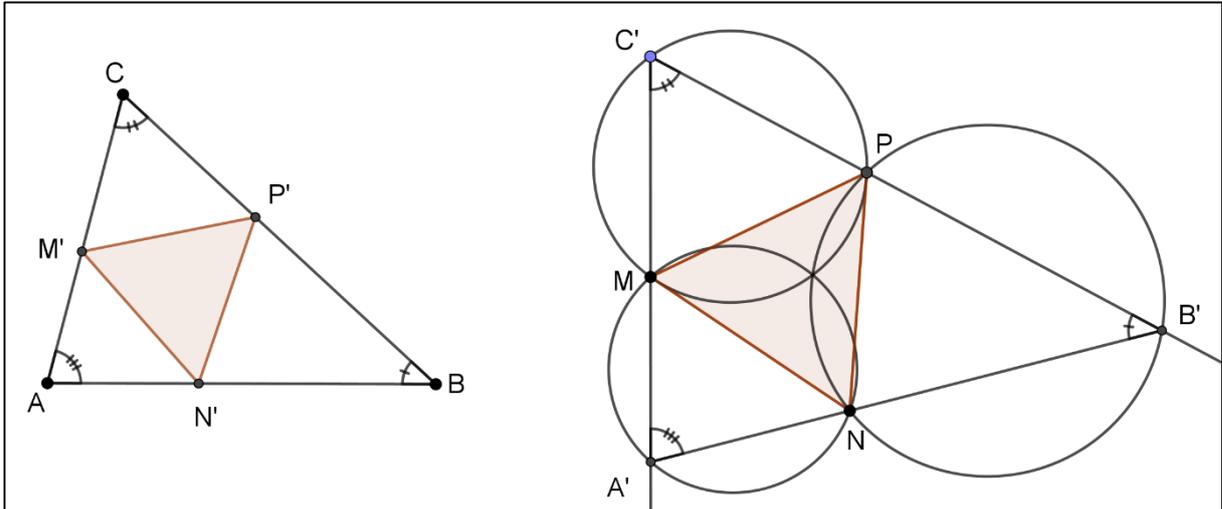
Fonte: O autor, repetindo a ideia dos alunos.

Os alunos construíram um triângulo rígido qualquer semelhante ao triângulo ΔABC e traçaram, pelos vértices do triângulo equilátero qualquer da direita da Figura 80, retas paralelas aos lados do triângulo rígido. Assim obtiveram triângulos $\Delta A'B'C'$ semelhantes ao triângulo ΔABC conforme moviam um dos vértices do triângulo rígido. Depois levaram por semelhança o triângulo equilátero para o triângulo ΔABC , obtendo o triângulo $\Delta M'N'P'$ da figura da esquerda, inscrito no ΔABC . E daí? Não surgiu mais nenhuma ideia nova.

- Pulamos a etapa 3 e passamos a discutir a situação (etapa 4). Comentei com os alunos que nós tínhamos feito esse processo usando arco capaz, um processo bem mais laborioso, mas que talvez nos fornecesse alguma outra ideia. Solicitei aos alunos que fizessem essa construção. Durante esse processo os alunos desenvolveram duas novas ferramentas do GeoGebra: o transporte de ângulo e o arco capaz (desenvolvendo o potencial semiótico do software). Com isso, puderam realizar a construção pedida com mais rapidez.

- Na etapa 2 novamente os alunos realizaram a construção sugerida. Eles também observaram que os três arcos capazes se cruzam em um único ponto.

Figura 81 – Construção do triângulo equilátero inscrito por meio do arco capaz.



Fonte: Os alunos.

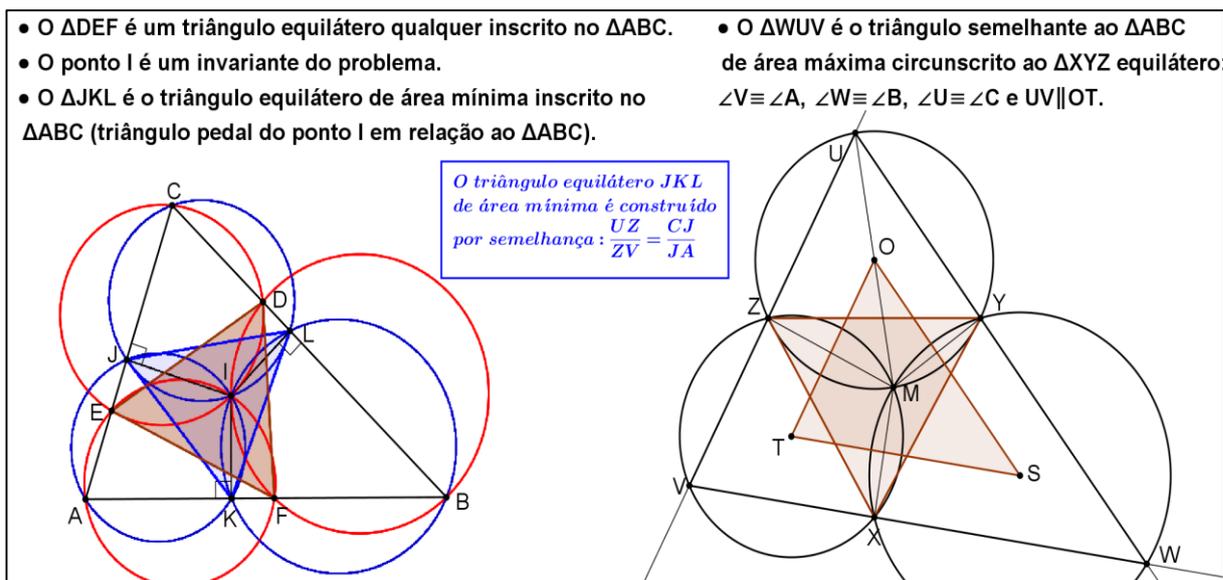
Em que essa construção seria melhor do que a outra?

