16

MEC - SEPS

SEEC – CETEPAR

PROJETO HAPRONT

MATEMÁTICA
Vol. 3

61

GOVERNO DO ESTADO DO PARANÁ
SECRETÁRIO DE ESTADO DA EDUCAÇÃO

CENTRO DE TREINAMENTO DO MAGISTÉRIO DO ESTADO DO PARANÁ

CETEPAR

Projeto *"HAPRONT"*

APRESENTAÇÃO

O Departamento de Ensino Fundamental do Ministério da Educação e Cultura tem como um dos seus objetivos prioritários, a implantação de uma política global de desenvolvimento de recursos humanos, através da qual pretende assegurar a melhoria da produtividade dos sistemas de ensino.

Nesse sentido, está promovendo a experimentação de um modelo curricular de habilitação de professores que se constitui em um instrumento de busca de melhores padrões para a formação profissional. Em resposta a uma realidade que desafia os meios do ensino convencionais, esse modelo adota uma metodologia de educação à distância, sendo veiculado por uma série de 250 módulos de ensino. Este é um dos módulos dessa série.

Cada módulo é uma unidade composta de:objetivos, pré-teste, procedimentos e atividades básicas, pós-teste; procedimentos e atividades de suporte, pós-teste;procedimentos e atividades de enriquecimento.

Os módulos são encaminhados aos professores - cursistas para serem estudados em seus locais de trabalho. Por esse processo deverão ser habilitados a nível de 2º grau, professores não titulados em exercício em classes de 1ª e 4ª séries.

SUBPROJETO 13.1 do Plano Setorial de Educação e Cultura 75/79: CAPACITAÇÃO DE RECURSOS HUMANOS para o Ensino de 1º grau - Código Orçamentário 4502.08.42.217.2.023.

O projeto está sendo executado pela Secretaria de Estado da Educação e Cultura do Paraná, através do Cetepar, com o nome de Projeto *"HAPRONT"* (Habilitação de Professores não titulados), em 11 municípios, atingindo 1.100 professores não titulados.

Os resultados alcançados nesta etapa permitirão, num futuro próximo, subsidiar outras U.F. na organização de cursos de habilitação pelo mesmo processo.

CIÊNCIAS

OPERANDO COM NÚMEROS

MÓDULO Nº 61

ELABORAÇÃO: CLÉLIA TAVARES MARTINS

TÍTULO - OPERANDO COM NUMEROS

I - ASSUNTO: REGRA DE TRÊS, PORCENTAGEM E JUROS.

II - MATÉRIA: CIÊNCIAS.

DISCIPLINA: MATEMÁTICA.

III - PRÉ-REQUISITOS: SABER EFETUAR OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS FRACIONÁRIOS E DECIMAIS. TER DOMINADO O CONTEÚDO DO MÓDULO 60.

IV - OBJETIVOS:

OBJETIVO GERAL

Utilizar procedimentos variados para a demonstração de fatos e propriedades.

OBJETIVO TERMINAL

Operar regras de três e com elas calcular porcentagem, juros e deduzir as fórmulas para tais cálculos.

OBJETIVOS OPERACIONALIZADOS

AO FINAL DESTE MÓDULO O CURSISTA DEVERÁ SER CAPAZ DE:

1. Armar proporções com grandezas direta e inversamente proporcionais;
2. Resolver problemas de regra de três: simples e composta;
3. Resolver problemas de porcentagem;
4. Resolver problemas de juros, cujo tempo é dado em anos, e/ou meses, e/ou dias.

V - PRÉ-TESTE

Antes de examinar o presente módulo, responda as perguntas deste Pré-Teste, como você já está acostumado a fazer.

Leia com atenção o enunciado das questões formuladas e, as responda, calmamente, sem medo de errar. Aceite o desafio com a mesma confiança com que enfrentou os testes dos módulos anteriores a este.

Boa sorte !

RESOLVA O PROBLEMA ABAIXO, APLICANDO A REGRA DE TRÊS.
MARQUE AS RESPOSTAS CORRETAS, COLOCANDO X NOS PARÊNTESES DAS QUESTÕES 1,2,3 e 4.

- Se 13 metros de fazenda custam Cr$ 357,50, quanto pagarei por 27 metros desse mesmo tecido ?

Dispondo os termos, resulta:

13 m ———————— Cr$ 357,50

27 m ———————— X

ASSINALE COM X, NO CARTÃO ABAIXO, AS RESPOSTAS DADAS ÀS QUESTÕES DO PRÉ-TESTE.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										

1. O VALOR DE X É :
   a.( ) Cr$ 642,50
   b.( ) Cr$ 7 425,00
   c.( ) 742,50
   d.( ) 74,25.

2. OS TERMOS RELATIVOS SÃO :
   a.( ) (13 ; Cr$ 357,50)
   b.( ) (27 ; X)
   c.( ) (27 ; 13)
   d.( ) (Cr$ 357,50 ; X).

3. A PROPORCIONALIDADE ENTRE AS RAZÕES É :
   a.( ) maior
   b.( ) menor
   c.( ) direta
   d.( ) inversa.

4. PARA DETERMINAR O VALOR DE X :
   a.( ) multipliquei os meios
   b.( ) multipliquei os extremos
   c.( ) multipliquei os meios e dividi pelos extremos
   d.( ) multipliquei os meios e dividi pelo extremo conhecido.

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, RESOLVA OS SEGUINTES PROBLEMAS ABAIXO: COLOQUE X NOS PARÊNTESES, PARA AS RESPOSTAS CORRETAS:

5. RESOLVA O PROBLEMA SEGUINTE, APLICANDO A REGRA DE TRÊS :

   - Quantos quilogramas de farinha de trigo seriam necessários para produzir 120 kg de pães, sabendo-se que 4kg de farinha produzem 5kg de pães ?

   Resposta: a.( ) 150kg b.( ) 130kg c.( ) 96kg d.( ) 160kg.

6. EFETUE O CÁLCULO DE PORCENTAGEM:

   - Se você tivesse de receber Cr$ 1 250,00 por serviços prestados e fossem descontados dessa importância 8% de imposto de renda, quanto lhe iria caber ?

   Resposta: a.( ) Cr$ 112,50 b.( ) Cr$ 1 150,00 c.( ) Cr$ 100,00 d.( ) Cr$ 1 125,00.

7. RESOLVA O SEGUINTE PROBLEMA :

   - Se 6 operários concluem em 24 dias um fosso de 18 metros de profundidade, quantos deles seriam precisos para concluir em 12 dias, 36 metros de igual obra ?

   Dispondo os termos, resulta :

op	d	m
6 ———	24 ———	18
X ———	12 ———	36

   a.( ) 20
   b.( ) 24
   c.( ) 21
   d.( ) 22

8. RESOLVA ESTE PROBLEMA DE JUROS:

- Quanto a importância de Cr$ 3 200,00 produzirá a juros, durante 3 anos, à taxa de 6,5% ao ano ?

Resposta: a.( ) Cr$ 624,00 b.( ) Cr$ 576,00 c.( ) Cr$ 6 240,00 d.( ) Cr$ 62,40.

9. RESOLVA:

- Quanto de juros renderá o capital de Cr$ 7 800,00, durante 3 anos e 4 meses, à taxa de 6% ao ano ?

Resposta: a.( ) Cr$ 1 092,00 b.( ) Cr$ 992,00 c.( ) Cr$ 1 192,00 d.( ) Cr$ 1 560,00

10. ASSINALE COM X, NOS PARÊNTESES CORRESPONDENTES, A FÓRMULA DO CÁLCULO DE JUROS, QUANDO O TEMPO É DADO EM MESES.

a.( ) $j = \dfrac{cim}{100}$ c.( ) $j = \dfrac{cim}{100 \times 12}$

b.( ) $j = \dfrac{cit}{12}$ d.( ) $j = \dfrac{cid}{360}$

GABARITO DO PRÉ-TESTE

No cartão abaixo estão marcadas com "X" as respostas às questões do Pré-Teste.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a								X		
b						X	X			
c	X		X		X					X
d		X		X					X	

VI - PROCEDIMENTOS E ATIVIDADES

ESTUDO DE REGRA DE TRÊS, PORCENTAGEM E JUROS

GRANDEZAS.

No módulo anterior comparamos grandezas e com elas, formamos razões. Depois, com duas razões iguais, formamos proporções. Neste módulo, que trata de Regra de Três, trabalharemos com proporções de razões iguais e, também, com proporções de razões inversas.

Grandezas, como velocidade e distância, velocidade e tempo, área e comprimento e largura, etc., dão-nos proporções formadas de razões inversas. É que as grandezas podem estar em razão direta ou inversa.

A - Grandezas diretamente proporcionais.

Quando duas grandezas variam segundo razões diretas, essas grandezas são diretamente proporcionais.

Vejamos, nos exemplos que seguem na página seguinte, razões formadas de grandezas diretamente proporcionais.

Exemplo I. 2 metros de morim custam Cr$ 30,00,
6 metros de morim custam Cr$ 90,00.

A razão entre as quantidades $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ e os preços da fazenda $\frac{30}{90} = \frac{1}{3}$ é a mesma. Assim, a quantidade e o preço pago pela mercadoria estão, podemos dizer, em relação direta entre si: mais fazenda, maior preço; menos fazenda, menor preço.

Exemplo II. 15 homens fazem, num dia, 57 cestos,
10 homens fazem, num dia, 38 cestos.

Na razão $\frac{15}{10}$ o 2º termo diminui.

Na razão $\frac{57}{38}$ o 2º termo também diminui.

Simplificando ambos os termos, resulta:

$$\frac{15}{10} = \frac{3}{2} \qquad \frac{57}{38}\,\frac{\div\ 19}{\div\ 19} = \frac{3}{2}$$

Como vemos, as razões são iguais.

DUAS GRANDEZAS SÃO DIRETAMENTE PROPORCIONAIS QUANDO O AUMENTO OU DIMINUIÇÃO DE UMA DELAS ACARRETA O AUMENTO OU DIMINUIÇÃO DA OUTRA, SEGUNDO A MESMA RAZÃO.

B - Grandezas inversamente proporcionais.

Quando duas grandezas variam segundo razões inversas, essas grandezas são inversamente proporcionais.

Exemplo I. Um automóvel, desenvolvendo uma velocidade de 50km/h, percorre certa distância em 6 horas. Se a velocidade média aumentar para 100km/h, a distância será vencida em 3 horas.

A razão que expressa a velocidade é $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

A razão que expressa o tempo é $\frac{6}{3} = 2$ ou $\frac{2}{1}$.

Velocidade e tempo são duas grandezas que variam em razão inversa: quanto maior a velocidade, menor o tempo para vencer determinado percurso.

Exemplo II. Um marceneiro constrói um armário em 18 dias, trabalhando 5 horas por dia. Para terminar a confecção desse móvel em 15 dias, trabalha 6 horas por dia.

18 d	5 h
15 d	6 h

1º razão — 2º razão

A razão $\frac{18}{15} = \frac{6}{5}$; $\frac{6}{5} \longrightarrow \frac{5}{6}$ são razões inversas.

DUAS GRANDEZAS SÃO INVERSAMENTE PROPORCIONAIS QUANDO O AUMENTO DE UMA ACARRETA A DIMINUIÇÃO DA OUTRA, SEGUNDO A RAZÃO INVERSA.

As considerações que acabamos de fazer, referindo-nos a grandezas, não são senão pré-requisitos para o conhecimento do assunto deste módulo. É que ao tratarmos de Regra de Três trabalharemos, como dis-

semos, com grandezas direta e inversamente proporcionais.

REGRA DE TRÊS

CONCEITO.

Denominamos Regra de Três ao método de resolução de problemas que envolvem duas grandezas proporcionais.

Dependendo das grandezas envolvidas, a proporcionalidade nos problemas pode ser direta ou inversa.

- Os dois elementos conhecidos, da primeira grandeza, são chamados principais;
- Os dois elementos, da segunda grandeza (um conhecido e outro desconhecido), são chamados relativos.

REGRA DE TRÊS DIRETA.

Quando a regra de três envolve duas grandezas diretamente proporcionais ela é chamada regra de três direta.

Vejamos, a seguir, dois exemplos de regra de três direta.

Exemplo I. - Se 4 caixas de bombons custam Cr$ 24,00, quanto custam 6 delas ?

Dispondo os termos, resulta:

Caixas		Cr$
4	————	24,00
6	————	X

4 e 6 são os termos principais ;

24,00 e X são os termos relativos.

Os termos principais formam uma razão e os relativos, outra.

Armando a proporção, temos:

$$\frac{4}{6} = \frac{24,00}{X} \qquad + \quad +$$

Neste exemplo o 2º termo de ambas as razões irá aumentar: mais bombons; maior preço. Aumentando o termo principal, aumentará o termo relativo. A proporcionalidade é direta.

Marcamos com o sinal da adição (+) as razões cujo 2º termo aumenta; e com o da subtração (-) aquelas cujo 2º termo diminui.

Resolvendo a proporção, resulta:

$$\frac{4}{6} = \frac{24,00}{X} \; ; \; 4X = 6 \times 24,00 \; ; \; X = \frac{\overset{6,00}{\cancel{24,00}} \times 6}{\underset{1}{\cancel{4}}} = 36,00$$

Resposta: 6 caixas de bombons custam Cr$ 36,00.

A explicação que acabamos de dar não lhe é difícil de entender, pois você já aprendeu no módulo anterior a armar e a trabalhar com proporções em que só usamos grandezas diretamente proporcionais.

Exemplo II. - Sabendo que 12 pratos de louça custam Cr$ 228,00, quanto custarão 5 deles ?

Dispondo os termos, resulta:

Pratos		Cr$
12	————	228,00
5	————	X

Armando a proporção, temos:

$$\frac{12}{5} \text{ e } \frac{228,00}{X}$$
$$- \quad -$$

Note que diminuindo o número de pratos, diminui também o preço. A proporcionalidade é direta.

Marcamos os dois termos (principal e relativo) com o sinal da subtração (-).

Resolvendo a proporção, resulta.

$$\frac{12}{5} = \frac{228,00}{X} \; ; \quad 12X = 5 \times 228,00 \; ; \; X = \frac{1\,140,00}{12} \; ; \quad X = \text{Cr\$ } 95,00$$

Resposta: Pagarei Cr$ 95,00 por 5 pratos de louça.

REGRA DE TRÊS INVERSA.

Quando a regra de três envolve duas grandezas inversamente proporcionais ela é chamada regra de três inversa.

Vejamos, a seguir, alguns exemplos de regra de três inversa.

Exemplo I. - Se 5 operários fazem em 18 dias determinada obra, 15 operários em quantos dias farão o mesmo serviço ?

Dispondo os termos, resulta:

op.		d.
5	————	18
15	————	X

Representando as duas razões, temos:

$$\frac{5}{15} \text{ e } \frac{18}{X}$$
$$+ \quad -$$

Como se trata de tarefa igual, aumentando o número de operários, diminuirá o tempo de realização do trabalho.

Marcamos com o sinal da adição (+) a razão cujo 2º termo aumenta e com o sinal da subtração (-), aquela cujo 2º termo diminui.

A proporcionalidade é inversa. A razão $\frac{18}{X}$ deve ser invertida e assim representada. $\frac{X}{18}$.

Armando a proporção e aplicando em sua resolução a propriedade fundamental das proporções, resulta:

$$\frac{5}{15} = \frac{X}{18} \; ; \; 15X = 5 \times 18 \; ; \; X = 90 \div 15 \; ; \; X = 6$$

Resposta: 15 homens farão a tarefa em 6 dias.

<u>Exemplo II</u> - Ester fez uma manta de tricô com 45 cm de largura e 1,80 m de comprimento. Se com a mesma lã ela tecesse uma manta com 36 cm de largura, qual seria o comprimento provável desta ?

Dispondo os termos, resulta:

larg.		comp.
0,45	———	1,80
0,36	———	X

Representando as duas razões, temos:

$$\frac{0,45}{0,36} \text{ e } \frac{1,80}{X}$$
$$- \qquad +$$

<u>Diminuindo</u> a largura <u>aumenta</u> o comprimento, pois a quantidade de lã é a mesma; <u>menos</u> largura, <u>mais</u> comprimento. A regra de três é inversa. A razão $\frac{1,80}{X}$ deve ser invertida e assim representada: $\frac{X}{1,80}$.

Marcamos, então com o sinal da adição (+) a razão cujo 2º termo <u>aumenta</u> e com o da subtração, (-) aquela cujo 2º termo <u>diminui</u>.

Armando e resolvendo a proporção, resulta:

$$\frac{0,45}{0,36} = \frac{X}{1,80} \; ; \; 0,36\,X = 0,45 \times 1,80 \; ; \; X = \frac{0,45 \times 1,80}{0,36} \; ; \; X = 2,25\text{m.}$$

Resposta: O comprimento provável da manta seria 2,25m.

<u>Exemplo III</u>. - Se 3 operários constroem um muro em 25 horas, 6 operários em quantas horas farão igual trabalho ?

Dispondo os termos, resulta:

Op.		h.
3	———	25
6	———	X

Representando as duas razões, temos:

op.		h.
$\frac{3}{6}$	e	$\frac{25}{X}$
+		-

Como se trata de tarefa igual, <u>aumentando</u> o número de operários, <u>diminuirá</u> o tempo de realização do trabalho. <u>Mais</u> operários, <u>menos</u> horas. A proporcionalidade é inversa. A razão $\frac{25}{X}$ deve ser invertida e assim representada: $\frac{X}{25}$.

Marcamos com o sinal da adição (+) a razão cujo 2º termo <u>aumenta</u> e com o da subtração (-) aquela cujo 2º termo <u>diminui</u>.

Armando e resolvendo a proporção, resulta:

$$\frac{3}{6} = \frac{X}{25} \; ; \; 6X = 3 \times 25 \; ; \; X = 75 \div 6 \; ;$$

```
7'5'h | 6
      |__________
 1 5    12h 30 min
 3 x 60'
 180'
  00
```

Resposta: 6 operários farão o trabalho em 12h 30min.

<u>NOTA</u>: *Releia no módulo "Grandezas Mensuráveis II" a parte referente ao "<u>Cálculo com números complexos</u>".*

REGRA PRÁTICA.

Para você não esquecer de inverter a fração, quando for o caso de proporcionalidade inversa, existe regra prática, por meio da qual a inversão é feita diretamente ligada ao cálculo.

Regra prática:

- Coloque os termos relativos sempre nesta disposição:

$$X = \frac{\text{relativo x ....}}{\text{............}}$$

- Se a regra de três é direta, disponha os termos principais do seguinte modo:

  - meio, sobre o traço;
  - extremo, debaixo do traço.

A fórmula resolutiva é, então : $x = \dfrac{\text{relativo x meio}}{\text{extremo}}$

- Se a regra de três é inversa, inverta, no traço, a colocação dos termos principais.

$$X = \frac{\text{relativo x extremo}}{\text{meio}}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Exercício 1

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, RESOLVA OS SEGUINTES PROBLEMAS:

a) Sabendo-se que 1 disco musical custa Cr\$ 45,00, quanto custam 6 deles ?

b) Se 5 metros de um tecido custam Cr\$ 140,00, quanto custam 9 metros dessa fazenda ?

c) Se 5 operários fazem 13 metros de muro numa semana, quantos metros fariam 8 operários nesse mesmo espaço de tempo ?

Exercício 2

a) Um automóvel cobriu determinado percurso em 5 horas de viagem, desenvolvendo uma velocidade média de 80 km/h. Para vencer essa mesma distância em 4 horas, qual seria a velocidade média necessária ?

b) Um grupo de 15 rapazes comprou alimentos necessários para uma excursão de 20 dias. Sabendo-se que 5 deles faltaram ao passeio, para quantos dias de excursão os participantes teriam alimentos ?

c) Um trabalhador realiza uma tarefa em 120 dias. Em quantos dias ele faria esse mesmo serviço com a ajuda de outros 2 operários ?

REGRA DE TRÊS COMPOSTA

Regra de três composta é o método de resolução de problemas que envolvem mais de duas grandezas proporcionais.

Vejamos os exemplos que seguem na página seguinte.

Exemplo I. - Numa Escola Infantil de Arte, 9 alunos elaboram, em 4 dias, 12 peças de cerâmica. Quantas peças iguais às modeladas 8 alunos fariam em 6 dias ?

Dispondo os termos, resulta :

al.	d.	p.
9	4	12
8	6	X

Temos agora como termos principais: alunos e dias: como termos relativos: peças.

Colocando no quadro a, abaixo, os termos principais (dias) e os termos relativos (peças), e no quadro b os termos principais (alunos) e os relativos (peças), podemos resolver o problema como se a e b fossem duas regras de três simples .

a)	b)
d. — p. 4 — 12 6 — X + + Se em 4 dias são feitas 12 peças, em mais dias serão feitas mais peças. Proporcionalidade direta.	al. — p. 9 — 12 8 — X - - Se 9 alunos fazem 12 peças, menos alunos farão menos peças. Proporcionalidade direta.

Como a proporcionalidade é direta, aplicando a regra prática, temos:

$$X = \frac{\text{relativo x meios}}{\text{extremos}} = \frac{12 \times 6 \times 8}{4 \times 9} = 16$$

Resposta: 8 alunos fariam em 6 dias 16 peças iguais.

Exemplo II. - Se 3 pedreiros concluem em 12 dias 9 metros de parede, quantos deles seriam precisos para em 6 dias erguer 18 metros de igual construção ?

Dispondo os termos, resulta:

op.	d.	m.
3	12	9
X	6	18

Temos agora como termos principais: dias e metros; como termos relativos: operários.

Colocando no quadro a, a seguir os termos principais (dias) e os termos relativos (pedreiros), e no quadro b os termos principais (metros) e os relativos (pedreiros), podemos resolver o problema como se a e b fossem duas regras de três simples.

a)

pd.	d.
3	12
X	6
+	-

Se 3 pedreiros fazem a obra em 12 dias, são precisos <u>mais</u> pedreiros para realizá-la em <u>menos</u> dias.

Proporcionalidade inversa.

b)

pd.	m.
3	9
X	18
+	+

Se são precisos 3 pedreiros para construir 9m de parede, para fazer <u>mais</u> são precisos <u>mais</u> pedreiros.

Proporcionalidade direta.

<u>NOTA</u>: - A razão $\frac{12}{6}$ deve ser invertida e assim representada: $\frac{6}{12}$, se você armar a proporção.

Como a 1ª regra de três é inversa, aplicando a regra prática, temos:

$$X = \frac{\text{relativo x extremo x meio}}{\text{meio x extremo}} = \frac{3 \times 12 \times 18}{6 \times 9} = 12$$

Resposta: Seriam precisos 12 pedreiros para erguer 18 metros de parede em 6 dias.

<u>Exemplo III</u>. - Para construir um prédio 30 operários trabalharam 8 horas por dia durante 60 dias. Quantos operários seriam necessários para realizar igual obra trabalhando 10 horas durante 45 dias ?

Dispondo os termos, resulta:

op.	h.	d.
30	8	60
X	10	45

Temos como termos <u>principais:</u> horas e dias; e como termos <u>relativos:</u> operários.

Colocando no quadro <u>a</u>, abaixo, os termos principais (horas) e os relativos (operários), e no quadro <u>b</u>, os termos principais (dias) e os relativos (operários) podemos resolver o problema como e <u>a</u> e <u>b</u> fossem duas <u>regras de três simples</u>.

a)

op.	h.
30	8
X	10
-	+

Se trabalhando 8 horas por dia 30 operários realizaram a obra, trabalhando <u>mais</u> horas por dia <u>menos</u> operários farão o mesmo trabalho.

Proporcionalidade inversa.

b)

op.	d.
30	60
X	45
+	-

Se em 60 dias 30 operários realizaram a obra, para fazê-la em <u>menos</u> dias serão precisos <u>mais</u> operários.

Proporcionalidade inversa.

<u>NOTA</u>: - As razões $\frac{8}{10}$ e $\frac{60}{45}$ devem ser invertidas e assim representadas. $\frac{10}{8}$ e $\frac{45}{60}$, se você armar a proporção.

Como as duas regras de três são inversas, aplicando a regra prática, temos:

$$x = \frac{\text{relativos x extremos}}{\text{meios}} = \frac{30 \times 8 \times 60}{10 \times 45} = \frac{14\ 400}{\ } = 32$$

Resposta: 32 operários farão igual obra em 45 dias, trabalhando 10 horas por dia.

OBSERVAÇÃO NECESSÁRIA. *Leia com atenção os três itens seguintes de esclarecimentos.*

a) Na "disposição dos termos", os relativos são repetidos para cada par de principais.

b) O termo relativo conhecido é, na fórmula resolutiva, tomado uma só vez como fator, sendo escrito sempre sobre o traço.

c) Nas regras de três diretas, são postos os meios sobre o traço e debaixo deste, os extremos.

Somente os termos inversamente proporcionais são escritos invertidos.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Exercício 3

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, RESOLVA OS PROBLEMAS ABAIXO:

a) Para uma concentração de 30 esportistas foram gastos Cr$ 12 000,00 em refeições, durante 8 dias. Qual seria a despesa de 20 esportistas, durante 15 dias, nas mesmas condições ?

b) Uma pessoa, viajando de automóvel 10 horas por dia, percorre 3 200 km em 6 dias. Quantas horas deveria viajar por dia para vencer 4 000 km em 5 dias ?

c) Um ciclista percorre 40 km em 10 horas, a uma velocidade média de 4 km/h. Em quantas horas faria um percurso de 30 km a uma velocidade média de 6 km/h ?

Exercício 4

a) Para alimentar 10 cavalos em 15 dias, Antonio dá-lhes 40 kg de alfafa. Havendo mais 5 cavalos, quantos quilogramas de alfafa, para 30 dias de alimentação, teria que lhes dar ?

b) Um ônibus, desenvolvendo uma velocidade média de 80 km/h, vence em 5 horas um trajeto de 400 km. Em quantas horas percorrerá 720 km, a uma velocidade média de 60 km/h ?

c) Se 7 caminhões transportam 2 100 m^3 de areia em 15 dias, trabalhando 8 horas por dia, quantos caminhões serão necessários para transportar 2 400 m^3 de areia em 10 dias, trabalhando 12 horas por dia ?

PORCENTAGEM

CONCEITO.

Para melhor compreensão do conceito de porcentagem, vejamos o exemplo que segue na página seguinte.

Exemplo I . - No transporte de 600 frutas, 5% delas estragaram-se . Quantas frutas foram aproveitadas ?

Estragaram-se em 100 frutas 5, e em

200 ——— 2 x 5 = 10
300 ——— 3 x 5 = 15
400 ——— 4 x 5 = 20
500 ——— 5 x 5 = 25
600 ——— 6 x 5 = 30

Se em cada 100 frutas estragaram-se 5 delas, em 600 frutas estragaram-se 30.

Aplicando a regra de três simples, temos:

100 f. ——————— 5 f.
600 f. ——————— X f.

$$X = \frac{6\cancel{00} \times 5}{1\cancel{00}} = 30$$

Resposta: No transporte estragaram-se 30 frutas.

O valor 30, como se observa neste problema, representa a quantidade tomada de outra (600), proporcionalmente a uma taxa centesimal (5%).

Também o cálculo da porcentagem, como se nota, não é senão resultante de uma regra de três direta.

O valor que representa a quantidade tomada de outra, proporcionalmente a uma taxa centesimal, é chamado porcentagem.
Sua denotação é %, que se lê: por cento.

Representação da porcentagem.

Os termos envolvidos nos problemas de porcentagem são denominados:

- porcentagem (p),
- taxa da porcentagem (i) e termo principal (P).

No exemplo dado, 5 é a taxa da porcentagem; 30, a porcentagem e 600, o termo principal.

Se nesse mesmo exemplo substituirmos os valores no cálculo da regra de três, pelos termos que eles estão representando, teremos a fórmula para achar a porcentagem. Assim sendo,

$$X = \frac{600 \times 5}{100} \quad \text{ou} \quad \boxed{p = \frac{P\ i}{100}}$$

Vejamos agora a aplicação dessa fórmula no problema do exemplo imediato.

Exemplo II. - Celso gastou em compras a importância de Cr$ 400,00. Como a despesa foi paga à vista, houve um desconto de 10%. Quanto ele pagou pelas mercadorias adquiridas ?

$$p = \frac{P\ i}{100} = \frac{400 \times 10}{100} = 40$$

Cr$ 400,00 - Cr$ 40,00 = Cr$ 360,00

Resposta: pagou Cr$ 360,00 pelas mercadorias.

Voltemos à aplicação da regra de tres simples nos problemas dos dois exemplos sobre porcentagem e taxa da porcentagem.

Exemplo III. - Sabe-se que Cr$ 350,00 é o valor da mensalidade do colégio onde Luís estuda e 15% é a taxa de multa cobrada quando essa mensalidade é paga com atraso. Que importância total Luís pagou neste mês em que foi multado ?

Aplicando a regra de três direta, temos:

$$100 \text{ ——— } 15 \qquad X = \frac{15 \times 350}{100} = \frac{105}{2} = 52{,}50$$

$$350 \text{ ——— } X$$

Cr$ 350,00 + Cr$ 52,50 = Cr$ 402,50

Resposta: Luís pagou Cr$ 402,50, quantia que corresponde a Cr$ 350,00 de mensalidade mais Cr$ 52,50 de taxa de multa.

Em alguns casos, a porcentagem é, como vemos, uma taxa a descontar, e em outros, uma taxa a acrescentar.

Exemplo IV. - Paulo devia a uma loja a quantia de Cr$ 500,00 e teve de pagar Cr$ 530,00 por se atrasar na quitação dessa dívida. Quanto pagou a mais e que taxa foi aplicada ao seu débito ?

Pagou a mais: Cr$ 530,00 - Cr$ 500,00 = Cr$ 30,00

Armando e resolvendo a regra de três direta para saber a taxa, resulta:

$$500{,}00 \text{ ——— } 30{,}00$$

$$100 \text{ ——— } X \qquad X = \frac{100 \times 30{,}00}{500{,}00} = 6\%$$

Resposta: Paulo pagou a mais Cr$ 30,00, quantia que corresponde a uma taxa de 6%.

Representação da taxa.

No exemplo anterior calculamos a taxa por meio da regra de três. Note agora que trocando os valores aplicados nesse cálculo pelos termos que estão representando no problema, você obterá a fórmula para o cálculo da taxa.

$$X = \frac{100 \times 30{,}00}{500{,}00} \quad \text{ou} \quad \boxed{i = \frac{100 \times p}{P}}$$

Com esta, é a segunda fórmula que conhecemos.

1ª $\boxed{p = \frac{P\ i}{100}}$ 2ª $\boxed{i = \frac{100\ p}{P}}$

Representação do termos principal.

Conhecendo a relação entre os termos da divisão, resulta a terceira fórmula, onde 100 p é o dividendo e i e P são o divisor e o quociente, respectivamente:

3ª $\boxed{P = \frac{100\ p}{i}}$

Exemplo V. - Qual é o preço de um objeto que com 5% de desconto teve um abatimento de Cr$ 65,00 ?

Aplicando a fórmula, temos:

$$P = \frac{100\ p}{i} \quad \text{ou} \quad X = \frac{100 \times 65{,}00}{5} = \text{Cr\$ } 1\ 300{,}00$$

Resposta: O objeto custa Cr$ 1 300,00.

NOTA - *No módulo 9.3 insistimos no relacionamento dos termos das operações, principalmente entre os da divisão. É que a todo momento usamos a relação entre dividendo, divisor e quociente.*

No presente módulo aplicamos a relação dos termos da divisão à fórmula da porcentagem, fórmula da qual chegamos às da taxa (i) e termo principal (P). Assim também aplicaremos, páginas adiante, a relação dos termos da divisão à fórmula de juros, e desta deduziremos as fórmulas de capital, taxa e tempo.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Exercício 5

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, COMPLETE OS EXERCÍCIOS QUE SEGUEM COM OS RESULTADOS DOS CÁLCULOS EFETUADOS:

a) 5% de Cr$ 84,00 = _____________

b) 66% de Cr$ 38,50 = ____________

c) 15% de __________ = Cr$ 108,00.

d) 0,2% de 920 = ____________

e) 43% de ________ = 347,1

Exercício 6

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, RESOLVA OS SEGUINTES PROBLEMAS:

a) Ao pagar uma conta no valor de Cr$ 420,00, José obteve um abatimento de 6% sobre essa importância. Quanto pagou ?

b) Márcia obteve um abatimento de 18% no pagamento à vista de uma máquina de lavar roupas, no valor de Cr$ 12 000,00. Quanto lhe custou esse eletro-doméstico ?

c) Quanto custará, se for pago à vista e com um desconto de 15%, um fogão no valor de Cr$ 2 000,00.

Exercício 7

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, EFETUE OS CÁLCULOS QUE SEGUEM:

a) A importância de Cr$ 240,00 corresponde a 15% de que quantia ?

b) A quantia de Cr% 450,00 corresponde a quanto por cento de Cr$ 15.000,00 ?

c) Numa classe de 40 alunos faltaram 10. Quais as porcentagens de freqüência e ausência ?

CONCEITO.

O ganho, lucro ou renda proporcinado pelo dinheiro objeto de dívida, ou dinheiro dado ou tomado de empréstimo ou depositado em bancos e estabelecimentos conexos, recebe o nome de juros.

Uma pessoa (credor) que possua certa quantia (capital) pode cedê-la de empréstimo a outra pessoa (devedor) num tempo determinado, recebendo o credor, ao fim desse tempo, além da quantia emprestada, um benefício chamado juro, que representa o preço do aluguel do dinheiro. O preço que o devedor se compromete a pagar pelo aluguel do dinheiro é determinado pela taxa percentual. O prazo do empréstimo é estipulado em anos, meses ou dias.

JUROS SÃO, POIS, OS RENDIMENTOS QUE UM CAPITAL PRODUZ EM TEMPO DETERMINADO, A UMA TAXA ESTIPULADA.

São as seguintes as grandezas envolvidas no cálculo de juros.

- capital	(c)	:	quantia cedida ou empregada;
- juro	(j)	:	compensação financeira;
- taxa	(i)	:	taxa de porcentagem a ser paga;
- tempo	(t)	:	tempo durante o qual o capital é empregado.

Aplicados nas operações a curto prazo, os juros simples são os mais usados nas transações comerciais.

JUROS SIMPLES SÃO AQUELES CONTADOS APENAS SOBRE O CAPITAL, NÃO INCIDINDO SOBRE JUROS CAPITALIZADOS.

Juros e Regra de Três

Os problemas de juros podem ser resolvidos por meio de regra de três composta e direta.

As grandezas empregadas (capital, tempo, taxa) são diretamente proporcionais. Por isso é que dão regra de três direta.

Vejamos a aplicação da regra de três no exemplo que segue.

Exemplo I. - Qual é o juro que resulta de Cr$ 600,00 no prazo de 2 anos, à taxa de 12% ao ano ?

Se 100	rende	12	em	1 ano,
600,00	rende	X	em	2 anos.
+				+

Aumentando o capital aumenta o juro;

aumentando o tempo , aumenta o juro.

Apliquemos, então, na página seguinte, a regra prática:

$$X = \frac{\text{relativo x meios}}{\text{extremos}} = \frac{12 \times 600{,}00 \times 2}{100 \times 1} = 144{,}00$$

Como você já sabe, os termos ficam sempre dispostos da mesma maneira, pois a regra de três, aplicada ao cálculo de juros, é sempre direta.

Substituindo, agora, os numerais pelos termos que eles representam, temos a fórmula de juros:

12% é a taxa ⟶ i

Cr$ 600,00 é o capital ⟶ c

2 anos, o tempo ⟶ t

X, o juro ou quantia a calcular ⟶ j

$$X = \frac{12 \times 600{,}00 \times 2}{100 \times 1} = 144{,}00 \Leftrightarrow j = \frac{i \times c \times t}{100 \times 1} \text{ ou } \boxed{j = \frac{cit}{100}}$$

<u>Exemplo II</u>. - Quanto o capital Cr$ 3 600,00 rendeu de juros em 3 anos e 6 meses, à taxa de 4,5% ao ano ?

Transformando o número complexo em meses, temos:

3 anos ⟶ 3 x 12 = 36 meses

36 meses + 6 meses = 42 meses.

$\frac{42}{12}$ é a fração que deve representar o tempo, pois se aplicarmos apenas 42 à fórmula, o tempo passa a ser 42 anos. O denominador 12 é colocado para significar que o tempo é dado em meses.

Verifiquemos:

$$\begin{array}{r|l} 42\text{m} & 12 \\ -36 & \text{3 anos} \\ \hline 6\text{m} & \end{array}$$

42 m = 3 anos e 6 meses.

Sublinhado esse pormenor, apliquemos então a fórmula já conhecida sua:

$$j = \frac{cit}{100} = \frac{3\,600{,}00 \times 4{,}5}{100} \times \frac{42}{12} \text{ ou}$$

$$\frac{\overset{3{,}00}{\cancel{3\,600{,}00}} \times 4{,}5 \times 42}{\underset{1}{\cancel{100}} \times \underset{1}{\cancel{12}}} = \text{Cr\$ } 567{,}00$$

Resposta: O capital Cr$ 3 600,00 produziu Cr$ 567,00 de juros.

- Quando o tempo é dado em anos, meses e <u>dias</u>, convertemos o número complexo em fração de dias $(\frac{\text{dias}}{360})$ e em seguida aplicamos a fórmula de juros.

<u>Exemplo III</u>. - Quanto renderá de juros a quantia de Cr$ 6 000,00, no prazo de 6 meses e 15 dias, à taxa de 6% ao ano ?

Transformando o número complexo em <u>dias</u>, temos:

6m x 30d = 180 d

180d + 15d = 195 d

$\frac{195}{360}$ é a fração do tempo.

$$j = \frac{cit}{100} = \frac{6\ 000{,}00 \times 6}{100} \times \frac{195}{360} = \frac{\overset{1{,}00}{\cancel{6\ 000{,}00}} \times \overset{1}{\cancel{6}} \times 195}{\cancel{100} \times \underset{\overset{\cancel{6}}{1}}{\cancel{360}}} \quad Cr\$\ 195{,}00$$

Resposta: O capital aplicado renderá Cr$ 195,00 de juros.

NOTA:

- Se o tempo for dado em anos, deve ser colocado diretamente na fórmula;
- Se ele for dado em anos e meses deve ser convertido em meses e escrito em forma fracionária com o denominador 12 para ser aplicado na fórmula;
- Se ele for dado em meses e dias, a fração que o expressará terá por numerador o número de dias e por denominador 360, para ser colocado na fórmula.

Para recapitular, vejamos, ainda, os exemplos que seguem.

Exemplo IV. - Quanto rendeu de juros o capital Cr$ 20 000,00, no prazo de 2 anos, à taxa de 7% ao ano ?

c = Cr$ 20 000,00

t = 2 anos

i = 7%

j = X

$$j = \frac{cit}{100} = \frac{\overset{200{,}00}{\cancel{20\ 000{,}00}} \times 2 \times 7}{\cancel{100}} = Cr\$\ 2\ 800{,}00$$

Resposta: O capital aplicado produziu de juros a quantia de Cr$ 2 800,00.

Exemplo V. - Quanto renderá de juros Cr$ 5 000,00, no prazo de 1 ano e 6 meses, à taxa de 5% ao ano ?

c = Cr$ 5 000,00

i = 5%

t = 18m

j = X

$$j = \frac{ci}{100} \times \frac{m}{12} = \frac{\overset{2\ 5{,}00}{\cancel{5\ 000\ 00}} \times 5 \times \overset{\overset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{18}}}{\cancel{100} \times \underset{\underset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{12}}} = Cr\$\ 375{,}00$$

Resposta: Renderá Cr$ 375,00 de juros.

Exemplo VI. - A 13 de março, José tomou de empréstimo Cr$ 3 000,00 e efetuou o pagamento dessa quantia a 10 de maio do mesmo ano. Quanto pagou de juros à taxa de 12% ?

Contando o número de dias, temos:

13/3 a 31/3 = 18 dias

Abril ——— = 30 dias

Maio ——— = 10 dias

Nº de dias —— = 58 dias

$\frac{58\ \text{dias}}{360\ \text{dias}}$ (tempo expresso em dias).

$$j = \frac{ci}{100} \times \frac{d}{360} = \frac{\overset{1{,}00}{\cancel{3.000{,}00}} \times \overset{1}{\cancel{12}} \times 58}{\cancel{100} \times \underset{\underset{1}{\cancel{3}}}{360}} = Cr\$\ \ 58{,}00$$

Resposta: José pagou Cr$ 58,00 de juros pelo empréstimo contraído.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Exercício 8

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, CALCULE OS JUROS PRODUZIDOS POR:

a) Cr$ 900,00, no prazo de 4 anos, à taxa de 6% ao ano.

Resposta: ______________________________

b) Cr$ 1 400,00, no prazo de 3 anos, a 5% ao ano.

Resposta: ______________________________

c) Cr$ 1 600,00, no prazo de 2 anos e 3 meses, à taxa de 7% ao ano.

Resposta: ______________________________

Exercício 9

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, CALCULE OS JUROS QUE RENDERAM:

a) Cr$ 7.200,00, no prazo de 3 anos e 6 meses, à taxa de 5% ao ano.

Resposta: ______________________________

b) Cr$ 4 500,00, no prazo de 6 meses e 15 dias, à taxa de 12% ao ano.

Resposta: ______________________________

c) Cr$ 12 600,00, no prazo de 3 meses e 10 dias, à taxa de 10% ao ano.

Resposta: ______________________________

VII - PÓS-TESTE

O propósito deste Pós-Teste é a verificação do seu aproveitamento sobre o assunto do presente módulo.

Se você estudou com vontade e interesse e realizou todas as atividades aqui propostas, tendo dominado os objetivos estabelecidos, então está em condições de se sair bem neste teste.

Entretanto, se tem ainda algumas dúvidas, reveja os pontos principais do módulo e depois se submeta ao Pós-Teste.

Agora, leia atentamente as questões que seguem e dê as respostas às perguntas formuladas.

Faça os cálculos nas folhas em branco no final do módulo.

COLOQUE "X" NOS PARÊNTESES, PARA AS RESPOSTAS CORRETAS.

1. Um automóvel, desenvolvendo uma velocidade média de 60 km/h, percorreu certa distância em 4 horas. Qual o tempo que levará para cobrir o mesmo trajeto, a uma velocidade média de 90 km/h ?

Dispondo os termos, resulta:

km/h		h
60	________	4
90	________	x

Resposta: a.( ) 3h   c.( ) 2h 40 min

b.( ) 2h 30min   d.( ) 3h 30 min

2. INDIQUE AS GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS:

a.( ) quantidade e volume
b.( ) quantidade e quantia
c.( ) pressão e volume
d.( ) velocidade e distância.

3. PELA FÓRMULA $X = \frac{\text{relativo conhecido x meio}}{\text{extremo}}$, SEM MODIFICAÇÕES, SÃO RESOLVIDOS PROBLEMAS DE REGRA DE TRÊS:

a.( ) direta
b.( ) inversa
c.( ) direta e inversa
d.( ) nenhuma.

4. INDIQUE OS TERMOS PRINCIPAIS DO SEGUINTE PROBLEMA:

- Se 12 pratos custam Cr$ 228,00, quanto custarão 5 deles ?

a.( ) (12 e Cr$ 228,00)
b.( ) (12 e 5)
c.( ) (Cr$ 228,00 e X)
d.( ) (12 e X).

5. MARTA FEZ VÁRIAS ROSETAS DE CROCHÊ PARA UMA COLCHA. SE ELA EMENDAR 18 ROSETAS NA LARGURA, FICARÁ COM 40 ROSETAS NO COMPRIMENTO. SE PUSER 20 ROSETAS NA LARGURA, QUANTAS TERÁ NO COMPRIMENTO ?

Dispondo os termos, resulta:

larg.		comp.
18	————————	40
20	————————	X

a.( ) 32
b.( ) 34
c.( ) 36
d.( ) 38.

6. ROSA COMPROU UMA COLCHA NO VALOR DE Cr$ 220,00 COM UM ABATIMENTO DE 15%. QUANTO PAGOU PELA MERCADORIA ?

a.( ) Cr$ 33,00
b.( ) Cr$ 187,00
c.( ) Cr$ 220,00
d.( ) Cr$ 253,00

7. NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, CALCULE A TAXA APLICADA A Cr$ 720,00, PARA RESULTAR UMA PORCENTAGEM CORRESPONDENTE A Cr$ 43,20.

a.( ) 7%
b.( ) 6,6%
c.( ) 5,5%
d.( ) 6%

8. QUANTO RENDEU DE JUROS A QUANTIA DE Cr$ 20 000,00, NO PRAZO DE 3 ANOS, À TAXA DE 7% AO ANO ?

a.( ) Cr$ 4 200,00
b.( ) Cr$ 4 000,00
c.( ) Cr$ 420,00
d.( ) Cr$ 400,00

9. QUAIS OS JUROS QUE Cr$ 3 200,00 PRODUZIU EM 2 ANOS E 3 MESES, A 7% AO ANO ?

a.( ) Cr$ 525,00
b.( ) Cr% 225,00
c.( ) Cr$ 504,00
d.( ) Cr$ 25,50

10. QUAIS SÃO OS TERMOS QUE ENTRAM NO CÁLCULO DE JUROS ?

a.( ) principal, porcentagem e taxa
b.( ) capital, taxa e juros
c.( ) capital, porcentagem e taxa
d.( ) capital, taxa e tempo.

MARQUE COM "X", NO CARTÃO ABAIXO, AS RESPOSTAS DADAS ÀS QUESTÕES DO PÓS-TESTE.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										

VIII - PROCEDIMENTOS E ATIVIDADES - NÍVEL DE SUPORTE

Em módulo anterior tratamos de razões e proporções, distinguindo razões iguais e inversas.

No presente módulo já discorremos sobre grandezas direta e inversamente proporcionais, assunto que, para a sua melhor compreensão, revisaremos neste capítulo.

GRANDEZAS.

Vejamos no quadro seguinte algumas grandezas diretamente proporcionais:

GRANDEZAS	PROPORCIONALIDADE DIRETA	
Mercadorias Preços	mais mercadorias maior preço	menos mercadorias menor preço
Operários Produção	mais operários maior produção	menos operários menor produção
Tempo Produção	mais tempo maior produção	menos tempo menor produção
Velocidade Distância	mais velocidade maior distância	menos velocidade menor distância
Massa Volume	mais massa maior volume	menos massa menor volume

DUAS GRANDEZAS SÃO DIRETAMENTE PROPORCIONAIS QUANDO O AUMENTO OU DIMINUIÇÃO DE UMA DELAS ACARRETA O AUMENTO OU DIMINUIÇÃO DE OUTRA, SEGUNDO A MESMA RAZÃO.

Destaquemos a seguir, algmas grandezas inversamente proporcionais:

GRANDEZAS	PROPORCIONALIDADE INVERSA	
Velocidade Tempo	mais velocidade menos tempo	menos velocidade mais tempo
Pressão Volume	maior pressão menor volume	menor pressão maior volume
Operários Tempo	mais operários menos rempo	menos operários mais tempo

DUAS GRANDEZAS SÃO INVERSAMENTE PROPORCIONAIS QUANDO O AUMENTO DE UMA ACARRETA A DIMINUIÇÃO DE OUTRA, SEGUNDO A RAZÃO INVERSA.

REGRA DE TRÊS

Regra de Três é o método de resolução de problemas que envolvem duas grandezas proporcionais.

Dependendo das grandezas envolvidas, a proporcionalidade pode ser: direta ou inversa.

TERMOS:

Os termos da regra de três são chamados principais e relativos.

Os dois elementos conhecidos da 1ª grandeza são os termos principais.

Os dois elementos da 2ª grandeza, um conhecido e outro desconhecido, são os termos relativos.

Exemplo I. 4 baldes custam Cr$ 112,00

9 baldes custam X

Termos principais: (4 e 9)

Termos relativos: (Cr$ 112,00 e X).

Lendo com atenção o enunciado de um problema de regra de três, podemos deduzir o que sucede ao termo relativo quando o valor do termo principal aumenta ou diminui.

Vejamos nos exemplos I,II e III.

Exemplo I.

- Se 4 baldes custam Cr$ 112,00,
  9 baldes custam X
  \+ +

Aumentando o número de baldes, também aumenta o preço dos mesmos.

Marcamos com o sinal de adição (+) os termos principais e relativos.

Exemplo II.

- Se 9 ℓ de leite custam Cr$ 27,00,
  4 ℓ de leite custam X
  \- \-

Diminuindo a quantidade, diminui o preço. O valor de X diminui

Marcamos com o sinal de subtração (-) os termos principais e relativos.

Exemplo III.

- José colocou sobre a mesa um punhado de fichas e arrumou-as em 4 linhas e 9 colunas, como no desenho a, abaixo:

a

4 linhas

000000000
000000000
000000000
000000000

9 colunas

b

6 linhas

0
0
0
0
0
0

? colunas

Se ele dispusesse essas fichas em 6 linhas, como no desenho b, acima, quantas colunas obteria ?

lin.	col.
4	9
6	X
+	-

Aumentando o número de linhas, diminui o número de colunas.

Mais linhas, menos colunas.

Marcamos com o sinal de adição (+) os termos principais e com o de subtração (-), os termos relativos.

RECURSO PRÁTICO.

Para resolver problemas de regra de três (direta ou inversa) pode ser aplicado o esquema prático que, a seguir, lhe damos a conhecer. Trata-se de dispositivc usado quando não se tem segurança em reconhecer "meios e extremos" ou representar as razões diretas ou inversas.

Passemos a esse preceito..

- Coloque sempre o termo relativo conhecido sobre o traço de fração.

$$X = \frac{\text{relativo conhecido} \ \times \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$$

- Se na disposição dos termos o valor de X estiver marcado com o sinal de adição (+), coloque também sobre o traço de fração o termo principal maior para ser multiplicado pelo relativo conhecido. O principal menor é posto sob o traço de fração.

$$\boxed{X = \frac{\text{relativo conhecido} \times \text{principal maior}}{\text{principal menor}}}$$

- Se o valor de X estiver marcado com o sinal de subtração (-), disponha sobre o traço de fração o termo principal menor para ser multiplicado pelo relativo conhecido. O principal maior é posto sob o traço de fração.

$$X = \frac{\text{relativo conhecido x principal menor}}{\text{principal maior}}$$

Aplicação do Recurso Prático.

Observe agora a aplicação do esquema prático na resolução dos problemas seguintes de regra de três simples.

Exemplo I. - Um automóvel percorreu certa distância em 4 horas, a uma velocidade média de 60 km/h. Que tempo levará para cobrir o mesmo trajeto, a uma velocidade média de 90 km/h ?

Dispondo os termos, resulta:

h	km/h
4	60
X	90
-	+

Mais velocidade, menos tempo. Marcamos sob X o sinal de subtração (-).

Aplicando o esquema, temos:

$$X = \frac{\text{relativo conhecido x principal menor}}{\text{principal maior}}$$

Substituindo os termos pelos seus valores, obtemos:

$$X = \frac{4 \times 60}{90} = \frac{240}{90} = \frac{24}{9} = \text{2h 40min}$$

Resposta: O automóvel fará o mesmo percurso em 2h 40min.

Exemplo II. - Se 4 cadeiras custam Cr$ 227,20,
9 cadeiras custam X
+ +

Mais mercadorias, maior valor. Colocamos o sinal de adição(+) sob o X.

Aplicando o dispositivo, temos:

$$X = \frac{\text{relativo conhecido x principal maior}}{\text{principal menor}}$$

Substituindo os termos pelos seus valores, provém:

$$X = \frac{227{,}20 \times 9}{4} = \text{Cr\$ } 511{,}20$$

Resposta: 9 cadeiras custam Cr$ 511,20.

Recurso e Regra de Três Composta.

Vejamos agora a aplicação do recurso prático na resolução de problemas de regra de três composta.

Exemplo I. - Júlio pagou à companhia de energia elétrica a importância de Cr$ 360,00 pelo consumo de luz resultante de 5 lâmpadas acesas durante 300 horas. Quanto ele pagaria pelo consumo de energia resultante de 8 focos idênticos, acesos durante 420 horas ?

Dispondo os termos, provém:

f	h	Cr$
5 ———	300 ———	360,00
8 ———	420 ———	X

Separando os termos em duas regras de três simples, resulta:

a)		b)	
h	Cr$	f	Cr$
300 ———	360,00	5	360,00
420 ———	X	8	X
+	+	+	+
Mais horas acesos, maior despesa.		Mais focos, maior despesa.	

Colocamos o sinal de adição (+) sob ambos os X.

Aplicando o preceito prático, temos:

$$\boxed{X = \frac{\text{relat.conh. x princ.maior x princ. maior}}{\text{princ. menor x princ. menor}}}$$

Substituindo os termos pelos seus valores, advém:

$$X = \frac{360,00 \times 420 \times 8}{300 \times 5} = \text{Cr\$}\ \ 806,40$$

Resposta: Pagaria Cr$ 806,40 pelo consumo de luz.

Exemplo II. - Se 3 pedreiros concluem em 12 dias 9 metros de parede, quantos deles seriam necessários para em 6 dias construir 18 metros de igual obra ?

p	d	m
3 ———	12 ———	9
X ———	6 ———	18

Separando os termos em duas regras de três simples, temos:

a)		b)	
p	d	p	m
3	12	3	9
X	6	X	18
+	-	+	+
Em menos dias, mais pedreiros		Para mais metros, mais pedreiros.	

Colocamos o sinal da adição (+) sob ambos os X.

Aplicando o recurso prático, temos:

$$X = \frac{\text{relat.conh. x princ.maior x princ.maior}}{\text{princ. menor x princ. menor}}$$

Substituindo os termos pelos seus valores, resulta:

$$X = \frac{3 \times 12 \times 18}{6 \times 9} = 12$$

Resposta: Seriam necessários 12 pedreiros para construir o dobro da obra na metade do tempo.

NOTA: *Refaça os exercícios dos exemplos dados, usando o dispositivo de que tratamos. E para variar tais exercícios, procure em livros da 6ª ou 7ª séries problemas idênticos.*

PORCENTAGEM

CÁLCULO DA PORCENTAGEM.

Para o cálculo da porcentagem, pode ser usado o seguinte recurso prático: converter a taxa em fração decimal e resolver o problema dado como se fosse de fração decimal.

Exemplo I. - Para pagar o transporte da soja que colheu, um agricultor deu a uma empresa transportadora 6% de 3 450 kg do produto. Quantos quilogramas de soja recebeu a transportadora em pagamento do frete ?

$$6\% \Longleftrightarrow \frac{6}{100}$$

Lembre-se: $\frac{6}{100}$ $\begin{array}{l} \longrightarrow \text{partes tomadas} \\ \longrightarrow \text{partes do todo} \end{array}$

Logo, $\frac{6}{100}$ de $3\ 450 = \frac{6 \times 3\ 450}{100} = \frac{20\ 700}{100} = 207$

Resposta: A transportadora recebeu pelo frete 207 kg de soja.

NOTA: *Releia no módulo 37., à pág. 39., a parte referente à "Multiplicação de Fração por Número Natural".*

Exemplo II. - No plantio de 2 400 mudas de pinho, 4% delas não vingaram. Quantas mudas se perderam ?

$$\frac{4}{100} \text{ de } 2\ 400 = \frac{4 \times 2\ 400}{100} = 96$$

Resposta: Perderam-se 96 mudas de pinho.

CÁLCULO DA TAXA E DO TERMO PRINCIPAL.

Para calcular a taxa ou o termo principal você pode adotar o mesmo recurso prático usado no cálculo da porcentagem.

Observe nos problemas que seguem na página seguinte.

Exemplo I. - Um pecuarista vendeu 595 bois dos 4·250 que possuía. Que percentual de bois foi vendido ?

$$\frac{\square}{100} \text{ de } 4\,250 = 595 \Longleftrightarrow \frac{\square}{100} \times \frac{4\,250}{1} = 595$$

$$595 \Longleftrightarrow \frac{4250\,\square}{100} = 595$$

Lembre-se : $\dfrac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{quociente}$

Logo, dividendo = quociente x divisor.

$4\,250\ \square = 595 \times 100$

$\square = 59\,500 : 4\,250$

$\square = 14$

```
5 9 5 0'0' | 4 250
1 7 0 0 0    14
  0 0 0 0
```

Resposta: O fazendeiro vendeu 14% dos seus bois.

Exemplo II. - No colégio onde Luís estuda foram reprovados, neste ano, 36 estudantes, isto é, 8% dos matriculados. Qual é o total de alunos do colégio ?

$$\frac{8}{100} \text{ de } \square = 36 \Longleftrightarrow \frac{8 \times \square}{100} = 36$$

Relação: dividendo = divisor x quociente.

$8\,\square = 36 \times 100$

$\square = \dfrac{3600}{8}$

$\square = 450$

Resposta: O colégio tem 450 alunos matriculados.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Exercício 10

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, RESOLVA OS SEGUINTES PROBLEMAS:

Dos 2 500 pés de café do sítio de Lauro, 18% foram prejudicados pelas últimas geadas. Quantos pés de café deixaram de frutificar neste ano ?

Exercício 11

Ricardo adquiriu um objeto no valor de Cr\$ 320,00 e ao pagá-lo à vista obteve um abatimento de 8% sobre esse valor. Quanto pagou pelo objeto ?

Exercício 12

Antônio ganha 4% de comissão sobre determinado produto que vende. Neste mês, em que ganhou Cr\$ 960,00, qual foi o valor total de suas vendas ?

Exercício 13

Sabendo-se que das 3 500 frutas da quitanda de João, 245 deterioraram-se, qual foi a porcentagem de frutas estragadas ?

Exercício 14

Das 275 crianças do educandário em que Lígia estuda, 8% faltaram ontem às aulas. Qual foi a freqüência do dia de ontem ?

Exercício 15

Se 344 litros de vinho representam 43% da produção de uma pequena fábrica vinícola, quantos litros de vinho ela produziu ?

JUROS SIMPLES

CÁLCULO DE JUROS

Cremos que o assunto referente ao cálculo de juros não lhe constitui, por ser de fácil domínio, motivo de embaraços na realização dos testes aqui exigidos. Entretanto, para que você compreenda e fixe os conhecimentos que já adquiriu sobre a matéria, apresentaremos, a seguir, mais alguns exercícios, agora de treinamento do uso das fórmulas na resolução de problemas. Antes, porém, lembremos tais fórmulas:

$$\boxed{j = \frac{cit}{100}} \qquad \boxed{j = \frac{cim}{100 \times 12}} \qquad \boxed{j = \frac{cid}{100 \times 360}}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Exercício 16

Quanto renderá de juros a importância de Cr$ 560,00, durante 3 anos, aplicada à taxa de 6% ao ano ?

Exercício 17

Calcule os juros produzidos por Cr$ 9 000,00, durante 4 anos e 3 meses, à taxa de 5,5% ao ano.

Exercício 18

Em 16 de maio, Rute tomou de empréstimo a quantia de Cr$ 3.600,00 e, meses após, isto é, a 20 de setembro do mesmo ano, saldou esse débito à taxa de 5%. Quanto pagou de juros ?

Exercício 19

A aplicação de um capital de Cr$ 20 000,00 quanto produziria de juros, em 2 anos e meio, à taxa de 7% ao ano ?

Exercício 20

Quanto rendeu de juros a importância de Cr$ 4 200,00 que Marcos aplicou em carteira de poupança, durante 9 meses, à taxa de 6% ao ano ?

IX - PÓS-TESTE - NÍVEL DE SUPORTE

Realize o presente teste obedecendo às mesmas recomendações que fizemos para os anteriores. É mais uma verificação do seu aproveitamento sobre o conteúdo deste módulo.

Leia com atenção as questões que seguem na página seguinte e, calmamente, dê as respostas às perguntas propostas.

Boa sorte !

LEIA O PROBLEMA IMEDIATO E OBSERVE A DISPOSIÇÃO DOS TERMOS, ASSIM COMO A COLOCAÇÃO DOS SINAIS SOB CADA RAZÃO.

RESPONDA AS QUESTÕES 1 e 2, DE ACORDO COM A OBSERVAÇÃO FEITA.

Se 3 operários concluem em 25 horas a pintura de um apartamento, 6 operários em quantas horas farão o mesmo trabalho ?

Dispondo os termos, resulta:

op.	h.
3	25
6	X
+	-

1. Os sinais colocados sob cada razão indicam que a proporcionalidade entre essas razões é:
   a. ( ) inversa c. ( ) crescente
   b. ( ) direta d. ( ) maior

2. No caso de proporcionalidade inversa, como será escrita a proporção? (Assinale a resposta correta colocando "X" nos parênteses correspondentes).
   a. ( ) $\frac{36}{25} = \frac{6}{X}$ c. ( ) $\frac{3}{25} = \frac{6}{X}$
   b. ( ) $\frac{3}{6} = \frac{25}{X}$ d. ( ) $\frac{3}{6} = \frac{X}{25}$

RESOLVA OS PROBLEMAS QUE SEGUEM.

COLOQUE X NOS PARÊNTESES, PARA AS RESPOSTAS CERTAS:

3. Uma pessoa, viajando de automóvel 12 horas por dia, percorre 4800 km em 9 dias. Quantas horas deveria viajar por dia para vencer 4 000 km em 6 dias ?

Dispondo os termos, provém:

op.	km.	d.
12	4 800	9
X	4 000	6

Separando os termos em duas regras de três, temos:

a)	b)

a. ( ) 13h c. ( ) 15h
b. ( ) 14h d. ( ) 12h

4. Marque a fórmula para calcular o termo principal nos problemas de porçentagem.

a.( ) $\frac{Pi}{100}$ c.( ) $\frac{100\ p}{i}$

b.( ) $\frac{100\ P}{i}$ d.( ) $\frac{100\ p}{P}$

5. Calcule 8% de Cr$ 84,00.

a.( ) Cr$ 5,62 c.( ) Cr$ 7,52

b.( ) Cr$ 6,72 d.( ) Cr$ 5,62.

6. José devia a uma loja a quantia de Cr$ 820,00 e teve de pagar Cr$ 877,40 por efetuar o pagamento com atraso. Qual foi a taxa aplicada ao valor do débito ?

a.( ) 7% c.( ) 7,2%

b.( ) 7,5% d.( ) 6,5%

7. Quanto rendeu de juros a quantia de Cr$ 9 000,00, no prazo de 4 anos, à taxa de 6,5% ao ano ?

a.( ) Cr$ 234,00 c.( ) Cr$ 224,00

b.( ) Cr$ 2 340,00 d.( ) Cr$ 2 240,00

8. A fórmula $X = \frac{cid}{100 \times 360}$ é aplicada para calcular:

a.( ) capital c.( ) tempo

b.( ) taxa d.( ) juros.

9. Quanto produziu de juros a quantia de Cr$ 50 000,00, no prazo de 6 anos e 3 meses, à taxa de 5% ao ano ?

a.( ) Cr$ 1 562,00 c.( ) Cr$ 15 625,00

b.( ) Cr$ 1 462,50 d.( ) Cr$ 145,25.

10. Assinale num dos parênteses abaixo a razão inversa a $\frac{12}{42}$.

a.( ) $\frac{7}{2}$ c.( ) $\frac{6}{21}$

b.( ) $\frac{2}{7}$ d.( ) $\frac{4}{14}$

MARQUE COM "X" NO CARTÃO ABAIXO, AS RESPOSTAS DADAS ÀS QUESTÕES DO POS-TESTE - *Nível de Suporte*.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										

X - ATIVIDADES DE ENRIQUECIMENTO

JUROS - CÁLCULO DE CAPITAL, TAXA OU TEMPO

Muitas vezes, na vida prática, você tem de calcular, com base em taxas determinadas e tempo estabelecido, os juros a pagar por seus débitos contraídos ou a receber por capital aplicado.

Entretando, não lhe será comum de ter calcular capital, taxa ou tempo, uma vez que estes dados você terá à mão, sempre que pretender concretizar determinada transação ou negócio. Porém se tiver de efetuar, eventualmente, cálculos deste tipo, aplique então as fórmulas seguintes.

$$\boxed{c = \frac{100\ j}{it}} \qquad \boxed{i = \frac{100\ j}{ct}} \qquad \boxed{t = \frac{100\ j}{ci}}$$

Observe, nas fórmulas acima, que o numerador é sempre o mesmo. Já os termos c, i e t modificam-se como denominadores, ficando assim distribuídos:

$$c = \frac{}{it} \qquad i = \frac{}{ct} \qquad t = \frac{}{ci}$$

Depreende-se disso que é fácil memorizar essas fórmulas:

$$\frac{\text{numerador}}{\text{denominador}} \qquad \frac{}{} \qquad \frac{100\ j}{it/\text{ou } ct/\text{ou } ci/}$$

Pois bem, passemos à aplicação dessas fórmulas nos problemas que seguem.

Exemplo I. - Calcule o valor do capital que, no fim de 3 anos, à taxa de 5% ao ano, rendeu Cr$ 420,00 de juros.

$$c = \frac{100\ j}{it} = \frac{100 \times 420{,}00}{5 \times 3} = \frac{42\ 000{,}00}{15} = 2\ 800{,}00$$

Resposta: Cr$ 2 800,00 era o valor do capital empregado.

Exemplo II. - Que taxa anual foi aplicada ao capital de Cr$ 3 000,00, para render Cr$ 660,00 de juros em 3 anos ?

$$c = \frac{100\ j}{ct} = \frac{100 \times 660{,}00}{3\ 000{,}00 \times 4} = \frac{66}{12} = 5{,}5$$

Resposta: Cr$ 3 000,00 foram aplicados à taxa de 5,5% ao ano.

Exemplo III. - Em quanto tempo um capital de Cr$ 5 000,00 produzirá Cr$ 375,00 de juros, à taxa de 5% ao ano ?

$$t = \frac{100\ j}{ci} = \frac{100 \times 375{,}00}{5\ 000{,}00 \times 5} = \frac{375}{250} = 1 \text{ a } 6 \text{ m}$$

Resposta: Em 1 ano e 6 meses, ou $1\frac{1}{2}$ ano.

Observe no exemplo dado os seguintes cálculos de divisão:

Resto fracionário	Número complexo
$375 \mid \underline{250}$	$375a \mid \underline{250}$
$125 \quad 1\ a\ \frac{125}{250}$	$125 \quad 1\ a\ 6m$
ou	$\times 12\ m$
$1\ a\ \frac{1}{2}$	250
	$\underline{125}$
	$1500\ m$
	000

Vejamos nos problemas abaixo os casos em que o tempo é dado em meses e dias.

Exemplo IV. - Que taxa anual foi aplicada ao capital de Cr$ 5 000,00, para produzir Cr$ 375,00 de juros em 1 ano e 6 meses?

Reduzindo o tempo a meses, temos:

1 a = 12 meses

12m + 6m = 18m

Tempo expresso em meses: $\frac{18}{12}$

Aplicando a fórmula, temos:

$$i = \frac{100\ j}{ct} = \underset{a)}{\frac{100 \times 375{,}00}{5\ 000{,}00 \times \frac{18}{12}}} = \underset{b)}{\frac{37\ 500{,}00}{\frac{90\ 000{,}00}{12}}}$$

$$\underset{c)}{37\ 500{,}00 : \frac{90\ 000{,}00}{12}} = \underset{d)}{37\ 500{,}00 \times \frac{12}{90\ 000{,}00}} =$$

$$\frac{4500}{900} = 5$$

OBSERVE:

a) Reduzindo o tempo a meses $(\frac{18}{12})$, este é aplicado à fórmula;

b) A fração $\frac{90\ 000{,}00}{12}$ passa a ser denominador da expressão;

c) O numerador 37 500,00 é dividido pelo denominador $\frac{90\ 000{,}00}{12}$;

d) É aplicada a operação inversa, isto é, o sinal de dividir é trocado pelo de multiplicar e invertida a fração divisora.

Releia no módulo 9.4, páginas 41 a 51, a parte referente à divisão de frações e resolução de expressões com traço.

Exemplo V. - Calcule o valor do capital que, no prazo de 6 meses e 15 dias, à taxa de 6% ao ano, produziu Cr$ 195,00 de juros.

Reduzindo o tempo a dias, temos:

6 x 30d = 180d

180d + 15d = 195d

Tempo expresso em dias: $\frac{195}{360}$

Aplicando a fórmula, resulta:

$$a = \frac{100\ j}{it} = \frac{100 \times 195,00}{6 \times \frac{195}{360}} = \frac{19\ 500,00}{\frac{1170}{360}}$$

$$19\ 500,00 : \frac{1170}{360} \Leftrightarrow 19\ 500,00 \times \frac{360}{1170} = \frac{78\ 000,00}{13} = 6\ 000,00$$

Resposta: Cr$ 6 000,00 foi o valor do capital empregado.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

Exercício 1

a) Cr$ 270,00 é o preço dos discos.
b) Cr$ 252,00 é o preço do tecido.
c) 20,8m de construção de muro.

Exercício 2

a) 100 km/h é a velocidade média.
b) 30 dias de alimentação.
c) Em 40 dias faria a tarefa.

Exercício 3

a) Cr$ 15 000,00 foram gastos em refeições.
b) 15 horas por dia seria o tempo de viagem.
c) Em 5 horas o ciclista faria o percurso.

Exercício 4

a) 120 kg de alfafa.
b) Em 12h o ônibus fará o trajeto.
c) 8 caminhões para o transporte da areia.

Exercício 5

a) Cr$ 4,20 b) Cr$ 25,41 c) Cr$ 720,00 d) Cr$ 18,40
e) Cr$ 807,20

Exercício 6

a) Pagou com abatimento Cr$ 394,80.
b) Pagou à vista Cr$ 9 840,00.
c) Custará Cr$1 700,00 com abatimento.

Exercício 7

a) Cr$ 1 600,00
b) 3%
c) 75% de freqüência
25% de ausência.

Exercício 8

a) Cr$ 216,00 de juros b) Cr$ 210,00 de juros
c) Cr$ 252,00 de juros.

Exercício 9

a) Cr$ 1 260,00 de juros. b) Cr$ 292,50 de juros
c) Cr$ 350,00 de juros

Exercício 10

450 pés de café.

Exercício 11

Pagou Cr$ 294,40 pelo objeto.

Exercício 12

Cr$ 24 000,00, total de vendas do produto.

Exercício 13

7% de frutas estragaram-se.

Exercício 14

Freqüência: 253 alunos.

Exercício 15

Produzirá 800 litros de vinho.

Exercício 16

Cr$ 100,80 de juros.

Exercício 17

Cr$ 2 103,75 de juros.

Exercício 18

Cr$ 63,50 de juros.

Exercício 19

Cr$ 3 500,00 de juros.

Exercício 20

Cr$ 189,00 de juros.

XI - SUGESTÕES BIBLIOGRÁFICAS

1. FERNANDES, Ary e outros. "*Matemática 6*", para a 6ª série do ensino de 1º Grau. São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1974.
2. NEDEM (Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino da Matemática - Pr.)"*Ensino Moderno da Matemática*", para o ensino de 1º grau, 2º Vol. Por Alex Overcenko e outros. Supervisão de Osny A. Dalcol. São Paulo, Editora do Brasil S.A., 1 967.
3. QUINTELLA, Ary. "*Matemática - Curso Ginasial*" 2º Vol. 3ª edição. São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1967.
4. SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP - Yale University Press, EUA. "*Matemática*" - Curso Ginasial, Vol. II. Trad. Lafayette Moraes. São Paulo, Edart - Livraria Editora Ltda., 1967.
5. AUGUSTINE, Charles H.D'. "*Métodos Modernos para o Ensino da Matemática*", ("Multiple Methods of Teaching Mathematics in the Elementary School"). Tradução de Maria Lúcia F.E. Peres. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico S.A., 1970.
6. E outros livros recentemente editados para a 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental.

XII - GLOSSÁRIO

ACARRETAR	causar; produzir; ocasionar; provocar; conduzir.
CERÂMICA	arte de fabricação de louça e objetos de adorno de construção, usando-se argila cozida.
CONCENTRAÇÃO	reunião em um centro; aglomeração; convergência para um centro.
CONEXO	análogo; ligado; vinculado.
CONSUMO	gasto; dispêndio; uso; ato ou efeito de consumir.
CONTRAIR	adquirir; conseguir; obter; assumir compromisso; contrair dívidas; contrair núpcias.
COMISSÃO	porcentagem de negócio; retribuição ou gratificação por serviços prestados.
CREDOR	aquele a quem se deve dinheiro ou outra coisa.
DÉBITO	dívida; aquilo que se deve; conta a pagar.
DESCONTO	abatimento; abate; dedução; diminuição de preço.
DETERIORAR	estragar; arruinar; danificar; adulterar; alterar.
FRETE	importância que se paga pelo transporte de alguma coisa.
JURO	rendimento de dinheiro emprestado. "Juros compostos" diz-se daqueles que se contam sobre o capital acrescido dos juros pelo mesmo produzidos. Juros de juros.
MODELAR	fazer o modelo ou molde de; dar forma ou contorno a
QUITAÇÃO	ato pelo qual alguém se desobriga do que deve; pagamento de dívida.
RECURSO	auxílio; meio; remédio; preceito; norma; dispositivo.
SALDAR	liqüidar contas; ficar quite; pagar o saldo devedor.
VINGAR	sobreviver; medrar; crescer; chegar à maturidade; realizar-se.
VINÍCOLA	relativo à vinicultura; referente ao fabrico de vinho.

GABARITO DO PÓS-TESTE

Município: ________________________________ Data da correção: ________

Cursista: ____

Nº do Módulo: 61 Percentagem: ____________

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a			X					X		
b				X		X				
c	X	X			X				X	
d							X			X

GABARITO DO PÓS-TESTE - Nível de Suporte

Cursista: ________________________________ Percentagem: ____________

NO CARTÃO ABAIXO ESTÃO MARCADAS COM "X" AS RESPOSTAS ÀS QUESTÕES DO PÓS TESTE - Nível de Suporte.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	X					X				X
b					X		X			
c			X	X					X	
d		X						X		

ORIENT. DA APRENDIZAGEM LOCAL.

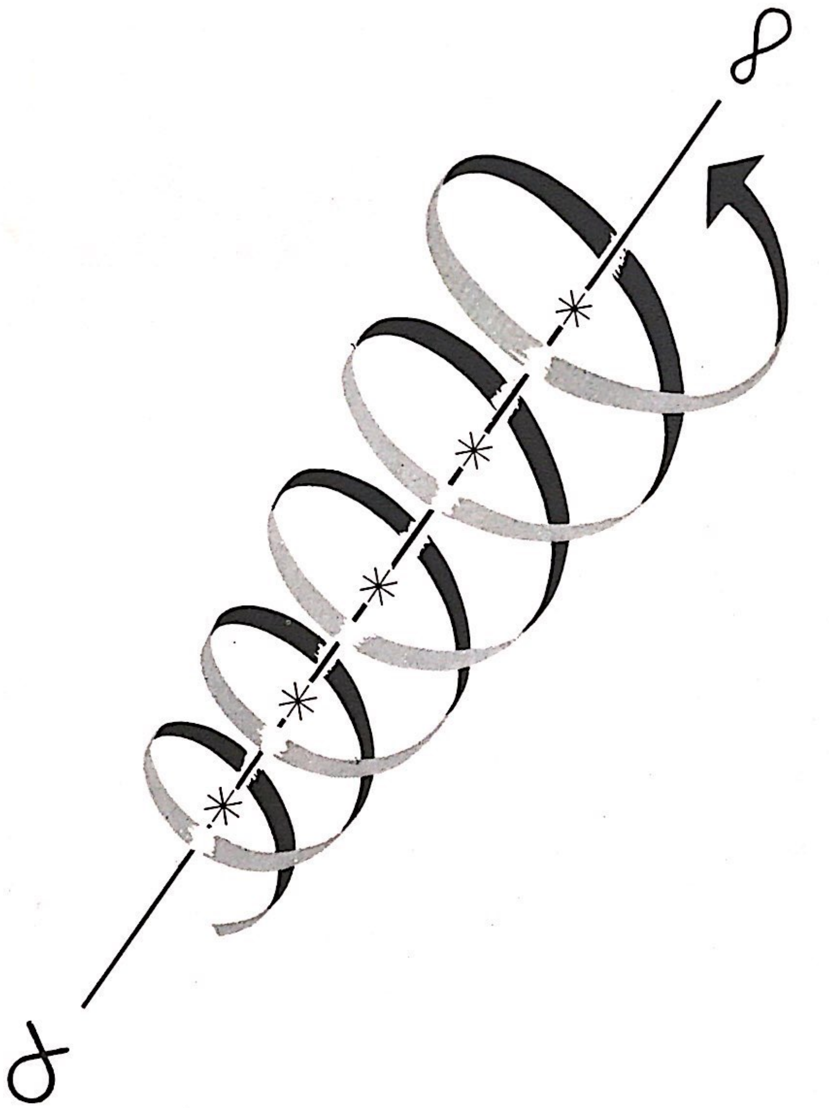
PROJETO HAPRONT:
Habilitação do Professor Não Titulado

IMPRENSA OFICIAL

MEC – DEF
SEEC – CETEPAR

PROJETO HAPRONT

80



ESTADO DO PARANÁ

GOVERNO JAYME CANET JUNIOR

SECRETARIO DE ESTADO DA EDUCAÇÃO E DA CULTURA

PROFESSOR FRANCISCO BORSARI NETTO

CENTRO DE TREINAMENTO DO MAGISTÉRIO DO ESTADO DO PARANÁ

CETEPAR

Projeto *"HAPRONT"*

APRESENTAÇÃO

O Departamento de Ensino Fundamental do Ministério da Educação e Cultura tem como um dos seus objetivos prioritários, a implantação de uma política global de desenvolvimento de recursos humanos, através da qual pretende assegurar a melhoria da produtividade dos sistemas de ensino.

Nesse sentido, está promovendo a experimentação de um modelo curricular de habilitação de professores que se constitui em um instrumento de busca de melhores padrões para a formação profissional. Em resposta a uma realidade que desafia os meios do ensino convencionais, esse modelo adota uma metodologia de educação à distância, sendo veiculado por uma série de 250 módulos de ensino. Este é um dos módulos dessa série.

Cada módulo é uma unidade composta de:objetivos, pré-teste, procedimentos e atividades básicas, pós-teste; procedimentos e atividades de suporte, pós-teste;procedimentos e atividades de enriquecimento.

Os módulos são encaminhados aos professores - cursistas para serem estudados em seus locais de trabalho. Por esse processo deverão ser habilitados a nível de 2º grau, professores não titulados em exercício em classes de 1ª e 4ª séries.

SUBPROJETO 13.1 do Plano Setorial de Educação e Cultura 75/79: CAPACITAÇÃO DE RECURSOS HUMANOS para o Ensino de 1º grau - Código Orçamentário 4502.08.42.217.2.023.

O projeto está sendo executado pela Secretaria de Estado da Educação e Cultura do Paraná, através do Cetepar, com o nome de Projeto *"HAPRONT"* (Habilitação de Professores não titulados), em 11 municípios, atingindo 1.100 professores não titulados.

Os resultados alcançados nesta etapa permitirão, num futuro próximo, subsidiar outras U.F. na organização de cursos de habilitação pelo mesmo processo.

CIÊNCIAS

OPERANDO COM NÚMEROS INTEIROS

MÓDULO Nº 80

ELABORAÇÃO: CLÉLIA TAVARES MARTINS

TÍTULO : OPERANDO COM NÚMEROS INTEIROS

I - ASSUNTO : NOÇÕES SOBRE O CONJUNTO Z. ADIÇÃO, MULTIPLICAÇÃO, POTENCIAÇÃO, SUAS OPERAÇÕES INVERSAS E PROPRIEDADES.

II - MATÉRIA : CIÊNCIAS.

DISCIPLINA : MATEMÁTICA.

III - PRÉ-REQUISITOS : TER DOMINADO O CONTEÚDO DOS MÓDULOS 9.2 e 9.3.

IV - OBJETIVOS:

OBJETIVO GERAL:

Utilizar procedimentos variados para a demonstração de fatos e propriedades.

OBJETIVO TERMINAL:

Efetuar operações com números inteiros, utilizando propriedades e técnicas operatórias com precisão.

OBJETIVOS OPERACIONALIZADOS:

AO FINAL DO ESTUDO DESTE MÓDULO O CURSISTA DEVERÁ SER CAPAZ DE:

1. Estabelecer relações de igualdade, desigualdade, ordem e simetria entre os números inteiros.

2. Efetuar as quatro operações fundamentais com números inteiros, aplicando as suas propriedades.

3. Calcular a potência de um número inteiro quando o expoente for um número natural.

4. Calcular a raiz (quadrada e cúbica) exata e aproximada de números inteiros positivos pelo conhecimento de quadrados e cubos.

V - PRÉ-TESTE

Antes de principiar o estudo do presente módulo é preciso que você se submeta ao teste que segue.

Com muita atenção dê as respostas às perguntas formuladas no Pré-Teste.

Boa sorte !

1. COMPLETE COM NUMERAIS OS PONTOS MARCADOS NA RETA, E INDIQUE COM A SAGITAL DOIS PONTOS SIMÉTRICOS OU OPOSTOS:

0 1

2. MARQUE COM "V" OU "F", ENTRE PARÊNTESES, AS PROPOSIÇÕES VERDADEIRAS OU FALSAS:
   a. ( ) Os números simétricos têm o mesmo valor absoluto.
   b. ( ) Os números simétricos têm sinais opostos.
   c. ( ) Toda potência de zero é igual a zero.
   d. ( ) O produto de dois números inteiros de sinais iguais é sempre positivo.
   e. ( ) Um número inteiro elevado a zero é igual a -1.

3. EFETUE AS ADIÇÕES:
   $(+3) + (-2) + (-7) + (+4) + (-5) =$

4. EFETUE:
   $(+15) - \left[(-8) - (-6) \right] =$

   sinais de operação

5. EFETUE AS ADIÇÕES ABAIXO:
   $(-7) + (-14) + (+11) + (-105) + (+30) =$

6. RESOLVA:
   $(+16) \div \left[(-4) \cdot (-2) - (+4) \right] =$

7. DÊ A REGRA PARA ESTES EXEMPLOS:
   $(-3)^2 = +9$ $\quad (-5)^4 = +625$ $\quad (-2)^6 = +64$

   RESPOSTA: Todo número negativo elevado____________________________
   ____

8. COMPLETE A NOMENCLATURA:

   $\sqrt[4]{81} = 3$

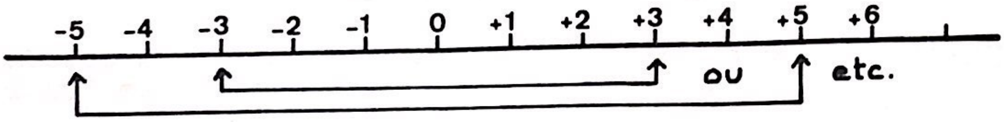
   ← índice da raiz
   ← _______________
   ← _______________
   ← _______________

9. CALCULE O VALOR DE:
   $8^0 =$_______ $\sqrt[3]{27} =$_____ $\sqrt{121} =$______ $6^3 =$_______ $7^1 =$ ________

10. CALCULE A POTÊNCIA DOS SEGUINTES NÚMEROS INTEIROS:
    $(-3)^4 =$________; $(-1)^5 =$__________; $-(-3)^3 =$___________;

    $(-8)^1 =$________; $(-15)^0 =$_________.

