MATEMÁTICA

PDE | GESTAR II

PROGRAMA GESTÃO
DA APRENDIZAGEM ESCOLAR

Acesse **www.mec.gov.br** ou ligue **0800 616161**

FNDE

Ministério
da Educação

MATEMÁTICA

CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO EM AÇÃO – TP4

GESTAR II

PDE | GESTAR II

PROGRAMA GESTÃO
DA APRENDIZAGEM ESCOLAR

MATEMÁTICA

CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO EM AÇÃO

TP4

CADERNO DE TEORIA E PRÁTICA

Presidência da República
Ministério da Educação
Secretaria Executiva
Secretaria de Educação Básica

PROGRAMA GESTÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR GESTAR II

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DOS ANOS/SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

MATEMÁTICA

CADERNO DE TEORIA E PRÁTICA 4

CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO EM AÇÃO

Diretoria de Políticas de Formação, Materiais Didáticos e de Tecnologias para a Educação Básica

Coordenação Geral de Formação de Professores

Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II

Matemática

Organizador

Cristiano Alberto Muniz

Autores

Ana Lúcia Braz Dias - TP2, TP3 e TP5
Doutora em Matemática
Universidade de Indiana

Celso de Oliveira Faria - TP2, TP4, TP5, AAA1, AAA2 e AAA3
Mestre em Educação
Universidade Federal de Goiás/UFG

Cristiano Alberto Muniz - TP1 e TP4
Doutor em Ciência da Educação
Universidade Paris XIII
Professor Adjunto - Educação Matemática
Universidade de Brasília/UnB

Nilza Eigenheer Bertoni - TP1, TP3, TP4, TP5 e TP6
Mestre em Matemática
Universidade de Brasília/UnB

Regina da Silva Pina Neves - AAA4, AAA5 e AAA6
Mestre em Educação
Universidade de Brasília/UnB

Sinval Braga de Freitas - TP6
Mestre em Matemática
Universidade de Brasília/UnB

Guias e Manuais

Autores

Elciene de Oliveira Diniz Barbosa
Especialização em Língua Portuguesa
Universidade Salgado de Oliveira/UNIVERSO

Lúcia Helena Cavasin Zabotto Pulino
Doutora em Filosofia
Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP
Professora Adjunta - Instituto de Psicologia
Universidade de Brasília/UnB

Paola Maluceli Lins
Mestre em Lingüística
Universidade Federal de Pernambuco/UFPE

Ilustrações

Francisco Régis e Tatiana Rivoire

DISTRIBUIÇÃO
SEB - Secretaria de Educação Básica
Esplanada dos Ministérios, Bloco L, 5o Andar, Sala 500
CEP: 70047-900 - Brasília-DF - Brasil

ESTA PUBLICAÇÃO NÃO PODE SER VENDIDA. DISTRIBUIÇÃO GRATUITA.
QUALQUER PARTE DESTA OBRA PODE SER REPRODUZIDA DESDE QUE CITADA A FONTE.
Todos os direitos reservados ao Ministério da Educação - MEC.
A exatidão das informações e os conceitos e opiniões emitidos são de exclusiva responsabilidade do autor.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Centro de Informação e Biblioteca em Educação (CIBEC)

Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II. Matemática: Caderno de Teoria e Prática 4 - TP4: construção do conhecimento matemático em ação. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.
236 p.: il.

1. Programa Gestão da Aprendizagem Escolar. 2. Matemática. 3. Formação de Professores. I. Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica.

CDU 371.13

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA

PROGRAMA GESTÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR GESTAR II

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DOS ANOS/SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

MATEMÁTICA

CADERNO DE TEORIA E PRÁTICA 4

CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO EM AÇÃO

BRASÍLIA
2008

Sumário

PARTE II

PARTE III

Apresentação

Caro Professor, cara Professora,

Estes Cadernos de Teoria e Prática de Matemática de números 4, 5 e 6 do GESTAR II é continuidade da formação iniciada no Módulo I (TP 1,2 e 3). Mesmo trazendo novos contextos, situações-problema, conceitos, conteúdos matemáticos e de educação matemática, atividades para o professor e para a sala de aula (por meio da transposição didática), textos de referências, dentre muitas outras coisas, a estrutura do material formador continua a mesma, ou seja:

A Proposta Pedagógica de Matemática do Gestar II é estruturada a partir de três eixos:

- Conhecimentos Matemáticos;
- Conhecimentos de Educação Matemática;
- Transposição Didática.

Nos materiais de ensino e aprendizagem, você encontrará conhecimentos relacionados aos três eixos.

Os ***Conhecimentos Matemáticos****, para o professor do Gestar II, são desenvolvidos em dois momentos:*

a) Apropriando-se da resolução de uma situação-problema como uma estratégia para mobilizar conhecimentos matemáticos já conhecidos ou buscar outros que emergem naturalmente no contexto.

b) Investindo na construção de conhecimentos matemáticos, a partir das situações-problema para se chegar à elaboração de procedimentos e conceitos matemáticos.

O segundo eixo de estruturação dos materiais de ensino de Matemática do GESTAR II é o ***Conhecimentos de Educação Matemática****, que perpassa os 3 elementos: situação-problema, conhecimento matemático em ação e transposição didática.*

Ao se trabalhar uma situação-problema, faz-se que o cursista vivencie um novo modo de aprender matemática, a partir de situações do mundo real, e que, para sua solução, requer a busca e a construção de conhecimentos matemáticos. Essa busca e a construção ocorrem, portanto, a partir de necessidades geradas por uma situação real e não impostas dentro de uma concepção linear de currículo. Portanto, faz-se uso de teorias de Educação Matemática para ajudar o professor a crescer em sua relação com a matemática e no modo como a utiliza em sua vida. Vivendo, na prática, um processo de educação matemática, e aprendendo mais sobre essa área do conhecimento, o professor cursista poderá entender e ajudar a construir a educação matemática de seus alunos.

Os conhecimentos relativos ao terceiro eixo de estruturação dos módulos, a ***Transposição Didática****, visam a ajudá-lo a conhecer, pesquisar e produzir situações didáticas que facilitem o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos em sala de aula. (GuiaGeral)*

Os autores.

PARTE I

TEORIA E PRÁTICA 4

- Unidade 13
- Unidade 14
- Unidade 15
- Unidade 16

GESTAR TP4

GESTAR II

TP4 - Matemática

Caro Professor, cara Professora,

Neste quarto Caderno de Teoria e Prática, alguns dos enfoques sociais e conteúdos matemáticos associados são:

• O papel da matemática no desenvolvimento do cidadão-consumidor crítico, consciente e participativo, na **Unidade 13**, apela para noções de proporcionalidade, medidas, médias, razões, arredondamentos, aproximações, erros matemáticos e seus registros. Ler e refletir o quanto a matemática molda a sociedade, sendo elemento da constituição de um cidadão crítico, é parte desta proposta.

• Na **Unidade 14**, a medição do tempo histórico, intervalos de tempo e espaço, apelando para a utilização de grandes e pequenos números, envolvem seus registros e usos, tais como a notação científica, e, de forma mais detalhada, as potências e a radiciação. Neste contexto, onde a história tem acento especial, vem à tona a possibilidade de um currículo de matemática mais integrado com outras ciências tais como a Física, Química, Astronomia e Informática. Neste último contexto, há um trabalho mais específico com o uso da calculadora. Um texto sobre multidisciplinaridade, interdisciplinaridade e transdisciplinaridade é ponto culminante da discussão. Do tema da racionalização da água, para a compreensão do eclipse, o desenvolvimento da unidade revela uma real possibilidade de um currículo de matemática mais integrado, visando um currículo em rede.

• A questão da escassez da água em nosso planeta é colocada em questão na **Unidade 15**, com uma temática altamente inquietante. A problemática lançada vai requerer mobilizar conteúdos tais como medidas, semelhanças de triângulos, figuras geométricas, e, em especial, o teorema de Tales com seus mais diversos usos em contextos significativos. Uma discussão sobre como é construído o conhecimento matemático, em especial, em sala de aula, é a leitura proposta para conclusão desta unidade.

• Para concluir, na **Unidade 16**, lançamo-nos a discutir a questão de uma sociedade mais inclusiva, com espaços, acessos, deslocamentos e equipamentos voltados às pessoas portadoras de necessidades especiais, tais como os cadeirantes. O que a matemática tem a ver com isso? Tudo a ver: nas proporcionalidades, medidas, aplicações do teorema de Pitágoras, relações métricas num triângulo retângulo, determinação de ângulos de inclinação, razões trigonométricas do triângulo retângulo, seremos lançados a mobilizar conceitos matemáticos para refletir sobre situações envolvendo a inclusão social. Um estudo sobre as demonstrações e seu espaço e valor na sala de aula é o texto de referência do final deste TP.

Feito pensando em vocês, professoras e professores do GESTAR II, esperamos que este material sirva de inquietação e motivação para a construção de uma práxis pedagógica de matemática mais animadora, a qual requer de todos nós uma formação continuada alicerçada numa educação mais democrática e humana.

Os autores.

Unidade 13

A educação matemática contribuindo na formação do cidadão/consumidor crítico, participativo e autônomo

Cristiano Alberto Muniz

Iniciando a nossa conversa

A experiência internacional mostra que os países mais competitivos são exatamente aqueles que possuem consumidores mais exigentes. Por isso, o Idec – Instituto Brasileiro de Defesa do Consumidor –, sob a coordenação do Inmetro – Instituto Nacional de Metrologia, Normatização e Qualidade Industrial –, tem publicado material educativo para a formação de multiplicadores dos conceitos de educação para o consumo, de maneira a atingir os professores e alunos de 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental de escolas públicas e privadas. Esse material tem por objetivo despertar nos jovens uma consciência crítica dos padrões de consumo da sociedade atual.

Podemos dizer que o contato do consumidor com o produto é realizado, em geral, em dois momentos diferentes: inicialmente, via publicidade, quando ficamos à mercê das informações veiculadas. Num segundo momento, via contato físico e direto com o produto, quando temos a oportunidade de explorar as informações presentes na embalagem, no rótulo, nos guias/bulas/manuais. As informações, tanto as qualitativas quanto as quantitativas, requerem do consumidor um nível de alfabetização nem sempre elementar. A alfabetização, no sentido amplo, implica uma alfabetização matemática, tecnológica, cultural e ideológica, dentre outras. O papel da aprendizagem matemática é aí de vital importância nos processos de leitura, interpretação, reflexão lógica e tomada de decisão. Desde a análise da quantidade de produto e de seus componentes, de sua durabilidade e validade, da relação custo/benefício até a decisão de compra e forma de pagamento, são mobilizados conceitos matemáticos tratados no Ensino Fundamental. Ainda podemos dizer que a tomada de decisão de compra/consumo implica questões financeiras como a relação custo/benefício, quantidade/qualidade e custo/poder de aquisição, o que nos leva a questões acerca de financiamento. Esses conceitos serão objeto de estudo na presente unidade deste primeiro caderno de Teoria e Prática do Módulo II.

Se a escola conseguir despertar em seus alunos a consciência das estratégias da publicidade e dos meios de comunicação, estará no rumo da formação do cidadão, da defesa da cultura, da educação e do diálogo entre as pessoas.

Buscaremos juntos explorar nesta unidade em que medida e em que sentido os saberes matemáticos são essenciais para esse processo de alfabetização do cidadão consciente de seus direitos.

Texto adaptado do Módulo "Publicidade e Consumo Responsável", publicado pelo Idec – Instituto Brasileiro de Defesa do Consumidor.

Definindo a nossa caminhada

Ao longo da unidade, esperamos que você possa:

1 - Com relação aos seus conhecimentos matemáticos:

- Reconhecer a importância das medidas no mundo do comércio e na vida cotidiana.
- Aprofundar e ampliar conhecimentos acerca do Sistema Internacional de Unidades – SI.
- Explorar os conceitos de números corretos, números duvidosos e números significativos no contexto das medidas e seus registros com números racionais na forma decimal.
- Mobilizar conceitos de números racionais e suas representações em situações de medidas.
- Explorar a idéia de erro matemático no contexto da medida e seus registros.
- Desenvolver estratégias de cálculos com números decimais, quando estes são registros de medidas, levando em conta a idéia de números duvidosos.
- Aplicar noções de arredondamento em situações de medidas.
- Conhecer os conceitos de medidas de tendência central: média aritmética, moda e mediana e, a partir deles, interpretar situações e tomar decisões de forma consciente e crítica.
- Reconhecer a possibilidade de diferenças de percepção de uma mesma estrutura geométrica, explorando as diferentes formas de representação via expressão numérica desta.

2 - Com relação aos seus conhecimentos sobre Educação Matemática:

- Explorar os conceitos e as representações do número racional associado à medida.
- Realizar estudo exploratório de uma situação de comércio, utilizando-se de conceitos matemáticos para tomadas de decisão.
- Investigar os usos de instrumentos de medidas em contextos reais.
- Pesquisar e refletir sobre a presença do Sistema Internacional de Unidades no contexto sócio-cultural brasileiro.

3 - Com relação à sua atuação em sala de aula:

- Explorar os conceitos e as representações do número racional associado à medida.
- Realizar estudo exploratório de situação de comércio, utilizando-se de conceitos matemáticos para tomadas de decisão.
- Investigar os usos de instrumentos de medidas em contextos reais.
- Pesquisar e refletir sobre a presença do Sistema Internacional de Unidades no contexto sócio-cultural brasileiro.

Seção 1

Resolução de Situação-Problema: Poupar ou comprar à vista? A análise de dados quantitativos para tomadas de decisão

Objetivo da seção

- Mobilizar conceitos da matemática financeira para a resolução de situação-problema socialmente significativa.
- Tomar importantes decisões a partir de análise quantitativa em situação-problema envolvendo compra a prazo.

Texto Integrando a Matemática ao Mundo Real: "Poupar ou comprar à vista?"

Analistas mostram as vantagens de se aplicar o dinheiro para a compra de um imóvel ou de um carro à vista. A diferença equivale, em alguns casos, ao dobro do valor do bem.

Melhor do que pagar juros é receber juros. Essa é a principal diferença entre financiar a compra de um bem e investir no mercado financeiro. Comparando o financiamento de um automóvel e a rentabilidade de uma aplicação em fundo composto a prazo fixo nos mesmos moldes, o coordenador do MBA de Finanças do Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais (Ibmec), Roberto Zentgraf, afirma que o investimento, em três anos, dá uma diferença de dois carros.

Faça as contas: Veja se é melhor comprar um imóvel financiado ou se é preferível investir para pagar à vista em um futuro próximo.

A compra do imóvel

Proposta de financiamento de um apartamento de quatro quartos no valor de R$ 309 mil (sem intermediárias ou parcela de entrega das chaves):

Entrada: R$ 15.450,00 no ato
2ª parcela R$15.450,00 depois de 30 dias
90 parcelas de R$3.090,00 corrigidas anualmente pelo INCC (Índice Nacional de Custo da Construção)

Total pago em 92 meses: **R$ 418.921,78**

A aplicação financeira

Resultado da aplicação financeira dos valores acima no mesmo período de 92 meses. Depósitos nos moldes do financiamento em um fundo de renda fixa, com taxa composta por diferentes índices aplicados por diferentes bancos:

Data	Quantia	Quantidade
05/11/1995	R$ 15.450,00	1 vez
05/12/1995	R$ 15.450,00	1 vez
05/01/1996	R$ 3.090,00	12 vezes
05/01/1997	R$ 3.381,00	12 vezes
05/01/1998	R$ 3.627,00	12 vezes
05/01/1999	R$ 3.727,00	12 vezes
05/01/2000	R$ 4.042,00	12 vezes
05/01/2001	R$ 4.366,00	12 vezes
05/01/2002	R$ 4.760,00	12 vezes
05/01/2003	R$ 5.352,00	6 vezes

Total líquido acumulado: **R$ 710.699,19**

Resultado:

1. O valor acumulado (R$ 710.699,19) quita um apartamento de R$ 418.921,78 (total pago em 92 meses de financiamento) com sobra de R$ 291.777,41.

2. O total acumulado equivale ao valor original de dois apartamentos, com sobra de R$ 92.699,19.

O texto foi baseado na reportagem de Sheila Raposo,
publicada do Guia Financeiro, p. 13, de 22/7/2003 do Correio Braziliense.

Situação-Problema: Comprar agora ou poupar para aquisição futura?

Sem sombra de dúvida, o valor do imóvel e o poder de poupança citados na reportagem estão longe da nossa realidade econômica de professor do Ensino Fundamental. Mas, apesar dos valores, a mesma lógica deve valer para outros valores e, neste sentido, propomos pensar uma outra situação problematizadora.

A compra do imóvel

A professora Marli deseja financiar uma casa de dois quartos no valor de R$ 61.800,00 (sem intermediárias ou parcela de entrega das chaves) e recebeu a seguinte proposta:

Entrada: R$ 3.090,00 no ato – 05/11/1995
2ª parcela: R$ 3.090,00 depois de 30 dias – 05/12/1995
90 parcelas de R$ 618,00 corrigidas anualmente pelo INCC (Índice Nacional de Custo da Construção)

Total pago em 92 meses: **R$ 103.784,20**

A aplicação financeira

Ela resolveu informar-se sobre rendimentos de uma aplicação financeira dos valores citados, em um período de 90 meses. Descobriu que o valor resgatado ao final do período, se fizesse depósitos, nos moldes do financiamento (como indicado na tabela a seguir), em um fundo composto (taxa interbancos) a prazo fixo seria:

Data	Quantia	Quantidade
05/11/1995	R$ 3.090,00	1 vez
05/12/1995	R$ 3.090,00	1 vez
05/01/1996	R$ 618,00	12 vezes
05/01/1997	R$ 676,20	12 vezes
05/01/1998	R$ 725,40	12 vezes
05/01/1999	R$ 745,40	12 vezes
05/01/2000	R$ 808,40	12 vezes
05/01/2001	R$ 873,20	12 vezes
05/01/2002	R$ 952,00	12 vezes
05/01/2003	R$ 1.070,40	6 vezes

Total líquido acumulado: **R$ 142.138,70**

Atividade 1

Estabelecer a razão entre o valor pago pelo financiamento e o valor real do imóvel para pagamento à vista, ou seja: determinar o quociente entre o valor com financiamento e o valor a vista deste.

a) O que representa tal quociente?

b) Ele é maior ou menor do que um? Por quê?

c) O que representa isso em termos de porcentagens? (Lembre-se do trabalho realizado na Unidade 3 do TP1 do Módulo I).

d) Qual a diferença entre o valor a ser pago pela casa de forma parcelada e o valor pago à vista?

e) O que essa diferença representa em relação ao valor real do imóvel?

Atividade 2

a) Compare o valor do imóvel à vista com o valor do resgate da aplicação incluindo os reajustes do investimento em 2003.

b) Caso o imóvel tenha uma valorização real de 15% neste período, a qual será incorporada ao seu preço à vista para a sua aquisição em 2003, o que vale mais a pena: a compra financiada em 1995 ou a sua aquisição em 2003, após a realização dos investimentos?

Mas as situações da vida real são, em geral, bem mais complexas do que aquelas presentes nos contextos didáticos. Assim, nossa situação-problema deve levar em conta outras variáveis que a tornem o mais próxima possível da realidade. Isso implica maior complexidade matemática e demanda habilidades mais próximas das exigências da vida cotidiana.

Se aquele professor está interessado na aquisição da casa própria, é porque, em geral, mora de aluguel, dispendendo parte do seu salário mensal para a moradia da sua família, recurso este que não tem volta. Assim, temos que considerar, nesta situação, além do investimento mês a mês, a necessidade de pagamento do aluguel do imóvel onde o professor mora.

Atividade 3

Tome uma decisão sobre a compra da casa, levando em conta o valor final do imóvel, o valor final do investimento a ser resgatado e a questão do aluguel. Suponha que a professora Marli paga um aluguel de 200 reais por mês, reajustado anualmente em 20%. Há duas maneiras de se considerar o aluguel:

1. Se a compra da casa for feita após o investimento, você deverá aumentar, no preço a ser pago pela casa, além da valorização do imóvel, a despesa feita com o aluguel durante os anos de financiamento.

2. Se a compra da casa for feita em 1995, você deve subtrair do custo final financiado o valor economizado com o aluguel.

Atividade 4

a) Se a soma do valor do aluguel mais os valores a serem poupados por mês devem corresponder no máximo a 1/3 da renda familiar, de quanto deve ser essa renda?

b) Para um casal de professores de seu município, essa é uma situação possível? Ou seja, poderia tal família assumir tal projeto de aquisição do imóvel?

Considerando apenas um mês no ano de 2003:

Valor do aluguel considerando reajuste desde 1995: ______________________________

Valor do depósito mensal para investimento/poupança: ___________________________

Total da despesa mensal com moradia: ____

Considerando que esse valor deve ser de, no máximo, 1/3 da renda familiar, isto implica uma renda familiar mínima de ____

Se a renda familiar é composta do salário do casal de professores, considerando que ambos têm a mesma renda mensal, o salário do professor deve ser, neste contexto, de, no mínimo, ____

Afinal, é fácil transformar o sonho da casa própria em realidade, considerando tal contexto e as atuais realidades sócio-econômicas? Por quê?

Seção 2

Artimanhas do comércio: quando o conhecimento das estratégias de medição e o registro de medida contribuem para a educação do consumidor

Objetivo da seção

- Reconhecer a importância das medidas no mundo do comércio e na vida cotidiana.
- Aprofundar e ampliar conhecimentos acerca do Sistema Internacional de Unidades – SI.
- Explorar os conceitos de números corretos, números duvidosos e números significativos no contexto das medidas e seus registros com números racionais na forma decimal.
- Mobilizar conceitos de números racionais e suas representações em situações de medidas.
- Explorar a idéia de erro matemático no contexto da medida e seus registros.
- Desenvolver estratégias de cálculos com números decimais, quando estes são registros de medidas, levando em conta a idéia de números "duvidosos".
- Aplicar noções de arredondamento em situações de medidas.
- Interpretar situações e tomar decisões de forma consciente e crítica a partir do conceito de medidas de tendência central: média aritmética, moda e mediana.
- Reconhecer as possibilidades de se perceber de maneira diferente uma mesma estrutura geométrica, explorando as diferentes formas de representação a partir de expressões numéricas.

Princípios para a correta medição e registro

Inicialmente, gostaríamos de lançar uma reflexão: "Por que no comércio não utilizamos réguas ou trenas feitas com material elástico? Por que sempre são utilizados na produção de instrumentos de medidas lineares materiais que não são elásticos?"

O desenvolvimento do espírito de um consumidor crítico, além de conhecimento das questões de cunho financeiro, como aquelas tratadas na Seção 1, e das relações entre salário, custos, investimentos (com seus juros), requer uma grande atenção quanto às especificações dos produtos de consumo, tanto as de ordem qualitativa quanto as de ordem quantitativa. No momento, vamos nos ater às questões quantitativas dos produtos e refletir sobre o quanto o conhecimento matemático está implicado nestas questões de consumo e nas tomadas de decisão do cidadão consumidor consciente de seus direitos. Inicialmente, vamos ler o texto abaixo disponível no "site" do Inmetro (www.inmetro.gov.br/noticias/conteudo/455.asp, de 07/08/2003):

> Dos 76 produtos da cesta básica analisados entre os dias 8 e 10 de julho pelo Instituto de Pesos e Medidas de São Paulo (Ipem - São Paulo) da Secretaria da Justiça e da Defesa da Cidadania, 46 apresentaram quantidade abaixo da especificada na embalagem – um percentual de erro de 60%. Na capital, foram verificados 30 pro-

dutos, dos quais 13 apresentaram irregularidades (margem de erro próxima de 50%). Entre os maiores erros estavam o feijão tipo 1 Eureka, de 1kg, que apresentou 13,60g a menos na média e ainda cinco embalagens com erros de até 21,70g a menos; café torrado moído tipo Barcelona, de 250g, que estava com 1,90g a menos, na média; feijão tipo 1 Zão Castelo Branco, de 1kg, com 6,90g a menos na média. Já no interior paulista, de 46 produtos analisados, 33 (71%) apresentaram peso inferior ao indicado na embalagem.

www.inmetro.gov.br/noticias/conteudo/455.asp, de 07/08/2003

Alguns elementos devem ser especialmente observados no texto do Ipem:

- A pesquisa trata de centros urbanos, onde se espera uma maior capacidade de fiscalização e de controle por parte do Estado. Se isso ocorre nestes locais, o que poderemos encontrar nos locais mais interioranos do Brasil?
- As porcentagens estão longe de apontar valores insignificantes, uma vez que aproximadamente metade de alguns produtos apresenta erros.
- É interessante observar que os "erros" são sempre "para menos", ou seja, sempre para o prejuízo do consumidor. Para alegação de erro na medição (que veremos a seguir), o Instituto de Pesos e Medidas poderia identificar erros "para mais", mas isso nunca é o caso, o que nos leva, como consumidores, a crer em "erros" intencionais para aumentar a margem de lucro dos fabricantes.
- Se, para o consumidor que consome pouca quantidade do produto, essa diferença pode não ser tão significativa, o mesmo não é verdade a longo prazo e também para a indústria e o comércio que vendem grandes quantidades.

Esses pontos revelam o quanto o consumidor consciente deve estar atento para as questões que envolvem as medidas dos produtos comercializados e por ele consumidos.

Atividade 5

Analisando o caso do feijão Eureka, perguntamos:

a) Quanto ganha em quilogramas o fornecedor em cada tonelada vendida de acordo com a diferença entre o peso real e o peso anunciado na embalagem?

b) Considerando que o preço do quilograma deste feijão ao consumidor seja de R$ 2,59, de quanto é o ganho indevido por tonelada?

c) Para um consumidor que compra 1kg por semana, qual será o seu prejuízo ao final de um ano?

Articulando conhecimentos

Alguns nomes complicados muitas vezes são significados de coisas bem simples, como é o caso das «Mercadorias Pré-Medidas». Mercadorias Pré-Medidas são todos e quaisquer produtos embalados e/ou medidos sem a presença do consumidor e que estejam em condição de comercialização. Esses produtos representam, nos dias de hoje, 85% de tudo aquilo que consumimos. Significa que, ao serem adquiridos, esses produtos já foram mensurados, sendo obrigatória a impressão da quantidade pesada ou medida em suas embalagens ou em seu próprio corpo, o que chamamos de indicação quantitativa. Essa obrigatoriedade se dá por dois motivos:

- Para orientar os consumidores no momento de sua aquisição.
- Para permitir que o Inmetro, por meio da Rede Nacional de Metrologia, fiscalize constantemente tais produtos, visando garantir ao consumidor que a quantidade do produto embalado é exatamente igual à quantidade declarada na sua embalagem.

www.inmetro.gov.br/consumidor/premedidos.asp

O Inmetro faz algumas recomendações ao consumidor quando este adquire uma mercadoria pré-medida:

- Todo produto deve ter indicações quantitativas em sua embalagem ou em seu corpo.
- Leia com atenção as indicações da embalagem e da etiqueta.
- Não se engane com indicações do tipo: "Tamanho família", "Super grande" e outros.
- Produtos em conservantes, caldas ou salmoura não consideram estes ingredientes na indicação do peso na embalagem.
- Produtos cárneos (de carne) e derivados do leite devem ter o peso da embalagem descontado na hora da pesagem.

www.inmetro.gov.br/consumidor/premedidos.asp

A medição de produtos na presença do consumidor é feita com a utilização de instrumentos de medidas, cujo funcionamento, manejo e correção nem sempre são de conhecimento deste. Tais conhecimentos mobilizam, de forma segura, conceitos e procedimentos matemáticos que, mesmo trabalhados nas escolas, não são usados apropriadamente nos contextos reais do comércio pelo aluno consumidor.

O instrumento de medida é o dispositivo utilizado para a realização de uma medição. No âmbito da Metrologia Legal, os instrumentos de medição são utilizados no comércio, nas áreas de saúde, segurança e meio ambiente e na definição ou aplicação de penalidades (efeito fiscal). São exemplos de instrumentos de medida:

- **Comércio:** balança, hidrômetro, taxímetro, bomba medidora de combustível.
- **Saúde:** termômetro clínico, medidor de pressão sangüínea (esfigmomanômetro).
- **Segurança:** cronotacógrafo, medidor de velocidade, etilômetro (ou bafômetro - um aparelho eletrônico destinado a fornecer medidas precisas do grau de impregnação alcoólica de um indivíduo, por meio da análise do ar alveolar expirado, técnica utilizada por agentes encarregados de fazer o cumprimento da lei para controle e fiscalização do abuso de bebidas alcoólicas por parte dos condutores de veículos automotores).
- **Meio ambiente:** analisador de gases veiculares, opacímetro, módulo de inspeção veicular.
- **Efeito fiscal:** medidor de velocidade de veículos, analisador de gases veiculares.

Os instrumentos de medição sujeitos ao controle metrológico apresentam selos que impedem o seu uso indevido e etiquetas identificando a validade da última verificação metrológica na forma «VERIFICADO».

www.inmetro.gov.br/consumidor/instrumentosmedicao.asp

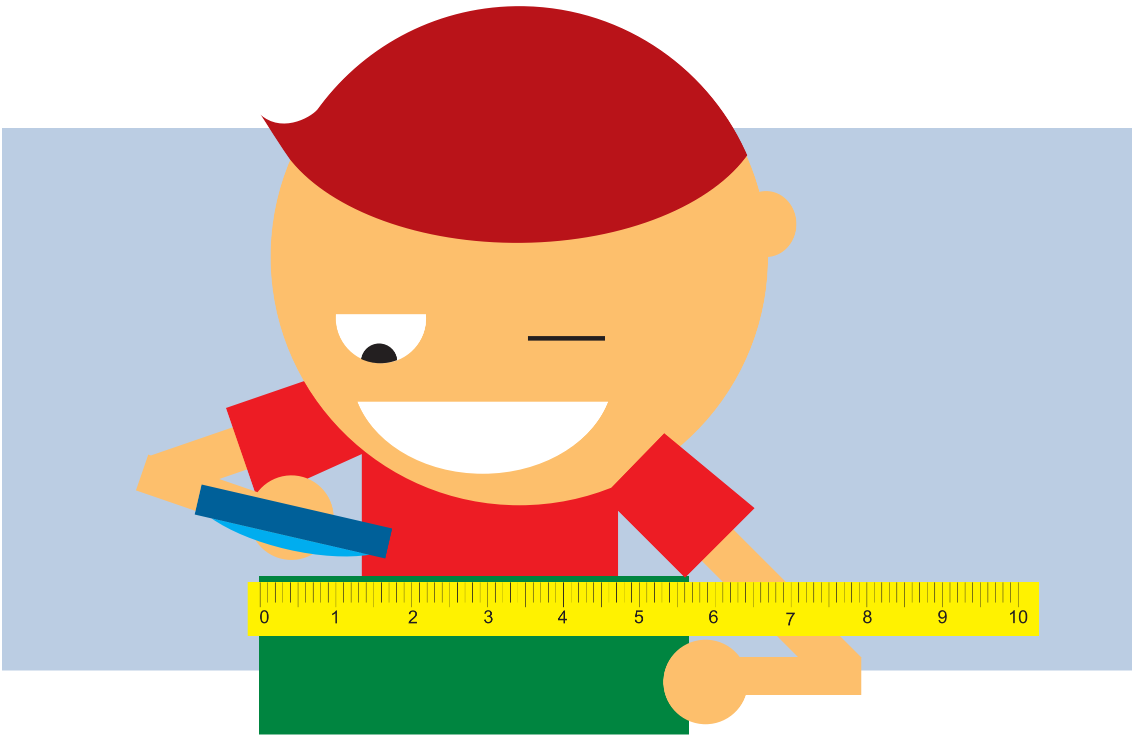
Para a participação criteriosa e competente do consumidor no processo de medição do produto, o Inmetro propõe as seguintes recomendações a estes, as quais implicam, cada uma delas, conceitos matemáticos tratados na escola:

- Acompanhe sempre com interesse a medição. Essa atitude desestimula eventuais tentativas de fraude.
- Antes de verificar qualquer medição, confirme se o instrumento parte do "0" (zero).
- Não compre termômetros clínicos ou medidores de pressão sangüínea que não tiverem a aprovação do Inmetro.
- Na bomba medidora você deve estar atento ao combustível correto para o seu tipo de veículo e se o instrumento está zerado no início do abastecimento. Descer do veículo facilita o acompanhamento da medição.
- Os taxímetros devem iniciar a medição a partir da "bandeirada" e contabilizar os quilômetros por meio de valores monetários constantes, ou seja, a cada quilômetro rodado, um mesmo valor monetário será cobrado.
- Evite a utilização de táxis que sejam de outros municípios ou que não transmitam confiança.
- Reclame sempre que se sentir lesado.

www.inmetro.gov.br/consumidor/instrumentosmedicao.asp

Erros inadmissíveis e erros inevitáveis

Não há justificativa para erros na quantificação do produto quando este for contado. Por exemplo, como justificar a falha do comerciante que erra para menos na contagem ao vender para o cliente uma dúzia de bananas? Entretanto, no caso de medição, ou seja, quando a quantificação do produto for feita em medida de massa, capacidade, volume, temperatura, dentre outros, sempre haverá um erro naturalmente inerente ao processo de medição e de registro da quantidade contínua. Esse tipo de erro de natureza matemática que é previsível e que pode ser controlado será objeto de estudo neste momento em especial, porque traz ao cidadão ferramentas matemáticas que podem permitir uma visão mais crítica e participativa diante do mundo do consumo.



Tal fato nos permite questionar a concepção da Matemática como uma ciência absolutamente exata. Isso é verdade quando lidamos com quantidades discretas (contadas e limitadas), porém, em outras quantidades, a Matemática busca de forma explícita tal exatidão. Como ela não é sempre presente, construiu-se a noção do cálculo do erro, onde o matemático pode prever qual a proporção do erro nas medidas e nos cálculos efetuados.

A exatidão na Matemática e os erros nas medidas

O erro presente nas medidas requer um procedimento de registro desses no campo da matemática, o qual faça com que se leve em conta que sempre há um valor na representação que não corresponde exatamente à realidade. Em outras palavras, o resultado de uma medida é sempre uma aproximação e, portanto, o registro numérico de uma medida deve levar em conta tal fato, o que será objeto de discussão mais adiante.

Lembremos que, quando nos referimos a um valor ligado a uma unidade de medida, isto significa que, de alguma forma, foi realizada uma medição. Assim, expressamos, por meio de um registro, o resultado de uma medição (o que implica a escolha de uma unidade conveniente padrão, de mesma natureza da grandeza a ser mensurada). Uma medida deve, portanto, ser expressa por exemplo como:

Valor numérico

Unidade legal de medida

15,8 cm

Prefixo da unidade

Na discussão acerca do consumidor crítico, tema explorado também na Unidade do TP1, vamos nos ater ao significado do valor numérico que expressa a medida e refletir o quanto isso é importante no contexto da vida sócio-cultural e o quanto isso não é valorizado pela escola como objeto de ensino nas aulas de Matemática – o que é evidenciado por pesquisas em dezenas de livros didáticos utilizados em escolas brasileiras. Tais pesquisas apontam que o tema é objeto de ensino somente nas aulas de Física do Ensino Médio. O professor de Física trata dessa importante questão antes de introduzir conceitos físicos que implicam medições, uma vez que o significado desse valor numérico traz importantes conseqüências em termos de resultados concretos.

Articulando conhecimentos

O termo metrologia significa «conhecimento dos pesos e medidas e dos sistemas de todos os povos, antigos e modernos» (Dicionário Aurélio, 1986, p. 1129). Podemos também dizer que trata da ciência das medidas e é tão importante para as ciências físicas e naturais, como para o campo das tecnologias. Devemos considerar que, em parte, podemos estudar os processos de medição e instrumentos de medidas como elementos integrantes das culturas ao longo da história humana. Ressalta-se que, neste terceiro milênio, os homens não possuem um único sistema de medidas, e a pluralidade dos sistemas de medidas é objeto de estudo científico e de debate por parte dos cientistas, uma vez que há a necessidade de acordos acerca da constituição de um Sistema Internacional de Unidades. Foi no período da Revolução Francesa que se criou o primeiro sistema racional de medidas, portanto é algo ainda recente na história da humanidade. Em 20 de maio de 1875, deu-se a internacionalização deste sistema por meio da Convenção do Metro, que criou o *Bureau International des Poids et Mesures* (Escritório Internacional dos Pesos e Medidas), situado em Sèvres, na França. O atual Sistema Internacional de Unidades (SI) foi criado durante a 11ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, em 1960, compreendendo duas classes de medidas:

- As unidade de base: metro, quilograma, segundo, ampére, kelvin, mol (quantidade de matéria, utilizado na química), candela (unidade de medida de intensidade de luminosa, que dá origem ao termo candelabro e candelária).
- As unidades derivadas: (como, por exemplo, metro por segundo e volt) compreendem as unidades derivadas adimensionais (radiano e esterradiano).

É interessante notar que o quilograma é unidade de base do SI, mesmo sendo composta (quilo + grama), o que pode ser discutido na escola, em especial, na sala de aula.

"As definições das unidades de medidas de base evoluíram no decorrer da história, sempre que as necessidades de exatidão de certos usuários não eram atendidas. A cada mudança, a principal preocupação dos metrólogos era evitar qualquer ruptura no valor da unidade, fazendo com que o intervalo de incerteza do novo valor ficasse contido no antigo. Além disso, na medida do possível, sempre se procurou definições de caráter universal utilizando constantes da física em vez de objetos únicos depositados em um dado lugar. O único contra-exemplo hoje é o da unidade de massa." (Inmetro, 1999, página 11).

É desta forma que vemos evoluir o significado do metro, que passa de uma medida baseada no quadrante do meridiano terrestre no século XVIII, para a sua vinculação atual com o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo, durante um intervalo de tempo de 1/ 299 792 458 de segundo.

O Brasil adotou oficialmente o SI em 1962 e o ratificou pela Resolução nº 12 de 1988 do Conselho Nacional de Metrologia, tornando-o de uso obrigatório em todo o território nacional. Isso nos revela o quanto é recente a adoção do SI no Brasil. Entretanto, o sistema métrico foi adotado no Brasil em 1862, não muito tempo depois de sua criação na França.

FROTA, M. N. e OHAYON, P. *Padrões e Unidades de Medidas: referências metrológicas da França e do Brasil*. Rio de Janeiro: *Bureau National de Métrologie* e Laboratório Nacional de Metrologia do Inmetro, 1999.

Datas importantes na história da metrologia brasileira:

ANO – DESCRIÇÃO

1830 - Início da história da metrologia brasileira. Projeto de adoção do sistema métrico decimal, a partir do reconhecimento da imperfeição do sistema métrico herdado de Portugal.

1862 - D. Pedro II, com a Lei Imperial nº 1.157, estabelece que o sistema de pesos e medidas será substituído pelo sistema métrico francês.

1872 - Implantação do Sistema Métrico Decimal no Brasil.

1875 - 17 países assinam a Convenção do Metro, em Paris, dentre eles o Brasil.

1877 - Criado o Bureau Internacional de Pesos e Medidas – BIPM.

1880 - Comparação do padrão brasileiro com os do BIPM.

1881 - Adoção internacional do Sistema CGS (centímetro, grama e segundo).

1905 - I Conferência Nacional de Pesos e Medidas.

1927 - Implantação Legal do Sistema Métrico Decimal no Brasil.

1930 - Regulamentação para a calibração de pesos e medidas sem alterações nas tabelas de taxas.

1931 - Por falta de recursos, o Brasil se desliga da Convenção do Metro.

1933 - O Ministério do Trabalho, Indústria e Comércio – MTIC incorpora o Instituto Nacional de Tecnologia.

1938 - Promulgação da Legislação Metrológica – Decreto-lei nº 592.

1938 - O INT assume a gestão de um sistema de metrologia legal no âmbito nacional.

1940 - Criação da Associação Brasileira de Normas Técnicas – ABNT.

1945 - Primeiro concurso público de formação de metrologista (RJ).

1948 - Conferência Internacional de Pesos e Medidas.

1952 - Institucionalização do Sistema Internacional de Unidades – SI.

1952 - Obrigação de indicação da quantidade de produto comercializado em embalagem lacrada.

1953 - Reintegração do Brasil à Convenção do Metro.

1954 - Foram escolhidas seis unidades fundamentais: metro (extensão, definição desde 1889); quilograma (padrão de massa, desde 1889); segundo (tempo); ampére (corrente elétrica, desde 1948); metro-quadradao (área); metro cúbico (volume). Apenas a unidade de tempo não tinha definição aprovada pelo CGPM.

1956 - Criação da Organização Internacional de Metrologia Legal – OIML.

1960 - O Brasil participa da Conferência Geral de Pesos e Medidas – CGPM, que cria o Sistema Internacional de Unidades.

1961 - Reestruturação do Ministério da Indústria e Comércio, determinada pela Lei nº 4.048/61, criando o Instituto Nacional de Pesos e Medidas – INPM, e transferindo as atividades de cunho metrológico do INT para este novo órgão.

1962 - I Convenção Nacional de Órgãos Metrológicos, realizada no Rio de Janeiro.

1967 - Primeira formulação de uma Política Nacional de Metrologia e a criação do Fundo de Metrologia, para financiar o aparelhamento e a manutenção dos serviços metrológicos.

1973 - Nasce o Sistema Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial – Sinmetro.

1974 - Instalação do Conselho Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial – Conmetro.

1978 - O Conselho, completando o processo de detalhamento do Sinmetro, define os critérios para a certificação de conformidade às normas brasileiras, o regulamento para a organização do subsistema de certificação de qualidade de produtos industriais, e cria o Comitê Nacional de Metrificação.

1982 - Aprovação do novo regulamento metrológico nacional.

1985 - Formulação do Programa de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico – PADCT.

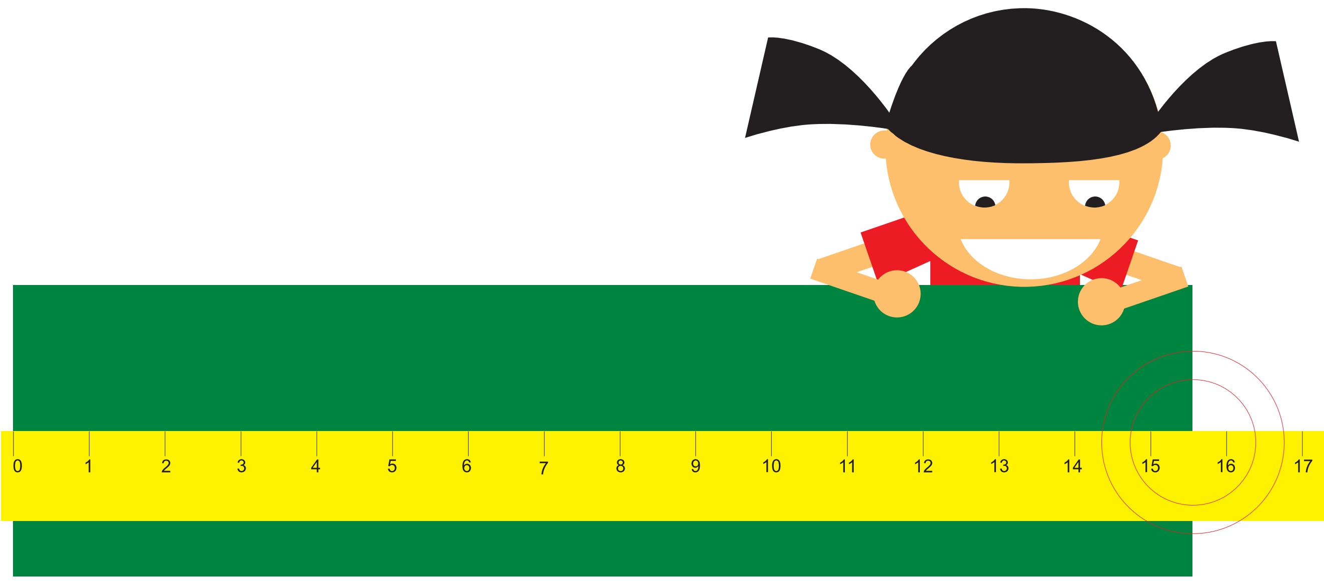
1987 - Inauguração, no Laboratório Nacional de Metrologia, no campus de Xerém, dos Laboratórios de Fluidos, Força, Massa, Medidas Industriais e Pressão da Divisão de Mecânica.

2000 - Assinatura do Acordo de Reconhecimento Mútuo para Credenciamento de Laboratórios entre o Inmetro e o International Accreditattion Cooperation – ILAC.

2002 - A Pesquisa CIC/Ibope mostra que o Inmetro é conhecido por 63% da população brasileira. Dentre os que o conhecem, 90% confiam nele e 80% utilizam as suas informações em decisões de compra.

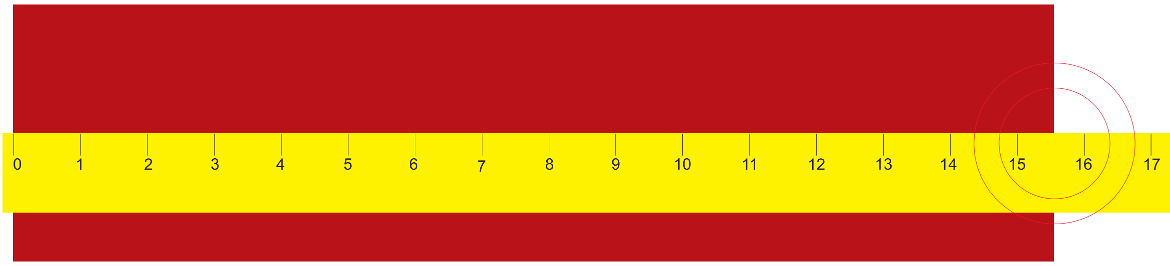
A confiabilidade dos resultados de medidas – algarismos significativos

Tomemos um exemplo concreto e real a partir do registro de medida de 15,8cm. Façamos uso de uma régua centimetrada (sem marcação de milímetros) para medir o segmento de reta abaixo:



Professor, dos números utilizados para registrar a medida deste segmento, quais expressam com certeza este comprimento?

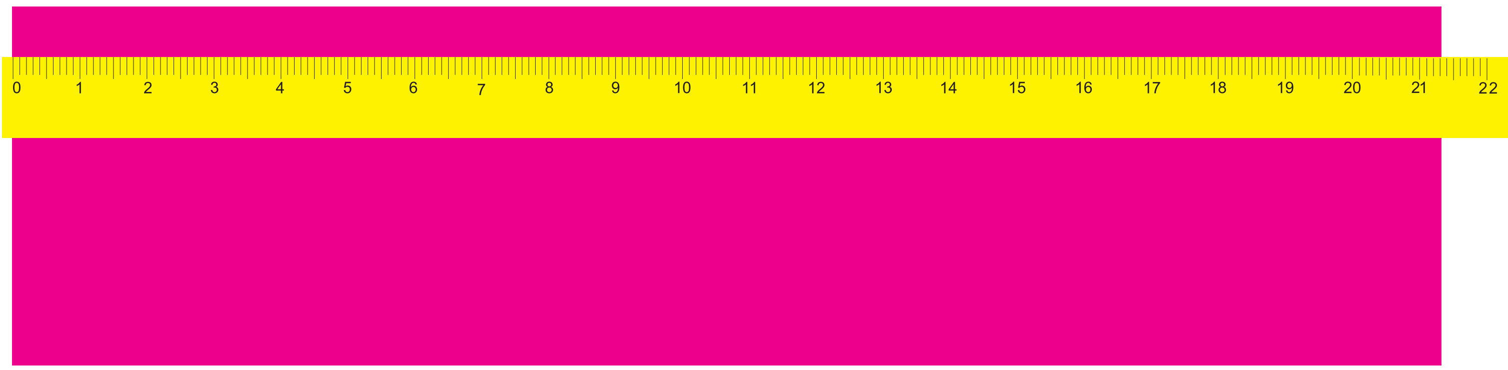
Por certo, o 15 não nos impõe qualquer margem de dúvida quanto à sua veracidade. A leitura do instrumento de medida (a régua, neste caso) nos revela que o segmento tem 15 centímetros. Mas o comprimento é maior do que este valor; temos, além desta medida, os milímetros. Já que não podemos lê-los com a régua, podemos estimá-los, digamos, em 8 milímetros.



Dizemos, assim, que, nesta medida, o 1 e o 5 são **algarismos corretos**, já o 8 é dito **algarismo duvidoso**, uma vez que é obtido por uma avaliação sustentada pela percepção visual que pode ser questionada (em uma discussão entre dois observadores diferentes). Em toda medida, temos o valor numérico, que é composto pelos algarismos corretos e por um algarismo duvidoso. Os algarismos corretos e o algarismo duvidoso formam o que a ciência denomina de **algarismos significativos**.

Tomemos outro exemplo[1]:

"Suponha que você vá medir a largura de uma folha de papel, utilizando duas réguas: uma com escala (que foi objeto de estudo na primeira unidade do TP1 do Módulo I) em centímetros e outra com escala em milímetros. Veja a seguir como fazer. Com a **régua em centímetros:** supondo que a largura da folha esteja entre 21 e 22cm, deve-se acrescentar um algarismo ao número 21. Para isso, imaginemos o espaço compreendido entre esses dois números divididos em dez partes iguais e, então, avaliemos o algarismo. A largura da folha de papel poderá ser expressa como sendo de 21,3cm. Os algarismos **2** e **1** são **algarismos corretos**, pois foram obtidos pelas divisões existentes na régua. O **3** é um **algarismo duvidoso**, pois foi obtido por avaliação. **Com a régua em milímetros:** neste caso, é possível um maior número de algarismos significativos. Supondo que a largura da folha esteja entre 21,3 e 21,4cm, deve-se imaginar o espaço entre esses dois números dividido em dez partes iguais e estimar quantas dessas divisões estariam incluídas na medida da folha. Por exemplo, a medida poderá ser expressa por 21,37cm.



1. PARANA, D. N. da S. *Física – Mecânica*. Volume 1. São Paulo: Ática, 1998.

Nesta medida, os algarismos corretos são 2, 1 e 3, e o 7 é o algarismo duvidoso. Quando se trata de uma medida com quatro algarismos significativos (como 21,37cm), o resultado obtido pela régua milimetrada é mais preciso. Quanto maior o número de algarismos significativos mais precisa é a medida.

Assim, na indústria e no comércio, considera-se que os produtos que, para a sua quantificação, implicam medição, têm sempre no registro de sua quantidade a presença de algarismos significativos. No caso do papel higiênico, a medida é linear, sendo utilizado o metro como unidade. A parte inferior a esta unidade, que seria medida em centímetros, é desconsiderada. O mesmo acontece com produtos líquidos ou com aqueles que são pesados. Toda e qualquer medida expressa na embalagem implica a presença de algarismos significativos. Uma balança digital que acusa um peso de 851g não está levando em conta a possível existência ainda de uma massa equivalente a até 0,999999g. A diferença pode ser para menos ou para mais. Caso se queira maior exatidão, ou seja, uma maior quantidade de algarismos significativos, um instrumento mais preciso é requerido. A necessidade de maior precisão depende, em parte, da natureza do produto comercializado. Medicamentos e produtos dietéticos destinados a dietas rigorosas requerem maior precisão e, para eles, portanto, são adotados instrumentos mais precisos, unidades de medidas menores e maior quantidade de algarismos significativos.

Atividade 6

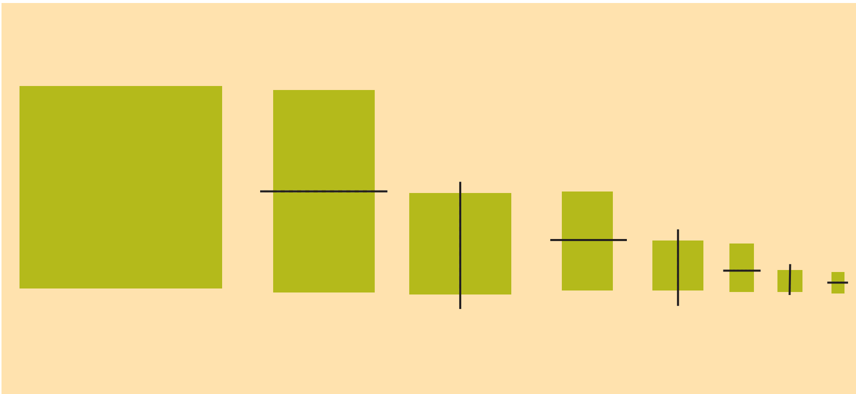
Uma indústria pesava um produto com uma balança que indicava o peso até o décimo do quilograma. O Inmetro passou a exigir a utilização de um instrumento mais preciso, dando a medida até o centésimo do quilograma. Considere que um mesmo saco deste produto é medido nas duas balanças, sendo que na primeira obtém-se como medida 1,5 kg e na segunda, 1,52 kg.

a) Supondo que ambos os instrumentos registrem as medidas com o número correto de algarismos significativos, quais os algarismos corretos e duvidosos de cada medida?

b) As medidas obtidas são iguais? Justifique.

Articulando conhecimentos

Essa aproximação é conceitualmente atrelada à noção dos números racionais (e mesmo dos irracionais), associada à noção de densidade do conjunto numérico. Assim, dados dois números racionais, sempre podemos encontrar um terceiro entre eles (por exemplo, o racional que representa a média aritmética entre os dois racionais dados). Este processo pode ser indefinidamente repetido.



Quanto ao processo de medição, uma noção semelhante pode ser associada. Na medição, por exemplo, de comprimento, sempre poderemos exigir maior precisão, tendo como valor numérico da medida um racional com novas casas decimais, sempre aumentando a quantidade de números significativos, podendo revelar a noção de densidade do conjunto dos números racionais.

Densidade de um conjunto numérico
Um processo para a eliminação dos algarismos duvidosos: o arredondamento

Esta aproximação, ou seja, a eliminação dos algarismos duvidosos do valor numérico da medida, é realizada por meio do processo de arredondamento, assim executado:

- Se o primeiro algarismo a ser abandonado for menor do que cinco, o último algarismo mantido permanece inalterado, por exemplo:

5,32**3**m ⟶ 5,32m

- Se o primeiro algarismo a ser abandonado for maior do que cinco, acrescenta-se uma unidade ao algarismo mantido, por exemplo:

$$1{,}14\mathbf{8}l \longrightarrow 1{,}15l$$

- Se o primeiro algarismo a ser abandonado for o cinco, é opcional o acrescentamento ou não de uma unidade ao último algarismo mantido, por exemplo:

$$251{,}5g \longrightarrow 251g$$

ou

$$251{,}5g \longrightarrow 252g$$

Mas como funciona tal regra no comércio? Ela é respeitada? Em que casos há arredondamento para mais e quando há para menos? Quando o comércio se dispõe a abrir mão de um lucro?

Atividade 7

Na entrada dos postos de gasolina há um painel com os preços do litro de cada tipo de combustível. O que é intrigante é que sempre aprendemos na escola que o Sistema Monetário Brasileiro considera apenas duas casas decimais, denominadas de centavos (partes em cem), e o que constatamos nesses painéis é a presença de três casas decimais para expressar o valor do litro de combustível.

a) Como podemos justificar tal fato, aparentemente incongruente ao que se aprende nas escolas?

___

___

___

___

b) Se o preço do combustível é indicado por três casas decimais (R$ 1,899) e o volume de abastecimento é registrado com apenas uma casa decimal (38,4l), o preço a ser pago, matematicamente calculado, é indicado com quantas casas decimais?

c) Entretanto, o valor final cobrado pelo combustível é dado com duas casas decimais. Que tipo de arredondamento aí prevalece?

d) Isto implica vantagem ou desvantagem para o consumidor? Por quê?

Erros de medidas e eliminação de números duvidosos na operação

Na prática, somente os algarismos significativos devem ser considerados, de forma que, ao realizarmos operações com medidas, alguns procedimentos devem ser levados em conta:

Para a adição e a subtração de medidas:

- A parcela com menor número de casas decimais é considerada a de maior importância, garantindo maior precisão no resultado da operação. As demais são reduzidas ao mesmo número de casas decimais que a de menor número de casas decimais, obedecendo aos critérios de arredondamento tratados anteriormente.
- Exemplo: 5,14m + 12,122m + 3,378m – 0,025m.
  O número com a menor quantidade de casas decimais é 5,14, com duas casas, e todos, portanto, serão arredondados para duas casas decimais:

5,14 → 5,14

12,122 → 12,12

3,378 → 3,38

0,025 → 0,02 ou 0,03, ou seja

5,14 + 12,12 + 3,38 - 0,02 = 20,62m

Isso pode garantir um trabalho operatório com algarismos significativos, eliminando-se, na medida do possível, os algarismos duvidosos.

Para a multiplicação e a divisão, opera-se normalmente com os valores, mas, no resultado final, é levado em conta como o mais importante o número que possuir a menor quantidade de casas decimais, sendo o resultado aproximado, de forma que fique com a mesma quantidade de casas decimais deste. O arredondamento do resultado reduzindo o número de casas decimais deve seguir também os procedimentos anteriormente trabalhados.

Assim, ao dividirmos 6,8769m por 0,023, operamos com os números:

$$6{,}8769\text{m} \div 0{,}023 = 298{,}99565\text{m}$$

Como o número com menos casas decimais possui três casas, o resultado deve ficar com esta mesma quantidade de casas decimais, ou seja:

$$298{,}99565\text{m} \longrightarrow 298{,}996\text{m}$$

porque o quarto algarismo é 6, mudando portanto a terceira casa de 5 para 6, pois esta casa decimal fica aumentada em 1 (veja que simplesmente arredondando pelo corte das demais casas decimais ficaríamos com 298,995m).

Esses são procedimentos presentes no nosso dia-a-dia e utilizados por organismos como o Inmetro, que tratam do controle e fiscalização das medidas no campo da metrologia. Essa presença acaba por passar desapercebida pelo cidadão menos avisado e que não está ligado aos seus direitos.

Atividade 8

Caro professor, coloque-se no lugar de um consumidor exigente e crítico que busca questionar os procedimentos utilizados para medir e calcular o preço da confecção sob medida de um espelho para ser encaixado na sala da sua casa. O espelho, com dimensões obtidas por meio das devidas e rigorosas medidas do cliente, deve ter 2,2452m por 1,815m. No orçamento feito pelo vidraceiro, podemos ver:

Vidraçaria TRANSPARÊNCIA

SB/Norte Qd. 05 Bl. H Sl 900 Ed. Central Brasília - Asa Norte - Brasília - DF

CNPJ: 05.264.297/0001-51 CF/DF: 07.278.387/001-70

NOTA FISCAL DE SERVIÇOS MODELO - 3

Usuário Final / Remessa / Subcontratação / Entrada

DATA LIMITE P/ EMISSÃO: 18/04/2006

1ª Via Branca - 2ª Via Azul - 3ª Via Amarela

Nº 0046

Tomador do serviço ou destinatário.

Endereço

Cidade | Estado | Fone

Insc. CNPJ/ MF | Insc. CF/DF

Cond. de Pagamento | Data de Emissão / /

Cód.	Quant.	DESCRIMINAÇÃO	Alíq.	PREÇO Unitário	PREÇO TOTAL
1	8,121m	MOLDURA			
2	4,076 m²	ESPELHO			

Orçamento válido por 7 dias, para pagamento à vista, condicionado a disponibilidade do material e não a reajuste pelo fornecedor.

Deduções Legais: | TOTAL

Base de Calculo do ISS | Valor do ISS

Informações Complementares | Nº de Controle do Formulário 637289

GRÁFICA GETSEMANI LTDA-ME. Av. Central Bloco 1645 Lote 2/4 Loja 06 - Fone: (61) 386-1103 - N. Bandeirante Brasília - DF CNPJ 02.913.661/0001-33 - CF/DF 07.392.267/001-94 - 18/04/2005 - 05 Blocos 25X3 Vias de 001 a 125 - AUT. 123002252/2005

O vendedor e o professor Antônio travam uma discussão acerca das medidas, pois Antônio afirma categoricamente que os seus valores devem ser: 8,12m de moldura e 4,075m² de espelho. Segundo você, professor do GESTAR, quem tem razão e por quê?