- Na etapa 3 fizemos a pergunta aos alunos: completando a ideia do problema dual, ao invés de construir o triângulo equilátero de área mínima inscrito no ΔABC , seria possível construir um triângulo $\Delta A'B'C'$, semelhante ao triângulo ΔABC , *circunscrito ao triângulo equilátero* fixo ΔMNP à direita, de modo que a área desse triângulo $\Delta A'B'C'$ fosse máxima? Esse problema seria equivalente, de modo dual, ao problema original?
- Discutimos isso na etapa 4. A conclusão foi que isso de fato levaria à solução mínima buscada. Como se pode fazer isso?
- Os alunos formulam esse problema (já não de criação exclusiva deles) (etapa 5).
- Na etapa 2 novamente, os alunos tentam resolver o problema sem sucesso. Nessa fase, os alunos já haviam perdido um pouco a força das ideias. Ainda assim, sugerimos uma nova ideia através de um problema:

“Dadas duas circunferências secantes quaisquer, traçar por um ponto de interseção delas um segmento com extremidades em uma e em outra de maneira que ele tenha comprimento máximo.”

Os alunos trabalharam nesse problema e conseguiram resolvê-lo. A Figura 82 dá uma ideia de como isso pode ser feito.

Figura 83 – O processo dual de construção do triângulo mínimo inscrito no triângulo ΔABC .



Fonte: O autor, compartilhando com os alunos.

Na Figura 83, à esquerda, temos um triângulo ΔABC acutângulo qualquer e o ΔDEF é um triângulo equilátero qualquer inscrito no ΔABC por rotação. O método dual (considerando o problema dual do problema original) consiste então em traçar um triângulo equilátero ΔXYZ qualquer (à direita), traçar os arcos capazes dos ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ do triângulo ΔABC relativos, respectivamente, aos lados \overline{XZ} , \overline{XY} e \overline{YZ} do triângulo equilátero ΔXYZ , e traçar o triângulo ΔVWU de área máxima circunscrito ao triângulo equilátero ΔXYZ . Em seguida, usando proporções, transportamos os vértices X, Y e Z do triângulo equilátero ΔXYZ para os vértices correspondentes K, L e J do triângulo ΔKLJ inscrito no ΔABC e equilátero. Esse triângulo é o triângulo equilátero de área mínima inscrito no triângulo ΔABC procurado. Observe que o ΔKLJ é o triângulo pedal relativo ao ponto I , invariante do problema. Esse ponto I é o ponto correspondente ao ponto M da figura da direita, que é o ponto de interseção dos três arcos capazes dos ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ do triângulo ΔABC relativos, respectivamente, aos lados \overline{XZ} , \overline{XY} e \overline{YZ} do triângulo equilátero ΔXYZ . Por que o triângulo ΔVWU é o triângulo de área máxima circunscrito ao triângulo equilátero ΔXYZ ? A resposta é porque seus lados são os maiores possíveis e, pela fórmula da área de um triângulo de Heron, concluímos esse resultado.

7.2.1.3 Comentários e análises

A atividade com o grupo foi bem intensa no sentido de uma participação ativa dos alunos do grupo e das ideias que eles apresentaram. Os alunos estavam motivados desde o início e isso

permitiu que não fosse necessário um período preparatório como me pareceu necessário no caso com os alunos em sala de aula.

A metodologia na atividade com os alunos do grupo permitiu, e exigiu, uma maior participação nossa em termos de dedicação de tempo. Isso foi bom por um lado, pois permitiu que desenvolvêssemos mais ideias do que com o outro grupo, mas, por outro lado, não foi bom porque houve momentos de interferência nossa no processo, prejudicando um pouco os momentos de criação dos alunos. Acreditamos que exista um ponto de equilíbrio relativamente à nossa participação.

Quanto à atividade propriamente dita, avaliamos que vários resultados foram obtidos, provavelmente alguns inéditos. Aqui fica difícil de se saber, pois geometria plana não é considerada uma área de pesquisa de um tema em desenvolvimento. Portanto, não se publica quase nada sobre geometria euclidiana. Porém frequentemente nos deparamos com resultados inéditos publicados em periódicos dedicados a divulgação ou em problemas de olimpíadas de matemática.

Chamamos a atenção para os desafios de construção geométricos que surgiram aqui como problemas novos. Além disso, as perguntas de otimização (extremos) foram uma constante nessa atividade. Essas são duas fontes de problemas que estabelecemos neste trabalho. Não criamos nenhum problema como recíproca deste resultado estudado na atividade, mas não é difícil estabelecer algumas. Por exemplo:

- 1) Todo triângulo equilátero inscrito em um triângulo ΔABC é um triângulo pedal relativo a um ponto do interior do triângulo ΔABC ?
- 2) Provar que se um triângulo equilátero inscrito em um triângulo ΔABC é um triângulo pedal relativo a um ponto do interior do triângulo ΔABC , então esse triângulo é o triângulo equilátero de área mínima inscrito no triângulo ΔABC .
- 3) No problema 2 acima, mostre que o ponto que gera o triângulo equilátero inscrito no triângulo ΔABC é um invariante, ou seja, é um ponto que pertence a todos os triângulos equiláteros e que mantém uma determinada propriedade.