1. Completamento .



2. a.(V); b.(V); c.(V); d.(V); e.(F).

3. Resposta: = -7

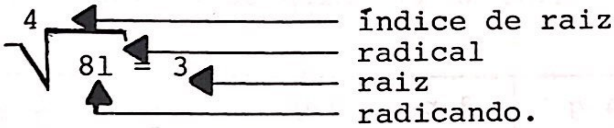
4. Resposta: = 17

5. Resposta: = -85

6. Resposta: = 4

7. Todo o número negativo elevado a um expoente par, a potência é um número positivo.

8. Completamento.



9. $8^0 = 1$; $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt{121} = \pm 11$; $6^3 = 216$; $7^1 = 7$.

10. $(-3)^4 = 81$; $(-1)^5 = -1$; $-(-3)^3 = 27$; $(-8)^1 = -8$; $(-15)^0 = 1$

VI - PROCEDIMENTOS E ATIVIDADES

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS (Z)

NÚMEROS NATURAIS E INTEIROS

Quando o subtraendo é maior que o minuendo, a operação, no conjunto dos números naturais, não tem solução. Em 5-8, por exemplo, não há número natural que, somado a 8, dê 5. Assim sendo, eis que um novo conjunto de números (o conjunto dos números inteiros) foi criado para resolver essa e outras situações. Situações perante as quais, antes de estudar formalmente números inteiros, a criança se vê envolvida ao ter de anotar, digamos, os pontos perdidos nas partidas de jogos; ao saber que determinado fato se deu há anos atrás; ao ter notícia sobre os graus negativos do termômetro; ao ouvir referências sobre o "deficit" no balanço de uma empresa; ao ter conhecimento da contagem regressiva no lançamento de foguetes; ao saber que tal ou qual time de futebol tem menos tantos pontos na tabela.

Para que essa realidade atinja diretamente a criança, o professor tem se valido, no ensino elementar de diferentes atividades aplicadas em classe, a fim de desenvolver de maneira intuitiva o conhecimento das operações e propriedades básicas dos números inteiros, antes da introdução ao estudo desses números, deixada para a 5ª ou 6ª séries do ensino de 1º Grau.

Citemos, por exemplo, um desses tipos de atividades, cujo objetivo é levar o educando a descobrir a distinção entre os conjuntos de números naturais e inteiros.

Atividade: Jogo de revisão de determinado assunto já estudado em aulas, no qual duas equipes (A e B) disputam "Qual sabe mais".

Supondo que a equipe A acerte oito (8) perguntas propostas pela equipe B e erre duas (2), procede-se a anotação dos pontos ganhos e perdidos, usando o par ordenado, onde o 1º elemento representa os pontos ganhos.

(8,2) ⟶ 6g (que significa : 6 pontos ganhos).

Admitindo que a equipe B acerte quatro (4) questões e erre seis (6), procede-se de igual modo, anotando:

(4,6) ⟶ 2p (que vale dizer: 2 pontos perdidos).

Compreendida essa maneira de anotar, passa-se a exercícios de fixação, como os que seguem.

EXERCÍCIO Nº1

COMPLETE AS TABELAS a E b, ASSENTANDO NA PRIMEIRA OS PONTOS E NA SEGUNDA, OS PARES CORRESPONDENTES:

a)

PARES	PONTOS
(7,6)	1 g
(3,8)	5 p
(0,3)	----
(11,15)	----
(12,12)	----

b)

4 g	3 p	0 g	7 g	0 p
(9,5)	(7,10)	(8,8)	(10,3)	(8,__)
(10,6)	(6, 9)	(10,__)	(__,1)	(__,1)
(__,1)	(10,_)	(0,___)	(7 ,0)	(0,__)
------	-----	--------	-----	------

Nas duas tabelas, o primeiro número dos pares ordenados refere-se aos acertos e o segundo, aos erros.

Observando a tabela b, conclui-se que poderiam ser anotados infinitos pares para cada resposta.

Em matemática, anota-se : (+) para os pontos ganhos, e (-) para os pontos perdidos.

EXERCÍCIO Nº 2

COMPIE OS PARES DO EXERCÍCIO ANTERIOR, TABELA b, USANDO OS SINAIS + E –, PARA REPRESENTAR OS PONTOS GANHOS E PERDIDOS:

$$+4 = \{(+9,\ -5),\ (+10,-6),\ (+\_\_\_,\ -1)\ \ldots\}$$
$$-3 = \{(+7,\ -10),\ (+6,\ -9),\ (+10,\ -\_\_)\ \ldots\}$$
$$0 = \{(+8,\ -8),\ (\quad ,\quad),\ (\qquad)\ \ldots\}$$
$$+7 = \{(\qquad),\ (\qquad),\ (\qquad)\ \ldots\}$$
$$0 = \{(\qquad),\ (\qquad),\ (\qquad)\ \ldots\}$$

* Zero (0), como se vê, não leva sinal, pois os pares de pontos perdidos ou ganhos formam um só conjunto.

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

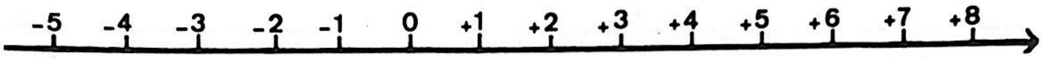
CONCEITO:

O conjunto dos números precedidos de sinais positivos e negativos é chamado "conjunto dos números inteiros". É representado pela letra Z.

Em numerais, $Z = \{\ldots -3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ ou, mais simplificadamente, $Z = \{0; \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ se lê: conjunto de números inteiros.

REPESENTAÇÃO GEOGRÁFICA DOS INTEIROS

O conjunto dos números inteiros pode ser representado geometricamente na reta numerada, como no exemplo seguinte:



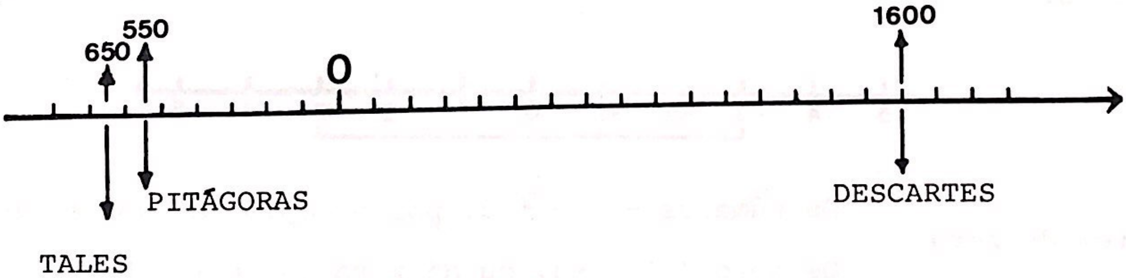
Vejamos nos exercícios adiante, referentes a "datas a.C. e d. C." e a "graus do termômetro", a aplicação da representação geométrica da reta numerada com números inteiros.

Datas a.C e d.C. As datas a.C. (antes de Cristo) e d.C. (depois de Cristo), por exemplo, podem ser associadas aos números inteiros e representadas geometricamente na reta numerada, como no exercício imediato que se reporta às datas de nascimento dos seguintes matemáticos:

TALES ——▶ 650 a.C.
PITÁGORAS ——▶ 550 a.C.
EUCLIDES ——▶ 300 a.C.
DESCARTES ——▶ 1.600 a.C.
EULER ——▶ 1.700 d.C.
GALOIS ——▶ 1.800 d.C.

EXERCÍCIO Nº 3

COMPLETE A RETA ABAIXO, COLOCANDO AS DATAS DE NASCIMENTO DOS MATEMÁTICOS DE QUE FALAMOS LINHAS ATRÁS.
(Cada divisão de reta deve representar 1 século).



Graus do termômetro.

A escala de temperatura de um termômetro corresponde à reta numerada com números inteiros.

Apresenta medidas acima e abaixo de zero (0), em sentidos opostos.

Zero (0) marca a temperatura da água quando se congela.

Cem (100) marca a temperatura da água em ebulição.

Os cem segmentos congruentes, assinalados no intervalo de zero a cem, são unidades de medida de temperatura denominadas <u>graus centígrados</u>. Como há temperaturas inferiores à ponto de congelamento da água, esses graus também são marcados abaixo de zero.

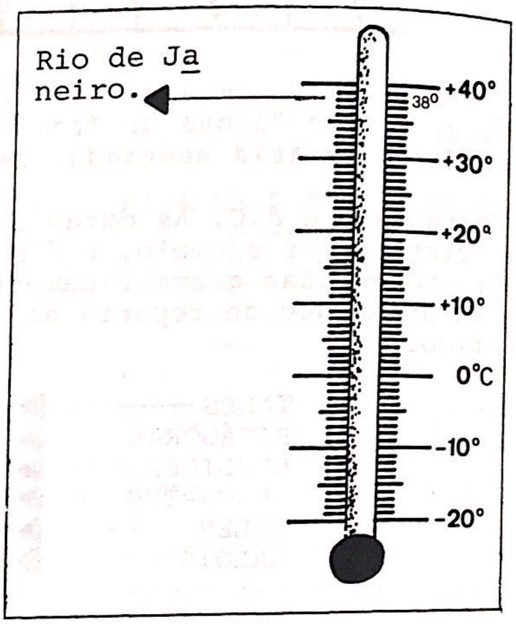
São símbolos de graus centígrados : ^0C ou ^{0}.

A representação 25^0C, por exemplo, lê-se: vinte e cinco graus centígrados; e -3^0C, lê-se: menos três graus centígrados.

EXERCÍCIO Nº 4

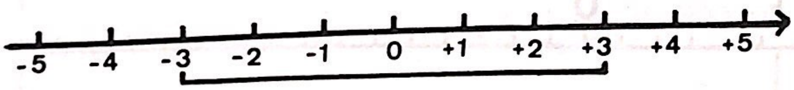
CORRESPONDA AS CIDADES E TEMPERATURAS REGISTRADAS NA TABELA ABAIXO AOS PONTOS DA ESCALA DO TERMÔMETRO AO LADO:

CIDADES	TEMPERATURAS Em 15 de jan.
Rio de Janeiro	$+ 38^0C$
Brasília	$+ 28^0C$
São Paulo	$+ 30^0C$
Nova York	$- 4^0C$
Moscou	$- 10^0C$
Paris	$- 1^0C$
Londres	$- 5^0C$
Roma	$- 12^0C$
Cannes	$- 15^0C$
Lisboa	$- 4^0C$



NÚMEROS SIMÉTRICOS

A reta numerada com o conjunto de inteiros é uma ilustração dos números opostos ou <u>simétricos.</u>
Vejamos:



Os números - 3 e + 3, por exemplo, estão eqüidistantes de zero.

De zero (0) a -3, ou de zero (0) e +3, há 3 unidades(segmentos congruentes).

Os sinais colocados na frente de cada numeral são chamados <u>sinais posicionais.</u>

Para representar o oposto de +3, ou de -5, escrevemos:

- (+3), que é igual a -3;
- (-5), que é igual a +5.

a	- a	
+ 3	- (+3)	-3
- 5	- (-5)	+5

> De modo geral, indicamos o oposto de um núme ro inteiro a, escrevendo -a.

EXERCÍCIO Nº 5

COMPLETE, NOS QUADROS ABAIXO, A REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS OPOSTOS:

a	- a	
+ 7	-(+7)	ou - 7
- 125	-----	----
+ 10	-----	----

a		- a
- 40	-(-40)	ou + 40
+ y	------	----
- x	------	----

OBSERVE:

- Números opostos ou simétricos têm o mesmo valor absolu to e sinais contrários;
- só usamos parênteses quando há sinais de posição e ope ração juntos;
- as respostas não têm parênteses;
- quando o número inteiro é positivo, numa resposta, o si nal mais (+) é dispensado.

Exemplificação: *Exemplifiquemos cada uma das observações anteriores:*

- (+5) e (-5)

  sinais de posição
- (+5) - (-2)

  sinal de operação
- (+3) - (+4) = -1
- (+4) - (+3) = 1

OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

ADIÇÃO

Para indicar operações de números inteiros, colocamos o número inteiro entre parênteses para não confundir o sinal de operação com o sinal de posição.

Exemplo:

Sinal de operação:

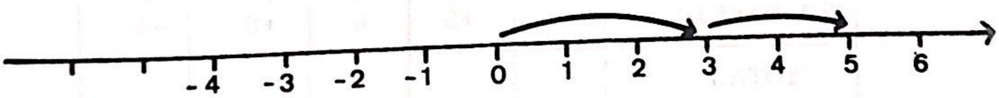
(+4) + (+2) = + 6

Sinais de posição:

- Operações a e b, abaixo, são adições de números inteiros em que os sinais de posição são iguais:

  a) (+3) + (+2) = +5
  b) (-3) + (-2) = -5

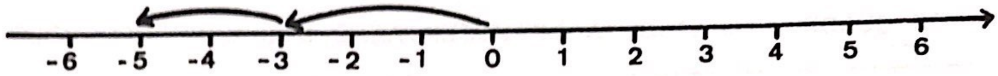
  Vejamos essas mesmas adições na reta numerada:



Sinal de operação

(+3) + (+2) = +5

Sinais de posição



Sinal de operação

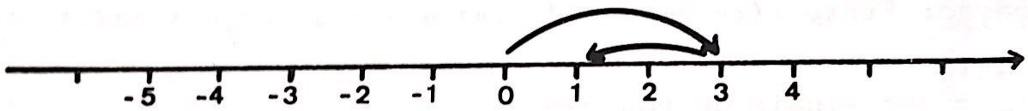
(-3) + (-2) = -5

Sinais de posição

- As operações seguintes, são adições de números inteiros em que os <u>sinais</u> de posição são <u>diferentes</u>:

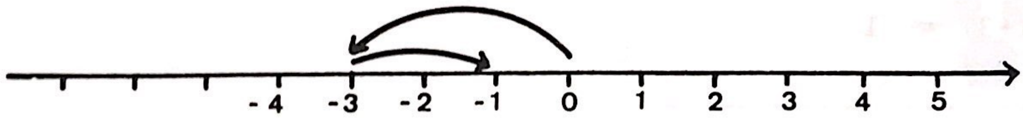
a) (+3) + (-2) = 1
b) (-3) + (+2) =-1

A reta numerada esclarece a adição (+3) + (-2) = +1 :
(*Lembre-se: juntar 3 pontos ganhos e dois pontos perdidos*).



Analogamente, a reta numerada abaixo esclarece a adição

(-3) + (+2) = -1:



Deduzimos do exposto as seguintes regras:

1 - PARA ADICIONAR NÚMEROS INTEIROS DE <u>SINAIS IGUAIS</u> SOMAM-SE OS VALORES ABSOLUTOS E DÁ-SE O <u>MESMO SINAL</u>.

2 - PARA ADICIONAR NÚMEROS INTEIROS DE <u>SINAIS DIFERENTES</u> <u>SUBTRAEM-SE</u> OS VALORES ABSOLUTOS E DÁ-SE O <u>SINAL DO MAIOR</u>.

<u>EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO:</u>

<u>EXERCÍCIO Nº 6</u>

a) COMPLETE O MARCADOR ABAIXO:

RESULTADOS	COMPETIÇÃO ESPORTIVA				
	Nomes dos participantes				
	Rui	José	Ari	Mário	Saul
1ª Partida: 2ª Partida:	+1 -3	-4 +5	+3 +6	+5 +0	0 -7
TOTAL :					

b) COMPLETE A TÁBUA DE ADIÇÃO, ABAIXO. (*Observe as instruções*).

+	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4
-4									
-3									+ 1
-2									
-1			-3						
0	-4							+3	
+1	-3								
+2					+2				
+3									
+4							+6		

Instruções:

- No preenchimento dos mosaicos, observe a 1ª regra: sinais iguais, adição dos valores absolutos e conservação do mesmo sinal.
- Na linha e coluna com zero (0), aplique a propriedade do elemento neutro.
- Na intersecção de linha e coluna com sinais diferentes, siga a 2ª regra: sinais contrários, achar a diferença entre os valores absolutos e dar o sinal do maior.

c) EFETUE AS ADIÇÕES NO CONJUNTO Z. (*Atente para os valores de X*).

Valores de

X	X + (+5)
+9	+9 + (+5) = + 14
0	
-5	
-7	

Valores de

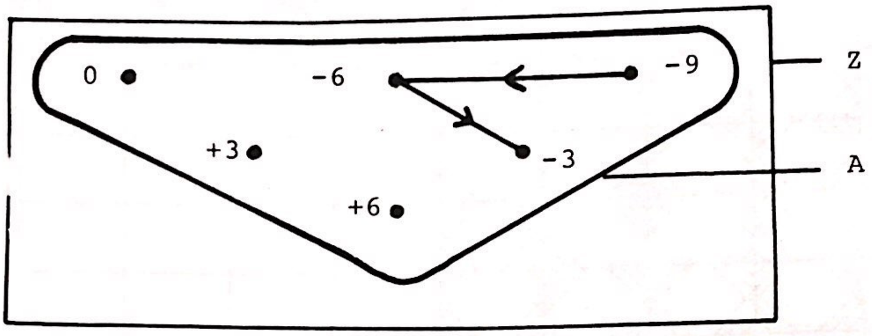
X	X + (-4)
+8	+8 + (-4) = +4
+1	
-4	
-6	

Na primeira linha de cada adição acima, lê-se:

X para X mais 5 — X para X mais menos 4

d) NO CONJUNTO A = $\{+6, +3, -3, 0, -9, -6\}$, REPRESENTADO NO DIAGRAMA ABAIXO, CONTINUE A CORRESPONDÊNCIA DEFINIDA POR:

$$x \longrightarrow x + (+3).$$

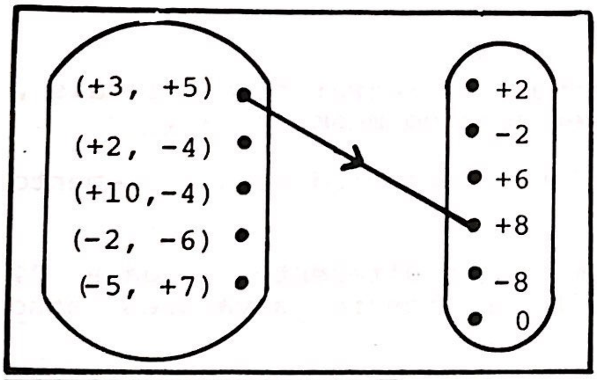


Pense:

o menor termo é (-9);
o segundo termo é igual a $(-9) + (+3) = (-6) \Longleftrightarrow -9 + 3 = -6$;
o terceiro é igual a $(-6) + (+3) = (-3) \Longleftrightarrow -6 + 3 = -3$;
e assim por diante.

e) COMO SE DESCOBRE POR ONDE COMEÇAR O EXERCÍCIO ANTERIOR ?
RESPOSTA:____
____
____

f) ASSOCIE O PAR ORDENADO DE Z x Z À SOMA NO CONJUNTO Z:



No enunciado do problema, leia: "zê" por "zê" é associado a "zê".
Significa que os dois números do par e a soma pertencem ao conjunto Z.

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO

FECHAMENTO:

A operação adição é, como vimos, sempre possível em Z., quer dizer, se o par ordenado pertence a Z, a soma ou total também pertence a Z.

Em matemática: $a + b = c$

a e $b \in Z$; $c \in Z$.

Lê-se: Se a e b pertencem a Z; c pertence a Z.

> O conjunto Z é fechado para a operação adição, isto é, goza da propriedade do fechamento.

COMUTATIVA;

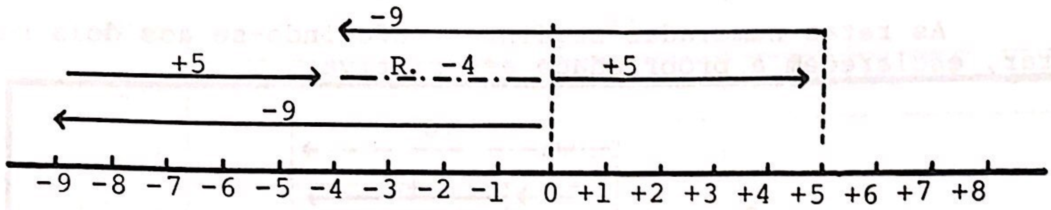
Experimente efetuar uma adição de inteiros; depois inverta a posição dos termos e realize a mesma operação. Se a soma ou total for o mesmo é porque a adição de números inteiros goza da pro priedade comutativa. Você pode verificar que isso acontece "para todo par" de números inteiros. Assim, pode afirmar que: a + b = b + a, para todo a e b ∈ Z.

Representação numérica:

$$\left.\begin{array}{l}(-9) + (+5) = -4 \\ (+5) + (-9) = -4\end{array}\right\} (-9) + (+5) = (+5) + (-9)$$

Lê-se: se menos nove adicionados a mais cinco é igual a menos quatro, e mais cinco adicionados a menos nove é igual a menos quatro, então menos nove adicionados e mais cinco é igual a mais cinco adicionados a menos nove.

A reta numerada esclarece essa propriedade. Vejamos:



EXERCÍCIO Nº 7

COMPLETE AS TÁBUAS DE ADIÇÃO EM Z:

+	-3	+8	X
-3			
+8			
X			12

+	a	b	c
a	m	-4	
b		n	-6
c	+3		p

NOTAS: Se na 1ª tábua você não descobrir o valor de X, então atente para este raciocínio: X + X = 12, logo, X = 6, uma vez que 6+6 = 12.

Na 2ª tábua aplique a propriedade comutativa. Conclua o complemento partindo do seguinte:

Se a + b = -4
b + a = -4

ASSOCIATIVA:

Para demonstrar a propriedade associativa são necessárias, como você sabe, pelo menos três parcelas na adição.

Vejamos essa propriedade na seguinte operação:

$$(-5) + (+7) + (+4) =$$

Efetuando a adição das duas primeiras parcelas, e o resultado desta com a terceira, temos:

$$\underbrace{[(-5) + (+7)]} + (+4) =$$

$$(+2) + (+4) = +6$$

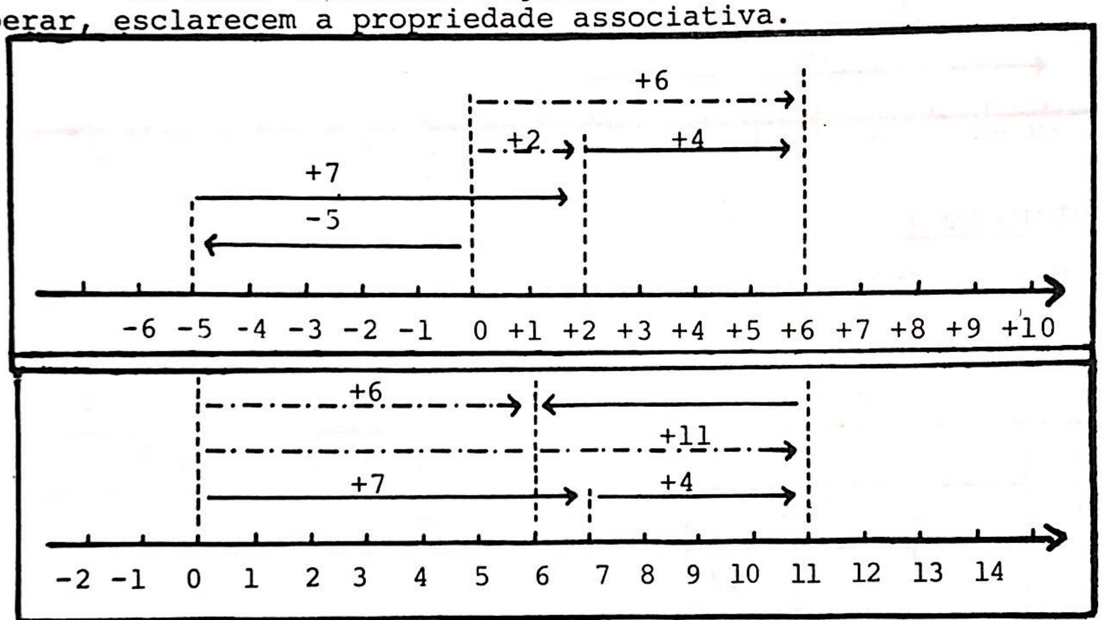
Efetuando a adição da primeira parcela com o resultado da adição das duas últimas, resulta:

$$(-5) + \left[\underbrace{(+7) + (+4)}\right] =$$

$$(-5) + (+11) = +6$$

> Para todo $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ $\in Z$: $a + (b + c) = (a + b) + c$.
> A adição em Z é associativa. Por esse motivo, você pode adicionar as parcelas em qualquer ordem.

As retas numeradas seguintes, referindo-se aos dois modos de operar, esclarecem a propriedade associativa.



Aplicação da propriedade associativa e da comutativa.

Se você tiver numa operação vários números inteiros por parcelas, pode adicionar os positivos e negativos separadamente e depois operar com os totais obtidos.

Exemplo:

$$(+6) + (-9) + (-3) + (+5) + (-2) + (+1) =$$

$$[(+6) + (+5) + (+1)] + [(-9) + (-3) + (-2)] =$$

$$(+12) + (-14) = -2$$

PROPRIEDADE DO ELEMENTO NEUTRO:

Sejam os exemplos:

$$\left.\begin{array}{l}(+5) + 0 = +5 \\ 0 + (+5) = +5\end{array}\right\} \Longrightarrow (+5) + 0 = 0 + (+5) = +5$$

Você pode observar que a adição de um número inteiro e zero dá igual ao próprio número inteiro, qualquer que seja esse número, isto é, o zero não altera o valor do número inteiro.

Logo,

> O zero é elemento neutro em Z, para a adição.

EXERCÍCIO Nº 8

COMPLETE O EXTRATO DE CONTA BANCÁRIA ABAIXO, LANÇANDO NA COLUNA CORRESPONDENTE O SALDO DISPONÍVEL EM 30/6:

BANCO SUL DO BRASIL S/A			
Conta nº 032425	ANTONIO DE OLIVEIRA		
LANÇAMENTO			SALDO DISPONÍVEL
DATA	DEPÓSITO CR$	RETIRADA CR$	
06/5	4 500,00		
28/5		1 850,00	
02/6	3 200,00		
25/6		2 700,00	
29/6		1 530,00	
30/6			___________

Note que de duas maneiras pode ser feito esse cálculo.

a) Efetuando a adição dos números inteiros, temos:

(+4 500,00) + (-1 850,00) + (+3 200,00) + (-2 700,00) + (-1 530,00) =

RESPOSTA:____

b) Aplicando as propriedades associativa e comutativa, isto é, adicionando os depósitos e as retiradas separadamente, para operar com os totais obtidos, resulta:

(4 500,00 + 3 200,00) - (1 850,00 + 2 700,00 + 1 530,00) =

RESPOSTA:____

ADIÇÃO DE NÚMEROS SIMÉTRICOS:

Páginas atrás, falamos sobre números opostos ou simétricos, sugerindo também exercícios sobre a representação dos mesmos.

Passemos, agora, à adição desses números.

Exemplos: (+3) + (-3) = 0
(-6) + (+6) = 0
(-7) + (+7) = 0

Como vimos, a soma de dois números simétricos é zero (elemento neutro na adição em Z).

Generalizando, podemos dizer: X e Y são simétricos quando

X + Y = Y + X = 0

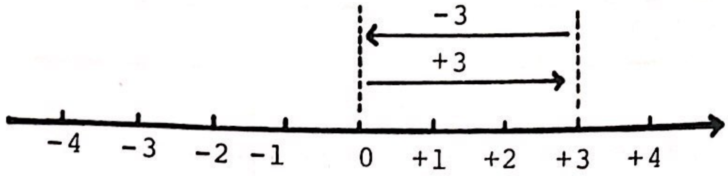
Supondo que X = +1 e Y = -1, temos:

$$\underbrace{(+1) + (-1)}_{0} = \underbrace{(-1) + (+1)}_{0} = 0$$

$$X + Y = Y + X = 0$$

A reta numerada esclarece a adição dos números simétricos.

Seja, por exemplo, a operação (+3) + (-3) :



EXERCÍCIO Nº 9

COMPLETE AS ADIÇÕES ABAIXO:

a. (+2) + ______________ = 0

b. (-5) + ______________ = 0

c. (+4) + ______________ = 0

d. (-8) + ______________ = 0

EXERCÍCIO Nº 10

EFETUE AS SEGUINTES ADIÇÕES:

$$\left.\begin{array}{c}(-3)\\(+5)\\(+7)\\(-8)\end{array}\right\} + (+2) + (-2) = \left\{\begin{array}{c}(\quad)\\(\quad)\\(\quad)\\(\quad)\end{array}\right.$$

SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

A subtração, como você sabe, é uma operação inversa à da adição. No conjunto dos números inteiros ela é sempre possível; efetua-se pela adição do número simétrico ou oposto.

Observe, abaixo, a substituição da operação e a troca do número pelo seu simétrico ou oposto:

$$(+13) - (+7) = (+13) + (-7)$$

troca da operação.

troca do número pelo seu simétrico ou oposto.

(+3) - (-2) = (+3) + (+2)
(-2) - (+1) = (-2) + (-1)
(-6) - (-5) = (-6) + (+5)

Como dissemos, para subtrair adiciona-se o simétrico ou oposto.

Exemplo: Seja a operação (+5) - (-8)

Substituindo a subtração pela adição, temos:

(+5) - (-8) = (+5) + (+8) = 13

EXERCÍCIO Nº 11

a) PREENCHA AS LACUNAS:

(+5) - (-8) = (+5) +__________ = ____________

(-6) - (+11)= (-6) +__________ = ____________

(+4) - (+7) = ________________ = ____________

(+113) - (-97) =______________ = ____________

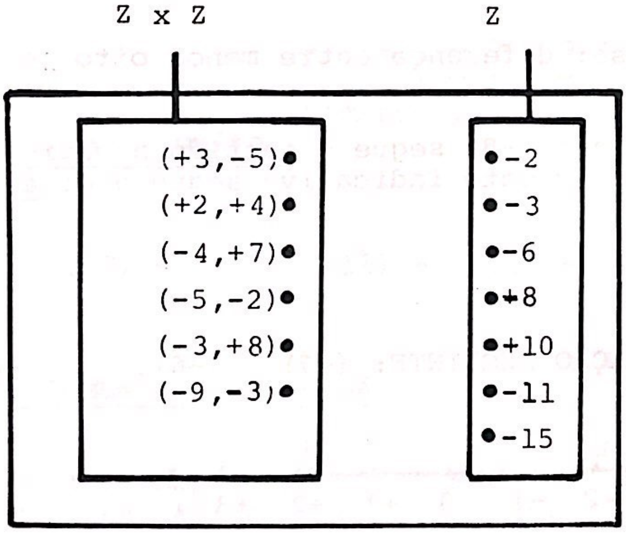
(-1010)- (+101)=______________ = ____________

b) COMPLETE A PROPOSIÇÃO:

Para subtrair números inteiros, efetuamos a adição do__________
____

EXERCÍCIO Nº 12

ASSOCIE O PAR ORDENADO DE Z x Z AO RESULTADO DA SUBTRAÇÃO NO CONJUNTO Z:



No enunciado do problema, leia: zê por zê é associado a zê. Significa que os dois números do par e a subtração pertencem ao conjunto Z.

EXERCÍCIO Nº 13

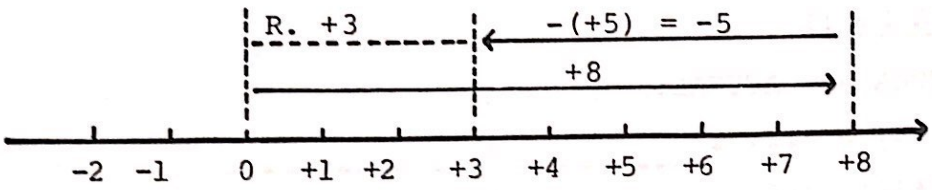
COMPLETE O QUADRO DE SUBTRAÇÕES:

a	b	c	a - b	b - a	(a-b)-c	a-(b-c)	0 - a	a - 0
-2	+3	+1	-5		-6		+2	
-5	+4	-2						
-6	-7	-3						

SUBTRAÇÃO NA RETA NUMERADA

A reta esclarece a subtração de números inteiros.

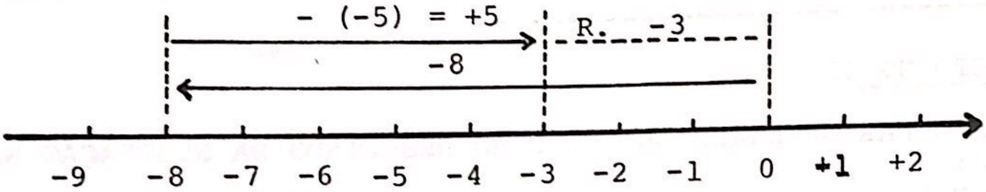
- Seja, por exemplo, a operação (+8) - (+5)



RESPOSTA: (+8) - (+5) = (+3) (Lê-se: diferença entre oito e cinco)

OBSERVAÇÃO : No exemplo dado, o segmento (+8) segue o sentido positivo. Se fôssemos adicionar (+5), o segmento indicativo seguiria a mesma direção. Mas como devemos subtrair, o segmento segue a direção oposta.

- Seja a operação (-8) - (-5)

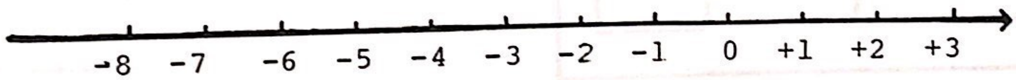


RESPOSTA: (-8) - (-5) = (-3) (Lê-se: diferença entre menos oito e menos cinco.)

OBSERVAÇÃO: Neste exemplo, o segmento (-8) segue o sentido negativo. Como devemos subtrair (-5), o segmento indicativo segue a direção oposta.

EXERCÍCIO Nº 14

DEMONSTRE NA RETA NUMERADA A OPERAÇÃO SEGUINTE: (-7) - (-6).



REGRA DOS SINAIS

Para você efetuar rapidamente subtrações, procure fixar as duas seguintes regras de sinais da adição.

+ e + = +
- e - = -

Quando os sinais são iguais, somam-se os valores absolutos e dá-se o mesmo sinal.

+ e - = -
- e + = -

Quando os sinais são diferentes, acha-se a diferença entre os valores absolutos e dá-se o sinal do maior.

ELIMINAÇÃO DE PARÊNTESES

Uma vez que para subtrair temos de transformar essa operação numa adição, podemos, também, simplificar o cálculo tirando antes os parênteses e os sinais de posição.

Vejamos:

$(+8) - (-5) = 8 + 5 = 13$
$(-8) - (+5) = -8 - 5 = -13$
$(+5) - (+3) + (-4) + (-1) - (-3) = 4-3-4-1+3 = 0$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

EXERCÍCIO Nº15

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, EFETUE AS SUBTRAÇÕES:

a) (+15) - (+3) =________
b) (+15) - (-3) =________
c) (-15) - (+3) =________
d) (-15) - (-3) =________
e) (+4) - (+11) =_______
f) (+4) - (-11) =_______
g) (-4) - (+11) =_______
h) (-4) - (-11) =_______

EXERCÍCIO Nº16

CALCULE AS EXPRESSÕES:

a) (+5) + (-4) - (+7) - (-9) + (+13) - (-15) =

Eliminando os parênteses, temos:

+ 5 - 4 - 7 + 9 + 13 + 15 =

Somando os números positivos e negativos separadamente, resulta:

b) (-7) + (+8) - (+18) - (-13) - (+17) - (-16) =

RECOMENDAÇÃO NECESSÁRIA

Procure dominar as operações de adição e subtração para, só depois, passar para o estudo de multiplicação e divisão. Se preciso, refaça todos os exercícios das páginas anteriores.

MULTIPLICAÇÃO EM Z

Para achar um produto de dois números inteiros multiplicamos os valores absolutos e aplicamos a regra dos sinais.

Observe, nos exemplos abaixo, os fatores e o produto correspondente:

$(+2) \times (+7) = +14$
$(-2) \times (-7) = +14$
} Fatores de sinais iguais, produto de sinal mais (+).

$(+2) \times (-7) = -14$
$(-2) \times (+7) = -14$
} Fatores de sinais diferentes, produto de sinal menos (-).

Daí a dedução da seguinte regra dos sinais:

NA MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS, SE OS SINAIS DOS FATORES SÃO IGUAIS, <u>O PRODUTO É POSITIVO</u>; SE SÃO CONTRÁRIOS, <u>O PRODUTO É NEGATIVO</u>.

Para melhor fixação, vejamos ilustrada essa mesma regra:

$\oplus \times \oplus = \oplus$	$\oplus \times \ominus = \ominus$
$\ominus \times \ominus = \oplus$	$\ominus \times \oplus = \ominus$

Assimilando a regra dada, você está apto a efetuar multiplicação em Z.

Passemos aos exemplos seguintes:

(+3) x (-12) = -36
(-40) x (-20) = +800
(-36) x (+12) = -432
(+48) x (+102) = +4896

Coloque parênteses nos fatores para não confundir o <u>sinal de posição</u> com o <u>sinal de operação</u>.

Não coloque parênteses nos produtos.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

EXERCÍCIO Nº 17

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, EFETUE AS MULTIPLICAÇÕES:

a) (-2) x (+4) ou (-2) (+4) =

b) (-7) x (+3) ou (-7) (+3) =

c) (+15) x (-10) ou (+15) (-10) =

EXERCÍCIO Nº 18

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, EFETUE AS OPERAÇÕES:

a) (+21) x (-30) ou (+21) (-30) =

b) (-30) x (-43) ou (-30) (-43) =

MULTIPLICAÇÃO COM MAIS DE DOIS FATORES

A soma e a subtração, a multiplicação e a divisão são <u>operações binárias</u>, isto é, efetuam-se entre duas quantidades. Para multiplicar mais de dois fatores, o produto dos dois primeiros operamos com o terceiro e assim por diante.

Vejamos:

$$\underbrace{(+3).(-4)}.(+7).(-2) =$$

$$\underbrace{(-12).(+7)}.(-2) =$$

$$(-84).(-2) = +168$$

Na multiplicação podemos usar um ponto entre parênteses para significar essa operação, ou não usar sinal nenhum.

MULTIPLICAÇÃO DE ZERO

Quando abordamos conjunto de números naturais (conjunto N), você aprendeu que zero multiplicado por qualquer número dá sempre zero. Com os números inteiros (conjunto Z) também sucede o mesmo: o produto de qualquer número inteiro por zero é igual a zero.

Observe:

$(+4) \times 0 = 0$	$0 \times (-7) = 0$
$(-3) \times 0 = 0$	$0 \times (-9) = 0$

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO

Vejamos se as propriedades da multiplicação em N são válidas em Z.

1 Propriedade do fechamento. Os números inteiros tomados como fatores dão produtos no conjunto Z.
Exemplos:

$(-4).(-7) = +28$	$-4 \in Z$; $-7 \in Z$; $+28 \in Z$
$(-3).(+4) = -12$	$-3 \in Z$; $+4 \in Z$; $-12 \in Z$
$(+7).(-6) = -42$	$+7 \in Z$; $-6 \in Z$; $-42 \in Z$
$(+8).(+7) = +56$	$+8 \in Z$; $+7 \in Z$; $+56 \in Z$

Para quaisquer a e $b \in Z$, existe $a.b \in Z$.

Logo, o conjunto Z é fechado para a operação multiplicação.

2 Propriedade comutativa. A posição dos termos, na multiplicação, não altera o produto.
Exemplos:

$(-2).(-4) = +8$
$(-4).(-2) = +8$ — Logo, $(-2).(-4) = (-4).(-2)$

$(+7).(-8) = -56$
$(-8).(+7) = -56$ — Então, $(+7).(-8) = (-8).(+7)$

Para quaisquer números inteiros a e b: $a.b = b.a$.

Então, você pode multiplicar fatores em qualquer ordem.

3 Propriedade associativa. Observe o exemplo seguinte:

$[(-3).(-4)].(-6) = -72$
$(-3).[(-4).(-6)] = -72$

A ordem em que efetuamos a operação não alterou o resultado. Você poderá verificar que:

$(ab)c = a(bc)$, quaisquer que sejam os números inteiros a, b, c.

A multiplicação em Z goza da propriedade associativa.

4 Propriedade do elemento neutro. Sejam os exemplos:

$(+3).(+1) = (+1).(+3) = +3$
$(-4).(+1) = (+1).(-4) = -4$ — $+1$ é elemento neutro.

$(+2).(-1) = (-1).(+2) = -2$
$(-3).(-1) = (-1).(-3) = +3$ — -1 não é elemento neutro.

Note nos exemplos dados que +1 é o elemento neutro.

$(+1).a = a.(+1) = a$, para todo $\underline{a} \in Z$

O produto de um número inteiro por +1 é igual ao próprio número inteiro. Logo, a multiplicação em Z goza da propriedade do elemento neutro, que é 1.

Cálculo de expressões.

Note como procedemos para calcular as expressões abaixo:

a) $(-3) + (-2) \times (-4) - [(+6) + (-4)] =$

Operando o que está entre colchetes, temos:

$(-3) + \underbrace{(-2) \times (-4)} - (+2) =$

Efetuando a multiplicação, e trocando a subtração pela adição do simétrico, resulta:

$(-3) + (+8) + (-2) =$

Efetuando a adição, provém:

$(+8) + (-5) = +3$

b) $(+12) - [(-3) \times (-8) + (-4)] + (+1) =$

Multiplicando o contido nos colchetes, temos:

$(+12) - [(+24) + (-4)] + (+1) =$

Efetuando a adição do que está entre colchetes, resulta: $(+12) - (+20) + (+1) =$

Trocando a subtração pela adição do simétrico, provém:

$(+12) + (-20) + (+1) = -7$

c) $(+5) - [(-4) - (+6) \times (-1)] + (-3) =$

Multiplicando o contido nos colchetes, temos:

$(+5) - [(-4) - (-6)] + (-3) =$

Trocando a subtração contida nos colchetes pela adição do simétrico, resulta:

$(+5) - [(-4) + (+6)] + (-3) =$

Resolvendo o que está entre colchetes, provém:

$(+5) - (+2) + (-3) =$

Efetuando a subtração e depois a adição, obtemos:

$(+5) + (-2) + (-3) = 0$

Marcha do cálculo nas expressões.

Nos exemplos dados ficaram claros os seguintes pas

sos observados no cálculo de expressões:
- Operar os inteiros contidos nos colchetes até a obtenção de um só número; substituir os colchetes por parênteses.
- Efetuar as multiplicações.
- Trocar a operação subtração pela adição do simétrico ou oposto.
- Efetuar as adições. (Adicionar negativos e positivos separadamente)
- Eliminar os parênteses nas respostas.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

EXERCÍCIO Nº19

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, CALCULE AS EXPRESSÕES:

a) $(-3) + (-3) \times (-4) - [(-3) \times (-3) + (+1)] =$

b) $(-4) \times (-2) - [(+4) - (+3) \times (-2)] + (-3) =$

c) $[(-3) + (-4) \times (-4) - (-1)] + [(-2) \times (-3) + (-4)] =$

d) $[(-9) \times (-3)] + [(-4) \times (+3)] - (-3) =$

e) $[(-9) + (+3) \times (-2)] \times (-5) =$

EXERCÍCIO Nº20

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, CALCULE AS EXPRESSÕES:

a) $-(-7) + (-6) - [(+4) + (-8) \times (-2)] =$

b) $(-3) \times (-8) + (-3) - [(+4) \times (-3) + (+12)] =$

$\boxed{5}$ Propriedade distributiva. *No módulo 9.3, à página 18, você já estudou a propriedade distributiva da multiplicação no conjunto N. Portanto, é só aplicá-la agora no conjunto Z.*

a) Em relação à adição: Para multiplicar no conjunto N uma soma indicada por um número, pode-se multiplicar cada uma das parcelas e somar os resultados.

$a(b+c) = ab + ac$, quaisquer que sejam a,b,c, em N.

Observe essa propriedade na multiplicação em Z:

$$[(+5) + (+2)] \times (-3). \quad \begin{cases} (+7) \times (-3) = -21 \\ [(+5) \times (-3)] + [(+2) \times (-3)] = \\ = (-15) + (-6) = -21 \end{cases}$$

$$[(+4) + (-3)] \times (+5). \quad \begin{cases} (+1) \times (+5) = +5 \\ [(+4) \times (+5)] + [(-3) \times (+5)] = \\ = (+20) + (-15) = +5 \end{cases}$$

b) Em relação à subtração: Para multiplicar no conjunto N uma diferença indicada por um número, pode-se multiplicar cada um dos termos e subtrair os resultados.

$a(b-c) = ab - ac$, quaisquer que sejam a,b,c, em N.

Veja agora a mesma propriedade na multiplicação em Z:

$$[(-2) + (+9)] \times (-6) \quad \begin{cases} [(-2) + (-9)] \times (-6) = (-11) \times (-6) = +66 \\ [(-2) \times (-6)] + [(+9) \times (-6)] = \\ = (+12) + (+54) = (+12) + (+54) = +66 \end{cases}$$

RECOMENDAÇÃO NECESSÁRIA.

Pedimos-lhe que estude com todo o interesse essa propriedade da multiplicação, pois ela será aplicada muitas vezes nos próximos módulos de álgebra.

Como recurso de fixação, faça, numa ficha, um lembrete sobre:

- a regra de sinais de adição;
- a troca da subtração pela adição do número simétrico;
- a regra de sinais na multiplicação, regra que servirá também para a divisão;
- a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração.

DIVISÃO DE NÚMEROS INTEIROS

A divisão de números inteiros não lhe oferece maiores dificuldades. Você opera com o valor absoluto e aplica a mesma regra de sinais da multiplicação.

Observe:

$(-32) \div (-8) = +4$ $\qquad$ $(+27) \div (+9) = +3$

$(-32) \div (+8) = -4$ $\qquad$ $(+27) \div (-9) = -3$

Regra de sinais:

> Na divisão em Z o quociente de dois números de mesmo sinal é positivo e de sinais contrários é negativo.

Ilustremos essa mesma regra:

$$\left.\begin{matrix} (+) \div (+) \\ (-) \div (-) \end{matrix}\right\} \text{ sinais iguais, quociente mais } (+)$$

$$\left.\begin{matrix} (+) \div (-) \\ (-) \div (+) \end{matrix}\right\} \text{ sinais contrários, quociente menos } (-)$$

Quando a divisão não é exata, deixamo-la indicada.

Exemplos:

$(+7) \div (+4) = +\frac{7}{4}$ $\qquad$ $(-2) \div (+5) = -\frac{2}{5}$

$(+12) \div (+7) = +\frac{12}{7}$ $\qquad$ $(+4) \div (-13) = -\frac{4}{13}$

Os numerais $+\frac{7}{4}$, $+\frac{12}{7}$, $-\frac{2}{5}$, $-\frac{4}{13}$ pertencem ao Conjunto dos Números Racionais Q.

Esse conjunto, que estudaremos em módulos posteriores, é formado pelos números naturais, números inteiros e números fracionários positivos e negativos.

O ZERO NA DIVISÃO

Enumeremos os casos especiais.

1. Dividendo zero.

   Exemplo: $0 \div (-2) = ?$ ou $\frac{0}{-2} = ?$

É necessário procurar um número que, multiplicado por (-2), dê zero. Vejamos: $0.(-2) = 0$

Disso se conclui que zero dividido por qualquer número inteiro, diferente de zero, é igual a zero.

$0 \div (+10) = 0$ $\quad$ $0 \div (-35) = 0$ $\quad$ $0 \div (+47) = 0$

2. <u>Divisor zero.</u>
   <u>Exemplo:</u> $(-5) \div 0 = ?$ ou $\frac{-5}{6} = ?$

É necessário procurar um número que, multiplicado por zero, dê (-5).

Ora, não existe número inteiro que multiplicado por zero dê (-5) ou qualquer outro número inteiro.

Portanto, dividir qualquer número inteiro diferente de zero por zero é impossível.

$(-15) \div 0 = ?$ $\quad$ $(+47) \div 0 = ?$ $\quad$ $(-1) \div 0 = ?$

NOTA: *Em módulo próximo sobre "Conjunto Racional Q" esse conhecimento lhe será muito útil, pois você irá repetir muitas vezes que qualquer número racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, em que $b \neq 0$. Isto porque não existe solução para $b = 0$, isto é, para divisor zero.*

3. <u>Dividendo e divisor zero.</u>
   <u>Exemplo:</u> $0 \div 0 = ?$

É necessário procurar um número que, multiplicado por zero, dê zero.

Ora, qualquer número multiplicado por zero dá zero.

$0 \,\underline{|\, 0 \quad}$
$\quad 0$ ou 1, ou -3, ou +15...

Nesse caso, dizemos que $0 \div 0$ é <u>indeterminado</u>.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

EXERCÍCIO Nº21

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, EFETUE AS DIVISÕES:

a) $(-35) \div (+7) =$....
   $(+49) \div (-7) =$....
   $(+140) \div (+70) =$....
   $(+360) \div (-60) =$....

b) $(-45) \div (-32) =$....
   $(+78) \div (-49) =$....
   $(-35) \div (-12) =$....

c) $(+63) \div (+31) =$....
   $(+42) \div (-7) =$....
   $(+125) \div (-25) =$....
   $(-600) \div (+150) =$....

d) $(-120) \div (+30) =$....
   $(-400) \div (+40) =$....
   $(+75) \div (-25) =$....

EXERCÍCIO Nº 22

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA CALCULE AS EXPRESSÕES:

a) $[(-9+3) + (-7+4-2)] \div (-4) =$

b) $[(+6) - (+4) \times (-5)] \div (-13) =$

c) $|(+6) - (+5) \times (-3)] \div [(+7) \times (-3) - (-10)] =$

POTENCIAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

NOÇÕES BÁSICAS.

Em módulos anteriores já demos a você algumas noções preliminares sobre potenciação.

No estudo de decomposição de um número em fatores primos tivemos a ocasião de representar como potência alguns fatores repetidos. Vimos, assim, que a potência de um número é um produto de fatores iguais a esse número.

No módulo 26, página 17, explicamos que o número 81, decomposto em fatores primos, é igual ao fator 3 repetido 4 vezes: $81 = 3x3x3x3 \Leftrightarrow 81 = 3^4$. Dissemos ainda que o número escrito à direita e ao alto é chamado expoente e que o fator repetido é chamado base.

Observe:

5ª potência de 2 é igual a 32

$32 = 2^5$

5 ← (expoente)

2 ← (base)

32 ← (potência)

Exemplos:

a) $5^2 = 25 \longrightarrow 25 = 5x5 \Leftrightarrow 25 = 5^2$

Neste exemplo, 5 é base; 2 é o índice; 25 é a potência, isto é, quadrado de 5 ou segunda potência de 5.

b) $4^3 = 64 \longrightarrow 64 = 4x4x4 \Leftrightarrow 64 = 4^3$

Neste exemplo, 4 é a base; 3 é o índice e 64 é a terceira potência de 4 ou o cubo de 4.

4^3 lê-se: quatro ao cubo ou quatro elevado à terceira potência.

POTENCIAÇÃO

A operação que permite calcular a potência de um número é chamada potenciação.

EXERCÍCIO Nº 23

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA CALCULE O VALOR DE:

a) 4^2 = ____________________

7^3 = ____________________

8^2 = ____________________

b) 3^4 = ____________________

5^3 = ____________________

2^4 = ____________________

CARACTERÍSTICAS DA POTÊNCIA

Observe, a seguir, os casos particulares da potência.

a) $1^3 \Leftrightarrow 1x1x1 = 1$

$1^5 \Leftrightarrow 1x1x1x1x1 = 1$

$\boxed{\text{Toda potência de 1 é igual a 1.}}$

b) $0^2 \Leftrightarrow 0 \times 0 = 0$

$0^4 \Leftrightarrow 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$

Toda potência de zero (0) é igual a zero (0)

c) $6^1 = 6$

$7^1 = 7$

Qualquer número natural elevado à potência 1 é igual a ele mesmo.

d) $3^0 = 1$

$5^0 = 1$

Qualquer número natural elevado a zero (0) é igual a 1.

Todas as particularidades citadas repetem-se no conjunto dos números <u>inteiros</u>.

$(+3)^2 \Leftrightarrow (+3) \times (+3) = +9$
$(-3)^2 \Leftrightarrow (-3) \times (-3) = +9$
$(+3)^3 \Leftrightarrow (+3) \times (+3) \times (+3) = +27$
$(+4)^2 \Leftrightarrow (+4) \times (+4) = +16$
$(-6)^3 \Leftrightarrow (-6) \times (-6) \times (-6) = -216$
$(-2)^5 \Leftrightarrow (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -32$
$(-4)^3 \Leftrightarrow (-4) \times (-4) \times (-4) = -64$
$(-7)^2 \Leftrightarrow (-7) \times (-7) = +49$
$(-4)^2 \Leftrightarrow (-4) \times (-4) = +16$
$(-6)^2 \Leftrightarrow (-6) \times (-6) = +36$

<u>POTÊNCIA POSITIVA E NEGATIVA</u>

Observe que:

- a potência de um número <u>inteiro</u>, cuja base tem sinal positivo, é <u>positiva</u>;

- a potência de um número <u>inteiro</u>, cuja base tem sinal negativo, é <u>negativa</u> se o expoente for ímpar, e <u>positiva</u> se o expoente for par.
  Exemplifiquemos.

$$(-4)^2 = \underbrace{(-4) \times (-4)}_{+} = +16$$

$$(-3)^4 = \underbrace{(-3) \times (-3)}_{+} \times \underbrace{(-3) \times (-3)}_{+} = +81$$

$$(-4)^3 = \underbrace{(-4) \times (-4)}_{+} \times (-4) = -64$$

Seja o exemplo:

$(-2)^3 \div (-2)^3 = (-2)^{3-3} = (-2)^0$

Podemos também escrever:

$(-2)^3 \div (-2)^3 = (-8) \div (-8) = +1$

Logo, $(-2)^0 = +1$

O expoente zero indica que o dividendo e o divisor são iguais; daí o quociente 1.

Lembre-se: $\dfrac{(-2)^3}{(-2)^3} = +1$

De um modo geral:

> Qualquer número inteiro diferente de zero elevado a zero é igual a (+1)

EXERCÍCIO Nº 24

CALCULE O VALOR DE:

a) $(+10)^4 =$ ________
$(-6\ )^3 =$ ________
$(+3\ )^0 =$ ________
$(-5\ )^1 =$ ________

b) $(-4)^1 =$ _________
$(-2)^2 =$ _________
$(\ 0)^3 =$ _________
$(-1)^3 =$ _________

EXERCÍCIO Nº 25

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, CALCULE:

a) $(-3)^2 + (-2) \times (-3) - (+3) + (-3) =$

b) $\left[(-4)^2 - (-1) \times (-1)\right] : \left[(-1)^3 + (+2)^2\right] =$

c) $\left[(-5)^2 + (-2) \times (-3)\right] - (-4) =$

d) $(-2)^3 + (-2) \times (+3) - (-5) =$

e) $(5)^3 - (+2)^3 \times (-5)^2 - (+5) =$

f) $(-2)^3 + (-1)^2 - (+4) =$

RADICIAÇÃO

CONCEITO

Radiciação é a operação pela qual se determina a raiz de um número. É a operação que desfaz a potenciação.

Raiz é a quantidade que, tomada determinado número de vezes como fator, forma outra quantidade chamada potência.

Exemplo: 2 é a raiz quarta de 16.

$$\sqrt[4]{16} = 2 \Leftrightarrow 2^4 = 16$$

2 é a raiz quarta de 16 porque 2 elevado à 4ª potência é 16.

Nomenclatura.

O número de vezes que a raiz entra como fator é chamado índice, sendo as raizes denominadas pelos seus índices e indicadas pelo símbolo $\sqrt{}$, chamado radical. O índice está na abertura do radical e, debaixo deste, está o radicando.

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

4 ⟵ índice
$\sqrt{}$ ⟵ radical
2 ⟵ raiz
16 ⟵ radicando

A raiz segunda e a raiz terceira têm denominações próprias que são, respectivamente, raiz quadrada e raiz cúbica.

Leitura:

$\sqrt[2]{9} = 3$ Lê-se: Raiz quadrada de 9 é igual a 3.

É porque $3^2 = 9$;

$\sqrt[3]{8} = 2$ ——— Raiz cúbica de 8 é igual a 2.

É porque $2^3 = 8$;

$\sqrt[4]{81} = 3$ ——— Raiz quarta de 81 é igual a 3.

É porque $3^4 = 81$.

Na abertura do radical está o índice, cuja ausência indica que a raiz é quadrada, isto é, na raiz quadrada não se coloca índice.

Assim, temos: $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{64}$ (raiz quadrada de 16 , de 25 e de 64, respectivamente).

RAIZ QUADRADA DE NÚMEROS INTEIROS

Concluindo o presente capítulo, falemos rapidamente sobre raiz quadrada de números inteiros de sinal positivo e de sinal negativo.

- A raiz quadrada de um número inteiro de sinal positivo tem como resultado dois valores que são simétricos.

Exemplos:

$$\sqrt{+25} \begin{cases} +5 \\ -5 \end{cases} \quad \text{pois} \quad \begin{array}{l} (+5).(+5) = (+5)^2 = 25 \\ (-5).(-5) = (-5)^2 = 25 \end{array}$$

$\sqrt{+\ 64}$ $\begin{cases} +8 \\ -8 \end{cases}$ pois $\begin{array}{l} (+8).(+8) = (+8)^2 = 64 \\ (-8).(-8) = (-8)^2 = 64 \end{array}$

Esses números podem ser escritos abreviadamente assim:

$\sqrt{+\ 25} = \pm 5$ $\sqrt{+\ 64} = \pm 8$

Como vimos, há dois números cujos quadrados dão:

$25 \longrightarrow (+5)^2 = 25$ e $(-5)^2 = 25$;

$64 \longrightarrow (+8)^2 = 64$ e $(-8)^2 = 64$.

EXERCÍCIO Nº 26 (a)

ACHE AS SEGUINTES RAIZES:

$\sqrt{+49} =$_________ $\sqrt{+\ 225} =$___________ $\sqrt{+1} =$_________

$\sqrt{+100} =$________ $-\sqrt{+\ 144} =$___________ $-\sqrt{+169} =$_______

- Suponha o exemplo seguinte: -16. É possível achar um número cujo quadrado é -16? Não, pois:

$(+4)^2 = +16$ e $(-4)^2 = +16$

Não existe número inteiro que elevado ao quadrado dê como resultado -16.

Observe ainda: $(-4).(-4) = +16$: $(+4).(+4) = +16$

Na multiplicação, fatores de sinais iguais têm o produto com sinal positivo. Logo, $\sqrt{-16}$ não tem solução para números inteiros. Esse número pertence a outro conjunto numérico. A raiz de um número negativo é chamado número imaginário.

Em módulos posteriores falaremos, novamente, sobre os números imaginários.

RAÍZES EXATAS E INEXATAS

Se a raiz é quadrada e o radicando é uma segunda potência, então a raiz é exata.

No conjunto N

$\sqrt{16} = 4 \Rightarrow 4^2 = 16$

$\sqrt{64} = 8 \Rightarrow 8^2 = 64$

$\sqrt{81} = 9 \Rightarrow 9^2 = 81$

No conjunto Z

$\sqrt{16} = \pm 4 \Rightarrow 4^2$ ou $(-4)^2$

$\sqrt{64} = \pm 8 \Rightarrow 8^2$ ou $(-8)^2$

$\sqrt{81} = \pm 9 \Rightarrow 9^2$ ou $(-9)^2$

Se a raiz é cúbica e o radicando é uma terceira potência, então a raiz é exata.

No conjunto N

$\sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow 2^3 = 8$

$\sqrt[3]{125} = 5 \Rightarrow 5^3 = 125$

$\sqrt[3]{343} = 7 \Rightarrow 7^3 = 343$

Se a raiz é a quarta e o radicando é a quarta potência, a raiz é exata.

No conjunto N

$\sqrt[4]{16} = 2 \Rightarrow 2^4 = 16$

$\sqrt[4]{81} = 3 \Rightarrow 3^4 = 81$

$\sqrt[4]{625} = 5 \Rightarrow 5^4 = 625$

No conjunto Z

$\sqrt{16} = \pm 2 \Rightarrow 2^4$ ou $(-2)^4$

$\sqrt{81} = \pm 3 \Rightarrow 3^4$ ou $(-3)^4$

$\sqrt{625} = \pm 5 \Rightarrow 5^4$ ou $(-5)^4$

Se o radicando não é uma potência de igual índice ou de índice múltiplo da raiz, então esta é inexata.

- Observe os quadrados: $\boxed{1;4;9;16;25;36;49;64;81;\text{ etc.}}$

Qualquer radicando que esteja entre os quadrados dá raiz aproximada.

Exemplo I.

$$\sqrt{6} \begin{cases} > \sqrt{4} \\ < \sqrt{9} \end{cases}$$ (Raiz de 6 maior que raiz de 4 e menor que raiz de 9)

$\sqrt{6} \sim 2$ (Raiz quadrada de 6 é aproximadamente 2, por falta).

$\sqrt{6} \sim 3$ (Raiz quadrada de 6 é aproximadamente 3, por excesso).

Exemplo II.

$$\sqrt{18} \begin{cases} > \sqrt{16} \\ < \sqrt{25} \end{cases}$$ (Raiz de 18 maior que raiz de 16 e menor que raiz de 25).

$\sqrt{18} \sim 4$ (Raiz quadrada de 18 é aproximadamente 4, por falta).

$\sqrt{18} \sim 5$ (Raiz quadrada de 18 é aproximadamente 5, por excesso).

- Observe os cubos: $\boxed{1;8;27;64;125;216;343;512;729;\text{ etc.}}$

Qualquer radicando que esteja entre os cubos dá raiz aproximada.

Exemplo I

$$\sqrt[3]{36} \begin{cases} > \sqrt[3]{27} \\ < \sqrt{64} \end{cases}$$ (Raiz de 36 maior que raiz de 27 e menor que raiz de 64)

$\sqrt[3]{36} \sim 3$ (Raiz cúbica de 36 é aproximadamente 3, por falta)

$\sqrt[3]{36} \sim 4$ (Raiz cúbica de 36 é aproximadamente 4, por excesso).

Exemplo II.

$$\sqrt[3]{250} \begin{cases} > \sqrt[3]{216} \\ < \sqrt[3]{343} \end{cases}$$ (Raiz cúbica de 250 maior que raiz cúbica de 216 e menor que raiz cúbica de 343).

$\sqrt[3]{250} \sim 6$ (Raiz cúbica de 250 é aproximadamente 6, por falta).

$\sqrt[3]{250} \sim 7$ (Raiz cúbica de 250 é aproximadamente 7, por excesso).

Exemplo III.

$$\sqrt[3]{630} \begin{cases} > \sqrt[3]{512} \\ < \sqrt{729} \end{cases}$$ (Raiz cúbica de 630 maior que raiz cúbica de 512 e menor que raiz cúbica de 729).

$\sqrt[3]{630} \sim 8$ (Raiz cúbica de 630 é aproximadamente 8, por falta).

$\sqrt[3]{630} \sim 9$ (Raiz cúbica de 630 é aproximadamente 9, por excesso).

Como em módulos posteriores voltaremos ao exame de raízes, é conveniente que você memorize os nove primeiros quadrados e cubos para reconhecer as raízes exatas.

Em N:

$1^2 = 1$; $\sqrt{1} = 1$;	$2^2 = 4$; $\sqrt{4} = 2$;	$3^2 = 9$; $\sqrt{9} = 3$;	etc.
$1^3 = 1$; $\sqrt[3]{1} = 1$;	$2^3 = 8$; $\sqrt[3]{8} = 2$;	etc.	

EXERCÍCIO Nº 26 (B)

a) RISQUE AS RAÍZES EXATAS:

$\sqrt{64}$ $\quad \sqrt{25}$ $\quad \sqrt[3]{61}$ $\quad \sqrt[3]{81}$ $\quad \sqrt[3]{64}$

b) COMPLETE: (Conjunto N)

$8^2 = 64 \longrightarrow \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_} = 8 \qquad 4^3 = \_\_\_\_\_ \longrightarrow \sqrt[3]{\_\_\_} = 4$

$9^2 = \_\_\_\_ \longrightarrow \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_} = 9 \qquad 3^3 = \_\_\_\_\_ \longrightarrow \sqrt[3]{\_\_\_} = 3$

$7^2 = \_\_\_\_ \longrightarrow \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_} = 7 \qquad 6^3 = \_\_\_\_\_ \longrightarrow \sqrt[3]{\_\_\_} = 6$

7 ________ $\sqrt{36}$ $\qquad$ 5 ________ $\sqrt{25}$ $\qquad$ 6 _______ $\sqrt{64}$

2 ________ $\sqrt[3]{8}$ $\qquad$ 3 ________ $\sqrt[3]{27}$ $\qquad$ 4 _______ $\sqrt[3]{27}$

VII - PÓS-TESTE

Você já estudou bastante, portanto é chegado o momento de verificarmos se atingiu os objetivos deste módulo.

Se não se sente ainda em condições de submeter-se ao presente teste, então reexamine com todo o interesse e aplicação a matéria estudada. Se se acha apto, mãos à obra.

Leia atentamente as perguntas propostas, pense, reflita e...boa sorte !

1. COLOQUE OS NÚMEROS INTEIROS EM ORDEM CRESCENTE:
   $(+7)$; (-10); 0; $(+4)$; (-2).

   ----

2. CALCULE A EXPRESSÃO:
   $\left[(-3)+(+7)\right] - \left[(-9)+(+7)\right] =$

3. DÊ O NÚMERO SIMÉTRICO DE:

-5	
+3	

2	
-7	

-9	

4. EFETUE AS ADIÇÕES:
   $(+10)+(-3)+(+6)+(-4)+(-6) =$

5. EFETUE A MULTIPLICAÇÃO, APLICANDO A PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA:
   $\left[(-5)+(+3)\right] \cdot (-6) =$

6. CALCULE O VALOR DE:
   $(-3)^2 =$ $\qquad$ $(-2)^3 =$ $\qquad$ $(-1)^4 =$ $\qquad$ $(-8)^0 =$ $\qquad$ $-(-5)^2 =$

7. CALCULE AS RAÍZES DOS SEGUINTES NÚMEROS INTEIROS:
   $\sqrt{+81} =$ $\qquad$ $\sqrt[3]{+64} =$ $\qquad$ $\sqrt{+36} =$ $\qquad$ $\sqrt[4]{+81} =$ $\qquad$ $\sqrt[3]{+27} =$

8. COMPLETE AS IGUALDADES, VALENDO-SE DAS EQUIVALÊNCIAS:
   $2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} =$ $\qquad$ $5^3 = 125 \Rightarrow \sqrt[3]{125} =$

   $12^2 = 144 \Rightarrow \sqrt{144} =$ $\qquad$ $4^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{\ldots} = 4$

   $3^4 = 81 \Rightarrow \sqrt[4]{\ldots} = 3$

9. EFETUE:
   $25 - \left[(+12) : (+2) \cdot (-3)\right] \cdot (-5)^0 =$

10. REPRESENTE SIMBOLICAMENTE O CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS:
Z = { -- }

VIII - PROCEDIMENTOS E ATIVIDADES - NÍVEL DE SUPORTE

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO EM Z

Reexame com atenção a parte introdutória deste módulo, assim como os tópicos referentes à adição e à subtração.

Após a leitura, efetue os exercícios do presente item, tendo em mente que a subtração é sempre trocada pela adição do simétrico.

EXERCÍCIO Nº 27

FAÇA AS OPERAÇÕES, OS COMPLEMENTOS E RESPONDA AS PERGUNTAS ABAIXO:

a)

X	X + (+7)
+9	+9+7 = +16
+3	
+10	
0	
-3	
-4	

X	X + (-3)
+3	+3-3 = 0
+2	
0	
-3	
-2	
-10	

X	X + (0)
-10	-10+0 = -10
- 7	
0	
+ 2	
+ 4	
+ 5	

b) OS TOTAIS E AS PARCELAS DOS EXERCÍCIOS ACIMA SÃO TODOS DO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS ? R.__________________________

c) COMPLETE COM OS SINAIS = OU ≠ , DE MODO A OBTER SENTENÇAS VERDADEIRAS:

(-4) + (+9) = _________ (+9) + (-4)

(-3) + (+5) = _________ (+5) + (-3)

(+7) + (-3) = _________ (-3) + (+7)

d) APLIQUE A PROPRIEDADE COMUTATIVA EM (+3) + (-2)

EXERCÍCIO Nº 28

COMPLETE A PRIMEIRA QUESTÃO E RESPONDA A SEGUNDA:

a) Se (+3) + x = (+3), então x = __________

Se (-2) + a = (-2), então a = __________

Se (+40) + z = (+40), então z = __________

b) EXISTE ELEMENTO NEUTRO NA ADIÇÃO EM Z ?
RESPOSTA:________________________________

EXERCÍCIO Nº 29

COMPLETE AS EXPRESSÕES:

a) $\underbrace{[(+5) + (-3)]}$ + (+7) = ___________________________ + (+7) =

b) (+5) + $\underbrace{[(-3) + (+7)]}$ = _________________________________ =

EXERCÍCIO Nº 30

RESPONDA A PRIMEIRA QUESTÃO E COMPLETE AS DUAS SEGUINTES:

a) A que propriedade se refere a proposição:

Quaisquer que sejam os números inteiros a,b,c, a + (b+c) = (a+b) + c

RESPOSTA:____

b) COMPLETE:

(+3) + __________ = 0 __________ + (-8) = 0

(-6) + __________ = 0 __________ + (-9) = 0

c) A SOMA DE DOIS NÚMEROS SIMÉTRICOS É IGUAL A__________________

EXERCÍCIO Nº 31

COMPLETE:

a) Subtraindo dois números inteiros, obtemos o mesmo resultado que somando ao minuendo o______________do subtraendo.

b) (+5) - (+3) = (+5) + (___) (+7) - (+6) = (+7) + (___)

(-4) - (-5) = (-4) + (___) (+4) - (-8) = (+4) + (___)

EXERCÍCIO Nº 32

a) COMPLETE:

Toda subtração em Z é substituida por uma:__________________

b) Leia com atenção a afirmativa que segue:

O oposto de uma soma é a soma dos opostos.

- (a+b) = (-a) + (-b).

Aplique, então, esse conhecimento em:

- (-3+4) = (______) + (_______) =

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO EM Z

Reveja os tópicos que tratam da multiplicação e da divisão em Z. Procure compreender bem o que foi explicado a respeito, capacitando-se, assim, a efetuar os exercícios que propomos à seguir.

Não esqueça de memorizar a regra de sinais:

(+).(+)
(-).(-) sinais iguais, produto (+)

(+).(-)
(-).(+) sinais diferentes, produto (-)

EXERCÍCIO Nº 33

Exercite-se, agora, na multiplicação, revisando também as propriedades dessas operações.

a) COMPLETE A TÁBUA:

X	-3	-2	-1	0	1	2	3	
-3				0				
-2				0				
-1				0				
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1				0				
2				0				
3				0				

Observe que os produtos ficarão assim:

```
        0
        0
   +    0    -
        0
    000000000
        0
   -    0    +
        0
        0
```

b) NA TÁBUA QUE VOCÊ ACABOU DE PREENCHER, O PRODUTO DE FATORES REPRESENTADOS POR NÚMEROS INTEIROS É TAMBÉM UM NÚMERO INTEIRO ?
R:____

EXERCÍCIO Nº 34

Efetue a operação e observe o emprego de uma das propriedades da multiplicação.

a) COMPLETE A TÁBUA:

a	b	a.b	b.a
-2	+4		
+3	-5		
-7	+4		
+2	+8		

b) A MULTIPLICAÇÃO GOZA DA PROPRIEDADE COMUTATIVA EM Z ?
RESPOSTA:___________________________________

EXERCÍCIO Nº 35

Tome atenção à regra de sinais e, ao mesmo tempo, ao emprego de uma das propriedades da multiplicação.

a) MULTIPLIQUE:

$$\begin{cases} [(-3).5].(-2) = \\ (-3).[5.(-2)] = \end{cases} \qquad \begin{cases} [(-7).(-4)].(-3) = \\ (-7).[(-4).(-3)] = \end{cases}$$

b) A MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS GOZA DA PROPRIEDADE ASSOCIATIVA EM Z ? R.____________________

c) COMPLETE O QUADRO ABAIXO:

a	b	c	b+c	a(b+c)	ab + ac
-2	+4	-3	1	-2	
+3	-1	-5	-6	-18	
+4	-3	+6	3	12	
-5	+6	-4	2	-10	

$\underbrace{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}_{a.\ (b+c)}$

d) OBSERVE AS DUAS ÚLTIMAS COLUNAS DO QUADRO ACIMA E DIGA O QUE OS PRODUTOS IGUAIS ESTÃO PROVANDO ?
RESPOSTA:____________________________________

EXERCÍCIO Nº36

Atente para a propriedade da multiplicação.

a) EFETUE:

3.0 = _______ 0.0 =________ (-5).0 =________ 0.(-7) = ____

7.0 = _______ 0.5 =________ (+3).0 =________ 0.(+9) = ____

11.0 = _______ 0.18=________ (-15).0 =________ 0.(+11)= ____

b) A MULTIPLICAÇÃO EM Z TAMBÉM GOZA DA PROPRIEDADE DO____________
____

c) QUANDO UM PRODUTO É NULO, PELO MENOS UM DOS FATORES É NULO,COMO NO EXEMPLO:
0.(-4) = 0 ; então, se
a.(-3) = 0 ; 0, a =______

EXERCÍCIO Nº37

Observe bem a primeira questão para apreender o que se pede.

a) COMPLETE:

(-3).1 = ____________ (-3).(-1) =____________

(+5).1 = ____________ (+5).(-1) =____________

(-7).1 = ____________ (-7).(-1) =____________

b) EXISTE ELEMENTO NEUTRO NA MULTIPLICAÇÃO EM Z ? QUAL É ELE ?
RESPOSTA:____

DIVISÃO.

Para dividir dois números inteiros quaisquer, efetuamos a operação dos valores absolutos e aplicamos a regra de sinais.
Regra que você não deve esquecer:

sinais iguais ⟶ resultado positivo
sinais diferentes ⟶ resultado negativo.

EXERCÍCIO Nº38

COMPLETE AS TÁBUAS:

a	b	a : b
-8	-2	4
+8	-1	-8
-6	+3	-2
+12	-3	-4

a	b	a : b
-12	-4	3
-12	+3	-4
+ 4	+1	4
+ 4	-1	-4

NOTA: Mais uma vez chamamos a sua atenção para o relacionamento dos termos da divisão:

$$\boxed{\text{dividendo} = \text{divisor} \times \text{quociente}}$$

Observe o exemplo seguinte:

$\frac{-36}{\square} = -4 \longrightarrow -4 \times 9 = -36$

$\frac{+27}{\square} = -9 \longrightarrow -9 \times -3 = +27$

$\frac{-63}{\square} = -7 \longrightarrow -7 \times 9 = -63$

EXERCÍCIO Nº39

COMPLETE:

$\frac{-81}{-\square} = +9 \longrightarrow$ _____________

$\frac{-72}{-\square} = 8 \longrightarrow$ _____________

$\frac{-46}{-\square} = 23 \longrightarrow$ _____________

POTENCIAÇÃO

Tratemos inicialmente de potenciação no conjunto de números naturais (N).

<u>Potência</u> de um número é um produto de fatores iguais a esse número.

Vejamos:

2ª potência de 5 é igual a 25

$$5^2 = 25$$

2 ← expoente
25 ← potência
5 ← base

3ª potência de 2 é igual a 8

$$2^3 = 8$$

4ª potência de 3 é igual a 81

$$3^4 = 81$$

A operação efetuada acima é chamada <u>potenciação</u>.

<u>Potenciação</u> é a operação que permite calcular a potência de um número.

<u>Casos especiais da potenciação</u>:

- Toda potência de 1 é igual a 1:

$$1^3 = 1 \; ; \; 1^0 = 1$$

- Toda potência de zero é igual a zero:

$$0^5 = 0 \; ; \; 0^1 = 0$$

- Qualquer número natural elevado a zero é igual a 1 :

$$2^0 = 1 \; ; \; 10^0 = 1$$

- Qualquer número natural elevado a 1 é igual a ele mesmo :

$$6^1 = 6 \; ; \; 11^1 = 11$$

<u>Potenciação em Z</u>

Tudo que você aprendeu no conjunto dos números naturais (N) é válido para os números positivos no conjunto dos números inteiros (Z).

Focalizemos no conjunto de inteiros os números negati vos.

$(-3)^2 = 9$ $\qquad$ $(-2)^2 = 4$

$(-3)^3 = -27$ $\qquad$ $(-2)^3 = -8$

$(-3)^4 = 81$ $\qquad$ $(-2)^4 = 16$

Pelos exemplos dados você pode deduzir que a potência de um número inteiro, cuja base tem sinal negativo, é positiva se o expoente for par e negativa se o expoente for ímpar.

Casos especiais.

- Qualquer número inteiro diferente de zero, elevado a zero, é igual a "1 positivo" (+1):

$(-4)^0 = 1$ $\qquad$ $(+7)^0 = 1$

- Qualquer número inteiro elevado a "1 positivo" (+1), é igual a ele mesmo:

$(-4)^1 = -4$ $\qquad$ $(+7)^1 = 7$ $\qquad$ $(-5)^1 = -5$

Expoente negativo.

Os casos de expoente negativo trataremos em módulo posterior. Por ora, basta você saber que se trata do inverso do expoente positivo. Assim,

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3} \quad ; \quad 2^{-1} = \frac{1}{2^1} \quad ; \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2}$$

EXERCÍCIO Nº 40

a) COMPLETE A NOMENCLATURA:

$5^3 = 125$

----

b) QUAL A 2ª POTÊNCIA DE 5,6 e 7 ?

-------------------- -------------------- --------------------

c) QUAL A 3ª POTÊNCIA DE 2,4,e 1 ?

-------------------- -------------------- --------------------

d) ACHE OS VALORES DE:

4^2 =______; 7^3 =_______; 2^6 =_______; 7^4 =_______; 6^3 =_____

RADICIAÇÃO

Radiciação é a operação inversa à da potenciação.

Exemplo:

$$4^3 = 64 \Leftrightarrow \sqrt[3]{64} = 4$$

São os seguintes os termos e sinais envolvidos na potenciação:

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

índice da raiz

radical

raiz

radicando

Quando o radicando é uma potência do mesmo grau que o índice da raíz, esta é exata.

Observe: $\sqrt[4]{16} \Leftrightarrow \sqrt[4]{2^4} = 2$

$\sqrt[3]{27} \Leftrightarrow \sqrt[3]{3^3} = 3$

$\sqrt{25} \Leftrightarrow \sqrt[2]{5^2} = 5$

EXERCÍCIO Nº41

a) COLOQUE RADICANDOS QUE DÃO RAÍZES EXATAS:

$\sqrt[3]{\ } =$ ______; $\sqrt[2]{\ } =$ ______; $\sqrt[4]{\ } =$ ______; $\sqrt[2]{\ } =$ ______.

b) COMPLETE:

$2 = \sqrt[2]{\ }$ $\qquad 5 = \sqrt[3]{\ }$ $\qquad 7 = \sqrt[2]{\ }$ $\qquad 4 = \sqrt[3]{\ }$

c) MARQUE OS RADICAIS QUE DÃO RAÍZES INEXATAS:

$\sqrt{32}$ $\qquad \sqrt[3]{32}$ $\qquad \sqrt[4]{100}$ $\qquad \sqrt[4]{80}$ $\qquad \sqrt[4]{81}$

Apresentamos, a seguir, uma tabela de quadrados e raízes quadradas para que você a consulte quando da resolução de exercícios.

X - PÓS-TESTE - NÍVEL DE SUPORTE

Esperamos que tenha compreendido tudo o que lhe explicamos no presente módulo, se é que realmente estudou-o com interesse e vontade de aprender.

Leia com atenção as questões propostas neste Pós-Teste, pense bem na resposta a dar, escreva corretamente e tenha certeza de que se sairá a contento.

Felicidades.

