PDE | GESTAR II

PROGRAMA GESTÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA NOS ESPORTES E NOS SEGUROS

TP2

CADERNO DE TEORIA E PRÁTICA

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA NOS ESPORTES E NOS SEGUROS – TP2

GESTAR II

MATEMÁTICA

PDE | GESTAR II

PROGRAMA GESTÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR

Acesse www.mec.gov.br ou ligue 0800 616161

FNDE

Ministério da Educação

Presidência da República
Ministério da Educação
Secretaria Executiva
Secretaria de Educação Básica

PROGRAMA GESTÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR
GESTAR II

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DOS ANOS/SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

MATEMÁTICA

CADERNO DE TEORIA E PRÁTICA 2

MATEMÁTICA NOS ESPORTES E NOS SEGUROS

Diretoria de Políticas de Formação, Materiais Didáticos e de
Tecnologias para a Educação Básica
Coordenação Geral de Formação de Professores

Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II

Matemática

Organizador
Cristiano Alberto Muniz

Autores
Ana Lúcia Braz Dias - TP2, TP3 e TP5
Doutora em Matemática
Universidade de Indiana

Celso de Oliveira Faria - TP2, TP4, TP5, AAA1, AAA2 e AAA3
Mestre em Educação
Universidade Federal de Goiás/UFG

Cristiano Alberto Muniz - TP1 e TP4
Doutor em Ciência da Educação
Universidade Paris XIII
Professor Adjunto - Educação Matemática
Universidade de Brasília/UnB

Nilza Eigenheer Bertoni - TP1, TP3, TP4, TP5 e TP6
Mestre em Matemática
Universidade de Brasília/UnB

Regina da Silva Pina Neves - AAA4, AAA5 e AAA6
Mestre em Educação
Universidade de Brasília/UnB

Sinval Braga de Freitas - TP6
Mestre em Matemática
Universidade de Brasília/UnB

Guias e Manuais

Autores
Elciene de Oliveira Diniz Barbosa
Especialização em Língua Portuguesa
Universidade Salgado de Oliveira/UNIVERSO

Lúcia Helena Cavasin Zabotto Pulino
Doutora em Filosofia
Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP
Professora Adjunta - Instituto de Psicologia
Universidade de Brasília/UnB

Paola Maluceli Lins
Mestre em Lingüística
Universidade Federal de Pernambuco/UFPE

Ilustrações
Francisco Régis e Tatiana Rivoire

DISTRIBUIÇÃO
SEB - Secretaria de Educação Básica
Esplanada dos Ministérios, Bloco L, 5o Andar, Sala 500
CEP: 70047-900 - Brasília-DF - Brasil

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Centro de Informação e Biblioteca em Educação (CIBEC)

Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II. Matemática: Caderno de Teoria e Prática 2 - TP2: matemática na alimentação e nos impostos. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.

248 p.: il.

1. Programa Gestão da Aprendizagem Escolar. 2. Matemática. 3. Formação de Professores. I. Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica.

CDU 371.13

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA

PROGRAMA GESTÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR GESTAR II

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DOS ANOS/SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

MATEMÁTICA

CADERNO DE TEORIA E PRÁTICA 2

MATEMÁTICA NOS ESPORTES E NOS SEGUROS

BRASÍLIA
2008

Sumário

PARTE II

PARTE III

Apresentação

Caro Professor, cara Professora:

Ao iniciar este módulo é importante que você tenha uma visão mais ampla da proposta de Matemática, como estão estruturados os módulos em unidades e estes em seções. É necessário, caro professor, que você vá se situando, momento a momento, nos diferentes estágios e circunstâncias da proposta.

Primeiro reconhecimento que você fará é que a matemática se apresenta na proposta impregnada em diferentes aspectos da vida real e em situações significativas. Um segundo reconhecimento imediato é da provocação do desenvolvimento dessa visão de matemática junto aos seus alunos.

Este trabalho foi elaborado, com carinho e muita dedicação, pensando em você, nos seus interesses, nas suas necessidades e nas suas dúvidas e facilidades. A idéia central que conduziu a produção da equipe foi, a todo momento, que tipo de proposta levar a você que possa ser de real valor para ajudá-lo a melhor desenvolver seu trabalho pedagógico em matemática nas séries finais do ensino fundamental.

Sem dúvida, trata-se de uma proposta muito abrangente quando vemos que se destina a professores de diferentes regiões do nosso Brasil. Por isso, foi importante nossa vivência com formação de professores, nos mais diferentes espaços geográficos, para que a proposta se aproxime o máximo possível dos seus interesses e necessidades.

Pensar na qualidade do trabalho pedagógico em sala de aula em Matemática requereu num duplo pensamento: de um lado, no próprio fazer matemático do professor, ou seja, o quanto de matemática e que tipo de matemática precisamos saber para desenvolvermos um bom trabalho; de outro lado, no fazer pedagógico, do como trabalhar a matemática com nossos alunos.

Essa preocupação fez com que a proposta fosse estruturada a partir de três eixos:

– Conhecimentos matemáticos: um convite ao "fazer matemático".

– Conhecimentos de Educação Matemática: um convite à leituras, reflexões e discussões acerca do tema.

– Transposição Didática, que implica conhecimentos para a sala de aula.

Cada caderno será composto de 4 unidades, sendo que em cada unidade você encontrará conhecimentos relacionados aos três eixos.

Os **conhecimentos matemáticos para você**, professor do GESTAR, serão desenvolvidos em dois momentos:

A – Na seção 1 de cada unidade, ao vivenciar a resolução de uma situação-problema como uma estratégia para mobilizar conhecimentos matemáticos já conhecidos ou buscar outros que emergem naturalmente no contexto.

B – Na seção 2, pela construção de conhecimentos matemáticos em ação, na qual, a partir da situação-problema da seção 1, procuraremos buscar e elaborar procedimentos e conceitos matemáticos envolvidos.

Os **conhecimentos matemáticos para os alunos** serão desenvolvidos na seção 3. Educar envolve muito mais que preparar uma boa aula, estruturar atividades e apresentar um conteúdo de forma organizada. Você, professor, precisa estar "afiado" também em outros aspectos da Educação Matemática: o "contrato didático", as novas dimensões do currículo, o papel das interações dos alunos entre si e com o professor em sua aprendizagem...

São estes assuntos que compõem o segundo eixo de estruturamento dos módulos de matemática do GESTAR, o eixo "**Conhecimentos de Educação Matemática**", e sobre os quais vamos conversar em dois espaços:

A – No Texto de Referência que aparece ao final de cada unidade e

B – Em pequenos textos que podem surgir nas seções 2 e 3, que aparecem em quadros com o título "Aprendendo sobre Educação Matemática".

Nestes dois espaços você vai encontrar estes assuntos sistematizados textualmente. Mas esperamos que você aprenda sobre educação matemática também na prática, ao longo de toda a unidade. Como se dará isto?

Ao iniciarmos cada Unidade com uma situação-problema, já estamos fazendo que você vivencie um novo modo de aprender matemática, a partir de situações do mundo real e que, para sua solução, requerem a busca e a construção de conhecimentos matemáticos. Essa busca e construção ocorrem, portanto, a partir de necessidades geradas por uma situação real, e não impostas dentro de uma concepção linear de currículo.

Ou seja, os módulos do GESTAR fazem uso de teorias de Educação Matemática para ajudá-lo a crescer em sua relação com a matemática e no modo como você a utiliza em sua vida. Vivendo, na prática, um processo de Educação Matemática, e aprendendo mais sobre essa área do conhecimento nos quadros e no Texto de Referência, você poderá entender e ajudar a construir a Educação Matemática de seus alunos.

Os conhecimentos relativos ao terceiro eixo de estruturação dos módulos, a **Transposição Didática**, aparecem sempre na seção 3. Ela visa a ajudá-lo a conhecer e produzir situações didáticas que facilitem o desenvolvimento, em sala de aula, de conhecimentos matemáticos vistos nas seções 1 e 2.

Portanto, as seções 1 e 2 são voltadas para o **seu** processo de Educação Matemática. A seção 3 procura ajudá-lo em um dos aspectos da Educação Matemática **de seus alunos**: o modo como você poderá fazer, em sala de aula, a Transposição Didática, dos conteúdos matemáticos que você trabalhou nas seções 1 e 2.

Nós quatro esperamos fielmente que este caderno provoque momentos de dúvidas, desafios, aventuras e, acima de tudo, alegria e satisfação diante da oportunidade de expandir seus limites realizando novas e interessantes aprendizagens. Um bom trabalho e até breve!

Ana Lúcia, Celso, Cristiano e Nilza

PARTE I

TEORIA E PRÁTICA 2

- Unidade 5
- Unidade 6
- Unidade 7
- Unidade 8

GESTAR TP2

GESTAR II

TP2 - Matemática

Nunca deixe que lhe digam que não vale a pena
acreditar no sonho que se tem
ou que seus planos nunca vão dar certo
ou que você nunca vai ser alguém
(Mais uma vez - Renato Russo)

Caro Professor, cara Professora:

Espero que você esteja feliz por ter vencido o TP 1 e juntado forças e vontade para a caminhada pelo TP 2. Percalços e pedras há sempre pelos caminhos, mas o importante é a gente chegar lá.

Pense em tudo que você aprendeu para você ou para desenvolver junto aos seus alunos. Você avançou! Aproveite a sensação boa que isso lhe traz.

E vamos ver o que vem por aí, nas quatro etapas deste TP 2.

Nas unidades 5 e 6, o tema central são esportes. Após elas, as duas unidades seguintes desenvolvem o pensamento probabilístico, que se contrapõe ao pensamento determinista, que predomina na matemática escolar. Ambos são aspectos da matemática e complementam-se. O tema dessas outras unidades é Seguridade, sendo que a unidade 7 trata da previdência social e unidade 8 trata dos seguros de vida. Temas que nos interessam porque, nas situações reais, não temos o controle sobre o que vai acontecer, ou seja, temos de lidar com a incerteza. Contudo, é possível tomar certas precauções.

Sobre os conteúdos, na unidade 5 voltarão a comparecer escalas, razões, proporcionalidade e representação gráfica. Veja que não basta explorar esses conceitos em um único capítulo, como ocorre em muitos livros didáticos. São conceitos presentes em uma grande variedade de problemas matemáticos e só usando-os constantemente, recorrendo a diversos aspectos dos mesmos, pode-se adquirir a competência necessária para resolver esses problemas. Um assunto que será detalhado e aprofundado é o cálculo de área de alguns polígonos.

Na unidade 6, aparecerá o conceito de média; a interpretação e operação com números inteiros (ou relativos). Serão retomadas e aprofundadas operações com unidades de comprimento, superfície, volume, tempo e massa.

A unidade 7 introduz o conceito de probabilidade e desenvolve muitos conhecimentos novos: compara probabilidades com base em informações numéricas e gráficas; interpreta razões e porcentagens como medidas de probabilidade; identifica em quais situações pode-se calcular uma probabilidade teórica ou uma probabilidade experimental; calcula probabilidades teóricas e experimentais em situações simples; identifica quando um modelo geométrico ou gráfico simula adequadamente uma situação de incerteza.

A unidade 8 introduz um conceito fundamental em Matemática: o de função, em particular os dois tipos mais utilizados para descrever o crescimento ou o decrescimento de grandezas: a função linear e a função exponencial. Aparecem, articuladas a essas funções, as noções de juros simples e juros compostos. E ainda, ao final, teremos a idéia de *valor esperado*.

Veja os temas de Educação Matemática que serão apresentados ao final das unidades:

- Avaliação em Matemática Novas Prioridades no Contexto Educativo de Portugal.
- A flexibilização da aprendizagem matemática – Representação e Teoria de Quadros.
- Ensino de probabilidade.
- Modelagem matemática.

Esperamos que você percorra esse novo caminho com sucesso!

Unidade 5

Explorando conceitos matemáticos numa discussão sobre esportes – proporcionalidade e medidas

Celso de Oliveira Faria

Iniciando a nossa conversa

Esta unidade está organizada em três seções:

1. Resolução de uma situação-problema

A seção 1 propõe uma situação-problema relacionada ao esporte, tratando de problemas relacionados a conceitos geométricos, proporcionalidade, medidas e de tratamento de informação.

2. Construção do conhecimento matemático em ação

A seção 2 introduz e aprofunda os conceitos relacionados à situação-problema apresentada, como tipos de grandezas e razões matemáticas e cálculo de área e suas medidas.

3. Transposição didática

A seção 3 discute problemas relacionados ao ensino-aprendizagem desses conceitos e sugere ações relacionadas para a sala de aula.

Como as outras unidades, esta também conterá um Texto de Referência sobre Educação Matemática, que abordará o tema **Avaliação em Matemática Novas Prioridades no Contexto Educativo de Portugal,** que consiste em uma discussão que requererá uma revisão de suas concepções sobre o que se entende por atividade matemática e sobre o seu valor educativo.

Assim, nesta unidade do TP2 buscaremos no tema esporte a possibilidade de estabelecer nossas relações com os objetos matemáticos. Mesmo que as situações tratem de conceitos com os quais você possua bastante familiaridade, pois são temas que ensinamos aos nossos alunos ou porque os aplicamos em contextos fora da escola, ainda assim, gostaríamos de vê-lo, professor, aceitando o convite de explorar as situações acerca dos esportes. Essas situações nos levarão a utilizar a matemática dos números, das medidas, das formas e proporções em contexto de interesse vivo dos nossos alunos adolescentes: o mundo dos esportes.

Definindo o nosso percurso

Esperamos que ao longo desta unidade você possa:

1 – Com relação aos seus conhecimentos matemáticos:

Vivenciar a resolução de uma situação-problema – elaboração de um projeto de uma quadra poliesportiva, como estratégia para mobilizar conhecimentos e desenvolver habilidades relacionadas a:

– escalas, razões e proporcionalidade;

– representação gráfica;

– área e cálculo de área de alguns polígonos.

Esses conhecimentos serão desenvolvidos nas seções 1 e 2.

2 – Com relação aos seus conhecimentos sobre Educação Matemática:

Adquirir conhecimentos sobre:

– Avaliação em Educação Matemática, no Texto de Referência.

– Aspectos importantes da representação gráfica – seção 2.

– Revisitando campos conceituais – seção 3.

– Revisitando currículo em rede – seção 3.

– Revisitando conceitos e teoremas em ato – seção 3.

3 – Com relação à sua atuação em sala de aula:

– Conhecer e produzir, com relação aos temas tratados, situações didáticas adequadas à série em que atua.

Esse objetivo será tratado na seção 3.

Seção 1

Resolução de situação-problema: destacando e estudando proporcionalidade

Objetivo da seção

Esperamos que, ao longo desta seção, você possa:

- Resolver uma situação-problema.
- Elaborar uma quadra poliesportiva observando suas medidas reais e sua representação em escala.
- Calcular os custos da construção da quadra planejada.

Integrando a matemática ao mundo real

A garota espevitada com jeito de moleque só queria saber de jogar handebol, pois adorava marcar gols. Nem mesmo o grupo de pesquisadores que apareceu em seu colégio, e descobriu uma força fenomenal na suas pernas de 12 anos, a fez mudar de idéia. Handebol , diziam eles, era um desperdício de talento, já que a potência privilegiada daquelas pernas faria da garota uma ótima velocista ou jogadora de basquete. A paixão de marcar gols, no entanto, falava mais alto do que uma cesta. Foram necessários muitos conselhos de uma grande jogadora de basquete da época: Norma de Oliveira, a Norminha, para que a menina enfim resolvesse se aventurar em jumps e bandejas. O basquete brasileiro ganhou assim Hortência, uma das maiores jogadoras que já pisaram quadras em todo mundo. Assim como pode descobrir, entre meninos e meninas aparentemente iguais, quem deles tem corpo e jeito para se transformar num grande atleta, a ciência do esporte evolui a cada dia na arte de lapidá-los (...) os atletas, para subir no podium, não dependem apenas de exaustivos treinamentos dirigidos por técnicos, mas de minuciosos testes conduzidos por cientistas. Antes de se construir um ganhador de medalhas, porém, é preciso saber garimpar a melhor matéria-prima.

O Brasil, um país de poucos campeões olímpicos ao longo de sua história, tem um trabalho um tanto artesanal para detectar talentos para o esporte.

(Trecho do texto: CARDOSO, Fátima e OLIVEIRA, Lúcia Helena. A ciência constrói atletas. **Superinteressante.** Ano 5, n. 3, p. 33-41, março. 1991)

Considerando a importância da escola como um espaço importante para estimular a prática de atividades físicas, e em especial, os esportes, fizemos uma enquete entre um grupo de alunos do ensino fundamental sobre os três esportes de salão preferidos entre as opções seguintes: futsal, voleibol, basquete e handebol.

Enquete junto a um grupo de 251 alunos de 5ª a 8ª sobre as preferências entre quatro modalidades esportivas de quadra

Modalidades	Voleibol	Handebol	Basquetebol	Futsal
Alunas	123	14	78	52
Alunos	108	8	91	101

A presença da matemática nos esportes é inegável, uma vez que conceitos como medidas, direção e sentido, velocidade, espaço, proporcionalidade, contagem, possibilidade, dentre outros conteúdos matemáticos, estão por certo presentes nas ações desenvolvidas pelo esportista ao longo da atividade.

Mais do que a realização da atividade em si, o seu preparo, tais como a demarcação do espaço, a organização dos esportistas em equipes, a definição de tabelas de campeonato, a precisão de cronogramas, a atribuição de pontuações positivas e negativas numa partida ou no conjunto delas ao longo das etapas do campeonato, a preocupação em estabelecer critérios para que todos tenham, ao menos inicialmente, as mesmas chances de ganhar requerem a mobilização de conceitos matemáticos. Assim as atividades esportivas, tão importantes para o desenvolvimento de nossos jovens, estão recheadas de conceitos e procedimentos matemáticos nem sempre bem aproveitados pelos professores.

Entretanto muitas vezes os esportes não encontram na escola a importância que merecem no projeto político-pedagógico, e, quando são oferecidas oportunidades de sua prática aos alunos, a realização dos esportes acaba, na maioria das vezes, se realizando de forma isolada dentro da escola, sem maior articulação com os professores das demais áreas do conhecimento do currículo.

Pensando ser interessante maior articulação dos professores de Matemática com os professores de Educação Física, foi idealizada a situação desta unidade que poderá servir a você, professor, como uma experiência de real possibilidade de uma exploração dos conceitos matemáticos no contexto dos esportes.

Você deve já possuir muitas idéias e imaginar muitas possibilidades de atividades para serem trabalhadas com seus alunos. Pode ter pensado em atividades tais como: a construção de campinho de futebol num espaço disponível, organização de tabelas de campeonato, organização e tratamento de informações de uma competição de atletismo entre os alunos.

Quais outras sugestões de atividades você pode criar com o tema esporte? O importante é que você, professor, esteja atento no sentido de identificar os conceitos matemáticos que são mobilizados na realização de tais atividades.

Vamos aqui propor apenas uma dessas possibilidades, mas cabe a você, professor, estar ampliando tais possibilidades e realizando junto com seus alunos novas propostas. Assim é possível tornar os conteúdos matemáticos do final do ensino fundamental mais significativos, e, na medida do possível, sempre articulados aos procedimentos que possibilitam uma compreensão mais efetiva do conteúdo matemático explorado pela escola com seus alunos.

Situação-Problema

Para elaborarmos um projeto "real" de uma quadra poliesportiva, usaremos os dados recolhidos na enquete, cujos resultados estão na tabela anterior.

A partir da enquete realizada, temos como objetivo desenhar uma planta baixa de uma quadra poliesportiva contendo as três modalidades prediletas pelo grupo. A planta baixa deve ser desenhada por você, professor, respeitando as medidas oficiais das quadras de cada modalidade e respeitando suas proporções.

Para a realização dessa atividade, o desenho será realizado por você em uma folha de papel – tamanho A4, deixando uma margem mínima de 2,5cm em cada lado da folha. No espaço disponível na folha, desprezadas as margens acima, traçar a quadra, contemplando as três modalidades escolhidas pelos jovens, todas elas tendo o mesmo centro geométrico. Assim, as três quadras deverão estar harmoniosamente posicionadas, sendo que cada quadra será definida por uma cor, ou seja, as linhas de uma quadra devem ter cor diferente da de outra modalidade. Para os traços comuns você deve pensar numa solução.

Planta baixa é o desenho feito por profissionais no qual a construção ou objeto é visto do alto, como se o observador estivesse acima do objeto, vendo apenas as suas paredes e detalhes. É muito comum vermos plantas baixas de apartamentos e casas em jornais e revistas.

Quanto às dimensões, para facilitar seu trabalho, selecionamos as regras das quais você irá precisar para realização de seu projeto da quadra poliesportiva. São dados reais, pesquisados junto às confederações. Portanto, a definição dos espaços e proporções em termos de áreas e comprimentos, as formas e proporções, as incidências em termos de pontos e traços comuns, a definição de posição de retas e formação de curvas serão tarefas que caberão a você realizar.

A altura do espaço prevista pelas regras oficiais foi um dado que excluímos de nossa proposta, objetivando simplificar o modelo a ser trabalhado, ou seja, vamos nos ater a trabalhar exclusivamente com um modelo plano e com os objetos e ferramentas matemáticas aplicados a esse espaço.

No conjunto das regras abaixo apresentadas, cabe a você, professor, buscar as informações necessárias à execução da planta baixa.

Dimensões oficiais da quadra de voleibol

Área de jogo

A área de jogo compreende a quadra de jogo e a zona livre. Ela deve ser retangular e simétrica.

A quadra de jogo constitui um retângulo medindo 18m x 9m, circundado por uma zona livre com, no mínimo, 3m de largura em todos os lados que circundam o retângulo.

Linhas da quadra de jogo

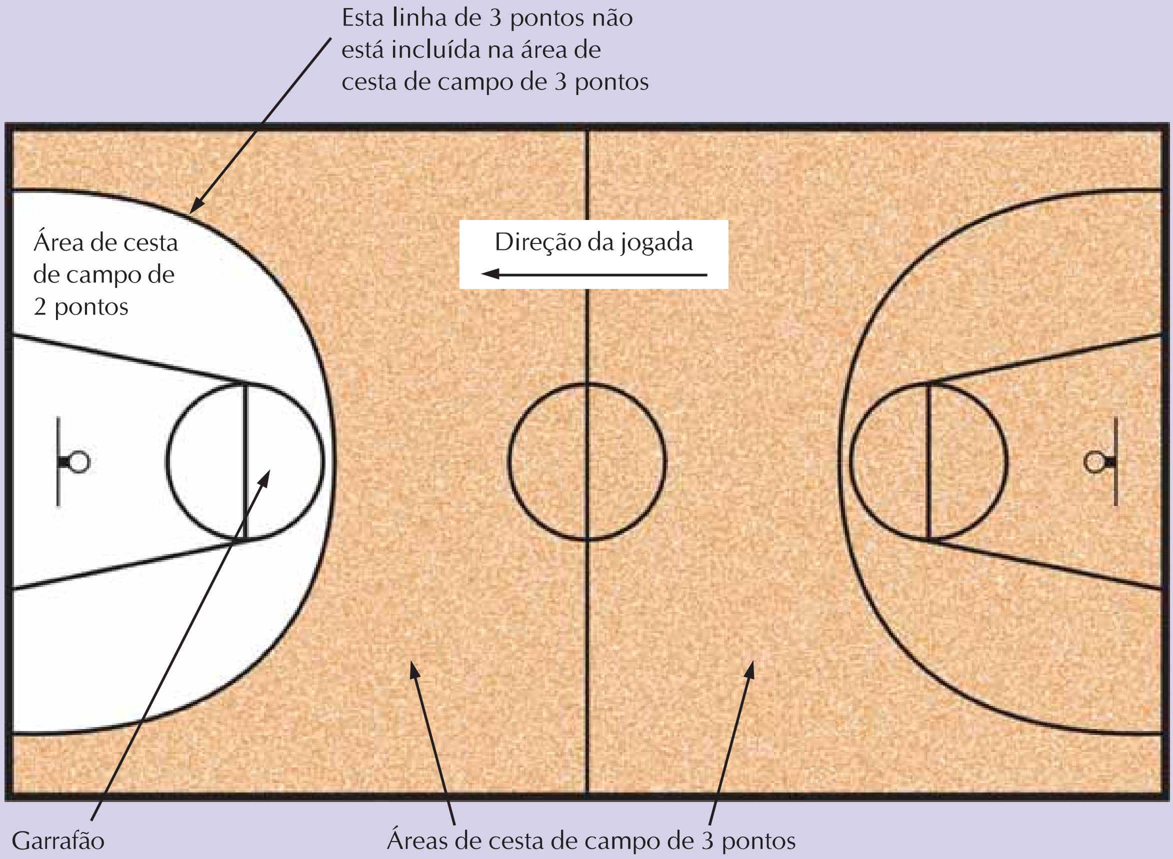
Linha central: o eixo da linha central divide a quadra de jogo em duas áreas de idênticas medidas – 9m x 9m cada. Essa linha estende-se por sob a rede, de uma linha lateral até a outra.

Linha de ataque: Em cada quadra de jogo, uma linha delimita a zona de ataque. Essa linha é medida e desenhada a três metros de distância do eixo central, estando inserida nas dimensões da zona de ataque.

Atividade 1

Já conhecendo as dimensões reais da quadra de voleibol e as dimensões da folha na qual será realizada a planta, defina uma escala mais conveniente para realização do seu projeto. Lembre-se que essa razão deverá ser aplicada a todas as medidas, para todas a quadras. É momento de centralizar a quadra no espaço, lembrando que todas as quadras terão de ter o mesmo centro geométrico. Como fazê-lo? Que estratégias poderão ser utilizadas para garantir o perpendicularismo e paralelismo das linhas que definem a quadra?

Dimensões oficiais da quadra de basquetebol



Quadra geral: comprimento de 28m, largura de 15m, linhas de 5cm, círculo central de 3,6m de diâmetro.

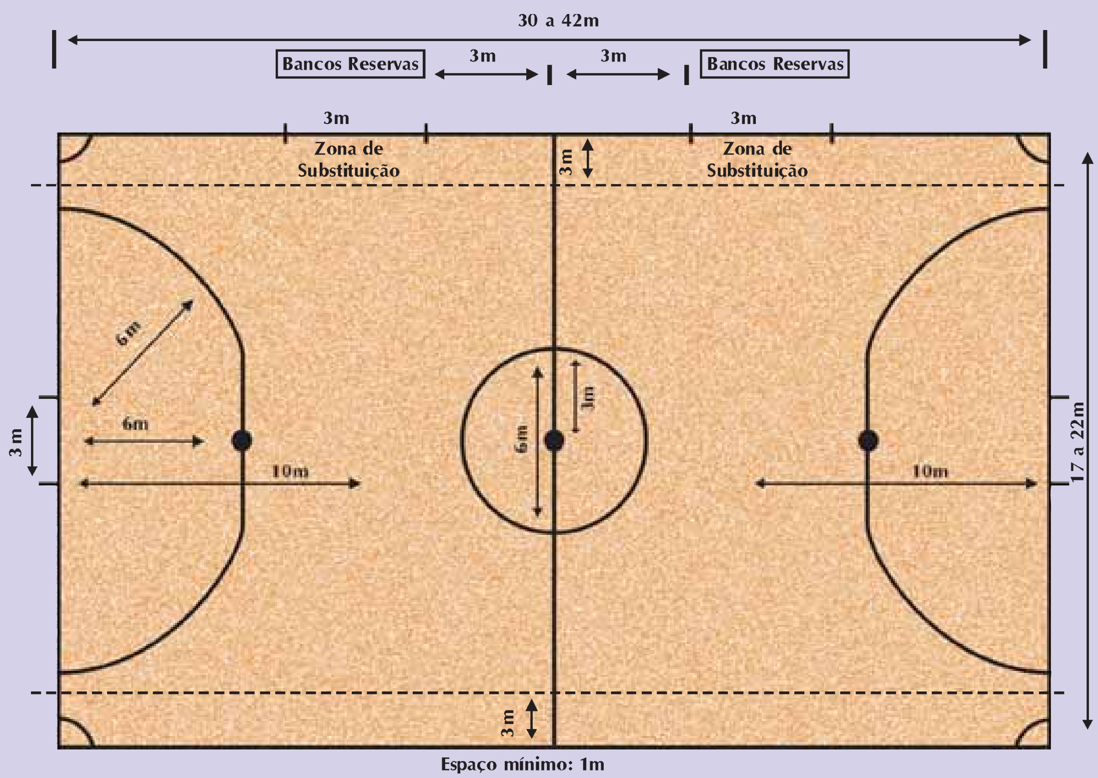
Garrafão: Comprimento de 5,5m (da base à linha de lance livre), base de 6,0m (linha final), linha do lance livre de 3,6m, e semicírculo (área de lance livre) de 1,80m (de raio).

Usando as medidas acima, trace a quadra de basquete na sua planta.

Atividade 2

Ao traçar sobre a quadra de voleibol a quadra de basquetebol, verifique se a quadra ficou bem centralizada na folha, caso contrário, a quadra poderá não caber no espaço, desde que respeitada a escala. Como fazer para que a quadra de voleibol fique centralizada em relação à quadra de basquetebol?

Dimensões oficiais da quadra de futsal



A quadra de jogo será um retângulo com o comprimento de 42m e o mínimo de 25m, tendo a largura máxima de 22m e a mínima de 15m. Para partidas oficiais a quadra deverá ter um comprimento mínimo de 30m e uma largura mínima de 17m. Para partidas oficiais internacionais a quadra deverá ter um comprimento entre 38m e 42m e uma largura entre 18m e 22m.

Fonte: Federação Paulista de Futebol de Salão

Atividade 3

Procure observar se existe uma proporcionalidade constante entre comprimento e largura, máxima e mínima, entre as diferentes dimensões possíveis (considerar sempre os extremos). Por exemplo, na quadra oficial internacional as dimensões mínimas são de 38m x18m, o que nos dá uma razão de 2,11 entre comprimento e largura. Esse índice é constante para todo e qualquer tipo de quadra de futsal? Por que será que essa razão não é preservada entre as demais medidas? O que podemos daí dizer sobre a semelhança entre as formas das diferentes quadras? Como justificar esse fato?

Atividade 4

Faça a opção por uma quadra de futsal que permita a realização de jogos internacionais, ou seja, de 38m x 18m. Caso sua escolha inicial para escala da planta tenha sido de 1:100, ou seja, 1m = 1cm, procure rever sua escala de maneira que permita que as três quadras caibam na folha, levando em conta que as dimensões das quadras de voleibol e de basquetebol não são apropriadas, pois a planta da quadra de futsal extrapolará o espaço disponível na folha.

Marcação da quadra: As linhas demarcatórias de maior comprimento denominam-se linhas laterais e as de menor comprimento, linhas de fundo. Na metade da quadra será traçada uma linha divisória, de uma extremidade à outra das linhas laterais, eqüidistantes das linhas de fundo. O centro da quadra será demarcado por um pequeno círculo com 10 (dez) centímetros de diâmetro. Ao redor do pequeno círculo será fixado o círculo central da quadra com um raio de 3 (três) metros.

Área de meta: Nas quadras com largura igual ou superior a 17 metros, em cada extremidade da quadra, a 6 (seis) metros de distância de cada poste de meta haverá um semicírculo perpendicular à linha de fundo que se estenderá ao interior da quadra com um raio de 6 (seis) metros. A parte superior desse semicírculo será uma linha reta de 3 (três) metros, paralela à linha de fundo, entre os postes.

Penalidade máxima: À distância de 6 (seis) metros do ponto central da meta, medida por uma linha imaginária em ângulo reto com a linha de fundo e assinalada por um pequeno círculo de 10 (dez) centímetros de raio, serão marcados os respectivos sinais de penalidade máxima.

Tiro livre sem barreira: À distância de 12 (doze) metros do ponto central da meta, medida por uma linha imaginária em ângulo reto com a linha de fundo, serão marcados os respectivos sinais, de onde serão cobrados os tiros livres sem barreira, nas hipóteses previstas nestas regras.

Metas: No meio de cada área e sobre a linha de fundo serão colocadas as metas, formadas por dois postes verticais separados em 3 (três) metros entre eles (medida interior) e ligados por um travessão horizontal cuja medida livre interior estará a 2 (dois) metros do solo.

Atividade 5

Quais foram as dificuldades que você, professor, teve para traçar a planta da quadra poliesportiva?

- Dificuldade de interpretação das regras em termos de seus significados geométricos.
- Definir uma escala conveniente para realizar o projeto no espaço de papel disponível.
- Centralizar as quadras no espaço.
- Traçar as quadras de forma que suas linhas fiquem paralelas e perpendiculares.
- O acesso ou uso de instrumentos geométricos: réguas, compasso ou outro.
- Traçar o garrafão da quadra de basquetebol.
- Traçar a superfície da área de meta da quadra de futsal.

Qual o orçamento para pavimentação em cimento puro e demarcação desta quadra poliesportiva? Além disso, a quadra terá de ser cercada em tela, com espaçamento de afastamento das linhas limite da quadra poliesportiva de 5 metros em cada lateral. Para o cálculo do orçamento temos as informações seguintes:

Mão-de-obra e material	Unidade	Preço (R$)
Terraplanagem	Metro quadrado	35,00
Pavimentação	Metro quadrado	25,00
Demarcação e pintura de linhas	Metro linear	7,50
Cerca de tela em arame em aço vulcanizado instalada	Metro linear	175,75

Seção 2

Construção do Conhecimento Matemático em Ação: Proporcionalidade e medidas

Objetivo da seção

Esperamos que, ao longo desta seção, você possa:

• Construir conhecimentos matemáticos em ação, partindo de uma situação-problema significativa para buscar e elaborar procedimentos e conceitos matemáticos, adquirindo habilidades em:

- Identificação e cálculo de razão, porcentagem e proporção.

- Reconhecimento e aplicação dos tipos de grandezas proporcionais gráfica e numericamente.

- Demonstração do conceito de área, relacionando com as suas unidades e cálculo em alguns polígonos.

• Em relação à Educação Matemática você estará vendo:

- Aspectos importantes da representação gráfica.

Atividade 6

Nos dias de hoje o papel de estatísticos e matemáticos nos clubes ligados aos esportes é muito importante. Você já deve ter observado que grandes times nacionais e internacionais utilizam dados estatísticos para a definição do time que sairá jogando numa partida. Por exemplo, nos últimos treinos, dos chutes a gol feito por Zequinha, ele converteu 45 chutes em gol. Enquanto isto Joca acertou 50 gols. Quem deve ser selecionado para estar no time no próximo jogo, já que os dois jogam na mesma posição?

A decisão parece simples, porém deve-se levar em conta quantos chutes a gol cada um teve oportunidade de executar. Se Zequinha chutou 60 bolas a gol e Joca chutou 75, quem deveria ser escolhido?

Assim, não podemos afirmar que um jogador está pior em converter o chute em gol só pelos dados iniciais. Observando a performance de cada um, se Zequinha acertou 45 de 60 chutes, significa que ele acertou 3/4 do total. Enquanto isso, Joca acertou 50 de 75 chutes, significa que ele acertou 2/3 do total.

O que você acha de comparar os acertos em relação a 100 chutes? Ou seja, se os dois jogadores tivessem a mesma oportunidade de chute teriam acertado quantos por cento?

Use os conceitos sobre porcentagem que você estudou no TP1 e faça o cálculo:

Zequinha	Joca
$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\%$	$\frac{2}{3} \cong \frac{?}{100} = ?$

Observando os resultados acima, ficou claro para você responder qual jogador teve a melhor performance.

Você já deve ter percebido que existem outras formas de analisar essa situação, usando outros totais de chutes?

Você poderia pensar na situação assim: Se Zequinha acertou 3 em 4 chutes, ele errou 1 em 4, porém se Joca acertou 2 em 3, ele errou 1 em 3. Quem errou menos? Zequinha, que chutou 4 vezes e errou 1, ou Joca, que chutou 3 e errou 1? Parece que essa estratégia torna o problema bem simples. Você não acha?

Outra possibilidade. Se o total for 24 chutes, teremos:

Zequinha	Joca
$\frac{45}{60} = \frac{3}{4} \underset{\times 6}{\overset{\times 6}{=}} \frac{18}{24}$	$\frac{50}{75} = \frac{2}{3} = \frac{?}{24}$

Sabe-se que 24 é um múltiplo comum de 4 e 3, assim vamos reduzir o universo de chutes de Zequinha e Joca para 24.

Então por quanto deve ser multiplicado 4 para encontrarmos 24? Sabe-se que 4 x 6 = 24.

Vamos denominar o número 6, que é o número que deve ser multiplicado para chegarmos ao universo de 24, como fator de variação.

4 x ? = 24, logo, o fator de variação entre 24 e 4 é 6. Assim precisamos repetir seis vezes as quatro unidades para chegarmos ao total de 24.

Dessa forma, mantendo o índice de acertos de Zequinha para 24 chutes, ele converteu 18 chutes em gols. Assim, manteve-se a razão de acertos do jogador; fazendo o cálculo: 3 x 6 = 18.

Faça o mesmo cálculo para Joca!

Na situação-problema inicial deste TP você utilizou razões que comparavam parte-todo, como, por exemplo, os índices que expressam escalas, que comparam a distância utilizada no desenho e a distância real que se queria representar.

Razão é o quociente utilizado para comparar duas grandezas que podem ser da mesma espécie ou não.

Atividade 7

Sabe-se que a razão do número de pessoas que lêem a revista A para o número de pessoas que lêem a revista B é de 3 por 4. Nesta cidade, sabe-se que 20.000 pessoas lêem a revista B; quantos lêem a revista A?

Sabendo que a razão é 3 por 4, analisando o problema para 20.000 habitantes deve-se considerar a mesma relação. Vamos pensar:

$$\frac{3}{4} = \frac{?}{20000}$$

Fator usado é
20000÷4 = 5000

O fator utilizado será 5.000 pois 20.000 deverá ser divido em 4 partes:

20.000			
1/4 = 5.000	1/4 = 5.000	1/4 = 5.000	1/4 = 5.000

Você, professor, para calcular o número de leitores da revista A, deve ter feito a multiplicação entre 3 e 5000, já que 5000 é o fator entre os dois valores. Esse é um exemplo de uma comparação feita parte-parte, ou seja, comparamos dois conjuntos cujos elementos são da mesma natureza, mas um não está totalmente incluído um no outro.

Mantendo-se a mesma razão de leitores, sabe-se que 18.000 lêem a revista A; quantos lêem a B?

Como pode ser observado nesse problema, não interessa muito a relação entre cada parte e o todo, mas, sim, a relação entre as partes, diferentemente do que você estudou na atividade 6.

Atividade 8

Você sabia que a densidade também está presente nos tapetes? A densidade de nós em um tapete pode caracterizar a sua região de origem.

Por exemplo, os tapetes iranianos ou persas são os mais conhecidos mundialmente; em sua maioria, são produzidos por nômades ou em aldeias, são tapetes que possuem pouca densidade de nós e são confeccionados sobre uma base de lã, conforme a sua tradição.

Os tapetes iranianos confeccionados na cidade de Nain são considerados os mais finos e sofisticados tapetes do mundo. Naturalmente, são tecidos na incrível quantidade de 400 mil a 2 milhões de nós por metro quadrado, geralmente em seda e lã de primeira qualidade sobre algodão! Muitos destas grandes obras de arte levam anos para serem tecidas com mão-de-obra especializada de dezenas de pessoas. Quase um trabalho religioso.

Os tapetes orientais têm origem em diversos países do Oriente como Irã, Turquia, Afeganistão, Paquistão, Índia e China. Entre alguns modelos destacam-se: Gabeh, Hamadan, Shiraz, Viz Arak e mais 40 tipos do Irã; Kelim, Hereke, Sivas e mais 15 tipos da Turquia; Kabul e Kocham do Afeganistão; Karachi do Paquistão; Durrie da Índia; e Xinijang da China.

Os tapetes possuem desenhos e formatos que seguem formas diferenciadas ligadas a religião e cultura. Os tapeceiros turcos evitam até hoje os desenhos inspirados em pessoas e animais, por motivos religiosos, dando preferência às figuras geométricas.

Um recado para sala de aula

Professor, já imaginou quantas atividades você pode criar na sala de aula utilizando esse tema em conjunto com o professor de Geografia? Podem ser trabalhados vários temas matemáticos a partir de um tema simples: os tapetes orientais. Sugerimos que você procure o professor de Geografia da sua escola e proponha a realização de algumas atividades em conjunto. Assim, é possível trabalhar o tema matemático relacionado com fatores geográficos, econômicos e sociais das regiões de procedência dos tapetes.

A procedência do tapete, a densidade de pontos e a quantidade de trabalho necessário para tecê-lo está intimamente ligado ao seu preço final. A revista Veja (29 de maio de 2002) trouxe os valores dos tapetes de várias procedências por m^2.

Procedência	Irã	Afeganistão	Cáucaso	Paquistão	China	Tibete
Preço (reais/metro quadrado)	250 a 500	200 a 1.400	1.000 a 1.500	800 a 1.400	150 a 300	300 a 1.500

Sabendo-se que a dimensão de uma sala é de 4m por 6m, qual seria o preço de um tapete tibetano que iria forrar toda a área da sala?

O custo do tapete é de ______________________

A razão do preço por metro quadrado é um exemplo de razão que relaciona grandezas de naturezas diferentes. Velocidade, densidade e densidade demográfica são exemplos de comparações de grandezas de naturezas diferentes.

Nós vimos nessa atividade o termo: densidade de pontos. Defina com sua palavras o que significa isso.

____

____

____

____

____

Para saber mais

Podemos criar variadas razões para comparar grandezas diferentes. Veja algumas bastante utilizadas:

Velocidade: comparação entre distância e tempo (50km/h significa que um veículo percorre 50 quilômetros em 1 hora).

Densidade: comparação entre massa e volume (densidade do alumínio: 2,6g/cm^3; significa que um 1cm^3 de alumínio pesa 2,6g).

Densidade demográfica: comparação entre tamanho da população e área em que a população está (densidade demográfica da China: 128,96hab/km^2. Significa que em cada km^2 há cerca de 129 pessoas).

Nesses casos, a expressão numérica apresentada não é dada por um par de números como nas razões anteriores, porém a comparação supõe que o segundo termo seja um; exemplo: 50km/h significa 50km percorridos em 1 hora.

Atividade 9

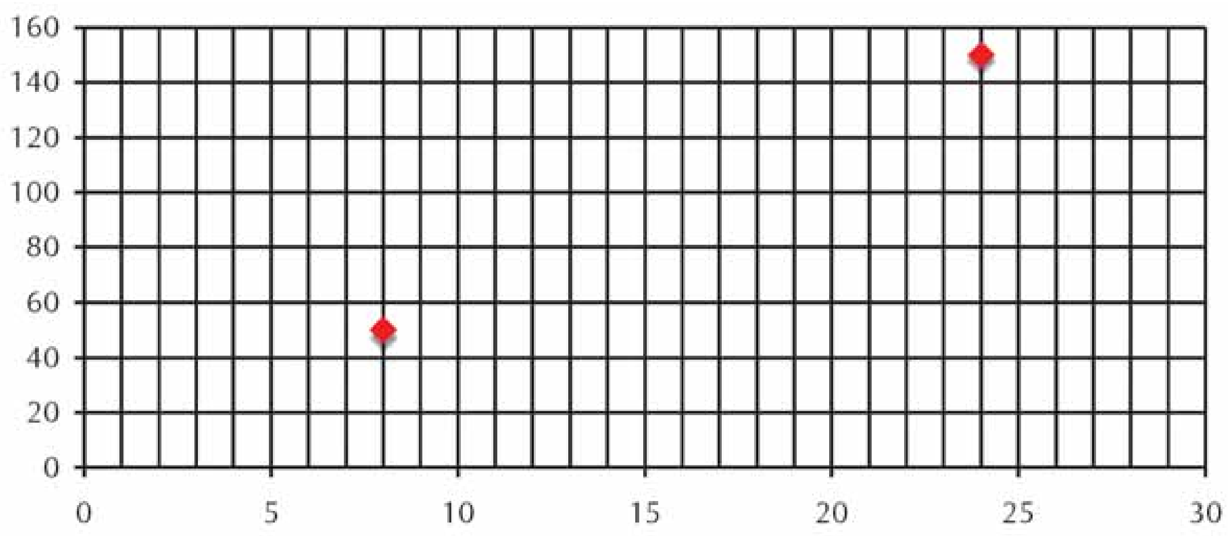
Na tabela abaixo estão representadas as quantidades de peças produzidas por uma máquina num certo período de tempo:

Tempo (min)	8	12	16	24
Quantidade de peças	50	75	100	150

Vamos analisar algumas questões interessantes desse problema. Vamos preencher uma outra tabela com os resultados das razões nos intervalos:

	8 e 12	12 e 24	16 e 24
Razão entre os tempos	$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$		
Razão entre as quantidades de peças			$\frac{100}{150} = \frac{2}{3}$

Faça a representação gráfica no plano dos pontos da tabela:



Vamos pensar sobre algumas questões:

a) À medida que o tempo aumenta a produção de peças aumenta?

b) As razões entre cada intervalo são iguais em relação tanto ao tempo quanto à quantidade de peças?

c) Calcule a razão do tempo e da quantidade de peças no intervalo de 8 minutos e 24 minutos. Também continuou igual?

d) Qual a sua conclusão?