Algumas perguntas elaboradas pelos alunos e comentadas durante o período da atividade infelizmente não chegaram a merecer a atenção devida do grupo. Considero que elas fazem parte também da lista de problemas criados pelos alunos durante a atividade. São elas:

- a) Qual seria o procedimento para inscrever um triângulo semelhante a um triângulo qualquer dado no triângulo ΔABC ? Há vários desses triângulos?

- b) Como se comportariam os centros desses triângulos inscritos?
- c) Qual é o triângulo de área mínima inscrito no triângulo ΔABC , dentre todos os possíveis triângulos nele inscritos? E o de perímetro mínimo? (Esse já é conhecido – problema de Fagnano).

Essas foram algumas das perguntas formuladas quase que casualmente pelos alunos. Esses momentos de criatividade não podem passar despercebidos. Essa é uma observação que se aplica muito bem à sala de aula. O quanto aproveitamos das perguntas dos nossos alunos? O quanto estimulamos esses alunos a fazerem perguntas. Lembremos do pensamento divergente (GUILFORD, 1950). Levantar questões, por mais “desinteressantes” que possam parecer, é uma prática que deve fazer parte da sala de aula.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos uma proposta para o desenvolvimento da criatividade para estudantes de Licenciatura do Curso de Matemática da UFSC. Dois aspectos da criatividade foram considerados: criatividade na resolução de problemas e criatividade na invenção/formulação de problemas. É bem sabido que a criatividade na resolução de vários problemas é necessária, bem como, em nível de desenvolvimento de teorias matemáticas (pesquisa). Afinal, como diz o título do artigo de Mann (2006), criatividade é a essência da matemática. Quanto à invenção de problemas de matemática (para não usar aqui novamente criação de problemas) por parte de um estudante, sejam eles originais ou não, o que interessa é que eles sejam originais (desconhecidos) *para esse estudante*. A literatura sobre esse tema já é atualmente bastante volumosa. Em nossa busca de compreender melhor a criatividade, tivemos que consultar diversos textos de filósofos e psicólogos. Interessante foi observar que esses autores, que abordavam esse construto em vários domínios, quando se referiam em algum momento à criatividade matemática, invariavelmente citavam os trabalhos de Poincaré (1908) e de Hadamard (1944). Esses matemáticos viam na intuição um elemento fundamental na criação de problemas, embora psicólogos não conseguissem entender bem o que os matemáticos entendiam por intuição (PIAGET, 1961 apud DUVAL, 2002). A ênfase na importância da criatividade na Educação Matemática surgiu principalmente a partir dos trabalhos de Pólya (1954, 1957), especialmente em relação à resolução de problemas na detalhamento de métodos heurísticos de sua resolução.

Em nosso trabalho o foco foi sobre a criatividade como invenção de problemas e conjecturas na área de geometria euclidiana com estudantes do Ensino Superior. O termo conjectura pode parecer aqui um tanto pretensioso, pois talvez ele devesse ser usado somente para afirmações abertas que fazem parte do desenvolvimento de uma teoria. A geometria euclidiana não pode mais ser desenvolvida *como uma teoria*. Dessa teoria fechada emergiram as geometrias não-euclidianas. O termo conjectura foi usado aqui para diferenciar problemas “inéditos” quantitativos (do tipo calcule...) dos problemas em que propriedades geométricas desconhecidas foram descobertas (as conjecturas). Nesta área contamos com o importante recurso de um Software de Geometria Dinâmica, no nosso caso o GeoGebra. Por outro lado, no processo de inventar um problema é preciso muitas vezes saber se ele é de fato um problema. Para isso, é necessário tentar resolvê-lo, e foi o que fizemos na nossa prática com os estudantes. Assim, criatividade na invenção e na resolução de problemas fizeram parte do nosso trabalho.

Além disso, optamos por enfatizar problemas que pudessem ser tratados por meio de geometria sintética, em oposição à geometria analítica. Houve vários motivos para essa escolha. Em primeiro lugar, o contexto da disciplina Geometria Quantitativa I, que é lecionada na primeira fase do Curso de Matemática da UFSC e anteriormente à disciplina Geometria Analítica, que consta na grade curricular como disciplina de segunda fase. Em segundo lugar porque o tratamento de problemas via geometria sintética se aproxima mais, ou usufrui, de problemas de construção geométrica, como pode ser observado neste trabalho. Finalmente, em terceiro lugar, é a abordagem da geometria sintética que os professores do ensino básico, principalmente dos Anos Finais do Ensino fundamental, “levam” para as turmas desses anos. E o nosso trabalho, lembramos mais uma vez, foi realizado com os futuros professores dessas turmas. Tem sido nosso entendimento que esses futuros professores só poderão estimular a criatividade em salas dessas turmas se eles mesmos tiverem suas experiências em sua formação no Ensino Superior.

A metodologia empregada foi resultante de um trabalho que vínhamos realizando com os estudantes da disciplina Geometria Quantitativa I por alguns semestres e que se concretizou através dos fundamentos da teoria dos registros de representação semiótica de Duval. Desenvolvemos um modelo de um procedimento cíclico e em fases que foi aplicado em experimentos com os estudantes. Em várias dessas fases os estudantes, em grupos ou individualmente, e nós mesmos participamos ativamente nas discussões e troca de ideias. Nesses experimentos trabalhamos com dois conjuntos distintos de estudantes: um deles, formado por todos os alunos da disciplina Geometria Quantitativa I, da primeira fase do Curso de Matemática da UFSC (Licenciatura), e o outro formado por um grupo restrito de alunos voluntários de um projeto relacionado à nossa pesquisa. Havia uma grande diferença entre os dois conjuntos. No primeiro, os alunos participaram da pesquisa compulsoriamente através de tarefas periódicas e às quais era atribuída uma nota. Algumas dessas tarefas exigiam apenas que os alunos seguissem algumas instruções e, em todas elas, quaisquer ideias que eles tivessem mereceram a nossa atenção. No segundo conjunto os alunos eram voluntários, em geral mais experientes e escolheram participar pelo seu interesse em geometria.