1. RISQUE NOS ITENS a E b O MENOR NÚMERO INTEIRO, ASSIM COMO O MAIOR, NOS ITENS c E d:

a)	+9	-10	+4	-3	-7
b)	0	-4	-8	-12	-16
c)	-3	+2	0	+1	-1
d)	-10	-9	-8	-7	-6

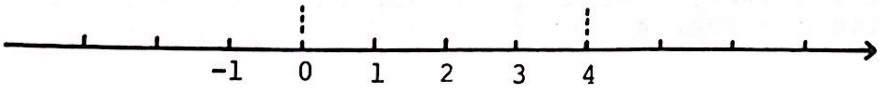
2. EFETUE:

(-2) . (+3) =
(+7) x (+2) =
(+4) (-5) =
(-8) . (-3) =

3. MARQUE COM SAGITAIS OS SINAIS DE OPERAÇÃO:

(-3) + (+3) - (-4) x (-2) : (-1)

4. DEMONSTRE NA RETA NUMERADA A ADIÇÃO DE (+4) e (-3) :



5. COMPLETE AS TÁBUAS ABAIXO, ESCREVENDO OS NÚMEROS INTEIROS SIMÉTRICOS :

a	-a
+2	-(+2) = -2
-1	
+6	
+10	

a	-a
-3	-(-3) = +3
-7	
-10	
+6	

6. EFETUE:

$(+15) : (-3) + \left[(-2).(-3) + (-1) \right] =$

7. APLIQUE A PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA NA MULTIPLICAÇÃO SEGUINTE:

$[(-2) + (+4)] .(-7) =$

8. CALCULE EM Z:

$\sqrt{+100} =$ $8^2 =$ $\sqrt{+900} =$ $(-7)^3 =$ $(-5)^2 =$

9. RESOLVA:

$\sqrt{25} + (-4) - \left\{ (-2)^4 + (-3).(-6) \right\} : (+17) =$

TABELA DE QUADRADOS E RAÍZES QUADRADAS

N	N^2	$\sqrt{N}$	N	N^2	$\sqrt{N}$	N	N^2	$\sqrt{N}$
1	1	1.000	51	2601	7.141	101	10201	10.050
2	4	1.414	52	2704	7.211	102	10404	10.100
3	9	1.732	53	2809	7.280	103	10609	10.149
4	16	2.000	54	2916	7.348	104	10816	10.198
5	25	2.236	55	3025	7.316	105	11025	10.247
6	36	2.449	56	3136	7.483	106	11236	10.296
7	49	2.646	57	3249	7.550	107	11449	10.344
8	64	2.828	58	3364	7.616	108	11604	10.392
9	81	3.000	59	3481	7.681	109	11881	10.440
10	100	3.162	60	3600	7.746	110	12100	10.488
11	121	3.317	61	3721	7.810	111	12321	10.536
12	144	3.464	62	3844	7.874	112	12544	10.583
13	169	3.606	63	3969	7.937	113	12769	10.630
14	196	3.742	64	4096	8.000	114	12996	10.677
15	225	3.873	65	4225	8.012	115	13225	10.724
16	256	4.000	66	4356	8.124	116	13456	10.770
17	289	4.123	67	4489	8.185	117	13689	10.817
18	324	4.243	68	4624	8.246	118	13924	10.863
19	361	4.359	69	4761	8.307	119	14161	10.909
20	400	4.472	70	4900	8.367	120	14400	10.954
21	441	4.583	71	5041	8.426	121	14641	11.000
22	484	4.690	72	5184	8.485	122	14884	11.045
23	529	4.796	73	5329	8.544	123	15129	11.091
24	576	4.899	74	5476	8.602	124	15376	11.136
25	625	5.000	75	5625	8.660	125	15625	11.180
26	676	5.099	76	5776	8.718	126	15876	11.225
27	729	5.196	77	5929	8.775	127	16129	11.269
28	748	5.292	78	6084	8.832	128	16384	11.314
29	841	5.385	79	6241	8.888	129	16641	11.358
30	900	5.477	80	6400	8.944	130	16900	11.402
31	961	5.568	81	6561	9.000	131	17161	11.446
32	1024	5.657	82	6724	9.055	132	17424	11.489
33	1089	5.745	83	6889	9.110	133	17689	11.533
34	1156	5.831	84	7056	9.165	134	17956	11.576
35	1225	5.916	85	7225	9.220	135	18225	11.619
36	1296	6.000	86	7396	9.274	136	18496	11.662
37	1369	6.083	87	7569	9.327	137	18769	11.705
38	1444	6.164	88	7744	9.381	138	19044	11.747
39	1521	6.245	89	7921	9.434	139	19321	11.790
40	1600	6.325	90	8100	9.487	140	19600	11.832
41	1681	6.403	91	8281	9.539	141	19881	11.874
42	1764	6.481	92	8464	9.592	142	20164	11.916
43	1849	6.557	93	8649	9.644	143	20449	11.958
44	1936	6.633	94	8836	9.695	144	20736	12.000
45	2025	6.708	95	9025	9.747	145	21025	12.042
46	2116	6.782	96	9216	9.798	146	21316	12.083
47	2209	6.856	97	9409	9.849	147	21609	12.124
48	2304	6.928	98	9604	9.899	148	21904	12.166
49	2401	7.000	99	9801	9.950	149	22201	12.207
50	2500	7.071	100	10000	10.000	150	22500	12.247

10. EFETUE AS OPERAÇÕES:

$$(-3)^3 : (-9) + \sqrt{64} - (+3) =$$

XI - REFERÊNCIAS E SUGESTÕES BIBLIOGRÁFICAS

1. FERNANDES, Ary e outros. "*Matemática - 6*", para a 6ª série do 1º grau. São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1974.

2. GRUEMA (Grupo de Ensino de Matemática Atualizada - USP) " *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau*".Vol.6 , 6ª série. Por ANNA AVERBUCH e outros. Supervisão de L.H. Jaci Monteiro. São Paulo, Editora Nacional, 1974.

3. NEDEM (Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática -C.E Paranã). "*Ensino e Difusão do Ensino de Matemática , 1º grau*", 2º Vol. São Paulo, Editora do Brasil S.A. 1967 .

4. QUINTELLA, Ary. "*Matemática para a 1ª série ginasial*". 122º edição. São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1967.

5. Livros de 6ª e 7ª séries do ensino fundamental.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

EXERCÍCIO Nº1

COMPLETAMENTO DE TABELAS.

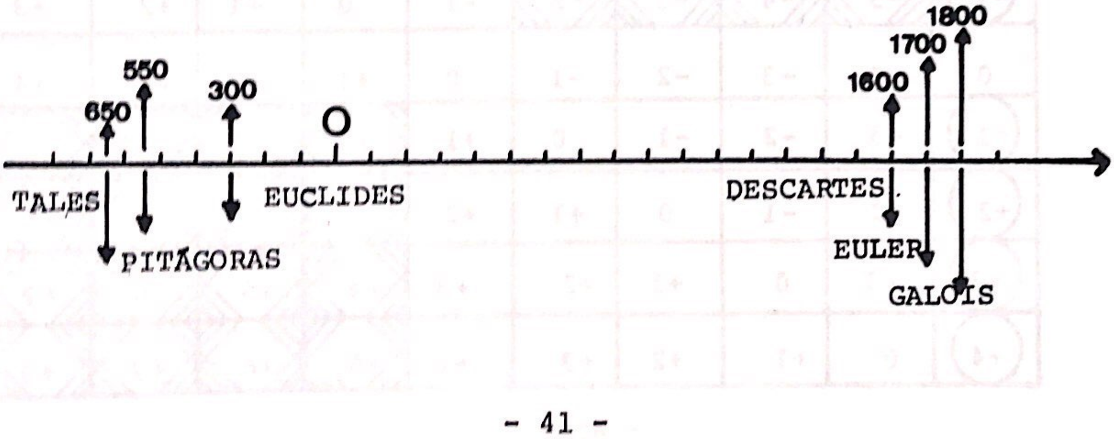
a) 1g; 5p; 3p; 4p; 0

b) 4g: (9,5); (10,6); (5,1); o 1º número tem 4 unidades mais que o 2º.
   3p: (7,10); (6,9); (10,13); o 1º número tem 3 unidades menos que o 2º
   0g: (8,8); (10,10); (0,0); números iguais.
   7g: (10,3); (8,1); (7,0); o 1º número tem 7 unidades mais que o 2º.
   0p: (8,8); (1,1); (0,0); números iguais.

EXERCÍCIO Nº2

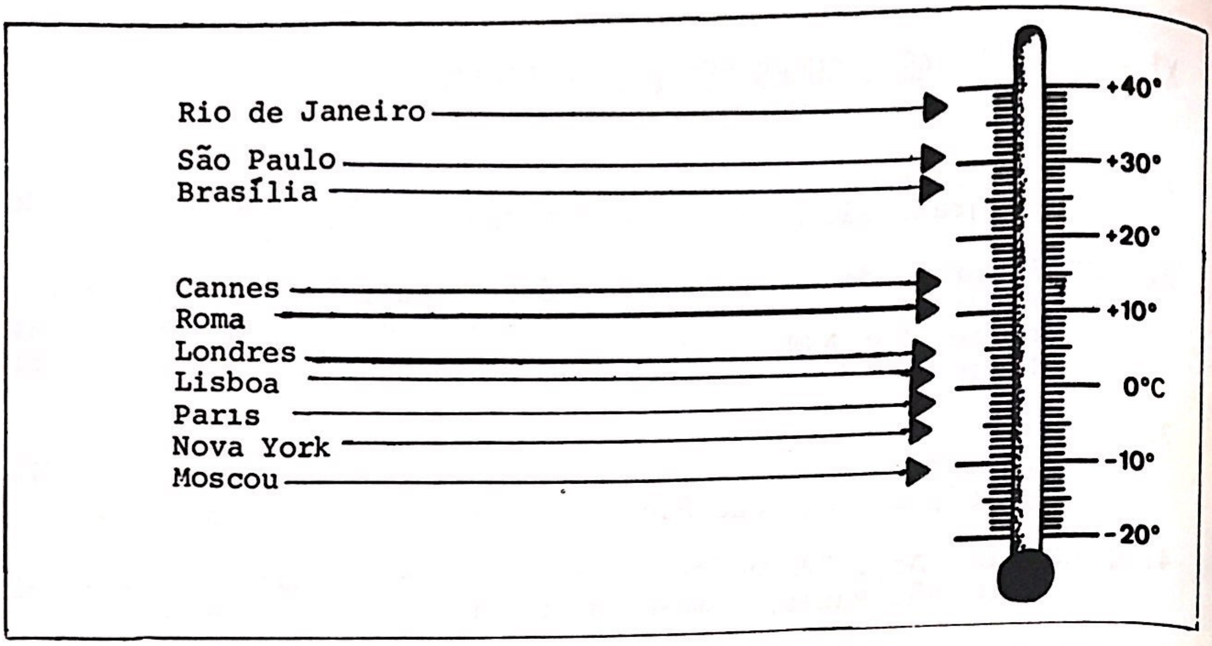
Cópia dos pares.
Observe se na cópia o 1º elemento do par tem sinal positivo e o 2º tem sinal negativo.

EXERCÍCIO Nº3



EXERCÍCIO Nº4

Cidades e temperaturas correspondentes.



EXERCÍCIO Nº5

Completamento.

a	- a	
+7 -125 +10	-(+7) -(-125) -(+10)	-7 +125 -10

a	- a	
-40 +a -x	-(-40) -(+a) -(-x)	+40 - a + x

EXERCÍCIO Nº6

Completamentos.

a. Rui: -2; José: +1; Ari: +9; Mário: +5; Saul: -7.

b.

+	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+ 4
-4	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
-3	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1
-2	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2
-1	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
0	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4
+1	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
+2	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+ 5	+6
+3	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7
+4	0	+1	+2	+3	+1	+5	+6	+7	+8

c.

Valores de X	X + (+5)
+9	+9 + (+5) = +14
0	0 + (+5) = +5
-5	-5 + (+5) = 0
-7	-7 + (+5) = -2

Valores de X	X + (-4)
+8	+8 + (-4) = +4
+1	+1 + (-4) = -3
-4	+4 + (-4) = 0
-6	-6 + (-4) = -10

d. Correspondência.
$-9 \longrightarrow -6 \longrightarrow -3 \longrightarrow 0 \longrightarrow +3 \longrightarrow +6$

e. Como descobrir.
Examinando a expressão: X $\longrightarrow$ X + (+3); X é o termo menor, ou seja, -9.

f. Associar o par ordenado à soma.
(+2,-4) $\longrightarrow$ -2; (+10,-4) $\longrightarrow$ +6; (-2,-6) $\longrightarrow$ -8; (-5+7) $\longrightarrow$ 2.

EXERCÍCIO Nº 7

Completamento.

+	-3	+8	X
-3	-6	+5	+3
+8	+5	+16	14
X	+3	14	12

+	a	b	c
a	m	-4	+3
b	-4	n	-6
c	+3	-6	P

EXERCÍCIO Nº 8

Completamento.

a) Efetuando a adição. Resposta : Cr$ 1.620,00.

b) Aplicando a propriedade associativa. Resposta: Cr$ 7.700,00 ÷ -Cr$ 6.080,00 = Cr$ 1.620,00.

EXERCÍCIO Nº9

Completamento.
a (+2) + (-2) = 0
b (-5) + (+5) = 0
c (+4) + (-4) = 0
d (-8) + (+8) = 0

EXERCÍCIO Nº10

Adições:

(-3)
(+5)
(+7)
(-8)

(+2) + (-2)

(-3)
(+5)
(+7)
(-8)

EXERCÍCIO Nº11

a) Preenchimento de lacunas.

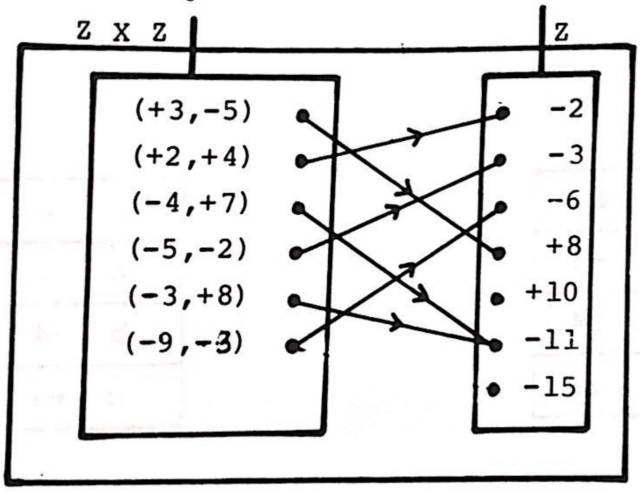
= (+5) + (+8) = +13
= (-6) + (-11) = -17
= (+4) + (-7) = -3
= (+113) + (+97) = +210
= (-1010) + (-101) = -1111

b) Completamento.

...número simétrico ou oposto.

EXERCÍCIO Nº12

Associar o par à diferença.



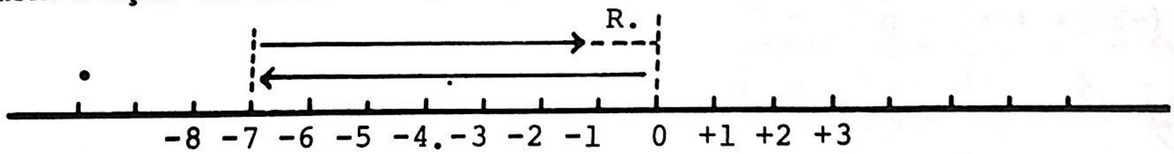
EXERCÍCIO Nº13

Completamento.

a-b	b-a	(a-b)-c	a-(b-c)	0-a	a-0
-5	+5	-6	-4	+2	-2
-9	+9	-7	-11	+5	-5
+1	-1	+4	-2	+6	-6

EXERCÍCIO Nº14

Demonstração na reta numerada.



RESPOSTA: -1

EXERCÍCIO Nº15

Subtrações.

a. (+15) + (-3) = +12
b. (+15) + (+3) = +18
c. (-15) + (-3) = -18
d. (-15) + (+3) = -12

e. (+4) + (-11) = -7
f. (+4) + (+11) = +15
g. (-4) + (-11) = -15
h. (-4) + (+11) = +7

EXERCÍCIO Nº16

Expressões.

a) 31;

b) -5

EXERCÍCIO Nº 17

Multiplicações.

a) -8; b) -21; c) -150.

EXERCÍCIO Nº18

Operações.

a) -630;

b) +1290

EXERCÍCIO Nº19

a) -1; b) -5; c) 16; d) 18; e) 75.

EXERCÍCIO Nº20

Expressões.

a) -19;

b) 21

EXERCÍCIO Nº21

Divisões.

a) -5; -7; +2; -6

b) $+\frac{45}{32}$; $-\frac{78}{49}$; $+\frac{35}{12}$

c) $+\frac{63}{31}$; -6; -5; -4

d) -4; -10; -3.

EXERCÍCIO Nº22

Expressões.

a) $+\frac{11}{4}$; b) -2 ; c) $-\frac{21}{11}$

EXERCÍCIO Nº23

a) $4^2 = 16$ $7^3 = 343$ $8^2 = 64$

b) $3^4 = 81$ $\qquad$ $5^3 = 125$ $\qquad$ $2^4 = 16.$

EXERCÍCIO Nº24

a) $(+10)^4 = 10.000$

$(-6)^3 = -216$

$(+3)^0 = 1$

$(-5)^1 = -5$

b) $(-4)^1 = -4$

$(-2)^2 = 4$

$(0)^3 = 0$

$(-1)^3 = -1$

EXERCÍCIO Nº25

a) 9; b) +5; c) 35; d) -9; e) -80; f) -11

EXERCÍCIO Nº26A

$\sqrt{+49} = \pm 7;$ $\quad \sqrt{+100} = \pm 10;$ $\quad \sqrt{+225} = \pm 15;$

$\sqrt{+114} = \pm 12;$ $\quad \sqrt{+1} = \pm 1;$ $\quad \sqrt{+169} = \pm 13$

EXERCÍCIO Nº26B

a) $\sqrt{\cancel{64}}$ $\quad \sqrt{\cancel{25}}$ $\quad \sqrt[3]{\cancel{64}}$

b) $8^2 = 64 \longrightarrow \sqrt{64} = 8$ $\qquad 4^3 = 64 \longrightarrow \sqrt[3]{64} = 4$

$9^2 = 81 \longrightarrow \sqrt{81} = 9$ $\qquad 3^3 = 27 \longrightarrow \sqrt[3]{27} = 3$

$7^2 = 49 \longrightarrow \sqrt{49} = 7$ $\qquad 6^3 = 216 \longrightarrow \sqrt[3]{216} = 6$

c) $7 > \sqrt{36};$ $\quad 5 = \sqrt{25};$ $\quad 6 < \sqrt{64};$

$2 = \sqrt[3]{8};$ $\quad 3 = \sqrt[3]{27};$ $\quad 4 > \sqrt[3]{27}.$

EXERCÍCIO Nº27

a)

X	X + (+7)
+9	9 + 7 = 16
+3	+3 + 7 = 10
+10	+10 + 7 = 17
0	0 + 7 = 7
-3	-3 + 7 = 4
-4	-4 + 7 = 3

X	X + (-3)
+3	+3 - 3 = 0
+2	+2 - 3 = -1
0	0 - 3 = -3
-3	-3 - 3 = -6
-2	-2 - 3 = -5
-10	-10 - 3 = -13

X	X + (0)
-10	-10 + 0 = -10
-7	-7 + 0 = -7
0	0 + 0 = 0
+2	+2 + 0 = +2
+4	+4 + 0 = +4
+5	+5 + 0 = +5

b) Sim.

c) O sinal de Completamento ē = (igual).

d) (-2) + (+3) = 1

EXERCÍCIO Nº28

a) Se...então X = 0
Se...então $\underline{a}$ = 0
Se...então $\underline{z}$ = 0

b) Sim

EXERCÍCIO Nº29

Completamento.
a) = + 2 + 7 = + 9
b) = + 5 + 4 = + 9

EXERCÍCIO Nº30

a) Propriedade Associativa
b) Completamento:
(+3) + (-3) = 0
(-6) + (+6) = 0
(+8) + (-8) = 0
(+9) + (-9) = 0
c) Zero (0).

EXERCÍCIO Nº31

a) ... simétrico ...
b) Completamento:
= (+5) + (-3)
= (-4) + (+5)
= (+7) + (-6)
= (+4) + (+8)

EXERCÍCIO Nº32

a) ...adição...
b) -(-3 + 4) = (+3) + (-4)

EXERCÍCIO Nº33

a) Completamento:
(+9) (+6) (+3)
(+6) (+4) (+2)
(+3) (+2) (+1)

(-3) (-2) (-1)
(-6) (-4) (-2)
(-9) (-6) (-3)

(-3) (-6) (-9)
(-2) (-4) (-6)
(-1) (-2) (-3)

(+1) (+2) (+3)
(+2) (+4) (+6)
(+3) (+6) (+9)

EXERCÍCIO Nº34

a) Completamento:

a.b	b.a
- 8	- 8
-15	-15
-28	-28
+16	+16

b) Sim

EXERCÍCIO Nº35

a) $\begin{cases} = (-15)(-2) = 30 \\ = (-3)(-10) = 30 \end{cases}$ $\begin{cases} = (28)(-3) = -84 \\ = (-7)(+12) = -84 \end{cases}$

b) Sim.

c) Completamento:

b + c	a (b+c)	ab + ac
+1	-2	(-8)+(+6) = -2
-6	-18	(-3)+(-15) = -18
+3	+12	(-12)+(24) = 12
+2	-10	(-30)+(+20) = -10

d) Provam que a multiplicação em Z goza da propriedade distributiva.

EXERCÍCIO Nº36

a) Todos os produtos são zero.

b) ...elemento absorvente...

c) $\underline{a} = 0$

EXERCÍCIO Nº37

a) = (-3) = (+3)
= (+5) = (-5)
= (-7) = (+7)

b) Existe sim. O elemento neutro da multiplicação em Z é (+1).

EXERCÍCIO Nº38

a : b
+4
-8
-2
-4

a : b
+3
-4
+4
-4

EXERCÍCIO Nº39

Completamento:

⟶ -9 x 9 = -81
⟶ 8 x (-9) = -72
⟶ 23 x (-2) = -46

PROVIR - resultar; advir; vir; originar-se.

RESPECTIVO - que diz respeito a cada um em particular ou em separado; correspondennte.

RETIRADA - importância em dinheiro que uma pessoa, dentro dos limites de seu depósito ou crédito, retira do estabelecimento bancário com o qual opera.

SALDO - é a diferença existente entre o débito e o crédito de uma conta. Essa diferença mostra o que se "deve" ou se "tem a haver".

EXERCÍCIO Nº40

a) $\underbrace{5}_{\text{base}}{}^{\overbrace{3}^{\text{expoente}}} = \underbrace{125}_{\text{potência}}$

b) 2ª potência de 5,6 e 7: 25,36 e 49

c) 3ª potência de 2,4 e 1: 8,64 e 1.

d) $4^2 = 16$; $7^3 = 343$; $2^6 = 64$; $7^4 = 2401$; $6^3 = 216$.

EXERCÍCIO Nº41

a) Verificar se são quadrados debaixo de raiz quadrada; cubos debaixo de raiz cúbica, etc.

b) Completamento:

$2 = \sqrt{4}$; $5 = \sqrt[3]{125}$; $7 = \sqrt{49}$; $4 = \sqrt[3]{64}$

c) $\cancel{\sqrt{32}}$ $\cancel{\sqrt[3]{32}}$ $\cancel{\sqrt[4]{100}}$ $\cancel{\sqrt[4]{80}}$

XII - GLOSSÁRIO

ATENTAR - ver com atenção; observar; reparar em; refletir sobre; atender a.

DEFICIT - palavra latina que significa falta ou deficiência, e que se aplica em finanças para exprimir que um orçamento falhou, isto é, que a arrecadação não cobriu a despesa. Contrapõe-se a superavit que indica haver excesso de arrecadação ou que esta supera o cálculo.

DEPÓSITO - ato pelo qual uma pessoa recebe uma coisa alheia, com a obrigação de guardá-la e restituí-la à própria que lhe confiou tal incumbência. Na contabilidade bancária, a expressão depósito representa o título da escrituração no qual se registram todas as verbas ou somas confiadas por clientes à guarda de instituição de crédito.

DISTINÇÃO - diferença; dessemelhança; desigualdade; diversidade; desconformidade.

EBULIÇÃO - fervura; estado de um líquido que ferve.

EQUIDISTANTE - que dista igualmente (de dois ou mais pontos).

EXTRATO - coisa que se extraiu de outra; cópia; resumo. Extrato de conta - resumo que se faz de uma conta-corrente, a fim de ser enviado ao correntista ou ao titular da mesma, para efeito de conferência.

LACUNA - vazio; espaço em vão; vão; interrupção; falta; intermissão; omissão.

LANÇAMENTO - registro que se faz em um livro de escrituração mercantil ou conta.

NOMENCLATURA - vocabulário de nomes; coletivo de nomes; conjunto de termos peculiares a uma arte ou ciência; terminologia.

GABARITO DO PÓS-TESTE

Município:______________________________ Data da correção:__________

Cursista:____

Número do Módulo:___80_ Percentagem:_______________

1. Ordem crescente:
   (-10) ; (-2) ; 0 ; (+4) ; (+7)

2. Resultado da expressão:
   +6

3. Número simétrico.

-5	+5
+3	-3

2	-2
-7	+7

-9	+9

4. Resultado de adições.
   +3

5. Resultado de multiplicação.
   $\left[(-5).(-6)\right] + \left[(+3).(-6)\right] = (+30)+(-18) = +12$

6. Cálculo do valor.

   $(-3)^2 = 9;\ (-2)^3 = -8;\ (-1)^4 = 1;\ (-8)^0 = 1;\ -(-5)^2 = -25$

7. Cálculo de raízes. (Conjunto Z)

   $\sqrt{+81} = \pm 9;\ \sqrt[3]{+64} = 4;\ \sqrt{+36} = \pm 6;\ \sqrt[4]{+81} = \pm 3;\ \sqrt[3]{+27} = 3$

8. Completando de igualdades. (Conjunto N)

   $2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$ $\quad 5^3 = 125 \Rightarrow \sqrt[3]{125} = 5$

   $12^2 = 144 \Rightarrow \sqrt{144} = 12$ $\quad 4^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{16} = 4$

   $3^4 = 81 \Rightarrow \sqrt[4]{81} = 3$

9. Resultado de expressão.
   $5 - (-2).(1) = 7$

10. Representação simbólica.
    $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 ...\}$

    ou $Z = \{... -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...\}$

____

ORIENT. DA APRENDIZAGEM LOCAL

GABARITO DO PÓS-TESTE - Nível de Suporte

Município:______________________________Data da Correção:_________

Cursista:____

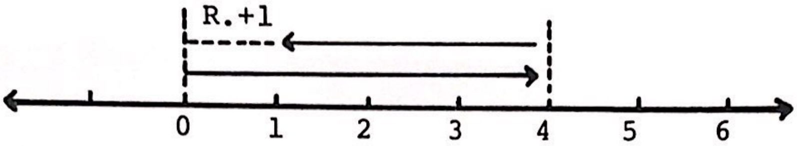
Número do Módulo:___80________ Percentagem:______________

1. Indicação de números inteiros.
   a) -10
   b) -16
   c) $+2$
   d) -6

2. Resultados de operações.
   (-6); $(+14)$; (-20); $(+24)$.

3. Indicação dos sinais de operação.
   $(-3) + (+3) - (-4) \times (-2) + (-1)$

4. Adição na reta numerada.



5. Completamento.

a	-a
+2	$-(+2) = -2$
-1	$-(-1) = 1$
+6	$-(+6) = -6$
+10	$-(+10) = -10$

a	-a
-3	$-(-3) = +3$
-7	$-(-7) = +7$
-10	$-(-10) = +10$
+6	$-(+6) = -6$

6. Operações de números inteiros.
   $(+15) : (-3) + \left[(+6 + (-1)\right] = -5 + 5 = 0$

7. Multiplicação de inteiros.
   $(+14) + (-28) = -14$

8. Cálculo de raízes e potências.
   $\sqrt{100} = \pm 10$ $8^2 = 64$ $\sqrt{900} = \pm 30$ $(-7)^3 = -343$
   $(-5)^2 = 25$

9. Operações de inteiros.
   $+1 - 2 = -1$

10. Resultado de expressão.
    $3 + 8 - 3 = 8$

____

ORIENT. DA APRENDIZAGEM LOCAL

18

MEC - SEPS

SEEC – CETEPAR

PROJETO HAPRONT

82

GOVERNO DO ESTADO DO PARANÁ

SECRETÁRIO DE ESTADO DA EDUCAÇÃO

CENTRO DE TREINAMENTO DO MAGISTÉRIO DO ESTADO DO PARANÁ

CETEPAR

PROJETO "HAPRONT"

APRESENTAÇÃO

A Secretaria de Ensino de 1º e 2º Graus, do Ministério da Educação e Cultura, está promovendo a experimentação de modelo curricular de habilitação de professores, que se constitui instrumento de busca de melhores padrões para a formação profissional. Em resposta a realidade que desafia os meios de ensino convencionais, esse modelo adota metodologia de educação à distância, sendo veiculado por uma série de 250 módulos de ensino. Este é um dos módulos da série.

Cada módulo é unidade composta de: objetivos, pré-teste, procedimentos e atividades básicas, pós-teste; procedimentos e atividades de suporte, pós-teste;procedimentos e atividades de enriquecimento.

Os módulos são encaminhados aos professores cursistas, para serem estudados em seus locais de trabalho. Por esse processo, deverão ser habilitados, a nível de 2º Grau, professores não titulados, em exercício, em classes de 1a. a 4a. séries.

O Projeto, nesta etapa, efetiva a sua expansão, abrangendo oito Municípios e atingindo 800 professores não titulados. Está sendo executado pela Secretaria de Estado da Educação, do Estado do Paraná, através do CETEPAR, com o nome de Projeto HAPRONT: Habilitação de Professores Não Titulados.

C I Ê N C I A S

OPERANDO COM PROPOSIÇÕES

MÓDULO Nº 82

ELABORAÇÃO: CLÉLIA TAVARES MARTINS

TÍTULO : OPERANDO COM PROPOSIÇÕES.

I - ASSUNTO : PROPOSIÇÕES. NOÇÃO INTUITIVA DE OPERAÇÃO COM PROPOSIÇÕES. QUANTIFICADORES: EXISTENCIAL E UNIVERSAL. CONJUNTO UNIVERSO E CONJUNTO VERDADE.

II - MATÉRIA : CIÊNCIAS.

DISCIPLINA : MATEMÁTICA.

III - PRÉ-REQUISITOS : TER NOÇÃO DE LINGUAGEM SIMBÓLICA.

IV - OBJETIVOS :

OBJETIVO GERAL :

Utilizar procedimentos variados para a demonstração de fatos e propriedades.

OBJETIVO TERMINAL :

Aplicar a conjunção "e", a disjunção "ou", o condicional "se...então" e o conetivo "se e somente se", na formação das proposições compostas, tendo como apoio concreto os blocos lógicos.

OBJETIVOS OPERACIONALIZADOS :

AO FINAL DESTE MÓDULO O CURSISTA DEVERÁ SER CAPAZ DE:

a) reconhecer proposição, determinando o seu valor lógico;

b) identificar os casos mais simples de operações com proposições, com o auxílio dos blocos lógicos;

c) reconhecer os quantificadores e aplicá-los adequadamente.

V - PRÉ-TESTE

Antes de proceder à leitura do presente módulo, é indispensável que você se submeta a este Pré-Teste.

Leia atentamente as perguntas que seguem e, com calma e vontade de acertar, dê as respostas cabíveis.

Boa sorte!

1. ESCREVA "V" NOS PARÊNTESES, SE A AFIRMAÇÃO FOR VERDADEIRA, E "F", SE FOR FALSA:

   a) ( ) Curitiba é a capital do Brasil;
   b) ( ) todo número par é maior que o número ímpar;
   c) ( ) oito é maior que sete.

2. ACRESCENTE O MODIFICADOR NÃO À PROPOSIÇÃO "q" E DÊ O VALOR LÓGICO DA NOVA PROPOSIÇÃO RESULTANTE:

   q: O sal é doce (F)
   $\sim$q: ____ ( )

3. DADAS AS PROPOSIÇÕES:
   p: O bloco lógico é triangular (V),
   q: O bloco lógico é vermelho (V).

   Preencha as lacunas:
   $p \wedge q$: ____ ( )

4. SEJAM AS PROPOSIÇÕES SIMPLES:

   p: O bloco lógico é azul (V),
   q: O bloco lógico é circular (V).

   Preencha as lacunas:
   $p \vee q$: ____ ( )

5. SEJAM AS PROPOSIÇÕES SIMPLES:

   p: O bloco lógico é fino (V),
   q: O bloco lógico é retangular (V).

   Forme a proposição composta pelo conetivo "se... então".

   Dê o valor lógico da proposição $p \longrightarrow q$.

   $p \longrightarrow q$: ____ ( )

6. DADAS AS PROPOSIÇÕES:
   p: O bloco lógico é vermelho,
   q: O bloco lógico é grosso.

   a) Aplique o conetivo "se e somente se" para formar a proposição composta :

      $p \longleftrightarrow q$. ____

   b) Represente o conjunto verdade da proposição composta:

      $p \longleftrightarrow q$.

      V = { ____

7. ESCREVA, NOS PARÊNTESES, "V" SE A AFIRMAÇÃO FOR VERDADEIRA E "F", SE FOR FALSA:

a) ( ) $y - 4 = 5$ é uma proposição;

b) ( ) o quantificador existencial é representado por $\exists$:

c) ( ) o quantificador universal é representado por $\forall$:

8. DETERMINE O CONJUNTO SEGUINTE, SABENDO QUE A SENTENÇA ABERTA É: "x é dia da semana que se escreve com a inicial d".

U = { dias da semana }

V = { ---------------------------- }

9. DADO O CONJUNTO-UNIVERSO U = { 4,5,6,7,8,9,10 } ; DETERMINE O VALOR LÓGICO (V OU F) DE CADA UMA DAS PROPOSIÇÕES:

a) $(\forall x)$ (x é número par) . ( )

b) $\exists$ x | x é número primo. ( )

GABARITO DO PRÉ-TESTE

1. a) (F)
   b) (F)
   c) (V)
2. $\sim$ q: O sal não é doce. (V)
3. p $\wedge$ q: O bloco lógico é triangular e vermelho (V)
4. p $\vee$ q: O bloco lógico é azul ou circular (V).
5. p $\longrightarrow$ q: Se o bloco lógico é fino, então é retangular (V)
6. a) p $\longleftrightarrow$ q: O bloco lógico é vermelho se e somente se é um bloco grosso (V).

   b) V = { blocos de todas as cores porém, dos vermelhos, somente os grossos. }
7. a) (F)
   b) (V)
   c) (V)
8. V = { domingo }
9. a) (F)

   b) (V)

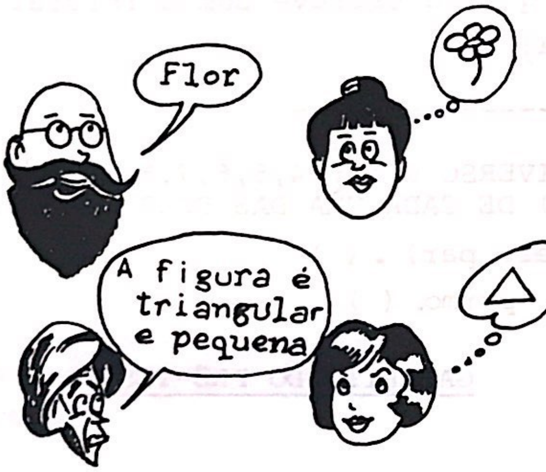
VI - PROCEDIMENTOS E ATIVIDADES

PROPOSIÇÕES E OPERAÇÃO COM PROPOSIÇÕES

PROPOSIÇÕES: A linguagem, falada ou escrita, é de suma importância em nossa vida.

Quando ouvimos ou lemos uma palavra ou reunião de palavras, estas são, imediatamente, associadas à imagem que nos vem à mente.

Exemplifiquemos:



A referência sobre "A figura é triangular e pequena" é um exemplo de sentença ou proposição. Exprime um pensamento definido e que pode ser falso ou verdadeiro.

Em matemática, estudaremos apenas proposições declamativas, isto é, aquelas sobre as quais podemos afirmar, com certeza, se são verdadeiras ou falsas.

Vejamos outros exemplos:

a) O Mal. Deodoro da Fonseca foi o 1º Presidente do Brasil - proposição verdadeira;

b) Todo número natural, terminado em cinco, é par - proposição falsa;

c) Nove mais oito é igual a dez $(9 + 8 = 10)$ - proposição falsa;

d) Todo número natural, terminado em três, é ímpar - proposição verdadeira;

e) Cinco é menor que nove $(5 < 9)$ - proposição verdadeira;

f) Roma é capital da França - proposição falsa;

g) Curitiba é capital do Paraná - proposição verdadeira.

Como vimos, os exemplos dados são de proposições que afirmam alguma "coisa" ou "um pensamento", verdadeiro ou falso.

VALOR LÓGICO DE UMA PROPOSIÇÃO - Valor lógico de uma proposição é a afirmação que fazemos sobre a verdade ou falsidade da mesma.

Toda proposição tem um, e um só, dos dois valores lógicos: falso (F) ou verdadeiro (V).

O valor lógico da proposição "Seis menos quatro é igual a dois $(6 - 4 = 2)$" é verdadeiro (V).

E o da proposição três ao quadrado vale cinco $(3^2 = 5)$ é falso (F).

EXERCÍCIO DE FIXAÇÃO

EXERCÍCIO 1

NOS PARÊNTESES ABAIXO, ESCREVER "V", PARA AS PROPOSIÇÕES VERDADEIRAS E "F", PARA AS PROPOSIÇÕES FALSAS:

a. ( ) Todos os números naturais são pares;
b. ( ) Marte é um satélite da Terra;
c. ( ) Sete mais quatro é igual a onze;
d. ( ) Seis é múltiplo de dois;
e. ( ) Janeiro é um mês de vinte e oito dias;
f. ( ) Fevereiro é um mês de trinta dias;
g. ( ) O açúcar é doce.

EXERCÍCIO 2

PINTE AS FIGURAS △, □, ◯, DE VERMELHO, AZUL E AMARELO, RESPECTIVAMENTE, E ESCREVA "V" OU "F" NOS PARÊNTESES, CONFORME AS PROPOSIÇÕES SEJAM VERDADEIRAS OU FALSAS:

a. ◯ A figura é amarela e circular. ( )
b. ◯ A figura é vermelha e circular. ( )
c. ◯ A figura é amarela e retangular. ( )
d. □ A figura é azul e retangular. ( )
e. □ A figura é vermelha e retangular. ( )
f. △ A figura é amarela e circular. ( )
g. △ A figura é azul e retangular. ( )
h. △ A figura é vermelha e triangular. ( )
i. □ A figura é amarela e retangular. ( )

COMO REPRESENTAR UMA PROPOSIÇÃO - Representamos uma proposição usando letras minúsculas do nosso alfabeto: p,q,r,s, etc.

Exemplos: p: Jorge é escultor;
q: Cinco é menor que sete;
r: Oito é número par.

PROPOSIÇÕES SIMPLES E COMPOSTAS - Observe atentamente o quadro seguinte, em que mostramos a diferença entre proposições simples e compostas.

PROPOSIÇÕES SIMPLES	PROPOSIÇÕES COMPOSTAS
- O bloco lógico é azul.	- O bloco lógico é azul e circular.
- O bloco lógico é fino.	- O bloco lógico é fino ou pequeno.
- O bloco lógico é vermelho.	- Se o bloco lógico é vermelho, então é fino.
- O bloco lógico é pequeno.	- O bloco lógico é azul "se e somente se" é fino.

As proposições compostas podem ser formadas pela combinação de duas ou mais proposições. As proposições compostas do quadro dado, são formadas de apenas duas proposições.

CONETIVOS:

As palavras que usamos para formar novas proposições, a partir de outras, são chamadas conetivos.

Note, nos exemplos seguintes, os conetivos grifados:

- O número quatro é par e o número três é ímpar;
- O sal não é doce;
- O bloco lógico é fino ou pequeno;
- Se o bloco lógico é amarelo, então é fino:
- O bloco lógico é azul se e somente se é grosso.

Os conetivos dos exemplos dados são os usados na lógica matemática.

Valor lógico das proposições compostas.

Toda proposição simples é, como dissemos, verdadeira ou falsa.

Toda proposição composta tem o seu valor lógico dependendo somente dos valores lógicos das proposições simples componentes, ficando por eles univocamente determinado.

Trabalharemos, neste módulo, apenas com proposições compostas formadas por proposições verdadeiras.

NOÇÃO DE OPERAÇÃO

Diariamente todos nós fazemos operações.
Mas o que é uma operação ?

Por exemplo:

" - Rita tem um chapéu";
é uma situação.

" - Colocar o chapéu na cabeça"
indica uma ação, isto é, uma operação que envolve chapéu e cabeça.

" - Rita está com o chapéu na cabeça"
indica uma situação modificada.

Pois bem, o que Rita fez foi uma operação, entre tantas outras que faz, cotidianamente. Fez uma operação em que a situação modificada é o resultado dessa mesma operação.

Existem, porém, certas operações com nomes e regras estabelecidas, tais como: operações de adição e subtração com números naturais; operações com conjuntos, etc. as quais você está habituado a efetuar.

As operações matemáticas são mais precisas que as atividades que modificam situações.

OPERAÇÕES COM PROPOSIÇÕES

Passemos, agora, ao estudo intuitivo das operações com proposições. Operações que fazem parte da "lógica" matemática e que são as seguintes:

- negação;
- conjunção;
- disjunção;
- condicional;
- bicondicional.

EMPREGO DO MOFIFICADOR "NÃO". SÍMBOLO (~).

NEGAÇÃO:

A palavra não é utilizada para modificar o valor lógico das proposições. Por isso é conhecida como "modificador não", e representada pelo sinal ~ . Assim, a negação de uma proposição "p" é representada por "~ p", que se lê: não p.

Consideramos a proposição "p" verdadeira:

p: A Lua é satélite da Terra.

Se juntarmos à proposição "p" o modificador não, temos:

~ p: A Lua não é satélite da Terra. (Proposição falsa).

Vejamos outro exemplo:

q: São Paulo é capital da África. (Proposição falsa).

Introduzindo o "modificador não", a proposição "q" fica:
~ q: São Paulo não é capital da África. (Proposição verdadeira).

Do exposto, podemos concluir que, de maneira geral,

- se introduzirmos o "modificador não" numa proposição verdadeira (V), ela se torna (F);
- se introduzirmos o "modificador não" numa proposição falsa (F), ela se torna verdadeira (V).

EXERCÍCIO 3

ACRESCENTE O "MODIFICADOR NÃO" ÀS PROPOSIÇÕES SEGUINTES:

a) q: Colombo descobriu o Brasil. (F)
~ q: ______________________ ( )

b) r: Londres está na Inglaterra. ( )
~ r: ______________________ ( )

c) s: Todas as violetas são azuis. ( )
~ s: ______________________ ( )

d) p: Quatro é maior que seis. ( )
~ p: ______________________ ( )

EXERCÍCIO 4

PINTE AS FIGURAS ◯, △, ☐, DE AZUL, VERMELHO E AMARELO, RESPECTIVAMENTE, E, EM SEGUIDA, ACRESCENTE O "MODIFICADOR NÃO" ÀS PROPOSIÇÕES QUE SEGUEM, INDICANDO SEUS VALORES LÓGICOS.

MODELOS:

△ p: A figura é amarela. (F)

~ p: A figura não é amarela. (V)
○ q: A figura é azul. (V)
~ q: A figura não é azul. (F)

EXERCÍCIOS:

a) □ p: A figura é vermelha. ( )
~ p: ____________________ ( )

b) △ r: A figura é azul. ( )
~ r: ____________________ ( )

c) □ s: A figura é amarela. ( )
~ s: ____________________ ( )

d) ○ p: A figura é vermelha. ( )
~ p: ____________________ ( )

EXERCÍCIO 5

PINTE ○ E □ DE VERMELHO E INDIQUE OS VALORES LÓGICOS DAS PROPOSIÇÕES:

○ r: A figura é vermelha. ( )
~ r: A figura é não vermelha. ( )

□ r: A figura é azul. ( )
~ r: A figura é não azul. ( )

Logo, de um modo geral,

- se r é V, então "~ r" é (...);
- se r e F, então "~ r" é (...);

CONJUNÇÃO E (∧)

O conetivo "e", utilizado para unir duas proposições, é representado pelo símbolo ∧ .

A proposição p ∧ q é chamada "proposição composta por conjunção" (e conetivo ou conjuntivo).

Para melhor compreesão a respeito, resolva os seguintes exercícios, extraídos de livro editado recentemente para o ensino de 1º Grau.

EXERCÍCIO 6

NUMA GINCANA OS CONCORRENTES DEVIAM TRAZER OBJETOS DE CORES E FORMAS VARIADAS. FOI ENTÃO SORTEADA UMA REGRA QUE INDICARIA OS GANHADORES. E A REGRA SORTEADA FOI: "VOCÊ GANHA UM BRINDE SE TIVER OBJETO VERMELHO E ESFÉRICO".

ASSINALE OS GANHADORES, ESCREVENDO "X" NOS PARÊNTESES:

a) Maria tem uma bola de bilhar. ______________ ( )
b) João tem um dado preto. ______________ ( )
c) Lúcia tem uma bola vermelha. ______________ ( )
d) Ana tem um livro vermelho. ______________ ( )
e) Paulo tem um funil amarelo. ______________ ( )

f) Félix tem um globo geográfico ________________ ( )

g) Beto tem uma bola de gude vermelha ________________ ( )

EXERCÍCIO 7

Seja $A = \{1,3\}$ e $B = \{1,2\}$. $A \cap B$ é o conjunto dos elementos que pertencem a A e pertencem a B.

- COMPLETE COM O SINAL $\in$, OU $\notin$, AS LACUNAS:

1 ____________ A	1 ____________ B	1 ____________ $A \cap B$
2 ____________ A	2 ____________ B	2 ____________ $A \cap B$
3 ____________ A	3 ____________ B	3 ____________ $A \cap B$
4 ____________ A	4 ____________ B	4 ____________ $A \cap B$

De um modo geral, em Matemática, duas proposições ligadas pelo conetivo "e" formam uma proposição composta verdadeira, quando as duas proposições iniciais são verdadeiras.

ATIVIDADES COM BLOCOS LÓGICOS

Apanhe o seu jogo de Blocos Lógicos. Nossas atividades serão realizadas, de agora em diante, com o auxílio desse material.

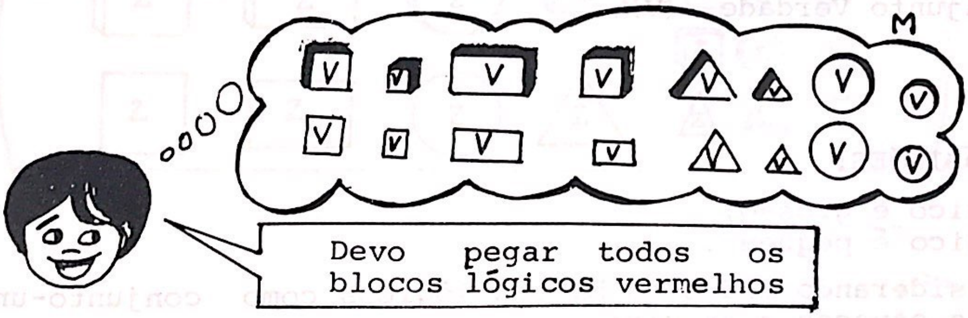
No módulo nº 10, páginas 37 a 48, você recordará a operação união e intersecção, entre conjuntos, efetuadas com o auxílio dos blocos lógicos. Essas operações serão aplicadas nos exercícios que ora apresentamos.

Consideramos todos os blocos lógicos e as seguintes proposições:

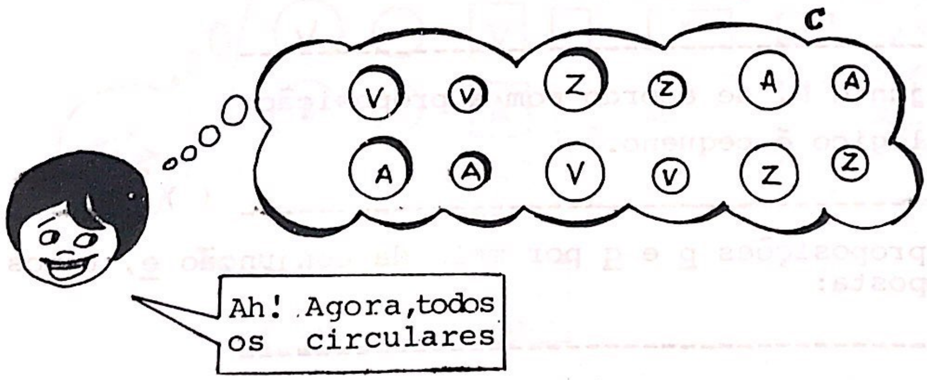
p: o bloco lógico é vermelho. (V)
q: o bloco lógico é circular. (V)

Para melhor compreensão, siga o seguinte raciocínio de Ritinha:

p: o bloco lógico é vermelho.

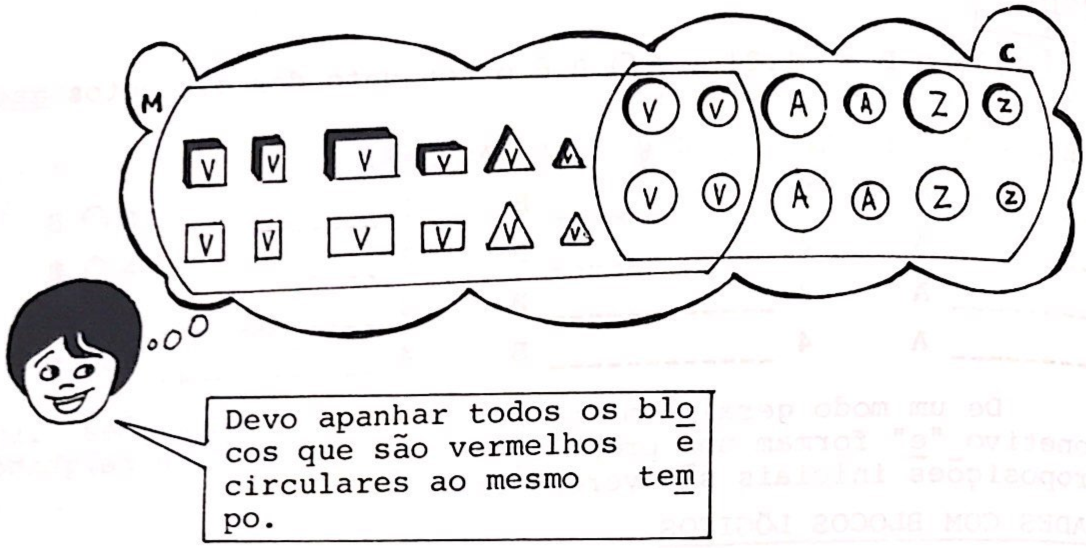


q: o bloco lógico é circular.

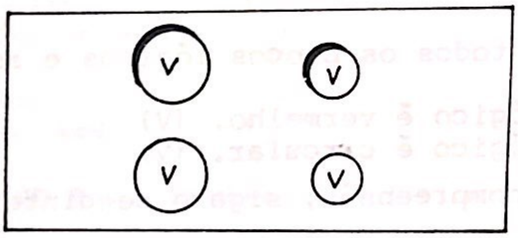


Ligando as proposições, por meio do conetivo e, obtemos uma nova proposição, ou seja, $p \wedge q$, que se lê: "p e q".

$p \wedge q$: O bloco lógico é vermelho e circular.



Note, que por meio da intersecção, Ritinha obteve o novo conjunto: o de blocos vermelhos e circulares. Isto porque os vermelhos e circulares pertencem ao mesmo tempo aos conjuntos M e C.



$V = M \cap C$

Os elementos que tornam $p \wedge q$ V pertencem a $M \cap C$, a que chamaremos Cohjunto Verdade. (V).

EXERCÍCIO 8

SEJAM AS PROPOSIÇÕES:

p: O bloco lógico é grosso;
q: O bloco lógico é pequeno.

Considerando todos os blocos lógicos como conjunto-universo, preencha os espaços a seguir:

a) Forme o conjunto G, de acordo com a proposição:

p: O bloco lógico é grosso (V).

G = { ____

b) Forme o conjunto P, de acordo com a proposição:

q: O bloco lógico é pequeno.

P = { ____ ( )

c) Ligando as proposições p e q por meio da conjunção e, temos a proposição composta:

$p \wedge q$: ____

d) Forme, agora, com os blocos lógicos, o conjunto intersecção que represente p $\wedge$ q.

V = { --

e) Este conjunto é chamado "conjunto ________________", pois satisfaz a proposição composta p $\wedge$ q.

f) Sejam as proposições:

t: O bloco lógico é amarelo
u: O bloco lógico é quadrado

Forme a proposição composta pela conjunção e:

t $\wedge$ u: --

g) Qual é a operação de conjunto que representa t $\wedge$ u ?

Resposta: --

h) Quais são os blocos lógicos que representam o conjunto verdade da operação t $\wedge$ u ?

V = { --

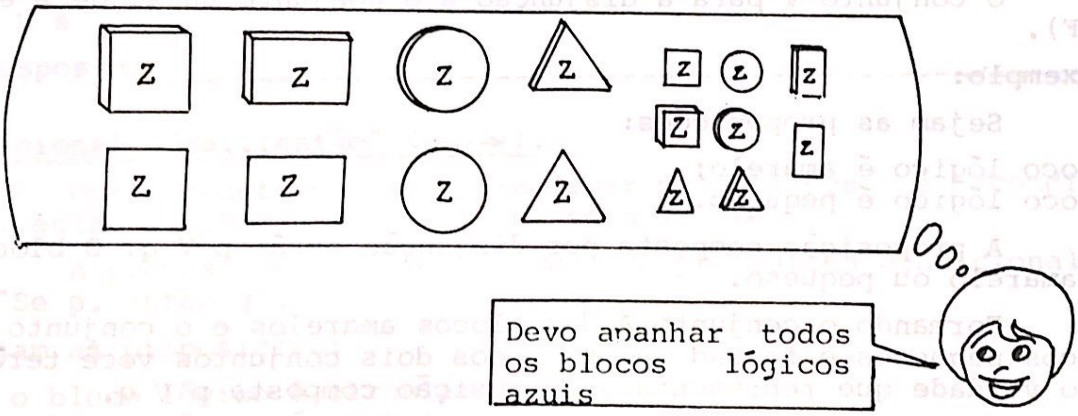
DISJUNÇÃO: OU (V)

Duas proposições podem ser ligadas pelo conetivo ou que é representado pelo símbolo "v".

A proposição p V q é chamada "proposição composta por disjunção".

Para melhor entendimento, acompanhe o raciocínio seguinte:

p: O bloco lógico é azul.

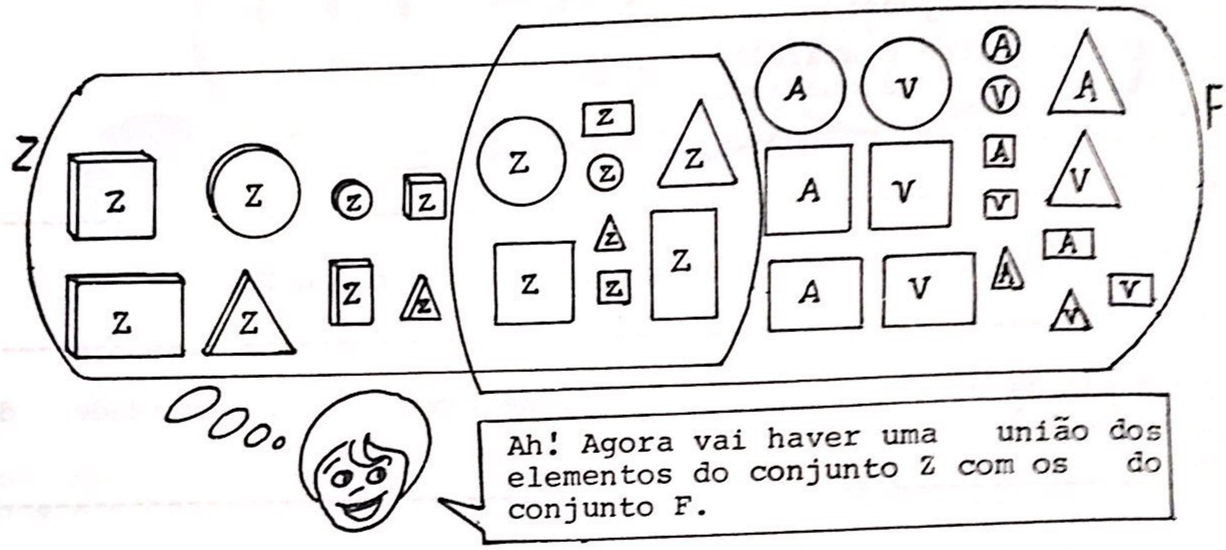


q: O bloco lógico é fino.

Ligando as proposições por meio do conetivo ou, obtemos proposição p V q, que se lê: p ou q.

p V q: O bloco lógico é azul ou fino.

Vejamos como Ritinha interpretará a nova proposição com auxílio dos blocos lógicos.



Note que Rita obteve, por meio da União, um novo conjunto O dos blocos azuis ou finos de todas as cores. A esse conjunto pertencem todos os blocos que têm, pelo menos, um dos atributos pedidos. (Ser azul ou ser fino).

Os elementos que tornam p V q, V, pertencem a ZUF, que chamaremos conjunto-verdade, V.

O conjunto V para a disjunção é o conjunto união de Z e F. (V = ZUF).

Outro exemplo:

Sejam as proposições:

p: O bloco lógico é amarelo;
q: O bloco lógico é pequeno.

A proposição composta por disjunção será: p V q: O bloco lógico é amarelo ou pequeno.

Formando o conjunto A dos blocos amarelos e o conjunto P dos blocos pequenos e fazendo a União dos dois conjuntos você terá o conjunto verdade que representa a proposição composta p V q.

NOTA: Se você retirar um bloco, do conjunto verdade, ou ele será amarelo ou, se de outra cor, será pequeno.

EXERCÍCIO 9

Considerando todos os blocos lógicos como conjunto Universo, preencha as lacunas com atenção; nós encaminharemos o seu trabalho.

p: o bloco lógico é grosso.
q: o bloco lógico é circular.

A proposição p: O bloco lógico é grosso, é V.

a) CONSTRUA O CONJUNTO G DOS BLOCOS LÓGICOS QUE REPRESENTA A PROPOSIÇÃO p.

G = --

b) A PROPOSIÇÃO q: ______________________________ É ______________________

c) CONSTRUA O CONJUNTO C DOS BLOCOS LÓGICOS QUE SATISFAZ A PROPOSIÇÃO q.

C = { ____

d) LIGANDO AS PROPOSIÇÕES POR MEIO DO CONETIVO OU, TEMOS p V q.

p V q: ____

e) FORME O CONJUNTO V DOS BLOCOS LÓGICOS QUE SATISFAZEM p V q.

V = { ____

f) O CONJUNTO V FOI OBTIDO POR MEIO DA UNIÃO ENTRE OS CONJUNTOS _____ ______________________________ E ________________________________

g) SEJAM AS PROPOSIÇÕES:

r: O bloco lógico é vermelho.
s: O bloco lógico é retangular.

CONSTRUA O CONJUNTO A DOS BLOCOS LÓGICOS QUE REPRESENTAM A PROPOSIÇÃO r.

A = { ____

h) CONSTRUA O CONJUNTO B DOS BLOCOS LÓGICOS QUE REPRESENTAM A PROPOSIÇÃO s.

B = { ____

i) REDIJA A PROPOSIÇÃO COMPOSTA POR DISJUNÇÃO, COM O AUXÍLIO DAS PROPOSIÇÕES ACIMA.

r V s: ____________________________________

j) QUAL É A OPERAÇÃO DE CONJUNTO QUE REPRESENTA O CONJUNTO VERDADE DE r V s ?

Resposta: ____

Condicional: "se...então" ($\longrightarrow$).

Outro conetivo usado para ligar proposições é o condicional "se...então", representado por uma seta ($\longrightarrow$).

A proposição $p \longrightarrow q$ é chamada proposição condicional e se lê: "Se p, então q".

- Sejam as proposições:

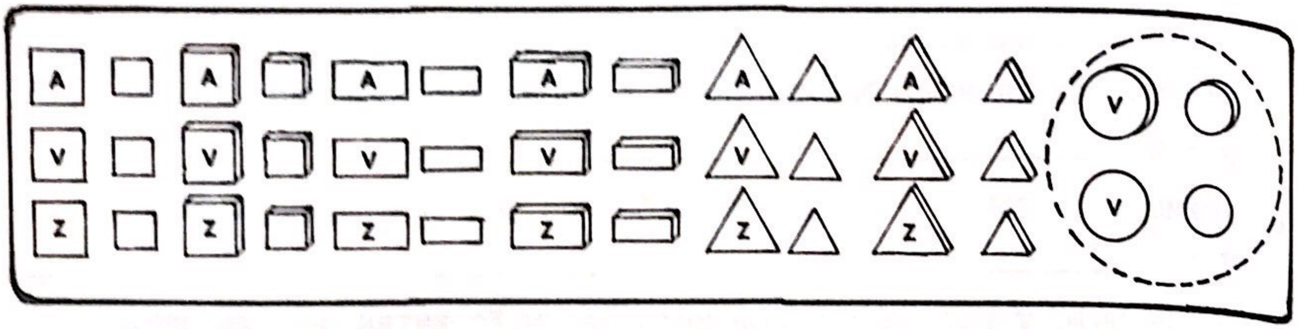
p: o bloco lógico é circular;
q: o bloco lógico é vermelho.

Aplicando o conetivo "Se...então", temos a proposição composta $p \longrightarrow q$.

$p \longrightarrow q$: Se o bloco lógico é circular então é vermelho.

Somente não pertencerão ao conjunto-verdade os blocos circulares que não são vermelhos. Isto porque $p \longrightarrow q$ exige que os circulares sejam vermelhos; os demais blocos poderão ser quaisquer.

Conjunto verdade que representa p ⟶ q.



Outro exemplo:

Sejam as proposições:

p: O bloco lógico é quadrado;
q: O bloco lógico é fino.

Aplicando o conetivo "se...então" temos a proposição composta condicional:

p ⟶ q: Se o bloco lógico é quadrado, então ele é fino.

Somente não pertencerão ao conjunto verdade os blocos quadrados grossos, pois a condição é "se quadrado, então fino".

Logo, as outras formas entrarão para o conjunto-verdade, sem restrições.

EXERCÍCIO 10

Sejam as proposições:

p: o bloco lógico é grande;
q: o bloco lógico é azul.

PREENCHA AS LACUNAS:

a) FORME O CONJUNTO V QUE REPRESENTA: p ⟶ q.

V = { ____

b) O SÍMBOLO DA PROPOSIÇÃO CONDICIONAL É: ____________________

c) O CONETIVO QUE FORMA A PROPOSIÇÃO CONDICIONAL COMPOSTA É ________
____

d) COM AS PROPOSIÇÕES:

p: O bloco lógico é pequeno;
q: O bloco lógico é fino.

FORME A PROPOSIÇÃO COMPOSTA p ⟶ q.

p ⟶ q: ____

e) O CONJUNTO VERDADE QUE REPRESENTA A PROPOSIÇÃO COMPOSTA ACIMA É:

V = { ____

f) SEJAM AS PROPOSIÇÕES:

r: O bloco lógico é fino
s: O bloco lógico é circular

FORME A PROPOSIÇÃO COMPOSTA CONDICIONAL COM AS PROPOSIÇÕES r E s.

$r \longrightarrow s$: ______________________________

g) QUAIS OS BLOCOS LÓGICOS QUE CONSTITUIRIAM O CONJUNTO VERDADE DA PROPOSIÇÃO $r \longrightarrow s$?

Resposta: ______________________________

BICONDICIONAL : "se e somente se" ($\longleftrightarrow$).

O conetivo "se e somente se", representado pelo símbolo $\longleftrightarrow$, é também usado para ligar proposições.

A proposição "$p \longleftrightarrow q$" é chamada proposição bicondicional ou, simplesmente, bicondicional e se lê: "p se e somente se q".

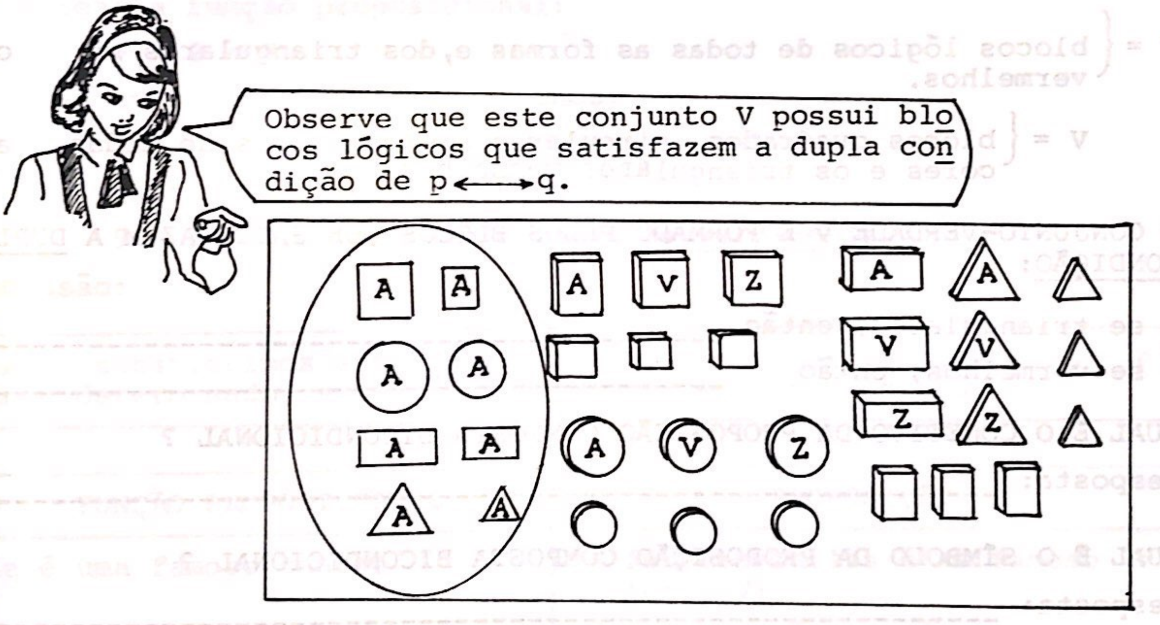
- Consideramos as proposições:

p: o bloco lógico é fino;
q: o bloco lógico é amarelo.

Ligando essas duas proposições por meio do conetivo "se e somente se", obtemos:

$p \longleftrightarrow q$: O bloco lógico é fino se e somente se é amarelo.

O conjunto-verdade que satisfaz $p \longleftrightarrow q$ é representado por:



A dupla condição da proposição $p \longleftrightarrow q$ exige que os blocos pertencentes ao conjunto-verdade sejam:

- finos que são amarelos e
- amarelos que são finos.

Observe que a bicondicional $p \longleftrightarrow q$ é V quando:

$p \longrightarrow q$ é V (se fino, então amarelo);

$q \longrightarrow p$ é V também (se amarelo, então fino).

Quanto aos blocos lógicos grossos, que aparecem no conjunto-verdade, podem ser de quaisquer forma, tamanho e cor.

• Outro exemplo:

Sejam as proposições:

p: O bloco lógico é triangular;
q: O bloco lógico é vermelho.

Ligando essas duas proposições por meio do conetivo "se e somente se", obtemos:

$p \longleftrightarrow$: O bloco lógico é triangular se e somente se é vermelho.

O conjunto verdade que satisfaz $p \longleftrightarrow q$ é constituído dos:

V = {blocos de todas as formas, cores e espessura, porém, se triangulares, então vermelhos}

EXERCÍCIO 11

COM O AUXÍLIO DOS BLOCOS LÓGICOS E DE ACORDO COM AS PROPOSIÇÕES DADAS, PREENCHA AS LACUNAS:

Sejam as proposições:

p: O bloco lógico é triangular;
q: O bloco lógico é vermelho.

a) LIGANDO AS PROPOSIÇÕES DADAS, POR MEIO DO CONETIVO "SE E SOMENTE SE", RESULTA:

$p \longleftrightarrow q$: ______________________________

b) V = {blocos lógicos de todas as formas e, dos triangulares, só os vermelhos.

V = {blocos quadrados, circulares e retangulares de todas as cores e os triângulares vermelhos}

c) O CONJUNTO-VERDADE V É FORMADO PELOS BLOCOS QUE SATISFAZEM A DUPLA CONDIÇÃO:

• se triangulares, então ______________________________
• se vermelhos, então ______________________________

d) QUAL É O CONETIVO DA PROPOSIÇÃO COMPOSTA BICONDICIONAL ?

Resposta: ______________________________

e) QUAL É O SÍMBOLO DA PROPOSIÇÃO COMPOSTA BICONDICIONAL ?

Resposta: ______________________________

f) SEJAM AS PROPOSIÇÕES SIMPLES, VERDADEIRAS:

r: O bloco lógico é azul
s: O bloco lógico é circular

FORME A PROPOSIÇÃO BICONDICIONAL

$r \longleftrightarrow s$: ______________________________

g) QUAL O CONJUNTO VERDADE PARA REPRESENTAR $r \longleftrightarrow s$?

V = { ______________________________

h) QUAL É A CONDIÇÃO PARA OS BLOCOS AZUIS PERTENCEREM AO CONJUNTO V ?

Resposta: ____

i) QUAL É A CONDIÇÃO PARA OS CIRCULARES PERTENCEREM AO CONJUNTO V ?

Resposta: ____

FUNÇÃO PROPOSICIONAL OU SENTENÇA ABERTA

Acabamos de estudar proposições, isto é, sentenças declarativas, que encerram um pensamento falso ou verdadeiro.

Passemos, agora, ao estudo das sentenças declarativas, que não sabemos se são falsas ou verdadeiras, sentenças às quais chamamos de abertas ou de funções proposicionais.

Exemplifiquemos:

I) - Ele é um famoso cantor.

Não podemos afirmar se essa sentença é falsa ou verdadeira , pois não sabemos quem é "ele".

O sujeito ele é, no caso, uma variável. O elemento que substituir a variável ele deve tornar a sentença falsa ou verdadeira.

Pois bem, se colocarmos "Roberto Carlos", a sentença se transformará numa proposição verdadeira: "Roberto Carlos é um famoso cantor". Porém, se colocarmos "Érico Veríssimo", a sentença aberta ou função proporcional transformar-se-á em uma proposição falsa.

II) - Seja a função proposicional:

$y - 2 = 7$

Se substituir y por 10, temos:

$10 - 2 = 7$, que é uma proposição falsa.

Se substituirmos y por 9, temos:

$9 - 2 = 7$, que é uma proposição verdadeira.

Conclusão:

> Quando substituimos a variável da função proposicional por um elemento determinado, a função transforma-se em proposição.

FUNÇÃO PROPOSICIONAL	PROPOSIÇÃO
Ele é uma famoso cantor	Roberto Carlos é um famoso cantor. (V) Érico Veríssimo é um famoso cantor. (F)
$y - 2 = 7$	$9 - 2 = 7$ (V) $10 - 2 = 7$ (F)

QUANTIFICAÇÃO DA VARIÁVEL

Como nos próximos módulos cuidaremos de Álgebra, é oportuno que apresentemos aqui três símbolos novos, muito aplicados no estudo de equações. Trata-se dos símbolos $\forall$ (para todo), $\exists$ (existe) e $\nexists$ (não existe), que servem para transformar sentenças abertas ou fun ções proposicionais em proposições. São sinais usados na quantificação da variável.

"Quantificação da variável":

é um processo por meio do qual se transforma uma sentença declarativa, que encerra variáveis, numa proposição. Esse processo utiliza expressões verbais chamadas QUANTIFICADORES.

1. <u>O quantificador universal</u> - transforma uma sentença aberta em proposição. Seu símbolo é $\forall$, que se lê: "para todo", com o significado de "qualquer que seja".

É preciso observar que uma sentença aberta <u>necessita</u> de valor lógico V ou F. O acréscimo do símbolo $\forall$, antes de uma sentença aberta, transforma-a em proposição e seu valor lógico pode ser verdadeiro ou falso. Verdadeiro, se o conjunto-verdade for igual ao universo (U = V); falso, se o conjunto-verdade for diferente do universo ($V \neq U$).

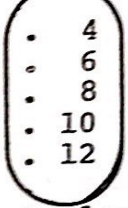
<u>Exemplo I</u>

Seja a sentença aberta: "x é um número par", e o conjunto-universo dado: $U = \{4,6,8,10,12\}$. O conjunto de todos os elementos de U é representado pelo conjunto-verdade:

$V = \{4,6,8,10,12\}$. Comparando os conjuntos, V = U, pois todos os elementos de U satisfazem "X é um número par".

Logo, de um modo geral, podemos afirmar que:

- Para todo elemento X de U, a sentença aberta é verdadeira.



V = U

- Qualquer que seja o elemento X de U, a sentença aberta é verdadeira

V = U

Em linguagem simbólica fica: $(\forall x \in U)$ (x é um número par); ou, de forma mais resumida, $(\forall x)$ (x é um número par), que se lê:

"Para todo x, x é um número par".

Observe que $(\forall x)$ (x é um número par) é uma proposição verdadeira, pois V = U.

<u>NOTA</u>: Usaremos a forma mais resumida, em nossos exercícios, uma vez que o universo seja sempre determinado.

<u>EXEMPLO II</u>

No conjunto-Universo,

$U = \{4,6,8\}$

a sentença aberta é,

"x é um número divisível por 2".

Com o quantificador $\forall$ introduzido antes da sentença aberta, fica:

$(\forall x)$ (x é um número divisível por 2). Essa é uma proposição verdadeira, tendo em vista o conjunto-universo dado, pois $V = \{4,6,8\}$ é igual a $U = \{4,6,8\}$.

Exemplo III

Seja o conjunto $U = N$ (número natural), e a sentença aberta, "x é um número primo".

A proposição $(\forall x)$ (x é um número primo) é falsa em N, pois "para todo $x \in N$, x não é número primo".

Por exemplo: 3 é número primo, mas 4 não é número primo, 9 não é primo, etc. O que significa que $V \neq U$.

2. O quantificador existencial transforma uma sentença aberta em proposição. É representado pelos símbolos $\exists$ e $\nexists$. O símbolo $\exists$ lê-se: existe, o que significa "para algum".

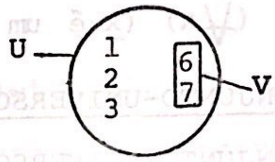
E o símbolo $\nexists$ lê-se: não existe.

O quantificador existencial é geralmente complementado pela expressão "tal que", cujo símbolo é $|$.

Note-se que uma sentença aberta necessita de valor lógico V ou F. O acréscimo do símbolo $\exists$, antes de uma sentença aberta, transforma-a em proposição e tem um valor lógico verdadeiro ou falso. Verdadeiro, se o conjunto-verdade $V \neq \emptyset$; e falso se o conjunto-verdade $V = \emptyset$.

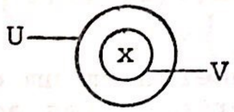
Exemplo I

Seja o conjunto-universo $U = \{1,2,3,6,7\}$
e a sentença aberta "$x + 4 > 9$".
O conjunto-verdade $V = \{6,7\}$



Quando o conjunto-verdade V não é vazio, existe um elemento, pelo menos, do conjunto-universo, que satisfaz a sentença aberta. Logo, podemos afirmar que:

- Existe pelo menos um $x \in U$ tal, que a sentença aberta é verdadeira.



- Para algum $x \in U$, a sentença aberta é verdadeira.
  Em linguagem simbólica fica:
  $\exists x \in U \mid x + 4 > 9$
  ou de maneira resumida,
  $\exists x \mid x + 4 > 9$

Exemplo II

Seja o conjunto-universo $U = \{\text{seres humanos}\}$; e a sentença aberta: "x mora no sol".

A proposição: $\exists x \mid$ x mora no sol é falsa no conjunto-universo dos seres humanos", pois $V = \emptyset$.

Exemplo III

Seja o conjunto-universo: $U = N$;

e a sentença aberta: $x - 1 = 5$.

A proposição: $\exists x \mid x - 1 = 5$ é verdadeira no conjunto $U = N$, pois o conjunto $V = \{6\}$.

Logo, $V \neq \emptyset$.

Exemplo IV

Seja $U = \{-4,-3,-2,-1\}$;

e a sentença aberta: $x > 0$.

A proposição: $\exists x \mid x > 0$ é falsa no conjunto U dado, pois $V = \emptyset$.

EXERCÍCIO 12

DETERMINE O VALOR LÓGICO (V OU F) DAS PROPOSIÇÕES ABAIXO. CONSIDERE U = N O CONJUNTO-UNIVERSO DA VARIÁVEL X.

a) $\exists x \mid x + 3 = 9$ ( )

b) $(\forall x)\ (x + 3 > 9)$ ( )

c) $\exists x \mid x < 0$ ( )

d) $(\forall x)\ (x > 0)$ ( )

e) $\exists x \mid x - 1 = 4$ ( )

f) $(\forall x)$ (x é um número natural.) ( )

CONJUNTO-UNIVERSO E CONJUNTO-VERDADE:

CONJUNTO-UNIVERSO

Todas as vezes que substituimos a variável de uma sentença aberta, por qualquer elemento de um conjunto U dado, a sentença aberta torna-se uma proposição V ou F. O conjunto U será denominado univer so ou universo da variável.

CONJUNTO-VERDADE

Conjunto-verdade (de uma sentença aberta em um conjunto-verdade U) é o conjunto de todos os elementos pertencentes ao conjunto-universo, de modo que esses elementos, quando substituidos na setença aberta, tornem esta mesma sentença uma proposição verdadeira. O conjunto-verdade é representado por V.

SENTENÇAS ABERTAS	U	V
x é número menor que 7	$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$	$V = \{0,1,2,3,4,5,6\}$
x é mês que tem 28 dias	U = {meses do ano}	V = {fevereiro}
Ele é número par	$U = \{3,4,7,9,11\}$	$V = \{4\}$

EXERCÍCIO 13

RESPONDA AS QUESTÕES SEGUINTES, DE ACORDO COM O EXEMPLO RESOLVIDO:

MODELO: "x é mês do ano que se escreve com a inicial m".

U = {Janeiro, fevereiro...dezembro}

V = {Março e maio}

a) Ele é um número natural menor que cinco.

U = { --

V = { ____

b) x É DIA DA SEMANA QUE SE ESCREVE COM A INICIAL S :

U = { ____

V = { ____

c) x É NÚMERO PRIMO E É PAR.

U = { ____

V = { ____

d) ELA É A ESTAÇÃO DO ANO QUE SE ESCREVE COM A INICIAL V.

U = { estações do ano. }

V = { ____

e) DADO O CONJUNTO-UNIVERSO U = { 1,4,9,10,11 } DETERMINE O CONJUNTO-VERDADE DE CADA UMA DAS SENTENÇAS ABERTAS:

$x > 0$ V = { ________________________________

$x + 5 = 9$ V = { ________________________________

EXERCÍCIO 14

a) SENDO U = { MESES DO ANO }

Sentença aberta: "x é mês do ano que começa pela letra j".

Conjunto-verdade: V = { ________________________________

b) SENDO U = N

"x é número par maior que um e menor que treze".

V = { ____

c) DADO U = { 3,5,7,8,9,10 } e as sentenças abertas:

- $x < 0$ V = { ____________________
- $x - 4 = 6$ V = { ____________________

VII - PÓS-TESTE

Leia com calma e atenção as questões formuladas neste teste e, em seguida dê as respostas solicitadas. Cremos que você se sairá bem, nesta verificação de conhecimentos.

Boa sorte !

1. PINTE AS FIGURAS:

□ e △ de azul;

▭ de amarelo;

○ de vermelho.

ESCREVA V OU F NOS PARÊNTESES, CONFORME O VALOR LÓGICO DAS PROPOSIÇÕES:

[z] A figura é retangular e vermelha . ( )

△z A figura é triangular e azul. ( )

[a] A figura é circular e vermelha. ( )
(v) A figura é circular e vermelha. ( )
[z] A figura é quadrada e amarela. ( )

2. ACRESCENTE O "MODIFICADOR NÃO" ÀS PROPOSIÇÕES ABAIXO. VERIFIQUE O VALOR LÓGICO DAS NOVAS PROPOSIÇÕES:

a) p: Brasília fica no Brasil. (V)
$\sim$p: ______________________ ( )

b) q: Nove é menor que cinco. (F)
$\sim$q: ______________________ ( )

3. OBSERVE AS SEGUINTES PROPOSIÇÕES:

p: O bloco lógico é amarelo;
q: O bloco lógico é grosso.

ESCREVA A PROPOSIÇÃO COMPOSTA POR CONJUNÇÃO (CONETIVO "E"). E DETERMINE O VALOR LÓGICO DA NOVA PROPOSIÇÃO:

$p \wedge q$: ____ ( )

4. LEIA AS PROPOSIÇÕES SEGUINTES E FORME, COM ELAS, UMA PROPOSIÇÃO COMPOSTA PELO CONETIVO CONDICIONAL "SE...ENTÃO".

p: O bloco lógico é azul.
q: O bloco lógico é fino.

p .... q: ____

5. SEJAM AS PROPOSIÇÕES:

p: O bloco lógico é fino. (V)
q: O bloco lógico é azul. (F)

TRADUZA PARA A LINGUAGEM CORRENTE A PROPOSIÇÃO $p \vee q$ E DÊ O VALOR LÓGICO DA NOVA PROPOSIÇÃO:

____ ( )

6. LEIA A PROPOSIÇÃO COMPOSTA QUE SEGUE E DIGA QUAL O CONETIVO USADO NA SUA FORMAÇÃO:

$p \longleftrightarrow q$: O bloco lógico é azul "se e somente se" é triangular.

Resposta: ____

7. ESCREVA V OU F NOS PARÊNTESES, CONFORME AS PROPOSIÇÕES SEJAM VERDADEIRAS OU FALSAS:

a) ( ) x + 3 = 5 é uma função proposicional.
b) ( ) O quantificador existencial é representado por $\forall$.
c) ( ) O quantificador universal é representado por $\exists$.

8. COMPLETE O CONJUNTO-VERDADE, DE ACORDO COM A FUNÇÃO PROPOSICIONAL E O CONJUNTO-UNIVERSO DADO:

"x é um número maior que 5"

$U = \{4,5,6,7,8,9\}$ V = { ______________________

9. SEJA O CONJUNTO-UNIVERSO:

$U = \{4,5,6,7,8,9,10\}$

DETERMINE O VALOR LÓGICO (V OU F) DE CADA UMA DAS PROPOSIÇÕES:

a) $(\forall x)\ (x + 4 = 6)$ ( )
b) $\exists\ x \mid x + 4 = 10$ ( )

VIII - PROCEDIMENTOS E ATIVIDADES - NÍVEL DE SUPORTE

Se você não respondeu corretamente 80% das questões do último teste, não desanime. Refaça com atenção todos os exercícios propostos no item VI, inclusive aqueles explicados com desenhos de blocos lógicos.

Não acredite na possibilidade de vencer o conteúdo deste módulo, se não manusear os blocos lógicos. Caso você não possua tal material, adquira-o ou, então, construa-o imediatamente.

Ele pode ser simples, pode ser confeccionado em miniatura com papel ou papelão.

Se o assunto aqui tratado lhe parecer árido ou de difícil compreensão, procure estudá-lo com outros colegas, pois o trabalho em equipe muito contribuirá para que a sua aprendizagem se torne fácil, agradável e proveitosa.

Antes de se submeter ao último teste, escreva em seu caderno as respostas do questionário que segue e, depois, confronte-as com os ensinamentos do módulo.

QUESTIONÁRIO

I - PROPOSIÇÕES

1. O que é proposição ?
2. Quais são os valores lógicos de uma proposição ?
3. Como é representada uma proposição ?
4. Como são chamadas as palavras usadas para formar proposições compostas ?
5. Quais são os conetivos ?

II - OPERAÇÕES COM PROPOSIÇÕES:

6. Quais são as operações com proposições ?
7. O que sucede a uma proposição verdadeira quando se lhe aplica o "modificador não" ?
8. Qual o valor lógico da proposição composta, na operação conjunção, se são verdadeiros os valores lógicos das proposições simples que a compõem ?
9. Qual a operação de conjuntos que corresponde à operação conjunção
10. Qual o conjunto que corresponde ao conjunto-verdade da "conjunção de proposições" ?
11. Qual o conjunto que corresponde ao conjunto-verdade da "disjunção de proposições" ?
12. Em uma proposição composta condicional, qual das proposições (p ou q) expressa a condição ?
13. Qual é a operação representada pelo símbolo $\longleftrightarrow$?
14. Qual o conetivo que forma uma proposição bicondicional ?