Aprendendo sobre Educação Matemática

Aspectos importantes da representação gráfica

Dentre as formas de representação matemática existentes, a representação gráfica, que utiliza o plano, curvas, representação e localização no espaço cartesiano, escalas, variáveis dependentes e independentes etc., permite uma representação muitas vezes concisas de fenômenos realmente complexos. A representação gráfica pode permitir ao leitor obter rapidamente, com muita precisão, muitas informações de um fenômeno do passado ou do presente, real ou não real, e mesmo ajudar a fazer previsões futuras (o que será trabalhado nas últimas unidades deste TP).

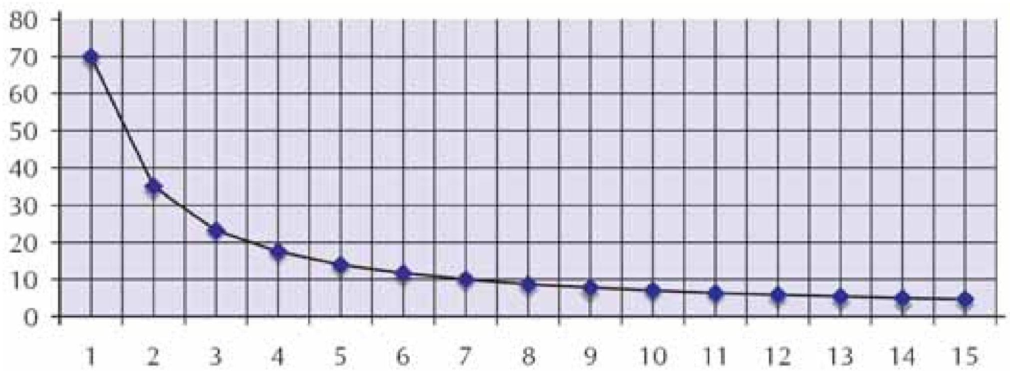
A competência de traduzir fenômenos em representação gráfica ou ler gráficos e interpretar o fenômeno que ele representa exige do aluno e do professor conhecimentos matemáticos ligados aos conteúdos acima citados. Assim, o trabalho com gráficos e tabelas permite uma articulação entre diferentes conceitos matemáticos tal que essas representações podem servir como uma síntese dos conhecimentos envolvidos no problema.

Habilitar o aluno a traduzir tabelas e gráficos é contribuir com a sua formação de cidadão, em especial porque essa linguagem matemática ganha, a cada dia, mais espaço na mídia destinada ao grande público e está muito presente nas atividades profissionais nos mais diferentes setores produtivos e culturais.

Somente nos últimos anos esse conteúdo matemático foi introduzido no currículo das séries iniciais, mas a escola tem dificuldades de trabalhá-lo de forma adequada com os seus alunos; portanto, deve ser um tema de especial atenção por parte dos professores de 5ª a 8ª séries.

Atividade 10

Observe a representação gráfica no plano cartesiano:



Esta é uma representação gráfica da velocidade em função do tempo gasto por um veículo para percorrer uma distância fixa.

Tempo	1	2	7	10	14
Velocidade	70	35	10	7	5

Como fizemos na atividade 6, calcule as razões do tempo e da velocidade de alguns intervalos.

	1 e 2	1e 10	10 e 14
Razão entre os tempos	$\frac{1}{2}$		
Razão entre as velocidades			$\frac{7}{5}$

Vamos analisar algumas questões sobre essa situação:

a) À medida que a velocidade do carro aumenta, aumenta ou diminui o tempo necessário para fazer o percurso?

b) Qual a relação que existe entre as razões em cada intervalo? O que isso significaria?

c) Calcule o produto da *razão entre os tempos* e a *razão entre as velocidades* em cada intervalo.

Atividade 11

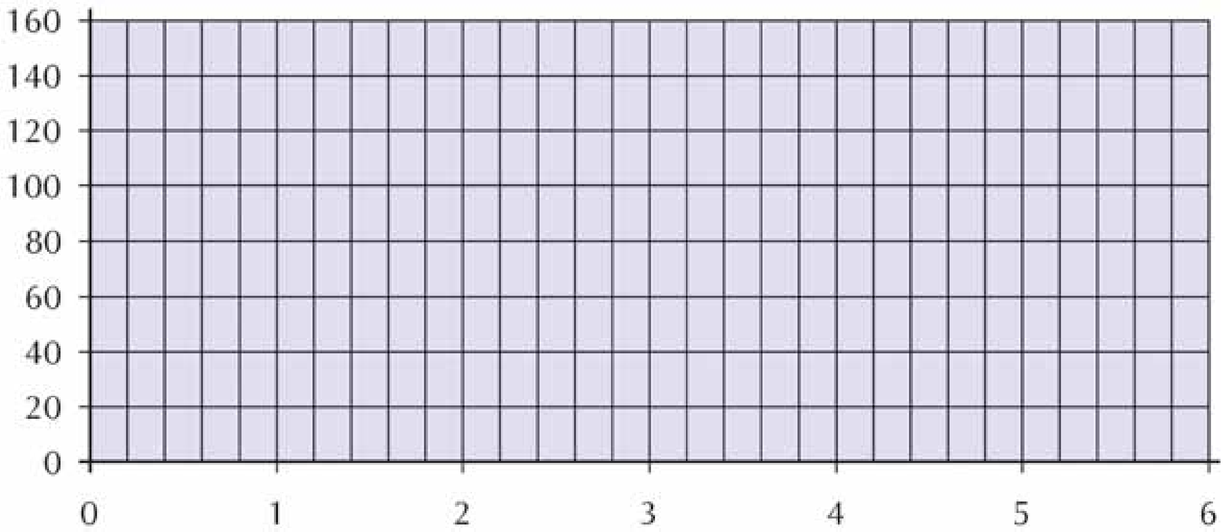
Um piloto de uma competição fez a seguinte observação sobre o tempo de sua corrida e a marcação do metro que estava localizada na estrada em que realizava a corrida.

Tempo (s)	1	2	3	5
Posição	50	70	90	130

Faça, também, uma tabela com o cálculo das razões dos intervalos.

	1 e 2	2 e 3	3 e 5
Razão entre os tempos	$\frac{1}{2}$		
Razão entre as posições			$\frac{90}{130} = \frac{9}{13}$

Faça a representação gráfica no plano cartesiano dos pontos dessa situação:



Responda:

a) À medida que o tempo aumenta, aumenta ou diminui a velocidade do carro?

b) Qual a relação que existe entre as razões em cada intervalo?

Atividade 12

Você deve ter observado, colega, que nas atividades anteriores foram analisadas questões importantes sobre razão e proporcionalidade. Julgue se as questões a seguir estão corretas:

a) Se as razões entre duas grandezas, no mesmo intervalo, são iguais, podemos dizer que as duas medidas são proporcionais ou diretamente proporcionais?

b) Se as razões entre duas grandezas, no mesmo intervalo, são inversas entre si, podemos dizer que as duas medidas são inversamente proporcionais?

c) Se entre grandezas, no mesmo intervalo, apenas um intervalo não for igual ou for o inverso do correspondente, podemos dizer que não são proporcionais?

Um recado para sala de aula

Professor, você já deve ter ouvido um comentário muito utilizado pelos professores para dizer que duas grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais. Quando o professor vai pedir para os alunos compararem grandezas, pergunta: se uma grandeza aumenta e a outra também, significa que elas são diretamente proporcionais? Ou se uma grandeza aumenta e a outra diminui, então elas são inversamente proporcionais? Observando as atividades 9, 10 e 11, você concorda com essas afirmativas? Justifique.

Pela representação gráfica, podemos dizer que toda grandeza diretamente proporcional tem como sua representação uma reta. Você concorda? Não esqueça de analisar com a atividade 9.

Você deve ter observado que na atividade 11 as variações das posições são iguais (exemplo: 70 – 50 = 20, 90 – 70 = 20), porém as razões não são iguais.

Dessa forma podemos concluir que duas grandezas são diretamente proporcionais quando suas **razões** são iguais, ou inversamente proporcionais quando suas razões são inversas.

Dadas as grandezas:

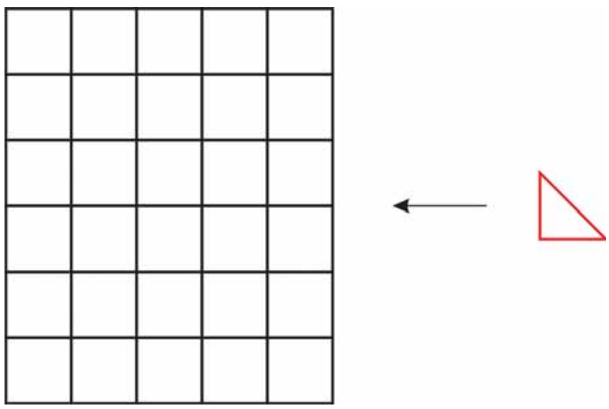
Grandezas	Medidas	
x	a	c
y	b	d

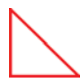
Então podemos afirmar que x e y são diretamente proporcionais se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

Podemos afirmar que x e y são inversamente proporcionais se $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$ ou $\frac{b}{a} = \frac{c}{d}$

Atividade 13

Veja a figura abaixo e calcule o número de triângulos que cobre toda a figura.



De acordo com a contagem, podemos dizer que a área da figura é ______  .
Contando os quadrados da figura, podemos dizer, também que a área da figura é de ______ □ .

Medir significa comparar uma grandeza com outra de mesma natureza.

Medir superfície significa, então, comparar uma medida com outra. A medida da superfície é denominada área. A área é expressa por um número acompanhado por uma unidade de medida, ou seja, aquela usada como referência para comparação: no caso, nessa atividade essa referência é o □ que é a nossa unidade de medida de superfície.

Assim, a área é expressa por um número acompanhando do □.

Para medir a área de uma superfície, é melhor usar uma unidade padrão para não encontrarmos resultados diferentes. Pode-se usar quadrados de 1 centímetro ou 1 milímetro de lado para calcular essa área.

A determinação da unidade para determinar uma área dependerá do tamanho da sua figura. Por exemplo, para determinar a área de um terreno relativamente pequeno a melhor medida seria o m^2 e, talvez, para expressar a área de um país a melhor medida seria o km^2.

Para saber mais

Veja algumas unidades usadas para medir área:

1 alqueire paulista = $24.200m^2$

1 alqueire mineiro = $48.400m^2$

1 alqueire do Norte = $27.225m^2$

1 hectare (1ha) equivale a $10.000m^2$

1 are (1a) equivale a $100m^2$

Atividade 14

Veja a questão:

Como o Corpo de Bombeiros consegue determinar quantas pessoas estão num show ou manifestação pública em um estádio ou praça sem fazer a contagem?

Para saber como isso acontece, basta determinar quantas pessoas cabem em $1m^2$. Desenhe um metro quadrado no piso da sua classe e peça para que os alunos entrem dentro dele. E conte quantos alunos cabem em $1m^2$, observando:

- Que as pessoas não fiquem muito próximas: ____________ .
- Que esteja bem cheio, ou seja, coloque o maior número de alunos, porém não deixe muito apertado; dê condições para que as pessoas fiquem com conforto: ____________ .

Se for feita uma reunião plenária ou outra atividade na quadra da sua escola, quantos alunos caberiam? (Se a sua escola não tiver quadra de esporte, escolha a que você construiu na situação-problema).

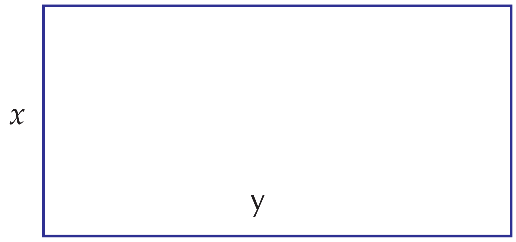
Você deve ter calculado o produto da quantidade de alunos em $1m^2$ e da área da sua quadra. Esse é o mesmo procedimento utilizado pelo Corpo de Bombeiros para determinar a quantidade de pessoas em grandes reuniões.

Atividade 15

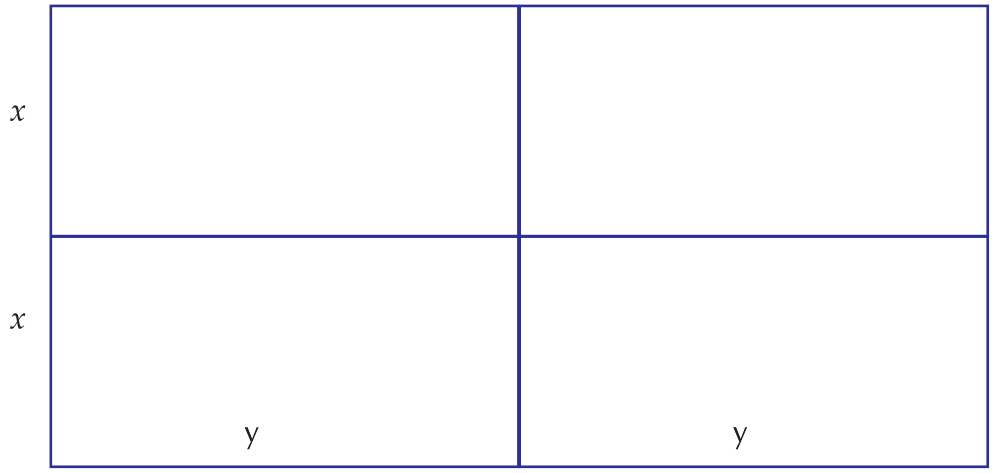
Martin Gardner apresenta um problema bastante interessante em que vamos pensar nesta atividade. (Nas AAA você verá algumas atividades trabalhadas com os alunos baseadas nesse problema. Aqui vamos trabalhar apenas alguns conceitos mais importantes).

O problema propõe a utilização de figuras planas para formar mosaicos que sejam semelhantes à figura inicialmente utilizada. Para ficar mais claro, vamos ver um exemplo:

Dado o retângulo abaixo com a razão entre os lados sendo x/y, vamos tomar essa figura como peça do mosaico e vamos justapor várias delas de modo a formar uma nova figura semelhante à primeira:

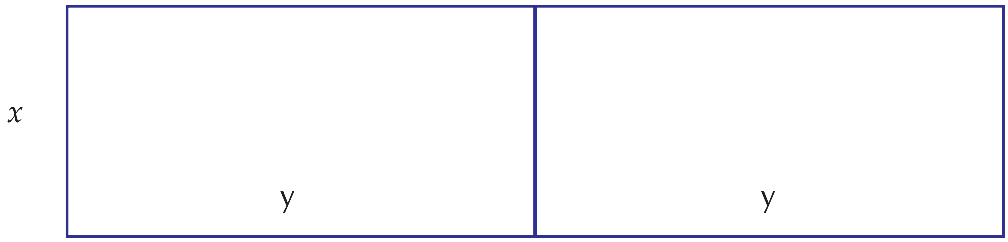


Talvez você possa pensar em uma primeira solução assim:



Assim, temos um retângulo semelhante ao primeiro, pois a razão entre os lados é $2x/2y = x/y$.

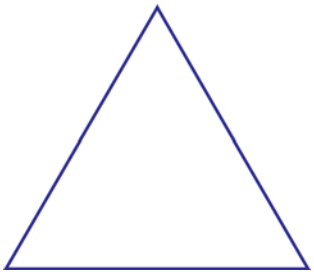
Porém, se dispusermos de apenas dois retângulos:



A razão será $x/2y$; então, não é uma solução válida para o nosso problema.

Forme um novo mosaico com o mesmo retângulo.

Agora, vamos fazer o mesmo procedimento para o triângulo abaixo. Ou seja, construa um mosaico justapondo triângulos de modo a formar uma nova figura semelhante ao triângulo inicial.



Depois de resolver, verifique as soluções possíveis nas respostas no final dessa unidade.

Observando o que você fez, responda às perguntas:

a) De quanto foi o aumento da base? Por exemplo, no retângulo nós dobramos o tamanho da base, pois colocamos mais um retângulo ao lado. Em quanto aumentou sua área? E no triângulo?

b) Dobrando a base e a altura do retângulo, quantos retângulos você precisou para encontrar uma figura semelhante?

c) Dobrando a base e a altura do triângulo, quantos triângulos você precisou para encontrar uma figura semelhante?

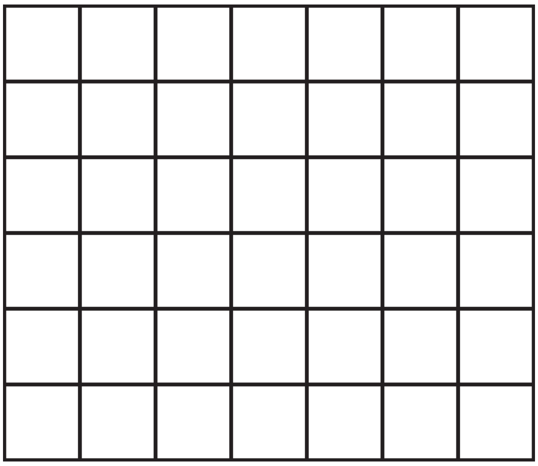
d) Observando as duas situações, responda: se eu dobrar as dimensões de uma figura, a área dobra também? Justifique sua resposta.

Atividade 16

A partir do que você, professor, pôde perceber da atividade anterior, vamos resolver as duas situações abaixo:

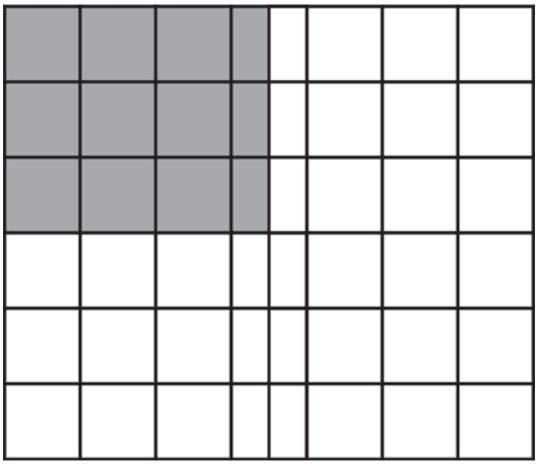
a) O orçamento feito por Dona Maricota para colocar piso em uma sala foi de R$650,00. Analisando a planta da sua casa, percebeu que havia dado as dimensões erradas para o vendedor da loja. Na verdade a sua sala tinha a metade das dimensões que ela havia apresentando. Qual seria, então, o valor que iria gastar para colocar piso na sala?

b) Uma gráfica sabe que um pacote de folhas de papel retangulares pesa 2kg. Qual será o peso de um pacote (com o mesmo número de folhas) com folhas que têm o dobro do comprimento e o dobro da largura das folhas do pacote original?



Para a primeira pergunta, imagine que as dimensões da sala que D. Maricota inicialmente deu ao atendente foi 7m por 6m.

Ao chegar em casa, Dona Maricota percebeu que as dimensões corretas eram 3,5m por 3m, ou seja, a metade das dimensões anteriores. Com essas novas medidas qual a área da sala da Dona Maricota?



Também podemos representar a situação algebricamente, assim:

$$a \times b = ab, \text{logo}$$

$$\left(\frac{1}{2}a\right) \times \left(\frac{1}{2}b\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} a \times b = \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}\text{área}$$

E sobre a pergunta da gráfica? Qual será o peso do novo pacote de papel com a mesma quantidade de folhas, porém com as suas dimensões duplicadas?

Vamos pensar um pouco mais nessas situações. Dividindo pela metade as dimensões, a razão das dimensões entre a primeira e a segunda sala é 1/2. Se fizermos a razão entre as áreas o resultado será 1/4. Então podemos concluir que dimensão e área são grandezas não propocionais ?!

Propomos que você pense um pouco e anote aqui a sua opinião sobre isto. Se precisar, faça outros desenhos e gráficos.

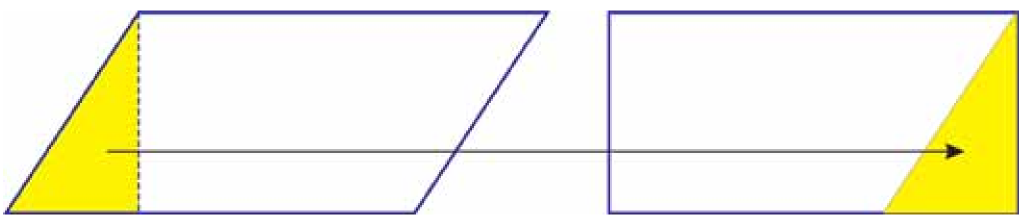
Porém, não vamos lhe dar nenhuma sugestão agora! Você vai discutir a sua resposta na sua próxima oficina e ver lá o que os seus colegas pensam sobre o assunto.

Atividade 17

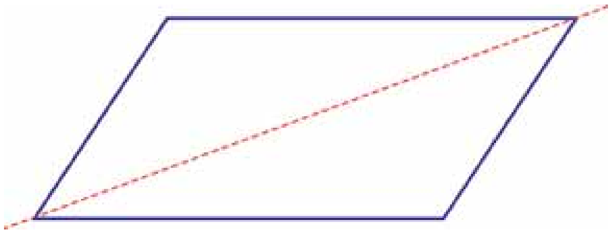
Até aqui fizemos cálculo da área de retângulos ou quadrados, pois, como demonstramos pela figura na atividade 12, basta você determinar o produto das suas dimensões.

Talvez você já tenha compreendido como se calcula a área de figuras como triângulos, trapézios e paralelogramos; entretanto, vamos, aqui, relembrar:

Sabe-se que um paralelogramo é um quadrilátero que tem lados opostos paralelos. Dessa forma para calcular a sua área podemos recompô-la para formar um retângulo ou quadrado cuja área já sabemos calcular.



Então, podemos calcular a área do paralelogramo como fazemos com o retângulo, ou seja, ______________________ Se você utilizar o mesmo paralelogramo e o cortar ao meio em alguma das suas diagonais, encontraremos dois triângulos.



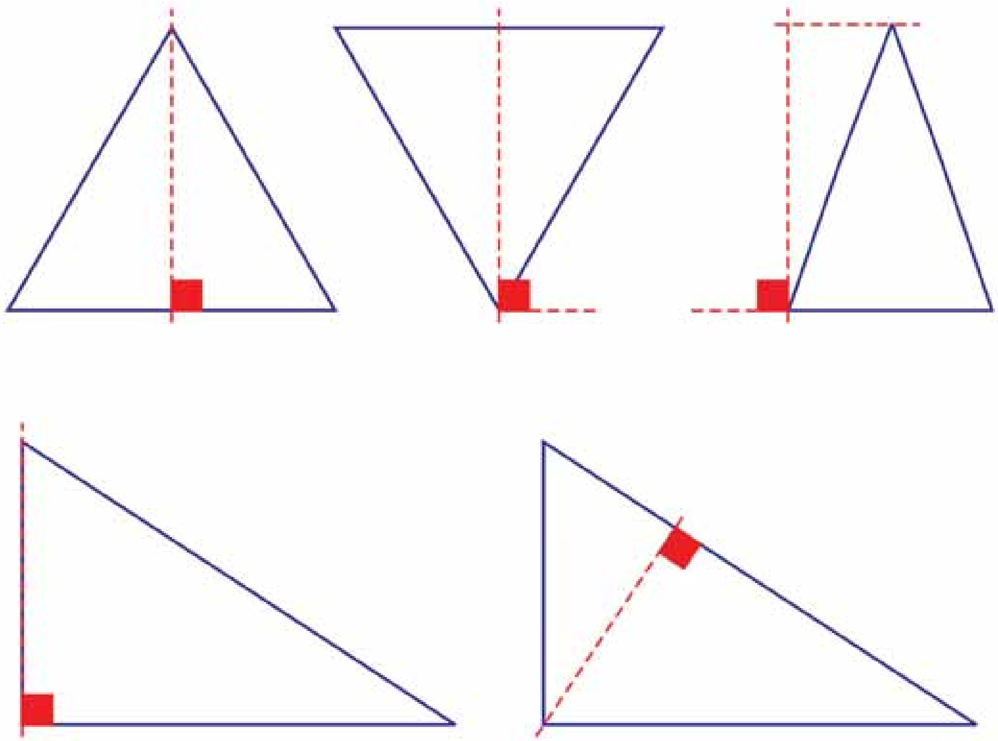
Assim a área dos triângulos será a metade da do retângulo, ou seja, a metade do produto das dimensões. Em vários livros você encontra a seguinte fórmula:

$$A_{triângulo} = \frac{base \times altura}{2}$$

Isto vale para qualquer triângulo.

Mas tome cuidado: é muito comum que os alunos confundam altura com lado. Altura é o segmento perpendicular à base.

Veja as alturas nos triângulos abaixo:

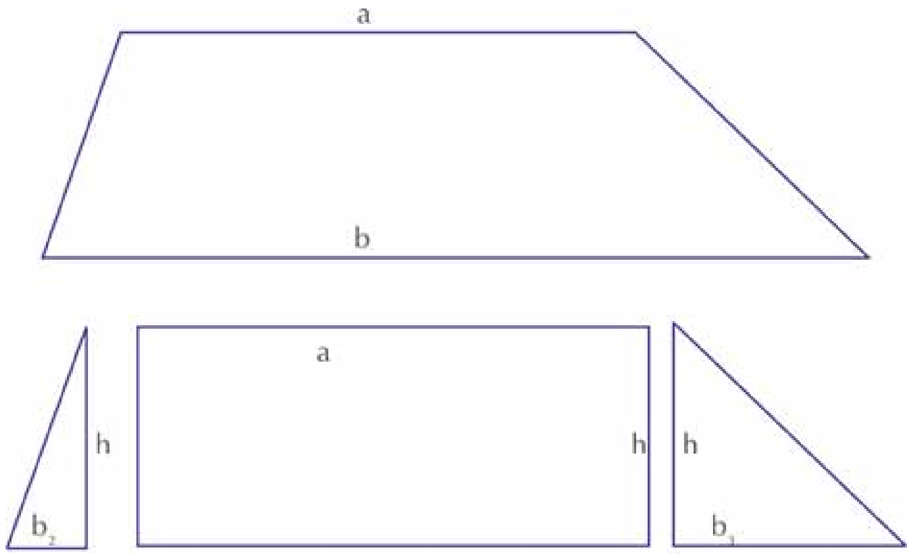


Um recado para sala de aula

Quando o aluno visualiza a figura em outra posição é possível que não encontre a altura pois sempre vai procurá-la em relação à horizontal. Você teria alguma sugestão para acabar com esse equívoco? O que você faria para que o seu aluno entendesse melhor esse conceito?

Escreva e leve sua sugestão para ser discutida na próxima oficina.

Para calcular a área do trapézio, podemos decompor a figura em outras que já conhecemos.



Como a área do triângulo é determinada pelo produto da medida de um lado pela medida da altura do triângulo que sai desse lado, então concluímos:

Área do triângulo menor: $\dfrac{b_2 \times h}{2}$

Área do triângulo maior: $\dfrac{b_3 \times h}{2}$

Área do retângulo = a x h

Como a área do trapézio é a soma de todas as figuras, temos:

$= \dfrac{b_2 \times h}{2} + \dfrac{b_3 \times h}{2} + a \times h =$

$= \dfrac{b_2 \times h + b_3 \times h + 2 \times a \times h}{2} =$ Reduzindo todos os termos ao mesmo denominador.

$= \dfrac{h(b_2 + b_3 + 2a)}{2} =$ Colocando o termo h em evidência.

$= \dfrac{h(b_2 + b_3 + a + a)}{2} =$ Decompondo o 2a = a + a

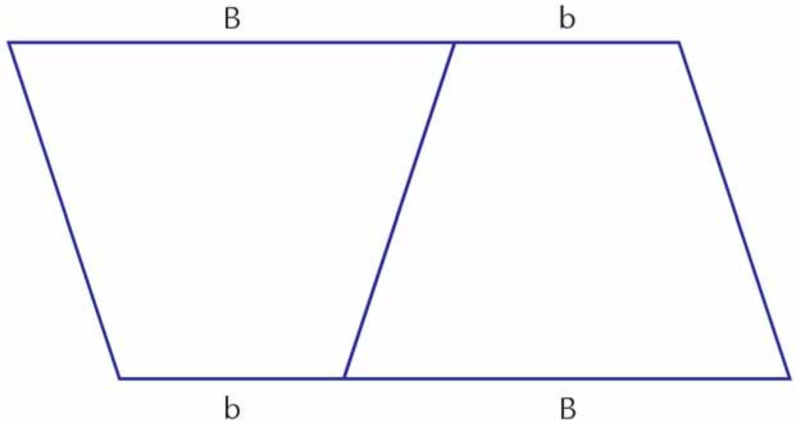
$= \dfrac{h(b + a)}{2}$ $b_2 + b_3 + a = b$

$= h \times \dfrac{a + b}{2}$

Observando o procedimento acima, explique com suas palavras como podemos calcular a área do trapézio.

Uma outra maneira de calcular a área do trapézio poderia ser o uso de dois trapézios iguais feitos em papel.

Cole agora os dois trapézios como indicamos abaixo:



Assim, obtemos uma paralelogramo de base B+b e de altura igual à do trapézio. Como essa figura é formada pelos dois trapézios iguais, podemos dizer que:

$A_{trapézio} = 1/2\ A_{paralelogramo} = 1/2\ (B+b) \times altura.$

Talvez essa demonstração seja mais simples de ser trabalhada com os seus alunos.

Resumindo

Nesta seção, você aprendeu a:

– utilizar algumas relações para comparar duas grandezas, tais como razão, razões especiais e porcentagem;

– identificar e calcular proporções diretamente, inversamente ou não proporcionais numérica e graficamente;

– construir estratégias para o cálculo de área, incluindo triângulo, paralelogramo e trapézio, por meio de composição e decomposição de figuras.

Seção 3

Transposição Didática: trabalhando a proporcionalidade e medidas em sala de aula

Objetivo da seção

Ao longo desta seção, esperamos que você possa:

Conhecer e produzir situações didáticas adequadas à série em que atua, envolvendo:

- Escala e proporção;
- Estimativa;
- Desenhos geométricos;
- Tratamento de informação.

Refletir sobre tópicos da teoria da Educação Matemática que embasam novos procedimentos pedagógicos no ensino e aprendizagem da matemática, articulando-os com os procedimentos sugeridos para a sala de aula, reconhecendo a importância, no processo de aprendizagem, dos fatores:

- Aplicação de um currículo em rede;
- Relação intrínseca entre currículo em rede e a compreensão e aplicação em sala de aula sobre campos conceituais, conceitos e teoremas em ato;
- Avaliação em Educação Matemática.

Após a experiência de traçar a planta da quadra poliesportiva, você deve ter notado que muitos dos conteúdos presentes na proposta curricular fundamentada no PCN de Matemática no ensino fundamental de 5ª a 8ª séries foram mobilizados ao longo da realização da situação-problema.

Cabe ressaltar que a forma como os conteúdos foram surgindo no processo de resolução da situação é bem diferente de como planejamos normalmente nossas aulas. É normal escolhermos, inicialmente, certos conceitos matemáticos e, a partir deles, planejarmos atividades que pretensamente irão favorecer a construção daqueles conceitos pelo aluno. Assim fazendo, os conteúdos vão surgindo ao longo do currículo de Matemática de forma fragmentada e, muitas vezes, sem uma conexão entre eles.

Ao trabalhar com os conceitos matemáticos de forma isolada uns dos outros, a escola acaba por deformar as noções matemáticas, uma vez que, no contexto da aplicação prática, o que existe é sempre um conjunto de conceitos articulados que se influenciam mutuamente, constituindo o que se denomina um campo conceitual.

Aprendendo sobre Educação Matemática

Você deve se lembrar de que já estudou sobre campos conceituais no caderno de Teoria e Prática 1, Unidade 2.

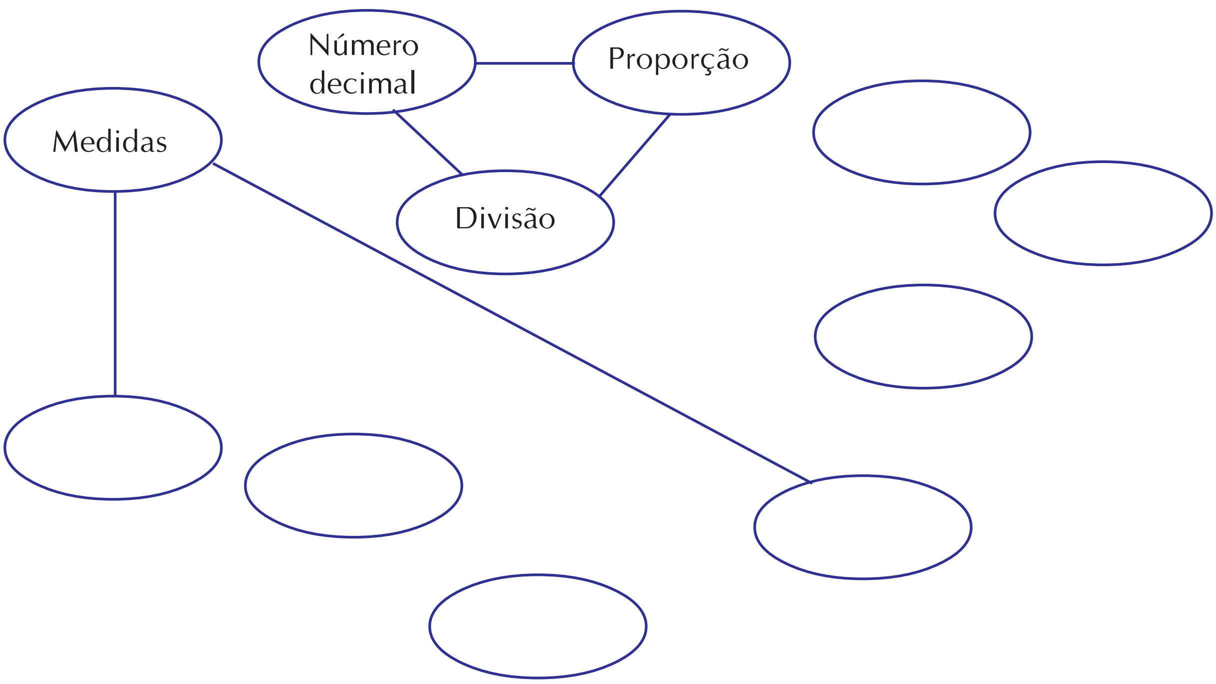
Durante o estudo das unidades, é importante que não perca de vista que a constituição dos conceitos na aprendizagem matemática acontece a partir de uma rede conceitual ampla. Os conceitos não são tratados como "ilhas" isoladas, com vida própria e autônoma. Devemos pensar que cada conceito possui uma espécie de "rede conceitual" ou de um "campo conceitual" que dá sentido ao conceito em referência.

Um ensino realmente significativo deve levar essa premissa em conta, pois o recorte ou o rompimento de um conceito da sua rede em nada contribui para o desenvolvimento do aluno.

Atividade 18

Professor, revendo as etapas que você percorreu para traçar a quadra poliesportiva, faça um levantamento dos conceitos matemáticos que você mobilizou ao longo de sua realização.

Faça um esquema colocando dentro de cada balão um conceito presente na situação. Após isso feito, ligue os balões, indicando aqueles conceitos que parecem se relacionar na resolução da situação. Para facilitar iniciamos abaixo o esquema para você.



Aprendendo sobre Educação Matemática

Compreender um ensino que esteja voltado para a formação de um currículo em rede é um dos principais objetivos dos módulos do Gestar.

Você deve se lembrar de que já leu sobre isso no Texto de Referência TP1 – Unidade 3.

Observando o que fez acima e o texto que leu, você acha que é possível haver um currículo em rede de verdade? Aliás, é bem importante que você, professor, perceba que isso não se trata de apenas uma utopia. Muito pelo contrário, temos procurado mostrar que é possível aplicá-lo já no seu trabalho escolar.

Atividade 19

Faça uma enquete em uma de suas turmas sobre o esporte de quadra preferido. Classifique-os em três opções presentes de quadra poliesportiva: voleibol, basquetebol ou futsal.

Localize um espaço na escola (ou ao redor dela) para a demarcação, em tamanho real, da quadra do esporte que foi mais votado na enquete. Investigue os conhecimentos dos alunos sobre as regras, e, em especial, as que dizem respeito às dimensões oficiais da quadra. Discuta as regras com seus alunos no que diz respeito às dimensões da quadra escolhida, considerando as várias possibilidades, pois as medidas nas regras encontram-se num intervalo entre mínimos e máximos estabelecidos pela confederação. Discuta e escolha, com seus alunos, uma medida única para a quadra.

Para finalizar, solicite que, em grupo, os alunos façam a planta baixa da quadra em uma folha de cartolina a partir dos dados oficiais. A definição da escala a ser utilizada é uma tarefa inicial importante. Busque questionar, grupo a grupo, como se utilizar desse conceito na realização da planta da quadra.

Atividade 20

Realize uma discussão com seus alunos sobre como eles vão demarcar a quadra no terreno real. Algumas ferramentas e instrumentos serão necessários, e no planejamento deveremos antecipadamente prevê-los. Assim, peça para os alunos utilizarem a quadra traçada no papel para planejarem o material necessário para demarcá-la. Faça o levantamento dos materiais:

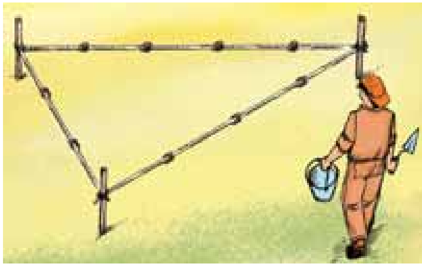
- Material para demarcação: tocos ou fincas, barbantes ou fios, cabo de vassoura etc.
- Ferramentas: marreta, martelo ou outros.

• Instrumentos de medida: que possam assumir as mesmas funções que os utilizados no desenho do papel, tais como régua, compasso, esquadro, trena etc.

• Instrumentos de construção: que garantam a definição de retas, traçado de circunferência, precisão de perpendicularismo e paralelismo.

Articulando conhecimentos

Professor, você já deve ter ouvido ou até mesmo lido em vários livros didáticos ou paradidáticos sobre a forma como alguns pedreiros ou mestres de obra constróem paredes perpendiculares. É comum alguns usarem a aplicação prática do Teorema de Pitágoras, ou seja, usam um cordão com nós equidistantes para formar um triângulo de lados 3, 4 e 5.



Atividade 21

Solicitar aos alunos que façam uma previsão antecipada, utilizando somente a planta por eles desenhada, de quanto material será necessário para traçar a quadra, tais como quantidade de tocos de madeira, metragem de barbante etc.

A organização das tarefas e missões entre os alunos e a definição clara do professor ao longo da realização da atividade são vitais para o sucesso da atividade. Lembre, professor, que não se trata apenas de traçar uma quadra num terreno vazio, mas de garantir a reflexão sobre os conceitos matemáticos em ação efetiva, notadamente sobre a diferença entre pensar e agir sobre uma folha de papel e pensar e agir sobre as dimensões reais, mobilizando fortemente noções tais como de proporções e construções geométricas, recorrendo para isso ao uso de instrumentos. Nesse sentido, falamos aqui em “conceitos e teoremas em ato”.

Aprendendo sobre Educação Matemática

A definição e discussão do que seja conceito e teorema em ato já foram estudadas, também, no caderno de Teoria e Prática 1, Unidade 2:

Conceito em ato: somente podemos reconhecer e analisar os conceitos em construção pelo aluno na ação. A mobilização e a construção do conceito matemático têm de ser consideradas a partir da ação efetiva do sujeito.

Teoremas em ato: diz respeito à validação de uma série de ações com o intuito de produzir um certo resultado.

Assim, professor, é fundamental que cada etapa seja acompanhada da elaboração de um relatório/dossiê, tanto por alunos relatores (previamente escolhidos pelos grupos) quanto por você mesmo. Nos relatórios devem constar os desafios, as dificuldades, os impasses, as soluções, as discussões, e, sobretudo, de que forma os conceitos matemáticos se fizeram presentes na atividade. E também, em que medidas e formas serviram como ferramentas para a realização da atividade.

É natural que a realização dessa atividade ocupe mais de uma aula, e, entre duas idas a campo, promova uma discussão sobre o andamento das atividades junto com seus alunos.

Atividade 22

Ao longo da atividade, você, professor, deve estar atento para a elaboração de um mapa de conceitos matemáticos mobilizados pelos alunos na realização das tarefas que compreendem tanto o desenho da quadra na folha de papel quanto sua transposição para o terreno real. Faça uma análise comparativa entre o mapa por você elaborado no início dessa transposição didática com esse mapa elaborado agora, observando e refletindo sobre as ações dos alunos.

Dependendo do interesse da escola e dos seus alunos, você pode avançar na proposta. Como sugestão, propomos que haja uma organização da turma buscando fazer um orçamento real do custo do projeto para uma possível construção da quadra, sobretudo visando a:

- Negociar o espaço de sua construção na escola ou em área próxima a ela.
- Contaminar as demais turmas numa campanha de adesão à idéia.
- Convidar engenheiros/arquitetos para visitar a escola e dar subsídios para a realização do projeto.
- Pesquisar custos de material e mão-de-obra.
- Enviar cartas-convite a empreiteiras.
- Elaborar estratégias para contactar lideranças comunitárias e autoridades para conseguir verbas e recursos para a concretização do projeto.

Atividade 23

Confrontando sua própria experiência na situação-problema e a realização da atividade junto aos seus alunos, reflita sobre:

1. O quanto sua experiência da resolução da situação-problema ajudou (ou não) na realização da situação de transposição didática.

2. Conceitos matemáticos ou procedimentos com os quais você teve dificuldades na situação-problema ou que seus alunos apresentaram soluções que surpreenderam você.

3. A reação dos alunos frente à proposta e o quanto de relações eles foram capazes (ou não) de estabelecer entre o conteúdo matemático e a realização da atividade.

4. Quais dificuldades você, professor, teve em termos de conhecimento matemático ou didático para a execução da transposição didática, e o que alteraria numa próxima aplicação da proposta junto a uma outra turma?

5. Como você poderia avaliar seus alunos? Você deveria fazer uma avaliação escrita? Ou é possível escolher alguma atividade para avaliá-los? Ou poderia avaliá-los durante o processo da realização da atividade?

Resumindo

Nesta seção, você teve oportunidade de:

• Conhecer os itens dos Parâmetros Curriculares Nacionais referentes à proporcionalidade;

• Perceber e relacionar os conceitos que emergem da resolução de uma situação-problema na proposta de um currículo em rede;

• Perceber a relação que existe entre a aplicação do currículo em rede com campos conceituais, conceito e teorema em ato, ou seja, termos e conceitos da Educação Matemática que se inter-relacionam na adoção de tais “procedimentos”;

• Utilizar ferramentas e instrumentos necessários para fazer medições e construções geométricas no papel e reais.

Leituras sugeridas

Citação de Doise (apud Fávero, 2005)

FÁVERO, Maria Helena. Psicologia e Conhecimento: subsídios da psicologia do desenvolvimento para análise de ensinar e aprender. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2005.

ALMOULOUD, Saddo. Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Editora da Universidade Federal do Paraná, 2008.

Bibliografia

CARDOSO, Fátima e OLIVEIRA, Lúcia Helena. *A ciência constrói atletas*. Superinteressante. Ano 5, n. 3, p. 33-41, mar. 1991.