Analisando comparativamente os experimentos com os dois conjuntos de alunos observamos que o processo fluiu melhor com o grupo de voluntários, justamente por seu interesse maior, já despertado, e por sua maior experiência. Com o primeiro conjunto de alunos ficou mais difícil estabelecer um fluxo contínuo de tarefas envolvendo criatividade devido à própria evolução da disciplina atrelada a um programa pré-estabelecido. Em alguns momentos

foi necessário ser um “insubordinado criativo” (D’AMBROSIO; LOPES, 2015) e romper com o estabelecido alterando o ritmo da disciplina. Consideramos que o trabalho com os alunos de uma turma como de extrema importância, justamente por abarcar todos os alunos da turma. O maior problema foi a falta de alguma experiência desses alunos em termos de conteúdo. Como vimos neste trabalho, a criatividade é um construto de domínio específico (BAER, 2016) e, como tal, exige alguma formação. No entanto, encaramos esse desafio por meio da oferta de “provocações” aos alunos, a título de estímulo e do despertar da curiosidade. Nesse sentido podemos dizer que obtivemos resultados interessantes, embora os relatos dos experimentos tenham sido um pouco sucintos aqui.

Até onde nos foi possível observar, o procedimento descrito na metodologia e o estabelecimento das fontes de problemas em geometria (problemas com origem nas construções geométricas, problemas de extremos em geometria e recíprocas de afirmações/problemas) são inéditos em trabalhos deste tipo. Essas fontes foram estabelecidas através de nossa prática lecionando geometria por vários anos e desenvolvendo problemas de geometria para olimpíadas de matemática. Com o aparecimento dos softwares de geometria dinâmica essas fontes passaram a ser exploradas mais intensamente. No entanto, é preciso ressaltar que a fonte primária de muitos problemas provêm das perguntas dos alunos. O aluno não pergunta somente porque tem uma dúvida de compreensão de algo. Ele também pergunta porque tem DÚVIDAS, no melhor sentido inquisitório com perguntas do tipo: “e se...?” Essas perguntas, se bem aproveitadas, podem gerar, e de fato geraram, diversos problemas.

Com relação aos softwares de geometria dinâmica, atualmente denominados como ambientes de geometria dinâmica, desenvolvemos um trabalho específico do desenvolvimento e da compreensão de seu potencial semiótico, estabelecendo as fronteiras potencialidades/limitações por meio de vários exemplos que desenvolvemos e expusemos no capítulo 4 deste trabalho. O futuro professor deve compreender que, com um SGD, nem tudo é possível. É preciso perceber que, como uma ferramenta, um SGD apresenta potencialidades, mas também limitações, e é preciso compreender que essas limitações são decorrentes, em última instância, de razões epistemológicas, do entendimento de que o nosso plano é um conjunto completo (no sentido topológico) de pontos e que não pode ser reproduzido na tela de um computador. Trava-se então uma batalha entre precisão (real) e exatidão (ideal), seja por meio das representações das figuras geométricas, seja por resultados quantitativos de medidas. As imprecisões que surgem e que funcionam como barreiras para que possamos chegar a algumas conclusões (por exemplo, os lugares geométricos obtidos pelo software não são

identificados por ele). No entanto, as potencialidades superam essas limitações ou, de outra forma, podemos usar essas limitações a nosso favor através das perguntas e dúvidas que surgem justamente por sua causa. É conhecido o fato de que muitos professores do ensino básico ainda têm dificuldade de fazer uso da tecnologia em sala de aula. O que pode acontecer quando esse professor resolver utilizar um SGD? É tudo uma maravilha? Ou é tudo incerto? (“professor, porque o quadrado que construí com o GeoGebra não tem todos os lados iguais?”).

O referencial teórico que adotamos neste trabalho encontra-se na teoria dos registros de representação semiótica de Duval. Como apontamos aqui, segundo Sinclair et al. (2017) o modelo de van Hiele (1986), a teoria dos conceitos figurais de Fischbein (1993) e a teoria de Duval (2004) estão em evidência nos estudos sobre educação em geometria hoje em dia. Mas é a teoria de Duval que melhor dialoga com as questões relacionadas à geometria. A compreensão das apreensões, da visualização e dos olhares icônicos e não icônicos, das transformações mereológicas e da congruência nas conversões são fundamentais, tanto para o aluno, como para o docente em todo o processo de ensino e aprendizagem de geometria. No tocante à criação de problemas, os processos de descrição foram importantes para a formulação clara e para a compreensão desses problemas. No entanto, quanto ao processo de criação propriamente dito, não conseguimos aplicar plenamente a teoria de Duval, exceto pelo método de obtenção de um problema mínimo a partir de uma descrição de um problema completo (DUVAL, 2003). Apesar de termos apresentado um problema mínimo deste tipo neste trabalho, esse método proposto por Duval não foi utilizado em nenhum dos experimentos com os alunos, o que consideramos como um ponto a ser melhorado. De fato, não só poderíamos ter explorado melhor tal método, como deveríamos também ter apresentado outros exemplos de obtenção de problemas para alunos do Ensino Superior.