III - QUANTIFICADORES

15. Que símbolos usamos, em álgebra, para transformar uma sentença aberta em proposição ?
16. Se o conjunto-verdade de uma proposição for igual ao Universo dado, qual o valor lógico dessa proposição ?

17. Se, ao contrário, o conjunto-verdade for diferente do Universo considerado, qual o valor lógico dessa operação ?

18. O que é conjunto-universo ?

19. O que é conjunto-verdade ?

IX - PÓS-TESTE - NÍVEL DE SUPORTE

Cremos que você estudou seriamente o presente módulo e efetuou todos os exercícios nele apresentados. Se assim o fez, certamente não encontrará maiores dificuldades em realizar este teste.

Leia com atenção as perguntas aqui formuladas e, em seguida, dê, calmamente, as respostas cabíveis.

Boa sorte !

1. APLIQUE O "MODOFICADOR <u>NÃO</u>" À PROPOSIÇÃO "q". E DÊ O VALOR LÓGICO DA PROPOSIÇÃO $\sim$"q".

   q: Brasília fica no Brasil. (V)
   $\sim$ q: ____________________ ( )

2. SEJAM AS PROPOSIÇÕES:

   p: O bloco lógico é vermelho (V).
   q: O bloco lógico é grande (V).

ESCREVA A PROPOSIÇÃO $p \wedge q$.

$p \wedge q$: ____

3. SEJAM AS PROPOSIÇÕES:

   p: O bloco lógico é amarelo. (V)
   q: O bloco lógico é pequeno. (V)

   a) DETERMINE O VALOR LÓGICO DA PROPOSIÇÃO COMPOSTA:

   $p \vee q$ ( )

   b) QUAIS OS ELEMENTOS QUE PERTENCEM AO CONJUNTO VERDADE DE $p \vee q$?

   $p \vee q$: ______________________________________

4. COMPLETE:

   - A PROPOSIÇÃO COMPOSTA PELA BICONDICIONAL É REPRESENTADA PELO SÍMBOLO ________________________

5. ESCREVA, NOS PARÊNTESES, V SE A AFIRMAÇÃO FOR VERDADEIRA E F SE FOR FALSA:

   a) ( ) Minas Gerais é Estado marítimo;
   b) ( ) x - 1 = 3 é uma função proposicional;
   c) ( ) $\forall$ é o símbolo do quantificador existencial;
   d) ( ) $\exists$ é o quantificador universal e se lê: "existe".

6. COMPLETE O CONJUNTO-VERDADE, SABENDO QUE "x É O NÚMERO PAR" E O CONJUNTO-UNIVERSO É: $U = \{4,5,7,9\}$

   $V = \{ \quad \}$

7. DADO O CONJUNTO-UNIVERSO $U = \{5,6,7,8,9\}$, DETERMINE O VALOR LÓGICO DE CADA UMA DAS SENTENÇAS:

   a) $(\forall x)\ (x < 0)$ ( )

b) $\exists x \mid x + 1 = 8$ ( )

8. LEIA E RESPONDA:

"Se o bloco lógico é azul então ele é pequeno".

a) Qual o conetivo usado nesta proposição composta ?

----

b) Qual o símbolo que representa esse conetivo ?

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

Exercício 1

a) (F); b) (F); c) (V); d) (V); e) (F); f) (F); g) (V).

Exercício 2

a) (V); b) (F); c) (F); d) (V); e) (F); f) (F); g) (F); h) (V); i) (F).

Exercício 3

a (F); q: Colombo não descobriu o Brasil (V)
b (V); r: Londres não está na Inglaterra (F)
c (F); s: Nem todas as violetas são azuis (V)
d (F); p: Quatro não é maior que seis (V)

Exercício 4

a (F); p: A figura é não vermelha (V)
b (F); r: A figura é não azul (V)
c (V); s: A figura é não amarela (F)
d (F); p: A figura é naõ vermelha (V)

Exercício 5

○ r: A figura é vermelha (V)
$\sim$ r: A figura é não vermelha

□ r: A figura é azul (F)
$\sim$ r: A figura é não azul (V)

Logo, de modo geral:

Se r é V, então $\sim$ r é F;

Se r é F, então $\sim$ r é V.

Exercício 6

c (X); g (X).

Exercício 7

$1 \in A$	$1 \in B$	$1 \in A \cap B$
$2 \notin A$	$2 \in B$	$2 \notin A \cap B$
$3 \in A$	$3 \notin B$	$3 \notin A \cap B$
$4 \notin A$	$4 \notin B$	$4 \notin A \cap B$

Exercício 8

a) G = {blocos lógicos grossos}
b) P = {blocos lógicos pequenos}
c) p∧p : blocos lógicos grossos e pequenos
d) V = {blocos lógicos grossos e pequenos}
e) Conjunto verdade.
f) t∧u: Os blocos lógicos são amarelos e quadrados.
g) A intersecção de conjuntos.
h) V = {blocos lógicos quadrados e amarelos}

Exercício 9

a) G = {blocos lógicos grossos}
b) q: O bloco lógico é circular (V)
c) C = {blocos lógicos circulares}
d) p V q: blocos lógicos grossos ou circulares.
e) V = {blocos lógicos grossos e os circulares.}
f) G e C ou G U C
g) A = {blocos lógicos vermelhos}
h) B = {blocos lógicos retangulares}
i) r v s: blocos lógicos vermelhos ou retangulares.
j) A operação reunião.

Exercício 10

a) V = {blocos lógicos pequenos e os grandes azuis}
b) ⟶
c) "se...então"
d) Se o bloco lógico é pequeno, então ele é fino.
e) V = {blocos lógicos grandes e os pequenos finos}
f) r ⟶ s: Se o bloco lógico é fino, então ele é circular.
g) V = {blocos lógicos grossos e os finos circulares}

Exercício 11

a) p⟷q: O bloco lógico é triangular se,e somente se,é vermelho.
b) V = {blocos lógicos de todas as formas porém, se triangulares, então vermelhos}
ou V = {blocos lógicos quadrados, circulares, retangulares de todas as cores e os triangulares vermelhos}
c) "se triangulares, então vermelhos";
"se vermelhos, então triangulares";
d) "se e somente se"
e) ⟷
f) r⟷s: O bloco lógico é azul se,e somente se,é circular.
g) V = {todos os blocos lógicos, menos os azuis não circulares}
h) Os azuis tem de ser circulares
i) Os circulares tem de ser azuis

Exercício 12

a) (V) d) (F) pois 0 = 0

b) (V) e) (V)

c) (F) f) (V)

Exercício 13

a) $U = \{0,1,2,3,4,5,6...\}$
$V = \{0,1,2,3,4\}$

b) U = {segunda-feira, terça-feira,...domingo}
V = {segunda-feira, sexta-feira, sábado.}

c) U = {números primos}
$V = \{2\}$

d) U = {estações do ano}
V = {verão}

e) $U = \{1,4,9,10,11\}$
$x > 0$; $V = \{1,4,9,10,11\}$
$x + 5 = 9$; $V = \{4\}$

Exercício 14

a) U = {meses do ano}
V = {janeiro, junho, julho}

b) U = N
$V = \{2,4,6,8,10,12\}$

c) $U = \{3,5,7,9,10\}$
$x < 0$; $V = \{\ \}$
$x - 4 = 6$; $V = \{10\}$

XI - SUGESTÕES BIBLIOGRÁFICAS

1. HAESER, Ione e Gelci Bertoletti. *"Matemática"* - 6 Ensino Fundamental. Porto Alegre, R.S. Edições Missau Ltda, 1974.

2. KOTHE, Siegfried. *"Pensar é divertido"*. Tradução de Tomás Johann Burchard, São Paulo, E.P.U., 1973. Suplemento de *"Pensar é divertido"*: como se divertir com os blocos lógicos de Dienes. 1. Matemática (1º grau). 2. Matemática recreativa I. Título.

3. LOPES, Oscar. *"Para a Coordenação Necessária entre o Português e a Matemática"*. Cadernos do Centro de Investigação Pedagógica, Fundação Calouste Gulbenkian. Lisboa, Portugal, Tipografia Peres, 1970.

4. NEDEM (*Núcleo de Estudos e difução do Ensino da Matemática - Paraná*). Ensino Moderno de Matemática 3º vol. São Paulo, C.E. Editora do Brasil S.A., 1969.

5. RICH, Barnett. "*Geometria Plana*". Tradução de Ricardo V.L.M. Gondim, São Paulo, Editora Mc.Graw - Hill do Brasil Ltda, 1972.

6. TORANZOS, Fausto I. "*Enseñanza de la Matemática*". 2º Edição, Buenos Aires, Editorial Kapelusz, 1972.

7. SEC DE MINAS GERAIS E MEC. Matemática - 1º à 8º série, *Manual de Orientação. Parte de Educação Geral do Currículo Primeiro Grau.* Belo Horizonte, MG, Minas Gráfica Editora Ltda., 1974.

XII - GLOSSÁRIO

ATENTAR	reparar em; ver com atenção; refletir sobre; olhar; observar; preocupar-se com.
CABÍVEL	que tem cabimento; aceitável.
COMPLEMENTAR	completar; concluir; rematar; terminar; apor complemento.
COMPLETAMENTO	ação de completar; acabamento; ação de concluir ou complementar.
EMPENHO	interesse; diligência; desejo; vontade.
REPORTAR	voltar; volver; referir-se; aludir.
RESSALTAR	dar relevo; tornar saliente; salientar; sobressair ; distinguir-se.
SIMULTÂNEO	que se dá ou se realiza ao mesmo tempo que outra cousa; sincrônico.

GABARITO DO PÓS-TESTE

Município: ______________________________ Data da Correção: __________

Cursista: ____

Nº do Módulo: 82 Percentagem: ________________________

1. VALOR LÓGICO DAS PROPOSIÇÕES:

   $\boxed{z}$ (F); $\triangle$ z (V); $\boxed{A}$ (F); V (V); $\boxed{z}$ (F)

2. VALOR LÓGICO DAS PROPOSIÇÕES MODIFICADAS POR "NÃO".

   a) $\sim$ p: Brasília não fica no Brasil. (F)

   b) $\sim$ q: Nove não é menor que cinco. (V)

3. PROPOSIÇÃO COMPOSTA PELO CONETIVO "E".

   $p \wedge q$: O bloco lógico é amarelo e (o bloco lógico é) grosso. (V)

4. $p \rightarrow q$: se o bloco lógico é azul então ele é fino.

5. PROPOSIÇÃO COMPOSTA E SEU VALOR LÓGICO.

   p V q: O bloco lógico é fino ou azul (V)

6. LEITURA E RESPOSTA:

   R: O conetivo usado: "se e somente se" (bicondicional).

7. PROPOSIÇÕES FALSAS E VERDADEIRAS:

   a) (V); b) (F); c) (F).

8. COMPLEMENTO:

   O conjunto verdade é: $V = \{6,7,8,9\}$

9. VALOR LÓGICO DAS PROPOSIÇÕES:

   a) (F) b) (V)

GABARITO DO PÓS-TESTE - Nível de Suporte

Cursista: ______________________________ Percentagem: _______________

1. VALOR LÓGICO DE PROPOSIÇÃO:
   $\sim$q: Brasília não fica no Brasil. (F)

2. COMPLETAMENTO:

   $p \wedge q$: O bloco lógico é vermelho e grande.

3. VALOR LÓGICO DE PROPOSIÇÃO COMPOSTA E ELEMENTOS DE p V q:

   a) p V q (V)

   b) p V q: blocos lógicos amarelos ou blocos lógicos pequenos.

4. COMPLETAMENTO:

   - A proposição composta pela bicondicional é representada pelo símbolo $\longleftrightarrow$.

5. AFIRMAÇÕES FALSAS E VERDADEIRAS:

a) (F); b) (V); c) (F); d) (F).

6. COMPLETAMENTO DO CONJUNTO-VERDADE:

$V = \{4\}$

7. VALOR LÓGICO DE SENTENÇAS:

a) (F)

b) (V)

8. LER E RESPONDER:

a) "se...então

b) $\longrightarrow$

ORIENT. DA APRENDIZAGEM LOCAL.

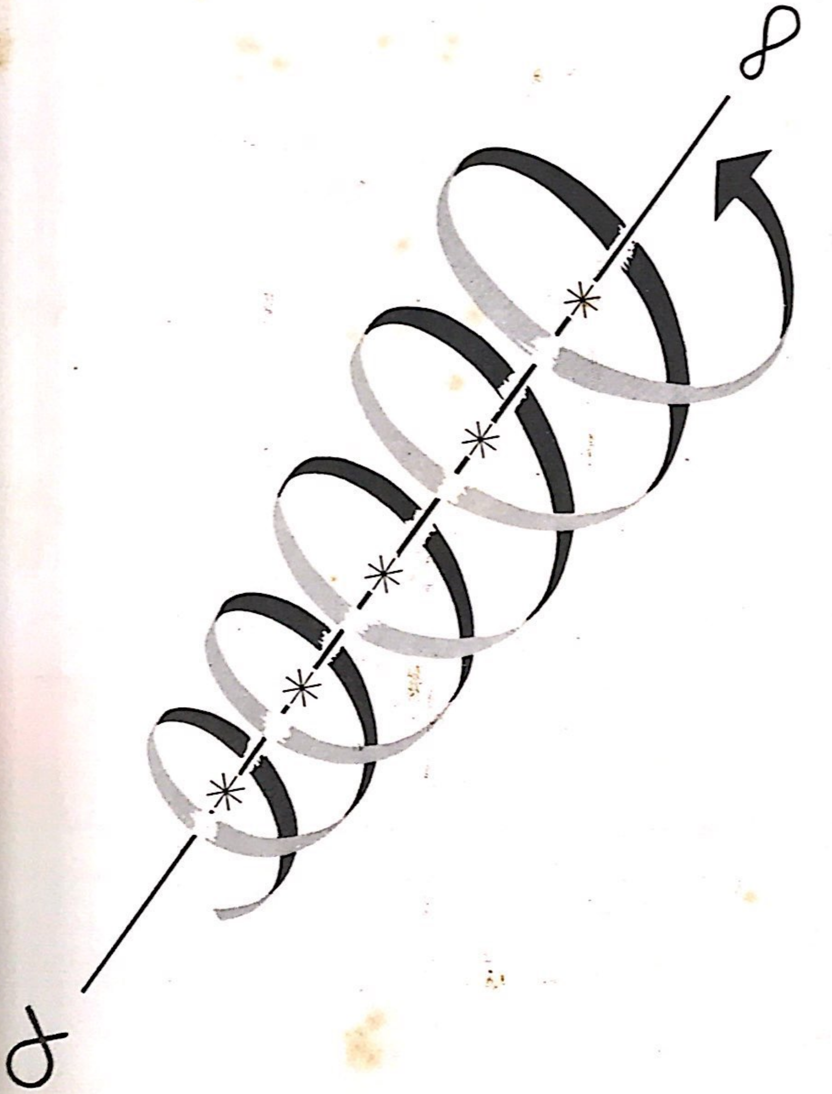
19

104

MEC – DEF
SEEC – CETEPAR

PROJETO HAPRONT

104



104

19

MEC – DEF
SEEC – CETEPAR

PROJETO HAPRONT

104

ESTADO DO PARANÁ

GOVERNO JAYME CANET JUNIOR

SECRETARIO DE ESTADO DA EDUCAÇÃO E DA CULTURA

PROFESSOR FRANCISCO BORSARI NETTO

CENTRO DE TREINAMENTO DO MAGISTÉRIO DO ESTADO DO PARANÁ

CETEPAR

Projeto "*HAPRONT*"

APRESENTAÇÃO

O Departamento de Ensino Fundamental do Ministério da Educação e Cultura tem como um dos seus objetivos prioritários, a implantação de uma política global de desenvolvimento de recursos humanos, através da qual pretende assegurar a melhoria da produtividade dos sistemas de ensino.

Nesse sentido, está promovendo a experimentação de um modelo curricular de habilitação de professores que se constitui em um instrumento de busca de melhores padrões para a formação profissional. Em resposta a uma realidade que desafia os meios do ensino convencionais, esse modelo adota uma metodologia de educação à distância, sendo veiculado por uma série de 250 módulos de ensino. Este é um dos módulos dessa série.

Cada módulo é uma unidade composta de:objetivos, pré-teste, procedimentos e atividades básicas, pós-teste; procedimentos e atividades de suporte, pós-teste;procedimentos e atividades de enriquecimento.

Os módulos são encaminhados aos professores - cursistas para serem estudados em seus locais de trabalho. Por esse processo deverão ser habilitados a nível de 2º grau, professores não titulados em exercício em classes de 1ª a 4ª séries.

SUBPROJETO 13.1 do Plano Setorial de Educação e Cultura 75/79: CAPACITAÇÃO DE RECURSOS HUMANOS para o Ensino de 1º grau - Código Orçamentário 4502.08.42.217.2.023.

O projeto está sendo executado pela Secretaria de Estado da Educação e Cultura do Paraná, através do Cetepar, com o nome de Projeto "*HAPRONT*" (Habilitação de Professores não titulados), em 11 municípios, atingindo 1.100 professores não titulados.

Os resultados alcançados nesta etapa permitirão, num futuro próximo, subsidiar outras U.F. na organização de cursos de habilitação pelo mesmo processo.

C I Ê N C I A S

LINGUAGEM SIMBÓLICA

MÓDULO Nº 104

ELABORAÇÃO: CLELIA TAVARES MARTINS.

TÍTULO : LINGUAGEM SIMBÓLICA.

I - ASSUNTO : PRIMEIRAS NOÇÕES DE ÁLGEBRA - GENERALIZAÇÕES EM MATEMÁTICA.

II - MATÉRIA : CIÊNCIAS.

DISCIPLINA : MATEMÁTICA.

III - PRÉ-REQUISITOS : TER DOMINADO O CONTEÚDO DOS MÓDULOS 80 E 81.

IV - OBJETIVOS :

OBJETIVO GERAL :

Usar corretamente a simbologia matemática.

OBJETIVO TERMINAL :

Traduzir relações expressas em forma simbólica para formas verbais e vice-versa, em exercícios orais, escritos, debates, trabalhos em grupo, aulas, etc.

OBJETIVOS OPERACIONALIZADOS :

AO FINAL DO ESTUDO DESTE MÓDULO O CURSISTA DEVERÁ SER CAPAZ DE:

1. Identificar, classificar, reduzir os termos semelhantes e calcular o valor numérico das expressões algébricas.
2. Efetuar adição e subtração algébricas, assim como multiplicação (inclusive produtos notáveis) e divisão por monômio.
3. Fatorar polinômios de fatores comuns em seus termos.

V - PRÉ-TESTE

Antes de iniciar o estudo do presente módulo, submeta-se a
te Pré-Teste, como você já está acostumado a fazê-lo.

Leia com atenção o enunciado das questões propostas e resp
da-as calmamente, sem medo de errar. Aceite o desafio com a mesma c
fiança com que enfrentou os testes dos módulos anteriores.

Boa sorte !

1. CLASSIFIQUE, QUANTO AO NÚMERO DE TERMOS, AS SEGUINTES EXPRESSÕES GÉBRICAS:

   a) $5a + x$ ----------------------------

   b) $3x^2y^2z^2$ ----------------------------

   c) $4 + 3a - 6b$ ----------------------------

2. ESCREVA OS NOMES DOS ELEMENTOS DO MONÔMIO:

   $\underbrace{5}\,\underbrace{ab^2}$

   ----

3. CALCULE O VALOR NUMÉRICO DAS EXPRESSÕES ABAIXO:

   a) $5a + 3b - 2c$ para $\underline{a} = 2$; $\underline{b} = 3$; $\underline{c} = 4$

   b) $a^2 + 2x$ para $\underline{a} = -3$ e $\underline{x} = 5$

4. REDUZA OS TERMOS SEMELHANTES:

   a) $5m - 2m + 3m$

   b) $-3y^3 + 4y - y^3 - 7y$

5. CALCULE AS EXPRESSÕES ABAIXO:

a) $(7a - 2b + 3c) + (6b + 3a - 2c) =$

b) $(4x^2 - 4x + 3) - (x^2 + 7x - 3) =$

6. EFETUE AS SEGUINTES MULTIPLICAÇÕES:

a) $3(4x - 2x + 3) =$

b) $2a(4a - 1) =$

7. EFETUE AS DIVISÕES ABAIXO:

a) $3a^2 \div a =$

b) $(4x^2 - 2x) \div x =$

8. ELEVE AO QUADRADO OS SEGUINTES BINÔMIOS:

a) $(p + q)^2 =$

b) $(2 - a)^2 =$

9. COLOQUE EM EVIDÊNCIA OS FATORES COMUNS:

a) $4x + 12x^2 =$

b) $3xy - 6x$

10. QUAIS BINÔMIOS PRODUZIRAM OS TRINÔMIOS SEGUINTES:

a) $x^2 + 2xy + y^2$

b) $4a^2 + 8a + 4$

GABARITO DO PRÉ-TESTE

1. Classificação de expressões algébricas:

   a) binômio
   b) monômio
   c) trinômio

2. Elementos do monômio:

   $5 \longrightarrow$ coeficiente
   $ab^2 \longrightarrow$ parte literal

3. Valor numérico:

   a) 11 b) 19

4. Termos semelhantes:

   a) $6m$ b) $-4y^3 - 3y$

5. Expressões

   a) $10a + 4b + c$ b) $3x^2 - 11x + 6$

6. Multiplicações:

   a) $12x - 6x + 9$ b) $8a^2 - 2a$

7. Divisões:

   a) $3a$ b) $4x - 2$

8. Potência:

   a) $p^2 + 2pq + q^2$ b) $4 - 4a + a^2$

9. Fatoração:

a) $4x(1 + 3x)$ b) $3x(y - 2)$

10. Fatores do trinômio:

a) $(x + y)^2$

b) $(2a + 2)^2$

VI - PROCEDIMENTOS E ATIVIDADES

PRIMEIRAS NOÇÕES DE ÁLGEBRA

Você já calculou muitas expressões numéricas, tanto no conjunto dos números naturais, como no dos números fracionários, decimais, inteiros e racionais. Também resolveu problemas de estrututra, em que o termo desconhecido é representado por um símbolo qualquer, como, por exemplo, um quadradinho □ que usamos diversas vezes em nossos módulos.

Tratemos, agora, do tipo de expressão na qual colocamos letras para representar determinados valores.

EXPRESSÃO ALGÉBRICA

Expressão algébrica é aquela que indica operações cujos valores são representados por letras e números.

Exemplos:

a) $8x$

b) $5a + 4$

c) $3x - y + a$

d) $2n + \frac{2}{3}a^2 + 9 - 4n$

Em a a expressão algébrica só tem um termo.
Em b tem dois termos (duas parcelas).
Em c tem três termos (duas parcelas: $3x + a$; e um subtraendo: $- y$).
Em d tem quatro termos (um deles tem o coeficiente fracionário: $\frac{2}{3}a^2$ ou $\frac{2a^2}{3}$).

TERMOS DAS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

MONÔMIO. A expressão com um só termo é chamada monômio.

Exemplos: $\frac{5}{3}ax$; $4x^3$; $2\ abc^2$

Os elementos de um monômio são:

- coeficiente e
- parte literal

Vejamos:

Coeficiente — Coeficiente

$\frac{5}{3}ax^2 \qquad 2abc^2$

Parte literal — Parte literal

<u>NOTA</u>: - O coeficiente 1 não é escrito:

$1ax^2 \; ; \; 1xy \; ; \; 1a^2bc^3$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$ax^2 \qquad xy \qquad a^2bc^3$

<u>Grau do monômio</u> é a soma dos expoentes de sua parte literal.

Exemplos:

$7\,x^2y$ $\quad (2 + 1 = 3)$ monômio do 3º grau

$4\,a^2b^2c^3$ $\quad (2 + 2 + 3 = 7)$ monômio do 7º grau.

O grau do monômio pode ser dado em função de uma variável.

$$4\,x^2y \begin{cases} \text{em relação a } x\text{, é do 2º grau} \\ \text{em relação a } y\text{, é do 1º grau} \end{cases}$$

<u>POLINÔMIO</u>. Polinômio é a expressão algébrica de dois ou mais termos.

O polinômio de dois termos é também chamado <u>binômio</u>; e o três termos, <u>trinômio</u>.

<u>Grau do polinômio</u> é o do seu termo de maior grau.

Vejamos:

$4x^3 - 2x^2 + x$ (3º grau). Termo de maior grau: $4x^3$

$3x^2 + x^2y^2 + Y$ (4º grau). Termo de maior grau: x^2y^2

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

EXERCÍCIO 1

NO SEU CADERNO, RESOLVA OS SEGUINTES EXERCÍCIOS QUE SEGUEM:

COLOQUE NOS PARÊNTESES O NÚMERO DE TERMOS DAS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS SEGUINTES:

a. ( ) $2\ a^2x + 3x + 4a$

b. ( ) $4\ x^2y$

c. ( ) $4x - 3x$

d. ( ) $3x + 2x - y + 1$

e. ( ) $2abc - 3abc$

f. ( ) $2a + 5a - \frac{1}{2}\ a + 3$

EXERCÍCIO 2

ESCREVA NOS PARÊNTESES AS LETRAS M PARA INDICAR MONÔMIOS, B PARA OS BINÔMIOS, T PARA OS TRINÔMIOS E P PARA OS POLINÔMIOS COM 4 OU MAIS TERMOS:

a. ( ) $2ax + 1$

b. ( ) $5x - 2x + 1$

c. ( ) $3a + 2b + c + 1$

d. ( ) $2x + x^2 + 8$

e. ( ) $2x + 3$

f. ( ) $\frac{3}{2}\ a^2b^2$

EXERCÍCIO 3

DESTAQUE O COEFICIENTE E A PARTE LITERAL, CONFORME MODELO:

a) $-7ab$
- -7, coeficiente
- ab, parte literal

b) $-\frac{3}{5}\ x$
- ---, ------------------
- ---, ------------------

c) $\frac{a^2}{3}$
- ---, ------------------
- ---, ------------------

d) ab
- ---, ------------------
- ---, ------------------

e) ab^2
- ---, ------------------
- ---, ------------------

f) $-3xy^4$ — ---, ----------------------- / ---, -----------------------

EXERCÍCIO 4

CLASSIFIQUE O GRAU DOS MONÔMIOS SEGUINTES:

a) $2a^2$ é um monômio do ... grau.

b) $-3yz^2$ --

c) $4xz$ --

d) $-\frac{2}{7}x^2$ --

EXERCÍCIO 5

CLASSIFIQUE OS POLINÔMIOS PELO SEU GRAU:

a) $7x^2 + x^2 - x$ é um polinômio do ... grau.

b) $3x^3y + y^2 - 1$ --

c) $2xy^2z^3 + y^5 + z^4$ --

d) $2x^5 - 3$ --

e) $2x^2y^2z - 3y^4$ --

VALOR NUMÉRICO DE UMA EXPRESSÃO ALGÉBRICA

Valor numérico de uma expressão algébrica é o valor que resulta quando se substituem as letras pelos valores atribuidos a elas e se efetuam as operações indicadas.

A) $5a + 4b - 2ab$, para $a = 2$ e $b = 3$

$5(2) + 4(3) - 2(2.3) =$

Lembre-se: $5a = a + a + a + a + a$ ou $5.a$

Substituindo: $a = 2$

$= 10 + 12 - 12 =$

$5a = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ ou $5\ (2)$

$= 22 - 12 = 10$ ———— O valor numérico da expressão é 10.

B) $\dfrac{5x - y}{x + Y}$, para x = 7 e y = -2

$$\frac{5(7) - (-2)}{7 + (-2)} =$$

$$\frac{35 + 2}{7 - 2} =$$

$\dfrac{37}{5} \Longleftrightarrow 7\,\dfrac{2}{5}$ O valor numérico da expressão é $\dfrac{37}{5}$ ou $7\,\dfrac{2}{5}$

> *Se sentir dificuldade para resolver estas expressões, consulte os módulos 80 e 81.*

EXERCÍCIO 6

CALCULE O VALOR NUMÉRICO DAS SEGUINTES EXPRESSÕES ALGÉBRICAS:

a) $a + b$, para a = 3 e b = 4

b) $2a + 5a$, para a = 2

c) $2xy + z$, para x = 5 ; y = 2 e z = -3

d) $a^2 + 2x$, para a = -3 e x = 5

Lembre-se: $a^2 = a.a$

e) $2x^3a^3 - 3x^2$, para a = 2 e x = 4

$x^3 = x.x.x$

f) $x^2 - 5x - 3$, para x = $\dfrac{1}{2}$

g) $\dfrac{a^2 + y^2}{m^2}$, para a = -2 ; y = -3 ; m = -2

h) $8x + 4 - 5x$, para x = 4

i) $\dfrac{a^2 - b^2}{c^2}$, para a = -4 ; b = 2 ; c = 3

TERMOS SEMELHANTES

Dois termos algébricos são semelhantes quando têm a mesma parte literal.

Exemplos: $4y$; $2Y$; $\dfrac{3}{4}y$

$2ab$; $\dfrac{1}{2}ab$; $-2ab$

$-3x^2$; $\dfrac{2}{3}x^2$; $-x^2$, etc.

Observe bem quando os termos têm as mesmas letras, mas expoentes diferentes.

Exemplos: a^2b ; $3ab$ —— não são semelhantes;

xy^2 ; xy ; x^2y —— não são semelhantes,

pois $a^2b = a.a.b$ $\quad$ $xy^2 = x.y.y$

$ab = a.b$ $\quad$ $x^2y = x.x.y$

EXERCÍCIO 7

RESPONDA SE OS TERMOS SÃO SEMELHANTES, ASSINALANDO COM "X" NOS QUADRADINHOS:

	sim	ou	não
a) $3x$; $\frac{2}{5}x$	☐		☐
b) $7y$; $4y^2$	☐		☐
c) $2ab^2$; $\frac{2}{3}ab^2$	☐		☐
d) $-3ax$; $\frac{2}{5}ax$	☐		☐
e) $\frac{ax}{5}$; $\frac{3ax}{2}$	☐		☐

REDUÇÃO DE TERMOS SEMELHANTES

Para reduzir o número de termos semelhantes, basta somar os seus coeficientes e conservar a parte literal.

Exemplos:

A) $5a + 2a - 4a$

$(5 + 2 - 4)a = 3a$

Agrupamentos dos coeficientes.

B) $2x + 4x - x$

$(2 + 4 - 1)x = 5x$

C) Exemplo com mais termos semelhantes:

$2a + 5x - 3a - 2x + 7a$

$2a - 3a + 7a + 5x - 2x$

$(2 - 3 + 7)a + (5 - 2)x =$
$= 6a + 3x$

Agrupamento dos termos semelhantes.

Quando houver uma fração, procede-se da mesma maneira.

Vejamos:

A) $3x + 2y - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$

$3x - \frac{1}{2}x + 2y + \frac{1}{3}y$

Agrupamento dos termos semelhantes.

$(3 - \frac{1}{2})x + (2 + \frac{1}{3})y =$

Agrupamento dos coeficientes.

$(\frac{6-1}{2})x + (\frac{6+1}{3})y =$

$\frac{5}{2}x + \frac{7}{3}y$

B) $3y^4 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^4 + 7y^2$

$\underbrace{3y^4 - \frac{1}{3}y^4} + \underbrace{\frac{1}{2}y^2 + 7y^2}$

Agrupamento dos termos semelhantes.

$(3 - \frac{1}{3})y^4 + (\frac{1}{2} + 7)y^2 =$

Agrupamento dos coeficientes.

$(\frac{9-1}{3})y^4 + (\frac{1+14}{2})y^2 =$

$\frac{8}{3}y^4 + \frac{15}{2}y^2$

EXERCÍCIO 8

REDUZA OS TERMOS SEMELHANTES:

a) $3m - 4m + 8m =$

b) $6a^2 - 4a^2 + 7y - 2y =$

c) $6x^2 - 9x^2 + 12x - 3x =$

d) $-3y^3 + 2y + 9y^3 - y =$

e) $3x - 2 + 3y + y - x + 9 =$

f) $\frac{1}{2}y + 3y$

g) $4x - \frac{1}{3}x =$

h) $3a^2b - \frac{1}{2}a + 2a^2b$

i) $3a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{3}a + 7b$

ADIÇÃO DE POLINÔMIOS

Como você já sabe reduzir termos semelhantes e nos módulos e 81 aprendeu a operar com números inteiros e racionais, não lhe difícil dominar o assunto aqui tratado.

Sejam os polinômios:

$$2x^2 - 4x + 1 \quad e \quad 5x^2 + 2x - 3$$

Soma indicada:

$$(2x^2 - 4x + 1) + (5x^2 + 2x - 3)$$

Eliminando os parênteses, temos:

$$2x^2 - 4x + 1 + 5x^2 + 2x - 3$$

Agrupando os termos semelhantes, resulta:

$$\underbrace{2x^2 + 5x^2} - \underbrace{4x + 2x} + \underbrace{1 - 3} =$$

$$= 7x^2 - 2x - 2$$

<u>MÉTODO PRÁTICO</u> - Coloca-se um polinômio em cada linha, de modo que termos semelhantes fiquem na mesma coluna.

Observe: $(7a - 2b + 3c) + (6b + 4a - 5c) =$

$$\begin{array}{r} 7a - 2b + 3c \\ + \; 4a + 6b - 5c \\ \hline 11a + 4b - 2c \end{array} \quad = 11a + 4a - 2c$$

EXERCÍCIO 9

EFETUE AS SEGUINTES ADIÇÕES DE MONÔMIOS:

a) $(+5x) + (-3x) =$

b) $(+4a^2x) + (-3a^2x) + (-7a^2x) =$

c) $(-5a) + (+2a) + (-7x) + (-3x) =$

EXERCÍCIO 10

EFETUE AS SEGUINTES ADIÇÕES DE POLINÔMIOS:

a) $(8a + 8b) + (-2a + 4b) =$

b) $(5x^3 - 2x^2 + 7x) + (-2x^3 + 7x^2 - 4x) =$

c) $(4y^2 - 7y + 5) + (3y^2 - 9) =$

d) $(a^2 - 2ax + x^2) + (5x^2 + 4a^2 - 3ax) =$

e) $(8a^2x + 5a^2y) + (3a^2x - a^2y) + (a^2x - 2a^2y) =$

SUBTRAÇÃO ALGÉBRICA

Nos módulos 80 e 81 você aprendeu que para subtrair números inteiros e racionais troca-se esta operação pela adição do número simétrico. Da mesma forma você deve proceder quanto à subtração algébrica.

Exemplo:

$(4x^2 - 3x + 6) - (9x^2 - 5x + 2) =$ — O sinal negativo indica a troca de todos os sinais dos termos a subtrair.

$4x^2 - 3x + 6 \underbrace{- 9x^2 + 5x - 2}_{\text{inversos}} =$

$\underbrace{4x^2 - 9x^2}_{\text{termos}} \underbrace{- 3x + 5x}_{\text{semelhantes}} + \underbrace{6 - 2}_{} =$

$-5x^2 + 2x + 4$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

EXERCÍCIO 11

EFETUE AS SEGUINTES SUBTRAÇÕES DE MONÔMIOS:

a) $(+5a) - (-2a) =$

Trocando a subtração pela adição do simétrico, resulta:

$(+5a) + (+2a) =$

Eliminando os parênteses, temos:

$5a + 2a =$ ---------

b) $(+7a) - (+4a) =$

c) $(-3ab) - (-2ab) =$

d) $(+\frac{1}{2}a) - (+\frac{1}{3}a) =$

$\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}a =$

$\frac{3}{6}a - \frac{2}{6}a =$ -----

e) $(-\frac{1}{2}x^2) - (-\frac{2}{3}x^2) =$

EXERCÍCIO 12

EFETUE AS SEGUINTES SUBTRAÇÕES DE POLINÔMIOS:

a) $(4x^2 - 4x + 5) - (2x^2 + 7x - 1) =$

Trocando os sinais dos termos a subtrair, temos:

b) $(8x^2 - 5x^3 - 6 + 2x) - (-2x^3 + 6x^2 + x + 1) =$

Agrupe e reduza os termos semelhantes.

c) $(4x^2 - 5a^2x) - (2x^2 + a - a^2x) =$

- Elimine os parênteses.
- Troque todos os sinais dos termos a subtrair.
- Agrupe e reduza os temos semelhantes.

d) $(4xy - 2x^2 - 3x + 1) - (-6x^2 - 3xy + 5) =$

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO EM EXPRESSÃO ALGÉBRICA

Antes de trabalhar com expressões algébricas de adições e [sub]trações, atente bem para as observações que seguem.

- Ao eliminar parênteses e colchetes precedidos de sinal positivo, [não] troque os sinais dos termos neles contidos.

Exemplo:

$$2x + [4x + (2x + 3)] =$$
$$2x + 4x + 2x + 3 = 8x + 3$$

- Ao eliminar parênteses e colchetes precedidos de sinal negativo, [troque] que os sinais dos termos neles contidos.
- Elimine primeiramente os parênteses e em seguida os colchetes.

Exemplo:

$$7x - \left[3 - (4x + 1)\right] =$$

Eliminando os parênteses, resulta:

$$7x - \left[3 - 4x - 1\right] =$$

Eliminando os colchetes, temos:

$$7x - 3 + 4x + 1 =$$

Agrupando os termos semelhantes, provém:

$$7x + 4x - 3 + 1 = 11x - 2$$

EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO

EXERCÍCIO 13

CALCULE AS SEGUINTES EXPRESSÕES:

a) $3a - \left[a^2 + 7a - (a + 2a^2)\right] =$

b) $6ab - \left[3b - (4a + 3b - ab)\right] =$

c) $\left(\frac{1}{2} a^2 + 3a\right) - \left(\frac{2}{3} a^2 - 2a\right) =$

Eliminando os parênteses, resulta:

$\frac{1}{2} a^2 + 3a - \frac{2}{3} a^2 + 2a =$

Agrupando os termos semelhantes, temos:

$\underbrace{\frac{1}{2} a^2 - \frac{2}{3}} a^2 + \underbrace{3a + 2a} =$

Efetuando as operações, provém:

Note a subtração só dos coeficientes do 1º grupo de termos semelhantes:

$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3 - 4}{6} = \frac{-1}{6}\right)$

d) $\left(\frac{3}{5} x + 2y\right) - \left(\frac{1}{5} x + y\right) =$

Troque os sinais dos termos a subtrair.

- Elimine os parênteses.

e) $(3m + 2n) - \left(\frac{1}{2} m - \frac{2}{3} n\right) =$

MULTIPLICAÇÃO ALGÉBRICA

A multiplicação de polinômios envolve fatores e potências.

Exemplos:

a) $3a = 3.a \Leftrightarrow (a + a + a)$

b) $2ab = 2.a.b. \Leftrightarrow (ab + ab)$

O coeficiente refere-se a parcelas.

A) $a^3 = a.a.a$

B) $a^2b = a.a.b$

C) $a^2.a = a.a.a. = a^3$ $\quad (a^2.a^1 = a^{2+1})$

D) $x.x^2 = x.x.x. = x^3$ $\quad (x^1 . x^2 = x^{1+2})$

E) $y^2. y^2 = y.y.y.y = y^4$ $\quad (y^2 . y^2 = y^{2+2})$

O expoente refere-se aos fatores.

O produto de potências da mesma base é uma potência da mesma base cujo expoente é a soma dos expoentes.

Multiplicação de monômio por polinômios.

Estude com atenção o presente tópico sobre multiplicação de monômio por polinômio, pois tal operação algébrica será muito usada nos próximos módulos.

Vejamos os exemplos seguintes:

a) $x . (Y - 3) = x . y - 3 . x$

($x . 3 = 3x$; o coeficiente (3) é colocado antes da parte literal (x). (Aplicação da propriedade comutativa).

b) $a\ (a^2 + 2a - 4) = a^3 + 2a^2 - 4a$

$$\begin{cases} a . a^2 = a.a.a = a^3 & \text{(expoentes: } 1 + 2) \\ a . 2a = 2.a.a = 2a^2 & \text{(expoentes: } 1 + 1) \\ a . 4 = 4a = (a + a + a + a) & \text{(o coeficiente indica parcelas).} \end{cases}$$

c) $-2y^2 \cdot (4 - 3y + y^2) = -8y^2 + 6y^3 - 2y^4$

$$\begin{cases} -2y^2 \cdot 4 = -8y^2 & \text{(coeficiente x coeficiente)} \\ -2y^2 \cdot -3y = +6y^3 & \text{(parte literal x parte literal)} \\ -2y^2 \cdot y^2 = -2y^4 & \end{cases}$$

Se você quiser, pode aplicar a regra prática:

$$\begin{array}{r} 4 - 3y + y^2 \\ -2y^2 \\ \hline (x) \quad -8y^2 + 6y^3 - 2y^4 \end{array}$$

Multiplicam-se:

- os sinais;
- os coeficientes;
- letra por letra.

Lembre-se: quando não há coeficiente escrito, 1 é esse coeficiente. O mesmo sucede com a parte literal.

$(2y \cdot y = 2.1$ e $y.y)$

Se não há parte literal: $(4 \cdot 2Y = 4 \cdot 2$ e $y \cdot 1)$

MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIOS

a) Seja a expressão: $(3x^2 + x - 4) \cdot (x - 2) =$

1º) Multiplicar por x

2º) Multiplcar por -2

3º) Adicionar os produtos parciais.

$$\begin{array}{r} 3x^2 + x - 4 \\ x - 2 \\ \hline (x) \quad 3x^3 + x^2 - 4x \\ -6x^2 - 2x + 8 \\ \hline (+) \quad 3x^2 - 5x^2 - 6x + 8 \end{array}$$

b) Seja a expressão: $(3x^2 - 4x - 3) \cdot (2x + 1) =$

Aplicar a regra de sinais (Ver módulos 80 e 81).

- Multiplicar os sinais.
- Multiplicar os coeficientes.
- Somar os expoentes das letras comuns.

$$
\begin{array}{lrrrr}
 & 3x^2 & -\ 4x & -\ 3 & \\
(x) & & & 2x & +\ 1 \\
\hline
 & 6x^3 & -\ 8x^2 & -\ 6x & \\
(+) & & 3x^2 & -\ 4x & -\ 3 \\
\hline
 & 6x^3 & -\ 5x^2 & -\ 10x & -\ 3
\end{array}
$$

c) Seja a expressão: $(2x^2 - x + a)(2a) =$

- Multiplicar os sinais.
- Multiplicar os coeficientes.
- Somar os expoentes das letras comuns.
- Repetir as letras não comuns, ordenadamente. (Em $2a \cdot x = 2ax$, etc).

$$
\begin{array}{lrrr}
 & 2x^2 & -\ x & +\ a \\
(x) & & & +\ 2a \\
\hline
 & 4ax^2 & -\ 2ax & +\ 2a^2
\end{array}
$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

EXERCÍCIO 14

CALCULE AS EXPRESSÕES SEGUINTES:

a) $-2\ (4a - b) =$

b) $4x\ (-2x + 3) =$

c) $5a\ (-3a + 2) =$

d) $-2d\ (4d^2 + 3d) =$

EXERCÍCIO 15

RESOLVA AS EXPRESSÕES ABAIXO:

a) $(2a^2 - x + y)(2a) =$

b) $(a + b)\ (a + c) =$

c) $(x + y^2 \div z)(x + y) =$

d) $(2x^2 - 3x + 1)(2x - 4) =$

e) $(3a + 2b + c)(a + b) =$

DIVISÃO ALGÉBRICA

Se você aprendeu bem a multiplicação, não terá dificuldades em dominar a divisão. Lembre-se de que aplicando os princípios da operação inversa você estará efetuando a divisão.

A divisão de monômios é a parte que nos interessa para o caso das simplificações de expressões algébricas. Os demais casos não terão aplicação nos exercícios e problemas dos módulos posteriores a este.

Divisão de monômios.

Para dividir um monômio por outro aplica-se a regra de sinais da divisão de números inteiros. Divide-se o coeficiente numérico do dividendo pelo do divisor e, a parte literal do dividendo, pela do divisor.

Exemplifiquemos.

$$+ 6x^5 \div + 2x = + 3x^4$$

$$x^5 \div x = \frac{\cancel{x}.x.x.x.x}{\cancel{x}} = x^4$$

$$(-8x^4) \div (+2x) = - 4x^3$$

$$x^4 \div x = \frac{\cancel{x}.x.x.x}{\cancel{x}} = x^3$$

regra de sinal

$$(+12a^2b) \div (-2a) = - 6ab$$

$$a^2 \div a$$

$$\frac{\cancel{a}\ .\ a}{\cancel{a}} = a$$

regra de sinal

Indicando a divisão, você terá mais facilidade para efetuá-la.

Observe:

$$\frac{+ 6x^2}{+ 2x} = + 3x \ ; \ \frac{- 8x^2}{+ 2x} = - 4x$$

Lembre-se:

$$x \ . \ x = x^2$$

$$x^2 \div x = x$$

$$+\,12a^2b \;\; = \; -\,6ab$$

$$-\;\;2\;\;a$$

$a \cdot a = a^2$
$a^2 \div a = a$

DIVISÃO DE POLINÔMIOS.

- Para dividir um polinômio por um monômio divide-se cada termo do polinômio pelo monômio.

Exemplos:

A) $(10a^2 - 5ab) : 2a$ ou $\dfrac{10a^2}{2a} - \dfrac{5ab}{2a} = 5a - \dfrac{5}{2}\, b$

> NOTA:
>
> $$-\,\frac{5\cancel{a}b}{2\cancel{a}} = -\,\frac{5b}{2} \text{ ou } -\,\frac{5}{2}\, b$$

B) $(10x^3 - 3x^2 + 15x) \div -5x =$

ou

$$-\,\frac{10\cancel{x}^3}{5\cancel{x}} + \frac{3\cancel{x}^2}{5\cancel{x}} - \frac{15\cancel{x}}{5\cancel{x}} =$$

$$-\,2x^2 + \frac{3x}{5} - 3$$

Note que a regra de sinais é aplicada no momento de indicar a divisão dos termos.

Se você transformar a "divisão" de polinômio por monômio em "divisão de monômio por monômio", bastará aprender bem o primeiro caso que saberá o segundo.

- *A divisão de polinômio por polinômio não será objeto de aplicação em nossos módulos de álgebra. Assim, se você se interessar pelo assunto, indicamos-lhe os livros de 7ª série do ensino fundamental, onde você encontrará ensinamentos a respeito.*

EXERCÍCIO DE FIXAÇÃO

NO SEU CADERNO, RESOLVA OS EXERCÍCIOS QUE SEGUEM:

EXERCÍCIO 16

EFETUE A DIVISÃO DOS SEGUINTES MONÔMIOS:

a) $-\,2a \div a =$

b) $+\,4b^2 \div 2b =$

c) $-5x^2 \div 2x =$

d) $+6y^3x \div -3y^2 =$

e) $(-15x^2) \div (-7) =$

f) $(-42y^2z^3) \div (+7y^2z) =$

g) $-2a \div 2a =$

h) $+4bc \div (+4bc) =$

EXERCÍCIO 17

EFETUE AS SEGUINTES DIVISÕES DE POLINÔMIOS POR MONÔMIOS, TRANSFORMANDO-AS EM DIVISÕES DE MONÔMIOS POR MONÔMIOS:

a) $(9x^2 + 6x) \div (3x) =$	b) $(10a^2 - 30ab) \div (-10a) =$
c) $(-6x^2 + 4x) \div (+2x) =$	d) $(7a^2x - 4a^3x + 5a^4x^2) \div (-2ax) =$

PRODUTOS NOTÁVEIS

Há certos produtos de polinômios que, pela sua aplicação constante em álgebra, devem ser estudados mais minuciosamente e memorizados, para facilitar os cálculos que apresentaremos em nossos módulos posteriores.

Passemos ao estudo desses produtos.

1º - O quadrado da soma de dois termos.

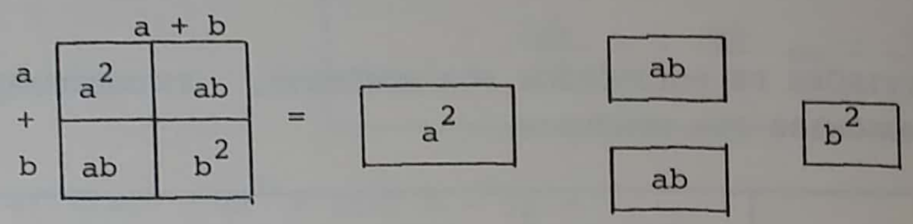
Exemplo: $(a + b)^2$

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + \underline{ab + ab} + b^2 =$$

$$\boxed{= a^2 + 2ab + b^2}$$

Na antiguidade, os gregos demonstravam esse produto por meio da geometria.

Observe:



$$(a + b)^2 = \quad a^2 \quad + \quad 2ab \quad + \quad b^2$$

Aplicando o dispositivo prático na multiplicação dos binômios, obtemos:

$$\begin{array}{rl} & a + b \\ (\times) & \underline{a + b} \\ & a^2 + ab \\ (+) & \underline{\quad + ab + b^2} \\ & a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

REGRA:

O quadrado da soma de dois termos é igual:

- ao quadrado do 1º termo
- mais duas vezes o produto do 1º termo pelo 2º termo
- mais o quadrado do 2º termo.

> O quadrado da soma indicada de dois termos, $(a + b)^2$, é igual ao quadrado do primeiro termo, $(a)^2$, mais duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo, $(+2ab)$, mais o quadrado do segundo termo, $(b)^2$.

2º - O quadrado da diferença de dois termos.

Exemplo: $(a - b)^2$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 \underbrace{- ab - ab} + b^2 =$$

$$\boxed{= a^2 - 2ab + b^2}$$

Observe, abaixo, o paralelo entre a soma e a diferença de dois termos.

$$\begin{array}{rr} & x + y \\ (x) & x + y \\ \hline & x^2 + xy \\ (+) & + xy + y^2 \\ \hline & x^2 + 2xy + y^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & x - y \\ (x) & x - y \\ \hline & x^2 - xy \\ (+) & - xy + y^2 \\ \hline & x^2 - 2xy + y^2 \end{array}$$

O quadrado da diferença indicada de dois termos, $(a-b)^2$, é igual ao quadrado do primeiro termo, $(a)^2$, menos duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo, $(-2ab)$, mais o quadrado do segundo termo, $(b)^2$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

EXERCÍCIO 18

CALCULE OS PRODUTOS:

a) $(x + y)^2 =$ f) $(2 + a)^2 =$

b) $(a + 2b)^2 =$ g) $(a - 2)^2 =$

c) $(3 + x)^2 =$ h) $(3 - x)^2 =$

d) $(2x + y)^2 =$ i) $(2x - y)^2 =$

e) $(y + z)^2 =$ j) $(y - z)^2 =$

Observe nos exercícios dados, referentes aos dois casos de produtos notáveis, que o resultado é sempre um trinômio.

3º - Produto da soma indicada de dois termos pela diferença dos mesmos.

Exemplo: $(a + b)(a - b)$

$$(a + b)(a - b) = a^2 + \underline{ab - ab} - b^2$$

$$\boxed{a^2 - b^2}$$

Vejamos a mesma multiplicação com aplicação de regra prática.

<u>REGRA</u>

O produto da soma pela diferença indicada de dois termos é igual:

$$\begin{array}{rrr} & a & + b \\ (x) & a & - b \\ \hline & a^2 & + \cancel{ab} \\ & & - \cancel{ab} - b^2 \\ \hline & a^2 & - b^2 \end{array}$$

- ao quadrado do 1º termo
- menos o quadrado do 2º termo

O produto da soma indicada de dois termos, $(a + b)$, pela diferença indicada dos mesmos, $(a - b)$, é igual ao quadrado do primeiro termo, $(a)^2$, menos o quadrado do segundo termo, $(b)^2$.

<u>EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO</u>

EXERCÍCIO 19

CALCULE O PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA:

a) $(a + 2)(a - 2) =$

b) $(x + y)(x - y) =$

c) $(a + x)(a - x) =$

d) $(3x + 2)(3x - 2) =$

e) $(4a + b)(4a - b) =$

f) $(3d + 2x^2)(3d - 2x^2) =$

FATORAÇÃO

Fatorar uma expressão algébrica é escrevê-la sob a forma de um produto indicado.

Exemplo:

A) $xy = x.y$

B) $6a^2b = 2.3.a^2.b$

C) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

D) $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$

E) $m^2 + 2mn + n^2 = (m + n)^2$

F) $- 8b^2c = - 2^3 . b^2 . c$

G) $25x^2 = 5^2 . x^2$

Entre dois termos podemos indicar os fatores comuns.

Exemplos:

A) $\begin{cases} - 8b^2c = - 2^3 . b^2 . c \\ 6bc = 2.3.b.c \end{cases}$ fatores comuns: 2.b.c

B) $\begin{cases} 12x^2y = 2^2.3.x^2.y \\ 30xy^2 = 2.3.5.x.y^2 \end{cases}$ fatores comuns: 2.3.x.y

C) $\begin{cases} 16x^2 = 2^4 . x^2 \\ 25x^3 = 5^2 . x^3 \end{cases}$ fator comum: x^2

D) $\begin{cases} 22y^2 = 2.11.y^2 \\ 15z = 3.5.z \end{cases}$ fator comum: 1

NOTA: Quando não encontramos divisores comuns, devemos lembrar que 1 é fator comum de todos os números. Todo número multiplicado ou dividido por 1 não se altera.

Fator comum. *Observe os fatores comuns das seguintes expressões algébricas:*

$3x + 4x$ ——— fator comum: x

$2a + 5a$ —— fator comum: a

$4x^2 - 8x^2$ —— fatores comuns: 4 e x^2

$12xy - 6x^2y$ —— fatores comuns: $6, x, y$

Baseando-nos na propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e subtração, podemos pôr esses fatores em evidência.

$x\ (3 + 4)$

$a\ (2 + 5)$

$4x^2\ (y - 2)$

$6xy\ (2 - x)$

Verifique:

$x\ (3 + 4) = 3x + 4x$

$a\ (2 + 5) = 2a + 5a$

$4x^2\ (y - 2) = 4x^2y - 8x^2$

$6xy\ (2 - x) = 12xy - 6x^2y$

Às vezes o fator 1 substitui o fator comum posto em evidência.

Exemplos:

A) $\begin{cases} 4a^2 - a^2 & \text{—— fator comum: } a^2 \\ a^2\ (4 - 1) & \text{—— verificando: } a^2(4 - 1) = 4a^2 - a^2 \end{cases}$

B) $\begin{cases} 30b^2 - 15b & \text{—— fator comum: } 15b \\ 15b\ (2b - 1) & \text{—— verificando: } 15b(2b - 1) = 30b^2 - 15b \end{cases}$

C) $\begin{cases} a^2 - a & \text{—— fator comum: } a \\ a\ (a - 1) & \text{—— verificando: } a\ (a - 1) = a^2 - a \end{cases}$

<u>NOTA</u>: *Lembre-se da propriedade do elemento neutro na multiplicação.*

EXERCÍCIO 20

COLOQUE EM EVIDÊNCIA OS FATORES COMUNS:

a) $5b + 3b =$

b) $2x + 2y =$

c) $4b^2c + 3bc =$

d) $6xy^2 - 3x^2$

e) $4x + 6y$

f) $3b + b =$

g) $7y - 7 =$

h) $3a - 5a^2 =$

i) $9x^5 - 4x^3 =$

j) $\frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}x^2y =$

l) $15a^2b + 5ab^2 =$

m) $8mn - 4an + 6yn =$

$= 2n($ ------- $)$

Produtos notáveis e fatoração. *Como você já sabe o que sejam produtos notáveis, passemos então à fatoração dos mesmos.*

Exemplos:

Produtos notáveis		Fatoração
$a^2 + 2ab + b^2$	=	$(a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2$	=	$(a - b)^2$
$x^2 - b^2$	=	$(x + b)(x - b)$
$m^2 - 2mn + n^2$	=	$(m - n)^2$ etc.

Como fatorar produtos notáveis.

Seja o produto notável: $x^2 - 25$ (o quadrado do 1º termo menos o quadrado do 2º termo).

Observe:

A) $$\left.\begin{array}{ccc} x^2 & - & 25 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt{x^2} & & \sqrt{25} \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & & 5 \end{array}\right\}$$ Logo, $(x + 5)(x - 5)$

Seja:

B) $$\left.\begin{array}{ccc} 49 & - & a^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt{49} & & \sqrt{a^2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 7 & & a \end{array}\right\}$$ Logo, $(7 + a)\ (7 - a)$

Seja:

C) $$\left.\begin{array}{ccc} 4x^2 & - & y^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt{4x^2} & & \sqrt{y^2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2x & & y \end{array}\right\}$$ Logo, $(2x + y)(2x - y)$

EXERCÍCIO 21

FATORE OS SEGUINTES PRODUTOS NOTÁVEIS:

a) $x^2 - 9$ d) $36x^2 - 4y^2$

b) $25 - b^2$ e) $16a^2 - b^2$

c) $9a^2 - x^2$ f) $49x^2 - y^2$

FATORAÇÃO DO TRINÔMIO QUADRADO PERFEITO

Os produtos notáveis provindos de $(a+b)^2$ e $(a-b)^2$ são, como você sabe, tri-nômios com a característica de terem o 1º e 3º termos expressos por qua-drados perfeitos.

Como nem sempre é fácil reconhecer o binômio que produziu o trinômio quadrado perfeito, vejamos um modo prático para distingui-lo

Seja o trinômio: $x^2 + 2ax + a^2$

$\sqrt{x^2}$ $\sqrt{a^2}$

$2.ax$

x a

Logo, $(x + a)^2$

Seja o trinômio: $a^2 - 2ay + y^2$

$\sqrt{a^2}$ $\sqrt{y^2}$

$2.ay$

a y

Logo, $(a - y)^2$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

NO SEU CADERNO, RESOLVA OS SEGUINTES EXERCÍCIOS:

EXERCÍCIO 22

MARQUE NOS PARÊNTESES OS TRINÔMIOS QUE SÃO QUADRADOS PERFEITOS:

1 - ( ) $x^2 + 2xy + y^2$

2 - ( ) $a^2 + 2bc + c^2$

3 - ( ) $a^2 - 2c + b^2$

4 - ( ) $m^2 - 2mn + n^2$

5 - ( ) $a^2 - 2ab + b^2$

6 - ( ) $p^2 - q + q^2$

7 - ( ) $r^2 - rs + s^2$

8 - ( ) $4a^2 - 4ab + b^2$

9 - ( ) $9x^2 + 12x + 4$

10 - ( ) $4a^2 + 8ab + 4b^2$

11 - ( ) $4x^2 + 12xy + 9y^2$

12 - ( ) $m^2 - 4mn + 4n^2$

EXERCÍCIO 23

FATORE OS TRINÔMIOS DO EXERCÍCIO ANTERIOR, IDENTIFICADOS COMO QUADRADOS PERFEITOS:

a - ( ) ----------------------

b - ( ) ----------------------

c - ( ) ----------------------

d - ( ) ----------------------

e - ( ) ----------------------

f - ( ) ----------------------

g - ( ) ----------------------

h - ( ) ----------------------

À guisa de esclarecimento, cabe-nos ressaltar que, por não ser parte da programação dos nossos módulos, deixamos de falar aqui sobre:

- cubo da soma de dois termos,
- cubo da diferença de dois termos,
- divisão de polinômio por polinômio,
- m.m.c. e m.d.c. de expressões algébricas, e
- simplificação de expressões algébricas fracionárias.

Como essa matéria consta do programa de 7ª série do ensino fundamental, se você quiser conhecê-la, com o fito de ampliar seu aprendizado, pode estudá-la nos livros de matemática adotados naquela série.

Também lembramos-lhe, nesta oportunidade, que o nosso pro-
sito, nos próximos módulos de álgebra, é dar-lhe mais um recurso p
a resolução de problemas. Com esse preparo você poderá refazer to
os problemas dos módulos anteriores, aplicando, na resolução dos mes
os conhecimentos adquiridos sobre equações de 1º e 2º graus.

VII - PÓS-TESTE

O propósito do presente Pós-Teste é a verificação do
aproveitamento sobre o assunto deste módulo. E a isso você já está
miliarizado.

Se estudou com vontade e interesse e realizou todas
atividades aqui propostas, tendo dominado os objetivos estabelecidos,
então você está em condições de se sair bem neste teste. Entretanto,
tem ainda algumas dúvidas, reveja os pontos principais do módulo e
pois submeta-se ao Pós-Teste.

Agora, leia calmamente as questões abaixo e dê respostas
perguntas formuladas. E seja feliz neste seu trabalho !

1 - CLASSIFIQUE, QUANTO AO NÚMERO DE TERMOS, AS SEGUINTES EXPRESSÕ
ALGÉBRICAS:

a) $\frac{2n}{3} + \frac{1}{2} a + 9 - n$ ____________________

b) $3a^2bc$ ____________________

c) $xy + yz$ ____________________

2 - ESCREVA OS NOMES DOS ELEMENTOS DO MONÔMIO:

$-3xy$

→ ____________________________

→ ____________________________

3 - CALCULE O VALOR NUMÉRICO DAS EXPRESSÕES ABAIXO:

a) $2x + y^2$ para $\underline{x} = -1$ e $\underline{y} = -2$

b) $2xa^3 - 3x^2$ para $\underline{a} = 2$ e $\underline{x} = 4$

4 - REDUZA OS TERMOS SEMELHANTES:

a) $4a + 7a - 2a + 6a$

b) $6x^2 - 2x + 7x - 5x^2$

5 - CALCULE AS EXPRESSÕES ABAIXO:

a) $(a^2 - 2ax + x^2) + (6x^2 - 4a^2 - 3ax)$

b) $(8x^2 - x^3 - 6 + 2x) - (-x^3 + 6x^2 + x + 1)$

6 - EFETUE AS SEGUINTES MULTIPLICAÇÕES:

a) $5\ (3b + c - 1) =$

b) $3x\ (x + 3) =$

7 - EFETUE AS DIVISÕES ABAIXO:

a) $2b^2c \div bc$

b) $(3y^2 + 6y) \div 3y$

8 - ELEVE AO QUADRADO OS SEGUINTES BINÔMIOS:

a) $(a - b)^2$

b) $(m + n)^2$

9 - COLOQUE EM EVIDÊNCIA OS FATORES COMUNS:

a) $14y^2 + 7y$

b) $3a + 5a^2$

10 - QUAIS BINÔMIOS PRODUZIRAM OS TRINÔMIOS SEGUINTES ?

a) $x^2 - 2xy + y^2$

b) $9y^2 + 6y + 1$

VIII - PROCEDIMENTOS E ATIVIDADES - NÍVEL DE SUPORTE

Você já estudou bastante, mas ainda não dominou inteiramente o conteúdo deste módulo, como confirma o último teste ao qual você se submeteu sem muito sucesso. Em vista disso, formulamos no presente item um reexame da matéria dada, apresentando mais alguns exercícios de reforço para lhe auxiliar a vencer as dificuldades encontradas. Tal vez entre os pontos que lhe são obscuros estejam envolvidas as operações. Se esse for o caso, recomendamos-lhe que refaça com atenção os exercícios dos módulos 80 e 81, uma vez que o conhecimento das operações com números inteiros e racionais são os instrumentos da álgebra.

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Classificação. O assunto classificação não lhe poderia ter sido motivo de embaraços. Portanto, apenas ressaltamos que os sinais de operação, escritos entre os termos, facilitam o reconhecimento do número de termos de uma expressão algébrica.

Nosso estudo sobre álgebra é elementar. Assim, apresentamos termos com coeficientes em N, Z e Q, deixando de lado termos fracionários. Estes últimos nos levariam a um aprofundamento do estudo de álgebra, fora das nossas cogitações neste currículo.

Exemplos desses termos: $3a \longrightarrow$ coeficiente (N)

$-2b^2 \longrightarrow$ coeficiente (Z)

$-\frac{2}{3}a^2 \longrightarrow$ coeficiente (Q)

A expressão $-\frac{2}{3}a^2$ não é fracionária; não tem letras no denominador. Já $\frac{2ab}{3b^2}$, por exemplo, é uma expressão algébrica fracionária, pois efetuando a divisão indicada ainda teríamos $\frac{2a}{3b}$, isto é, haveria letras no denominador.

Valor numérico de uma expressão algébrica. Substituídas as letras pelos valores a elas atribuídos resulta o valor numérico da expressão algébrica.

Vejamos: $\frac{3}{2}ab + \frac{1}{2}ab$ para $\underline{a} = 3$ e $\underline{b}$ -5

$$\frac{3}{2}(3.-5) + \frac{1}{2}(3.-5) =$$

$$\frac{3}{2}(-15) + \frac{1}{2}(-15) =$$

$$\frac{-45}{2} + \frac{-15}{2} = \frac{-60}{2} = -30$$

Substituídas as variáveis pelo seu valor numérico, o cálculo a efetuar é o ensinado no módulo 81, sobre números racionais, e que requer atenção quanto aos sinais e regras impostas pelas operações (adição, subtração, multiplicação e divisão).

Seja a expressão: $\frac{x^2 - a}{a + b} - \frac{x}{a}$ = para $x = (-4)$; $a = 3$; $b=2$

Substituindo as variáveis pelo seu valor numérico, temos:

$$\frac{(-4)^2 - 3}{3 + 2} - \frac{(-4)}{3} =$$

$$\frac{16 - 3}{5} - \frac{(-4)}{3} =$$

(*Observe a subtração algébrica*).

$$\frac{39}{15} - \frac{-20}{15} \iff \frac{39}{15} + \frac{20}{15} = \frac{59}{15} = 3\ \frac{14}{15}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

EXERCÍCIO 24

CALCULE O VALOR NUMÉRICO DAS SEGUINTES EXPRESSÕES:

a) $2x^4 - 5x^2 + 6x - 10 =$ para $\underline{x} = -1$

b) $\frac{2}{5}a - \frac{a-3}{a^2} =$ para $\underline{a} = 5$

c) $\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x-y}{x+y} =$ para $\underline{x} = +2$ e $y = -1$

d) $4ab^2 - 3a + 5b$ para $\underline{a} = 2$ e $b = 3$

Termos semelhantes. Para reconhecer termos semelhantes basta verificar se a parte literal deles é a mesma.

Vejamos o exemplo seguinte:

- Marcar, de modo a ficarem encerrados em figuras geométricas iguais, os termos semelhantes:

$2ab$; $\boxed{4x}$; $6a$; ab^2 ; ab ; $3a^2b$; $\boxed{5x}$; a

Observe: $ab^2 \neq a^2b$

$ab^2 = a.b.b$

$a^2b = a.a.b$

EXERCÍCIO 25

AGRUPE OS TERMOS SEMELHANTES:

a) $2ab^2$; $6a^2b$; $3a^2b$; $4ab$; $2a^2$; $3b^2$; $4ab$; $5a^2b$; $3ab^2$

ab ------------------------------ b^2 ------------------------------

a^2b ------------------------------ ab^2 ------------------------------

a^2 ------------------------------

b) $3ax^2$; $\frac{2}{3}x^2$; $5ax^2$; $-\frac{1}{5}x^2$; $\frac{2}{3}x^2$; $5ax^2$; $\frac{1}{2}ax^2$

$ax^2 \longrightarrow$ --

$x^2 \longrightarrow$ --

EXERCÍCIO 26

SOME OS COEFICIENTES DOS TERMOS SEMELHANTES:

a) $4a - 5a + 3a =$

b) $c^2 + b^2 + 2c^2 + 3b^2 =$

c) $x + 3x - 2y + 4x - 3y =$

d) $3x + 2a - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}a =$

e) $\frac{x}{2} + 3y - 2x + \frac{1}{2}x =$

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO ALGÉBRICAS

ADIÇÃO. A adição algébrica não apresenta dificuldades maiores. Se você sabe reduzir termos semelhantes, sabe também adicionar.

Vejamos a adição de monômios:

a) $4a + 6a + (-4a) + 5a + (-7a) =$

Retirando os parênteses, temos:

$4a + 6a - 4a + 5a - 7a =$

$15a - 11a = 4a$

b) $4x + (-2x) + (-3x) + 9x + (-x) =$

Retirando os parênteses, temos:

$4x - 2x - 3x + 9x - x =$

Agrupando os termos semelhantes de mesmo sinal, provém:

$4x + 9x - 2x - 3x - x =$

Reduzindo os termos semelhantes, resulta:

$13x - 6x = 7x$

- Vejamos a adição de <u>polinômios</u>:

a) $(2x + 4y - 2z) + (2x + 3y - z) =$

Colocando os termos semelhantes um debaixo do outro e adicionando-os, temos:

$$\begin{array}{r} 2x + 4y - 2z \\ (+)\ 2x + 3y - z \\ \hline 4x + 7y - 3z \end{array}$$

b) $(2a - 3b + 4) + (a - b + 1)$

$$\begin{array}{r} 2a - 3b + 4 \\ (+)\ a - b + 1 \\ \hline 3a - 4b + 5 \end{array}$$

c) $(2b^2 - 3a + c) + (-b^2 - c + a) =$

$$\begin{array}{r} 2b^2 - 3a + \cancel{c} \\ (+)\ -b^2 + a - \cancel{c} \\ \hline b^2 - 2a \end{array}$$

EXERCÍCIO 27

EFETUE AS SEGUINTES ADIÇÕES:

a) $(-2a) + (+5a) + (-x) + (+2x) =$

b) $(4x^2 - x + 3) + (3x - 2x^2 - 1) =$

c) $(a^2 - 2ax + x^2) + (-a^2 - 2ax + x^2) =$

d) $(8a^2x + 3a^2y) + (a^2x - 2a^2y) =$

<u>Subtração algébrica</u>: *Já dissemos, nos módulos 80, 81 e neste, que subtrair é o mesmo que adicionar o simétrico.*

Atente, então, para as subtrações abaixo e depois realize os exercícios adiante.

Exemplos:

a) $\begin{cases} 2ab - (+3ab) \Longleftrightarrow 2ab - 3ab = -ab \\ 2ab - (-3ab) \Longleftrightarrow 2ab + 3ab = 5ab \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5xy^2 - (+xy^2) \Longleftrightarrow 5xy^2 - xy^2 = 4xy^2 \\ 5xy^2 - (-xy^2) \Longleftrightarrow 5xy^2 + xy^2 = 6xy^2 \end{cases}$

trocar os sinais

c) $\begin{cases} (2xy - 3xy + 4xy) - (2xy - xy + xy) \\ \widehat{2xy} - \underbrace{3xy} + \widehat{4xy} - \underbrace{2xy} + \widehat{xy} - \underbrace{xy} \\ 2xy + 4xy + xy - 3xy - 2xy - xy = 7xy - 6xy = xy \end{cases}$

trocar os sinais

d) $\begin{cases} (2y - 4x) - (-5y + 3x - z) \\ \widehat{2y} - \underbrace{4x} + \widehat{5y} - \underbrace{3x} + z = \\ 2y + 5y - 4x - 3x + z = 7y - 7x + z \end{cases}$

$$
(+)\quad \begin{array}{r} 2y - 4x \\ 5y - 3x + z \\ \hline 7y - 7x + z \end{array}
$$

Note que o termo z não tem correspondente no subtraendo. Mas isso não tem importância, a subtração foi transformada na adição do simétrico. E o termo aparece com o sinal trocado no resultado da operação.

EXERCÍCIO 28

EFETUE AS SEGUINTES SUBTRAÇÕES:

a) $(3a - 2b) - (4a + b) =$

b) $(4x + 6y) - (-3x - 3y) =$

c) $(8a^2x + 5a^2y) - (3a^2x - a^2y) =$

d) $(4y^2 - 7y + 5) - (3y^2 - 3) =$

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO ALGÉBRICA

MULTIPLICAÇÃO. Nesta operação procedemos multiplicando:

- os sinais,
- os coeficientes,
- letra por letra iguais.

Exemplo I. $(-2ab^2).(+3ab) = -6a^2b^3$ Dizemos: - por + = -

2 por 3 = 6

a por a = a^2

b^2 por b = b^3

$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = a.a \\ b^3 = b.b.b \end{array}}$

Exemplo II. $(-4x^2y).(-xyz) = +4x^3y^2z$

Dizemos: - por - = +

4 por 1 = 4 (-xyz ou -1xyz)

x^2 por x = x^3

y por y = y^2

$z \longrightarrow z$

Exemplo III. $(-3a^2b).(ax^2y) = -\ 3a^3bx^2y$

Dizemos: - por + = -

3 por 1 = 3

a^2 por a = a^3 $-3a^3bx^2y$

$b \longrightarrow b$

$\longrightarrow x^2$

$\longrightarrow y$

Note que, neste último exemplo, além de multiplicarmos os sinais, os coeficientes, e letra por letra iguais, também cuidamos de repetir as letras que não têm par.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

EXERCÍCIO 29

EFETUE AS MULTIPLICAÇÕES ABAIXO:

a) $(2x^2y)(4x^3yz) =$

b) $(4a^2b^3c)(-2ac) =$

c) $(2ab + 3b + 2c)(-ab) =$

d) $(2a^2 - 3ab - 2)(-3ab) =$

EXERCÍCIO 30

EFETUE AS SEGUINTES OPERAÇÕES:

a) $(a + b)(a + b) =$

b) $(a - b)(a - b) =$

c) $(a + b)(a - b) =$

d) $(x + y)(x + y) =$

e) $(x - y)(x - y) =$

f) $(x + y)(x - y) =$

EXERCÍCIO 31

COMPLETE AS SEGUINTES IGUALDADES COM OS PRODUTOS OBTIDOS NO EXERCÍ
ANTERIOR:

a) $(a + b)^2 =$ ____________________ c) $(a - b)^2 =$ ____________

b) $(x + y)^2 =$ ____________________ d) $(x - y)^2 =$ ____________

EXERCÍCIO 32

EFETUE AS SEGUINTES MULTIPLICAÇÕES DE MONÔMIOS POR POLINÔMIOS:

a) $a(2a - 3b - c) =$

b) $2x(4x + 3a + z) =$

c) $4y^2(2x - y + 3) =$

EXERCÍCIO 33

MULTIPLIQUE OS POLINÔMIOS ABAIXO:

a) $(3x^2 - x + 4)(x + 2) =$

b) $(2x^2 + x - a)(a + x) =$

c) $(4d^2 - 3d)(-2d + 1) =$

DIVISÃO ALGÉBRICA. A divisão, como você sabe, é operação inversa da multiplicação.

Vejamos:

$$(-12x^2y) \div (+2x) = -6xy$$

Dizemos: $-$ por $+ = -$

12 por 2 = 6

x^2 por $x = x$

$y \longrightarrow y$

Como salientamos anteriormente, a divisão estando indicada facilita o cálculo.

Exemplifiquemos:

a) $\dfrac{+9x^3y^2}{-3xy^3} = \dfrac{-3x^2}{y}$

b) $\dfrac{-10a^3x}{+4ax^2} = -\dfrac{5a^2}{2x}$

c) $\dfrac{-18yz^3}{+9yz} = -2z^2$

d) $\dfrac{-9x^2}{+6xy} = -\dfrac{3x}{2y}$

e) $\dfrac{-8a}{-16a^2b} = +\dfrac{1}{2ab}$

f) $\dfrac{+5ab^2}{+15a^3b} = \dfrac{b}{3a^2}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

EXERCÍCIO 34

EFETUE AS SEGUINTES DIVISÕES:

a) $(10x^2 - 5x) \div 2x$ ou $\dfrac{10x^2}{2x} - \dfrac{5x}{2x} =$

b) $(20x^2y^3 + 4xy) \div 6y$ ou $\dfrac{20x^2y^3}{6y} + \dfrac{4xy}{6y} =$

c) $(4x^2y - 2xy + xy^2) \div 2x$

d) $(6ab^2 - 4a^2b + 3ab) \div 4ab =$

e) $(\frac{3}{4}x^2y + \frac{5}{6}xy^2) \div (\frac{2}{3}xy) =$

FATORAÇÃO

Fatorar uma expressão algébrica é, como já lhe ensinamos, escrev... sob a forma de um produto indicado.

Vejamos:

a) $6a^2b = 2.3.a^2.b$

b) $-15m^2n = -3.5.m^2.n$

c) $16x^2y = 2^4.x^2.y$

d) $-8a^3b^2 = -2^3.a^3.b^2$

Entre dois ou mais termos algébricos há, às vezes, fa... res comuns.

Exemplifiquemos:

a) $9a^2b + 3a^2b^3 + 6ab = 3ab(3a + ab^2 + 2)$

Entre 9,3 e 6 há o fator comum 3; entre $\underline{a}^2$ e $\underline{a}$, o fat... $\underline{a}$; e entre $\underline{b}$ e $\underline{b}^3$, o fator $\underline{b}$.

Se você quiser verificar esse exercício, basta mu... plicar o fator em evidência pela expressão algébrica.

$$3ab(3a + ab^2 + 2) = 9a^2b + 3a^2b^3 + 6ab$$

Obtendo a expressão inicial, você terá certeza de que ... fatoração está correta.

b) Seja a expressão: $3a^2x - 6b^2x + 12x = 3x(a^2 - 2b^2 + 4)$

Observe-a e mentalmente faça a verificação.

c) Se você estudou bem os produtos notáveis deve reconhecer o tr... mio quadrado perfeito da expressão seguinte:

$a^2 + 2ab + b^2 =$

Fatorando-a, temos:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

EXERCÍCIO 35

FATORE OS SEGUINTES MONÔMIOS:

a) $36a^4b^2c =$

b) $25x^2y =$

c) $-12ax =$

EXERCÍCIO 36

FATORE OS BINÔMIOS ABAIXO:

a) $3m + 3b =$

b) $2ax + 4ay =$

c) $5ay - 15ax =$

d) $4x^2y + 8xy^2 =$

e) $10my^3 - 15m^2y^2 =$

f) $ab - ac =$

EXERCÍCIO 37

FATORE OS TRINÔMIOS:

a) $3bx - 2ax + 4x =$

b) $2a^2b + 4ab - 4 =$

c) $4ab^2 - 3a^2b^3 + 7a^2b =$

d) $2x + 3xy^2 - xy =$

e) $2ax + 4x - acx =$

EXERCÍCIO 38

ATENÇÃO ! FATORE OS PRODUTOS NOTÁVEIS:

a) $a^2 + 2ab + b^2 =$

b) $4x^2 + 12ax + 9a^2 =$

c) $a^4 - 12a^2 + 36 =$

d) $49b^2 - a^2 =$

e) $9a^2 - 1 =$

f) $4x^2 - 1 =$

Cremos que, depois de todo o seu esforço, você está agora dominando a matéria aqui estudada e, assim, em condições de ser bem sucedido no novo teste a que deve se submeter.

IX - PÓS-TESTE - NÍVEL DE SUPORTE

Realize este Pós-Teste obedecendo as mesmas recomendações que fizemos para os anteriores. É mais uma verificação do seu aproveitamento sobre o assunto deste módulo.

Leia com atenção as questões abaixo e, calmamente, dê as respostas às perguntas formuladas.

Boa sorte !

1 - CLASSIFIQUE, QUANTO AO NÚMERO DE TERMOS, AS SEGUINTES EXPRESSÕES ALGÉBRICAS:

a) $a + b + c$ ----------------------

b) $\frac{2}{3}(a.b^2.c)$ ----------------------

c) $\frac{abc}{2a}$ ----------------------

2 - ESCREVA OS NOMES DOS ELEMENTOS DO MONÔMIO:

$10\,abc$

→ ----------------------

→ ----------------------

3 - CALCULE O VALOR NUMÉRICO DAS EXPRESSÕES ABAIXO:

a) $4m - \frac{n}{2}$ para $\underline{m} = 5$ e $\underline{n} = 10$

b) $x^2 - 5x - 3$ para $\underline{x} = \frac{1}{2}$

4 - REDUZA OS TERMOS SEMELHANTES:

a) $-4y + 3y - 2y + 12y$

b) $\frac{1}{2}x^2 + y - \frac{3}{2}x^2 + 5y$

5. CALCULE AS EXPRESSÕES ABAIXO:

a) $(8a^2x + 5a^2y) + (-12a^2x - 7a^2y)$

b) $(4x^2 - 5a^2x) - (2x^2 + a - a^2x)$

6. EFETUE AS SEGUINTES MULTIPLICAÇÕES:

a) $-7(2b - 4) =$

b) $3a(-2a + 5) =$

7. EFETUE AS DIVISÕES ABAIXO:

a) $3xy \div 5xy =$

b) $(2a^3 + 5a^2 + a) \div a =$

8. ELEVE AO QUADRADO OS SEGUINTES BINÔMIOS:

a) $(2m + n)^2$

b) $(x - y)^2$

9. COLOQUE EM EVIDÊNCIA OS FATORES COMUNS:

a) $\frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}x^2y$

b) $8mn - 6m + 4m^2$

10. QUAIS BINÔMIOS PRODUZIRAM OS TRINÔMIOS SEGUINTES ?

a) $a^2 + 2ax + x^2$

b) $x^2 + 2x + 1$

XI - REFERÊNCIAS E SUGESTÕES BIBLIOGRÁFICAS

1 - DOMÊNICO, Luiz C. e outros. *"Matemática Moderna"* 3, para a 7ª série. São Paulo, Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas, IBEP, 1975.

2 - NEME, Miguel Asis. *"Matemática, ensino moderno"* 7ª série do 1º grau. São Paulo, Editora do Brasil S.A., 1974.

3 - NEDEM (Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática - C.E. Paranã). *"Ensino Moderno da Matemática"*, 3º Vol. São Paulo, Editora Nacional S.A., 1969.

4 - QUINTELLA, Ary. *"Matemática, Curso Ginasial"*, 2º Vol., 3ª edição. São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1967.

5 - Livros de 6ª e 7ª séries do ensino fundamental.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

EXERCÍCIO 1

a. (3); b. (1); c. (2); d. (4); e. (2); f. (4).

EXERCÍCIO 2

a. (B); b. (T); c. (P); d. (T); e. (B); f. (M).

EXERCÍCIO 3

a) -7 ; ab

b) $-\frac{3}{5}$; x

c) $\frac{1}{3}$; a^2

d) 1 ; ab

e) 1 ; ab^2

f) -3 ; xy^4

EXERCÍCIO 4

a) ... 2º grau ; b) ... 3º grau ; c) ... 2º grau ; d) ... 2º grau.

EXERCÍCIO 5

a) ... 2º grau ; c) ... 6º grau ; e) ... 5º grau.

b) ... 4º grau ; d) ... 5º grau.

EXERCÍCIO 6

a) 7;

b) 14;

c) 17;

d) 19;

e) 976;

f) $-\frac{21}{4}$;

g) $\frac{13}{4}$

h) 16

i) $\frac{12}{9}$ ou $1\frac{1}{3}$

EXERCÍCIO 7

a) sim ; b) não ; c) sim ; d) sim ; e) sim.