Texto de referência

Avaliação em Matemática
Novas Prioridades no Contexto Educativo de Portugal

Paulo Afonso
Escola Superior de Educação de Castelo Branco

Objetivo da Avaliação

Pensamos não haver dúvida que o objetivo da avaliação terá de ser as aquisições do aluno. É para ele e por ele que escolhemos os métodos e as estratégias que entendemos serem as melhores e, é para ele e por ele que nos preocupamos com questões de avaliação. Contudo esta palavra "aquisições" deveria ser associada não apenas aos conhecimentos conceituais mas, também, às competências e às atitudes promovidas pela escola e por cada uma das disciplinas em particular. Pretendemos dizer com isto que a escola deveria também entender como sendo conteúdos a ministrar, não apenas os ditos conteúdos científicos ou do "currículo duro", mas, também, as atitudes e as competências necessárias para uma correta integração no ensino superior ou no mercado de trabalho.

Concordamos novamente com Prieto (1996) quando diz que o ensino superior recebe alunos com "carências que são essenciais para a sua formação. Estudantes incapazes de desenhar uma experiência, realizar um trabalho bibliográfico original, fazer generalizações, formular hipóteses, fazer previsões, analisar dados, pesquisar informação etc... Estudantes sem capacidade de organização, de estruturação de análise e de síntese. Sem atitude científica e sem ritmo de trabalho. Incapazes de realizar adequadamente uma atividades em equipe, de avaliar sua própria aprendizagem etc... etc. Mas isso sim, sabendo que as moléculas tetratômicas não apresentam centro de simetria e têm um momento bipolar não nulo" (p.55).

Urge, pois, que na escola, para além de se ter que saber muitas coisas, muitos conteúdos, (uns mais científicos, outros mais técnicos), também tenha que saber lidar com situações novas e imprevistas, dentro de um quadro normativo–atitudinal socialmente aceito.

Talvez devido a esses motivos, hoje se sinta que os programas de Matemática aprofundam menos os conteúdos do que antigamente. Pensamos que por detrás disso não está a idéia de que os alunos tenham que saber coisas diferentes , coisas úteis para o seu futuro como estudantes ou profissionais de um determinado ramo. Daí a relevância que assumem nos programas de Matemática as competências e as atitudes em detrimento dos conteúdos mais científicos.

Instrumentos de Avaliação

Reforçamos a idéia preconizada explicitamente nos atuais programas de Matemática do ensino básico e secundário sobre os objetivos que devem ser levados em conta na hora da planificação das tarefas de ensino e de avaliação. Devem acentuar não só os conhecimentos científicos que os alunos têm que adquirir, mas também as capacidades e as atitudes que têm que desenvolver e ainda as competências inerentes à resolução de problemas, à comunicação e ao trabalho de grupo.

Uma primeira linha de força, que gostaríamos de vincar tem a ver com a utilização do tradicional teste escrito. A este propósito permitam-nos o abuso de comparar as escolas com o processo instrutivo das aulas de condução. Pensamos que não seria motivo de melindre para ninguém se no ato normal de um cidadão obter a sua carta de condução, este estivesse apenas dependendo da opinião do seu instrutor. Isto, porque admitindo-se que esse formando teve sempre o mesmo instrutor, teve por conseqüência muitos senão todos os momentos para lhe fornecer informação sobre si próprio, em matéria de condução. Devido a esse estreito contato, o instrutor vai apercebendo-se dos conhecimentos, das habilidades, das capacidades e das destrezas do seu formando, a ponto de poder dizer, sem conceber um momento especial para o examinar, se ele está ou não em condições de conduzir "sozinho". Referimos ainda, que ao submetê-lo a esse momento formal de exame, poderia introduzir no processo variáveis estranhas, condicionadoras de eventuais comportamentos anormais, como seja a ansiedade e o nervosismo.

Por isso, quando a estas variáveis associamos uma nova pessoa que é Engenheiro examinador, aumentamos a probabilidade de o comportamento manifestado poder não ser o que eventualmente ocorreria, se o tal sujeito não fosse obrigado.

Se isto é assim no ato de se aprender a conduzir um automóvel, imagine o que será no ato educativo. Devido ao número de alunos que o professor tem, jamais poderá, com cada aluno, fazer um acompanhamento tão próximo como seria o caso do instrutor de condução. Contudo isto não invalida que por semana o professor não acabe por ter mais momentos de contato com os seus alunos do que o instrutor com os seus aprendizes. Portanto, estará também em condições de poder recolher muitas vezes informações sobre cada um dos seus alunos, quer seja por observação, quer seja por questionamento, quer seja ainda por entrevista, trabalhos de casa ou trabalhos de grupo na sala de aula.

Movimentos não faltam. Então, porque avaliar somente por testes ou maioritariamente por testes?

Perdoem-nos os que assim não pensam, mas só encontramos duas possíveis razões para justificar tal situação: ou é por falta de formação na utilização de outros instrumentos que não o teste, ou é por uma questão de comodismo funcional. Dizemos comodismo funcional, porque dá-nos um certo jeito, a nós professores, julgamos todos os nossos alunos sob o mesmo instrumento, no mesmo espaço físico, isto é, nas mesmas condições. Contudo, o erro grave é o de não levarmos em linha de conta que estamos a falar de pessoas, naturalmente diferentes como tal, jamais as condições serão iguais, porque à partida elas já não o são. Estão em jogo ritmos diferentes, capacidades diferentes, feitos diferentes etc.

No caso do instrutor, este não tem outro remédio que entregar o destino dos seus aprendizes à sorte de quem os vem examinar. No caso do professor, podendo ser ele o principal, senão o único responsável pelo destino dos seus alunos ainda usa cometer a maldade de os submeter a mais uma prova final, prova esta que assume caráter decisivo. No mínimo não deixará de suscitar alguma reflexão e apreensão, nomeadamente quando se defende um ensino da matemática pela via da partilha, do trabalho em grupo, da discussão, do diálogo e da negociação, da comunicação, da pesquisa e da resolução de problemas. Serão estas condições de ensino susceptíveis de serem avaliadas através de testes escritos? Claro que não! Então é porque alguns destes princípios não são considerados no ato do juízo final, servirão apenas para questões de desempate intelectual.

Evidentemente que com estas palavras não pretendemos dizer que o teste não deva ser instrumento utilizado na atividade avaliadora do professor de matemática. Não.

O que pretendemos referir é que não deve ser usado com exclusividade, nem entendemos ter mais peso do que qualquer outro instrumento de avaliação, tudo depende da finalidade com que se utilize e de quem vai ser o objeto da sua avaliação (escusamo-nos, nesta reflexão a falar na variável "construtor"do teste, porque só aí "haveria pano para mangas").

Deixamos, contudo, as seguintes questões: O que sabemos nós sobre a construção de testes? Onde aprendemos isso? Quem foi que nos ensinou? Há quanto tempo aprendemos isso? Que avaliação fazemos desta nossa forma de avaliar? É, de fato um assunto sério e merece muitos outros momentos de reflexão.

Passemos então a abordar outros instrumentos de avaliação numa perspectiva mais holística, menos particular.

Uma das mais recentes preocupações dos professores de Matemática, nomeadamente do Ensino Secundário, por força das novas diretrizes de ensino e de avaliação, consiste na dificuldade em encontrar a melhor forma de avaliar questões como sejam a resolução de problemas, a comunicação e o trabalho de grupo.

A - Resolução de Problemas

Numa perspectiva bastante abrangente, Carrillo e Guevara (1998) apresentam um modelo cognitivo – meta-cognitivo de avaliação em resolução de problemas muito completo. Sugerem que a avaliação desta temática possa incidir nas seguintes categorias: (a) características pessoais do resolvedor; b) características táticas do processo; c) características reguladoras do processo.

Contudo, um autor de referência neste tema da resolução de problema é Polya. Para este autor (1978), um resolvedor, ao resolver um problema, atravessa as seguintes etapas: a) compreensão do problema, b) concepção de um plano de resolução, c) execução desse plano e d) verificação. Pensamos que cada uma dessas etapas pode ser objeto de avaliação. Assim, no que concerne à primeira delas, bastará perguntar a um aluno se consegue explicar o enunciado por palavras próprias. Se conseguir fazer, isto é, se conseguir referir-se ao que é dado e ao que é pedido, o professor saberá que, em caso de insucesso na resolução, a causa não esteve nesta etapa, terá estado nas outras.

Na etapa de concepção do plano, o aluno também pode ser solicitado a explicitar oralmente ou por escrito como tenciona "atacar" a resolução do problema qual a estratégia que prevê ser adequada etc.

Durante a implementação do plano, o aluno terá que ser solicitado a ser o mais minucioso possível na explanação da estratégia ou na apresentação dos cálculos, se os houver. Para tal sugere-se que o aluno não deva apagar nenhum dos seus procedimentos escritos, no sentido do professor poder perceber por onde o aluno "andou" quando da procura da solução do problema. Se pretender anular um dos procedimentos escritos, que o faça, utilizando apenas um risco sobre esse registro (Afonso, 1995).

No final, isto é, depois de encontrada uma solução para o problema, o aluno terá que criar o hábito de não entender que a resolução está terminada. Terá ainda que verificar se a resposta faz ou não sentido e se é única, se implementou bem ou não o plano que delineou; se consegue fazer generalizações etc. Segundo Borralho (1990), deveria ainda haver nesta etapa uma intervenção metacognitiva por parte do aluno. Este deveria identificar as aprendizagens efetuadas ou reforçadas com a resolução do problema, isto é, o aluno deveria perguntar-se o que aprendeu de novo com o problema que acabou de resolver ou que aprendizagens viu reforçadas com essa resolução.

Charles et al. (1987), numa importante obra sobre avaliação da resolução de problemas sugerem a utilização de vários instrumentos de avaliação sobre essa atividade. Ainda que cada um deles possa carecer de adaptação à realidade portuguesa, não deixam de merecer a nossa reflexão, pois reconhecemos neles uma elevadíssima pertinência pedagógico-didática.

Em termos dos dados provenientes da observação dos alunos enquanto resolvem problemas, esses autores sugerem que se utilize a seguinte “lista de verificação de observação”.

Lista de verificação de observação em resolução de problemas

Aluno ______________________________ Data ____________

1. Gosta de resolver problemas
2. Trabalha cooperativamente com os outros colegas de grupo
3. Contribui com idéias para o grupo de resolução de problemas
4. É persistente – persiste na exploração do problema
5. Tenta compreender o tema do problema
6. Pensa acerca das estratégias que podem ajudar
7. É flexível – tenta diversas estratégias se necessário
8. Verifica a solução
9. Consegue descrever ou analisar a resolução

Fruto de uma observação sistemática pode resultar um outro instrumento de registro de informação a que Charles et al. (1987) denominou de “escala de classificação da observação em resolução de problemas”:

	Freqüente	Às Vezes	Nunca
1 - Seleciona estratégias de resolução apropriadas.			
2 - Implementa estratégias de resolução com precisão.			
3 - Tenta uma estratégia de resolução quando indeciso (sem a ajuda do professor).			
4 - Aborda problemas de uma maneira sistemática (clarifica a questão, identifica os dados necessários, planifica, resolve e verifica).			
5 - Mostra gosto pela resolução de problemas.			
6 - Demonstra auto-confiança.			
7 - Mostra perseverança na resolução de problemas.			

Em termos do registro escrito, estes autores apresentam aquilo a que chamam uma "escala holística focada" baseada nos seguintes cinco níveis:

Escala Holística Focada

0 Ponto: As folhas de registro têm as seguintes características**:**

-Estão em branco**;** - A informação do problema foi simplesmente recopiada e nada foi feito com essa informação, mostrando não haver compreensão do problema; - Existe uma resposta incorreta sem nenhum trabalho evidente.

1 Ponto: As folhas de registro têm as seguintes características:

-Há um começo para chegar à solução através do copiar da informação, que demonstra alguma compreensão do problema, mas essa aproximação não conduz à solução do problema; - Uma estratégia incorreta foi começada, mas depois desistiu e não há evidência de que se tenha mudado para outra estratégia; - Tentou-se alcançar uma submeta, mas não se conseguiu.

2 Pontos: As folhas de registro têm as seguintes características:

- O aluno usou uma estratégia interrompida e encontrou uma resposta incorreta, contudo, o trabalho mostrou alguma compreensão do problema; -Uma estratégia apropriada foi utilizada, mas (1) não foi desenvolvida o suficiente para encontrar a solução, (2) foi implementada incorretamente e, assim , conduziu a uma ausência de resposta ou resposta incorreta; - O aluno conseguiu encontrar uma submeta mas nada conseguiu além disso; - A resposta correta foi mostrada, mas (1) o trabalho não está compreensível, (2) nenhum trabalho é mostrado.

3 Pontos: As folhas de registro têm as seguintes características:

-O aluno implementou uma estratégia que podia ter levado à solução correta, contudo, compreendeu mal uma parte do problema e ignorou uma condição; - Estratégias de solução apropriadas foram aplicadas, mas (1) a resposta é incorreta sem razão aparente, (2) a parte numérica correta mas a resposta não, (3) nenhuma resposta foi dada; - A resposta correta foi dada e há alguma evidência que houve uma seleção de estratégias apropriadas. Contudo, a sua implementação não está bem clara.

4 Pontos: As folhas de registro têm as seguintes características:

- O aluno cometeu um erro na transposição de uma estratégia apropriada.Contudo, esse erro não reflete incompreensão do problema ou de como devia implementar a estratégia, parece sim, um erro de cópia de cálculos; - Estratégias apropriadas foram selecionadas e implementadas. A resposta correta foi dada em termos da informação do problema.

Uma das recomendações dos atuais programas do ensino da Matemática prende-se com o dever solicitar-se aos alunos a elaboração de relatórios sobre as atividades desenvolvidas, de forma a desenvolverem o espírito analítico – reflexivo.

Contudo, para que quando dessa solicitação, os alunos não entreguem folhas quase em branco, com poucas evidências sustentadas, sugere-se que o professor, no início, oriente esse relatório através, por exemplo, dos seguintes tópicos, propostos por Charles et al. (1987).

Relatório do aluno: questões a focar

Use as seguintes questões para te ajudar a “voltar atrás” e descreve o teu pensamento em relação à forma como tu trabalhaste em direção à resolução do problema.

1- O que fizeste quando viste o problema pela primeira vez? Quais foram os teus pensamentos?

2 - Usaste algumas estratégias de resolução de problemas? Quais? Como as trabalhaste? Como aconteceu encontrar a resolução?

3 - Tentaste alguma abordagem ao problema que não funcionou sendo necessário parar e depois tentaste outra abordagem? O que sentiste?

4 - Encontraste uma resolução para o problema? Como te sentiste?

5 - Verificaste a resposta em algum momento?

6 - Qual o teu sentimento, em geral, acerca desta experiência de resolução de problemas?

B - Comunicação

Se os nossos alunos forem capazes de falar sobre matemática de forma sustentada e refletida mostrarão ao professor as aprendizagens efetuadas ou eventuais lacunas que merecem ser corrigidas. Na promoção desta competência muito pode contribuir o trabalho em pares ou o trabalho de grupo. De fato, o trabalho de grupo em Matemática pode ser gerador de diálogos e de confrontos de opinião que, após devidamente fundamentados devem ser oralizados para toda a turma se pronunciar sobre eles. Contudo, este tipo de procedimentos não ocorrerá espontaneamente; terá que ser intencionalmente promovido pelo professor. Queremos dizer com isto que o aluno terá que ser sistemática e continuamente solicitado a verbalizar o seu pensamento, não devendo coibir-se de pensar alto. Num espírito de equipe, qualquer intervenção por mais descabida que possa ser, pode gerar motivos de discussão e conseqüentes aprendizagens. Há também, que se gerar o confronto das concepções alternativas que os alunos possuam sobre os mais variados aspectos da Matemática.

No sentido de orientarmos essa verbalização do pensamento, poderemos seguir as sugestões propostas por Clement e Konold (1989), que aconselham o trabalho em pares, com alternância de papéis de resolvedor e de ouvinte questionador:

Eu não entendi o problema:

- Lê de novo o problema;
- O que é que sabes? O que tens que saber?
- O que procuras?
- Poderás reformular o problema por palavras tuas?
- Poderás desenhar um diagrama ou esquema?

Eu não sei para onde ir a partir daqui:

- Ter-te-ão dado informações relevantes que ainda não usaste?

- Poderás resolver parte do problema?
- Será que há alguma informação útil escondida "no problema"?

Estará a minha solução correta?

- Que confiança tem na solução encontrada?
- Qual será a resposta plausível?
- Será que os passos da tua resolução são válidos?
- Será que há outro método que poderás usar para comprovar a tua resposta?

Estou confuso:

- Sê paciente. Tem calma e prossegue lentamente:
- Organiza o que tens de uma forma mais precisa.

Em função do que se acabou de referir, pensamos que uma grade de observação baseada nos tópicos seguintes pode ser muito útil na hora de avaliar a competência dos alunos:

Registro de Comunicação

Aluno ______________________________ Data ______________

____ 1. Costuma ser o porta-voz do grupo de trabalho.

____ 2. As suas intervenções orais são devidamente sustentadas.

____ 3. Comenta baseado em evidências as afirmações orais dos colegas.

____ 4. Conforta os colegas quando intervêm oralmente.

____ 5. Interrompe os colegas quando intervêm oralmente.

____ 6. Não costuma intervir oralmente nas aulas.

____ 7. Critica negativamente as intervenções orais dos colegas.

____ 8. Estabelece oralmente sínteses para toda turma.

Níveis:

Nunca (N) Raramente (R) Ocasionalmente (O) Freqüentemente (F) e Sempre (S).

C - Trabalho de Grupo

Se pretendermos que o trabalho de grupo em Matemática tenha conseqüências objetivas, como seja a de desenvolver a capacidade de registro minucioso, teremos que sugerir algumas orientações prévias a esse tipo de metodologia de trabalho (Afonso, 1995).

1- é de superior importância "pensar alto" à medida que vão resolvendo as tarefas matemáticas com as quais vão confrontar-se, mesmo que pensem que aquilo que estão a pensar seja um disparate;

2- é também de superimportância que cada elemento do grupo não deve isolar-se na resolução de tarefas: pelo contrário, deve compartilhar as suas idéias com os outros elementos do grupo;

3- o registro da resolução de cada tarefa deve ser o mais detalhado possível;

4- mesmo que se utilize calculadora, é importante o registro escrito da indicação das operações, bem como dos resultados encontrados;

5- não se deve utilizar a borracha ou o corretor quando da resolução por escrito da tarefa. Se pretender anular um registro basta traçar um risco por cima dele, sem que esse registro passe a deixar de ser perceptível.

O trabalho de grupo também pode constituir um momento ímpar na procura de informação por parte do professor sobre os aspectos atitudinais e de sociabilidade.

Assim, seguindo a sugestão de Prieto (1996) temos a tabela abaixo:

Atitudes Básicas para o Trabalho de Grupo

Aluno ______________________________ Data ______________

	1	2	3	4	5
1. Cumpre as normas de convivência social					
2. Respeita a sua vez para falar					
3. Relaciona-se com os outros alunos da turma					
4. Tem uma expressão oral adequada					
5. Permanece no grupo durante a realização da tarefa					
6. Respeita outras idéias e opiniões					
7. Evita fazer comentários paralelos					
8. Mantém um tom de voz adequado					
9. Mantém uma postura corporal correta					
10. Respeita as normas de funcionamento					
11. Tem gestos e modos corretos					
12. Participa voluntária e espontaneamente					
13. Mantém limpeza e higiene pessoal					
14. É claro nas suas intervenções					
15. Tem interesse pelo trabalho em equipe					

D - Avaliação e Classificação

Para terminarmos esta reflexão abordaremos agora o tema da classificação. Uma dúvida que assiste a cada um de nós professores que utilizou uma grande heterogeneidade de instrumentos de avaliação e que desenvolveu bastantes momentos de avaliação, é arranjar a melhor maneira de converter os imensos dados recolhidos (a maioria de natureza qualitativa) num valor numérico.

Para esta tarefa não conhecemos nenhuma receita que seja válida, para toda e qualquer situação terá que haver muito bom senso por parte de quem vai ter que tomar a decisão de rotular os alunos.

Quanto ao ensino secundário, os Programas são claros no que diz respeito ao peso que terão que ter, por exemplo, os testes clássicos:

"O professor não deve reduzir as suas formas de avaliação aos testes escritos, antes deve diversificar as formas de avaliação de modo a que cerca da metade seja feita usando outros instrumentos que não os testes clássicos" (Ministério da Educação, 1997, p.13).

Se esta ponderação é diretamente proporcional à nota a atribuir (ainda que não nos pareça que deva ser), a nota final poderá levar em conta os testes em mais que 50% . Uma outra coisa também não deixa de ser verdade: Matemática só nós, professores dessa disciplina, ensinaremos aos nossos alunos, enquanto que as atitudes e os valores deverão ser ensinados por todos. Por isso justifica-se o tal bom senso de que falávamos antes. Tudo dependerá da turma em causa e dos alunos em concreto. Uma certeza fica, porém, a nota final não deveria ser a média aritmética dos resultados dos testes escritos. Sobre isso, não temos dúvidas!

Bibliografia

ABRANTES, P.et al. *Pode haver um Currículo de Matemática centrada na resolução de Problemas?* In: FERNANDES, D.; BORRALHO; AMARO, G. (EDS). Resolução de problemas: Processos Cognitivos, concepção de professores e desenvolvimento curricular. Lisboa: IIE, 1994. p. 239-252

AFONSO, P. *Uma aventura matemática na internet*. Porto: ASA, 2001.

AFONSO, P. *O vídeo como recurso didático para a identificação e desenvolvimento de processos metacognitivos em futuros professores de matemática durante a resolução de problemas*. Lisboa: APM, Tese de mestrado, 1995.

AFONSO, P. e AFONSO, M. *Resolução de problemas em Matemática*: ensina-se primeiro e avalia-se depois ou ensina-se avaliando? Actas do prof/Mat 95, 1995. p.141-147.

AFONSO, P. *Resolução de Problemas e ensino de Matemática*. Possíveis razões justificativas da 1 experiência nem sempre correr bem e Possíveis sugestòes de Trabalho. Educare/Educere n. 3, 1993. p. 91-102.

BORRALHO, A. *Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de Matemática*: Proposta de uma programa de intervenção. Lisboa: APM, tese de Mestrado, 1990.

BRANCA, N. *Problem solving in schollmathematics* - Yarbook. NCTM, 1980. p. 3-8.

CARRILLO, J. *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la Matemática y su ensenñza:* metodología de la investigación y relaciones. Huelva: Universidde de Huelva Publicaciones, 1988.

CARRILLO, J. e GUEVARA, F. *Un instrumento para evaluar a resolución de problemas*. Uno n. 8, 1996. p. 65-81.

CHARLES, R.et al. *How to evaluate Progress in Problem solving*. NCTM, 1987.

CLEMENT, J e KONOLD, C. *Fostering Basic Problem* - solving skills in Mathematics. For The Learning of Mathematics, 9 (3), 1989. p. 26-30.

FERNANDES, D. *Complexidade, Tensões e Mudança na avaliação das aprendizagens*. In: ALMEIDA, L.; FERNANDES, J.; MOURÃO, A. (ORGS.), Ensino Aprendizagem de Matemática. Recuperação de alunos com baixo Desempenho . Riba dáve: didáxis, 1993. p. 43-60.

LEMOS V. *O critério do sucesso*. 4. ed. Lisboa: Texto, 1990.

LOPES, A. et al. *Actividades Matemáticas* - Programas 10, 11 e 12 anos. Aveiro: Ministério da Educação, 1997.

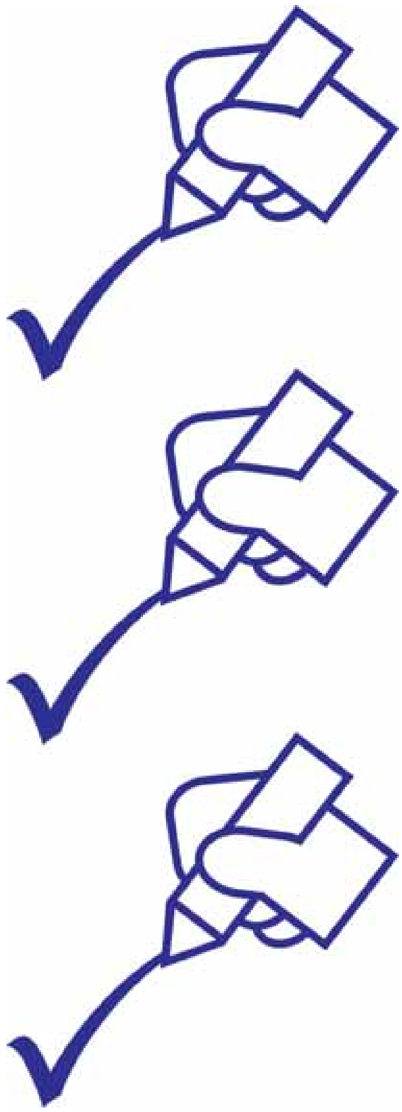
NOVAIS, E. CRUZ, N. *O ensino e o desenvolvimento de Capacidades Metacognitivas*. aprender e Pensar. Lisboa: departamento de educação da faculdade de ciências da Universidade de Lisboa. Projecto dianoia,1987.

POLYA. G. *A arte de resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Inteciência, 1978.

PRIETO,F. *La evalluación en la educación secundaria*. 2. ed. Salamanca: Amarú, 1996.

SILVA, M. *Avaliação*. Lisboa: CNS,1993.

Solução das atividades



Solução das atividades

Atividade 6

Aproximadamente 66,67%.

Melhor performance: Zequinha.

16/24

Atividade 7

15.000 habitantes lêem a revista A.

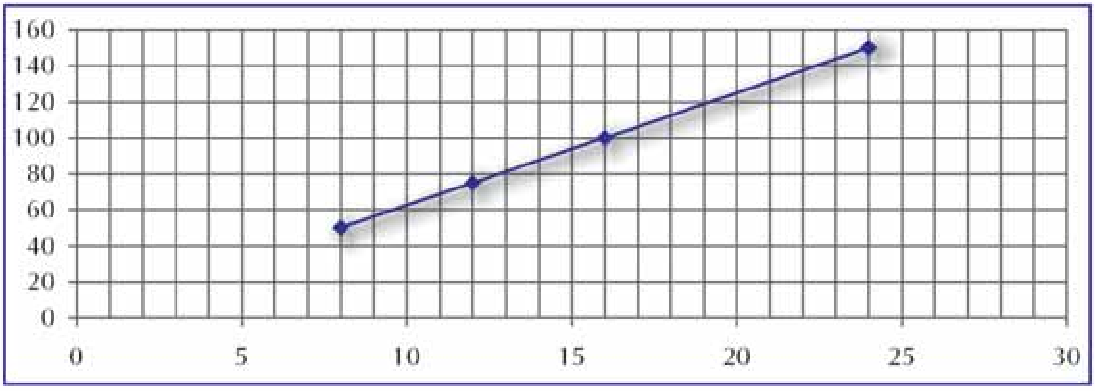
24.000 habitantes lêem a revista B.

Atividade 8

De R$7.200,00 a R$36.000,00 ou R$21.600,00 (usando a média de preço).

Atividade 9

	8 e 12	12 e 24	16 e 24
Razão entre os tempos	$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$	$\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$	$\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$
Razão entre as quantidades de peças	$\frac{50}{75} = \frac{2}{3}$	$\frac{75}{150} = \frac{1}{2}$	$\frac{100}{150} = \frac{2}{3}$



a) Sim.

b) Sim.

c) Razão: 3/1 e 5/1. Continuou igual.

d) As razões são iguais.

Atividade 10

	1 e 2	1 e 10	10 e 14
Razão entre os tempos	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{7}$
Razão entre as velocidades	2	10	$\frac{7}{5}$

a) À medida que a velocidade do carro aumentou o tempo necessário para fazer o percurso diminuiu.

b) As razões são inversas entre si.

c) O produto entre elas é 1.

Atividade 11

	1 e 2	2 e 3	3 e 5
Razão entre os tempos	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$
Razão entre as posições	$\frac{50}{70} = \frac{5}{7}$	$\frac{70}{90} = \frac{7}{9}$	$\frac{90}{130} = \frac{9}{13}$

a) À medida que o tempo aumentou a velocidade aumentou.

b) Não existe nenhuma relação entre as razões.

Atividade 12

a) Sim

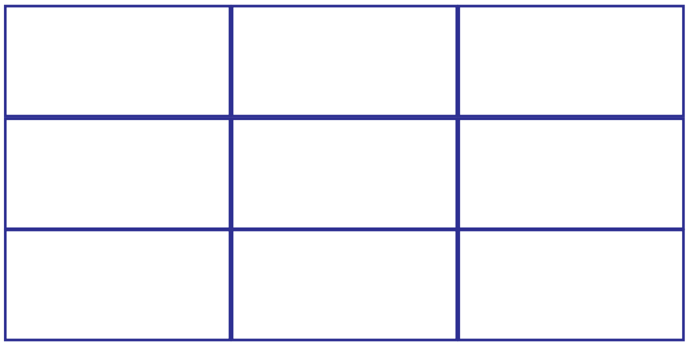
b) Sim

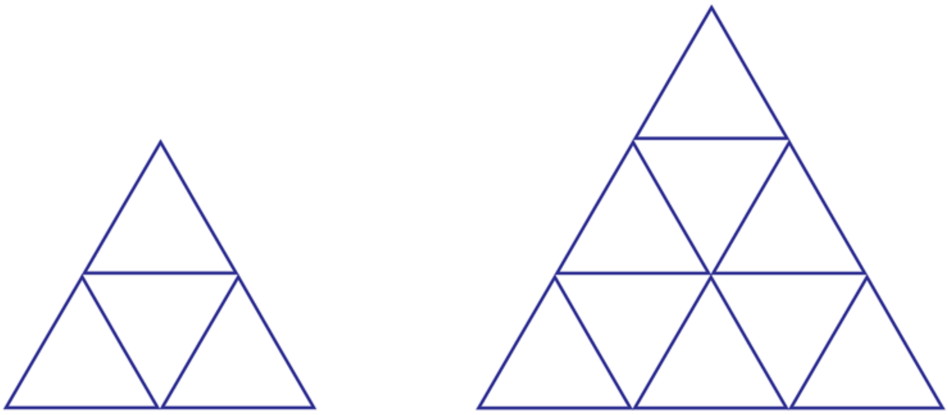
c) Sim

Atividade 13

60

Atividade 15





a) Quando a base foi dobrada, a área quadruplicou. Quando a base triplicou, a área aumentou nove vezes. No triângulo aconteceu o mesmo.

b) Foram necessários quatro retângulos.

c) Foram necessários quatro triângulos.

d) Relação lado e área:

Lado	Área
x 2	x 4
x 3	x 9
x n	x n^2

Atividade 16

a) R$162,50.

b) 8kg.

Área da sala: 10,5m^2.

Atividade 17

Área do paralelogramo: produto de um lado pela sua altura.

Unidade 6

Explorando conceitos matemáticos numa discussão sobre esportes - Tratamento de informação, números inteiros e medidas

Celso de Oliveira Faria

Iniciando a nossa conversa

Lembramos a organização das nossas unidades:

1. Resolução de uma situação-problema
A unidade propõe uma nova situação-problema relacionada ao esporte, tratando de problemas relacionados a tratamento de informação e números relativos.

2. Construção do conhecimento matemático em ação
Na seção 2, você verá como, partindo de uma nova situação significativa que foi a análise dos resultados de alguns atletas, foi possível introduzir e aprofundar os conceitos de média, números relativos e unidades de medidas.

3. Transposição Didática
A seção 3 discute problemas relacionados ao ensino-aprendizagem de conceitos vistos nas seções 1 e 2 e sugere ações relacionadas para a sala de aula.

Como as outras unidades, esta também conterá um Texto de Referência sobre Educação Matemática, que abordará o tema "**A flexibilização da aprendizagem matemática - Representação e Teoria de Quadros**" que consiste na análise e na valorização de diferentes formas de representação matemática do aluno.

Definindo o nosso percurso

Esperamos que, ao longo desta unidade, você possa:

1 – Com relação aos seus conhecimentos matemáticos:

Vivenciar a resolução de uma situação-problema relacionada ao tratamento de informação e números relativos como estratégia para mobilizar conhecimentos, construir conceitos em ação e desenvolver habilidades relacionadas a:

- tratamento de informação;
- média;
- interpretação e operação com números inteiros (ou relativos);
- reconhecimento e operações com unidades de comprimento, superfície, volume, tempo e massa.

Esses conhecimentos serão desenvolvidos nas seções 1 e 2.

2 – Com relação aos seus conhecimentos sobre Educação Matemática:

Adquir conhecimentos sobre:

- "A flexibilização da aprendizagem matemática - Representação e Teoria de Quadros", no Texto de Referência.

- Teoria de Quadros – seção 2.

- O corpo como origem do sistema de numeração decimal e do sexagesimal – seção 2.

3 – Com relação à sua situação em sala de aula:

- Conhecer e produzir, com relação aos temas tratados, situações didáticas adequadas à série em que atua.

Esse objetivo será tratado na seção 3.

Seção 1

Resolução de situação-problema: destacando e estudando o tratamento de informação

Objetivo da seção

Esperamos que, ao longo desta seção, você possa:

- Resolver uma situação-problema;
- Utilizar o tratamento de informação para a interpretação dos resultados dos atletas;
- Utilizar números relativos para auxiliar na interpretação dos dados.

Integrando a matemática ao mundo real

Ampliando os limites humanos nos esportes: quando as ciências produzem um novo ser humano

A ciência constrói atletas: a corrida atrás de medalhas leva esportistas aos laboratórios. Fisiologia do esforço, biomecânica, psicologia, tudo vale na luta por centímetros ou décimos de segundo.

Fabricar atletas não é a missão dos laboratórios de fisiologia do esforço. Ao trabalhar também com quem só se mexe por esporte, os cientistas estabeleceram parâmetros de atividade física para pessoas tão diferentes como crianças, idosos, mulheres grávidas, diabéticos. "Ginástica não faz bem da mesma maneira para todo mundo", adverte o fisiologista Antônio Carlos Silva. Assim como os atletas, cidadãos comuns, quando treinam menos do que o ideal, não têm benefício algum.

Porém, ao fazer esforços demais, o atleta costuma parar por causa do cansaço, que literalmente "trava" seus músculos. "Quem não tem o mesmo preparo físico talvez não sinta nada ao cometer excessos, mas seu organismo sempre sofre um dano", comenta Silva. Por isso, os mesmos exames realizados nos superatletas são repetidos em gente normal, para também se conhecer entre essas pessoas os limites individuais de esforço. Isso fornece subsídios a médicos e professores de educação física para que não exijam de cada pessoa mais – ou menos – do que seu corpo pode suportar.

Trecho do texto: CARDOSO, Fátima e OLIVEIRA, Lúcia Helena.
A ciência constrói atletas. **Superinteressante.** Ano 5, n. 3, pp. 33-41, março. 1991

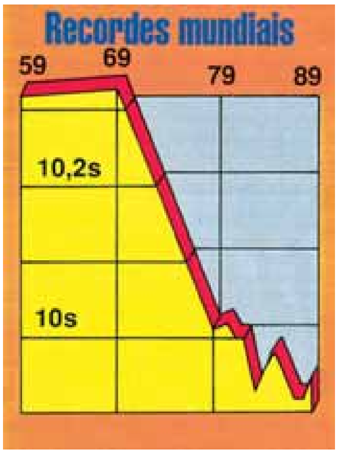
ESPORTES

100 Metros

Recorde atual: **9s92**
(Seul, 24/9/88)
Limite estimado: **9s58**

Recordista: Carl Lewis
(Estados Unidos)

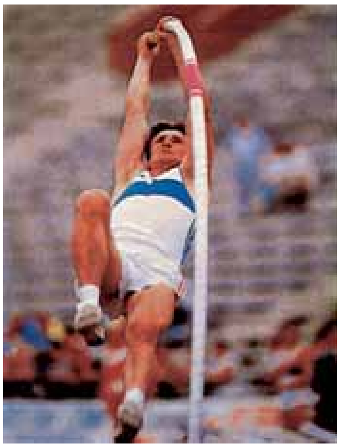
Avanços tecnológicos, como tênis mais leves, contribuem para superar marcas em modalidades que exigem velocidade. Apesar disso, a grande responsabilidade de recordes está nas pernas dos atletas. Além de possuírem uma proporção maior de fibras musculares rápidas, velocistas devem ter passada larga. Atletas pernaltas devem quebrar o recorde atual em alguns décimos de segundo.



Falar sobre esportes, em especial sobre atletismo, implica necessariamente a mobilização de conceitos matemáticos tais como as noções de espaço, tempo, massa com suas medidas, proporcionalidades, comparações. Mais que isso, no contexto da competição lidamos fortemente com conceitos de razões, proporções, médias, desvios padrões, estimativas e probabilidades, construção, leitura e interpretação de dados organizados e representados em tabelas e gráficos, dentre outros conteúdos matemáticos. Sem dúvida, aí tratamos de conceitos e procedimentos que constam dos objetivos da escola fundamental em termos da aprendizagem matemática, e que, se pudermos levar a nossos alunos uma discussão sobre a presença da matemática nesse contexto, esses conteúdos tomarão um sentido mais real enquanto ferramentas, tanto no fazer o esporte, como na análise dos fenômenos esportivos.

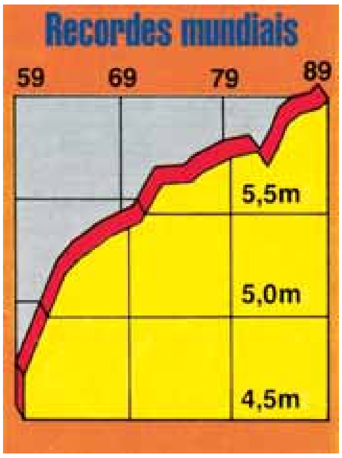
Salto com vara

Recorde atual: **6,06m**
(Nice, 10/7/88)
Limite estimado: **7,82m**



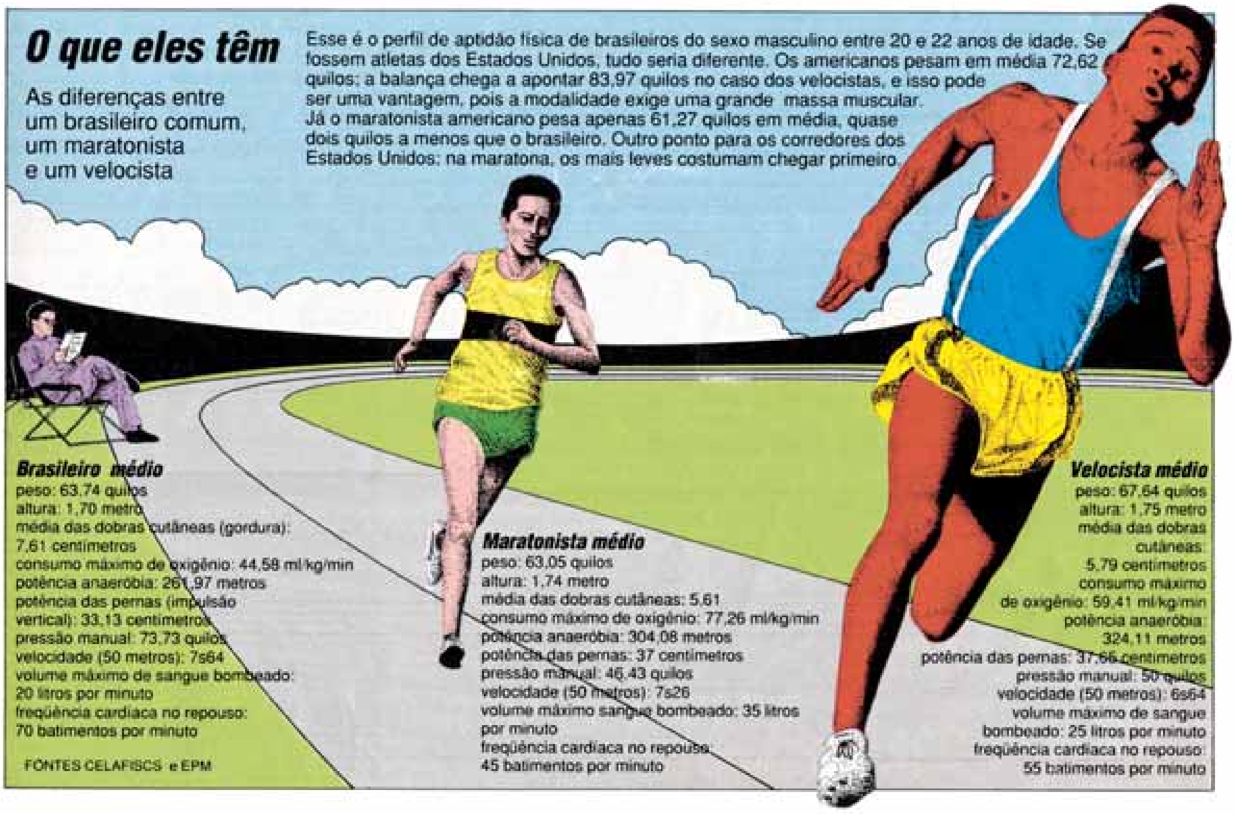
Recordista: Sergei Bubka
(URSS)

O aparecimento de varas de fibra de vidro, substituindo as de alumínio e bambu, fez a curva de recordes ascender drasticamente. Afinal, a vara de fibra de vidro é como uma catapulta, que aproveita a energia do atleta, enquanto ele corre, e o impulsiona para cima. Mas alguma energia se perde em vibração – o atleta que evitar essa dispersão pulará mais alto.



Queremos então, em continuidade à unidade anterior, realizar novas explorações matemáticas na situação dos esportes, em especial do atletismo, construindo e resolvendo situação-problema mergulhada nesse contexto que tem forte significado aos nossos alunos adolescentes.

Essa riqueza da presença significativa da matemática no mundo dos esportes pode ser constatada no quadro abaixo que mostra as diferenças entre as capacidades físicas de um cidadão comum e daquele que se dedica aos esportes.



Situação-problema

Atividade 1

Alguns desses números expressam quantidades de massa, tempo e espaço. Quais são esses números? O que eles significam no contexto? Que tipos de números são utilizados para expressar essas grandezas?

Outros números expressam índices, ou melhor, razões, tais como velocidades, freqüências relativas, concentrações. Quais seriam elas e quais os significados de cada uma dessas razões?

Os rendimentos obtidos pelos esportistas e sua melhoria implicam geralmente alterar esses índices, e portanto, essas razões entre espaço/tempo (que é o caso da velocidade), massa/espaço (como é o caso do arremesso de peso ou de levantamento) ou ainda volume/tempo (melhoria da capacidade respiratória), dentre outras.

Na unidade anterior do TP dedicamos nossa atenção a esportes de quadra, nos quais o sucesso depende, além de outras variáveis, de uma articulação do grupo na quadra, criando, desenvolvendo e aplicando estratégias e táticas. Vamos nessa unidade trabalhar um pouco a matemática presente em esportes de caráter mais individual, ou seja, algumas modalidades de atletismo.

Nas suas mais variadas modalidades, cada atleta, mais do que vencer o outro, busca, antes de mais nada, no dia-a-dia, ampliar seus próprios limites; conquistar novos recordes/marcas superando-se a cada momento. Assim, antes de disputar com o "outro", estar no topo da lista do *ranking* que aponta os melhores, requer-se um trabalho árduo de expandir os limites do seu próprio corpo.

A ampliação desses limites pode tanto implicar o aumento dos índices acima citados quanto a sua redução, dependendo da modalidade de atletismo. Enquanto alguns tentam correr um espaço em menor tempo, outros buscam lançar seu corpo a uma maior altura ou distância. Aumentar ou reduzir índices, eis um dos grandes objetivos do atletismo.