Outras fragilidades que pudemos constatar, e que devem ser corrigidas em futuros trabalhos, foi o não estabelecimento de um plano de aula específico sobre criatividade na disciplina Geometria Quantitativa I, com possíveis sugestões de alteração curricular de programa da disciplina, para que o tópico desenvolvimento da criatividade/criação de problemas em geometria fosse aí introduzido. Embora tenhamos realizado, de início, com os alunos da disciplina uma preparação constando de tarefas que pudessem conscientizar esses alunos sobre as potencialidades e as limitações do GeoGebra, acreditamos que o conjunto de atividades (tarefas) devesse estar mais estruturado, de modo a obter melhores resultados (mais ideias, mais propostas de criação de problemas).

As observações do parágrafo anterior apontam para propostas de continuidade deste trabalho. Durante esta pesquisa e durante toda a nossa formação para o doutorado no PPGECT, sempre estivemos em sala de aula juntamente lecionando as disciplinas de geometria do Curso de Matemática da UFSC. Esse período foi, para nós, transformador. Os nossos olhares, tanto para a geometria, como para o processo de ensino se modificaram muito. Ao mesmo tempo que tentávamos inculcar nos alunos a ideia de criar problemas, nossa visão de ensino também se modificava. Saber ouvir mais atentamente as ideias dos alunos, considerar cada pergunta como uma nova ideia a ser trabalhada, fizeram parte de nossa prática docente e enriqueceram nosso trabalho. A atenção que demos para os processos intuitivos, não somente se prendendo às questões lógicas, promoveram o desenvolvimento do trabalho. Afinal, como afirmou Poincaré (1889a, p. 160-161): *“é pela lógica que se demonstra, mas é pela intuição que se cria”*.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, Saddo Ag et al. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, n.27, set.-out.-nov.-dez. 2004, p. 94-108.
- ANDREESCU, Titu; MUSHKAROV, Oleg; STOYANOV, Luchezar. **Geometric Problems on Maxima and Minima**. Boston: Birkhäuser. 2007.
- ARCAVI, Abraham. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 52, n. 3, p. 215-241, Apr. 2003.
- ARTIGUE, Michéle. Research in Mathematics Education through the eyes of mathematicians. In: KILPATRICK, J.; SIERPINSKA, A. (Eds). **Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity**, An ICMI Study Book 1, New ICMI Studies Series v. 4, 1977.
- BAER, John. **Domain Specificity of Creativity**. Amsterdam: Elsevier. 2016.
- BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 18, p. 147-176, 1987.
- BARROSO, L. C. et al.. **Cálculo numérico (com aplicações)** (2ª ed.). São Paulo: Harbra, 1987.
- BELLEMAIN, F. **Conception, réalisation et expérimentation d'un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie : Cabri-géomètre**. Thèse (Doctorat en Didactique des Mathématiques). Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 1992.
- BODEN, M. **The Creative Mind – Myths and Mechanisms**. Londres: Routledge, 2nd ed., 2004.
- BOGOLMONY, Alexander. **The Butterfly Theorem**. 2016. Disponível em: <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras>.
- BOREL, Émile. La Logique et l'Intuition en Mathématiques. **Revue de Métaphysique et de Morale**, t. 14, n.3, p. 273-283, mai 1907.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática (1ª a 4ª séries)**. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática (5ª a 8ª séries)**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio, ciências da natureza e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEMT, 1999.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- BROWN, S. I., & WALTER, M. I. **The Art of Problem Posing**. 3rd ed. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 2005.

BUSSI, Maria G. Bartolini; MARIOTTI, Maria Alessandra. Semiotic mediation in the mathematics classroom -Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In: ENGLISH, L. D. et al., **Handbook of international research in mathematics education**, New York, p. 746-783, 2008.

CHARALAMBOS, Lemonidis. A few remarks regarding the teaching of geometry, through a theoretical analysis of the geometrical figure. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**. V. 30, n. 4, p. 2087-2095, Dec. 1997.

CLEMENTS, Ken. Visual Imagery and School Mathematics. **For the Learning of Mathematics**, v. 2, n.2, p. 2-9, Nov. 1981.

CLEMENTS, Ken. Fifty Years of Thinking About Visualization and Visualizing in Mathematics Education: A Historical Overview. In: FRIED M.; DREYFUS, T. (Eds). **Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground. Advances in Mathematics Education**. Cap. 11. Dordrecht: Springer, p. 177-192, 2014.

COURT, N. A. The Problem of Apollonius. **The Mathematics Teacher**, National Council of Teachers of Mathematics, v. 54, n. 6, p. 444-452, Oct. 1961.

COXETER, Harold Scott MacDonald; GREITZER, Samuel L. **Geometry revisited**. The Mathematical Association of America: New York – Toronto, 1967.

CRAFT, A. The limits to creativity in Education: Dilemmas for the Educator. **British Journal of Educational Studies**, v. 51, p. 113-127, 2003.

CSIKSZENTMIHALYI, M. **The Psychology of Discovery and Invention**. New York, NY: Harper Collins Pub., 1996.

D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. Insubordinação Criativa: um convite à reinvenção do educador matemático. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 1-17, 2015.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar 9 – Geometria Plana**. 7ª ed. São Paulo: Atual Editora,

DREYFUS, Tommy. On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. **Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME – 15)**, v. 1. Assis, Italy, p. 33-48, 1991.

DUVAL, Raymond. Structure du Raisonnement Deductif et Apprentissage de la Demonstration. **Educational Studies in Mathematics**, v. 22, n. 3, p. 233-261, 1991.

DUVAL, Raymond. Geometry from a cognitive point of view. In: MAMMANA, C.; VILLANI, V. (Eds.). **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 37-52, 1998.

DUVAL, Raymond. Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking - Basic Issues for Learning. In: HITT, F.; SANTOS, M. (eds.). **Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the**

International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mexico, Vol. I, 3-26, p. 311-335, 2002.