EXERCÍCIO 8

a) $7m$

b) $2a^2 + 5y$

c) $-3x^2 + 9x$

d) $6y^3 + y$

e) $2x + 4y + 7$

f) $\frac{7}{2} y$

g) $\frac{11x}{3}$

h) $5a^2b - \frac{1}{2} a$

i) $\frac{8a}{3} + \frac{15b}{2}$

EXERCÍCIO 9

a) $2x$; b) $-6a^2x$; c) $-3a - 10x$

EXERCÍCIO 10

a) $+6a + 12b$

b) $3x^3 + 5x^2 + 3x$

c) $7y^2 - 7y - 4$

d) $5a^2 - 5ax + 6x^2$

e) $12a^2x + 2a^2y$

EXERCÍCIO 11

a) $7a$

b) $3a$

c) $-ab$

d) $\frac{1}{6}$ a ou $\frac{a}{6}$

e) $\frac{1}{6} x^2$ ou $\frac{x^2}{6}$

EXERCÍCIO 12

a) $2x^2 - 11x + 6$

b) $-3x^3 + 2x^2 + x - 7$

c) $2x^2 - 4a^2x - a$

d) $7xy + 4x^2 - 3x - 4$

EXERCÍCIO 13

a) $a^2 - 3a$

b) $5ab + 4a$

c) $\frac{1}{6} a^2 + 5a$ ou a $\frac{a^2}{6} + 5a$

d) $\frac{2}{5} x + y$

e) $\frac{5m}{2} + \frac{8n}{3}$ ou $\frac{5}{2} m + \frac{8}{3} n$

EXERCÍCIO 14

a) $-8a + 2b$

b) $-8x^2 + 12x$

c) $-15a^2 + 10a$

d) $-8d^3 - 6d^2$

EXERCÍCIO 15

a) $4a^3 - 2ax + 2ay$

b) $a^2 + ab + ac + bc$

c) $x^2 + xy^2 + xz + xy + y^3 + yz$

d) $4x^3 - 14x^2 + 14x - 4$

e) $3a^2 + 5ab + ac + 2b^2 + bc$

EXERCÍCIO 16

a) -2

b) $+2b$

c) $-\frac{5}{2}x$

d) $-2yx$

e) $+\frac{15}{7}x^2$

f) $-6z^2$

g) -1

h) 1

EXERCÍCIO 17

a) $3x + 2$

b) $-a + 3b$

c) $-3x + 2$

d) $-\frac{7}{2}a + 2a^2 - \frac{5}{2}a^3x$

EXERCÍCIO 18

a) $x^2 + 2xy + y^2$

b) $a^2 + 4ab + 4b^2$

c) $9 + 6x + x^2$

d) $4x^2 + 4xy + y^2$

e) $y^2 + 2yz + z^2$

f) $4 + 4a + a^2$

g) $a^2 - 4a + 4$

h) $9 - 6x + x^2$

i) $4x^2 - 4xy + y^2$

j) $y^2 - 2yz + z^2$

EXERCÍCIO 19

a) $a^2 - 4$

b) $x^2 - y^2$

c) $a^2 - x^2$

d) $9x^2 - 4$

e) $16a^2 - b^2$

f) $9d^2 - 4x^4$

EXERCÍCIO 20

a) $b(5 + 3)$

b) $2(x + y)$

c) $bc(4b + 3)$

d) $3x(2y^2 - x)$

e) $2(2x + 3y)$

f) $b(3 + 1)$

g) $7(y - 1)$

h) $a(3 - 5a)$

i) $x^3(9x^2 - 4)$

j) $\frac{1}{2}xy\ (1 - x)$

l) $5ab(3a + b)$

m) $2n(4m - 2a + 3y)$

EXERCÍCIO 21

a) $(x + 3)(x - 3)$

b) $(5 + b)(5 - b)$

c) $(3a + x)(3a - x)$

d) $(6x + 2y)(6x - 2y)$

e) $(4a + b)(4a - b)$

f) $(7x + y)(7x - y)$

EXERCÍCIO 22

1 - (x) $x^2 + 2xy + y^2$

4 - (x) $m^2 - 2mn + n^2$

5 - (x) $a^2 - 2ab + b^2$

8 - (x) $4a^2 - 4ab + b^2$

9 - (x) $9x^2 + 12x + 4$

10 - (x) $4a^2 + 8ab + 4b^2$

11 - (x) $4x^2 + 12xy + 9y^2$

12 - (x) $m^2 - 4mn + 4n^2$

EXERCÍCIO 23

a) $(x + y)^2$

b) $(m - n)^2$

c) $(a - b)^2$

d) $(2a - b)^2$

e) $(3x + 2)^2$

f) $(2a + 2b)^2$

g) $(2x + 3y)^2$

h) $(m - 2n)^2$

EXERCÍCIO 24

Valor numérico.

a) -19 ; b) $\frac{48}{25} \Longleftrightarrow 1\ \frac{23}{25}$; c) 1 ; d) 81

EXERCÍCIO 25

Termos semelhantes.

a) $ab \longrightarrow 4ab$; $4ab$

$a^2b \longrightarrow 6a^2b$; $3a^2b$; $5a^2b$

$a^2 \longrightarrow 2a^2$

$b^2 \longrightarrow 3b^2$

$ab^2 \longrightarrow 2ab^2 \; ; \; 3ab^2$

b) $ax^2 \longrightarrow 3ax^2 \; ; \; 5ax^2 \; ; \; 5ax^2 \; ; \; \frac{1}{2} ax^2$

$x^2 \longrightarrow \frac{2}{3} x^2 \; ; \; -\frac{1}{5} x^2 \; ; \; \frac{2}{3} x^2$

EXERCÍCIO 26

Soma de coeficientes.

a) $2a$

b) $3c^2 + 4b^2$

c) $8x - 5y$

d) $\frac{5x}{2} + \frac{7a}{3}$ ou $\frac{5}{2} x + \frac{7}{3} a$

e) $-x + 3y$

EXERCÍCIO 27

Adições.

a) $3a + x$

b) $2x^2 + 2x + 2$

c) $-4ax + 2x^2$

d) $9a^2x + a^2y$

EXERCÍCIO 28

Subtrações.

a) $-a - 3b$ b) $7x + 9y$ c) $5a^2x + 6a^2y$ d) $y^2 - 7y + 8$

EXERCÍCIO 29

Multiplicações.

a) $8x^5y^2z$

b) $-8a^3b^3c^2$

c) $-2a^2b^2 - 3ab^2 - 2abc$

d) $-6a^3b + 9a^2b^2 + 6ab$

EXERCÍCIO 30

Multiplicações.

a) $a^2 + 2ab + b^2$

b) $a^2 - 2ab + b^2$

c) $a^2 - b^2$

d) $x^2 + 2xy + y^2$

e) $x^2 - 2xy + y^2$

f) $x^2 - y^2$

EXERCÍCIO 31

Completamento.

a) $a^2 + 2ab + b^2$ c) $a^2 - 2ab + b^2$

b) $x^2 + 2xy + y^2$ d) $x^2 - 2xy + y$

EXERCÍCIO 32

Multiplicações.

a) $2a^2 - 3ab - ac$ b) $8x^2 + 6ax + 2xz$ c) $8xy^2 - 4y^3 + 12y^2$

EXERCÍCIO 33

Multiplicações.

a) $3x^3 + 5x^2 + 2x + 8$

b) $2ax^2 - a^2 + 2x^3 + x^2$

c) $-8d^3 + 10d^2 - 3d$

EXERCÍCIO 34

Divisões.

a) $5x - \frac{5}{2}$

b) $\frac{10}{3} x^2y^2 + \frac{2}{3} x$

c) $2xy - y + \frac{1}{2} y^2$

d) $\frac{3}{2} b - a + \frac{3}{4}$

e) $\frac{9}{8} x + \frac{15}{12} y$ ou $\frac{9}{8} x + \frac{5}{4} y$

EXERCÍCIO 35

Fatoração de monômios.

a) $2^2.3^2.a^4.b^2.c$ b) $5^2.x^2.y$ c) $-2^2.3.a.x$

EXERCÍCIO 36

Fatoração de binômios.

a) $3(m + b)$ d) $4xy(x + 2y)$

b) $2a(x+2y)$ e) $5my^2(2y - 3m)$

c) $5a(y - 3x)$ f) $a(b - c)$

EXERCÍCIO 37

Fatoração de trinômios.

a) $x(3b - 2a + 4)$

b) $2(a^2b + 2ab - 2)$

c) $ab(4b - 3ab^2 + 7a)$

d) $x(2 + 3y^2 - y)$

e) $x(2a + 4 - ac)$

EXERCÍCIO 38

Fatoração de produtos notáveis.

a) $(a + b)^2$ d) $(7b + a)(7b - a)$

b) $(2x + 3a)^2$ e) $(3a - 1)(3a + 1)$

c) $(a^2 - 6)^2$ f) $(2x - 1)(2x + 1)$

XII - GLOSSÁRIO

ÁLGEBRA parte da matemática que se ocupa das equações de qualquer classe e de qualquer grau. Generaliza os problemas aritméticos, analisando, de um ponto de vista geral, as soluções possíveis.

ELEMENTAR Rudimentar; simples; fundamental; primário.

FAMILIARIZAR Tornar familiar; habituar; acostumar.

FATOR Cada um dos termos da multiplicação. FATOR EM EVIDÊNCIA é o fator comum a dois ou mais termos.

GUISA Maneira; modo; feição; à guisa de: à maneira de. "Vão aqui estas palavras à guisa de esclarecimento".

IMPOSTO Que se sobrepôs; determinado; exigido; estabelecido; part. do verbo impor.

PROJETO HAPRONT:
Habilitação do Professor Não Titulado

MEC – DEF
SEEC – CETEPAR

PROJETO HAPRONT

Mat. 105

ESTADO DO PARANÁ
GOVERNO JAYME CANET JUNIOR
SECRETARIO DE ESTADO DA EDUCAÇÃO E DA CULTURA
PROFESSOR FRANCISCO BORSARI NETTO

CENTRO DE TREINAMENTO DO MAGISTÉRIO DO ESTADO DO PARANÁ

CETEPAR

Digitalizado com CamScanner

Projeto *"HAPRONT"*

APRESENTAÇÃO

O Departamento de Ensino Fundamental do Ministério da Educação e Cultura tem como um dos seus objetivos prioritários, a implantação de uma política global de desenvolvimento de recursos humanos, através da qual pretende assegurar a melhoria da produtividade dos sistemas de ensino.

Nesse sentido, está promovendo a experimentação de um modelo curricular de habilitação de professores que se constitui em um instrumento de busca de melhores padrões para a formação profissional. Em resposta a uma realidade que desafia os meios do ensino convencionais, esse modelo adota uma metodologia de educação à distância, sendo veiculado por uma série de 250 módulos de ensino. Este é um dos módulos dessa série.

Cada módulo é uma unidade composta de:objetivos, pré-teste, procedimentos e atividades básicas, pós-teste; procedimentos e atividades de suporte, pós-teste;procedimentos e atividades de enriquecimento.

Os módulos são encaminhados aos professores - cursistas para serem estudados em seus locais de trabalho. Por esse processo deverão ser habilitados a nível de 2º grau, professores não titulados em exercício em classes de 1ª e 4ª séries.

SUBPROJETO 13.1 do Plano Setorial de Educação e Cultura 75/79: CAPACITAÇÃO DE RECURSOS HUMANOS para o Ensino de 1º grau - Código Orçamentário 4502.08.42.217.2.023.

O projeto está sendo executado pela Secretaria de Estado da Educação e Cultura do Paraná, através do Cetepar, com o nome de Projeto *"HAPRONT"* (Habilitação de Professores não titulados), em 11 municípios, atingindo 1.100 professores não titulados.

Os resultados alcançados nesta etapa permitirão, num futuro próximo, subsidiar outras U.F. na organização de cursos de habilitação pelo mesmo processo.

CIÊNCIAS

EQUAÇÃO DE 1° GRAU COM UMA VARIÁVEL

MÓDULO Nº: 105

ELABORAÇÃO: CLÉLIA TAVARES MARTINS
ROSA KAZUKO MIYASAKI

TÍTULO: LINGUAGEM SIMBÓLICA

I - ASSUNTO: EQUAÇÃO DE 1° GRAU (COEFICIENTE DA VARIÁVEL EM ℕ, ℤ E ℚ). RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO, DISCUSSÃO DA RAIZ, VERIFICAÇÃO E PROBLEMAS SIMPLES DE 1° GRAU.

II - MATÉRIA: CIÊNCIAS.

DISCIPLINA: MATEMÁTICA.

III - PRÉ-REQUISITOS: TER DOMINADO O CONTEÚDO DO MÓDULO 104.

IV - OBJETIVOS:

1. OBJETIVO GERAL

Utilizar corretamente a simbologia matemática.

2. OBJETIVO TERMINAL

Traduzir relações expressas em formas simbólicas para formas verbais e vice-versa, em exercícios orais, escritos, trabalho em grupo e aulas.

3. OBJETIVOS OPERACIONALIZADOS

AO FINAL DO ESTUDO DESTE MÓDULO O CURSISTA DEVERÁ SER CAPAZ DE:

1. identificar equações de 1º grau com coeficiente da variável inteiro e fracionário;
2. identificar e calcular equações equivalentes de 1º grau;
3. calcular a raiz das equações do 1º grau, identificando o conjunto verdade e discutindo a validade da raiz encontrada;
4. resolver problemas simples ao nível das equações estudadas.

V - PRÉ-TESTE

O propósito deste pré-teste é averiguar o que você já sabe sobre o conteúdo do presente módulo. Se tiver sucesso nesta verificação, mesmo assim examine-o acuradamente com o objetivo de confirmar ou ampliar os seus conhecimentos. Se não se sair bem, estude-o com interesse e vontade de aprender.

Leia com atenção as questões propostas, reflita e, a seguir, responda-as corretamente.
Boa sorte neste seu trabalho !

1. COMPLETE AS PROPOSIÇÕES ABAIXO, COLOCANDO OS SÍMBOLOS CORRESPONDENTES:
a) O conjunto universo é representado por -----------
b) O conjunto verdade é representado por -----------

2. COMPLETE COM AS PALAVRAS IGUALDADE, VARIÁVEL, 1º MEMBRO e 2º MEMBRO, AS SEGUINTES PROPOSIÇÕES:
a) Em $x = 7 - 2$, à expressão $7 - 2$ chamamos --------------
b) Em $4y = 12$, à letra y denominamos --------------------

c) Em $3x + 2 = 17$, à expressão $3x + 2$ denominamos ______________

d) A expressão $3x + 2 = 17$ é uma ____________________

3. VERIFIQUE SE AS EQUAÇÕES ABAIXO SÃO OU NÃO EQUIVALENTES E ASSINALE COM X NOS PARÊNTESES CORRESPONDENTES AS RESPOSTAS APROPRIADAS:

a) $4x = 8$ Sim Não
$x + 1 = 5$ ( ) ( )
$x - 1 = 3$

b) $x + 7 = 8$ Sim Não
$6x = 6$ ( ) ( )
$2x + 1 = 3x$

4. ESCREVA EM LINGUAGEM SIMBÓLICA:

a) O dobro de um número mais o seu quadrado. ______________________

b) A diferença entre o quadrado e o dobro de um número. ____________ __________________________.

c) A soma do dobro de um número ao próprio número. ______________

d) Um número menos 3 igual a 12. ____________________

5. COMPLETE AS IGUALDADES ABAIXO:

a) $3 + x = 9$, para $U = N$; $V =$ ________

b) $x - 2 = 7$, para $U = N$; $V =$ ________

c) $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 1$, para $U = Q$; $V =$ ________

d) $3x = -18$, para $U = Z$; $V =$ ________

6. RESOLVA A EQUAÇÃO $5x = 10$ E VERIFIQUE A VALIDADE DA RAIZ ENCONTRADA, SENDO $U = N$:

7. PREENCHA A LACUNA DA PRIMEIRA PROPOSIÇÃO ABAIXO E DEPOIS ASSINALE COM X NOS PARÊNTESES DEVIDOS, AQUELA QUE LHE CORRESPONDE, ENTRE AS DUAS PROPOSIÇÕES SUBSEQÜENTES:

- A equação $6x + 4 = 2x - 8$, com $U = N$, _____________ raiz
(tem ; não tem)
em N. Ou:
- ( ) $\exists\, x \in N \mid 6x + 4 = 2x - 8$
- ( ) $\nexists\, x \in N \mid 6x + 4 = 2x - 8$

8. RESOLVA A SEGUINTE EQUAÇÃO:

$$\frac{x}{2} + 3x - \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

9. RESOLVA O PROBLEMA ABAIXO:

- A soma de dois números consecutivos é 71. Quais são esses números?

Traduzindo: número menor ------ ; número maior ------ ; equação ------

Resolvendo:

Verificando:

Resposta:

GABARITO DO PRÉ-TESTE

1. COMPLETAMENTO.
   a) U
   b) V

2. COMPLETAMENTO.
   a) 2º membro; b) variável; c) 1º membro; d) igualdade, equação.

3. EQUAÇÕES EQUIVALENTES.
   a) (X) não
   b) (X) sim

4. LINGUAGEM SIMBÓLICA.
   a) $2x + x^2$
   b) $x^2 - 2x$
   c) $2x + x$
   d) $x - 3 = 12$

5. COMPLETAMENTO DE IGUALDADES.
   a) $V = \{6\}$
   b) $V = \{9\}$
   c) $V = \{1\}$
   d) $V = \{-6\}$

6. CÁLCULO DE EQUAÇÃO.
   $V = \{2\}$
   $5.2 \stackrel{?}{=} 10$
   $10 = 10$ (A igualdade se verifica).

7. COMPLETAMENTO.
   ... não tem raiz em N. Ou:
   (x) $\nexists\ x \in N \mid 6x + 4 = 2x - 8$

8. RESOLUÇÃO DE EQUAÇÃO.
   $V = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

9. RESOLUÇÃO DE PROBLEMA.
   $35 + 36 = 71$

VI - PROCEDIMENTOS E ATIVIDADES

EQUAÇÃO DO 1º GRAU COM UMA VARIÁVEL.

Antes de estudarmos equações, falemos, à guisa de introdução, sobre:

- sentenças matemáticas,
- variável, constante e
- conjunto verdade.

SENTENÇAS MATEMÁTICAS - São exemplos de sentenças matemáticas:

$2 + 3 = 5$ (dois mais três igual a cinco);

$7 \in \mathbb{N}$ (sete pertence ao conjunto dos números naturais);

$x + 2x = 30$ (um número e seu dobro é igual a trinta), etc.

Uma sentença matemática pode ser verdadeira ou falsa.

Exemplos:

$4 + 4 = 8$ (quatro mais quatro é igual a 8) é verdadeira;

$1 > 9$ (um é maior do que nove) é falsa.

Sentenças Fechadas.

Quando podemos afirmar que uma sentença é falsa ou verdadeira, então a sentença é chamada fechada.

Exemplos:

A lua é um satélite ⟶ verdadeira

$14 : 2 = 7$ ⟶ verdadeira

A Terra é um satélite ⟶ falsa

$1 \times 3 = 1$ ⟶ falsa

Sentenças Abertas.

Quando não podemos afirmar que uma sentença é falsa ou verdadeira, então a sentença é chamada aberta, ou ainda "função proposicional".

Exemplos:

Ele foi campeão mundial de pilotos.

$x - 1 = 6$

Nos exemplos dados, ele e x são variáveis que, substituídas por valores, podem tornar as sentenças verdadeiras ou falsas. Aliás, já explicamos isso no módulo 82, ao dizermos: "só se pode afirmar que uma sentença é falsa ou verdadeira depois de se substituir a variável por valor".

Vejamos: ele (Emerson Fittipaldi); x (5).

"Emerson Fittipaldi foi campeão mundial de pilotos" ⟶ verdadeira.

" $5 - 1 = 6$ (cinco menos um é igual a seis)" ⟶ falsa.

VARIÁVEL E CONSTANTE - Seja a seguinte sentença aberta:

- Um número mais quatro é igual a nove.

Simbolicamente podemos representá-la dos seguintes modos:

$\square + 4 = 9$ $\quad$ $x + 4 = 9$

$\triangle + 4 = 9$ $\quad$ $y + 4 = 9$ etc.

O símbolo da página anterior ($\square$, $\triangle$, x, y, etc.), que representa um número, é chamado <u>variável</u>.

O termo que não apresenta variável é chamado <u>constante</u>.

Em 6y - 8 = 5y , 8 é uma constante; y é a variável.

Em 4z - 1 = 3 , 3 e 1 são constantes; z é a variável.

Lembre-se de que no módulo 9.3 você já resolveu problemas armando a solução com o "quadrinho" representativo do termo faltoso ou desconhecido.

Vejamos: - Um número mais 5 é igual a 12. Qual é esse número ?

Em símbolos: $\square + 5 = 12 \Longleftrightarrow \square = 12 - 5$

$\square = 7$

Reposta: O número é 7.

Sentenças Matemáticas Abertas.

São aquelas que envolvem variáveis e números.

Exemplos: x + 4 = 7

3x + 1 = 8x - 6

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Exercício 1

COMPLETE AS PROPOSIÇÕES SEGUINTES COM AS PALAVRAS "CONSTANTE" E "VARIÁVEL":

a) Em x + 1 = 4 , x é ______________________; ______________________

b) Em y + 1 = 7 , y é ______________________; ______________________

c) Em 6x = 12 , x é ______________________; ______________________

d) Em 4x - 8 = 0 , 8 é ______________________; ______________________

e) Em 5y - 3y = 6 , 6 é ______________________; ______________________

Exercício 2

OBSERVE OS MODELOS ABAIXO E, USANDO X COMO VARIÁVEL, ESCREVA EM LINGUAGEM SIMBÓLICA DA MATEMÁTICA AS DEMAIS SENTENÇAS:

MODELOS:

1º O DOBRO DE UM NÚMERO É IGUAL A 4. 2x = 4

2º O DOBRO DE UM NÚMERO MENOS 2 É IGUAL A 6. 2x - 2 = 6

a) O triplo de um número mais nove é igual a 12.

____

b) Um número mais o seu dobro é igual a 15.

____

c) O quádruplo de um número menos 7 é igual a 17.

____

d) Mário tinha algumas figurinhas de coleção infantil, ganhou mais 3 e ficou com 12. Quantas tinha ?

____

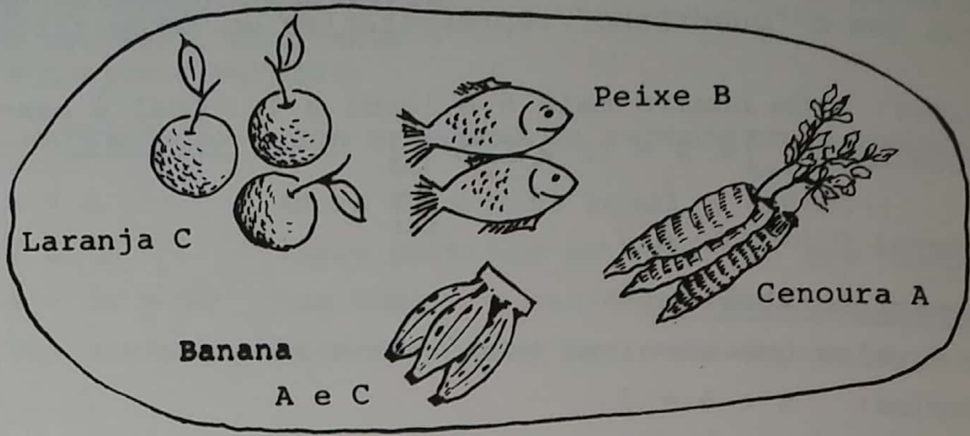
e) Para possuir Cr$ 100,00, Ana Rita precisa ganhar o dobro do que tem e mais Cr$ 18,00. Que quantia ela tem ?

____

CONJUNTO UNIVERSO E CONJUNTO VERDADE

Para melhor compreensão do que sejam Conjunto Universo e Conjunto Verdade, vejamos o exemplo que segue.

- Vilma comprou no mercado hortaliças, frutas e carne, tendo em vista as vitaminas existentes nesses alimentos.



Todos os alimentos adquiridos representam, no exemplo dado, o conjunto Universo. Se, referindo-nos aos elementos desse conjunto, dissermos: "ele é rico em vitamina B", sobre o qual alimento fazemos alusão ? Ao peixe, obviamente, pois é o único elemento que torna verdadeira a sentença aberta. Esse elemento forma o conjunto verdade.

Em matemática temos muitos conjuntos que podem ser tomados como Universo: conjunto dos números naturais (N), dos números fracionários (F), dos inteiros (Z), dos racionais (Q), dos reais (R), além de outros.

Analisemos a seguinte sentença aberta:

$$x + 1 = 3, \quad \text{sendo } x \in N$$

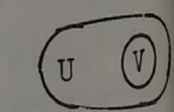
Repare que está sendo imposta uma condição à variável; x deve pertencer ao conjunto dos números naturais. Então, vamos procurar um valor para x no conjunto N = $\{0,1,2,3...\}$ porque N foi o conjunto Universo escolhido. É nele que vamos encontrar a solução da sentença aberta x + 1 = 3, sendo U = N.

O dois (2) é o único número natural que torna verdadeira a sentença x + 1 = 3, U = N. É que o 2 pertence ao conjunto Universo escolhido N e forma um outro conjunto, denominado conjunto Verdade.

Observe: $x + 1 = 3$, $U = N$

Temos: $V = \{2\}$, pois $2 + 1 = 3$

O conjunto Verdade é um subconjunto de U. $V \subset U$.



Conjunto Verdade

É aquele formado por elementos que transformam uma sentença aberta em verdadeira. Elementos esses obtidos do conjunto Universo escolhido.

Conjunto Universo

É aquele que fornece os elementos para substituir a variável até que a sentença se torne verdadeira.

Vejamos alguns exemplos, na página seguinte, de conjunto Verdade e seu respectivo Universo:

Sentença aberta	Conj. Universo	Conj. Verdade	Isto porque...
$x + 4 = 7$	$U = N$	$V = \{3\}$	$3 + 4 = 7$
$x - 6 = 1$	$U = N$	$V = \{7\}$	$7 - 6 = 1$
$x + 7 = -3$	$U = Z$	$V = \{-10\}$	$-10 + 7 = -3$
$4x = 1$	$U = Q$	$V = \{1/4\}$	$4(1/4) = 1$

EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM UMA VARIÁVEL

Equações

Equações são sentenças matemáticas abertas que exprimem a igualdade entre duas expressões.

Exemplos: $x - 4 = 8$

$6x = 20$

$8 + x = 10x - 17$

$y - 8 = 7y - 14$

$15 + 7x = 12x$

Estes exemplos são realmente de equações, pois estas são sentenças abertas que exprimem uma igualdade. Já $6 + 5 = 1 + 12$ não é uma equação, pois não é uma igualdade e nem sentença aberta.

Trataremos, neste módulo, de equações do 1º grau, isto é, de equações cujas variáveis não apresentam expoentes; o expoente 1, como você sabe, não se escreve.

Uma equação é do 2º grau quando o maior expoente da variável é 2; é do 3º grau quando o maior expoente da variável é 3, e assim sucessivamente.

Exemplos de equações sem expoentes:

$6x - 2 = 10$

$5 + 4y = 2 - 7y$

$6z = 18$

Como você notou, x, y e z não apresentam expoentes; isso significa que as equações são do 1º grau: $x^1, y^1, z^1 \Longleftrightarrow x, y$ e z.

RAIZ DE UMA EQUAÇÃO DO 1º GRAU

Resolver uma equação é achar o valor da variável que torne verdadeira a sentença aberta.

Encontrar o valor da variável é o mesmo que achar o conjunto verdade ou conjunto solução.

O número que faz com que a sentença aberta se transforme em verdadeira é chamado solução ou raiz da equação.

Vejamos, no quadro da página seguinte, a raiz e o conjunto verdade de algumas equações, sendo o conjunto universo o conjunto dos números naturais. (U = N).

Para U = N		
EQUAÇÃO	RAIZ	CONJUNTO VERDADE
$x + 8 = 10$	$x = 2$	$V = \{2\}$
$6y = 18$	$y = 3$	$V = \{3\}$
$x - 7 = 3$	$x = 10$	$V = \{10\}$
$x/5 = -4$	$x = ?$	$V = \{\ \}$

O conjunto verdade da última equação do quadro é vazio; não existe no conjunto universo N elemento capaz de substituir a variável. O conjunto verdade da equação depende do conjunto universo dado. A mudança do conjunto universo determina, muitas vezes, a mudança do conjunto verdade.

A equação $\frac{x}{5} = -4$ não tem raiz em U = N, mas terá em U = Z, pois $-\frac{20}{5} = -4$. Logo, $V = \{-20\}$, para U = Z.

MEMBROS DA EQUAÇÃO

Consideremos as equações seguintes.

$$7x + 1 = 6 + 2x$$

$$6x = 12$$

$$x + 7 = 10$$

$$\underbrace{12x - 3} = \underbrace{4x + 5}$$

A expressão escrita à esquerda do sinal de igualdade é chamada 1º membro da equação e a escrita à direita, 2º membro da equação.

Os termos da equação podem mudar de posição, mas obedecendo a regras determinadas.

Exercício 3

COMPLETE AS PROPOSIÇÕES ABAIXO, INDICANDO OS MEMBROS DAS EQUAÇÕES:

a) Em $6 + x = 13$, a expressão $6 + x$ é o ______________________

b) O 2º membro da equação $4x - 1 = 15$ é ______________________

c) Em $4x + 1 = 6x - 3$, a expressão $6x - 3$ é o ______________________

d) Na equação $5x = 4x + 8$, o 1º membro é ______________________ e o 2º membro é ______________________.

EQUAÇÕES EQUIVALENTES.

Duas ou mais equações são equivalentes quando têm o mesmo conjunto verdade.

Vejamos abaixo a raiz e o conjunto verdade de algumas equações sendo o conjunto universo o conjunto dos números naturais (U = N):

Para U = N			
EQUAÇÃO	RAIZ	CONJ. VERDADE	ISTO PORQUE...
$x + 5 = 8$	$x = 3$	$V = \{3\}$	$3 + 5 = 8$
$4 - x = 1$	$x = 3$	$V = \{3\}$	$4 - 3 = 1$
$2x = 6$	$x = 3$	$V = \{3\}$	$2 . 3 = 6$

As equações do quadro da página anterior têm o mesmo conjunto verdade; são, portanto, equivalentes.

Verifiquemos, neste outro exemplo, o conjunto verdade das equações, sendo U = N :

Para U = N			
EQUAÇÃO	RAIZ	CONJ. VERDADE	ISTO PORQUE...
$\frac{x}{2} = 3$	$x = 6$	$V = \{6\}$	$\frac{6}{2} = 3$
$6x = 12$	$x = 2$	$V = \{2\}$	$6.2 = 12$

As equações deste quadro não são equivalentes, pois não têm o mesmo conjunto verdade.

Exercício 4

1. PREENCHA AS LACUNAS DAS PROPOSIÇÕES SEGUINTES:

a) As equações $x + 3 = 5$ e $4x = 8$ ______________ (são; não são) equações equivalentes porque ______________ (têm; não têm) o mesmo conjunto verdade.

b) As equações $\frac{x}{2} = 8$ e $\frac{x}{4} = 5$ ______________ (são; não são) equivalentes porque ______________ (têm; não têm) o mesmo conjunto verdade.

2. INDIQUE NOS PARÊNTESES, COM A LETRA E, AS EQUAÇÕES EQUIVALENTES, ISTO É, AQUELAS CUJAS RAIZES IGUAIS PERTENCEM AO CONJUNTO N:

a) $x + 1 = 5$ e $12 - x = 8$ ( )

b) $7x = 21$ e $8 - x = 4$ ( )

c) $x - 1 = 4$ e $2x = 10$ ( )

d) $5x = 10$ e $\frac{x}{2} = 6$ ( )

e) $2x = 10$ e $2x = 14$ ( )

f) $x - 2 = 5$ e $x - 1 = 6$ e $2x = 14$ ( )

g) $4x = 8$ e $x + 1 = 3$ e $x - 1 = 1$ ( )

3. VERIFIQUE SE AS EQUAÇÕES SEGUINTES SÃO OU NÃO EQUIVALENTES, PARA U = N E PREENCHA AS LACUNAS:

a)
$2x = 6$ ______ $V = \{\ \}$
$x + 5 = 8$ ______ $V = \{\ \}$
$x - 1 = 2$ ______ $V = \{\ \}$
______________ (são; não são) equivalentes.

b)
$x = 5$ ______________ $V = \{\ \}$
$x - 7 = 2$ ______________ $V = \{\ \}$
$\frac{x}{3} = 2$ ______________ $V = \{\ \}$
______________ (são; não são) equivalentes.

c)
$12 - x = 4$ ______ $V = \{\ \}$
$4x = 32$ ______ $V = \{\ \}$
______________ (são; não são) equivalentes.

d)
$\frac{x}{7} = 1$ ______________ $V = \{\ \}$
$3 - x = 2$ ______________ $V = \{\ \}$
______________ (são; não são) equivalentes.

PROPRIEDADE DAS IGUALDADES

Para achar a raiz das equações de 1º grau utilizamos dois princípios da igualdade: aditivo e multiplicativo.

I - <u>Princípio Aditivo (P.A.)</u> - "Somando-se (ou subtraindo-se) um mesmo número a ambos os membros de uma equação, o seu conjunto verdade não se altera".

<u>Exemplos</u>:

- a) $x - 2 = 6$, com $U = N$ e $V = \{8\}$

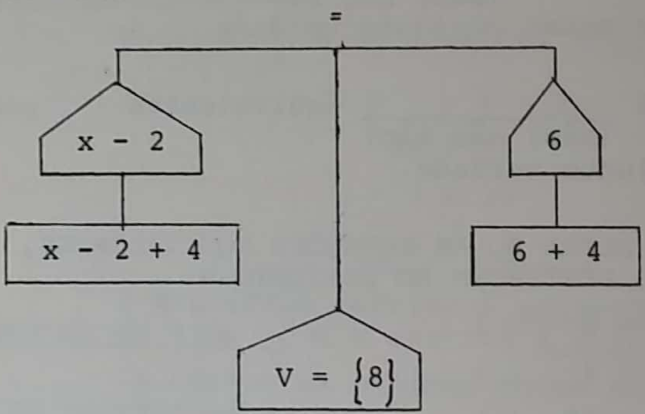
Note o que sucede ao conjunto verdade quando somamos a ambos os membros da equação o número 4.

$$x - \underbrace{2 + 4} = \underbrace{6 + 4}$$

$$x + 2 = 10, \text{ donde } x = 8 \text{ e } V = \{8\}$$

Concluímos que $x - 2 = 6 \Leftrightarrow x + 2 = 10$, pois as duas equações têm o mesmo conjunto verdade, isto é, $V = \{8\}$.

Observe o desenho da balança abaixo, onde esses valores são analisados.



Verificamos que a soma de um mesmo número em ambos os membros da equação não lhe alterou o conjunto verdade.

- b) $x + 3 = 9$, sendo $U = N$ e $V = \{6\}$

Note agora o que sucede ao conjunto verdade ao subtrairmos 4 de ambos os membros desta nova equação.

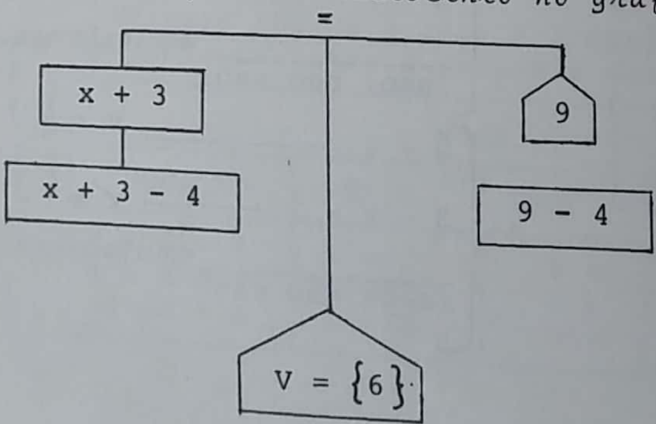
$$x + \underbrace{3 - 4} = \underbrace{9 - 4}$$

$$x - 1 = 5, \text{ donde } x = 6 \text{ e } V = \{6\}$$

Verificamos que, subtraindo um mesmo número de ambos os membros da equação, o seu conjunto verdade também não se altera.

Logo, $x + 3 = 9 \Longleftrightarrow x + 3 - 4 = 9 - 4$. As duas equações são equivalentes.

Acompanhe o raciocínio no gráfico da balança.



Os braços da balança continuam em equilíbrio.

Exercício 5

OBSERVE O MODELO ABAIXO E DEPOIS, EM SEU CADERNO, APLICANDO O PRINCÍPIO ADITIVO, PREENCHA AS LACUNAS DAS EQUAÇÕES APRESENTADAS, DE MODO QUE AS IGUALDADES SE TORNEM VERDADEIRAS:

MODELO: $x = 7 \Longleftrightarrow x + 4 = \ / + 4$

Note que assim como escrevemos 4 poderíamos ter escrito 2,8, 6,1,9, etc.

a) $6x = 12 \Longleftrightarrow 6x + 5 = 12 + \ldots$

b) $16x - 1 = 4 \Longleftrightarrow 16x - 1 + 8 = 4 + \ldots$

c) $x + 7 = 1 \Longleftrightarrow x + 7 + \ldots\ldots = 1 + 18$

d) $3x = 10 \Longleftrightarrow 3x + 5 = 10 + \ldots$

e) $x = 4 \Longleftrightarrow x + 3 = 4 + \ldots$

f) $7x = 10 \Longleftrightarrow 7x - 1 = 10 - \ldots$

g) $4x + 8 = 3 \Longleftrightarrow 4x + 8 - \ldots = 3 - 1$

h) $3x - 7 = 13 \Longleftrightarrow 3x - 7 - 8 = 13 - \ldots$

II - Princípio Multiplicativo (P.M.) - "Multiplicando-se (ou dividindo-se) ambos os membros da equação por um mesmo número (diferente de zero), o seu conjunto verdade não se altera".

Exemplos:

- a) $3x = 12$, com $U = N$ e $V = \{4\}$

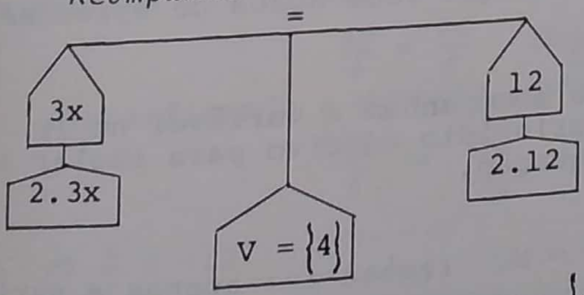
Note o que sucede ao conjunto verdade quando multiplicamos ambos os membros da equação por 2.

$2.\ 3x = 2.\ 12$

$6x = 24$, donde $x = 4$ e $V = \{4\}$

Concluímos que $3x = 12 \Longleftrightarrow 2.\ 3x = 2.\ 12$, pois as duas equações têm o mesmo conjunto verdade. São equivalentes. $V = \{4\}$

Acompanhe o raciocínio no gráfico da balança.



Os braços da balança permanecem em equilíbrio.

- b) $3x = 12$, $U = N$ e $V = \{4\}$

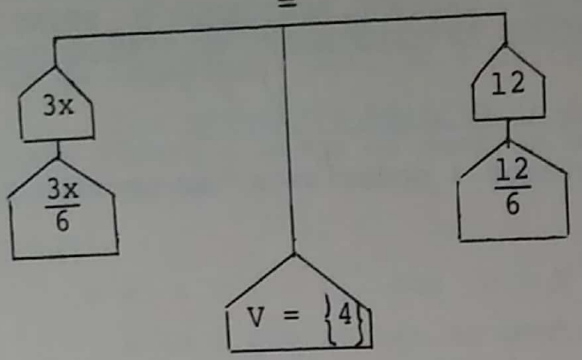
Note o que sucede ao conjunto verdade quando dividimos ambos os membros da equação por um mesmo número.

$\frac{3x}{6} = \frac{12}{6}$

$\frac{1}{2}x = 2$, donde $x = 4$ e $V = \{4\}$

Daí podermos escrever $3x = 12 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}x = 2$ e afirmar que essas duas equações são equivalentes, pois têm o mesmo conjunto verdade.

Observe o gráfico da balança.



$(3x + 6)$ ou $\frac{3x}{6}$

Lembre-se de que a divisão po-
de ser indicada pelo sinal ÷ ou
pelo traço de fração.

Verificamos que a divisão de ambos os membros da equação por um mesmo número não alterou o conjunto verdade.

Exercício 6

PREENCHA AS LACUNAS DE MODO QUE AS IGUALDADES NÃO SE ALTEREM, APLICANDO O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO, COM U = Q.

MODELO: $x = 3 \Longleftrightarrow 7x = 21$ (Ambos os membros foram multiplicados por 7).

a) $4x = 8 \Longleftrightarrow 12x = 8 \cdot$ ____

b) $4x = 2 \Longleftrightarrow$ ____$x = 2 \cdot 9$

c) $x = 10 \Longleftrightarrow 3x = 10 \cdot$ ____

d) $2x = 7 \Longleftrightarrow 10x = 7 \cdot$ _____

e) $x = 1 \Longleftrightarrow$ ____$x = 8 \cdot 1$

f) $x = 15 \Longleftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{15}{\quad}$

g) $y = 16 \Longleftrightarrow \frac{y}{\quad} = \frac{16}{2}$

h) $5x = 20 \Longleftrightarrow \frac{5x}{5} = \frac{20}{\quad}$

i) $8x = 24 \Longleftrightarrow x =$ ___

j) $10x = 50 \Longleftrightarrow 2x =$ ___

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÃO DO 1º GRAU

- Aplicação dos Princípios Aditivo e Multiplicativo -

Para resolver equações do 1º grau, determinando suas raízes, utilizamos os princípios da igualdade que você acaba de aprender.

I - Aplicação do princípio aditivo

Observando os termos que acompanham a variável no 1º membro da equação, podemos nos valer do princípio aditivo para isolar a variável e assim encontrar a raiz da equação.

Exemplos:

a) $x - 4 = 7$, sendo U = N. *Lembre-se*: apenas a variável deve pertencer ao conjunto universo.

Adicionando o simétrico de (-4) a ambos os membros da equação isolamos x no 1º membro.

Vejamos: $x - \underbrace{4 + 4} = \underbrace{7 + 4}$

$x = 11$; $V = \{11\}$ porque $11 \in$ ao conjunto universo dado, N.

b) $x + 2 = 7$, sendo U = Q

Adicionando o simétrico de (+2) a ambos os membros da equação, isolamos x no 1º membro:

$$x + \underbrace{2 + (-2)} = \underbrace{7 + (-2)}$$

Resolvendo a equação, temos: $x = 5$; $V = \{5\}$, pois 5 é um elemento pertencente a U = Q.

NOTA - Somente a variável deve pertencer ao conjunto universo dado. As constantes podem pertencer a um outro conjunto qualquer.

Exercício 7

OBSERVE O MODELO ABAIXO E RESOLVA AS EQUAÇÕES DO 1º GRAU EM SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, APLICANDO O PRINCÍPIO ADITIVO; SOME OU SUBTRAIA O NÚMERO NECESSÁRIO PARA ISOLAR A VARIÁVEL NO 1º MEMBRO E ASSIM ACHAR A RAIZ DE CADA EQUAÇÃO, SENDO U = Q:

MODELO: $x - 1 = 8$

$$x \underbrace{- 1 + \boxed{1}} = \underbrace{8 + \boxed{1}}$$

Somando +1 a ambos os membros da equação, isolamos a variável no 1º membro.

$x = 9$, sendo $U = Q$ e $V = \{9\}$

a) $x + 4 = 6$

b) $x - 5 = 7$

c) $x + 1 = 3$

d) $x - 7 = 10$

e) $x + 4 = 2$

f) $x - 2 = 1$

II - Aplicação do princípio multiplicativo -

Observando os termos e o coeficiente da variável no 1º membro, aplicamos o princípio multiplicativo para isolar x.

Exemplos:

a) $3x = 12$, sendo $U = Q$

Vendo que x está multiplicado por 3, optamos, então, pela divisão de ambos os membros por 3. Daí resulta:

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$

Efetuando as simplificações, temos:

$$\frac{^1\cancel{3}x}{\cancel{3}_1} = \frac{^4\cancel{12}}{\cancel{3}_1} \qquad x = 4, \text{ com } U = Q \text{ e } V = \{4\}$$

b) $4x = 24$

Vendo que x está multiplicado por 4, optamos pela divisão de ambos os membros por 4, isolando x no 1º membro e resolvendo a equação.

$$\frac{4x}{4} = \frac{24}{4} \quad \text{Indicamos a divisão por 4.}$$

Simplificando a equação, obtemos:

$$\frac{^1\cancel{4}x}{\cancel{4}_1} = \frac{^6\cancel{24}}{\cancel{4}_1} \qquad x = 6, \text{ com } U = Q \text{ e } V = \{6\}$$

c) $\frac{x}{3} = -12$

Vendo que x está dividido por 3, optamos pela multiplicação de ambos os termos por 3, isolando x no 1º membro.

$$\frac{3x}{3} = -12 . 3$$

Simplificando a expressão, resulta:

$$\frac{^1\cancel{3}x}{\cancel{3}_1} = -36 \qquad x = -36, \text{ com } U = Q \text{ e } V = \{-36\}$$

d) $\frac{x}{5} = 20$ (Variável sob forma fracionária).

A variável x está dividida por 5; optamos, então, pela multiplicação de ambos os membros por 5. Isolamos x no 1º membro e resolvemos a equação.

$$\frac{5x}{5} = 5 . 20$$

Simplificando a expressão, temos:

$$\frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} = 100 \qquad x = 100, \text{ com } U = Q \text{ e } V = \{100\}$$

Para resolver equações de 1º grau, valemo-nos, como você percebeu, das propriedades e princípios que acabamos de expor. Agora é a sua vez de aplicar esses conhecimentos na resolução dos exercícios que seguem.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Exercício 8

RESOLVA, EM SEU CADERNO, AS SEGUINTES EQUAÇÕES:

a) $5x = 15$

b) $3x = 21$

c) $\frac{x}{7} = -3$

d) $7x = -14$

e) $\frac{x}{2} = 5$

f) $\frac{x}{4} = -3$

REGRA PRÁTICA DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÃO DO 1º GRAU.

Resolver uma equação do 1º grau é, como você sabe, achar o conjunto verdade ou a raiz dessa equação.

Já resolvemos equações aplicando os princípios aditivo e multiplicativo da igualdade. Apresentamos agora uma técnica de resolução que nos permite encontrar mais rapidamente a raiz da equação de 1º grau.

Comparemos esses processos.

$x + 2 = 8, \quad U = N$	
Princípio aditivo (P.A.)	Regra prática
$x \underbrace{+ 2 - 2} = \underbrace{8 - 2}$	$x + 2 = 8$
$x = 6$	$x = 8 - 2$
$V = \{6\}$	$x = 6, V = \{6\}$

Regra prática

Na resolução de equação do 1º grau, quando um termo passa de um membro para outro o sinal é trocado. Se o sinal for de adição passa a ser de subtração, se for de multiplicação passa a ser de divisão (aplicação das operações inversas).

Os termos que apresentam variáveis ficam no 1º membro e os termos independentes, no 2º membro.

Aplicação da Regra. Seja a equação $x - 7 = 10$, com $U = N$.

$$x - 7 = 10$$

$$x = 10 + 7$$

$$x = 17 \quad V = \{17\}$$

Isolamos a variável no 1º membro.

Verificação do resultado

Para verificar se o número encontrado é realmente a raiz da equação, basta você aplicar o que aprendeu para achar o valor numérico de uma expressão algébrica.

Vejamos: $x - 7 \stackrel{?}{=} 10$ O símbolo $\stackrel{?}{=}$ lê-se:

$17 - 7 \stackrel{?}{=} 10$ "deve ser igual a".

$10 = 10 \longrightarrow$ (igualdade verdadeira).

Podemos então afirmar que $x - 7 = 10$, para $U = N$, $V = \{17\}$

Ordenação dos termos da equação

Algumas equações são apresentadas desordenadamente, verificando-se nos dois membros termos com variáveis e termos independentes.

Exemplos:

I) $6x + 4 = 5x + 2$, sendo $U = Z$

$6x - 5x = +2 - 4$

Reduzindo os termos semelhantes, resulta:

$x = -2$, sendo $U = Z$ e $V = \{-2\}$

NOTA: Se fosse $U = N$, o conjunto verdade seria vazio, pois (-2) não pertence a N.

Verificação. $6(-2) + 4 \stackrel{?}{=} 5(-2) + 2$

$-12 + 4 \stackrel{?}{=} -10 + 2$

$-8 = -8$ (igualdade verdadeira).

II) $6x + 3 + 1 = 4 + 5x$, sendo $U = N$

$6x - 5x = 4 - 3 - 1$

$x = 0$, logo $V = \{0\}$, pois $0 \in N$

NOTA: O conjunto verdade é zero. Não confundir com conjunto vazio $\{\ \}$.

Verificação. $6(0) + 3 + 1 \stackrel{?}{=} 4 + 5(0)$

$0 + 3 + 1 \stackrel{?}{=} 4 + 0$

$4 = 4$ (igualdade verdadeira).

III) $6x + 3 = 5x + 2$, sendo $U = N$

$6x - 5x = 2 - 3$

$x = -1$, então $V = \{\ \}$, pois $-1 \notin N$

NOTA: Não existe elemento em N para substituir a variável. O conjunto verdade é vazio. Se fosse $U = Z$ não seria vazio o conjunto verdade, pois $-1 \in Z$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Exercício 9

RESOLVA NO SEU CADERNO, AS EQUAÇÕES ABAIXO, APLICANDO A REGRA PRÁTICA ESTUDADA COM U = N, E VERIFIQUE A VALIDADE DAS RAÍZES OBTIDAS:

a) $3x + 4 = 5 + 2x$

b) $6x - 7 + 1 = 5x - 20$

c) $6x - 5 = 5x + 4$

d) $3x + 8 - 3 = 2x + 5$

e) $x + 3 = 10$

f) $6x + 1 - 4x = x + 8 - 2$

g) $14x = 3 + 13x$

h) $5x + 5 - 3 = 10 + 4x$

2ª Regra prática

Nos casos em que a variável está multiplicada ou dividida por um número, esse número é levado para o 2º membro da equação com o sinal trocado.

Comparemos o processo do princípio multiplicativo com esta 2ª regra.

QUADRO I

$4x = 24$, com $U = N$	
Princípio multiplicativo (P.M.) $4x = 24$ Dividindo ambos os termos por 4: $\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{24}{4}$ $x = 6$, então $V = \{6\}$	2ª Regra Prática $4x = 24$ O 4, que está multiplicando, passa dividindo. $x = \frac{24}{4}$ $x = 6$, então $V = \{6\}$

QUADRO II

$5x + 4 = -2x + 11$, com $U = N$	
Princípio multiplicativo (P.M.) $5x + 4 = -2x + 11$ $5x + 2x = 11 - 4$ $7x = 7$ Dividindo ambos os membros por 7: $\frac{\cancel{7}x}{\cancel{7}} = \frac{7}{7}$ $x = 1$, então $V = \{1\}$	2ª Regra Prática $5x + 4 = -2x + 11$ $5x + 2x = 11 - 4$ $7x = 7$ O 7, que está multiplicando, passa dividindo. $x = \frac{7}{7}$ $x = 1$, então $V = \{1\}$

- Aplicação da Regra Prática -

a) SEJA A EQUAÇÃO SEGUINTE, CUJO TERMO DA VARIÁVEL TEM SINAL NEGATIVO:

$$-4x = 12, \text{ para } U = Z$$

Neste caso é necessário tornar o termo da variável positivo. Para isso, multiplicamos todos os termos por (-1), ou melhor, trocamos todos os sinais da equação.

$$(-1)(-4x = 12)$$

$$4x = -12$$

O 4, que está multiplicando, passa dividindo.

$$x = \frac{-12}{4}$$

$$x = -3, \quad \text{sendo } U = Z \text{ e } V = \{-3\}$$

Verificando: $4(-3) \stackrel{?}{=} -12$

$$-12 = -12 \text{ (igualdade verdadeira).}$$

b) Seja a equação abaixo, cuja raiz pertence a Q.

$$4x + 2 = 2x + 5, \quad \text{sendo } U = Q$$

$$4x - 2x = 5 - 2$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}, \quad \text{sendo } U = Q \text{ e } V = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

Verificando: $4\left(\frac{3}{2}\right) + 2 \stackrel{?}{=} 2\left(\frac{3}{2}\right) + 5$

$$\frac{12}{2} + 2 \stackrel{?}{=} \frac{6}{2} + 5$$

$$6 + 2 \stackrel{?}{=} 3 + 5$$

$$8 = 8 \text{ (igualdade verdadeira).}$$

Exercício 10

DETERMINE, EM SEU CADERNO, O CONJUNTO VERDADE DAS SEGUINTES EQUAÇÕES:

a) $-2x = -18$, sendo $U = Z$

b) $-6x = 42$, $U = Z$

c) $5x + 5 - 1 = 4x - 14$, $U = N$

d) $3x = 2x - 1 =$, $U = N$

DISCUSSÃO DAS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DO 1º GRAU

Exemplos:

a) Seja a equação $5x = 4x + 7$, para $U = N$

Resolvendo: $5x - 4x = 7$

$$x = 7, \quad \text{sendo } U = N \text{ e } V = \{7\}$$

Discutindo:

Como $7 \in N$, temos que $V = \{7\}$ e então escrevemos $\exists\, x \in N \mid 5x = 4x + 7$, que lemos "existe x que pertence ao conjunto dos números naturais tal que se verifica a equação $5x = 4x + 7$".

b) Seja a equação $6x - 7 + 1 = 5x + 8$, para $U = N$

Resolvendo: $6x - 5x = 8 + 7 - 1$

$$x = 14, \quad \text{sendo } U = N \text{ e } V = \{14\}$$

Discutindo:

A raiz encontrada $\{14\}$ satisfaz e pertence ao conjunto universo pedido $(U = N)$. $\exists\, x \in N \mid 6x - 7 + 1 = 5x + 8$

c) Nem sempre a raiz pertence ao conjunto universo pedido, como no exemplo seguinte:

Resolvendo: $5x + 4 = 4x + 1$, sendo U = N

$5x - 4x = 1 - 4$

$x = -3$

Discutindo:

Como $-3 \notin N$, então $V = \{\ \}$. Escrevemos $\nexists\ x \in N \mid 5x + 4 = 4x + 1$, que lemos "não existe x que pertence a N capaz de resolver a equação".

Exercício 11

RESOLVA, NO SEU CADERNO AS EQUAÇÕES ABAIXO E DISCUTA A RAIZ ENCONTRADA TENDO EM VISTA O CONJUNTO UNIVERSO PEDIDO:

a) $6x - 8 = 5x + 3$, sendo U = N

b) $2x + 7 = x + 10$, U = N

c) $9x + 5 - 4 = 8x - 10$, U = N

d) $6x - 7 = 5x$, U = N

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES COM DENOMINADORES NUMÉRICOS.

Para operar mais rapidamente, quando há denominadores numéricos nas equações, proceda como se estivesse lidando com frações. (V. módulos 9.4 e 81). Reduza todos os termos ao mesmo denominador, obtendo uma fração equivalente à primeira, e depois elimine os denominadores.

Exemplos:

I) $\frac{x}{4} - 5 = \frac{7}{2}$, U = Q

Reduzindo os termos ao mesmo denominador, resulta:

$\frac{x}{\cancel{4}} - \frac{20}{\cancel{4}} = \frac{14}{\cancel{4}}$

Lembre-se do denominador 1;

$5 = \frac{5}{1}$ m.m.c. (4,2,1) = 4

Eliminando os denominadores, temos: $x - 20 = 14$

$x = 14 + 20$

$x = 34$, para U = Q e $V = \{34\}$

II) $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4} = 2$, U = Q

$\frac{8x}{\cancel{12}} + \frac{9}{\cancel{12}} = \frac{24}{\cancel{12}}$

Lembre-se do denominar 1;

$2 = \frac{2}{1}$ m.m.c (3,4,1) = 12

$8x + 9 = 24$

$8x = 24 - 9$

$8x = 15$

$x = \frac{15}{8}$, para U = Q, $V = \left\{\frac{15}{8}\right\}$

Verificação: Substituir a variável pela raiz encontrada.

$$\frac{2}{3}\left(\frac{15}{8}\right) + \frac{3}{4} \overset{?}{=} 2$$

$$\frac{30}{24} + \frac{3}{4} \overset{?}{=} 2$$

Lembre-se do denominador 1;

$2 = \frac{2}{1}$ m.m.c (24,4,1) = 24

$$\frac{30}{24} + \frac{18}{24} \overset{?}{=} \frac{48}{24}$$

$$\frac{48}{24} = \frac{48}{24}$$

$$2 = 2$$

Discussão: $\exists\; x \in Q \mid \frac{2}{3}x + \frac{3}{4} = 2$, pois $U = Q$ e $V = \left\{\frac{15}{8}\right\}$

III) $\frac{x+2}{3} - \frac{x}{2} = 3$, para $U = Z$

$$\frac{2(x+2)}{\cancel{6}} - \frac{3x}{\cancel{6}} = \frac{18}{\cancel{6}}$$

Lembre-se do denominador 1;

$3 = \frac{3}{1}$ m.m.c (3,2,1) = 6.

$2x + 4 - 3x = 18$

Aplicar a propriedade distributiva.
Eliminar os denominadores.

$2x - 3x = 18 - 4$

$-x = 14$ —— Multiplicar a expressão por -1.

$x = -14$, como $U = Z$, $V = \{-14\}$

Verificação:

$$\frac{(-14)+2}{3} - \frac{(-14)}{2} = 3$$

$$\frac{-12}{3} - \frac{-14}{2} = 3$$

Trocar os sinais.

$$-4 - (-7) = 3$$

$$-4 + 7 = 3$$

Discussão:

Podemos afirmar que $\exists\; x \in Z \mid \frac{x+2}{3} - \frac{x}{2} = 3$

"Existe x que pertence a Z capaz de resolver a equação".

NOTA: - Os exercícios sobre equação de 1º grau que pretendemos ensinar lhe a resolver não atingem dificuldades como as apresentadas neste exemplo dado sobre denominadores numéricos. Não mediremos tais dificuldades. Colocamo-las aqui mais com o propósito de atender àqueles que desejam estudar além do mínimo exigido em nosso currículo.

Exercício 12

RESOLVA, EM SEU CADERNO, CADA EQUAÇÃO ABAIXO BUSCANDO SUA EQUIVALENTE POR MEIO DA REDUÇÃO A DENOMINADORES COMUNS:

a) $\frac{x}{5} - 4 + x = \frac{2x}{5} - 3$

b) $\frac{2}{5}x + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}x + 2$, para $U = Q$

c) $\frac{2}{3}x + 2 = \frac{3}{4}x + 5$, para U = Q   d) $\frac{1}{2}x + 3 = 7 - \frac{2}{3}x$, para U = Q

EQUAÇÃO E PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA

Passemos, agora, ao estudo da resolução de equações de 1º grau com uma variável, onde aparece a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e subtração.

Exemplos:

I) $6(x - 3) = 2(x + 1)$, para U = Q

$6x - 18 = 2x + 2$ ——— Emprego da propriedade distributiva para eliminar os parênteses.

$6x - 2x = 2 + 18$ ——— Ordenação dos termos.

$4x = 20$ ——— Isolamento de x.

$x = \frac{20}{4}$

$\boxed{x = 5}$, para U = Q e V = $\{5\}$

Logo, $\exists\ x \in Q \mid 6(x - 3) = 2(x + 1)$

II) $9(x + 2) = 3(x + 5)$, para U = Q

$9x + 18 = 3x + 15$

$9x - 3x = +15 - 18$

$6x = -3$

$x = \frac{-3}{6}$

$x = -\frac{1}{2}$, para U = Q e V = $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Logo, $\exists\ x \in Q \mid 9(x + 2) = 3(x + 5)$

"Existe x que pertence a Q de modo tal que é capaz de resolver a equação".

Exercício 13

RESOLVA, NO SEU CADERNO, AS SEGUINTES EQUAÇÕES, APLICANDO A PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA DA MULTIPLICAÇÃO EM RELAÇÃO À ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO:

a) $3(x - 5) = 18$, para U = Q   b) $5(x - 3) = 3(x + 1)$, para U = Q

c) $3(x + 5) = 2(x - 6)$, para U = Q   d) $5(x + 2) = 3(x - 4)$, para U = Q

PROBLEMAS DE 1º GRAU, COM UMA VARIÁVEL

O propósito do nosso estudo sobre equações não é outro senão o de aplicar esse conhecimento à resolução de problemas. Antes, porém, de cuidarmos de problemas, tratemos de linguagem simbólica da matemática comum a eles.

Observe:

Em linguagem corrente	Em linguagem simbólica
- O dobro de sete	2. 7
- A soma de dois com nove	2 + 9

Em linguagem corrente.	Em linguagem simbólica.
- A diferença entre sete e um	$7 - 1$
- A quinta parte de nove	$\frac{1}{5} \cdot 9$ ou $\frac{9}{5}$
- Um número	x
- O triplo do número	$3x$
- A soma de nove a um número	$x + 9$
- A metade de um número	$\frac{x}{2}$ ou $\frac{1}{2}x$
- O dobro de um número menos cinco	$2x - 5$
- O quádruplo de um número mais a sua terça parte vale sete	$4x + \frac{x}{3} = 7$
- Um número somado com seu triplo vale trinta	$x + 3x = 30$

Vejamos, agora, se você é capaz de fazer as traduções propostas no exercício a seguir.

Exercício 14

TRADUZA PARA A LINGUAGEM SIMBÓLICA DA MATEMÁTICA AS PROPOSIÇÕES ABAIXO, CONSIDERANDO X UM NÚMERO QUALQUER:

Em linguagem corrente.	Em linguagem simbólica.
a) Um número	----------------------
b) O triplo de um número	----------------------
c) A terça parte de um número	----------------------
d) Um número somado com dez	----------------------
e) O dobro de um número menos dois	----------------------
f) O quíntuplo de um número mais dois vale dez	----------------------
g) Um número menos dois vale dez	----------------------
h) O triplo de um número menos o seu dobro	----------------------
i) Vinte menos o terço de um número	----------------------
j) O quádruplo do número mais um	----------------------

Exercício 15

COMPLETE AS PROPOSIÇÕES SEGUINTES.

a) A idade de Maria é o triplo da idade de Sérgio. Se a idade de Sérgio é x, então a idade de Maria é ______________________.

b) Um número é x. Seu quádruplo mais nove é ____________________________.

c) Paulo tinha 3 anos quando Roberto nasceu. Hoje Roberto tem x anos. Então Paulo tem hoje ______________________.

PROBLEMAS COM UMA VARIÁVEL.

TODA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EXIGE TRÊS ETAPAS:

- armar a equação (passar o enunciado para a linguagem simbólica);
- achar o conjunto verdade da equação obtida;
- verificar se o valor encontrado satisfaz os dados do problema.

Exemplos:

I) Qual é o número cujo dobro somado a 10 é igual a 20 ?

Traduzindo: Um número ——— x

O dobro do número ——— $2x$

Equação ——— $2x + 10 = 20$

Resolvendo:
$$2x + 10 = 20$$
$$2x = 20 - 10$$
$$2x = 10$$
$$x = \frac{10}{2} \qquad \boxed{x = 5}$$

Verificando:
$$2(5) + 10 \overset{?}{=} 20$$
$$10 + 10 \overset{?}{=} 20$$
$$20 = 20 \text{ (igualdade verdadeira)}$$

Logo, 5 é o número procurado.

II) Duas crianças têm juntas 72 figurinhas de coleção infantil . Quantas figurinhas possui cada uma, sabendo-se que a primeira possui três vezes mais que a segunda ?

Traduzindo: 1ª criança ——— $3x$

2ª criança ——— x

Equação ——— $3x + x = 72$

Resolvendo:
$$3x + x = 72$$
$$4x = 72$$
$$x = \frac{72}{4}$$
$$\boxed{x = 18}$$

Verificando:
$$3x + x \overset{?}{=} 72$$
$$3(18) + 18 \overset{?}{=} 72$$
$$54 + 18 \overset{?}{=} 72$$
$$72 = 72 \text{ (igualdade verdadeira)}$$

Logo, a segunda criança tem 18 figurinhas e a primeira, 54.

III) O triplo de um número diminuído de 4 é igual a 23. Qual é esse número ?

Traduzindo: um número ——— x

o triplo do número ——— $3x$

equação ——— $3x - 4 = 23$

Resolvendo:
$$3x - 4 = 23$$
$$3x = 23 + 4$$
$$3x = 27$$
$$x = \frac{27}{3} \qquad \boxed{x = 9}$$

Verificando: $3(9) - 4 \overset{?}{=} 23$

$27 - 4 \overset{?}{=} 23$

$23 = 23$ (igualdade verdadeira).

Logo, o número procurado é 9.

IV) Um pai deu 54 balas de açúcar aos seus 3 filhos. Ao primeiro filho coube o dobro do que o segundo recebeu e ao terceiro couberam duas a mais do que o segundo ganhou.

Quantas balas cada filho recebeu ?

Traduzindo: 1º filho ———— $2x$

2º filho ———— x

3º filho ———— $x + 2$

Equação ———— $2x + x + x + 2 = 54$

Resolvendo: $2x + x + x + 2 = 54$

$2x + x + x = 54 - 2$

$4x = 52$

$x = \frac{52}{4}$ $\boxed{x = 13}$

Verificando: $2x + x + x + 2 = 54$

$2(13) + 13 + 13 + 2 \overset{?}{=} 54$

$26 + 13 + 13 + 2 \overset{?}{=} 54$

$54 = 54$ (igualdade verdadeira)

Logo, o 2º filho recebeu ---------------- 13 balas;

o 1º filho ---------------------- 26; e

o 3º ---------------------------- 15 balas.

Solução e enunciado.

Nem sempre a solução satisfaz ao enunciado do problema.

Vejamos o exemplo seguinte:

- Perguntado sobre quantos camelos havia em sua cáfila, Abdala assim respondeu: " $\frac{4}{5}$ dos meus camelos mais 12 são 21". Quantos camelos são ao todo ?

Traduzindo: número de camelos de Abdala ———— x

$\frac{4}{5}$ dos camelos ———— $\frac{4}{5}x$

Equação ———— $\frac{4}{5}x + 12 = 21$

Resolvendo: $\frac{4}{5}x + 12 = 21$

$\frac{4x}{\cancel{5}} + \frac{60}{\cancel{5}} = \frac{105}{\cancel{5}}$

Lembre-se do denominador 1.

m.m.c. (5,1) = 5

Eliminar os denominadores.

$4x = 105 - 60$

$4x = 45$

$x = \frac{45}{4}$ $\boxed{x = 11\frac{1}{4}}$

Digitalizado com CamScanner

Verificando: A raiz $11\frac{1}{4}$ não satisfaz ao enunciado do problema, isto é, o problema é impossível.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Exercício 16

RESOLVA OS SEGUINTES PROBLEMAS:

a) O quádruplo da idade de Marta mais 6 é igual a 34. Qual é a idade de Marta ?

Traduzindo: Resolvendo: Verificando:

- idade de Marta
- quádruplo da idade
- equação

Resposta:

b) O triplo de um número diminuído de 4 é igual a 23. Qual é esse número ?

Traduzindo: Resolvendo: Verificando:

- o número
- o triplo do número
- equação

Resposta:

c) Um número somado com o seu dobro vale 42. Que número é esse ?

Traduzindo: Resolvendo: Verificando:

- um número
- o dobro do número
- equação

Resposta:

d) O quádruplo de um número menos três é igual a 33. Qual é esse número ?

Traduzindo: Resolvendo: Verificando:

- o número
- o quádruplo do número
- equação

Resposta:

e) Antônio deu 54 doces a 3 crianças de modo que à segunda coube o dobro do que a primeira criança recebeu e à terceira, o triplo do que a primeira ganhou. Quantos doces cada criança ganhou ?

Traduzindo: | Resolvendo: | Verificando:

- 1ª criança ____________
- 2ª criança ____________
- 3ª criança ____________
- equação ____________

Resposta: ____________

f) Numa escola há 210 alunos. O número de meninas é o dobro do número de meninos. Quantos meninos há nessa escola ?

Traduzindo: | Resolvendo: | Verificando:

Resposta: ____________

g) Num campeonato de futebol Zeca e Pedroso fizeram 20 gols. Sabendo-se que Zeca fez 8 gols a mais que Pedroso, quantos gols fez cada um ?

Traduzindo: | Resolvendo: | Verificando:

- gols de Zeca ____________
- gols de Pedroso ____________
- equação ____________

Resposta: ____________

h) A diferença entre as idades de José e Maria é de 9 anos. José tem o quádruplo da idade de Maria. Quantos anos tem cada um deles ?

Traduzindo: | Resolvendo: | Verificando:

- idade de Maria ____________
- idade de José ____________
- equação ____________

Resposta: ____________

i) A soma de dois números é 42. Um deles é o quíntuplo do outro. Quais são esses números ?

Traduzindo: | Resolvendo: | Verificando:

- um número ____________
- outro número ____________
- equação ____________

Resposta: ____________

Digitalizado com CamScanner

VII - PÓS-TESTE

Faça com cuidado o presente teste, demonstrando os seus conhecimentos sobre o assunto aqui exposto.

O teste consta de exercícios simples, bem mais fáceis do que aqueles efetuados por você durante o estudo deste módulo.

Leia com atenção o enunciado das questões propostas e dê as respostas cabíveis. Tendo em mente a regra dos sinais em cada operação, resolva os exercícios sem medo de errar.

Boa sorte !

1. OBSERVE AS EXPRESSÕES ABAIXO E ASSINALE COM X NOS PARÊNTESES AQUELAS QUE SÃO EQUAÇÕES :

a) ( ) $x + 5 = 3$

b) ( ) $7 + 1 = 8$

c) ( ) $4y = 16$

d) ( ) $9 \neq 1$

e) ( ) $5x + 7 = 9x$

f) ( ) $2 + 7$

2. COMPLETE A PROPOSIÇÃO SEGUINTE:

- Na equação $6x = 9 + 3x$, o 1º membro é _________ e o 2º membro é _________.

3. VERIFIQUE SE AS EQUAÇÕES ABAIXO SÃO OU NÃO EQUIVALENTES. ASSINALE COM X, NOS PARÊNTESES, A RESPOSTA APROPRIADA:

a) $x = 2$

$x + 7 = 8$

$x - 1 = 5$

( ) sim

( ) não

b) $\frac{x}{2} = 3$

$x + 1 = 7$

$x - 2 = 4$

( ) sim

( ) não

4. COMPLETE AS LACUNAS DAS IGUALDADES ABAIXO, DE MODO A TORNÁ-LAS VERDADEIRAS. APLIQUE O PRINCÍPIO ADITIVO.

Sendo $U = Q$:

a) $3x + 1 = 7 \iff 3x + 1 +$ _______ $= 7 + 5$

b) $6x = 12 \iff 6x -$ ______ $= 12 - 7$

5. COMPLETE AS LACUNAS DAS IGUALDADES ABAIXO, DE MODO A TORNÁ-LAS VERDADEIRAS. APLIQUE O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO.

Sendo $U = Q$

a) $4x = 8 \iff$ ________ $x = 24$

b) $6x = 24 \iff x =$ _________

6. RESOLVA, AS EQUAÇÕES ABAIXO:

a) $6x = 12$, para $U = Q$

V = __________

b) $x + 7 = 13$, para $U = Q$

V = __________

7. RESOLVA E DISCUTA AS EQUAÇÕES ABAIXO:

a) $-4x = 32$, para $U = Q$

Resolvendo:

Discutindo:

b) $6x - 4 = 5x + 7$, para $U = Q$

Resolvendo:

Discutindo:

8. RESOLVA O PROBLEMA SEGUINTE:

JOSÉ REPARTIU Cr$ 66,00 ENTRE 3 CRIANÇAS, DE MODO QUE A SEGUNDA RECEBEU O DOBRO DA PRIMEIRA E A TERCEIRA, O TRIPLO DA PRIMEIRA. QUANTO RECEBEU CADA CRIANÇA ?

Traduzindo:	Resolvendo:	Verificando:
- 1º criança	----------------------	----------------------
----------------	----------------------	----------------------
- 2º criança	----------------------	----------------------
----------------	----------------------	----------------------
- 3º criança	----------------------	----------------------
----------------	----------------------	Resposta:------------
- equação	----------------------	----------------------
----------------	----------------------	----------------------

9. RESOLVA O PROBLEMA ABAIXO:

UM PECUARISTA TEM 150 ANIMAIS ENTRE CAVALOS E BOIS. O NÚMERO DE BOIS É IGUAL AO DOBRO DO NÚMERO DE CAVALOS. QUANTOS SÃO OS CAVALOS E QUANTOS, OS BOIS ?

Traduzindo:	Resolvendo:	Verificando:
- número de cavalos	----------------------	----------------------
	----------------------	----------------------
----------------	----------------------	----------------------
- número de bois	----------------------	----------------------
----------------	----------------------	Resposta:------------
- equação	----------------------	----------------------
----------------	----------------------	----------------------

VIII - PROCEDIMENTOS E ATIVIDADES - NÍVEL DE SUPORTE

IGUALDADES.

Desde os nossos primeiros módulos de matemática você trabalha com igualdade, usando o símbolo = (igual a) para caracterizar essa relação.

Uma igualdade pode ser expressa em linguagem corrente ou em linguagem simbólica da matemática.

Vejamos alguns exemplos:

Em linguagem corrente.	Em linguagem simbólica.
Três mais dois é igual a cinco	$3 + 2 = 5$
O dobro de cinco é igual a dez	$2 \times 5 = 10$
Um quarto de oito é igual a dois	$\frac{1}{4} \cdot 8 = 2$
O quadrado de cinco é igual a vinte e cinco	$5^2 = 25$
A raiz quadrada de trinta e seis é igual a seis	$\sqrt{36} = 6$

Toda igualdade expressa simbolicamente é composta de duas expressões separadas pelo símbolo = (igual a). A primeira expressão é chamada 1º membro e a segunda, 2º membro da igualdade.

EQUAÇÃO.

Quando um dos termos da sentença matemática é substituído por um símbolo qualquer ($\square$, $\triangle$, x, y, etc), a igualdade toma o nome de equação. E, dependendo do valor que substituir tal símbolo, essa igualdade se transformará numa proposição verdadeira ou falsa. Daí dizermos que:

Uma equação nada mais é do que uma função proposicional, envolvendo uma relação de igualdade.

Exemplo: $3 . x = 12$

Se substituirmos, no exemplo dado, a variável (x) por 4, teremos uma proposição verdadeira e, por valores diferentes de 4, proposições falsas.

O conjunto de valores pelos quais a variável pode ser substituída é chamado "conjunto universo" (U).

Todos os valores que tornam a proposição ou sentença verdadeira formam o seu "conjunto verdade" (V).

Observe o quadro abaixo e memorize o que é uma equação:

São equações	Não são equações	Motivo
$x = 9$	$2 + 1 \neq 5$ ———	Não é igualdade.
$x - 1 = 6$	$4 \times 3 = 12$ ———	Não é sentença aberta.
$7x + 8 = x + 20$	Ele é estudioso ———	Não é sentença numérica.
São equações, pois, as constantes da primeira coluna, e expressões, as da segunda.		

EQUAÇÕES EQUIVALENTES.

Quando duas ou mais equações têm o mesmo "conjunto verdade", recebem o nome de "equações equivalentes".

Exemplos: Para $U = N$

$$\begin{cases} x + 4 = 6 & V = \{2\} \\ 6x = 12 & V = \{2\} \end{cases} \quad \text{São equivalentes}$$

$$\begin{cases} 7x = 14 & V = \{2\} \\ x - 8 = 4 & V = \{12\} \end{cases} \quad \text{Não são equivalentes}$$

TÉCNICA DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÃO.

Para resolver a equação de 1º grau é necessário isolar a variável no 1º membro, transpondo os termos de um membro para outro. Para a igualdade não se alterar é aplicada a operação inversa.

Eis a técnica geral de resolução de equação do 1º grau:

1º) Agrupe os termos com x no 1º membro e os termos independentes no 2º membro;

2º) Reduza os termos semelhantes de acordo com as operações indicadas no 1º e 2º membros;

3º) Isole x no 1º membro, passando o valor que o estiver multiplicando para divisor do 2º membro.

Observe os exemplos da página seguinte:

a) Equação: $x - 9 = 14$, para $U = Q$

Resolvendo: $x - 9 = 14$ —— Agrupamento dos termos.

$x = 14 + 9$ —— Redução dos termos semelhantes.

$x = 23$, para $U = Q$, $V = \{23\}$

Verificando: $23 - 9 \stackrel{?}{=} 14$

$14 = 14$ ← igualdade verdadeira

Discutindo: $\exists\, x \in Q \mid x - 9 = 14$

"Existe x que pertence ao conjunto Q, que satisfaz à equação $x - 9 = 14$".

b) Equação: $6x + 8 = 4x + 20$, para $U = Q$

Resolvendo: $6x + 8 = 4x + 20$ —— Agrupamento dos termos.

$6x - 4x = 20 - 8$ —— Redução dos termos semelhantes.

$2x = 12$ —— Isolamento de x; o 2 passa a divisor do 2º termo

$x = \frac{12}{2}$

$x = 6$, para $U = Q$, $V = \{6\}$

Verificando: $6(6) + 8 \stackrel{?}{=} 4(6) + 20$

$36 + 8 \stackrel{?}{=} 24 + 20$

$44 = 44$ (igualdade verdadeira).

Discutindo: Para $U = Q$ existe $x = 6$ que pertence ao conjunto pedido e resolve a equação.

$\exists\, x \in Q \mid 6x + 8 = 4x + 20$

c) Equação: $7x + 4 = 5x + 9$, para $U = Q$

Resolvendo: $7x + 4 = 5x + 9$

$7x - 5x = 9 - 4$

$2x = 5$

$x = \frac{5}{2}$, para $U = Q$, $V = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

Verificando: $7\left(\frac{5}{2}\right) + 4 \stackrel{?}{=} 5\left(\frac{5}{2}\right) + 9$

$\frac{35}{2} + 4 \stackrel{?}{=} \frac{25}{2} + 9$

$\frac{35}{2} + \frac{8}{2} \stackrel{?}{=} \frac{25}{2} + \frac{18}{2}$

$\frac{43}{2} = \frac{43}{2}$ igualdade verdadeira

Discutindo: Para $U = Q$ existe o valor $\frac{5}{2}$ capaz de resolver a equação.

$\exists\, x \in Q \mid 7x + 4 = 5x + 9$

Nem sempre há solução para a equação. Há casos em que o valor que poderia resolvê-la não pertence ao universo determinado.

Exemplos em que $U = N$:

a) Equação: $6x + 4 = 4x - 6$

Resolvendo: $6x + 4 = 4x - 6$

$6x - 4x = -6 - 4$

$2x = -10$

$x = \frac{-10}{2}$

$\boxed{x = -5}$, para $U = N$, $V = \{\ \}$

Discutindo: Para o universo dos números naturais a equação não tem solução; o seu conjunto verdade é vazio.

$\nexists x \in N \mid 6x + 4 = 4x - 6$

b) Equação: $3x - 1 = -4x - x + 1$

Resolvendo: $3x - 1 = -4x - x + 1$

$3x + 4x + x = 1 + 1$

$8x = 2$

$x = \frac{2}{8}$

$\boxed{x = \frac{1}{4}}$, para $U = N$, $V = \{\ \}$

Discutindo: Para o universo pedido não existe valor capaz de resolver a equação.

$\nexists x \in N \mid 3x - 1 = -4x - x + 1$

EQUAÇÕES COM DENOMINADORES NUMÉRICOS

Para resolver equações com denominadores numéricos recomendamos-lhe a observância do seguinte:

- Determinar o m.m.c entre os denominadores;
- Eliminar os denominadores comuns;
- Seguir os passos já conhecidos da equação simples de 1º grau.

Exemplos em que $U = Q$:

a) Equação:

$$\frac{6x}{4} + \frac{1}{5} = \frac{4}{2}$$

Resolvendo: $\frac{6x}{4} + \frac{1}{5} = \frac{4}{2}$ m.m.c. (4,5,2) = 20

$$\frac{30x}{20} + \frac{4}{20} = \frac{40}{20}$$ Eliminação dos denominadores.

$$30x + 4 = 40$$

$$30x = 40 - 4$$

$$x = \frac{36}{30}$$

$$x = \frac{6}{5}$$

Verificando: $\frac{6\left(\frac{6}{5}\right)}{4} + \frac{1}{5} \overset{?}{=} \frac{4}{2} \iff$

$$\frac{36}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \overset{?}{=} \frac{4}{2} \iff$$

$$\frac{36}{20} + \frac{1}{5} \overset{?}{=} \frac{4}{2} \iff$$

$$\frac{36}{20} + \frac{4}{20} \overset{?}{=} \frac{40}{20} \iff \frac{40}{20} = \frac{40}{20}$$ (igualdade verdadeira).

Discutindo: Existe $\underline{x}$ capaz de solucionar a equação dentro do uni verso dado.

$$\exists\, x \in Q \mid \frac{6x}{4} + \frac{1}{5} = \frac{4}{2}$$

b) Equação: $\frac{x + 2}{3} = \frac{x}{5}$, para U = Q

Resolvendo: $\frac{5(x + 2)}{\cancel{15}} = \frac{3x}{\cancel{15}}$ m.m.c. (3,5) = 15

Eliminação dos denominadores.

$$5x + 10 = 3x$$

$$5x - 3x = -10$$

$$2x = -10$$

$$x = \frac{-10}{2}$$

$$\boxed{x = -5}$$, para U = Q, V = $\{-5\}$

Verificando: $\frac{-5 + 2}{3} \overset{?}{=} \frac{-5}{5} \iff \frac{-3}{5} \overset{?}{=} \frac{-5}{5} \iff -1 = -1$ (igualdade verdadeira).

Discutindo: O valor -5 satisfaz à solução da equação e pertence ao conjunto dado.

$$\exists\, x \in Q \mid \frac{x + 2}{3} = \frac{x}{5}$$

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE 1º GRAU.

Estando você seguro em equações, a resolução de problemas não lhe é difícil, pois esta depende do seu conhecimento sobre:

- conceito e propriedades das operações e
- tradução, para a linguagem simbólica da matemática, de proposições em linguagem corrente.

Exercício 17.