Na situação presente, vamos eleger como contexto de matematização os índices obtidos pelos nossos atletas brasileiros na corrida de 100 metros no ano 2001. Observemos as tabelas abaixo indicando os índices obtidos por atletas femininas e masculinos brasileiros[1]:

Ranking de 2001 - Brasileiro 100 metros

Feminino									
Marca	**Vento**	**CBAt**	**Atleta**	**Nascimento**	**UF**	**Equipe**	**Fase**	**Local**	**Data**
10.61	-0.4	3825	Kátia Regina de Jesus Santos	31/12/1967	SP		2/F/	Americana	16/06/2001
10.73	0.0	16868	Evelyn Carolina de Oliveira dos Santos	11/04/1985	RJ	FLAMENGO	2/F/	Londrina	29/09/2001
10.74	0.9	11389	Priscila Pinheiro da Silva	06/06/1980	AM	São Raimundo	1/Ex/	Manaus	17/08/2001
10.77	0.0	10920	Renata Vilela Sampaio	09/01/1982	RJ	CRVG	3/F/	Londrina	29/09/2001
10.92	0.4	17814	Joyce Chagas Prieto	21/02/1983	SP	BRASIL FC	1/SM/	São Paulo	25/08/2001
11.32	-0.4	5654	Rosemar Maria Coelho Neto	02/01/1977	RJ	CRVG	1/F/	Americana	16/06/2001
11.33	-1.3	2598	Lucimar Aparecida de Moura	22/03/1974	RJ	CRVG	1/F/	Rio de Janeiro	19/07/2001
11.51	1.1	12180	Thatiana Regina Ignácio	02/07/1983	SP	BRASIL FC	1/F/	São Paulo	25/08/2001
11.95	-1.1	357	Luciana Alves dos Santos	10/02/1970	RJ	CRVG	1/SM/	São Paulo	17/03/2001
12.01	-0.4	7870	Aretusa Aparecida Francisca Moreira	05/06/1977	SP	ULL BRAVITAP	5/F/	Americana	16/06/2001

1 Baseado em informações obtidas junto à Confederação Brasileira de Atletismo na internet no endereço: www.cbat.org.br

Masculino									
Marca	**Vento**	**CBAt**	**Atleta**	**Nascimento**	**UF**	**Equipe**	**Fase**	**Local**	**Data**
10.17	1.6	651	André Domingos da Silva	26/11/1972	SP	ULL BRAVITAP	1/F/	Lisboa/POR	16/06/2001
10.20	1.8	2082	Cláudio Roberto Souza	14/10/1973	SP		1/SM/	São Caetano do	21/04/2001
10.23	1.8	14841	Raphael Raymundo de Oliveira	05/02/1979	SP	BM&F	2/SM/	São Caetano do	21/04/2001
10.35	-0.4	5435	Claudinei Quirino da Silva	19/11/1970	SP	ULL BRAVITAP	1/F/	Rio de Janeiro	19/07/2001
10.37	1.2	5337	Edson Luciano Ribeiro	08/12/1972	SP	ULL BRAVITAP	1/E/	São Paulo	22/06/2001
10.38	1.6	8529	Vicente Lenilson de Lima	04/06/1977	RJ	CRVG	4/SM/	Americana	29/04/2001
10.41	0.5	9402	Fábio Gonçalves da Silva	27/03/1977	SP	ULL BRAVITAP	3/F/	Americana	16/06/2001
10.42	1.0	10223	Augusto César de Oliveira Santos	13/10/1972	RJ	FARJ	1/S/	Americana	17/02/2001
10.46	1.2	3788	Jair da Costa Moreira	05/01/1974	SP		2/E/	São Paulo	22/06/2001
10.47	1.8	16269	Bruno Tiago Campos Alves	30/06/1982	SP	EC SAO BENTO	5/SM/	São Caetano do	21/04/2001

É interessante notar que:

1. A posição do atleta no ranking está na ordem crescente de cima para baixo, ou seja, do 1º ao 10º, o que implica uma ordem numérica decrescente das marcas, ou seja, do 10,61 ao 12,01, no caso das atletas mulheres, e de 10,17 a 10,47, no caso dos atletas homens.

2. Atletas do sexo feminino não obtêm marcas inferiores às dos atletas do sexo masculino.

3. A direção do vento em relação ao deslocamento do atleta influencia nos resultados do atleta, podendo o vento ter valor positivo ou negativo.

Atividade 2

Que tipos de análise podem-se fazer a partir das observações realizadas acima, ou seja:

1. A situação do atleta no ranking é indicada pelo tempo que ele leva para percorrer um espaço linear de 100 metros. Qual o significado dessas marcas, por exemplo, 11,61, em termos de unidade de medida de tempo?

2. A posição do atleta no ranking é direta ou inversamente proporcional ao tempo gasto na corrida?

3. Quem obteve a melhor marca, as mulheres ou os homens? A que fatores você atribui tal fato?

4. Sabendo-se que a coluna denominada “vento” mostra a direção do vento em relação ao deslocamento do atleta, qual o significado de uma grandeza positiva ou negativa para o fator vento?

Atividade 3

Traçar dois gráficos de coluna colocando em cada um deles os resultados das mulheres e dos homens.

1. Que unidade/escala é mais conveniente para a construção dos gráficos considerando-se os dados fornecidos na tabela?

2. Para cada modalidade, ou seja, feminino e masculino, calcule a marca média obtida no ano 2001 pelos atletas brasileiros segundo a tabela. Trace um segmento de reta paralelo ao eixo das abscissas indicando esse valor médio. Identifique os atletas que ficaram abaixo e os que ficaram acima da média de sua respectiva categoria.

3. Para cada atleta, calcule a diferença entre o seu escore/marca e o valor médio dentro de sua categoria/gênero.

4. No cálculo da diferença feito acima, qual o significado de a diferença entre os escores médios ser:

- Positiva

- Negativa

- Zero

5. Compare a marca média entre as atletas mulheres com a média dos atletas homens. Qual porcentagem de tempo as mulheres têm de melhorar para atingir a média dos homens obtida no ano 2001?

Seção 2

Construção do conhecimento matemático em ação: tratamento de informação, números inteiros e medidas

Objetivo da seção

Esperamos que, ao longo desta seção, você possa:

- Construir os seguintes conhecimentos matemáticos em ação:

  - Aplicação do conceito de média no tratamento de informação.

  - Reconhecimento e aplicação dos números relativos.

  - Operação com os números inteiros.

  - Dedução e aplicação de conceitos envolvendo unidades de medidas de superfície, área, volume, massa e tempo.

  - Composição e aplicação de razões de comparação envolvendo diferentes unidades de medidas.

- Em relação à Educação Matemática você estará vendo:

  - Teoria de Quadros.

  - O corpo como origem do sistema de numeração decimal e do sistema sexagesimal.

Atividade 4

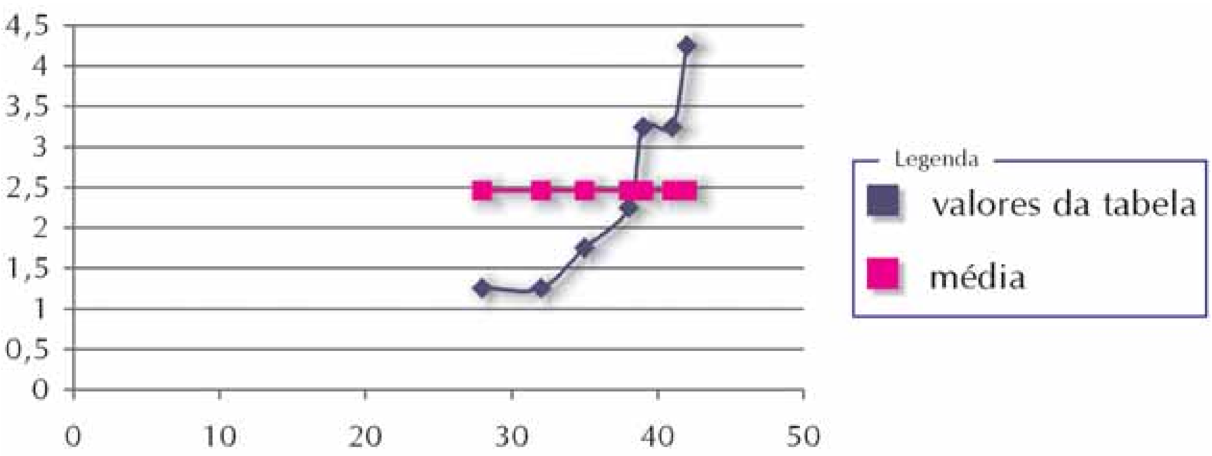
Você deve ter percebido que na situação-problema apareceram vários tipos de números: inteiros, fracionários, decimais e relativos. O termo **relativo** significa que um número representa um valor quando comparado a outro. A expressão "números relativos" era muito utilizada antigamente nos livros didáticos e currículos; hoje em dia eles têm sido chamados de "números inteiros". Entretanto, na situação-problema e nessa atividade você perceberá a presença dos números inteiros como números relativos.

Os números inteiros podem aparecer na resolução de situações-problema que envolvam temperatura, transação financeira, profundidade e muito mais. Aqui estamos mostrando um tipo de atividade que nem sempre é usada em livros didáticos e pelos professores.

Vamos ver a tabela a seguir:

Idade gestacional, em semanas, e peso ao nascer, em quilogramas, de recém-nascidos	
Idade Gestacional	**Peso ao nascer**
28	1,25
32	1,25
35	1,75
38	2,25
39	3,25
41	3,25
42	4,25

Fazendo a representação gráfica dos pontos dados, obtemos:



A linha rosa representa um valor que está exatamente no meio de todos. Vamos considerar que esse ponto médio seja 2,46 e vamos calcular as diferenças de cada ponto em relação à média.

Ponto	Diferença entre o ponto e a média
1,25	1,25 - 2,46 = -1,21
1,25	
1,75	
2,25	
3,25	
3,25	
4,25	

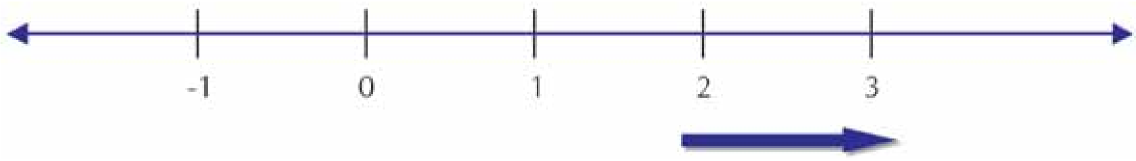
Você observou que a partir do peso 3,25kg a diferença representa um valor positivo?

Some todos os valores.

Resposta: ______________________________

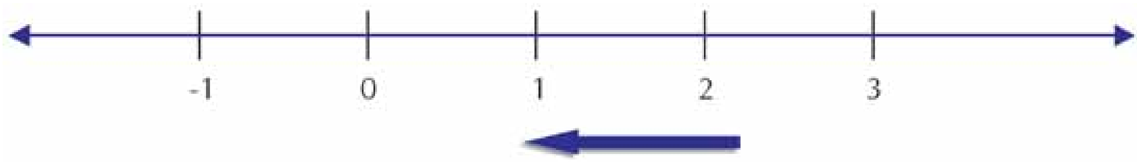
Você deve ter encontrado zero ou um número próximo de zero, pois o valor 2,46 é um valor arredondado da média. A média representa um ponto de equilíbrio entre os valores; assim, a soma das diferenças de cada ponto em relação à média deve ser zero.

Você deve ter observado que a soma dos pontos parece simples, mesmo que esse número seja negativo. Se observarmos que, na reta numérica, 2 + 1 representa um valor que está a uma unidade de 2, então:



2 mais 1 unidade vai se
deslocar para o ponto 3

Vamos usar o mesmo raciocínio com 2 – 1.



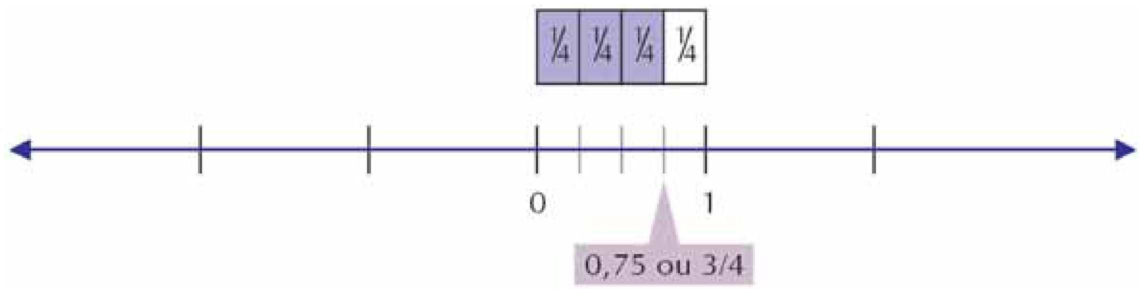
2 menos 1 unidade vai se
deslocar para o ponto 1

Outro exemplo: como seria 0,75 – 1?

Antes de pensarmos em operar o 0,75 – 1, vamos nos concentrar na representação do valor 0,75 na reta numérica. Veja o que significa 0,75:

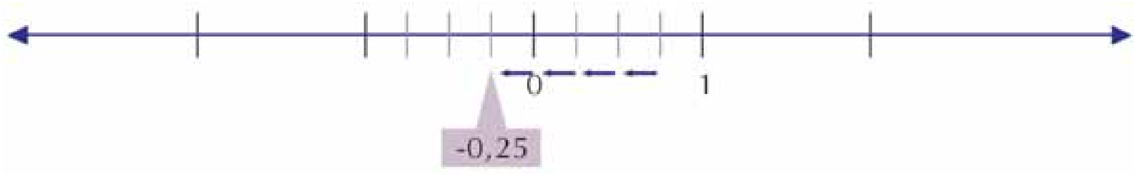
$$0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

Vamos dividir a unidade da reta em quatro partes e tomar 3, para representar 0,75:

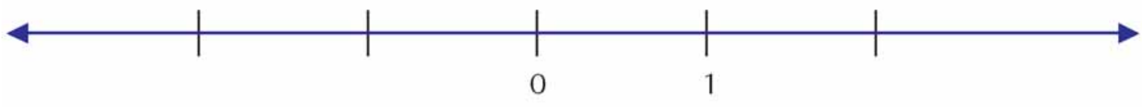


Observe que 1/4 corresponde a 0,25. Então, o segmento unitário é composto por quatro segmentos de 0,25.

Representar o 0,75 – 1 significa que deveremos percorrer a reta da direita para a esquerda a partir do 0,75 num total de quatro segmentos de 0,25, chegando ao valor –0,25.



Quanto seria 0,25 – 0,75? Faça, na reta, a operação 0,25 – 0,75.



Agora é sua vez de representar os valores da tabela do peso das crianças. Parta do ponto 0.

Observando o deslocamento que você fez na reta numérica, conclua: quando você soma dois valores positivos ou negativos, o que acontece com o sinal do resultado? Justifique.

Quando você soma dois valores de sinais diferentes, o que acontece com o sinal do resultado? Justifique.

Atividade 5

O conceito de multiplicação e divisão de números inteiros não é simples e é muito comum encontrarmos em congressos e encontros de Educação Matemática as mais variadas formas de "demonstração". Algumas causam até muitas discussões e indignação por alguns estudiosos de matemática.

O que vamos propor aqui é uma forma de compreender as regras de sinais que poderá ser trabalhada com os alunos. Trata-se de uma nova forma de abordar as operações com os inteiros, lembrando que no TP 1 foram abordados outros significados, seja de contexto prático no comércio, seja o algébrico, e que agora vamos trabalhar numa perspectiva de interpretação geométrica na reta numérica.

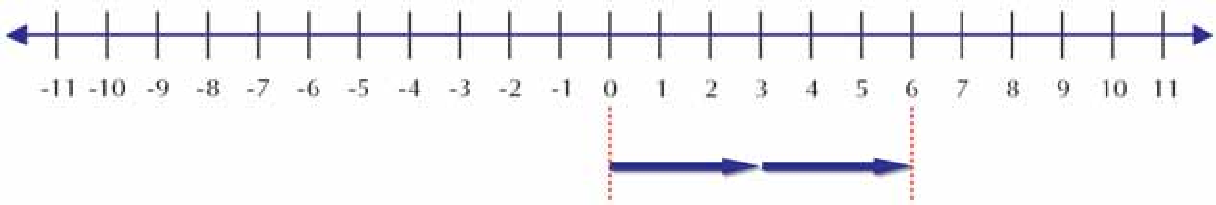
Aprendendo sobre Educação Matemática

Professor, é importante saber que aprender Matemática não significa tão-somente saber resolver uma situação em um ou mais quadros. Aprender é poder articular de forma dinâmica os diferentes procedimentos em quadros distintos, tendo uma visão do conhecimento matemático como algo dinâmico e multifacetado. Quanto mais facilmente o aluno navega de um quadro para outros, mais consistentes são suas competências matemáticas. Isso requer da escola a oferta de oportunidade ao aluno de tratar uma situação-problema em mais de um quadro de referência. Mais que resolver a situação-problema em um quadro, a aprendizagem matemática implica tanto uma variação de quadros para sua resolução quanto a capacidade de navegação de um quadro a outro.

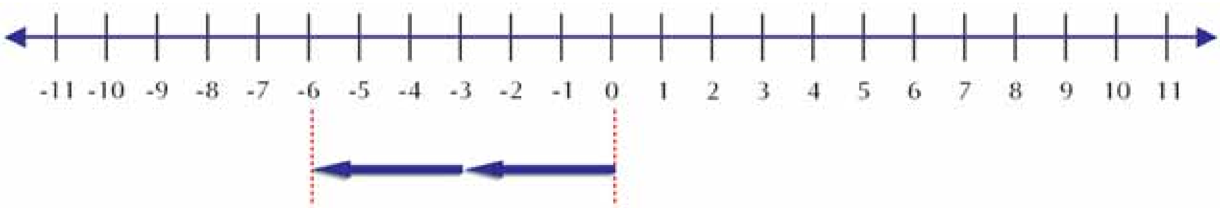
Estaremos discutindo esse tema na segunda parte do Texto de Referência desta unidade.

O que significa 2 x 3?

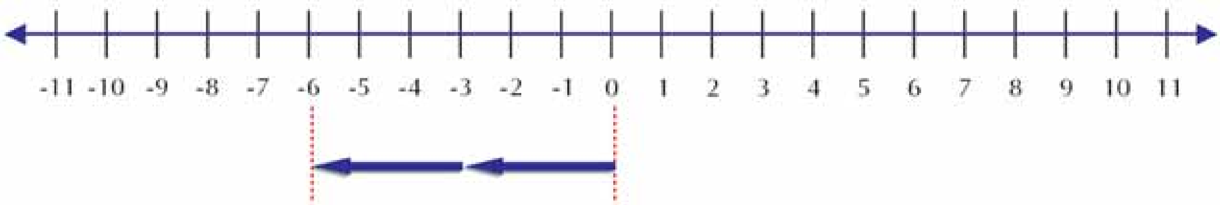
Observando a reta numérica, poderíamos dizer que são 2 deslocamentos de 3 unidades.



Assim poderemos dizer que –2 x 3 será 2 deslocamentos no sentido oposto de 3 unidades.

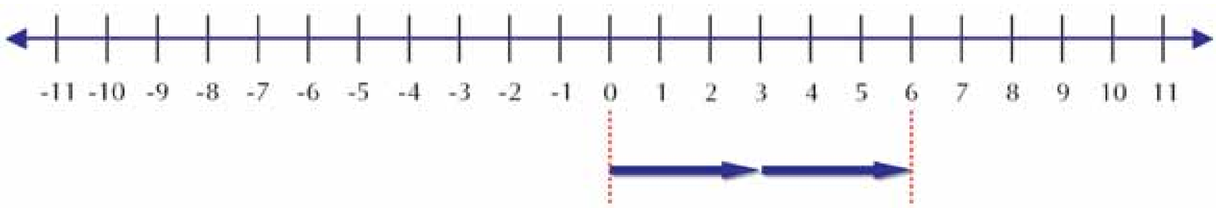


E 2x (-3) significa dois deslocamentos de valor –3, ou seja, 3 unidades no sentido oposto.



E o que você acha que vai significar (-2) x (-3)?

Vamos pensar um pouco! O –2 significa dois deslocamentos no sentido oposto de valor –3. Se –3 significa andar 3 unidades para esquerda com o –2 invertendo esse sentido, logo o deslocamento será para a direita.



Então, podemos ainda concluir que:

$(+2) \times (+3) = +6 \longrightarrow (+6) \div (+3) = (+2)$

$(+2) \times (-3) = -6 \longrightarrow (-6) \div (-3) = (+2)$

$(-2) \times (+3) = -6 \longrightarrow (-6) \div (+3) = (-2)$

$(-2) \times (-3) = +6 \longrightarrow (+6) \div (-3) = (-2)$

Colega professor, escreva com as suas palavras como podemos determinar o sinal de um produto ou quociente entre dois números observando a representação geométrica.

Atividade 6

Nesse TP você tem encontrado várias situações que levam ao uso de conceitos de razão e proporção. No TP2, Unidade 1 vimos algumas razões conhecidas como velocidade, densidade e densidade demográfica. Vamos rever algumas delas.

Se um ciclista faz um percurso a 10km/h, quantos metros ele percorre em 1 minuto?

Para resolver o problema, você precisou usar transformações de unidade de medidas importantes: unidade de comprimento e de tempo.

Como já vimos, medir é nada mais do que comparar duas medidas a partir de uma medida padrão. No Brasil, para determinarmos algumas medidas, utilizamos como medida padrão o metro. Entretanto, na Inglaterra, usa-se a polegada para medir pequenas distâncias (1 polegada = 2,54cm) e para as grandes, a milha (1 milha = 1.609,344m). O metro é uma unidade padrão internacional, mas nem todos os países o utilizam.

Para saber mais

Os povos antigos possuíam padrões diferentes de comprimento. Os babilônios usavam como unidades padrões o dedo (cerca de 16mm), o cúbito (equivale a 30 dedos), o pé (12 polegadas) e a polegada (largura do polegar).

Os egípcios possuíam uma medida interessante: a polegada piramidal. Segundo estudiosos o perímetro da pirâmide mede 365,242 trilhões de polegadas piramidais que equivale ao número de dias do ano solar. Uma polegada piramidal equivale a 35,4264mm.

Você sabia que o grão de trigo tirado do meio da espiga provavelmente tenha sido o primeiro elemento padrão de peso? Isto originou um sistema de medida que ainda é usado em alguns países da Europa: grão, dracma, onça, libra, quintal e tonelada.

Mas voltemos ao "metro". Embora ele seja uma unidade padrão internacional, usá-lo para fazer qualquer medida nem sempre é prático. Por isso, existem os múltiplos e os submúltiplos do metro. Nesse caso usamos o sistema métrico decimal, a partir da unidade padrão: metro.

As unidades que mais utilizamos dentro do sistema métrico decimal são:

Quilômetro (1km) que equivale a 1000m.

Decímetro (1dm) que equivale a $\frac{1}{10}$ do metro. São necessários 10 decímetros para completar 1 metro.

Centímetro (1cm) que equivale $\frac{1}{100}$ do metro. São necessários 100 centímetros para completar 1 metro.

Milímetro (1mm) que equivale $\frac{1}{1.000}$ do metro. São necessários 1.000 milímetros para completar 1 metro.

Observando o problema do ciclista:

10km $\longrightarrow$ 10 x 1.000m = 10.000 metros.

Professor, você deve ter percebido que, quando fez a conversão de km/h para m/minuto na atividade anterior, você utilizou a medida do tempo.

Você já deve ter observado que, na conversão do tempo, a contagem não é feita de dez em dez, como no caso das medidas da distância e outras que vamos ver ainda. Enquanto existe uma mudança de unidade a cada 10 unidades, por exemplo, 10mm equivale a 1cm e assim por diante, para completar uma hora são necessários 60 minutos e cada minuto é completado a cada 60 segundos.

Então, se o ciclista percorre 10km/h, ele percorre 10.000m em 60 minutos. Para saber quanto ele percorre em um minuto, basta determinar o quociente entre 10.000 e 60.

Existem várias unidades de medida do tempo, por exemplo, dia, semana, mês, ano, século etc.

Sabemos que, por convenção para cálculos contábeis, considera-se o ano com 360 dias e o mês com 30 dias.

Sabe-se que na verdade um ano possui 365 dias e 6 horas. Por isso, a cada quatro anos temos um dia a mais no mês de fevereiro para compensar as 6 horas que não foram contadas nos anos anteriores. O ano que possui um dia a mais é chamado de ano bissexto.

Para saber mais

Para saber se um ano é bissexto basta verificar se ele é divisível por 4. Veja, o ano 2.004 será bissexto, pois é divisível por 4. Então, 2028 será um ano bissexto?

Por uma regra que pode ser demonstrada usando conceitos de álgebra moderna, para saber se um número é divisível por quatro, basta saber se os seus dois últimos algarismos são divisíveis por quatro. Assim, 2028 será bissexto porque 28 é divisível por 4. Já 1945 não foi bissexto porque 45 não é divisível por 4.

Entretanto, a afirmativa de que o ano tem 365 dias e 6 horas não é exata. Já no ano de 730 um monge afirmou que na verdade um ano tem 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46,7 segundos. Por isso, o papa Gregório XIII criou um novo calendário que usamos até hoje, a partir de 24 de fevereiro de 1582, para compensar essas diferenças. Veja as características importantes do nosso calendário:

- Mesmo com todas as correções, a cada 128 anos há um atraso de 1 dia em relação ao Sol. Nesse caso, o calendário estabeleceu que os anos terminados em 00 serão considerados bissextos se forem múltiplos de 400. Assim, 1600 e 2000 foram bissextos porque terminam em 00 e são múltiplos de 400. Já 1700 e 1800 não foram bissextos, pois não são múltiplos de 400.

A cada 3.333 anos e 1/3 é preciso eliminar um dia do calendário para corrigir o calendário sobre o Sol. Mas isso será necessário apenas no ano 4915, pois já foi feito em 1582.

Articulando conhecimentos

Por que basta observar se os dois últimos algarismos de um número é múltiplo de 4 para dizer que o número é múltiplo?

Vamos pensar no número: abc, no qual a é centena, o b é dezena e o c é unidade. Assim:

a	b	c
100 x a	10 x b	1 x c

Segundo a regra, basta que *bc* seja múltiplo de 4 para que todo o número também o seja.

100 é multiplo de 4; logo, qualquer número natural 100 x a será múltiplo independente de qual seja a.

Então, quaisquer números que venham depois da centena (milhar, unidade de milhar etc.) serão múltiplicados por 100, logo sempre serão divisíveis por 100.

Assim, quem vai determinar se um número é múltiplo de 4 é bc, ou seja, os dois últimos algarismos.

Aprendendo sobre Educação Matemática

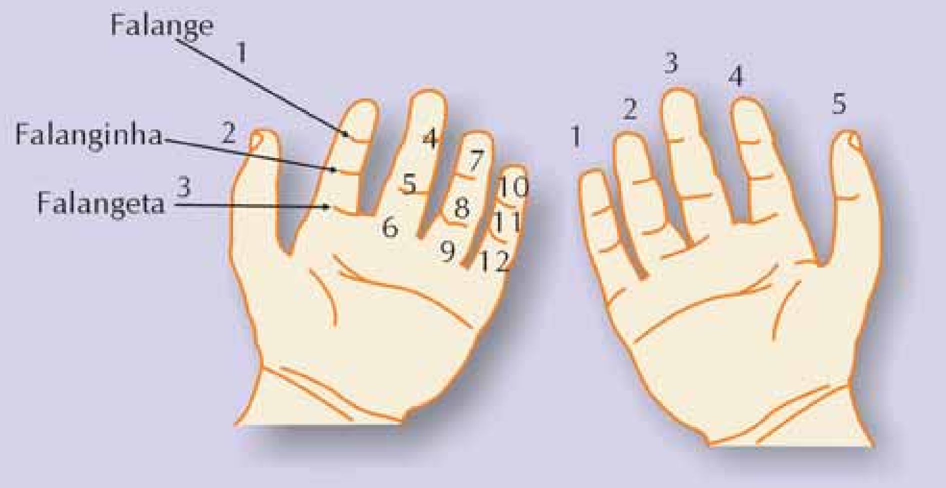
O corpo como origem do sistema de numeração decimal e do sistema sexagesimal

Você sabe de onde surgiu o sistema de numeração sexagesimal usado na medida de tempo, dúzia e ângulo?

Em função dos dez dedos das mãos humana nosso sistema é decimal. O fato de os homens em sua história utilizarem os dedos para contar e testemunhar contagem levou ao agrupamento decimal. Esse fenômeno é uma forma de demonstrar inclusive a importância do corpo na construção do conhecimento matemático (George Ifhrah, um grande historiador francês, ocupa-se deste resgate da importância do corpo na contagem, nas medidas, nas operações, na geometria etc.).

Entretanto, a escola ensina a dúzia, meia dúzia, e ainda o sistema sexagesimal presente no sistema de medida de tempo e de ângulos sem levar ao conhecimento do aluno a origem de tal sistema e sem discutir por que existe mais de uma base na matemática atual.

Essa origem está, como a do sistema decimal, no corpo, na utilização dos dedos na contagem. Diferentes grupos étnicos tinham formas diferenciadas para agir sobre o corpo para matematizar. Um povo primitivo situado na região do globo onde hoje se situam as ilhas da Indonésia, na Ásia, tinha por hábito não utilizar cada dedo para testemunhar as quantidades, mas sim as falanges dos dedos (falange, falanginha e falangeta), excluindo o polegar, o qual era utilizado para acompanhar a contagem (encostando a ponta do polegar, da falange à falangeta, acompanhando a contagem). Assim, fora o polegar, sobram quatro dedos, cada um deles com três falanges, totalizando DOZE falanges. Com isso, em uma mão há doze falanges, ou seja, a dúzia. Com a outra mão, cada dedo representando uma dúzia, têm-se cinco dúzias, ou seja, a contagem de SESSENTA, a base do sistema sexagesimal utilizada hoje para medida de ângulos e do tempo. Assim, uma hora é igual a sessenta minutos, e um minuto é igual a sessenta segundos. Ou seja, porque o homem asiático, em dado momento da história se utilizou das doze falanges, temos hoje mais de um sistema.



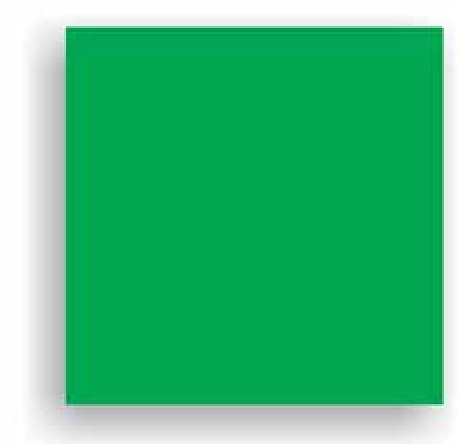
Mais uma vez encontramos no corpo a origem da construção do conhecimento matemático, o que nos obriga a repensar a importância e o espaço da manipulação corporal na aula de Matemática. Afinal, se estimularmos o uso do corpo nas aulas de Matemática, estaremos, de certa forma, permitindo o resgate da história das ciências e da cultura matemática no espaço escolar.

Atividade 7

Certa vez, ao fazer um passeio turístico no Parque Nacional da Tijuca, onde fica o Corcovado no Rio de Janeiro, tive uma discussão acirrada com o taxista que nos levava pelo trajeto dentro do parque que termina no Cristo Redentor.

Durante a subida, o taxista que fazia as honras de guia turístico ia nos falando das características e fatos curiosos do parque. Em determinado momento ele nos informou que o parque tinha uma área de 33.000m^2. Ao observar o parque durante o trajeto, começamos a perceber que algo estava errado naquela informação, a área do parque não podia ser só aquela.

Veja como começamos a raciocinar. Se tomarmos um quadrado de 250m de lado, ou seja, a quarta parte de um quilômetro, a área seria determinada por meio do quadrado:



250m

250m

Área total

250m x 250m = 62.500m^2

Isso representa o dobro da área do parque, segundo informações do taxista.

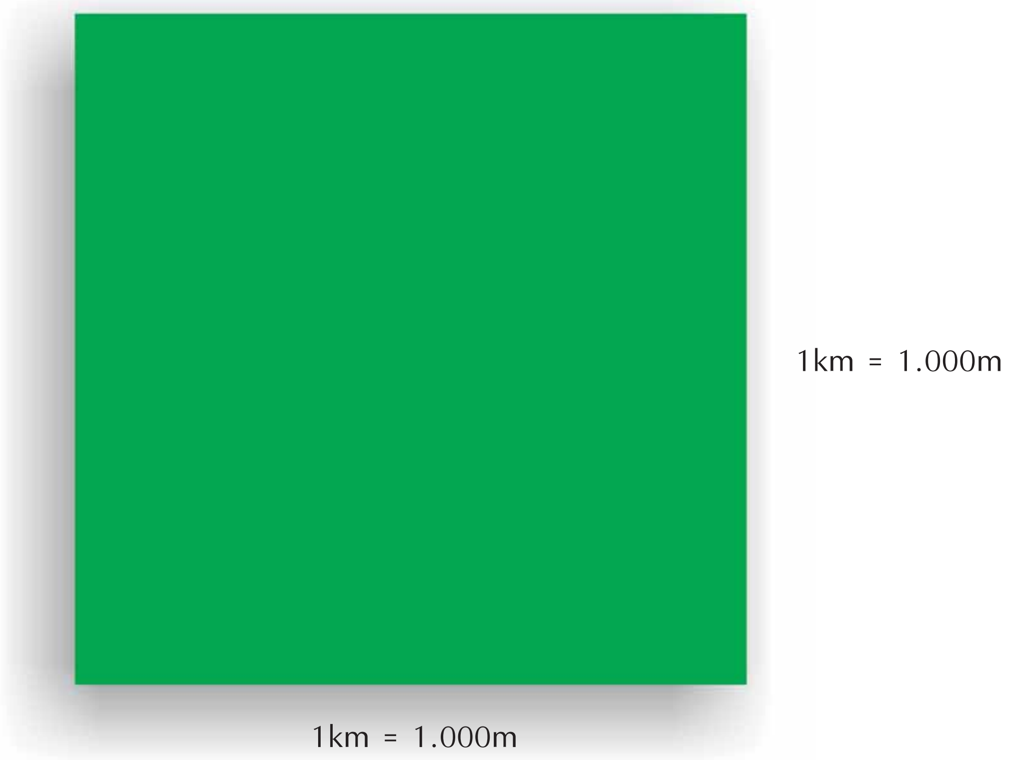
Perguntei para o taxista sobre a área e disse-lhe que algo estava errado. Mas o suposto guia turístico não gostou da nossa pergunta e começou a dizer que repetia tal informação há anos e que ele conhecia o parque melhor do que ninguém.

Mas insistimos em que havia algo errado. Até que parou o carro e foi nos mostrar a verdade. Pegou um guia turístico que havia no seu carro e nos mostrou: a área do parque era de 33km^2 e isto representava 33.000m^2, já que uma unidade de quilômetro equivale a 1 mil metros!

Tentamos ainda lhe explicar que tal raciocínio estava errado. Porém não tivemos êxito e o taxista deve continuar passar tal informação errada até hoje!

Você é capaz de perceber o erro do taxista? Este não é um erro muito comum cometido pelas pessoas em geral e por nossos alunos?

A transferência da relação das medidas de superfície para as de comprimento não é tão direta. Isso porque, conforme já vimos no TP anterior, o metro quadrado significa um quadrado medindo um metro cada lado. Logo, $1km^2$ significa um quadrado com cada lado medindo 1km, ou seja, cada lado mede 1.000m.



Área do quadrado

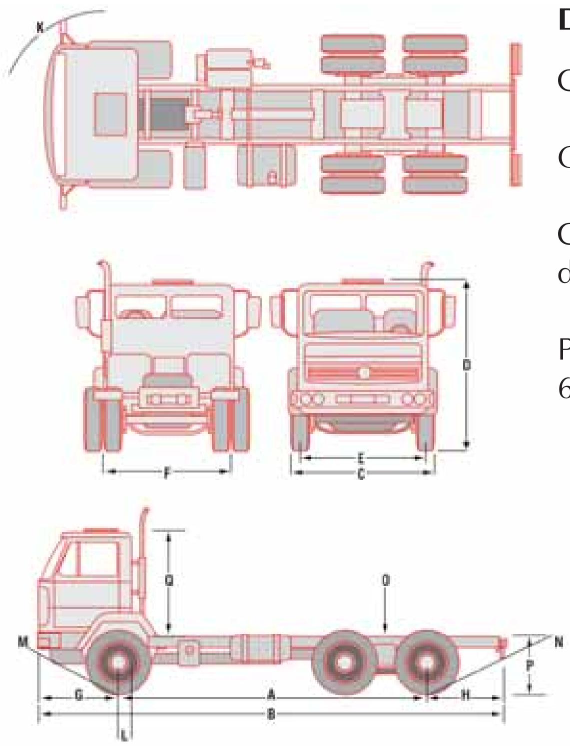
$1km \times 1km = 1km^2$
ou
$1.000m \times 1.000m = 1.000.000m^2$

Então, se o Parque Nacional da Tijuca tem uma área de $33km^2$, isso significa que sua área é de $33.000.000m^2$.

Existem algumas unidades de medidas de superfície que variam de região para região e são mais usadas para a medição de terras; isso nós já vimos na Unidade 1 deste TP.

Atividade 8

Uma das razões que vimos também nesse TP foi a densidade. Sabendo-se que a densidade do alumínio é de $2,6g/cm^3$, pretende-se encher, com esse material, um caminhão com as dimensões apresentadas a seguir. Quanto, aproximadamente, em kg ou toneladas de alumínio será necessário para encher o caminhão? O peso encontrado é suportado pelo caminhão?



Dimensões importantes

C (largura) – 2.246mm

Q (altura teto da cabine) - 1.762mm

Comprimento aproximado
da caçamba (A + H) – 5.108mm

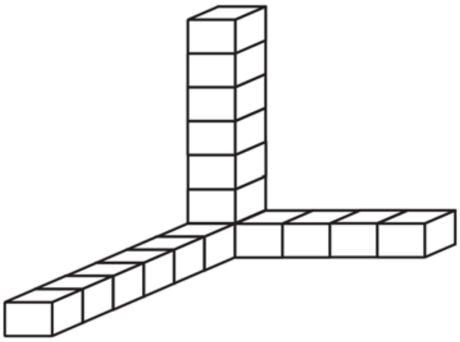
Peso máximo suportado pelo caminhão: 6.024kg.

Vamos pensar juntos na resolução desse problema, para podermos revisitar alguns temas de Matemática importantes:

1. Vamos calcular o volume da caçamba do caminhão:

Para determinar o volume da caçamba, basta descobrirmos quantos cubos, por exemplo, de $1cm^3$ cabem nela.

Veja o desenho:



2.246mm x 1.762mm x 5.108mm = ______________________ mm^3.

Possivelmente o cálculo nem foi possível de ser feito numa calculadora de quatro operações, pois o número de "casas" nessas calculadoras é pequeno e ela tem poucos recursos. Mas em uma calculadora científica aparecerá no canto do visor o número 10, mostrando que o resultado está numa expressão científica, ou seja, em uma potência de 10.

Então podemos refazer o cálculo transformando as dimensões para cm:

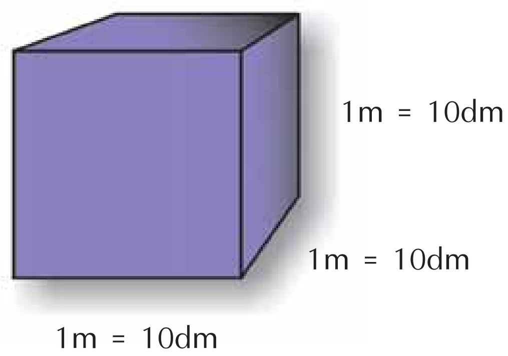
224,6cm x 176,2cm x 510,8cm = ______________________ cm^3.

Vamos refazer os cálculos para decímetros e metros:

22,46dm x 17,62dm x 51,08dm = ______________________ dm^3.

2,246m x 1,762m x 5,108m = ______________________ m^3.

Você deve ter observado, ao fazer o cálculo acima, que a cada unidade, três casas decimais eram "diminuídas". Isso significa que cada unidade foi multiplicada por 1000. Isso é de se esperar, veja o desenho:



$1m \times 1m \times 1m = 1m^3$

$10dm \times 10dm \times 10\ dm = 1.000dm^3$

Logo:

$1m^3 = 1.000dm^3$

Um recado para sala de aula

Professor, se você tiver acesso ao material dourado, será fácil você fazer, por exemplo, a construção entre o que seja um decímetro cúbico e o centímetro cúbico. Veja na Transposição Didática sugestão de atividade.

2. Cálculo do peso:

Usando o volume da caçamba do caminhão acima, calcule o peso de alumínio que seria necessário para encher toda a caçamba, sabendo-se que a densidade do alumínio é de $2{,}6g/cm^3$.

Peso total de alumínio: ______________________ g.

Sabendo-se que um quilo equivale a 1.000 gramas, quantos quilos de alumínio caberiam no caminhão? _______________ kg.

Sabendo-se que uma tonelada equivale a 1.000 quilos, quantas toneladas caberiam no caminhão? _______________ t.

De acordo com as especificações, é possível que o caminhão transporte o peso total do alumínio?

Vale a pena lembrar que as unidades de peso mais usadas são o grama, o quilograma e o miligrama. As outras unidades são pouco usadas.

Resumindo

Nesta seção, você aprendeu a:

- Utilizar a média para auxiliar no tratamento de informação de dados.
- Reconhecer e manipular os números relativos, a partir da comparação de valores.

- Construir as regras de operação com números inteiros em um novo quadro de referência: representação na reta numérica.

- Compreender que as unidades de medidas e formas de contagem são compostas por uma construção histórica.

- Deduzir e utilizar os conceitos de medidas de comprimento, superfície, volume, massa e tempo.

- Compor e interpretar razões de comparação envolvendo medidas de comprimento, superfície, volume, massa e tempo.

Seção 3

Transposição didática: trabalhando o tratamento de informação em sala de aula

Objetivo da seção

Ao longo desta seção, esperamos que você possa conhecer e produzir situações didáticas adequadas ao nível de ensino em que atua, envolvendo:

• Outras formas de usar os dados da situação-problema para desenvolver outros conceitos matemáticos em um currículo em rede.

• Desenvolvimento do tema Números Relativos e suas Operações por meio da organização de dados na comparação de resultados dos alunos em uma corrida.

• Conhecimento e produção de materiais manipulativos para a construção de conceitos envolvendo unidades de medida.

• Aplicação da história da Matemática para promover a aprendizagem.

Atividade 9

Continuamos vendo nessa unidade a forma como os conteúdos relacionados à situação-problema aparecem de modo interconectado, dando um bom exemplo de uma proposta em consonância à perspectiva de um currículo em rede.

As atividades serviram para lançar você, professor, em atividade matemática que permita refletir sobre os conceitos presentes na situação de esportes. Muitas são as outras possibilidades de exploração da situação apresentada, e que não realizamos. Por exemplo, poderíamos ter explorado:

- O número de registro do atleta na confederação: são os filiados mais antigos ou mais novos que têm apresentado os melhores resultados nos últimos tempos?
- A relação entre idade e marca obtida no ano 2001.
- A relação entre os melhores escores em cada modalidade segundo o gênero.
- A relação entre as marcas e a direção e a velocidade do vento.
- A relação entre marca, época do ano e local da prova.

Agora é o momento de irmos à nossa sala de aula e, aproveitando as experiências e as reflexões oportunizadas pela situação, explorar junto a nossos alunos conceitos centrais em situações análogas.

A proposta não é que essa transposição seja vista como "modelo a ser seguido", e nem mesmo que venha a se constituir em metodologia de ensino, mas, tão-somente, propor uma experiência junto a um grupo de alunos que possa permitir a construção de conhecimento acerca da didática da Matemática. Ou seja, de que forma uma situação-problema análoga poderá se constituir para os alunos num espaço efetivo de construção de conhecimento matemático, e mais, qual o papel do professor de Matemática enquanto mediador nesse processo?

Observando os outros tipos de explorações acima, sugira outras atividades que poderiam ser exploradas nessa situação-problema.

Atividade 10

Você viu nesta unidade, mobilizado pela situação-problema, a exploração do tema "número negativo" na perspectiva de uma "distância" de um valor médio. É importante lembrar que a idéia utilizada pode ser aplicada num vasto universo diferente da apresentada, em que temos a variação de valores ao longo de um determinado período de tempo, por exemplo, tais como: cotações, produções, temperaturas etc.