Quando o produto é de ingestão humana, em especial, quando se trata de medicamentos, a responsabilidade em torno das medidas aumenta de forma significativa: a absorção inadequada de um medicamento pode ser altamente prejudicial à saúde, levando até mesmo à morte.

Atividade 9

Um analgésico deve ser ingerido na quantidade de 3mg/kg de massa corporal, mas a dose administrada não pode exceder 200mg. Cada gota contém 5mg do remédio. Quantas gotas devem ser prescritas a um paciente de 80kg?

As relações entre o paciente e o médico e entre o paciente e o farmacêutico devem ser estabelecidas de forma a não ficar margem de dúvida quanto às dosagens, medidas e efeitos colaterais do medicamento. Portanto, a questão das medidas se reveste de importância vital no campo da saúde. Vamos juntos refletir sobre o caso seguinte, freqüente na vida cotidiana do cidadão:

"Dona Carolina levou sua filha a um pediatra, pois a menina estava com febre alta. Felizmente, o problema era apenas uma amigdalite (inflamação das amígdalas). Dona Carolina saiu da clinica médica e foi imediatamente para a farmácia, onde adquiriu o medicamento indicado no receituário médico. Chegando em casa tarde da noite, às 23 horas, foi imediatamente medicar a filha que deveria tomar uma dose do medicamento a cada 12 horas. Entretanto, ficou surpresa e apreensiva ao constatar que, no receituário, o médico mandou-lhe dar para a criança 10ml do medicamento, enquanto o frasco era acompanhado por um medidor graduado em "**cc**". Sem saber de qualquer tipo de relação entre os **ml** indicados no receituário e os **cc** marcados no medidor e estando àquela hora tanto a clínica quanto a farmácia fechadas, Dona Carolina procurou ler a bula do medicamento e descobriu que o cc do medidor significa **centímetros cúbicos**. Mas qual seria a relação entre tais unidades de medida. Muito inquieta, Dona Carolina resolveu procurar o seu vizinho, Sr. Antônio, professor de Matemática, muito esperto e curioso.

De imediato, o professor Antônio não soube dizer qual a relação entre ambas as medidas, mas, como estava participando de uma formação continuada, lembrou-se de que, no primeiro Caderno de Teoria e Prática, havia trabalhado com a relação entre o litro e o decímetro cúbico:

1 decímetro cúbico = 1 litro

A partir disto, o professor Antônio pôde descobrir a relação entre o ml e o centímetro cúbico."

Busque você mesmo descobrir tal relação, a partir das informações abaixo, que você deverá, inicialmente, completar:

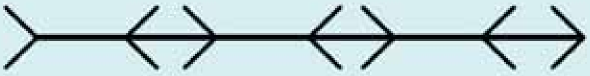
$1\ dm^3 =$ __________ cm^3

1 l = __________ ml

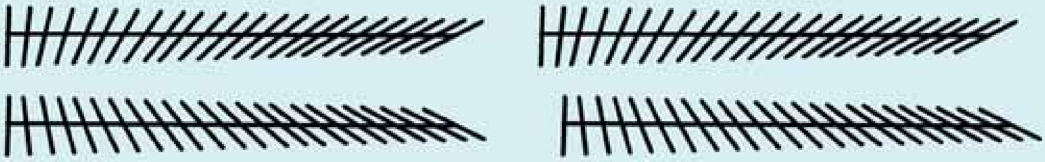
Artimanhas da propaganda: as formas enganosas

Não apenas as questões acerca das medidas e dos seus registros devem ser objeto de preocupação e atenção por parte do consumidor crítico e participativo. Elementos envolvendo as formas e proporções (que já foram temas de estudo no primeiro módulo desta formação do GESTAR) são critérios utilizados no comércio para convencer o consumidor a adquirir um certo produto em detrimento da compra de outro da concorrência. As empresas apelam para as tomadas de decisões baseadas nas primeiras impressões sobre o produto.

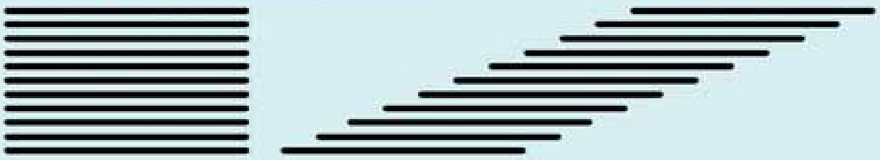
Quantas vezes no supermercado nos pegamos escolhendo um produto pelo formato da sua embalagem, uma vez que o nosso olhar nos trai, nos induzindo a acreditar que uma embalagem mais alta, por exemplo, possui mais produto do que uma segunda, com um formato diferente e mais baixa. Não é nada interessante para o cidadão deixar-se levar pelas impressões apenas sensoriais (visão, olfato, tato) para tomar a decisão na hora da aquisição de certo produto. Há a necessidade de se buscar as mais diversas informações quantitativas e qualitativas sobre o produto e de se refletir sobre elas para uma tomada de decisão consciente. Mas, por que é tão importante uma reflexão mais detalhada sobre essas informações? Para responder a essa questão, vamos "brincar" um pouco com nossas impressões sensoriais, para que percebamos o quanto os nossos olhos podem nos levar a falsos julgamentos, mesmo contrariando todo um conjunto de conceitos matemáticos que possuímos.



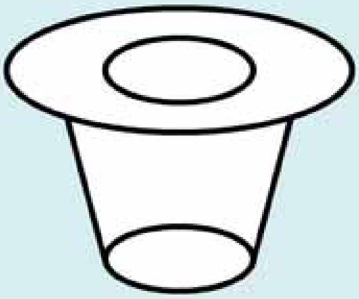
Estas linhas são paralelas?

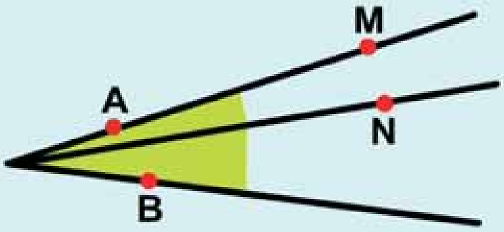


Quais os traços são mais curtos: os da direita ou os da esquerda?



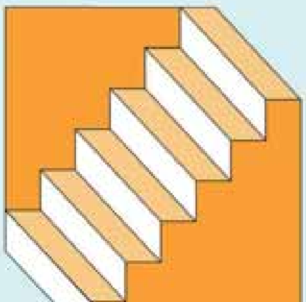
Qual elipse é maior: a de baixo ou a interna superior?





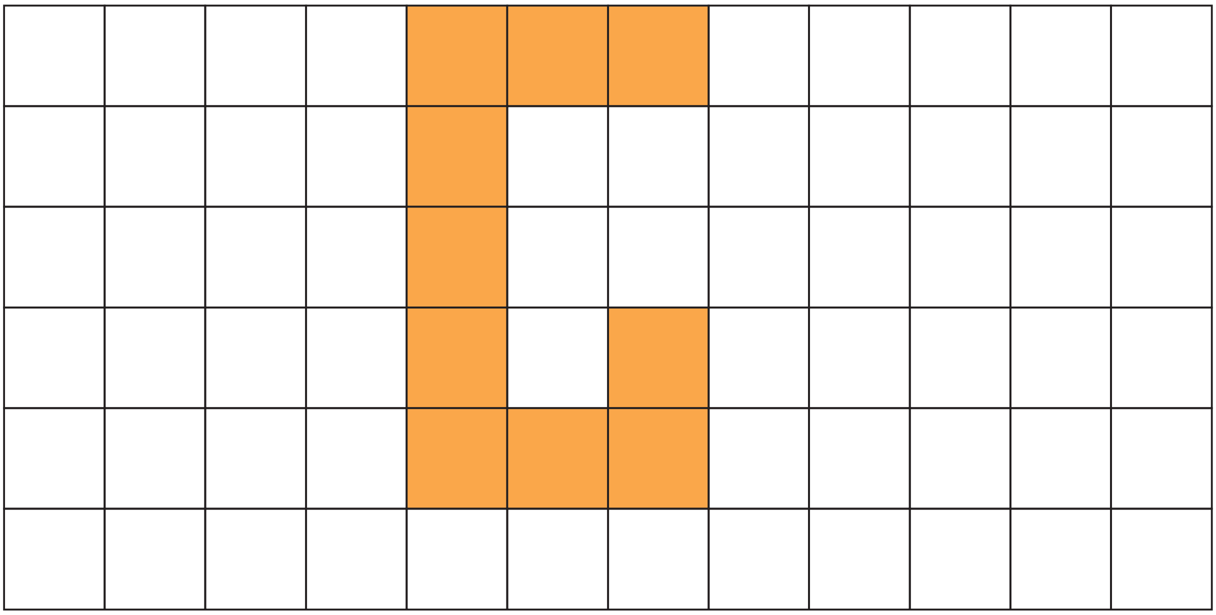
Qual a distância é maior: entre os pontos AB ou entre os pontos MN?

De quantos modos podemos perceber a figura ao lado? Quais são eles?



O último exemplo mostra que as diferenças na forma de visualização não implicam necessariamente erro, mas, ao contrário, dizem respeito a possibilidades reais de se conceber, matemática e fisicamente, determinadas estruturas a partir de diferentes formas de visualizá-las. Tais diferenças são conseqüências das várias possibilidades que o nosso sistema nervoso central tem para operar com as informações captadas pelo sistema sensorial.

Isto pode nos possibilitar tratar da diversidade de maneiras de captação de uma dada realidade e de como fazemos o seu registro na forma matemática. Por exemplo, a figura que aparece na malha abaixo pode ser vista, se tomarmos cada quadradinho como valendo uma unidade, como sendo equivalente a diferentes expressões numéricas. Cada expressão numérica retrata uma forma diferente de se ver e conceber a figura.



$$3 + 3 + 3 + 1 = 10 \text{ ou}$$

$$5 + 2 + 2 + 1 = 10 \text{ ou}$$

$$(3 \times 5) - (2 \times 3) + 1 = 10,$$

dentre muitas outras formas possíveis. Você conseguiu vê-las assim? Quais outras formas existem de visualizar e de representar matematicamente esta figura por meio de expressões numéricas? Aqui trata-se de ilusão de ótica ou de aplicação de conhecimento matemático? Observe que a forma de como “enxergar” e representar tal estrutura geométrica depende, sim, dos conceitos matemáticos que possuímos. O mesmo acontece diante do mundo do comércio: a forma de concebermos as ofertas de consumo dependerá dos conceitos matemáticos que possuímos.

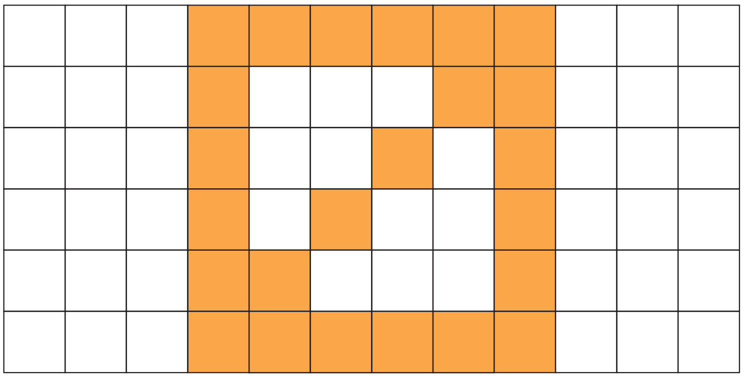
Aprendendo sobre Educação Matemática

Aí, temos em questão um importante papel da presença da matemática na escola: a construção de conceitos matemáticos que irão permitir ao sujeito uma visão mais crítica e participativa da sua realidade sócio-cultural.

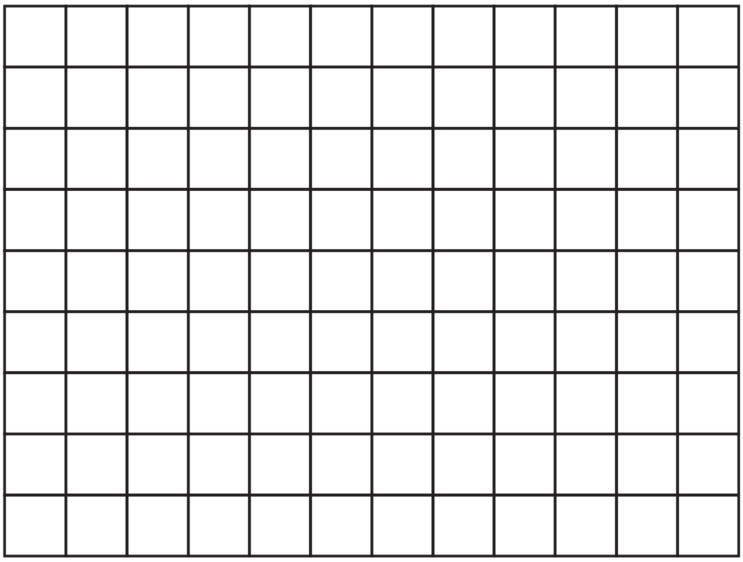
Atividade 10

Escreva, em forma de expressão numérica, diferentes maneiras de se visualizar a estrutura abaixo (pelo menos oito formas diferentes), considerando o quadradinho como sendo a unidade.

a)



b) Na malha abaixo, represente geometricamente a expressão: $(6^2 - 2^2) + (3 \times 4)$



Aprendendo sobre Educação Matemática

Na nossa discussão acerca da formação do cidadão consumidor crítico, devemos apontar para o fato de que não são somente as propostas que envolvem situações de comércio que contribuem para a formação de competências nessa perspectiva. Muitas vezes algumas habilidades mais próprias do campo do conhecimento matemático favorecem o desenvolvimento de estruturas mentais que possibilitam, quando transferidas para outros contextos, contribuir para um posicionamento mais crítico e participativo do sujeito diante do mundo. Esse é o tema do nosso Texto de Referência, que oferecemos para a sua leitura e reflexão, quando poderemos aprofundar o fato de o conhecimento matemático participar da "formatação do mundo sócio-cultural".

Voltando ao **Iniciando a nossa conversa** desta primeira unidade, e relembrando também o conteúdo do texto inicial, baseado no módulo "Publicidade e Consumo Responsável", publicado pelo Idec, observa-se a importância de o consumidor crítico interpretar os conteúdos das mensagens publicitárias. Novamente, o conhecimento matemático reveste-se de fundamental importância no desenvolvimento de competências neste aspecto.

As distorções das médias

Vamos, para encerrar esta Seção 2, trabalhar em dois diferentes contextos nos quais as informações, se não forem bem interpretadas, podem nos levar a falsos julgamentos e, por conseqüência, à tomada de decisões inadequadas.

Veja a tabela abaixo:

INFORMAÇÃO DA RENDA *PER CAPITA* DE ALGUNS PAÍSES, NO ANO DE 2003, SEGUNDO A UNESCO

País	Renda *per capita* em US$
Uganda	251
Nigéria	393
Índia	560
Bolívia	935
Paraguai	1018
China	1121
Portugal	2823
BRASIL	**2871**
Argentina	3508
Alemanha	28978
Suíça	33586

Fonte: http://portal.unesco.org/ci/en/ev.php-URL_ID=1295&URL_DO=DO_TOPIC&URL_SECTION=201.html em 27 de abril de 2006.

"A renda per capita brasileira é bem superior à 2.000 dólares, enquanto que na Suíça é de 33.586 e na Alemanha de 28.978 dólares, países considerados desenvolvidos. Com tal

renda *per capita*, o Brasil está na categoria de país em desenvolvimento. Países com renda *per capita* inferior à 1.000 dólares são considerados economicamente subdesenvolvidos, tais como a Bolívia, Índia, Nigéria e Uganda, conforme dados da tabela anterior."

Um leitor menos avisado pode estranhar tal realidade. Afinal, sabendo que tais valores são em dólares, e obtidos pelo quociente entre a Renda Interna do País, no ano, pelo número de sua população, isso pode nos fazer crer, numa visão ingênua, que cada brasileiro tem, **em média**, uma renda média anual de aproximadamente 2.871 dólares. Vamos fazer alguns cálculos elementares e refletir sobre tal dado:

Consideremos o valor de 1 dólar como sendo R$ 2,50. Isso nos dá uma renda *per capita* de R$ 7.177,50 anuais. Dividindo por 12 (um ano igual a doze meses), isso nos leva a uma renda *per capita* mensal para cada brasileiro de R$ 598,12. Fiquemos com apenas os quinhentos reais. Assim, uma família de tamanho médio, casal e dois filhos, devem ter, considerando o valor da renda *per capita* brasileira, uma renda de R$ 2.000,00.

Isso está muito longe de traduzir a realidade sócio-econômica brasileira, assim como não podemos tomar o índice "renda *per capita*" para retratar o desenvolvimento econômico médio do país. Então, onde está a diferença lógica entre o cálculo de tal índice e a realidade?

Observe que novamente recaímos na discussão de conceitos matemáticos, uma vez que o índice da renda *per capita* é definido como quociente entre Produto Interno do País e o número que representa nossa população. O índice considera, de forma implícita, a **noção de média**, um conceito que pode distorcer de forma considerável determinada informação ou realidade. Se considerarmos a alta concentração da riqueza do Brasil numa pequena classe social, a divisão do Produto Interno do País não poderá traduzir de que forma essa riqueza está realmente distribuída. Observamos na realidade que a grande maioria dos brasileiros está muito longe de ter uma renda mensal de R$500,00.

Informações veiculadas ao grande público, baseadas em "médias", podem trazer grandes distorções e provocar equívocos imperdoáveis. Exploremos tal fato na atividade seguinte:

Atividade 11

Procurando emprego, Mário encontra o seguinte anúncio:

> Microempresa do setor de serviços gerais, com salário médio de R$ 1.500,00, contrata imediatamente auxiliar de escritório, com formação secundária, não exigindo experiência anterior. Jornada de trabalho de 44 horas semanais, auxílio transporte e vale alimentação. Interessados enviar Curriculum Vitae à CP. 45.443, CEP 70.000 – 000 nesta Capital. O prazo de recebimento é até 29 de fevereiro de 2003.

Imediatamente, Mário envia o seu currículo. Afinal, nos dias atuais, está difícil um emprego com essas condições e, em especial, com o salário próximo ao valor da renda *per capita* brasileira. Foi com alegria que Mário recebeu, uma semana depois, um telegrama convocando-o para a contratação. Empolgado, não entrou em detalhes sobre o salário mensal a receber, afinal, já estava implícito no anúncio.

Entretanto, ao final do primeiro mês de trabalho, triste surpresa! Ao receber seu contracheque, descobriu que o seu salário bruto era, na verdade, de apenas R$300,00.

a) Segundo você, professor, o que ocorreu? Havia alguma inverdade no anúncio?

b) Procurando saber o que realmente aconteceu, como a função que desempenhava lhe dava acesso a toda documentação de contabilidade da microempresa, descobriu a folha mensal de pagamento desta:

Pedreiro	→	R$ 500,00
Ajudante de Pedreiro	→	R$ 300,00
Auxiliar de Escritório	→	R$ 300,00
Servente	→	R$ 300,00
Eletricista	→	R$ 600,00
Encanador	→	R$ 400,00
Diretor/proprietário	→	R$ 8.100,00

Calcule o "salário médio" desta microempresa e verifique se houve alguma informação incorreta no anúncio.

Articulando conhecimentos

"A média aritmética é usada como medida de tendência central, ou seja, como forma de, por meio de um único número, dar uma idéia das características de determinado grupo de números. No entanto, é importante ressaltar que em algumas situações a presença de um valor bem maior ou bem menor que os demais faz com que a média aritmética não consiga traçar o perfil correto do grupo. Consideremos, por exemplo, um grupo de pessoas com idades de 2, 3, 2, 1, 2 e 50 anos. A média de idade, que é de 10 anos, não demonstra as características desse grupo em termos de idade. Em casos como esse são usadas outras medidas de tendência central, como a moda e a mediana."(Dante, 2000, p. 282).

Vemos nesta situação, assim como no caso da renda *per capita*, que a média aritmética nem sempre traduz realmente a realidade. Portanto, existem outros conceitos matemáticos que permitem uma maior aproximação da realidade em consideração, os quais são denominados de **medidas de tendência central**, além da média aritmética, como a mediana, a moda e as medidas de dispersão (esta última não trabalhada nesta formação). Entretanto alguns destes conceitos já foram objeto de estudo no Módulo I de nossa formação.

MODA enquanto média de tendência central

Em estatística, a **moda** é o valor de maior freqüência no grupo de valores considerados. Uma alta freqüência de um certo valor no grupo de valores faz com que a tendência da média aproxime-se desta **moda**. Por exemplo, em uma sala de aula de 5ª série, a maior freqüência de alunos com 11 anos de idade faz com que a média de idade da turma tenda para 11 anos. Quando há grande quantidade de alunos com defasagem idade/série, esta média foge dos 11 anos de idade.

Qual é a **moda** dentre os salários da microempresa da Atividade 11? A **moda**, sendo neste caso, medida de tendência central, tem um valor mais realista? Por quê?

MEDIANA como média de tendência central

Outra medida que podemos utilizar é a **mediana**. Dentro de um conjunto de números colocados em ordem crescente, a **mediana** é o valor que divide o conjunto em dois grupos iguais. Assim, se o conjunto possuir um número ímpar de valores, a **mediana** é o valor do meio, desde que os valores estejam posicionados na ordem crescente ou decrescente. Caso o conjunto possua um número par de valores, a **mediana** é obtida pela média aritmética dos dois valores que se encontrem na posição central. A mediana permite verificar quais valores estão em posição mais privilegiada em relação à ordem crescente dos valores e quais estão em situação inferior.

Atividade 12

Para encontrar a mediana dos salários da microempresa, Mário distribuiu, em ordem crescente, os diferentes valores dos salários na tabela abaixo:

Qual é a **mediana** do conjunto de salários? Ela é mais próxima da realidade da folha de pagamento? Em que sentido a **mediana** é mais apropriada para retratar tal realidade?

Resumindo

Até este ponto da Unidade, podemos dizer que, por meio das atividades e textos, pudemos explorar:

- A importância das medidas no comércio e na vida cotidiana.
- Aspectos do Sistema Internacional de Unidades.
- Os cuidados a se ter ao lidar com medidas e seus registros.
- Os conceitos de algarismos corretos, algarismos duvidosos e algarismos significativos no contexto das medidas e como operar com os mesmos.
- A utilização dos números racionais para representar e operar com esses.
- A noção de erro, em se tratando de quantidades contínuas e suas medidas.
- O conceito e os procedimentos de arredondamento de registro de medidas.
- A interpretação e a tomada de decisões de situação-problema significativa, utilizando-se de conceitos matemáticos.
- Diferentes formas de representação, via expressão numérica, de uma mesma estrutura geométrica.

Seção 3

Simulando situações na sala de aula: a possibilidade de os alunos mobilizarem conhecimentos matemáticos desenvolvendo habilidades voltadas para a formação do cidadão consumidor crítico

Objetivo da seção

- Refletir sobre o papel do professor no processo da transposição didática.
- Aplicar, junto aos alunos, atividades lúdicas que permitam explorar os conceitos de números racionais, suas representações, e compará-los na reta numerada.
- Desenvolver com os alunos pesquisa no comércio local, utilizando-se de conceitos matemáticos para o desenvolvimento de um espírito mais crítico e participativo do jovem consumidor.
- Realizar pesquisa acerca da presença do Sistema Internacional de Unidades na realidade local.
- Investigar e discutir sobre aspectos específicos do Sistema Internacional de Unidades que se refletem na nossa realidade.

No mesmo espírito da transposição didática realizada no Módulo I desta formação do GESTAR II, vamos agora propor a transferência das experiências oportunizadas pelas atividades das Seções 1 e 2 para a sala de aula, em atividades a serem desenvolvidas com nossos alunos. Isto implica uma nova construção de conhecimento de nossa parte, pois, se nas primeiras seções o objetivo central era o "fazer matemática" e a sua resignificação pelo professor em formação no GESTAR II, o momento da transposição didática requer uma reelaboração destas experiências pensando nos nossos alunos, nas suas realidades, potencialidades, interesses e na própria dinâmica de produção de conhecimento em sala de aula, a partir de um contrato didático coletivamente constituído.

Nesta perspectiva, essa transposição didática deve levar em conta alguns aspectos importantes, tais como:

- A necessidade de inserção no projeto pedagógico de conteúdos de significado sócio-cultural para o aluno, envolvendo situações que favoreçam a formação do cidadão crítico e participativo.
- A importância da competência do professor na criação de situações de simulações da vida real envolvendo o mundo do consumo, requerendo a análise das ofertas e a tomada de decisões.
- Nas atividades matemáticas, favorecer, entre os alunos, a discussão, o desenvolvimento do poder argumentativo, o confronto de diferentes pontos de vista, o levantamento e comprovação ou refutação de hipóteses, habilidades tão importantes para o desenvolvimento do espírito crítico e participativo do cidadão. São, portanto, competências transversais que extrapolam o contexto da matemática, mas que têm um papel fundamental de formação e de desenvolvimento do indivíduo dentro de seu tempo e de seu mundo.

Vimos, na Seção 2, que a noção do número decimal, bem como saber comparar e representar esse tipo de número são habilidades revestidas de grande importância em contextos sócio-culturais. Entretanto, observa-se que os alunos têm grandes dificuldades acerca do conceito de números racionais e de sua representação, o que é um elemento dificultador para o desenvolvimento de competências. Assim, propomos a realização de uma atividade lúdica que contribua na construção do conceito de número racional e sua representação na reta numerada.

Aprendendo sobre Educação Matemática

Atividade Lúdica na Educação Matemática

As análises da atividade matemática desenvolvida no campo da pesquisa científica do jogo na aprendizagem matemática levam-nos a conceber o jogo como um mediador do conhecimento e de representações sociais da Matemática. Por conseqüência, o jogo deve ser um objeto de estudo e de interesse de todos os educadores matemáticos e daqueles que querem ensinar Matemática tendo o contexto sociocultural como primeira fonte de produção do conhecimento do aluno.

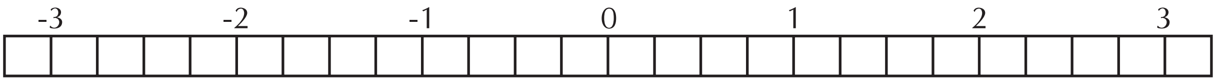
Outro aspecto a destacar é o fato de que a aprendizagem matemática é fundamentada sobre o processo de resolução de problemas produzidos e resolvidos ao longo do jogo. O educador busca incorporar aos jogos pedagógicos elementos, considerando que o jogo com estruturas matemáticas favorece a aprendizagem. Porém, a simples presença de estruturas matemáticas no jogo não garante a realização de certas atividades matemáticas, e mais, a presença de certa atividade matemática no brincar não é garantia absoluta da existência de aprendizagem. Pudemos constatar nas investigações que a garantia da aprendizagem matemática no jogo está ligada à participação das regras matemáticas nas regras do brincar, e a garantia é estabelecida se, na realização do jogo, o aluno é obrigado a seguir as regras do jogo que traduzem, por sua vez, regras matemáticas. (Muniz, 1999)

Atividade 13

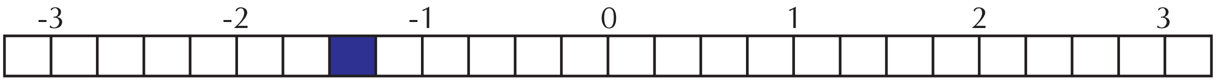
O jogo da batalha entre submarinos

Este jogo é uma adaptação da Batalha Naval, onde cada aluno tem uma certa variedade de embarcações de guerra naval, as quais devem ser utilizadas para atingir o inimigo. Da mesma forma que atacamos o adversário, este nos contra-ataca. As embarcações são localizadas em um plano cartesiano e, sem ver, cada um na sua vez, deve, ditando a abscissa e a ordenada, atingir uma embarcação adversária. Quando atingido, o inimigo informa qual o tipo da embarcação atingida, sabendo que cada uma tem um formato diferente. Embarcação atingida, temos que descobrir, dando tiros sucessivos, a sua posição no espaço.

Na nossa adaptação, o jogo ocorre entre dois alunos, possuindo cada um uma folha com a reta numerada, como esta:



Cada qual deve marcar em sua régua um submarino que tem a dimensão de 0,25. Por exemplo:



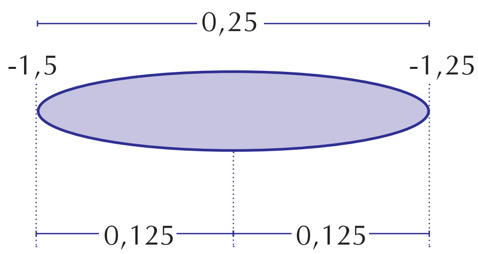
Da mesma forma o fará o adversário, sem que um veja a posição do outro. O objetivo é atingir o submarino do adversário para afundá-lo. Afundar o submarino significa atingi-lo bem no meio. Os tiros devem ser dados um a um, cada um na sua vez, ditando-se um valor numérico compreendido entre as extremidades máximas do intervalo do jogo (no caso, -3 e 3).

Caso o adversário atire no zero, devo responder:"a menos", afinal meu submarino está situado à esquerda deste ponto. Agora seria a minha vez, mas vamos nos ater aos tiros dados pelo meu adversário (talvez eu possa imaginar que o meu inimigo seja você, caro professor). Em seguida, meu adversário deverá dar um tiro "a menos de zero", seguindo a informação dada anteriormente. Caso o adversário atire no –2, tenho que responder "a mais". Assim o adversário pode, gradativamente, localizar em intervalos o espaço onde se esconde o meu submarino. Ganha aquele que afundar primeiro o submarino do adversário. Se um próximo tiro do meu adversário for no –1,5, ele atingiu minha embarcação, mas não a afundou, pois para isso ele teria que acertá-la bem no meio. Sou obrigado a informar que fui atingido na "popa", afinal, ele acertou na parte traseira da embarcação.

No próximo tiro, duas tarefas cabem ao meu adversário:

1. Sabendo que atingiu a popa, ele deve representar mentalmente a localização exata do submarino, sabendo que este tem de dimensão 0,25 da unidade de comprimento.
2. Representando mentalmente essa posição, ele deve descobrir o ponto médio da embarcação, ou seja, seu meio, que no caso é entre –1,25 e –1,5. Para tanto, o aluno pode pensar em termos de fração ou de decimais.

Uma forma esquemática para essa compreensão pode ser:



-1,375 = meio da embarcação naval

Como decimal, o submarino tem o comprimento de 0,25, cuja metade é 0,125. Para acharmos o ponto da reta ocupado pelo meio do submarino, podemos:

- subtrair esse valor da posição ocupada pela proa do submarino:

$$-1{,}25 - 0{,}125 = -1{,}375;$$

- somar esse valor à posição ocupada pela popa do submarino:

$$-1{,}5 + 0{,}125 = -1{,}375.$$

Visto como fração, o submarino tem o comprimento de 1/4, cuja metade é 1/8. Para acharmos o ponto da reta ocupado pelo meio do submarino, podemos:

- subtrair esse valor da posição ocupada pela proa do submarino:

$$-1\ 1/4 - 1/8 = -5/4 - 1/8 = -10/8 - 1/8 = -11/8 = -1\ 3/8;$$

- somar esse valor à posição ocupada pela popa do submarino:

$$-1\ 1/2 + 1/8 = -3/2 + 1/8 = -12/8 + 1/8 = -11/8 = -1\ 3/8.$$

Professor, verifique se:

- Realmente, na reta numerada, –1 3/8 é o meio do submarino, ou seja, o ponto médio entre –1 1/4 e –1 1/2.
- -1,375 = -1 3/8.

Cabe a cada professor adaptar o jogo, alterando os valores, o tamanho da embarcação, recriando regras. O importante é que ofertemos atividades mais variadas, nas quais os alunos possam mobilizar conceitos e representações dos números racionais tão presentes nas situações envolvendo as medidas e, portanto, fortemente presentes nas situações do comércio que exigem a participação do cidadão consumidor na leitura, comparação e operacionalização destes números para a tomada de decisões rápidas e seguras. Mesmo que este jogo não esteja mergulhado em um contexto de comércio, ele pode servir como um mediador na construção de procedimentos mentais a serem transportados para tais situações. Além deste jogo, o professor pode e deve desenvolver e criar jogos de simulações onde estes conceitos e procedimentos estejam presentes.

Atividade 14

Faça com seus alunos uma pesquisa de mercado de eletrodomésticos para compra por meio de financiamento. Faça com os alunos uma tabela na qual apareçam os seguintes dados:

- Preço da mercadoria após pagamento de todas as prestações.
- Tempo máximo de financiamento em meses.
- Diferença entre o preço à vista e o preço total com financiamento no tempo máximo.
- A porcentagem que o preço final com financiamento representa do preço cobrado para pagamento à vista.

Coloque os dados em um gráfico de colunas buscando estabelecer uma correlação entre o tempo de financiamento em meses e a porcentagem do preço final em relação ao preço à vista. Em seguida, expondo o gráfico, faça uma discussão com seus alunos sobre:

- Por que os juros aumentam tanto o valor dos produtos quando comprados por meio de financiamento?
- Quais as vantagens e desvantagens da compra à vista?
- O que leva a pessoa a adquirir bens por meio de compras a prazo?
- Que tipo de enganos o consumidor pode cometer ao realizar operações financeiras quando adquire mercadorias por meio de pagamentos parcelados?

Atividade 15

Proponha aos seus alunos um levantamento junto ao comércio local sobre:

- A presença nos estabelecimentos comerciais de instrumentos de medidas para quantificar as mercadorias a serem mensuradas na presença do cliente.
- Os procedimentos que o comerciante utiliza (correta ou incorretamente) para efetuar as medições e, em especial, os procedimentos a serem adotados para manter a fidelidade (se é fiel/confiável) no processo de medição e de seu registro.
- A presença de números racionais nos instrumentos de medidas, explorando as idéias de algarismos significativos e de algarismos duvidosos na utilização dos instrumentos de medida.
- Se houve aferição dos instrumentos pelo Inmetro e a sua validade.

Atividade 16

Propor aos alunos a realização de pesquisas e discussões de dois pontos que permanecem abertos ao final desta unidade:

- Por que os valores dos combustíveis possuem três dígitos decimais se o Sistema Monetário Brasileiro utiliza apenas duas casas decimais?
- Qual é realmente a unidade de medida de massa? Se é o quilograma (kg), por que esta unidade é composta pelo símbolo "g" e pelo prefixo "k", que significa mil?

Resumindo

A Seção 3, ou seja, a transposição didática deve ter oportunizado ao professor momentos que levaram aos alunos atividades acerca de:

- Representação e comparação de números racionais.
- Mobilização de conceitos matemáticos para o desenvolvimento da criticidade do jovem consumidor.
- Utilização de conceitos matemáticos para a interpretação e a resolução de situação-problema voltada para a tomada de decisão.
- Presença do Sistema Internacional de Unidades no cotidiano do aluno.

Leituras sugeridas

A Matemática e os Temas Transversais, de Alexandrina Monteiro e Geraldo Pompeu Junior, Ed. Moderna, 2003. Uma discussão contemporânea do currículo de matemática e do seu conhecimento numa abordagem acerca da modelagem matemática, o que leva a uma perspectiva etnomatemática no ensino. A transversalidade é discutida a partir de diferentes propostas pedagógicas do ensino da matemática.

Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas, organizado por Cecília Parra e Irma Saiz, Ed. Artes Médicas, 1996. Permite um estudo sobre questões acerca da aprendizagem matemática, sobre sua didática (baseada no francês Guy Brousseau) refletindo sobre os papéis do professor no contexto do contrato didático. Temas como o cálculo mental, a divisão e a geometria têm espaço privilegiado na obra.

Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem, do francês Yves Chevallard conjuntamente com os espanhóis Marianna Bosch e Josep Gascón, Ed. Artes Médicas, 2001. Busca mostrar que as mudanças no ensino da Matemática, mais do que mudanças curriculares e de esforço profissional dos professores, depende também de uma reforma da sociedade, mudando o contrato existente entre escola e sociedade. Afinal, por que estudamos Matemática na escola? Quais as nossas responsabilidades? Vale a pena ler e refletir com os autores.

Explorando as operações aritméticas com recursos da história da matemática, da pesquisadora brasileira da UFES Circe Mary Silva da Silva Dynnikov, publicada pela Editora Plano (2003). Uma pequena coletânea ao professor, com elementos históricos das operações fundamentais favorecendo uma discussão sobre a utilização da história da matemática em sala de aula.

Insucesso e Matemáticas, da pesquisadora francesa Stella Baruk, Ed. Relógio d'Água, Portugal, 1996. Baruk publica resultados de pesquisas acerca das produções matemáticas dos alunos que revelam mediações inapropriadas dos professores que geram o contexto de fracasso no ensino da matemática. A obra tem protocolos muito ricos desenvolvendo uma reflexão do significado do fazer matemática na escola.

Matemática emocional: os afetos na aprendizagem matemática, da pesquisadora espanhola Inês Mª Gómez Chacón, Ed. Artes Médicas, 2003. Trata das relações da aprendizagem da matemática com a afetividade e com as emoções. As pesquisas de Chacón buscam as crenças acerca da matemática nos sujeitos e como essas concepções determinam a auto-estima e a autoconfiança dos alunos em relação à Matemática. A indissociabilidade da afetividade e cognição é explorada culminando o livro na discussão acerca da formação de professores.

Textos Matemáticos: produção, interpretação e resolução de problemas, de Edmar Henrique Rabelo, professor do Centro Pedagógico da UFMG, Ed. Vozes. Trata do trabalho em torno de problemas matemáticos sobre o que se concebe por um problema, a relação entre a matemática e a linguagem, com proposta de introdução no ensino de "histórias matemáticas". O objetivo é a investigação acerca do baixo desempenho dos alunos na resolução de problemas matemáticos.

Bibliografia

Artigo
PUBLICIDADE e Consumo Responsável, publicado pelo Idec, Instituto Brasileiro de Defesa do Consumidor, sd.

Tese
MUNIZ, C. A. *Jeux de Societé et activité mathématique chez l'enfant*, Tese de Doutorado em Ciências da Educação pela Université de Paris Nord, dirigido pelo Dr. Gilles Brougère, 1999.

Livro
DANTE, L. R. *Contextos e Aplicações*. Volume único. São Paulo: Ática, 2000.

FROTA, M. N. e OHAYON, P. *Padrões e Unidades de Medidas: referências metrológicas da França e do Brasil*. Rio de Janeiro: Bureau National de Métrologie e Laboratório Nacional de Metrologia do Inmetro, 1999.

PARANÁ, D. N. da S. *Física – Mecânica*, Volume 1. São Paulo: Ática, 1998.

SKOVSMOVE, O. *Educação Matemática Crítica*. Campinas: Papirus, 2001.

Imprensa
RAPOSO, S. *Poupar ou Comprar à vista?* Reportagem publicada no *Guia Financeiro* do jornal Correio Braziliense, p. 13, de 22/7/2003.

Dicionário
HOLLANDA, A. B. de. *Novo Dicionário da Língua Portuguesa*, 2ª ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986.

Sites
Inmetro - www.inmetro.gov.br/noticias/conteudo/455.asp

www.inmetro.gov.br/qualidade/educacao.asp

www.inmetro.gov.br/consumidor/premedidas.asp

www.inmetro.gov.br/consumidor/instrumentosmedicao.asp

Portal do consumidor - www.portaldoconsumidor.gov.br/categoria.asp

Sobre cuidados que o consumidor deve ter antes de adquirir ou consumir um produto - www.anvisa.gov.br/divulga/faq/index.asp#.

Orientações na escolha de um crédito imobiliário – www.proteste.org.

Texto de referência

Educação Matemática e Democracia

Trechos do texto do livro Educação Matemática Crítica de Olé Skovsmose (2001)

(Páginas 37- 44)

A democracia não caracteriza apenas estruturas institucionais da sociedade com relação às distribuições de direitos e deveres. Democracia também tem a ver com a existência de uma competência na sociedade, e são alguns desses aspectos não-institucionais da democracia que queremos discutir em relação à educação matemática.

Concentrar-nos-emos nos problemas democráticos em uma sociedade altamente tecnológica, isto é, uma sociedade baseada em uma total integração de, por exemplo, tecnologia da informação. Essa integração parece implicar que decisões e discussões sobre mudança e desenvolvimento sempre devem estar relacionadas a uma percepção de tecnologia. Essa situação traz à tona o que considero o problema de democracia em uma sociedade altamente tecnológica. Tendo em mente, por exemplo, a situação de um país como a Dinamarca.

Várias vezes enfatizou-se que a educação matemática tem uma dimensão política (Mellin-Olsen, 1987), e essa tese poderia, naturalmente, vir a ser mais especificada. Poderíamos argumentar que a educação matemática, em um ambiente tradicional, favorecerá um certo grupo de estudantes; que a educação matemática produzirá uma estratificação forte dos estudantes; ou que a educação matemática servirá como introdução para uma ideologia caracterizada por racionalismo e objetivismo (Bishop, 1988).

Minha perspectiva básica será a da educação crítica caracterizada pelos termos-chave: competência crítica, distância crítica e engajamento crítico. O conceito de competência crítica enfatiza que os estudantes devem estar envolvidos no controle do processo educacional. Ambos, estudantes e professores, devem estabelecer uma distância crítica do conteúdo da educação: os princípios aparentemente objetivos e neutros para a estruturação do currículo devem ser investigados e avaliados. A educação deve ser orientada para problemas, quer dizer, orientada em direção a uma situação "fora" da sala de aula. Essa orientação implica que também a dimensão do engajamento crítico deva ser desenvolvida na educação (Skovsmose, 1985, capítulo 1, neste livro). Dessa perspectiva, quero relacionar a educação matemática ao conceito de democracia, enfocando o problema democrático em uma sociedade altamente tecnológica.

Os problemas principais são: em que medida a educação matemática está envolvida no processo de construção (ou redução) de uma competência democrática na sociedade? É possível desenvolver o conteúdo e a forma da educação matemática de tal modo que possam servir como ferramenta na democratização? Ou a educação matemática – talvez por causa de sua natureza formal e abstrata – nada tem a ver com tais questões? Ou a situação é ainda pior: será que tendências não-democráticas são favorecidas pela introdução dos alunos a pedaços desconexos de conhecimento, colocando o professor (e o livro) em um papel especial de autoridade?

O argumento social de democratização

É possível dividir esses comentários gerais em dois tipos de argumentos, que relacionam a educação matemática e a democratização. O primeiro é, por exemplo, citado em Bjorneboe e Nissen (1984) e em Niss (1984). Nós o sintetizamos como o argumento social da democratização. O próximo argumento, o argumento pedagógico da democratização, será sintetizado na próxima seção.

O argumento social de democratização é composto por três declarações:

1. A matemática tem um campo extenso de aplicações. A matemática é aplicada em economia (macroeconomia e microeconomia), planejamento industrial, em diferentes formas de gerenciamento e em propaganda tanto quanto em campos tradicionais de aplicação da tecnologia. É freqüentemente difícil, tanto na escola primária quanto na secundária, apresentar exemplos ilustrativos de aplicações reais; muito freqüentes são exemplos que mostram pseudo-aplicações. Aplicações reais da matemática ficam normalmente "escondidas", embora sejam muito importantes.
2. Por causa de suas aplicações, a matemática tem a função de "formatar a sociedade". A matemática constitui uma parte integrada e única da sociedade. Ela não pode ser substituída por nenhuma outra ferramenta que sirva a funções similares. É impossível imaginar o desenvolvimento de uma sociedade do tipo que conhecemos sem que a tecnologia tenha um papel destacado e com a matemática tendo um papel dominante na formação da tecnologia. Dessa forma, a matemática tem implicações importantes para o desenvolvimento e a organização da sociedade – embora essas implicações sejam difíceis de identificar.
3. Para tornar possível o exercício dos direitos e deveres democráticos, é necessário estarmos aptos a entender os princípios-chave nos "mecanismos" do desenvolvimento da sociedade, embora eles possam estar "escondidos" e serem difíceis de identificar. Em particular, devemos ser capazes de entender as funções de aplicações matemáticas. Por exemplo, devemos entender como decisões (econômicas, políticas, etc.) são influenciadas pelos processos de construção de modelos matemáticos.

O argumento social da democratização salienta as aplicações matemáticas, e a importância da atividade de construção de modelos matemáticos é de fato freqüentemente enfatizada na literatura educacional. A idéia básica no que podemos chamar de tendência pragmática na educação matemática é: é extremamente importante que os alunos aprendam sobre a construção de modelos, e a melhor maneira de aprender isso é construindo modelos. A tendência pragmática constrói-se sobre uma suposição filosófica acerca da matemática, que afirma que um aspecto essencial da matemática é sua utilidade (completamente contrário à filosofia estruturalista e formalista, que afirma que o aspecto essencial da matemática é sua "arquitetura lógica"). Em seguida, a tendência pragmática incorpora a suposição de que o melhor caminho para aprender é fazendo; em particular, a melhor maneira de aprender a construir modelos é praticar a construção de modelos.

Minha tese, porém, é a de que os problemas fundamentais que dizem respeito às aplicações matemáticas não são visíveis de "dentro" do processo de modelagem. Quer dizer, não é possível desenvolver uma atitude crítica em relação à aplicação da matemática somente melhorando a capacidade de modelagem dos estudantes. Problemas fundamentais relacionados à modelagem não podem ser formulados no quadro teórico-conceitual que os estudantes desenvolvem pelas experiências práticas. Isto é, o conhecimento mencionado no argumento social de democratização (entendendo as funções da aplicação matemática) não é normalmente desenvolvido em processo educacional pragmático. Assim, uma prática educacional voltada para a democratização das possibilidades de os estudantes criticarem as atividades de construção de modelos não pode ser apenas pragmática. (...)

Os autores acharam importante que os estudantes aprendessem sobre atividades “reais” de construção de modelos – não apenas para aumentar a motivação dos estudantes (motivação vista como algo emocional) nem só para servir como porta de entrada para uma parte da teoria matemática, mas primariamente para dar a eles a oportunidade de investigar detalhes diversos em um modelo que, de fato, tem implicações sociais importantes. (...) Porém, para desenvolver uma atitude mais crítica em relação a essa construção de modelos, não basta entender a construção matemática do modelo; também temos de conhecer seus pressupostos. Devemos ser capazes de apontar que idéias econômicas estão escondidas atrás da cortina de certas fórmulas matemáticas. (...)

Vamos resumir os aspectos principais de uma matéria de ensino-aprendizagem que tenta estar de acordo com o argumento social de democratização:

1. O material tem a ver com um modelo matemático real.
2. O modelo tem a ver com atividades sociais importantes na sociedade.
3. O material desenvolve um entendimento do conteúdo matemático do modelo, mas esse conhecimento, mais técnico, não é a meta. A meta é desenvolver um insight sobre hipóteses integradas ao modelo e assim desenvolver um entendimento dos processos (por exemplo, processos de decisão) na sociedade.

As matérias de ensino-aprendizagem caracterizadas dessa forma chamaremos de materiais de ensino-aprendizagem libertadores. Porém, o material não precisa ter a forma de um livro-texto específico e, de modo geral, poderíamos falar sobre situações libertadoras de ensino-aprendizagem.

Competência Democrática e o Conhecer Reflexivo na Matemática

(Páginas 86-88)

Que instituições da sociedade podem assumir a tarefa de desenvolver a competência democrática? Não se pode assumir que isso possa ser feito de modo direto, mas uma resposta que se poderá dar é a de que a educação deverá estar no comando. Tomo a hipótese de que a educação desempenha um papel específico no desenvolvimento da competência democrática, e isso levanta um conjunto de novos objetivos para a educação. Tradicionalmente, uma preocupação importante da educação tem sido a de preparar os alunos para sua futura participação nos processos de trabalho na sociedade. Mas, tendências alternativas na educação têm enfatizado que ela deve também preparar os indivíduos para lidar com aspectos da vida social fora da esfera do trabalho, incluindo aspectos culturais e políticos. Em resumo, um dos objetivos da educação deve ser preparar para uma cidadania crítica. A busca de tais objetivos foi uma tendência forte na educação alemã depois da Segunda Guerra Mundial. Também nos países escandinavos tais objetivos têm sido colocados no topo da agenda – reforçados pelo uso do termo alemão *Algemeinbildung* (educação geral), querendo dizer que a educação deve visar mais do que as condições para possibilitar a entrada no mercado de trabalho. A educação deve preparar os alunos para uma vida (política) na sociedade. Voltamos, assim, à idéia, também referida por Girox, de que a educação tem uma obrigação específica em relação à democracia, mas agora somos capazes de dizer mais sobre a importância e a natureza da alfabetização matemática.

A idéia que tentei tornar significativa (mas não provar) é a seguinte: se *a alfabetização matemática tem um papel a desempenhar na educação – similar, mas não idêntico, ao papel da alfabetização -, uma tentativa de desenvolver uma competência democrática, então, alfabetização matemática deve ser vista como composta por diferentes competências: matemática, tecnológica e reflexiva. E, acima de tudo, o conhecimento reflexivo tem de ser desenvolvido para conferir à alfabetização matemática um poder radicalizado.* A reflexão sobre a aplicação de métodos formais é um elemento importante na identificação das condições para a vida social e, portanto, uma parte da competência democrática. Isso significa que os princípios orientadores para a educação matemática têm de ser levados para um metanível; eles já não podem ser encontrados na matemática pura, nem em nenhuma teoria epistemológica que se concentre no desenvolvimento do conhecimento matemático como tal:

> "Uma conclusão similar foi indicada por Mogens Niss[2]: É de importância democrática, tanto para o indivíduo quanto para o conjunto da sociedade, que qualquer cidadão tenha a seu dispor os instrumentos para o entendimento do papel da matemática (na sociedade). Qualquer um que não esteja de posse de tais instrumentos se torna "vítima" dos processos sociais dos quais a matemática é um componente. Assim, o objetivo da educação matemática deveria ser habilitar os alunos a perceber, entender, julgar, utilizar e também aplicar a matemática na sociedade, sobretudo em situações significativas para a vida privada, profissional e social de cada um. (1983, p. 248). De especial importância é também a discussão do programa educador público, em Ernest[3] (1991)."

Atividades

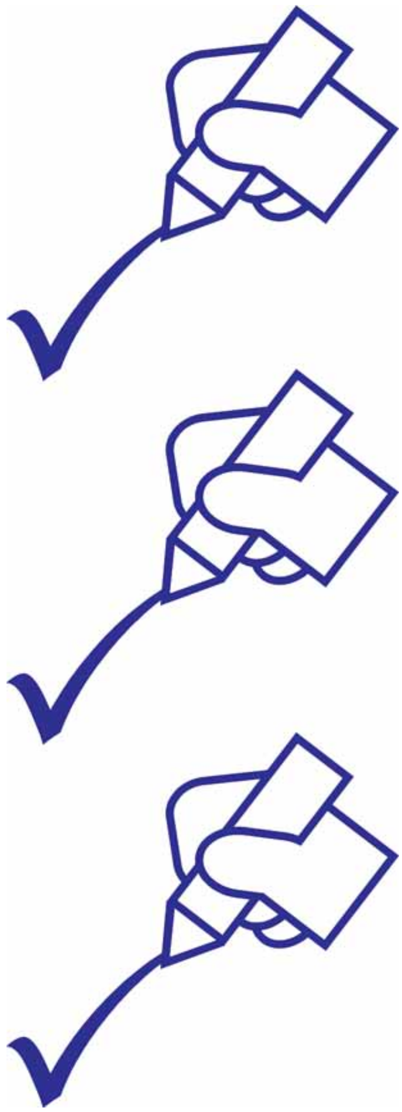
Reflita sobre um contexto real onde o conhecimento matemático foi significativo na sua tomada de decisão.

Pense em um debate junto aos seus alunos levando a eles o tema do texto.

2. NISS, M. (1983) *Considerations and experiences concerning integrated courses in mathematics and other subjects, International Congress on Mathematical Education.* Boston/Basiléia/Stuttgart/Birkhäuser, p. 247-249.

3.ERNEST, P. (1991) *The philosophy of mathematics education.* Londres: The Falmer Press.

Solução das atividades



Solução das atividades

Atividade 1

a) 103.784,20 / 61.800 = 1,68, ou seja, ao final do financiamento estará pagando o equivalente a um imóvel e meio. Pago a vista.
b) Maior do que 1, porque ao final deverá ter pago, além do valor do imóvel (100%), mais os juros e correções.
c) 1,68 = 1 + 0,68
  = 100/100 + 68/100 = 100% + 68%.
d) 68% do valor do imóvel = 68 x 61.800 /100 = 42.024, ou então, 103.784,20 – 61.800 = 41.984,20.
e) 41.984,20/61.800 = 0,68 = 68%, ou então, 42.024/61.800 = 0,68 = 68%.

Atividade 2

a) À vista = 61.800,00.
Resgate da aplicação = 142.138,70.
Diferença = 80.338,70.

b) 15% de 61.800 = 9.270,00.
Valor atualizado do imóvel 61.800,00 + 9.279,00 = 71.070,00.
Assim, ainda vale a pena a aquisição após a aplicação, pois ao final do período teremos:
Resgate = 142.138,70.
Valor atualizado do imóvel = 71.070,00.
Diferença = 71.068,70, ou seja, com mais R$ 1,30, dá para se adquirir duas casas iguais a esta.

Atividade 3

Valor final do imóvel = 71.070,00.

Valor final do investimento = 142.138,70.

Aluguel inicial de R$ 200,00 com reajuste anual de 20%:

Reajustes	Aluguel	Gasto anual
200,00	200,00 (x 12)	2.400,00
200 + 20% = 200 + 40	240,00 (x 12)	2.880,00
240 + 20% = 240 + 48	288,00 (x 12)	3.456,00
288 + 20% = 288 + 57,60	345,60 (x 12)	4.147,20
345,60 + 20% = 345,60 + 69,12	414,72 (x 12)	4.976,64
414,72 + 20% = 414,72 + 82, 94	497,66 (x 12)	5.971,92
497,66 + 20% = 497,66 + 99, 53	597,19 (x 06)	3.583,14
	TOTAL	27.414,90

1. Valor do imóvel comprado à vista = 71.070,00.
   Despesa total com aluguel = 27.414,90.
   Gasto final = 98.484, 90.

   Resgate do Investimento = 142.138,70.
   Gasto final = 98.484,90.
   Saldo final positivo = 43.635,80.

2. Valor final do financiamento = 103.784,20.
   Gastos não realizados com aluguel = 27.414,90.
   Diferença = 76.369, 30.

Conclusão

Financiando já a casa, o gasto final, após 90 meses, considerando o aluguel, será de 76.369,30, sem qualquer saldo positivo.

Não comprando agora e ir mensalmente aplicando os valores e pagando aluguel, poderá se comprar a casa e restará um saldo positivo final de 43.635,80, ou seja:

43.635,80/71.070,00 = 0,614, que significa um saldo de aproximadamente 61,4% do valor do imóvel adquirido.

Atividade 4

Devemos observar que podemos ter uma formulação desta apresentada a seguir, dependendo do valor de entrada.

a) Considerando o valor atual do aluguel: R$597,19 e o do investimento mensal: R$1.070,40, temos um gasto mensal de R$1.667,59.

Se 1.667,59 deve corresponder, no máximo, a 1/3 da renda familiar, sabemos que este casal deve ter uma renda mensal somada de, no mínimo, R$5.002,77.

Considerando que tenham salários iguais, cada um deverá ter um salário mensal de pelo menos R$2.501,39.

b) Resposta pessoal.

Atividade 5

Devemos observar que podemos ter uma formulação desta apresentada a seguir, dependendo do valor de entrada.

a) Feijão Eureka de 1 kg apresenta diferença de 13,60 g por cada quilograma. Assim, se lucra indevidamente em 1.000kg (=1 tonelada):
   1.000 x 13,60g = 13600 g = 13,6 kg de ganho indevido por tonelada vendida.

b) 13,6kg x R$ 2,59 = R$ 35,22 por tonelada de ganho indevido.

c) Considerando um ano = 52 semanas, temos:
52 x 13,60 g = 707,2 g de prejuízo ao ano por consumidor desta marca.
Ou seja, 707,2 g = 0,7072 kg, multiplicando por R$ 2,59 obtemos prejuízo de R$ 1,83. Parece pouco, mas se considerarmos prejuízo igual nos demais produtos de consumo diário, isso acaba fazendo grande diferença no orçamento doméstico, além de se tratar de delito por parte do fabricante.

Atividade 6

a) A $\rightarrow$ 1,5 kg
B $\rightarrow$ 1,52 kg
1 e 5 são corretos em ambos os casos.
2 seria duvidoso para o primeiro e correto para o segundo.

b) Não; justificativa pessoal.

Atividade 7

a) Resposta pessoal.

b) 4 casas decimais.

c) Por corte simples das três últimas casas.

d) Ao menos desta vez é vantagem, pois o pagamento respeita as regras do Sistema Monetário Brasileiro, considerando apenas duas casas decimais, fazendo o arredondamento por corte. Esse poderia ser um raciocínio válido; mas e se o corte em duas casas fosse feito antes de multiplicarmos? Realmente não existe jeito não, o corte é feito somente no preço final e continuamos a pagar mais.

Atividade 8

O professor: afinal as regras dizem, como vemos nesta Unidade, "para a multiplicação e divisão, operamos normalmente com os valores, mas no resultado final é levado em conta como mais importante o número que possui menor quantidade de casas decimais". Assim:

Área = 4,075038 m^2, logo, 4,075m^2 (ficando apenas com três casas decimais).

Já para o perímetro, deve-se levar em conta a parcela com menor número de casas decimais. Portanto:

Perímetro = 8, 1204 m $\rightarrow$ 8,120 (três casas decimais), logo, o valor deve ser cobrado sobre 8,12 m.

O professor tem razão!

Atividade 9

40 gotas.

Atividade 10

a) Há múltiplas expressões, tais como:
6 x 6 – 4 x 4 + 4 = 36 – 16 + 4 = 24. O importante é que todas totalizem 24.

b) Resposta pessoal.

Atividade 11

a) Resposta pessoal.

b) R$1.500 → não havia inverdade no anúncio.

Atividade 12

300	300	300	400	500	600	8100

MEDIANA é de 400 reais, o que é um dado mais real na situação considerada.

Atividades 13, 14, 15 e 16

Respostas pessoais das experiências do professor com seus alunos.

Unidade 14

Espaço, Tempo, Ordem de Grandeza – Números grandes e pequenos

Nilza Eigenheer Bertoni

Iniciando a nossa conversa

No nosso viver cotidiano, lidamos com números dentro de certas ordens de grandeza. As operações financeiras que fazemos e as distâncias que percorremos vão até certos limites; aquilo que podemos ver com nossos olhos não pode estar abaixo de certas dimensões.

Muitas civilizações antigas inventaram números suficientes apenas para resolver as situações de quantificação da época. Não sentiram necessidade de criar um sistema numérico que pudesse descrever quaisquer quantidades. Assim, no antigo Egito, eram conhecidos símbolos para as quantidades 1, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000 e 1.000.000. Como repetiam nove vezes cada símbolo, poderiam representar até o número 9.999.999.

Para descrever a realidade atual, contudo, esses números não bastam. As experiências humanas tornaram necessários números cada vez maiores e também cada vez menores, levando os homens a buscarem um sistema numérico no qual fosse possível representar qualquer número, por maior ou menor que seja.

Após alguns séculos de construção gradativa, no século VIII (do ano 701 até o ano 800), o sistema hindo-arábico estava pronto, com todas as regras e símbolos. Mais outros séculos decorreram antes que ele fosse adotado na Europa e depois universalizado. Esse é o sistema usado até hoje.