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, RESOLVA OS SEGUINTES PROBLEMAS:

a) Míriam tem o dobro da idade de Paulo. Qual é a idade de cada um se a soma de suas idades é igual a 33 ?

Traduzindo: idade de Paulo ———— x

idade de Míriam ———— $2x$

equação: ———— $x + 2x = 33$

Resolvendo:

Verificando:

Resposta: ____________

b) A soma de dois números consecutivos é 51. Quais são esses números ?

Traduzindo: 1º número ———— x

2º número ———— $x + 1$

equação ———— $x + x + 1 = 51$

Resolvendo:

Verificando:

Resposta: ____________

c) A soma de dois números é 366 e sua diferença é 86. Quais são esses números ?

Observe a subtração:

$$\begin{array}{rl} \boxed{} & \text{— minuendo} \\ -\ \boxed{} & \text{— subtraendo} \\ \hline 86 & \text{— é quanto o minuendo tem mais que o subtraendo.} \end{array}$$

Traduzindo: número menor ———— x

número maior ———— $x + 86$

equação ———— $x + x + 86 = 366$

Resolvendo:

Verificando:

Resposta: ____________

d) O quociente de uma divisão exata por 15 é 23. Qual é o dividendo ?

Traduzindo: qual é o

- dividendo ———— x
- divisor ———— 15
- quociente ———— 23

equação ———— $\frac{x}{15} = 23$ ou $x \div 15 = 23$

Resolvendo:

Verificando:

Resposta: ______________________________.

Exercício 18.

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, RESOLVA OS SEGUINTES PROBLEMAS DO MÓDULO 9.3:

a) Problema número 1 da página 49.
b) Problema número 2 da página 50.
c) Problema número 3 da página 50.
d) Problema número 6 da página 52.
e) Problema número 7 da página 52.
f) Problema número 1 da página 54.
g) Problema número 2 da página 54.
h) Problema número 3 da página 55.
i) Problema número 5 da página 55.

Exercício 19.

RESOLVA OS SEGUINTES PROBLEMAS DO MÓDULO 9.4, EM QUE AS EQUAÇÕES SÃO COM DENOMINADORES NUMÉRICOS:

a) Problema número 1 do Exercício 15, da página 51.

- José depositou no Banco do Brasil 2/5 do seu ordenado. Sabendo que o depósito foi de Cr$ 1.000,00, calcule o ordenado de José.

Traduzindo: ordenado de José ______________ x

depósito feito ______________ $\frac{2x}{5}$

equação ______________ $\frac{2x}{5} = 1\ 000$

Resolvendo: $\frac{2}{5}x = 1\ 000$ m.m.c. (5,1) = 5

$\frac{2x}{\cancel{5}} = \frac{5\ 000}{\cancel{5}}$ Eliminação dos denominadores.

Isolamento de x, passando o 2 para divisor do 2º termo.

$2x = 5\ 000$

$x = $ ______

$x = $

Verificando:

Resposta: --

b) Problema número 2, do Exercício 15, da página 52.

- Um viajante fez 3/5 de sua viagem e ainda tem que percorrer 600km. Qual é o trajeto total dessa viagem ?

Traduzindo: percurso total ______________ x

trajeto feito ______________ $\frac{3x}{5}$

equação ______________ $\frac{3x}{5} + 600 = x$

Resolvendo: $\frac{3x}{5} + \frac{\quad}{5} = \frac{\quad}{5}$

Verificando:

Resposta: ____

c) Problema número 10, do Exercício 15, da página 53.

- Marcos pagou 3/4 de sua dívida e ainda ficou devendo a importância de Cr$ 2 400,00. Quanto ele devia ?

Traduzindo: quanto Marcos deve ? ———————— x

quanto ele pagou ? ———————— $\frac{3x}{4}$

quanto deve ainda ? ———————— Cr$ 2 400,00

equação ———————— $x - \frac{3x}{4} = 2\,400$

Resolvendo: $x - \frac{3x}{4} = 2\,400$ m.m.c. (4,1) = 4

$\frac{\quad}{4} - \frac{\quad}{4} = \frac{\quad}{4}$ Eliminação dos denominadores.

Verificando:

Resposta: O percurso total é de _________ km.

IX - PÓS-TESTE - NÍVEL DE SUPORTE

Realize este pós-teste obedecendo as mesmas recomendações que fizemos para os anteriores. É mais uma verificação do seu aproveitamento sobre o assunto deste módulo.

As questões são fáceis. Leia atentamente cada uma delas e, com calma e cuidado, dê as respostas cabíveis. E bom êxito neste seu trabalho !

1. ESCREVA A LETRA E NOS PARÊNTESES, INDICANDO AS EXPRESSÕES QUE FOREM EQUAÇÕES:

a) ( ) $7x = 21$

b) ( ) $5 + 3 = 8$

c) ( ) $y - 3 = 7$

d) ( ) $6 - 1 \neq 8$

2. COMPLETE CORRETAMENTE A PROPOSIÇÃO ABAIXO:

- Na equação $7x + 4 = 9$ o 1º membro é ______________ e o 2º membro é ______________.

3. VERIFIQUE SE AS EQUAÇÕES ABAIXO SÃO OU NÃO EQUIVALENTES E ASSINALE COM X NOS PARÊNTESES A RESPOSTA CORRETA:

Para U = Q

a) $x + 7 = 10$

$4x = 12$

( ) sim; ( ) não

Para U = Q

b) $x - 1 = 3$

$x + 4 = 10$

$6x = 24$

( ) sim; ( ) não

4. RESOLVA AS EQUAÇÕES ABAIXO, EM QUE U = Q:

a) $5x = 10$

b) $x + 7 = 12$

V = ----------

V = ----------

5. RESOLVA E DISCUTA A VALIDADE DA RAIZ ENCONTRADA NAS EQUAÇÕES SEGUINTES, EM QUE U = Q:

a) $7x + 8 = 4x + 21$

b) $4x + 10 = 9x + 20$

6. RESOLVA AS EQUAÇÕES ABAIXO, SENDO U = Q:

a) $\frac{x}{5} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{x}{4} + 5 = -7$

7. RESOLVA O PROBLEMA SEGUINTE:

- Qual é o número cujo quádruplo é igual ao dobro mais vinte ?

Traduzindo: o número é ———— -----------

o quádruplo é ———— --------------

o dobro é ———— --------------

equação ———— ------------------

Resolvendo:

Verificando:

Resposta: --

8. RESOLVA O PROBLEMA ABAIXO:

- Antonio repartiu Cr$ 70,00 entre Maria, Pedro e Sérgio, de modo que Pedro recebeu o dobro de Maria, assim como Sérgio ganhou Cr$ 10,00 menos que Maria. Que importância coube a cada uma dessas pessoas ?

Traduzindo: partes de

Maria ———— -----------------

Pedro ———— -----------------

Sérgio ———— -----------------

equação ———— -----------------

Resolvendo:

Verificando:

Resposta: --

Exercício 1

COMPLETAMENTO.

a) x é a variável; 1 e 4 são as constantes.

b) y é a variável; 1 e 7 são as constantes.

c) x é a variável; 12 é a constante.

d) 8 é a constante; x é a variável.

e) 6 é a constante; y é a variável.

Exercício 2

LINGUAGEM SIMBÓLICA.

a) $3x + 9 = 12$

b) $x + 2x = 15$

c) $4x - 7 = 17$

d) $x + 3 = 12$

e) $100 = 2x + 18$ ou Cr\$ 100,00 = 2x + Cr\$ 18,00

Exercício 3

COMPLETAMENTO.

a) ____ 1º membro.

b) ____ 15

c) ____ 2º membro.

d) 1º membro é 5x; 2º membro é 4x + 8

Exercício 4

1. PREENCHIMENTO DE LACUNAS.
   a) são ___ têm.
   b) não são ___ não têm.
2. EQUAÇÕES EQUIVALENTES.
   c) (E); f(E); g(E).
3. EQUIVALÊNCIA.
   a) são equivalentes; b) não são.
   c) são equivalentes; d) não são.

Exercício 5

COMPLETAMENTO.

a) ___ 5 c) ___ 18 e) ___ 3 g) ___ 1

b) ___ 8 d) ___ 5 f) ___ 1 h) ___ 8

Exercício 6

COMPLETAMENTO.

a) 3

b) 36

c) 3

d) 5

e) 8

f) $\frac{15}{3}$

g) $\frac{y}{2}$

h) $\frac{20}{5}$

i) $\frac{24}{8}$

j) $\frac{50}{5}$ ou 10

Exercício 7

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES.

a) $x = 2$ c) $x = 2$ e) $x = -2$

b) $x = 12$ d) $x = 17$ f) $x = 3$

Exercício 8

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES.

a) $x = 3$ c) $x = -21$ e) $x = 10$

b) $x = 7$ d) $x = -2$ f) $x = -12$

Exercício 9

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES.

a) $x = 1$ c) $x = 9$ e) $x = 7$ g) $x = 3$

b) $x = -14$ d) $x = 0$ f) $x = 5$ h) $x = 8$

Exercício 10

DETERMINAÇÃO DO CONJUNTO-VERDADE.

a) $V = \{9\}$; c) $V = \{\ \}$, pois $-18 \notin N$

b) $V = \{-7\}$; d) $V = \{\ \}$, pois $-1 \notin N$

Exercício 11

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES.

a) $V = \{11\}$; $\exists\ x \in N \mid 6x - 8 = 5x + 3$

b) $V = \{3\}$; $\exists\ x \in N \mid 2x + 7 = x + 10$

c) $V = \{\ \}$; $\nexists\ x \in N \mid 9x + 5 - 4 = 8x - 10$

d) $V = \{7\}$; $\exists\ x \in N \mid 6x - 7 = 5x$

Exercício 12

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES.

a) $V = \left\{\frac{5}{4}\right\}$; c) $V = \{-36\}$

b) $V = \{25\}$; d) $V = \left\{\frac{24}{7}\right\}$

Exercício 13

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES.

a) $x = 11$; $V = \{11\}$ c) $x = -27$; $V = \{-27\}$

b) $x = -6$; $V = \{-6\}$ d) $x = -11$; $V = \{-11\}$

Exercício 14

LINGUAGEM SIMBÓLICA.

a) x d) $x + 10$ g) $x - 2 = 10$

b) $3x$ e) $2x - 2$ h) $3x - 2x$

c) $\frac{x}{3}$ ou $\frac{1}{3}x$ f) $5x + 2 = 10$ i) $20 - \frac{x}{3}$

j) $4x + 1$

Exercício 15

COMPLETAMENTO.

a) 3x; b) 4x + 9; c) x + 3

Exercício 16

a) Marta tem 7 anos;
b) O número é 9;
c) O número é 14;
d) O número é 9;
e) A 1ª criança recebeu 9 doces, a 2ª recebeu 18 e a 3ª, 27.
f) Há 70 meninos e 140 meninas;
g) Zeca fez 14 e Pedroso fez 6 gols;
h) Maria tem 3 anos e José tem 12;
i) um número é 7 e o outro, 35.

Exercício 17

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

a) Míriam tem 22 anos.
Paulo tem 11 anos. → 33 anos

b) Um número é 25.
O outro é 26. → 51

c) O número menor é 140.
O número maior é 226. → 366

d) O dividendo é 345.

Exercício 18

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

Respostas no próprio módulo 9.3.

Exercício 19

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

a) O ordenado de José é Cr$ 2 500,00.

b) O percurso total é de 1 500 km.

c) A dívida era de Cr$ 9 600,00.

XI - SUGESTÕES BIBLIOGRÁFICAS

1. BACCARO, Nelson e outros. "*Matemática Dinâmica*". 6ª Série do Ensino Fundamental. São Paulo, Editora IBEP, 1 977.

2. ZAMBUZZI, Orlando. "*Matemática com Estudo Dirigido*". 6ª série, 1º grau. São Paulo. Editora Ática, 1 975.

3. SANGIORGI, Osvaldo. "*Matemática*".- 6, Para Cursos de 1º Grau. São Paulo, Cia. Editora Nacional, 1 974.

4. CLAUZET, Luiz Bernardo F. "*Matemática, Estudo Programado*". 6ª série, 1º Grau. São Paulo, Editora Saraiva, 1 976.

5. DIAS FILHO, Astor G. e outros. "*Matemática Criativa*". 6ª série do Ensino Fundamental. São Paulo, Editora Abril, 1 975.

6. NAME, Miguel Asis. "*Matemática, Ensino Moderno*". 6ª série do Ensino Fundamental. São Paulo, Editora do Brasil S.A., 1 974.

7. DOMÊNICO, Luiz e outros. "*Matemática Moderna*". 6ª série do Ensino Fundamental. São Paulo, Editora IBEP, 1 975.

8. GRUEMA (Grupo de Ensino de Matemática Atualizada, São Paulo). "*Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º Grau*". 6 - por Anna Averburg e outros, supervisão de L.H. Jaci Monteiro. São Paulo, Editora Nacional, 1 974.

XII - GLOSSÁRIO

ACURADO — feito com muito cuidado e apuro; esmerado; exato; aprimorado; feito com desvelo.

AVERIGUAR — verificar; certificar-se de; informar-se; examinar.

CABÍVEL — que tem cabimento; que tem aceitação; aceitável, admissível.

CÁFILA — récua; ponta; rebanho de animais. Diz-se especialmente dos camelos: uma cáfila de camelos.

DEPÓSITO — é o ato pelo qual uma pessoa recebe uma coisa alheia com a obrigação de guardar e restituir à própria. Depósito bancário: importância guardada em estabelecimento de crédito.

LACUNA — vazio; vão; falta; falha; espaço em vão; interrupção; intermissão.

LIDAR — trabalhar; labutar; laborar.

MEMORIZAR — guardar de memória; reter na memória; decorar; ter de cor.

ÓBVIO — patente; claro; evidente; manifesto; que salta aos olhos.

OPTAR — decidir-se por uma coisa (entre duas ou mais); escolher; preferir.

QUÁDRUPLO — quantidade quatro vezes maior que outra.

TRADUZIR — transpor de uma para outra língua; verter; trasladar da linguagem corrente para a linguagem simbólica.

TRANSPOR — pôr em lugar diferente; transferir; transportar; transladar ou mudar de um lugar para outro.

GABARITO DO PÓS-TESTE

Município: ____________________________ Data da correção: __________

Cursista: ____

Nº do Módulo: 105 Percentagem: ______________

1. EQUAÇÕES.
   a. (X); c. (X); e. (X).

2. COMPLETAMENTO.
   1º membro é 6x e o 2º membro é 9 + 3x

3. EQUAÇÕES EQUIVALENTES.
   a. (X) não; b. (X) sim

4. APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO ADITIVO.
   a) $3x + 1 \underbrace{+ 5} = 7 \underbrace{+ 5}$
   b) $6x \underbrace{-} 7 = 12 - 7$

5. APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO.
   a) $12x = 24$; b) $x = 4$

6. RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES.
   a) $V = \{2\}$; b) $V = \{6\}$

7. RESOLUÇÃO E DISCUSSÃO DE EQUAÇÕES.
   a) $+ 4x = -32$

   $x = -\frac{32}{4}$

   $x = -8, \quad V = \{-8\}$

   $\exists\, x \in Q \mid -4x = 32$

   b) $6x - 4 = 5x + 7$

   $6x - 5x = 7 + 4$

   $x = 11, \quad V = \{11\}$

   $\exists\, x \in Q \mid 6x - 4 = 5x + 7$

8. RESOLUÇÃO DE PROBLEMA.
   1ª criança: Cr$ 11,00; 2ª criança: Cr$ 22,00; 3ª criança: Cr$ 33,00

9. RESOLUÇÃO DE PROBLEMA.
   Quantidade de cavalos, 50 e de bois, 100.

GABARITO DO PÓS-TESTE - Nível de Suporte

Percentagem: ______________

Cursista: ______________________________

1. SÃO EQUAÇÕES.
   a. (E); c. (E)

2. COMPLETAMENTO.
   ... o 1º membro é 7x + 4 e o 2º membro, 9.

3. EQUAÇÕES EQUIVALENTES.
   a. (X) sim; b. (X) não.

4. RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES.

a) $V = \{2\}$; b) $V = \{5\}$

5. RESOLUÇÃO E DISCUSSÃO DAS RAÍZES ENCONTRADAS. $U = Q$

a)
$$7x - 4x = 21 - 8$$
$$3x = 13$$
$$x = \frac{13}{3}$$
$$V = \left\{\frac{13}{3}\right\}$$
$$\exists x \in Q \mid 7x + 8 = 4x + 21$$

b)
$$4x - 9x = 20 - 10$$
$$-5x = 10$$
$$x = \frac{-10}{5} \text{ ou } -2$$
$$V = \{-2\}$$
$$\exists x \in Q \mid 4x + 10 = 9x + 20$$

6. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES, EM QUE $U = Q$.

a) $V = \left\{\frac{5}{2}\right\}$; b) $V = \{-48\}$

7. RESOLUÇÃO DE PROBLEMA.

Resposta: O número é 10.

8. RESOLUÇÃO DE PROBLEMA.

Resposta: Coube a Maria Cr\$ 20,00, a Pedro Cr\$ 40,00 e a Sérgio Cr\$ 10,00.

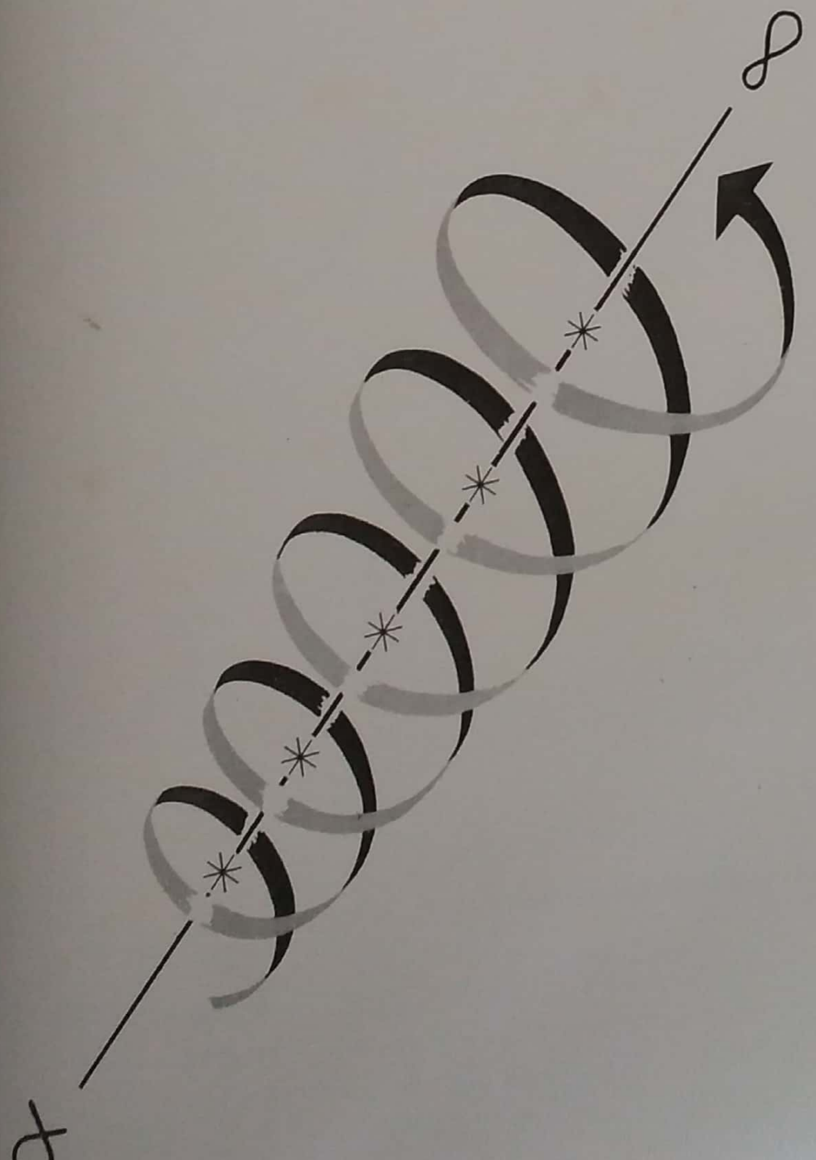
ORIENT. DA APRENDIZAGEM LOCAL

PROJETO HAPRONT:
Habilitação do Professor Não Titulado

MEC – DEF
SEEC – CETEPAR

PROJETO **HAPRONT**

106



ESTADO DO PARANÁ

GOVERNO JAYME CANET JUNIOR

SECRETARIO DE ESTADO DA EDUCAÇÃO E DA CULTURA

PROFESSOR FRANCISCO BORSARI NETTO

CENTRO DE TREINAMENTO DO MAGISTÉRIO DO ESTADO DO PARANÁ

CETEPAR

Projeto "HAPRONT"

APRESENTAÇÃO

O Departamento de Ensino Fundamental do Ministério da Educação e Cultura tem como um dos seus objetivos prioritários, a implantação de uma política global de desenvolvimento de recursos humanos, através da qual pretende assegurar a melhoria da produtividade dos sistemas de ensino.

Nesse sentido, está promovendo a experimentação de um modelo curricular de habilitação de professores que se constitui em um instrumento de busca de melhores padrões para a formação profissional. Em resposta a uma realidade que desafia os meios do ensino convencionais, esse modelo adota uma metodologia de educação à distância, sendo veiculado por uma série de 250 módulos de ensino. Este é um dos módulos dessa série.

Cada módulo é uma unidade composta de:objetivos, pré-teste, procedimentos e atividades básicas, pós-teste; procedimentos e atividades de suporte, pós-teste;procedimentos e atividades de enriquecimento.

Os módulos são encaminhados aos professores - cursistas para serem estudados em seus locais de trabalho. Por esse processo deverão ser habilitados a nível de 2º grau, professores não titulados em exercício em classes de 1ª e 4ª séries.

SUBPROJETO 13.1 do Plano Setorial de Educação e Cultura 75/79: CAPACITAÇÃO DE RECURSOS HUMANOS para o Ensino de 1º grau - Código Orçamentário 4502.08.42.217.2.023.

O projeto está sendo executado pela Secretaria de Estado da Educação e Cultura do Paraná, através do Cetepar, com o nome de Projeto "HAPRONT" (Habilitação de Professores não titulados), em 11 municípios, atingindo 1.100 professores não titulados.

Os resultados alcançados nesta etapa permitirão, num futuro próximo, subsidiar outras U.F. na organização de cursos de habilitação pelo mesmo processo.

CIÊNCIAS

LINGUAGEM SIMBÓLICA

MÓDULO Nº 106

ELABORAÇÃO: CLELIA TAVARES MARTINS
ROSA KAZUKO MIYASAKI

TÍTULO - LINGUAGEM SIMBOLICA.

I - ASSUNTO : SISTEMA DE EQUAÇÃO DE 1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS RESOLUÇÃO E APLICAÇÃO EM PROBLEMAS.

II - MATÉRIA : CIÊNCIAS.

DISCIPLINA : MATEMÁTICA.

III - PRÉ-REQUISITOS : TER DOMINADO O CONTEÚDO DO MÓDULO 105.

IV - OBJETIVOS :

1. OBJETIVO GERAL :

Utilizar corretamente a simbologia matemática.

2. OBJETIVO TERMINAL :

Resolver problemas usando sistema de duas equações de 1º grau com duas variáveis.

3. OBJETIVOS OPERACIONALIZADOS :

1. Identificar um sistema de 1º grau com duas variáveis.

2. Determinar o conjunto verdade para algumas relações entre x e y, tendo por universo o cartesiano entre dois conjuntos.

3. Calcular o conjunto verdade de duas equações de 1º grau com duas variáveis, por meio da intersecção dos pares ordenados, quando essas equações são equivalentes.

4. Calcular o conjunto verdade de um sistema de 1º grau a duas variáveis, por meio da regra prática.

5. Resolver problemas simples, aplicando o conhecimento adquirido no estudo deste módulo.

V - PRÉ-TESTE

Antes de examinar o presente módulo, submeta-se a este Pré-Teste, como você já está acostumado a fazê-lo.

Leia com atenção o enunciado das questões propostas e responda-as calmamente, sem medo de errar. Aceite o desafio com a mesma confiança com que enfrentou os pré-testes dos módulos anteriores.

E seja feliz neste seu trabalho !

1. DADO O CONJUNTO A = {4, 5, 6,} DETERMINAR O CARTESIANO DE A x A, FAZENDO O LEVANTAMENTO DOS PARES NA TABELA SEGUINTE:

A \ A	4	5	6
4			
5			
6			

Logo, A x A = {-----------------
----

2. CONSIDERANDO O CONJUNTO DOS PARES OBTIDOS NA QUESTÃO ANTERIOR (A x A), ACHE O CONJUNTO VERDADE DAS SENTENÇAS ABAIXO, PARA U = A x A:

a) $x = y \longrightarrow V =$ {-------------------------}

b) $x < y \longrightarrow V =$ {-------------------------}

c) $x - y = 2 \longrightarrow V =$ {-------------------------}

3. DETERMINE O CONJUNTO VERDADE DO SEGUINTE SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU A DUAS VARIÁVEIS, SENDO U = Q x Q:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x = 3y \end{cases}$$

Resolvendo:

V = {--------}   Verificando:

4. TRADUZA, DA LINGUAGEM CORRENTE PARA A LINGUAGEM SIMBÓLICA, AS PROPOSIÇÕES ABAIXO:

a) Um número ⟶ ------------------------------

b) A soma de dois números vale nove ⟶ ----------------

c) A diferença de dois números vale um ⟶ ----------------

d) Um número é igual ao dobro do outro ⟶ ----------------

5. RESOLVA O SISTEMA SEGUINTE, TENDO U = Q x Q:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 4x + 3y = 10 \end{cases}$$

6. RESOLVA O PROBLEMA ABAIXO, APLICANDO SEUS CONHECIMENTOS SOBRE SISTEMA DE 1º GRAU A DUAS VARIÁVEIS:

- A soma das idades de Rute e Celso corresponde a 27 anos. Se a idade de Rute é igual à idade de Celso menos 3 anos, quantos anos tem cada um ?

Traduzindo: idades de

Rute: ------------

e Celso: ------------

Equações: ------------

Resolvendo:

Verificando:

Resposta: ------------------

7. RESOLVA O SEGUINTE PROBLEMA:

- Um fazendeiro possui patos e cavalos num total de 28 animais Sendo o número de pés de patos e cavalos igual a 100, quanto são os patos e cavalos ?

Traduzindo: número de

patos → ------------

e cavalos → ------------

total de pés → ------------

equações → $\begin{cases} \text{------------} \\ \text{------------} \end{cases}$

Resolvendo:

Verificando:

Resposta: -------------- patos e -------------- cavalos.

GABARITO DO PRÉ-TESTE

1. Preenchimento da tabela:

A \ A	4	5	6
4	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Logo, A x A =

= {(4,4); (4,5); (4,6); (5,4)
(5,5); (5,6); (6,4); (6,5); (6,6)}

2. CONJUNTO VERDADE.

a) $x = y \longrightarrow V: \{(4,4);(5,5);(6,6)\}$

b) $x < y \longrightarrow V: \{(4,5);(4,6);(5,6)\}$

c) $x - y = 2 \longrightarrow V: \{(6,4)\}$

3. CONJUNTO VERDADE.

$V = \{9,3\}$

4. Linguagem simbólica.

a) x

b) $x + y = 9$

c) $x - y = 1$

d) $x = 2y$ ou $y = 2x$

5. Resolução de sistema.
- Par ordenado: $\{1,2\}$

6. Resolução de problema.
Idade de Rute: 12 anos.
Idade de Celso: 15 anos.

7. Resolução de problema.
Resposta: 6 patos e 22 cavalos.

VI - PROCEDIMENTOS E ATIVIDADES

SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS.

REVISÃO DE PRODUTO CARTESIANO: PAR ORDENADO.

PAR ORDENADO. Para melhor compreensão da importância do par ordenado, consideremos como exemplo a localização de um apartamento num edifício.

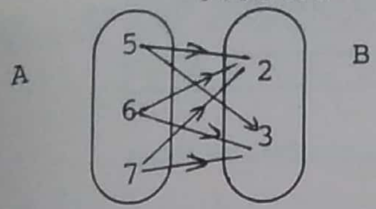
O apartamento 42, digamos, é localizado pelo par ordenado (4,2), par cujo primeiro elemento representa o andar e o segundo, o número do apartamento. Logo, 4º andar, apartamento 2.

Então, de modo geral, (x,y) é um par ordenado em que o primeiro elemento é x e o segundo, y. Já (y,x) é um par diferente do anterior.

No caso do edifício de apartamento, o par (4,2) é diferente de (2,4), pois este último é assim interpretado: 2º andar, apartamento 4. Houve, como vimos, uma nova ordem.

PRODUTO CARTESIANO. Sejam os conjuntos: $A = \{5,6,7,\}$ e $B = \{2,3.\}$ Formemos com os elementos destes conjuntos um novo conjunto cujos elementos serão pares ordenados tomados na seguinte ordem: o primeiro elemento de cada par pertence a A e o segundo, a B.

Observe:



A x B = {(5,2);(5,3);(6,2);(6,3);(7,2);(7,3)} ou,

Lemos: produto cartesiano de A por B, mais simplesmente, A cartesiano B.

Representemos o mesmo conjunto na seguinte tabela:

A \ B	2	3
5	(5,2)	(5,3)
6	(6,2)	(6,3)
7	(7,2)	(7,3)

A x B = {(5,2);(5,3);(6,2);(6,3);(7,2);(7,3)}

Representemos, ainda, o inverso: B x A

B \ A	5	6	7
2	(2,5)	(2,6)	(2,7)
3	(3,5)	(3,6)	(3,7)

B x A = {(2,5);(3,5);(2,6);(3,6);(2,7);(3,7)}

Concluímos, então, que a ordem dos elementos n pares é importante.

EXERCÍCIO 1

a) Dados os conjuntos A = {0,1 2} e B = {5,6,7,} represen tanto na tabela, como também simbolicamente, o cartesiano de A x e B x A.

A \ B	5	6	7
0			
1			
2			

B \ A	0	1	2
5			
6			
7			

A x B ={--

B x A ={--

b) Dado o conjunto M = {a,b,c,} determine M cartesiano M, na tabela abaixo:

M \ M	a	b	c
a			
b			
c			

M x M = { ------------------------------- }

RELAÇÕES BINÁRIAS. Consideremos as seguintes sentenças abertas:

x é pai de y

x é maior que y

x é igual a y

Como vemos, essas sentenças apresentam duas variáveis: x e y .

As sentenças abertas e com duas variáveis são chamadas relações binárias.

As relações binárias podem ser falsas ou verdadeiras de acordo com os valores dados às variáveis.

Sejam os conjuntos A = {5,6,7,8} e B = {7,8,9,10} e a relação binária "x é menor que y (x < y)".

Conhecidos os pares ordenados do cartesiano A x B, verifiquemos os pares que tornam verdadeira a $\boxed{\text{relação } x < y.}$

A \ B	7	8	9	10
5	(5,7)	(5,8)	(5,9)	(5,10)
6	(6,7)	(6,8)	(6,9)	(6,10)
7	(7,7)	(7,8)	(7,9)	(7,10)
8	(8,7)	(8,8)	(8,9)	(8,10)

A x B = {(5,7); (5,8); (5,9); (5,10);
(6,7); (6,8); (6,9); (6,10);
(7,7); (7,8); (7,9); (7,10);
(8,7); (8,8); (8,9); (8,10)}

Observando os pares obtidos, você notará que nem todos satisfazem a relação binária expressa. O conjunto verdade de relação será o conjunto dos pares ordenados que satisfazem a relação x < y.

Selecionando os pares, temos:

V= {(5,7); (5,8); (5,9); (5,10); (6,7); (6,8); (6,9); (6,10); (7,8); (7,9); (7,10); (8,9); (8,10)}

A x B é o universo dado para se estabelecer a $\boxed{\text{relação } x < y.}$

Daí escrevemos $\boxed{x < y,\ U = A \times B}$ que assim traduzimos:

x ∈ A ⟶ 1º elemento do par (x,y);

y ∈ B ⟶ 2º elemento do par (x,y);

U = A x B ⟶ conjunto universo igual ao produto cartesiano A por B.

Analisemos, a seguir, outras sentenças com duas variáveis, de acordo com a relação binária:

$\boxed{y = x + 3,\ U = N \times N}$ $x \in N$
$y \in N$

Atribuindo valores a X descobriremos os valores relativos a y.

	(x,y)
$y = x + 3$	
$x = 0 \rightarrow y = 0 + 3 \rightarrow y = 3$	(0,3)
$x = 1 \rightarrow y = 1 + 3 \rightarrow y = 4$	(1,4)
$x = 2 \rightarrow y = 2 + 3 \rightarrow y = 5$	(2,5)
$x = 3 \rightarrow y = 3 + 3 \rightarrow y = 6$	(3,6)

$V = \{(0,3); (1,4); (2,5); (3,6) \ldots\}$

Note que poderiamos dar infinitos valores a x e obtermos infinitos pares ordenados, pois os conjuntos têm por universo o conjunto dos números naturais que é infinito.

MODELO DE EXERCÍCIO. Passemos, agora, ao seguinte modelo de exercício:

- Construa a tabela de A x A, considerando A = $\{5,6,7,8\}$

A \ A	5	6	7	8
5	(5,5)	(5,6)	(5,7)	(5,8)
6	(6,5)	(6,6)	(6,7)	(6,8)
7	(7,5)	(7,6)	(7,7)	(7,8)
8	(8,5)	(8,6)	(8,7)	(8,8)

- Determine o conjunto verdade para:

a) $(x = y)$, $U = A \times A$
$V = \{(5,5); (6,6); (7,7); (8,8)\}$

b) $(x = y + 1)$, $U = A \times A$
$V = \{(6,5); (7,6); (8,7)\}$

c) $(x > y)$, $U = A \times A$
$V = \{(6,5); (7,5); (7,6); (8,5); (8,6); (8,7)\}$

d) $(x + y = 12)$, $U = A \times A$
$V = \{(5,7); (6,6); (7,5)\}$

Seguindo o modelo dado, resolva, agora, o exercício seguinte:

EXERCÍCIO 2

I - Construa a tabela dos pares ordenados para o cartesiano B x B, sendo B = {4,5,6}

B \ B	4	5	6
4			
5			
6			

B x B = {-----------------------------

II - De acordo com U = B x B, construindo na tabela, determine o conjunto verdade para as relações binárias abaixo:

a) $(x > y)$, U = B x B
V = {---

b) $(x = y)$, U = B x B
V = {---

c) $(x + y = 10)$, U = B x B
V = {---

d) $(x - y = 1)$, U = B x B
V = {---

SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS

Consideremos as equações com duas variáveis $x + y = 4$ e $x - y = 2$, sendo U = N x N.

Vamos achar o conjunto verdade de cada uma delas, atribuindo valores a x e calculando o valor correspondente a y.

Para a equação $x + y = 4$

(x,y)

$x = 0 \longrightarrow y = 4 - 0 \longrightarrow y = 4$, portanto $\longrightarrow (0,4)$
$x = 1 \longrightarrow y = 4 - 1 \longrightarrow y = 3$, então $\longrightarrow (1,3)$
$x = 2 \longrightarrow y = 4 - 2 \longrightarrow y = 2$, dai $\longrightarrow (2,2)$
$x = 3 \longrightarrow y = 4 - 3 \longrightarrow y = 1$, portanto $\longrightarrow (3,1)$
$x = 4 \longrightarrow y = 4 - 4 \longrightarrow y = 0$, então $\longrightarrow (4,0)$
$x = 5 \longrightarrow y = 4 - 5 \longrightarrow y = -1$; não teremos par ordenado para U = N pois, $-1 \notin N$.

Logo, $V_1 = \{(0,4); (1,3); (2,2); (3,1); (4,0)\}$

Para a equação $x - y = 2$

$x = 0 \rightarrow -y = 2 - 0 \rightarrow y = -2$, não satisfaz a equação $(-2 \notin N)$

$x = 1 \rightarrow -y = 2 - 1 \rightarrow y = -1$, não satisfaz a equação

$x = 2 \rightarrow -y = 2 - 2 \rightarrow y = 0$, portanto $\rightarrow (2,0)$

$x = 3 \rightarrow -y = 2 - 3 \rightarrow y = 1$, portanto $\rightarrow (3,1)$

$x = 4 \rightarrow -y = 2 - 4 \rightarrow y = 2$, então $\rightarrow (4,2)$

$x = 5 \rightarrow -y = 2 - 5 \rightarrow y = 3$, daí $\rightarrow (5,3)$

Continuando as substituições, verificamos que esta equação $x - y = 2$ tem infinitos pares ordenados.

$$\boxed{V_2 = \{(3,1);(4,2);(5,3);(6,4)\ldots\}}$$

Confrontemos os dois conjuntos verdade:

$$\boxed{V_1 = \{(0,4);(1,3);(2,2);\underline{(3,1)};(4,0)\}}$$

$$\boxed{V_2 = \{\underline{(3,1)};(4,2);(5,3);(6,4)\ldots\}}$$

Notamos que existe um único par ordenado comum a ambos os conjuntos: (3,1); esse par é a solução do sistema formado pelas duas equações:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2, \text{ sendo } U = N \times N \text{ e } V = \{(3,1)\} \end{cases}$$

Como conclusão, podemos dizer que "resolver um sistema de equações do 1º grau com duas variáveis é o mesmo que achar o par ordenado que torna, ao mesmo tempo, as duas equações verdadeiras, uma vez que são equivalentes".

Façamos a verificação, substituindo as variáveis pelos seus valores numéricos.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases} \qquad V = \{(3,1)\} \qquad \begin{cases} 3 + 1 \stackrel{?}{=} 4 \ (V) \\ 3 - 1 \stackrel{?}{=} 2 \ (V) \end{cases}$$

Assim como o valor de $\underline{x}$ na 1ª e 2ª equações é igual, o valor de $\underline{y}$ também o é.

RESOLUÇÃO DE SISTEMA DE EQUAÇÃO DO 1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS

Entre os vários métodos práticos de resolução de sistema de equação de 1º grau há o da substituição e o da adição.

Trataremos neste item do método da substituição, que é o mais aplicado. No item X falaremos, com propósito meramente ilustrativo, sobre o método da adição.

Método da substituição. Este método consiste em isolar $\underline{x}$ ou $\underline{y}$ no primeiro membro de uma das equações e depois substituir a variável isolada pelo seu valor, na outra equação.

Assim, passamos deste sistema para a equação com uma variável, que você estudou no módulo anterior.

Exemplo I: $\begin{cases} x + y = 10 \\ x = y + 2, \text{ sendo } U = Q \times Q \end{cases}$

Como x já está isolado na 2ª equação, substituimos x pelo seu valor, na 1ª equação.

$x + y = 10$ Substituimos x pelo seu valor: y + 2

$y + 2 + y = 10$ A equação passa a ser com uma variável.

$$2y = 10 - 2$$

$$y = \frac{8}{2}$$

$\boxed{y = 4}$ 2º elemento do par ordenado.

Agora, para calcular o 1º elemento do par ordenado, isto é x, substituimos y, na outra equação, pelo seu valor numérico.

Observe: $x = y + 2$

$x = 4 + 2$

$\boxed{x = 6}$ 1º elemento do par ordenado.

O par (6,4) é o conjunto verdade neste caso de sistema de equação do 1º grau com duas variáveis. $V = \{(6,4)\}$

Substituindo as variáveis pelos valores encontrados, verificamos, nas duas equações do sistema, a validade da solução encontrada.

$$x + y = 10 \Longleftrightarrow 4 + 6 \stackrel{?}{=} 10 \quad (V)$$

$$x = y + 2 \Longleftrightarrow 6 \stackrel{?}{=} 4 + 2 \quad (V)$$

Exemplo II:

Seja o sistema: $x + y = 5$

$x - Y = 1$, para $U = Q \times Q$

Em casos como este, tanto faz isolar x ou y na 1ª ou 2ª equação.

Isolemos x na 2ª equação: $x - y = 1$

$$x = 1 + y$$

Isso feito, substituimos x pelo seu valor, na 1ª equação:

$x + y = 5$

$\underbrace{1 + y} + y = 5$ Equação com uma variável.

$$2y = 5 - 1$$

$$y = \frac{4}{2}$$

$\boxed{y = 2}$ Valor do 2º elemento do par ordenado.

Para achar o 1º elemento do par precisamos calcular o valor de x.

Tomemos a outra equação e façamos a substituição de y pelo seu valor:

$x - y = 1$

$x - 2 = 1$

$x = 1 + 2$

$\boxed{x = 3}$ 1º elemento do par ordenado.

Logo, o conjunto verdade para as duas equações é :

$V = \{(3,2)\}$

Verificando: $\begin{cases} x + y = 5 \Longleftrightarrow 3 + 2 = 5 \text{ (V)} \\ x - y = 1 \Longleftrightarrow 3 - 2 = 1 \text{ (V)} \end{cases}$

O par (3,2) é realmente o conjunto verdade deste sistema.

Exemplo III:

Seja o sistema: $x = 3y$

$x + y = 2$, $V = Q \times Q$

A 1ª equação já tem o valor de x isolado. Então podemos substituir, na 2ª equação, x pelo seu valor, obtendo uma equação com uma variável.

Vejamos: $x + y = 2$

$3y + y = 2$ Substituimos x pelo seu valor: 3y.

$4y = 2$

$y = \frac{2}{4} \Longleftrightarrow \frac{1}{2}$

$\boxed{y = \frac{1}{2}}$ 2º elemento do par ordenado.

Para achar o 1º elemento do par ordenado, substituimos y pelo seu valor, na outra equação:

$x = 3y$

$x = 3 . \frac{1}{2}$

$\boxed{x = \frac{3}{2}}$ 1º elemento do par.

Logo, $V = \{(\frac{3}{2} , \frac{1}{2})\}$

$x = 3y \Longleftrightarrow \frac{3}{2} = 3 . \frac{1}{2} \longrightarrow \text{(V)}$

$x + y = 2 \Longleftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} \Longleftrightarrow 2 \text{ (V)}$

Dados esses exemplos, vejamos agora se você consegue resolver os sistemas dos exercícios que seguem. Caso tenha dúvidas, examine de novo os exemplos e refaça-os atentamente.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

EXERCÍCIO 3

DETERMINE O CONJUNTO VERDADE DOS SEGUINTES SISTEMAS DE EQUAÇÃO DO 1º GRAU, SENDO U = Q x Q:

a) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x = 2y \end{cases}$

$x + y = 9$ Substituimos $\underline{x}$ pelo seu valor.

$2y + y = 9$ A equação passa a ser com uma variável.

$\boxed{y = \text{------}}$ 2º elemento do par ordenado.

$x = 2y$

$x = 2.$ ------

$\boxed{x = \text{-------}}$ 1º elemento do par ordenado.

$V = \{(\text{----},\text{----})\}$ Conjunto verdade que resolve as duas equações.

Verificando: $\begin{cases} x + y = 9 \Longleftrightarrow \text{--------------------} \\ x = 2y \Longleftrightarrow \text{----------------------} \end{cases}$

b) Seja o sistema : $\begin{cases} x + y = 20 \\ x = y + 10 \end{cases}$

$x + y = 20$ Substituimos x pelo seu valor na 2ª equação.

---------- A equação passa a ser com uma variável.

$\boxed{y = \text{------}}$ 2º elemento do par ordenado.

$x = y + 10$ Procuramos o 1º elemento do par ordenado.

$\boxed{x = \text{------}}$ 1º elemento do par ordenado.

$V = \{(\text{----},\text{----})\}$ Par ordenado que resolve simultaneamente as equações.

Verificando: $x + y = 20 \Longleftrightarrow$ ________________

$x = y + 10 \Longleftrightarrow$ ________________

EXERCÍCIO 4

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, DETERMINE O CONJUNTO VERDADE DOS SEGUINTES SISTEMAS DE EQUAÇÃO DO 1º GRAU, SENDO U = Q x Q:

a) $x + y = 7$
$x - y = 1 \longrightarrow x = 1 + y$, para $U = Q \times Q$

b) $x + y = 10$
$x = y + 2$

c) $x + y = 12$
$x - y = 4$

d) $x + y = 8$
$x = 2 + y$

e) $x + y = 10$
$x = 4y$

f) $x + y = 3$
$x - y = 1$

Em todos os exemplos que examinamos, x tem coeficiente 1.

Quando as variáveis apresentam outros coeficientes, a resolução recai no cálculo de equação a uma variável, com denominador numérico.

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS COM COEFICIENTES NAS VARIÁVEIS

Exemplo: I Seja o sistema: $\begin{cases} 3x + 4y = 13 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$, para $U = Q \times Q$

1º passo. Isolar uma das variáveis no 1º membro de uma das equações.

2º passo. Aplicar o valor da variável isolada, na outra equação.

Observe: $3x + 4y = 13$

$3x = 13 - 4y$

$\boxed{x = \dfrac{13 - 4y}{3}} \longrightarrow$ x foi isolado na 1º equação.

$2x - 3y = 3$ → Substituição de x pelo seu valor.

$2\left(\frac{13 - 4y}{3}\right) - 3y = 3$ → Equação a uma variável. Aplicação da propriedade distributiva.

$\frac{26 - 8y}{3} - 3y = 3$ → m.m.c. (3,1) = 3

$\frac{26 - 8y}{\cancel{3}} - \frac{9y}{\cancel{3}} = \frac{9}{\cancel{3}}$ → Eliminação dos denominadores.

$26 - 8y - 9y = 9$ → Ordenação.

$-17y = 9 - 26$

$-17y = -17$ → Multiplicação da equação por -1.

$y = \frac{17}{17}$

$\boxed{y = 1}$ → 2º elemento do par ordenado.

Para calcular o 1º elemento, substituimos y pelo seu valor, numa das equações.

Observe: $2x - 3y = 3$ → Substituição de y pelo seu valor.

$2x - 3.1 = 3$

$2x - 3 = 3$

$2x = 3 + 3$

$x = \frac{6}{2}$

$\boxed{x = 3}$ → 1º elemento do par ordenado.

Logo, o conjunto verdade é: $V = \{(3,1)\}$

Verificação. Substituindo x e y pelos seus valores, nas duas equações, verificamos a solução encontrada.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 13 \Longleftrightarrow 3.3 + 4.1 \stackrel{?}{=} 13 \Longleftrightarrow 9 + 4 = 13 \ (V) \\ 2x - 3y = 3 \Longleftrightarrow 2.3 - 3.1 \stackrel{?}{=} 3 \Longleftrightarrow 6 - 3 = 3 \ (V) \end{cases}$$

<u>Exemplo II</u>: Resolução do sistema abaixo, sendo U = Q x Q:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

→ *Observe* o sistema. Note a conveniência do isolamento de y na 2ª equação, pois ele não tem coeficiente.

$2x + y = 5$

$\boxed{y = 5 - 2x}$ → Aplicação do valor de y no lugar de y, na outra equação.

$2x - 3y = -7$

$2x - 3(5 - 2x) = -7$ → Aplicação da propriedade distributiva.

$2x - 15 + 6x = -7$ *Observe:* $(-3)(-2x) = +6x$

$2x + 6x = -7 + 15$

$8x = 8$

$x = \frac{8}{8}$

$\boxed{x = 1}$ → 1º elemento do par ordenado.

Para achar o 2º elemento do par ordenado, substituimos $\underline{x}$ pelo seu valor, numa das equações.

$2x + y = 5$

$y = 5 - 2x$

$y = 5 - 2.1$

$y = 5 - 2$

$\boxed{y = 3}$ → 2º elemento do par ordenado.

Logo, $V = \{(1,3)\}$

Verificação. Substituindo as variáveis pelos seus valores numéricos, nas duas equações, verificamos a solução encontrada.

$$\begin{cases} 2x - 3y = -7 \Leftrightarrow 2.1 - 3.3 \overset{?}{=} -7 \Leftrightarrow 2 - 9 = -7 \Leftrightarrow -7 = -7 \text{ (V)} \\ 2x + y = 5 \Leftrightarrow 2.1 + 3 \overset{?}{=} 5 \Leftrightarrow 2 + 3 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \text{ (V)} \end{cases}$$

EXERCÍCIO 5

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, DETERMINE O CONJUNTO VERDADE DO SEGUINTE SISTEMA DE EQUAÇÃO DO 1º GRAU, SENDO U = Q x Q:

$$\begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

→ Observe que $\underline{x}$ está sem coeficiente. Seria conveniente isolar x, na segunda equação.

Isolando $\underline{x}$ na 2ª equação, temos:

$x + 2y = 5$

$x =$ ______

Substituindo $\underline{x}$ na 1ª equação pelo seu valor, resulta:

$4x - 3y = -2$

$4(\ldots.) -3y = -2$

Resolvendo a equação a uma variável, advém:

Substituindo y pelo seu valor numérico, obtemos:

$x + 2y = 5$

$x + 2. \quad = 5$

$x =$ ______

Par ordenado que resolve o sistema: $V = \{(\ldots 1,2 \ldots ; \ldots)\}$

EXERCÍCIO 6

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, RESOLVA OS SEGUINTES SISTEMAS, SENDO U = Q . Q:

a) $\begin{cases} x + 4y = 9 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - 8y = 22 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x - y = 6 \\ x + y = 14 \end{cases}$

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PELO SISTEMA DE EQUAÇÃO A DUAS VARIÁVEIS

Antes de tratarmos de problemas, façamos uma revisão da parte referente à tradução de proposições formuladas em linguagem corrente, para a linguagem simbólica da matemática.

Em linguagem corrente	Em linguagem simbólica
- A soma de dois números é igual a quinze.	$x + y = 15$
- A diferença entre dois números é igual a um.	$x - y = 1$
- Tirando quatro do primeiro número obtemos o segundo.	$x - 4 = y$
- Um número é igual ao dobro do outro.	$x = 2y$
- Um número é a quarta parte do outro.	$x = \frac{y}{4}$
- O quadrado de um número menos o outro é igual a quinze.	$x^2 - y = 15$
- A diferença entre o quadrado de dois números.	$x^2 - y^2$

EXERCÍCIO 7

TRADUZA PARA A LINGUAGEM SIMBÓLICA DA MATEMÁTICA AS SEGUINTES PROPOSIÇÕES:

a) O quadrado de um número. ________________________________

b) Um número mais nove. ________________________________

c) A soma de dois números é igual a oito. ______________________

d) A diferença entre dois números é igual a cinco. ______________

e) O triplo de um número mais três. ______________________

f) Um número é igual ao triplo de outro. ______________________

g) Um número somado com seu triplo. ______________________

h) O quadrado de um número mais cinco. ______________________

i) O quíntuplo de um número. ______________________

j) Os três quartos de um número. ______________________

l) A metade de um número. ______________________

<u>Resolução de problemas</u>. Tratemos, agora, da resolução de problemas pelo sistema de equação a duas variáveis.

<u>Exemplos</u>:

I) Dona Dora tem o triplo da idade da filha. A diferença entre suas idades é de 24 anos. Quantos anos tem cada uma ?

Tradução: Idade de

- Dona Dora $\longrightarrow x$
- Filha $\longrightarrow y$
- Equações $\longrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x - y = 24 \end{cases}$

Resolução. Substituindo <u>x</u> na 2ª equação pelo seu valor, provém:

$$x - y = 24$$

$$3y - y = 24$$

$$2y = 24$$

$\boxed{y = 12}$ 2º elemento do par.

Substituindo y pelo seu valor numérico na equação, temos:

$$x = 3y \Longleftrightarrow x = 3.12 \Longleftrightarrow x = 36$$

$\boxed{x = 36}$ 1º elemento do par ordenado (36,12).

Verificação. Substituindo x e y pelos seus valores numéricos nas equações, resulta:

$$\begin{cases} x = 3y \\ x - y = 24 \end{cases} \qquad \begin{cases} 36 = 3.12 \Longleftrightarrow 36 = 36 \ (V) \\ 36 - 12 = 24 \Longleftrightarrow 24 = 24 \ (V) \end{cases}$$

Resposta. Idade de Dona Dora: 36 anos; idade da filha: 12 anos.

II) - Determine dois números que têm 15 por soma e por diferença, 3.

Tradução: Um número $\longrightarrow$ x

Outro número $\longrightarrow$ y

Equações $\longrightarrow \begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Resolução. 1º equação: $x + y = 15$

$x = 15 - y$

2º equação: $x - y = 3$

$15 - y - y = 3$

$-2y = 3 - 15$ (multiplicar por -1)

$2y = 12$

$y = \frac{12}{2}$

$\boxed{y = 6}$ 2º elemento do par.

1º equação: $x + y = 15$

$x + 6 = 15$

$x = 15 - 6$

$\boxed{x = 9}$ 1º elemento do par (9,6).

Verificação: $\begin{cases} x + y = 15 \Longleftrightarrow 9 + 6 \overset{?}{=} 15 \Longleftrightarrow 15 = 15 \ (V) \\ x - y = 3 \Longleftrightarrow 9 - 6 \overset{?}{=} 3 \Longleftrightarrow 3 = 3 \ (V) \end{cases}$

Resposta. O primeiro número é 9 e o segundo, 6.

III) - Um avicultor comprou galinhas e coelhos num total de 48 cabeças e 130 pés. Quantas galinhas e coelhos adquiriu ?

Tradução: Número de

- galinhas $\longrightarrow$ x
- coelhos $\longrightarrow$ y

- Equações $\longrightarrow$ $\begin{cases} x + y = 48 & \text{(cabeças)} \\ 2x + 4y = 130 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x = 2 \text{ pés p/ as galinhas.} \\ 4y = 4 \text{ pés p/ os coelhos.} \end{cases}$

Resolução: $x + y = 48$

$\boxed{x = 48 - y}$

$2x + 4y = 130$

$2(48 - y) + 4y = 130$

$96 - 2y + 4y = 130$

$2y = 130 - 96$

$y = \frac{34}{2}$

$\boxed{y = 17}$ 2º elemento do par.

$x + y = 48$

Substituindo y pelo seu valor, temos:

$x + 17 = 48$

$x = 48 - 17$

$\boxed{x = 31}$ 1º elemento do par (31,17).

x = número de galinhas = 31

y = número de coelhos = 17

48 animais.

Verificação: $2x + 4y = 130$

$2.31 + 4.17 \overset{?}{=} 130$

$62 + 68 \overset{?}{=} 130$

$130 = 130$

Resposta: São 31 galinhas e 17 coelhos.

IV) - A soma de dois números é 392. O quociente entre eles é 13. Quais são esses números ?

Tradução: O 1º número $\longrightarrow$ x

O 2º número $\longrightarrow$ y

$$\text{Equações} \longrightarrow \begin{cases} x + y = 392 \\ \dfrac{x}{y} = 13 \end{cases}$$

Resolução: $\dfrac{x}{y} = 13 \Longleftrightarrow \boxed{x = 13.y}$

$x + y = 392$

Substituindo x pelo seu valor, temos:

$13.y + y = 392 \longrightarrow$ Equação a uma variável.

$14y = 392$

$y = \dfrac{392}{14}$ ou $\boxed{y = 28}$ 2º elemento do par.

Substituindo:

$\dfrac{x}{y} = 13 \Longleftrightarrow \dfrac{x}{28} = 13 \Longleftrightarrow x = 13.28 \Longleftrightarrow \boxed{x = 364}$

$\boxed{x = 364}$ 1º elemento do par (364,28).

Verificação: $\begin{cases} x + y = 392 \\ \dfrac{x}{y} = 13 \end{cases}$ $\begin{cases} 364 + 28 \overset{?}{=} 392 \ (V) \\ \dfrac{364}{28} \overset{?}{=} 13 \ (V) \end{cases}$

Resposta: O 1º número é 364 e o 2º número, 13.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO:

EXERCÍCIO 8

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, RESOLVA OS PROBLEMAS QUE SEGUEM, APLICANDO O SISTEMA DE EQUAÇÃO A DUAS VARIÁVEIS:

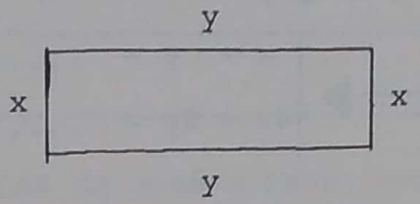
a) Um número somado a outro vale 10. O menor mais 2 é igual ao maior. Quais são esses números ?

b) A soma das idades de um professor e seu aluno corresponde a 65 anos. A idade do professor é o quádruplo da idade do aluno. Quais são as duas idades ?

c) A soma de leões e tigres, num circo, é igual a 12. Quantos leões e quantos tigres são, se o número destes é o quíntuplo do número daqueles ?

d) Num retângulo, o lado maior é o dobro do lado menor. Qual a medida dos dois lados se o perímetro desse retângulo é igual a 30m ?

Observe:



Tradução: Lado menor $\longrightarrow$ x
Lado maior $\longrightarrow$ y

Equações: $\longrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 30m \\ 2x = y \end{cases}$

Resolução : ______________________________

e) A diferença entre dois números é 3. Do dobro do menor, subtraindo sete, teremos o maior. Quais são esses números ?

Tradução: Número maior $\longrightarrow$ x
Número menor $\longrightarrow$ y

Equações $\longrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$

Resolução: ______________________________

f) Numa garagem há automóveis e bicicletas, num total de 20 veículos para 70 rodas. Quantos automóveis e quantas bicicletas são ?

Tradução: Número de

- automóveis $\longrightarrow$ x
- bicicletas $\longrightarrow$ y
- Equações $\longrightarrow$ $\begin{cases} x + y = \ \ldots\text{(total de veículo)} \\ 4x + 2y = \ \ldots\text{(total de rodas).} \end{cases}$

Resolução: ____

____

____

____

____

____

Verificação: ____

____

____

____

____

____

Resposta: ____

g) Um menino pagou uma dívida de Cr$ 5,20 com 20 moedas, umas de Cr$ 0,50 e outras de Cr$ 0,10. Quantas moedas de Cr$ 0,50 e quantas de 0,10 entregou ao seu credor ?

Tradução: Número de moedas de

- Cr$ 0,50 $\longrightarrow$ x
- Cr$ 0,10 $\longrightarrow$ y
- Equações $\longrightarrow$ $\begin{cases} x + y = \ldots \text{ (total de moedas)} \\ 0{,}50x + \ldots\, y = \ldots \text{ (quantia paga)} \end{cases}$

(Multiplique a 2ª equação por 10 e opere com números naturais).

Resolução: ____

____

____

____

____

____

Verificação:

Resposta:

h) A soma das idades de José e Pedro corresponde a 82 anos. A idade de José é o dobro da de Pedro menos 8 anos. Determine as idades de cada uma dessas pessoas.

Tradução: idades de

- José →
- Pedro →
- Equações →

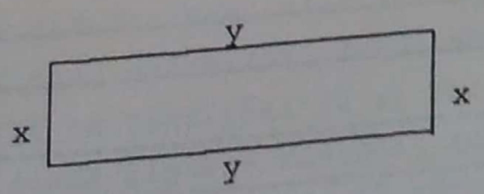
Resolução:

Verificação:

Resposta:

i) O lado maior de um retângulo é o triplo do lado menor. Se o perímetro desse retângulo tem 32 cm, qual o tamanho do lado menor ?

Observe:



Tradução: Lado maior $\longrightarrow$ y

Lado menor $\longrightarrow$ x

Equações $\longrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = \ldots\ldots \text{ (perímetro).} \\ y = \ldots\ldots \end{cases}$

Resolução: --

Verificação: --

Resposta: --

j) Num casamento, a soma das idades dos nubentes é igual a 71 anos. Sendo a idade do noivo o dobro da idade da noiva mais cinco anos, quantos anos tem cada um ?

Tradução: Idades

- do noivo $\longrightarrow$ ----------------
- da noiva $\longrightarrow$ ----------------
- Soma das idades $\longrightarrow$ ----------------
- Idade do noivo em relação à da noiva $\longrightarrow$ -----------
- Equações $\longrightarrow \begin{cases} \text{-----------------------} \\ \text{-----------------------} \end{cases}$

Resolução: --

Verificação: --

Resposta: --

1) Maria gastou Cr$ 28,00. Pagou essa importância com 8 cédulas, sendo umas de Cr$ 1,00 e outras de Cr$ 5,00. Quantas cédulas de Cr$ 1,00 e quantas de Cr$ 5,00 deu em pagamento ?

Tradução: ____

Resolução: ____

Verificação: ____

Resposta: ____

VII - PÓS-TESTE

O propósito do presente pós-teste, como você sabe, é a verificação do seu aproveitamento sobre o assunto deste módulo.

Se você estudou com interêsse e diligência, e realizou todas as atividades aqui propostas, tendo dominado os objetivos estabelecidos, então está em condições de se sair bem nesta oportunidade. Entretanto, se tem ainda algumas dúvidas, reveja os pontos principais do módulo e depois se submeta ao pós-teste.

Agora, leia calmamente as questões abaixo e dê respostas cabíveis às perguntas formuladas.

E boa sorte neste seu trabalho !

1. CONSTRUA O CONJUNTO UNIVERSO PARA O CARTESIANO DE B x B, SENDO $B = \{2,3,4,5\}$. USE A TABELA PARA O LEVANTAMENTO DOS PARES ORDENADOS.

B \ B	2	3	4	5
2				
3				
4				
5				

$B \times B = \{($ ------------------------

----

2. DETERMINE O CONJUNTO VERDADE PARA AS SEGUINTES SENTENÇAS ABERTAS:

a) $x - y = 0$, $U = B \times B$

$V = \{($------------------------

b) $x + y = 5$, $U = B \times B$

$V = \{($------------------------

c) $x = 2y$, $U = B \times B$

$V = \{($------------------------

d) $x > y$, $U = B \times B$

$V = \{($------------------------

3. RESOLVA O SISTEMA DE EQUAÇÃO DO 1º GRAU, ABAIXO, SENDO $U = Q \times Q$:

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

4. TRADUZA PARA A LINGUAGEM SIMBÓLICA DA MATEMÁTICA AS PROPOSIÇÕES SEGUINTES:

a) A terça parte de um número. ------------------------

b) A soma de um número com o triplo de outro vale 10. ------------------------

c) A diferença entre dois números é igual a um. ------------------------

d) Um número é o dobro do outro. ------------------------

5) PROCURE O CONJUNTO VERDADE DO SISTEMA ABAIXO E VERIFIQUE A VALIDADE DO PAR ORDENADO ENCONTRADO, PARA $U = Q \times Q$:

$$\begin{cases} x + 4y = -7 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

6) RESOLVA O PROBLEMA QUE SEGUE, APLICANDO O CONHECIMENTO DE SISTEMA DE EQUAÇÃO A DUAS VARIÁVEIS:

- A soma das idades de dois irmãos corresponde a 27 anos. Se o mais novo tem 3 anos menos que o mais velho, qual a idade de cada um deles ?

Tradução: idade do

- mais velho ⟶ ________________
- do mais novo ⟶ ________________
- Equações ⟶ $\begin{cases} x + y = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \\ \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \end{cases}$

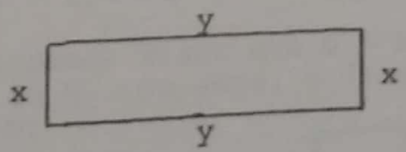
Solução: ____
____
____

Verificação: ____
____
____

Resposta: ____

7) O lado maior de um triângulo é o triplo do lado menor. Se o perímetro dessa figura mede 48 cm, qual o tamanho dos seus lados ?

Observe:



Tradução: medidas

- da largura ⟶ ______________
- do comprimento ⟶ ______________
- Equações ⟶ $\begin{cases} \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \\ \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \end{cases}$

Resolução: ____
____
____
____
____

Verificação: --

Resposta: ---

VIII - PROCEDIMENTOS E ATIVIDADES - NÍVEL DE SUPORTE

O presente capítulo, que versa sobre o assunto das páginas anteriores, tem por fim propiciar a você um mais amplo domínio daquilo que foi estudado. Para isso, faremos uma revisão, com exercícios de reforço, dos principais pontos da matéria dada.

PRODUTO CARTESIANO . Lembremos, inicialmente, o que se denomina Produto Cartesiano.

PRODUTO CARTESIANO é o conjunto de todos os pares ordenados, possíveis de serem obtidos no relacionamento dos elementos de dois conjuntos, em uma ordem dada. (V.Mód.26).

Produto cartesiano de A por B é um conjunto de todos os pares ordenados, onde o 1º elemento pertence a A e o 2º elemento pertence a B, obtido no relacionamento dos elementos de dois conjuntos, em uma ordem dada.

A x B, ou B x A, lê-se: A cartesiano de B, ou B cartesiano de A.

Exemplo: Sendo A = $\{4,5,6\}$ e B = $\{7,8\}$, determinemos A x B, usando tabela.

Observe:

A \ B	7	8
4	(4,7)	(4,8)
5	(5,7)	(5,8)
6	(6,7)	(6,8)

(Além da tabela, poderíamos usar, também, dois diagramas e as sagitais, ou então o gráfico dos eixos cartesianos; diagramas e gráficos com os quais você já se familiarizou no módulo 26).

$$A \times B = \{(4,7);(4,8);(5,7);(5,8);(6,7);(6,8)\}$$

A ordem em que aparecem os elementos de um par ordenado é importante. Daí por que se convencionou chamar de x ao 1º elemento e de y ao 2º, no par (x,y).

RELAÇÕES BINÁRIAS. As relações estabelecidas entre os elementos são muitas.

Seja por exemplo, determinar os pares do universo A x B, que satisfazem as relações, sendo $A = \{4,5,6\}$ e $B = \{7,8\}$:

$x = y$	$x = y + 1$
$x = 2y$	$x > y$
$x < y$	$2x = y$

A essa relação entre os dois elementos do par ordenado chamamos "relação binária".

Pelo fato de as sentenças serem abertas, nem sempre encontramos solução à relação pedida.

RELAÇÕES BINÁRIAS são sentenças abertas, com duas variáveis, que podem ser verdadeiras ou falas, de acordo com os valores atribuídas às variáveis.

Sejam os conjuntos $A = \{4,5\}$ e $B = \{7,2\}$ e a relação binária a ser verificada $\boxed{x > y}$.

Procurando o cartesiano de A x B, temos:

$A \times B = \{(4,7);(4,2);(5,7);(5,2)\}$ $U = A \times B$

Os únicos pares que satisfazem a relação $\boxed{x > y}$ são $\{(4,2);(5,2)\}$, pois $x \in A$, 1º elemento do par $(\underline{x},y)$ e $y \in B$, 2º elemento do par $(x,\underline{y})$.

$U = A \times B$ indica que o conjunto universo a ser considerado refere-se aos pares ordenados obtidos na relação entre os elementos dos conjuntos dados.

Ainda considerando o cartesiano de A x B, determinemos o conjunto verdade para a relação binária $\boxed{x = y - 2}$:

$V = \{(5,7)\}$, pois é o único par ordenado que satisfaz a relação $x = y - 2 \Leftrightarrow 5 = 7 - 2$.

De modo geral podemos dizer que $U = N \times N$ (conjunto universo igual a N cartesiano de N). Ou seja: o 1º elemento do par $x \in N$ e o 2º elemento do par $y \in N$.

$U = Z \times Z \Longrightarrow$ conjunto universo igual a Z cartesiano de Z.

$U = Q \times Q \Longrightarrow$ conjunto universo igual a Q cartesiano de Q.

RESOLUÇÃO DE SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS

Sistema de equação do 1º grau com duas variáveis é aquele cujas equações têm o mesmo conjunto verdade, isto é, em que nas duas equações o valor de x é o mesmo, assim como o de y.

Daí podermos isolar o valor de uma variável numa equação, e substituir essa mesma variável pelo seu valor na outra equação.

Esta estratégia, que permite transformar o sistema numa equação de 1º grau a uma variável, é chamada método de substituição.

MÉTODO DE SUBSTITUIÇÃO. Este método obedece aos seguintes passos:

- Dadas as duas equações, escolhe-se aquela em que é mais conveniente isolar uma variável (x ou y).

$$\begin{cases} x + y = 1 \Longleftrightarrow \boxed{x = 1 - y} \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

- Substitui-se na outra equação o valor da variável isolada.

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ x - 2y = 1 \Longleftrightarrow 1 - y - 2y = 1 \end{cases}$$

- Resolve-se a equação do 1º grau a uma variável.

$$1 - y - 2y = 1$$

$$-3y = 0 \quad \text{(multiplica-se por -1)}$$

$$y = \frac{0}{3} \quad \text{(zero não tem sinal)}$$

$$\boxed{y = 0} \quad \text{2º elemento do par ordenado.}$$

- Substitui-se o valor da variável pela variável da outra equação.

$$x = 1 - 0$$

$$\boxed{x = 1} \quad \text{1º elemento do par ordenado}$$

$V = \{1,0\}$. Par ordenado que torna as equações verdadeiras.

- Procede-se a verificação, substituindo as variáveis pelos valores do par encontrado.

$$\begin{cases} x + y = 1 \Longleftrightarrow 1 + 0 \stackrel{?}{=} 1 \Longleftrightarrow 1 = 1 \quad (V) \\ x - 2y = 1 \Longleftrightarrow 1 - 2.0 \stackrel{?}{=} 1 \Longleftrightarrow 1 = 1 \quad (V) \end{cases}$$

Obedecidos estes passos, você facilmente achará o conjunto verdade, solução do sistema.

SISTEMA FORMADO DE EQUAÇÕES COM DENOMINADORES NUMÉRICOS

Para finalizar, passemos à resolução de sistema formado de equações com denominadores numéricos. As equações apresentam termos com denominadores numéricos, visto as variáveis terem coeficientes escritos.

Exemplo: $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

- Isola-se uma variável numa das equações:

$$2x = 8 - 3y \Longleftrightarrow \boxed{x \; \frac{8 - 3y}{2}}$$

• Substitui-se $\underline{x}$ na outra equação pelo valor encontrado:

$$3x + 2y = 7 \Longleftrightarrow 3\left(\frac{8 - 3y}{2}\right) + 2y = 7$$

• Reduzem-se os termos ao mesmo denominador comum e resolve-se a equação:

$$\frac{24 - 9y}{2} + 2y = 7 \qquad \text{(m.m.c. = 2)}$$

$$\frac{24 - 9y}{\cancel{2}} + \frac{4y}{\cancel{2}} = \frac{14}{\cancel{2}} \qquad \text{Eliminação dos denominadores.}$$

$$24 - 9y + 4y = 14 \qquad \text{Ordenação ou agrupamento dos termos.}$$

$$-5y = -10 \qquad \text{Multiplicação por -1.}$$

$$y = \frac{10}{5}$$

$$\boxed{y = 2} \qquad \text{2º elemento do par ordenado.}$$

• Substitui-se, na outra equação, a variável pelo valor encontrado:

$$2x + 3y = 8 \Longleftrightarrow 2x + 3.2 = 8$$

$$2x = 8 - 6$$

$$x = \frac{2}{2}$$

$$\boxed{x = 1} \qquad \text{1º elemento do par ordenado.}$$

$$V = \{(1,2)\}$$

• Procede-se a verificação, substituindo as variáveis pelos valores do par encontrado:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 \Longleftrightarrow 3.1 + 2.2 \overset{?}{=} 7 \Longleftrightarrow 7 = 7 \text{ (V)} \\ 2x + 3y = 8 \Longleftrightarrow 2.1 + 3.2 \overset{?}{=} 8 \Longleftrightarrow 8 = 8 \text{ (V)} \end{cases}$$

<u>OBSERVAÇÃO</u>. Refaça, agora, os exercícios que achar necessário efetuar para dominar o que aprendeu aqui e para poder enfrentar com firmeza e segurança o novo pós-teste.

Reexamine os itens relativos à tradução, para a linguagem simbólica da matemática, dos enunciados feitos em linguagem corrente.

E aplique o sistema seu conhecido à resolução dos problemas que apresentaremos logo a seguir.

Cremos que você deve estar lembrado dos nossos aconselhamentos feitos nos módulos anteriores. Mas não nos custa sublinhar que matemática não se aprende apenas lendo os nossos módulos ou livros de vários autores. Aprende-se, sim, com lápis e papel na mão, efetuando os exercícios neles contidos, mesmo aqueles apresentados como modelos.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

EXERCÍCIO 9

NO SEU CADERNO DE MATEMÁTICA, RESOLVA OS SEGUINTES PROBLEMAS, APLICANDO O SISTEMA DE EQUAÇÕES COM DUAS VARIÁVEIS:

a) Ache dois números cuja soma é igual a 16 e cuja diferença é igual a 2.

b) Num Posto de Estacionamento há automóveis e motocicletas, perfazendo um total de 25 veículos e 90 rodas. Quantas motocicletas e quantos automóveis estão abrigados no Posto ?

c) Num casamento, a soma das idades dos nubentes corresponde a 70 anos. A idade do noivo é igual ao dobro da idade da noiva menos 5. Quantos anos tem cada um ?

d) A soma de dois números é 102 e a diferença, 36. Que números são esses ?

e) Pai e filho têm 56 anos. Dentro de 28 anos a idade do filho será igual à atual idade do pai. Quantos anos tem cada um ?

f) A soma de dois números é igual a 42 e os 2/3 de um deles são iguais à metade do outro. Que números são esses ?

g) Pedro tem em sua carteira uma importância em dinheiro que ultrapassa em Cr$ 50,00 da quantia que Antônio traz no bolso. Quanto cada um deles possui, sabendo-se que a diferença entre o dobro do dinheiro de Pedro e o triplo do de Antônio é igual a Cr$ 70,00 ?

h) A diferença entre dois números é igual a 10 e o quociente entre o maior e o menor é 3. Que números são esses ?

IX - PÓS-TESTE - NÍVEL DE SUPORTE

Realize o presente teste obedecendo as mesmas recomendações que fizemos para os anteriores. É mais uma verificação do seu aproveitamento sobre o assunto deste módulo.

Leia com atenção as questões abaixo e, calmamente, dê as respostas às perguntas formuladas. E seja feliz neste seu pós-teste.

1. CONSIDERANDO O CONJUNTO A = $\{5, 6, 7\}$, CONSTRUA O CARTESIANO A x A COM AUXÍLIO DA TABELA ABAIXO:

A \ A	5	6	7
5			
6			
7			

A x A = {---

----

2. DETERMINE O CONJUNTO VERDADE DAS RELAÇÕES ESTABELECIDAS PARA OS PARES ORDENADOS DO UNIVERSO DA QUESTÃO ANTERIOR, SENDO $U = A \times A$:

a) $x = y$, $U = A \times A$

$V = \{($ ---------------------

b) $x = y + 1$, $U = A \times A$

$V = \{($ ---------------------

c) $x > y$, $U = A \times A$

$V = \{($ ---------------------

d) $x < y$, $U = A \times A$

$V = \{($ ---------------------

3. DETERMINE O CONJUNTO VERDADE DO SEGUINTE SISTEMA DE EQUAÇÃO DE 1º GRAU A DUAS VARIÁVEIS:

$x = 2y$

$x + 5y = 35$, para $U = Q \times Q$

4. TRADUZA PARA A LINGUAGEM SIMBÓLICA DA MATEMÁTICA AS PROPOSIÇÕES SEGUINTES:

a) O quadrado de um número. --

b) A soma de dois números é igual a dez. --

c) Um número é o quíntuplo do outro. --

d) A diferença entre dois números é trinta. --

5. RESOLVA O SISTEMA ABAIXO E VERIFIQUE A VALIDADE DA SOLUÇÃO ENCONTRADA:

$3x - 4y = -1$

$2x + 5y = 7$, para $U = Q \times Q$

6. RESOLVA O PROBLEMA ABAIXO:

- Uma bicicleta custa o triplo do preço de um velocípede. Qual é o preço de cada uma dessas mercadorias, se valem juntas a importância de Cr$ 640,000 ?

Tradução: Símbolos para

- bicicleta $\longrightarrow$ x
- velocípede $\longrightarrow$ y

- Equações $\longrightarrow$ $\begin{cases} x + y = \text{Cr\$ ---------------} \\ x = \text{-------------------------} \end{cases}$

Resolução: --

Verificação: --

Resposta: --

7. DETERMINE DOIS NÚMEROS QUE TÊM POR SOMA 13 E POR DIFERENÇA, 3:

X - ATIVIDADES DE ENRIQUECIMENTO

É importante que você leia as páginas deste item; certamente essa leitura lhe será proveitosa.

Falaremos aqui sobre o método de adição, aplicado à resolução de sistema de equações. Trata-se de conhecimento que tem por fim um propósito ilustrativo, no contexto deste módulo.

MÉTODO DE ADIÇÃO, APLICADO À RESOLUÇÃO DE SISTEMA DE EQUAÇÕES

Consideremos as seguintes igualdades:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 3 + 2 = 5 \\ 3 - 2 = 1 \end{cases} \\ + \\ \hline 6 + 0 = 6 \end{array}$$

- Adicionando membro a membro as igualdades, obtemos outra igualdade.

$$(3 + 3) + (2 - 2) \stackrel{?}{=} 5 + 1$$

$$6 = 6 \longrightarrow \text{Nova igualdade.}$$

Vimos, então, que adicionando duas igualdades, membro a membro, obtemos outra igualdade. E notamos, também, que os números simétricos, como +2 -2, quando somados se anulam.

Pois bem, é baseado na eliminação dos termos simétricos que o método de adição transforma um sistema numa equação a uma variável.

• Vejamos:

$$\begin{array}{l} x + \cancel{y} = 9 \\ x - \cancel{y} = 1 \\ \hline 2x \quad = 10 \end{array}$$

$U = Q \times Q$

Eliminação de termos simétricos.

Equação a uma variável.

$x = \frac{10}{2}$

$\boxed{x = 5}$ 1º elemento do par ordenaa..

Para calcular o 2º elemento do par, é só substituir x, pelo seu valor, na outra equação:

$x + y = 9$

$5 - y = 1$

$- y = 1 - 5$

$y = -4 . (-1)$

$\boxed{y = 4}$ 2º elemento do par ordenado.

• Passemos a outro exemplo:

$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 3x + y = 10 \end{cases}$ - Note que estas equações não têm termos simétricos e que o coeficiente de y é o mesmo para as duas equações.

Multiplicando uma das equações por (-1), esta não se altera, mas os termos em y transformam-se em simétricos:

$\begin{cases} 2x + y = 8 \quad (-1) \\ 3x + y = 11 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} -2x - \cancel{y} = -8 \\ 3x + \cancel{y} = 11 \end{cases} \\ \hline \boxed{x \quad = 3} \end{array}$$

(1º elemento do par).

Substituindo x pelo seu valor numérico, na outra equação, temos:

$3x + y = 11$

$3.3 + y = 11$

$9 + y = 11$

$y = 11 - 9$

$\boxed{y = 2}$ (2º elemento do par). $V = \{3, 2\}$

• Analisemos ainda mais outro exemplo sobre o método da adição:

$\begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

E agora ? O sistema não possui simétricos, nem coeficientes iguais nos termos semelhantes.

Ora, sabemos que o método da adição é aplicado para a obtenção de termos simétricos. E que o princípio multiplicativo, aplicado a equações de 1º grau, permite que encontremos esses termos. Assim, empregando esses conhecimentos, temos o que segue.

$\begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

Multiplicando toda a 2ª equação por -4, obteremos um simétrico para o termo 4x da 1ª equação.

Vejamos:

$$(-4)\begin{cases} \cancel{4}x - 3y = -2 \\ -\cancel{4}x - 8y = -20 \end{cases}$$

P.d. $-4(x + 2y = 5)$

$$\begin{aligned} -11y &= -22 \\ 11y &= 22 \\ y &= \frac{22}{11} \end{aligned}$$

Multiplicação da equação por -1.

$\boxed{y = 2}$ 2º termo do par ordenado.

Substituindo y, pelo seu valor numérico, na 1ª equação, resulta:

$$\begin{aligned} 4x - 3.2 &= -2 \\ 4x &= -2 + 6 \\ x &= \frac{4}{4} \end{aligned}$$

$\boxed{x = 1}$ 1º elemento do par ordenado.

Verificação:

$$\begin{cases} 4.1 - 3.2 \overset{?}{=} -2 \Longleftrightarrow 4 - 6 \overset{?}{=} -2 \Longleftrightarrow -2 = -2 \ (V) \\ 1 + 2.2 \overset{?}{=} 5 \Longleftrightarrow 1 + 4 \overset{?}{=} 5 \Longleftrightarrow 5 = 5 \ (V) \end{cases}$$

$V = \{(1,2)\}$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO . Tente, se tiver vontade de ampliar os seus conhecimentos, resolver as seguintes equações de 1º grau a duas variáveis, usando o método da adição.

EXERCÍCIO 10 $U = Q \times Q$

a) $\begin{cases} x - y = 6 \\ x + y = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - 8y = 22 \end{cases}$

Exercício 1

Representação do cartesiano.

a)

A \ B	5	6	7
0	(0,5)	(0,6)	(0,7)
1	(1,5)	(1,6)	(1,7)
2	(2,5)	(2,6)	(2,7)

B \ A	0	1	2
5	(5,0)	(5,1)	(5,2)
6	(6,0)	(6,1)	(6,2)
7	(7,0)	(7,1)	(7,2)

A x B = $\{(0,5);(0,6);(0,7);(1,5);(1,6);(1,7);(2,5);(2,6);(2,7)\}$

B x A = $\{(5,0);(6,0);(7,0);(5,1);(6,1);(7,1);(5,2);(6,2);(7,2)\}$

b)

M \ M	a	b	c
a	(a,a)	(a,b)	(a,c)
b	(b,a)	(b,b)	(b,c)
c	(c,a)	(c,b)	(c,c)

Cartesiano de M x M, sendo
M = $\{a,b,c\}$

M x M = $\{(a,a);(a,b);(a,c);(b,a);(b,b);(b,c);(c,a);(c,b);(c,c)\}$

Exercício 2

Tabela de pares ordenados.

I)

B \ B	4	5	6
4	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Cartesiano de B x B, sendo
B = $\{4,5,6\}$

B x B = $\{(4,4);(4,5);(4,6);(5,4);(5,5);(5,6);(6,4);(6,5);(6,6)\}$

II) Conjunto verdade.

a) V = $\{(5,4);(6,4);(6,5)\}$

b) V = $\{(4,4);(5,5);(6,6)\}$

c) V = $\{(4,6);(5,5);(6,4)\}$

d) $V = \{(5,4);(6,5)\}$

Exercício 3

a) (6,3)

b) (15,5)

Exercício 4

Conjunto verdade.

a) (4,3)

b) (6,4)

c) (8,4)

d) (5,3)

e) (8,2)

f) (2,1)

Exercício 5

Conjunto verdade.
(1,2)

Exercício 6

Resolução de sistemas.

a) (5,1)

b) (2,3)

c) (1,1)

d) (7,-1)

e) (2,-1)

f) (10,4)

Exercício 7

Tradução para a linguagem simbólica.

a) x^2

b) $x + 9$

c) $x + y = 8$

d) $x - y = 5$

e) $3x + 3$

f) $x = 3y$

g) $x + 3x$

h) $x^2 + 5$

i) $5x$

j) $\frac{3}{4}x$ ou $\frac{3x}{4}$

l) $\frac{x}{2}$ ou $\frac{1}{2}x$

Exercício 8

Resolução de problemas.

a) O número maior é 6 e o menor, 4.

b) O professor tem 52 anos e o aluno, 13.

c) No circo há 10 tigres e 2 leões.

d) O lado maior do retângulo mede 10m e o menor, 5m.

e) O número maior é 13 e o menor, 10.

f) O número de automóveis é 15 e o de bicicletas, 5.

g) Pagou a dívida com 8 moedas de Cr\$ 0,50 e 12 moedas de Cr\$ 0,10.

h) José tem 52 anos e Pedro, 30.

i) O lado menor do retângulo mede 4cm.

j) O noivo tem 49 anos, e a noiva, 22.

l) Pagou com 5 cédulas de Cr\$ 5,00 e 3 de Cr\$ 1,00.