Vamos nesse momento, em consonância com a proposta da situação-problema, continuar a utilizar marcas/índices no atletismo, mas agora com dados obtidos em atividades reais com os alunos. Assim, ao invés de oferecer a tabela pronta com as marcas, estas serão fruto de experiência física dos próprios alunos testando os limites do seu corpo.

Com um colega de Educação Física, realize um teste simples de salto em altura, podendo até ser do tipo "quem toca mais alto a mão numa parede" (podendo os dedos estarem sujos com pó de giz). Meça a altura do salto de cada aluno registrando numa tabela esses valores. Para que os resultados fiquem mais claros, organize-os em uma tabela, dando em destaque o sexo do aluno, para que possamos evidenciar as diferenças dos escores entre os dois gêneros.

Numa segunda etapa faça um cinto de aproximadamente um quilo de peso com o auxílio de pequenos sacos de areia. A partir desse dia, faça sempre cinco saltos por dia, com os mesmos alunos, na mesma parede. Uma semana após, sem o cinto, realize novamente o salto, aluno a aluno, registrando na tabela o novo escore.

Calcule qual porcentagem cada aluno pulou a mais que na situação anterior.

Atividade 11

Outra situação que você, professor, pode explorar com seus alunos a fim de estudar os números relativos é fazer uma comparação do rendimento dos alunos, em segundos, correndo 100 metros:

- calçados e com uma calça comprida;
- calçados e com calção;
- descalços e com calça comprida;
- descalços e com calção.

Em cada condição acima, verifique o rendimento médio dos grupos; separadamente, meninos e meninas. Anote o valor superior e inferior de cada aluno em relação ao rendimento médio.

Levante junto aos alunos as formas de registro da variação das marcas em termos de "acima " e "abaixo" da média.

Discuta com seus alunos qual a melhor forma de registrar os resultados *(scores)* em relação à média, e depois disso proponha situação do tipo:

Quanto Alice está distante do escore de Carol, quando ambas estão abaixo da média, ambas estão acima da média e quando uma está acima e a outra está abaixo da média.

Comparar os resultados entre cada situação, por faixa etária, entre meninas e meninos, entre os alunos e você e seu colega de Educação Física.

Coloque a seguir o seu quadro de resultados.

Explorar as maiores dificuldades quanto a:

- Transposição da atividade realizada pelo professor enquanto situação-problema nessa unidade.
- Maiores dificuldades conceituais dos alunos, tais como medidas, unidades de medidas, números decimais, grandezas.
- Maiores dificuldades procedimentais dos alunos no processo de cálculo da média, calcular os diferencias em relação à média.
- O que você mudaria na proposta caso venha a realizá-la com outro grupo de alunos.
- Pra qual série ela é mais adequada e por quê.
- Quais conteúdos matemáticos podem ser aí explorados.
- Que tipo de atividade poderia seguir-se a essa para dar continuidade à proposta.

Atividade 12

Uma outra proposta de atividade é a exploração de metro, decímetro e centímetro cúbico usando o material dourado que você já deve ter utilizado para outras atividades com os seus alunos.

Se a sua escola, ou você, não possui um material dourado, você pode confeccioná-lo com jornal.

Para utilizar o jornal faça o seguinte:

Pegue uma folha de jornal e recorte em quadrados de 10cm de lado, ou seja, 1dm de lado. Use esses quadrados como a unidade menor do material dourado.

Para formar as dezenas junte 10 quadrados de $1dm^2$ em um clips de prender papel. Para formar a centena, junte 10 pacotinhos com 10 quadrados de $1dm^2$ com um elástico de prender dinheiro.

Peça para os alunos considerarem que um cubo pequeno (a menor unidade do material dourado) tem cada lado de 1cm, logo o seu volume é de $1cm^3$. Então, proponha que façam um cubo com 10cm em cada aresta. Deixe que manipulem à vontade o material até conseguirem.

Depois de conseguirem montar o cubo, peça que contem quantos cubos pequenos foram necessários. Os alunos vão perceber que foram necessários 10 x 10 x 10, ou seja, 1.000 cubos pequenos. Assim, concluímos que $1dm^3 = 1.000cm^3$.

Faça o mesmo processo considerando o menor cubo com $1dm^3$ e peça para que analisem quantos cubos de $1dm^3$ serão necessários para se chegar ao m^3.

Assim, é possível que o seu aluno compreenda a relação de mudança de unidade de medida de uma forma mas lúdica e aplicada.

Atividade 13

Você deve ter observado que durante a realização de algumas atividades foram apresentadas algumas interessantes curiosidades sobre fatos envolvendo a história da matemática.

É importante você utilizá-los em sala de aula para que o aluno perceba que o conhecimento matemático é fruto de uma construção humana social, cultural e histórica. Ou seja, não se trata de conhecimentos inventados, sem aplicação e contexto.

Você deve conhecer algum fato histórico interessante sobre a história da matemática. Então registre-o aqui. O que acha de apresentá-lo para seus colegas na sua próxima oficina?

Descreva em poucas palavras uma atividade para a sala de aula em que você poderia usar esse fato histórico que você sabe ou algumas das curiosidades mencionadas nesta unidade.

Aprendendo sobre Educação Matemática

As situações históricas da produção do conhecimento matemático podem ser extremamente ricas para serem trabalhadas em sala de aula, com um caráter lúdico que não está apenas limitado ao jogo ou a uma exposição pontual. Mas, muito pelo contrário, a matemática pode e deve ser contada a partir da própria história dos matemáticos, mostrando seu lado humano, real e cultural. Descobrir o lado humano daqueles que contribuíram para a edificação dessa ciência é importante e fundamental para que o aluno aceite os desafios impostos pela vida e pela ciência como algo mais natural.

Estaremos discutindo mais sobre esse tema na próxima unidade.

Resumindo

Nesta seção, você teve oportunidade de:

a) Conhecer os itens referentes aos Parâmetros Curriculares Nacionais quanto ao estudo dos números inteiros e o tratamento de informação;

b) Analisar como alguns dados podem ser utilizados no desenvolvimento de uma situação-problema favorecendo a formação efetiva de um currículo em rede;

c) Utilizar o tratamento de informação para promover o estudo dos números relativos e suas operações em sala de aula;

d) Utilizar o material dourado (podendo confeccioná-lo com jornal) para o desenvolvimento de atividades que envolvam as unidades de medida;

e) Produzir uma situação didática em que se utilize a história para que o aluno possa reconhecer a matemática como construção humana.

Leituras sugeridas

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Capítulo do livro Educação Matemática*: uma introdução ... et al. São Paulo: EDUC, 1999.

Bibliografia

CARDOSO, Fátima e OLIVEIRA, Lúcia Helena. *A ciência constrói atletas*. Superinteressante. Ano 5, n. 3, p. 33-41, mar. 1991.

CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE ATLETISMO. CBAT– Confederação Brasileira de Atletismo. Disponível em: <www.cbat.org.br> Acesso em: 10 de agosto 2002.

Texto de referência

A flexibilização da aprendizagem matemática – Representação e Teoria de Quadros

Cristiano Alberto Muniz

O homem age sobre seu meio com o objetivo de transformá-lo, assim como o meio leva o homem à ação efetiva transformando-se a si próprio. Nesta relação dialógica, homem-meio, o homem é confrontado a situações-problema para melhor compreender e tentar explicar a Natureza. O pensamento humano pode ser considerado como imagem desse eterno processo de desafio, processo que é tecido a partir de três categorias fundamentais: o espaço, o tempo e o número. Estas categorias são diretamente ligadas aos aspectos matemáticos do pensamento e ao conhecimento lógico-matemático. Em todo caso, o homem não é isolado dentro do processo de construção e de aquisição do conhecimento. Ele vive dentro de uma "cultura matemática" quando da resolução de um problema. Esta cultura é o resultado de uma trama entre conhecimentos espontâneos e conhecimentos científicos extraídos da cultura do sujeito. A complexidade das relações entre conhecimentos espontâneos e científicos é traduzida pelas diferentes maneiras possíveis de conceber os processos da matematização em cada sujeito.

Atividade matemática e suas diferentes dimensões: das idéias, das representações, da escrita, do poder de argumentação e da comunicação

Ao desenvolvermos nossa reflexão em torno da multiplicidade de possibilidades de construção do conhecimento matemático, é fácil observar que a escola, na grande parte dos casos, não considera tal multiplicidade, demonstrando que ela se organiza sob um conceito de matemática estruturada com base em modelos únicos, universais e imutáveis ao longo da história.

O ensino de algoritmos nas operações aritméticas é um testemunho irrefutável desta realidade: "O que devemos fazer para adicionar, colocar algarismo abaixo de algarismo, iniciando a operação pelas unidades, com o 'vai um' quando a soma passa de dez..." reflete que o ensino está estruturado a partir da falsa idéia que o conhecimento matemático se efetiva com a garantia da reprodução de esquemas operatórios universais e imutáveis, não permitindo ao aluno expressar seus próprios esquemas de pensamento.

Entretanto, as crianças manifestam inúmeros processos próprios na realização de somas. Os exemplos abaixo são de Lerner e Sadovsky[1] (1996, p. 138-139).

1 Lerner, D. e Sadovsky, P. "O sistema de numeração: um problema didático". In Parra, C. e Saiz, I. (org) Didática da Matemática. Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996

Para resolver 36 + 145, Sebastian escreve:

145 + 5 + 10 + 10 + 10 + 1 = 181.

Ele explica: "Coloco o cinco porque com cinco já chego a cento e cinqüenta". A professora lhe pergunta onde estava esse cinco e ele responde; "No trinta e seis, por isso ao final está 01; senão, só teria somado trinta e cinco".

Frederico, para resolver o problema no qual precisa somar 39 e 25, anota:

30 + 20 = 50

50 + 9 = 59

59 + 5 = 64

Então, com a intenção de exclarecer o que fez, acrescenta:

30 $\longleftarrow$ 39 $\longrightarrow$ 9

20 $\longleftarrow$ 25 $\longrightarrow$ 5

Quando a professora lhe pergunta sobre o significado das setas, Frederico responde "É para que entendam de onde tirei o trinta e o vinte que somei primeiro".

Existem algoritmos em que se soma da esquerda para a direita:


```
   322
 + 510
   473
 12
   10
     5
  1305
```

As diversas dimensões da atividade matemática

Esses elementos são suficientes para mostrar em que sentido o conhecimento no contexto escolar é tratado de forma reducionista. É necessário rever junto à escola a concepção do que vem a constituir uma atividade matemática. Essa revisão implica que a escola deve passar a conceber as diversas dimensões de uma atividade matemática: da ação material, do estabelecimento das idéias, de suas variadas representações mentais, do registro através de esquemas e escrita simbólica, da comunicação matemática e do poder de argumentação dentro do seu grupo social.

Devemos observar que o projeto didático pedagógico presente nas escolas valoriza, quase que exclusivamente, o desenvolvimento de atividade matemática situada no plano do registro, e mais especificamente, o da escrita simbólica, através do uso de algarismos, variáveis e formas geométricas, negando que a atividade matemática na escola deva contemplar seus mais diversos planos indicados no esquema acima, sem criar separações e fragmentações. Somente nesse sentido, podemos pensar em conceber uma educação matemática mais próxima de uma visão holística[2] do conhecimento (D'Ambrósio, 1999) e de sua construção pelo ser humano que matematiza sua realidade do dia-a-dia de suas vivências com o mundo da Natureza e dos homens que constantemente criam e recriam sua cultura, do qual o conhecimento matemático é parte integrante e atuante.

Aprender matemática: navegar entre as diferentes e possíveis formas de representação de um mesmo objeto matemático

Como vimos no esquema da seção anterior, a construção do conhecimento matemático constitui-se em um longo e complexo processo, que por vezes não é trabalhado pela escola de forma plena. Se tomamos para análise a questão das representações, e por conseguinte a dos registros, podemos constatar que um dado conceito matemático, como o de número racional, deve ser conseqüência da construção de certas idéias mentais que darão vazão a determinadas representações mentais.

A atividade matemática tem, portanto, dois níveis de representações importantes, um primeiro que é o da representação mental, dos conceitos, e um segundo que é o da representação via registros, em especial o da escrita. Há teoricamente uma forte articulação entre esses dois níveis de representação, uma vez que os conceitos levam a determinado tipo de representação gráfica, e esses podem induzir a novas e diferentes construções de representações mentais.

Aprender matemática não é necessariamente saber representar mentalmente uma dada idéia/conceito, nem mesmo sua escrita sobre uma folha de papel. Aprender matemática implica muito mais do que isso, aprender matemática deve contemplar:

- A valorização de idéias ligadas à intuição e percepção espaço/temporal, à de grandeza e outras. Por exemplo, a noção da fração como parte de um todo espacial ou temporal, ou medida entre duas grandezas.

- O estabelecimento de uma multiplicidade de formas de representação/registro de um dado objeto matemático. Saber representar uma fração, tipo 3/4, não implica um aprendizado efetivo de frações, é necessário mais, é importante que o sujeito possa navegar entre esquemas figurais. A aprendizagem passa pela capacidade do sujeito em reconhecer que 75%; 15/20; 0,75; 1/2 + 1/4 ou 750/1000 são formas possíveis de representar a mesma idéia matemática.

- A criação, no espaço da sala de aula, de um fórum democrático, permanente troca e confronto de saberes, buscando a descoberta entre os partícipes da construção do conhecimento. Nesse espaço, podemos encontrar múltiplas formas de resolver uma situação matemática, assim como múltiplas possibilidades de representá-las. Na educação matemática é de grande importância que socializemos, validemos e institucionalizemos os processos e suas diferentes formas de representações, sejam eles manipulativas, mentais ou escritas.

---

2 Holístico e Holismo dizem respeito a tratar da realidade em sua totalidade, sem fragmentação. A realidade é por natureza um todo orgânico integrado, e sua fragmentação é um produto da cultura humana que não dá conta de compreender e de tratar da realidade em sua totalidade infragmentável, em função de sua complexidade.

Representação em Matemática

Assim, faz sentido citarmos um texto de Damm[3] (in Pais, 1999) sobre essa relação entre a aprendizagem matemática e a capacidade do sujeito em navegar nas diversas formas de representação do objeto matemático.

Damm menciona que, em matemática, os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações e que para seu ensino precisamos levar em conta as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático.

Segundo ela:

"Podemos dizer que uma escrita, um símbolo ou uma notação representam objetos/ conteúdos/conceitos matemáticos. O que se observa de forma geral é a confusão da representação do *objeto matemático com o próprio objeto matemático*.

Por exemplo, ao perguntarmos a uma criança sobre o que "é" três quartos, muitas respondem dizendo: é o número 3/4.

Ao trabalharem com a representação decimal, as crianças encontram o registro 0,75 e sabem operar com ele. Mas não têm a consciência de que trata-se do mesmo número anterior, embora, quando solicitadas a "passar da forma fracionária à decimal", ou vice-versa, possam aplicar os mecanismos aprendidos e obter 3/4 = 0,75".

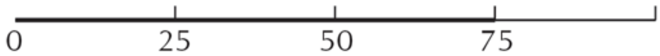
Ela cita outro autor, que afirma:

"No ensino de matemática o problema se estabelece justamente porque só se levam em consideração as atividades cognitivas de formação de representações e os tratamentos necessários em cada representação. No entanto o que garante a apreensão do objeto matemático, a conceitualização, não é a determinação de representações ou as várias representações possíveis de um mesmo objeto, mas sim a *coordenação entre estes vários registros de representação*. Por exemplo, não adianta o sujeito resolver uma operação usando material concreto, ou através de um desenho se não conseguir enxergar/coordenar estes procedimentos no tratamento aritmético (algoritmo da operação), no problema envolvendo esta operação ou mesmo em outro registro de representação qualquer (Nehring, 1996)" (1999, p. 147).

Damm afirma que a apreensão (ou plena compreensão) do objeto matemático é conseguida "a partir do momento em que o aluno consegue realizar tratamentos em diferentes registros de representação e "passar" de um ao outro o mais naturalmente possível".

No caso, podemos dizer que um tipo de raciocínio natural seria o aluno saber ler 0,75 não só como "zero vírgula setenta e cinco", mas, também, interpretá-lo como 75 centésimos, e ver que isso corresponde a três partes obtidas quando se divide 100 em 4. Visualizando:

3 As publicações de Regina Flemming Damm sobre representações matemáticas tem como uma das referências os trabalhos do pesquisador francês Duval que trabalha sobre registros de representações semióticas e funcionamento do pensamento.



Três partes iguais de um todo dividido em 4 → corresponde a 3/4.

Segundo a autora, *"converter"* uma representação é "mudar a forma pela qual um objeto é representado". Ela afirma ainda que essa conversão (como no caso entre as representações fracionária e decimal) não é simples e exige uma interferência do professor.

Os tratamentos usuais dados pela escola são ligados à forma e não ao conteúdo. Vejamos outro exemplo, também de Damm:

1) 0,25 + 0,25 = 0,5 (representação decimal, envolvendo um tratamento decimal).

2) 1/4 + 1/4 = 1/2 (representação fracionária, envolvendo um tratamento fracionário).

Ou seja, duas representações diferentes envolvendo tratamentos completamente diferentes para o mesmo objeto matemático. Estes dois registros de representação possuem graus de dificuldade diferentes para quem aprende, e este é um dos problemas que o educador precisa enfrentar na hora de ensinar, tendo presente que trabalha sempre o mesmo objeto matemático (números racionais/operações), porém o registro de representação utilizado exige tratamento muito diferente, que precisa ser entendido, construído e estabelecidas relações para o seu uso.

Em Educação Matemática, domina a concepção de que o ensino/aprendizagem de qualquer conhecimento está estreitamente vinculado com a compreensão de diferentes registros de representações.

É um real desafio para aquele que quer fazer educação matemática tal coordenação entre as diversas formas de representação de um mesmo objeto matemático, tendo em vista que a nossa própria formação, ao longo de nossa vida escolar, tratou das representações de forma fragmentada sem uma articulação entre duas ou mais naturezas de representação de um mesmo objeto matemático. Isso exige de cada um de nós uma revisitação dos próprios objetos e ferramentas matemáticas, o que foi objetivo fundamental no desenvolvimento dos Cadernos de Teoria e Prática deste primeiro módulo do GESTAR.

Teoria da Dialética Objeto-Ferramenta: Jogos de Quadros de Regine Douady

Um suporte teórico para tal concepção sobre o processo da aprendizagem da matemática e do seu ensino é encontrado na teoria da francesa Regine Douady, da Université Paris 7, membro do IREM (Instituto de Pesquisa em Ensino das Matemáticas) de Paris, que muito nos ajuda a compreender a importância de não enclausurarmos a aprendizagem em apenas uma das várias possibilidades de realizar e de representar a atividade matemática.

Esta segunda parte deste texto busca trazer um pouco de compreensão desta teoria, por meio de esclarecimentos teóricos e práticos sobre as diferentes representações dos objetos e ferramentas matemáticas. Para tanto, recorremos a um texto publicado por Maria Cristian S. de A. Maranhão, "Dialética ferramenta-objeto"[4].

4 Capítulo do livro *Educação Matemática: uma introdução*, Silvia Dias Alcântara Machado ... et al. São Paulo: EDUC, 1999.

Essa forma de conceber a aprendizagem matemática leva à concepção do duplo sentido do saber matemático:

1. O saber enquanto recurso instrumental de determinados conceitos e teoremas para resolver situação-problema. Ou seja, saber tendo um papel de *ferramenta*, como base da ação na resolução de situação-problema. A ferramenta é considerada sempre em uma dada situação, no contexto do fazer.

2. O saber enquanto formulação de conceitos, no desenvolvimento do poder de argumentação, de justificação, de prova e de demonstração. Ou seja, o saber tendo um papel de *objeto* em si, de idéias mentais, desprovida da situação, diríamos, é «*descontextualizado*». *O objeto sobretudo representação mental* e *mobilizado* no contexto das idéias matemáticas e de suas comunicações.

Neste contexto, Douady coloca que:

"*Ensinar* para um professor, é criar as condições que produzirão um saber entre os alunos. E *aprender*, para os alunos, é engajar-se numa atividade intelectual, pela qual se produza a disponibilidade de um *saber com seu duplo papel de ferramenta e de objeto"*.

Há uma forte e estreita ligação entre esses dois sentidos, ou seja, objetos e ferramentas são duas faces de uma mesma moeda, quer dizer, do saber matemático. É a relação dialética entre objeto e ferramenta que dá sustentação à Teoria de Douady. Essa dialética se estabelece na construção do saber no processo de resolução de situação-problema, em sete fases:

1ª fase: quando o aluno mobiliza os **antigos** conhecimentos, esses tendo o valor de ferramenta para resolver a situação-problema. Mesmo os antigos «objetos» tomam a forma de «ferramenta».

2ª fase: diante de dificuldades na resolução, em função da inadequação dos antigos conhecimento para resolver a nova situação, o aluno parte para a **pesquisa** de novos conhecimentos. O aluno «cria» conhecimentos localmente validados, mesmo sem saber o como e o porquê eles funcionam: o conhecimento é ainda implícito, sem ser comunicado.

3ª fase: quando o aluno **explicita** o conhecimento produzido e mobilizado (e junto, comunica suas dificuldades). É o momento do professor colocar em xeque os antigos conceitos e teoremas, tendo em vista a ineficácia na situação dada. Aí o debate entre alunos e professor é vital no processo da produção do saber.

4ª fase: na produção de resolução pelos alunos, pode ser que haja produção de conhecimento que os alunos não saibam validar (fase chamada de **novo implícito**). Diante da dificuldade dos alunos a justificarem e/ou validarem o conhecimento, deve o professor oferecer outros «quadros» (aritmética, álgebra, geometria, ...) para que os alunos possam ter novos elementos para compreenderem e fundamentarem seu novo conhecimento:

"... é necessário que os problemas fornecidos envolvam, pelo menos, dois domínios, de modo que um sirva de referência ao outro e possibilitem meios de validação pela ação. Os domínios, referidos no parágrafo anterior, por vezes, são ramos de conhecimento matemático (numérico, algébrico, das grandezas, ...) e, por vezes, partes deles. As representações em retas graduadas ou em gráficos cartesianos são freqüentemente utilizadas, nas obras de Douady (1987, 1989) e de Perrin-Glorian (1986, 1987), em situações de ensino infantil ou fundamental, Douady (1984), por vezes, considera como *domínio*, o da representação (incluindo diversos códigos, registros ou desenhos de que esses alunos lancem mão para conduzir um procedimento de solução de um problema) ou, até mesmo, o que ela denomina domínio material, contemplando aí o que os alunos obtêm das ações físicas sobre os objetos".

No trabalho de frações podemos tomar como exemplo as explorações com fichas, com dobraduras, diagramas com utilização de preenchimento de superfícies, representações em forma de frações e decimais como um exemplo da mudança de quadros ou domínios.

Essa mudança de domínio[5] é importante para o aluno no processo de construção do saber uma vez que, não encontrando elementos dentro de um quadro, poderá, num outro, obter o conhecimento necessário. Nesse sentido, a Teoria de Douady é por vezes denominada também de "Jogo de Quadros" (Jeux de Cadres). Por isso podemos chamá-la de "Teoria de Quadros" Uma grande contribuição desta teoria está no sentido da aprendizagem matemática que ela propõe: **aprender matemática não significa tão somente saber resolver uma situação em um ou mais quadros, aprender é poder articular de forma dinâmica os diferentes procedimentos em quadros distintos**, tendo uma visão do conhecimento matemático como algo dinâmico e multifacetado. Quanto mais facilmente o aluno navega de um quadro para outro, mais consistentes são suas competências matemáticas. Isso requer da escola a oferta de oportunidade ao aluno de tratar uma situação-problema em mais de um quadro de referência. Mais que resolver a situação-problema em um quadro, a aprendizagem matemática implica tanto numa variação de quadros para sua resolução quanto na capacidade de navegação de um quadro a outro.

5ª fase: quando os novos conhecimentos são **institucionalizados**, quando no processo de construção e/ou validação do conhecimento, o professor "dá nome aos bois", eleva a ferramenta à condição de objeto do saber matemático, ao dizer "isso na matemática se chama..." ou "isso que você fez é conhecido pela propriedade ou teorema...". Isso significa que as ferramentas foram elevadas ao nível de objeto matemático pertencente ao saber social e historicamente constituído e validado.

6ª fase: de **reinvestimento**, em novas atividades para familiarização do objeto institucionalizado.

7ª fase: nova situação-problema, com a reutilização do novo objeto como ferramenta para resolver novas situações.

E, em síntese:

"É relevante compreender que não convém o uso do simples termo mudança de domínios, em lugar de interação entre domínios, pois não se trata de aprender conhecimentos de um domínio e aplicá-los para outros. Como vimos no exemplo, trata-se de tornar disponíveis diversos *conhecimentos em, pelo menos, dois domínios*, visando à formulação de problemas que levem à produção de conhecimentos novos, colocando em interação os conhecimentos dos domínios em jogo. Esse termo, *interação*, prevê idas e vindas entre domínios estabelecendo relações matematicamente relevantes entre as noções estudadas. Friso ainda que os conhecimentos ou as noções são as ferramentas, isto é, prevê-se o uso de conceitos, propriedades, procedimentos de cada domínio" (p. 129-130).

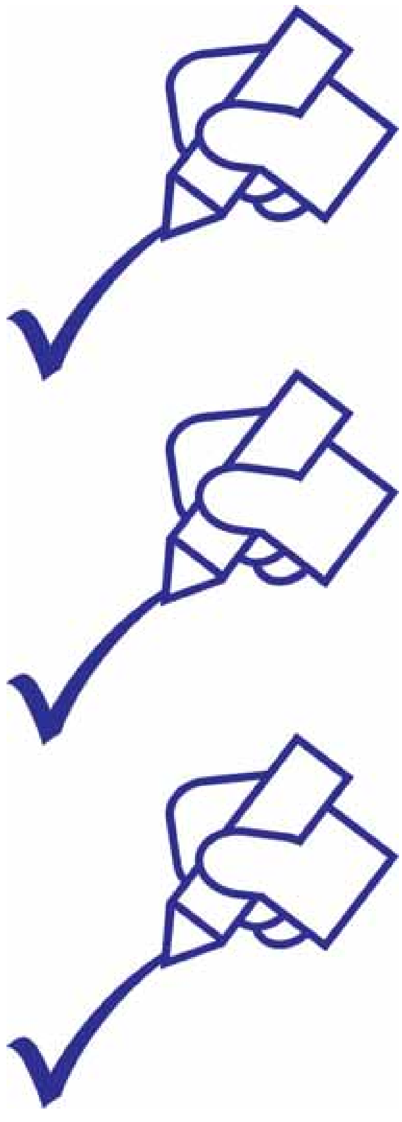
5 Quadros e domínios podem ser considerados como sinônimos na nossa reflexão.

As pesquisas em didática da matemática têm possibilitado constatar que as teorias de Douady e Duval se articulam e se complementam, dando importantes contribuições para uma nova e importante visão dos professores para os diferentes papéis da representação tanto na produção do conhecimento matemático quanto para a sua aprendizagem.

Atividade

Faça um levantamento das diferentes formas de representação matemática exploradas no presente texto. Escolha um conteúdo que você trabalhará nas próximas semanas com seus alunos e explore as diferentes formas possíveis de valorizar as múltiplas representações envolvendo os conceitos e procedimentos envolvendo este conteúdo matemático.

Solução das atividades

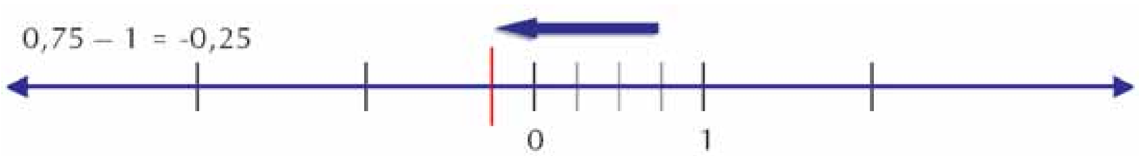


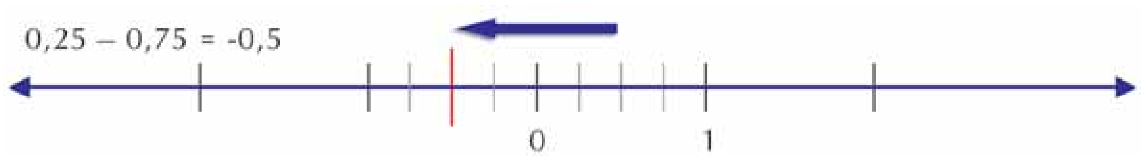
Solução das atividades

Atividade 4

Ponto	Diferença entre o ponto e a média
1,25	1,25 – 2,46 = -1,21
1,25	-1,21
1,75	-0,71
2,25	-0,21
3,25	0,79
3,25	0,79
4,25	1,79

Soma dos valores: 0,03.





Soma de dois valores positivos ou negativos – mantém o sinal.

Soma de dois valores de sinais diferentes – mantém o sinal do número que tem o maior valor absoluto (ou módulo).

Atividade 5

Resposta pessoal.

Atividade 6

10km/h = 166,67m/min, aproximadamente.

Atividade 8

20.214.664.816mm^3 ou $2{,}0214664816 \times 10^{10}$.

20.214.664,816cm^3.

20.214,664816dm^3.

20,214664816m^3.

Peso: 52.558.128,52g.

52.558,12852kg.

52,55812852 toneladas.

Não é possível que o caminhão transporte o peso total do alumínio.

Unidade 7

A previdência social e a mensuração de riscos

Ana Lúcia Braz Dias

Iniciando a nossa conversa

Olá, professor!

A vida é realmente cheia de incertezas, não é mesmo? Não sabemos que direção tomará a economia do país, nem a política... nem mesmo sabemos como vai estar nossa saúde no futuro.

O jeito é termos fé e torcer pelo melhor!...

Mas, também devemos usar nosso espírito científico e examinar o que é mais provável acontecer.

Na Matemática escolar ainda predomina o pensamento determinista, e quase não se tem dado atenção ao pensamento probabilístico. Estamos acostumados a uma matemática de certezas. No entanto, é importante contemplar na matemática também a incerteza e as probabilidades.

Os *Parâmetros Curriculares Nacionais* dão destaque a esse tema, como o próprio documento registra, devido à sua demanda social. Enfatizam ser necessário o aluno compreender que muitas questões do cotidiano são de natureza aleatória, mas que se podem identificar possíveis acontecimentos com relação a essas questões e até estimar o grau de probabilidade que um ou outro dos possíveis resultados tem de acontecer.

Você, como professor e como cidadão, já deve ter-se visto em situações em que fosse necessário ponderar riscos e possíveis benefícios. Nesta unidade vamos retomar essas experiências em situações talvez novas, mas que esperamos ponham seus conhecimentos em uso e sob reflexão, de forma a deixá-los tinindo para quando você precisar colocá-los em ação com seus alunos!

Você vai ter que estar com sua habilidade de raciocínio probabilístico afiada para levar seus alunos a uma apreciação da importância da matematização da incerteza na vida cotidiana.

Veja o que você encontrará em cada uma das três seções desta unidade:

1. Resolução de uma situação-problema

A resolução da situação-problema desta unidade envolve a análise de registros de acidentes de trabalho para determinar que setor da atividade econômica oferece maior risco de acidentes.

2. Conhecimento matemático em ação

Nesta seção, você examinará com mais detalhe o conceito de probabilidade e como ele foi usado para tentar resolver a situação-problema da seção anterior.

3. Transposição Didática

Esta seção discute problemas relacionados ao ensino-aprendizagem de conceitos vistos nas seções 1 e 2 e sugere ações relacionadas para a sala de aula.

Como as outras unidades, esta também conterá um Texto de Referência sobre Educação Matemática, que abordará as especificidades do ensino de probabilidade.

Definindo o nosso percurso

Esperamos que, ao longo desta unidade, você possa:

1 - Com relação aos seus conhecimentos matemáticos:

- identificar nas situações do cotidiano problemas que envolvam probabilidades;
- comparar probabilidades com base em informações numéricas e gráficas;
- interpretar razões, inclusive porcentagens, como medidas de probabilidade;
- identificar em quais situações pode-se calcular uma probabilidade teórica e em quais se pode calcular uma probabilidade experimental;
- calcular probabilidades teóricas em situações simples;
- calcular probabilidades experimentais em situações simples;
- identificar quando um modelo geométrico ou gráfico simula adequadamente uma situação de incerteza.

Esses conhecimentos serão desenvolvidos nas seções 1 e 2.

2 - Com relação aos seus conhecimentos sobre Educação Matemática, você irá:

- reconhecer o papel das diferentes representações como ferramenta cognitiva;
- lembrar a importância de que o aluno transite entre diferentes representações de um mesmo conceito (Teoria de Quadros);
- conhecer a importância do contexto e das situações-problema na construção de conceitos matemáticos;
- refletir sobre algumas diferenças básicas entre ensinar probabilidade e ensinar outros tópicos de Matemática;
- conhecer alguns erros comuns de alunos com relação ao conceito de probabilidade;
- compreender a importância da experimentação no ensino de probabilidade;
- conhecer os principais materiais manipulativos usados no ensino de probabilidade;
- entender o que é simulação e como ela pode ser usada no ensino de probabilidade.

Isso será feito em pequenos quadros intitulados "Aprendendo sobre educação matemática", que você encontrará ao longo da seção 2 e no Texto de Referência.

3 – Com relação à sua atuação em sala de aula:

- estimular seus alunos ao raciocínio probabilístico em situações de incerteza;

- formular atividades nas quais seus alunos tenham que experimentar concretamente situações envolvendo probabilidades, com jogos, dados, roletas e outros materiais concretos.

Esse objetivo será tratado na seção 3.

Seção 1

Resolução de situação-problema: comparação de probabilidades

Objetivo da seção

Esperamos que ao longo desta seção você possa:

• Criar uma estratégia para comparar probabilidades em uma situação envolvendo dados reais sobre as freqüências de diferentes eventos;

• Comparar probabilidades com base em informações numéricas e gráficas;

• Interpretar razões, inclusive porcentagens, como medidas de probabilidade.

Integrando a matemática ao mundo real: probabilidade em nossa vida

Você já pensou sobre o que há de comum entre:

- Comprar uma rifa e pagar seguro de automóvel?

- Investir em ações na bolsa e fazer uma cirurgia arriscada?

A semelhança entre essas situações é que elas – como quase tudo na vida – envolvem incerteza e requerem comparação entre riscos e possíveis benefícios.

Em nossa condição humana nunca tivemos controle completo sobre o futuro (não é uma frase que dá o que pensar?). Por outro lado temos bastantes informações sobre o que "pode" acontecer. Pesquisas mostram qual candidato tem mais chance de ganhar as eleições, a probabilidade de uma pessoa fumante desenvolver câncer...

Diante de tanta instabilidade e de tanta mudança, é importante sabermos interpretar as estatísticas e informações sobre probabilidades, para nelas basearmos nossas decisões.

Mas, que habilidade é essa?

O raciocínio probabilístico

É uma forma de raciocínio um tanto peculiar, pois se baseia em informações sobre o que tem acontecido no passado e no presente para considerar o que é mais provável de acontecer no futuro.

Não nos permite ter certeza quanto ao que vai acontecer, mas aumenta nossas chances de acertar!

Atuária: é a ciência da avaliação de riscos e do cálculo dos prêmios e reservas relativas às operações de seguros. Pode ser definida também como a matemática dos seguros.

Como o contexto em que vamos desenvolver as atividades deste caderno é o da seguridade e da matemática atuarial, a seguir você tem um glossário de termos relacionados a seguros e que serão úteis nesta e na próxima unidade.

O que são os seguros?

O texto abaixo, extraído da página do jornal "O Estado de S. Paulo" na internet, explica o que são e como surgiram os seguros.

Seguro para fugir das incertezas

O seguro, como o próprio nome diz, surge da necessidade de segurança das pessoas diante das incertezas e riscos que corremos na vida. Todos queremos uma segurança, uma garantia futura que nos proteja dos prejuízos e perdas de fatos inesperados.

Com esta finalidade, pessoas e grupos têm se unido ao longo da história. Na Antigüidade, os cameleiros que faziam longas viagens pelo deserto se associavam a fim de repor um animal que morresse, de qualquer integrante da caravana. A perda do animal poderia ser a desgraça de um cameleiro, mas certamente era suportada pelo grupo.

Outro exemplo vem da China. Lá, os comerciantes que desciam a correnteza dos rios com mercadorias se associavam, e distribuíam os produtos em vários barcos, para diminuir o risco de perda total deles.

Estes exemplos mostram a essência do setor de seguros. Pessoas que têm afinidades se unem para amenizar os riscos de perdas individuais, dentro do grupo, através de ajuda recíproca. É uma forma de tornar mais próximo o desejo de que nada de mal possa nos atingir.

Na modernidade

O seguro é então o instrumento legal que permite aos segurados garantir a cada membro do grupo, através do segurador, a compensação econômica por um evento futuro e incerto, chamado risco. É o caso de um incêndio, roubo ou acidente, eventos que todos sabemos ser possíveis, mas ninguém é capaz de prever quando nem onde ou com quem.

Para garantir que as perdas sejam compensadas, cada pessoa do grupo paga um valor proporcional ao risco corrido para o segurador. Este valor vai ser usado para pagar as indenizações e também cobrir os custos e lucros da seguradora. É o segurador que assume os riscos pelo grupo em troca desta remuneração, chamada de prêmio.

O prêmio é uma forma de baixo custo para cobrir eventos ocasionais de pessoas que estão expostas a riscos semelhantes. E deve ser proporcional ao risco de cada evento ocorrer. Cálculos de probabilidades, com base também na observação do comportamento destes eventos no passado, ajudam a estimar o prêmio.

A Previdência Social

As perguntas e respostas abaixo foram extraídas do documento *Tudo o que você quer saber sobre a Previdência Social*, do Ministério da Previdência e Assistência Social:

O que é previdência social?

É o seguro social para quem contribui.

A Previdência Social é a instituição pública que tem como objetivo reconhecer e conceder direitos aos seus segurados.

A Previdência Social, juntamente com a Saúde e Assistência Social, compõe a Seguridade Social, que é a política pública de proteção integrada da cidadania.

Para que serve a Previdência Social?

Para substituir a renda do segurado-contribuinte, quando da perda de sua capacidade de trabalho.

Quando o trabalhador perde a capacidade de trabalho?

Quando é atingido por um dos chamados riscos sociais: doença, invalidez, idade avançada, morte e desemprego involuntário. Além destes, há também a maternidade e a reclusão.

Quadro 1 – Fonte: Brasil, Secretaria de Previdência Social, 2002, p. 7.

Todos estamos sujeitos a esses “riscos sociais” que o documento menciona. Uns em maior, outros em menor grau. Com isso queremos dizer que alguns de nós corremos maior risco de desemprego, ou de doença, ou de invalidez, dependendo da história de vida de cada um. Só há um desses fenômenos a que estamos todos igualmente sujeitos: a morte! Este é um evento certo na vida de todo mundo.

Situação-problema: comparação de probabilidades de acidente no trabalho

Para oferecer a seus segurados os benefícios de aposentadoria por invalidez, auxílio-doença ou auxílio-acidente, a Previdência Social tem que estipular o valor que o contribuinte e seu empregador devem pagar para custear o fornecimento desses serviços. Ou seja: a Previdência quer saber qual a probabilidade de ter de vir efetivamente a pagar a indenização prevista, e depois de quanto tempo de pagamento por parte do segurado, para assim poder classificar o segurado quanto ao risco que ele representa e estipular a contribuição mensal que ele deve efetuar.

Ao responder à pergunta "Quanto custa ser filiado à Previdência Social?", a cartilha *Tudo o que você quer saber sobre a Previdência Social* registra, entre outras coisas, que:

O empregador, pessoa física ou jurídica, além de descontar e recolher à seguridade as contribuições do empregado, é obrigado a contribuir sobre a folha de salários, da seguinte forma:

- 20%, sobre o salário de seus empregados;
- 1%, 2% ou 3%, sobre o salário de seus empregados, de acordo com o grau de risco da atividade da empresa;
- 12%, 9% ou 6%, exclusivamente sobre o salário do empregado, cuja atividade exercida ensejar a concessão de aposentadoria aos 15, 20 ou 25 anos de contribuição.

Quadro 2 – Fonte: Brasil, Secretaria de Previdência Social, 2002, p. 10-11.

Observe que o documento diz que os empregadores podem ter que pagar 1%, 2% ou 3% sobre o salário dos empregados, dependendo do **grau de risco** da atividade da empresa. O que seria isso?

Cada ramo da atividade econômica oferece um risco de que seus empregados sofram acidentes típicos ou adquiram doenças ocupacionais. Essa variação no grau de risco ocorre porque empresas diferentes oferecem diferentes condições de trabalho, adotam diferentes medidas de segurança, usam tecnologias diferentes e empregam mão-de-obra com características diferentes. Todos esses fatores influenciam o grau de risco da atividade econômica como um todo.

O Regulamento da Organização e do Custeio da Seguridade Social pede que as empresas sejam classificadas de acordo com o nível do risco de acidente do trabalho de sua atividade principal. Cada empresa terá seu nível de risco avaliado, e este poderá ser clasificado como "leve", "médio" ou "grave". É sobre esses riscos que incidem as contribuições de 1%, 2% ou 3% das remunerações pagas, respectivamente.

Para classificar as empresas como de risco leve, médio ou grave, foi criado um grupo de trabalho, composto por técnicos do Ministério da Previdência e Assistência Social e do Ministério do Trabalho e Emprego.

Esse grupo de trabalho estuda as estatísticas dos registros de acidentes nas diferentes atividades para computar as diferentes probabilidades de ocorrência de acidentes de trabalho em categorias de atividade econômica.

No mês de julho de 2001, a Previdência obteve os seguintes registros (tabela 1 e gráfico 1):

Afastamentos por Acidentes de Trabalho por Atividade Econômica - Julho de 2001		
Atividade Econômica	**Quantidade de Empregados**	**Afastamentos por Acidente de Trabalho**
Agropecuária e Extrativismo	1.413.885	8.298
Indústria Leve	2.031.364	24.152
Indústria Pesada	2.455.414	33.024
Construção Civil	1.105.483	13.811
Comércio	4.096.691	24.260
Serviços	6.241.421	33.690
Transportes	1.278.488	12.758
Crédito	524.044	5.630
Administração Pública	1.137.727	2.044
Não Classificado	32.646	31
Total	20.317.163	157.698

Tabela 1

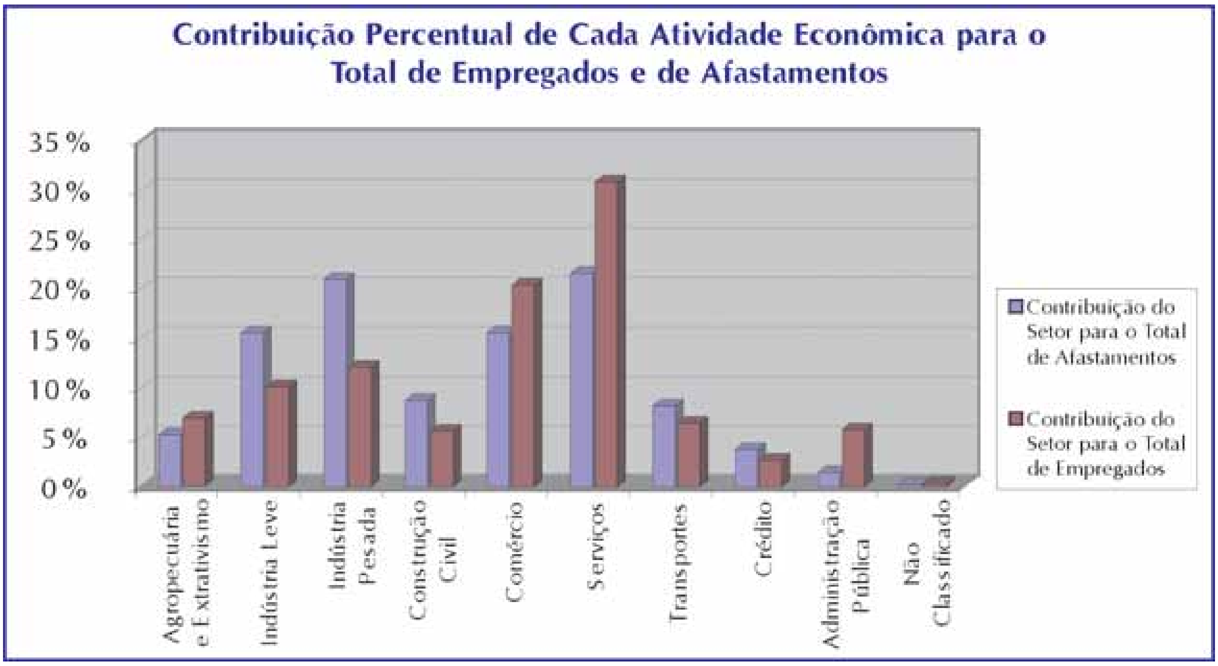


Gráfico 1

Atividade 1

a) Faça de conta que você faz parte do grupo de trabalho que irá assessorar o ministro da Previdência e Assistência Social a fazer um enquadramento dos nove ramos de atividade econômica nas categorias "risco leve", "risco médio" e "risco grave", com base nos registros de julho de 2001. Você pode usar tanto a tabela 1 quanto o gráfico 1 para fazer sua classificação pessoal. Que atividades você classificaria como de risco leve, como de risco médio e como de risco grave?

b) Que critérios você utilizou para fazer a classificação?