Com ele, podemos representar milhões, bilhões, trilhões, quatrilhões... Contudo, a quantidade de zeros que será usada pode tornar-se impraticável. Para isso, novas formas de representar números dentro desse sistema foram inventadas pelos homens, fazendo uso de potências de 10 – com expoentes positivos, para representar números muito grandes, e com expoentes negativos, para os muito pequenos.

É disso que trataremos nesta Unidade – das representações e operações relacionadas a grandes e pequenos números.

Como tem sido feito nas Unidades anteriores, esta também constará de três Seções.

Na Seção 1, você encontrará uma situação-problema relacionada à construção de um modelo para o nosso sistema planetário.

Na Seção 2, estudaremos alguns conceitos surgidos na Seção 1, como potências positivas e negativas e cálculos com elas.

Na Seção 3, faremos sugestões para o desenvolvimento desses conceitos em sala de aula.

Definindo o nosso percurso

Ao longo da unidade, esperamos que você possa:

1 - Com relação aos seus conhecimentos matemáticos:

Vivenciar uma situação-problema envolvendo a escolha adequada de escala para modelos de grandes proporções e desdobramento da situação-problema, desenvolvendo conteúdos matemáticos adequados à sua resolução e a outros relacionados, como:

- notação científica e ordem de grandeza de um número;
- propriedades e cálculos com potências;
- ano-luz.

Esses conhecimentos serão desenvolvidos nas Seções 1 e 2.

2 - Com relação aos seus conhecimentos sobre Educação Matemática:

- conhecer fatos relevantes da História da Matemática (Seção 1);
- perceber aspectos epistemológicos da Matemática relacionados à ampliação de conceitos, por observação de padrões e pela conservação de propriedades, bem como sua implicação para a aprendizagem. Isto será feito na Seção 2;
- aprofundar a compreensão sobre interdisciplinaridade, no Texto de Referência.

3 - Com relação à sua atuação em sala de aula:

Conhecer e produzir, considerando a adequação à série em que atua no Ensino Fundamental:

- situações didáticas relativas à construção de modelos envolvendo macro ou micro-números;
- situações para a exploração, junto aos alunos, dos conceitos de notação científica e ordem de grandeza de um número;
- projetos ou propostas interdisciplinares que envolvam a Matemática.

Esses objetivos serão tratados na Seção 3.

Seção 1

Resolução de situação-problema: planejamento de modelos para realidades de grandes proporções – Escalas e representações adequadas de grandes números

Objetivo da seção

- Desenvolver o uso de grandes números articulados à noção de grandes intervalos de tempo e de grandes distâncias.
- Perceber a ordem de grandeza das distâncias envolvidas no sistema solar.
- Conhecer unidades adequadas para medir distâncias envolvidas no sistema solar.
- Conhecer fatos relevantes da História da Matemática, associando-os a épocas históricas.

Integrando a matemática ao mundo real

A Unidade 1 do TP1 já abordou a noção de ordem de grandeza, mostrando a dificuldade de se representar, em um mesmo gráfico, grandezas de ordens muito diferentes. Lembra-se de quando se comparou o que come uma abelha com o que come um elefante?

Nesta Unidade, damos prosseguimento a esse assunto. Desenvolveremos essas idéias dentro de dois contextos: o de tempo histórico e o de espaço do universo. Vamos começar com a História. De modo um pouco diferente do que tem sido feito em outras Unidades, haverá algumas atividades a serem feitas. Depois, na situação-problema, vamos caminhar – você principalmente – na direção dos espaços do universo.

O tempo histórico

Vocês conhecem a música do Raul Seixas: "Eu nasci há dez mil anos atrás"? Pensem só: esse homem nasceu há cem séculos atrás, 8.000 anos antes de Cristo! Viveu quatro vezes mais antes de Cristo do que viveu depois de Cristo.

Lembrete
100 anos = 1 século
1.000 anos = 10 séculos
10.000 anos = 100 séculos
Pós Cristo: 2.000 anos = 20 séculos

Ele nasceu 8.000 anos a.C., no fim da Idade da Pedra, que durava desde os primórdios da vida humana na Terra. Havia, nessa época, cerca de 10 milhões de habitantes no mundo todo (menos do que em São Paulo, atualmente) que se espalhavam, de modo esparso, por todas as partes do mundo. Como conta Leakey (1977, p.144):

> a caça e a colheita eram os meios universais de subsistência, cada bando de hominídeos explorando as dádivas sazonais dos reinos vegetal e animal de sua localidade. Nessa ocasião, tinham sido inventados o arco e a flecha, a lança e o arremessador de lança. ... Carregavam frutos, nozes e raízes suculentas, de volta para o acampamento. A vida era essencialmente nômade, calma e ociosa.

Isso já durava mais de 100 mil anos.

Mas, lentamente, após a pura e simples coleta de plantas, ocorreu o que foi um longo período de transição entre a época caracterizada pela coleta e a do cultivo, período em que o homem desenvolveu ações simples, como prover água, proteger as plantas nativas e ajudá-las a crescer melhor.

Até que, quando o homem de 10.000 anos nasceu, a humanidade já iniciava uma revolução da agricultura, cujo elemento diferenciador foi a semeadura.

> O cultivo permanente e organizado aparecia nas comunidades sedentárias, que receberam dos nômades vários tipos de gramíneas selvagens de cujo cruzamento proveio a maioria dos cereais comestíveis hoje conhecidos.
>
> Enciclopédia Mirador, 1979, vol. 17; pré-história, 5.8.

Com o passar do tempo, as comunidades agrícolas emergentes sentiram-se encorajadas a trocar, umas com as outras, suas diferentes produções, até mesmo trocando grãos por carne. Isso foi o prenúncio de um comércio que, ao longo dos séculos e milênios, foi sempre evoluindo. Os suprimentos alimentares podiam ser concentrados em pequenas áreas, originando grandes vilas. A população do planeta começou a crescer continuamente.

O homem de Raul Seixas contou, com belas palavras, coisas que viveu:

"eu tava junto com os macacos na caverna...".

Mas deixou de contar outras que lembraremos por alto:

- Bem no início, só existia a pedra e o osso para a confecção de qualquer objeto. Depois, outras matérias-primas foram aproveitadas: basalto, calcário... O homem de Raul Seixas viu os agricultores aperfeiçoarem a técnica da cerâmica, viu o trabalho ser dividido, viu algumas funções aparecerem.
- Viu, lá por 6.000 a.C., ou mesmo antes, época em que ele tinha 2.000 anos, o metal começar a ser trabalhado em instrumentos e armas. Primeiro os mais maleáveis.

- Soube, já entre 4.000 e 3.000 a.C., de uma grande civilização: a Mesopotâmia (culturas da Suméria, da Babilônia e da Assíria), gente que unia a paixão pela vida, ciência e tecnologia a uma visão mística do universo.

- Depois, viu o predomínio do cobre, ocorrido por volta de 3.300 a.C. a 2.000 a.C. Soube de coisas assombrosas que ocorriam na Mesopotâmia – carros que andavam sobre rodas, sinais gravados que valiam o mesmo que palavras ditas; ou no Egito – grandes pirâmides que eram construídas, e o comércio marítimo que se desenvolvia; e ainda na China – a construção de cidades.

Surgimento da escrita
"Foi a escrita que permitiu às sociedades criarem seus próprios registros (memória/história) e se comunicarem entre si. A escrita surge na Mesopotâmia, cerca de 3.200 anos antes da nossa era."

http://www.angelfire.com/me/babiloniabrasil

- E logo em seguida predominou o bronze, e nesse período – 2.000 a 1.000 a.C. – houve a Guerra de Tróia e surgiu Ulisses, rei e guerreiro sábio e prudente, cuja epopéia Homero descreveu na Odisséia, séculos depois. Os metais eram usados regularmente em instrumentos, objetos e armas. Na Mesopotâmia, predominavam os babilônicos, que até operações matemáticas já dominavam. Nessa época, Abraão migrou, com um grupo da Suméria, para Canaã, tornando-se pai da nação de Israel. O Império Egípcio expandia-se até o Oriente Médio, mas já dava sinais, ao mesmo tempo, de queda. No Peru, iniciava-se o uso de cobre e de outros metais; no México, surgia a civilização Maia.

- Depois, cerca de 1.000 a.C., viu o aparecimento e o predomínio do ferro. Foi aí então que Davi tornou-se rei de Israel

  "eu vi a estrela de Davi brilhar no céu...".

  e foi sucedido por Salomão.

  "vi Salomão cantar seus salmos pelos ares...".

- Mais ou menos em 750 a.C., soube do surgimento de uma cidade que depois ficaria famosa: Roma. Entre 700 e 500 a.C., soube de maravilhosos templos construídos na Grécia. E entre 700 e 650 a.C., viu a Babilônia ser arrasada duas vezes pelos assírios, ser reconstruída, viver seu apogeu e ser conquistada pela Pérsia, quando a Mesopotâmia deixou de ser uma região histórica independente. Séculos após, cerca de 330 a.C., Alexandre, o Grande, conquistou a Pérsia. Após a sua morte, um de seus generais, Seleuco, torna-se chefe da Babilônia e funda uma dinastia que vai até 60 a.C. Durante a época selêucida, a cidade decaiu rapidamente até desaparecer.

  "vi Babilônia ser riscada do mapa...".

- Soube do nascimento e da morte de Cristo.

"eu vi Cristo ser crucificado...".

Se você olhar o texto da música com cuidado, verá que o homem se refere também a acontecimentos em épocas posteriores a Cristo (d.C.).

Veja, no quadro abaixo, uma retrospectiva dos 8.000 anos que o personagem da música viveu antes de Cristo. Observe que os fatos matemáticos estão destacados.

8.000 a.C.	Final da Idade da Pedra.
6.000 a.C.	Trabalho com o metal.

Entre 4.000 a.C. e 3.000 a.C.	Mesopotâmia, que compreendeu a cultura da Suméria, da Babilônia e da Assíria. Surgimento da linguagem escrita.
Entre 3.200 e 2.000 a.C.	Predomínio do cobre. Carros com rodas.
Entre 2.000 e 1.000 a.C.	Inscrições matemáticas em tabletes encontrados em Nippur, centro religioso da antiga Mesopotâmia, atualmente ao sul de Bagdá, no Iraque.
Cerca de 2.200 a.C.	Predomínio do bronze, Guerra de Tróia e Ulisses; metais usados regularmente em instrumentos, objetos e armas; operações matemáticas entre os babilônicos; migração de Abraão para Canaã.
Cerca de 1.650 a.C.	Papiro de Ahmes, do Egito (encontrado por Rhind).
Cerca de 1.000 a.C.	Aparecimento e predomínio do ferro. Davi torna-se rei de Israel, sucedido por Salomão.
776 a.C.	Primeiros Jogos Olímpicos.
Cerca de 750 a.C.	Fundação de Roma.
Entre 700 e 650 a.C.	Babilônia é arrasada pelos assírios, reconstruída, atinge o seu apogeu e é conquistada pela Pérsia. A Mesopotâmia deixa de ser uma região histórica independente.
Cerca de 600 a.C.	Tales, filósofo e matemático da cidade de Mileto, inicia sua geometria dedutiva.
Cerca de 540 a.C.	Auge da Escola de Pitágoras, que foi filósofo e matemático.
Cerca de 490 a.C.	Nasce a filosofia na Grécia, e o pensamento de Confúcio propaga-se na China.
Cerca de 330 a.C.	Alexandre, o Grande, da Macedônia, conquista a Pérsia. A Babilônia decai rapidamente até desaparecer.
Cerca de 300 a.C.	Euclides escreve a obra “Elementos”.
Cerca de 280 a.C.	Inauguração da Biblioteca de Alexandria (norte do Egito), com 100 mil volumes. Surgimento da cultura maia na Guatemala.
Cerca de 225 a.C.	Apolônio, da cidade de Perga, na Grécia antiga, atual Turquia, chamado de *o grande geômetra,* estuda as seções cônicas. Arquimedes, de Saracusa, na Grécia antiga, atual Sicília (Itália), estuda o círculo e a esfera, as séries infinitas, a mecânica e a hidrostática. Ele descobre uma maneira de calcular uma aproximação para π: $3,1416349 < \pi < 3,1737742$.
Cerca de 210 a.C.	Começa a construção da Grande Muralha da China.
Pós Alexandre, até 60 a.C.	Seleuco torna-se chefe da Babilônia e funda uma dinastia que vai até 60 a.C.

Início do ano 1 d.C.	Nascimento de Cristo.
Do ano 1 até os nossos dias	...

O papiro Rhind ou papiro Ahmes

Em 1858, o egiptólogo escocês Henry Rhind visitou o Egito e comprou o papiro, que atualmente se conhece como papiro Rhind ou de Ahmes, encontrado nas ruínas de um antigo edifício de Tebas. Rhind morreu 5 anos depois, e o papiro foi parar no Museu Britânico. Grande parte do papiro estava perdida, mas 50 anos depois encontraram-se muitos fragmentos nos depósitos da Sociedade Histórica de Nova Iorque, que foram incorporados ao original. O texto começa com a frase: "Cálculo exato para conhecer todas as coisas existentes e todos os obscuros segredos e mistérios."

O papiro mede por volta de 6m de comprimento e 33cm de largura. Representa a melhor fonte de informação sobre a matemática egípcia que se conhece. Consta de 87 problemas com resoluções. Dá informações sobre questões aritméticas básicas, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, divisões proporcionais, regras de três, equações lineares e trigonometria básica. Foi escrito pelo escriba Ahmes, aproximadamente em 1.650 a.C., a partir de escritos de 200 anos de antigüidade, segundo afirma o próprio Ahmes no princípio do texto, embora não se saiba que partes correspondem a esses textos anteriores.

http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm

Para você pensar um pouco mais nesse contexto histórico e relacionar a grandeza tempo com a Matemática, preparamos duas atividades. Dedique um tempo a elas, antes de passar ao contexto espaço, na situação-problema.

Atividade 1

Nos 2.000 anos que o personagem viveu depois de Cristo, você saberia descrever o que ele viu ou o que soube?

Lembre-se ou pesquise fatos significativos (também na Matemática) ocorridos nesses 20 séculos e organize-os em uma tabela, como mostrado a seguir:

Fato histórico	Período	Século correspondente
Independência do Brasil	Entre 1800 e 1900	XIX

Uma observação: os anos a partir do nascimento de Cristo são chamados de anos da era cristã ou da nossa era. Eles podem vir, ou não, seguidos de d.C., que significa depois de Cristo.

Atividade 2

a) Fazendo cada século corresponder a uma mesma medida de comprimento, construa uma reta do tempo para o período entre 8.000 a.C. e 2.000 d.C. Ponha letras ou números na reta, indicando em uma lista o significado de cada um, ou seja, dos fatos significativos que ocorreram em cada século.

b) Se você tivesse usado para cada ano a medida de segmento que usou para um século, qual medida teria o segmento do período todo? (Consulte a Unidade 5 sobre escala).

Uma situação-problema: Construindo um modelo para o nosso sistema planetário

Até aqui fizemos um passeio pela História, começando a perceber as dimensões da grandeza tempo nela envolvidas. Ainda voltaremos a esse assunto. Mas, agora, vamos começar a explorar as variações da grandeza comprimento, relacionada a distâncias espaciais.

Todos conhecemos o sistema planetário (sistema solar) em que vivemos. Sabemos que é formado por uma estrela, o Sol, e que, em sua volta, giram oito planetas e seus satélites. Há também cometas e corpos menores, como meteoritos e meteoros.

Os planetas, indo do mais próximo do Sol ao mais distante, são: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno. No dia 24 de agosto de 2006, a União Astronômica Internacional decidiu que Plutão não deve ser considerado um Planeta. Veja, no quadro, um modo curioso que nos permite recuperar essa ordem.

Curiosidade
Para nos lembrarmos da ordem dos planetas, basta memorizar a frase:

"**S**ó **M**inha **V**elha **T**ia **M**arta **J**ulga **S**al **Ú**mido **N**ocivo".

Sol **M**ercúrio **V**ênus **T**erra **M**arte **J**úpiter **S**aturno **U**rano **N**etuno.

Mas, será que conhecemos a matemática envolvida nesse sistema? Conhecemos as dimensões do Sol e dos planetas e as distâncias entre eles?

Situação-problema desta Unidade:

Planejar um modelo adequado para representar o sistema solar, de modo a conservar as proporções com a realidade.

Sabemos que uma maquete bem feita requer conhecimentos matemáticos, em especial o de semelhança – conceito que envolve, em geral, ângulos e comprimentos. Os comprimentos aparecem tanto na dimensão dos corpos quanto nas distâncias entre eles, e precisaremos escolher uma escala conveniente para representá-las.

Crianças e adolescentes, quando se deparam com essa proposta, gostam logo de pegar algum material e começam a fazer bolas que representem o Sol e os planetas.

Entretanto, você deve se conter e agir mais cautelosa e refletidamente, pesquisando distâncias, fazendo cálculos e planejando, antes da ação, o seu modelo.

Um bom começo será pesquisar ou informar-se, junto ao professor de geografia, sobre quais são as dimensões do Sol, dos planetas e das distâncias entre eles. É provável que, ao fazer isso, você encontre a expressão ano-luz.

O significado de um ano-luz

Embora o nome dessa unidade – ano – pareça ser para a medida de tempo, o ano-luz é uma unidade de comprimento muito usada em astronomia. O seu valor é igual à distância que a luz percorre no vácuo durante um ano.

Você pode saber sem muita dificuldade quanto vale, em quilômetros, um ano-luz.

Para isso, é necessário saber:

- Qual a velocidade da luz, em quilômetros, por segundo?
- Quantos segundos tem um ano?

As respostas são:

- A velocidade da luz é de 300.000 km/s (quilômetros por segundo).
- Um ano tem 365,25 dias (lembre-se, um dia a mais a cada quatro anos – ano bissexto), 24h por dia, 60 minutos por hora, 60 segundos por minuto, ou seja um ano = 365,25 x 24 x 60 x 60 = 31.557.600 segundos.

De posse dessas informações, pode-se calcular o valor do ano-luz em quilômetros:

1 ano-luz = distância percorrida pela luz durante um ano
= (velocidade da luz/segundo) x nº de segundos no ano
= 300.000km/s x 31.557.600 s = 9.467.280.000.000 km.

Logo, a unidade de distância ano-luz vale, em quilômetros, mais do que 9 trilhões de quilômetros! É comum encontrarmos esse número na forma $9{,}46728 \times 10^{12}$ km.

Depois, escolha uma escala que lhe permita fazer um modelo tanto do maior – o Sol – quanto do menor, e que contemple as distâncias encontradas.

Mãos à obra!

Seção 2

Construção do conhecimento matemático em ação: números muito grandes e muito pequenos

Objetivo da seção

- Conhecer a notação científica dos números.
- Conhecer a ordem de grandeza dos números.
- Conhecer prefixos decimais, associados à ordem de grandeza dos números.
- Ampliar os conhecimentos sobre potências e raízes.
- Trabalhar interdisciplinarmente a Matemática.
- Reconhecer a importância atual da Nanotecnologia.

Enquanto você se dedica à pesquisa para resolver a situação-problema proposta na Seção 1, vamos voltar à questão do tempo histórico.

Vamos dar um mergulho maior no passado. Se o homem mencionado por Raul Seixas conhecesse a história de todos os seus antepassados e de suas épocas, o que ele poderia nos contar?

O seu antepassado mais remoto, tão humano quanto ele – o *homo sapiens sapiens* – teria vivido por volta de 80.000 a.C. A linha do tempo feita para representar isso já seria oito vezes maior do que os 10.000 anos vividos por ele.

E, se ele fosse considerar a lenta evolução dos primatas até o homem, teria algumas surpresas e tempos muito maiores a considerar. Veja rapidamente a tabela, mas preste atenção: usamos a abreviatura "mi" para milhões:

Época – número de anos atrás	**Etapa da evolução da raça humana**	**Características**
12 mi	Os primatas saem da floresta para a savana e tiram as mãos do chão. Primeiros hominídeos.	Grupo diversificado, desde roedores a gorilas, todos com unhas e caudas. Com a divisão dos continentes, passam a existir duas linhas evolutivas. A dos símios do velho mundo, e a de um grupo, na África, que dá origem ao ramo antropomórfico (sem cauda).
8 mi	Hominídeos: chimpanzés, gorilas e homens.	Constituem um início de diferenciação dos primatas em direção à raça humana. Os mais antigos crânios de hominídeos encontrados têm de seis a sete milhões de anos.

3 mi	*Homo.*	Mãos semelhantes às atuais, com grande habilidade manipulativa.
2,5 mi	Tipo de hominídeos que evoluiu para os humanos atuais. Ereto, com cerca de 1,50m de altura. Aumento da caixa craniana em relação aos demais hominídeos.	Crânio pequeno e algumas características de macaco, porém, com arcada dentária e esqueleto semelhantes aos do homem atual.
1 mi a 750.000	*Homo erectus.*	Homem em pé, crânio aumentado.
500.000 a 300.000	*Homo sapiens.*	Primeiro homem racional. Fabricava utensílios e enterrava os mortos.
80.000 a 30.000	*Homo sapiens sapiens.*	Alto, forte e superior intelectualmente, desenvolveu artes, vida social, armas mais complexas. Volume do crânio igual ao do homem atual.

E se quiséssemos considerar a origem e a evolução da vida em nosso planeta? Veja:

Número de anos atrás	**Formas de vida**
3.000 mi	Primeiras formas de vida conhecidas: algas azuis.
600 mi	Abundância de algas.
Entre 600 e 500 mi	Primeiros invertebrados.
Cerca de 440 mi	Recifes de algas e corais. Esponjas e moluscos.
Cerca de 400 mi	Peixes ósseos. Primeiras plantas com sementes. Primeiros anfíbios.
Cerca de 350 mi	Primeiros répteis.
Cerca de 220 mi	Primeiras árvores coníferas. Primeiros dinossauros. Primeiros mamíferos.
Cerca de 70 mi	Primeiras plantas com flores. Primeiras aves. Extinção dos dinossauros.
Cerca de 40 mi	Mamíferos de pastagens. Primeiros antropóides.
Cerca de 12 mi	Primeiros hominídeos.

Atividade 3

Na Atividade 2, você fez uma "reta" do tempo (na verdade, um segmento de reta) para os 10.000 anos de vida do homem da música.

a) Qual o comprimento do segmento que você construiu?

b) Conservando-se a mesma escala, qual seria o comprimento do segmento para representar desde os primeiros *homo sapiens sapiens*?

c) Conservando-se a mesma escala, qual seria o comprimento do segmento para representar desde 12 milhões de anos atrás (primeiros hominídeos)?

d) Represente 3.000 milhões do modo usual, em nosso sistema de numeração.

e) Conservando-se a mesma escala, qual seria o comprimento do segmento para representar desde 3.000 milhões de anos atrás (começo da vida na Terra)?

f) Se você representasse cada século desses 3.000 milhões de anos por 1 mm, que tamanho de segmento precisaria?

Recordando potências com expoentes positivos

Na história da humanidade e nas distâncias interplanetárias, aparecem números muito grandes. A *notação científica*, que serve para representar qualquer número, é adequada para os números muito grandes ou muito pequenos. Para introduzi-la, precisaremos do conceito geral de *potência*.

As idéias de quadrado e de cubo de um número foram introduzidas no TP1, Unidade 1, no contexto de áreas e volumes. Nesses casos, trabalhamos com potências de expoentes 2 e 3. Nesta Unidade, vamos ampliar e aprofundar a noção de potenciação e de suas propriedades.

Você sabe que $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

Escrevendo potências de 10:

$10 = 10^1$

$100 = 10 \times 10 = 10^2$

$1.000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$

$10.000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

$100.000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$

$1.000.000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6$

☐	☐	☐	☐	ou	☐	☐	☐	☐
↑	↑	↑	↑		↑	↑	↑	↑
milhares	centenas	dezenas	unidades		10^3	10^2	10^1	1 ou 10^0

Exemplos:

1) $500 = 5$ centenas $= 5 \times 10^2$

	5	0	0

2) $5.000 = 5$ milhares $= 5 \times 10^3$

5	0	0	0

3)

10^{13}	10^{12}	10^{11}	10^{10}	10^9	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
				3	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Este é o número que representa há quantos anos apareceram as primeiras formas de vida na Terra, lembra-se?

Notação científica de um número

As formas 5 x 10^2, 5 x 10^3 e 3 x 10^9 são chamadas de notações científicas dos números dados. Veja, a seguir, mais informações sobre essa forma.

Sabemos que 4.500.000 = 4,5 milhões. Veja a notação científica:

10^{13}	10^{12}	10^{11}	10^{10}	10^9	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	1
							4	5	0	0	0	0	0

4.500.000 = 4,5 x 10^6

A notação científica de um número maior ou igual a 10 é expressa da seguinte forma:

N, abc... x 10^x, onde:

N= número maior do que 1 mas inferior a 10.

a, b, c ... = são algarismos que aparecem após N.

x = o exponente de 10, ou número de casas decimais significativas de N.

Ordem de grandeza ou de magnitude de um número

É a maior potência de 10 que ocorre na representação decimal do número.

O número 4.500.000 = 4,5 x 10^6 tem ordem de grandeza igual a 10^6.

Vamos ver como podemos colocar um número maior do que 10 nessa forma e quais as justificativas para este procedimento.

Notação científica para números maiores ou iguais a 10

Deslocamos a vírgula de modo a deixar um só algarismo não nulo à sua esquerda. Este algarismo será a parte inteira do N da expressão acima.

Conta-se quantas casas a vírgula foi deslocada; este será o expoente de 10.

O deslocamento será sempre para a esquerda, pois o número é maior de que 10.

Ao deslocar a vírgula "n" casas para a esquerda, você estará dividindo o número dado por 10^n. Para voltar ao número dado, multiplique-o por 10^n.

Exemplo:

$4.835 = 4{,}835 \times 10^3$

Na forma 4,835, o número original está dividido por 10^3. Multiplicando-o por 10^3, voltamos ao número original.

Quais seriam as vantagens de se escrever um número na notação científica? Podemos citar:

- Números com muitos zeros no final ou no início podem ter a escrita abreviada.
- Os computadores ou máquinas de calcular usam regularmente esta notação.
- Os cálculos ficam mais rápidos e fáceis.

Notação científica para números a partir de 1 e menores do que 10

Esses números têm um único algarismo antes da vírgula, variando de 1 a 9. Eles são muito fáceis de serem colocados na notação científica. Veja os exemplos:

$4{,}8294 = 4{,}8294 \times 1 = 4{,}8294 \times 10^0$

$5{,}305 = 5{,}305 \times 10^0$

$9{,}47921 = 9{,}47921 \times 10^0$

Manhas e artimanhas das calculadoras

Atualmente, tem-se falado em introduzir os alunos às modernas tecnologias, pelo papel relevante que elas desempenham na sociedade moderna. Costuma-se designar a familiaridade do aluno com esse assunto por *alfabetização tecnológica*. O conhecimento de diversos tipos de calculadora e de seus usos constituem parte dessa alfabetização.

Nesse sentido, é importante para você e para os seus alunos esse conhecimento.

Vamos desenvolver, em calculadoras, multiplicações cujos resultados nem sempre cabem no visor desta.

Veja resultados apresentados em uma calculadora comum, cujo visor comporte dez dígitos:

Digitamos 10000 x 100000 e aparece 1000000000.

Ou seja, multiplicamos $10^4 \times 10^5$ e obtivemos 10^9 (número com dez dígitos).

Digitamos $1000000 \times 1000000 = 10^6 \times 10^6$ e aparece 1, 12.

Sabemos que o resultado é 10^{12}, um número de 13 dígitos (1 seguido de 12 zeros), e o visor da calculadora não permite a exibição desse resultado. Em vez de exibir o número, o visor nos mostra 1, 12, significando que o resultado seria 1 seguido de 12 zeros ou equivalentemente 10^{12}.

Em calculadoras científicas cujos visores comportam 32 dígitos, o resultado aparece, às vezes, de modo diferente, no caso de o visor não permitir a exibição total do resultado.

Veja resultados apresentados em uma calculadora científica ou comum do computador:

Digitamos 1000000000000000 x 10000000000000000 =

e apareceu o resultado 10000000000000000000000000000000.

Ou seja, multiplicamos $10^{15} \times 10^{16}$ e obtivemos 10^{31} (número com 32 dígitos).

Agora veja o que ocorre se digitamos $10^{16} \times 10^{16}$, com todos os zeros:

Digitamos: 10000000000000000 x 10000000000000000 =

e aparece o resultado 1,e+32.

Nessa calculadora, esse registro equivale a 1 seguido de 32 zeros, ou 10^{32}. Ou seja:

$$1 \times 10^{32} = 1,\ e+\ 32$$

Agora veja em uma calculadora comum cujo visor tem capacidade para oito dígitos:

1) Digitamos 1000x1000=

apareceu no visor: 1000000.

2) Digitamos: 1.000 x 10.000=

apareceu no visor: 10000000.

3) Digitamos 10000 x 10000=

apareceu no visor: E1.0000000 (1 "ponto" seguido de sete zeros).

Repare que devia ter aparecido 100000000 (1 seguido de oito zeros).

A letra E indica que houve erro, e o pontinho indica que o número obtido deve ser multiplicado por 10^1, não se garantindo a correção do último dígito que aparecerá. No nosso caso, esse dígito só pode ser o 0.

Para expressar o resultado correto, esse número deveria ser multiplicado por 10. É o que a calculadora indica com o registro E1., equivalente a 10^1. Vamos, pois, multiplicar o número que aparece no visor (esquecendo-nos do ponto) por 10^1. Ou seja, 10000000 x 10 = 100000000, que é o resultado correto.

4) Digitamos: 23712 x 12506 =

aparece no visor: E2.9654227.

O visor indica que o resultado apresentado deve ser multiplicado por 10^1 (porque o ponto abrange apenas um dígito), mas que não se garante o valor do último dígito que aparecerá. De fato, 29654227 x 10^1 = 296542270. Mas, conferindo em uma calculadora cujo visor comporta mais dígitos, ou fazendo à mão, obtemos 296542272.

Lembre-se: o número deve ser multiplicado por 10^1, pois o que conta é a posição do ponto ou a quantidade de dígitos antes dele e não o dígito que aparece antes dele.

Se o resultado de alguma operação fosse E29.654227, então o número 29654227 deveria ser multiplicado por 10^2, mas não se poderia garantir a correção dos dois últimos dígitos que iriam aparecer.

Uma questão de arredondamento e de algarismo significativo (revendo conceitos da Unidade 13):

A calculadora em questão apresenta no máximo oito dígitos no visor. Ao efetuar uma operação cujo resultado teria nove dígitos, ela ocultou o último e mandou multiplicar o resultado por 10. Com isso, o algarismo das unidades aparece como 0. O número foi arredondado para a dezena mais próxima. O último algarismo significativo é o das dezenas.

5) Digitamos 306245 x 112208 =

Na calculadora com doze dígitos, obtemos: 34363138960.

Na calculadora com oito dígitos, aparece no visor: E343.63138.

Repare que faltaram os três últimos dígitos do resultado, por isso aparece a indicação (em código) de que este resultado deve ser multiplicado por 10^3, o que nos dará três zeros no final e, portanto, nenhum dos três últimos algarismos é confiável. O resultado da operação será arredondado para o milhar mais próximo. Isto pode representar uma grande perda de confiabilidade no resultado.

Sintetizando
Em uma operação com calculadora, o aparecimento do resultado E343.63138 significa que o resultado aproximado deverá ser 34363138 x10^3; que o último algarismo significativo é o 8; e que o resultado foi arredondado para o milhar mais próximo.

Usando a notação científica na calculadora

As teclas $\boxed{\text{EXP}}$ ou $\boxed{\text{E}}$ ou $\boxed{\text{EE}}$ são usadas na notação científica e indicam o expoente a ser tomado na base 10.

Assim, para digitar 5 x 10^8, você deverá digitar $\boxed{5}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{8}$.

Para digitar 5 x 10^{-8}, você deverá digitar $\boxed{5}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{8}$ $\boxed{+/-}$.

Para fazer a operação (5 x 10^8) x (3 x 10^{-5}), você digita:

$\boxed{5}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{8}$ $\boxed{\text{x}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$.

Deverá aparecer 15000, pois o visor comporta esses dígitos. Esse resultado é igual a 15×10^3, ou, em notação científica, $1{,}5 \times 10^4$.

Se você teclar $\boxed{5}$ $\boxed{EXP}$ $\boxed{40}$ $\boxed{x}$ $\boxed{3}$ $\boxed{EXP}$ $\boxed{5}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$, aparecerá 1,5e+36.

O resultado é igual a 15×10^{35} ou, em notação científica, $1{,}5 \times 10^{36}$.

Propriedades e cálculos com potências de expoentes positivos

As definições de potências nos levam naturalmente às suas propriedades, o que facilitará bastante os cálculos. Nós vamos ajudá-los a descobrir que propriedades são essas.

Aprendendo a fazer descobertas como um matemático
Agora você será levado a fazer algumas descobertas.

Você quer calcular $2^3 \times 2^4$. Muito bem. Substitua cada uma por um produto, por extenso:

$2^3 \times 2^4 =$ ____________

Quantos fatores iguais a 2 você obteve no total? Como escrever esse produto de fatores iguais na forma de potência? Faça isso, observando com cuidado qual será a base e qual será o expoente.

$2^3 \times 2^4 =$ ____________ $=$ ____________

Muitas pessoas que trabalham com a Matemática não se dão por contentes em fazer e resolver, elas querem observar o que foi feito, descobrir algum padrão, verificar se aquilo que fizeram pode ser generalizado.

Observando o cálculo proposto e o seu resultado ($2^3 \times 2^4 = 2^7$), você observa algum padrão ou regularidade?

Que relações existem entre 3, 4 e 7? Você deve estar percebendo que $3 + 4 = 7$. Portanto, neste caso em particular, tem-se:

$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4}$.

Isso desperta a curiosidade para a seguinte questão: será que isso é uma propriedade geral ou vale apenas para esses números?

Primeiro, tentamos ver se vale em muitos outros casos. Verifique, você também, fazendo do mesmo modo: escreva cada potência como um produto, escreva o produto obtido como uma potência, verifique se o último expoente pode ser substituído pela soma dos dois primeiros.

Agora, tentemos fazer uma comprovação geral. Não tomamos mais números particulares, mas gerais. A base será a, e os expoentes serão m e n. E escrevemos com todo o cuidado:

$$a^m \times a^n = \underbrace{axax\ldots xa}_{\text{m vezes}} \times \underbrace{axax \quad xa}_{\text{n vezes}} = \underbrace{axaxax \ldots\ldots\ldots\ldots xa}_{\text{(m+n) vezes}} = a^{m+n}.$$

Aí podemos nos sentir satisfeitos. A propriedade vale mesmo em seu caso geral!

Atividade 4

Observe casos particulares, descubra uma relação entre os expoentes iniciais e o expoente final e depois verifique no caso geral:

a) $\dfrac{3^5}{3^2} = \underline{\qquad\qquad} =$

Que relação existe entre os expoentes iniciais e o expoente final?

Verifique no caso geral (considere m > n):

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{\qquad\qquad}^{\text{m vezes}}}{\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{n vezes}}} = \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{... vezes}} =$$

b) $3^2 \times 4^2 = \ldots\ldots. \times \ldots\ldots\ldots = \qquad =$

$a^n \times b^n = \ldots\ldots. \times \ldots\ldots\ldots = \qquad =$

c) $\dfrac{6^2}{2^2} = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\quad} \times \underline{\quad} =$

$\dfrac{a^n}{b^n} = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} =$

d) $3 \times 2^2 + 5 \times 2^2 = (2^2 + 2^2 + 2^2) + (2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2) = \ldots. \times 2^2$

$m \times a^k + n \times a^k =$

Veja mais uma propriedade:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \times a^m \times \ldots \times a^m}_{\text{n vezes}} = \underbrace{\underbrace{(a \times a \times \ldots \times a)}_{\text{m vezes}} \times \underbrace{(a \times a \times \ldots \times a)}_{\text{m vezes}} \times \ldots \times \underbrace{(a \times a \times \ldots \times a)}_{\text{m vezes}}}_{\text{n vezes}} = a^{m \times n}$$

Voltando a grandes intervalos de tempo e a grandes distâncias

Ao resolver a situação-problema da Seção 1, e a Atividade 3, você deve ter escrito números bem grandes. Não sabemos que estratégia você usou – se foi a de usar muitos zeros, ou a de usar as palavras como milhões, bilhões, trilhões, ou se usou potências de 10, que é a estratégia mais usada na Matemática e áreas afins na notação científica.

Atividade 5

a) Escreva na forma decimal usual e na notação científica:

- 12 milhões.
- 3.000 milhões.
- A maior distância que você usou ou encontrou ao resolver a situação-problema.
- O valor do ano-luz em quilômetros.

b) Você já sabe que um ano = 31.557.600 segundos. Os físicos costumam usar a aproximação de um ano = pi x 10 milhões ou pi x 10^7 segundos. Explique esses valores usados pelos físicos.

O universo das distâncias e dos tempos muito pequenos

Ao nos referirmos a coisas muito finas, é comum fazermos a comparação com um fio de cabelo. Entretanto, a parede de uma bolha de sabão tem espessura bem menor, aproximadamente de cinco milimícrons. Entenda essa medida:

Um milímetro = um milésimo do metro.

Um micrômetro ou um mícron = um milésimo de milímetro (ou um milionésimo do metro).

Um milimícron = um milésimo de mícron (ou um bilionésimo do metro).

O milimícron tem outro nome: nanômetro. O prefixo "nano" refere-se a anão.

Não conseguimos nem imaginar o que seria essa medida (para outras informações, consulte www.inmetro.gov.br ou www.set.com.br/medidas.htm).

Ou melhor, para imaginar um nanômetro, deveríamos pensar primeiro no milímetro (aquela pequena distância entre dois tracinhos da régua), depois pensar em dividir esse milímetro em 1000 partes iguais (teríamos o mícron) e depois novamente dividir o resultado em 1000 partes.

Essa distância não pode ser medida por réguas graduadas, mas é medida por aparelhos ou métodos da física. Existe um aparelho chamado micrômetro, destinado a medir distâncias em mícrons (milionésimos do metro).

O diâmetro de uma célula animal mede de 10 a 20 mícrons (10 a 20 milionésimos do metro). Elas só são visíveis com microscópios. Essa medida é aproximadamente cinco vezes menor do que a menor partícula visível a olho nu, que teria de 50 a 100 milionésimos do metro. 50 milionésimos do metro é a espessura de meio fio de cabelo – de modo aproximado, o limite do que a nossa visão pode alcançar.

Do mesmo modo, para medir intervalos muito pequenos de tempo, os relógios não são suficientes. É preciso recorrer a cronômetros que detectam centésimos de segundo.

Atividade 6

Escreva na notação comum (representação decimal) com todos os algarismos:

a) 1 milésimo

b) 1 milionésimo

c) 1 bilionésimo

d) 50 milionésimos

Antes de conhecermos a notação científica para números muito pequenos, vamos recordar o significado das potências negativas.

Articulando conhecimentos

As potências com expoentes negativos
Por que $10^0 = 1$? Por que $10^{-1} = 1/10$?

As potências cujos expoentes são números naturais têm um significado bem claro: elas servem para escrever, de modo abreviado, um produto cujos fatores são iguais. Por exemplo: $4^3 = 4 \times 4 \times 4$.

Mas por que $4^0 = 1$? Por que qualquer número elevado a zero resulta em 1?

Digamos que, inicialmente, os matemáticos só viram a necessidade de definir as potências com expoente positivo.

Depois, perceberam que seria interessante estender essa definição para o caso de expoente nulo. O melhor, neste caso, era conservar o padrão que as potências com expoente positivo obedeciam. Veja:

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5
?	2	4	8	16	32
Por analogia, aqui também devemos dividir por 2.	÷2	÷2	÷2	÷2	

Dividindo-se cada valor de potência por 2, obtém-se o valor da potência anterior. O mesmo deve valer no caso do valor $2^1 = 2$. Se o dividimos por 2, obtemos o valor da potência anterior. Como $2 \div 2 = 1$, o valor da potência anterior, 2^0,deve ser 1.

Continuando do mesmo modo, obtemos os valores das potências com expoentes negativos:

2^{-2}	2^{-1}	2^{0}	2^{1}	2^{2}	2^{3}	2^{4}	2^{5}
		1	2	4	8	16	32

$\div 2 \quad \div 2 \quad \div 2 \quad \div 2 \quad \div 2 \quad \div 2 \quad \div 2$

Fazendo as divisões indicadas, obteremos $2^{-1} = \frac{1}{2}$ e $2^{-2} = \frac{1}{4}$.

Ou seja: $2^{-1} = \frac{1}{2^1}$ e $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$.

De modo geral, se n é um número natural não nulo, podemos dizer que:

$a^{-n} = 1/a^n$.

Repare que, nos expoentes, as subtrações de cada um pelo anterior são sempre iguais e com valor igual a 1. Nos valores das potências, os quocientes de cada um pelo anterior são sempre iguais e com valor igual a 2 ($32 \div 16 = 16 \div 8 = 8 \div 4 = 4 \div 2 = 2$).

Até aqui, demos uma explicação para o valor de potências com expoentes inteiros negativos. Mas, e no caso de expoentes fracionários? Como justificar o valor de $2^{1/2}$?

Para calcular $2^{1/2}$, podemos pensar de modo análogo. Inicialmente, não sabemos quanto $2^{1/2}$ deve valer, por isso convencionamos o x.

2^{0}	$2^{1/2}$	2^{1}
1	x	2

Como os expoentes diminuem por valores iguais (sempre ½), então os quocientes entre as potências devem ser iguais.

Dividindo-se cada valor de uma potência pelo valor anterior, os resultados devem ser iguais:

$$\frac{x}{1} = \frac{2}{x}$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2}$$

Logo, o valor x de $2^{1/2}$ deve ser $x = \sqrt{2}$. Não se esqueça: os quocientes iguais só ocorrem se os expoentes tiverem acréscimos iguais. Moral da história: embora uma primeira forma de certa definição possa ser muito natural e compreensível, como é o caso da potência com expoentes positivos, as extensões desta definição a outros casos (expoente nulo, expoentes negativos ou racionais) precisam ser melhor exploradas para que se possa compreender a sua lógica. E isso é importante para que não se fique com a impressão de que a Matemática impõe certas definições sem qualquer razão.

Outro modo de justificar que $a^0 = 1$:

Além da observação de padrões, outro fato que os matemáticos levam em conta ao estender uma definição são as propriedades que ela tem.

No caso de potências de expoentes positivos, os matemáticos já haviam verificado que valiam as propriedades:

$a^n \times a^m = a^{n+m}$

$a^n \times b^n = (a \times b)^n$

$(a^n/a^m) = a^{n-m}$ $(n > m)$

$(a^n/b^n) = (a/b)^n$

$(a^m)^n = a^{m \times n}$

Tiveram então a idéia de calcular (a^n/a^n) e obtiveram $a^{n-n} = a^0$.

Em princípio, não sabiam qual era o valor dessa potência. Mas, por outro lado, perceberam que a^n/a^n é igual a 1, logo deveriam ter $a^0 = 1$.

Portanto, são duas coisas que os matemáticos observam ao estender em uma definição: a <u>conservação dos padrões</u> e a <u>conservação das propriedades</u>.

Já tratamos da questão na Unidade 4 do Módulo I, na Seção 2, onde procuramos dar um significado à multiplicação de números inteiros negativos, quando, além da abordagem financeira, fizemos uma abordagem matemática, expondo o seguinte:

> Ao ampliarem o conjunto dos números naturais para o conjunto dos números inteiros, os matemáticos procuraram definir as novas operações (positivos com negativos e negativos com negativos) de modo coerente com as operações que já existiam e conservando as propriedades que valiam para essas operações com números naturais. Desse modo, foram descobrindo como definir as operações entre os números inteiros, pela exigência da validade de certas propriedades, como a distributividade e a comutatividade.

Observação: A igualdade $a^0 = 1$ vale apenas para $a \neq 0$ ou também vale para o caso de $a = 0$, isto é $0^0 = 1$? Na verdade, existem algumas expressões envolvendo o 0, anteriores a esta, que você já conhece: 0/1, 1/0 e 0/0. Vamos ver o que ocorre em cada caso.

Se fizermos $0/1 = x$, teremos $1 \times x = 0$, portanto $x = 0$. Concluímos que $0/1 = 0$. Se fizermos $1/0 = x$, teremos $0 \times x = 1$, e sabemos que não há nenhum valor de x satisfazendo isso. Logo 1/0 é uma "divisão impossível", sendo uma expressão desprovida de significado em Matemática (o mesmo vale para $n/0$, $n \neq 0$).

Se fizermos $0/0 = x$, teremos $x \times 0 = 0$. Há valores de x que satisfazem isso e são infinitos, pois qualquer número x satisfaz a expressão. Ora, uma expressão matemática *que pode valer qualquer coisa*, ou que tem um valor indeterminado, não apresenta interesse para a teoria matemática.

Vejamos em que caso enquadra-se o 0^0. Terá um valor determinado, provavelmente 1? Será uma expressão para a qual é impossível atribuir algum valor matemático, sendo, portanto, desprovida de significado matemático? Ou será uma expressão que pode ser igual a infinitos números, sendo, portanto, indeterminada?

As potências de expoente 0 foram introduzidas mantendo-se o padrão da seqüência e de modo a conservar as propriedades. No caso, se queremos que a propriedade

$(a^n / a^m) = a^{n-m}$, que vale para $n > m$, continue valendo para $n = m$, devemos ter:

$(a^n / a^n) = a^{n-n} = a^0$. Para $n=1$, a igualdade fica $a/a = a^0$. Se $a \neq 0$, temos $1 = a^0$. Se $a = 0$, recaímos em $0/0 = 0^0$ e sabemos que o primeiro membro é uma expressão indeterminada, o que torna 0^0 também uma expressão indeterminada. Em áreas mais avançadas da Matemática, como a Análise, onde são estudados limites, encontraremos também certos casos nos quais o uso de regras conduz ao valor 0^0, e onde esse valor é indeterminado.

Atividade 7

a) Usando as seqüências abaixo:

2^0	$2^{1/3}$	$2^{2/3}$	2^1
1	x	x^2	2

mostre que $2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$.

(Repare que usamos x e x^2, pois sabemos que os fatores multiplicativos na seqüência inferior são iguais, e também porque $2^{2/3} = (2^{1/3})^2$.

Articulando conhecimentos

A correspondência entre duas seqüências de números, uma apresentando acréscimos aditivos constantes, e a outra apresentando acréscimos multiplicativos constantes, foi estudada já por Arquimedes, que viveu entre 300 a 200 a.C. Veja o exemplo:

0	1	2	3	4	5	6
1	3	9	27	81	243	729

Ele notou que, em uma tal disposição, multiplicação em uma das seqüências corresponde à adição na outra. Por exemplo, para multiplicar 9 vezes 81, deve-se localizar o 9 e o 81 na seqüência inferior (de acréscimos multiplicativos), encontrar os números correspondentes, 2 e 4, na seqüência superior (de acréscimos aditivos), somá-los, obtendo 6, procurar o 6 na mesma linha superior e então olhar qual é o número correspondente a ele na linha inferior, na outra seqüência. É o número 729, que é o produto de 9 por 81. Nos 1.700 anos que se seguiram, isto foi visto como uma propriedade interessante, mas não digna de maior atenção.

Com o surgimento do mercantilismo, nos séculos XV e XVI, cresceu o interesse em encontrar métodos mais fáceis de se fazer cálculos. Bürgi, no século XVI, reconheceu o potencial de simplificação da multiplicação inerente nessas tabelas. Contudo, essas tabelas apresentam um problema: o de existirem diferenças substanciais entre os valores da seqüência inferior. Por exemplo, não se pode usar o exemplo dado para multiplicar 32 por 256, já que esses valores não constam na seqüência inferior. A solução de Bürgi foi a de minimizar o problema, criando tabelas extensas apresentando, na seqüência multiplicativa, valores muito próximos.

Ele percebeu que, em tais tabelas, encontra-se implícita a definição do que chamou logaritmo: os valores da seqüência superior são os logaritmos dos números da seqüência inferior em uma certa base. No caso, a base é 3.

0	1	2	3	4	5	6
1	3^1	$9 = 3^2$	$27 = 3^3$	$81 = 3^4$	$243 = 3^5$	$729 = 3^6$

Por exemplo: 4 é o logaritmo de 81 na base 3. Da mesma forma, 5 é o logaritmo de 10^5 na base 10. O estudo dos logaritmos é, portanto, um desdobramento do estudo das potências.

Bürgi trabalhou nessas tabelas de 1603 a 1611. Por muito tempo não publicou-as, apesar de sua evidente utilidade para o cálculo. Em 1620, por insistência de Kepler, publicou a obra "Tabela de progressão aritmética* e geométrica** com instrução detalhada de como utilizá-la para qualquer gênero de cálculos". A demora de Bürgi impediu-o de ser reconhecido como o precursor dos logaritmos. No ano de 1614, John Neper havia publicado na Inglaterra a "Descrição das extraordinárias tabelas de logaritmos".

Adaptado de *Multiplicative Reasoning* (1994), editado por Harel e Confrey, capítulo 9, p. 338 a 340, de autoria de Smith e Confrey.

Propriedades e cálculos com potências de quaisquer expoentes

As propriedades que vimos para potências com expoentes positivos valem também para potências com expoentes negativos. Isso já era esperado, pois, na verdade, essas potências foram definidas de modo a conservar padrões e conservar também as propriedades que já valiam.

O mesmo vale para expoentes racionais. Nestas potências, podemos usar as propriedades conhecidas dos números racionais. Por exemplo:

Como 3/2 = 1/2 + 1/2 + 1/2, temos:

$4^{3/2} = 4^{1/2+1/2+1/2} = 4^{1/2} \times 4^{1/2} \times 4^{1/2} = \sqrt{4} \times \sqrt{4} \times \sqrt{4} = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8.$

Outro modo de resolver:

$(4)^{3/2} = (2^2)^{3/2} = 2^{2\times 3/2} = 2^3 = 8.$

Veja as propriedades básicas:

Para expoentes inteiros:	Para expoentes racionais:
$a^n \times a^m = a^{n+m}$	$a^{p/q} \times a^{r/s} = a^{p/q + r/s}$
$a^n \times b^n = (a \times b)^n$	$a^{p/q} \times b^{p/q} = (a \times b)^{p/q}$
$(a^n/a^m) = a^{n-m}$	$(a^{p/q}/a^{r/s}) = a^{p/q - r/s}$
$(a^n / b^n) = (a / b)^n$	$(a^{p/q}/b^{p/q}) = (a/b)^{p/q}$
$(a^m)^n = a^{m \times n}$	$(a^{p/q})^{r/s} = a^{p/q \times r/s}$
$m \times a^k + n \times a^k = (m + n) \times a^k$	$m \times a^{p/q} + n \times a^{p/q} = (m + n) \times a^{p/q}$

* Progressão aritmética: uma seqüência numérica que apresenta acréscimos aditivos constantes, de um termo a outro.

** Progressão geométrica: uma seqüência numérica que apresenta acréscimos multiplicativos constantes, de um termo a outro.

Bürgi – nascido no Liechtenstein, viveu entre 1550 e 1650 e foi assistente de Kepler em Praga.

Kepler – alemão, viveu na mesma época de Bürgi. Astrônomo e matemático, é autor das três leis sobre o movimento dos planetas.

Neper – escocês, viveu na mesma época dos anteriores. Conhecido como o inventor dos logaritmos.

Cálculos com radicais

A expressão radical indica uma expressão do tipo $\sqrt[n]{m}$ onde n é um número natural e m é um número real. Em geral, se n = 2, este valor não é escrito. O valor de $\sqrt[n]{m}$ é um número "a" se $a^n = m$. Pela notação de potência de expoente racional que já introduzimos e mostramos ser coerente com as potências com outros expoentes, podemos escrever $\sqrt[n]{m}$ como $m^{1/n}$ (ver atividade 8).

Exemplos:

$\sqrt{4} = 2$ (significa $\sqrt[2]{4} = 2$)

$\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ (ou $\sqrt{0,64} = 0,8$)

Para raízes de números naturais, ocorre o seguinte:

1) a raiz (valor do radical) é outro número natural;

ou

2) a raiz é um número irracional.

Por exemplo:

$\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}, \sqrt{25}$ e $\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{27}$ ... são números naturais.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}$ ... são números irracionais.

$\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{10}$ ... são números irracionais.

Nos cálculos, aparecem com mais freqüência as raízes não exatas, que são números irracionais. Talvez, devido a isso, muitos livros didáticos, quando desenvolvem o cálculo com radicais, chamam o capítulo de Números Irracionais. Isto não é adequado, pois, como vimos, há radicais tendo como valor um número natural.

Radicais estão associados a potências. Por exemplo, radicais de índice 2 (ou raízes quadradas) estão associados a potências de expoente 2, porque, como vimos, quando queremos determinar $\sqrt{y}$ (ou $y^{1/2}$) estamos procurando um número x tal que $x^2 = y$.

É importante notar que, devido à igualdade $\sqrt[n]{m} = m^{1/n}$, os cálculos com radicais coincidem com os cálculos com expoentes racionais. Duas coisas precisam sempre ser levadas em conta: as propriedades das potências e as propriedades dos números racionais. Veja alguns fatos que podemos usar nesses cálculos:

1) As propriedades evidentes que decorrem das definições. Exemplo:

$\sqrt[5]{2^5} = 2$

Você não precisa aprender a fazer este cálculo, ele decorre da definição. Ou seja, o valor desse radical é um número "a" satisfazendo $a^5 = 2^5$, e o número é a = 2.

2) Propriedades que decorrem do uso de frações equivalentes:

$\sqrt[3]{2^5} = 2^{5/3} = 2^{10/6} = \sqrt[6]{2^{10}}$

3) Propriedades que decorrem de propriedades de potências e de operações com frações. Exemplos:

a) $(a^{1/q})^p = a^{p/q}$ (decorre de $(a^m)^n = a^{m \times n}$). Usando radicais, temos:

$\{\sqrt[q]{a}\}^p = \sqrt[q]{a^p}$

b) $\sqrt[3]{2^5} \times \sqrt[3]{2^2} = 2^{5/3} \times 2^{2/3} = 2^{5/3 + 2/3} = 2^{7/3} = \sqrt[3]{2^7}$

Também podemos usar propriedades algébricas dos números, as quais nos permitem, por exemplo, somar termos semelhantes. Veja:

4) $2(\sqrt[3]{2^5}) + 3(\sqrt[3]{2^5}) = 5(\sqrt[3]{2^5})$

Por outro lado, para expressarmos um número em termos de potências, podemos recorrer à decomposição do número em fatores primos, como, por exemplo, $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ (em outra Unidade, você aprofundará conhecimentos sobre divisores, fatores e decomposição em fatores primos).

Essa decomposição será útil também no cálculo de raízes. Por exemplo, para se achar a raiz quadrada de 180:

$\sqrt{180} = \sqrt{(2^2 \times 3^2 \times 5)}$ ou $180^{1/2} = (2^2 \times 3^2 \times 5)^{1/2}$

Você se lembra de que $(a \times b)^n = a^n \times b^n$?

Do mesmo modo: $(2^2 \times 3^2 \times 5)^{1/2} = (2^2)^{1/2} \times (3^2)^{1/2} \times (5)^{1/2}$

$= 2^{2/2} \times (3^{2/2}) \times (5)^{1/2} = 2 \times 3 \times 5^{1/2}$

Veja o que obtivemos:

$\sqrt{180} = 2 \times 3 \times 5^{1/2} = 6\sqrt{5}$

Comprovando: $(6 \times \sqrt{5})^2 = 6^2 \times (\sqrt{5})^2 = 36 \times 5 = 180$

5) Radicais em denominador:

a) Você já pensou melhor na expressão *racionalizar o denominador*? Ela é usada quando se tem uma raiz não exata em um denominador. Mas denominador não é sempre de fração e não deve ser um número inteiro? Neste caso, um denominador não pode ser uma raiz não exata, que é um número irracional. Na verdade, trata-se de um abuso de linguagem. Estamos tratando uma divisão do tipo $6/\sqrt{2}$ como uma fração, embora na realidade não o seja. Seria mais preciso falar em *racionalizar o divisor*.

Veja:

Racionalizar o divisor (ou "o denominador") consiste em multiplicar o dividendo e o divisor por um mesmo número, o que não altera o quociente. Na divisão $6/\sqrt{2}$, multiplicando-se os dois termos por $\sqrt{2}$, obtemos $6\sqrt{2}/\sqrt{2}\sqrt{2} = 6\sqrt{2}/2 = 3\sqrt{2}$.

Entretanto, podemos questionar: se continuamos a ter uma raiz, agora no dividendo, qual a vantagem desse procedimento? Veja os cálculos numéricos, em cada caso:

$3\sqrt{2} = 3 \times 1{,}4142$

$6/\sqrt{2} = 6 \div 1{,}4142$

Ou seja, a racionalização do denominador conduziu a um cálculo mais simples.

b) Um outro caso é quando temos algo dividido por uma diferença ou por uma soma de raízes, do tipo:

$$\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

Como no caso anterior, é um cálculo incômodo de ser feito. Teríamos que calcular 1,4142 ± 1,732 e dividir 2 pelo resultado.

Por isso, procuramos uma forma de simplificar o divisor, sem alterar o quociente.

O denominador é uma expressão do tipo a – b ou a + b. Você se lembra que $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$? Isso nos dará uma maneira simples de "sumir" com as raízes do "denominador". Se o denominador for do tipo a – b, devemos multiplicá-lo por a + b; se for do tipo a + b, devemos multiplicá-lo por a – b. Em qualquer caso, para não se alterar o quociente, multiplicamos o "numerador" pelo mesmo número. Por exemplo:

$$\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{2\,(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})\,(\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{2\,(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2 - 3} = -\,2\,(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

Basta somar os valores das duas raízes e multiplicar por - 2.

Novamente, a racionalização do denominador conduziu a uma simplificação do cálculo.

Observe que, mesmo que você não precise do número que expresse o valor final, eliminar as raízes do denominador facilita os cálculos. É mais fácil fazer cálculos usando $-2\,(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ do que usando $\dfrac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$.

Aprendendo sobre Educação Matemática

Nesta proposta do GESTAR II, desenvolvemos um currículo em rede. Isso é bem adequado ao ensino das ciências, em particular, à Matemática, visto que os conhecimentos são articulados uns aos outros.

No caso da Matemática, acabamos de ver essa articulação nas relações existentes entre decomposição de um número em fatores primos, propriedades de potências, álgebra e cálculos com raízes. Em vez de trabalhar esses temas de modo compartimentalizado, como fazem muitos livros, procure fazer uma ligação entre eles, como fizemos aqui. Quem percebe essas articulações ou relações tem mais recursos para os cálculos e raciocínios e tem menos chance de errar.

Atividade 8

Observe a ilustração abaixo e responda:

Célula branca do sangue - Diâmetro 4×10^{-4} cm
Modificado de: *Large and small numbers* SMP 11-16 p. 15.

Pode-se dizer que o diâmetro desta célula está entre 10 e 20 mícrons? Por quê?

Usando potências negativas em nosso sistema decimal

A escrita de números no sistema decimal estende-se nos dois sentidos, aumentando e diminuindo o valor relativo dos algarismos.

10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
milhares	centenas	dezenas	unidades	décimos	centésimos	milésimos			mícrons			milimícrons

Exemplos:

1) 0,000005 = 5 mícrons = 5×10^{-6}

10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
			0,	0	0	0	0	0	5			

2) $0{,}00036 = 3{,}6 \times 10^{-4}$

10^{3}	10^{2}	10^{1}	10^{0}	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
			0,	0	0	0	3	6				

Notação científica de um número entre 0 e 1
A notação científica de um número entre 0 e 1 é dada da seguinte forma:

N, abc... x 10^{-x}, onde:

N = primeiro algarismo não nulo que ocorre no número; a, b, c, ... = os algarismos que aparecem após o N; $-x$ = expoente da potência de 10 correspondente à ordem de N. Para o número 0,00036, temos: N = 3; $-x = -4$; notação científica: $3{,}6 \times 10^{-4}$.