Exercício 9

Resolução de problemas.

a) Os números são 9 e 7.

b) São 5 motocicletas e 20 automóveis.

c) O noivo tem 45 anos e a noiva, 25.

d) Os números são 69 e 33.

e) O pai tem 42 anos e o filho, 14.

f) Os números são 18 e 24.

g) Pedro tem Cr$ 80,00 e Antônio, Cr$ 30,00.

h) O número maior é 15 e o menor, 5.

Exercício 10

Conjunto verdade.

a) $V = \{10, 4\}$　　c) $V = \{2, -1\}$

b) $V = \{1, 3\}$　　d) $V = \{7, -1\}$

XI - REFERÊNCIAS E SUGESTÕES BIBLIOGRÁFICAS

1. BACCARO, Nelson e outros. *Matemática Dinâmica*. 6ª série do Ensino Fundamental. São Paulo, Editora IBEP, 1977.

2. ZAMBUZZI, Orlando. *Matemática com Estudo Dirigido*. 6ª série, 1º Grau. São Paulo, Editora Ática, 1975.

3. SANGIORGI, Osvaldo. *Matemática - 6, Para Cursos de 1º Grau*. São Paulo, Editora Nacional, 1974.

4. CLAUZET, Luiz Bernardo F. *Matemática, Estudo Programado*, 6ª série, 1º grau. São Paulo, Editora Saraiva, 1976.

5. DIAS FILHO, Astor G. e outros. *Matemática Criativa*. 6ª série do Ensino Fundamental. São Paulo, Editora Abril, 1975.

6. NAME, Miguel Asis. *Matemática, Ensino Moderno*. 6ª série do Ensino Fundamental. São Paulo, Editora do Brasil S.A., 1974.

7. DOMÊNICO, Luiz e outros. *Matemática Moderna*. 6ª série do Ensino Fundamental. São Paulo, Editora IBEP, 1975.

8. GRUEMA (Grupo de Ensino de Matemática Atualizada, São Paulo). Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau - 6, por Anna Averbuch e outros, supervisão de L.H. Jaci Monteiro. São Paulo, Editora Nacional, 1974.

XII - GLOSSÁRIO

ATRIBUIR — Conferir; dar; conceder; imputar; referir.

AVICULTOR — Criador de aves; aquele que se entrega à avicultura.

CONFRONTAR	Comparar; conferir; cotejar; por em frente (duas ou mais coisas ou pessoas).
CONTEXTO	O todo em que se encontra um texto, conjunto; contextura; composição; teor; argumento.
CONVENCIONAR	Estipular; acordar; concordar; estabelecer por convenção.
DILIGÊNCIA	Zelo; cuidado; atividade; desvelo; atenção.
ESTRATÉGIA	Tática; técnica; plano; arte de traçar planos.
FAMILIARIZAR	Tornar familiar; acostumar; habituar; relacionar-se.
MERO	Simples; puro; estreme; genuíno. Meramente: simplesmente.
NUBENTE	Que é noivo ou noiva; pessoa que vai casar.
PROPICIAR	Tornar propício; tornar favorável; proporcionar; favorecer.
PROVIR	Resultar; derivar; originar-se; vir; nascer.
VERSAR	Tratar; consistir; constar; ter por objeto; assentar.

GABARITO - PÓS-TESTE

Município: ---------------------------- Data da correção: -------

Cursista: --

Número do Módulo: 106. Percentagem: -------------------

1. Levantamento de pares ordenados.

B \ B	2	3	4	5
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
4	(4,2)	(4,3)	(4,4)	4,5)
5	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

$B \times B = \{(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5)$
$(5,2);(5,3);(5,4);(5,5)\}$

2. Conjuntos verdade.

a) $V = \{(2,2);(3,3);(4,4);(5,5)\}$

b) $V = \{(2,3);(3,2)\}$

c) $V = \{(4,2)\}$

d) $V = \{(3,2);(4,2);(4,3);(5,2);(5,3);(5,4)\}$

3. Resolução de equação.

a) $V = \{(5,3)\}$

4. Tradução para a linguagem simbólica.

a) $\frac{x}{3}$ ou $\frac{1}{3}x$

b) $x + 3y = 10$

c) $x - y = 1$

d) $x = 2y$ ou $y = 2x$

5. Par ordenado de sistema.

$V = \{(1,-2)\}$ Verificação:

$1 - 8 \stackrel{?}{=} -7 \Longleftrightarrow -7 = -7$ (V)

$1 - (-2) \stackrel{?}{=} 3 \Longleftrightarrow 3 = 3$ (V)

6. Problema.

Resposta: O irmão mais novo tem 12 anos e o mais velho, 15.

7. Problema.

Resposta: Os lados do retângulo medem 6m e 18m.

GABARITO DO PÓS-TESTE - Nível de Suporte

Cursista: __________________________ Percentagem: ___________________

1. Preenchimento de tabela.

A \ A	5	6	7
5	(5,5)	(5,6)	(5,7)
6	(6,5)	(6,6)	(6,7)
7	(7,5)	(7,6)	(7,7)

$A \times A = \{(5,5); (5,6); (5,7); (6,5); (6,6); (6,7); (7,5); (7,6); (7,7)\}$

2. Determinação de conjuntos verdade.

a) $V = \{(5,5); (6,6); (7,7)\}$

b) $V = \{(6,5); (7,6)\}$

c) $V = \{(6,5); (7,5); (7,6)\}$

d) $V = \{(5,6); (5,7); (6,7)\}$

3. Determinação de conjunto verdade.

$V = \{10,5\}$, para $U = Q \times Q$

4. Tradução para linguagem simbólica.

a) x^2

b) $x + y = 10$

c) $x = 5y$ ou $y = 5x$

d) $x - y = 30$

5. Resolução de sistema de equação do 1º grau.

$V = \{1,1\}$

6. Resolução de problema.

- Preço da bicicleta: Cr$ 480,00
- Preço do velocípede: Cr$ 160,00

7. Determinação dos números.

Os números são 5 e 8.

ORIENT. DA APRENDIZAGEM LOCAL

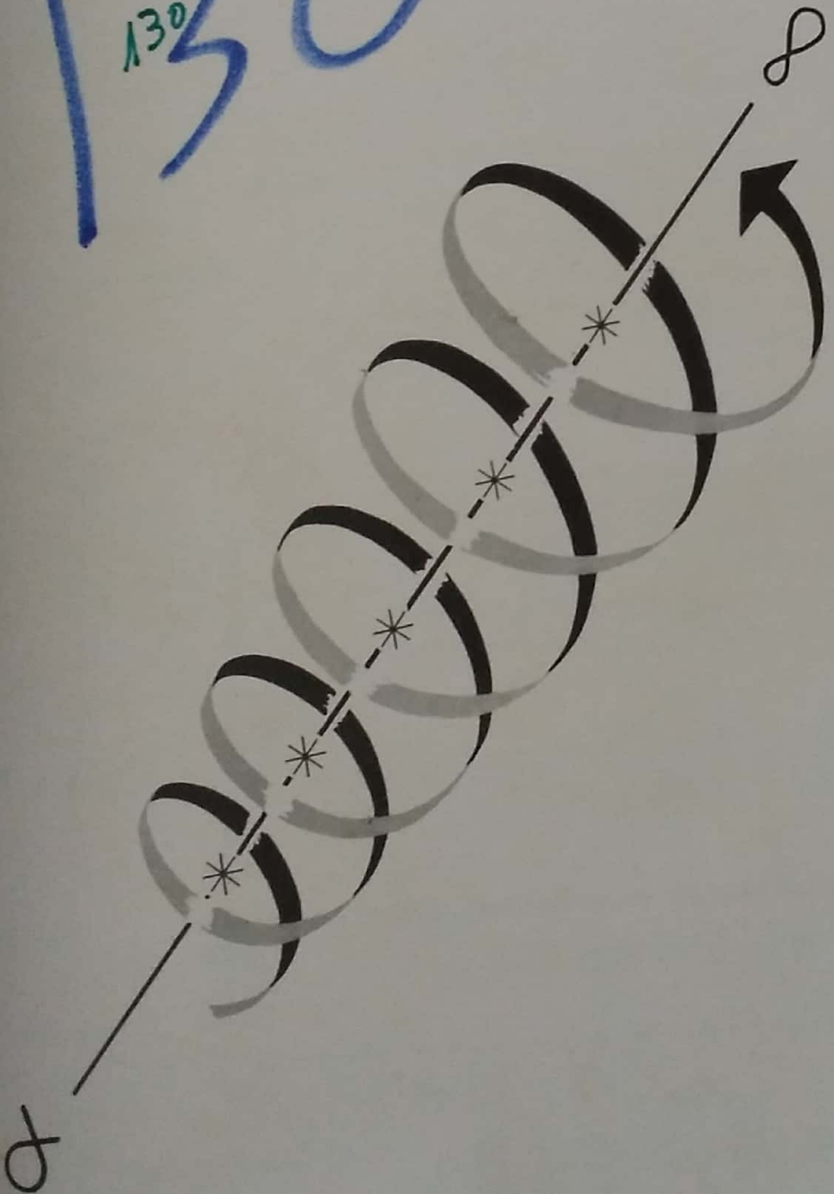
PROJETO HAPRONT:
Habilitação do Professor Não Titulado

MEC – DEF
SEEC – CETEPAR

PROJETO HAPRONT

130

130



ESTADO DO PARANÁ

GOVERNO JAYME CANET JUNIOR

SECRETARIO DE ESTADO DA EDUCAÇÃO E DA CULTURA

PROFESSOR FRANCISCO BORSARI NETTO

CENTRO DE TREINAMENTO DO MAGISTÉRIO DO ESTADO DO PARANÁ

CETEPAR

Projeto "HAPRONT"

APRESENTAÇÃO

O Departamento de Ensino Fundamental do Ministério da Educação e Cultura tem como um dos seus objetivos prioritários, a implantação de uma política global de desenvolvimento de recursos humanos, através da qual pretende assegurar a melhoria da produtividade dos sistemas de ensino.

Nesse sentido, está promovendo a experimentação de um modelo curricular de habilitação de professores que se constitui em um instrumento de busca de melhores padrões para a formação profissional. Em resposta a uma realidade que desafia os meios do ensino convencionais, esse modelo adota uma metodologia de educação à distância, sendo veiculado por uma série de 250 módulos de ensino. Este é um dos módulos dessa série.

Cada módulo é uma unidade composta de:objetivos, pré-teste, procedimentos e atividades básicas, pós-teste; procedimentos e atividades de suporte, pós-teste;procedimentos e atividades de enriquecimento.

Os módulos são encaminhados aos professores - cursistas para serem estudados em seus locais de trabalho. Por esse processo deverão ser habilitados a nível de 2º grau, professores não titulados em exercício em classes de 1ª a 4ª séries.

SUBPROJETO 13.1 do Plano Setorial de Educação e Cultura 75/79: CAPACITAÇÃO DE RECURSOS HUMANOS para o Ensino de 1º grau - Código Orçamentário 4502.08.42.217.2.023.

O projeto está sendo executado pela Secretaria de Estado da Educação e Cultura do Paraná, através do Cetepar, com o nome de Projeto "HAPRONT" (Habilitação de Professores não titulados), em 11 municípios, atingindo 1.100 professores não titulados.

Os resultados alcançados nesta etapa permitirão, num futuro próximo, subsidiar outras U.F. na organização de cursos de habilitação pelo mesmo processo.

CIÊNCIAS

LINGUAGEM SIMBÓLICA

MÓDULO Nº 130

ELABORAÇÃO:

CLÉLIA TAVARES MARTINS
ROSA KASUKO MIYASAKI

TÍTULO - LINGUAGEM SIMBÓLICA

I - ASSUNTO: EQUAÇÃO DO 2º GRAU, COMPLETA E INCOMPLETA. FÓRMULA RESOLUTIVA DE BHASKARA. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SIMPLES.

II - MATÉRIA: CIÊNCIAS.

DISCIPLINA: MATEMÁTICA

III - PRÉ-REQUISITOS: TER DOMINADO O CONTEÚDO DOS MODÚLOS 82, 104, 105 E 106.

IV - OBJETIVOS:

OBJETIVO GERAL

Utilizar corretamente a simbologia matemática.

OBJETIVO TERMINAL

Resolver problemas envolvendo equações do 2º grau.

OBJETIVOS OPERACIONALIZADOS

AO FINAL DO ESTUDO DESTE MÓDULO O CURSISTA DEVERÁ SER CAPAZ DE:

1. Identificar equações completas e incompletas do 2º grau;
2. Estabelecer correspondência entre linguagem simbólica e linguagem corrente;
3. Resolver equações completas e incompletas do 2º grau;
4. Solucionar problemas simples, aplicando equações de 2º grau.

V - PRÉ-TESTE

Antes de principiar o estudo do presente módulo é preciso que você se submeta ao teste abaixo. Se errar alguma questão, terá que estudá-lo integralmente e com muito empenho. Se acertar todas as questões, leia-o também, pois nunca é demais ampliar ou confirmar seus conhecimentos.

Com muita atenção, dê as respostas às perguntas formuladas no pré-teste que segue.

E bom êxito neste seu trabalho!

1. ASSINALE, ENTRE AS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS SEGUINTES, AS QUE SÃO EQUAÇÕES DO 2º GRAU:

( ) $x^2 - 4 = 0$

( ) $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$

( ) $4^2 - 8 = 8$

( ) $6x - x = 2$

( ) $x^2 + x + 10 = 0$

2. RESOLVA A EQUAÇÃO $5x^2 = 0$, COM $U = R$.

3. DETERMINE O CONJUNTO VERDADE DE $x^2 - 16 = 0$, SENDO $U = R$.

4. RESOLVA A EQUAÇÃO $x^2 - 2x = 0$, SENDO $U = R$.

5. RESOLVA A EQUAÇÃO $x^2 + x - 12 = 0$, SENDO $U = R$.

6. RESOLVA O SEGUINTE PROBLEMA:

- A soma do quadrado de um número com seu dobro vale três.

QUAL É ESSE NÚMERO ?

7. ESTABELEÇA, ABAIXO, A CORRESPONDÊNCIA ENTRE LINGUAGEM CORRENTE E LINGUAGEM SIMBÓLICA DA MATEMÁTICA:

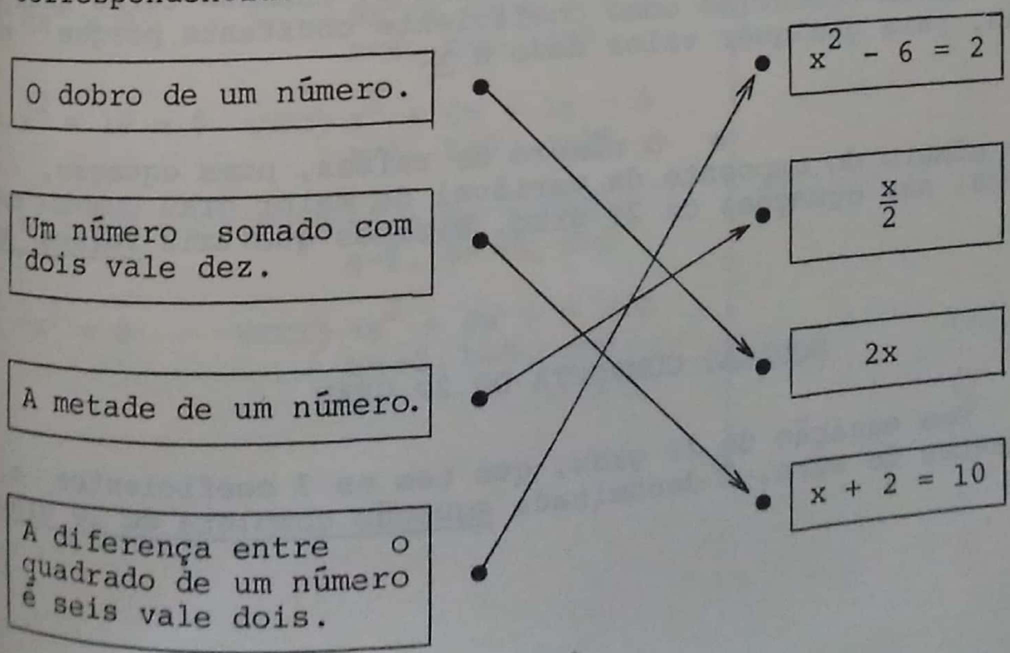
O dobro de um número.	$x^2 - 6 = 2$
Um número somado com dois vale dez.	$\frac{x}{2}$
A metade de um número.	$2x$
A diferença entre o quadrado de um número e seis vale dois.	$x + 2 = 10$

GABARITO DO PRÉ-TESTE

1. (x) $x^2 - 4 = 0$

   (x) $x^2 + x + 10 = 0$

2. $V = \{0\}$
3. $V = \{4, -4\}$ ou $V = \{\pm 4\}$.
4. $V = \{0, 2\}$.
5. $V = \{3, -4\}$.
6. O número é 1 ou -3
7. Correspondência.



VII - PROCEDIMENTOS E ATIVIDADES

EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Você já conhece equação do 1º grau e aprendeu a achar seu conjunto verdade. Passemos, agora, ao estudo de equação do 2º grau.

EQUAÇÃO DO 2º GRAU. - Equação do 2º grau com uma variável é toda aquela equação da forma $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$, em que:

1º) x é variável;
2º) o maior expoente da variável é 2;
3º) a,b,c são números reais, ou seja, $a \in R$, $b \in R$, $c \in R$ e são chamados coeficientes;
4º) $a \neq 0$.

Destaquemos, por exemplo, os coeficientes de $2x^2 + 5x - 8 = 0$. Nesta equação, a variável é x e os coeficientes são:

$a = 2$ (a é coeficiente de x^2);
$b = 5$ (b é coeficiente de x);
$c = -8$ (c é o termo independente).

Observação - • O coeficiente a deve ser diferente de zero, pois para a=0, a equação não seria mais do 2º grau e sim do 1º grau, isto porque desapareceria o termo x^2.

Exemplifiquemos: $0x^2 - 6x - 3 = 0$

$0x^2 = 0$, logo a equação se reduz a $6x - 3 = 0$, que é uma equação do 1º grau.

• O coeficiente c, chamado termo independente, é também conhecido como coeficiente constante porque ele não varia, para qualquer valor dado a x.

• O número de raízes, numa equação, é igual ao número do expoente da variável de maior grau. Quando existem raízes, nas equações de 2º grau, dizemos que tais raízes são duplas.

EQUAÇÃO COMPLETA DO 2º GRAU

Uma equação do 2º grau, que tem os 3 coeficientes a,b, c, diferentes de zero, é denominada equação completa do 2º grau.

Exemplos:

1º) $2x^2 + 2x + 3 = 3$
A variável é $\underline{x}$ e os coeficientes de a=2, b=2, c=3

2º $x^2 - 2x + 8 = 0$
A variável é $\underline{y}$ e os coeficientes de a=1, b=-2,c=8

3º) $y^2 + 2y - 5 = 0$
A variável é $\underline{y}$ e os coeficientes de a=1, b=2, c= -5

4º) $-x^2 + 3x + 6 = 0$
A variável é $\underline{x}$ e os coeficientes de a= -1, b=3, c=6

5º) $-2t^2 - 6t - 1 = 0$
A variável é $\underline{t}$ e os coeficientes de a= -2, b= -6, e c=-1

Equações Completas.

EQUAÇÃO INCOMPLETA DO 2º GRAU

Se pelo menos um dos coeficientes $\underline{b}$ ou $\underline{c}$ for nulo, ou $\underline{b}$ e $\underline{c}$ forem nulos, a equação do 2º grau é denominada incompleta.

Exemplos:

1º) $2x^2 - 8 = 0 \iff 2x^2 + 0x - 8 = 0$
a=2, b=0, c= -8

2º) $6x^2 - 2x = 0 \iff 6x^2 - 2x + 0 = 0$
a=6, b= -2, c=0

3º) $-7x^2 - 1 = 0 \iff -7x^2 + 0x - 1 = 0$
a=7, b=0, c= -1

4º) $8x^2 = 0 \iff 8x^2 + 0x + 0 = 0$
a=8, b=0, c=0

5º) $x^2 + 16 = 0 \iff x^2 + 0x + 16 = 0$
a=1, b=0, c=16

6º) $x^2 - 5x = 0 \iff x^2 - 5x + 0=0$
a=1, b= -5, c=0

7º) $-x^2 = 0 \iff -x^2 + 0x + 0 = 0$
a= -1, b=0, c=0

Equações incompletas.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Exercício 1.

PREENCHA AS LACUNAS DAS SENTENÇAS ABAIXO, ESCREVENDO AS PALAVRAS "COMPLETA" OU "INCOMPLETA", E DESTAQUE OS COEFICIENTES DAS EQUAÇÕES DO 2º GRAU.

a) $x^2 + 3x + 6 = 0$ é uma equação ____________ onde a=____, b=____, c=____

b) $2y^2 - 3y + 1 = 0$ é uma equação ____________ onde a=____, b=____, c=____

c) $x^2 - 10x = 0$ é uma equação ____________ onde a=____, b=____, c=____

d) $5x^2 = 0$ é uma equação ____________ onde a=____, b=____, c=____

e) $x^2 + 8 = 0$ é uma equação ____________ onde a=____, b=____, c=____

f) $x^2 - x - 1 = 0$ é uma equação ____________ onde a=____, b=____, c=____

g) $-6x^2 - 4x + 2 = 0$ é uma equação ____________ onde a=____, b=____, c=____

h) $-3x^2 + 27 = 0$ é uma equação ____________ onde a=____, b=____, c=____

Exercício 2.

COMPLETE AS LACUNAS, ESCREVENDO OS COEFICIENTES DAS SEGUINTES EQUAÇÕES DO 2º GRAU:

a) $-7x^2 = 0$ a= __________, b= __________, c= __________

b) $3x^2 - 15x = 0$ a= __________, b= __________, c= __________

c) $3x^2 - 27 = 0$ a= __________, b= __________, c= __________

d) $-x^2 + x - 6 = 0$ a= __________, b= __________, c= __________

e) $5x^2 + 3x - 1 = 0$ a= __________, b= __________, c= __________

f) $x^2 - 7x - 3 = 0$ a= __________, b= __________, c= __________

g) $x^2 = 0$ a= __________, b= __________, c= __________

h) $-x^2 - 18 = 0$ a= __________, b= __________, c= __________

Exercício 3.

PREENCHA AS LACUNAS:

a) Numa sentença aberta, as letras x,y,z representam as ______________________.

b) Em $x^2 - 4x - 1 = 0$, a variável é ________________

c) Em $t^2 - 9 = 0$, a variável é ________________

d) Em $y^2 + 6y = 0$, a variável é ________________

e) Em $12x^2 = 0$, a variável é ________________

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES INCOMPLETAS E COMPLETAS DO 2º GRAU

Resolver uma equação é determinar o conjunto verdade desta equação, ou melhor, é achar os valores das variáveis que tornam a igualdade verdadeira. Esses valores, como você já sabe, são conhecidos como <u>soluções</u> ou <u>raízes da equação</u>.

I) RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES INCOMPLETAS DO 2º GRAU

A) <u>Equações do tipo $ax^2 = 0$ (isto é, b=0 e c=0)</u>.

Seja a equação $6x^2 = 0$, com $U = \mathbb{R}$.

Destacando os coeficientes, temos:

$a=6, \quad b=0, \quad c=0$

Como <u>b</u> e <u>c</u> são iguais a zero, a equação é <u>incompleta</u>. Logo, aplicamos a seguinte técnica:

$$6x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{0}{6} \longrightarrow \text{Dividimos por 6.}$$

$$x^2 = 0$$

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{0} \longrightarrow \text{Extraímos a raiz quadrada dos dois membros.}$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0 \iff V = \{0\}$$

<u>Verificação</u>. Para tirar a prova, substituimos a variável <u>x</u> da equação $6x^2 = 0$, pela raiz obtida.

Vejamos:

$$6x^2 = 0$$

$$6.0^2 \overset{?}{=} 0 \longrightarrow \text{O ponto de interrogação, sobre o sinal de igualdade, indica que ainda não temos certeza da existência da igualdade.}$$

$$6.0 \overset{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \longrightarrow \text{A igualdade é verdadeira, logo, zero é a raiz da equação.}$$

<u>NOTA</u> - Uma equação, do tipo $ax^2 = 0$, tem <u>sempre</u> uma <u>raiz dupla</u> igual a zero. (O expoente da variável é 2).

Exercício 4.

OBSERVE A EQUAÇÃO RESOLVIDA ABAIXO E, EM SEGUIDA, DETERMINE AS RAÍZES DAS DEMAIS EQUAÇÕES DO 2º GRAU, SENDO $U = \mathbb{R}$:

Equação resolvida.

$$10x^2 = 0$$
$$x^2 = \frac{0}{10}$$
$$x^2 = 0$$
$$x = 0 \Longleftrightarrow V = \{0\}$$

a) $8x^2 = 0$

b) $15x^2 = 0$

c) $3x^2 = 0$

d) $7x^2 = 0$

B) Equações do tipo $ax^2 + c = 0$ (isto é, $b=0$).

- Seja a equação $4x^2 - 36 = 0$, para $U = \mathbb{R}$.

Resolução. Destacando os coeficientes, temos:

$$a=4, \quad b=0, \quad c=-36$$

Como o coeficiente b é nulo, aplicamos a seguinte técnica para a determinação das raízes:

$$4x^2 - 36 = 0$$
$$4x^2 = 0 + 36$$ Transpusemos −36 para 2º membro. Portanto:

$$4x^2 = 36$$

$$x^2 = \frac{36}{4} \longrightarrow$$ Dividimos por 4.

$$x^2 = 9$$

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{9} \longrightarrow$$ Extraímos a raiz quadrada dos dois membros.

$$x = \pm 3 \longrightarrow$$ As raízes são $x' = 3$ e $x'' = -3$

Logo, $V = \{\pm 3\}$ ou $V = \{3, -3\}$

<u>Verificação</u>. Para tirar a prova, substituímos a variável $\underline{x}$ pelos valores obtidos (± 3)

$$4x^2 - 36 = 0$$

$\boxed{\text{Raiz } 3} \longrightarrow$

$$4.3^2 - 36 \stackrel{?}{=} 0$$

$$4.9 - 36 \stackrel{?}{=} 0$$

$$36 - 36 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0$$ (igualdade verdadeira).

$$4x^2 - 36 = 0$$

$\boxed{\text{Raiz } -3} \longrightarrow$

$$4.(-3)^2 - 36 \stackrel{?}{=} 0$$

$$4.9 - 36 \stackrel{?}{=} 0$$

$$36 - 36 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0$$ (igualdade verdadeira).

Logo, para a equação $4x^2 - 36 = 0$, existe solução em R. Ou, escrevendo simbolicamente, $\exists\, x', x'' \in R \mid 4x^2 - 36 = 0$

"Existe x', x'' pertencentes a R tal que se verifica a equação $4x^2 - 36 = 0$".

- Vejamos outro exemplo de equação do tipo $ax^2 - c = 0$.

  Seja a equação $x^2 + 4 = 0$, com $U = R$.

<u>Resolução</u>. $x^2 + 4 = 0$

$x^2 = 0 - 4 \longrightarrow$ Transpusemos o 4. Portanto:

$$x^2 = -4$$

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{-4} \longrightarrow$$ Extraímos a raiz quadrada dos dois membros.

$$x = \pm\sqrt{-4}$$

Logo, $V = \emptyset$ ou $V = \{\ \}$ isto é, conjunto verdade vazio porque a equação $x^2 + 4 = 0$ não admite solução em R.

Lembre-se de que não existe no conjunto dos números reais (R) raiz quadrada de número negativo.

Portanto, concluímos que: "não existem raízes reais tais que se verifique a equação $x^2 + 4 = 0$". Ou, escrevendo simbolicamente, $\nexists\ x', x'' \in R \mid x^2 + 4 = 0$.

Exercício 5.

OBSERVE A EQUAÇÃO RESOLVIDA ABAIXO E, EM SEGUIDA, RESOLVA AS DEMAIS EQUAÇÕES INCOMPLETAS DO 2º GRAU, SENDO $U = R$.

Equação resolvida: $x^2 - 25 = 0$

$$x^2 = 0 + 25$$

$$x^2 = 25$$

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{25}$$

$$x = \pm 5 \quad V = \{\pm 5\} \quad \text{ou} \quad V = \{5, -5\}.$$

a) $5x^2 - 45 = 0$

b) $x^2 + 7 = 0$

c) $6x^2 - 24 = 0$

d) $x^2 - 81 = 0$

Exercício 6.

OBSERVE A EQUAÇÃO RESOLVIDA ABAIXO E, EM SEGUIDA, RESOLVA E DISCUTA AS SOLUÇÕES NAS DEMAIS EQUAÇÕES DO 2º GRAU, SENDO U = R :

Equação resolvida:

$$2x^2 + 72 = 0$$
$$2x^2 = 0 - 72$$
$$x^2 = \frac{-72}{2}$$
$$x^2 = -36$$
$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{-36} \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{-36}$$

Discussão: Como $x \notin R$, $V = \emptyset$ ou $V = \{\ \}$.

$$\nexists\, x', x'' \in R \mid 2x^2 + 72 = 0$$

NOTA- DISCUTIR quer dizer examinar se o valor encontrado para x' e x" pertence ao universo pedido, satisfazendo, assim, a equação dada.

a) $3x^2 - 12 = 0$

Resolução:

Discussão: Podemos dizer que para a equação $3x^2 - 12 = 0$ ____________________ solução em R.
(existe; não existe)

Ou: ( ) $\exists\, x', x'' \in R \mid 3x^2 - 12 = 0$

( ) $\nexists\, x', x'' \in R \mid 3x^2 - 12 = 0$

b) $x^2 + 9 = 0$

Resolução:

------------------------------	------------------------------
------------------------------	------------------------------
------------------------------	------------------------------
------------------------------	------------------------------

Discussão: ---

----

c) $7x^2 - 28 = 0$

Resolução:

____________________ | ____________________

____________________ | ____________________

____________________ | ____________________

____________________ | ____________________

Discussão: ______________________________________

____

____

d) $4x^2 + 64 = 0$

Resolução:

____________________ | ____________________

____________________ | ____________________

____________________ | ____________________

____________________ | ____________________

Discussão: Podemos dizer que para a equação $4x^2 + 64 = 0$ ____________________ solução em R.

(existe; não existe)

Ou: ( ) $\exists\ x', x'' \in R \mid 4x^2 + 64 = 0.$

( ) $\nexists\ x', x'' \in R \mid 4x^2 + 64 = 0.$

C) <u>Equações do tipo $ax^2 + bx = 0$ (isto é, $c=0$)</u>.

Seja a equação $x^2 - 7x = 0$, para $U = R$.

<u>Resolução</u>. Destacando os coeficientes, temos:

$(a=1,\quad b=-7,\quad c=0)$

Observamos que o coeficiente <u>c</u> é igual a zero. Também notamos, na equação, que o seu 1º membro possui um fator comum, <u>x</u>.

Portanto, colocando-o em evidência, temos:

$$x^2 - 7x = 0 \Longleftrightarrow \underbrace{x}_{1º\ \text{fator}}\ \underbrace{(x - 7)}_{2º\ \text{fator}} = 0$$

Para que este produto de dois fatores seja nulo, um dos fatores deve ser nulo. Então:

- o 1º fator deve ser igual a zero $\longrightarrow$ $x = 0$; ou
- o 2º fator deve ser igual a zero $\longrightarrow$ $x - 7 = 0$

A equação $x = 0$ já nos oferece a primeira raiz que é o zero.

A equação $x - 7 = 0$ é uma equação do 1º grau. Logo,

$x - 7 = 0$

$x = 0 + 7$ $\longrightarrow$ Transpusemos o -7 para o 2º membro.

$x = 7$ $\longrightarrow$ Segunda raiz.

e $V = \{0, 7\}$

<u>Verificação</u>. Para tirar a prova, substituimos a variável <u>x</u> da equação $x^2 - 7x = 0$ pelas raízes 0 ou 7.

Vejamos:

$$x^2 - 7 = 0$$

$\boxed{\text{raiz } 0} \longrightarrow$

$$0^2 - 7.0 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 - 0 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \quad \text{(igualdade verdadeira)}$$

$$x^2 - 7x = 0$$

$\boxed{\text{raiz } 7} \longrightarrow$

$$7^2 - 7.7 \stackrel{?}{=} 0$$

$$49 - 49 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \quad \text{(igualdade verdadeira).}$$

<u>Discussão</u>.

Então, você pode dizer: $\exists\, x', x'' \in R \mid x^2 - 7x = 0$.

- Vejamos outro exemplo de equação do tipo $ax^2 + bx = 0$

Seja a equação $3x^2 + 15x = 0$, para $U = R$.

<u>Resolução</u>. Colocando em evidência o fator comum, $3x$, temos:

$$3x\,(x + 5) = 0$$

O produto será nulo quando:

a) $3x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{0}{3}$ ⟶ Dividimos por 3.

$x = 0$ ⟶ 1º valor de $\underline{x}$.

b) $x + 5 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 - 5$ ⟶ Transpusemos o 5.

$x = -5$ ⟶ 2º valor de $\underline{x}$.

Logo, $V = \{0, -5\}$

<u>Verificação</u>. Tiramos a prova, substituindo a variável $\underline{x}$ pelas raízes obtidas.

$\boxed{\text{raiz } 0}$

$$\begin{aligned} 3x^2 + 15x &= 0 \\ 3.0^2 + 15.0 &\overset{?}{=} 0 \\ 3.0 + 0 &\overset{?}{=} 0 \\ 0 + 0 &\overset{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

(igualdade verdadeira).

$\boxed{\text{raiz } -5}$

$$\begin{aligned} 3x^2 + 15x &= 0 \\ 3.(-5)^2 + 15.(-5) &\overset{?}{=} 0 \\ 3.25 - 75 &\overset{?}{=} 0 \\ 75 - 75 &\overset{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

(igualdade verificada).

<u>Discussão</u>. Então você pode escrever.

$$\exists\, x', x'' \in R \mid 3x^2 - 15x = 0$$

<u>Exercício 7</u>.

OBSERVE A EQUAÇÃO RESOLVIDA ABAIXO E, EM SEGUIDA, RESOLVA AS DEMAIS EQUAÇÕES INCOMPLETAS DO 2º GRAU, SENDO $U = R$.

Equação resolvida. $5x^2 - 45x = 0$

$5x(x - 9) = 0$

$5x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{0}{5} \Longleftrightarrow x = 0$

$x - 9 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 + 9 \Longleftrightarrow x = 9$

Logo, $V = \{0, 9\}$

a) $x^2 - 4x = 0$

b) $8x^2 + 16x = 0$

c) $6x^2 - 12x = 0$

d) $x^2 + 10x = 0$

Exercício 8.

DETERMINE E DISCUTA O CONJUNTO VERDADE DAS EQUAÇÕES ABAIXO, TENDO POR MODELO A "EQUAÇÃO RESOLVIDA".

Equação resolvida: $7x^2 + 11x = 0$

$x(7x + 11) = 0$

$\boxed{x = 0}$

$$7x + 11 = 0 \iff 7x = 0 - 11$$

$$7x = -11$$

$$\boxed{x = -\frac{11}{7}}$$

Logo, $V = \left\{ 0 , -\frac{11}{7} \right\}$

Discussão. Como $0 \in R$ e $\frac{-11}{7} \in R$, podemos escrever:

$$\exists\, x', x'' \in R \mid 7x^2 - 11x = 0$$

a) $2x^2 - 6x = 0$

b) $5x^2 + 9x = 0$

c) $x^2 - 3x = 0$

d) $3x^2 + 4x = 0$

Observação - Para consolidar os seus conhecimentos sobre equações incompletas do 2º grau, procure resolver outros exercícios, extraídos de livros modernos de matemática.

II) RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES COMPLETAS DO 2º GRAU

Você já estudou equações do tipo x-4 ou x-1. Lembra-se ? São equações do 1º grau.

Passemos, agora, à resolução da equação $(x-4)(x-1)=0$.

Sabemos que um produto é igual a zero, se pelo menos um dos fatores é igual a zero. Ou seja:

$$x - 4 = 0 \longrightarrow x = 0 + 4 \longrightarrow x = 4$$

ou

$$x - 1 = 0 \longrightarrow x = 0 + 1 \longrightarrow x = 1$$

Logo, o conjunto verdade da equação $(x-4)(x-1) = 0$ é,

$$V = \{1, 4\}$$

Vejamos o que sucede quando multiplicamos $(x-4)$ por $(x-1)$:

$$\begin{array}{r} x - 4 \\ x - 1 \\ \hline x^2 - 4x \quad\quad \\ - x + 4 \\ \hline x^2 - 5x + 4 \end{array}$$

$(x-4)(x-1) = x^2 - 5x + 4.$

Como $(x-4)(x-1)$ é igual a zero, $x^2 - 5x + 4$ também é igual a zero. Logo, $x^2 - 5x + 4$ é uma equação do 2º grau, completa.

Para resolver uma equação do 2º grau basta, como vimos, escrever a equação como um produto de binômios do 1º grau.

Como nem sempre é fácil descobrir os binômios que formam a equação do 2º grau, aplicamos uma fórmula que nos permite achar os valores que formam os binômios do 1º grau. Trata-se da fórmula de Bhaskara ou fórmula geral, que assim se escreve:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$$

Desta fórmula resultam duas raízes que denominamos x' (x linha) e x'' (x duas linhas). Vejamos:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

x' e x'' resultaram do desdobramento do sinal ± da fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A expressão $\boxed{b^2 - 4ac}$ chama-se discriminante e é representada pela letra grega $\triangle$, ou delta.

NOTA - Como o conhecimento da utilidade do discriminante $\triangle$ exige um estudo mais amplo de equações do 2º grau, você poderá completar esse aprendizado em livros atualizados de matemática, destinados à 8ª série do Ensino Fundamental.

EXEMPLOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES COMPLETAS DO 2º GRAU

- Seja a equação $x^2 + 4x + 3 = 0$, para $U = R$.

Resolução. Destacando os coeficientes a,b,c, temos:

$a = 1$; $b = 4$; $c = 3$

Substituindo os coeficientes destacados, na fórmula resolutiva, obtemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.3}}{2.1} \longrightarrow$$ Substituímos a,b,c.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \longrightarrow$$ Efetuamos as operações:

$4^2 = 4.4 = 16$

$4.1.3 = 12$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2}{2} \longrightarrow$$ Extraímos a raiz quadrada:

$\pm\sqrt{4} = \pm 2$

Vejamos agora as duas raízes da equação:

$$x' = \frac{-4 + 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{e}$$

$$x'' = \frac{-4 - 2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Como $x' \in R$ e $x'' \in R$, $V = \{-1, -3\}$

Verificação. Substituindo a variável x da equação

$x^2 - 4x - 3 = 0$ por -1 ou -3, resulta:

Raiz -1

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$
$$(-1)^2 + 4.(-1) + 3 \stackrel{?}{=} 0$$
$$1 - 4 + 3 \stackrel{?}{=} 0$$
$$4 - 4 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0$$ (igualdade verificada).

Raiz -3

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$
$$(-3)^2 + 4.(-3) + 3 \stackrel{?}{=} 0$$
$$9 - 12 + 3 \stackrel{?}{=} 0$$
$$12 - 12 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0$$ (igualdade verificada).

Então podemos dizer que:

$$\exists x', x'' \in R \mid x^2 + 4x + 3 = 0$$

Ou "existem raízes x', x'' pertencentes a R tais que se verifica a equação $x^2 + 4x + 3 = 0$".

- Seja a equação $2x^2 - 3x - 5 = 0$, com $U = R$.

  Resolução. Destacando os coeficientes, temos:

  $a = 2$; $b = -3$, $c = -5$

A fórmula é:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Portanto, substituindo a, b, c, na fórmula resolutiva, provém:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.2.(-5)}}{2.2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} \longrightarrow$$

Lembre-se de que:

$$\begin{cases} -(-3) = +3 \text{ ou } 3 \\ (-3)^2 = (-3).(-3) = 9 \\ -4.2(-5) = 40 \end{cases}$$

$$x = \frac{3 \pm 49}{4}$$

$$x = \frac{3 \pm 7}{4}$$

Portanto, $x' = \dfrac{3 + 7}{4} = \dfrac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{4}_{2}} = \dfrac{5}{2}$

$$\frac{3 - 7}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \rightarrow \frac{-4}{4} = -4 : 4 = -1$$

Como x' e x'' pertencem ao conjunto dos números reais,

$$V = \left\{ \frac{5}{2}, -1 \right\}$$

<u>Verificação</u>. Para $\underline{x} = \dfrac{5}{2}$, temos:

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$2.\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3.\left(\frac{5}{2}\right) - 5 \overset{?}{=} 0$$

$$\frac{2.25}{4} - \frac{15}{2} - 5 \overset{?}{=} 0$$

$$\frac{50}{4} - \frac{15}{2} - 5 \overset{?}{=} 0 \qquad \text{m.m.c.}(4,2,1) = 4$$

$$\frac{50}{4} - \frac{30}{4} - \frac{20}{4} \overset{?}{=} 0$$

$$\frac{50}{4} - \frac{50}{4} \overset{?}{=} 0$$

$0 = 0$ (Igualdade verdadeira).

Para $\underline{x} = -1$, provém:

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$2.(-1)^2 - 3.(-1) - 5 \stackrel{?}{=} 0$$

$$2.1 + 3 - 5 \stackrel{?}{=} 0$$

$$2 + 3 - 5 \stackrel{?}{=} 0$$

$$5 - 5 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{(Igualdade verdadeira).}$$

Concluímos que $\exists\, x', x'' \in R \mid 2x^2 - 3x - 5 = 0$

- Seja a equação $x^2 - x + 3 = 0$, com $U = R$.

<u>Resolução</u>. Destacando os coeficientes, temos:

$$a = 1, \qquad b = -1, \qquad c = 3$$

Substituindo esses coeficientes, na forma resolut<u>i</u>va, provém:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.3}}{2.1} \longrightarrow$$

Atenção !

$$\begin{cases} -(-1) = 1 \\ (-1)^2 = (-1).(-1) = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 12}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

<u>Discussão</u>. Observe que não existe no conjunto dos n<u>ú</u>meros reais (R) raiz quadrada de número n<u>e</u>gativo $(\sqrt{-11})$.

Assim, a equação $x^2 - x + 3 = 0$ <u>não tem solução</u> em R, ou seja, <u>é impossível</u> em R. Por isso, paramos a resolução e concluímos que o conjunto verdade é vazio em R. $V = \emptyset$ ou $V = \{\ \}$.

Logo, $\nexists\, x', x'' \in R \quad x^2 - x - 3 = 0$

Digitalizado com CamScanner

Exercício 9.

ATENTE PARA A "EQUAÇÃO RESOLVIDA" E, EM SEGUIDA, DETERMINE CONJUNTO VERDADE DAS DEMAIS, SENDO $U = \mathbb{R}$. 0

Equação resolvida:

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$a=1$, $b=+4$ ou 4, $c= 4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.4}}{2.1}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 0}{2}$$

$$x' = \frac{-4 + 0}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x'' = \frac{-4 - 0}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Como x' é igual a x'', dizemos que $V = \{-2\}$.

RESOLVA, AGORA, AS SEGUINTES EQUAÇÕES, COM $U = \mathbb{R}$.

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$

b) $x^2 - 7x + 12 = 0$

c) $x^2 + x - 2 = 0$

d) $x^2 - 4x + 3 = 0$

e) $4x^2 - 5x + 6 = 0$

f) $x^2 - x - 20 = 0$

g) $2x^2 + 7x + 3 = 0$

Exercício 10:

ASSINALE, ABAIXO, A ALTERNATIVA CORRETA, DEPOIS PREENCHA AS LACUNAS, E POR ÚLTIMO MARQUE A REPRESENTAÇÃO SIMBÓLICA CORRESPONDENTE:

a) A equação $x^2 - x - 6 = 0$, tem como raízes:

( ) $-3, -2$ ( ) $-3, 2$ ( ) $3, -2$

( ) $3, -3$ ( ) $6, 1$

Portanto, para tal equação ____________________ solução em R.
(existe; não existe)

Logo, podemos dizer:

( ) $\exists\ x', x'' \in R \mid x^2 - x - 6 = 0$

( ) $\nexists\ x', x'' \in R \mid x^2 - x - 6 = 0$

b) O conjunto verdade da equação $x^2 - 4x + 5 = 0$ é:

( ) $V = \{-1, -3\}$ ( ) $V = \{-1, 3\}$ ( ) $V = \{3, -3\}$

( ) $V = \{\ \}$ ( ) $V = \{0\}$

Assim sendo, para essa equação ________________ solução em R.
(existe; não existe)

Então podemos dizer:

( ) $\exists\ x', x'' \in R \mid x^2 - 4x + 5 = 0$

( ) $\nexists\ x', x'' \in R \mid x^2 - 4x + 5 = 0$

c) O conjunto verdade da equação $x^2 + 6x + 9 = 0$ é:

( ) $V = \{-3, +3\}$ ( ) $V = \{3\}$ ( ) $V = \{-3, 1\}$

( ) $V = \{\ \}$ ( ) $V = \{-3\}$

Assim, para tal equação ____________________ solução em R,
(existe; não existe)

com raiz dupla igual a ______________________________

Então podemos dizer:

( ) $\exists\ x', x'' \in R \mid x^2 + 6x + 9 = 0$

( ) $\nexists\ x', x'' \in R \mid x^2 + 6x + 9 = 0$

NOTA - Se você tiver dúvidas na resolução das questões dadas, examine os "exercícios resolvidos" das páginas anteriores.

Exercício 11.

OBSERVE ABAIXO, A "EQUAÇÃO SOLUCIONADA" E RESOLVA AS QUE SEGUEM, SENDO $U = \mathbb{R}$.

Equação resolvida: $x^2 - 3x = -2$

O termo independente está no 2º membro. Ora, basta transpor -2 para o 1º membro e teremos uma equação na forma conhecida $(ax^2 + bx + c = 0)$. Vejamos:

$$x^2 - 3x = -2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Pronto! Agora é só resolver a equação.

$a=1, \quad b=-3, \quad c=2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.2}}{2.1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x' = \frac{3 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x'' = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Como as raízes 1 e 2 pertencem ao conjunto dos números reais,

$$V = \{1, 2\}$$

RESOLVA, AGORA, AS SEGUINTES EQUAÇÕES, COM $U = \mathbb{R}$.

a) $x^2 - 7x = -10$

b) $x^2 + x = 12$

PROBLEMAS DO 2º GRAU

Antes de tratarmos de "Problemas do 2º Grau", recordemos um pouco do que você já estudou em "Problemas do 1º Grau".

Vejamos a tradução, para a linguagem simbólica, das seguintes expressões:

Em Linguagem Corrente.	Em Linguagem Simbólica.
- Um número. →	x
- O dobro de um número. →	$2x$
- O quadrado de um número. →	x^2
- O quadrado de um número mais dez. →	$x^2 + 10$
- A metade do quadrado de um número. →	$\frac{x^2}{2}$
- A quarta parte do quadrado de um número. →	$\frac{x^2}{4}$
- A diferença do quadrado de um número e o seu dobro é de oito. →	$x^2 - 2x = 8$
- A soma do quadrado de um número e seu triplo vale dez. →	$x^2 + 3x = 10$

Exercício 12.

TRADUZA, PARA A LINGUAGEM SIMBÓLICA DA MATEMÁTICA, O QUE ESTÁ ESCRITO EM LINGUAGEM CORRENTE.

a) Um número ao quadrado → ----------------

b) O triplo do quadrado de um número. → ----------------

c) A quinta parte do quadrado de um número. → ----------------

d) O quadrado de um número subtraído de dois é igual a sete. → ----------------

e) Um número somado com seu dobro. → ----------------

f) Um número somado com seu quadrado. → ----------------

g) O dobro de um número somado com cinco vale onze. → ----------------

h) O quadrado de um número somado com seu triplo. → ----------------

PROBLEMAS DO 2º GRAU

Todos os problemas que podem ser resolvidos com o auxílio de equações do 2º grau são chamados <u>problemas do 2º grau</u>.

Para resolver um problema do 2º grau, devemos:

- Traduzir o seu enunciado, da linguagem corrente para a linguagem simbólica da matemática.
- Resolver a equação;
- Interpretar as raízes obtidas, verificando se são soluções do problema.

Vejamos alguns exemplos de problemas do 2º grau.

- Problema I. - A SOMA DE UM NÚMERO COM O SEU QUADRADO É IGUAL A 20. QUE NÚMERO É ESSE ?

Tradução. Número $\longrightarrow x$

Quadrado do número $\longrightarrow x^2$

Equação $\longrightarrow x + x^2 = 20$

Resolução. Escrevendo a equação na forma $ax^2 + bx + c = 0$, temos:

$x + x^2 = 20$

$x^2 + x - 20 = 0 \longleftarrow$ Ordenamos $\underline{x}$ e $\underline{x}^2$ e transpomos 20 para o 1º membro.

$a=1, \quad b=1, \quad c=-20$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-20)}}{2.1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 9}{2}$$

$$x' = \frac{-1 + 9}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x'' = \frac{-1 - 9}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$V = \{4, -5\}$$

Verificação. Precisamos interpretar as duas raízes obtidas, porque elas podem ser ou não solução do problema. Tiremos a prova, substituindo as raízes encontradas na equação que traduz o problema.

$$x + x^2 = 20$$

$$4 \begin{cases} 4 + 4^2 \overset{?}{=} 20 \\ 4 + 16 \overset{?}{=} 20 \\ 20 = 20 \quad \text{(Igualdade verdadeira).} \end{cases}$$

$$-5 \begin{cases} x + x^2 = 20 \\ -5 + (-5)^2 \overset{?}{=} 20 \\ -5 + 25 \overset{?}{=} 20 \\ 20 \overset{?}{=} 20 \quad \text{(Igualdade verdadeira).} \end{cases}$$

Como vemos, o problema admite duas soluções, pois tanto 4 como -5 o satisfazem.

- Problema II - O QUADRADO DA IDADE DE MARTA, MENOS O QUÍNTUPLO DE SUA IDADE É IGUAL A 6. QUANTOS ANOS TEM MARTA ?

Tradução.
Idade de Marta $\longrightarrow x$
Quíntuplo da idade de Marta $\longrightarrow 5x$
Quadrado da idade de Marta $\longrightarrow x^2$
Equação $\longrightarrow x^2 - 5x = 6$

Resolução. $x^2 - 5x = 6$

$x^2 - 5x - 6 = 0 \longleftarrow$ Transpomos 6 para o 1º membro.

$a=1, \quad b=-5, \quad c=-6$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.(-6)}}{2.1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{5 + 7}{2} = \dfrac{12}{2} = 6 \\ x'' = \dfrac{5 - 7}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Verificação. Interpretando os resultados obtidos, 6 e -1, rejeitamos o valor -1 porque a idade de Marta não pode ser negativa. Então Marta tem 6 anos de idade. Tiremos a prova.

Substituindo o valor 6 na equação, temos:

$$x^2 - 5x = 6$$
$$6^2 - 5.6 \stackrel{?}{=} 6$$
$$36 - 30 \stackrel{?}{=} 6$$
$$6 = 6 \quad \text{(Igualdade verificada).}$$

• Problema III - A DIFERENÇA ENTRE O QUADRADO E O DOBRO DE UM MESMO NÚMERO É IGUAL A 8. QUE NÚMERO É ESSE ?

Tradução. - Um número → x
- Quadrado de um número → x^2
- Dobro de um número → $2x$
- Equação → $x^2 - 2x = 8$

Resolução. $x^2 - 2x = 8$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$a=1, \quad b=-2, \quad c=-8$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.(-8)}}{2.1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 6}{2}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2 + 6}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\[2ex] x'' = \dfrac{2 - 6}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Verificação. O problema dado admite duas soluções: 4 e -2. Verifiquemos.

- Substituindo os valores encontrados na equação, temos:

$$4 \quad \begin{cases} x^2 - 2x = 8 \\ 4^2 - 2.4 \overset{?}{=} 8 \\ 16 - 8 \overset{?}{=} 8 \\ 8 \overset{?}{=} 8 \end{cases}$$ (Igualdade verdadeira).

$$-2 \quad \begin{cases} x^2 - 2x = 8 \\ (-2)^2 - 2.(-2) \overset{?}{=} 8 \\ 4 + 4 \overset{?}{=} 8 \\ 8 \overset{?}{=} 8 \end{cases}$$ (Igualdade verdadeira).

Número procurado: 4 ou -2.

Exercício 13

RESOLVA OS PROBLEMAS QUE SEGUEM:

a) O QUADRADO DA IDADE DE PEDRO, SUBTRAÍDO DO DOBRO DE SUA IDADE, CORRESPONDE A 15 ANOS. QUAL É A IDADE DE PEDRO ?

Tradução. - Idade de Pedro → ------
- Quadrado da idade de Pedro → ------
- Dobro da idade de Pedro → ------
- Equação → ----------

Resolução. ----------------	----------------

Verificação. --------------------------------

----

b) QUAL É O NÚMERO CUJA SOMA DO SEU QUADRADO COM SEU TRIPLO EQUIVALE A 10 ?

Tradução. - Número ⟶ ---------
- Quadrado ⟶ ---------
- Triplo ⟶ ---------
- Equação ⟶ --------------------

Resolução. -------------------- | ------------------------------

Verificação. --

c) A SOMA DE UM NÚMERO COM O SEU QUADRADO EQUIVALE A 6. DETERMINE ESSE NÚMERO.

Tradução. - Número ⟶ --------
- Quadrado ⟶ --------
- Equação ⟶ --------------------

Resolução. -------------------- | ------------------------------

Verificação. --

VII - PÓS-TESTE

Certamente você está preparado para submeter-se ao presente Pós-Teste. Contudo se não se sente seguro disso, reveja a matéria estudada e se esforce por entendê-la integralmente.

Depois, leia com atenção as questões propostas e procure respondê-las sem medo de errar.

Boa sorte!

1. PREENCHA AS LACUNAS DAS SENTENÇAS ABAIXO, USANDO AS PALAVRAS "COMPLETA" OU "INCOMPLETA":

   a) $-x^2 - 8x - 12 = 0$ é uma equação --------- do 2º grau.

   b) $19x^2 = 0$ é uma equação --------- do 2º grau.

   c) $5x^2 - 8x = 0$ é uma equação --------- do 2º grau.

2. DESTAQUE OS COEFICIENTES DAS EQUAÇÕES DO 2º GRAU:

   a) $x^2 - 4x - 18 = 0$ a= --------, b= -------, c= -------

   b) $4x^2 - 2x = 0$ a= --------, b= -------, c= -------

   c) $x^2 - x + 3 = 0$ a= --------, b= -------, c= -------

3. DETERMINE AS SOLUÇÕES DAS SEGUINTES EQUAÇÕES DO 2º GRAU SENDO $U = \mathbb{R}$.

   a) $5x^2 - 45 = 0$

   b) $x^2 + 5x = 0$

4. DETERMINE O CONJUNTO VERDADE DAS EQUAÇÕES ABAIXO E FAÇA A VERIFICAÇÃO:

   a) $3x^2 + 7x = 0$

   ----

   b) $2x^2 - 18 = 0$

   ----

5. RESOLVA AS SEGUINTES EQUAÇÕES COMPLETAS DO 2º GRAU, COM $U = R$, APLICANDO A FÓRMULA RESOLUTIVA:

a) $x^2 - x + 3 = 0$

b) $x^2 + 5x + 4 = 0$

6. ASSINALE, ABAIXO, O CONJUNTO VERDADE; DEPOIS PREENCHA A LACUNA; E, POR ÚLTIMO, MARQUE A REPRESENTAÇÃO SIMBÓLICA CORRESPONDENTE:

- O conjunto verdade da equação $3x^2 - 7x + 2 = 0$ é:

( ) a) $\{0, 2\}$

( ) b) $\{3, 2\}$

( ) c) $\{2, \frac{1}{3}\}$

( ) d) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$

( ) e) A equação não tem raízes reais.

- Portanto, para tal equação ______________ solução em R.
(tem, não tem)

- Logo, podemos dizer:

( ) $\exists\ x', x'' \in R \mid 3x^2 - 7x - 2 = 0$

( ) $\nexists\ x', x'' \in R \mid 3x^2 - 7x - 2 = 0$

7. MÁRIO TEM UMA GAIOLA COM PÁSSAROS. A DIFERENÇA ENTRE O QUADRADO DO NÚMERO DE PÁSSAROS E SEU QUÁDRUPLO É IGUAL A 21. QUANTOS PÁSSAROS HÁ NA GAIOLA ?

Tradução. - Número de pássaros $\longrightarrow$ ________

- Quadrado do nº de pássaros $\longrightarrow$ ________

- Quádruplo do nº de pássaros $\longrightarrow$ ________

- Equação $\longrightarrow$ ____________

Resolução:

Discussão:

8. A SOMA DO QUADRADO DE UM NÚMERO COM O SEU DOBRO VALE TRÊS. QUE NÚMERO É ESSE ?

Tradução. - Um número → -------

- Quadrado → -------
- Dobro → -------
- Equação → -----------------

Resolução: | Discussão:

VIII - PROCEDIMENTOS E ATIVIDADES - NÍVEL DE SUPORTE

Se você não dominou bem o que estudou nas páginas anteriores, refaça os exercícios e problemas que achou de mais difícil solução e reexamine o conteúdo deste módulo.

No presente item faremos uma resenha do que já foi explanado aqui, tendo em vista ressaltar alguns pontos de maior interesse e apresentar mais alguns modelos de exercícios e problemas, para, com isso, ajudar-lhe a sanar suas dúvidas sobre a matéria.

Passemos, então, à recapitulação de equações do 2º grau.

EQUAÇÕES DO 2º GRAU - Certamente você deve ter concluído que as equações que estudamos são do 2º grau e com uma variável. E se apresentam na forma: $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, onde:

Variável $\underline{x}$

Maior expoente → 2

$$a x^{2} + b x - c = 0$$

Coeficientes $a, b, c \in R$

- As equações do 2º grau podem ser completas ou incompletas.

  São <u>completas</u> quando têm os coeficientes a,b,c;
  São <u>incompletas</u> quando <u>b</u> ou <u>c</u> for nulo, ou <u>b</u> ou <u>c</u> forem nulos.

- <u>Resolver uma equação</u> é a mesma coisa que "achar as raízes ou soluções, ou ainda, o conjunto verdade dessa equação.

- O conjunto verdade é determinado no conjunto dos números reais.
- Não existe nenhum número real que, elevado ao quadrado, seja igual a um número negativo. Logo, se debaixo do radical aparecer um número negativo, o conjunto verdade é vazio: $V = \emptyset$.
- Os recursos de cálculo utilizados para a resolução de equações do 1º grau são válidos para equações do 2º grau.

EQUAÇÕES COMPLETAS DO 2º GRAU - Nos exemplos que seguem, vamos destacar a variável e os coeficientes. Vejamos:

I) Variável $\underline{x}$	II) Variável $\underline{x}$	III) Variável $\underline{y}$
$\underset{a}{2x^2} + \underset{b}{6x} + \underset{c}{1} = 0$	$x^2 - 5x + 2 = 0$	$-y^2 + y - 3 = 0$
Coeficientes.	Coeficientes:	Coeficientes:
Portanto, $a=2,\ b=6,\ c=1$	$a=1,\ b=-5\quad c=2$	$a=-1,\ b=1,\ c=-3$

Observe que, por convenção, não escrevemos o sinal de adição (+) antes de números positivos.

Uma equação do 2º grau, é completa quando tem os três coeficientes: a, b, e c. Assim, são exemplos de equações completas do 2º grau:

$$2x^2 + 6x + 1 = 0 \quad ;$$
$$x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \text{e}$$
$$-y^2 + y - 3 = 0.$$

EQUAÇÕES INCOMPLETAS DO 2º GRAU - Uma equação do 2º grau é incompleta se, pelo menos, um dos coeficientes ou b ou c for nulo, ou se b e c forem nulos. Exemplifiquemos.

I) $x^2 - 25 = 0$	II) $y^2 - 6y = 0$	III) $13x^2 = 0$
Variável $\underline{x}$	Variável $\underline{y}$	Variável $\underline{x}$
Coeficientes:	Coeficientes:	Coeficientes:
$a=1,\ b=0,\ c=-25$	$a=1,\ b=-6,\ c=0$	$a=13,\ b=0,\ c=0$

COMO RESOLVER EQUAÇÕES DO 2º GRAU - Resolver uma equação é encontrar o seu conjunto verdade.

Para descobrir o conjunto verdade das equações incompletas, basta achar as raízes ou soluções, com o auxílio das técnicas já estudadas neste módulo.

Pois bem, releia com muita atenção a parte referente à Resolução de Equações Incompletas, no item VI, e refaça os exer *cícios ali propostos, para ter maior domínio da matéria.*

Para achar as raízes das equações <u>completas</u> do 2º grau, basta utilizar a <u>fórmula resolutiva</u>; técnica que vamos reexaminar, agora, no exemplo abaixo, em que a equação é armada e depois solucionada.

• Seja a equação $2x^2 - 3x - 5 = 0$, com $U = R$.

$a=2$, $b=-3$, $c=-5$ ⟶ Destacamos os coeficientes.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2a}$$ ⟶ Substituímos os coeficientes na fórmula.

Assim, disposta a equação, vamos procurar o conjunto verdade:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.2.(-5)}}{2.2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$x = \frac{3 \pm 7}{4} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{3+7}{4} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2} \\[2ex] x'' = \dfrac{3-7}{4} = \dfrac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

$$V = \left\{ \frac{5}{2}, -1 \right\}$$

<u>Detalhando</u>.

Como $-(-3)$ é igual a 3, $(-3)^2$ é igual a 9 e $-4.2.(-5)$ é igual a +40, temos que:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2.2}$$

Verificando.

$$2\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{5}{2}\right) - 5 \stackrel{?}{=} 0$$

$$2\left(\frac{25}{4}\right) - \left(\frac{15}{2}\right) - 5 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\frac{50}{4} - \frac{30}{4} - \frac{20}{4} \stackrel{?}{=} 0$$ (Igualdade verificada).

$$2(-1)^2 - 3(-1) - 5 \stackrel{?}{=} 0$$

$$2 + 3 - 5 \stackrel{?}{=} 0$$ (Igualdade verificada).

NOTA - Distinguindo os coeficientes da equação do 2º grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$, sendo $a \neq 0$, você poderá achar rapidamente as raízes das equações incompletas, aplicando estas fórmulas:

I) Para b e c iguais a zero:

$V = \{0\}$, isto é, raiz dupla, zero.

II) Para c igual a zero:

$V = \left\{0, \frac{-b}{a}\right\}$ uma raiz é sempre zero.

III) Para b igual a zero:

$V = \left\{-\sqrt{\frac{-c}{a}}\ ;\ +\sqrt{\frac{-c}{a}}\right\}$ as raízes são iguais, mas de sinais contrários.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Exercício 14.

RESOLVA AS SEGUINTES EQUAÇÕES INCOMPLETAS DO 2º GRAU, DO TIPO $\boxed{ax^2 = 0}$, cujo conjunto verdade é $\boxed{V = \{0\}}$:

a) $5y^2 = 0$

b) $3x^2 = 0$

c) $4z^2 = 0$

Equações do tipo $ax^2 + bx = 0$, cujo conjunto verdade é $V = \left\{0, \frac{-b}{a}\right\}$

d) $5x^2 - 125x = 0$

e) $5y^2 - y = 0$

f) $4x^2 - 16x = 0$

Equações do tipo $ax^2 + c = 0$, cujo conjunto verdade é

$$V = \left\{ -\sqrt{\frac{-c}{a}} \; ; \; +\sqrt{\frac{-c}{a}} \right\}$$

g) $y^2 - 9 = 0$

h) $4x^2 - 1 = 0$

i) $x^2 - 169 = 0$

Exercício 15.

APLIQUE A "FÓRMULA RESOLUTIVA DE BHASKARA" NAS SEGUINTES EQUAÇÕES COMPLETAS:

a) $6x^2 + 5x + 1 = 0$, $V = \left\{ -\frac{1}{3} , -\frac{1}{2} \right\}$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$, $V = \left\{ 3 , 2 \right\}$

c) $m^2 - m - 6 = 0$, $V = \{3, -2\}$

d) $x^2 + 12x + 36 = 0$, $V = \{-6\}$ raíz dupla.

Exercício 16.

RESOLVA OS SEGUINTES PROBLEMAS:

a) Qual o número natural cujo quadrado menos o seu triplo é igual a -2 ?

$V = \{2, 1\}$

b) Qual é o número que somando 10 ao dobro do seu quadrado equivale a doze vezes o seu valor ?

IX - PÓS-TESTE - NÍVEL DE SUPORTE

Cremos que a esta altura você já tem um completo conhecimento do conteúdo deste módulo.

Submeta-se, agora, ao presente Pós-Teste com o propósito de acertar pelo menos 80% das perguntas formuladas, pois esse resultado provará sua aptidão para o entendimento do módulo subseqüente.

Leia com atenção as questões abaixo e, em seguida, dê as respostas cabíveis.

1. DESTAQUE OS COEFICIENTES DAS SEGUINTES EQUAÇÕES DE 2º GRAU:

a) $5x^2 + 8x + 1 = 0$ a= ______; b= ______; c= ______

b) $-2x^2 + x - 10 = 0$ a= ______; b= ______; c= ______

c) $x^2 + 16 = 0$ a= ______; b= ______; c= ______

d) $4x^2 = 0$ a= ______; b= ______; c= ______

2. PREENCHA AS LACUNAS DAS SENTENÇAS ABAIXO, USANDO AS PALAVRAS "COMPLETA" E "INCOMPLETA":

a) $x^2 - 2x + 10 = 0$ é uma equação ______________ do 2º grau

b) $x^2 - 81 = 0$ é uma equação ______________ do 2º grau

c) $3x^2 = 0$ é uma equação ______________ do 2º grau

d) $2x^2 + x = 4$ é uma equação ______________ do 2º grau

3. DETERMINE O CONJUNTO VERDADE DAS SEGUINTES EQUAÇÕES DO 2º GRAU, SENDO $U = R$:

a) $11x^2 = 0$

c) $4x^2 + 28 = 0$

b) $x^2 - 49 = 0$

d) $3x^2 = 0$

4. DETERMINE O CONJUNTO VERDADE DAS EQUAÇÕES QUE SEGUEM E VERIFIQUE A VALIDADE DAS RESPOSTAS:

a) $x^2 + 16 = 32$

b) $5x^2 - 20 = 0$

5. APLIQUE A FÓRMULA DE BHASKARA PARA RESOLVER AS EQUAÇÕES:

a) $x^2 - 10x + 25 = 0$

b) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

6. ASSINALE A ALTERNATIVA CORRETA; DEPOIS PREENCHA A LACUNA; E POR ÚLTIMO MARQUE A REPRESENTAÇÃO SIMBÓLICA CORRESPONDENTE:

- O conjunto verdade da equação $x^2 + x + 3 = 0$ é:

( ) a) $\{-1 , 3\}$
( ) b) $\{3 , -3\}$
( ) c) $\{3 , 0\}$
( ) d) $\{1 , -1\}$
( ) e) a equação não tem raízes reais.

- Você pode dizer que $x^2 + x + 3 = 0$ ______________ (tem, não tem) solução em R. Portanto,

- ( ) $\exists\ x', x'' \in R \mid x^2 + x + 3 = 0$
( ) $\nexists\ x', x'' \in R \mid x^2 + x + 3 = 0$

7. RESOLVA O SEGUINTE PROBLEMA DE EQUAÇÃO DO 2º GRAU:

- A soma de um número com o seu quadrado é 90. Qual é esse número ?

I - Traduzindo: - um número → ----------
- quadrado do número → ----------
- a soma do número com seu quadrado → ----+----= 90
- equaçãc → ------------

II- Resolvendo:

------------------------	------------------------
------------------------	------------------------
------------------------	------------------------
------------------------	------------------------

III-Verificando:

------------------------	------------------------
------------------------	------------------------
------------------------	------------------------
------------------------	------------------------

8. RESOLVA O PROBLEMA ABAIXO:

- O quadrado de um número, mais o seu triplo, é igual a 40. Qual é esse número ?

I - Traduzindo: - um número → ----------
- quadrado do número → ----------
- triplo do número → ----------
- equação → ------------

II- Resolvendo:

------------------------	------------------------
------------------------	------------------------
------------------------	------------------------
------------------------	------------------------

III-Verificando:

------------------------	------------------------
------------------------	------------------------
------------------------	------------------------
------------------------	------------------------

X - ATIVIDADES DE ENRIQUECIMENTO

Trataremos, neste item, da resolução de algumas equações do 2º grau não apresentadas na forma normal.

Já vimos que a equação do 2º grau é aquela que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com a diferente de zero.

Esta forma é dita forma normal. Logo, todas as equações estudadas até agora estão na forma normal, como nestes exemplos de completas e incompletas:

$x^2 - 3x - 6 = 0$	$2x^2 - 18 = 0$
$4x^2 - 12x = 0$	$6x^2 = 0$

- As equações que não estiverem na forma normal devem ser transformadas, para depois serem resolvidas, como no exemplo que segue.

Seja a equação: $x^2 = 7x - 12$, com $U = R$.

Note que ela não está na forma normal. Então, transpondo $7x$ e -12 para o 1º termo, é transformada à forma normal.

$$x^2 = 7x - 12$$
$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

Pronto! Agora é só resolvê-la.

$a=1, \quad b=-7, \quad c=12$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.1.12}}{2.1}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{7+1}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\[2ex] x'' = \dfrac{7-1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

$$V = \{4, 3\}$$

Exercício 17.

Observe o modelo dado e procure resolver as seguintes equações, sendo $U = \mathbb{R}$.

a) $3x^2 - 20 = 7x$

b) $x^2 = -3x + 10$

c) $10x^2 = 100x$

d) $25x^2 = 16$

e) $3x^2 = -2x + 1$

- Como as equações c e d são incompletas, certamente você aplicará, para resolvê-las, o método que aprendeu. A fórmula resolutiva de Bhaskara pode também ser aplicada às equações incompletas.

I) $3x^2 - 9x = 0$

$a=3, \quad b=-9, \quad c=0$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4.3.0}}{2.3}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81}}{6}$$

$$x = \frac{9 \pm 9}{6} \quad \begin{cases} x' = \frac{18}{6} = 3 \\ x'' = \frac{0}{6} = 0 \end{cases}$$

$$V = \{3, 0\}$$

II) $25x^2 = 16$

$25x^2 - 16 = 0$

$a=25, \quad b=0, \quad c=-16$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4.25.-16}}{2.25}$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{1600}}{50}$$

$$x = \frac{\pm 40}{50} \quad \begin{cases} x' = +\frac{4}{5} \\ x'' = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$V = \left\{+\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}\right\}$$

- **Temos** ainda o caso do coeficiente a, negativo, como na equação $-3x^2 + 10x - 3 = 0$, com $U = \mathbb{R}$.

Quando o coeficiente a é negativo, convém torná-lo positivo, multiplicando toda a equação por -1, ou seja, trocando todos os sinais.

Então, $(-3x^2 + 10x - 3 = 0)(-1) = \quad 3x^2 - 10x + 3 = 0$

Daqui em diante é só aplicar a fórmula resolutiva.

$a = 3, \; b = -10, \; c = 3$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4.3.3}}{2.3}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6}$$

$$x = \frac{10 \pm 8}{6} \quad \begin{cases} x' = \frac{10 + 8}{6} = \frac{18}{6} = 3 \\ x'' = \frac{10 - 8}{6} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{6}} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$V = \left\{3, \frac{1}{3}\right\}$$

Exercício 18.

RESOLVA AS SEGUINTES EQUAÇÕES.

a) $-x^2 + 7x - 10 = 0$

b) $-x^2 + 6x - 5 = 0$

c) $-x^2 + 5x - 7 = 0$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

Exercício 1.

Preenchimento de lacunas.

a) ... completa a= 1, b= 3, c= 6
b) ... completa a= 2, b= -3, c= 1
c) ... incompleta a= 1, b=-10, c= 0
d) ... incompleta a= 5, b= 0, c= 0
e) ... incompleta a= 1, b= 0, c= 8
f) ... completa a= 1, b= -1, c=-1
g) ... completa a=-6, b= -4, c= 2
h) ... incompleta a=-3, b= 0, c=27

Exercício 2.

Preenchimento de lacunas.

a) a=-7, b= 0, c= 0
b) a= 3, b=-15, c= 0
c) a= 3, b= 0, c= -27
d) a=-1, b= 1, c= -6

e) $a=5,\quad b=3,\quad c=-1$
f) $a=1,\quad b=-7,\quad c=-3$
g) $a=1,\quad b=0,\quad c=0$
h) $a=-1,\quad b=0,\quad c=-18$

Exercício 3.

a) ...as variáveis
b) ...x
c) ...t
d) ...y
e) ... x

Exercício 4.

a) $V=\{0\}$
b) $V=\{0\}$
c) $V=\{0\}$
d) $V=\{0\}$

Nota - Raiz dupla igual a zero.

Exercício 5.

a) $V=\{\pm 3\}$
b) $V=\{\ \}$
c) $V=\{\pm 2\}$
d) $V=\{\pm 9\}$

Exercício 6.

a) $V=\{\pm 2\}$ Discussão: $\exists\ x', x'' \in R \mid 3x^2 - 12 = 0$
b) $V=\{\ \}$ Discussão: $\nexists\ x', x'' \in R \mid x^2 + 9 = 0$
c) $V=\{\pm 2\}$ Discussão: $\exists\ x', x'' \in R \mid 7x^2 - 28 = 0$
d) $V=\{\ \}$ Discussão: $\nexists\ x', x'' \in R \mid 4x^2 + 64 = 0$

Não existe solução para a equação.

Exercício 7.

a) $V=\{0, 4\}$
b) $V=\{0, -2\}$
c) $V=\{0, 2\}$
d) $V=\{0, -10\}$

Exercício 8.

a) $V=\{0, 3\}$ $\exists\ x', x'' \in R \mid 2x^2 - 6x = 0$
b) $V=\{0, -\frac{9}{5}\}$ $\exists\ x', x'' \in R \mid 5x^2 + 9x = 0$
c) $V=\{0, 3\}$ $\exists\ x', x'' \in R \mid x^2 - 3x = 0$
d) $V=\{0, -\frac{4}{3}\}$ $\exists\ x', x'' \in R \mid 3x^2 + 4x = 0$

Exercício 9.

a) $V=\{-3\}$
b) $V=\{3,4\}$
c) $V=\{1,-2\}$
d) $V=\{1, 3\}$
e) $V=\{\ \}$ ou $V=\emptyset$
f) $V=\{5,-4\}$
g) $V=\{-\frac{1}{2}, -3\}$

Exercício 10.

a) (x) $-3,2$ ... existe solução em R
(x) $\exists\ x', x'' \in R /\ x^2 - x - 6 = 0$

b) (x) $V=\{\ \}$ ... não existe solução em R
(x) $\nexists\ x', x'' \in R /\ x^2 - 4x + 5 = 0$

c) (x) $\{-3\}$ ... existe solução em R
(X) $\exists\ x', x'' \in R /\ x^2 + 6x + 9 = 0$

Exercício 11.

a) $V=\{2,5\}$
b) $V=\{3,-4\}$

Exercício 12.

Tradução para a linguagem simbólica.

a) x^2 ou y^2
b) $3x^2$
c) $\frac{x^2}{5}$
d) $x^2 - 2 = 7$
e) $x + 2x$
f) $x + x^2$
g) $2x + 5 = 11$
h) $x^2 + 3x$

Exercício 13.

Resolução de problemas.

a) A equação é: $x^2 - 2x = 15$. Idade de Pedro: 5 anos.
b) A equação é: $x^2 + 3x = 10$. Número procurado: 2 ou -5.
c) A equação é: $x^2 + x = 6$. Número procurado: 2 ou -3.

Exercício 14.

Resolução de equações incompletas.

a) $V=\{0\}$
b) $V=\{0\}$
c) $V=\{0\}$
d) $V=\{0,25\}$
e) $V=\{0, \frac{1}{5}\}$
f) $V=\{0,4\}$
g) $V=\{\pm 3\}$
h) $V=\{\pm \frac{1}{2}\}$
i) $V=\{\pm 13\}$

Exercício 15.

Resolução de equações completas.

a) $V = \left\{ -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2} \right\}$

b) $V = \{ 3, 2 \}$

c) $V = \{ 3, -2 \}$

d) $V = \{ -6 \}$
raiz dupla.

Exercício 16.

Resolução de problemas.

a) Os números são 1 e 2.

b) O número pode ser 1 ou 5.

Exercício 17.

a) $V = \left\{ 4, -\frac{5}{3} \right\}$

b) $V = \{ 2, -5 \}$

c) $V = \{ 0, 10 \}$

d) $V = \left\{ \pm \frac{4}{5} \right\}$

e) $V = \left\{ \frac{1}{3}, -1 \right\}$

Exercício 18.

a) $V = \{ 5, 2 \}$

b) $V = \{ 5, 1 \}$

c) $V = \{ \ \}$ ou $V = \emptyset$

X - REFERÊNCIAS E SUGESTÕES BIBLIOGRÁFICAS

1. BACCARO, Nelson e outros. *Matemática Dinâmica.* 6ª série do En sino Fundamental. São Paulo, Editora IBEP, 1977.
2. ZAMBUZZI, Orlando. *Matemática com Estudo Dirigido.* 6ª série, 1º grau. São Paulo, Editora Ática, 1975.
3. SANGIORGE, Osvaldo. *Matemática.* 6, para Cursos do 1º Grau. São Paulo, Editora Nacional, 1974.
4. CLAUZET, Luiz Bernardo F. *Matemática, Estudo Programado.* 6ª sé rie, 1º grau. São Paulo, Editora Saraiva, 1976.
5. DIAS FILHO, Astor G. e outros. *Matemática Criativa.* 6ª série do Ensino Fundamental. São Paulo, Editora Abril, 1975.
6. NAME, Miguel Asis. *Matemática, Ensino Moderno.* 6ª série do En sino Fundamental. São Paulo, Editora do Brasil S.A., 1974.

PROJETO HAPRONT:
Habilitação do Professor Não Titulado

MEC – DEF
SEEC – CETEPAR

PROJETO HAPRONT

131

ESTADO DO PARANÁ

GOVERNO JAYME CANET JUNIOR

SECRETARIO DE ESTADO DA EDUCAÇÃO E DA CULTURA

PROFESSOR FRANCISCO BORSARI NETTO

CENTRO DE TREINAMENTO DO MAGISTÉRIO DO ESTADO DO PARANÁ

CETEPAR

Projeto "HAPRONT"

APRESENTAÇÃO

O Departamento de Ensino Fundamental do Ministério da Educação e Cultura tem como um dos seus objetivos prioritários, a implantação de uma política global de desenvolvimento de recursos humanos, através da qual pretende assegurar a melhoria da produtividade dos sistemas de ensino.

Nesse sentido, está promovendo a experimentação de um modelo curricular de habilitação de professores que se constitui em um instrumento de busca de melhores padrões para a formação profissional. Em resposta a uma realidade que desafia os meios do ensino convencionais, esse modelo adota uma metodologia de educação à distância, sendo veiculado por uma série de 250 módulos de ensino. Este é um dos módulos dessa série.

Cada módulo é uma unidade composta de:objetivos, pré-teste, procedimentos e atividades básicas, pós-teste; procedimentos e atividades de suporte, pós-teste;procedimentos e atividades de enriquecimento.

Os módulos são encaminhados aos professores - cursistas para serem estudados em seus locais de trabalho. Por esse processo deverão ser habilitados a nível de 2º grau, professores não titulados em exercício em classes de 1ª e 4ª séries.

SUBPROJETO 13.1 do Plano Setorial de Educação e Cultura 75/79: CAPACITAÇÃO DE RECURSOS HUMANOS para o Ensino de 1º grau - Código Orçamentário 4502.08.42.217.2.023.

O projeto está sendo executado pela Secretaria de Estado da Educação e Cultura do Paraná, através do Cetepar, com o nome de Projeto "HAPRONT" (Habilitação de Professores não titulados), em 11 municípios, atingindo 1.100 professores não titulados.

Os resultados alcançados nesta etapa permitirão, num futuro próximo, subsidiar outras U.F. na organização de cursos de habilitação pelo mesmo processo.

CIÊNCIAS

TÉCNICAS DEDUTIVAS

MÓDULO Nº 131

ELABORAÇÃO: CLELIA TAVARES MARTINS
ROSA KAZUCO MIYASAKI

TÍTULO : TÉCNICAS DEDUTIVAS.

I - ASSUNTO : RACIOCÍNIO DEDUTIVO. POSTULADOS, DEFINIÇÕES, TEOREMAS E PROPRIEDADES. MÉTODO DEDUTIVO DIRETO E INDIRETO.

II - MATÉRIA : CIÊNCIAS.

DISCIPLINA : MATEMÁTICA.

III - PRÉ-REQUISITOS : TER DOMINADO O CONTEÚDO DOS MÓDULOS 39, 40, 82.

IV - OBJETIVOS :

OBJETIVO GERAL :

Evidenciar a necessidade constante de atualização de seus conhecimentos científicos, em virtude do rápido desenvolvimento dos trabalhos de pesquisa.

OBJETIVO TERMINAL :

Demonstrar teoremas, observando a hipótese estabelecida, desenvolvendo um raciocínio lógico, utilizando métodos e processos diferentes, e testando os resultados em casos particulares.

OBJETIVOS OPERACIONALIZADOS :

AO FINAL DESTE MÓDULO O CURSISTA DEVERÁ SER CAPAZ DE:

a) reconhecer postulados e teoremas (nestes identificando a hipótese e a tese);
b) ordenar de forma lógica os passos necessários para a demonstração de teoremas e propriedades;
c) empregar o método dedutivo direto e indireto nas demonstrações de teoremas simples, e de larga aplicação, sobre pontos, linhas, ângulos, triângulos e quadriláteros.