Atividade 2

O setor que teve o maior número de afastamentos por acidentes de trabalho foi o setor de Serviços, com 33.690 afastamentos. Responda à questão:

Com base nessa informação, pode-se afirmar que o setor de Serviços é o que tem maior risco de acidentes de trabalho?

Você deve ter observado que os dois setores que tiveram os maiores números de afastamentos por acidentes de trabalho foram os setores de Serviços e Indústria Pesada (33.690 e 33.024 afastamentos, respectivamente). No entanto, há algo mais a ser observado: que o número de empregados (vínculos) em Indústria Pesada naquele mês era muito menor que o de empregados em Serviços.

Atividade 3

Para fazer esta atividade, reflita bem sobre o parágrafo anterior.

a) Retome a classificação que você fez dos setores de atividades quanto ao risco de acidentes de trabalho e responda:

a1) A classificação considerou a informação relativa a número de empregados?

a2) A classificação considerou a informação relativa a número de afastamentos?

Caso você tenha levado em consideração apenas uma das informações, repense seu critério de classificação e faça o item "b":

b) Elabore um método para ordenar os setores do que oferece menor risco ao mais arriscado, de modo a incorporar as informações relativas a número de empregados e número de afastamentos.

Você conseguiu resolver todos as atividades propostas? Não se preocupe se você não tiver conseguido resolver algumas delas. Ao longo desta unidade você poderá reexaminar os conceitos envolvidos nesta seção e compreender melhor essa situação-problema e outras similares.

Seção 2

Construção do conhecimento matemático em ação: probabilidade

Objetivo da seção

Esperamos que, ao longo desta seção, você possa:

Construir em ação os seguintes conhecimentos matemáticos:

- Listar termos da linguagem cotidiana que estejam relacionados à incerteza;
- Atribuir significado às probabilidades: 0, 1 e 1/2;
- Calcular a probabilidade de algo não ocorrer quando for dada sua probabilidade de ocorrer;
- Identificar quando uma probabilidade é do tipo subjetiva, a priori ou freqüencial;
- Identificar em quais situações pode-se calcular uma probabilidade teórica e em quais se pode calcular uma probabilidade experimental;
- Calcular probabilidades teóricas em situações simples;
- Calcular probabilidades experimentais em situações simples;
- Identificar quando um modelo geométrico ou gráfico simula adequadamente uma situação de incerteza.

Em relação à educação matemática, você estará:

- Reconhecendo o papel das diferentes representações como ferramenta cognitiva;
- Lembrando a importância de que o aluno transite entre diferentes representações de um mesmo conceito (Teoria de Quadros);
- Conhecendo a importância do contexto e das situações-problema na construção de conceitos matemáticos;
- Compreendendo a importância da experimentação no ensino de probabilidade;
- Conhecendo os principais materiais manipulativos usados no ensino de probabilidade;
- Conhecendo a simulação de experimentos com materiais manipulativos e como ela pode ser usada no ensino de probabilidade.

Probabilidade

No início de nossa conversa e na situação-problema proposta na seção 1 aparecem os termos “risco”, “probabilidade”, “evento certo”, “certeza”, “incerteza”, “aleatório” – que podem todos ser associados ao conceito matemático de probabilidade. Você certamente (olha aí outro termo associado à questão!) tem conhecimentos sobre o assunto, talvez adquiridos formalmente, talvez construídos em experiências informais. Vamos começar fazendo um mapeamento das idéias que você tem sobre probabilidade?

Atividade 4

a) Liste termos que você considera associados ao conceito de probabilidade e cujo significado você conhece bem.

b) Liste termos que você considera associados ao conceito de probabilidade e de cujo significado você não está bem certo.

c) Dê exemplos de situações nas quais o conceito matemático de probabilidade aparece.

d) Formule uma pergunta que precise do conceito matemático de probabilidade para ser respondida.

e) Liste alguns fatos que você conhece sobre o conceito de probabilidade. Por exemplo: Que números são usados para expressar probabilidades? Você conhece alguma fórmula usada para calcular probabilidade?

Probabilidade de um evento

O estudo da probabilidade nos permite quantificar a chance que um acontecimento tem de ocorrer. Esse "acontecimento", no estudo de probabilidades, pode ser chamado de "evento".

> Probabilidade, em matemática, é um número que atribuímos a um evento para exprimir se ele tem muita ou pouca chance de ocorrer. Ela pode ser qualquer número de 0 a 1, geralmente um decimal, uma fração, ou uma porcentagem.

Nesse contínuo de 0 a 1 caracterizamos desde eventos impossíveis, aos quais atribuímos probabilidade zero, até eventos que com certeza acontecerão, que têm probabilidade 1 e que também são chamados de eventos certos.

E se atribuirmos a um evento probabilidade 0,5? Isso significa que o evento tem a mesma chance de ocorrer que de não ocorrer.

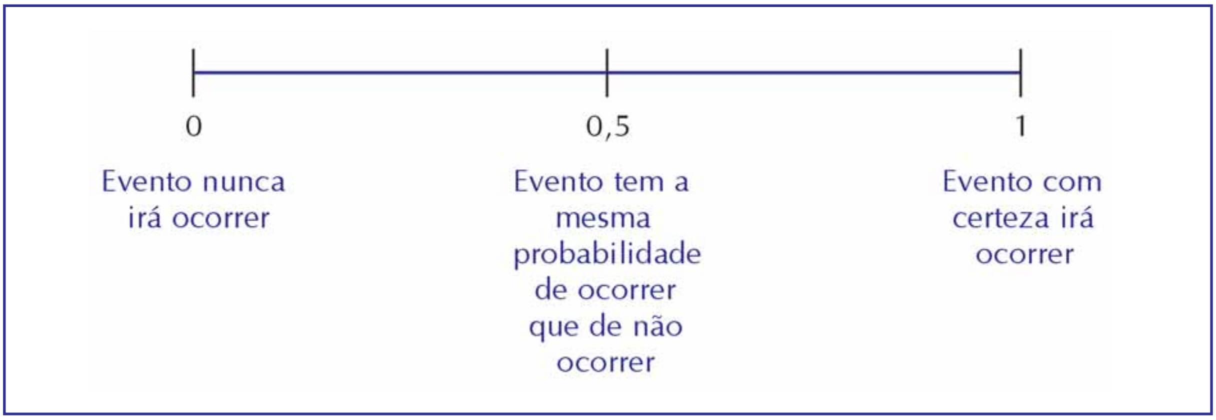


Figura 1: A escala das probabilidades

Atividade 5

A equipe de previsão de tempo de um jornal disse que a probabilidade de chuva para amanhã é de 50%. Isso significa que:

a) A equipe não tem a menor idéia sobre o que vai acontecer.

b) A equipe não tem nenhuma informação conclusiva sobre o tempo, e então tem que "chutar" que há 50% de chance de chuva.

c) Com o tempo nas condições de hoje, há a mesma probabilidade de chover que de não chover.

Acaso não é o mesmo que falta de informação

Algumas pessoas pensam que tudo o que depende da sorte ou do acaso, ou tudo que não sabemos com certeza se vai acontecer, tem 50% de probabilidade de acontecer.

Para essas pessoas, tanto o evento poderia acontecer como não acontecer, e como não podemos adivinhar o futuro, 50% de probabilidade seria o palpite mais certo.

Você já ouviu aquela piada que diz que a probabilidade de ganhar na loteria é 50% porque "ou você ganha ou perde"?

Não é assim que a matemática das probabilidades funciona!

Ela realmente não serve para prever nada com certeza. Adivinhações, só com bola de cristal!

Mas dizer que algo tem 50% de chance de acontecer tem um significado bem específico. Significa que, se pudéssemos repetir aquela situação um grande número de vezes, em aproximadamente metade das vezes nosso evento iria acontecer.

Por exemplo, dizer que hoje a probabilidade de chuva é de 50% **não** é dizer que não temos nenhuma informação sobre o que pode acontecer. Pelo contrário, é dizer que sabemos que, avaliando os dias em que as condições atmosféricas eram as mesmas que as de hoje, constatamos que choveu em metade das vezes.

Outro exemplo: Dizemos que a probabilidade de conseguir uma "cara" no lançamento de uma moeda é 1/2. Isso significa que, se lançarmos uma moeda e anotarmos o resultado um grande número de vezes, digamos, 1.000 vezes, iremos obter cara em aproximadamente metade das vezes. Nada podemos dizer sobre o resultado de uma jogada em particular, pois não somos adivinhos!

A matemática das probabilidades diz respeito a grandes números de repetições!

Probabilidade de sucesso, probabilidade de insucesso

Na linguagem do cálculo de probabilidades, usamos o termo **sucesso** para marcar um evento específico que estamos considerando.

Depois que especificarmos qual evento será considerado **sucesso** por nós, todas as outras alternativas serão **insucesso**.

Por exemplo:

Ao lançarmos um dado, podemos ter como resultado os números 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Se especificarmos que sucesso para nós será obter o número 4, insucesso será obtermos o número 1, 2, 3, 5 ou 6.

Em toda situação, com certeza uma das duas coisas acontecerá: ou sucesso ou insucesso. Então a soma das probabilidades de sucesso e insucesso tem que ser igual a 1 (pois já vimos que o que acontecerá com certeza tem que ter probabilidade igual a 1).

Probabilidade de sucesso + probabilidade de insucesso = 1

Essa equação é muito útil para resolvermos alguns problemas de cálculo de probabilidades, pois, às vezes, sabemos a probabilidade de sucesso e queremos saber a probabilidade de insucesso, ou vice-versa.

Nesses casos, podemos reescrever a equação acima nas formas abaixo, que evidenciam bem o valor da probabilidade de sucesso em termos da probabilidade de insucesso, e vice-versa:

probabilidade de sucesso = 1 – probabilidade de insucesso

ou

probabilidade de insucesso = 1 – probabilidade de sucesso

Por exemplo, digamos que uma pesquisa eleitoral tenha divulgado que as chances que um certo candidato a prefeito tem de vencer as eleições sejam de 1 em 10.

Repare que se ele tem 1 chance em 10, a probabilidade de ele ganhar é de 1/10.

Se considerarmos como sucesso a vitória desse candidato, podemos dizer também que a probabilidade de sucesso é de 1/10. É apenas uma questão de linguagem, não implica estarmos torcendo por esse candidato!

Qual é então a probabilidade de esse candidato perder? Esta será a probabilidade de insucesso:

probabilidade de insucesso = 1 – probabilidade de sucesso $\rightarrow$

probabilidade de insucesso = $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

Atividade 6

Se a probabilidade de um empregado da construção civil ter um acidente de trabalho é 0,012, qual é a probabilidade de ele não ter acidente de trabalho?

Atividade 7

Se você jogar um dado e apostar que vai sair um "6", há dois resultados possíveis – ou sai 6 e você ganha, ou não sai 6 e você perde. Analise cada uma das afirmações a seguir e diga se é verdadeira ou falsa.

a) Cada um destes resultados – "sai um 6" ou "não sai um 6" – tem a mesma probabilidade de ocorrer.

b) A probabilidade do resultado "sai um 6" é igual a 1 menos a probabilidade do resultado "não sai um 6".

Como atribuir probabilidades a eventos

Já vimos que os números que expressam probabilidades variam em uma escala de zero a um. Vimos também que:

a) quando algo tem necessariamente que acontecer, sua probabilidade é 1;

b) quando algo é impossível de acontecer, sua probabilidade é 0;

c) quando algo tem a mesma probabilidade de acontecer que de não acontecer, sua probabilidade é 0,5.

E se não ocorre nenhum desses casos, como atribuir probabilidades a eventos? Há basicamente três modos, que veremos a seguir.

Uma questão de opinião

Originalmente a palavra probabilidade significava "opinião garantida por autoridade". A probabilidade era a opinião de um juiz, ou de um jesuíta. Logo essas "opiniões" começaram a ser quantificadas, transformando essa análise subjetiva em um contínuo quantificado de graus de certeza, que iam desde a incredulidade total à certeza absoluta. A ciência do cálculo de probabilidades era, em seu início, vista como a tradução matemática do raciocínio jurídico que permitia ao juiz formular um veredicto perante um conjunto de evidências. Essa prática evoluiu para o que hoje chamamos **probabilidade subjetiva**.

Nesse jeito de atribuir probabilidades, continuamos a considerar opiniões. Só temos que prestar atenção a se os números atribuídos seguem as regras da lógica das probabilidades. Senão, essas opiniões não seriam conceitos matemáticos!

Por exemplo: um médico pode determinar, com base em sua opinião, uma probabilidade de que seu paciente esteja com uma certa doença. Mas essa probabilidade tem que ser um número de 0 a 1!

Além disso, se ele diz que a probabilidade de que o paciente tenha a doença é 0,9, qual deverá ser a opinião dele quanto à probabilidade de que o paciente não tenha a doença? Tem que ser 0,1 (ou seja, 1- 0,9). Qualquer coisa diferente disso não estaria seguindo a lógica!

Uma questão de suposição

Digamos que queremos determinar a probabilidade de se obter um número par no lançamento de um dado.

Será que podemos considerar que cada lado tem a mesma chance de cair voltado para cima após o lançamento?

Se for razoável supor isto, então podemos calcular a probabilidade teórica, também chamada probabilidade a priori.

Se cada lado do dado tem a mesma chance de cair voltado para cima, temos 6 resultados possíveis e com a mesma chance de acontecer.

Dentre esses 6 resultados possíveis, quantos são números pares? Os números 2, 4 e 6 são pares. Então dentre as 6 possibilidades temos 3 números pares.

A probabilidade teórica de se obter um número par no lançamento de um dado é então:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Vejamos outro exemplo:

Vamos fazer um sorteio entre os alunos em uma sala de aula. Na turma há 15 meninos e 12 meninas. Escrevemos os nomes de cada aluno ou aluna em tirinhas de papel, que são dobradas com bastante cuidado para que todos os pedacinhos de papel fiquem iguais. Assim, cada aluno terá a mesma chance de ser sorteado! Colocamos os pedacinhos de papel em uma urna, misturamos bem, e pedimos para alguém retirar um nome.

Qual é a probabilidade de que sorteemos uma menina?

Se há 27 alunos no total, dentre os quais 12 são meninas, a probabilidade de uma menina ser a sorteada será:

$$\frac{12}{27} = 0{,}4$$

Repare que usamos sempre uma razão para calcular a probabilidade teórica.

Quais são os termos dessa razão?

Digamos que a razão seja $\frac{a}{b}$. O termo b é o número de resultados possíveis e que tenham a mesma chance de acontecer. E o termo a é o número de resultados em que ocorre o que queremos, como um número par ou uma menina, nos exemplos acima.

Você já reparou que, para dizermos qual a probabilidade de algo acontecer usando esse conceito, temos que descobrir de antemão todos os resultados que têm a mesma chance de acontecer?

Antes mesmo de calcularmos a probabilidade temos que dizer quais resultados teriam a mesma probabilidade!

Como podemos fazer isso, se não calculamos ainda as probabilidades?

O jeito é fazer algumas suposições "a priori", ou seja, antes de mais nada assumir que algumas coisas têm a mesma probabilidade.

O que é mais importante para podermos determinar a probabilidade teórica? Que tenhamos possibilidades com probabilidades iguais de serem obtidas.

Nos exemplos acima, pudemos supor que cada face do dado tinha a mesma probabilidade de cair voltado para cima, e que cada aluno tinha a mesma chance de ser sorteado. E quando não pudermos fazer isso?

Aí, só recorrendo à experiência, como veremos nos parágrafos a seguir.

Uma questão de experiência

Às vezes não dá para saber de antemão que resultados de uma situação de incerteza teriam chances iguais de acontecer.

Por outro lado, algumas dessas situações podem ser levadas a experimentação: podem ser repetidas em condições semelhantes diversas vezes.

Nesse caso, podemos calcular a probabilidade **experimental**, ou **freqüencial**.

Essa probabilidade é uma aproximação da probabilidade teórica, sendo a aproximação tanto melhor quanto maior o número de repetições realizadas.

Como a probabilidade teórica, a probabilidade experimental também é uma razão:

$$\frac{\text{número de vezes em que o evento ocorreu}}{\text{número total de repetições realizadas}}$$

Note a semelhança entre a probabilidade experimental de um evento e a sua **freqüência relativa** (Lembrete 1).

Lembrete 1

Freqüência absoluta e freqüência relativa

A freqüência absoluta é uma simples contagem de quantas vezes algo ocorreu.

A freqüência relativa é a razão entre a freqüência absoluta e o total de observações (número de vezes em que aquilo ocorreu somado ao número de vezes em que não ocorreu).

Ex.: Na tabela 1 vemos que a freqüência absoluta de afastamentos por acidente de trabalho em comércio é de 24.260.

A freqüência relativa de acidentes de trabalho no comércio é $\frac{24.260}{157.698} = 0{,}15$

Articulando conhecimentos 1
Probabilidade freqüencial e freqüência relativa

Teoricamente, a probabilidade freqüencial não é igual à freqüência relativa simplesmente, mas ao limite da freqüência relativa quando o número de repetições tende ao infinito.

Mas, na prática, como não podemos repetir o experimento um número infinito de vezes, utilizamos a freqüência relativa como probabilidade experimental.

Ou seja, na prática, **probabilidade experimental = freqüência relativa em um grande número de repetições**.

O que é mais importante para se poder determinar a probabilidade experimental?

É essencial que ao determinar a probabilidade experimental de um evento as repetições sejam realizadas **sob as mesmas condições** e **um grande número de vezes**.

Vamos retomar a tabela 1 da página 113.

Atividade 8

Usando os dados da tabela 1 da página 113, calcule as freqüências relativas dos afastamentos por acidente de trabalho em relação ao total de afastamentos e do número de empregados em cada setor da atividade econômica em relação ao total de empregados e registre-os na tabela 2:

Setor	Freqüência Relativa	
	Afastamentos	Empregados
Agropecuária e Extrativismo		
Indústria Leve		
Indústria Pesada		
Construção Civil		
Comércio		
Serviços		
Transportes		
Crédito		
Administração Pública		
Não Classificado		
Total	1	1

Tabela 2

Atividade 9

Para responder aos itens "a" a "c", refira-se à seguinte pergunta:

Se lançarmos duas moedas, qual resultado tem mais chance de ocorrer, "duas caras", "uma coroa e uma cara", ou os dois resultados têm a mesma chance de acontecer?

a) Responda a essa pergunta só com base em suas suposições.

b) Recorra à experiência para resolver a questão: jogue duas moedas várias vezes – umas cem, pelo menos – e anote os resultados obtidos. Você pode chamar alguém para ajudar: se dez pessoas jogarem as moedas 10 vezes, você consegue 100 registros rapidamente.

c) Compare as respostas dos itens "a" e "b".

Aprendendo sobre Educação Matemática
Novamente a Teoria de Quadros

Como pode um mesmo conceito ter três interpretações diferentes? Será que isso não confunde mais do que simplifica?

Pensar sobre um conceito de formas diferentes leva ao desenvolvimento e ao fortalecimento da imagem que você tem do conceito.

A abordagem de vários conceitos matemáticos segundo diferentes perspectivas constitui uma forma de estabelecer conexões matemáticas, chamando atenção sobre os aspectos comuns que surgem entre diferentes representações matemáticas.

As representações diferentes são como diferentes lentes através das quais os alunos podem interpretar e analisar problemas e as suas soluções: elas sugerem diferentes visões de um mesmo problema ou conceito matemático e ainda podem funcionar como "amplificadores conceituais" que certas representações podem assumir, permitindo maior aprendizagem de um conceito.

Esta é uma das perspectivas da Teoria de Quadros de Régine Douady, já tratada no TP anterior.

Voltando à situação-problema

Na situação-problema sobre a Previdência Social, estávamos interessados em comparar os riscos que diferentes setores de atividade econômica representam em relação a acidentes de trabalho.

Por exemplo, digamos que um casal, a Dona Maria e o Seu João, vão ser contratados em novos empregos: a Dona Maria no setor de Comércio, e o Seu João em Construção Civil.

Quem correrá maior risco de ter acidente de trabalho, a Dona Maria ou o Seu João? É claro que isso vai depender de vários fatores, como o fato de o Seu João ser estabanado e a Dona Maria ser cuidadosa, o fato de ele ser homem e ela ser mulher, o fato de ela ser mais jovem que ele. Mas, se desconsiderarmos todas as particularidades deles e estas outras características – sexo, idade – concentrando-nos apenas no fato de que ele vai trabalhar em Construção Civil e ela em Comércio, o que poderíamos dizer?

A situação-problema proposta nesta unidade, que consistia em classificar o risco de acidente de trabalho oferecido pelos diferentes setores de atividade, nos permitiria responder a essa pergunta. Isso porque, para fazer essa classificação calculamos o risco de acidente de trabalho representado por cada atividade. Assim, podemos comparar o risco de acidente de trabalho oferecido por Construção Civil e o risco oferecido por Comércio. Isso permitiria ao Seu João e à Dona Maria saberem quem estaria entrando na atividade mais arriscada com relação a acidentes.

Como propusemos fazer a classificação? Com base nos registros de afastamentos por acidente do mês de julho de 2001.

Mas o Seu João e a Dona Maria nem estavam empregados no mês de julho de 2001... Como esses registros podem se relacionar ao risco de acidentes que eles vão correr depois que estiverem empregados?

Se não estamos considerando outros fatores influentes no risco de que uma pessoa possa sofrer acidentes no trabalho, como idade, sexo, ou outras diferenças, e sim considerando apenas a atividade em que a pessoa trabalha, podemos considerar todos os trabalhadores de um mesmo setor como iguais, para esse fim.

É como se com cada pessoa registrada em julho de 2001 repetíssemos o experimento de observar se ela tem ou não acidente. Como o número de registros conseguido naquele mês, no Brasil todo, é muito grande, mesmo ao considerar uma pessoa totalmente nova na atividade, como a Dona Maria ou o Seu João, a probabilidade de ela vir ou não a ter um acidente pode se basear nesses registros passados de outras pessoas que trabalharam na mesma atividade que ela.

Quando usamos esse raciocínio para resolver o problema, ou seja, quando construímos essa ferramenta matemática para resolver a situação concreta com que nos deparávamos, a que objeto matemático estamos nos referindo? À probabilidade experimental ou freqüencial. Afinal de contas, estamos fazendo uma simplificação e desconsiderando diferenças como sexo, idade, região – ou seja, considerando todas as pessoas como iguais, para que possamos atender àquela condição que dissemos ser importante no cálculo da probabilidade experimental: que as repetições sejam realizadas **sob as mesmas condições** e **um grande número de vezes**.

Vamos retomar, então, a situação-problema de "comparação de probabilidades de acidente no trabalho" de risco e calcular o risco de acidente oferecido pelo setor de Construção Civil – ou seja, o risco que Seu João assume ao ingressar em Construção Civil.

Para isso vamos utilizar a freqüência relativa como ferramenta, pois como já dissemos vamos calcular uma probabilidade experimental, e isto é feito calculando-se a freqüência relativa do evento após um grande número de repetições.

Já vimos que a freqüência relativa é: $\dfrac{\text{número de vezes em que o evento ocorreu}}{\text{número total de repetições realizadas}}$

No caso do risco de Construção Civil, isso se traduz em:

$$\frac{\text{número de afastamentos ocorridos em Construção Civil}}{\text{número de empregados em Construção Civil}}$$

pois como já dissemos é como se a cada empregado estivéssemos repetindo o experimento e observando o resultado: ele teve ou não que ser afastado por acidente de trabalho?

Retomando a tabela 1, que tem os dados sobre afastamentos em julho de 2001, temos:

$$\text{probabilidade experimental de acidentes em Construção Civil} = \frac{13.811}{1.105.483} = 0{,}012$$

E quanto à Dona Maria? Qual o risco de acidente que ela vai ter por trabalhar em Comércio?

$$\text{probabilidade experimental de acidentes em Comércio} = \frac{24.260}{4.096.691} = 0{,}006$$

Concluímos então que Construção Civil oferece maior risco de acidente de trabalho... Cuidado, Seu João!

Agora vejamos uma situação um pouco diferente. Digamos que iremos realizar um sorteio. Vamos colocar o nome de todos os 1.105.483 empregados de Construção Civil de julho de 2001 em uma urna, e vamos sortear um deles. Qual a probabilidade de que o sorteado tenha sido afastado por acidente de trabalho?

Já vimos essa situação de sorteio antes... Foi quando discutimos a probabilidade a priori. Naquela ocasião calculamos a probabilidade de uma aluna (menina) ser sorteada em uma turma de 27 alunos no total. Achamos a probabilidade calculando a razão entre o número de meninas e o total de alunos.

Agora podemos fazer a mesma coisa com o sorteio de um empregado de Construção Civil. Se queremos saber a probabilidade de o resultado ser um empregado afastado, calculamos a razão entre o número de empregados afastados em Construção Civil e o total de empregados no sorteio:

$$\frac{\text{número de afastados em Construção Civil}}{\text{número de empregados em Construção Civil}} = \frac{13.811}{1.105.483} = 0{,}012$$

Veja que houve uma semelhança entre o cálculo que fizemos aqui e o cálculo da probabilidade de o Seu João vir a ter um acidente.

No entanto, os contextos de cada problema eram totalmente diferentes: um tratava do cálculo de risco de acidentes, e o outro era um sorteio.

A mesma situação ocorre se sugerirmos a nossos alunos, por exemplo, os dois problemas abaixo:

Problema A: Maria tem 5 figurinhas. Deu 3 figurinhas a Joana. Com quantas figurinhas ela ficou?

Problema B: Maria tem 5 figurinhas. Joana tem 3 figurinhas. Quantas figurinhas Maria tem a mais que Joana?

Os dois problemas podem ser resolvidos pelo que aparentemente é a mesma ferramenta matemática: a subtração $5 - 3 = 2$.

No entanto, não podemos conceber um conceito isolado de seu contexto, da situação-problema em que ele é mobilizado como ferramenta.

Talvez uma criança consiga resolver o problema A e não consiga resolver o problema B. Como – podemos pensar – se ela sabe fazer a subtração necessária para resolver o problema B? (Ela a utilizou no problema A!) Não podemos nos esquecer de que cada representação deve estar atrelada a um conceito-ação – um conceito que faz sentido em uma determinada situação concreta, em determinado contexto.

Aprendendo sobre Educação Matemática
Lembrando a importância do contexto na construção de conceitos

Não podemos conceber um conceito isolado de seu contexto social e cultural.

Podemos conceber uma primeira função da matemática que é a função de resolução de situações-problema da vida real e concreta. É nessa primeira função da matemática que, por exemplo, os egípcios desenvolveram ferramentas geométricas resolvendo problemas de área sobre as terras nas margens do rio Nilo. Somente com os gregos, séculos mais tarde, encontramos uma segunda função da matemática, que é a da construção de uma linguagem formal entre os matemáticos, pois para eles as ciências possuíam uma característica voltada à demonstração, ao método da prova, da axiomatização, em função da comunicação do pensamento, a persuasão a partir de procedimentos analíticos. Assim vemos como na história da matemática aparecem primeiro as ferramentas matemáticas ligadas à necessidade de sobrevivência no contexto cultural, para então, bem mais tarde, surgir a formalização em torno dos objetos, dando início à matemática apoiada nos objetos abstratos.

A construção dos objetos matemáticos é realizada a partir de um processo progressivo de abstração do mundo concreto.

É verdade que pensamos com base em representações, em abstrações do mundo físico. Mas a representação não é suficiente para permitir a constituição de um sistema lógico no pensamento. É necessário construir mais que a representação. É necessário construir conceitos de cada objeto manipulado pelo pensamento. Isso implica dar significados aos objetos matemáticos e suas representações.

Somente quando objetos e representações portam significados é que poderão servir de "ferramenta" para o aluno, ou seja, ser um recurso psicológico do qual o aluno possa fazer uso para construir coisas, e, em especial, para resolver situações-problema.

Para que as representações e os conceitos adquiram significado é necessário que haja momentos na prática dos alunos em que as idéias matemáticas sejam reexaminadas em diferentes contextos.

Tente responder às perguntas nas duas atividades a seguir. São duas situações diferentes, mas elas têm algo em comum. Preste atenção em como você representa cada situação mentalmente. Talvez você ache uma mais fácil que a outra; talvez consiga resolver uma e não a outra.

Atividade 10

Uma urna tem 20 bolas, das quais 3 são brancas, 5 são verdes, 10 são azuis e 2 são amarelas. Se retirarmos uma bola da urna sem olhar, qual a probabilidade de que retiremos:

Bolas	Probabilidade
uma bola branca	
uma bola verde	
uma bola azul	
uma bola amarela	

Atividade 11

Para esta atividade, você terá que usar a tabela 1 da página 113. Imagine um arquivo com todos os registros dos 20.317.163 empregados que contribuíam com a Previdência no mês de julho de 2001. Uma dessas pessoas será sorteada. Qual é a probabilidade de que essa pessoa seja do setor de:

Setor	Probabilidade
Agropecuária e Extrativismo	
Indústria Leve	
Indústria Pesada	
Construção Civil	
Comércio	
Serviços	
Transportes	
Crédito	
Administração Pública	
Não Classificado	

As duas atividades acima podem ser feitas mobilizando-se o conceito de probabilidade a priori.

Não se esqueça de que para utilizarmos esse conceito temos que ter uma situação na qual podemos considerar resultados com a mesma chance de acontecer. No caso da atividade 10, podemos considerar que qualquer bola tem a mesma probabilidade de ser retirada da urna, seja ela de qualquer cor. Na atividade 11, podemos considerar que cada empregado, de qualquer setor, tem a mesma chance de ser sorteado.

Você conseguiu fazer as duas atividades, a 10 e a 11?

Talvez você não tenha conseguido, mesmo já tendo usado o conceito de probabilidade a priori em outras situações.

Cada atividade tratava de situações específicas: uma urna com bolas na atividade 10; um arquivo com registros na atividade 11. Além disso, as quantidades envolvidas na atividade 11 são muito maiores! Isso pode ter causado certa dificuldade em construir uma imagem mental do sorteio – um conceito em ação.

Articulando conhecimentos 2
Diferentes representações para um mesmo conceito de probabilidades

Compare a resposta da atividade 11 com os resultados que você colocou na coluna da direita na tabela 2, atividade 8 (“Empregados”). Veja que os resultados são os mesmos.

Agora compare esses resultados às porcentagens de empregados no gráfico 1 da página 113 (colunas vinho). As quantidades são as mesmas!

Estas são diferentes representações para o mesmo conceito de probabilidades:

uma freqüência relativa – uma probabilidade experimental – uma porcentagem.

Atividade 12

Retome a situação da atividade 10. Calcule a freqüência relativa de cada cor de bola, e a porcentagem de bolas de cada cor, preenchendo a tabela abaixo:

Bolas	Freqüência relativa	Porcentagem
bolas brancas		
bolas verdes		
bolas azuis		
bolas amarelas		

Compare seus resultados com as probabilidades encontradas na atividade 10.

Articulando conhecimentos 3
Probabilidades, freqüências relativas e porcentagens

- Na atividade 10, a soma das probabilidades encontradas é igual a 1. Por quê? Porque, como listamos todas as cores de bolas existentes na urna, com certeza vamos sortear uma bola de alguma daquelas cores. E a probabilidade de algo que acontecerá com certeza é 1.

- Na atividade 12, o total das freqüências relativas também é 1. Por quê? Porque, se considerarmos o total de bolas, sua freqüência relativa é 20/20 que é igual a 1.

- Na atividade 12, o total das porcentagens também é 1. Por quê? Porque, ao considerarmos o total, consideramos 100%, ou 100/100, que é igual a 1.

Visualisando probabilidades

O gráfico 1 da página 113, como todo gráfico, foi feito para transmitir uma informação específica. No caso, a intenção parece ter sido evidenciar que alguns setores da atividade econômica têm percentual de acidentes de trabalho muito acima de sua participação na força de trabalho ativa. Por isso, para cada setor foram colocados, lado a lado, os dois percentuais: o de participação no número de acidentes e o de contribuição para o total de empregados ativos.

Você achou que a escolha desse tipo de gráfico foi boa para transmitir a informação desejada?

Vejamos, nas próximas atividades, se a interpretação do gráfico ficou fácil.

Atividade 13

Quais setores da atividade econômica tiveram percentual de afastamentos por acidente de trabalho superior a seu percentual de contribuição para a força de trabalho ativa?

Atividade 14

Compare a resposta que você deu à atividade 13 com a classificação que você fez do risco de acidente das diferentes atividades econômicas na atividade 1.

Você pode usar a informação veiculada no gráfico 1 como indicador do risco de acidente oferecido por determinada atividade. É só observar que, quanto maior a razão entre a altura da coluna azul e a altura da coluna roxa, maior o risco da atividade. Por exemplo, em Indústria Pesada, a coluna azul passa e muito da coluna roxa, em comparação ao tamanho da coluna roxa. A coluna azul é quase o dobro da roxa. Já no setor de Transportes, a coluna azul não chega a ser 30 por cento maior que a roxa. O risco é grande, mas nem tanto quanto em Indústria Pesada.

O gráfico 1 da página 113 mostra a contribuição de cada setor, em termos de porcentagem para o total de afastamentos por acidente de trabalho (colunas azuis) e para o total de empregados (colunas vinho).

Um gráfico circular, ou "gráfico-pizza", é melhor para se entenderem dados como partes de um total, pois visualizamos facilmente o círculo como um inteiro.

O gráfico 2 é o gráfico circular que expressa os percentuais de contribuição de cada setor da atividade econômica para o total de empregados ativos:

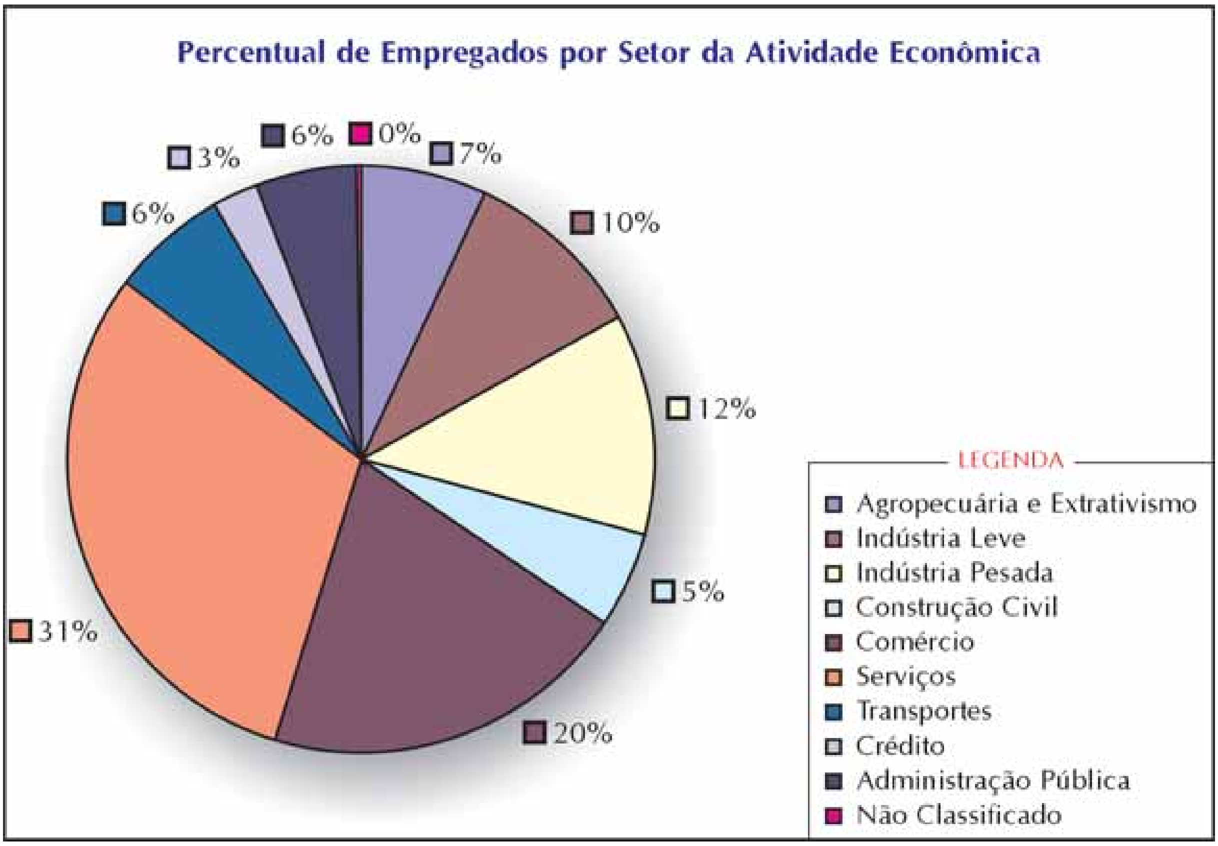


Gráfico 2

Como você viu na atividade 6 da Unidade 4 do TP 1, neste tipo de gráfico os dados representados – nesse caso, os percentuais de empregados por setor da atividade econômica – são proporcionais ao ângulo de cada setor do gráfico.

Utilizando modelos

Muitas vezes usamos um modelo para recriar um fenômeno ou situação observável para fins de estudo da situação ou reprodução de seus efeitos. O modelo é uma representação, como se fosse uma “metáfora” que ressaltasse características desejadas da situação. Quanto melhor o modelo, melhor ele simula os efeitos da situação modelada.

Um modelo é um mecanismo, que pode ser físico ou apenas conceitual, que reproduz os efeitos de uma situação e simula suas características principais.

Por exemplo, para reproduzir os efeitos do lançamento de uma moeda com relação aos resultados “cara” e “coroa”, podemos usar uma roleta com duas regiões, cada uma com igual chance de ser alcançada pelo ponteiro quando este é girado:

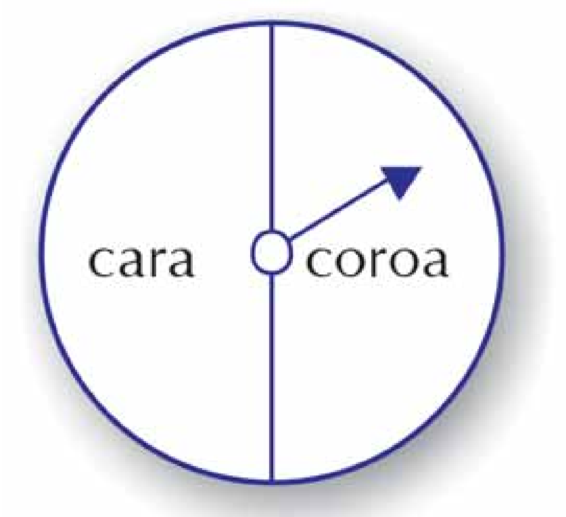


Figura 2

Aprendendo sobre Educação Matemática
Aplicando a Teoria de Quadros

Um aluno só terá realmente compreendido um conceito quando reconhecê-lo em vários sistemas de representação qualitativamente diferentes e for capaz de traduzir corretamente uma idéia de um sistema de representação para outro.

Ao ser confrontado com uma situação problemática, o aluno deve ser capaz de optar por um certo sistema de representação e, quando for necessário, passar de uma representação para outra.

É tarefa do professor promover o desenvolvimento da rede de conexões que uma idéia matemática pode suscitar. Isso poderá ser feito, por exemplo, pedindo aos alunos que ilustrem, descrevam ou representem a mesma idéia de um outro modo.

Atividade 15

a) Tente construir uma roleta que reproduza o lançamento de duas moedas com relação aos resultados "duas caras", "duas coroas" e "uma cara e uma coroa". A chance que cada um desses resultados tem de ocorrer, você viu na atividade 9.

b) Será que o gráfico 2 serve para construir uma roleta que simule as probabilidades de sortear um empregado de dado setor da atividade econômica (probabilidades que você achou na atividade 11)?

Atividade 16

Observe as probabilidades de acerto na Mega Sena fornecidas pela Caixa Econômica Federal (tabela 3).

Qtde Dez Jogadas	Valor das Apostas	Probabilidade de Acerto (1 em ....)		
		Sena	Quina	Quadra
6	1,00	50.063.860	154.518	2.332
7	7,00	7.151.980	44.981	1.038
8	28,00	1.787.995	17.192	539
9	84,00	595.998	7.791	312
10	210,00	238.399	3.973	195
11	462,00	108.363	2.211	129
12	924,00	54.182	1.317	90
13	1.716,00	29.175	828	65
14	3.003,00	16.671	544	48
15	5.005,00	10.003	370	37

Tabela 3

Que probabilidades pequenas, não é mesmo? A probabilidade de acertar a sena é de 1 em 50.063.860.

Para termos uma noção melhor da dificuldade que é acertar na Mega Sena, podemos usar um modelo geométrico para visualizar essa probabilidade.

Em um **modelo geométrico** de probabilidade, usamos razões entre comprimentos, ou áreas, ou volumes como analogias para uma probabilidade, já que esta também é uma razão.

Se uma linha de um centímetro corresponder à probabilidade de acertar a sena no jogo da Mega-Sena, quantos quilômetros terá a linha que corresponderá à probabilidade de perder? Essa linha iria de sua cidade até que cidade?

Resumindo

Nesta seção, você aprendeu que:

- Para expressarmos probabilidades utilizamos números de 0 a 1.
- Eventos certos são aqueles que com certeza acontecerão. Eles têm probabilidade igual a 1.
- Eventos impossíveis têm probabilidade 0.
- A probabilidade não diz se algo vai ou não acontecer – ela nos diz a freqüência que deveríamos esperar que um evento tivesse, caso pudéssemos repeti-lo um grande número de vezes.
- probabilidade de sucesso = 1 – probabilidade de insucesso.
- Para calcularmos probabilidades teóricas temos que determinar todos os resultados que tenham a mesma chance de acontecer em uma situação de incerteza, e calcular a razão entre o número de vezes em que ocorre o resultado que queremos e o total.
- É fundamental que no cálculo da probabilidade teórica consideremos resultados que têm **a mesma probabilidade de acontecer**.
- Para calcularmos probabilidades experimentais, utilizamos a freqüência relativa com que um resultado aconteceu em um grande número de repetições do experimento.
- Podemos utilizar uma situação como modelo para simular os resultados de uma situação diferente.
- Não é possível a construção de objetos matemáticos sem a vivência com suas ferramentas correlatas, assim como não é possível lidar com as ferramentas matemáticas sem evoluir para aquisição dos objetos matemáticos.

Seção 3

Transposição didática

Objetivo da seção

Ao longo desta seção esperamos que você possa:

- Estimular seus alunos ao raciocínio probabilístico em situações de incerteza;
- Formular atividades nas quais seus alunos tenham que experimentar concretamente situações envolvendo probabilidades com jogos, dados, roletas e outros materiais concretos.

Os alunos de 5ª a 8ª séries geralmente já adquiriram, nas séries anteriores ou fora da escola, conhecimentos relativos a:

1. possibilidade e impossibilidade;

2. comparação entre a probabilidade de dois eventos, sem quantificá-las (respondendo a perguntas como: “Qual tem maior chance?”).

Nas séries 5ª a 8ª é importante que os alunos expandam seus conceitos e vocabulário correspondentes: eventos, eventos impossíveis, eventos certos, freqüência absoluta, freqüência relativa, probabilidade teórica, probabilidade experimental.