Ordem de grandeza ou de magnitude de um número
É a maior potência de 10 que ocorre na representação decimal do número, correspondente ao primeiro algarismo não nulo deste.

O número 4.500.000 = $4{,}5 \times 10^{6}$ tem ordem de grandeza ou ordem de magnitude 10^{6}. O número 0,00036 = $3{,}6 \times 10^{-4}$ tem ordem de grandeza ou ordem de magnitude 10^{-4}.

De tudo o que expusemos, você pode deduzir um modo prático de achar a notação científica de um número entre 0 e 1.

Notação científica para números entre 0 e 1

Deslocamos a vírgula (para a direita) de modo a deixar apenas o primeiro algarismo não nulo à sua esquerda. Este algarismo será o N da expressão.	Número: 0,00000064 Primeiro passo: 6,4 (deslocamento da vírgula de 7 casas).
Contamos o número de casas desde onde a vírgula foi deslocada e atribuímos sinal negativo -. Esse será o expoente de 10.	O deslocamento será sempre para a direita, pois o número é menor do que 1. Ao deslocar a vírgula n casas para a direita, você estará multiplicando o número dado por 10^{n}. Para voltar ao número dado, divida-o por 10^{n}, que é o mesmo que multiplicar por 10^{-n}. Notação científica: $6{,}4 \times 10^{-7}$.

Atividade 9

O raio da Terra mede $6{,}378 \times 10^{6}$ metros, e sua distância até o Sol é de $1{,}496 \times 10^{11}$ metros.

a) Escreva essas distâncias da maneira usual (sem usar potências de 10) em quilômetros.

b) Cite exemplos de duas cidades brasileiras tais que a distância entre elas seja próxima do valor do raio da Terra.

c) Calcule o comprimento aproximado da circunferência da Terra. (Lembre-se de que você já aprendeu que o comprimento da circunferência de raio r vale $2\pi r$).

d) Supondo que exista uma rota contornando a Terra, na forma de uma circunferência máxima perfeita, e que um veículo anfíbio (aquele que anda tanto sobre a terra como sobre a água) vai percorrer esta circunferência a uma velocidade constante de 90 km/h, quanto tempo ele levaria para isso, sem parar?

e) Um avião, voando a uma distância constante do centro da Terra, igual a 6.390km (o que corresponde a uma altura de 12km acima da superfície terrestre), com uma velocidade constante de 800 km/h, levaria quanto tempo para dar a volta na Terra? Suponha que a Terra está parada e que o avião não tem necessidade de abastecimento.

f) Na mesma altura do vôo anterior, quantas voltas o avião teria que dar na Terra, até percorrer um ano-luz?

g) Quanto tempo isso levaria?

Prefixos Decimais

Você já aprendeu as palavras micrômetro (ou só mícro) e nanômetro. Elas indicam milionésimo e bilionésimo do metro, respectivamente.

1 m = 1 milhão de mícrons = 10^6 mícrons $\longrightarrow$ 1 mícron = 10^{-6} metro.

1 m = 1 bilhão de nanômetros = 10^9 nanômetros $\longrightarrow$ 1 nanômetro = 10^{-9} m.

Outras potências de 10 podem receber denominações especiais, associadas a certos prefixos que recebem o nome de Prefixos Decimais. Veja algumas na tabela abaixo, com os expoentes correspondentes:

Prefixo	**Expoente da Potência de 10**
tera (T)	+12
giga (G)	+9
Mega (M)	+6
kilo (k)	+3
Hecta (h)	+2
deca (da)	+1
deci (d)	-1
centi (c)	-2
mili (m)	-3
Micro (μ)	-6
nano (n)	-9
pico (p)	-12
Femto (f)	-15
atto (a)	-18

http://www.leocultura.hpg.ig.com.br/dicas_vest/not_cient.htm

Assim, 1 gigametro significa 10^9 metros, ou 1 bilhão de metros, ou 1 milhão de quilômetros.

Atividade 10

Expresse um ano-luz em gigametros.

Entretanto, quando queremos nos referir a medidas da memória do computador, medida em *bytes*, essas potências de 10 não se aplicam, porque a base usada é 2 e não 10. Leia o texto abaixo:

Memória

Da mesma forma que o cérebro humano, o computador também possui uma memória na qual, enquanto ele está ligado, são armazenadas as informações. A menor unidade utilizável para representação de informações em um computador é o *bit* (representado por b). Como um único *bit* é insuficiente para representar um caractere, eles são reunidos em conjuntos de oito. Estes conjuntos de oito *bits* recebem a denominação de *byte*. Quando nos referimos às informações armazenadas em um computador, utilizamos portanto o termo *byte*, correspondendo a um caractere. Tendo em vista que a unidade *byte* é consideravelmente pequena, quando indicamos valores mais extensos, utilizamos múltiplos do *byte*:

kbyte	Unidade equivalente a 1.024 bytes = 2^{10} bytes.
Mbyte	Unidade equivalente a 1.024 kbytes = 2^{10} kbytes.
Gbytes	Unidade equivalente a 1.024 Mbytes = 2^{10} Mbytes.

Articulando conhecimentos

Como os *bytes* influem no desempenho do computador.

Nos registradores do CPU[1]: os *bits* ou *bytes* indicam a quantidade de dados com a qual o computador pode trabalhar em um certo momento. Se tiver 32 *bits*, pode processar dados duas vezes mais rápido do que se tiver 16 *bits*.

Na memória RAM[2]: a quantidade de RAM (em *bytes*) pode ter um grande efeito sobre a potência do equipamento. Mais RAM significa que o computador pode usar programas

1. CPU designa Unidade Central de Processamento, que é a parte de um computador que interpreta e leva as instruções contidas no *software*. Ou seja, é a parte do computador que realmente executa as instruções (somar, subtrair, multiplicar, mudar de posição etc.)

2. A memória RAM deve seu nome à sigla Random Access Memory, ou Memória de Acesso Aleatório. Este tipo de memória permite tanto a leitura como a gravação e regravação de dados. O termo acesso aleatório identifica a capacidade de acesso a qualquer posição em qualquer altura, em oposição ao acesso seqüencial imposto por alguns dispositivos de armazenamento. No entanto, assim que elas deixam de ser alimentadas eletricamente, ou seja, quando o usuário desliga o computador, a memória RAM perde todos os seus dados.

maiores e mais poderosos e que esses programas podem acessar arquivos de dados maiores, além de fazer o computador trabalhar mais rápido. Em geral, os computadores atuais têm de 32 a 512 Mb de RAM.

O tempo gasto pelo computador para executar uma operação é medido em *ciclos*. Um ciclo é o tempo necessário para mover um *byte* de um local de memória a outro. *Hertz* é uma medida de *ciclos por segundo*. Computadores que operam em uma velocidade que se aproxima de 100MHz ou 10^8 Hertz por segundo realizam, em um segundo, 10^8 operações do tipo mover um *byte*. Equivalentemente, para mover um *byte* de um local a outro, um computador como esse gasta $1/10^8$ segundos (expresse isso com palavras do tipo milionésimo ou bilionésimo).

A evolução da tecnologia dos computadores é muito rápida. Há poucos anos, ter uma velocidade de 100MHz representava um computador rápido, mas, atualmente, eles são muito mais velozes, com os mais atuais chegando a 1GHz.

http://www.geocities.com/atheus/olympus/7428/byte.htm
http://www.widesoft.com.br/users/virtual/parte4.htm (História do computador)
http://www.di.uevora.pt/~rt/iti/1/1-2.pdf

Uma observação final:

Você deve estar pensando se há algum interesse em se tratar das unidades, principalmente das muito pequenas. A esse respeito, é bem atual o texto a seguir:

PETER MOON
Três tecnologias revolucionarão o século 21: a informática, a biotecnologia e a nanotecnologia. As duas primeiras já correm a todo vapor. A terceira, por outro lado, nem engatinha. “Com a nanotecnologia será possível melhorar todos os produtos, de instrumentos cirúrgicos a computadores”, afirma o americano Ralph Merkle, um dos desbravadores desta fronteira da ciência que quer levar a miniaturização ao extremo, usando como matéria-prima átomos e moléculas.

O nome nanotecnologia deriva do termo grego nano, que quer dizer anão. Um nanômetro é a unidade usada para medir o comprimento das moléculas. É um bilhão de vezes menor que um metro. Para se ter uma idéia do que isto significa, a espessura de um fio de cabelo, por exemplo, mede dez mil nanômetros. A complexidade de fabricar máquinas em uma escala tão diminuta é o principal desafio dos nanocientistas.

Para Merkle, a nanotecnologia, quando existir, terá aplicações fabulosas. Na medicina, produzirá robôs capazes de navegar pelos capilares do corpo humano e operar uma única célula. Na informática, surgirão computadores mais rápidos, menores, mais baratos e mais poderosos. “Os métodos usados para imprimir alguns milhões de transistores miniaturizados na pastilha de silício de um chip, o cérebro dos computadores, atingirão seu limite em breve. Para continuar expandindo o número de transistores e, portanto, sua capacidade de processamento, novas tecnologias terão de ser criadas. É aí que entra a nanotecnologia.”, prevê o americano.

Outra aplicação da nova técnica será na exploração do sistema solar. Naves espaciais precisam ser muito leves. A nanotecnologia criará materiais com dureza equivalente à do diamante, substância mais resistente encontrada na natureza, porém baratos - produzidos em escala industrial. Tal material será 50 vezes mais resistente que o aço e 50 vezes mais leve que o alumínio usado na fuselagem de jatos, ônibus espaciais e mísseis.

Merkle faz questão de salientar que as micromáquinas já existentes não têm nada a ver com nanotecnologia. Um exemplo é a minúscula engrenagem construída pelo Laboratório Nacional Sandia, no estado americano do Novo México. O mecanismo, mostrado ao lado da cabeça de um ácaro, é 100 vezes mais delgado que uma folha de papel. "Para a nanotecnologia, este ácaro é do tamanho de um elefante. A microtecnologia é o presente. A nanotecnologia é o futuro."

http://www.terra.com.br/istoe/expedien/esped41.htm

Resumindo

Nesta Seção, você conheceu ou recordou os seguintes conteúdos matemáticos:

- Notação científica dos números.
- Ordem de grandeza de um número.
- Potências com expoentes inteiros e racionais.
- Cálculo com radicais.
- Prefixos decimais (para unidades muito grandes ou muito pequenas).

Além disso, você conheceu temas a partir dos quais poderá pensar em propostas interdisciplinares. São eles:

- Matemática e tempo histórico.
- Matemática e sistema solar.
- Matemática e tecnologia – a nanotecnologia.

A respeito de aspectos da aprendizagem da Matemática, você recordou:

- A necessidade de dar significado às novas definições introduzidas, relacionando-as com as que existiam anteriormente.

Seção 3

Transposição Didática
Situações-problema e propostas didáticas em Matemática articuladas à Tecnologia

Objetivo da seção

Ao longo desta Seção, esperamos que você possa:

- Reconhecer propostas interdisciplinares articuladas a temas atuais adequadas para a aprendizagem do aluno e mobilizadoras de seu interesse.
- Conhecer e produzir situações-problema associadas a números muito grandes e muito pequenos.
- Conhecer e produzir situações didáticas envolvendo os conceitos de notação científica e de ordem de grandeza dos números.
- Identificar a importância de desenvolver junto aos alunos a noção de tempo histórico e das unidades apropriadas para medi-lo.
- Identificar corretamente o início e o fim das décadas, séculos, milênios.

O estudo de números muito grandes ou muito pequenos tem sido pouco explorado no Ensino Fundamental. Nas séries iniciais, considera-se o aluno imaturo para isso e, nas demais séries, os autores parecem se esquecer da necessidade de continuar desenvolvendo esse conhecimento. Articulados a eles, temos os conceitos de notação científica e de ordem de grandeza.

Situações-problema para os alunos

1) A situação-problema que você resolveu na Seção 1 possibilitou-lhe aperfeiçoar seus conhecimentos a respeito do sistema solar. A situação também é adequada aos alunos, consistindo em fazer modelos do Sol e dos planetas com massa ou jornal molhado (articule com o professor de arte), em escala adequada, e colocá-los formando o sistema solar, com distâncias adequadas entre si. Caso você resolva desenvolvê-la, não queira usar a sua experiência para pavimentar todo o caminho dos alunos, de modo a evitar que surjam obstáculos ou surpresas.

Será que esses obstáculos e surpresas não significam momentos de esforço, descoberta, estímulo e envolvimento?

Assim, desista de alertá-los sobre os tamanhos que deverão usar para os planetas ou o Sol.

Uma boa pergunta inicial pode ser: será que em nossa sala cabe um modelo do sistema solar proporcional ao tamanho real, de modo que possamos ver e manipular todos os seus elementos?

Deixe que os alunos trabalhem bastante em grupos, dividindo, eles próprios, as tarefas. O modelo é complexo e toda a classe deverá estar envolvida na produção de um único modelo. Como o projeto pode ser longo, reserve uma aula por semana para eles apresentarem resultados parciais. Nesta ocasião, você poderá, como mediador, auxiliá-los em algumas dificuldades. Vale a pena pagar para ver o entusiasmo e o envolvimento dos alunos!

2) Uma situação-problema relacionada a essa e que pode ser bem estimulante para os alunos é a que apresentamos abaixo, adaptada de © 1999 TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED TI-30X IIS: Manual do Instrutor 4.

Apresente o seguinte problema aos estudantes:

Você é o comandante de uma espaçonave. Sua missão é chegar até Alfa Centauro em cinco anos. A distância do Sol até Alfa Centauro é de $2{,}5 \times 10^{13}$ milhas. A distância da Terra ao Sol é de, aproximadamente, $9{,}3 \times 10^{7}$ milhas. A sua espaçonave pode viajar à velocidade da luz. Você sabe que a luz pode percorrer uma distância de $5{,}88 \times 10^{12}$ milhas em um ano. Será que você consegue chegar a Alfa Centauro a tempo?

(Sim, você conseguirá, pois gastará cerca de 4,25 anos.)

Extensão

Agora que você teve sucesso, solicitaram que fizesse uma outra viagem. A distância do Sol até Delta Centauro é de 9×10^{13} milhas.

Quanto tempo você levará para chegar lá a partir da Terra?

(Ufa! Cerca de 15,3 anos, correto?)

3) A Atividade 9 tem itens que também podem ser solicitados aos alunos como uma situação-problema. Por exemplo:

Um avião voando a uma distância constante do centro da Terra, igual a 6.390km (o que corresponde a uma altura de 12km acima da superfície terrestre), com uma velocidade constante de 800 km/h, levaria quanto tempo para dar a volta na Terra? Suponha que a Terra está parada e que o avião não tem necessidade de abastecimento.

Na mesma altura do vôo anterior, quantas voltas o avião teria que dar na Terra, até percorrer um ano-luz?

Quanto tempo isso levaria?

4) A questão do desenvolvimento do tempo histórico também pode ser aproveitada para um projeto interdisciplinar.

Comece levando e tocando a música do Raul Seixas. Uma equipe pode pesquisar sobre ele, a época em que viveu o autor da letra e como se situa a sua música dentro do panorama musical nacional.

Disponibilize a letra da música para os alunos e peça que eles destaquem os fatos históricos mencionados e que pesquisem sobre eles.

Os alunos deverão fazer uma representação do tempo correspondente aos dez mil anos mencionados, podendo ser uma reta do tempo ou outra forma que criarem, na qual deverão incluir, em escala apropriada, os eventos pesquisados e alguns outros que eles achem relevantes (nascimento de Cristo, descobrimento do Brasil, etc). Não induza essas escolhas. Grupos diferentes podem fazer representações diferentes, com escolhas de fatos adicionais também diferentes.

Discuta esta proposta com o(a) professor(a) de História. Peça-lhe que venha à sua sala e dê informações históricas mais amplas sobre os períodos em discussão.

Além da representação dos anos anteriores a Cristo por números negativos, da notação científica para algumas datas que aparecerem e da ordem de grandeza desses números, será interessante esclarecer alguns fatos relacionados ao início e ao fim das décadas, dos séculos e dos milênios. Idéias sobre isso serão desenvolvidas mais adiante.

5) Converse com os alunos sobre a nanotecnologia. Alguns computadores, como o Pentium IV, usam essa tecnologia, possuindo componentes de dimensões diminutas.

Nanotecnologia, computador e Pentium IV podem ser pesquisados na Internet. A situação-problema pode questionar: que componentes constituem a parte física (*hardware*), isto é, o cérebro do computador? Qual a sua capacidade operacional? Qual a dimensão de alguns componentes? Qual o tempo de processamento e a capacidade de armazenamento de dados nos computadores comuns e nos mais sofisticados? É interessante colocar em notação científica algumas dessas diminutas dimensões?

Todas essas situações-problema conduzem a números muito grandes ou muito pequenos, apropriados para a introdução da notação científica. A maioria das informações dadas na Seção 2, sobre convenções para se representar números nessa notação, são apropriadas aos alunos. Reveja-as e verifique se será necessária mais alguma adaptação. Nesse caso, você fica encarregado dessa nova transposição didática.

Na Seção 2, você encontrou também uma revisão sobre o significado das potências e da lógica por trás dos expoentes nulos, negativos, racionais. Escolha formas de trabalhar isso com os alunos.

Quando começam e terminam os anos, as décadas, os séculos

Algumas perguntas que podem servir como desafio são:

- Em que século foi descoberto o Brasil?

- Em que dia, mês e ano começou o atual milênio?

Sabemos que:

Um milênio = 1000 anos

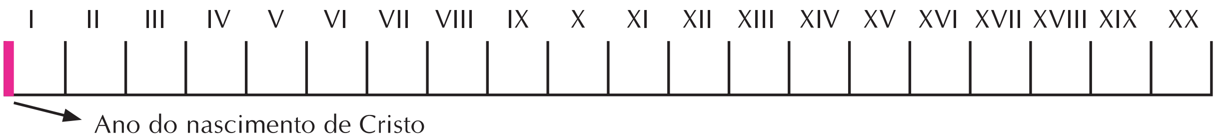
Um século = 100 anos

Uma década = 10 anos

O nosso calendário começou a contar os anos a partir de Cristo. 2000 anos se passaram, 200 décadas, 20 séculos. E mais alguns anos.

Vamos representar isto em uma reta, que vai se chamar “reta do tempo”.

SÉCULOS



Os últimos cinco séculos correspondem à história do Brasil, após o descobrimento: séculos XVI, XVII, XVIII, XIX e XX.

Atividade 11

Se o Brasil foi descoberto no ano de 1500, que século era? Século XV ou século XVI?

É provável que apareçam respostas diferentes. Para mediar a solução, você pode explicar aos alunos que:

O século I começou no dia 01/01/0001 (1 de janeiro do ano 1) e terminou no dia 31/12/100.

Do mesmo modo, o século II começou no dia 01/01/101 (1 de janeiro do ano 101) e terminou no dia 31/12/200.

Você pode questionar em que dia começou e terminou o ano 10. O final desse ano coincide com o final da primeira de todas as décadas a partir de Cristo. Leve-os a perceber que essa década ocorreu do início do ano 1 até o final do ano 10, ou melhor, do dia 1/ 1/ 01 até o dia 31/12/10 (veja que, para terminar a 1ª década, passaram-se dez anos completos).

Depois, veio a 2ª década.

2ª década (início: 1/1/11; final 31/12/20):

Anos: 11 – 12 – 13 – 14 – 15 – 16 – 17 – 18 – 19 – 20.

3ª década (início: 1/1/21; final 31/12/30):

Anos: 21 – 22 – 23 – 24 – 25 – 26 – 27 – 28 – 29 – 30.

4ª década (início: 1/1/31; final 31/12/40):

Anos: 31 – 32 – 33 – 34 – 35 – 36 – 37 – 38 – 39 – 40.

As décadas terminam no final de anos que são dezenas exatas: no final dos anos 10, 20, 30, ... Indo mais para a frente, podemos dizer que houve décadas que terminaram no final dos anos 340, 720, 1250. Ou podemos dizer que, no final do ano 2000, terminou a última década.

Você pode propor atividades intermediárias como:

Atividade 12

a) Complete:

1 - A 6ª década foi constituída pelos anos: ______________________

2 - A 10ª década foi formada pelos anos: ______________________

3 - A 10ª década terminou no dia: ____/____/____

b) Faça uma tabela com as décadas e os anos do primeiro século da nossa era.

c) Quando transcorreu o 2º século?

Atividade 13

a) O 3º século terminou no dia: ________________

b) O 9º século terminou no dia: ________________

Leve-os a inferir que os séculos terminam em anos que são centenas exatas: no final dos anos 100, 200, 300, ..., 900, 1100.

Se alguns alunos erraram a resposta da pergunta sobre o século em que o Brasil foi descoberto, após essa mediação a maioria já poderá respondê-la corretamente.

O século XV terminou no final do ano de 1500. Portanto, o Brasil foi descoberto no último ano do século XV. Mas, coisas importantes para a nossa história só ocorreram a partir de 1501, quando já era o século XVI.

Após responderem à pergunta sobre o início do nosso milênio, os alunos poderão apresentar as suas justificativas ou conferir as suas respostas acompanhando o raciocínio:

O século XV terminou no último dia de 1500.

O século XX terminou no último dia de 2000.

Cada milênio dura dez séculos.

O primeiro milênio terminou no fim do século X. O segundo milênio terminou no fim do século XX, no último dia de 2000.

Portanto, o nosso milênio, que é o terceiro da nossa era, começou no dia 1º de janeiro de 2001.

Resumindo

Nesta Seção, você encontrou idéias para a sua ação em sala de aula, como:

- O desenvolvimento de situações-problema, com os temas:
  - Sistema solar.
  - Viagem espacial da Terra até Alfa Centauro.
  - Tempo histórico.
  - Nanotecnologia.
- Idéias para trabalhar tópicos específicos, como:
  - Interpretação de potências com expoente nulo e negativo.
  - Início e término dos milênios, séculos, décadas.
- Considerações sobre o trabalho em sala de aula, do ponto de vista da Educação Matemática.

Leituras sugeridas

ATLAS DA HISTÓRIA DO MUNDO, Times Books, 4ª ed. (trad.). Brasil, Folha de São Paulo.

O Atlas, totalmente ilustrado, é uma tradução de obra originalmente publicada pelo Times Books. Apresenta as regiões do mundo e nações ao longo dos tempos, suas principais características, permitindo acompanhar a evolução histórica, política, econômica, cultural e geográfica dos povos do mundo.

NORTON, P. *Introdução à Informática*. Trad.: Maria Claudia Santos Ribeiro Ratto. São Paulo: Makron Books, 1996.

O livro contém informações básicas sobre o computador e o seu funcionamento, relevantes para um leitor interessado em conhecer mais sobre o assunto.

QUINN, D. *Ismael – um romance da condição humana*. Editora Best Seller, 1992.

Segundo Ubiratan D´Ambrosio: "é a história de um gorila que aprende a se comunicar e resolve dar aulas sobre como salvar a humanidade, fazendo uma reflexão sobre o ser humano, sua integração na sociedade e suas relações com a natureza. O professor gorila convida o aluno homem a fazer essa reflexão e aponta momentos críticos, no passado e no presente, que revelam os equívocos da civilização moderna" .

Sites

http://www.esa.int/science
O site apresenta uma interessante linha do tempo com os fatos e personagens da história da humanidade, desde a invenção da escrita (aproximadamente, em 3.400 a.C.) até os dias de hoje, abrangendo, portanto, 5.400 anos da história da humanidade.

http://www.astronomiaenespanol.org/slm/esp/
http://www.staging.noao.edu/slm/eng/mag/correo_maestro668
http://www.noao.edu/education/
Centro de Materiales de Educacion de la Astronomia en Español.
NOAO significa *National Optical Astronomy Observatory* e localiza-se em Tucson, nos Estados Unidos. No site, eles afirmam ter relações fortes com professores de ciências do Arizona e do Chile, que falam espanhol. O site procura facilitar aos educadores encontrar e usar materiais de boa qualidade produzidos em espanhol, com projetos que oferecem materiais examinados e aplicados. Há um catálogo de materiais para todas as idades à disposição dos educadores.

http://spaceplace.jpl.nasa.gov/sp/kids/phonedrmarc/2003_july.shtml
¿Cuál es la estrella más brillante?
Em linguagem e estilo de revistas destinadas a jovens, o site apresenta as respostas do Dr. Marc a perguntas que lhe são feitas. Em especial, ele responde sobre o brilho das estrelas e sua relação com suas distâncias à Terra.

Bibliografia

ATLAS MIRADOR INTERNACIONAL. P.14-15. O sistema solar. Brasil: Melhoramentos, 1975.

ENCICLOPÉDIA MIRADOR. Vol. 17. Pré-história, 5.8. Brasil: Melhoramentos, 1979.

HAREL; CONFREY (ed.) *Multiplicative Reasoning*. Capítulo 9, p. 338 a 340, de autoria de Smith e Confrey. 1994.

LEAKEY, R.E. *Origens*. Tradução: São Paulo, Melhoramentos. p.264. Brasília: Universidade de Brasília, 1980.

SMP 11-16, 1987. *Large and Small Numbers*. 3 ed. P.17. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

MEC. FUNDESCOLA. *Proformação – Guia de estudo*. MENEZES, M.B.; RAMOS, W. (coord.) Módulo III, vol. 1, Matemática e Lógica. 2000.

Sites

MENDES Jr., A. *et al*. 2003. *5.400 anos de história de Humanidade*. Disponível em: www.monicabelleza.com.br/historia/. Acessada em 05/06/03.

Babilônia-Brasil. Primeiros passos na história da Mesopotâmia Antiga. 2003. História na Mesopotâmia. *Antes da aurora na Mesopotâmia* – p. 4; Selêucidas – p.9. Disponível em: www.angelfire.com/me/babiloniabrasil/

LÓPEZ, F. *El Papiro Rhind*. In Las Matemáticas en el Antiguo Egipto. Disponível em: www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm. Acessado em 08/11/2003.

www.leocultura.hpg.ig.com.br/dicas_vest/not_cient.htm

www.widesoft.com.br/virtual/parte4.htm

www.di.uevora.pt/~rt/iti/1/1-2.pdf

Texto de referência

Qual é a diferença entre multidisciplinaridade, interdisciplinaridade e transdisciplinaridade?

Katia Maria Abud, Professora de Prática de Ensino de História da Faculdade de Educação da USP

O mundo é uma totalidade. Mas, sendo tão grande e complexo, seu conhecimento é feito pelas partes. Foi essa idéia de que a fragmentação facilita a compreensão do conhecimento científico que orientou a elaboração dos currículos básicos em um certo número de disciplinas consideradas indispensáveis à construção do saber escolar. Tal simplificação, por outro lado, complicou a compreensão de fenômenos mais complexos. A solução para o problema foi relacionar as várias disciplinas do currículo.

Segundo Piaget, as relações entre as disciplinas podem se dar em três níveis: multidisciplinar, interdisciplinar e transdisciplinar.

Na multidisciplinaridade, recorremos a informações de várias matérias para estudar um determinado elemento, sem a preocupação de interligar as disciplinas entre si. Assim, ao analisar uma pintura renascentista, podemos usar dados vindos da História, da Química e da Educação Artística. A História conta, por exemplo, quando foi o período chamado Renascimento. A Química descreve a composição do material usado na pintura. A Educação Artística lida com seus aspectos estéticos – as cores usadas, a disposição dos elementos na tela e daí por diante. Neste caso, cada matéria contribuiu com informações pertinentes ao seu campo de conhecimento, sem que houvesse uma real integração entre elas. Essa forma de relacionamento entre as disciplinas é a menos eficaz para a transferência de conhecimentos para os alunos.

Na interdisciplinaridade, estabelecemos uma interação entre duas ou mais disciplinas. No exemplo anterior, haveria interdisciplinaridade se, ao estudarmos a pintura, relacionássemos o contexto histórico do Renascimento com os temas usados pelos artistas de então e sobre as técnicas empregadas por eles. A análise do material utilizado na pintura poderia ser ampliada para um estudo do desenvolvimento tecnológico ao longo do tempo. O ensino baseado na interdisciplinaridade proporciona uma aprendizagem muito mais estruturada e rica, pois os conceitos estão organizados em torno de unidades mais globais, de estruturas conceituais e metodológicas, compartilhadas por várias disciplinas.

Na transdisciplinaridade, a cooperação entre as várias matérias é tanta que não dá mais para separá-las: acaba surgindo uma nova "macrodisciplina". Um exemplo de transdisciplinaridade são as grandes teorias explicativas do funcionamento das sociedades. Esse é o estágio de cooperação entre as disciplinas mais difícil de ser aplicado na escola, pois há sempre a possibilidade de uma disciplina "imperialista" sobrepor-se às outras.

Transcrito de http://novaescola.abril.com.br/ed/124_ago99/html/comcerteza_didatica.htm

Uma Postura Interdisciplinar

Thereza Cristina Bordoni. Mestre em Políticas Educacionais. Pesquisadora Educacional. Vice-Diretora do Colégio Marista de Patos de Minas. Consultora Educacional

"O significado curricular de cada disciplina não pode resultar de uma apreciação isolada de seu conteúdo, mas sim do modo como se articulam as disciplinas em seu conjunto; tal articulação é sempre tributária de uma sistematização filosófica mais abrangente, cujos princípios norteadores é necessário reconhecer."

MACHADO, 1995, p. 186

Interdisciplinaridade

"Do ponto de vista epistemológico, consiste no método de pesquisa e de ensino voltado para a interação em uma disciplina, de duas ou mais disciplinas, num processo que pode ir da simples comunicação de idéias até a integração recíproca de finalidades, objetivos, conceitos, conteúdos, terminologia, metodologia, procedimentos, dados e formas de organizá-los e sistematizá-los no processo de elaboração do conhecimento." (Dra. Francisca S. Gonçalves – USP)

Transdisciplinaridade

"É a reunião das contribuições de todas as áreas do conhecimento num processo de elaboração do saber voltado para a compreensão da realidade, a descoberta de potencialidades e alternativas de se atuar sobre ela, tendo em vista transformá-la." (Zemelman)

Refletindo sobre Interdisciplinaridade

Interdisciplinaridade é um termo que não tem significado único, possuindo diferentes interpretações, mas em todas elas está implícita uma nova postura diante do conhecimento, uma mudança de atitude em busca da unidade de pensamento. Desta forma, a interdisciplinaridade difere da concepção de pluri ou multidisciplinaridade, as quais apenas justapõem conteúdos.

Nesse sentido, não estamos nos referindo à interdisciplinaridade como uma teoria geral e absoluta do conhecimento, nem a compreendemos como uma ciência aplicada, mas sim como o estudo do desenvolvimento de um processo dinâmico, integrador e, sobretudo, dialógico. Concordamos com Fazenda, ao caracterizar a interdisciplinaridade "pela intensidade das trocas entre os especialistas e pela integração das disciplinas num mesmo projeto de pesquisa.(...) Em termos de interdisciplinaridade ter-se-ia uma relação de reciprocidade, de mutualidade ou, melhor dizendo, um regime de co-propriedade, de interação, que irá possibilitar o diálogo entre os interessados. A interdisciplinaridade depende então, basicamente, de uma mudança de atitude perante o problema do conhecimento, da substituição de uma concepção fragmentária pela unitária do ser humano". (Fazenda, 1993, p. 31)

Os pontos de partida e de chegada de uma prática interdisciplinar estão na ação. Desta forma, por meio do diálogo que se estabelece entre as disciplinas e entre os sujeitos das ações, a interdisciplinaridade "devolve a identidade às disciplinas, fortalecendo-as" e evidenciando uma mudança de postura na prática pedagógica. Tal atitude baseia-se no reconhecimento da "provisoriedade do conhecimento", no questionamento constante das próprias posições assumidas e dos procedimentos adotados, no respeito à individualidade e na abertura à investigação em busca da totalidade do conhecimento. Não se trata de propor a eliminação de disciplinas, mas sim da criação de movimentos que propiciem o estabelecimento de relações entre estas, tendo, como ponto de convergência, a ação que se desenvolve em um trabalho cooperativo e reflexivo. Assim, alunos e professores – sujeitos de sua própria ação – se engajam em um processo de investigação, redescoberta e construção coletiva de conhecimento que ignora a divisão do conhecimento em disciplinas. Ao compartilhar idéias, ações e reflexões, cada participante é ao mesmo tempo "ator" e "autor" do processo. A partir de todos esses referenciais, é importante que os conteúdos das disciplinas sejam vistos como instrumentos culturais, necessários para que os alunos avancem na formação global e não como fim de si mesmo.

A interdisciplinaridade favorecerá que as ações se traduzam na intenção educativa de ampliar a capacidade do aluno de:

- expressar-se por meio de múltiplas linguagens e novas tecnologias;
- posicionar-se diante da informação;
- interagir, de forma crítica e ativa, com o meio físico e social.

Temos então o desafio de assegurar a abordagem global da realidade, por meio de uma perspectiva holística, transdisciplinar. Onde a valorização é centrada, não no que é transmitido, e sim no que é construído. Assim, a prática interdisciplinar nos envolve no processo de aprender a aprender.

A postura interdisciplinar incita o pensamento em direção ao enfrentamento de tensões que se criam durante o seu processo de elucidação, o que possibilita a superação de dicotomias tradicionais da visão de mundo mecanicista.

Temos então a interdisciplinaridade como um campo aberto para que, de uma prática fragmentada por especialidades, possamos estabelecer novas competências e habilidades por meio de um postura pautada em uma visão holística do conhecimento e uma porta aberta para os processos transdisciplinares.

Transcrito de www.forumeducacao.hpg.ig.com.br/textos/textos/didat_7.htm

Referências bibliográficas

FAZENDA, I. C. Interdisciplinaridade: *Um projeto em parceria*. São Paulo: Loyola, 1993.

_______. *Interdisciplinaridade: História, teoria e pesquisa*. Campinas, São Paulo: Papirus, 1994.

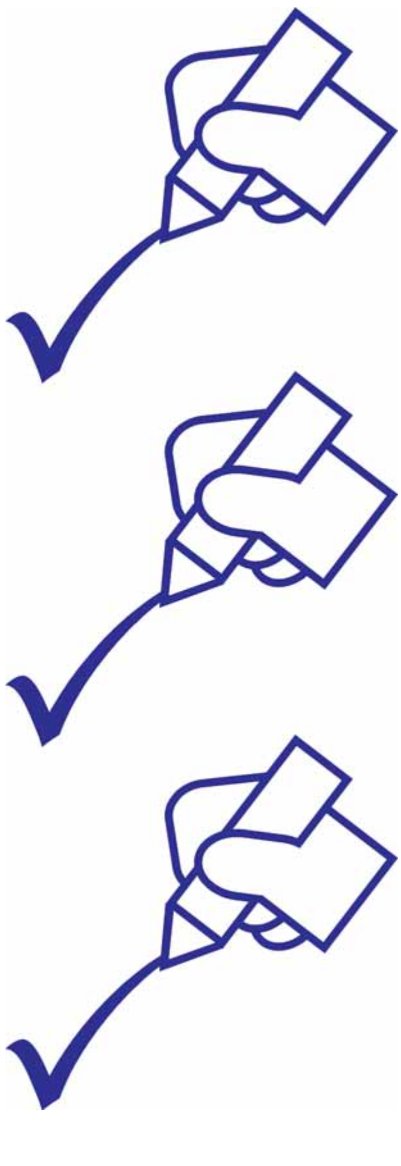
GONÇALVES, F.S. Palestra na USP.

MACHADO, N.J. *Epistemologia e didática: as conceções do conhecimento e inteligência e a prática docente*. São Paulo: Cortez Editora, 1995.

ZEMELMAN, H. Texto fotocopiado, 1992. Tradução dos autores.

Adaptado de http://www.forumeducacao.hpg.ig.com.br/textos/textos/didat_7.htm

Solução das atividades



Solução das atividades

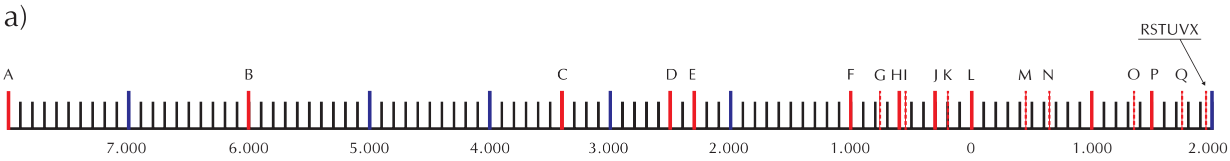
Atividade 1

Resposta pessoal. Veja alguns fatos importantes no Anexo 1. Acrescente à sua tabela os que achar mais interessantes, adaptando-os para o modelo da tabela.

Atividade 2

Resposta pessoal. Uma solução possível é:

a)



A: 8000 a.C. séc. 80 a.C. – Final da Idade da Pedra.

B: 6000 a.C. séc. 60 a.C. – Trabalho com o metal.

C: 3.400 a.C. séc. 34 a.C. – Primeiro sistema de escrita, elaborado pelos sumérios, na Mesopotâmia.

D: 2.500 a.C. séc. 25 a.C. – Primeiras cidades na China.

E: 2.300 a.C. séc. 23 a.C. – Império Acádio unifica cidades-estado da Mesopotâmia.

F: 1.000 a.C. séc. 10 a.C. – Aparecimento e predomínio do ferro.

G: Cerca de 750 a.C. – Fundação de Roma.

H : Cerca de 600 a.C. – Tales inicia a sua geometria dedutiva.

I: Cerca de 540 a.C. – Auge da Escola Pitagórica.

J: Cerca de 300 a.C. – Euclides escreve a obra "Elementos".

K: Cerca de 200 a.C. – Arquimedes descobre como calcular uma aproximação para π.

L: Entre o ano 1 a.C. e ano 1 d.C. – Nascimento de Cristo.

M: 476 séc. V – Fim do Império Romano/ Começo da Idade Média.

N: 641 séc. VII – Destruição da biblioteca de Alexandria pelos árabes.

O: 1347 séc. XIV – Peste negra na Europa.

P: 1500 séc. XV – Descobrimento do Brasil.

Q: 1789 séc. XVIII – Revolução Francesa. Fim da Idade Moderna, início da Idade Contemporânea.

R: 1914 séc. XX – Início da 1ª Guerra Mundial.

S: 1917 séc. XX – Início da Revolução Russa e da União Soviética.

T: 1939 séc. XX – Início da 2ª Guerra Mundial.

U: 1955 séc. XX – Início da guerra do Vietnã.

V: 1989 séc. XX – Queda do muro de Berlim.

X: 1991 séc. XX – Fim da União Soviética.

b) Se a medida que representava um século passar a representar um ano, será necessário um segmento igual a cem vezes o anterior.

Atividade 3

a) Resposta pessoal.
b) Você usou um certo comprimento x para representar 10.000 anos. Como o *homo sapiens sapiens* existe há 80.000 anos, multiplique-o por 8.
c) 12.000.000 de anos divididos por 10.000 dá 1.200. Multiplique x por 1.200.
d) 3.000 mi = 3 mil milhões = 3.000.000.000 (3 bilhões).
e) 3.000.000.000 dividido por 10.000 dá 300.000. Multiplique x por esse fator.
f) Em 3.000.000.000 de anos há 30.000.000 de séculos (basta dividir por 100). Se usarmos 1mm para representar cada um, necessitamos de um segmento com 30.000.000mm = 30.000m = 30 km.

Atividade 4

a) $\dfrac{3^5}{3^2} = \dfrac{3x3x3x3x3}{3x3} = 3x3x3 = 3^3$

O expoente final é igual ao expoente do numerador menos o expoente do denominador.

No caso geral (considere m>n):

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{axax\ldots xaxaxaxaxa}^{\text{m vezes}}}{\underbrace{axax\ldots xa}_{\text{n vezes}}} = \frac{\overbrace{\cancel{a}x\cancel{a}x\ldots x\cancel{a}}^{\text{cancela-se n termos comuns}}\overbrace{x\ldots xaxaxa}^{\text{sobram m-n fatores}}}{\underbrace{\cancel{a}x\cancel{a}x\ldots x\cancel{a}}_{\text{n vezes}}} = a^{m-n}$$

b) $3^2 \text{ x } 4^2 = 3x3x4x4 = (3x4) \text{ x } (3x4) = (3x4)^2$
$a^n \text{ x } b^n = axax\ldots xax\ bxbx\ldots xb = \underbrace{(axb) \text{ x } (axb) x \ldots \text{ x } (axb)}_{\text{n vezes}} = (axb)^n$

c) $\dfrac{6^2}{2^2} = \dfrac{6x6}{2x2} = \dfrac{6}{2} \text{ x } \dfrac{6}{2} = \left(\dfrac{6}{2}\right)^2$

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{axax\ldots xa}{bxbx\ldots xb} = \underbrace{\frac{a}{b} \text{ x } \frac{a}{b} \text{ x } \ldots \text{x } \frac{a}{b}}_{\text{n vezes}} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

d) $3x2^2 + 5x2^2 = (2^2 + 2^2 + 2^2) + (2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2) = 8x2^2$
$m \times a^k + n \times a^k = \underbrace{(a^k + \ldots + a^k)}_{\text{m vezes}} + \underbrace{(a^k + \ldots + a^k + a^k)}_{\text{n vezes}} = (m+n) \times a^k$

Atividade 5

a) • 12.000.000 = $1{,}2 \times 10^7$.
- 3.000.000.000 = 3×10^9.
- Resposta pessoal.
- 9.467.280.000.000km = $9{,}46728 \times 10^{12}$km.

(Veja o quadro "O significado de um ano-luz", na Seção 1).

b) 31.557.600seg $\cong 3{,}15 \times 10^7$seg $\cong$ pi x 10^7seg = pi x 10.000.000 seg.

Atividade 6

a) 0,001.

b) 0,000001.

c) 0,000000001.

d) 0,000050.

Atividade 7

a) Os expoentes decrescem sempre em um terço. Logo os quocientes das potências devem ser constantes:

$\frac{2}{x^2} = \frac{x^2}{x} = \frac{x}{1}$. Logo $2x = x^4$, portanto, $2 = x^3$. Portanto, $x = \sqrt[3]{2}$

Mas x é o valor que atribuímos a $2^{1/3}$, logo $2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$

Atividade 8

Não. Justificativa:

Diâmetro da célula branca do sangue = 4×10^{-4} cm = $\frac{4}{10^4}$ cm = 0,0004cm

=0,004 mm (4 milésimos de milímetro) = 4 mícrons.

Atividade 9

a) – Raio da Terra = $6{,}378 \times 10^6$ metros = $6{,}378 \times 10^3$ km = 6.378km.

Outro modo de calcular:
Raio da Terra = 6.378.000 m = 6.378km.

– Distância da Terra ao Sol = $1{,}496 \times 10^{11}$ m = $1{,}496 \times 10^8$ km = 149.600.000 km. Outro modo de calcular:
$1{,}496 \times 10^{11}$ m= 149.600.000.000m = 149.600.000km.

b) Resposta pessoal. Deve-se observar, contudo, que, medindo em linha reta, não há cidades brasileiras que distam entre si 6.378km. Por exemplo, em linha reta, a distância de Boa Vista, em Roraima, até Porto Alegre, no Rio Grande do Sul, é de aproximadamente 3.810km. Já a distância rodoviária entre essas duas cidades, passando por Brasília, é igual a 6.303km (4.276km de Boa Vista a Brasília, mais 2.027km de Brasília a Porto Alegre). Quem faz uma viagem dessas está percorrendo uma distância próxima do raio da Terra (faltariam ainda 75km).

c) Circunferência (máxima) da Terra = $2\pi R = 2 \times 3{,}1416 \times 6.378\text{km} \cong 40.074\text{km}$.

d) Tempo necessário para percorrer a circunferência, a 90km por hora:

$40.074 \div 90 = 445{,}266...$horas. Em dias:

$445{,}266... \div 24 \cong 18{,}552$ dias (aproximadamente 18 dias e meio).

Observação: esta circunferência deve ser suposta na direção norte-sul, pois, na direção leste-oeste, o movimento poderia ser no mesmo sentido do movimento de rotação da Terra, e o tempo seria maior; ou poderia ser em sentido contrário, e o tempo seria menor.

e) O raio da circunferência que o avião descreve é igual ao raio da Terra, acrescido de 12km, portanto vale 6.378km + 12km, o que dá 6.390km. O comprimento dessa circunferência é de $2\pi R = 2 \times 3{,}1416 \times 6.390 = 40.149{,}648$km.

Tempo para dar a volta = $40.149{,}648 \div 800 = 50{,}187$ horas ou $50{,}187 \div 24 \cong 2$ dias e 0,09 do dia. Essa quantidade está expressa no sistema decimal. Para expressar 2 dias e 0,09 do dia em termos de horas, minutos e segundos, podemos fazer o seguinte:

Como o dia tem $24 \times 60 = 1440$ minutos, 0,01 do dia vale 14,40 minutos e 0,09 do dia vale nove vezes mais, isto é, 129,60 minutos. Portanto, temos um tempo de 2 horas e 9,60 minutos, além dos dois dias.

Como o minuto tem 60 segundos, 0,1 do minuto vale 6 segundos e 0,6 do minuto vale seis vezes mais, isto é, 36 segundos. Portanto o tempo total para dar a volta será de 2 dias, 2 horas, 9 minutos e 36 segundos.

f) Sabemos que em uma volta o avião percorre 40.149,648km. Um ano-luz vale 9.467.280.000.000km. Portanto:

$9.467.280.000.000 \div 40.149{,}648 = 235.799.825{,}69$ voltas.

g) Tempo gasto no item "f", em dias (2,09 dias para cada volta):

$235.799.825{,}69 \times 2{,}09 = 492.821.635{,}6921$ dias.

Para saber a resposta em anos, devemos dividir por 365,25 (cada ano tem 365 dias mais um quarto de dia).

$492.821.635{,}6921 \div 365{,}25 = 1.349.272{,}1$ anos

Este é o tempo que um avião, a 800 km/h, gasta em anos para percorrer a distância de um ano-luz.

Há uma maneira mais direta de se fazer esse cálculo, sem usar os resultados do item “f”. Basta dividir a distância de um ano-luz pela velocidade:

9.467.280.000.000km ÷ 800km/h = 11.834.100.000 horas.

Cada ano tem 365,25 x 24 = 8766 horas. Portanto, em anos, teremos:

11.834.100.000 ÷ 8.766 = 1.350.000 anos.

As respostas são próximas. A segunda é mais confiável, pois usou menos cálculos e fez menos aproximações.

Repare que esses anos valem mais do que mil milênios, são 13.500 séculos!

Atividade 10

1 ano-luz = 9.467.280.000.000km = 9.467.280.000.000.000m.

1 gigametro = 1.000.000.000 metros.

1 ano-luz = 9.467.280 gigametros.

Atividade 11

O Brasil foi descoberto no último ano do século XV. O século XVI só começou alguns meses depois da descoberta. A colonização e a exploração do País só se iniciaram no século XVI.

Atividade 12

a) 1- A 6ª década foi constituída pelos anos: 51, 52, 53, ...60.
   2- A 10ª década foi formada pelos anos: 91, 92, 93, ...100.
   3- A 10ª década terminou no dia 31/12/100.

b)

	Anos									
Década 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Década 2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Década 3	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Década 4	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Década 5	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Década 6	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Década 7	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Década 8	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Década 9	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Década 10	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

c) O 2º século transcorreu de 1/ 1/ 101 a 31/12/200.

Atividade 13

a) O 3º século terminou no dia 31/12/300.
b) O 9º século terminou no dia 31/12/900.

Idéias para resolver a situação-problema – construção de uma maquete de nosso sistema planetário.

Pesquise os diâmetros dos planetas e a distância de cada um ao Sol.

O menor planeta, Mercúrio, tem 4.800km de diâmetro. Representando-o com uma bolinha de mm de diâmetro (escala 1mm:48.000km), o Sol teria um diâmetro de 59cm.

Nessa escala, a distância entre o Sol e o planeta mais distante, Netuno, seria de 936m (quase 1km) e não caberia na sala.

Para caber, temos que reduzir essa distância pelo menos 100 vezes, o que não podemos fazer com o diâmetro escolhido para Mercúrio. Uma possível solução é usar escalas diferentes, conservando para as dimensões dos planetas a escala 1mm:48.000km, e representando as distâncias na escala 1mm: 4.800.000km. Nesse caso, a distância do Sol a Netuno seria de 9,36m.

Uma idéia é pendurar um barbante na direção da diagonal da sala, a 2m e pouco do chão. Verifique se o barbante tem pelo menos 9,36m. Em uma das extremidades do barbante fixe o Sol e, a 9,36m dele, a bola que representa Netuno. Entre ambos, ao longo do barbante, coloque os demais planetas, com as dimensões e distâncias ao Sol calculadas nas escalas definidas. Lembre os alunos que, representando as distâncias na mesma proporção do tamanho dos planetas, elas seriam 100 vezes maiores.

Esta é apenas uma sugestão. Muitas idéias podem surgir.

PARTE I

TEORIA E PRÁTICA 4

ANEXO

GESTAR TP4

Anexo

www.monicabelleza.com.br/historia/

Fatos históricos	Fatos científicos/ tecnológicos/ artísticos
79 Erupção do vulcão Vesúvio destrói Pompéia, na Itália.	**75** Começa a construção do coliseu romano.
476 Deposição de Rômulo marca o fim do Império Romano. **Começa a Idade Média**	
641 Biblioteca da Alexandria é destruída pelos árabes.	
	700 Chineses inventam a pólvora (data aproximada).
1099 Auge do sistema feudal na Europa.	
1347 Peste Negra chega à Europa.	
1413 Início das viagens marítimas portuguesas.	
	1455 Impressão da bíblia de Gutenberg.
	1509 O relógio é inventado na atual Alemanha.
1532 Fundação de São Vicente, primeira vila brasileira.	
1538 Primeiros escravos africanos chegam ao Brasil.	
	1543 Nicolau Copérnico conclui a obra De Revolutionibus Orbium.
	1572 Camões publica o clássico *Os Lusíadas*.
	1583 Invenção do microscópio e do termômetro.
	1609 Galileu inventa o telescópio.
1615 Início do Quilombo dos Palmares.	
1630-1654 Holandeses ocupam Pernambuco.	
	1637 Descartes publica o Discurso sobre o Método, marco da filosofia moderna.
	1687 Newton publica a lei da gravidade.
1695 Destruição de Palmares e morte de seu líder, Zumbi.	
	1698 Savery inventa o motor a vapor.
	1709 Surge o primeiro piano, na Itália.
	1742 Celsius desenvolve a escala em centígrados.
	1775 Jenner descobre o princípio da vacinação.
1789 Revolução Francesa: fim da Idade Moderna e início da Contemporânea.	
	1789 Lavoisier começa a química moderna.
1792 Julgamento dos inconfidentes e execução de Tiradentes.	
	1800 Alessandro Volta fabrica a primeira bateria.
	1814 Stephenson inventa a locomotiva a vapor.
	1820 Primeira iluminação urbana, em Londres.
	1848 Marx e Engels publicam O *Manifesto Comunista*.
	1859 Charles Darwin publica A *Origem das Espécies*.
	1876 Alexander Graham Bell inventa o telefone.
	1885 Daimler produz o primeiro carro a gasolina.
	1886 Um farmacêutico dos EEUU inventa a coca-cola.
	1895 Röentgen descobre o raio-X.
	1895 Irmãos Lumière constroem o primeiro aparelho cinematográfico.
	1895 Criação do Prêmio Nobel da Paz.
1896 Primeiros Jogos Olímpicos modernos, em Atenas.	
	1896 Marconi inventa o telégrafo sem fio
1904 Vacinação obrigatória gera distúrbios no Rio de Janeiro.	
	1905 Einstein anuncia a Teoria da Relatividade.
	1906 Santos Dumont voa com o 14 Bis.
	1907 Auguste Lumière inventa a fotografia colorida.
1914-1918 Primeira Guerra Mundial, na Europa.	
1917 Início da Revolução Russa e da União Soviética.	

	1927 Lindenberg realiza a primeira travessia área do Atlântico.
1928 Stálin assume o poder na União Soviética.	
1930 Revolução de 1930 marca o início da Era Vargas.	
1932 Salazar torna-se presidente do Conselho em Portugal.	
1936 Guerra Civil Espanhola.	
	1936 Primeira transmissão televisiva, na Inglaterra.
1939 Hitler invade a Polônia: começa a Segunda Guerra Mundial.	
1948 Criação do Estado de Israel.	
	1949 Soviéticos explodem sua primeira bomba atômica.
	1951 Primeiro computador comercial, UNIVAC I, é lançado nos EUA.
1955 Começa a Guerra do Vietnã.	
1957 União Soviética lança o Sputnik.	
1960 Kubitschek inaugura Brasília.	
1963 Kennedy é assassinado nos EUA.	
1964 João Goulart é deposto do poder pelos militares.	
	1969 Homem chega à Lua.
	1981 Cientistas isolam o vírus da AIDS.
	1983 Internet é criada.
1989 Queda do muro de Berlim.	
1991 Fim da União Soviética.	
	1999 Cientistas escoceses produzem clone de ovelha.

Fontes: História do Brasil (Bóris Fausto), Brazil (Thomas Skidmore),Dicionário Ilustrado Folha, Oxford Encyclopedia of World History, The Timetables of History (Bernard Grun), http://www.hyperhistory.com e Encyclopaedia Britannica.

Unidade 15

Água – da hipótese de Tales a um problema no mundo atual – Teorema de Tales, semelhança de triângulos, previsão de eclipses e determinação de distâncias inacessíveis

Nilza Eigenheer Bertoni

Iniciando a nossa conversa

Na Unidade anterior, você leu bastante sobre História. Embora tenhamos apresentado muitos eventos, o que importa não é o evento isolado, mas as condições que levaram a eles, as correlações que mantêm entre si e as marcas ou novos rumos que eles deixam na humanidade.

A visão tradicionalista de História passou a ser chamada de "história-evento" – a que apenas lista dinastias e fatos.

A concepção de História, hoje, é de História Integral. Ela estuda, entre outros, fenômenos econômicos e demográficos, políticos, religiosos, artísticos, literários, filosóficos, científicos. Ela contempla tanto acontecimentos singulares quanto a interação dos indivíduos, dos grupos e das classes sociais. Veja, a este respeito, o quadro a seguir:

A caracterização de uma nova concepção do tempo histórico pode ser feita a partir de elementos significativos: a **interdisciplinaridade**; a **longa-duração** (entendida como uma "dialética da duração" e não na concepção de história tradicional); a **ampliação do conceito de fonte histórica** (a documentação é relativa ao campo econômico-social-mental e abrange tudo que comprove vestígios da passagem do homem), a história é vista **como construção, motivada por problemas; o método retrospectivo**...

Explicar não é estabelecer uma filiação. O presente não se deixa explicar integralmente por sua origem. Está enraizado no passado, mas conhecer essa raiz não esgota seu conhecimento. Ele exige um estudo em si, combinando origens passadas, tendências futuras e ação atual. Faz-se o caminho do mais conhecido, o presente, ao menos conhecido, o passado, para conhecê-lo mais, e isto sustenta a história-problema, que é temática e que elege, a partir da análise do presente, os temas que interessam a esse presente, problematiza-os e trata-os no passado, trazendo informações para o presente que o esclarecem sobre sua própria experiência vivida.

Adaptado de GARNICA, A.V.M. *História Oral e Educação Matemática: um inventário.*

Nesta Unidade, a História vai voltar ao tempo da Matemática dos gregos e dos conceitos matemáticos, como os de razão, proporção e triângulos semelhantes, com os quais resolviam grande parte de seus problemas, e que ainda resolvem muitos problemas da atualidade. Em meio a esse contexto, aparece um nome singular e relevante – o de Tales, que viveu por volta de 320 a.C., na cidade de Mileto, na Ásia Menor, antiga região grega, atualmente a Turquia.

Você conhecerá o mais famoso teorema deste matemático, que leva seu nome, e suas aplicações para a semelhança de triângulos. Verá, também, que grande parte da teoria estabelecida por Tales é útil em inúmeras situações da vida atual.

Como nas Unidades anteriores, esta também constará de três Seções:

Na Seção 1, você encontrará uma situação-problema relacionada à economia de água, que fará uso intenso de proporções.

Na Seção 2, estudaremos alguns conceitos geométricos associados a proporções, como semelhança de triângulos e o Teorema de Tales.

Na Seção 3, faremos sugestões para o desenvolvimento desses conceitos em sala de aula.

Definindo o nosso percurso

Ao longo desta Unidade, esperamos que você possa:

1 - Com relação aos seus conhecimentos matemáticos:

- Trabalhar com situações-problema da vivência cotidiana, envolvendo economia e controle do consumo de água, pelo desenvolvimento de conteúdos matemáticos adequados à resolução e outros naturalmente relacionados a eles, como:

- Proporções;
- Teorema de Tales;
- Semelhança de triângulos.

– Compreender teoremas matemáticos como instrumentais importantes na solução de problemas e situações-problema e entendê-los como objetos matemáticos.

Esses conhecimentos serão desenvolvidos nas Seções 1 e 2.

2 - Com relação aos seus conhecimentos sobre Educação Matemática:

- Conhecer fatos relevantes da história da matemática (Seção 1).
- Perceber aspectos relacionados a currículo em rede, bem como sua implicação para a aprendizagem (Seção 2).
- Aprofundar a compreensão de uma proposta concreta de exploração didática dos erros dos alunos, no Texto de Referência.

3 - Com relação à sua atuação em sala de aula:

- Conhecer e produzir, com relação ao Teorema de Tales e a triângulos semelhantes, situações didáticas adequadas à série em que atua no Ensino Fundamental.
- Conhecer e produzir situações para a exploração, junto aos alunos, dos conceitos de semelhança em polígonos e em triângulos.
- Conhecer e produzir projetos ou propostas interdisciplinares que envolvam a Matemática.

Estes objetivos serão tratados na Seção 3.

Seção 1

Resolução de situação-problema – Escassez, desperdício e economia de água

Objetivo da seção

- Perceber a disponibilidade limitada de água potável no mundo.
- Desenvolver senso crítico a respeito de contaminação e desperdício de água.
- Conhecer procedimentos úteis para limitar o consumo residencial da água.
- Calcular a possibilidade de redução do consumo de água mensal na residência bem como do custo correspondente.
- Conhecer fatos relevantes da história da matemática, associando-os a épocas históricas.

Na época de Tales, eram conhecidos os números naturais e um pouco sobre frações. Sistemas numéricos existiam desde 3.400 a.C. no Egito e desde 3.000 a.C. na Mesopotâmia, bem antes das inscrições numéricas da Índia, de aproximadamente 300 a.C., ou na China – de 300 a 200 a.C.

Mas, além dos números, dois conceitos matemáticos eram muito usados. Segundo Guelli (1993, p.8):

Para realizar as construções de que necessitavam – calcular a altura das pirâmides, a largura dos rios, a altura das montanhas, etc. – os matemáticos da Antigüidade baseavam-se em dois conceitos:

- razão entre dois números;
- triângulos semelhantes.

Esses conceitos foram bastante utilizados por Tales. Até hoje, eles são básicos para a resolução de problemas do mundo atual. Vamos recordá-los brevemente:

Articulando conhecimentos

1 – Dados dois números a e b (b ≠ 0), podemos dizer que a/b é a razão entre eles. Ou então, dizemos que:

Esses números estão na razão de a para b.