V - PRÉ-TESTE

Leia atentamente as questões abaixo.

Submeta-se ao teste, confiante de que se sairá bem.

Boa sorte !

1. CORRESPONDA O QUE ESTÁ EXPRESSO NA PRIMEIRA COLUNA COM OS TERMOS DA SEGUNDA. ESCREVA a, b, c, OU d NOS PARÊNTESES:

(a) As proposições aceitas sem prova são denominadas...

(b) A verdade que se pretende demonstrar num teorema é chamada...

(c) Num teorema, o enunciado que vem entre "se,então" é denominado...

(d) As proposições aceitas por meio da demonstração são chamadas...

( ) Hipótese

( ) Recíproca

( ) Teoremas

( ) Conclusão

( ) Postulados ou Axiomas

( ) Tese

2. DÊ O VALOR LÓGICO DAS PROPOSIÇÕES ABAIXO. ESCREVA A RECÍPROCA DE CADA UMA DELAS. COLOQUE V OU F NOS PARÊNTESES PARA AS RECÍPROCAS VERDADEIRAS OU FALSAS.

a) ( ) Se "José é estudante de medicina, então ele é universitário".

Recíproca: ( ) --

----

b) ( ) Se "Sônia nasceu em Aracaju, então ela é sergipana".

Recíproca: ( ) --

----

c) ( ) "Se um ângulo é reto, então tal ângulo mede 90º".

Recíproca: ( ) --

----

3. PROVE, PELA DEMONSTRAÇÃO DIRETA, O VALOR LÓGICO DA SEGUINTE PROPOSIÇÃO:

"Se a grama e a rua estão secas, então choveu".

----

4. ESCREVA, SEPARADAMENTE, A HIPÓTESE E A TESE DAS PROPOSIÇÕES ABAIXO:

- Os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.
- Ângulos retos têm medidas iguais.
- O polígono de quatro lados é um quadrilátero.

Hipótese	Tese
a) -------------------	-----------------
b) -------------------	-----------------
c) -------------------	-----------------

5. CONCLUA:

a) A pele de alguns animais serve de agasalho ao homem. O castor é muito procurado pela sua pele macia.

Logo, ---

b) Animal útil é aquele que presta benefícios ao homem. O gafanhoto devasta as plantações.

Logo, ---

6. COMO SÃO CHAMADAS AS PROPOSIÇÕES ABAIXO:

"A reta não tem começo, nem fim".

"Por um ponto num plano passam infinitas retas".

Resposta: ---

7. DEMONSTRE, PELO MÉTODO DIRETO, O SEGUINTE TEOREMA:

- As diagonais de um retângulo são congruentes.

GABARITO DO PRÉ-TESTE

1. Correspondência.
   (a) Postulados
   (b) Tese
   (c) Hipótese
   (d) Teorema

2. Valor lógico de proposições.

a) (V)

Recíproca: (F) Se José é universitário, então ele é estudante de medicina.

b) (V)

Recíproca: (F) Se Sônia é sergipana, então ela nasceu em Aracaju.

c) (V)

Recíproca: (V) Se um ângulo mede 90º, então ele é um ângulo reto.

3. Valor lógico de proposição.

Não chove e a grama e a rua estão molhadas.

"Se a grama e a rua estão secas (nos diz a hipótese) então não deve ter chovido. O valor lógico da proposição é falso.

4. Separação de hipótese e tese

Hipótese	Tese
a) Ângulos opostos pelo vértice	são congruentes
b) Ângulos retos	têm medidas iguais
c) O polígono tem quatro lados	é um quadrilátero

5. Conclusões.

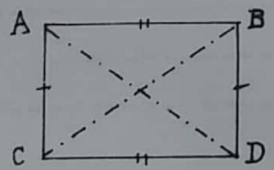
a) Logo, a pele do castor serve de agasalho ao homem.

b) Logo, o gafanhoto não é animal útil ao homem, ou o gafanhoto é nocivo ao homem.

6. Nomes das proposições.

Resposta: Postulados ou axiomas.

7. Demonstração de teorema.



H. $\begin{cases} ABCD \text{ é um retângulo} \\ \overline{AC} \cong \overline{BD} \text{ (são congruentes por construção).} \\ \overline{AB} \cong \overline{CD} \end{cases}$

Demonstração: T. $\{ AB \cong CB$

$\triangle ACD \cong \triangle ABD$, pois os ângulos C e B são congruentes por serem ângulos retos.

Os catetos $\overline{CA}$ e $\overline{CD} = \overline{DB}$ e $\overline{BA}$, respectivamente. É princípio (L.A.L.) da congruência de triângulos.

Logo, as hipotenusas (diagonais do retângulo) são congruentes, c.q.d. (como queríamos demonstrar).

VI - PROCEDIMENTOS E ATIVIDADES

TÉCNICAS DEDUTIVAS

NOÇÕES SOBRE POSTULADO, TEOREMA E DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO - Convém frisar, de início, que o assunto aqui abordado e destinado a você, não é extensivo aos seus alunos, eis que em princípio as TÉCNICAS DEDUTIVAS não se aplicam no ensino a escolares com menos de 14 ou 15 anos.

Até o momento orientamos o aprendizado da matemática servindo-nos, principalmente, de métodos e recursos didáticos que levam a criança a pensar, a descobrir conceitos e propriedades, a tirar conclusões e mesmo a sistematizar.

Trataremos agora, como assinalamos, de TÉCNICAS DEDUTIVAS, considerando que, além do raciocínio intuitivo, a matemática emprega, notadamente, o método dedutivo, por meio da demonstração. Falaremos sobre proposições e fatos verificáveis partindo da observação e experimentação. E estudaremos a aplicação de técnicas de demonstração de fatos geométricos, não com a intenção de com isso completar, nesta série de módulos, o currículo de geometria adotado no ensino fundamental (o que foge ao nosso plano), mas sim com o propósito de oferecer a você, cursista, pré-requisitos para que possa prosseguir em seus estudos de matemática nos livros editados para estudantes de 7ª e 8ª séries.

I - RACIOCÍNIO DEDUTIVO

A matemática utiliza o método dedutivo ou raciocínio dedutivo, por meio da demonstração. Deduzir é simplesmente tirar conseqüências de uma verdade geral; demonstrar é provar com evidência.

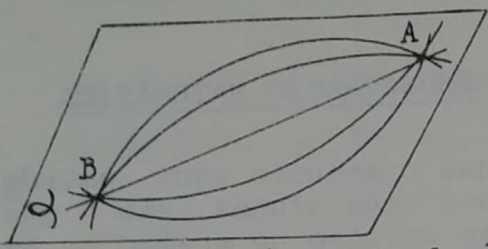
São exemplos de demonstração o processo empregado para a solução dos problemas e o empregado para a demonstração dos teoremas. Essas duas formas de demonstração são diretas. Mas há ainda a demonstração indireta, quando se prova a verdade de uma proposição, demonstrando a falsidade ou absurdo da contrária. Nesta demonstração, também chamada "pelo absurdo", conclui-se que uma proposição é verdadeira porque, se não o fosse, a contrária deveria ser admitida e disso resultaria um absurdo.

Há proposições admitidas como verdadeiras, sem demonstração e proposições aceitas como verdadeiras, por meio da demonstração. Trata-se dos axiomas ou postulados e dos teoremas, sobre os quais falaremos a seguir.

II - POSTULADO OU AXIOMA

Seja a seguinte proposição verdadeira :"Por dois pontos de um plano passa sempre uma reta".

Para verificar se essa proposição é verdadeira consideremos um plano qualquer e nele marquemos dois pontos, A e B.



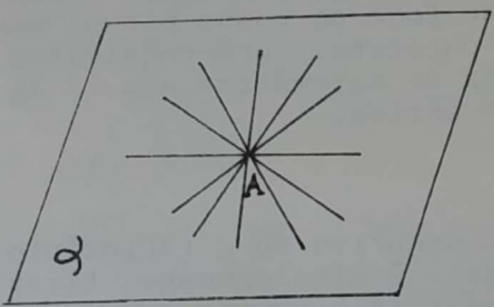
Observe que podemos ligar os dois pontos por meio de muitas linhas. Mas, com o auxílio de régua, só uma linha reta é possível traçar: $\overleftrightarrow{AB}$.

Daí a conclusão de que a proposição dada é verdadeira, pois é sempre possível traçar uma reta, e somente uma, por dois pontos determinados num plano.

As proposições admitidas como verdadeiras, por meio apenas da observação e experimentação, recebem o nome de postulados ou axiomas. Logo, a proposição verificada é um exemplo de postulado ou axioma.

Seja a seguinte proposição: "p" "Por um ponto passam infinitas retas".

Consideremos um plano α e um ponto A.



Repare que é possível fazer passar pelo ponto A quantas retas quisermos, e concluir sobre a verdade da proposição.

Temos, então, outro axioma ou postulado neste exemplo, uma vez que a proposição "p" foi admitida como verdadeira por meio da observação e experimentação.

Postulados são proposições aceitas sem demonstração.

Feitas essas considerações, vejamos alguns exemplos de postulados:

1. Uma reta não tem origem, nem extremidades;
2. Três pontos não colineares determinam um único plano;
3. Se uma reta tem dois pontos situados num plano, então ela está inteiramente contida nesse plano;
4. De um ponto fora de uma reta só se pode traçar uma paralela a esta reta, (postulado de Euclides);
5. Duas retas concorrentes podem se cruzar apenas num ponto.
6. Uma e apenas uma reta pode ligar dois pontos;
7. Um segmento de reta possui apenas um ponto médio;
8. Um ângulo possui apenas uma bissetriz;

9. Por um ponto em uma reta pode-se levantar uma e apenas uma perpendicular a esta reta;

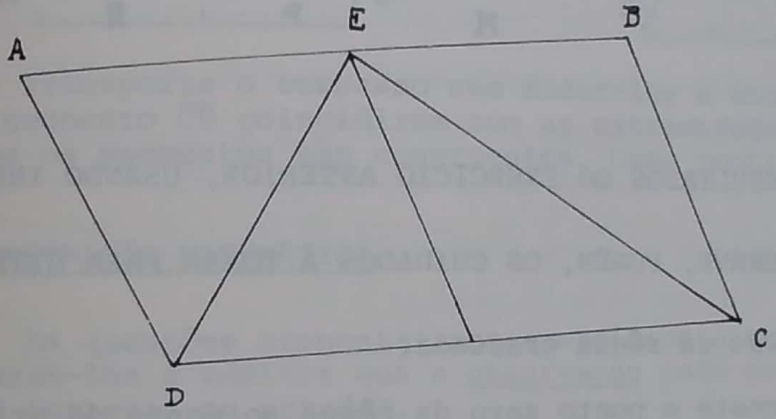
10. Dados um centro e um raio, pode-se traçar um e apenas um círculo.

(Esta relação de postulados deve ser bem estudada e aprendida).

EXERCÍCIO 1

OBSERVE AS FIGURAS ABAIXO E, SEM UTILIZAR INSTRUMENTO DE MEDIDA, COMO RÉGUA, COMPASSO, ETC., RESOLVA AS QUESTÕES PROPOSTAS, COLOCANDO X, NOS PARÊNTESES, PARA AS RESPOSTAS CORRETAS.

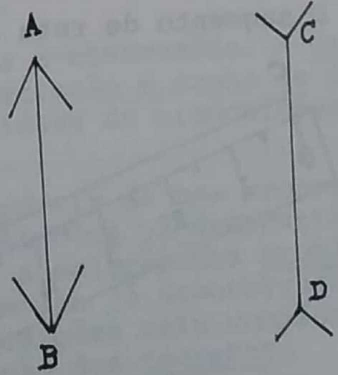
a) Qual o segmento de reta de maior comprimento ?



Resposta:
( ) ≅
( ) $\overline{DE}$
( ) $\overline{CE}$

b) Qual o segmento de reta de maior comprimento ?

Resposta:
( ) ≅
( ) $\overline{AB}$
( ) $\overline{CD}$



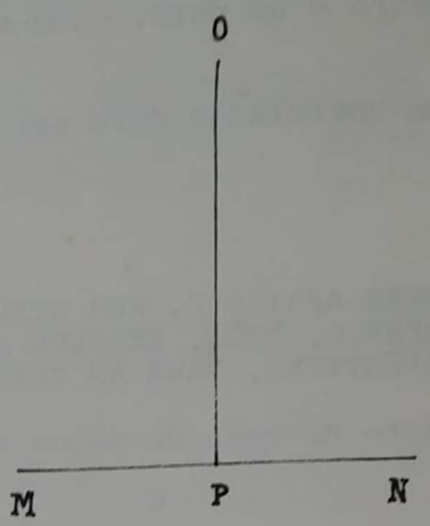
Digitalizado com CamScanner

c) Qual o segmento de menor comprimento ?

( ) ≅

Resposta: ( ) $\overline{MN}$

( ) $\overline{OP}$



EXERCÍCIO 2

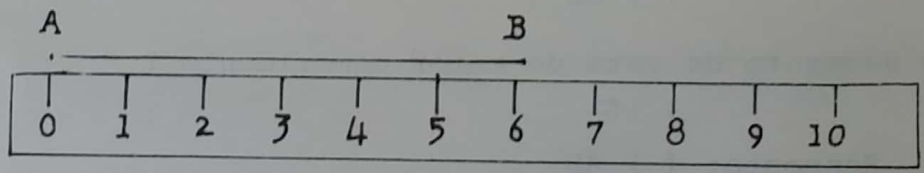
COMPROVE OS RESULTADOS DO EXERCÍCIO ANTERIOR, USANDO INSTRUMENTOS DE MEDIDA.

OBSERVE, PORÉM, OS CUIDADOS A TOMAR PARA OBTER MEDIDAS CORRETAS.

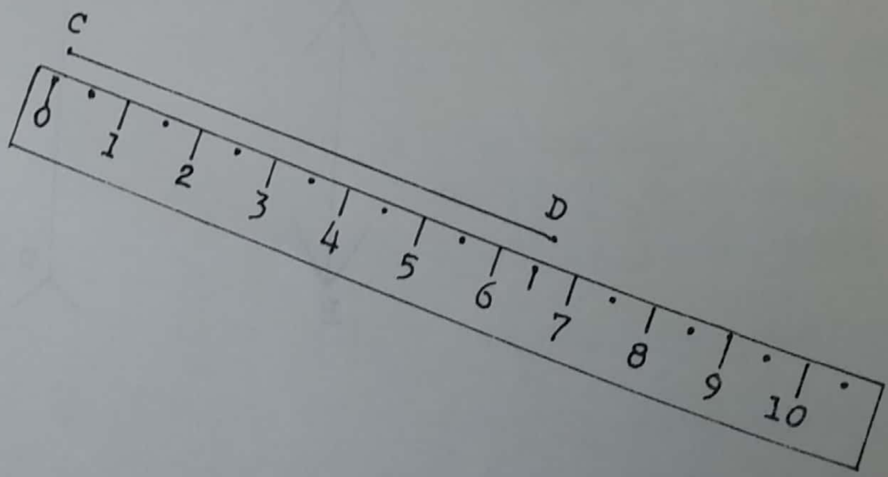
- Uso da régua graduada.

Encoste o ponto zero da régua ao ponto de origem do segmento de reta. Leia, na régua, quantos centímetros e quantos milímetros tem o segmento, observando o ponto extremo deste.

Exemplos:



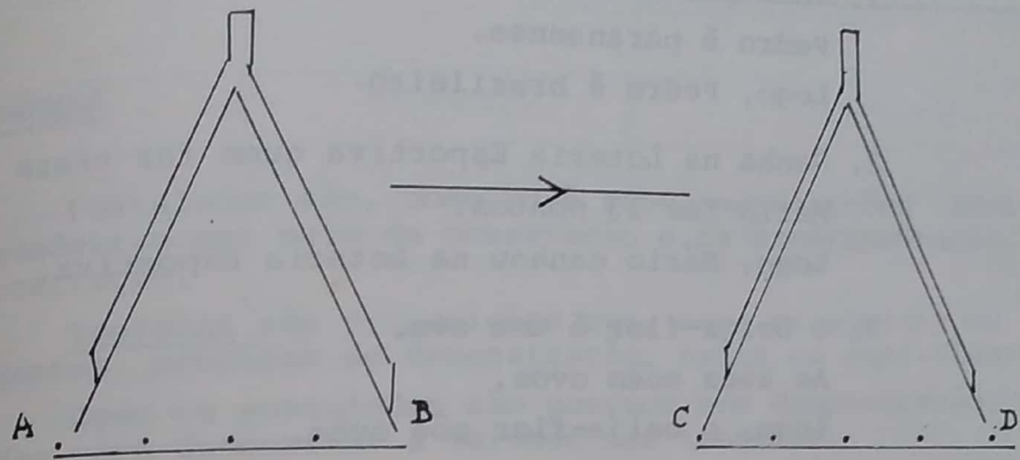
O segmento de reta $\overline{AB}$ mede 6 cm.



O segmento de reta $\overline{CD}$ mede 6,5 cm.

• Uso do compasso.

Faça coincidirem as pontas do compasso com as extremidades do segmento $\overline{AB}$, como vemos abaixo:



Transporte o compasso sem mudar-lhe a abertura. Se as pontas do segmento $\overline{CD}$ coincidirem com as extremidades do compasso, então ambos os segmentos são congruentes. Caso contrário, não o são.

III - DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA

As questões propostas nos exercícios anteriores, por certo levaram-lhe a admitir que a <u>observação</u> pode conduzir-nos a conclusões corretas ou erradas.

Assim como a observação, a <u>experimetação</u> está sujeita às mesmas conclusões daquela, sendo ainda capaz de oferecer-nos dados mais prováveis.

Para que haja resultados corretos é necessário que observação e experimentação sejam aplicadas de maneira precisa, completa e com método. Apesar disso, podem apresentar erros, devido não só à imperfeição dos instrumentos utilizados, como à complexidade do fato estudado, ou às condições intelectuais do próprio observador.

A experimentação completa a observação. A <u>demonstração</u>, ou <u>prova</u>, verifica a tese. A demonstração é capaz de nos levar a concluir sobre a veracidade ou falsidade de proposições ou fatos matemáticos.

Na demonstração podemos partir de uma proposição complexa, a demonstrar, para outra mais simples, já demonstrada, como é o caso do processo empregado para a solução dos <u>problemas</u>. Também podemos partir de proposições simples já demonstradas das quais retiramos, como conseqüências, proposições mais complexas. É o processo empregado para a demonstração dos <u>teoremas</u>.

No tocante à geometria, esta emprega o processo dedutivo por meio da demonstração, levando-nos à conclusão, sem considerar os casos particulares, como tamanho, forma, ou até mesmo o rigor da construção geométrica de uma figura.

Passemos a alguns exemplos de raciocínio dedutivo e de conclusão.

1. Todo paranaense é brasileiro.
   Pedro é paranaense.
   Logo, Pedro é brasileiro.

2. Ganha na Loteria Esportiva quem faz treze pontos.
   Mário fez 13 pontos.
   Logo, Mário ganhou na Loteria Esportiva.

3. O beija-flor é uma ave.
   As aves poem ovos.
   Logo, o beija-flor põe ovos.

4. O cão é um animal doméstico.
   Tico é um cão.
   Logo, Tico é um animal doméstico.

5. Marta e Jorge tinham o mesmo peso.
   Depois cada um perdeu 5 kg.
   Logo, Marta e Jorge têm o mesmo peso.

EXERCÍCIO 3

ESCREVA A CONCLUSÃO DAS SEGUINTES PROPOSIÇÕES:

a) A figura geométrica ABC tem três lados.
   Triângulo é polígono de três lados.
   Logo; ______________________________

b) Marcia e Lúcia são gemeas.
   Hoje faz quinze anos que elas nasceram.
   Logo, ______________________________

c) O segmento de reta $\overline{AB}$ é congruente com o segmento de reta $\overline{BC}$.
   O segmento de reta $\overline{BC}$ é congruente com o segmento de reta $\overline{CD}$.
   Logo, ______________________________

d) Ouro e prata são metais.
   Os metais são mais pesados que os gases.
   Logo, ______________________________

e) Um ângulo com mais de 90º é um ângulo obtuso.
O ângulo ABC mede mais que um ângulo reto.
Logo, --

IV - TEOREMAS

Postulados são, como você sabe, proposições admitidas como verdadeiras por meio da observação e da experimentação, e sem demonstração.

Teoremas são proposições que, para se admitir ou tornar evidentes, precisam de demonstração, prova ou justificativa.

Como os postulados são aceitos sem demonstração, podem ser usados para demonstrar a verdade nos teoremas.

Em todo teorema distinguem-se duas partes: hipótese e tese.

Hipótese é a parte do teorema que se supõe conhecida e que se considera verdadeira, logo de início.

Tese é a parte que se deve provar, justificar ou demonstrar. É o que se pretende concluir como conseqüência da hipótese.

DEMONSTRAÇÃO DOS TEOREMAS

Na demonstração ou prova de um teorema temos que seguir um encadeamento de raciocínios para deduzir a tese da hipótese.

Geralmente, os teoremas apresentam-se em forma de proposições condicionais. A parte que vem entre "se...então" é a hipótese e a que vem depois de "então..." é a tese. Assim, todo teorema pode ser representado como:

$$\boxed{\text{HIPÓTESE}} \longrightarrow \boxed{\text{TESE}}$$

Se... então...

Repare neste exemplo:

Se $\overbrace{\text{dois ângulos são opostos pelo vértice,}}^{\text{Hipótese}}$

então $\overbrace{\text{eles são congruentes.}}^{\text{Tese}}$

DETERMINAÇÃO DA HIPÓTESE E TESE

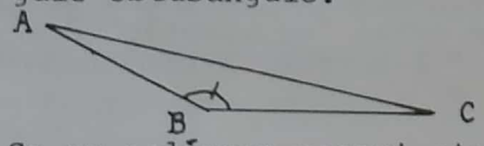
Lembre-se do exposto sobre teorema e observe no quadro abaixo a análise de proposições.

PROPOSIÇÃO	HIPÓTESE	TESE
a) Se um triângulo tem todos os lados iguais, então ele é um triângulo equilátero.	Um triângulo tem todos os lados iguais.	O triângulo é equilátero.
b) Se sou mais pesado que você, então nossos pesos são diferentes.	Sou mais pesado que você.	Nossos pesos são diferentes.
c) Se é um triângulo, então não é um quadrilátero.	Um triângulo.	Não é um quadrilátero.

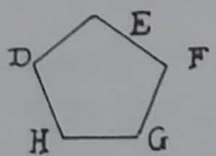
EXERCÍCIO 4

GRIFE A HIPÓTESE (H) COM UM TRAÇO E A TESE (T) COM DOIS, NAS PROPOSIÇÕES QUE SEGUEM:

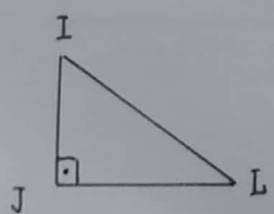
a) Se um triângulo possui um ângulo obtuso, então ele é um triângulo obtusângulo.



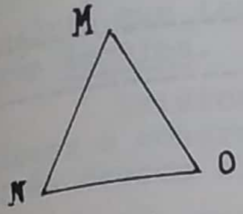
b) Se um polígono possui cinco lados, então ele é um pentágono.



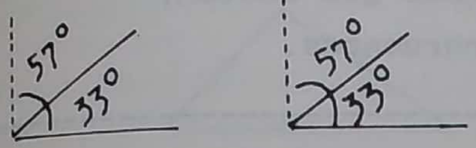
c) Se um triângulo é retângulo, então ele possui um ângulo reto.



d) Se um triângulo é acutângulo, então ele tem os três ângulos agudos.



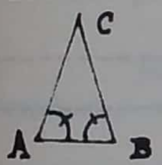
e) Se dois ângulos têm o mesmo complemento, então eles são congruentes. (Leia o módulo 39).



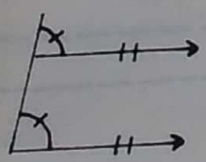
EXERCÍCIO 5

ESCREVA SOB FORMA "SE...ENTÃO" OS TEOREMAS ABAIXO:

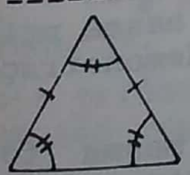
a) Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ da base de um triângulo isósceles são congruentes.



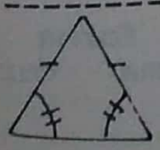
b) Os ângulos que têm lados paralelos e de mesmo sentido são congruentes.



c) Um triângulo equilátero é equiângulo.



d) Um triângulo isósceles tem dois lados e dois ângulos congruentes.

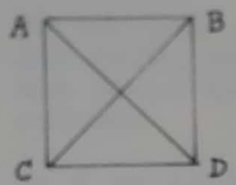


e) Um triângulo escaleno tem os três lados e os três ângulos não congruentes.

EXERCÍCIO 6

ESCREVA A HIPÓTESE E A TESE DAS PROPOSIÇÕES QUE SEGUEM:

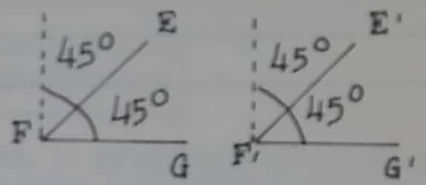
a) As diagonais de um quadrado são congruentes.



H. ---

T. ---
----

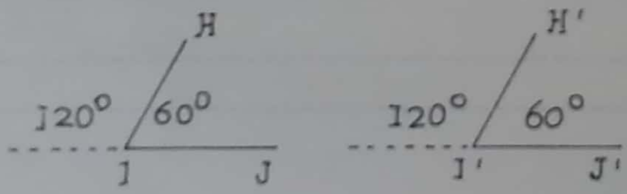
b) Os complementos de ângulos congruentes também são congruentes.



H. ---

T. ---
----

c) Os suplementos de ângulos congruentes também são congruentes.



H ---

T ---

PRINCÍPIOS BÁSICOS DA CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

O estudo dos princípios que regem a congruência de triângulos deve merecer todo o seu interesse. É que esses princípios são fundamentais para a realização de inúmeras demonstrações de teoremas.

Figuras congruentes são aquelas que têm a mesma forma e as mesmas dimensões. Uma é a réplica perfeita da outra. Assim, dois círculos de mesmo raio são congruentes.

É o seguinte o símbolo para "é congruente": $\cong$ Este símbolo é a combinação de = para o mesmo tamanho e $\sim$ para a mesma forma.

Triângulos congruentes são aqueles de mesma forma e mesmo tamanho. O que implica que se pode estabelecer uma correspondencia biunívoca entre os elementos homólogos dos mesmos.

Para que dois ou mais triângulos sejam congruentes é necessário que tenham respectivamente congruentes os três lados e os três ângulos.

Existem, entretanto, certos critérios que permitem estabelecer a congruência entre eles mediante a congruência de apenas três desses elementos, conforme os casos a seguir:

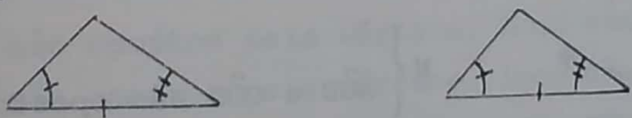
1º. Dois triângulos são congruentes quando os seus lados correspondentes são congruentes. (L.L.L.).

- Toda correspondência L.L.L. é um caso de congruência

2º. Os triângulos que têm dois lados e o ângulo por eles formado congruentes, são triângulos congruentes. (L.A.L.).

- Toda correspondência L.A.L. é um caso de congruência

3º. Os triângulos que têm dois ângulos e o lado a eles adjacentes, respectivamente congruentes, são congruentes. (A.L.A.)



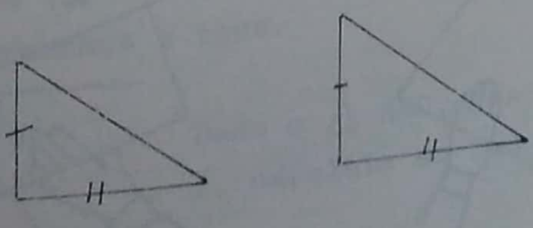
- Toda correspondência A.L.A. é um caso de congruência

4º. Os triângulos que têm um lado, um ângulo adjacente e outro oposto a esse lado, são triângulos congruentes. ($L.A.A_o$).

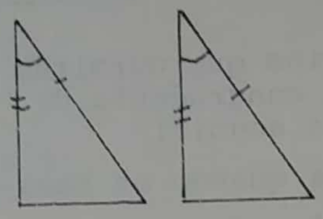
- Toda correspondência $L.A.A_o$ é um caso de congruência

● Se os triângulos forem retângulos, temos dois casos de congruência.

a) Dois triângulos retângulos são congruentes, quando os seus catetos são congruentes.



b) Os triângulos retângulos com um ângulo agudo, compreendido entre a hipotenusa e um cateto congruentes, também são triângulos congruentes.



PASSOS DE UMA DEMONSTRAÇÃO

Não há u'a marcha fixa para a demonstração de teoremas.

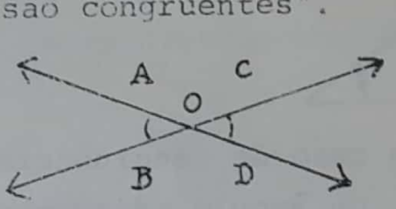
De modo geral, partimos da hipótese (dada por meio de definições, postulados ou teoremas) e chegamos à tese, provada pela demonstração.

Mas uma demonstração torna-se mais fácil de realizar, em geometria, quando:

- escrevemos o teorema sob a forma "se...então...";
- desenhamos uma figura com os dados da hipótese;
- justificamos cada afirmação com dados, definições, axiomas e teoremas supostamente conhecidos ou anteriormente provados.

Vejamos, nos exemplos que seguem, como demonstrar teoremas.

Exemplo I - "Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então eles são congruentes".



H { $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são opostos pelo vértice.

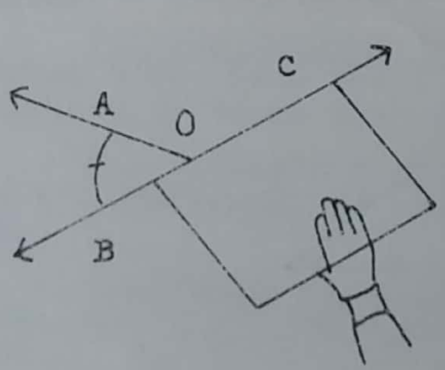
T { $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são congruentes $A\hat{O}B \cong C\hat{O}D$

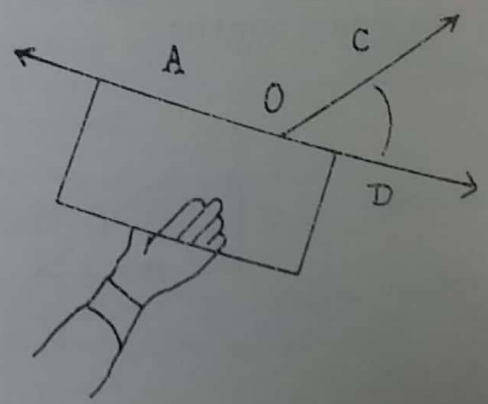
Demonstração - Provemos a tese utilizando postulados, conceitos e propriedades já conhecidos.

1º $A\hat{O}C$ é suplemento de $A\hat{O}B$.

(m ($A\hat{O}C$) + m ($A\hat{O}B$) = 180°. Lê-se: medida de $A\hat{O}C$ mais medida de $A\hat{O}B$ é igual a 180° graus.

Os lados externos desses dois ângulos estão na mesma reta; $A\hat{O}C$ e $A\hat{O}B$ formam um ângulo raso, $B\hat{O}C$.





2º $A\hat{O}C$ é suplemento de $C\hat{O}D$.

$m(A\hat{O}C) + m(C\hat{O}D) = 180°$

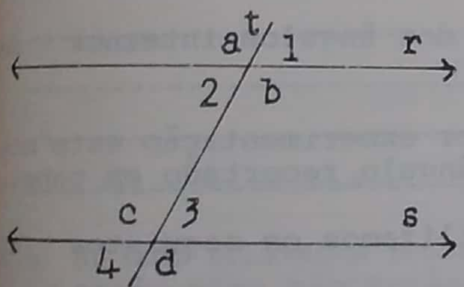
Os lados externos do ângulo $A\hat{O}D$ estão numa linha reta. AOD é ângulo raso.

Como você já sabe, dois ângulos que têm o mesmo suplemento são congruentes, como queríamos demonstrar. (c.q.d.).

Nota - Para demonstrar um teorema, precisamos verificar se temos elementos suficientes para provar a tese. Não os tendo, pesquisaremos conceitos, postulados e teoremas já demonstrados, capazes de ajudar-nos a chegar à tese.

Também é importante traçar figuras que nos forneçam informações sobre o que pretendemos provar. Não é preciso que essas figuras sejam construídas com rigor geométrico, mas devem ser um "retrato" daquilo que queremos demonstrar.

Exemplo II - "Se duas paralelas são cortadas por uma secante, então elas formam 4 ângulos agudos congruentes e 4 ângulos obtusos congruentes".



H $\begin{cases} r \,/\!/\, s \\ t \text{ transversal às } /\!/ \end{cases}$

T $\begin{cases} \hat{1} \cong \hat{2} \cong \hat{3} \cong \hat{4} \\ \hat{a} \cong \hat{b} \cong \hat{c} \cong \hat{d} \end{cases}$

Ângulos 1 e 2 são opostos pelo vértice, logo são congruentes;

Ângulos 3 e 4 são opostos pelo vértice, logo são congruentes;

Ângulos 1 e 3 têm lados paralelos e de mesmo sentido, logo são congruentes os ângulos 1,2,3, e 4.

Ângulo $\hat{a}$ é suplemento do ângulo $\hat{1}$; como $\hat{1} \cong \hat{2}$, $\hat{b}$ é suplementar do ângulo $\hat{1}$, logo $\hat{a} \cong \hat{b} \cong \hat{c} \cong \hat{d}$

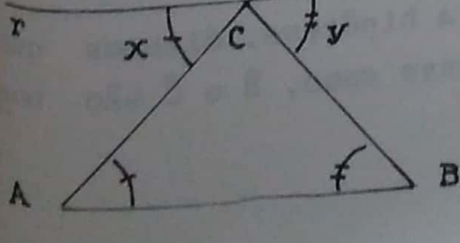
como queríamos demonstrar (c.q.d.).

Exemplo III - "A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180º."

H $\{ \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, ângulos internos do $\triangle$ ABC.

T $\{ m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$

Demonstração - Provemos a tese.



Dado o $\triangle$ ABC, traçamos por C uma reta r, paralela ao lado AB do $\triangle$ ABC.

$\hat{A}$ e $\hat{X}$ são "alternos internos" (os ângulos agudos do exemplo II), levando em conta $\overline{AC}$ como transversal a r // $\overline{AB}$.

$$\boxed{m(\hat{A}) \cong m(\hat{X})}$$

$\hat{B}$ e $\hat{Y}$ são também alternos internos, levando em conta $\overline{CB}$ como transversal a r // $\overline{AB}$.

$$\boxed{m(\hat{B}) \cong m(\hat{Y})}$$

Escrevendo, então, em torno do ponto C, temos:

$$m(\hat{X}) + m(\hat{C}) + m(\hat{Y}) = 180°$$

Substituindo $\hat{X}$ por $\hat{A}$ e $\hat{Y}$ por $\hat{B}$, provém:

$$m(\hat{A}) + m(\hat{C}) + m(\hat{B}) = 180°$$ como queríamos provar.

c.q.p.

Provamos, assim, que "a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°"

Nota: No módulo 39, pág.33, provamos por experimentação este mesmo teorema unindo os ângulos de um triângulo, recortado em papel.

Nota: Na demonstração deste teorema utilizamos os seguintes conhecimentos:

- O postulado de Euclides, que diz: "De um ponto fora de uma reta só se pode traçar uma única paralela a este reta".

No nosso caso, o ponto fora da reta é o ponto C e a reta dada, a base $\overline{AB}$ do triângulo.

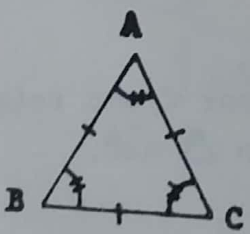
- O teorema de Tales sobre as "paralelas cortadas pela secante, formando 8 ângulos: 4 agudos e congruentes e 4 obtusos e congruentes."
- E o postulado que diz: "lados paralelos e de mesmo sentido determinam ângulos congruentes." (Todos estes conceitos foram apresentados neste módulo).

Exemplo IV - "Se o triângulo é equilátero, então ele é equiângulo."

H { O triângulo é equilátero.

T { O triângulo é equiângulo.

Demonstração.



Se $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, de acordo com a hipótese, dizemos que o $\triangle$ ABC é isósceles e, nesse caso, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são congruentes.

$$\boxed{\hat{B} \cong \hat{C}}$$

Se $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ (por hipótese), o $\triangle ABC$ é isosceles e seus ângulos da base, $\hat{A} \cong \hat{C}$.

$$\boxed{\hat{A} \cong \hat{C}}$$

Aplicando a propriedade transitiva, podemos afirmar: se $\hat{B} \cong \hat{C}$ e $\hat{A} \cong \hat{C}$, então $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C}$

c.q.p.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

EXERCÍCIO 7

PROVE OS SEGUINTES TEOREMAS:

a) Se dois ângulos são retos, então eles são congruentes.

----

b) Se dois triângulos retângulos têm os catetos respectivamente congruentes, então eles são triângulos congruentes.

----

c) Se um triângulo é retângulo, então os seus ângulos agudos são complementares.

----

d) Se um triângulo é equilátero, então cada um dos seus ângulos mede 60°.

PROPOSIÇÕES RECÍPROCAS

Duas proposições são recíprocas, quando a hipótese e a tese da primeira são, respectivamente, a tese e a hipótese da segunda.

Observe o gráfico

1ª proposição: $\boxed{\text{Hipótese}} \longrightarrow \boxed{\text{Tese}}$

2ª proposição ou recíproca: $\boxed{\text{Tese}} \longrightarrow \boxed{\text{Hipótese}}$

Você deve estar lembrado de que no módulo 82 tratamos de "operações com proposições" estudando as condicionais e bicondicionais.

Faça então, um paralelo com o enunciado de teroremas: a primeira parte do teorema, a hipótese, é a primeira proposição da condicional ou bicondicional (p); a segunda parte do teorema corresponde à segunda proposição (q).

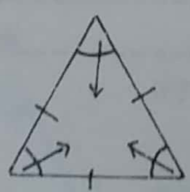
Quando você puder trocar a hipótese pela tese sem alterar o teorema, então você está trabalhando com proposições bicondicionais.

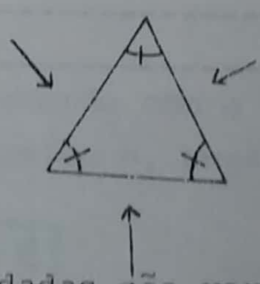
Pois bem, em razão disso, podemos dizer que uma proposição é a recíproca da outra, desde que sejam equivalentes.

Exemplifiquemos.

$p \Leftrightarrow q$ Todo triângulo equilátero é equiângulo.

$q \Leftrightarrow p$ Todo triângulo equiângulo é equilátero.





As duas proposições dadas são verdadeiras.

Algumas proposições recíprocas são falsas, mas não resultam de proposições bicondicionais.

Exemplo: "Se dois ângulos são retos, então eles são congruentes." (Proposição verdadeira).

"Se dois ângulos são congruentes, então eles são retos." (Proposição falsa).

Esta segunda proposição não é verdadeira, pois dois ângulos podem ser congruentes sem que sejam retos.

EXERCÍCIO 8

DÊ A RECÍPROCA DAS PROPOSIÇÕES SEGUINTES E ESCREVA V OU F NOS PARÊNTESES, INDICANDO AS VERDADEIRAS OU FALSAS:

a) Todo polígono com lados e ângulos congruentes é regular.

Recíproca: ( ) ______________________________

____

b) Se Jaime nasceu em Aracaju, então ele é sergipano.

Recíproca: ( ) ______________________________

____

c) Se a soma da medida de dois ângulos for 90°, eles são complementares.

Recíproca: ( ) ______________________________

____

d) Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então eles são congruentes.

Recíproca: ( ) ______________________________

____

e) Uma pessoa solteira é uma pessoa que não se casou.

Recíproca: ( ) ______________________________

____

Nota: Releia, se necessário, o módulo 39.

f) Se dois ângulos são complementares, então eles são ângulos agudos.

Recíproca: ( ) ______________________________

____

g) Se dois ângulos são congruentes, então eles têm a mesma medida.

Recíproca: ( ) ____

____

V - MÉTODOS DE DEMONSTRAÇÃO DOS TEOREMAS

Há vários métodos de demonstração dos teoremas, mas fazemos alusão aqui a apenas dois: direto e indireto.

MÉTODO DIRETO - O que usamos até o momento na demonstração dos teoremas foi o método direto.

método direto é aquele que consiste em se utilizar a hipótese para chegar à tese.

$$\boxed{\text{Hipótese}} \longrightarrow \boxed{\text{Tese}}$$

Da hipótese à tese.

A prova ou demonstração verifica a tese, levando-nos a concluir que esta é falsa ou verdadeira. Na demonstração, podemos partir, como vimos, de proposições simples já demonstradas das quais retiramos, como conseqüência, proposições mais complexas.

MÉTODO INDIRETO - O que, a seguir, lhe daremos a conhecer é o método indireto, também chamado método da redução ao absurdo, ou da contradição.

Método indireto é o que consiste em se provar a verdade de uma proposição, partindo da negação da tese para chegar à negação da hipótese. (Note-se que na proposição a hipótese é uma verdade ou fato conhecidos).

$$\boxed{\text{Tese}} \longrightarrow \boxed{\text{Hipótese}}$$

Da negação da tese à negação da hipótese.

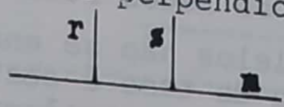
Pelo método indireto prova-se a verdade de uma proposição, demonstrando a falsidade ou absurdo da contrária. Nesta demonstração , como dissemos no início deste módulo, conclui-se que uma proposição é verdadeira porque, se não o fosse, a contrária deveria ser aceita e disso resultaria um absurdo.

Vejamos, então, alguns exemplos de demonstração de teoremas pelo método indireto.

Exemplo I - "Se duas retas de um plano são perpendiculares a uma terceira, então elas são paralelas".

Demonstração

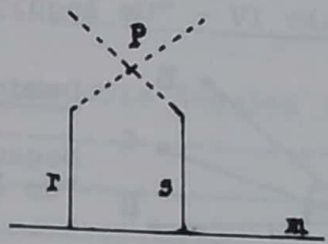
Hipótese { Duas retas perpendiculares a uma terceira



Tese { são retas paralelas
r s

Negando a tese, diriamos:

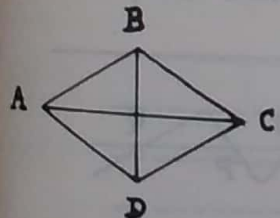
"Se r e s não são paralelas, então elas se interceptam num ponto P", como no desenho ao lado.



Ora, isso seria um absurdo, pois "por qualquer ponto exterior a uma reta pode-se traçar uma e apenas uma perpendicular a esta reta"

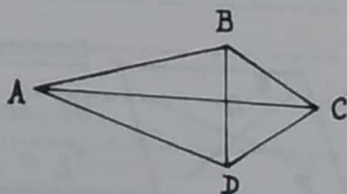
Logo, duas retas perpendiculares a uma terceira são retas paralelas, c.q.d.

Exemplo II - "As diagonais do losango interceptam-se ao meio".



Demonstração.

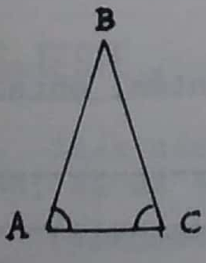
Negando a tese,, diriamos: "BD não intercepta AC ao meio", como no desenho à direita.



Ora, isso seria impossível, pois os lados dos triângulos ABD e BDC seriam desiguais e a hipótese refere-se a losango, figura cujos lados são congruentes, e em que, por isso mesmo, as diagonais interceptam-se ao meio, c.q.d.

Exemplo III - "Os ângulos da base de um triângulo isósceles não podem ser ângulos retos.

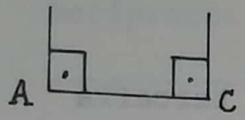
Demonstração



H { △ isósceles
$\hat{A} \cong \hat{C}$

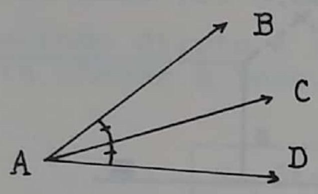
T { $\hat{A}$ e $\hat{C}$ não podem.
ser ∟

Negando a tese, diriamos: "Os ângulos da base de um triângulo isósceles são retos".



Ora, se os ângulos da base do triângulo fossem retos, então os lados seriam perpendiculares à base e paralelos. E sendo paralelos não se encontrariam para formar o triângulo. Logo, a negação da tese é absurda, pois a hipótese nos diz que "os ângulos da base de um triângulo isósceles não podem ser ângulos retos", c.q.d.

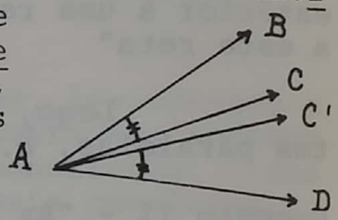
<u>Exemplo IV</u> - "Um ângulo possui uma e apenas uma bissetriz".



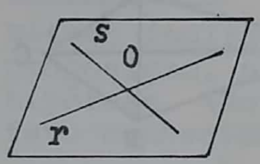
<u>Demonstração</u>.

Negando a tese, diriamos:
"Um ângulo não possui uma só bissetriz."

Ora, se possuisse, digamos, duas bissetrizes estas dividiriam o ângulo em três ângulos adjacentes, o que seria um absurdo, pois, por definição, "a bissetriz divide o ângulo em dois ângulos congruentes, adjacentes". Logo, "um ângulo possui uma e apenas uma bissetriz", c.q.d.

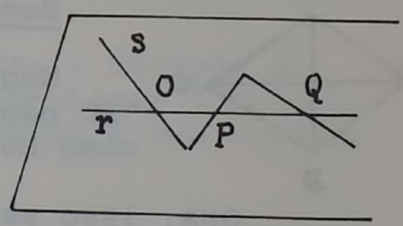


<u>Exemplo V</u> - "Duas retas podem se cruzar em um e apenas um ponto".



<u>Demonstração</u>.

Negando a tese, diriamos:
"<u>r</u> e <u>s</u> não se cruzam em apenas <u>O</u>".



Ora, supondo que se cruzassem em dois ou mais pontos, uma delas ou ambas não seriam linhas retas, pois as retas seguem uma só direção e assim duas retas não poderiam se cruzar em mais de um ponto, c.q.d.

EXERCÍCIO 9

DEMONSTRE AS AFIRMAÇÕES QUE SEGUEM PELO MÉTODO INDIRETO, OU DA REDUÇÃO AO ABSURDO.

I) Se uma reta intercepta um plano que não a contém, então a intersecção contém somente um ponto.

II - Se Maria comprou panelas inoxidáveis, então estas não se enferrujam.

III - Se ABC é um triângulo, então ele não tem dois ângulos retos.

IV - A medida de um lado de um triângulo é sempre menor que a soma dos outros dois lados.

V - Uma linha reta é a menor distância entre dois pontos.

VII - PÓS-TESTE

Leia atentamente as questões formuladas neste teste e, em seguida, dê as respostas solicitadas.

Esperamos que você se saia bem nesta verificação de conhecimentos.

Boa Sorte !

1. PREENCHA AS LACUNAS, COMPLETANDO AS AFIRMAÇÕES SEGUINTES:

a) As proposições aceitas sem demonstração são chamadas --

b) As proposições que exigem demonstração são denominadas --

c) Um teorema é formado de duas partes: ------------------------ e --

d) A parte do teorema que fornece os dados tem o nome de --

e) A parte do teorema que exige demonstração é chamada --

f) Toda proposição escrita na forma "se,então" é denominada --

2. CONCLUA:

a) Os polígonos que têm ângulos congruentes são chamados equiângulos.

Os quadrados têm ângulos congruentes.

Logo, --

b) Os polígonos cujos lados são congruentes são denominados equiláteros.

O quadrado tem lados congruentes.

Logo, --

3. SEPARE A HIPÓTESE E A TESE DAS PROPOSIÇÕES SEGUINTES:

a) Se dois segmentos de reta são colineares, então eles pertencem à mesma reta.

Hipótese: --

Tese: --

b) Se dois ângulos são retos, então eles são congruentes.

Hipótese: --

Tese: --

c) Se Marta é carioca, então ela nasceu na cidade do Rio de Janeiro.

Hipótese: ____

Tese: ____

4. ESCREVA A RECÍPROCA DE CADA UMA DAS PROPOSIÇÕES ABAIXO. COLOQUE V OU F NOS PARÊNTESES, CONFORME AS PROPOSIÇÕES E RECÍPROCAS SEJAM VERDADEIRAS OU FALSAS:

a) ( ) Se dois pontos pertencem ao mesmo plano, então eles são coplanares.

Recíproca: ( ) ____

____

b) ( ) Se o polígono é equilátero, então todos os seus lados são congruentes.

Recíproca: ( ) ____

____

c) ( ) Se João nasceu em Cuiabá, então ele é brasileiro.

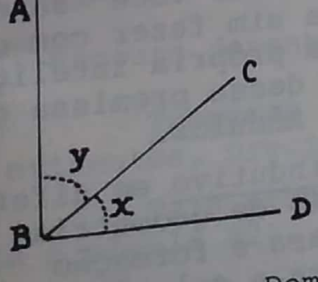
Recíproca: ( ) ____

____

OBSERVAÇÃO: É claro que nos referimos àqueles nascidos em nosso país e que, pela Constituição gozam do direito da cidadania brasileira.

5. DEMONSTRE O SEGUINTE TEOREMA PELO MÉTODO DIRETO:

- Dois ângulos adjacentes, de lados externos perpendiculares, são complementares.



Hipótese: ____

____

Tese: ____

____

Demonstração. ____

____

____

____

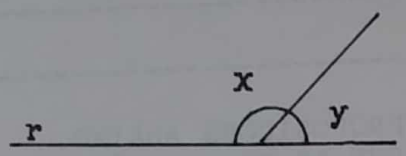
____

____

____

6. DEMONSTRE O TEOREMA ABAIXO PELO MÉTODO DE REDUÇÃO AO ABSURDO:

- Se os ângulos são suplementares, então seus lados externos estão numa mesma reta.



H

T

Demonstração

7. DÊ EXEMPLOS DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS (L.A.L.). E INTERPRETE ESSE CASO POR MEIO DE DESENHO, ALÉM DE DEFINÍ-LO.

VIII - PROCEDIMENTOS E ATIVIDADES - NÍVEL DE SUPORTE

A finalidade dos métodos didáticos, como você sabe, não é a transmissão das verdades ao educando e sim fazer com que este aprenda as verdades pela atividade de sua própria inteligência. Como não podia deixar de ser, foi dentro dessa premissa que encaminhamos o ensino da matemática em nossos módulos.

Empregamos o método ou raciocínio indutivo em diferentes assuntos tratados, como nos módulos 39 e 40 de geometria, subindo das partes para o todo, do particular para a formação de conceitos. Aplicamos o raciocínio dedutivo para a solução de problemas e outros conhecimentos, como os deste módulo que trata de TÉCNICAS DEDUTIVAS, partindo do geral para o particular, ou dos conceitos para a análise de suas partes.

As técnicas dedutivas, como já dissemos e não nos custa repetir, não se aplicam, em princípio, a escolares com menos de 14 ou 15 anos. Daí por que dedicamos a você, e não aos seus alunos, o presente módulo. Com isso oferecemo-lhe as bases necessárias ao estudo da matéria destinada a estudantes de 7ª a 8ª séries do ensino fundamental, matéria cujo aprendizado deve mere cer todo o seu interêsse, com vistas à ampliação dos seus conhecimentos matemáticos.

TÉCNICAS DEDUTIVAS

Passemos, então, ao exame do assunto já exposto no item VI deste estudo.

O método ou raciocínio dedutivo é utilizado na matemática por meio da demonstração, quer dizer, a demonstração emprega o raciocínio dedutivo.

Na demonstração, parte-se de afirmações verdadeiras ou aceitas como tais e chega-se a conclusões verdadeiras, ou aceitavelmente verdadeiras.

A demonstração ou prova pode ser direta ou indireta. Nela o silogismo é o processo básico de atividade.

São elementos da prova: as definições e os postulados ou axiomas.

Assim como os conceitos de ponto, linha e superfície, em geometria, também os postulados ou axiomas, aceitos como suposições verdadeiras, são fundamentais ao processo de demonstração.

Postulados ou axiomas são proposições aceitas sem demonstração. São admitidos como verdadeiros por meio da observação e da experimentação.

Exemplos de postulados:

- Por um ponto passam infinitas retas.
- Por dois pontos passa apenas uma reta.
- Por um ponto fora de uma reta passa apenas uma reta paralela à reta anterior.
- Por três pontos passa apenas um plano.
- Um segmento de reta tem um ponto de origem e outro de extremidade.
- Um segmento de reta possui um e apenas um ponto médio.

NOTA: Procure desenhar as figuras que os postulados sugerem.

Teoremas são proposições que, para se admitir ou tornar evidentes, precisam de demonstração ou prova.

Tais proposições são escritas na forma "se,então". (Leia o módulo 82). E compõem-se de duas partes: hipótese e tese.

Hipótese é o enunciado daquilo que se aceita como verdade.

Tese é a verdade que se pretende demonstrar ou provar.

Exemplo:
"Se uma reta é bissetriz de um ângulo, então ela divide o ângulo em duas partes iguais".

A hipótese, grifada com uma linha simples, diz "o que é dado" e a tese, grifada com uma linha dupla, diz "o que deve ser provado".

Simbolização do teorema: $\boxed{\text{Hipótese}} \longrightarrow \boxed{\text{Tese}}$

A seta $\longrightarrow$ é o símbolo do conetivo das proposições compostas pela condicional "se,então". (módulo 82).

PROPOSIÇÕES RECÍPROCAS

Uma proposição é a recíproca da outra quando a sua hipótese e tese são respectivamente a tese e hipótese da outra.

Exemplo: "Se o triângulo é equiângulo, (hipótese) então ele é equilátero". (Tese).

Recíproca: "Se o triângulo é equilátero, (hipótese) então ele é equiângulo". (Tese)

As duas proposições são verdadeiras.

Embora você possa compor a recíproca de proposições , nem sempre esta recíproca é verdadeira.

Vejamos: "Se José nasceu em Belo Horizonte, então ele é mineiro". (Proposição verdadeira).

Recíproca: "Se José é mineiro, então ele nasceu em Belo Horizonte". (Proposição falsa).

A segunda proposição não é verdadeira, pois uma pessoa pode ser mineira, sem ser de Belo Horizonte.

NOTA - Procure em livros de matemática exercícios resolvidos sobre "proposições recíprocas" e disponha-se a efetuá-los.

PRINCÍPIOS BÁSICOS DA CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Para que dois ou mais triângulos sejam congruentes é necessário que tenham respectivamente congruentes os três lados e os três ângulos.

Vejamos os critérios que permitem estabelecer essa congruência.

Dois triângulos são congruentes nos seguintes casos de correspondência:

1º - entre os lados (L.L.L.);

2º - entre os lados e ângulos por eles formados (L.A.L.);

3º - entre dois ângulos e o lado a eles adjacente (A.L.A.);

4º - entre o lado, um ângulo adjacente e outro oposto a esse lado (L.A.A_o).

Dois triângulos retângulos são congruentes nos seguintes casos de correspondência:

a) - entre os catetos;

b) - entre o ângulo agudo, compreendido entre a hipotenusa e um cateto.

OBSERVAÇÃO - Desenhe os triângulos que os critérios de congruência sugerem.

- Estude com muito interêsse estes princípios de congruência porque, como já dissemos, são eles fundamentais para a realização de inúmeras demonstrações de teoremas.

MÉTODOS DE DEMONSTRAÇÃO DOS TEOREMAS

Vários são os métodos de demonstração dos teoremas, mas falemos apenas sobre dois deles: direto e indireto.

Método direto é aquele pelo qual se utiliza a hipótese para chegar à tese.

Em geral, os teoremas apresentam-se em forma de proposições condicionais. A parte que vem entre "se,então" é a hipótese e a que vem depois de "então..." é a tese.

Na demonstração, que emprega o método dedutivo, temos que seguir um encadeamento de raciocínios para deduzir a tese da hipótese. E para concluir, em geometria, se a tese é verdadeira ou falsa, procedemos do seguinte modo:

- escrevemos o teorema sob a forma "se, então";
- desenhamos uma figura com os dados da hipótese;
- dividimos a hipótese da tese;
- usamos símbolos e abreviações de uso geral;
- justificamos cada afirmação com dados, definições, postulados e teoremas anteriormente provados.

Observe, páginas atrás, no item VI, em "Passos de uma Demonstração", os exemplos dados sobre esse procedimento. E tente demonstrá-los.

Método indireto , ou método da redução ao absurdo, ou da contradição, é aquele pelo qual se utiliza a negação da tese para chegar à negação da hipótese.

Para provar a verdade de uma afirmação, justificando a falsidade ou absurdo da contrária, procedemos do seguinte modo:

- desenhamos uma figura com os dados da hipótese do teorema proposto;
- dividimos a hipótese da tese;
- usamos símbolos e abreviações de uso geral;
- escrevemos a negação da tese, isto é, a afirmação contrária;
- provamos o absurdo da afirmação contrária, servindo-nos, para

isso, de dados, definições, postulados e teoremas anteriormente provados.

Demonstrando o absurdo, fica, pois, provada a verdade da proposição dada.

Nessa demonstração, que emprega o método indireto, conclui-se que uma proposição é verdadeira porque, se não o fosse, a contrária deveria ser aceita e disso resultaria um absurdo.

Releia, agora, no item VI, a página sobre "Métodos de Demonstração dos Teoremas" e procure demonstrar os exemplos ali apresentados e já provados.

IX - PÓS-TESTE - NÍVEL DE SUPORTE

Possivelmente você se acha em condições de responder com desembaraço as questões do presente teste.

Submeta-se, então, a essa verificação de conhecimentos, certo de que será bem sucedido.

Felicidades.

1. ESCREVA NOS PARÊNTESES AS LETRAS a,b...f, DE MODO A ESTABELECER A CORRESPONDÊNCIA DOS TERMOS DA PRIMEIRA COLUNA COM OS DA SEGUNDA:

a) Hipótese é a	( ) Proposições aceitas sem demonstração.
b) Tese é a	( ) Proposições aceitas por meio de demonstração.
c) Hipótese e tese são	( ) Forma de um teorema.
d) Teoremas são	( ) Partes de um teorema.
e) Postulados ou axiomas são	( ) Parte conhecida do teorema.
f) "Se, então" é a	( ) Parte demonstrável num teorema.

2. CONCLUA:

a) José é mais alto que Pedro.
Pedro é mais alto que Maria.
Logo, ____

b) Todos os cães são quadrúpedes.
Todos os perdigueiros são cães.
Logo, ____

3. ESCREVA, SEPARADAMENTE, NAS COLUNAS DO QUADRO ABAIXO, A HIPÓTESE E A TESE DOS TEOREMAS DADOS:

TEOREMA	HIPÓTESE	TESE
a) Se dois ângulos são retos, então suas medidas são iguais.		
b) Se a soma da medida de dois ângulos for igual a 180°, então eles são suplementares.		
c) Se o polígono tem quatro lados, então ele é um quadrilátero.		
d) Um segmento de reta tem um só ponto médio.		

4. DÊ A RECÍPROCA DAS PROPOSIÇÕES ABAIXO. ESCREVA, NOS PARÊNTESES, V OU F, CONFORME AS PROPOSIÇÕES E SUAS RECÍPROCAS SEJAM VERDADEIRAS OU FALSAS.

a) ( ) Se dois ângulos são retos, então suas medidas são iguais.

Recíproca: ( ) ____

____

b) ( ) Se duas retas se interceptam, então elas são concorrentes.

Recíproca: ( ) ____

____

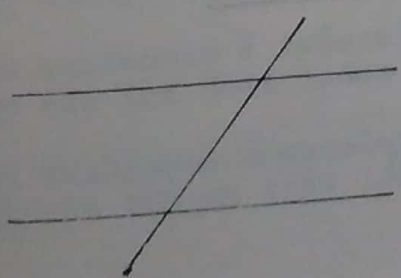
c) ( ) Se dois ângulos são suplementares, então são retos.

Recíproca: ( ) ____

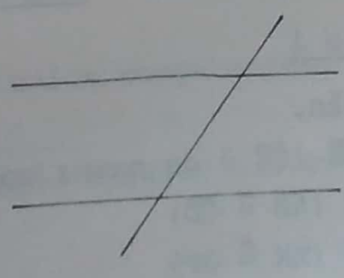
____

5. MARQUE OS ÂNGULOS AGUDOS CONGRUENTES DA FIGURA A.
MARQUE OS ÂNGULOS OBTUSOS CONGRUENTES DA FIGURA B.

a)



b)



6. DEMONSTRE O TEOREMA ABAIXO PELO MÉTODO DA REDUÇÃO AO ABSURDO:

- Um triângulo retângulo só tem um ângulo reto.

Hipótese: ______________________________

Tese: ______________________________

Demonstração

Negando a tese, diriamos: ______________________________

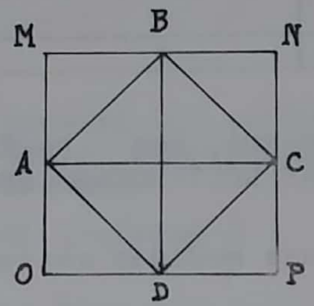
____

____

____

____

7. CALCULE AS MEDIDAS.



Se $\overline{MB}$ mede 5 metros,

- quanto mede a altura do △ ABC ?

____

- quanto mede a base do △ ABC ?

____

- quanto mede a diagonal do □ ABCD ?

____

- quanto mede o perímetro do □ MNOP ?

8. DEMONSTRE O SEGUINTE TEOREMA PELO MÉTODO DIRETO:

- Se os ângulos $\hat{P}$ e $\hat{O}$ são opostos pelo vértice, então eles são congruentes.

____

____

____

____

____

____

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

Exercício 1

Observação.

a) (x) $\overline{CE}$ ($\overline{CE}$ é de maior comprimento)

b) (x) $\cong$ ($\overline{AB} \cong \overline{CD}$)

c) (x) $\cong$ (MN $\cong$ OP)

Exercício 2

Experimentação.

Não há resposta, ou melhor, a resposta é a prática, pelo cursista, da experimentação, usando régua e compasso.

Exercício 3

Conclusões

a) Logo, a figura geométrica ABC é um triângulo.

b) Logo, Marcia e Lucia hoje completam 15 anos.

c) Logo, $AB \cong CD$.

d) Logo, ouro e prata são mais pesados que os gases.

e) Logo, o ângulo $A\hat{B}C$ é obtuso.

Exercício 4

Distinção de hipótese e tese.

a) Se um triângulo possui um ângulo obtuso,
então ele é um triângulo obtusângulo.

b) Se um polígono possui cinco lados,
então ele é um pentágono.

c) Se um triângulo é retângulo,
então ele possui um ângulo reto.

d) Se um triângulo é acutângulo,
então ele tem os três ângulos agudos.

e) Se dois ângulos têm o mesmo complemento,
então eles são congruentes.

Exercício 5

Forma "se, então".

a) Se os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ pertencem à base de um triângulo isósceles,
então os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são congruentes.

b) Se os ângulos têm lados paralelos e de mesmo sentido,
então eles são congruentes.

c) Se um triângulo é equilátero,
então ele é equiângulo.

d) Se um triângulo é isósceles
então ele tem dois lados e dois ângulos congruentes.

e) Se um triângulo é escaleno,
então ele tem os três lados e os três ângulos não congruentes.

Exercício 6

Distinção de hipótese e tese.

a) Hipótese $\left\{\begin{array}{l}\overline{AD} \text{ e } \overline{BC} \text{ são diagonais do quadrado ABCD}\\ \overline{AD} \text{ e } \overline{BC} \text{ são segmentos congruentes.}\end{array}\right.$ Tese

b) Hipótese | $E\hat{F}G \cong E'\hat{F}'G'$

Tese | $90° - m(E\hat{F}G) = 90° - m(E'\hat{F}'G')$

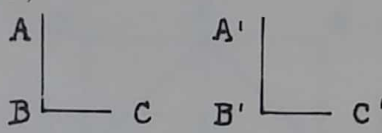
c) Hipótese | $H\hat{I}J \cong H'\hat{I}'J'$

Tese | $180° - m(H\hat{I}J) \cong 180° - m(H'\hat{I}'J')$

Exercício 7

Demonstração de teoremas.

a)



Hipótese { Os dois ∢ são retos

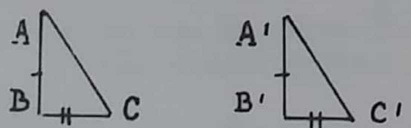
Tese { Os dois ∢ são congruentes

Demonstração por experimentação.

A m (ABC) e a m (ABC) é de 90°

Logo, ABC e ABC são congruentes e retos, c.q.d.

b)



Hipótese { △ ABC e △ A'B'C' são retângulos. B e B' são retos e $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

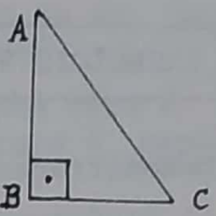
Tese { △ ABC e △ A'B'C' são congruentes.

Demonstração.

Afirma-nos a hipótese que AB ⊥ BC e A'B' ⊥ B'C'. Ora, se sobrepusésemos uma figura a outra os catetos seriam retas coincidentes. Como os catetos têm a mesma medida, as hipotenusas também seriam coincidentes. Logo, os dois triângulos retângulos são congruentes, c.q.d.

c) Hipótese { O △ é retângulo

Tese { Os ângulos agudos são complementares.

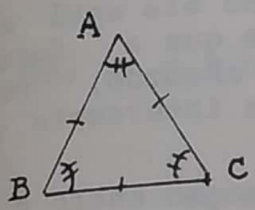


Pela hipótese sabemos que o ângulo B é reto. Já conhecemos a medida de um ângulo reto: 90°. Conhecemos o teorema que diz: a medida dos três ângulos do triângulo é igual a 180°. Ora, se de 180° tiramos o ângulo reto (180° - 90° = 90°), podemos afirmar que a soma dos outros dois ângulos será de 90°.

Logo, se ambos medem 90°, então eles são complementares, c.q.d.

d) Hipótese { O △ é equilátero.

Tese { Cada um dos seus ângulos mede 60°.



Se $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, de acordo com a hipótese, dizemos, que △ ABC é isósceles e, nesse caso, os ângulos da base são congruentes, $\hat{B} \cong \hat{C}$.

Se $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ (por hipótese), o △ ABC é isósceles e os ângulos da base são congruentes, $\hat{A} \cong \hat{C}$.

Ora, se $\hat{B} \cong \hat{C}$ e $\hat{A} \cong \hat{C}$, então $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C}$. Se a soma da medida dos três ângulos é de 180° e os três ângulos são congruentes, basta dividir 180° por 3.

Logo, 60° é a medida de cada ângulo do triângulo equilátero, c.q.d.

EXERCÍCIO 8

Proposições recíprocas e valor lógico.

a) Recíproca: (V) Todo polígono regular tem lados e ângulos congruentes.

b) Recíproca: (F) Se Jaime é sergipano, então ele nasceu em Aracaju. (Para ser sergipano não é preciso nascer em Aracaju).

c) Recíproca: (V) Se os ângulos são complementares, então a soma das suas medidas é de 90°.

d) Recíproca: (F) Se dois ângulos são congruentes, então eles são opostos pelo vértice. (Os ângulos podem ser congruentes, sem ser opostos pelo vértice).

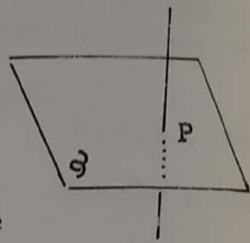
e) Recíproca: (V) Uma pessoa que não se casou é solteira.

f) Recíproca: (F) Se dois ângulos são agudos, então eles são complementares. (Podemos ter dois ângulos agudos cujas medidas são maiores que 90°. Ex: 60° + 60° = 120°).

g) Recíproca: (V) Se dois ângulos têm a mesma medida, então eles são congruentes.

EXERCÍCIO 9

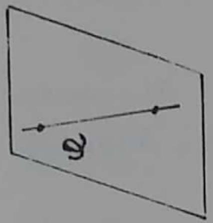
Demonstração de teoremas pelo método indireto.



I) Hipótese: A reta que intercepta o plano não pertence a este plano.

Tese: Há entre a reta e o plano apenas um ponto de intersecção.

Demonstração. Negando a tese, diríamos: "Há entre a reta e o plano dois pontos de intersecção."



Ora, se a reta liga dois pontos, então ela está contida no plano e, sendo assim, os pontos que a formam são pontos do próprio plano. Isso é um absurdo, pois contraria a hipótese que diz: "Uma reta intercepta um plano ao qual não pertence."

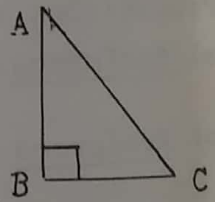
Logo, só pode haver um ponto de intersecção entre a reta e o plano, c.q.d.

II) Hipótese: As panelas são inoxidáveis.

Tese: As panelas não se enferrujam.

Demonstração. Negando a tese, afirmaríamos: "As panelas inoxidáveis enferrujam-se."

Ora, isso é impossível, pois elas se enferrujariam se fossem oxidáveis. Sucede que, como diz a hipótese, "as panelas são inoxidáveis". Logo, não são suscetíveis de oxidação ou ferrugem, c.q.d.

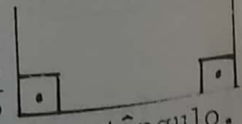


III) Hipótese: A figura é um △ .

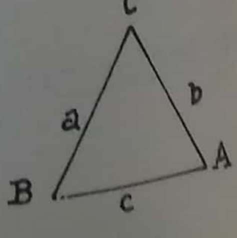
Tese: O △ não tem dois ângulos retos.

Demonstração. Negando a tese, diriamos: "O triângulo tem dois ângulos retos".

Pois bem, se o triângulo tivesse dois ângulos retos, os seus lados seriam perpendiculares à base, conforme você pode observar na figura à direita.



Ora, como o triângulo é a linha poligonal fechada com três segmentos de reta, a figura do desenho, formada de três linhas e dois ângulos retos, não poderia formar um triângulo. E a hipótese refere-se a triângulo. Logo, um triângulo não tem dois ângulos retos, c.q.d.



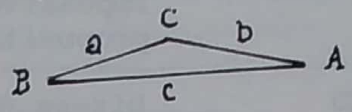
IV) Hipótese: A figura ABC é um triângulo.

Tese: $a < b + c$; $b < c + a$; $c < a + b$

(A medida de um lado de ABC é sempre menor que a soma dos dois outros lados).

Demonstração. Negando a tese, afirmaríamos: "A medida de um lado de ABC é sempre maior que a soma dos dois outros lados".

Ora, isso é ilógico, sabendo-se que "a linha reta é a menor distância entre dois pontos", ou que "a linha reta é menor que qualquer outra linha poligonal."



Logo,

a ($\overline{BC}$) $<$ b + c ($\overline{CA}$ + $\overline{BA}$); $\rightarrow$ a ou segmento de reta BC é menor que b + c ou segmentos de retas $\overline{CA}$ + $\overline{BA}$.

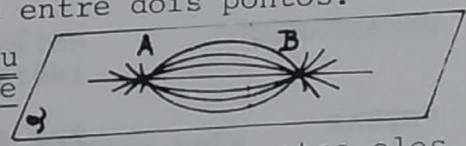
b ($\overline{CA}$) $<$ c + a ($\overline{BA}$ + $\overline{BC}$); $\rightarrow$ b ou segmento de reta $\overline{CA}$ é menor que c + a ou segmentos de retas $\overline{BA}$ + $\overline{BC}$.

c ($\overline{BA}$) $<$ a + b ($\overline{BC}$ + $\overline{BA}$); $\rightarrow$ c ou segmento de reta $\overline{BA}$ é menor que a + b ou segmentos de retas $\overline{BC}$ + $\overline{BA}$.

Ou então, a medida de um lado do triângulo ABC é sempre menor que a soma dos dois outros lados, c.q.d.

V) Hipótese: A linha AB é uma reta.

Tese: A linha reta é a menor distância entre dois pontos.



A proposição em foco é um postulado aceito por meio da observação e da experimentação.

Assinalados dois pontos num plano, traçamos entre eles algumas linhas. Porém, só podemos riscar uma reta, o que devemos fazer com o auxílio de régua. Como as demais linhas são mais longas, daí a conclusão de que "a reta é a menor distância entre dois pontos."

X - REFERÊNCIAS E SUGESTÕES BIBLIOGRÁFICAS

1. CASTRUCCI, Benedito e outros. *Matemática* - 7ª Série - 1º Grau. Coleção FTD. 1976. São Paulo, Editora FTD S.A., 1976.
2. HAESER, Ione e Gelci Bertoletti. *Matemática* - 6, Ensino Fundamental. Porto Alegre, R.S., Edições Missau Ltda., 1974.
3. NAME, Miguel Asis. *Matemática, Ensino Moderno*. 7º Série do Ensino Fundamental. São Paulo, Editora do Brasil S.A., 1974.
4. NEDEM (Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática - C.E. Paraná). *Ensino Moderno da Matemática*, 3º Vol. São Paulo, Editora do Brasil S.A., 1969.
5. RICH, Barnett. *Geometria Plana* tradução de Ricardo V.L.M. Gondim, São Paulo, Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda, 1972.
6. SANGIORGI, Osvaldo. *Matemática* - 7, Para cursos de 1º Grau. São Paulo, Editora Nacional, 1974.
7. ZAMBUZZI, Orlando. *Matemática com Estudo Dirigido*. 7ª Série, 1º Grau. São Paulo, Editora Ática, 1975.

XI - GLOSSÁRIO

ABSURDO	Impossível; errado; incoerente; ilógico; despropositado; disparatado.
BIUNÍVOCO	Diz-se de uma correspondência entre dois conjuntos, quando a cada elemento do primeiro corresponde um elemento do segundo e reciprocamente.
COMPLEXO	Composto, que não é simples; misto; misturado; imbricado; complicado; difícil; custoso de perceber.
CONSEQÜÊNCIA	Resultado; resulta; efeito; dedução; ilação;inferência; conclusão.
C.Q.D.	Abreviatura que acompanha a conclusão de uma demonstração de teorema e que significa "conforme queríamos demonstrar."
DESEMBARAÇO	Ant.de "embaraço". Facilidade; presteza; diligência; agilidade.
ENCADEAMENTO	União; conexão; concatenação de conceitos ou idéias; seriação; ligação.
FRIZAR	Por frisos em; insistir; salientar; acentuar ; assinalar; ressaltar; sublinhar.
HOMÓLOGO	Diz-se dos lados diagonais; segmentos, vértices e outros pontos correspondentes em figuras semelhantes; congruentes; correspondente.
IMPLICAR	Envolver; comprometer; enredear; enlear.
INTERCEPTAR	Cortar; dividir; tocar; cruzar; encontrar; interromper; deter.
SILOGISMO	Raciocínio formado de três proposições: a primeira chamada premissa maior, a segunda, premissa menor, e a terceira, conclusão. (A conclusão se infere da maior por intermédio da menor).
TOCANTE	Que toca; relativo; referente; concernente, no tocante a —— quanto a, no que diz respeito a, no que tange a, no que concerne a.

GABARITO DO PÓS-TESTE

Município: ---------------------------- Data da correção: --------

Cursista: --

Nº do Módulo: 131 Percentagem: ------------

1. Complemento.

   a) postulados ou axiomas;

   b) teoremas;

   c) hipótese e tese;

   d) hipótese;

   e) tese;

   f) teorema.

2. Conclusões.

   a) ... os quadrados são equiângulos;

   b) ... o quadrado é equilátero.

3. Separação da hipótese e tese.

	Hipótese	Tese
a)	Dois segmentos de reta são colineares	pertencem à mesma reta
b)	Dois ângulos são retos	os ângulos são congruentes
c)	Marta é carioca	nasceu na cidade do Rio de Janeiro.

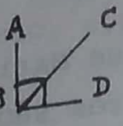
4. Proposições, recíprocas e valor lógico das mesmas.

   a) (V)
   Recíproca: (V) Se dois pontos são coplanares, então eles pertencem ao mesmo plano.

   b) (V)
   Recíproca: (V) Se o polígono tem os seus lados congruentes, então ele é equilátero.

   c) (V)
   Recíproca: (F) Se João é brasileiro, então ele nasceu em Cuiabá.
   Para ser brasileiro não é necessário nascer em Cuiabá.

5. Demonstração pelo método direto.

   Hipótese: 

   os lados externos ABD são $\perp$

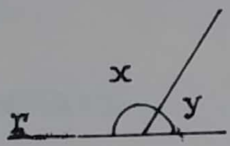
   Tese: $m(A\hat{B}C) + m(C\hat{B}D) = 90°$

Demonstração.

Se os lados externos são perpendiculares, a soma da medida dos ângulos é igual a 90°.

Como sabemos, ângulos cuja soma dão 90° são complementares. Então, ABC e CBD são complementares.

6. Demonstração de teorema pelo método da contradição.



H. { x e y são suplementares.

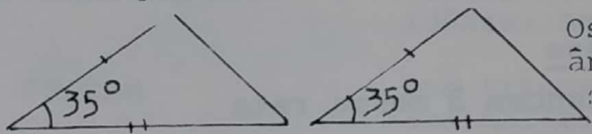
T. { x e y têm lados externos numa mesma reta.

Demonstração. Negando a tese, diríamos: "Se os lados externos dos ângulos x e y não estão numa mesma reta, então eles são ângulos suplementares."

Ora, isso é um absurdo, pois os ângulos suplementares, são por definição, aqueles que medem 180° e têm os seus lados externos formando semi-retas opostas pelo vértice.

Logo, os ângulos suplementares têm seus lados externos numa mesma reta, c.q.d.

7. Congruência de triângulos (L.A.L.).



Os triângulos que têm dois lados e o ângulo por eles formado congruentes, são congruentes (L.A.L.).

(Toda correspondência L.A.L. é um caso de congruência).

GABARITO DO PÓS-TESTE - Nível de Suporte

Cursista: ________________________ Percentagem: _______________

1. Correspondência.
   (e) ... proposições aceitas sem demonstração.
   (d) ... proposições aceitas por meio de demonstração.
   (f) ... forma de um teorema.
   (c) ... partes de um teorema.
   (a) ... parte conhecida de um teorema.
   (b) ... parte demonstrável de um teorema.

2. Conclusões.
   a) Logo, José é mais alto que Maria.
   b) Logo, todos os perdigueiros são quadrúpedes.

3. Distinção de hipótese e tese.

Hipótese	Tese
a) dois ângulos são retos	suas medidas são iguais.
b) a soma da medida de dois ângulos é igual a 180°	eles são suplementares.
c) o polígono tem 4 lados	ele é um quadrilátero.
d) um segmento de reta	tem um só ponto médio.

4. Valor lógico de proposições e suas recíprocas.

a) (V)

Recíproca: (F) Se a medida de dois ângulos é igual, então eles são ângulos retos.

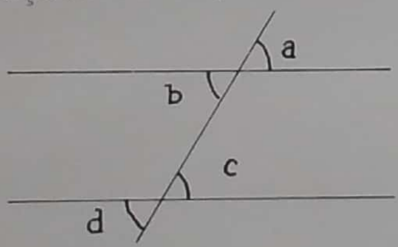
b) (V)

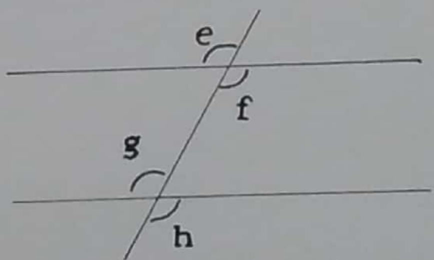
Recíproca: (V) Se as retas são concorrentes, então elas se interceptam.

c) (F)

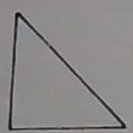
Recíproca: (V) Se dois ângulos são retos, então eles são suplementares.

5. Indicações de ângulos congruentes (agudos e obtusos).

a) 

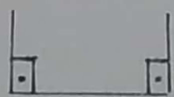
b) 

6. Demonstração de teorema pelo método de redução ao absurdo.



{ △ é retângulo,

{ tem um só reto.

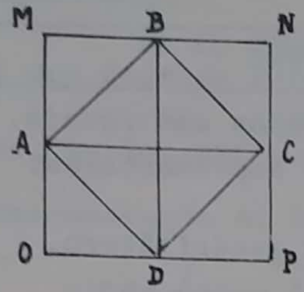


<u>Demonstração</u>.

Negando a tese, diríamos:"Se o triângulo tiver dois ângulos retos, então ele formará um triângulo retângulo.

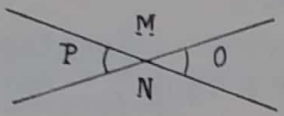
Ora, se o triângulo retângulo tivesse dois ângulos retos, então seus lados seriam paralelos e, como tal, nunca se encontrariam. Isso seria um absurdo, pois a hipótese nos afirma que a figura é um triângulo retângulo. Logo, um triângulo retângulo não pode ter mais que um ângulo reto, c.q.d.

7. Cálculo de medidas de figuras geométricas.



- altura do $\triangle$ ABC = 5 m
- base do $\triangle$ ABC = 10 m
- diagonal do $\square$ ABC = 10 m
- perímetro do $\square$ MNOP = 40 m

8. Demonstração de teorema pelo método direto.



H. $\left\{ \hat{P} \right.$ e $\hat{O}$ são opostos pelo vértice

T. $\left\{ \hat{P} \cong \hat{O} \right.$

<u>Demonstração</u>. A medida do ângulo $\hat{P}$ mais a de $\hat{M}$ é igual a 180° e a de $\hat{M}$ mais a de $\hat{O}$ é igual a 180°. Logo, a medida de $\hat{P}$ é igual a de $\hat{O}$, o que significa que $\hat{P}$ e $\hat{O}$ são congruentes, c.q.d.

$$\left.\begin{array}{l} m(\hat{P}) + m(\hat{M}) = 180° \\ m(\hat{M}) + m(\hat{O}) = 180° \end{array}\right\| \Longrightarrow m(\hat{P}) = m(\hat{O}), \text{ c.q.d.}$$

PROJETO HAPRONT:
Habilitação do Professor Não Titulado