Nessa fase os alunos devem passar a atribuir números a probabilidades. Não esqueça de dar ênfase a algumas probabilidades mais marcantes, como a probabilidade de eventos impossíveis (zero), de eventos certos (um), a probabilidade 1/2.

É importante também que eles tenham experiências tanto em comparar como em determinar probabilidades teóricas tanto quanto experimentais.

Uma de suas principais tarefas será a de levar seus alunos a compreender probabilidades como uma razão. A experiência mostra que crianças inicialmente consideram apenas a freqüência absoluta para estimar probabilidades, e não prestam atenção ao total de casos sobre o qual a probabilidade deveria ser calculada.

É como se esquecêssemos, na nossa situação-problema, de levar em consideração o número de empregados em cada setor da atividade econômica, e olhássemos apenas para o número de afastados por acidente de trabalho. Ou seja, se considerássemos apenas a freqüência absoluta de acidentes, e não a freqüência relativa.

Por exemplo, considere a atividade abaixo. Nela os alunos não precisam dar uma resposta numérica, determinar uma probabilidade, mas precisam comparar intuitivamente duas probabilidades teóricas.

A urna A contém 4 bolas brancas e 4 pretas, e a B contém 3 bolas brancas e 2 pretas. Vamos tirar uma bola de cada urna, sem olhar. A chance é maior de tirar uma bola branca na urna A ou na urna B?

Muitas crianças levam em consideração para estimar qual probabilidade é maior apenas o número total de bolas brancas (4 na urna A e 3 na urna B). É preciso maturidade e experiência para passar a considerar a razão entre bolas brancas e o total de bolas (4/8 na urna A e 3/5 na urna B).

Em um primeiro nível, é mais fácil para as crianças compararem as duas probabilidades se as urnas contiverem o mesmo total de bolas. Por exemplo:

A urna A contém 4 bolas brancas e 4 pretas, e a B contém 6 bolas brancas e 2 pretas. Vamos tirar uma bola de cada urna, sem olhar. A chance é maior de tirar uma bola branca na urna A ou na urna B?

Depois os problemas podem ficar mais complexos, considerando totais diferentes e razões diferentes.

Para desenvolver suas intuições sobre probabilidades, os alunos devem fazer atividades em que calculem probabilidades experimentais, ou freqüenciais.

Se você pedir que os alunos dêem seus palpites sobre as probabilidades antes de fazerem as atividades experimentalmente, eles terão oportunidade de comparar as probabilidades experimentais que eles obtiveram em suas atividades com as probabilidades teóricas que eles estimaram antes da atividade.

As atividades abaixo podem ser desenvolvidas a partir da 5ª série.

Atividade 17

Juliana e Renato vão decidir uma disputa no "cara ou coroa". Juliana escolhe coroa. Só que Renato também queria escolher coroa, porque ele disse que tem mais sorte com coroa.

Juliana não quis trocar de jeito nenhum, pois ela acha que coroa sai mais vezes que cara.

Vamos ver se coroa realmente sai mais vezes?

Seu grupo terá que lançar uma moeda 50 vezes e registrar os resultados em uma tabela.

Lançamento	Resultado	Total de lançamentos	Total de coroas (freqüência absoluta)	Total de coroas/ total de lançamentos (freqüência relativa)	Porcentagem de coroas
1º	Coroa	1	1	1/1	100
2º	Cara	2	1	1/2	50
3º	Coroa	3	2	2/3	66,66...
4º	Coroa	4	3	3/4	75
Etc.	Etc.			Etc.	Etc.

Para que a disputa entre Juliana e Renato seja justa mesmo se Renato ficar com "cara", tem que haver a mesma chance de sair cara que coroa, no lançamento da moeda.

Complete:

Para dizermos que cara e coroa têm a mesma chance de sair, esperamos que, nas 50 jogadas, tenha saído cara ____________ vezes, ou ___________ por cento das vezes.

Agora responda, com base na tabela que seu grupo preencheu:

1. Até o 4º lançamento:

   a) saíram mais coroas;

   b) saíram mais caras;

   c) saiu o mesmo número de coroas e de caras.

2. Até o 4º lançamento, a porcentagem de caras foi ________ .

3. Até o 10º lançamento:

   a) saíram mais coroas;

   b) saíram mais caras;

   c) saiu o mesmo número de coroas e de caras.

4. Até o 10º lançamento, a porcentagem de caras foi ________ .

5. Até o 50º lançamento:

   a) saíram mais coroas;

   b) saíram mais caras;

   c) saiu o mesmo número de coroas e de caras.

6. Até o 50º lançamento, a porcentagem de caras foi ________ .

7. Você acha que dá para ver se a moeda é justa com poucas jogadas?

8. Para que a disputa entre Juliana e Renato seja justa, a probabilidade de sair cara tem que ser a mesma que a de sair coroa. Qual deve ser então a probabilidade de sair coroa?

9. A freqüência relativa de coroas que você obteve é uma probabilidade experimental. A partir de que jogada você considera que a probabilidade experimental que seu grupo conseguiu se aproximou da probabilidade teórica que vocês esperavam?

Depois você, professor, pode juntar os resultados obtidos por todos os grupos em uma tabela como a abaixo, feita no quadro-negro ou em cartolina. Dessa forma os alunos poderão observar o resultado de um número bem maior de lançamentos.

	Total de lançamentos	**Total de coroas (freqüência absoluta)**	**Total de coroas / total de lançamentos (freqüência relativa)**	**Porcentagem de coroas**
Grupo 1				
Grupo 2				
Grupo 3				
Grupo 4				
Total				

A atividade pode utilizar também conhecimentos sobre o plano cartesiano:

10. Coloque os resultados em um plano cartesiano: o total de lançamentos no eixo horizontal e a porcentagem de coroas no eixo vertical.

11. Discuta em seu grupo o que vocês podem observar.

Uma atividade semelhante pode ser feita usando um cone de cartolina, ao invés da moeda:

Atividade 18

Segurando o cone sempre da mesma forma e sempre a 1 metro do chão, deixe-o cair e anote o resultado: ele caiu "em pé" (com o vértice para cima) ou "deitado"? Cada membro do seu grupo deverá fazer esse experimento 10 vezes. Depois, combine seus resultados com os de seus colegas.

Qual a probabilidade que vocês encontraram de o cone cair com o vértice para cima?

Use essa probabilidade para prever o número de vezes em que o cone cairá com o vértice para cima em 1.000 quedas.

Qual é a probabilidade de que o cone caia "deitado"?

Qual é a probabilidade de que o cone caia se equilibrando sobre seu vértice?

Nesta unidade nós fizemos também atividades nas quais usamos modelos geométricos (gráficos, roletas, jogos de dardo) para visualizar e comparar probabilidades.

Essas atividades podem ser feitas também com seus alunos.

Resumindo

Nesta seção, você aprendeu que:

- Para crianças, é mais fácil comparar probabilidades em duas situações (por exemplo, duas urnas diferentes com quantidades distintas de bolas pretas e brancas) quando o total de possibilidades é o mesmo nas duas situações (quando o total de bolas é o mesmo nas duas urnas).

- Para desenvolver suas intuições sobre probabilidades, os alunos devem fazer atividades em que eles calculem probabilidades experimentais, ou freqüenciais.

- O melhor jeito de os alunos confrontarem suas intuições com a matemática da probabilidade é tendo a oportunidade de exporem seus palpites sobre as probabilidades antes de fazerem as atividades experimentalmente.

Leituras sugeridas

LOPES, M.L.M.L. (coord.) *Tratamento da Informação:* Explorando dados estatísticos e noções de probabilidade a partir das séries iniciais. Rio de Janeiro: UFRJ/Instituto de Matemática/Projeto Fundão,1998.

Esse livro contém uma série de atividades para trabalhar com os alunos, desde as séries iniciais até o ensino médio. As atividades foram preparadas por professores e alunos da Universidade Federal do Rio de Janeiro e professores de escolas de ensino fundamental e médio e foram aplicadas em salas de aula. Há comentários sobre como elas foram desenvolvidas e sobre as principais dificuldades encontradas em sua aplicação.

PIAGET, Jean e INHELDER, Bärbel. *A origem da idéia do acaso na criança*. Tradução: Ana Maria Coelho. Traduzido da edição francesa publicada em 1951 por Presses Universitaires de France. Título original: La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant. Rio de Janeiro: Record. p. 328.

As clássicas pesquisas de Piaget, a partir das quais ele infere as etapas no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, do raciocínio combinatório e do conceito de probabilidade em relação à idéia de razão. A leitura é um tanto pesada, mas leva o professor a conhecer algumas atividades (as provas utilizadas por Piaget) que podem ser usadas para avaliar o nível de desenvolvimento de crianças com relação a esses conceitos.

Bibliografia

BRASIL, Secretaria de Previdência Social – SPS. *Tudo o que você quer saber sobre a Previdência Social*. Brasília: MPAS/ACS, 2002. p. 99.

CECHIN, José; FERNANDES, Alexandre Zioli. *Ocorrência de acidentes de trabalho conforme a GFIP*. Informe de Previdência Social. v. 14, n. 02, fevereiro de 2002.

CASTRO, Márcia Caldas de; ÁVILA, Josefa Barros Cardoso; MAYRINK, André Luiz Valente. *Ranking das atividades econômicas segundo a freqüência, gravidade e custo dos acidentes do trabalho*. Brasília: Ministério da Previdência e Assistência Social – MPAS, 2002.

<http://acd.ufrj.br/dme/atuaria/atuaria.html>

<http://www.adusp.org.br/arquivo/PrevSocSol/oquee.htm>

<http://www.caixa.gov.br/loterias/probabilidades/asp/probabilidades.asp#megasena>

<http://www.estadao.com.br/ext/economia/financas/servicos/seguro.htm>

Texto de referência

O ensino de probabilidade

Ana Lúcia Braz Dias

Os tópicos de probabilidade e estatística vêm gradualmente solidificando sua importância para a atuação do cidadão na sociedade, e provocando forte manifestação por parte dos educadores para sua inserção no currículo de Matemática do ensino fundamental.

Seguindo essa tendência, os *Parâmetros Curriculares Nacionais* recomendam atividades relativas ao tratamento da informação – que inclui noções de probabilidade, de estatística, e problemas de contagem que envolvam o princípio multiplicativo (combinatória) – já nos ciclos iniciais. No terceiro e quarto ciclos espera-se que os professores ampliem a exploração das possibilidades de quantificar o incerto.

No entanto, na prática são poucos os professores que incorporam essas recomendações a suas aulas.

Um dos motivos para isso é a novidade que a inserção desses tópicos no currículo representa. Isso obriga o professor a quebrar hábitos, procurar novas informações e atividades para realizar em sala de aula.

Outro fator que dificulta o ensino desses conceitos é a insuficiência, e, às vezes, inexistência, da formação dos professores nessa área específica. Os professores provenientes das licenciaturas em Matemática às vezes têm alguma formação básica em probabilidade e estatística, mas, geralmente, não têm formação nas questões relacionadas ao ensino desses conceitos. Há professores também que não têm formação nem mesmo nos conceitos elementares de probabilidade e estatística. Como, então, incorporar a suas aulas atividades que envolvem esses conceitos?

Essa lacuna na formação dos professores afeta principalmente o ensino dos conceitos de probabilidade, já que o estudo de estatísticas – como a organização de dados em tabelas e gráficos e o cálculo de médias – encontra-se mais difundido fora da escola, e os professores muitas vezes adquirem as competências nela envolvidas de uma maneira ou de outra.

Algumas coleções de livros didáticos já incluem tópicos de probabilidade e de estatística nos volumes destinados às séries de 5ª a 8ª. No entanto, os conceitos de probabilidade têm algumas peculiaridades que muitas vezes são desconhecidas dos professores, fazendo que seja difícil a aplicação dessas atividades.

Vamos examinar a seguir algumas peculiaridades do ensino de probabilidade.

Intuições sobre a probabilidade

Sempre que ensinamos Matemática podemos observar que os alunos já trazem de suas experiências diárias concepções e conceitos informais sobre aquilo que vamos ensinar. Se o assunto é frações, números negativos, decimais, ou as operações com esses números, tentamos aproveitar aquilo que o aluno já aprendeu informalmente em seu dia-a-dia. Como são conceitos que o aluno usa com certa freqüência no seu dia-a-dia, partimos daí para ajudá-lo a construir conhecimentos e fazer conexões mais ricas entre eles.

Os conceitos de probabilidade podem ser aplicados a várias situações de nosso dia-a-dia. Ou seja, não são, em princípio, algo distante do dia-a-dia do aluno. No entanto, as noções informais e intuitivas que as pessoas trazem para a sala de aula sobre a probabilidade muitas vezes estão em desacordo com o que queremos ensinar. Parece que, sem instrução formal, a tendência das pessoas é a de construir certas idéias equivocadas a respeito da probabilidade. Podemos dizer que essa teoria é um tanto quanto "contra-intuitiva".

Uma intuição comum a muitas pessoas é que fenômenos que aconteçam ao acaso tenham todos a mesma probabilidade de acontecer. Muitos alunos parecem não ver necessidade de diferenciar graus de probabilidade, de quantificar a probabilidade.

Problema 1: "Uma caixa tem 5 bolas verdes, 3 bolas azuis e 2 bolas vermelhas. Fecho os meus olhos e retiro uma bola da caixa. A probabilidade de que a bola retirada seja verde é maior, igual ou menor que a probabilidade de que ela seja vermelha?"

Por exemplo, se apresentamos a alunos o problema 1, muitos alunos respondem que a probabilidade de a bola ser verde é a mesma que a de ser vermelha. Chamamos esse tipo de tendência, observada em várias pesquisas com alunos, de "viés de equiprobabilidade" (viés = tendência; equiprobabilidade = probabilidades iguais), ou seja, uma tendência a atribuir probabilidades iguais a quaisquer fenômenos.

Há muitos outros erros comuns em respostas de alunos a problemas de probabilidade. Tão comuns que até recebem nomes especiais. Vamos ver mais alguns a seguir.

Veja por exemplo duas respostas, fornecidas pelos alunos A e B, ao problema 2:

Problema 2: Maria fez um jogo na Sena marcando os números: 01; 02; 03; 04; 05 e 06. João jogou nos números: 06; 12; 34; 38; 40 e 57. Escolha uma alternativa:

a) João tem maior probabilidade de ganhar;

b) Maria tem maior probabilidade de ganhar;

c) Os dois têm a mesma probabilidade de ganhar.

Resposta do aluno A: "Os dois têm a mesma probabilidade de ganhar. É sorte. Não dá para saber quem vai ganhar. Depende de sorte."

Resposta do aluno B: "João tem maior probabilidade de ganhar. Os números que Maria escolheu estão em seqüência. É impossível sair um resultado assim."

À primeira vista, o aluno A tem uma boa compreensão de probabilidade e acertou a resposta. Porque, na verdade, qualquer uma das combinações possíveis de seis números de 01 a 60 tem a mesma chance de sair no resultado da Sena.

O aluno B parece estar se apoiando na falsa idéia, também muito comum intuitivamente, de que um conjunto de números obtidos de forma verdadeiramente aleatória não pode parecer "arrumado" ou "organizado", como uma seqüência de números. Esse tipo de erro foi chamado de "viés da representatividade", pois de acordo com esse raciocínio um resultado de um experimento sempre deve ser bem representativo do processo que o originou. No caso acima, o raciocínio (errôneo) é: se foi originado aleatoriamente, o resultado deveria ser "bagunçado".

À primeira vista, as respostas dos alunos A e B acima seriam comumente interpretadas da seguinte forma: o aluno A acertou e o aluno B errou.

No entanto, há uma outra hipótese: a de que nem o aluno A tenha acertado. Ou melhor, que ele tenha aparentemente acertado, mas que sua resposta não esteja baseada em uma compreensão correta da probabilidade. Por que levantamos essa hipótese?

Observando melhor a resposta do aluno A, podemos pensar se mesmo sua resposta estaria baseada em conceitos corretos. Ao responder "é sorte; depende de sorte", dá para desconfiar que ele pense que tudo que depende de sorte tem a mesma probabilidade de acontecer – ou seja, que ele esteja incorrendo no "viés da equiprobabilidade".

Outra pista que o aluno A nos dá em sua resposta de que sua compreensão do problema não seja assim tão boa é que ele diz: "Não dá para saber quem vai ganhar." Aí ele está dando indicação de que tenha interpretado a pergunta como "qual vai ser o resultado?"

Os pesquisadores que atentaram para esse detalhe começaram a perceber que vários alunos davam respostas desse tipo a problemas de probabilidade – respostas que sugeriam que eles tivessem querendo sua opinião não sobre a probabilidade dos resultados, mas sobre qual seria o resultado de um experimento em particular. Ou seja, que estivessem interpretando perguntas sobre probabilidade como pedidos para que "adivinhassem" o resultado de um experimento isolado. Por isso os pesquisadores chamaram esse tipo de raciocínio de "abordagem do resultado".

Vejamos outro exemplo da "abordagem do resultado" nas respostas dos alunos A e B ao problema 3:

Problema 3: Maria, João e Antônio começam uma rodada de um jogo de tabuleiro, no qual se usa um dado para saber quantas casas cada um vai andar com sua peça. O dado é novinho, de boa procedência, não está falsificado ou mais pesado de algum lado. Todos os números têm chance igual de sair. Maria rola o dado e tira um seis. João rola o dado e também tira um seis. O que tem maior probabilidade: que Antônio tire um seis ou que Antônio tire outro número?

Resposta do aluno A: "Acho muito difícil que Antônio tire outro seis. Já saíram dois "6", não vai sair de novo."

Resposta do aluno B: "Acho que Antônio vai tirar outro seis. Acho que o seis está dando sorte!"

Tanto o aluno A quanto o aluno B parecem estar querendo "adivinhar" o resultado da jogada de Antônio, e não respondendo em termos de probabilidade. Ao dizerem "não vai sair seis de novo" ou "acho que Antônio vai tirar outro seis", dá para percebermos isso.

Um raciocínio apoiado na teoria da probabilidade seria:

"Se cada número tem a mesma chance de sair, cada número tem 1/6 de probabilidade de sair. Tirar "6" tem probabilidade 1/6. Não tirar "6" tem, portanto, probabilidade 5/6. Então a probabilidade maior é de não tirar o 6."

Entender até que ponto os alunos têm idéia do que seja probabilidade requer cuidado e atenção a suas justificativas e argumentos. Conhecendo o resultado do trabalho dos educadores matemáticos que fazem pesquisas nesta área, como a identificação do "viés da equiprobabilidade", do "viés da representatividade" e da "abordagem do resultado", podemos saber o que esperar de nossos alunos e ficar mais atentos a esse tipo de resposta.

O quadro 3 mostra um resumo dos tipos de erro que discutimos.

Representatividade
Consiste em estimar a probabilidade de um evento com base no quanto um evento representa o que se acredita serem características da aleatoriedade ou do experimento realizado.

Equiprobabilidade
Consiste em atribuir probabilidades iguais para qualquer par de fenômenos aleatórios.

Abordagem do resultado
Consiste em tentar adivinhar o resultado de uma realização de um experimento, ao invés de estimar probabilidades.

Quadro 3

De forma geral, as pesquisas, tanto com adultos quanto com crianças, mostram que as pessoas usualmente têm uma série de intuições erradas quanto à probabilidade. Mas uma forma de desafiar essas intuições é confrontando-as por meio de experimentações em sala de aula.

A relação da probabilidade com a estatística

Quando estudam as operações com números, os alunos podem repetir uma determinada ação com o material manipulativo quantas vezes quiserem, e obterão sempre o mesmo resultado. O material manipulativo nesses casos pode ser usado para determinar ou comprovar um resultado. Já no caso da probabilidade, um experimento não serve para comprovar um resultado. Por isso, no estudo de determinado conceito em probabilidade é necessária a realização não de um experimento, mas de uma série de repetições daquele experimento. É necessário também o registro dos resultados, o cálculo das freqüências com que aparecem os diversos resultados, o cálculo das freqüências relativas, a representação gráfica dos dados, a comparação com os resultados obtidos por outros alunos, a elaboração de hipóteses sobre o experimento. Ou seja, precisamos da organização de dados e registros das estatísticas.

Se nós e nossos alunos só realizarmos alguns experimentos isolados, o único que poderemos aprender é que os resultados dos experimentos são imprevisíveis. Mas se registrarmos os resultados de um número grande de repetições do experimento, poderemos apreciar regularidades no comportamento dos fenômenos aleatórios, como a convergência das freqüências relativas.

Possivelmente, a dificuldade do desenvolvimento da intuição probabilística sem ensino prévio, em comparação ao desenvolvimento da intuição espacial ou numérica, seja devida ao fato de que, apesar de vivermos rodeados de fenômenos aleatórios desde nossa infância, nunca pensamos em registrar ou analisar os resultados de uma série grande de repetições dos fenômenos.

Talvez tenha sido por isso que este ramo da matemática, a probabilidade, tenha demorado para se desenvolver, se comparado a outras criações matemáticas. Foi necessário que as pessoas começassem a registrar vários fenômenos, como a mortalidade, o número de nascimentos de meninos e de meninas, o número de casamentos etc., para começar a perceber regularidades nas grandes massas de dados. Ou seja, foi necessário o desenvolvimento da estatística para que a probabilidade se desenvolvesse.

É importante também, na sala de aula, que as noções de probabilidade sejam construídas juntamente com as habilidades em estatística.

A importância da experimentação e da abordagem teórica

A experimentação com fenômenos aleatórios em sala de aula proporciona ao aluno uma experiência difícil de se adquirir em sua relação com o cotidiano. É justamente essa falta de experiência que parece ser a causa de serem tão comuns as intuições incorretas. Fazer experimentos práticos na sala de aula pode confrontar essas intuições incorretas e formar uma base para a construção de novos conhecimentos, que estejam em acordo com a teoria da probabilidade.

No entanto, a experimentação não resolve todos os problemas do professor que quer trabalhar conceitos de probabilidade com seus alunos. E se os resultados dos experimentos realizados em sala de aula não convergirem com rapidez suficiente, ou mesmo no sentido esperado? Isso pode acontecer se o número de repetições realizadas não for suficientemente grande. E, mesmo que se realize um grande número de repetições, não podemos garantir que não haja uma diferença entre a freqüência relativa obtida e a desejada (que seria igual à probabilidade teórica) – podemos garantir apenas que diferenças grandes serão cada vez menos prováveis se aumentarmos o número de repetições.

A experimentação também não é prova suficiente de que seus resultados sejam a probabilidade procurada, ou seja, não revela os conceitos matemáticos subjacentes ao problema e que nos fazem esperar a convergência dos resultados para determinado número. Isso só é possível com a enumeração de todas as possibilidades de resultados possíveis, utilizando-se as técnicas de contagem. Daí a importância das duas abordagens: a experimental e a teórica.

Por exemplo, se perguntamos aos alunos qual a probabilidade de tirarmos três coroas no lançamento de três moedas, podemos fazer o experimento um grande número de vezes, anotar os resultados e calcular a freqüência relativa do aparecimento de três coroas. Esta seria uma probabilidade experimental. Mas para saber realmente se a probabilidade experimental está razoavelmente próxima da probabilidade teórica, é necessário enumerar todos os resultados possíveis no lançamento de três moedas (tabela 1). Só assim os alunos saberiam por que o resultado "três coroas" aparece em aproximadamente um oitavo das repetições do experimento.

Moeda 1	Moeda 2	Moeda 3
cara	cara	cara
coroa	coroa	cara
coroa	cara	coroa
cara	coroa	coroa

coroa	cara	cara
cara	coroa	cara
cara	cara	coroa
coroa	coroa	coroa

Tabela 1: resultados possíveis no lançamento de 3 moedas.

Oportunidades de simulação

Uma forma característica de se usar o material manipulativo no ensino da probabilidade é a simulação. Essa atividade consiste em substituir um experimento aleatório difícil de se observar na realidade por outro equivalente. Assim, podemos operar com o experimento simulado para obter conclusões válidas para o experimento original.

Com a simulação podemos resolver quase todos os problemas de probabilidade, e isso é feito em muitos problemas reais hoje em dia. Trabalhar com essa técnica com os alunos em exemplos simples pode mostrar-lhes a sua aplicabilidade a problemas reais.

Da mesma forma que certos alunos constróem a idéia – devido à forma como são conduzidas as atividades em sala de aula – de que resolver problemas de aritmética é encontrar a operação certa para aplicar aos números que estão no enunciado do problema, às vezes as atividades em probabilidade se reduzem à procura da técnica de contagem apropriada para resolver um problema (ou seja, o uso da análise combinatória para o cálculo da probabilidade teórica). Assim, como o aluno que fica perguntando que conta fazer em um problema de aritmética, em probabilidade os alunos ficam perguntando: “É permutação, combinação ou arranjo?”. O conceito em si não é compreendido.

Também a aprendizagem da probabilidade deve envolver a resolução de situações-problema. E, para delinear os experimentos que possam simular uma situação-problema, os alunos têm que fazer uma análise atenta da mesma, fazer analogias. Ou seja, uma das formas de desenvolver competências de resolução de situações-problema é trabalhar com a simulação.

A seguir daremos um exemplo da simulação de uma situação-problema que envolve probabilidade.

Qual é o número de filhos que uma família tem que ter, em média, para ter pelo menos duas crianças de cada sexo?

Isso obviamente não é algo que se possa sair experimentando!

Logicamente são necessárias pelo menos quatro crianças. Não podemos conseguir dois meninos e duas meninas com menos de quatro crianças. Mas a resposta não é assim tão simples. Você não conhece famílias que têm por exemplo, cinco meninas e nenhum menino, ou quatro meninos e apenas uma menina, por exemplo? Eles têm mais que quatro crianças, mas não tiveram pelo menos dois de cada sexo.

O que nós temos que fazer é achar uma média do número de filhos necessários para se ter pelo menos dois filhos de cada sexo. E já que para ter uma média próxima da média teórica (valor esperado) é necessário um grande número de repetições, temos que conduzir um experimento simulado (já que não dá para fazer o experimento real) várias vezes até eles serem concluídos, e registrar quantos filhos foram necessários para essa conclusão. Depois de muitas repetições, achamos a média de filhos que foram necessários.

Essa simulação pode ser feita facilmente com uma moeda. Podemos dizer que "coroa" será equivalente a "menino", e "cara" será equivalente a "menina" (ou vice-versa), já que o nascimento de um menino ocorre com probabilidade 1/2, e uma coroa no lançamento de uma moeda também ocorre com probabilidade 1/2. Da mesma forma, o nascimento de uma menina ocorre com probabilidade 1/2, e uma cara no lançamento de uma moeda ocorre com probabilidade 1/2.

Vamos simular algumas tentativas e ver como funciona o processo.

Família 1

CARA CARA COROA COROA

= MENINO MENINO MENINA MENINA

4 crianças

Família 2

COROA CARA COROA COROA CARA

= MENINA MENINO MENINA MENINA MENINO

5 crianças

Família 3

COROA COROA COROA CARA CARA

= MENINA MENINA MENINA MENINO MENINO

5 crianças

Família 4

CARA COROA CARA CARA CARA CARA COROA

= MENINO MENINA MENINO MENINO MENINO MENINO MENINA

7 crianças

Aí acharíamos a média de filhos entre essas famílias (4 + 5 + 5 + 7) / 4 = 5,25 e diríamos que o número de crianças necessário para se ter pelo menos duas crianças de cada sexo é 5,25.

É claro que quatro é um número muito pequeno de repetições.

Também poderíamos questionar o fato de o resultado ser um número racional, já que ninguém pode ter 5,25 filhos. Faria mais sentido, nesse caso, arredondar a resposta para 6.

Para simular fenômenos com probabilidades diferentes de 1/2 não usaríamos uma moeda. Poderíamos utilizar, por exemplo, uma roleta na qual os setores tivessem as mesmas probabilidades que as envolvidas no problema; ou bolas em urnas. Esses são instrumentos fáceis para se adequar as probabilidades da simulação às do problema, já que, a princípio, podemos colocar quantas cores de bolas quisermos, e o número de bolas que quisermos na urna.

Nas empresas as simulações são feitas usando os computadores. Estes podem simular qualquer probabilidade e fazer um grande número de repetições bem rapidamente.

Principais materiais para o estudo dos fenômenos aleatórios

Para finalizar, apresentamos uma análise, feita pela pesquisadora Carmen Batanero, dos materiais que podem ser usados em sala de aula para estudar probabilidades. A análise ressalta as características que diferenciam os materiais e que podem determinar a escolha entre um ou outro para o ensino de noções ou propriedades específicas, ou para simular uma ou outra situação-problema.

Carmem Batanero agrupa esses materiais em quatro tipos principais: "dados", "bolas", "roletas" e "baralhos de cartas". Mas você verá que estes são apenas tipos principais para fim de análise. Nessa classificação, um dado pode ser tanto um dado comercializado como um icosaedro com as faces numeradas, construído pelos alunos.

Dados: Pode considerar-se como "dado" qualquer objeto que apresente um número finito de posições distintas. Podemos incluir nesse grupo: moedas, fichas com faces de cores diferentes, sólidos com as faces numeradas (dados em forma de cubo, de icosaedro, de decaedro etc.).

Quando lançamos um dado, estamos à espera de que, considerada a evidente simetria da sua forma, cada um dos números marcados nas faces tenha a mesma probabilidade de sair.

Em algumas lojas de jogos, além do dado comum de seis faces, vendem-se também dados com quatro, oito, doze e vinte faces (figura 3).

Figura 3

Bolas em urnas: Incluem-se nesse grupo não apenas as bolas em urnas propriamente ditas, mas qualquer coleção de objetos (fichas, papéis com nomes, balas), que possam ser colocados em uma urna, sacola ou caixa, misturados e sorteados de modo que todos tenham a mesma probabilidade de serem sorteados. A diferença em relação aos dados é que esses materiais permitem introduzir o número de elementos que se deseje, permitindo mudar à vontade as probabilidades envolvidas.

A extração de bolas de urnas pode dar origem a quatro tipos diferentes de experimentos: extrações com ou sem reposição da bola retirada, e ordenadas ou não ordenadas.

Roletas: Servem para trabalhar com probabilidades geométricas. Podem ser construídas com cartolina pelos próprios alunos. Como eixo de giro podem ser utilizados um lápis, uma agulha, um clipe de papéis. Esse tipo de material permite utilizar setores com áreas iguais ou desiguais, para representar eventos de probabilidades iguais ou desiguais.

Baralhos de cartas: Ou coleções de cartões com dados referentes a mais de um atributo (no caso do baralho convencional, os atributos são o número e o naipe da carta). Podem dar origem ao estudo da interseção entre dois eventos.

Tachinhas: Ou qualquer outro objeto irregular, que possa cair em duas ou mais posições diferentes. Podem ser usados para se calcular experimentalmente as probabilidades de cair em uma ou outra posição quando soltos a uma determinada altura. As probabilidades geradas podem ser diferentes umas das outras.

Tabelas: Ou conjuntos de dados estatísticos extraídos de material impresso ou feito pelos próprios alunos em projetos associados aos mesmos.

Atividades

1. Escolha um ou mais materiais (dados, roletas, urnas com bolas) para simular a seguinte situação:

No caminho para a escola, há dois semáforos (ou sinais luminosos de trânsito). A probabilidade de encontrarmos o primeiro semáforo vermelho é de 1/3, e a probabilidade de encontrarmos o segundo semáforo fechado é de 1/2.

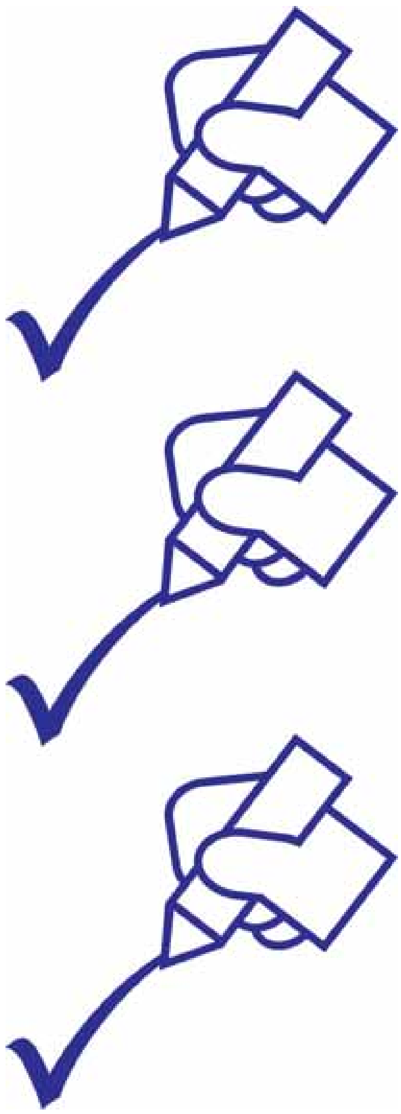
• Como podemos simular a probabilidade 1/3 usando um dado? Lembre-se, o dado tem 6 faces, com os números de 1 a 6. Você precisará ser criativo para simular uma probabilidade de 1/3.

Dica: Qual a probabilidade de tirar um número par em um dado? E um número maior que 4?

2.Dê um exemplo de uma situação que possa ser representada por uma simulação com bolas em urnas.

3. Apresente o problema 3 para algumas pessoas (alunos, colegas ou familiares). Você consegue identificar em alguma das respostas o uso do "viés da equiprobabilidade"?

Solução das atividades



Solução das atividades

Atividade 1

a) Classificando as atividades por risco de acidente, da que oferece mais risco para a que oferece menos risco, teremos:

maior risco	Indústria Pesada
	Construção Civil
	Indústria Leve
	Crédito
	Transportes
	Comércio
	Agropecuária e Extrativismo
	Serviços
menor risco	Administração Pública

Uma possibilidade que temos é atribuir risco grave às três primeiras, risco médio às proximas três e risco leve às três últimas.

b) Você pode ter medido o risco de cada atividade pela razão entre o número de acidentes na atividade e o total de empregados na atividade.

Atividade 3

A resposta ao item “a” fica a seu encargo. Se você precisou de responder ao item “b”, você pode usar o método sugerido na resposta à atividade 1, letra b).

Atividade 4

a) e b) Alguns termos relacionados a probabilidade e seus significados:

acaso – fenômeno que faz que um mesmo conjunto de causas possa ter resultados diferentes.

aleatório – diz-se de algo que aconteça ao acaso.

certeza – infalibilidade, convicção.

chance – o mesmo que oportunidade.

eventos equiprováveis – eventos que têm a mesma probabilidade de ocorrer.

necessidade – aquilo que obriga a algo acontecer; certeza.

possibilidade – aquilo que permite a algo acontecer ou não.

risco – probabilidade.

c) Alguns exemplos são: cálculos dos preços de seguros (de vida, de automóveis) e planos de saúde, cálculo da probabilidade de ganhar na loteria, cálculo da eficácia de um teste para detectar alguma doença, cálculo da margem de erro de pesquisas eleitorais.

d) Respostas livres, mas vão aí algumas possibilidades:

Se retirarmos uma carta, sem olhar, de um baralho bem embaralhado, qual a probabilidade de que a mesma seja um ás de copas?

Se um aluno chuta uma questão de múltipla escolha que tem 5 alternativas, qual é a probabilidade de ele acertar?

Se uma mulher está grávida, qual a probabilidade de que o bebê seja do sexo masculino?

e) Alguns fatos que você pode ter listado: probabilidades podem ser expressas por números de 0 a 1; podem ser calculadas pela fórmula:

$$\frac{\text{número de resultados em que ocorre o evento que queremos}}{\text{número de resultados possíveis}}$$

Atividade 5

c)

Atividade 6

1 - 0,012 = 0,988

Atividade 7

a) Não! Não sair um 6 pode ocorrer de muitos mais jeitos: se sair um 1 ou um 2, ou 3, ou 4, ou 5. Então a probabilidade de não sair seis é maior que a probabilidade de sair 6.

b) Sim.

Atividade 8

Setor	Freqüência Relativa	
	Afastamentos	Empregados
Agropecuária e Extrativismo	0,0526196	0,0695907
Indústria Leve	0,1531535	0,0999827
Indústria Pesada	0,2094129	0,1208542
Construção Civil	0,0875788	0,0544113
Comércio	0,1538383	0,2016370

Serviços	0,2136362	0,3071994
Transportes	0,0809015	0,0629265
Crédito	0,0357012	0,0257932
Administração Pública	0,0129615	0,0559983
Não Classificado	0,0001966	0,0016068
Total	1	1

Atividade 9

O resultado "uma cara e uma coroa" tem mais chance de acontecer que o resultado "duas caras". A probabilidade de conseguirmos "uma cara e uma coroa" é 1/2, enquanto que de "duas caras" é 1/4.

Por quê?

Porque as possibilidades são:

Moeda A	Moeda B	Resultado
cara	cara	2 caras
cara	coroa	1 cara e 1 coroa
coroa	cara	1 cara e 1 coroa
coroa	coroa	2 coroas

O resultado "uma cara e uma coroa" tem dois jeitos de acontecer: se chamarmos uma moeda de A e outra de B, podemos ter cara na moeda A e coroa na moeda B, ou coroa na moeda A e cara na moeda B.

Como cara e coroa têm a mesma probabilidade de acontecer em cada moeda, os quatro resultados listados na tabela têm a mesma probabilidade de acontecer. Então, a probabilidade de "uma cara e uma coroa" é:

$$\frac{\text{número de resultados em que ocorre o evento que queremos, dentre todos os que têm a mesma chance de acontecer}}{\text{número de resultados possíveis e que tenham a mesma chance de acontecer}}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Já a probabilidade de "duas caras" é: $\frac{1}{4}$ pois das quatro possibilidades de mesma chance, apenas uma nos leva a "duas caras".

Atividade 10

Bolas	Probabilidade
uma bola branca	0,15
uma bola verde	0,25
uma bola azul	0,5
uma bola amarela	0,1

Atividade 11

Setor	Probabilidade
Agropecuária e Extrativismo	$\frac{\text{total de pessoas no setor}}{\text{total de empregados no arquivo}} = \frac{1413885}{20317163} = 0{,}06959$
Indústria Leve	0,0999827
Indústria Pesada	0,1208542
Construção Civil	0,0544113
Comércio	0,2016370
Serviços	0,3071994
Transportes	0,0629265
Crédito	0,0257932
Administração Pública	0,0559983
Não Classificado	0,0016068

Atividade 12

Bolas	Freqüência relativa	Porcentagem
bolas brancas	0,15	15%
bolas verdes	0,25	25%
bolas azuis	0,5	50%
bolas amarelas	0,1	10%

Atividade 13

É só olhar em que setores a coluna azul ultrapassa a coluna roxa: Indústria Leve, Indústria Pesada, Construção Civil, Transportes e Crédito.

Atividade 14

As 5 atividades econômicas listadas na atividade 13 são as que têm maior risco de acidente. Veja a resposta à atividade 1.

Atividade 15

a)

b) Sim, porque a probabilidade de sortear um empregado de dado setor da atividade econômica é proporcional ao número de empregados naquele setor, que por sua vez é proporcional ao ângulo do setor circular correspondente no gráfico.

Atividade 16

A probabilidade de ganhar é 1 em 50.063.860, então, a probabilidade de perder é 50.063.859 em 50.063.860. Se a probabilidade de ganhar for representada por 1 centímetro, a de perder será representada por 50.063.859cm, que é igual a aproximadamente 500,64km.

Unidade 8

Seguros de vida

Ana Lúcia Braz Dias

Iniciando a nossa conversa

Nas situações reais nas quais não temos o controle sobre o que vai acontecer, ou seja, em que temos de lidar com a incerteza, dificilmente o conceito de probabilidade aparecerá isolado, de forma tão simples como fazer uma escolha baseada em "cara ou coroa". Na vida real as situações são mais complexas. Mobilizam vários conceitos diferentes.

Se estudamos Matemática é para sermos capazes de reconhecer esses conceitos em situações reais e aplicar nossos conhecimentos matemáticos a eles de forma a melhor resolver problemas.

Nesta unidade vamos examinar mais uma situação-problema relacionada à seguridade. Só que nesta situação, além da probabilidade, outros conceitos matemáticos deverão ser ativados para tomarmos decisões.

Esperamos que o estudo desta unidade o leve a rever conceitos matemáticos e a colocá-los em prática em situações desafiadoras. E, é claro, esperamos que você leve esta atitude de vencer desafios a seus alunos, ajudando-os a reconhecer, em situações-problema significativas para eles, o papel da matemática das probabilidades, funções e finanças.

Veja a seguir um panorama desta unidade e do que será tratado nas três seções em que está organizada:

1. Resolução de uma situação-problema

A situação-problema desta unidade envolve a necessidade de se calcularem ganhos financeiros sobre as quais não temos certeza se vão ou não se concretizar. Isto o levará à utilização do conceito de valor esperado. Também envolve o cálculo da valorização do dinheiro ao longo do tempo pela incidência de juros. Examinaremos a situação de uma companhia de seguros, em que essas situações ocorrem constantemente.

2. Conhecimento matemático em ação

Nesta seção, o trabalho continuará atrelado à noção de modelagem matemática. A partir da necessidade da criação de um modelo de decrescimento da população, vamos rever os dois tipos de função mais utilizados quando procuramos descrever o crescimento ou o decrescimento de grandezas: a função linear e a função exponencial. Também articularemos a essas funções as noções de juros simples e juros compostos. Finalmente, expandiremos a idéia de valor esperado.

3 - Transposição Didática

Esta seção discute problemas relacionados ao ensino-aprendizagem de conceitos vistos nas seções 1 e 2 e sugere ações relacionadas para a sala de aula.

Como as outras unidades, esta também conterá um Texto de Referência sobre Educação Matemática, que abordará o tema "modelagem matemática".

Definindo o nosso percurso

Ao longo desta unidade, você irá:

1 – Com relação ao seu conhecimento de conteúdos matemáticos:

- reconhecer a importância da criação de modelos para resolver situações-problema;

- utilizar funções para modelar uma situação real;

- reconhecer funções lineares em situações concretas;

- utilizar variáveis e equações para expressar variações lineares;

- interpretar a forma de variação conjunta de duas variáveis a partir de gráficos cartesianos;

- calcular o valor presente de uma quantia monetária a ser paga ou recebida futuramente, utilizando o conceito de juros compostos;

- aplicar o conceito de valor esperado.

Isso será feito nas seções 1 e 2.

2 – Com relação aos seus conhecimentos sobre Educação Matemática:

- reconhecer a modelagem matemática como metodologia de ensino da matemática;

- distinguir diferentes visões da matemática e como elas afetam a prática do professor.

Isso será feito em pequenos quadros intitulados "Aprendendo sobre Educação Matemática", que você encontrará ao longo da seção 2, bem como no Texto de Referência.

3 – Com relação à sua atuação em sala de aula:

Examinar situações didáticas que levem o aluno do nível de ensino em que você atua a construir os conceitos de crescimento linear e valor esperado.

Isso será feito na seção 3.

Seção 1

Resolução de situação-problema: modelos matemáticos, valor esperado e matemática financeira na determinação do preço de seguros

Objetivo da seção

Esperamos que nesta seção você possa:

• Reconhecer a importância da criação de modelos para resolver situações-problema;

• Pensando sobre o caso concreto de uma empresa que oferece seguros de vida, construir noções informais sobre o conceito de valor esperado;

• Também, partindo de um problema concreto, construir informalmente a noção de valor presente de uma quantia de dinheiro, um conceito da matemática financeira.

Integrando a matemática ao mundo real: a expectativa de vida e a determinação de preços de seguros

Você já pensou sobre o ramo de negócios das seguradoras? Aquelas que vendem seguros de vida, seguros contra roubo ou seguros-saúde...

O que você acha? As seguradoras ganham muito dinheiro?

É um negócio arriscado, você há de concordar.

A seguradora promete, por meio de um contrato, que vai pagar ao contratante uma grande quantia de dinheiro! Em compensação, o contratante paga quantias à seguradora – muitas vezes mensalmente.

O quanto a seguradora vai ganhar com cada segurado vai depender de uma série de fatores.

Por exemplo, se uma pessoa faz um seguro-saúde e paga certa quantia mensal à seguradora, mas essa pessoa fica um longo tempo sem precisar utilizar serviços médicos, lucro para a seguradora! Ela não tem que pagar serviços médicos para o segurado, e fica só recebendo as mensalidades.

Já se a pessoa contratou um seguro-saúde recentemente e já deu uma despesa enorme com médicos e hospitais para a seguradora, a situação se inverte.