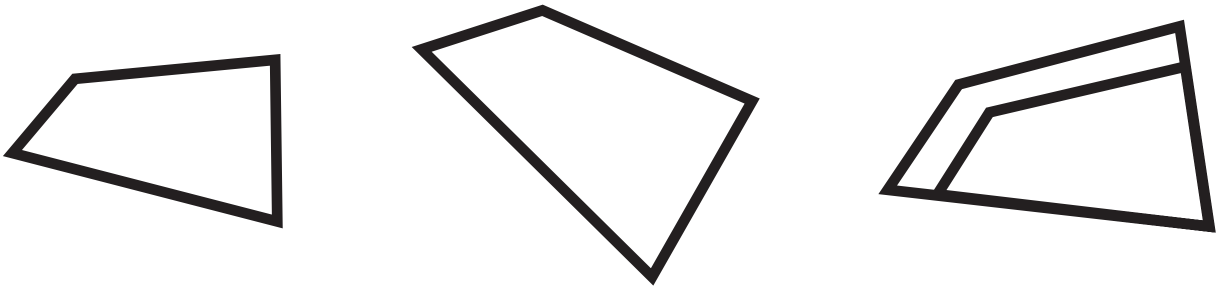
Veja dois exemplos: dados os números 600 e 900, podemos dizer que a razão entre eles é 600/900 = 2/3 . Ou dizemos que esses números estão na razão de 2 para 3 – a cada 2 unidades em 600, correspondem 3 em 900. Ou então, dados os números que expressam as medidas da circunferência e do diâmetro de um círculo, dizemos que a razão entre eles é π ou que eles estão na razão de π para 1. Neste caso, a razão é um número irracional.

Ao conceito de razão está associado naturalmente o conceito de proporção. Por exemplo, quando dizemos que, em polígonos semelhantes, os lados correspondentes são proporcionais, isto equivale a dizer que as razões entre as medidas dos lados correspondentes são iguais.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{EF}{E'F'} = \ldots$$

Se temos razões iguais, os valores de cima são proporcionais aos de baixo. Evitamos dizer que os numeradores são proporcionais aos denominadores, pois não sabemos se temos frações. As razões podem ser números irracionais, como no caso da razão entre a medida da circunferência e o seu diâmetro.

2 – Polígonos *semelhantes* são aqueles que têm ângulos correspondentes *congruentes* ou iguais e lados correspondentes *proporcionais*. Veja, na sobreposição, que os dois polígonos satisfazem essas condições:



Nos círculos, encontramos mais um exemplo de proporção, além deles nos mostrarem um exemplo simples de como as razões podem ser números irracionais. De fato, se temos círculos de raios r_1, r_2, r_3, ... e comprimentos das respectivas circunferências iguais a C_1, C_2, C_3, ..., então, seguramente, temos:

$$\frac{C_1}{2r_1} = \frac{C_2}{2r_2} = \frac{C_3}{2r_3}$$

Cada razão é igual ao mesmo número irracional $\pi \cong 3{,}1416...$

Isso significa:

1. Em um único círculo, falamos apenas na <u>razão</u> entre as medidas da sua circunferência e do seu diâmetro.

2. No conjunto dos círculos, há uma <u>proporção</u> entre as circunferências e os diâmetros respectivos, ou as medidas das circunferências são proporcionais às dos respectivos diâmetros.

3. Em cada círculo, o raio e a circunferência não podem ter medidas simultaneamente racionais, pois, neste caso, o quociente também seria racional. Quando você mede o diâmetro (2r) e o perímetro em um círculo, você obtém números decimais finitos que são aproximações racionais para essas medidas, e não as medidas exatas. Como vimos, as medidas exatas nunca podem ser ambas números racionais, pois então o quociente seria um número racional e não poderia ser igual a π.

Tales interessava-se por inúmeras coisas, investigando quase todas as áreas do conhecimento – Filosofia, História, Ciência, Matemática, Engenharia, Geografia e Política. Estudava problemas de astronomia, e a sua abordagem questionadora para a compreensão dos fenômenos celestiais constituiu o início da astronomia grega.

Integrando a matemática ao mundo real

A água, ao longo da história da humanidade

A água, ao tempo de Tales

Para Tales, o princípio original da natureza era a água, e a Terra existia sobre a água. Isto se deveria a uma propriedade particular da Terra, de flutuação, semelhante à propriedade da madeira.

Vivendo em Mileto, cidade de alto comércio, Tales teve muitas oportunidades de observar a chegada e a partida de navios, com suas cargas mais pesadas do que a água, e teria feito uma analogia da flutuação dos navios com a flutuação de toras e extrapolado para uma flutuação da Terra.

Além disso, havia referências a ilhas flutuantes pelo historiador Heródoto, do século anterior a Tales. Tales pode ter visitado algumas dessas ilhas e considerado esse exemplo como modelo de sua teoria e validação para a hipótese de que a água podia sustentar a Terra.

Considerando-se a época, pode-se dizer que a hipótese de Tales era sustentada por observações e considerações racionais. Ele não mencionava deuses tradicionalmente associados aos elementos da natureza, mas referia-se à água e à Terra e propunha teorias arrojadas, novas e não míticas.

A história do homem é também a história das águas

A disponibilidade de água doce para consumo humano e para uso na agricultura foi sempre um fator prioritário entre as sociedades antigas, para se fixarem em determinados locais.

Data de aproximadamente 3.100 a.C. o surgimento da civilização Suméria, na região da Mesopotâmia, banhada pelos rios Tigre e Eufrates, no atual Iraque. Esses rios, por meio de seu regime de cheias e vazantes anuais, provêm as terras adjacentes com matéria orgânica fertilizante. Nesta região, os sumérios, após um razoável esforço, conseguiram que a agricultura fornecesse frutos abundantes. Para as civilizações Egípcia e Chinesa, os rios Nilo e Amarelo tiveram papéis determinantes.

A água nos dias atuais

Você sabia que os oceanos ocupam uma área que equivale a 71% da superfície total da Terra, constituindo a grande reserva de água mundial? Ou que o planeta Terra é formado por 3/4 de água (doce e salgada) e apenas 1/4 de terra?

Na composição dessa imensa massa líquida do globo terrestre, encontramos 97% de água salgada dos mares e oceanos, 2% de gelo, mas a quantidade de água doce propriamente dita não passa de 1% do total. Desses 3% (incluindo o gelo), apenas 0,03% está fácil e diretamente disponível para o uso do homem nos rios, lagos e reservas subterrâneas.

O Brasil é um país privilegiado, pois possui 13,7% da água doce do planeta. O maior recurso hídrico do nosso país é a bacia Amazônica, que contém 80% de toda a água brasileira. Infelizmente, ela está distante das grandes concentrações urbanas e industriais, e isto implica ser a água doce um bem de extremo valor para as regiões distantes daquela riqueza.

Na maioria dos países, ainda não é economicamente viável aproveitar a água do mar. Por ser salgada, não podemos bebê-la nem usá-la para o cultivo.

A estes dois fatores – quantidade reduzida de água doce e não aproveitamento da água salgada – é acrescido o processo de degradação acelerada dos mananciais de água. Surge então o dilema: como atender uma população cada vez maior e um parque industrial em expansão, se o homem sequer preserva os recursos hídricos de que dispõe?

O homem é o grande consumidor de água doce, quer direta, quer indiretamente. Em números aproximados, sabemos que o consumo de uma família na cidade é seis vezes maior do que de uma família no campo; uma descarga sanitária equivale a doze litros e, para encher-se uma banheira ou se lavar uma quantidade de roupas na máquina, o consumo é de 120 litros.

Mas, se compararmos esses consumos, ditos diretos, com os indiretos, a situação é alarmante. Senão, vejamos:

- a feitura de um simples pãozinho demanda 400 litros de água, se considerarmos as necessidades desde o trigo que lhe deu origem;
- um quilo de carne corresponde a 18.000 litros de água que foram fornecidos direta ou indiretamente ao animal que lhe deu origem, até a carne estar pronta para o consumo;
- a produção de uma tonelada de milho requer 1,6 milhão de litros de água;
- a produção de uma tonelada de alumínio gasta 1,3 milhão de litros de água.

Daí se depreende que é imprescindível a reutilização da água doce em escala cada vez mais crescente. Se nada for feito para mudar a consciência do homem sobre esse patrimônio natural, mais cedo do que se imagina, seríssimos problemas estarão perturbando a existência humana na face da Terra.

A degradação orgânica na qualidade da água está associada à redução da taxa de oxigênio dissolvido, o que ocorre por perturbação devida a elemento estranho ou por modificações físicas da massa líquida. Dessa forma, todas as ações relativas ao emprego de agrotóxicos e adubos, aos desmatamentos, aos efluentes industriais, aos lixos e esgotos domésticos degradam a qualidade da água.

Há, portanto, a necessidade de procedimentos de preservação da qualidade da água e, onde houver degradação, de compensação dos estragos.

É provável que, nas próximas décadas, conflitos internacionais surjam motivados pela disputa das águas. Por exemplo, em regiões como o Oriente Médio e a bacia do Nilo, pode ocorrer que as divergências sobre o petróleo sejam substituídas por outras referentes à água.

Não podemos deixar de refletir que, assim como a água possibilitou a vida no planeta Terra e o aparecimento das civilizações, tudo isso poderá desaparecer pela ausência ou insuficiência desse precioso líqüido.

Situação-problema

Nesta Unidade, teremos duas situações-problema, ambas relacionadas ao consumo de água.

A primeira relaciona-se com a Atividade 10 da Unidade 1. Lá, você entendeu como é calculado o consumo de água mensal e qual é o seu custo. Também verificou o quanto um minuto a menos na duração do banho representa de economia na conta mensal. Vamos nos aprofundar nessa direção, pensando em quase todas as tarefas da casa que envolvam consumo de água, no quanto se gasta e em quanto pode ser economizado.

Você sabia que, entre todos os desperdícios de água, o residencial é o campeão? Gastar mais de 150 litros de água por dia é jogar dinheiro fora e desperdiçar nossos recursos naturais.

As maiores vilãs domésticas são as válvulas convencionais de descarga. Elas usam 40% de toda a água da casa. Cada segundo que uma pessoa permanece com o dedo na descarga equivale a dois litros de água desperdiçados. Para combater o desperdício doméstico, muitos países precisaram baixar leis rigorosas. Nos Estados Unidos, todas as casas construídas depois de 1995 são obrigadas a ter descargas com caixas de seis litros, bem mais econômicas. A venda de peças de descarga convencional é proibida nos EUA, e, se alguém for pego com uma válvula de descarga na mala, pode até ser preso.

No Brasil, o desperdício de água chega a 70%, e nas residências temos até 78% do consumo de água sendo gasto no banheiro. Tudo isto pode mudar com alterações simples de hábitos. Afinal, não basta ter pensamento social e ecológico adequado – é preciso traduzi-lo em ações, coletivas e individuais.

Pegue a sua conta de água deste mês e verifique qual foi o seu consumo mensal de água.

Situação-problema 1

a) Fazer uma estimativa de qual é o consumo médio de água de sua família, em cada um dos itens da tabela que apresentaremos a seguir. Como a conta não discrimina em que atividade a água foi gasta, você deverá fazer um cálculo aproximado do consumo diário e mensal, em cada um dos itens.

b) Depois, de acordo com as sugestões que fazemos, verifique o quanto a sua família poderá economizar de água, em cada item e no total. Indique percentualmente de quanto poderá ser a economia.

Após fazer a Atividade, comunique claramente aos seus familiares o quanto eles estão gastando e o quanto poderiam economizar tomando certas providências. Faça uma campanha mensal para que respeitem as decisões tomadas. Verifique, no fim do mês, o quanto o consumo mensal e o total a pagar diminuíram.

E lembre-se: essa contribuição foi, acima de tudo, para ajudar a combater um gravíssimo problema que o planete Terra enfrenta.

TABELA DE REFERÊNCIA PARA A RESOLUÇÃO DA SITUAÇÃO

Item	Consumo médio	Medidas para economizar
Válvulas de descarga.	6 a 20 litros, em cada uso.	Apertar apenas o tempo necessário. Não jogar lixo no vaso sanitário.Trocar por caixa que limite cada descarga a 6l.Não use a privada como lixeira ou cinzeiro. Mantenha a válvula da descarga sempre regulada e conserte os vazamentos assim que eles forem notados.
Banho de chuveiro.	Um banho demorado chega a gastar de 95 a 180 litros de água limpa. Para avaliar o quanto de água você gasta em seu banho, abra a torneira, apare a água em um balde durante um minuto e veja quantos litros de água você recolheu. Marque quanto tempo você mantém a torneira aberta durante o seu banho e multiplique o total de minutos pela quantidade de litros aparada em um minuto.	Banhos de, no máximo, 15 minutos economizam água e energia elétrica. Coloque um balde embaixo do chuveiro para armazenar a água enquanto esta não esquenta.Essa água pode ser utilizada para outras atividades da casa, como para descarga, colocar a roupa de molho ou lavar a roupa.

Banho de banheira.	120 litros.	Só tomar quando necessário.
Escovar os dentes e fazer a barba.	Proceda de modo análogo ao que foi feito para calcular o consumo de água em um banho. Abra a torneira como costuma fazer e apare a água durante um minuto, passe a água da pia para um balde com capacidade conhecida e avalie o que está sendo gasto em cada minuto. Marque quanto tempo você mantém a torneira aberta em cada escovação ou barba. Multiplicando pelo número de litros que saem em um minuto, você terá o total gasto.	Deixe a torneira fechada. Abra-a apenas para enxaguar. Verifique, nesse caso, quantos minutos gastou. Compare com o que é gasto mantendo a torneira aberta durante toda a escovação.
Lavar o automóvel.	Uma mangueira ligada o tempo todo durante a limpeza do automóvel consome até 600 litros de água.	Usando-se um balde, o gasto será de, no máximo, 60 litros.
Lavar louças.	A torneira de pia meio aberta durante 15 minutos gasta 243 litros de água.	Primeiro limpe os restos de comida dos pratos e panelas com esponja e sabão e só aí abra a torneira para molhá-los. Ensaboe tudo que tem que ser lavado e então abra a torneira novamente para novo enxágüe.
Na higienização de frutas e verduras.	Marque o tempo de uma higienização com a torneira aberta e avalie o consumo, do modo como temos recomendado.	Lave duas vezes em uma bacia, agitando e cuidando para que, quando derramar a água, os resíduos e sujeiras saiam junto. Utilize cloro ou água sanitária de uso geral (uma colher de sopa para um litro de água, por 15 minutos). Depois, coloque duas colheres de sopa de vinagre em um litro de água e deixe por mais 10 minutos, economizando o máximo de água possível.
Lavar roupas.	Faça o cálculo da água que sai em um minuto e marque o tempo em que mantém a torneira aberta.	Regra geral: junte bastante roupa suja antes de ligar a máquina ou usar o tanque. Não lave uma peça por vez. Deixe as roupas de molho e use a mesma água

		para esfregar e ensaboar. Use água nova apenas no enxágüe. Aproveite a última água para lavar o quintal, a calçada ou a área de serviço. Avalie a economia.
Lavadora de roupas.	Em média, 120 litros por lavagem. Avalie ou leia no manual qual o consumo de água de sua lavadora em cada lavagem.	Caso você use lavadora de roupa, procure utilizá-la cheia e ligá-la no máximo três vezes por semana. Diminuindo o número de vezes em que ela é usada na semana, verifique qual a diminuição do consumo.
Regar plantas.	Conte o tempo em que a mangueira ficou ligada. Verifique quantos litros de água a mangueira solta por minuto e calcule quanto é gasto cada vez que você a utiliza.	Use um regador para molhar as plantas ao invés de utilizar a mangueira. Avalie a água gasta e a economia de consumo.
Calçadas.	Conte o tempo de mangueira ligada. Verifique quantos litros de água a mangueira solta por minuto e calcule quanto é gasto cada vez que você lava a calçada.	Adote o hábito de usar a vassoura, e não a mangueira, para limpar a calçada e o pátio da sua casa. Se houver uma sujeira localizada, use a técnica do pano umedecido com água de enxágüe da roupa ou da louça. Conte os baldes necessários e o total de litros gastos. Verifique a economia.
Piscina.		Se em sua casa, escola ou clube há uma piscina, providencie o uso de uma cobertura (encerado, material plástico), para que a perda de água por evaporação seja reduzida. Uma piscina de tamanho médio exposta ao sol e à ação do vento perde aproximadamente 3.785 litros de água por mês por evaporação.
Vazamento de torneiras.	Este tipo de vazamento é caracterizado por torneira pingando quando fechada. Uma torneira gotejando desperdiça cerca de 16.560 litros de água por ano ou 1.380 litros por mês.Verifique se há torneiras pingando em sua casa e calcule o desperdício mensal.	Quando isso acontecer, troque o “courinho”.

Para fazer o cálculo de água utilizada mensalmente em cada item, não se esqueça de estar atento a toda a movimentação da casa. Por exemplo: quantas pessoas tomam banho, quanto tempo cada uma gasta, etc. Na cozinha, verifique com que freqüência a torneira é aberta para lavar algumas louças ou alguns talheres enquanto se prepara a refeição.

Não se esqueça de avaliar o quanto se pode economizar por meio da reutilização da água, nas várias situações mencionadas.

Apresente a sua solução na forma de um relatório, com tabelas e cálculos, chegando ao total de economia que poderá ser feita pelas medidas tomadas.

É importante, ainda, verificar se está havendo vazamentos. Veja como isto pode ser feito:

Vaso Sanitário
Jogue cinzas no fundo do vaso sanitário. Se ela permanecer depositada no fundo, o vaso está livre de vazamentos. Se houver movimentação, é sinal de vazamento na válvula ou na caixa de descarga.

Hidrômetro
Confira o seu relógio de água ou hidrômetro. Deixe os registros abertos, feche bem todas as torneiras, desligue os aparelhos que usam água e não utilize os vasos sanitários. Anote o número que aparece ou marque a posição do ponteiro maior do seu hidrômetro. Depois de uma hora, verifique se o número mudou ou se o ponteiro se movimentou. Se isso aconteceu, há algum vazamento.

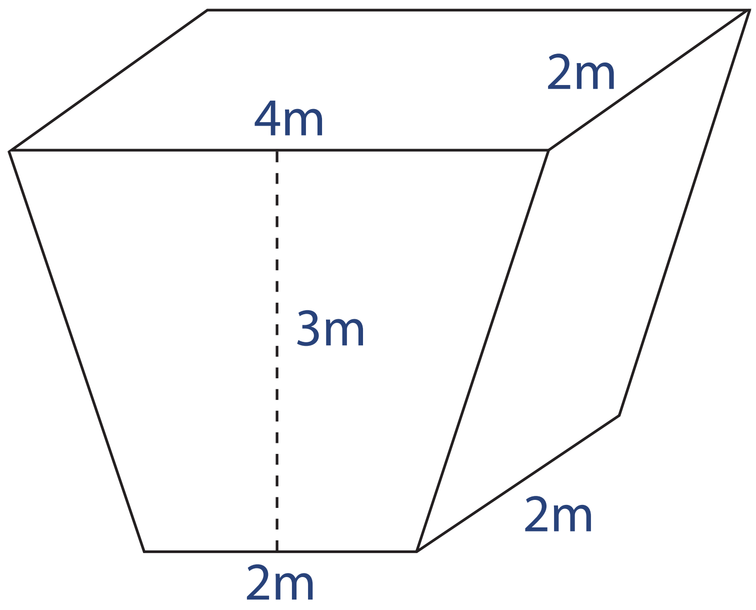
Canos alimentados pela caixa d'água
Feche todas as torneiras da casa, desligue os aparelhos que usam água e não utilize os vasos sanitários. Feche bem a torneira de bóia da caixa, impedindo a entrada de água. Marque, na própria caixa, o nível da água e verifique, após uma hora, se ele baixou. Em caso afirmativo, há vazamento na canalização ou nos vasos sanitários alimentados pela caixa d'água.

Canos alimentados diretamente pela rede pública
Feche o registro de uma torneira alimentada diretamente pela rede pública (pode ser a do tanque). Abra a torneira e espere a água parar de sair. Coloque imediatamente um copo cheio de água na boca da torneira. Caso haja sucção da água do copo pela torneira, é sinal de que existe vazamento no cano alimentado diretamente pela rede pública.

Repare que, para fazer o cálculo da economia possível, você usa basicamente o conceito de proporção: se o consumo de x litros custa A reais, qual seria o custo de y litros?

Situação-problema 2

Uma caixa d´água que serve a um conjunto de moradores tem a forma e as dimensões da figura.



O seu funcionamento segue o seguinte esquema: ela se enche durante a noite, das 19h até as 6h, e fica, geralmente, cheia ao fim desse período. Das 6h da manhã até as 19h, a água é consumida, mas, às 19h, a caixa não deve estar completamente vazia, devendo restar água até uma altura de 30cm.

Em determinado dia, às 8h da manhã, a caixa estava cheia. Às 13h, a superfície da água era um retângulo com dimensões de 3m por 2m.

Se a vazão da água continuar a apresentar a mesma média de litros por hora, o nível da água às 19h satisfará o nível mínimo desejado?

Mobilize os seus conhecimentos relativos a poliedros, volume, capacidade e média. Bom trabalho!

Lembre-se: um segmento paralelo às bases do trapézio não determina, em geral, trapézios semelhantes.

Seção 2

Construção do conhecimento matemático em ação: eclipses, semelhança de triângulos, Teorema de Tales

Objetivo da seção

- Identificar proporções no contexto de semelhança.
- Reconhecer a importância do uso de triângulos semelhantes em aplicações científicas e cotidianas.
- Reconhecer o processo matemático de demonstração de um resultado.

Eclipses

Para os povos primitivos, o súbito escurecimento do Sol parecia estranho e terrível. Para muitos, era o sinal do fim do mundo.

Nessas circunstâncias, imaginem o espanto que causou o fato de Tales ter previsto um eclipse que ocorreria em 28 de maio de 585 a.C. A história foi contada por Heródoto, e dela apresentamos uma versão adaptada:

> "Certo dia, cerca do fim do século VI a.C. ou início do século V a.C., homens armados da Média e da Lídia encontravam-se agrupados frente a frente no vale de Ali, preparados para a batalha que deveria decidir a sorte de toda a Ásia Menor.
>
> Mas antes que o sinal do início da batalha fosse dado pelos estrategistas dos dois exércitos, o Sol escureceu repentinamente diante dos olhos estupefatos e aterrorizados dos soldados e dos oficiais. Fez-se noite cerrada. No negro profundo do céu, apareceram as estrelas.
>
> Os chefes dos dois exércitos consultaram rapidamente os seus homens de confiança. Não houve dúvidas. Segundo os preceitos mágicos-religiosos daquele tempo, não se podia combater sem a luz do dia. Iniciar uma batalha ou aceitar entrar nela sob as estrelas era considerado o maior dos pecados. Só restava propor e aceitar uma trégua. A batalha não se travou."

Mas, esse desaparecimento da luz solar havia sido previamente anunciado aos jônicos por Tales, que fixou a data para isto, dentro de certos limites.

Os pontos admiráveis são que Tales previu um eclipse solar e que este ocorreu dentro do período previsto. Não se sabe como ele teria feito isso, mas a opinião predominante foi a de que ele tivesse usado fatos míticos, o que seguramente não era verdadeiro. Na verdade, Tales iniciou o estudo da astronomia e da previsão de eclipses do Sol.

A astronomia moderna confirma que o eclipse ocorreu e foi total. Quando a sombra do eclipse passou sobre o campo de batalha, tudo se tornou silencioso, com uma sensação estranha de desastre iminente, de haver uma força poderosa controlando tudo. Aquele fenômeno deve ter gerado medo, ansiedade e admiração. Os combatentes viram o eclipse como desaprovação à luta e como um alerta. Pararam de lutar e um acordo de paz foi feito.

Não se sabe como Tales ultrapassou as crenças tradicionais que atribuíam todos os eventos naturais, bem como as sortes e as desgraças dos homens, à grande família dos deuses olímpicos. Contudo, Mileto era a mais próspera das cidades jônicas[1], e não há dúvida de que os ricos mercadores acreditavam que sua prosperidade era fruto de sua própria iniciativa e esforço.

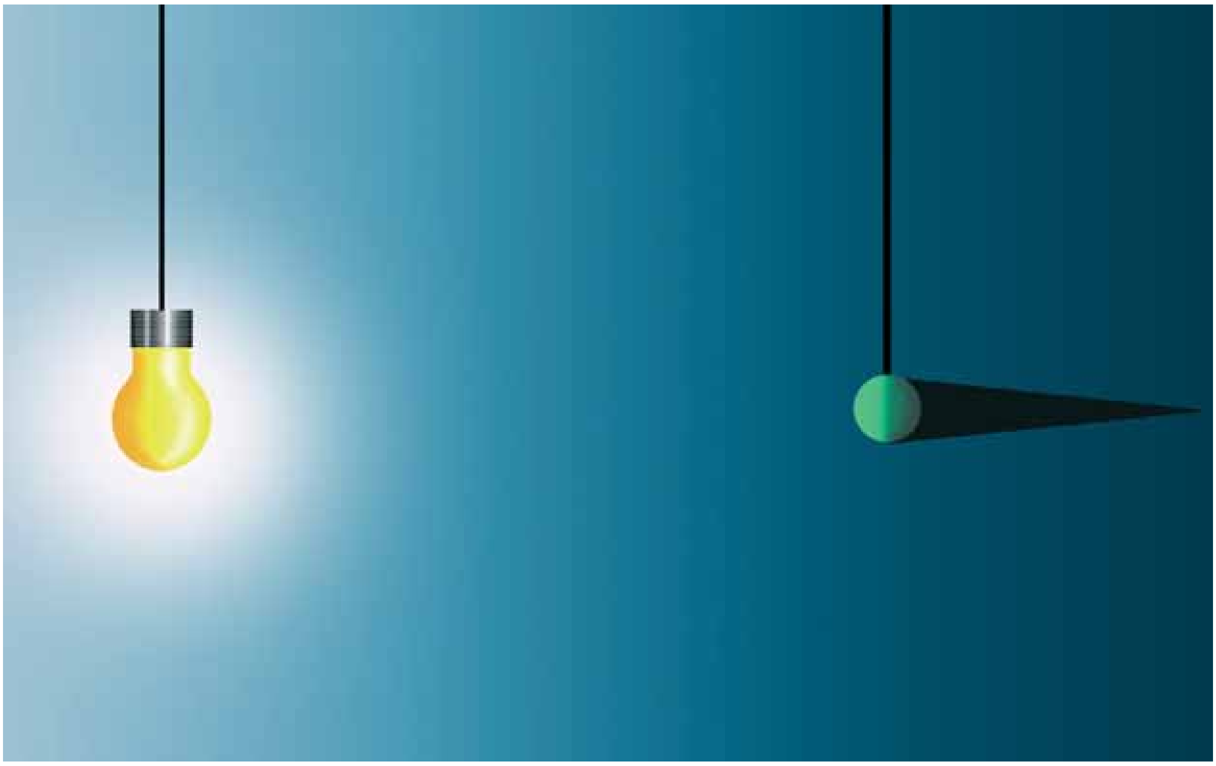
Eclipses são, ainda hoje, acontecimentos especiais que chamam a atenção de leigos e cientistas em todo o mundo, mas o mistério acabou.

A matemática necessária para calcular o momento da sua ocorrência, bem como a sua duração e a posição da Terra onde ele será visível, é acessível aos estudantes das séries finais do Ensino Fundamental.

Mas, o que causa um eclipse?

Entendendo um eclipse da Lua

Veja o efeito de um anteparo esférico colocado defronte a uma fonte de luz que irradia luminosidade em todas as direções.



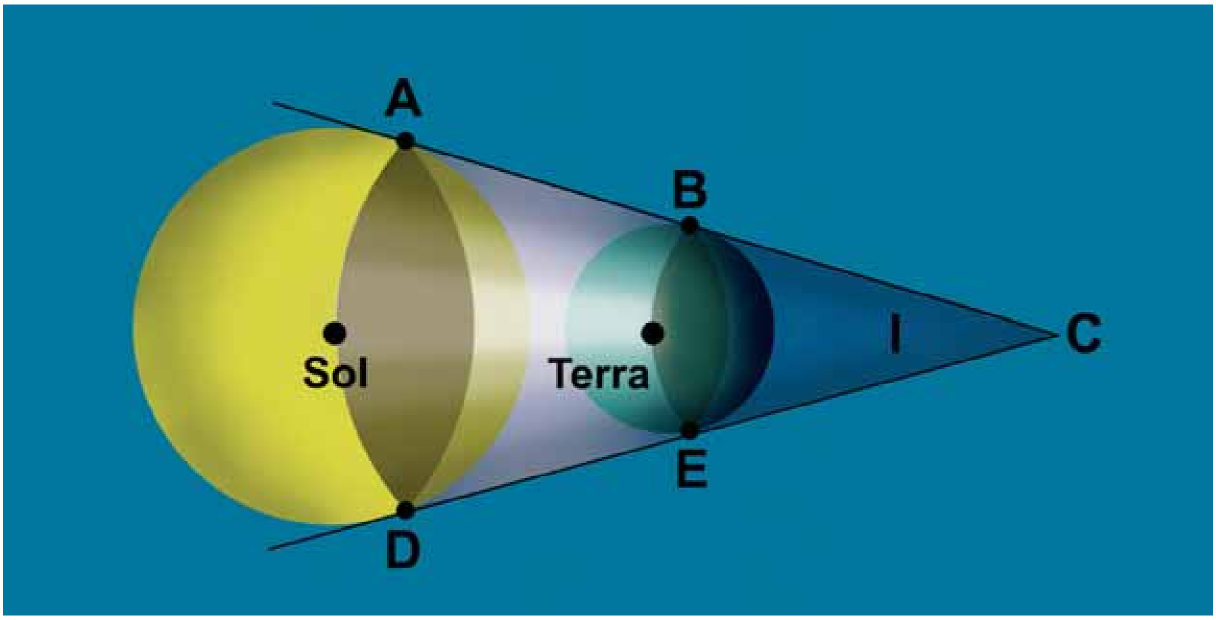
A lâmpada está no lugar do Sol, e o anteparo esférico está no lugar da Terra. Os planetas e seus satélites movimentam-se, no plano de suas órbitas, ao redor do Sol, assumindo várias posições relativas. Algumas vezes, a Terra está entre o Sol e a Lua. Outras, é a Lua que está entre o Sol e a Terra. Essas situações geram eclipses. Se a Lua, por exemplo, estiver naquele cone escuro atrás da Terra, ela não será visível, pois só podemos vê-la pelo reflexo da luz solar em sua superfície, o que não ocorre naquela posição. A Lua, como a Terra, não é um corpo luminoso, mas iluminado.

1. Jônica – relativo à antiga Jônia, ou aos povos gregos que a habitavam.

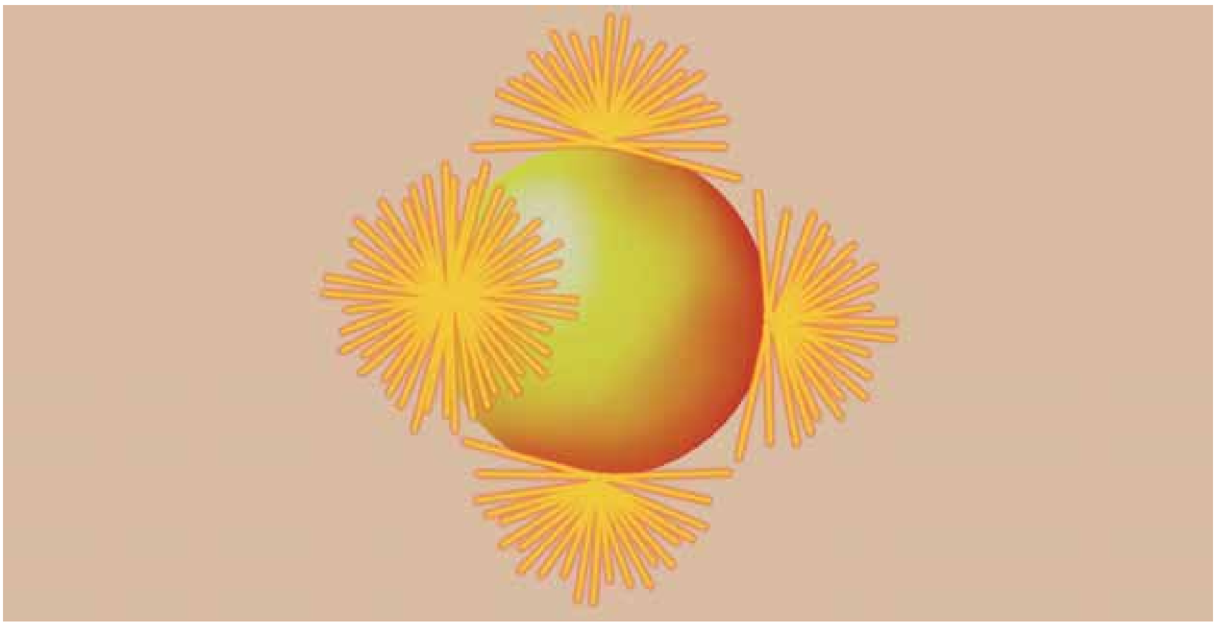
Em princípio, a Lua, por girar em volta da Terra, deverá, em certas ocasiões, passar pelo cone escuro. Mas poderia acontecer de ela passar além do vértice desse cone e escapar da escuridão. Para saber se isso ocorre, é necessário comparar a altura do cone com a distância média da Lua à Terra.

Vamos entender melhor isso por uma ilustração em que esferas estarão representando o Sol e a Terra. Na verdade, se representássemos as dimensões e as distâncias em escala real, teríamos o cone seria tão diminuto que não teríamos condições de observar o que está ocorrendo. Vamos então apoiar o nosso raciocínio em uma representação irreal, com tamanhos maiores e distâncias menores. Como o nosso cálculo estará baseado em dimensões reais, a representação inadequada não prejudicará os resultados.

Na verdade, o cone de sombra I é parte de um cone maior, cuja superfície tangencia externamente as esferas do Sol e da Terra.

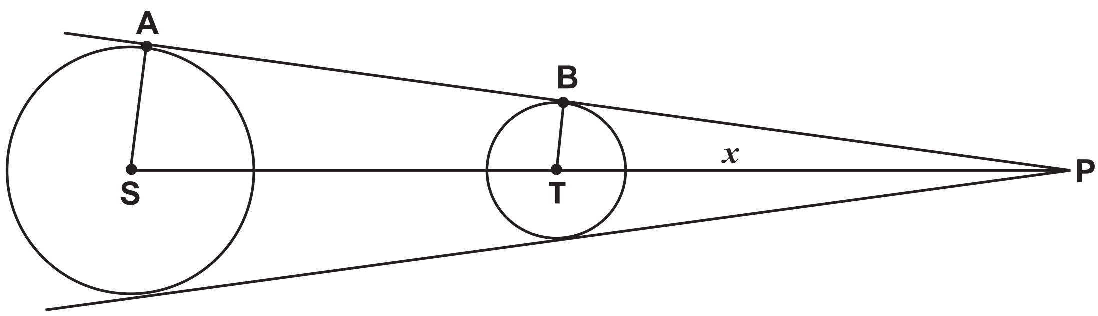


Cada ponto sobre o Sol é uma fonte de luz enviando raios em todas as direções.



Observe a figura a seguir, que mostra um corte plano do cone. Em vez de esferas, aparecem círculos; no lugar do cone, triângulos.

De todos os raios que emanam do Sol, percebemos que os que são tangentes ao Sol e à Terra são os últimos raios a atingir a parte atrás da Terra. Lembramos também que as tangentes são perpendiculares aos raios do Sol e da Terra que passam pelo ponto de tangência. Conhecendo-se as medidas dos raios do Sol e da Terra e a distância da Terra ao Sol, vamos calcular a altura do cone de sombra. O nosso objetivo é saber se a Lua pode passar dentro dele, lembra-se?



Veja as distâncias:

AS (raio do Sol) = 1.392.000.000m = 1.392.000km
BT (raio da Terra) = 6.378km
Distância média do Sol à Terra = 149.600.000km

Tudo indica que os triângulos SAP e TBP sejam semelhantes, mas, até o momento, não desenvolvemos teoria nos módulos do GESTAR que permita dizer isso. Temos a definição de polígonos semelhantes, que têm: a) ângulos correspondentes iguais; e b) lados correspondentes proporcionais.

Na situação presente, os polígonos são dois triângulos retângulos (nos pontos de tangência A e B) e têm um ângulo comum, com vértice em P. Logo os ângulos restantes, com vértices em S e T, também são iguais, e isso garante a condição a).

Mas e quanto à condição b) da proporcionalidade dos lados? Você provavelmente sabe que se dois triângulos têm os ângulos respectivamente iguais, então eles têm os lados proporcionais. Vamos voltar a esse fato ainda nesta Unidade, mas, por enquanto, vamos assumir que os lados desses triângulos são proporcionais. Portanto:

$$\frac{PT}{PS} = \frac{BT}{AS}$$

Substituindo pelos valores que conhecemos:

$$\frac{PT}{PT + \text{raio Terra} + 149.600.000 + \text{raio Sol}} = \frac{6.378}{1.392.000}$$

$$\frac{PT}{PT + 150.998.378} = \frac{6.378}{1.392.000}$$

$$1.392.000PT = 6.378PT + 6.378 \times 150.998.378$$

Atividade 1

Termine a situação do eclipse. Para isso:

a) Efetue os cálculos indicados anteriormente.
b) Com o valor obtido para PT, calcule a altura da sombra (cone escuro) a partir da superfície da Terra.
c) Sabendo que a distância média da Terra à Lua é de aproximadamente 386.400km, verifique se a Lua passa pelo cone de sombra.

Conhecendo-se as órbitas da Terra em volta do Sol e as da Lua em volta da Terra, pode-se prever quando e como um eclipse vai ocorrer e quanto tempo deverá durar.

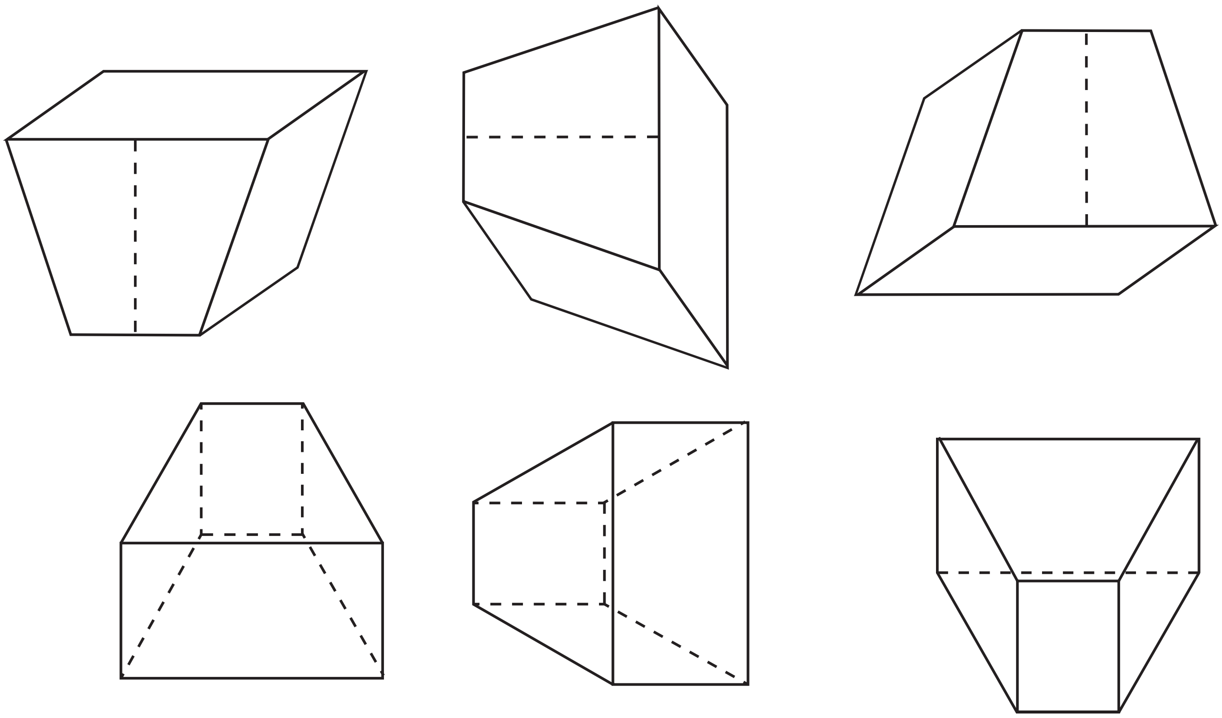
Fica, entretanto, um enigma: se as leis que descrevem as órbitas dos planetas em volta do Sol só foram estabelecidas e descritas por Kepler, por volta de 1.600, que conhecimentos teria usado Tales para prever o eclipse? Como dissemos, restou aos seus contemporâneos interpretá-los como conhecimentos divinos ou míticos, embora, pelo que conhecemos de Tales, isso não fosse verdade.

Voltando à situação-problema 2 da Seção 1

Como vai a sua resolução da situação-problema 2? Ao explorarmos os eclipses, mencionamos a semelhança de polígonos. Esse conceito lhe será útil para resolver a situação.

Você teve alguma dificuldade em classificar a forma poliédrica da caixa d´água?

Procure enxergá-la de outros pontos de vista:



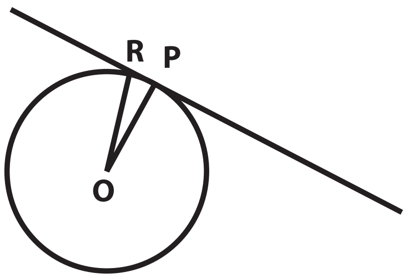
Os volumes desses poliedros foram explorados, na Unidade 9, Seção 2, sob o título *Cálculo do volume de um prisma*. A caixa d´água tem mesmo a forma de um prisma? É muito importante que você resolva a situação-problema. Você já tem conhecimentos próprios para isso. Volte a ela com vontade!

Articulando conhecimentos

1. Por que uma tangente e um raio que passam por um mesmo ponto da circunferência são perpendiculares?

Vamos começar pensando que tangente a uma circunferência é uma reta que possui apenas um ponto em comum com a circunferência.

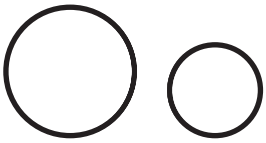
Se temos uma circunferência de centro O e uma reta tangente a ela no ponto P, então, o segmento OP, que liga P ao centro da circunferência, é um raio (ainda não sabemos se é perpendicular à tangente). Vamos provar que OP é o menor segmento que liga O à tangente, pois então saberemos que ele está sobre a reta perpendicular à tangente em P.

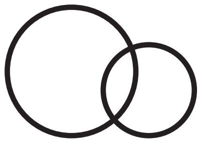


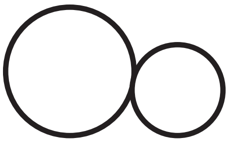
De fato, qualquer outro segmento OR tem a extremidade R exterior à circunferência (pois a reta tangente tem um único ponto em comum com a circunferência, que é o ponto P), logo OR é maior do que o raio.

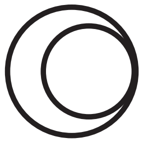
Por ser o menor segmento ligando O à reta tangente, OP tem que estar sobre a perpendicular à tangente traçada por O.

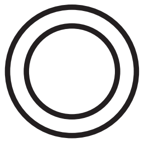
2. Posições relativas de duas circunferências. Duas circunferências podem ser:


COM INTERSEÇÃO VAZIA


COM DOIS PONTOS DE INTERSEÇÃO


TANGENTES EXTERNAMENTE


TANGENTES INTERNAMENTE

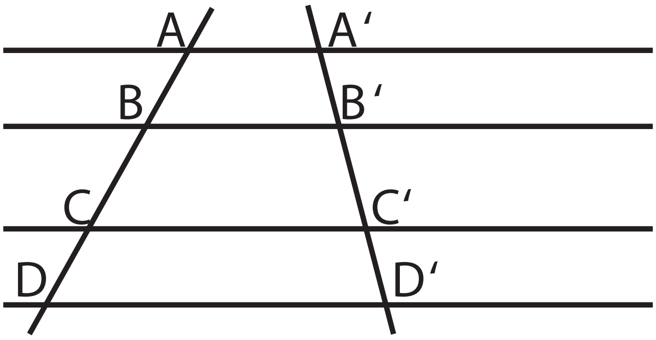

CONCÊNTRICAS

O Teorema de Tales

O famoso Teorema de Tales afirma que:

Cortando-se um feixe de retas paralelas por duas retas transversais, os segmentos determinados sobre uma transversal são proporcionais aos correspondentes determinados sobre a outra.

Se tivermos a situação:



Então teremos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}, \quad \frac{BC}{CD} = \frac{B'C'}{C'D'}, \text{ etc.} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

Para demonstrarmos o Teorema de Tales, usamos um teorema auxiliar e uma definição precisa de proporcionalidade de segmentos. O teorema auxiliar é o seguinte:

Cortando-se um feixe de retas paralelas por duas retas transversais e estabelecendo-se uma correspondência entre os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais, tem-se:

- a segmentos iguais de uma transversal correspondem segmentos iguais da outra;
- se um segmento é maior ou menor do que outro, na mesma transversal, o mesmo acontece com os segmentos correspondentes, na outra transversal.

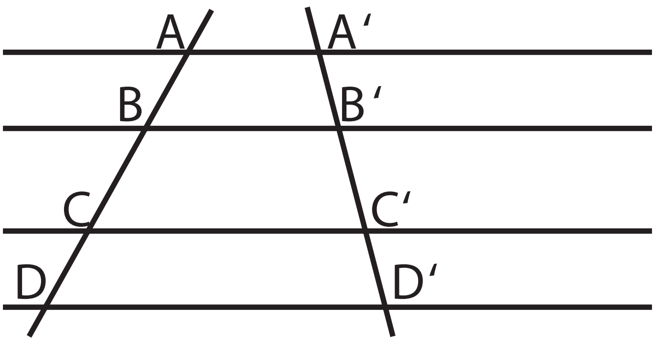
Na ilustração, temos um feixe de quatro paralelas cortadas por duas transversais.

O teorema afirma que:

- se tivermos AB = CD, então necessariamente teremos A´B´= C´D´;

- se tivermos AB < BC, então necessariamente teremos A´B´< B´C´.

Esse teorema auxiliar pode ser provado usando-se congruência de triângulos.



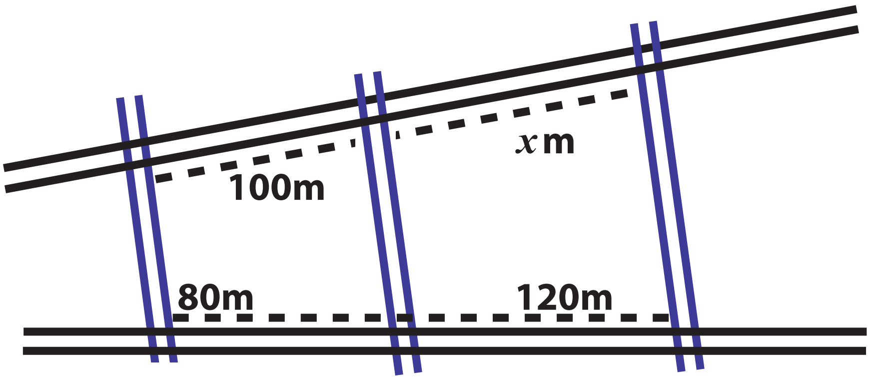
Não vamos fazer aqui a demonstração do Teorema de Tales, porque vamos centrar a nossa atenção em aplicações muito interessantes relacionadas a ele, mas vamos exercitar o nosso raciocínio dedutivo mostrando como, a partir do Teorema, podemos deduzir outros teoremas interessantes.

Se você tiver interesse em ver como se demonstra o Teorema de Tales, poderá consultar: BARBOSA, J. L.M. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

Vamos, portanto, assumir que o Teorema de Tales é verdadeiro.

Atividade 2

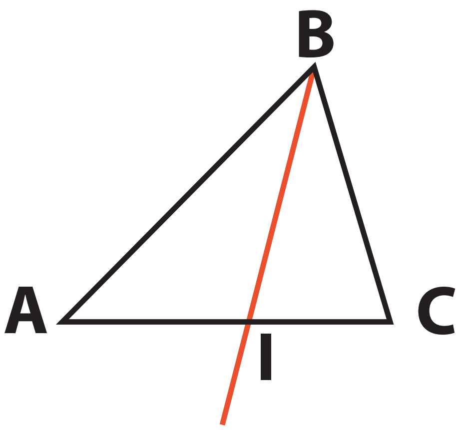
Veja a planta de parte de um bairro em que as ruas transversais são paralelas e algumas medidas estão indicadas. Calcule o valor de x.



O Teorema de Tales permite demonstrar propriedades geométricas importantes, como a seguinte:

Em um triângulo, a bissetriz de um ângulo divide o lado oposto em partes proporcionais aos lados respectivos.

Você deve se lembrar que a bissetriz de um ângulo é uma semi-reta que o divide em dois ângulos iguais. A bissetriz BI do ângulo B determina, no lado oposto, segmentos AI e IC. Queremos demonstrar que eles são proporcionais aos lados respectivos.

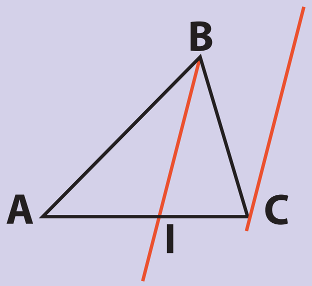


Portanto, queremos demonstrar que:

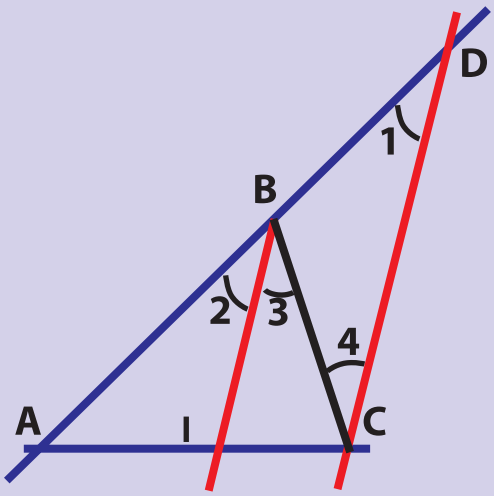
$$\frac{AI}{CI} = \frac{AB}{BC} \quad \text{ou} \quad \frac{AI}{AB} = \frac{IC}{BC}$$

Veja como podemos fazer isso.

Em geral, para demonstrarmos que alguma propriedade vale, precisamos fazer alguma construção auxiliar. No caso da bissetriz deste triângulo, vamos traçar uma reta paralela a ela, a partir do Ponto C:



Continuando a construção, vamos prolongar a reta AB até que ela encontre, no ponto D, a reta traçada.



Veja que estamos com um desenho ao qual se aplica o Teorema de Tales (embora ele esteja "deitado"): temos duas retas concorrentes (as retas azuis) cortadas por duas paralelas (as retas vermelhas). O Teorema de Tales nos afirma que vale a proporção:

$$\frac{AI}{CI} = \frac{AB}{BD}$$

Esta proporção está muito próxima da que queremos provar – na qual deve aparecer BC em lugar de BD.

Quem sabe conseguiremos provar que BD = BC? Aí, a nossa demonstração estará completa.

Olhe um pouco a figura: BD e BC são lados de um triângulo que apareceu com a nossa construção auxiliar. Para que sejam iguais, o triângulo CBD deve ser isósceles. Existe um jeito de saber se o triângulo é isósceles sem necessariamente saber que ele tem dois lados iguais: verificando se ele tem dois ângulos iguais. No caso, se conseguirmos provar que os ângulos 1 e 4 são iguais, então também o serão os lados BD e BC, terminando nossa demonstração.

Na Matemática, quando não conseguimos provar diretamente, vamos procurando caminhos para chegar lá. O nosso caminho será o seguinte: considerando os ângulos 1, 2, 3 e 4, vamos começar provando que 1 = 2, depois que 2 = 3 e finalmente que 3 = 4. Então teremos 1 = 4, que é o que queríamos. Veja:

1 = 2 (Na figura, temos duas retas paralelas cortadas por duas transversais, e 1 e 2 são ângulos correspondentes, portanto são iguais).

2 = 3 (Pela definição de bissetriz, são iguais).

3 = 4 (Na figura de paralelas cortadas por duas transversais, eles são ângulos alternos internos, portanto são iguais).

Completamos a demonstração! Veja o que temos: o triângulo é isósceles, então BD = BC, e portanto vale a proporção que queríamos demonstrar entre as partes determinadas por uma bissetriz e os lados correspondentes do triângulo.

Para que servem os teoremas?

Os teoremas são instrumentos importantes na resolução de problemas matemáticos. Eles garantem que, sabendo-se que valem certas condições, teremos a validade de outras. Por exemplo: suponhamos que, na situação em que você está trabalhando, exista um triângulo retângulo. Essa é uma condição que você tem, que você sabe que vale. Então, o Teorema de Pitágoras lhe garante que vale a igualdade entre o quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados dos catetos, uma poderosa relação, garantida pela mera presença de um ângulo reto no triângulo.

As condições que devem valer, a partir das quais o teorema garante que algo novo também valerá, são chamadas de hipóteses do teorema. No Teorema de Pitágoras, a hipótese é a que se **tenha um triângulo retângulo**. O fato novo que o teorema afirma valer, em decorrência daquela hipótese, é a tese do teorema (você já deve ter ouvido a expressão: ele defende a tese de que...). A tese do Teorema de Pitágoras é a de que o **quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos**.

Ao fazermos atividades matemáticas, usamos livremente teoremas, sem nos preocuparmos se eles são verdadeiros ou não. Eles já estão consolidados dentro da teoria matemática, e a prova de que valem pode ser consultada em compêndios de matemática.

Porque este é um fato: todo teorema que se conhece já foi um dia provado ou demonstrado. A demonstração é o raciocínio lógico-matemático que liga a hipótese à tese. Esse raciocínio pode recorrer a construções auxiliares e a outros teoremas já provados. Usando a hipótese, na demonstração vão-se criando argumentos, por meio de construções, recorrendo-se a outros teoremas já provados, tudo visando à conclusão, dentro da lógica do raciocínio matemático, de que a tese é válida.

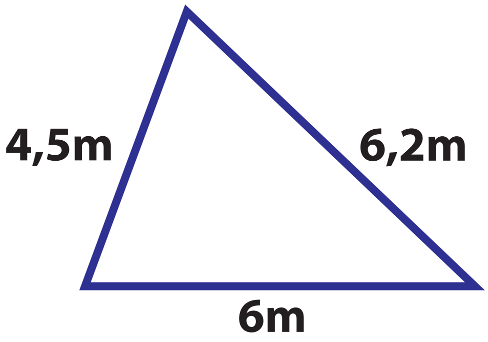
Nesta Unidade, optamos por convidá-lo a trabalhar sobre alguns teoremas e suas demonstrações.

Na verdade, a atividade de resolver problemas tem pontos em comum com a de demonstrar teoremas. Em um problema, você também tem condições iniciais que valem (as hipóteses, ou dados, do problema). E você deve, em alguns casos, determinar o valor de algo envolvido no problema. Quando você tiver achado o valor, terá chegado a uma tese, uma afirmação nova que se pode fazer na situação do problema. E o que você faz na resolução do problema tem pontos em comum com a demonstração de um teorema. Você usa os dados do problema, relaciona-os, faz construções auxiliares, recorre a outros teoremas ou procedimentos conhecidos (resoluções de equações, por exemplo) e, depois de tanto desenvolver raciocínios matemáticos corretos, chega lá, no que o problema pedia.

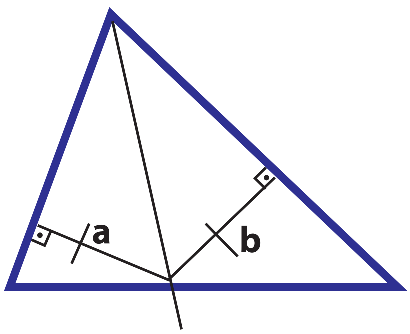
Veja, na Atividade a seguir, que não é apenas em obras complexas de engenharia que se usa a Matemática. A qualquer momento, podemos resolver problemas do dia-a-dia usando os nossos conhecimentos.

Atividade 3

Um fazendeiro vai construir o telhado de sua casa com inclinações diferentes. Para isto, usará duas vigas, de 4,5m e de 6,2m, apoiadas sobre uma base de 6m.



Ele deseja colocar uma terceira viga eqüidistante das outras duas (qualquer ponto da terceira viga deve estar a igual distância das duas que formam o telhado). Deste modo, poderá fechar a estrutura do telhado com duas vigas (a e b) de igual tamanho.



Ele quer saber em que ponto da base a terceira viga deve passar.

Continuando a nossa conversa sobre o Teorema de Tales, vamos ver que ele é útil para provar resultados da teoria dos triângulos semelhantes.

Freqüentemente, problemas que usam o Teorema de Tales usam também triângulos semelhantes. São conceitos que aparecem articulados, em inúmeras situações-problema. Devido a isso, vamos investigar melhor o conceito de semelhança em triângulos.

Triângulos semelhantes

Para explicar o fenômeno dos eclipses, afirmamos que dois triângulos eram semelhantes, sabendo apenas que seus ângulos correspondentes eram congruentes. Devemos tratar com mais cuidado esse assunto.

Vamos começar discutindo a semelhança entre polígonos em termos gerais. Você já sabe que dois polígonos são semelhantes quando os ângulos de um são congruentes aos ângulos do outro, e os lados de um são proporcionais aos lados correspondentes do outro.

Claro que, para os triângulos, vale a mesma definição:

Dois triângulos são semelhantes se:

a) têm os ângulos congruentes;
b) têm os lados correspondentes proporcionais.

Entretanto, no caso de triângulos, veremos que basta UMA destas condições:

- os ângulos sejam congruentes;

OU

- os lados correspondentes sejam proporcionais.

Isso porque, para triângulos, se uma das condições valer, então, necessariamente, valerá também a outra. Esta será a última propriedade que provaremos nesta Seção (se você quiser, pode olhar como é feita). Portanto, no caso do eclipse, a igualdade dos ângulos já garantirá a proporcionalidade dos lados.

Pensando matematicamente, você já ponderou que, em um triângulo, se conhecermos o valor de dois ângulos, o terceiro fica automaticamente conhecido? Isto será assunto da próxima Atividade.

Atividade 4

Justifique que, em um triângulo qualquer com ângulos x, y e z, se consideramos x e y conhecidos, então podemos calcular o valor de z.

Devido a esse fato, a primeira condição que garante a semelhança de dois triângulos – dos três pares de ângulos correspondentes serem congruentes – pode ser *diminuída*, no seguinte sentido: basta exigir que dois ângulos de um triângulo sejam congruentes a dois ângulos do outro, para que os triângulos sejam semelhantes. Você concorda com isso? Pense melhor, na Atividade a seguir.

Observação: em Matemática, dizemos que a condição inicial exigida para que valha a semelhança de triângulos (de haver três ângulos congruentes) pode ser *enfraquecida* para a condição de haver apenas dois ângulos congruentes.

Atividade 5

Em dois triângulos com ângulos x, y e z e x', y´ e z´, temos $x = x'$ e y = y´. Justifique que então, necessariamente, teremos z = z´.

Tendo em vista a Atividade 5, as condições (independentes entre si) para ocorrer a semelhança de triângulos ficam:

Para que dois triângulos sejam semelhantes, basta que valha UMA das condições:

- que dois ângulos de um sejam congruentes a dois ângulos do outro;

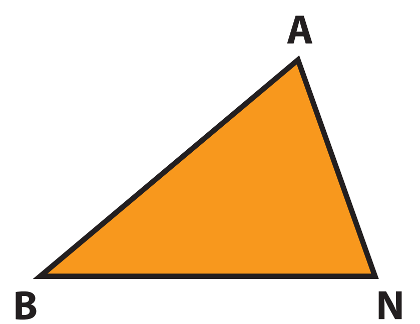
OU

- que os lados correspondentes sejam proporcionais.