DUVAL, Raymond. Décrire, visualiser ou raisonner: quels “apprentissages premiers” de l’activité mathématique? **Annales de Didactique et des Sciences Cognitives**, v. 8, p. 13-62, 2003.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. Suisse: Peter Lang, 2004.

DUVAL, Raymond. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 6, n.2, p. 96-112, 2011.

DUVAL, Raymond. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n.1, p. 118-138, 2012.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora da UNESP, 2009.

FEHR, H. *Enquête de l’ Enseignement mathématique sur la methode de travail des mathematiens*. Paris: GAUTHIER-VILLARS, 1908.

FEYERABEND, P. Creativity: A Dangerous Myth. **Critical Inquiry**, v. 13, n. 4, p. 700-711, 1987.

FISCHBEIN, Efraim. Intuition and Proof. **For the Learning of Mathematics**, v. 3, n.2, p. 9-24, 1982.

FISCHBEIN, Efraim. The theory of figural concepts. **Educational Studies in Mathematics**, v. 24, n.2, p. 139-162, Feb. 1993.

FRITZ, K. V. The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum. **Annals of Mathematics**, V. 46, n. 2, p. 242-264, 1944.

GALVÃO, M. E. E.L.; COSTA, N. M. L.; PRADO, M. E. B. B. Construção de funções a partir de problemas geométricos: uma abordagem investigativa. **REnCiMa**, v.8, n.2, p.39-57, 2017.

GAUT, Berys. The Philosophy of Creativity. **Philosophy Compass**, v.5, n.12, p. 1034-1046, 2010.

GAUT, Berys. Educating for Creativity. In: PAUL, Elliot Samuel; KAUFMAN, Scott Berry (Eds.). **The Philosophy of Creativity- New Essays**. New York: Oxford University Press, 2014.

GIAQUINTO, Marcus. **Visual Thinking in Mathematics – An Epistemological Study**. New York: Oxford University Press, 2007.

GONTIJO, Cleyton Hércules. **Relações entre criatividade, criatividade em matemática e motivação em matemática de alunos do ensino médio**. Tese (Doutorado em Psicologia) – Instituto de Psicologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2007.

GONTIJO, Cleyton Hércules; CARVALHO, Alexandre Tolentino; FONSECA, Mateus Giani; FARIAS, Mateus Pinheiro. **Criatividade em Matemática- Conceitos, metodologia e avaliação**. Brasília: Pesquisa, Inovação & Ousadia, 2019.

- GRAVINA, Maria Alice. Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. **VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, Anais...**, Belo Horizonte, Brasil, p.1-13, nov. 1996.
- GRAVINA, Maria Alice. O potencial semiótico do GeoGebra na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa [Versão Eletrônica], **Vidya**, v. 35, n. 2, p. 237-253, 2015.
- GREENBERG, Marvin Jay. **Euclidean and non-Euclidean Geometries- Developmnet and History**. 3rd ed. New York: W. H. Freman and Company, 1994.
- GUILFORD, J.P. Creativity. **American Psychologist**, n. 5, p. 444-445, 1950.
- HADAMARD, Jacques. L'Ouevre Mathématique de Poincaré. **Acta athenica**, v. 38, p. 203-287, 1921.
- HADAMARD, J. **An essay on the psychology of invention in the mathematical field**. New York: Dover, 1944.
- HANNA, Gila; SIDOLI, Nathan. Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. **ZDM Mathematics Education**, v. 39, p.73-78, 2007.
- HANSEN, Vagn Lundsgaard. Everlasting Geometry. In: MAMMANI, Carmelo; VILLANI, Vinício (eds.). **Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st Century**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 9-18, 1998.
- HERSCH, R. Mathematical Intuition (Poincaré, Polya, Dewey). **The Mathematics Enthusiast**, v. 8, n. 1, 2011.
- HILBERT, David. **The Foundations of Geometry**. Translated by E. J. Townsend. La Salle, Illinois: The Open Court Publishing Company, 1950.
- HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. **Differential Equations, Dynamical Systems, and an introduction to chaos**. San Diego, California: Academic Press, 2004.
- HOHENWARTER, Markus; LAVICZA, Zsolt. In: KÜCHEMANN, D. (Ed.). **Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics**, v. 27, n. 3, p. 49-54, Nov. 2007.
- INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICAL INSTRUCTION. Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st Century. **Educational Studies in Mathematics**, v. 28, n. 1, p. 91-98, Jan. 1995.
- JONES, Keith. Visualisation, Imagery and the Development of Geometrical Reasoning. In: **Proceeding of the British Society for Research into Learning Mathematics**, 18(1&2), p. 123-128, 1998.
- KILPATRICK, J. Problem formulating: Where do good problems come from? In: SCHOENFELD, A. H. (ed.). **Cognitive science and mathematics education**, NJ: Hillsdale, 1987, p. 123-147.
- KONDRATIEVA, Margo. Geometrical Constructions in Dynamic and Interactive Mathematics Learning Environment. **Mevlana International Journal of Education (MIJE)**, v. 3, n. 3,

Special Issue: Dynamic and Interactive Mathematics Learning Environment, p. 50- 63, Jul. 2013. Disponível em: <http://mije.mevlana.edu.tr/>

KOSYVAS, G. Problèmes ouverts: notion, catégories et difficultés. **Annales de Didactique et des Sciences Cognitives**, v. 15, p. 45-73, 2010.

LABORDE, Colette. The Computer as Part of the Learning Environment: The Case of Geometry. In: **Learning from Computers: Mathematics Education and Technology**, KEITEL, C.; RUTHVEN, K. (Eds.), Chap. 3, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, p. 48-67, 1993.