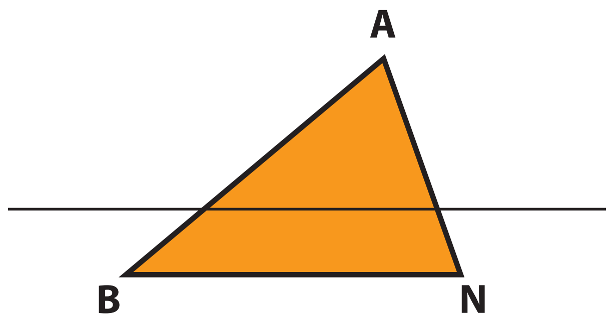
Vamos usar esse fato, embora, como dissemos, ainda devamos a demonstração de que, valendo uma das condições, vale também a outra.

Propriedade da reta paralela a um dos lados de um triângulo

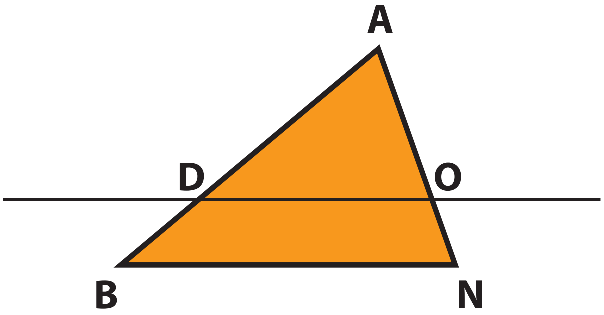
1. Se, em um triângulo BAN:



2. Você traçar uma paralela ao lado de BN:



3. E esta paralela encontrar os outros lados nos pontos D e O:



4. Então, nestas condições, o triângulo menor é semelhante ao triângulo maior (o que é um fato a ser provado).

Veja que estamos afirmando que, se ocorrer alguma condição prévia (ou hipótese) – que, no caso, é a de se ter uma reta paralela a um dos lados de um triângulo – então, necessariamente, ocorrerá outro fato: o dos dois triângulos serem semelhantes.

Em Matemática, afirmações devem ser provadas. Só depois disso são liberadas para uso e aplicações.

Vamos desenvolver apenas parte da prova ou demonstração. Após isso, usaremos uma afirmação que ainda não provamos (mas que vamos provar nesta Seção) para concluir que o triângulo maior e o menor são semelhantes.

Temos um feixe de duas paralelas cortadas por duas transversais. Por propriedade vista na Unidade 10, temos a igualdade dos ângulos correspondentes:

Ângulo interno com vértice D = Ângulo interno com vértice B.

Ângulo interno com vértice O = Ângulo interno com vértice N.

Vamos usar o fato (demonstrado no final da seção) de que se há dois ângulos de um triângulo congruentes a dois ângulos de outro, então os lados de um são proporcionais aos lados do outro, e, portanto, os triângulos são semelhantes. Como acabamos de ver, temos dois ângulos congruentes a dois ângulos. Isto garante que os dois triângulos determinados pela paralela sejam semelhantes.

Esta propriedade não vale, em geral, para um polígono qualquer. Isto é, se, em um polígono não triangular, traçarmos uma reta paralela a um dos lados, nem sempre teremos polígonos semelhantes.

Veja algumas propriedades sobre proporções que precisaremos usar ao longo desta Unidade.

Lembrete sobre proporções:

Se temos uma proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, veja outras proporções também válidas que poderemos ter, entre outras:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}\ ;\ \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}\ ;\ \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}\ ;\ \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$$

Justificativas:

a) Inicialmente, usando uma proporção numérica conhecida e verificando se a nova proporção é válida. Por exemplo, partindo de $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ e verificando se a outra proporção mencionada é válida, para esses valores: $\frac{2}{3-2} = \frac{4}{6-4}$?

Será que $\frac{2}{1} = \frac{4}{2}$? Sim, é verdade!
O fato de ela dar certo em um caso não assegura a validade geral da proporção, mas dá um indício de que parece que ela é verdadeira.

b) Outro procedimento mais seguro é você se lembrar de que, em uma proporção, o produto em cruz vale e que, se ele vale, significa que temos uma proporção.

Assim, você parte do produto em cruz da primeira proporção: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ implica que ad = bc (A).

Agora você tenta mostrar, usando o resultado (A), que o produto em cruz vale na outra proporção:

$$\frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$$

Ou seja, verifique se:

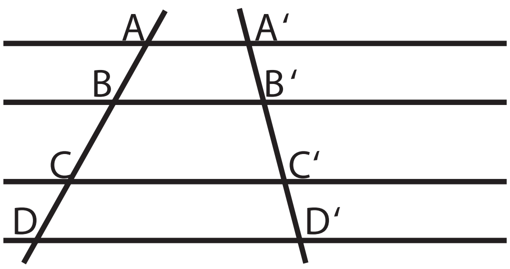
$a(d-c) = (b-a)c$

$ad - ac = bc - ac$

Somando ac a ambos os termos, ficamos com ad = bc. Ou seja, a igualdade do produto em cruz recaiu na igualdade que sabíamos ser válida, tirada da proporção inicial.

Articulando o Teorema de Tales com triângulos semelhantes

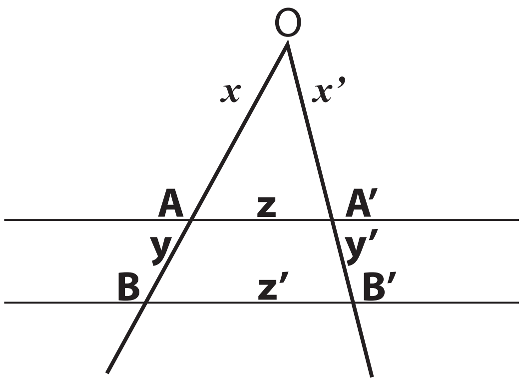
O Teorema de Tales refere-se a segmentos situados sobre as transversais. Ele nada afirma sobre os segmentos horizontais: AA´, BB´, CC´ e DD´.



O Teorema afirma que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad \text{e também} \quad \frac{BC}{CD} = \frac{B'C'}{C'D'}$$

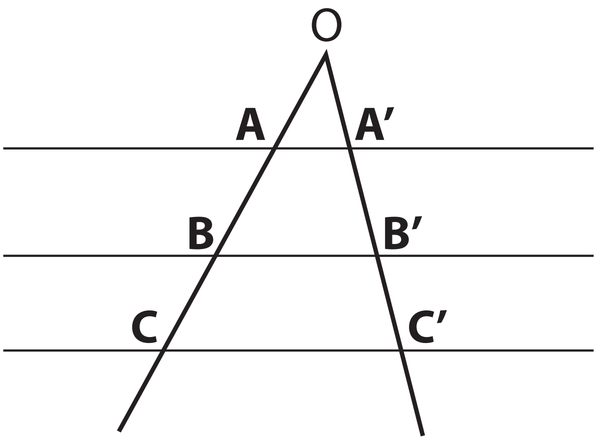
Entretanto, construindo o ponto de encontro das duas transversais e usando a propriedade da paralela a um lado de um triângulo, poderemos ter algumas proporções envolvendo também segmentos horizontais.



Já sabemos que a paralela AA´ determina dois triângulos semelhantes, portanto:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{x+y} = \frac{x'}{x'+y'} = \frac{z}{z'}$$

Se queremos ter $\frac{BB'}{CC'}$ em uma proporção, devemos considerar os triângulos que têm bases BB´ e CC´.



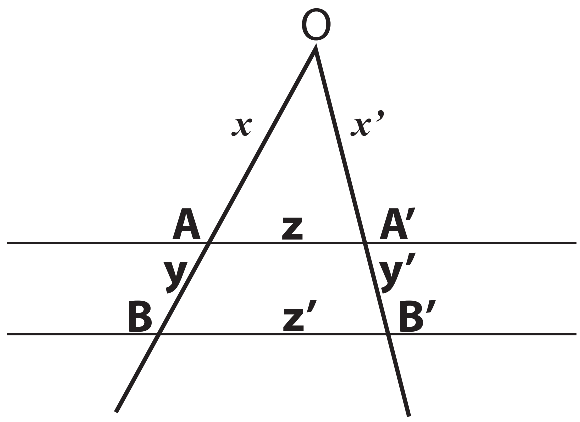
Podemos afirmar que:

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OB'}{OC'} = \frac{BB'}{CC'}$$

Revisando: o Teorema de Tales não envolve a proporção de segmentos horizontais (sobre as paralelas).

Se quisermos que uma das razões da proporção envolva segmentos horizontais, então deveremos construir as outras razões com segmentos a partir de O.

Vamos considerar novamente o triângulo a seguir, com a proporção dos lados:



$$\frac{x}{x + y} = \frac{x'}{x' + y'} = \frac{z}{z'}$$

Vamos aplicar uma das propriedades de proporções mencionadas no lembrete:

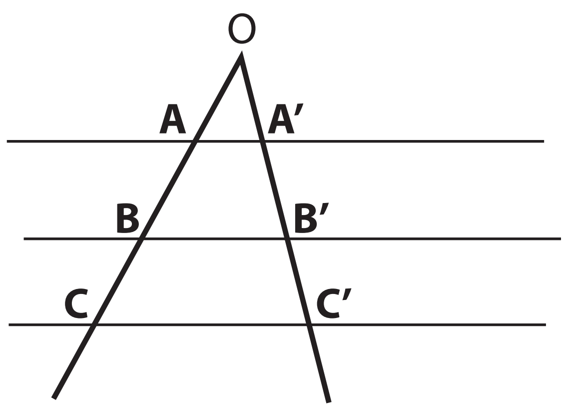
$$\frac{x}{(x + y) - x} = \frac{x'}{(x' + y') - x'} = \frac{z}{z' - z}$$

Ou seja:

$$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} = \frac{z}{z' - z}$$

Observe na proporção acima: se temos razões envolvendo partes dos lados dos triângulos sobre as transversais (y e y´ são partes dos lados do triângulo maior), então a terceira razão também vai envolver parte do terceiro lado do triângulo maior (z´- z é parte do terceiro lado do triângulo maior).

Resumindo, fique alerta!



O Teorema de Tales afirma que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Mas ele NÃO afirma que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \;\Big|\; = \frac{BB'}{CC'}$$

Esta parte é sempre válida.

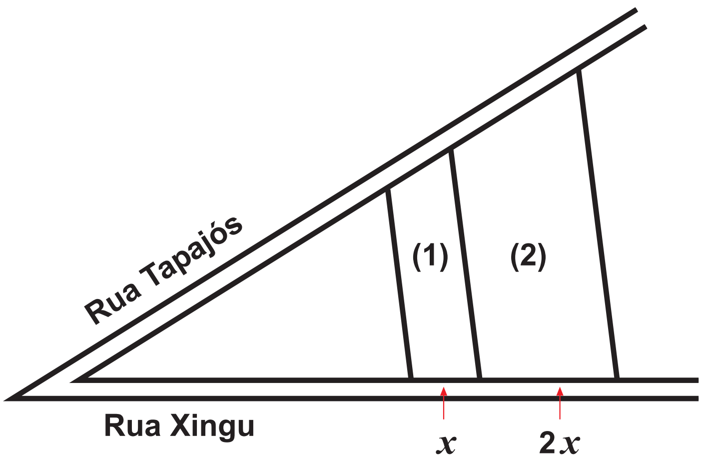
Esta razão é, em geral, diferente das duas primeiras.

Atividade 6

Existem dois terrenos (1) e (2) em forma de trapézio entre as ruas Xingu e Tapajós.

O corretor afirma que os trapézios são semelhantes e que a razão entre os lados é de 1 para 2. Diz ainda que, neste caso, as áreas estão na razão de 1 para 4 e que, por isso, o preço do maior é quatro vezes o preço do menor.

Faça cálculos e apresente argumentos apoiando ou contradizendo o raciocínio do corretor.



Tales e a determinação da altura da pirâmide

Existem vários relatos sobre como Tales media a altura de pirâmides. Diógenes Laércio escreveu, no século II:

> Hierônimo afirma que Tales calculava a altura de pirâmides pela observação do comprimento da sombra que projetavam, no momento em que a nossa própria sombra era igual à nossa altura.

Esse fato parece basear-se na observação empírica de que, no instante em que o comprimento da sombra de um objeto coincide com a sua altura, isto será verdade para qualquer outro objeto.

Afirmação análoga foi feita por Plínio:

> Tales descobriu como obter a altura de pirâmides e de qualquer outro objeto, medindo a sombra do objeto no momento em que um corpo e sua sombra têm o mesmo comprimento.

Plutarco, entretanto, conta a história de um modo que mostra como Tales estava se aproximando da idéia de triângulos semelhantes:

> … sem problema e sem auxílio de qualquer instrumento, ele meramente fincou uma vara no final da extremidade da sombra projetada pela pirâmide, fazendo assim dois triângulos (o primeiro determinado pelo eixo central da pirâmide e o comprimento de sua sombra, o outro determinado pela vara e sua sombra). Mostrou então que a pirâmide tem para a vara a mesma razão que a sombra da pirâmide tem para a sombra da vara.
>
> (Tradução adaptada de: http://www.gap-system.org/~history/biographies/thales.html)

Diógenes Laércio – filósofo grego, provavelmente da primeira metade do século III.

Hierônimo ou Jerônimo – santo, um dos quatro grandes doutores da igreja ocidental, morreu na Palestina por volta do ano 419.

Plínio – escritor romano, viveu em fins do século I e início do século II.

Plutarco – escritor grego, nasceu no primeiro século da nossa era, morreu no ano 120.

Atividade 7

Uma vara de bambu, fincada verticalmente no chão, projeta uma sombra de 1,8m, enquanto uma pessoa de 1,72m projeta uma sombra de 1,29m. Qual é o comprimento da parte da vara que fica sobre a superfície?

Atividade 8

Escolha um ponto alto no local onde você vive: um morro, a torre da igreja ou outro. Calcule a altura deste, usando as idéias de Tales.

Mais uma condição que garante a semelhança de triângulos

Até aqui, você conhece duas condições que garantem, cada uma por si, a semelhança de dois triângulos:

- os lados serem proporcionais;
- dois ângulos de um serem congruentes a dois ângulos do outro.

Apresentaremos mais uma condição que garante a semelhança:

- terem um ângulo igual, entre dois lados proporcionais.

Aprendendo sobre Educação Matemática

Você viu que apresentamos e passamos a usar os conhecimentos à medida que se faziam necessários, e isto determinou certa ordenação destes, diferentemente da ordem em que são formalizados. Nós fomos lembrando, introduzindo e explorando conhecimentos *em ação*.

Na exploração do eclipse, precisamos de triângulos semelhantes e afirmamos que os que apareciam eram semelhantes, mesmo sem uma demonstração matemática do fato. Nesse ponto, usamos o conceito de semelhança como um *instrumento* para resolver a questão do eclipse.

Voltamos a explorar o conceito de semelhança de triângulos com maior profundidade, desta vez considerando-o como um *objeto* do estudo da Matemática. Vimos que a teoria da semelhança de triângulos articula-se com o Teorema de Tales, do qual conhecemos o enunciado, mas não vimos a demonstração. No entanto, o usamos como um *instrumento* para resolver atividades que envolvem semelhança de triângulos. Quando você se sentir preparado, procure uma demonstração do Teorema, tomando-o como um *objeto* de seu estudo.

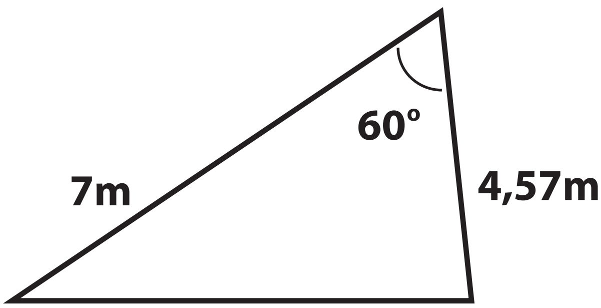
Essa é uma possibilidade para a aprendizagem da Matemática, quando ela está centrada na resolução de situações-problema. Isso porque, quando determinado conceito se faz necessário na solução de uma tal situação, fica pouco motivante parar tudo e começar uma cadeia de conceitos, definições e propriedades que conduzam a aquele que estamos precisando. No caso da situação do eclipse (e da necessidade do uso de triângulos semelhantes), teríamos interrompido o nosso problema para fazer um grande parênteses: Teorema de Tales, definição de semelhança e os teoremas relativos e, finalmente, a volta ao problema e à aplicação de um desses teoremas ao problema. O desenvolvimento de um currículo em rede possibilita, entre outras opções, fazer conscientemente um caminho diferente do da formalização matemática, podendo-se ir buscar conhecimentos e completá-los à medida que se fazem necessários.

Se você reler agora o Texto de Referência da Unidade 6: *A flexibilização da aprendizagem matemática – Representação e Teoria de Quadros*, poderá entendê-lo melhor e relacioná-lo ao que afirmamos neste *Aprendendo sobre Educação Matemática*.

Atividade 9

Uma casa apresenta um telhado como o da figura ao lado.

Para se fazer uma maquete da casa na escala 28:1, é necessário construir um triângulo semelhante a este. Com que medidas deve ser feito o triângulo, de modo a garantir a semelhança entre a maquete e o telhado?



Para saber mais
Veja, a seguir, uma demonstração de um resultado que mencionamos e cuja demonstração ficamos devendo:

Teorema – Nos triângulos, a congruência dos ângulos acarreta a proporcionalidade dos lados

Devemos nos lembrar que, uma vez demonstrada essa afirmação, ela garantirá a semelhança dos dois triângulos. Em particular, ela garante que os triângulos envolvidos na situação do eclipse também são semelhantes.

O enunciado mais completo do Teorema é:

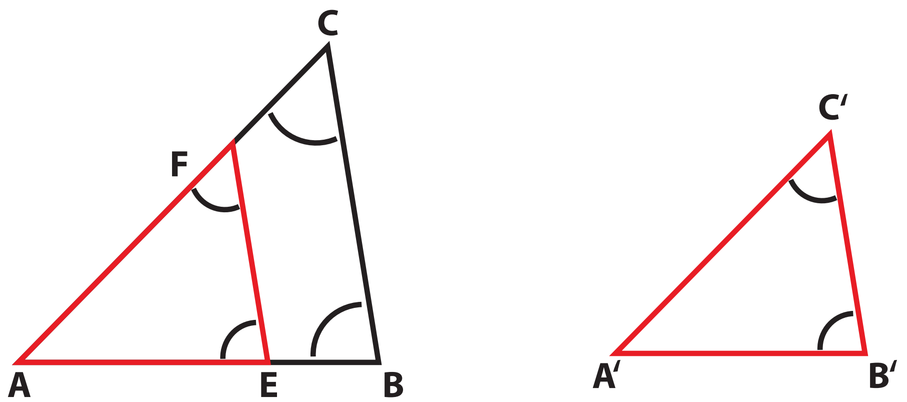
> Se, em dois triângulos, dois ângulos de um deles são congruentes a dois ângulos do outro, então os triângulos têm os lados correspondentes proporcionais.
>
> Portanto, são semelhantes.

Vamos lhe contar sobre o encadeamento lógico que se faz para provar essa propriedade, sem entrar em todos os detalhes.

1) Sabemos que os terceiros ângulos também serão congruentes e portanto temos: $\hat{A} = \hat{A}'$; $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$.

2) Sobre o lado AC tomamos um ponto F tal que AF = A´C´;

Sobre o lado AB tomamos o ponto E tal que AE = A´B´.



3) Justificamos que os triângulos AFE e A´C´B´ são iguais (por terem um ângulo igual: $\hat{A} = \hat{A}'$, compreendido entre dois lados respectivamente iguais: AF = A´C´ e AE = A´B´).

4) Concluímos que outros elementos desses menores triângulos são iguais:

$\hat{E} = \hat{B}' \longrightarrow$ como $\hat{B}' = \hat{B}$, temos $\hat{E} = \hat{B}$ (veja a marca desses ângulos na figura).

$\hat{F} = \hat{C}' \longrightarrow$ como $\hat{C}' = \hat{C}$, temos $\hat{F} = \hat{C}$ (veja a marca desses ângulos na figura).

5) Agora usamos uma recíproca do teorema das paralelas cortadas por uma transversal:

Se tivermos um feixe de retas cortado por uma transversal e se ocorrer a igualdade dos ângulos correspondentes, então as retas serão paralelas.

Concluímos que FE é paralela a CB.

6) Aplicamos o Teorema de Tales, o que nos permite afirmar que: $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB}$.

E, por propriedade das proporções, concluímos que $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$, que é o mesmo que

$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB}$ (I) . Para os triângulos serem semelhantes, falta provar a proporcionalidade envolvendo os outros dois lados: BC e B´C´.

Pare para olhar o que já temos, como obtivemos e o que falta.

- Temos:

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB}$$

- Como obtivemos:
  - marcando pontos em AC e em AB;
  - mostrando que o triângulo obtido era igual a A´B´C´;
  - concluindo a igualdade de outros ângulos no triângulo ABC e no triângulo construído dentro dele;
  - usando o fato de termos um feixe de retas cortado por outras duas, com ângulos correspondentes iguais;
  - concluindo que as retas do feixe são paralelas, que vale o Teorema de Tales e que temos a proporção dos segmentos.

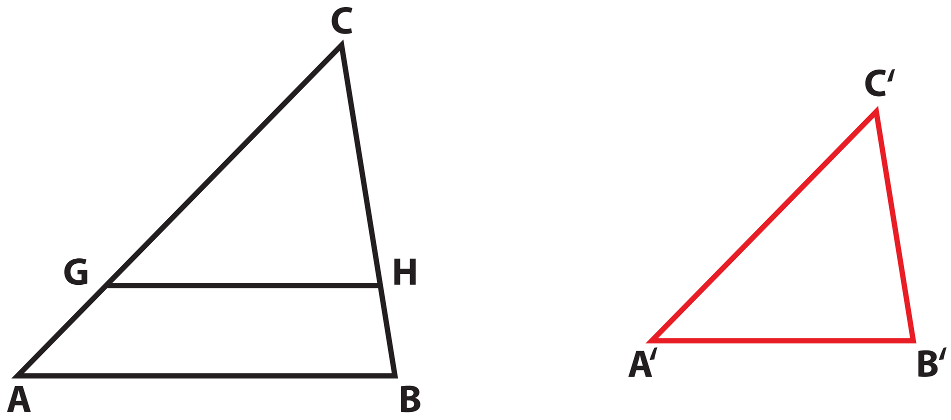
- O que falta:
  - incluir os terceiros lados na proporção:

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

E, para conseguirmos essa nova proporção, devemos repetir algo parecido com tudo o que fizemos antes. Mas isso você poderá fazer na próxima Atividade.

Atividade 10

Tome CG = C´A´ e CH = C´B´ e trace o triângulo CGH.



a) Justifique que CGH é congruente a C´A´B´.

b) Conclua que $\hat{G} = \hat{A}' = \hat{A}$ e que $\hat{H} = \hat{B}' = \hat{B}$.

c) Use uma recíproca do teorema das paralelas cortadas por uma transversal e conclua que GH é paralela a AB.

d) Aplique o Teorema de Tales e conclua que $\frac{CG}{GA} = \frac{CH}{HB}$.

e) Por propriedade das proporções, conclua que $\frac{CG}{CA} = \frac{CH}{CB}$, que é o mesmo que

$\frac{C'A'}{CA} = \frac{C'B'}{CB}$ (II).

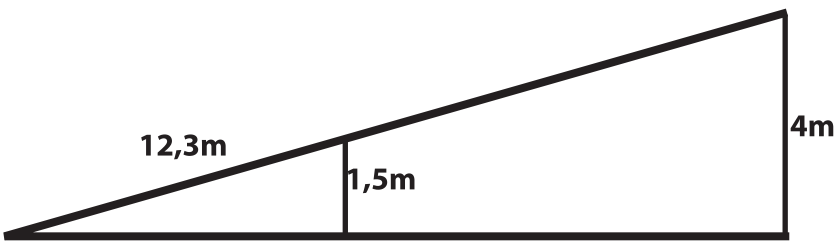
f) Reúna (I) e (II) e chegue à proporcionalidade dos três pares de lados:

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

g) Argumente que, com isso, terminamos a demonstração do teorema.

Atividade 11

Na rampa a seguir, se alguém já subiu 12,3 metros, quanto falta para chegar ao topo?



Antes de terminarmos esta Seção, leia mais uma notícia a respeito do problema da escassez de água:

> "ONU alerta para crise no abastecimento de água
>
> O mundo enfrenta uma crise sem precedentes no abastecimento de água. Segundo documento da Organização das Nações Unidas, o problema ocorre por causa da inoperância dos líderes políticos para combatê-lo.
>
> Segundo a ONU, se as autoridades não tomarem providências urgentemente, cerca de sete bilhões de pessoas podem conviver com deficiências no fornecimento de água na metade deste século.
>
> O relatório das Nações Unidas é o maior já produzido sobre a disponibilidade e a qualidade da água no mundo. Seis mil crianças com menos de cinco anos morrem por dia em todo o mundo em razão de doenças relacionadas a impurezas da água consumida. O informe alerta que a escassez nos reservatórios será resultado do crescimento populacional, da poluição e das mudanças climáticas. A previsão é a de que a disponibilidade de água por pessoa vá cair um terço nos próximos 20 anos.
>
> A ONU divulgou o documento às vésperas do 3º Fórum Mundial sobre a Água, que ocorreu de 16 a 23 de março de 2003 em Kioto, no Japão. O diretor do Programa Mundial de Água da Unesco, agência da ONU responsável pelo relatório, Gordon Young, afirmou à agência Reuters que não existe água em condições higiênicas e sanitárias adequadas para cerca de 40% da população mundial. "Este fato é uma tragédia absoluta", disse ele.
>
> De acordo com o relatório da ONU, cerca de seis milhões de toneladas de lixo são despejadas por dia em rios, lagos e canais.
>
> Grande parte da água limpa no mundo é utilizada em irrigação. Para a ONU, a economia seria maior se a água suja fosse tratada e utilizada na colheita de alimentos."

http://amaivos.uol.com.br/templates/amiavos/amaivos07/noticia/noticia.asp?cod_noticia=19608cod_canal=42

Resumindo

Nesta Seção, você conheceu ou recordou os seguintes conteúdos matemáticos:

- Proporcionalidade no contexto de semelhança de polígonos e, em particular, de triângulos.
- Definição de semelhança de polígonos.
- Casos especiais de semelhança de triângulos.
- O perpendicularismo entre a tangente e o raio de uma circunferência.
- Teorema de Tales.
- Articulação do Teorema de Tales com triângulos semelhantes.
- Três teoremas matemáticos, com demonstração:
  - O da paralela a um dos lados de um triângulo determinar dois triângulos semelhantes.
  - O de uma bissetriz de um triângulo determinar segmentos proporcionais aos lados.
  - O de triângulos com ângulos congruentes terem lados proporcionais.

Além disso, você continuou a sua exploração do sistema solar, aprendendo sobre eclipse, um tema a partir do qual poderá pensar em propostas interdisciplinares.

A respeito da própria Matemática e do fazer matemático:

- você identificou a natureza e a importância de um teorema matemático e dos elementos que o constituem: hipótese, tese, demonstração.

A respeito de aspectos da aprendizagem da Matemática, você recordou:

- como conhecimentos são introduzidos em ação, no momento em que a situação requer, sendo tratados como instrumentos e posteriormente como objetos de estudo.

Seção 3

Transposição Didática – O Teorema de Tales e seus múltiplos usos

Objetivo da seção

- Alertar os alunos a respeito do consumo de água.
- Rever e usar o conceito de proporcionalidade.
- Explorar o conceito de semelhança de polígonos e de triângulos.
- Perceber que, com condições mais fracas do que as exigidas na definição, consegue-se garantir a semelhança de triângulos dados.
- Explorar aplicações do Teorema de Tales e de semelhança de triângulos.

Situações-problema para os alunos

Os alunos poderão começar fazendo uma pesquisa sobre a escassez de água no mundo e a necessidade de não desperdiçar este bem. Em seguida, poderão resolver situações-problema, como as que sugerimos a seguir; as situações 1 e 2 envolvem proporcionalidade de grandezas, e a situação 3 envolve semelhança de triângulos.

1. Fazer um planejamento pessoal de economia de água, de modo mais simples do que a situação-problema proposta na Seção 1.

Por exemplo, começar fazendo um levantamento dos momentos diários em que se usa diretamente água: banho, escovação de dentes, lavar a mão, lavar algum pertence pessoal, uso de descarga, etc. Deve-se avaliar o tempo gasto em cada atividade e estimar a quantidade de água gasta em cada uma delas (um modo é aparar a água que escorre durante meio minuto e, mantendo a torneira aberta, calcular o que foi gasto no tempo total). Oriente os alunos sobre procedimentos que podem economizar água e estimule-os a calcular a economia possível em um dia, em uma semana e em um mês.

Comente que isso é apenas o gasto direto com água, pois, na verdade, para cada pessoa da casa, há um gasto indireto de água, seja para o preparo da comida, para a limpeza da casa ou para lavar roupa.

2. Pegar as contas de água dos últimos seis meses de um mesmo local (pode ser da escola, da residência de um aluno ou do professor).

Os alunos deverão:

- descobrir, em cada conta, qual foi o consumo mensal em litros e qual o valor total cobrado;
- dizer, antes de calcularem, se acham que os consumos serão proporcionais aos valores cobrados e argumentar, a favor ou contra;
- verificar se os consumos são proporcionais aos respectivos custos;
- justificar a proporcionalidade ou a ausência dela.

3. Atividades que podem ser desafiadoras para a classe e motivadoras para o conhecimento da vida e da obra de Tales são as que envolvem situações facilmente resolvidas por semelhança, apresentadas aos alunos antes, contudo, que eles tenham esses conhecimentos.

Por exemplo, as determinações de alturas ou distâncias a pontos de difícil acesso. Aproveite algo que exista em sua cidade: um morro alto ou um rio. Desafie-os a calcularem a altura do morro ou a largura do rio.

Vários métodos intuitivos podem parecer, em geral, trabalhosos. Para o caso da largura de rio, um aluno pode dar a sugestão de segurar a ponta de uma corda em uma das margens e outro aluno segurar a outra ponta e ir nadando ou de barco até a outra margem. Quando este chegar lá, ambos esticam a corda, e o que atravessou faz uma marca na corda, correspondente ao ponto atingido. Em seguida, medem qual é o tamanho da corda que corresponde à largura do rio. Comentar sobre se haveria métodos menos trabalhosos ou se a Matemática poderia ajudar. A situação não precisa ser imediatamente resolvida. Pode-se trabalhar, nas próximas aulas, conhecimentos relacionados, até que os alunos tenham conhecimentos matemáticos para resolver a Atividade.

Atividade 12

Tome por base a sua conta de água ou a de um amigo ou a da escola.

a) Considerando que 40% do consumo de água de uma casa provêm da descarga no banheiro, qual é o gasto da sua família com essa ação? A quantos metros cúbicos de água isso corresponde?
b) Divida o custo e a quantidade de água consumida nas descargas pelo número de moradores da casa. Veja, assim, quanto de água cada um está consumindo nesta ação, quanto está gastando mensalmente.
c) Nos exemplos de economia possível, devemos considerar a questão da descarga, que gasta de 6l a 20l de água a cada acionamento. Tome nota cuidadosamente de quantas descargas são dadas por dia em sua casa. O melhor é tomar nota por três dias seguidos e fazer a média. Considerando que em cada descarga há um

desperdício de 2l de água, quantos litros poderiam ser economizados ao mês, caso vocês optassem por uma descarga mais econômica ou por um acionamento mais curto? Quanto isso representaria em reais?

d) Selecione uma atividade em que, possivelmente, você ou a sua família estejam gastando muita água. Pode ser regando as plantas, lavando o carro, as calçadas, as roupas. Faça uma estimativa de quanta água tem sido gasta na tarefa mensalmente e depois calcule o custo. Verifique o percentual da conta mensal que isso representa.

Professor, procure informar-se ou fazer uma pesquisa sobre os recursos hídricos da comunidade e as necessidades mensais calculadas pela prefeitura. Verifique se uma parte da população tem carência de água. Se possível, traga alguém da prefeitura para falar sobre isso e sobre os benefícios, para a comunidade, de um consumo controlado de água.

Recordando a semelhança

Atividade 13

Manipulação, em grupos. Faça os alunos recortarem polígonos, organizando-os em coleções:

- de retângulos;
- de quadrados;
- de losangos;
- de paralelogramos;
- de trapézios;
- de triângulos retângulos;
- de triângulos eqüiláteros;
- de triângulos isósceles;
- de triângulos que não sejam retângulos, nem eqüiláteros, nem isósceles;
- de pentágonos regulares;
- de pentágonos não-regulares;
- de hexágonos regulares;
- de hexágonos quaisquer.

a) Examinar cada uma das coleções e dizer em quais delas todas as figuras são semelhantes.

b) Preencher:

São semelhantes entre si:

Todos os ____________________

Todos os ____________________

Todos os ____________________

Todos os ____________________

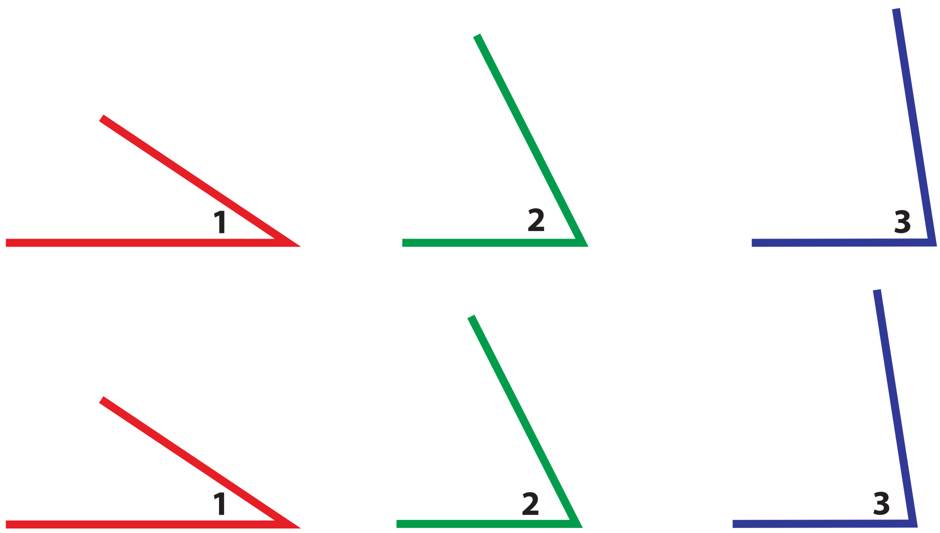
c) Nas coleções em que nem todas as figuras são semelhantes, selecione (em cada uma) um dos polígonos. Desenhe e recorte três polígonos que considera semelhantes a ele.

d) Compare o polígono selecionado com cada um dos recortados; comprove a igualdade dos ângulos e verifique (com o auxílio da calculadora) a proporcionalidade dos lados. Verifique quais pares são semelhantes.

Apesar de os alunos imaginarem a semelhança em certas coleções (pelo paralelismo dos lados e encaixe dos ângulos), lembre que a definição de semelhança de polígonos requer lados proporcionais e ângulos correspondentes iguais (congruentes).

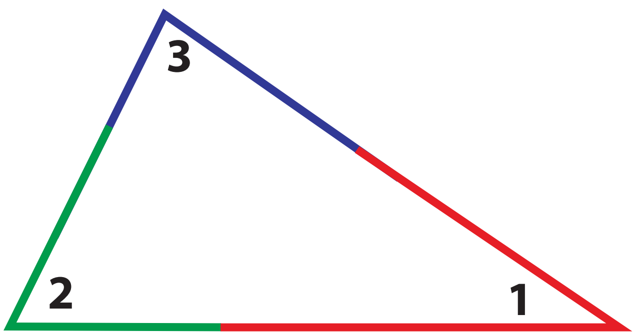
Atividade 14

1. Forneça três ângulos a cada grupo, em duplicata, tais que a soma dos três seja igual a 180°.



Metade do grupo vai trabalhar com três ângulos (diferentes), e a outra metade trabalhará com os outros três.

A tarefa é desenhar um triângulo que tenha esses três ângulos (repare que, no ângulo, o tamanho dos lados não importa, podendo ser aumentado ou diminuído). Um triângulo possível é:



Poderão aparecer triângulos diferentes. O professor deve estimular os alunos a perceberem o que há em comum entre esses triângulos. Eles deverão, depois, verificar se os lados dos triângulos obtidos são proporcionais, isto é, se as razões entre os lados do primeiro e os lados correspondentes do segundo são iguais (as divisões podem ser feitas em calculadora).

Use a seguinte frase falada e escrita, em cartazes e atividades, durante a semana, como se fosse uma campanha: "Triângulos com ângulos iguais têm lados proporcionais". Faça os alunos constatarem essa proporção (usando calculadora) em diversas atividades.

Mencione que isto não vale para dois polígonos quaisquer.

Resumindo

Nesta Seção, você encontrou idéias para a sua ação em sala de aula, como:

- Desenvolvimento de situações-problema, com os temas:
  - consumo de água;
  - determinação de distâncias inacessíveis.
- Idéias para trabalhar tópicos específicos, como:
  - semelhança de polígonos;
  - obtenção de triângulos semelhantes a partir de três ângulos dados.

Considerações sobre o trabalho em sala de aula, do ponto de vista da Educação Matemática.

Leituras sugeridas

BARBOSA, J. L.M. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

Este livro foi escrito para servir de texto a uma disciplina de Geometria para alunos de cursos de Licenciatura em Matemática. Ele faz uma apresentação da Geometria Euclidiana Plana de um ponto de vista mais avançado que o que se deve utilizar no Ensino Básico. O objetivo é dar ao futuro professor uma visão mais ampla daquilo que ele vai ensinar. Em particular, o livro faz uma apresentação axiomática da Geometria, sem querer com isso sugerir que o futuro professor de Ensino Básico adote o mesmo tipo de apresentação quando estiver ensinando.

Uma apresentação axiomática da Geometria, além de ser longa e exigir tempo, só pode ser feita com proveito quando os alunos já tiverem adquirido bastante familiaridade com os fatos geométricos, condição indispensável para bem prepará-lo a entender e apreciar o porquê da axiomatização.

GUELLI, O. *Contando a História da Matemática*. Dando Corda na Trigonometria. p. 64. São Paulo: Ática, 1993.

IMENES, L.M.; JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M.C. *Semelhança*. Coleção Pra que serve Matemática? São Paulo: Atual Editora, 1992.

Livro formado por pequenos textos dinâmicos e ilustrados que mostra inúmeras aplicações da semelhança na vida prática. Ele inclui curiosidades, quebra-cabeças e jogos.

Os autores sugerem que ele possa ser usado:

- em seminários sobre o livro, feitos pelos alunos;
- em algumas questões de avaliação, verificando conteúdos e a leitura do livro;
- em redação sobre o livro ou parte dele;
- em trabalho com a resolução das questões propostas no livro.

Entre os assuntos desenvolvidos, temos a semelhança de triângulos, a determinação de alturas de pirâmides, a relação entre a razão dos lados de dois polígonos semelhantes e a razão entre suas áreas, bem como entre a razão dos lados de dois poliedros semelhantes e a razão entre seus volumes.

IMENES, L.M.; LELLIS, M.C. *Matemática*. Livro didático, 8ª série. São Paulo: Scipione, 1997.

Livro didático que desenvolve com os alunos, de modo bastante interativo, os objetivos do ensino da Matemática para a série. Páginas fartamente ilustradas; muito rico em exercícios contextualizados.

LINDQUIST, M.M.; SCHULTE, A.P.(org). *Aprendendo e ensinando geometria* (trad.). São Paulo: Atual Editora, 1994.

Este livro é uma tradução do livro do ano de 1987 do *National Council of Teachers of Mathematics* (Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos). Consta de textos de vários autores.

Bibliografia

ALBUQUERQUE, M.M.; REIS, A.C.F.; CARVALHO, C.D. *Atlas Histórico Escolar*. Rio de Janeiro: MEC/ FENAME, 1980.

CASTRUCCI, B. *Lições de Geometria Plana*. São Paulo: Livraria Nobel, 1963.

FREMONT, H. *Teaching Secondary Mathematics through applications*. p.342. 2ª ed. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1979.

GUELLI, O. *Contando a História da Matemática*. Dando Corda na Trigonometria. p.64. São Paulo: Ática, 1993.

LIMA, E.L. *Meu professor de Matemática*. Rio de Janeiro: IMPA e VITAE, 1991.

MEC. FUNDESCOLA. *Proformação – Guia de estudo*. MENEZES, M.B. de; RAMOS, W. (coord.) Módulo III, vol. 1, Matemática e Lógica. 2000.

Sites utilizados

http://www.utm.edu/research/iep/t/thales.htm#sh8a

http://www.terravista.pt/fernoronha/8376/TALES/piramide.htm

http://www.gpca.com.br/gil/art18.htm

http://www.revistapesquisa.fapesp.br/index.php?id=news.cienciaemdia.20030305833

http://amaivos.uol.com.br/templates/amaivos/amaivos07/noticia/noticia.asp?cod_noticia=19608cod_canal=42

http://www.utm.edu/research/iep/t/thales.htm

http://www.comciencia.br/reportagens/aguas/aguas09.htm

http://www.unesco.org.uy/phi/libros/agua/guia%20docente/docente2/docente2.htm

http://www.emack.com.br/sao/webquest/2003/agua/index.htm

http://users.peacelink.it/zumbi/org/sindae/aguaviva/pg12c.html

http://www.clubdelamar.org/oceanos.htm

http://www.sabesp.com.br/

- sabesp ensina

- de 5ª a 8ª série

- água disponíel

Texto de referência

Erros: mentiras que parecem verdades ou verdades que parecem mentiras[1]

Antonio José Lopes Bigode
Centro de Educação Matemática – CEM

O título desta comunicação foi propositalmente inspirado em duas obras de arte: um filme de Orson Welles e um livro de Umberto Eco. De comum com este artigo existe a idéia de colocar em xeque o conceito de verdade ou falsidade tomados de maneira absoluta. É dentro desta ótica que pretendemos situar a nossa "Exploração Didática dos Erros".

Os "erros", tais como são popularmente considerados, serão assumidos daqui por diante como "verdades provisórias". Porém, o conceito de verdade provisória pode ser tomado de forma mais abrangente, incluindo as chamadas "verdades estabelecidas" como axiomas, proposições, lemas e teoremas, o de Pitágoras por exemplo.

Certamente um matemático do tipo ortodoxo deve considerar herético este ponto de vista. Não é! O procedimento filosófico-pedagógico, no qual se baseia este artigo, aborda a Educação pela Matemática e não para a Matemática. E tem como objetivos centrais, entre outros: DESMISTIFICAR A MATEMÁTICA e DESENVOLVER NO ALUNO UMA CERTA AUTONOMIA EM RELAÇÃO À CONSTRUÇÃO DE SEU CONHECIMENTO.

Desmistificar a Matemática não é tarefa simples, havendo muitos e espinhosos caminhos. Em nossa experiência desenvolvida com alunos de 10 a 15 anos desde 1981, nos convencemos de que os alunos desmistificam uma ciência quando a produzem. (Lopes, A.J. 1987).

No que se refere à autonomia em relação à construção do conhecimento, é importante destacar que ela não nasce do dia para a noite ou por decreto do professor, mesmo que bem intencionado. É necessário que se crie um "ambiente" de livre pensar, indagar, explorar, duvidar, acreditar, criar e construir. Algo parecido com o que Rafaela Borasi chamou de "cenário compatível" em sua conferência neste 39º CIEAEM. Este ambiente é construído por todos os envolvidos no processo de produzir-conhecer: alunos, professores e comunidade.

O que caracteriza o ambiente de verdades provisórias?

O ambiente de verdades provisórias não existe a priori, há que construí-lo. Pistas sobre as características deste ambiente são descritas em seguida, e destacamos algumas estratégias de trabalho vivenciadas nos últimos cinco anos. Nós as consideramos propostas concretas de exploração didática dos erros, ainda que algumas das atividades listadas não explicitem este objetivo.

1) Uso livre e coletivo do mimeógrafo em sala de aula.

2) Reprodução das soluções dos problemas e exercícios apresentados pelos alunos. Estas soluções são discutidas por todos, a discussão gerando a validação ou não dos métodos usados bem como da linguagem adotada. As soluções dos alunos tendem a gerar novos problemas.

1. BIGODE, A.J.L. *Erros: mentiras que parecem verdades ou verdades que parecem mentiras*. Cadernos CEM, nº 2, pp. 41-45. São Paulo, 1990.

3) Estímulo à sistematização do processo de solução, tanto em nível individual como coletivo. Nas atividades em grupo, adota-se a figura do relator, que é exercida em rodízio pelos seus integrantes.

Os itens 1, 2 e 3 têm o papel de exercitar os alunos na prática da crítica, no pensar do ponto de vista do outro, na convivência com a diversidade. O erro, em um contexto como esse, é mais um objeto a ser explorado.

4) Quanto ao conteúdo das atividades propostas ao grupo de alunos, são exploradas:

a. Atividades do tipo: "o que pensou Antonio?". São fragmentos da solução de um problema qualquer. Estimulamos os alunos a tentar explicar um raciocínio, mesmo que "incorreto", de um ponto de vista exterior.

b. Atividades que exploram conjecturas, paradoxos e sofismas. Estimulam a reconhecer limites nos modelos matemáticos adotados e contribuem para articular as etapas de um raciocínio.

c. Atividades do tipo:"continue a solução de José". Na mesma linha do item "a", são dados um enunciado e uma solução incompleta.

d. Problemas com enunciados ambíguos ou redundantes, com excesso ou falta de dados. Estimulam a identificar o que é essencial numa dada situação-problema.

e. Exercícios do tipo: "decida se existe alguma etapa incorreta, inútil ou ambígua". Idem ao comentário do item "d".

f. Problemas "pendurados". Depois de esgotados os recursos disponíveis pelo grupo de alunos, deixamos a situação-problema pendente, para ser retomada em outro momento, que pode ser o minuto seguinte ou o próximo ano, dependendo da evolução do grupo. (Lopes, 1985).

g. Formulação de problemas, desafios, conjecturas, etc. pelos alunos.

h. Construção de linguagem. É comum, no repertório de estratégias utilizadas pelos alunos, que estes inventem códigos, esquemas, legendas, notações ou outro tipo de simbologia nem sempre convencional. Da socialização destas, o grupo, em geral, decide por uma convenção local, depois de analisadas as vantagens e desvantagens de cada uma. Em nossas investigações, observamos que os erros induzidos pelas linguagens formal, natural, simbólica, gráfica, etc. devem-se principalmente à falta de experiência dos alunos em explorar ou construir outras linguagens que não as arbitrariamente impostas a eles por meio de programas oficiais e livros didáticos.

i. Generalização da hipótese supostamente errada.

Embora não tenhamos a pretensão, neste pequeno resumo, de detalhar todas as características do nosso "ambiente de verdades provisórias", é oportuno observar alguns resultados obtidos em sala de aula frente aos chamados "erros clássicos". Selecionamos duas situações aqui identificadas por S1 e S2.

Situação 1 (S1) - Alunos de 10/11 anos
Fragmento do caderno de Pedro:

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{5} = \frac{5}{12}$$

É solicitado ao grupo que discuta o resultado de Pedro.

Joana afirma que lhe parece certo, pois "é uma regra" que funciona, mesmo com a ordem trocada:

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{5}{12}$$

O grupo aceita, inicialmente, a regra de Pedro. É perguntado "como funciona a regra". O grupo responde em uma linguagem retórica:

"Somamos os numeradores e dividimos pela soma dos denominadores".

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \qquad b, d \in N^*$$

Aceitamos a regra de Pedro como um modelo e exploramos algumas situações, como a razão entre gols e jogos em um campeonato. Aqui a regra funciona bem.

Entre as várias situações propostas para explorar o modelo aceito pelo grupo está a soma de duas metades. No dia seguinte, João rejeita a regra de Pedro argumentando que 1/2 + 1/2 deveria ser 1 e não 2/4. Ante esta situação de conflito entre "regra" e senso de estimativa, o grupo dedica-se então à tarefa de encontrar uma regra onde 1/2 + 1/2 = 1.

Neste caso, o suposto "erro" foi assumido como modelo local. O grupo abandona o modelo a partir da problematização e do conflito frente a situações de contextos variados.

Situação 2 (S2) - Alunos de 12/13 anos
Foi observado em anos anteriores que os alunos cometiam freqüentemente "erros" em situações que envolviam o cálculo de potências com expoente negativo. Procuramos fazer uma leitura "Raio-X" das estruturas em que os alunos se baseavam para fazer seus cálculos.

Segue a transcrição de uma situação de sala de aula.

Aluno: o que significa 2^{-3}, que eu vi num livro ?

O professor coleta junto ao grupo o que este pensa a respeito da pergunta do colega.

Eis algumas das proposições dos alunos:

Aluno	Resposta para o valor de 2^{-3}
A1	- 8
A2	8
A3	- 6
A4	- 1
A5	1/2

Partimos do princípio de que cada proposição foi formulada conscientemente por cada aluno proponente. Não se tratavam de erros caóticos. Ante a diversidade de soluções, o grupo é motivado e solicitado a investigar cada solução como se fosse correta.

Professor: Quem pensou -8, como resolveria 3^{-2}?

A2: -9.

Observamos que o aluno A2 tem a idéia da estrutura em que o aluno A1 se apoiou.

Professor: Como A4 resolveria 3^{-2}?

Silêncio ...

A5: -5.

É solicitado aos alunos que tentem expressar o caso geral de cada proposição.

H1: $a^{-n} = - a^n$.

H2: $a^{-n} = a^n$.

H3: $a^{-n} = - a . n$.

H4: $a^{-n} = a - n$.

H5: $a^{-n} = ?$.

(Hi: hipótese do aluno Ai).

O grupo não consegue decifrar como pensou o aluno A5.

A5: (explicando):

"Se a^n, com $n > 0$, (a.a.a. ... .a), n vezes, então, quando o expoente for negativo, vai ser (a:a:a: ... :a), n "as". Neste caso, com as divisões sucessivas:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^{n-2}}$$

Da discussão de cada caso, o grupo acaba por rejeitar as hipóteses de A3 e A4, por considerá-las conflitantes com operações já conhecidas.

Investiga-se, em seguida, se $a^{-n} = - a^n$ mantém propriedades já conhecidas e aceitas, como P1: $a^n . a^m = a^{n+m}$, verificando-se casos particulares.

I: $2^{-3}. 2^{-2} = 2^{-5}$ (por P1).

II: $2^{-5} = -2^5 = -32$ (por H1).

III: $2^{-3} .2^{-2} = (-8).(-4) = 32$ (por H1).

De II e III temos que 32 = -32. Conflito que leva os alunos a abandonarem a hipótese H1 e a seguirem na investigação.

Tanto em S1 como em S2, os "erros" não foram destacados como erros e sim como modelos que se encaixam ou não a uma dada situação e suas condições ou a um certo corpo de conhecimentos provisoriamente aceitos. A estratégia para cada situação é determinada pelo contexto em que o "erro" emerge. Este se constitui em matéria-prima do processo de ensino-aprendizagem. Neste processo o aluno é co-participante da análise de seu pensamento. Dentro desta ótica, não nos parece adequado, simplesmente, remediar ou evitar a emergência dos erros.

A fim de socializar e multiplicar experiências deste tipo, foram desenvolvidas Oficinas de Trabalho com professores da rede pública, onde os materiais utilizados eram análogos aos explorados com os alunos. A reflexão sobre as idéias e vivências descritas neste artigo não poderá se dar simplesmente pela sua leitura; a releitura destes princípios deve ser feita a partir de vivências. Nos contrapomos a qualquer tipo de "receituário" que torne mercadoria a metodologia aqui adotada.

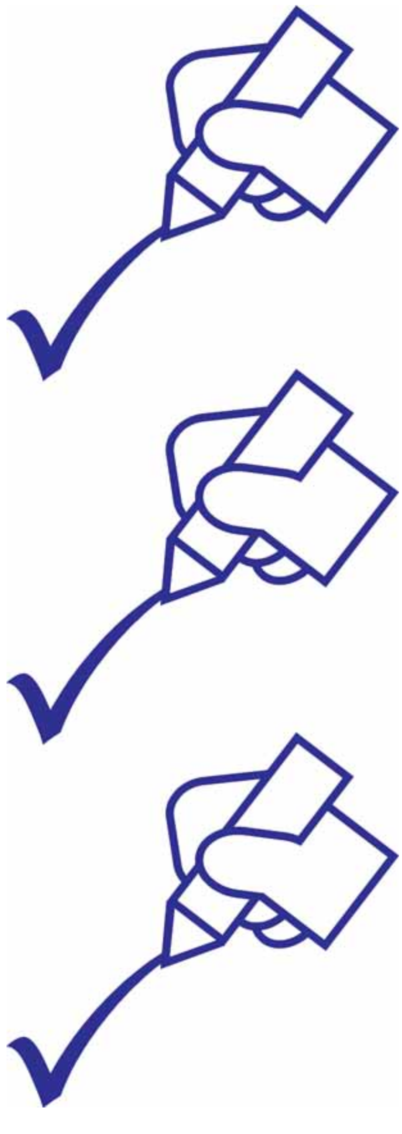
© Copyright Bigode Consultoria Pedagógica Ltda - Todos os direitos reservados.

Referências bibliográficas

LOPES, A.J. Desmi(s)tificacion del conocimiento matemático por la construcion de lenguaje y produccion de matemática em el aula. *In Educación Matemática* em las Américas VII. p. 169-182. UNESCO, 1990.

LOPES, A.J. *Uma vision sobre la ensenanza de lãs matemáticas través de la resolución de problemas y analises de errores*. Painel de Resolução de Problemas da 6ª Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM. Guadalajara, México, 1985.

Solução das atividades



Solução das atividades

Atividade 1

a) PT $\cong$ 695.043,5km.

b) Altura da sombra = PT – raio da Terra = 695.043,5 – 6.378 = 688.665,5km.

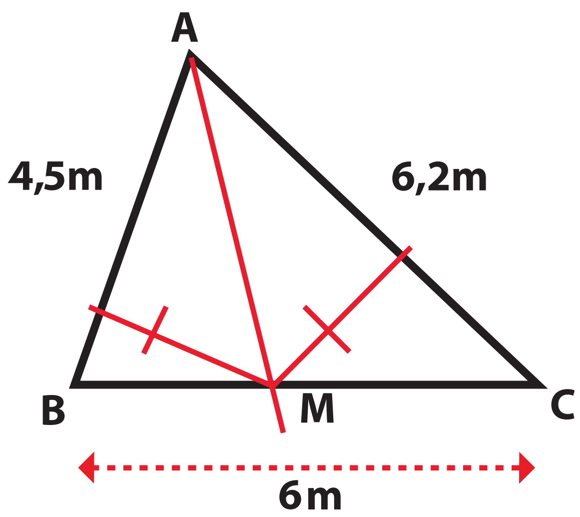
c) Comparando-se a altura da sombra com a distância média da Lua à Terra, conclui-se que a Lua realmente passa pelo cone escuro, quando ocorrerá um eclipse.

Atividade 2

$$\frac{80}{120} = \frac{100}{x}$$

x = 150m

Atividade 3



Pela propriedade da bissetriz de um triângulo:

$\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{MC}$ além disso, temos: BM + MC = 6, portanto MC = 6 - BM.

Substituindo os valores:

$\frac{4,5}{BM} = \frac{6,2}{6 - BM} \longrightarrow 6,2BM = 4,5(6 – BM)$

6,2 BM + 4,5BM = 27

10,7BM = 27 $\longrightarrow$ BM = 27/10,7 = 2,52

MC = 6 – BM = 6 – 2,52 = 3,48

A viga deve apoiar-se em um ponto M a 2,52m de B.

Atividade 4

z = 180 - x - y

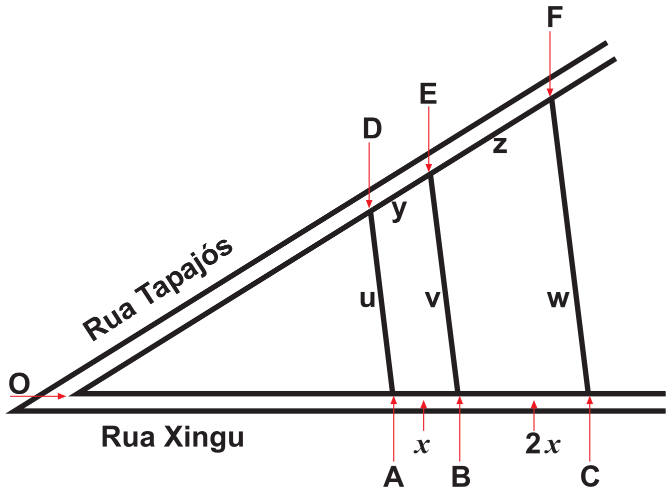
Atividade 5

z = 180 – (x + y)

z´ = 180 – (x´ + y´)

Como x + y = x´ + y´, segue que z = z´

Atividade 6



Para que todos os lados fossem proporcionais, deveríamos ter:

$$\frac{x}{2x} = \frac{y}{z} = \frac{u}{v} = \frac{v}{w} = \frac{1}{2} \quad \text{(I)}$$

Pelo Teorema de Tales, a primeira igualdade é válida.

Como o Teorema de Tales não inclui a razão dos segmentos sobre as paralelas (u/v), desconfiamos que (I) não seja verdadeira.

Devemos trabalhar com triângulos (a partir de O) e a propriedade da diferença de termos nas proporções, para obtermos as diferenças x, $2x$, y e z.

Nem sempre é fácil irmos direto às proporções que nos dão uma solução. Às vezes, são necessárias algumas tentativas.

Por semelhança de triângulos e de propriedades de proporções, temos:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OE} = \frac{u}{v} \rightarrow \frac{OA}{OB - OA} = \frac{OD}{OE - OD} = \frac{u}{v - u} \rightarrow \frac{OA}{x} = \frac{OD}{y} = \frac{u}{v - u} \quad \text{(II)}$$

Por semelhança de triângulos e de propriedades de proporções, temos:

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OE}{OF} = \frac{v}{w} \rightarrow \frac{OB}{OC - OB} = \frac{OE}{OF - OE} = \frac{v}{w - v} \rightarrow \frac{OB}{2x} = \frac{OE}{z} = \frac{v}{w - v} \quad \text{(III)}$$

Nas proporções (II) e (III), os "numeradores" de uma são proporcionais aos "numeradores" da outra (podem não ser numeradores, pois podem não ser números naturais; seria melhor falar em termos antecedentes). De fato:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OE} = \frac{u}{v}$$

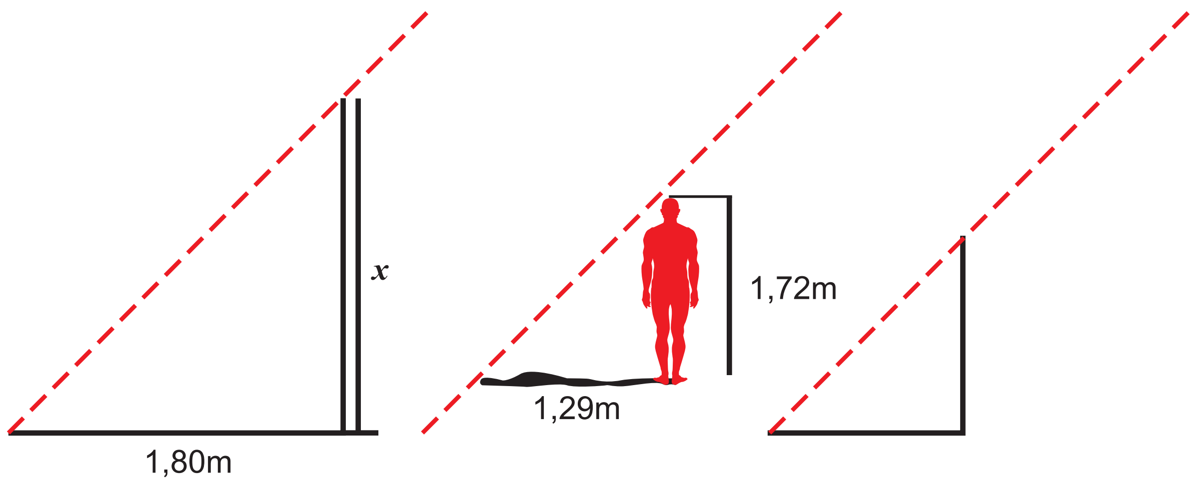
Neste caso, também os "denominadores" serão proporcionais:

$$\frac{x}{2x} = \frac{y}{z} = \frac{v - u}{w - v}$$ Isso mostra que a proporção (I) não é verdadeira.

Como nem todos os lados correspondentes dos dois trapézios estão na razão de 1 para 2, não se pode afirmar que as áreas estão na razão 1 para 4.

Atividade 7

Em um mesmo momento, as alturas dos objetos são proporcionais às suas sombras. Isso ocorre porque, devido à distância, os raios do Sol que chegam à Terra são paralelos, surgindo, daí, triângulos semelhantes.



Temos:

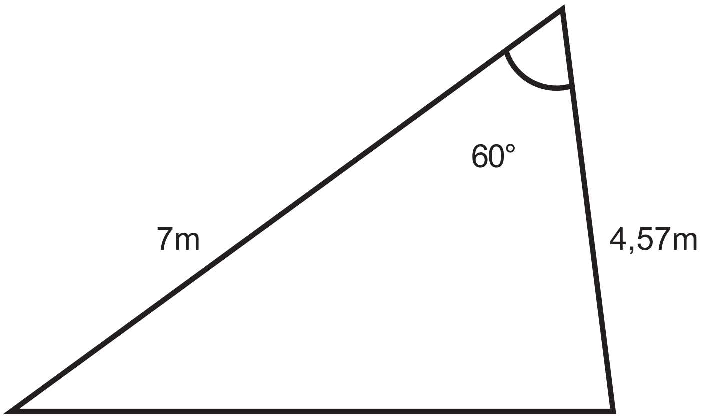
$$\frac{1{,}72}{1{,}29} = \frac{x}{1{,}80} \longrightarrow 1{,}29x = (1{,}72) \times (1{,}80) = 3{,}096 \longrightarrow x = 3{,}096/1{,}29 = 2{,}4$$

Atividade 8

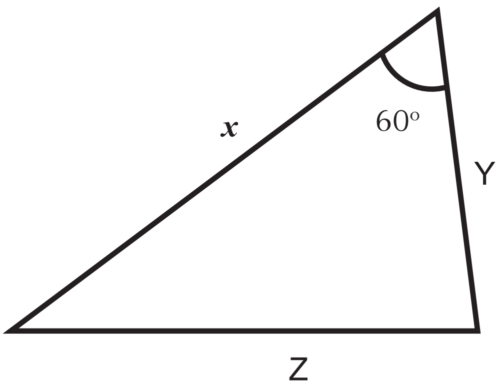
Resposta pessoal.

Atividade 9

Uma casa apresenta um telhado como o da figura:



Para se fazer uma maquete da casa na escala 28:1, é necessário construir um triângulo semelhante a este. Com que medidas deve ser feito o triângulo, de modo a garantir a semelhança entre a maquete e o telhado?



Temos: $\dfrac{7}{x} = \dfrac{4{,}57}{y} = 28 \rightarrow x = 7/28 = 0{,}25$

$\rightarrow y = 4{,}57/28 = 0{,}163$

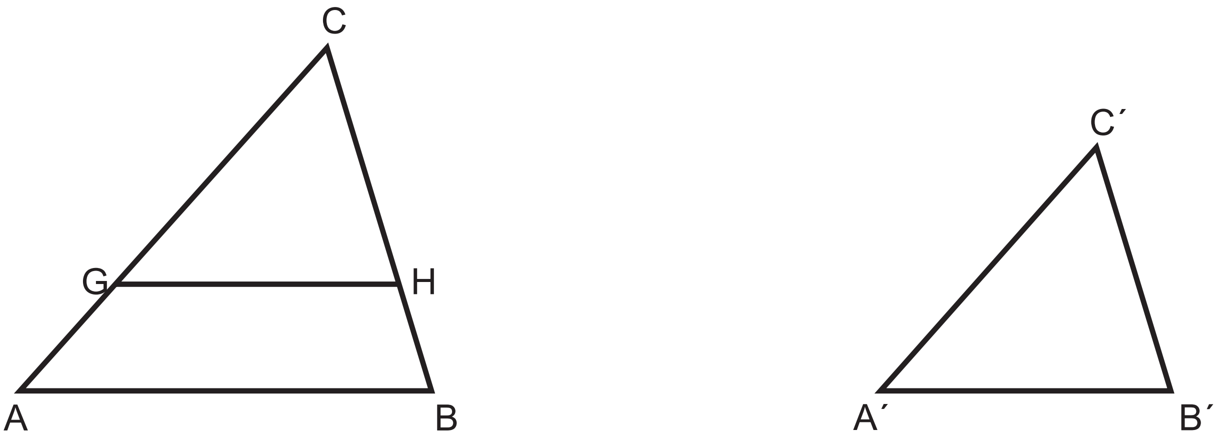
Para saber o valor de z, desenhe cuidadosamente um ângulo de 60° entre os lados com medidas 0,25 e 0,163 (25cm e 16,3 cm).

Sabemos que triângulos que têm um ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais são semelhantes.

Feche o triângulo. A medida dos terceiros lados manterá a mesma razão dos outros pares de lados. Você terá, portanto, o valor de z.

Atividade 10

Tome CG = C´A´ e CH = C´B´ e trace o triângulo CGH.



a) De fato, isto ocorre por eles terem um ângulo igual: C = C´, compreendido entre dois lados respectivamente iguais: CG = C´A´ e CH = C´B´.

b) Concluímos que outros elementos destes triângulos são iguais:

$\hat{G} = \hat{A}'$ (e como $\hat{A}' = \hat{A}$, temos $\hat{G} = \hat{A}$).

$\hat{H} = \hat{B}'$ (e como $\hat{B}' = \hat{B}$, temos $\hat{H} = \hat{B}$).

c) Usamos uma recíproca do teorema das paralelas cortadas por uma transversal:

Se tivermos um feixe de retas cortado por uma transversal e ocorrer a igualdade dos ângulos correspondentes, então as retas são paralelas.

Concluímos que GH é paralela a AB.

d) Aplicamos o Teorema de Tales, o que nos permite afirmar que $\dfrac{CG}{GA} = \dfrac{CH}{HB}$.

e) E, por propriedade das proporções, temos:

$$\frac{CG}{CG + GA} = \frac{CH}{CH + HB}$$

E portanto:

$\dfrac{CG}{CA} = \dfrac{CH}{CB}$, o que é o

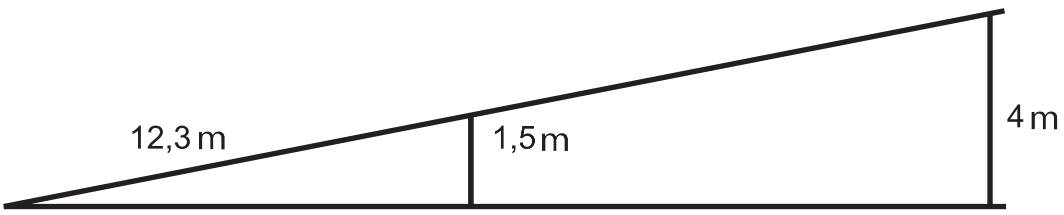
mesmo que $\dfrac{C'A'}{CA} = \dfrac{C'B'}{CB}$ (II).

f) Reunindo (I), da página 151, e (II), chegamos à proporcionalidade dos três pares de lados:

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

g) Resposta pessoal. Pode ser: com isso provamos que, se dois triângulos têm os ângulos correspondentes dois a dois congruentes, então eles têm os lados proporcionais, e as duas condições juntas garantem a semelhança entre eles.

Atividade 11



$$\frac{1{,}5}{4} = \frac{12{,}3}{12{,}3 + x}$$

Resolvendo, obtém-se $x = 20{,}5$m.

Atividade 12

Resposta pessoal.

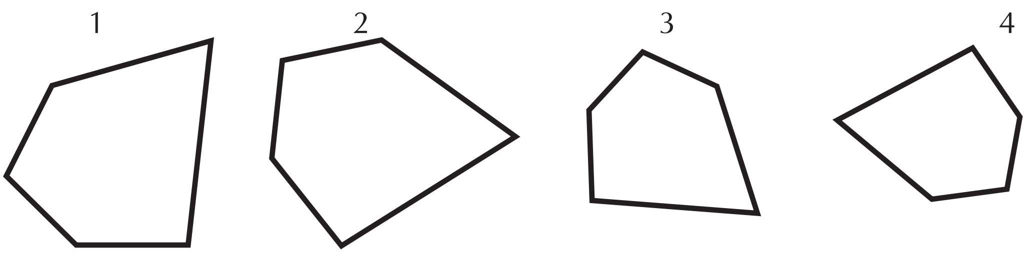
Atividade 13

Em grupo.

a) Nas coleções dos quadrados, dos triângulos eqüiláteros, dos pentágonos regulares e dos hexágonos regulares.

b) São semelhantes entre si:
Todos os quadrados.
Todos os triângulos eqüiláteros.
Todos os pentágonos regulares.
Todos os hexágonos regulares.

c) Se for escolhido um pentágono não-regular, poderemos ter:



d) 1 e 2 não são semelhantes, pois têm alguns pares de lados congruentes e outros com pequenas diferenças.

1 e 3 não são semelhantes, pois os lados correspondentes não são todos proporcionais.

1 e 4 não são semelhantes pela mesma razão do caso anterior.

Atividade 14

De manipulação.

1. Os triângulos obtidos, com três pares de ângulos iguais, serão semelhantes.

Verificação da razão constante entre os lados correspondentes: Resposta Pessoal

Idéia para resolver a situação-problema 2 – caixa d'água

Calcule o volume e capacidade da caixa, lembrando que é um prisma de base trapezoidal (B = 4, b = 2, h = 3) e que a altura do prisma vale 2m. Esse volume dará $18m^3$ = 18.000 l. Complete o trapézio frontal para um triângulo, que terá altura 6, devido à razão entre as bases ser 4/2. Marque níveis de água imaginários às 13h, às 19h e o de 30cm = 0,3m de altura. Nesse sentido, você poderá usar muitas proporções, que permitirão calcular o volume do prisma que corresponde à água gasta até as 13h (5250 l). Use também proporção entre a vazão de água e o tempo para calcular a água até as 19h (6.300 l). Por proporção no triângulo, verifique que, com altura 0,3m, a superfície da água é um retângulo de dimensões 2,02m e 2m. O prisma que fica abaixo dessa superfície tem um trapézio frontal (base do prisma) com área $0{,}63m^2$. Seu volume será de $1{,}26m^3$ = 1.260 l.

Com essa quantidade de água é menor do que a que sobrou, conclui-se que o nível de água, às 19h, estará acima do nível mínimo de 30cm.

Esta é apenas uma sugestão. Muitas outras idéias podem surgir.

Unidade 16

Explorando conceitos matemáticos em uma discussão sobre o trânsito inclusivo

Celso de Oliveira Faria

Iniciando a nossa conversa

Professor, vamos começar mais uma Unidade do seu curso de Matemática do Gestar II. E vamos, mais uma vez, estudar os temas matemáticos a partir de uma situação-problema relevante.

Muito tem se falado sobre trânsito nos dias de hoje. São reportagens na mídia impressa e na TV, documentários, campanhas e por aí vão muitas outras iniciativas que têm como objetivo tratar do problema. Mas você já pensou até que ponto a sua escola e a calçada da sua cidade e bairro estão projetadas para o trânsito de pessoas que têm necessidades especiais? Será que um cadeirante, ou seja, uma pessoa que usa cadeira de rodas, tem acesso a sua escola? Vamos pensar um pouco sobre isso?

Esta Unidade está organizada em três Seções:

1 - Resolução de uma situação-problema
A Seção 1 propõe uma situação-problema relacionada ao esporte, tratando de problemas relacionados a conceitos geométricos, relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo e na radiciação.

2 - Conhecimento matemático em ação
A Seção 2 introduz e se aprofunda nos conceitos relacionados à situação-problema apresentada, como as relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo e números pitagóricos.

3 - Transposição Didática
A Seção 3 discute problemas relacionados ao ensino-aprendizagem desses conceitos e sugere ações relacionadas para a sala de aula.

Como as outras Unidades, esta também conterá um Texto de Referência sobre Educação Matemática, que abordará algumas reflexões sobre o que seja abstrato ou concreto no ensino da Matemática.

Definindo o nosso percurso

Esperamos que, ao longo desta Unidade, você possa:

1 - Com relação aos seus conhecimentos matemáticos:

- Vivenciar a resolução de uma situação-problema com relação a:

- Relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo.
- Radiciação.

Esses conhecimentos serão desenvolvidos nas Seções 1 e 2.

2 - Com relação aos seus conhecimentos sobre Educação Matemática:

- Adquirir conhecimentos sobre:
  - Teoria dos quadros.
  - Demonstração empírica e matemática.

3 - Com relação à sua atuação em sala de aula:

- Conhecer e produzir, com relação aos temas tratados, situações didáticas adequadas à série em que atua.

Este objetivo será tratado na Seção 3.

Seção 1

Uma situação-problema: destacando e estudando proporcionalidade

Objetivo da seção

Esperamos que, ao longo desta Seção, você possa:

- Resolver uma situação-problema.
- Verificar os elementos importantes para permitir a acessibilidade de cadeirantes na sua escola.
- Elaborar um projeto para o estacionamento da escola que permita o acesso de cadeirantes.

Integrando a matemática ao mundo real

As barreiras enfrentadas no dia-a-dia

Sol causticante. Trânsito caótico. Avalanche de pessoas nas ruas. Em meio a toda essa confusão, o auxiliar de microfilmagem José Martins de Almeida não mede esforços e sai de casa, no bairro do Arruda, para participar de um seminário, no centro do Recife, que resultará em um projeto de benefícios às pessoas portadoras de deficiência física. Apesar das condições absolutamente desfavoráveis, Martins, que há 50 anos se locomove em uma cadeira de rodas, disputa – com pedestres e carros guiados por motoristas apressados e mal-educados – uma chance de chegar rapidamente ao outro lado da via, pois não quer perder a oportunidade de opinar e ajudar a abrandar a dura realidade em que dez por cento da população, segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), estão inseridos.

O "cadeirante", como se autodefinem as pessoas que dependem das cadeiras de rodas, não está só nesse calvário, e nem a complicada travessia de ruas é a única dificuldade enfrentada. Martins, que preside a Associação dos Deficientes Físicos de Pernambuco (Adefepe), fala pela boca de milhares de companheiros paraplégicos, usuários de muletas, cegos e portadores de outras deficiências e desfila um rosário de barreiras que todos eles são obrigados a enfrentar no dia-a-dia.

"Andamos com dificuldade nas ruas e ficamos impossibilitados de ir ao cinema, ao teatro e a outros recantos públicos", lamenta. Além da falta de rampas nos cinemas, por exemplo, as salas exibidoras não têm espaço para as cadeiras de rodas. Quem usa muletas, por sua vez, passa pelo incômodo de ter de entrar – vagarosamente – em uma apertada fila (sobretudo, quando as sessões estão lotadas) e ainda por cima de não ter onde deixar as muletas.

Se nos cinemas é assim, nos teatros, campos de futebol, agências bancárias, escolas, restaurantes, universidades e ginásios esportivos a situação é ainda pior, pois são inúmeras as barreiras arquitetônicas, como escadarias, alpendres, meios-fios altos. "Pior é que muitas vezes temos de andar uma rua inteira para acharmos uma rampa e quase sempre ela está danificada", diz Martins.

(...) Quando perguntados sobre os meios de transportes, os deficientes físicos reclamam que são discriminados também neste sentido. "Dá calafrios só de pensar em ônibus", costumam dizer. (...) Os táxis, que seriam outra opção, são evitados, porque a maioria não tem como pagá-los diariamente.

Outra situação de discriminação é em relação às portas eletrônicas dos bancos. A socióloga e presidente da Associação Desportiva dos Deficientes Físicos (ADDF), Jurene Pereira Lins, que é "cadeirante", diz que perde muito tempo toda vez que se depara com uma. "Terminam sempre chamando o gerente, que nunca está, ou temos de esperar por um funcionário, que também demora a aparecer, e aí a gente já passou por todo o constrangimento do mundo", reflete.

Usar telefone público (orelhão) também é complicado para o deficiente físico. Aparelhos adaptados são encontrados somente nos shoppings, aeroportos e estações rodoviárias. "Só que ninguém vive indo nesses lugares todo dia", observa Jurene. Os banheiros adaptados são igualmente uma raridade. Caso precise de um com urgência, por exemplo, o "cadeirante" se verá em completo vexame. "O preconceito que sofremos é o mesmo de todas as minorias. É idêntico ao que os negros passam", avalia Jurene.

DESCONHECIDO. As barreiras enfrentadas no dia-a-dia.
Jornal do Commércio. Recife, 03 maio 1998, Comportamento, Cidades. Disponível em:
<http://www2.uol.com.br/JC/_1998/0305/cd0305a.htm> Acesso em: 15/10/2003.

Pela reportagem acima podemos observar quantos problemas uma pessoa que tem dificuldade de locomoção pode encontrar para transitar pela nossa cidade. Isso nos mostra que o problema do trânsito não está relacionado apenas às questões tradicionais que estamos acostumados a ver na mídia imprensa e TV. Você já havia pensado sobre essa possibilidade de fazerem parte da problemática: o acesso às barreiras enfrentadas pelos cadeirantes, deficientes auditivos, visuais e vários outros?

Você já observou se a sua escola tem uma política de inclusão para os deficientes, especificamente os cadeirantes?

Qual a sua opinião?

Atividade 1

Para saber se a sua escola está preparada para receber os usuários de cadeiras de rodas, veja algumas dicas da arquiteta Sandra Perito publicadas na revista *Veja* em 28 de agosto de 2002.

Instalações

- Disposição de quadro de luz principal a 1,10m de altura (hoje, o padrão é de 1,50m), o que facilitaria o alcance por qualquer pessoa.
- Disposição de tomadas no mínimo a 46cm do piso (hoje, o padrão é de 30 cm), o que evita que seja necessário se abaixar muito para ligar equipamentos.
- Disposição de interruptores no máximo a 1,05m (o padrão atual é de 1,10m), tornando-se acessíveis para todas as pessoas.

Revestimento de piso

- Piso com alto contraste sem ofuscar delimita a área de piso e desníveis, facilitando a circulação por pessoas com visão reduzida.
- A colocação de piso antiderrapante nos banheiros, cozinha e lavanderia evita escorregões e quedas quando se tem acúmulo de água.

Áreas externas

- A disposição de rampa de acesso com inclinação máxima de 8% permite um fácil acesso para pessoas com mobilidade reduzida.

Mobiliário e equipamentos

- Os ambientes devem valorizar mobiliários pesados e firmes, para servirem de apoio sem se moverem, e com cantos arredondados, o que evita lesões quando se bate neles.

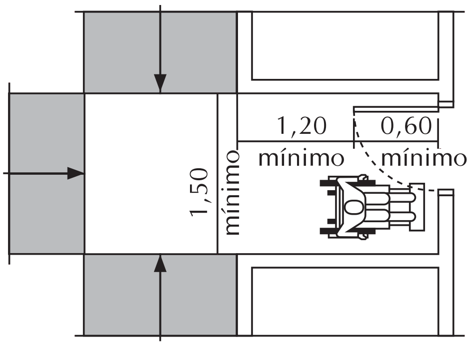
Agora, observe se a sua escola atende aos requisitos acima. Preencha a tabela abaixo para ajudá-lo nesta tarefa.

Requisitos	Sim	Não
Disposição do quadro de luz		
Disposição das tomadas		
Revestimento com contraste		
Piso antiderrapante		
Rampas de acesso		
Mobiliário arredondado		

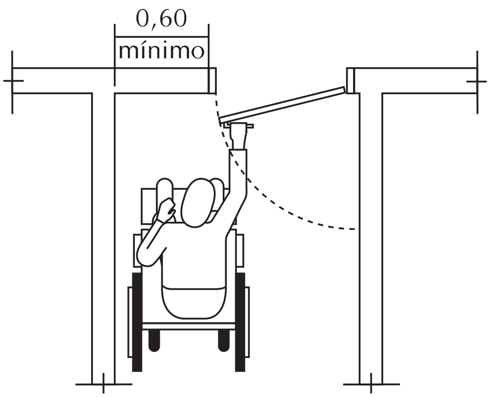
Qual a sua conclusão?

Atividade 2

Também é interessante observar se ambientes importantes de uma escola, tais como sala de aula e banheiros estão preparados para o acesso do usuário de cadeira de rodas. O arquiteto brasiliense, especialista em arquitetura hospitalar e escolar, André Alf, nos informou que a maioria das escolas e hospitais no Brasil não está preparada para a utilização por portadores de necessidades especiais. O arquiteto nos apresentou algumas normas que devem ser seguidas no momento da construção de um prédio que inclua acesso para os portadores de necessidades especiais.

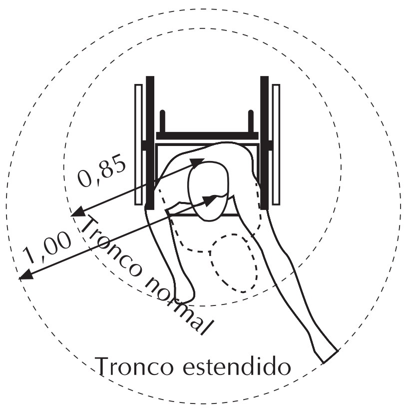


VISTA SUPERIOR
PORTA JUNTO AO PATAMAR

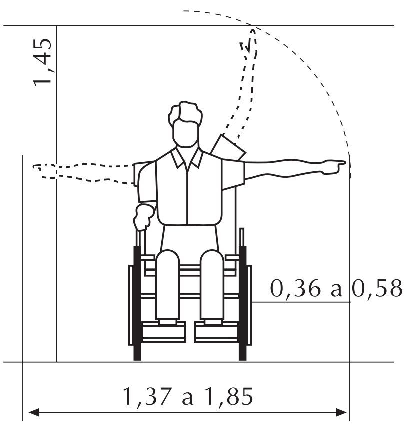


VISTA SUPERIOR
ABERTURA DA PORTA

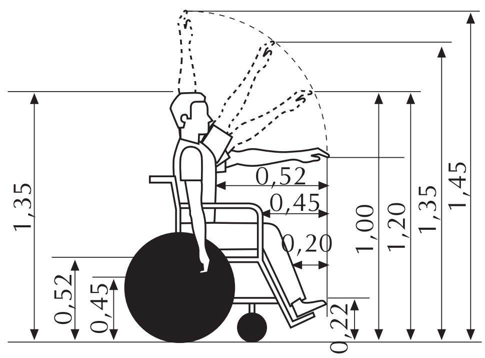
0,85



Vista superior



VISTA FRONTAL



VISTA LATERAL
Parâmetros antropométricos para pessoas em cadeira de rodas

Meça a entrada da sua sala de aula.

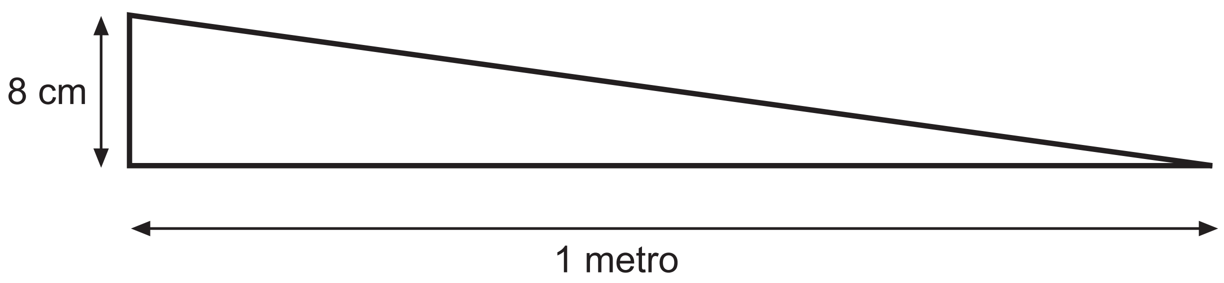
a) A abertura da porta é de, no mínimo, 60cm?

b) Existe um local para encostar a cadeira enquanto o cadeirante puxa a porta? Isso atende às normas apresentadas?

c) Caso você tenha um aluno que usa cadeira de rodas, observando as medidas, desenhe como ficaria organizada a sua sala, mantendo o mesmo número de alunos que possui atualmente.

Atividade 3

Segundo mostra a sugestão da arquiteta, é necessário que existam rampas para o acesso do usuário de cadeira de rodas, e elas devem ter uma inclinação de, no máximo, 8%. Você já pensou o que significa isso? Este tipo de "medida" é muito usada por engenheiros e arquitetos para mostrar a razão entre a variação da altura e o deslocamento linear. Veja este desenho:



Aqui temos uma rampa com 8% de inclinação, ou seja, 8cm de altura para cada 1m caminhado na rampa.

A sua escola possui rampa de acesso para os alunos?

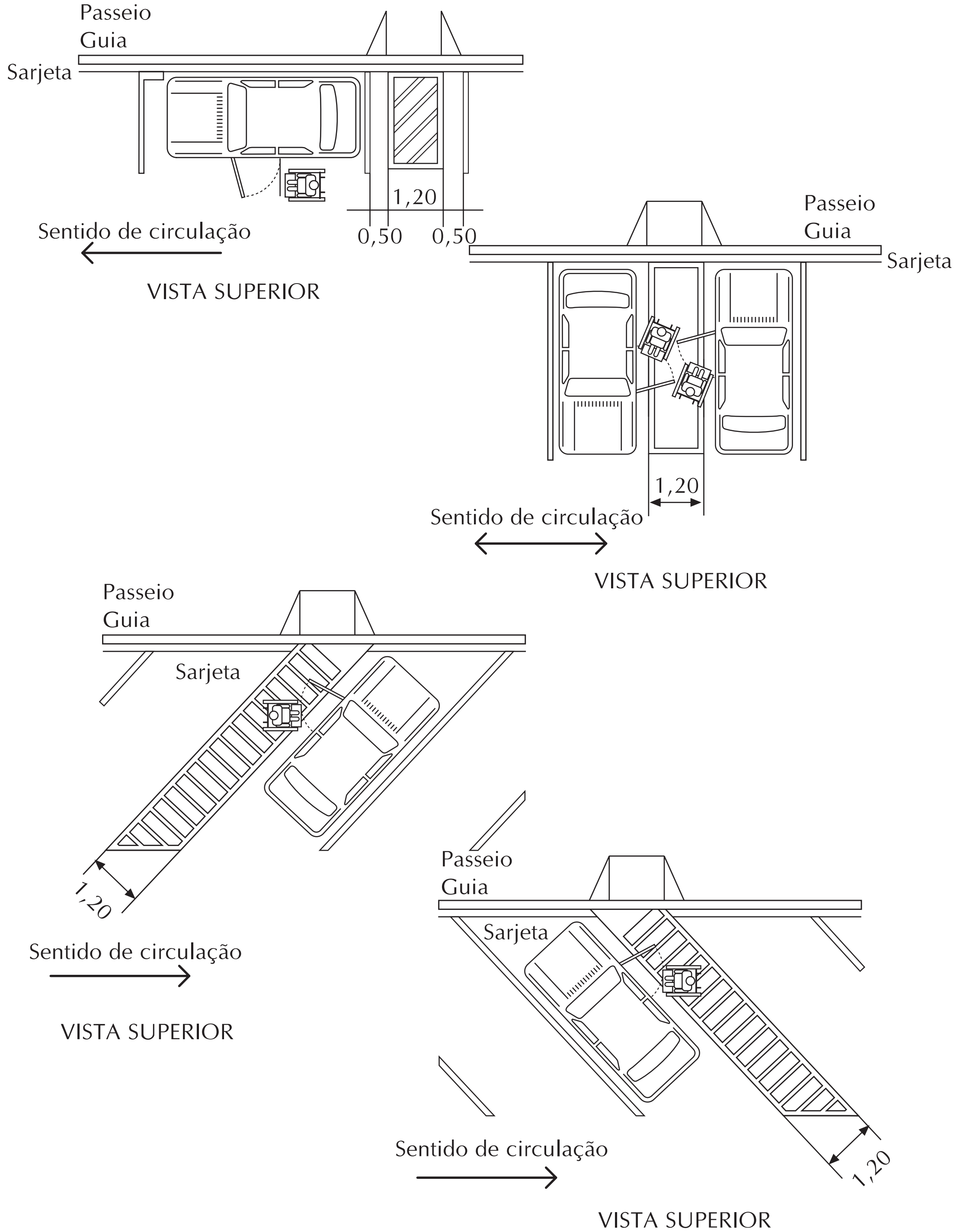
Se sim, verifique se a sua inclinação é menor do que 8%.

Se não, quais deveriam ser as medidas das rampas necessárias para que um aluno tenha acesso à sua sala de aula? Lembre-se: talvez seja preciso mais de uma rampa.

Atividade 4

É importante destacar que não é apenas o aluno que deve ser lembrado nestes casos de acesso. Também é fundamental lembrar do professor. Será que a sua escola está preparada para receber um professor que usa cadeira de rodas, por exemplo? Então, é importante lembrar de itens como: a altura da lousa, o acesso à sala dos professores, à diretoria, à secretaria, ao banheiro dos professores, ao estacionamento, etc.

Sobre estacionamentos, o arquiteto André Alf nos apresenta a seguinte norma a ser utilizada:



Veja que, nos casos anteriores, é necessário lembrar que, além de um local para estacionar, é preciso existir um espaço para que o cadeirante desça do veículo e monte a sua cadeira.

Que tal você fazer um projeto simples para o estacionamento da sua escola, que tenha vagas para os cadeirantes que possuem carros? Pegue uma folha em branco e faça o seu projeto.

Lembre-se, segundo a legislação, é preciso que 3% das vagas sejam para deficientes.

Veja, aqui falamos novamente em porcentagem: *3% das vagas devem ser para deficientes;* e, na Atividade 3, sobre as rampas com 8% de inclinação. São usos diferentes de porcentagens em conceitos diferentes. Que diferença conceitual você percebe entre os dois exemplos?

Escolha um dos formatos acima para o estacionamento. Ou seja, carros em paralelo com a calçada, ou em perpendicular, ou fazendo um ângulo de 45°. Use uma escala para fazer o seu projeto.

Articulando conhecimentos

Lembre-se de que o tema escala foi mobilizado na Unidade 5 do TP2 do primeiro Módulo. Se você tiver alguma dúvida, dê uma olhada na utilização que fez para desenhar a planta de uma quadra poliesportiva.

a) Quantas vagas você conseguiu alocar no estacionamento?

b) Quantas vagas devem ser separadas para os cadeirantes?

c) Você levou em conta os espaços para a descida da cadeira de rodas?

d) Se não, volte e refaça o seu projeto.

Leve o seu projeto para ser compartilhado com seus colegas na sua próxima oficina.

Seção 2

Construção do conhecimento matemático em ação: explorando conceitos matemáticos em uma discussão sobre o trânsito inclusivo

Objetivo da seção

Nesta seção esperamos que você possa:

- Demonstrar e aplicar algumas relações métricas do triângulo retângulo, até mesmo o Teorema de Pitágoras.
- Deduzir algumas relações trigonométricas também no triângulo retângulo.
- Aplicar o cálculo de raiz quadrada a partir do Teorema de Pitágoras.

Na Seção anterior, você pode conhecer e pensar um pouco mais sobre a questão do trânsito inclusivo. Você já refletiu sobre as dificuldades de acesso dos cadeirantes às instituições públicas e privadas e efetivou uma observação inicial em sua escola para ver até que ponto ela já se adaptou. E, principalmente, você agora está muito mais empenhado em discutir e propor mudanças em nossa sociedade, a fim de garantirmos acessibilidade a todos os cadeirantes, seja na escola, no trabalho, nos estacionamentos, nos hospitais, enfim, em todos os ambientes.

Você sabe o que significa o termo "acessibilidade"? Dê a sua opinião?

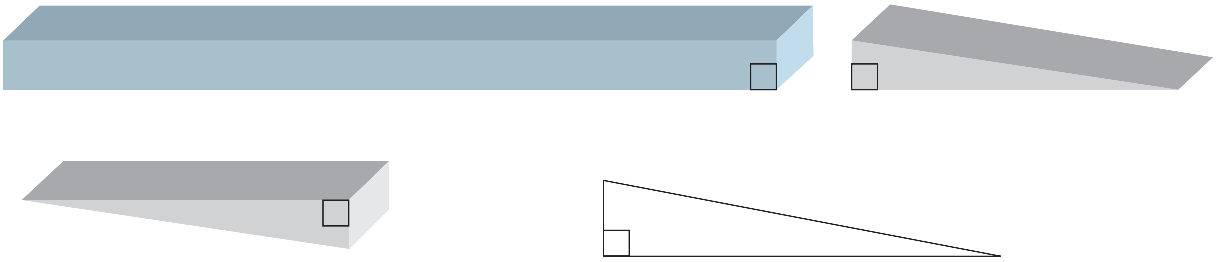
Confira a sua opinião com o que afirmam as normas da ABNT.

Acessibilidade
Possibilidade e condição de alcance para utilização, com segurança e autonomia, de edificações, espaço, mobiliário e equipamento urbanos.

Associação Brasileira de Normas Técnicas – Coletânea de Normas de Acessibilidade para pessoas portadoras de deficiências. Rio de janeiro: ABNT, 2001.

Agora que sabemos da importância da acessibilidade, vamos juntos buscar alternativas de mudanças, pensando como a Matemática pode contribuir para que compreendamos as mudanças arquitetônicas que precisamos efetivar em nossos ambientes.

Na Atividade 3, você esteve empenhado em descobrir se a sua escola possuía rampas com inclinação de, no máximo, 8%. Para completar a Atividade 3, você encontrou inúmeros objetos matemáticos, como: triângulos, sólidos geométricos, ângulos, entre outros. Decompondo esses objetos, temos:



Nesta Atividade, que teve como foco a declividade, observamos a presença de um triângulo em particular.

Atividade 5

a) Você sabe de qual triângulo estamos falando?

___

b) Comente alguma característica desse tipo de triângulo.

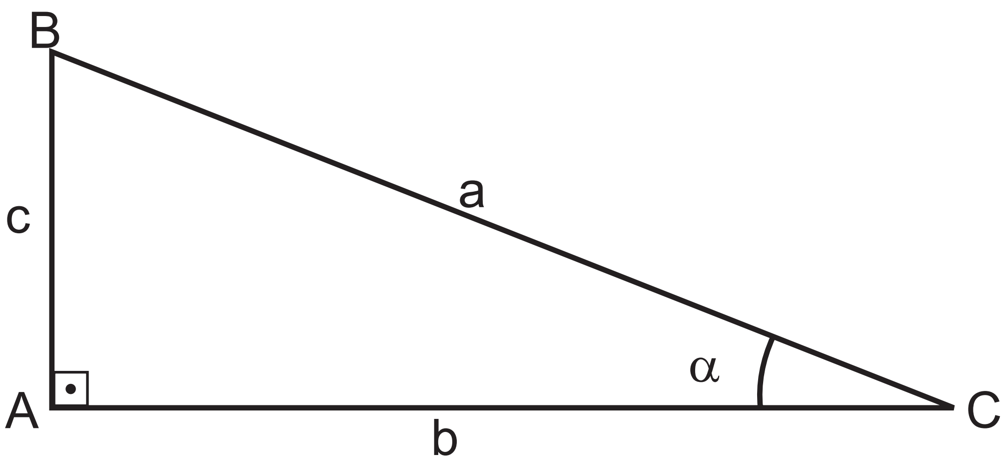
___

___

___

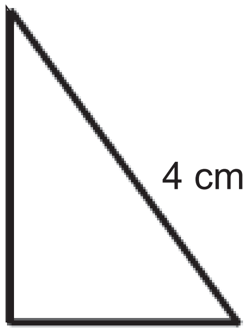
___

Decompondo os objetos geométricos encontrados na rampa, encontramos a figura abaixo e nela observamos a presença de alguns elementos, os quais garantiram a declividade, o comprimento da rampa, entre outros.

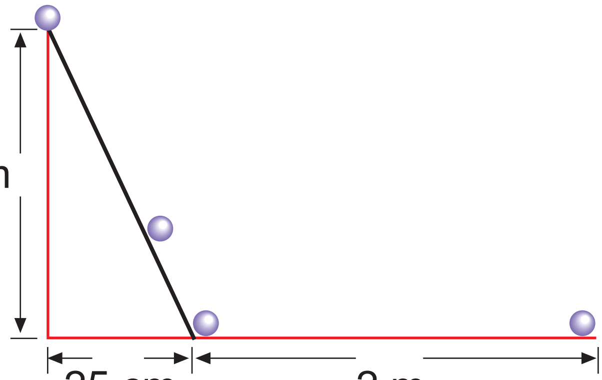


Quando falamos em triângulo retângulo, logo pensamos no Teorema de Pitágoras. E esta associação acontece de fato pela enorme vinculação entre ambos encontrada nos livros didáticos e pela utilização do Teorema em inúmeros problemas práticos:

Em situações onde queremos encontrar a altura:



A distância percorrida por um objeto:



Para saber mais:
História do Teorema de Pitágoras

Pitágoras viveu no século VI a.C., na Grécia. Alguns registros informam que ele nasceu na ilha de Samos. Também conta-se que viajou pelo Egito e pela Babilônia, vindo a fixar-se no sul da Itália (em Crotona), fundando a chamada Escola Pitagórica, onde estudava-se Matemática, Filosofia, Música e outras ciências.

Pitágoras foi um dos pesquisadores a elevar a ciência dos números e da geometria à categoria das artes maiores e a estabelecer o princípio de que uma proposição científica deve ser totalmente convincente, isto é, verdadeiramente demonstrada.

Atribuem-se notáveis descobertas a Pitágoras, tais como: o sistema de numeração decimal, as tabelas de multiplicação e a demonstração do célebre teorema que leva o seu nome.

Existem inúmeras demonstrações do Teorema de Pitágoras. Em 1940, o matemático americano Elisha Scott Loomis compilou 367 demonstrações diferentes para o seu livro *The Pythagorean Proposition*.

Se você tiver interesse em saber mais, pesquise na Internet ou em livros algumas dessas demonstrações.

Quando falamos em demonstrações, ficamos confusos sobre que procedimentos tomar em relação aos nossos alunos e pela dificuldade de encontrarmos ou criarmos situações de aprendizagem que favoreçam a compreensão das demonstrações. Na maioria das vezes, optamos em não levá-las às salas de aula. E fica sempre a pergunta: aquela demonstração não rigorosa, como estudamos no curso de Matemática, é válida?

Aprendendo sobre Educação Matemática

O pesquisador Morris Kline (citado por Garnica, no artigo *Logic versus pedagogy*) afirma que o método dedutivo aplicado em sala de aula pode trazer algumas distorções. Pois, a Matemática é uma atividade cujo primado é da atividade criativa e pede imaginação, intuição geométrica, experimentação, adivinhação judiciosa, tentativa e erro, uso de analogias das mais variadas, enganos e trapalhadas. Mesmo quando um matemático está convencido de que o seu resultado é correto, há muito para ser criado até encontrar a prova disto.

O que você acha sobre isso? Não deixe de olhar o Texto de Referência, pois vamos discutir pontos importantes sobre o assunto.

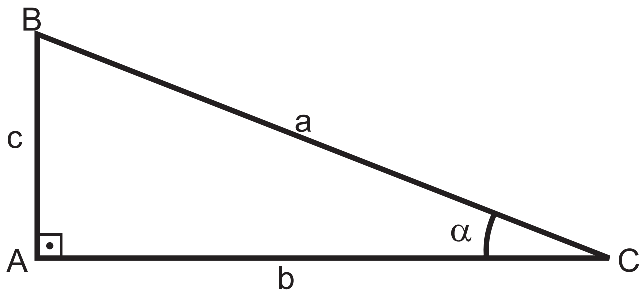
Um recado para sala de aula

Professor(a), veja uma sugestão de atividade para mostrar o Teorema de Pitágoras para os seus alunos:

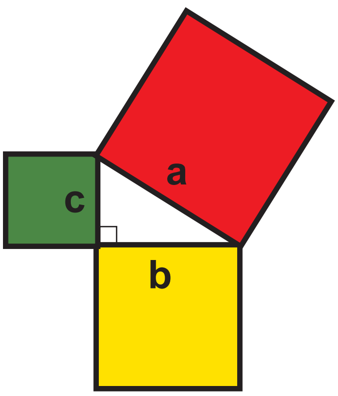
1. Papel seda (para dobradura) de diferentes cores.

2. Régua, compasso, esquadro, transferidor e lápis.

Com o auxílio de instrumentos de desenho, construa um triângulo retângulo qualquer.



Novamente, com o auxílio dos instrumentos, construa quadrados de lados a, b e c, como mostra a figura abaixo:



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Após a construção, você pode mediar a discussão colocando os quadrados na posição da figura anterior ou recortando os quadrados de lados c e b e verificando com seus alunos que as peças sobrepõem o quadrado de lado a.

Para finalizar a atividade, incentive os seus alunos a formalizarem o que acabaram de vivenciar. E assim vocês, juntos, poderão enunciar o Teorema de Pitágoras.

Lembrete: Você poderá observar essa demonstração de modo dinâmico trabalhando com *softwares* educativos, como o Cabri Géomètre e Geometricks em manipulações de objetos geométricos.

Monte um grupo de estudo e pesquisa em sua escola, para efetivar discussões e propor ações no sentido da ampliação das situações de aprendizagem com a utilização de *softwares* nas aulas de geometria. E, lembrem-se, já existem inúmeros softwares livres que vocês poderão utilizar sem custo para a escola. Procure no site http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/software/softw.htm alguns desses programas gratuitos.

Atividade 6

Continuando a nossa discussão sobre acessibilidade, encontre três situações-problema do seu dia-a-dia, relacionadas ao tema, que podem ser solucionadas com o Teorema de Pitágoras como ferramenta básica.

Situação 1

DESENHO	ESQUEMA

Situação 2

DESENHO	ESQUEMA

Situação 3

DESENHO	ESQUEMA

Aprendendo sobre Educação Matemática

A situação anterior, de representar o uso do Teorema de Pitágoras em diferentes contextos, é de fundamental importância para o processo de aprendizagem de um conceito. Também, é importante lembrar o papel do desenho do processo de visualização e representação geométrica. Lembre-se de que isso já foi discutido em um Texto de Referência do Módulo I – Unidade 09:

Aprender um conceito geométrico é percebê-lo em diferentes situações e colocá-lo em ação numa situação em que se apresente, relacionando-o àqueles já internalizados pelo indivíduo. É percebê-lo em constante transformação, sendo modificado, melhorado à medida que o indivíduo, de posse de suas propriedades, lança-se na descoberta de outros conceitos.

Atividade 7

Existem várias demonstrações do Teorema de Pitágoras, a sugerida em “Um recado para a sala de aula” é apenas uma delas. Pesquise duas outras demonstrações e discuta com os seus colegas, buscando eleger uma demonstração para ser apresentada aos seus futuros alunos (para as demonstrações ficarem mais interativas e passíveis de entendimento, é interessante usar dobraduras, papel quadriculado e, se houver a possibilidade, usar também o computador).

Demonstração 1

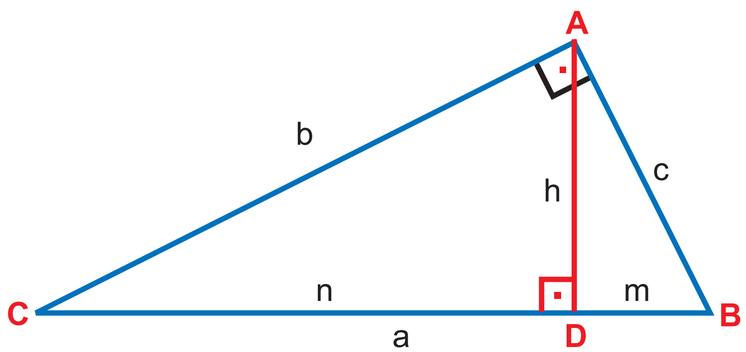
Demonstração 2

Um recado para sala de aula

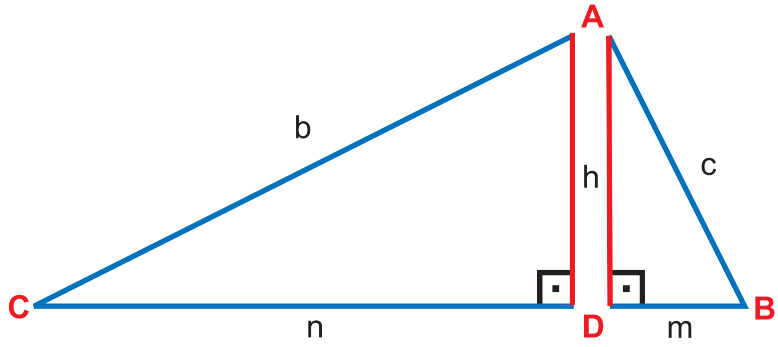
Lembre-se de que já foi usada em Unidades anteriores a aplicação do Teorema de Pitágoras. Veja que só agora fizemos algumas demonstrações, não tão rigorosas, porém mais intuitivas. Isso pode mostrar para você, professor, que, em alguns momentos, alguns tópicos da Matemática podem ser utilizados como ferramentas, não sendo preciso uma demonstração lógica naquele momento. A hierarquia pretensamente lógica dos livros didáticos ou dos próprios temas matemáticos não precisa ser seguida à risca. Um exemplo disso é a própria proposta do Gestar de 5ª a 8ª séries de apresentar os tópicos matemáticos em um currículo em rede.

Quando falamos de triângulo retângulo, não podemos deixar de observar outras relações métricas.

Para essa observação, vamos precisar do desenho de dois triângulos retângulos, como mostra a figura abaixo, e de uma tesoura:



Recortando o triângulo, obtemos outros dois:



Agora passamos a ter três triângulos semelhantes: ABC, ADC e ADB. Pois:

- ABC é semelhante a ACD porque tem dois ângulos congruentes: um ângulo reto e o ângulo C são comuns, ou seja, iguais.
- Também ABC e ABD têm dois ângulos congruentes: um ângulo reto e o ângulo B são comuns.

Para ficar mais fácil, coloque os triângulos recortados em uma posição em que se possa visualizar melhor os seus lados correspondentes:

Podemos organizar as informações sobre os três triângulos em uma tabela para facilitar a compreensão.

Triângulo	hipotenusa	cateto maior	cateto menor
ABC	a	b	c
ADC	b	n	h
ADB	c	h	m

Observando os três triângulos e focando a nossa atenção nos lados, podemos verificar que:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h}$$
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m}$$
$$\frac{b}{c} = \frac{n}{h} = \frac{h}{m}$$

Comparando essas igualdades, podemos observar que:

$\frac{a}{c} = \frac{c}{m}$ e, aplicando a propriedade fundamental da proporção, podemos dizer que: c x c = a x m, ou seja, c^2 = a x m.

Usando o mesmo procedimento, podemos escrever que:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{n}$, o que equivale a: b^2 = a x n;

$\frac{a}{c} = \frac{b}{h}$, o que equivale a: a x h = b x c;

$\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$, o que equivale a: h^2 = m x n.

Podemos encontrar outras relações focando a nossa atenção em apenas um triângulo, o ABC:

Como $a = m + n$, somando c^2 com b^2, obtemos:

$c^2 + b^2 = a \times m + a \times n = a \times (m+n) = a \times a = a^2$, o que resulta no Teorema de Pitágoras:

$a^2 = b^2 + c^2$.

Ou seja, acabamos de observar outra possibilidade de demonstração do Teorema de Pitágoras.

Por outro lado, as relações métricas obtidas acima, tal como o quadrado da altura é igual ao produto das projeções dos catetos, podem servir para resolver outras situações.

Atividade 8

Elabore uma situação didática onde os seus alunos possam usar as outras relações métricas encontradas na Atividade anterior.

Aprendendo sobre Educação Matemática

Leia o trecho abaixo:

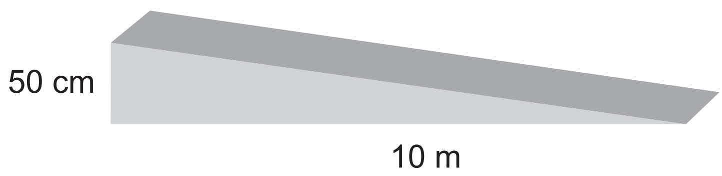
"(...) aprender Matemática não significa tão-somente saber resolver uma situação em um ou mais quadros; aprender é poder articular de forma dinâmica os diferentes procedimentos em quadros distintos, tendo uma visão do conhecimento matemático como algo dinâmico e multifacetado. Quanto mais facilmente o aluno navega de um quadro para outros, mais consistentes são as suas competências matemáticas. Isto requer da escola a oferta de oportunidade ao aluno de tratar uma situação-problema em mais de um quadro de referência. Mais do que resolver a situação-problema em um quadro, a aprendizagem matemática implica tanto uma variação de quadros para a sua resolução quanto a capacidade de navegação de um quadro a outro."

Você se lembra de ter lido e estudado o trecho no primeiro módulo do Gestar II ? Que relação você pode observar entre o texto e as várias utilizações do Teorema de Pitagóras ou relações métricas na resolução da situação-problema? Foi possível articular diferentes quadros sobre o conceito?

Atividade 9

Na Atividade 3, você esteve empenhado em descobrir se a rampa da sua escola cumpre a exigência de ter inclinação de, no máximo, 8%.

Vamos descobrir juntos se a rampa abaixo, encontrada na entrada de uma biblioteca, cumpre a norma:



Atividade 10

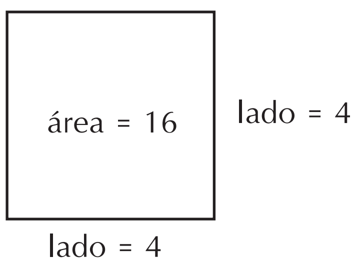
Professor(a), você deve ter observado nas Atividades que nem sempre foi possível determinar a raiz quadrada exata da medida desejada. Como podemos ajudar os nossos alunos a compreenderem a presença da raiz quadrada?

Quando falamos sobre raiz quadrada para os nossos alunos, na maioria das vezes, usamos como discurso a seguinte fala: "extrair a raiz de x é descobrir um número que, multiplicado por ele mesmo (ou seja, elevado ao quadrado), resulta em x". Nos esquecendo de que a utilização de representações geométricas pode facilitar o entendimento e clarear a noção de utilidade do tema radiciação. Ou seja, apresentando e verificando com a turma a idéia de que: a raiz quadrada de um número é a medida do lado de um quadrado cuja área é o próprio número.

$\text{lado}^2 = \text{área}$

$\text{lado} = \sqrt{\text{área}}$

$4 = \sqrt{16}$



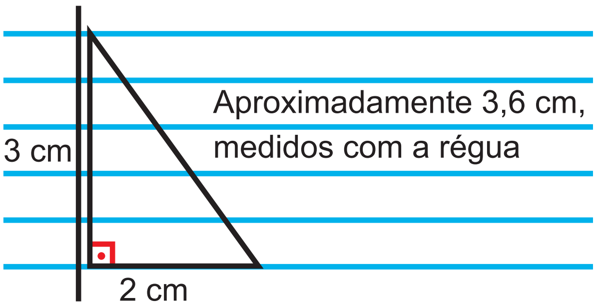
Podemos usar também o Teorema de Pitágoras.

Por exemplo, queremos encontrar a raiz quadrada de 13. Primeiro, pensamos em dois números cuja composição resultaria em 13, como 9 e 4. Em seguida, usamos o Teorema, que diz:

$$\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}^2 + \text{cateto}^2$$

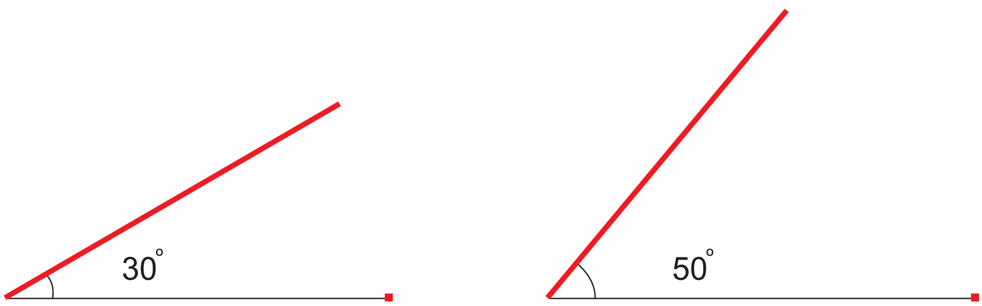
$$\text{hipotenusa} = \sqrt{\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2}$$

Basta construirmos um triângulo retângulo com catetos de 3 e 2 centímetros usando a margem e uma das linhas do caderno, que formam entre si um ângulo de 90 graus. Depois, mede-se a hipotenusa resultante, chegando-se ao valor aproximado da raiz. No caderno do aluno, ficaria assim:



Atividade 11

Veja o desenho abaixo e imagine que a linha vermelha seja uma rampa.



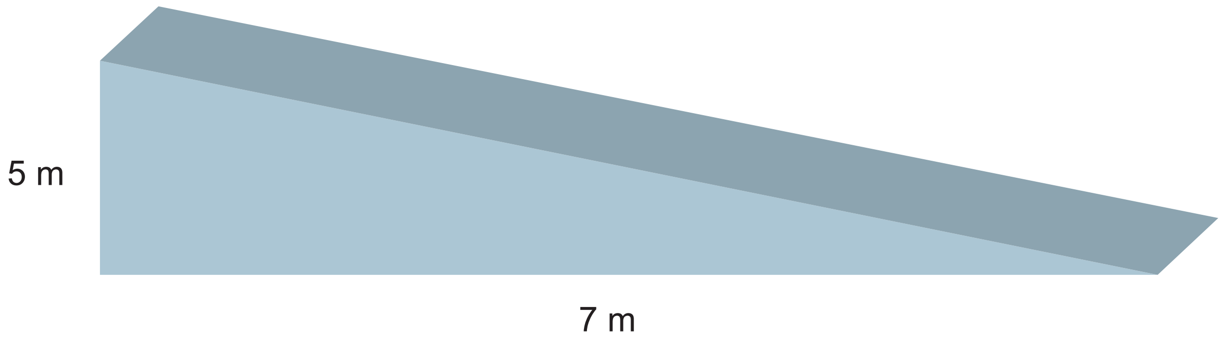
Situação 1 Situação 2

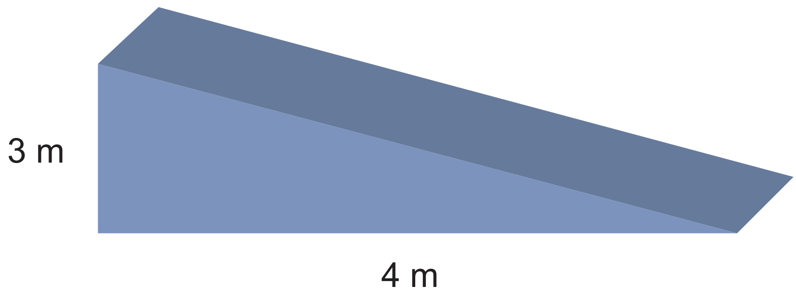
a) Em qual situação você julga encontrar maior dificuldade para subir?

---

b) A que fato você atribui essa dificuldade?

Vejamos agora se conseguimos descobrir que rampa é mais íngreme.





Como descobrir que rampa é mais íngreme se não conhecemos os valores dos ângulos?

Você tem alguma sugestão para resolvermos este problema?

Professor(a), você deve ter notado que devemos entender melhor qual a relação existente entre lados e ângulos de um triângulo retângulo. Para tanto, vamos precisar agir construindo triângulos e observando algumas relações.

Atividade 12

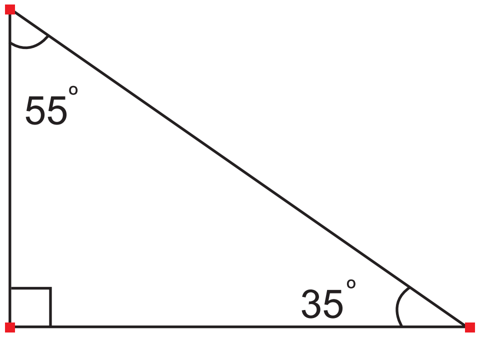
Para esta Atividade, você irá usar papel e os instrumentos de desenho.

Situação 1
Construa um triângulo retângulo em que um dos ângulos tenha 35º.

Qual é a medida do cateto oposto ao ângulo? ____________________

Qual é a medida da hipotenusa? ____________________

Qual é a razão entre a medida desse cateto e a medida da hipotenusa?



Situação 2

Construa outro triângulo retângulo em que um dos ângulos tenha 35^0, mas cujos lados sejam diferentes do primeiro triângulo.

Qual é a medida do cateto oposto ao ângulo? ______

Qual é a medida da hipotenusa? ______

Qual é a razão entre a medida desse cateto e a medida da hipotenusa?

______

Situação 3

Construa outro triângulo retângulo em que um dos ângulos tenha 35^0, mas cujos lados sejam diferentes tanto do primeiro quanto do segundo triângulo.

Qual é a medida do cateto oposto ao ângulo? ______

Qual é a medida da hipotenusa? ______

Qual é a razão entre a medida desse cateto e a medida da hipotenusa?

______

a) Após essas construções e comparações, o que você observou?

______

b) A essa razão constante damos o nome de:

______

Atividade 13

Situação 1

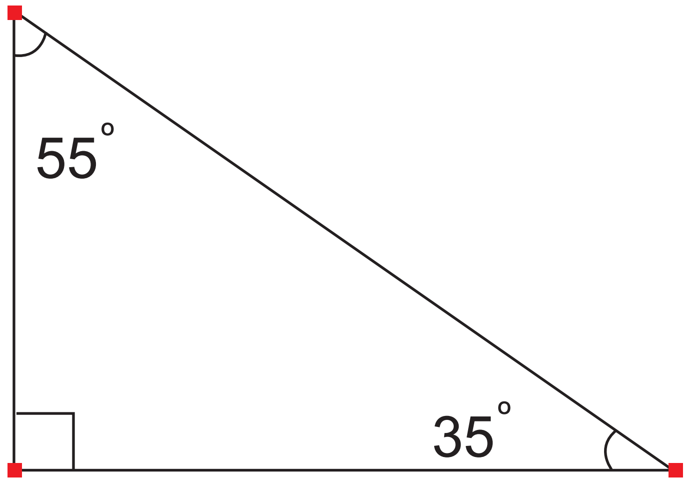
Construa um triângulo retângulo em que um dos ângulos tenha 35^0.

Qual é a medida do cateto adjacente ao ângulo? ______________________

Qual é a medida da hipotenusa? ______________________

Qual é a razão entre a medida desse cateto e a medida da hipotenusa?

____



Situação 2
Construa outro triângulo retângulo em que um dos ângulos tenha 35^0, mas cujos lados sejam diferentes do primeiro triângulo.