LABORDE, Colette. Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. **Educational Studies in Mathematics**, v. 44, n. 1-3, p. 151-161, 2000.

LABORDE, Colette. Integration of technology in the design of geometry tasks with cabri-geometry. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, v. 6, p. 283-317, 2001.

LEIKIN, R. Problem posing for and through Investigations in a Dynamic Geometry Environment. In: SINGER, F. M., ELLERTON, N.; CAI, J. (Eds.) **Problem Posing: From Research to Effective Practice**. Dordrecht: Springer, p. 373-391, 2015.

LAKATOS, Imre. What does a mathematical proof prove? In: TYMOCZKO, T. (ed.). **New directions in the philosophy of mathematics: An anthology**. New Jersey: Princeton University Press, p. 153-162, 1998.

LILJEDAHN, P. Illumination: an affective experience? **ZDM Mathematics Education**, v. 45, p. 253-265, 2013.

LORENZATO, Sérgio. Os “Por Quês” Matemáticos dos Alunos e as respostas dos Professores. **Pro-Posições**, v.4, n.1 [10], p. 73-77, 1993.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**, n. 4, p. 3-13, 1º semestre 1995.

MAMMANI, Carmelo; VILLANI, Vinício (ed.). **Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st Century**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.

MANN, E. L. Creativity: The Essence of Mathematics. **Journal for the Education of the Gifted**, v. 30, n. 2, p. 236-260, 2006.

MARIOTTI, Maria Alessandra. Images and Concepts in Geometrical Reasoning. In: SUTHERLAND, R.; MASON, J. (Eds.). **Exploiting Mental Imagery in Computers in Mathematics Education**. NATO ASI Series, p. 97-116, 1994.

MARIOTTI, Maria Alessandra; FISCHBEIN, Efraim. Defining in classroom activities. **Educational Studies in Mathematics**, v.34, n. 3, p. 219-248, Dec. 1997.

MARIOTTI, Maria Alessandra. Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher. **ZDM Mathematics Education** v. 41, p. 427-440, 2009.

MARIOTTI, Maria Alessandra. Introducing students to geometric theorems: how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. **ZDM Mathematics Education** v. 45, p. 441-452, 2013.

MIRAGLIOTTA, Elisa; BACCAGLINI-FRANK, Anna. Visuo-spatial abilities and geometry: A first proposal of a theoretical framework for interpreting processes of visualization. In: CERME 10. Dublin, p. 3952-3959, Feb. 2017.

MORETTI, Mérciles Thadeu, BRANDT, Célia Finck, BASSOI, Tânis Stella. Estudo das funções do discurso na resolução de problemas matemáticos. **Educ. Matem. Pesq.**, v.16, n.2, p. 479-503, 2014.

NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa; SIPLER, Ivanete Zuchi. Livros Dinâmicos de Matemática. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 9, n. 2, p. 78-102, 2020.

PANZA, M. **Nombres : Éléments de mathématiques pour philosophes**. ENS editions, pp. 331, 2007.

PAPALEONTIOU-LOUCA, E.; VARNAVA-MAROUCHOU, D.; MIHAI, S.; KONIS, E. Teaching for Creativity in Universities. **Journal of Education and Human Development**, v. 3, n.4, p. 131-154, 2014.

PASQUALI, Kely Cristina. **Máximos e mínimos em geometria euclidiana plana**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004. Disponível em: <http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/96564>.

PARZYSZ, B. “Knowing” versus “Seeing”: Problems of the plane representation of space geometry figures. **Educational Studies in Mathematics**, v.19, n. 1, p. 79-92, Feb. 1988.

PAUL, Elliot Samuel; KAUFMAN, Scott Barry. Introducing The Philosophy of Creativity. In: PAUL, E.S., KAUFMAN, S. B. (Eds.). **The Philosophy of Creativity- New Essays**. New York: Oxford University Press, 2014.

PEHKONEN, E. Use of Open-ended problems in mathematics classroom. **Research Report, Department of Teacher Education**, University of Helsinki. Helsinki: 1997.

PETERSEN, Julius. **Méthodes et Théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques avec la application a plus de 400 problèmes**. Traduit par O. Chemin. Paris: Gauthier-Villars, 1880.

PETERSEN, Julius. **Methods and Theories for the solution of problems of geometric constructions applied to 410 problems**. Translated by Sophus Haagenen. New York: G. E. Stechert, 1927.

PETERSEN, Julius. **Construções Geométricas-Métodos e Teorias para a resolução de problemas com aplicação em mais de 400 problemas**. Tradução de Samsão Woiler e Hugo Monteiro de Barros Carl. São Paulo: Livraria Nobel, 1963.

PINHO, José Luiz Rosas. Resolvendo Problemas de Extremos em Geometria usando Métodos não analíticos: o muito que se pode fazer no ensino médio com um “pouco” de Geometria. Palestra Plenária: 1º **Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática**, Brasília, 2013. Disponível em: <https://www.sbm.org.br/simposio-nacional/materiais-das-atividades/>.

PINHO, José Luiz Rosas. Criação e resolução de um problema de geometria via construção geométrica. **Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina**, n. 14. Florianópolis: PET Matemática, p.64-81, 2017. Disponível em: <http://www.orm.mtm.ufsc.br/revista.php>.

PINHO, José Luiz Rosas; MORETTI, Mércles Thadeu. O papel das descrições e o potencial semiótico dos softwares de geometria dinâmica na criação e resolução de problemas de geometria no ensino superior. In: MORETTI, Mércles Thadeu; BRANDT, Celia Finck. (Orgs.), **Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval**. e-book, cap. XV. Florianópolis: REVEMAT/UFSC, p. 335-354, 2020.