Qual é a medida do cateto adjacente ao ângulo? ______________________

Qual é a medida da hipotenusa? ______________________

Qual é a razão entre a medida desse cateto e a medida da hipotenusa?

____

Situação 3
Construa outro triângulo retângulo em que um dos ângulos tenha 35^0, mas cujos lados sejam diferentes tanto do primeiro quanto do segundo triângulo.

Qual é a medida do cateto adjacente ao ângulo? ______________________

Qual é a medida da hipotenusa? ______________________

Qual é a razão entre a medida desse cateto e a medida da hipotenusa?

____

a) Após essas construções e comparações, o que você observou?

____

____

____

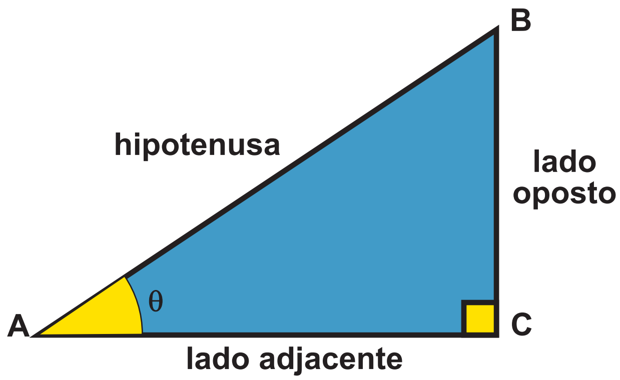
____

b) A essa razão constante damos o nome de:

____

Atividade 14

Desenvolva a mesma experiência feita nas Atividades 12 e 13 para a tangente.



em qualquer triângulo retângulo com ângulo θ,
como o do exemplo, as raízes trigonométricas são:

$$\text{sen } \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{lado oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

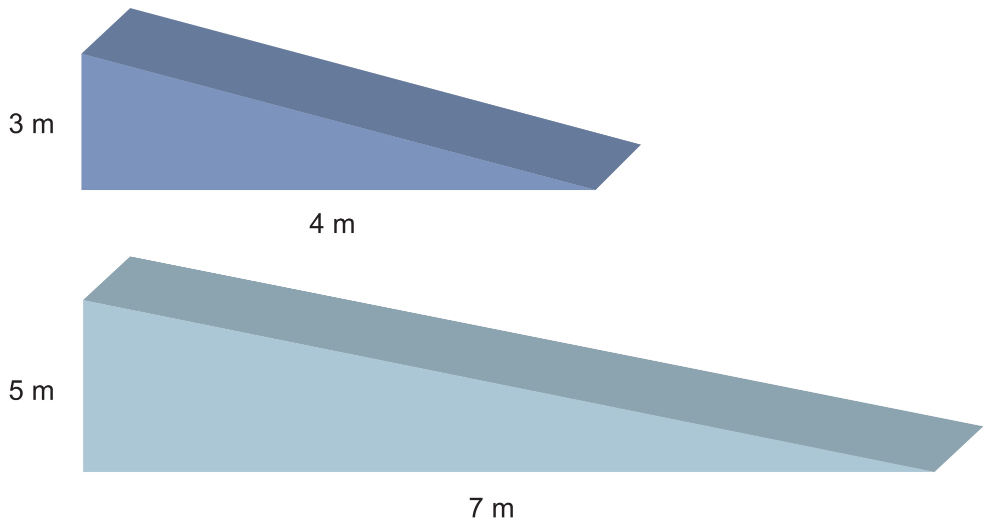
$$\cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{lado adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{lado oposto}}{\text{adjacente}}$$

Estes conjuntos de relações recebem o nome de razões trigonométricas.

Atividade 15

Agora conseguiremos resolver os problemas das duas rampas com facilidade. Qual rampa é mais íngreme?



Resumindo

Nesta Seção, você aprendeu a:

- Demonstrar e aplicar algumas relações métricas do triângulo retângulo, até mesmo o Teorema de Pitágoras.
- Deduzir algumas relações trigonométricas também no triângulo retângulo.
- Aplicar o cálculo de raiz quadrada a partir do Teorema de Pitágoras.

Seção 3

Transposição Didática – Trabalhando as relações métricas e trigonométricas do triângulo retângulo em sala de aula

Objetivo da seção

Ao longo desta Seção, esperamos que você possa conhecer e produzir situações didáticas adequadas ao nível de ensino em que atua, envolvendo:

- Outras formas de uso dos dados da situação-problema para o desenvolvimento de outros conceitos matemáticos em um currículo em rede.
- O desenvolvimento do tema relações métricas e trigonométricas em sala de aula.
- O conhecimento e a produção de materiais manipulativos para a construção de conceitos envolvendo relações trigonométricas.

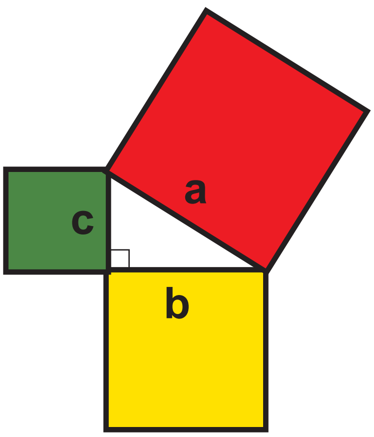
Atividade 16

Você viu, nesta Unidade, algumas demonstrações sobre o Teorema de Pitágoras. Que tal desenvolver outra demonstração?

Monte, no pátio da sua escola, um triângulo retângulo com ripas de madeira. Lembre-se: tem que ser um triângulo retângulo!

Peça para os seus alunos buscarem alguns destes materiais: palha de arroz em uma beneficiadora de arroz, ou retalhos de uma confecção, ou serragem de uma oficina de móveis, etc.

Nos lados do triângulo, faça um quadrado do tamanho de cada lado, conforme o desenho:



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Agora faça o seguinte: encha de palha de arroz (ou retalhos ou serragem) os quadrados que saem dos catetos. Porém, observe uma espessura fixa, ou seja, a altura deverá ser igual nos dois quadrados. Sugerimos que você use a própria altura da ripa como gabarito dessa medida.

Depois, junte a quantidade de palha usada para o preenchimento dos dois quadrados e transporte-a para o quadrado grande (o da hipotenusa). O que acontecerá? Lembre-se: deve ser mantida a mesma altura.

Esta sugestão de Atividade pode lhe dar bastante trabalho, mas, se achar pertinente para os seus alunos, vale a pena fazer. Se não, apenas vamos pensar um pouco sobre ela:

Na sua opinião, por que cada quadrado (ou prisma de base quadrada) deve ter a mesma altura nos três casos?

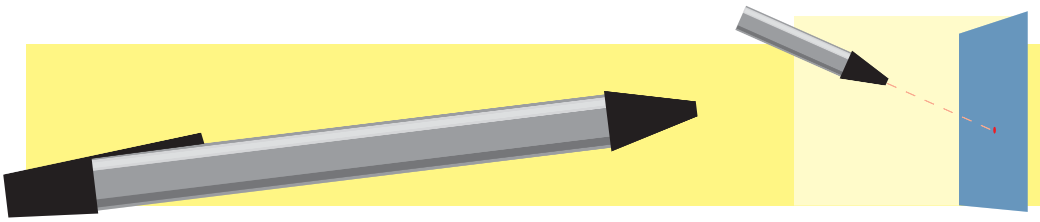
Será que é correto afirmar que o Teorema de Pitágoras poderia ser escrito como: a soma dos “conteúdos” dos quadrados sobre os catetos preenchem exatamente o quadrado sobre a hipotenusa?

Será isto uma demonstração ou uma prova empírica?

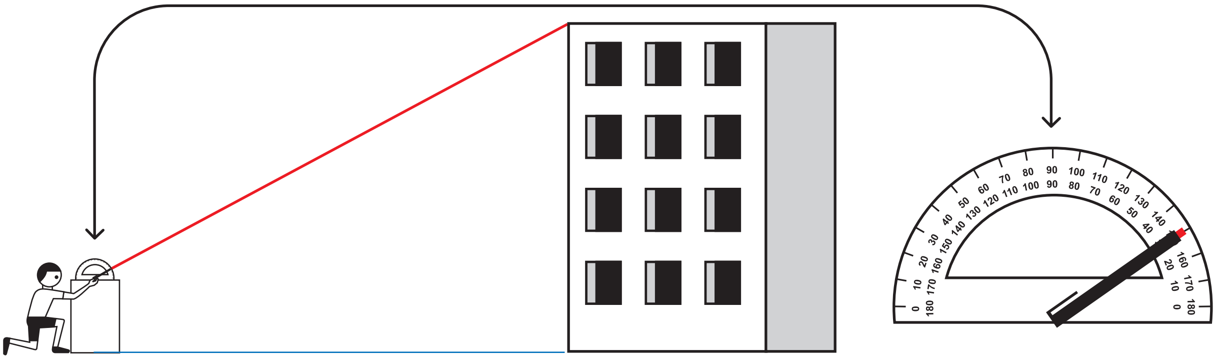
Atividade 17

Ao visitarmos uma feira de ciências, encontramos um instrumento, feito por um aluno, muitíssimo interessante para medir a altura de prédios, chamado por ele de “transferidor a laser”. É claro que o nome pode assustar um pouco, mas é muito simples de fazê-lo. Que tal você, também, construí-lo com os seus alunos?

É muito simples! Basta você pedir para os alunos levarem um transferidor de 180° ou 360°, desses que se compra em qualquer papelaria. Adquira uma “caneta” que é vendida em algumas feiras ou lojas de importados, do tipo que, quando clicada, produz uma luz vermelha. Ela não custa muito e não é de difícil aquisição.



Assim, o aluno deverá usar o transferidor da seguinte maneira:



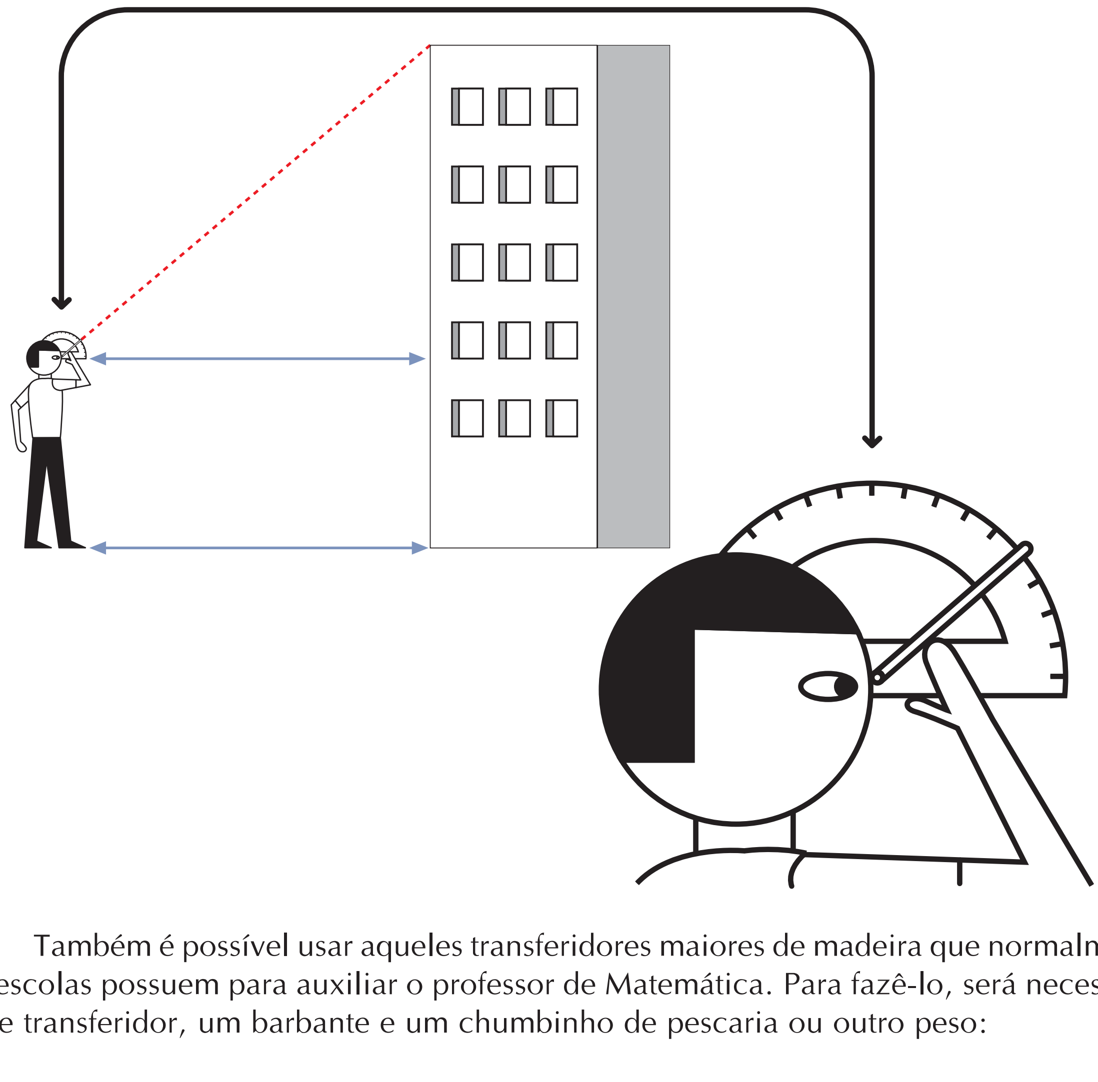
- Coloque o transferidor sobre uma caixa, caixote ou até mesmo uma carteira. Peça para medirem a altura desta caixa.
- Coloque a caneta no centro do transferidor, como mostra a figura, no ponto zero. Em seguida, gire-a, a partir do centro. Use o raio de luz para mirar no alto do prédio.
- Determine, no transferidor, quantos graus a caneta foi girada para mirar na altura.

Com o ângulo determinado, use uma fita métrica ou trena para determinar as distâncias do caixote e do prédio até o aluno e, por fim, uma tabela com as razões trigonométricas em mãos ou até mesmo uma calculadora que permita determinar essas constantes. Peça para os alunos medirem algumas alturas, tais como: o prédio da escola, o prédio da prefeitura, o mastro da escola, a caixa d´água de sua casa e da escola, etc.

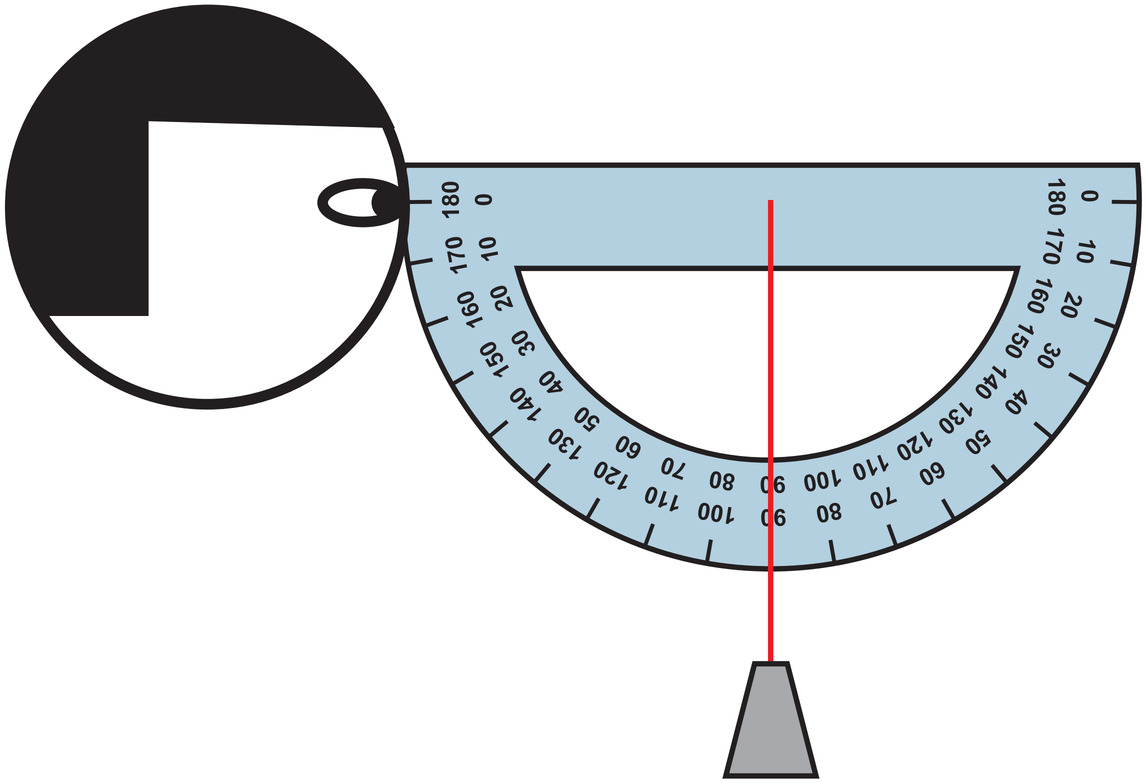
Não se esqueça, professor (a), que a altura do prédio deve ser somada com a altura do objeto que foi usado para apoiar o transferidor. Não se esqueça disto!

Também é possível fazer esta Atividade com outros instrumentos. É um pouco mais complicado, mas poderá gerar o mesmo resultado: os alunos mobilizados cognitiva e fisicamente com uma atividade matemática.

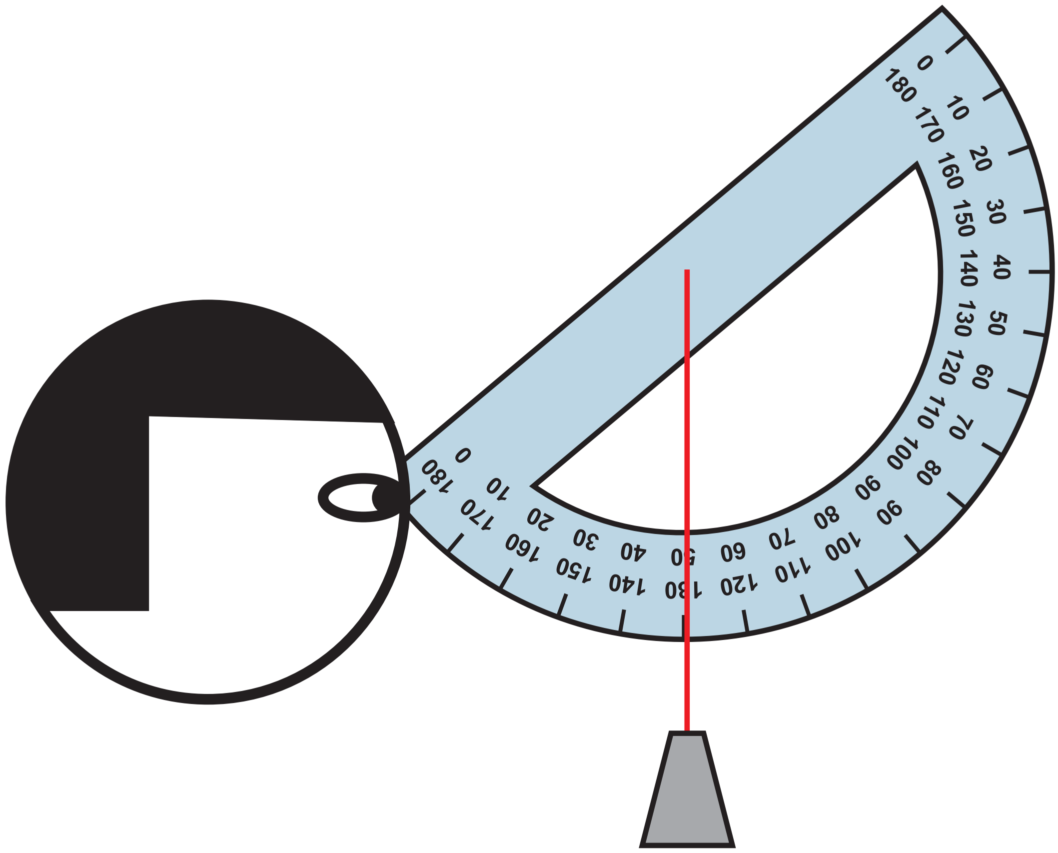
Você poderá usar um canudinho de refrigerante para mirar no ponto mais alto do prédio. Veja o desenho:



Também é possível usar aqueles transferidores maiores de madeira que normalmente as escolas possuem para auxiliar o professor de Matemática. Para fazê-lo, será necessário esse transferidor, um barbante e um chumbinho de pescaria ou outro peso:



O aluno deverá posicionar o seu olho, na horizontal, no ponto 0°, inicialmente. Depois, deverá girar o transferidor até mirar o 0° no ponto mais alto do prédio.



Veja que o ângulo não é determinado automaticamente. Que cálculo o aluno deverá fazer para determinar o ângulo?

Atividade 18

Agora que você realizou a Atividade com os seus alunos, registre as maiores dificuldades que eles encontraram:

- Quanto a seus conceitos, tais como: medidas de ângulos e relações trigonométricas.
- Quanto aos procedimentos para realizarem a Atividade em relação à coordenação motora necessária, à mobilização do grupo, à predisposição para a Atividade e à montagem do transferidor.
- O que você mudaria na proposta, caso venha a realizá-la com outro grupo de alunos?
- Para que série ela é mais adequada e por quê?
- Que conteúdos matemáticos podem ser explorados, além das relações trigonométricas?
- Que tipo de atividade poderia se seguir a esta para dar continuidade à proposta?

Resumindo

Nesta Seção, você teve a oportunidade de:

a) Analisar como alguns dados podem ser utilizados no desenvolvimento de uma situação-problema favorecendo a formação efetiva de um currículo em rede.
b) Utilizar atividades que envolvam o aluno cognitiva e fisicamente no estudo das relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo.

Leituras sugeridas

Boletim de Educação Matemática (BOLEMA) 18, ano 15, 2002.

É uma edição do periódico, que discute em vários artigos sobre a demonstração matemática. A revista é publicada semestralmente pela UNESP de Rio Claro – SP. Mais informações pelo site: http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/bolema/.

Bibliografia

GARNICA, A. V. M. *Fascínio da Técnica, Declínio da Crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática*. V. 4, n. 5, p. 7-28. Campinas: Zetetike, CEMPEM-UNICAMP, 1996.

GARNICA, A. V. M. *É necessário ser preciso? É preciso ser exato? Um estudo sobre argumentação matemática ou uma investigação sobre a possibilidade de investigação*. In: Helena Noronha Cury (Org.). Formação de Professores de Matemática: uma visão multifacetada. p. 49-87. Porto Alegre, 2001.

Texto de referência

Demonstrações Rigorosas em Matemática

Celso de Oliveira Faria

No estudo deste TP, vimos vários exemplos de possíveis demonstrações para o Teorema de Pitágoras. Algumas delas podem ser consideradas apenas demonstrações empíricas e outras matemáticas. Isto nos leva a uma importante discussão na Educação Matemática sobre a prova rigorosa em Matemática.

Um dos pesquisadores que tem estudado essa questão é o Dr. Antonio Vicente Marafioti Garnica, e vamos trazer, neste Texto de Referência, algumas das suas idéias sobre o assunto em dois artigos[1].

Uma das primeiras coisas que se precisa compreender sobre o tema é sobre o que seja prova ou demonstração. Aquele termo que usamos e ouvimos a todo momento nas aulas de um curso de Matemática.

No léxico, tanto quanto no jargão matemático, prova e demonstração são tidas como sinônimos: é o que atesta a veracidade ou autenticidade, a garantia, o testemunho, o processo de verificação da exatidão de cálculos ou raciocínios, a dedução que mantém a verdade de sua conclusão apoiando-se em premissas admitidas como verdadeiras. A lógica nos dá o instrumental para que, dentro da Matemática concebida como ciência formal (acadêmica), possamos definir com mais clareza a noção de demonstração.

Na literatura específica em Educação Matemática, prova e demonstração vêm sempre adjetivadas; são, assim, "rigorosas". A necessidade ou não de uma tal adjetivação dependerá, em muito, dos aspectos que focamos: para uns – principalmente para os matemáticos chamados "puros"–, uma prova é, já, prova rigorosa. Para outros, o rigor se estabelece entre várias provas, similares e estabelecidas por Euclides em "Os Elementos".

Para entendermos um pouco melhor o tema, é interessante darmos uma olhada na Matemática da qual somos de alguma forma herdeiros. Legado presente nos programas do curso de Matemática e nas propostas de muitos livros didáticos da escola: a Matemática Platônica.

Veja quais são os princípios e as crenças da Matemática Platônica:

- existem certas entidades matemáticas ideais;
- existem certos modos de dedução;
- se uma afirmação matemática faz sentido, então ela pode ser provada como verdadeira ou falsa;
- a Matemática existe separada dos seres que a fazem.

1. GARNICA, A. V. M. *Fascínio da Técnica, Declínio da Crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática*. V. 4, n. 5, p. 7-28. Campinas: Zetetike, CEMPEM-UNICAMP, 1996.

GARNICA, A. V. M. *É necessário ser preciso? É preciso ser exato? Um estudo sobre argumentação matemática ou uma investigação sobre a possibilidade de investigação*. In: Helena Noronha Cury (Org.). Formação de Professores de Matemática: uma visão multifacetada. p. 49-87. Porto Alegre, 2001.

E mesmo que tal concepção possa ser criticada quando procuramos um ensino de Matemática contextualizado e relacionado com o cotidiano, não podemos negar que ela está impregnada na forma da Matemática atual.

Tal concepção também esteve presente no que foi chamado de Matemática Moderna, pois considerava-se a abordagem dedutiva e formal como o pilar desta ciência. O pesquisador Morris Kline, ao discutir sobre essa afirmação, confirma que isso é uma consideração equivocada que (apoiado em Félix Klein) ele credita aos filósofos e não aos matemáticos.

Garnica comenta que a concepção de demonstração presente nos Institutos de Matemática, tidos como matemáticos puros, também traz algumas características interessantes. Afinal, nem sempre é apenas a prova lógica que garante a veracidade do tema e sim a combinação entre:

- os conceitos nele incorporados;
- seus antecedentes lógicos e suas implicações, e nada existe que sugira que ele não seja verdadeiro;
- o teorema é significativo o suficiente para ter implicações em um ou mais ramos da Matemática (e, então, é importante e útil o suficiente para garantir estudo e análise detalhados);
- o teorema é consistente com o corpo dos resultados matemáticos aceitos;
- o autor tem uma reputação impecável como expert na área à qual se refere o teorema;
- existe um argumento matemático convincente (rigoroso ou não) para ele, de um tipo que já tenha sido encontrado antes.

Assim, tais considerações nos apontam que a prova ou demonstração está intimamente ligada aos aspectos sociais e culturais. A prova rigorosa é engendrada, executada, verificada e, finalmente, validada por critérios nitidamente sociais, afirmação esta que rompe com os aspectos do formalismo que deveriam caracterizá-la.

E o que isso nos aponta para a sala de aula? Aponta que devemos assumir que existem diferentes formas de argumentação no âmbito do conhecimento matemático. Ou seja, ele vai depender do estabelecimento de suas justificações e aplicações.

Em uma Matemática formalizada que, na prática, segundo a literatura disponível, caracteriza-se como uma Matemática Platônica, o modo de argumentação, por excelência, é a prova rigorosa ou a demonstração formal, envolta em paradoxos, mas com o objetivo de firmar, definitivamente, a veracidade das afirmações matemáticas.

No âmbito da sala de aula, a geração do conhecimento matemático deve ser relativizada. As argumentações podem estar primadas no que Garnica chama de demonstrações semiformais. Pautam-se, indiscutivelmente, no contexto sócio-cultural-político e no domínio da linguagem natural. Confundem-se as facetas do operacionalizável e do não operacionalizável nos objetos "matemáticos". Na verdade, os chamados objetos matemáticos, no caso do domínio semiformal, são, também eles, intuitivos, ligados à concretude das experiências cotidinas e, portanto, desligados da "des-materialização" que, classicamente, caracterizaria tais objetos.

E qualquer projeto ou estudo que se pretenda um motivador de aprendizagem matemática operando pela ligação com a vida cotidiana deve ter, em seu panorama, essa "incompatibilidade" com a liguagem estilizada, artificial, matemática. Há um limite para a formalização se a proposta tiver o princípio da "realidade" como fundante.

As argumentações semiformais são essencialmente indutivas. Originam-se no conhecimento cotidiano dos objetos e suas relações. Parte-se do particular e procura a sua sistematização mais abrangente. Já o raciocínio dedutivo é o que caracteriza a produção científica da Matemática: por meio de enunciados globais, as particularidades são fatalmente explicadas. A criação matemática, entretanto, parece orbitar em um espaço intermediário entre indução e dedução.

Nesta linha de pensamento, assumir o método dedutivo como modelo pedagógico é uma distorção, segundo afirma Morris Kline.

Primeiro ponto: a Matemática é uma atividade cujo primado é da atividade criativa e pede por imaginação, intuição geométrica, experimentação, adivinhação judiciosa, tentativa e erro, uso de analogias das mais variadas, enganos e trapalhadas.

Mesmo quando um matemático está convencido de que seu resultado é correto, há muito para ser criado até se encontrar a prova disso. Como Gauss afirmou: "Tenho meu resultado, mas ainda não sei como obtê-lo".

Todo matemático sabe que trabalho árduo (...) é necessário, e o sentido da realização deriva do esforço criativo. Construir a forma dedutiva final é uma tarefa chata. A lógica não descobre nada, nem o enunciado de um teorema, nem a sua prova, nem mesmo a construção de formulações axiomáticas de resultados já conhecidos (...).

Há um outro motivo pelo qual a versão lógica é uma distorção. Os conceitos, teoremas e provas emergem do mundo real. A organização lógica é posterior.

E mostra alguns exemplos:

De fato, se for pedido a um aluno realmente inteligente que ele cite a lei comutativa para justificar que, digamos, 3x4 = 4x3, ele muito bem pode perguntar: "Por que a lei comutativa é correta?". De fato, aceitamos a lei comutativa porque a nossa experiência com grupos de objetos nos diz que 3x4 = 4x3 e não o contrário.

A insistência na abordagem dedutiva engana o aluno ainda de outro modo. Ele é levado a acreditar que a Matemática é criada por gênios que começaram pelos axiomas e raciocinaram diretamente desses axiomas para os teoremas.

O aluno sente-se humilhado e desconcertado, mas o professor, prestativo, está totalmente preparado para demonstrar-se como um gênio em ação. Talvez a maioria de nós não necessite ouvir como a Matemática é criada, mas parece ser útil atentar para as palavras de Félix Klein:

"Você pode ouvir de não-matemáticos, especialmente dos filósofos, que a Matemática consiste exclusivamente em traçar conclusões a partir de premissas claramente enunciadas; e que, nesse processo, não faz diferença o que essas premissas significam, se são verdadeiras ou falsas, desde que elas não se contradigam. Mas alguém que tenha produzido Matemática falará algo bem diferente. De fato, aquelas pessoas estão pensando somente na forma cristalizada na qual as teorias matemáticas são apresentadas ao final de um processo. O investigador em Matemática ou em outra ciência, entretanto, não trabalha nesse rigoroso esquema dedutivo. Ao contrário, ele faz uso essencial de sua imaginação e procede indutivamente, apoiado por expedientes heurísticos. Pode-se dar numerosos exemplos de matemáticos que descobriram teoremas da maior importância que eles mesmos não puderam provar. Poderíamos, então, nos recusar a reconhecer isso como uma enorme realização e, em referência ao que foi dito acima, insistir que isso não é matemática? Nenhum julgamento de valor pode negar que o trabalho indutivo da pessoa que primeiro anuncia um teorema é, ao menos, tão valoroso quanto o trabalho dedutivo daquele que primeiro o provou. Pois ambos são igualmente necessários, e a descoberta é a pressuposição de sua conclusão posterior".

Em síntese, é preciso pensar na demonstração no contexto sócio-cultural da sala de aula. Até mesmo pensar em uma flexibilidade a partir do próprio desenvolvimento cognitivo do aluno.

Neste texto, queremos mostrar a você, professor, que a demonstração também não é uma coisa fechada e hermética. É preciso pensá-la de forma dinâmica e compreendê-la. Assim nos permite vislumbrar como funciona o discurso matemático e como são engendradas as concepções que permeiam a sala de aula de Matemática, sendo, assim, tema importante à Educação Matemática.

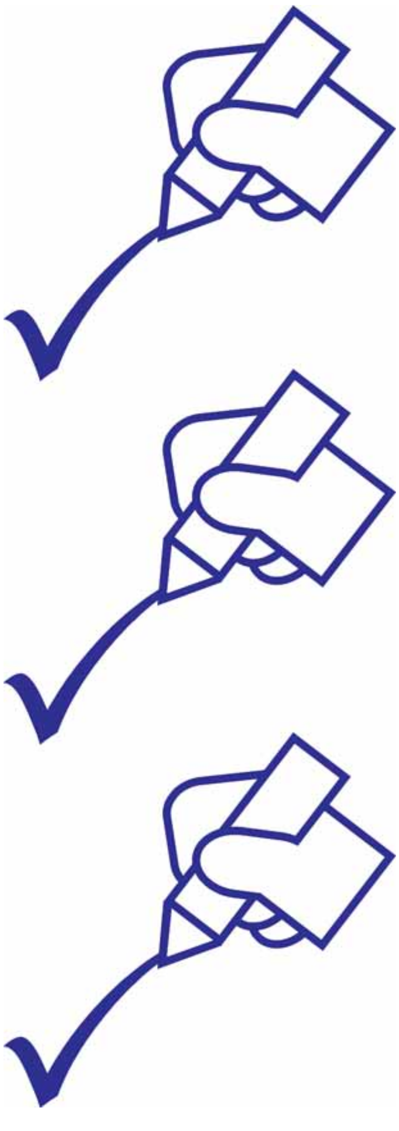
E podemos colocar mais "lenha na fogueira" dessa discussão quando ainda pensamos nas demonstrações feitas nos programas computacionais. Seriam elas lógicas para o nosso contexto atual, afinal, a demonstração feita pela lógica platônica era possível, pois o homem só tinha lápis e papel como mídia? Agora, com uma nova mídia, a computacional, podemos ter uma prova também lógica com essas tecnologias? Isto é uma questão polêmica, não acha? E não tenha dúvida, ainda sem respostas.

O que deve ficar claro das idéias de Garnica é que a prova rigorosa é engendrada, executada, verificada e, finalmente, validada por processos nitidamente sociais, afirmação esta que, de certa forma, rompe com alguns dos aspectos do formalismo que deveriam caracterizá-la.

Atividade

Analisando as Atividades que você realizou em sala de aula e as propostas durante este TP, em relação aos recursos didáticos preparados, você considera como exemplos de demonstrações para o contexto de sala de aula? Justifique.

Solução das atividades



Solução das atividades

Atividade 5

a) Triângulo retângulo.
b) Um dos ângulos é reto.

Atividade 6, 7 e 8

Resposta pessoal.

Atividade 9

A rampa segue as normas, pois a declividade é de 5%.

Atividade 10

Resposta pessoal.

Atividade 11

a) Situação 2.

b) O ângulo entre a rampa e o deslocamento horizontal é de 50°.

Atividade 12

Situação 1 – Resposta Pessoal.
Situação 2 – Resposta Pessoal.
Situação 3 – Resposta Pessoal.
a) As razões entre o cateto oposto e a hipotenusa são constantes.
b) Seno.

Atividade 13

Situação 1 – Resposta Pessoal.
Situação 2 – Resposta Pessoal.
Situação 3 – Resposta Pessoal.
a) As razões entre o cateto adjacente e a hipotenusa são constantes.
b) Cosseno.

Atividade 14

Resposta pessoal.

Atividade 15

Na primeira temos que:
tg (ângulo do triângulo 1) = 3/4.
Na segunda,
tg (ângulo do triângulo 2) = 5/7.
Como 3/4 é maior do que 5/7, concluímos que a primeira subida é mais íngreme.

PARTE II

TEORIA E PRÁTICA 4

Socializando o seu conhecimento e experiências de sala de aula

Socializando o seu conhecimento e experiências de sala de aula – unidade 14

Como sempre, nesta parte, você desenvolve três itens, que são:

- Rever e sintetizar por escrito as principais idéias tratadas na Unidade.
- Refletir sobre os desafios propostos na transposição didática, registrando-os por escrito.
- Elaborar uma produção escrita a ser entregue ao formador na próxima Oficina, contendo produções dos seus alunos.

Para tanto, você deverá preparar as três tarefas a seguir, para serem levadas à Oficina e socializadas entre os colegas:

Tarefa 1

Faça uma síntese por escrito dos principais conceitos trabalhados na Unidade. Esse documento será para seu uso pessoal durante a Oficina.

Tarefa 2

Organize uma lista contendo: a) o ponto mais interessante; e b) duas das maiores dificuldades encontradas na realização do trabalho da proposta de transposição com seus alunos. Esse documento será um apoio seu para participação na Oficina no que se refere à parte da transposição didática.

Tarefa 3

a) Escolha uma das situações-problema de 1 a 4, propostas para os alunos na Seção 3, e desenvolva-a junto aos seus alunos.

b) Organize, registre e catalogue em uma pasta as produções mais significativas de alguns dos alunos, obtidas no desenvolvimento da parte "a". Se puder, leve cartazes ou materiais produzidos por eles. No caso de terem realizado a situação-problema 1, leve uma descrição detalhada de como foi o modelo produzido e de como ficaram as dimensões e distâncias.

c) Escreva aproximadamente 10 linhas sobre a importância, para a aprendizagem matemática de seus alunos, desta atividade desenvolvida; comente fatos ocorridos em sala e outros observados na produção dos alunos.

Ao final da Oficina, entregue ao seu formador o material dos itens "b" e "c" da Tarefa 3.

Socializando o seu conhecimento e experiências de sala de aula – unidade 16

Este momento final tem por objetivo: 1) rever e sintetizar por escrito as principais idéias tratadas na Unidade; 2) refletir sobre os desafios propostos na Transposição Didática, registrando-os por escrito; e 3) elaborar uma produção escrita a ser entregue ao formador na próxima oficina, contendo produções dos seus alunos.

Para tanto, três tarefas devem ser preparadas para serem levadas à oficina e socializadas entre os colegas:

Tarefa 1

Uma síntese por escrito dos principais conceitos matemáticos trabalhados na Unidade. Este documento será para o seu uso pessoal durante a oficina.

Tarefa 2

Uma listagem contendo: a) o ponto mais interessante; b) duas das maiores dificuldades na realização do trabalho da proposta de transposição com os seus alunos. Este documento será um apoio seu para a discussão da Transposição Didática na oficina. Esta lista é de uso pessoal para servir de apoio na socialização das experiências realizadas.

Tarefa 3

Esta tarefa é composta por três produções:

a) Aplique a pelo menos uma turma a Atividade 17. Nesta Atividade, prevê-se a realização de ações que foram iniciadas em Atividades anteriores. Não se esqueça de realizá-las inicialmente. Você pode fazer as adaptações que julgar necessárias para o bom êxito da Atividade atendendo às necessidades do grupo.

b) Para criar uma memória da sua produção, para o seu próprio uso no futuro, a começar pela oficina: organize, registre e catalogue em uma pasta (ou similar) as produções mais significativas de alguns de seus alunos.

c) Procure escrever, com as suas próprias palavras, aproximadamente dez linhas sobre a importância desta Atividade para a aprendizagem matemática de seus alunos; comente fatos ocorridos em sala de aula e outros observados na produção dos alunos. Use a Atividade 18 para auxiliá-lo na elaboração do texto. Esse material deve ser entregue ao final da oficina.

PARTE III

TEORIA E PRÁTICA 4

SESSÃO COLETIVA

Sessão Coletiva 7
Unidade 13

A Unidade 13 do caderno de Teoria e Prática tem como temática a questão da formação do cidadão/consumidor crítico, participativo e autônomo, a partir do qual podemos explorar situações envolvendo medidas, o Sistema Internacional de Unidades, conceitos de números corretos, números duvidosos e números significativos, com suas representações e procedimentos para operá-los, conceito e representação dos números racionais, atrelados à noção de medidas, a idéia de erros, de arredondamentos e médias de tendência central. Esses conteúdos têm como pano de fundo a necessidade de uma tomada de decisão.

Prevista para uma duração aproximada de 4 horas, essa oficina tem seu tempo organizado em três grandes momentos (com previsão de uma folga de 10 minutos para um intervalo mais 10 minutos de reserva técnica, caso seja necessário), tendo por objetivos:

1. Propiciar uma troca entre os cursistas sobre as produções realizadas na última unidade motivadas tanto pelas produções feitas a partir da terceira tarefa do **Socializando o seu conhecimento e experiências de sala de aula**, quando o professor deve ter desenvolvido a atividade 14 da seção 3 (Transposição Didática), da unidade 12, sistematizando alguns resultados, e trazido para a oficina. Favorecer uma oportunidade de debate e pôr em prática trocas acerca das transposições didáticas realizadas a partir da leitura do TP e de experiências em sala de aula. Deve ser um momento de discussão do currículo, dificuldades e experiências bem-sucedidas, o desafio da avaliação, etc. (1h 20 min)

2. Constituir-se em momento de aprofundamento, sistematização e debate da produção matemática baseada nas propostas da Unidade 13 do TP 4, a partir da resolução de uma pequena situação-problema semelhante à apresentada na unidade. (1h 50min)

3. Propor uma atividade que permita ter uma primeira idéia da proposta contida na próxima unidade. (30 min)

A Sessão Coletiva: Oficina será composta pelos seguintes momentos:

Parte A (80 minutos)

Ao final da seção 3, de Transposição Didática, foram propostas algumas atividades para o professor realizar em sala de aula, com registro e sistematização de produções de alguns alunos, mais precisamente no **Socializando o seu conhecimento e experiências de sala de aula**. No início desta Oficina, propomos que cada professor tenha a oportunidade de socializar no grupo os produtos obtidos da experiência realizada a partir da atividade 14 proposta na seção 3, da Unidade 12 do TP3.

Atividade 1 (5 min)

Reeleitura da tarefa 3 do **Socializando o seu conhecimento e experiências de sala de aula:**

Primeiramente, aplique a pelo menos uma turma de alunos a **atividade 14**. Você pode fazer as adaptações que julgar necessárias para o bom êxito da atividade atendendo às necessidades do grupo.

Depois, como segunda produção, para criar uma memória de suas ações, para seu próprio uso futuro, começando pela oficina: organize, registre e catalogue em uma pasta (ou coisa similar) as produções mais significativas de alguns de seus alunos.

Finalmente, procure escrever com suas próprias palavras aproximadamente 10 linhas sobre a importância dessa atividade para a aprendizagem matemática de seus alunos; comente fatos ocorridos em sala de aula e outros observados na produção dos alunos. Esse é seu terceiro produto da terceira tarefa: material que deve ser entregue ao seu formador ao final da oficina.

Atividade 2 (5 min)

Reeleitura da atividade 14 da Seção 3 da qual o Socializando faz referência:

Atividade 14

A estória:

Um dia aparece em sua escola uma visita um tanto estranha: o dono de uma empresa famosa de computadores. Ele vem propor a você um trabalho.

O mais importante é que, antes de ser aceito para fazer o trabalho, você tem que escolher entre duas formas de pagamento:

a) um centavo no primeiro dia, dois centavos no segundo dia, dobrando seu salário a cada dia dali para frente durante 30 dias;

b) ou R$1.000.000,00 em um mês de trabalho. (Um milhão de reais em 30 dias!)

Qual das duas formas de pagamento você escolheria? Parece não haver dúvida! Um milhão de reais em comparação a essa estória de centavos...

Mas será que não estamos sendo precipitados?

Atividade 3 (40 min)

Cada professor apresenta no grupo os resultados dos trabalhos trazidos à Oficina procurando dar ênfase:

a) Aos tipos de gráficos produzidos pelos alunos, buscando relatar as dificuldades para sua construção e pontos mais interessantes da atividade.
b) À socialização do pequeno texto produzido pelo professor acerca deste tipo de atividade (o mesmo que deverá ser entregue ao final da Oficina ao coordenador).
c) A escolha dos pontos mais relevantes das exposições para serem levados ao grande grupo.

Atividade 4 (30 min)

Exposição dos pontos mais relevantes de cada grupo com debate acerca dos fatos ocorridos em sala de aula e sobre a produção dos alunos e as adaptações realizadas pelo professor.

Parte B (110 minutos)

Este momento é destinado à realização de atividades voltadas à tomada de decisão de uma compra a prazo (organizadas em grupos de 4 professores cada).

Imaginemos a seguinte situação hipotética:

Um professor resolve comprar um eletrodoméstico que custa a vista R$ 1.250,00, entretanto a loja exige uma entrada de R$ 350,00 financiando o restante em 6 vezes, com juros mensais de acordo com a tabela abaixo:

Entrada Mínima	350,00
Prazo (meses)	6
Valor Financiado	1.250,00
Prestação Mensal	159,99
Taxa Mensal	1,78
Taxa Anual	23,58

Atividade 5 (10 min)

Nossa intenção é analisar a melhor forma de aquisição do eletrodoméstico. O custo deste produto, a prazo, deve ser obtido segundo as informações do quadro acima. Qual a porcentagem total cobrada quando feita a compra em prestações?

Outra opção é fazermos uma aplicação mensalmente, investindo, mês a mês, o valor da prestação do eletrodoméstico, para ao final de seis meses o adquirirmos. Consideremos que a remuneração mensal do investimento financeiro seja de 1,12%.

Atividade 6 (30 min)

a) Calcule o valor a ser resgatado ao final de seis meses, sabendo que inicialmente serão aplicados o valor da entrada, e, mês a mês, aplicado o valor das parcelas.

Data	Valor aplicado	Juros	Valor dos juros	Saldo
05 de março	350,00	1,12%	3,92	350,00 + 3,92
05 de abril	353,92 + 159,99	1,12%		
05 de maio		1,12%		
05 de junho		1,12%		
05 de julho		1,12%		
05 de agosto		1,12%		
05 de setembro		1,12%		

Atividade 7 (30 min)

a) Sabendo que ao final de 6 meses, esse produto sofre um aumento de 5% em relação ao preço à vista, qual vai ser o novo preço no momento da sua aquisição daqui a 6 meses?

b) Esse valor é maior ou menor do que o valor resgatado? Quanto?

c) Valeu ou não esperar 6 meses para a aquisição desse produto? Qual a sua decisão? Qual a opinião dos demais membros do grupo? Quais os pontos de convergência ou de divergência?

d) Elabore uma **seqüência didática** com seu grupo adequando essa situação aos alunos de 6ª série. Procure melhorar a proposta realizada na atividade 14, seção 3, desta unidade.

Atividade 8 (40 min)

No grande grupo, apresentação das propostas de seqüência didática.

Parte C (30 minutos)

Conversando sobre a próxima unidade

Você já pensou nas distâncias envolvidas no sistema solar? Ou nas dimensões das moléculas que só podem ser observadas por microscópio? E no tempo histórico vivido pela humanidade ou pelos seres vivos em nosso planeta?

Já ouviu falar em prefixos decimais? E em nanotecnologia?

Todos esses serão temas tratados na próxima unidade. Por um lado, eles visam integrar os seus conhecimentos, e, por outro, serão uma oportunidade para se estudar a questão da notação científica em matemática.

Na seção 1, você fará uma grande viagem no tempo e no espaço terrestre, voltando aos primórdios de nossa civilização. Depois, voltando ao tempo atual, terá oportunidade de ampliar seu espaço para além do nosso planeta, e enfrentará a situação-problema de planejar um modelo do sistema solar. Um bom momento para interagir com o professor de geografia. Para pensar um pouco, faça a atividade seguinte.

Atividade 9

Sabemos que a distância da Terra ao Sol é de, aproximadamente, 150 milhões de quilômetros.

a) Escreva o número que representa essa distância, com todos os zeros correspondentes.

b) Escreva essa distância como o produto de 1,5 por uma potência de 10.

Na verdade, trabalhar com todos os zeros dificulta a escrita e os cálculos, por isso costuma-se usar as potências de 10, em uma forma que é chamada *notação científica*.

Na seção 2, essa notação científica será introduzida e explorada, tanto para grandes como para pequenos números (potências de 10 com expoentes negativos). Você conhecerá também o que são *prefixos decimais* e o que é um ramo novo da ciência e da tecnologia, denominado *nanotecnologia*.

Na seção 3, há sugestões que, seguramente, irão empolgar os seus alunos. Uma é fazer, concretamente, um modelo do sistema solar... até onde for possível. E que tal levá-los a resolver problemas sobre viagens galácticas? Afinal, é preciso lembrar que eles vêem filmes sobre isso, e que as cabeças deles estão envolvidas com fatos muito à frente do nosso tempo. Então, por que não fazer com que o conhecimento escolar contemple esses interesses?

São esses temas que estão esperando por sua leitura. Mãos (e olhos) à obra!

O momento em questão tem por objetivo introduzir o professor na temática e no conteúdo matemático a serem tratados na próxima unidade deste caderno de Teoria e Prática.

Sessão Coletiva 8
Unidade 15

Formador, você deve levar para esta sessão uma fita métrica, ou um metro de pedreiro, ou uma trena.

A Unidade 15 do caderno de Teoria e Prática 4 centrou-se na questão da água doce como um bem que se torna cada vez mais escasso para a humanidade. Ela propiciou a exploração de situações envolvendo proporções numéricas associadas a cálculos de gastos, proporções de segmentos (associadas a reservatórios), Teorema de Tales, triângulos semelhantes.

A duração prevista para esta sessão é de aproximadamente quatro horas, incluindo um intervalo de dez minutos e uma reserva técnica de dez minutos. Ela deve se desenvolver em três grandes momentos, conforme apresentados a seguir.

Parte A (80 minutos)

Ao final da Seção 3, de Transposição Didática, em Socializando o seu conhecimento e experiências em sala de aula, foi proposto, na Unidade 14, que o professor escolhesse uma situação-problema e a desenvolvesse em sala de aula, com registro e sistematização de produções de alguns alunos. Nesta parte da sessão coletiva, cada professor deve ter a oportunidade de socializar no grupo o relato e os produtos obtidos na experiência realizada.

Devem ser sorteados ou convidados alguns cursistas para começarem os relatos, de preferência que tenham aplicado situações-problema distintas.

Em cada caso:

O cursista apresentador deve:

a) dizer ou ler, com todo o cuidado, qual das situações-problema ele desenvolveu em sala de aula;

b) em cada caso, responder às questões apresentadas a seguir ou outras formuladas pelos colegas;

c) apresentar os materiais produzidos pelos alunos.

1ª Situação-problema

Construção do sistema solar. Os alunos devem ter feito modelos do Sol e dos planetas com massa ou jornal molhado (articule com o professor de arte), em escala adequada, que devem ter sido colocados formando o sistema solar, com distâncias adequadas entre si.

O cursista apresentador deve contar como foi e se houve interação com o professor de Geografia ou de Arte. Deve esclarecer os seguintes pontos:

- se os alunos foram capazes de fazer sozinhos os cálculos corretos das dimensões dos astros e das distâncias entre eles, se necessitaram de ajuda e que problemas ou surpresas apareceram;
- se os alunos souberam determinar se a sala de aula comportava um modelo do sistema solar proporcional ao tamanho real, de modo que alguns planetas não ficassem excessivamente pequenos;
- se os alunos trabalharam em grupos, dividindo, eles próprios, as tarefas;
- quantas aulas foram necessárias para desenvolver o projeto;
- se houve entusiasmo e envolvimento dos alunos.

2ª Situação-problema

Os alunos devem ter resolvido a situação:

Você é o comandante de uma espaçonave. A sua missão é ir até Alfa Centauro, chegando lá em cinco anos. A distância do Sol até Alfa Centauro é de $2,5 \times 10^{13}$ milhas. A distância da Terra ao Sol é de, aproximadamente, $9,3 \times 10^{7}$ milhas. A sua espaçonave pode viajar à velocidade da luz. Você sabe que a luz pode percorrer uma distância de $5,88 \times 10^{12}$ milhas em um ano. Será que você consegue chegar a Alfa Centauro a tempo?

Use 1 milha = 1.609,344m.

O cursista apresentador deve contar como foi e esclarecer os seguintes pontos:

- Quantos grupos conseguiram resolver o problema?
- Os alunos trabalharam em grupos, dividindo, eles próprios, as tarefas?
- Quantas aulas foram necessárias para desenvolver o projeto?
- Houve entusiasmo e envolvimento dos alunos?
- Algum grupo resolveu a viagem da Extensão?

3ª Situação-problema

Os alunos devem ter resolvido alguns dos itens da Atividade 9, por exemplo:

Um avião, voando a uma distância constante do centro da Terra igual a 6.390km (o que corresponde a uma altura de 12km acima da superfície terrestre), com uma velocidade constante de 800 km/h, levaria quanto tempo para dar a volta na Terra? Suponha que a Terra está parada e que o avião não tem necessidade de abastecimento.

Na mesma altura do vôo anterior, quantas voltas o avião teria que dar na Terra até percorrer um ano-luz?

Quanto tempo levaria?

O cursista apresentador deve contar como foi e esclarecer os seguintes pontos:

- Quantos grupos conseguiram resolver o problema?
- Os alunos trabalharam em grupos, dividindo, eles próprios, as tarefas?
- Quantas aulas foram necessárias para desenvolver o projeto?
- Houve entusiasmo e envolvimento dos alunos?

4ª Situação-problema

A questão do desenvolvimento do tempo histórico.

O cursista apresentador deve contar como foi e esclarecer os seguintes pontos:

- Conseguiu-se levar e tocar a música do Raul Seixas?
- Os alunos pesquisaram sobre o músico, a sua época e a sua música?
- Os alunos conseguiram a letra da música?
- Os alunos destacaram fatos históricos mencionados na música e pesquisaram sobre eles?
- Os alunos fizeram uma representação do tempo correspondente aos dez mil anos mencionados? De que tipo foi?
- Os alunos colocaram em escala apropriada os eventos pesquisados e alguns outros que eles tenham achado relevantes (nascimento de Cristo, descobrimento do Brasil, etc.)?
- Houve interação com o(a) professor(a) de História?
- Quantos grupos conseguiram resolver o problema?
- Os alunos trabalharam em grupos, dividindo, eles próprios, as tarefas?
- Quantas aulas foram necessárias para desenvolver o projeto?
- Houve entusiasmo e envolvimento dos alunos?

Formador, recolha dos cursistas o material que eles trouxeram, incluindo as dez linhas sobre a importância para a aprendizagem matemática de seus alunos desta atividade desenvolvida com comentários. Isto é um elemento que servirá para a avaliação dos cursistas.

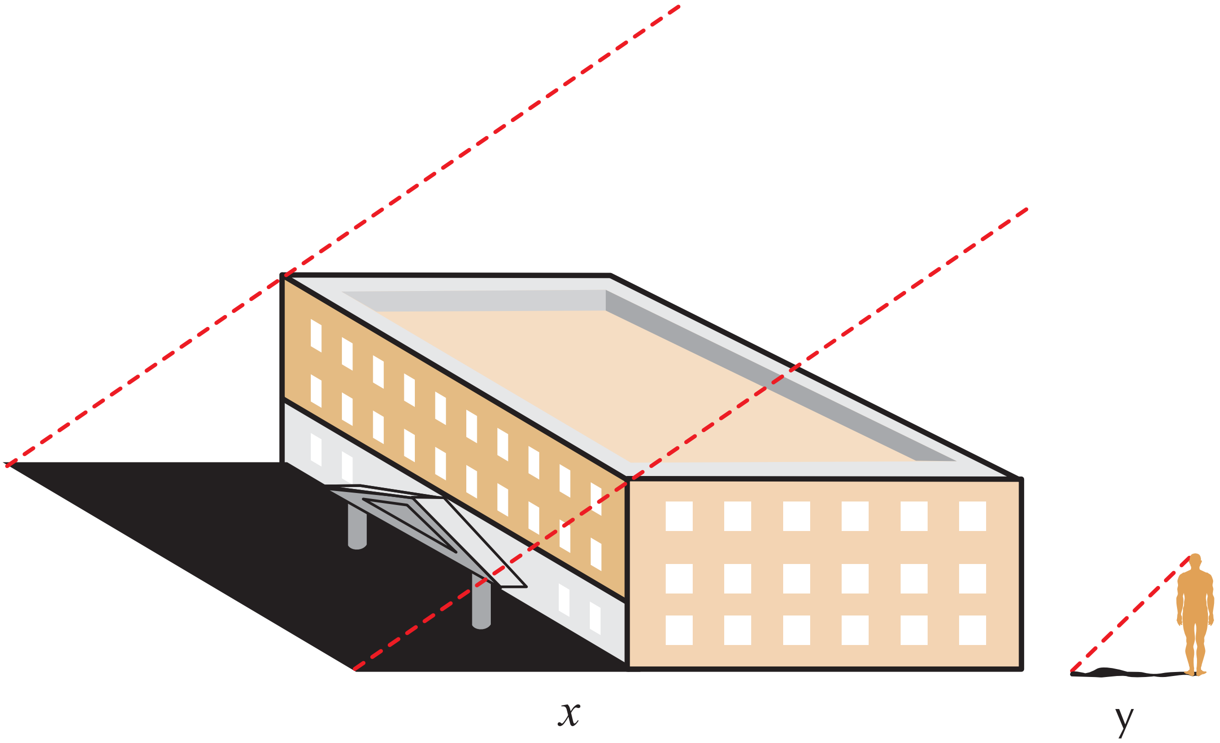
Parte B (110 minutos)

Este momento é destinado à realização de uma atividade prática de determinação de altura de uma construção, pois este é um ponto dos mais interessantes relacionados a triângulos semelhantes.

Se o dia estiver ensolarado, todos devem ir ao pátio ou para fora da escola e realizar a seguinte Atividade:

Atividade 1

Observem alguma parede da escola que esteja projetando alguma sombra e meçam a largura *x* da sombra.



Meçam também, no mesmo momento, a altura de uma pessoa e a sombra y projetada por ela.

Voltem à sala e discutam em grupos se os dois triângulos, um com lados *x* e H e outro com lados y e h, são semelhantes (observem que os dois são triângulos retângulos, pois a sombra é sempre perpendicular ao objeto).

Se forem semelhantes, escrevam a proporcionalidade dos lados e vejam se conseguem determinar o valor de H.

Formador: ajude os cursistas a pensarem a respeito da Atividade. Depois que eles terminarem, se houver tempo, aproveite para tirar as dúvidas a respeito do texto do Caderno de Atividades 4, Unidade 15.

Parte C (30 minutos)

Conversando sobre a próxima Unidade.

O tema central da Unidade 16 será muito atual e relevante: as dificuldades enfrentadas no trânsito e no dia-a-dia pelos deficientes físicos. Conduz a uma observação, em detalhes, sobre a adaptação ou não da escola visando a inclusão desses deficientes. Define o que é, neste contexto, *acessibilidade* – a possibilidade e condição de alcance para utilização, com segurança e autonomia, de edifícios, espaço, mobiliário e equipamento urbano. Garantir a acessibilidade é um dever político e social.

Mas é possível relacionar Matemática a esses aspectos?

Você verá que sim. A Matemática pode contribuir para o planejamento das mudanças arquitetônicas a serem feitas nos ambientes, visando essa acessibilidade. Espaços de locomoção exigem rampas, dimensões e ângulos adequados, e, nisso tudo, entram cálculos matemáticos. Em particular, o teorema de Pitágoras e funções trigonométricas são importantes nesses cálculos.

O texto de referência da próxima unidade abordará o tema. Demonstrações Rigorosas em Matemática, que será mais tarde retomado na Unidade 20.

Atividade 2

Para perceber alguns fatos a serem discutidos, comece a pensar e anotar se existem ou não, em sua escola, elementos como: rampas e pisos antiderrapantes, corrimões, portas largas para acesso a cadeiras de rodas etc.