PINHO, José Luiz Rosas; MORETTI, Mércles Thadeu. O uso de Softwares de Geometria Dinâmica no estudo de Geometria Plana: potencialidades e limitações. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 22, n.5, p. 25-43, set./out. 2020.

POINCARÉ, Henri. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, 3^{ème} série, tome vii, p. 375-422, nov., 1881.

POINCARÉ, Henri. La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. **L'Enseignement mathématique**, v. 1, 157-162, 1889a.

POINCARÉ, Henri. Du rôle de l'intuition et de la logique em mathématiques. In: **Comptes rendus au Deuxième Congrès International des Mathématiciens**, Paris, 18, p. 115-130, 1889b. Reproduzido com modificações sob o título: L'Intuition et la Logique em Mathématiques. **La valeur de la Science**, chap. I. Paris: Flammarion, p. 13-38, 1905.

POINCARÉ, Henri. La Science et la Réalité. **La valeur de la Science**, chap. XI. Paris: Flammarion, p. 271-302, 1905.

POINCARÉ, H. L'Invention Mathématique. **L'Enseignement Mathématique**, v. 10, p. 357-371, 1908.

PÓLYA, G. **Mathematics and Plausible Reasoning**, vol I & vol II. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1954.

PÓLYA, G. **How to Solve it**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PRESMEG, Norma. Visualisation and mathematical giftedness. **Educational Studies in Mathematics**, v. 17, n. 3, p. 297-311, Aug. 1986a.

PRESMEG, Norma. Visualisation in High School Mathematics. **For the learning of mathematics**, v.6, n. 3, p. 42-46, 1986b.

PRESMEG, Norma. A semiotic view of the role of imagery and inscriptions in mathematics teaching and learning. In: NOVOTNÁ, J.; MORAOVÁ, H.; KRÁTKÁ, M.; Stehlíková, N. (Eds.). **Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education – PME-30**, v. 1, Prague, p. 19-34, Jul. 2006a.

PRESMEG, Norma. Research on visualization in learning and teaching mathematics. In: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. (Eds.). **Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future**. Rotterdam: Sense. p. 205-236, 2006b.

RABARDEL, Pierre. **Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains**. Armand Colin, pp. 239, 1995. ([hal-01017462](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01017462))

RHODES, M. An Analysis of Creativity. **The Phi Delta Kappan**, vol. 42, n. 7, p. 305-310, 1961.

RÖSKEN, Bettina; ROLKA, Katrin. A picture is worth a 1000 words – the role of visualization in mathematics learning. In: NOVOTNÁ, J.; MORAOVÁ, H.; KRÁTKÁ, M.; Stehlíková, N. (Eds.). **Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** – PME-30, v. 1, Prague, p. 457-464, 2006.

RUNCO, M. Creativity as an Educational Objective for Disadvantaged Students. **The National Research Center on the Gifted and Talented**, 1993.

SERRAZINA, M. D. L. et al. Investigações matemáticas e profissionais na formação de professores. In: PONTE, J. P., et al. **Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. [S.l.]: [s.n.], 2002. p. 41-58.

SILVER, Edward A. On Mathematical problem posing. **For the learning of mathematics**, v.14, n. 1, p. 19-28, 1994.

SILVER, Edward A. Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, v. 29, n. 3, p. 75-80, 1997.

SINCLAIR, Nathalie et al. Geometry Education, Including the Use of New Technologies: A Survey of Recent Research. In: KAISER, G. (ed). **Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education**, ICME – 13, Hamburg: Springer Open, p. 277-287, 2017.

SINGER, F. M.; ELLERTON, N.; CAI, J. Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions. **Educational Studies in Mathematics**, v. 83, n.1, p. 1-7, 2013.

SOUZA, Bianca.; PINHO, José Luiz Rosas. Um problema de Geometria, Pontos Fixos, Pontos de Brocard e a Desigualdade de Erdős –Mordell. **Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina**, n. 8. Florianópolis: PET Matemática, p. 86-94, 2011. Disponível em: <http://www.orm.mtm.ufsc.br/revista.php>.

SPIVAK, Michael. **Calculus**. 2nd ed. Houston, USA: Publish or Perish, 1980.

STERNBERG, R. J. The Nature of Creativity. **Creativity Research Journal**, v. 18, n. 1, p. 87-98, 2006.

STORMOWSKI, Vandoir; GRAVINA, Maria Alice; LIMA, José Valdeni. Tecnologia na aula de matemática: a importância do potencial semiótico. **Novas Tecnologias na Educação**. CINTED-UFRGS. V. 11, n. 3, p. 1-10, dez. 2013.

THOM, René. “Modern” Mathematics: An Educational and Philosophical Error? In: TYMOCZKO, T. (ed.). **New directions in the philosophy of mathematics: An anthology**. New Jersey: Princeton University Press, p. 67-78, 1998.

VILLATE, J. E. **Introdução aos Sistemas Dinâmicos: Uma abordagem prática com Maxima**. Versão 1.2. Stanford, USA: Creative Commons, 2007.

VILLIERS, Michael de. Conjecturing, refuting and proving within the context of dynamic geometry. **Learning & Teaching Mathematics**, n. 17, p. 20-26, Dec. 2014.

WALLAS, Graham. **The Art of Thought**. Kent:Solis Press, 2014.

WEISBERG, R. W. *Creativity -Understanding Innovation in Problem Solving, Science, Invention, and the Arts*. New Jersey: John Wiley, 2006.

YEFIMOV, N. **A brief course in analytic geometry**. Moscou: Peace Publishers. 1964.