No caso de seguros contra roubos de automóveis, já imaginou quantas pessoas contratam seguros e que nunca têm seus carros roubados? Lucro para as seguradoras!

E os seguros de vida? Se uma pessoa faz o seguro e falece logo, a seguradora tem que desembolsar uma grande quantia com a indenização. Mas, em compensação, se a pessoa demora a falecer, durante esse tempo o dinheiro pago pelo segurado rende juros, correção monetária... Lucro para a seguradora.

Ao contratar um seguro de vida, estamos concordando em pagar uma quantia para que, quando morrermos, alguém que escolhamos receba uma indenização.

Como essa indenização será paga futuramente, o valor equivalente a ela no dia em que contratarmos o seguro não é o mesmo que o valor na época do pagamento. Por isso, para estipularmos o preço do seguro não podemos simplesmente igualá-lo à indenização.

Mas ainda há um problema: não sabemos quando a indenização será paga, porque não sabemos quando vamos morrer.

Para calcular o preço de seguros (prêmio) a seguradora quer saber qual a probabilidade de ter de vir efetivamente a pagar a indenização prevista, e depois de quanto tempo de pagamento por parte do segurado. A companhia sempre torce pela longevidade, para que o sujeito possa efetuar bastantes pagamentos!

Para que a seguradora determine um preço para o seguro que vende, precisa se basear em alguma ferramenta matemática que forneça a probabilidade de seu contratante falecer a uma determinada época.

Essas ferramentas matemáticas, ou modelos, procuram descrever, com algumas simplificações, como na realidade a população vai diminuindo pela mortalidade.

Como as seguradoras não sabem com certeza quando ocorrerão as mortes de seus contratantes, elas têm que utilizar um conceito de probabilidade, o conceito de **valor esperado**.

Não dá para a seguradora saber se o valor que ela espera ganhar quando vende um seguro se concretizará em um caso específico: algum segurado pode vir a falecer logo após contratar o seguro, mesmo que se esperasse o contrário por ele ser muito jovem. No entanto, como já vimos, quando se trata de um número grande de repetições, a teoria das probabilidades permite fazer ótimas previsões. Como a seguradora tem muitos segurados, na média o valor que ela vai ganhar é aquele mesmo que ela pode calcular utilizando o conceito de valor esperado.

Situação-problema: o preço de um seguro de vida

Digamos que uma seguradora tenha 10.000 segurados na faixa etária de 40 a 50 anos de idade. Para cada um deles:

- A seguradora pagará R$100.000,00 ao final do ano, em caso de falecimento do segurado.
- A seguradora receberá R$300,00 caso o segurado ainda esteja em vida ao final do ano.

Vamos ajudar a seguradora a calcular o valor que ela pode esperar ganhar, em média, por segurado, ao final desse ano.

A seguradora baseia-se na seguinte informação:

- Probabilidade de as pessoas na faixa etária 40-50 sobreviverem mais um ano: $\frac{999}{1.000}$

- Probabilidade de as pessoas na faixa etária 40-50 falecerem dentro de um ano: $\frac{1}{1.000}$

O que significa isso? Que a expectativa é de que $\frac{1}{1.000}$ das pessoas de idade entre 40 e 50 anos venha a falecer no presente ano.

Ou seja, que 1 milésimo de seus 10.000 segurados, ou 10 segurados, venham a falecer até o final do ano. E que os outros 999 milésimos, ou 9.990 segurados, continuem vivos e paguem R$300,00 ao final do ano.

Observe:

1) Que valor a seguradora espera ter que pagar até o final do ano?

A seguradora espera ter que pagar R$100.000,00 a 10 pessoas.

2) Que valor a seguradora espera receber até o final do ano?

A seguradora espera receber R$300,00 de 9.990 pessoas.

Atividade 1

a) Qual é o ganho total que a seguradora espera ter ao final do ano?

b) Qual é o ganho médio por segurado que a seguradora espera ter ao final do ano?

Atividade 2

O ganho total que você calculou no item “a” da atividade 1 só é esperado pela seguradora para o final do ano.

Sabemos que, ao longo de um ano, o dinheiro sofre desvalorização.

Mesmo sem contar com a inflação, se o dinheiro fosse ganho hoje, ele poderia ser aplicado, e ao final do ano teria rendido juros.

Digamos que ao longo de um ano a empresa possa ganhar 10% de juros sobre qualquer valor aplicado.

Qual o valor que a seguradora teria que ganhar ao início do ano, para que isso fosse equivalente a ganhar R$1.997.000,00 ao final do ano?

Em outras palavras, que quantia de dinheiro, ao render 10% de juros, equivaleria a R$1.997.000,00?

Seção 2

Construção do conhecimento matemático em ação: modelos matemáticos, funções lineares e exponenciais, juros e valor esperado

Objetivo da seção

Ao longo desta seção você irá:

• Construir em ação o conceito de modelo matemático;

• Rever o conceito de função;

• Utilizar várias representações de funções: gráfica, algébrica, tabular, comparando-as e transitando por elas;

• Examinar dois tipos muito utilizados de funções: funções lineares e funções exponenciais;

• Examinar os conceitos de juros simples e compostos, articulando-os com os conceitos de crescimento linear e crescimento exponencial;

• Aprofundar suas noções sobre o conceito de valor esperado.

Com relação à educação matemática, você irá:

- Familiarizar-se com o processo de modelagem matemática;
- Refletir sobre as visões estática e dinâmica da matemática.

Um modelo para a mortalidade

Ao longo da história foram construídas várias "tábuas de mortalidade" – tabelas baseadas em observações reais que dão o número de mortes em uma população ao longo dos anos. Essas tabelas nasceram inicialmente da curiosidade e do desejo de compreender mais sobre a vida. As pessoas queriam saber se havia alguma lei ou regularidade no número de mortes.

Com a observação dessas tabelas começaram a ser também criados modelos para a mortalidade (lembra-se da definição de modelo na unidade passada?). Foram propostas funções para descrever como varia a quantidade de pessoas vivas em função do tempo.

As tábuas de mortalidade e os modelos funcionais (ou seja, que utilizam o conceito matemático de funções) são bastante utilizados para se calcular o valor do prêmio de seguros.

Nesta seção vamos examinar um modelo criado para descrever a queda no número de pessoas de uma população.

Esse modelo é apenas uma possibilidade. Podem ser criados outros modelos para se tentar descrever o mesmo fenômeno.

Aprendendo sobre Educação Matemática – A matemática é exata e imutável ou oferece espaço para a criação?

Como pode um mesmo problema ter respostas diferentes?

A aceitação desse ponto de vista depende basicamente de um trabalho em duas direções:

1ª) Compreender o processo de modelagem matemática, que é como os matemáticos fazem para aplicar a matemática a problemas das mais diversas áreas, e que atualmente vem sendo apontado por educadores matemáticos como uma habilidade que deve fazer parte da aprendizagem dos alunos.

2ª) Ampliar a visão de matemática, passando de uma visão estática para uma concepção dinâmica. Como assim? Veremos a seguir.

Tem-se observado que o modo como os educadores vêem a matemática afeta sobremaneira a sua prática. Se o professor considera a matemática como um conhecimento estático, um produto acabado, ou um conjunto de regras e fatos a serem memorizados, jamais apresentará a seus alunos uma atividade em que tenham que investigar, formular conjecturas... A aula vai acabar sendo simples cobrança de memorização e de mecanização de procedimentos. Mas se o professor tem uma concepção de matemática baseada na resolução de problemas, ele vê a matemática como um campo humano de conhecimentos em continuada expansão e invenção e como um processo a que acrescenta um conjunto de conhecimentos. A matemática não é concebida como um produto acabado. Ela é uma criação.

O professor que caminha nessas duas direções permite aos alunos que aproximem o seu trabalho do trabalho do matemático. O professor deixa o aluno perceber que os caminhos são vários e que alguns deles poderão não conduzir a nenhuma solução ou, pelo contrário, levar a várias soluções para uma mesma questão inicial.

Uma função para descrever a queda na população

Um modo simples de montar uma função que descreva a mortalidade de uma população é o seguinte:

Imagine que acompanhamos, desde o nascimento, um grande número de recém-nascidos, digamos, 100.000 bebês nascidos no mesmo dia, e que a cada ano registramos a quantidade desses recém-nascidos que ainda sobrevivem.

Poderíamos registrar esses dados em uma tabela. Como na tabela 1, por exemplo.

Ano	Número de pessoas vivas
0 (dia do nascimento)	100.000
1 (um ano depois)	98.000
2 (dois anos depois)	97.000
3 (três anos depois)	...

Tabela 1

Faríamos isto até que todos falecessem. É claro que isso aconteceria depois de muitos anos, pois muitas pessoas só morrem em idade avançada.

Veja que, assim, para cada dia haveria um número de pessoas vivas correspondente. Isso caracteriza uma **função.**

Articulando conhecimentos

Pode acontecer que duas variáveis se relacionem de tal maneira que, para cada valor assumido por uma, a outra assuma **um e apenas um valor**. Nesse caso temos um tipo especial de relação, que chamamos de **função**.

Quando a relação entre duas variáveis – x e y, por exemplo – caracteriza uma função, comumente usamos as notações $y = f(x)$ ou $y = y(x)$ para dizer que y depende de x. Nesse caso, x é dita a **variável independente**, e y, a **variável dependente**.

Vamos colocar essas idéias em um gráfico.

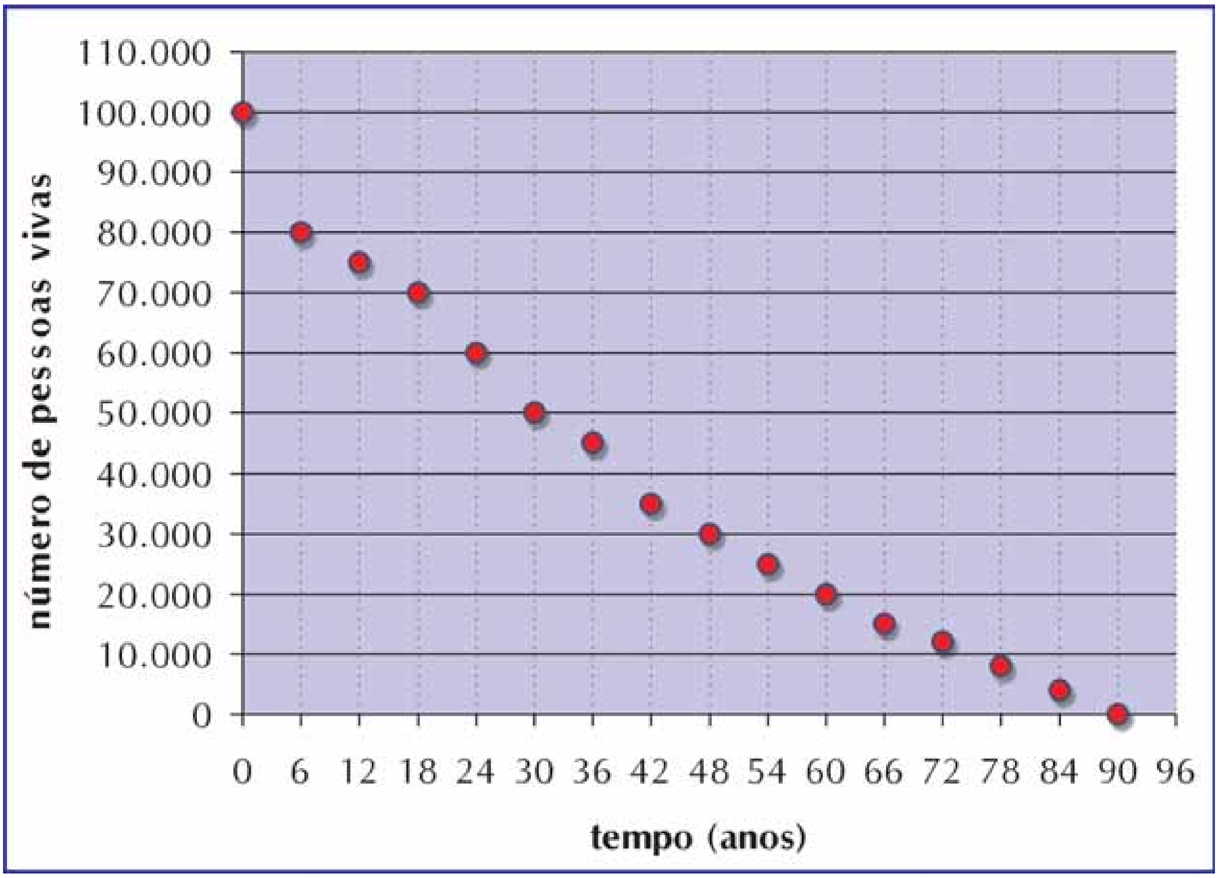


Gráfico 1

Sobre o eixo horizontal colocamos os valores da variável independente: o ano em que fazemos a observação. Sobre o eixo vertical, a variável dependente: o número de pessoas vivas naquele ano.

Agora reflita: no ano 10, que idade têm as pessoas da nossa população? Lembre-se de que todas nasceram no mesmo dia!

Elas teriam 10 anos.

Generalizando, no ano x, as pessoas teriam x anos.

Algumas dessas pessoas poderão morrer ainda naquele ano, outras continuarão vivendo. E assim essa população vai diminuindo.

Mas, no ano x, podemos dizer que as pessoas que ainda estão na nossa população são as pessoas que sobreviveram pelo menos até a idade x (elas podem continuar vivendo). Vamos chamar esse número de S ("s" de "sobrevivente").

S é então uma função de x: dada uma idade x podemos ir até nossa tabela e ver quantas pessoas sobreviveram até aquela idade. Podemos chamar S de $S(x)$, só para lembrar que S depende de x.

No gráfico 1 vemos que nossa última observação foi no ano 90. Quantas pessoas estão vivas no ano 90?

Nenhuma (o ponto está sobre o eixo horizontal). Quer dizer que no nosso exemplo nenhuma pessoa sobreviveu até 90 anos.

Aprendendo sobre Educação Matemática: Modelagem matemática

Um modelo é uma representação de algo. Um modelo matemático é uma representação de alguma situação do mundo real por meio da matemática.

A modelagem é um processo cíclico pelo qual se procura reproduzir os principais processos que compõem um fenômeno, com o objetivo de compreensão do fenômeno e previsão de seus resultados. A modelagem matemática é a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.

A construção de um modelo requer primeiramente um conhecimento profundo das variáveis e dos dados observados na situação real. Então o primeiro passo é o estudo do fenômeno pelos especialistas na área e a formação de conjecturas sobre como as variáveis envolvidas no fenômeno podem estar se relacionando ou se comportando.

E em uma segunda etapa faz-se um enxugamento do problema, com o uso de idealizações e aproximações. A partir desse estágio não lidamos mais com o problema inicial, mas com um modelo dele – uma representação simplificada da realidade. É chamado *modelo real* porque ainda tratamos de objetos e conceitos do mundo real (pessoas, animais, inflação etc.). Esse passo é geralmente menos definido e requer um alto grau de criatividade. O autor do modelo tem que olhar para o mundo real e tentar identificar quais são os principais processos operatórios em ação, quais são devidos a "ruído", ou dados não relevantes, e quais podem ser eliminados do modelo a fim de simplificação.

A próxima etapa é a matematização do modelo: a expressão do modelo real em termos matemáticos. Como na fase anterior, os resultados possíveis são vários: podem-se escolher diversas formas de expressar uma situação matematicamente, dependendo do conhecimento matemático acessível ou conveniente para o autor do modelo.

Após a construção do modelo matemático o processo continua com a geração de dados a partir do modelo construído. A intenção nessa fase é experimentar. São as chamadas simulações.

Uma vez que se procedeu a um certo número de simulações, deve-se validar o modelo, isto é, verificar se os resultados obtidos são coerentes e compatíveis com a situação real inicial.

Se o modelo não se mostra viável, o ciclo é reiniciado, fazendo-se as refinações necessárias até que se obtenha um modelo satisfatório. Quando o modelo se mostra adaptado para a utilização que se deseja, os resultados obtidos por simulação podem permitir certas previsões referentes à situação real.

O processo de modelagem está esquematizado na figura 1.

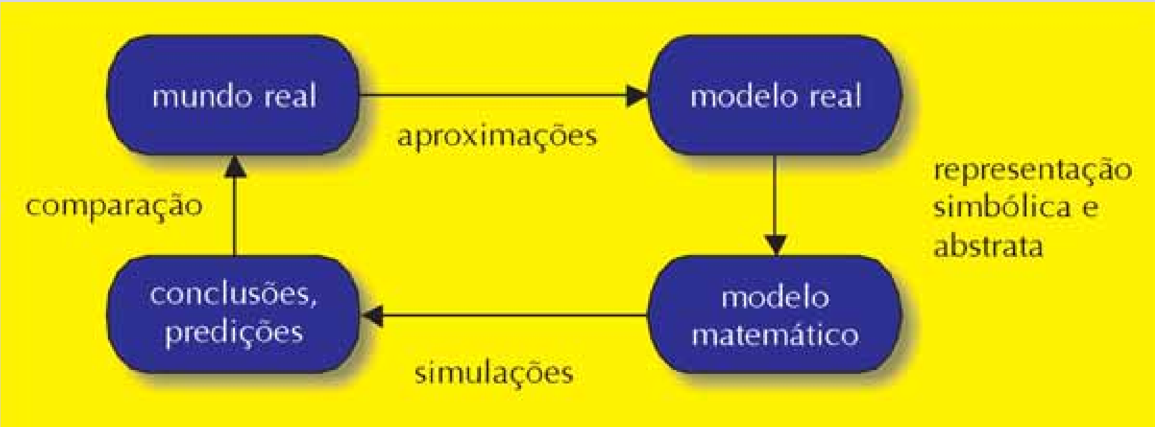


Figura 1: Etapas do processo de modelagem

Quando aplicada ao ensino, a modelagem pode se configurar em três níveis:

O professor pode apresentar um problema com informações quantitativas e qualitativas, e os alunos desenvolverão a investigação do problema proposto.

O professor pode apresentar um problema aplicado, mas deixando que os dados sejam coletados pelos próprios alunos durante o processo de investigação.

A partir de um tema gerador, os alunos podem coletar informações qualitativas e quantitativas, formular e solucionar os problemas.

O modelo de De Moivre

O modelo mais simples para expressar a mortalidade foi sugerido por Abraham de Moivre em 1725. Ele assumiu que antes de completar 86 anos a população ainda teria algumas pessoas, mas no ano 86 a população seria zero. Ou seja, que a maior idade que uma pessoa poderia alcançar era um pouco menos que 86 anos, mas que ninguém sobreviveria até 86 anos. Assumiu também que S decrescia linearmente conforme x crescia. Algo como no gráfico 2.

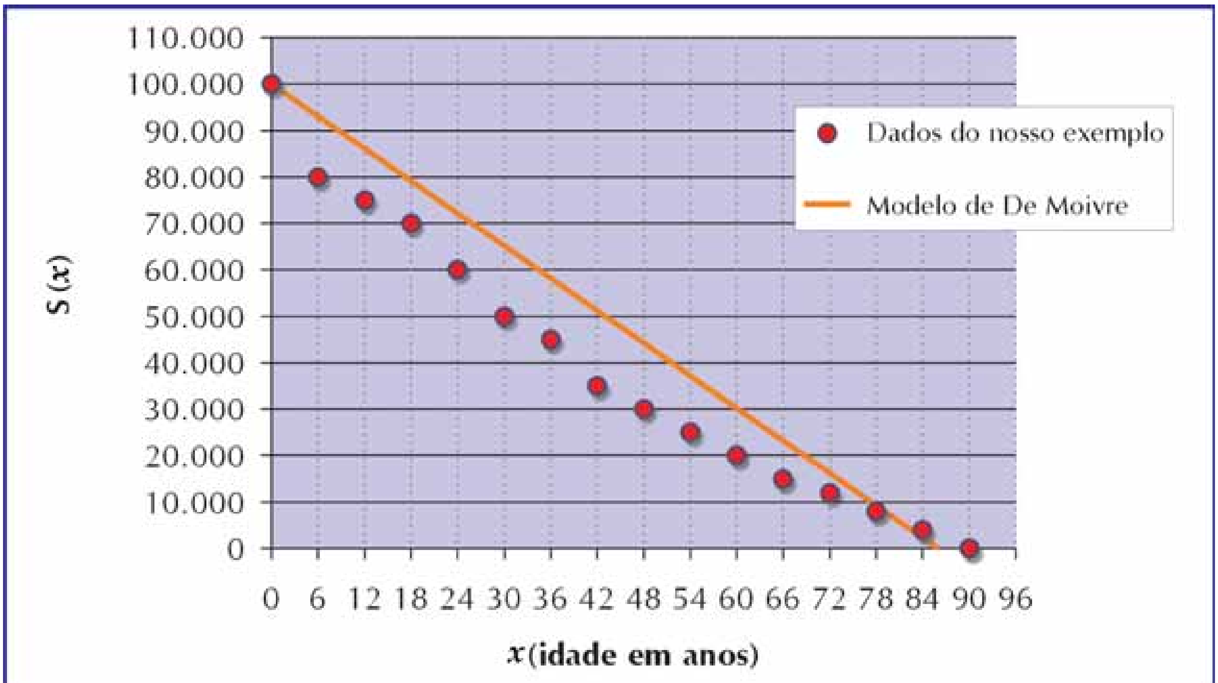


Gráfico 2

Observe que a reta que representa a função no gráfico toca o eixo horizontal em 86, que é o ano que De Moivre propôs como o ano em que a população considerada se tornaria zero.

Se propuséssemos 110 como a idade máxima, a reta da função tocaria o eixo horizontal em 110 (você sabe explicar por quê?).

Observe também que a reta da função está tocando o eixo vertical em 100.000, que é o número de bebês da nossa população, todos nascidos no dia 0.

Se tivéssemos escolhido considerar uma população de 200.000 bebês, a reta da função tocaria o eixo vertical em 200.000, já que este seria o número de sobreviventes no dia 0.

Generalizando, a reta da função, nesse modelo, sempre irá tocar o eixo vertical no número de pessoas inicial da população considerada, e o eixo horizontal na idade que estipularmos como se ninguém sobrevivesse até ela. Se chamarmos o número inicial da população de N, e a idade na qual a população zera de i, teremos a situação representada no gráfico 3.

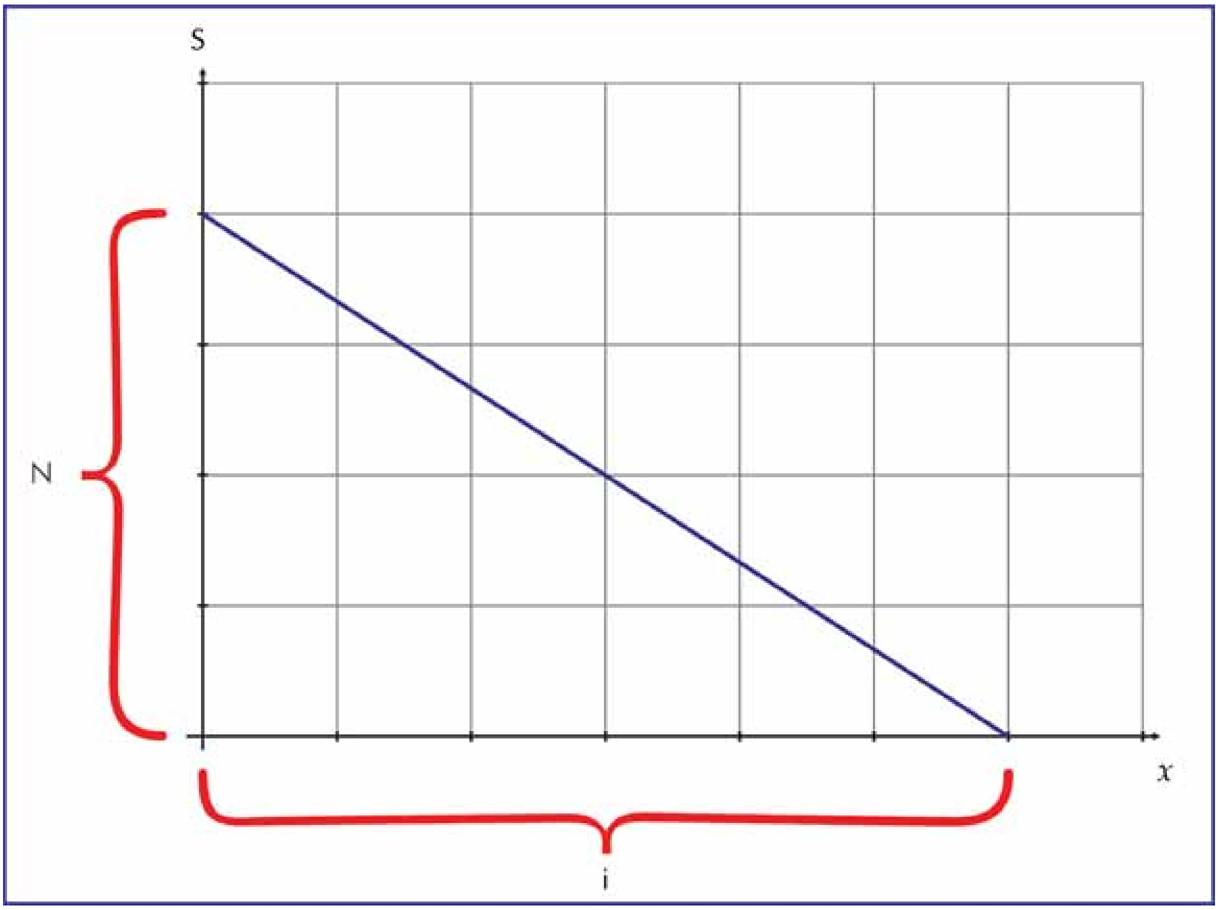


Gráfico 3

É claro que não temos uma idade máxima além da qual nenhum ser humano sobreviveria. Então é importante lembrar que as funções sugeridas procuram aproximar a mortalidade. Não haveria jeito de saber a "verdadeira" lei da mortalidade, mesmo porque nem sabemos se existe uma "lei" que reja esse fenômeno.

No modelo de De Moivre foi assumido que a quantidade de pessoas que sobrevivem pelo menos até a idade x decresce linearmente conforme x cresce, ou seja, que $S(x)$ é uma função linear de x.

As funções lineares apresentam uma **taxa de variação** constante.

$$\text{Taxa de variação} = \frac{\text{variação na variável dependente}}{\text{variação na variável independente}}$$

Ou seja, têm taxa de crescimento constante, se forem crescentes, ou taxa de decrescimento constante, se forem decrescentes.

O que significa ter taxa de variação constante?

Significa que variações iguais na variável independente provocam variações iguais na variável dependente.

Vamos ver o que é isso numericamente (com tabelas) e graficamente.

Exemplo1:

Consideremos a interdependência entre duas variáveis: quantidade de unidades vendidas de certa mercadoria e valor da venda.

Se o preço unitário da mercadoria for R$4,00, a tabela 2 nos dá alguns valores para variável independente (o número de unidades vendidas) e dependente (o valor da venda).

Número de unidades vendidas	Valor da venda
2	8
4	16
6	24
8	32
10	40
15	60
20	80

Tabela 2

Vemos que cada vez que o número de unidades vendidas aumenta em duas unidades, o valor da venda aumentará em 8 unidades. Da mesma forma, cada vez que aumentarmos o número de unidades vendidas em cinco unidades, o valor da venda aumentará em 20 unidades.

Aumentos iguais no número de unidades vendidas provocam aumentos iguais no valor da venda. Logo, a taxa de variação é constante.

Graficamente, temos:

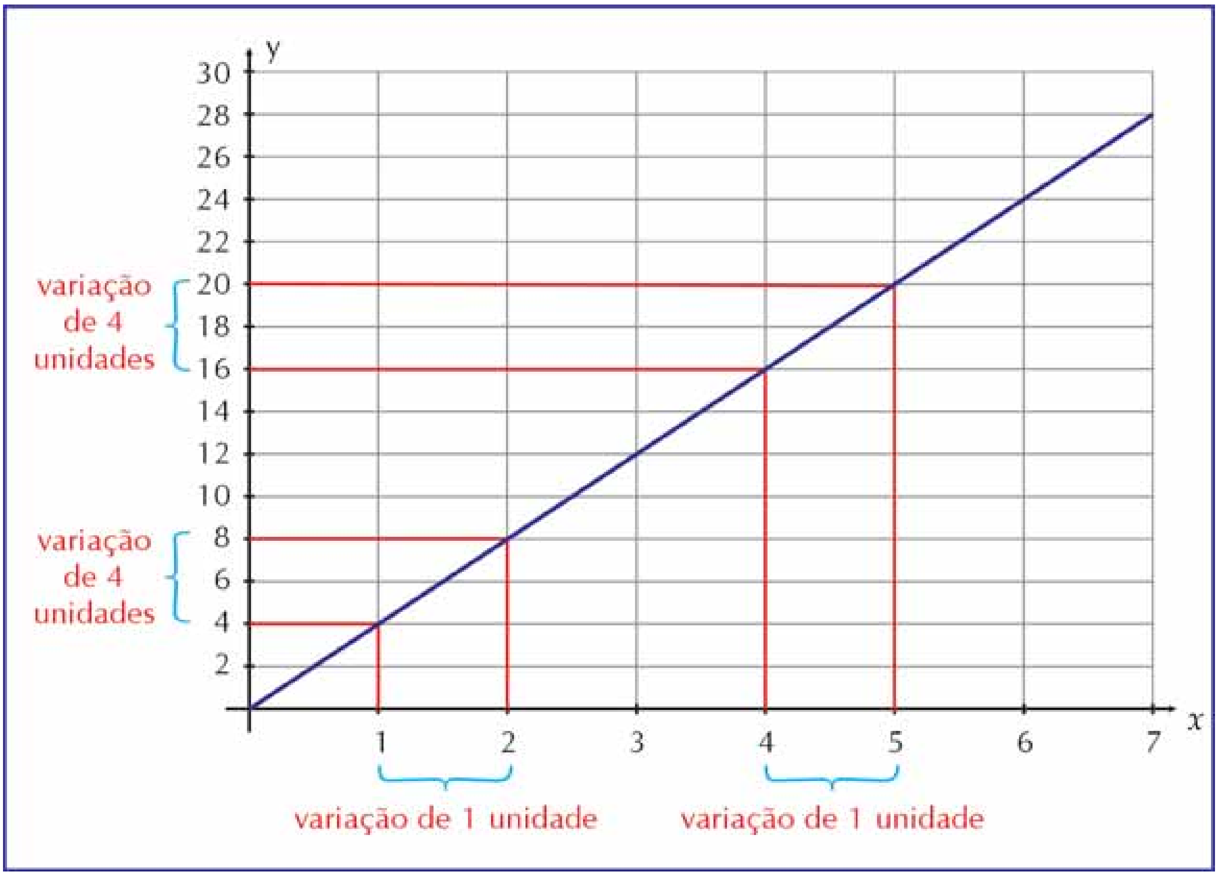


Gráfico 4

No gráfico 4 vemos que, não importa em que ponto do gráfico dermos uma variação de 1 unidade na variável independente (preço unitário), a variação correspondente na variável dependente (valor da venda) será 4. Por isso, podemos dizer que a taxa de variação, que é $\dfrac{\text{variação no valor da venda}}{\text{variação no número de unidades vendidas}}$ é constante.

Nesse exemplo, a taxa de variação é: $\dfrac{8}{2}$ (significa que uma variação de 2 unidades no número de unidades vendidas acarreta uma variação de 8 reais no ganho) ou $\dfrac{20}{5}$ (significa que uma variação de 5 unidades no número de unidades vendidas acarreta uma variação de 20 reais no ganho) ou $\dfrac{4}{1}$ (significa que uma variação de 1 unidade no número de unidades vendidas acarreta uma variação de 4 reais no ganho), que é igual a 4 reais/unidade.

Exemplo 2:

Digamos que vamos aplicar R$100,00 à taxa de 7% ao mês.

Consideremos a interdependência entre duas variáveis, número de meses e valor dos juros, conforme a tabela 3.

Número de meses	Valor dos juros
5	40,26
10	96,72
15	175,90
20	286,97
25	442,74
40	661,23
45	967,66

Tabela 3

Se observarmos uma variação de 5 meses a partir do quinto mês, a variação correspondente no valor dos juros será: 96,72 – 40,26 = 56,46

Agora vamos observar uma variação de 5 meses, mas a partir do vigésimo mês. A variação correspondente no valor dos juros será: 442,74 – 286,97 = 155,77

Nos dois casos, consideramos uma variação de 5 meses. Mas a variação correspondente no valor dos juros não foi a mesma.

Por isso, a taxa de variação não é constante, e a função não é linear.

Vejamos isso graficamente:

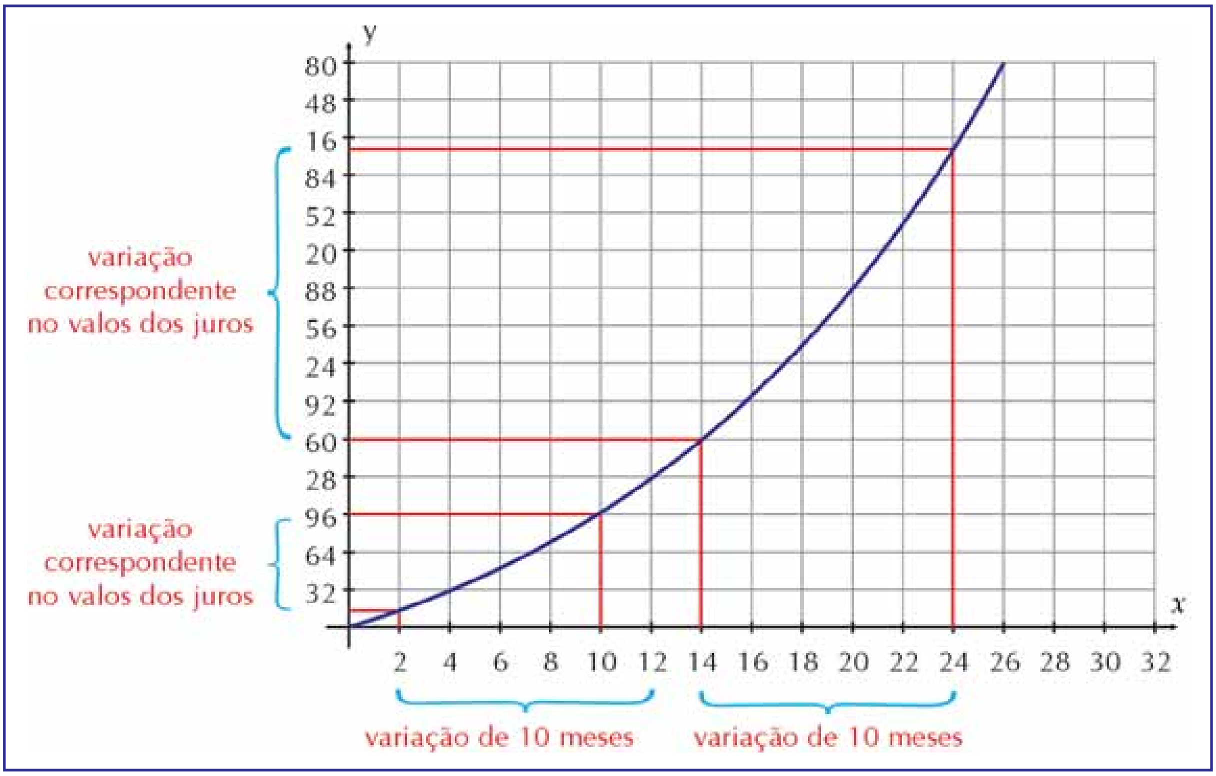


Gráfico 5

No gráfico 5, consideramos uma variação de 10 meses em dois lugares diferentes do gráfico: do mês 2 ao mês 12, e depois do mês 14 ao mês 24. Veja a diferença na variação correspondente que foi obtida no valor dos juros nos dois casos!

Se fôssemos calcular a taxa de variação nesse caso, veríamos que o resultado dependeria do lugar do gráfico que fôssemos considerar: se colocássemos 10 no denominador, qual número caberia conseqüentemente no numerador? Dependeria do período considerado!

A taxa de variação não seria constante; portanto, a função não seria linear.

No caso do modelo de De Moivre, $S(x)$ é uma função linear e decrescente. Isso significa que, para variações iguais de x, teremos variações iguais de $S(x)$.

Atividade 3

Considere que no modelo de De Moivre começamos com uma população de N = 100.000 recém-nascidos.

Quando x é 0, $S(x)$ é igual a ____________.

Quando x é 86, $S(x)$ é igual a ____________ .

De 0 a 86, x variou 86 unidades.

Quando x variou de 0 a 86, $S(x)$ variou de ______ a ______ ; portanto, ________ unidades.

A taxa de variação nessa função é de ______________ .

(A taxa de variação é $\dfrac{\text{variação de } S(x)}{\text{variação de } x}$).

A interdependência entre as variáveis em uma função linear pode ser expressa pela fórmula: $y=ax+b$, em que x é a variável independente e y, a variável dependente, e a é a taxa de variação ($\dfrac{\text{variação da variável dependente}}{\text{variação da variável independente}}$).

Atividade 4

Agora que você já achou a taxa de variação do modelo de De Moivre na atividade 3, escreva a fórmula que dá $S(x)$ em termos de x para esse modelo.

Atividade 5

Um banco cobra a tarifa de R$3,00 para a manutenção de contas correntes e mais R$0,50 por talão de cheque utilizado. Se chamarmos de x o número de talões utilizados e R o total pago pelo correntista,

a) R seria uma função linear de x?

b) Qual seria a taxa de variação dessa função?

c) Dê a expressão de R em função de x.

Atividade 6

Um livro raro tem valor atual de US$200,00. Esse valor duplicará a cada 20 anos. O valor do livro cresce linearmente em função do tempo? Para ajudar, complete a tabela 4:

Ano	Valor (em US$)
2002	200
2022	
2042	
2062	

Tabela 4

Cada vez que a variável "tempo" cresce em 20 anos, a variável "valor do livro" cresce quantidades iguais?

Atividade 7

Se, nas funções lineares, variações iguais na variável independente acarretam variações iguais na variável dependente, como ficaria o gráfico de uma função linear?

Experimente, no plano cartesiano da figura 2, colocar pontos da seguinte forma: começando na origem, a cada vez que você aumentar a 1ª coordenada (coordenada horizontal, ou distância do ponto ao eixo vertical) do ponto em 1 unidade, aumente a 2ª coordenada (coordenada vertical, ou "altura" do ponto com relação ao eixo horizontal) em duas unidades. Agora coloque pontos entre esses pontos: a cada aumento de meia unidade na 1ª coordenada, aumente a 2ª coordenada em 1 unidade; a cada aumento de 1/4 na 1ª, coordenada, aumente a 2ª coordenada em 0,5 unidade.

Você verá, como talvez já esperasse, que o gráfico de uma função linear é uma reta.

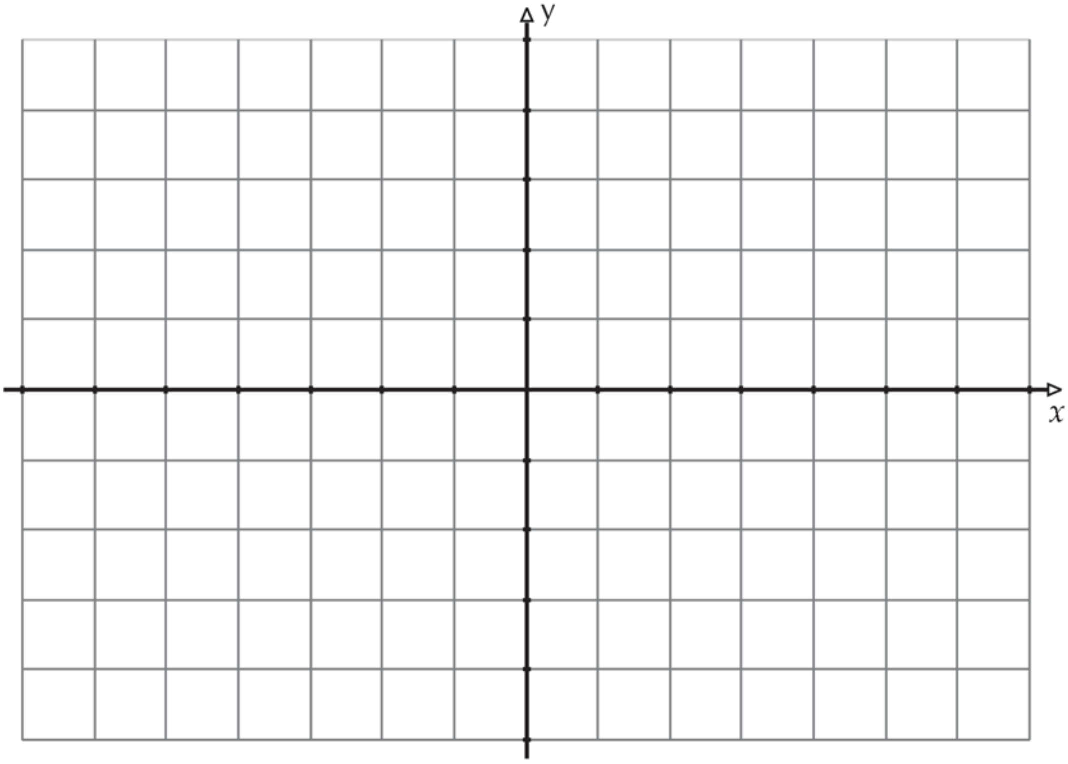


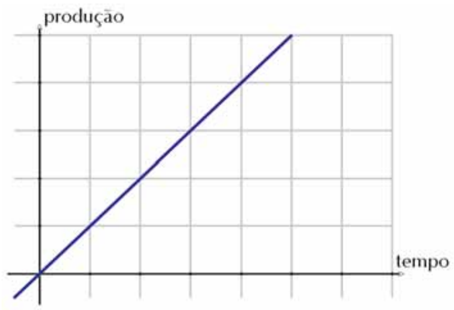
Figura 2

Atividade 8

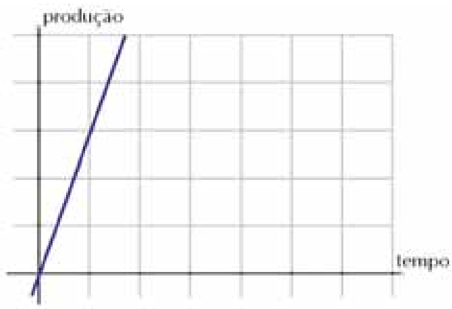
Os gráficos abaixo mostram a variação da produção de algumas empresas em função do tempo.

a) Em qual dos gráficos a produção cresce mais rápido (supondo-se a escala dos eixos a mesma em todos os gráficos)?

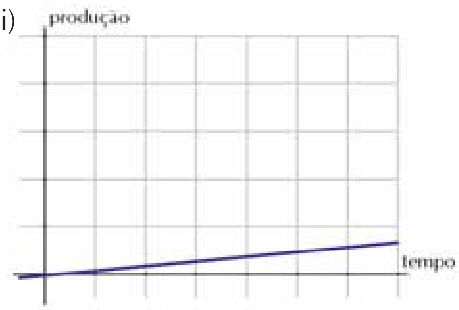
i)



ii)

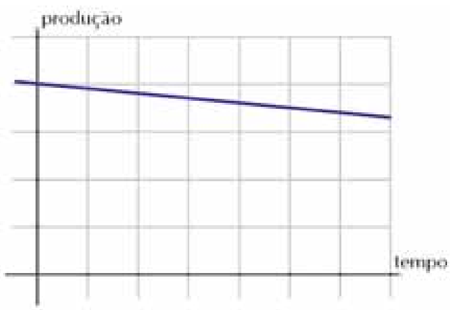


iii)



b) Em qual dos gráficos abaixo a produção decresce mais rápido (supondo-se a escala dos eixos a mesma em todos os gráficos)?

i)



ii)

c) Que critério você usou para responder às questões acima?

Vemos que a inclinação de uma reta em um gráfico é importante. Intuitivamente você já deve ter visto que ela mostra quão rápido uma variável cresce ou decresce em função de outra. Mas isso é justamente a taxa de variação – a velocidade de crescimento ou decrescimento da variável dependente conforme a variável independente cresce.

Então, na fórmula da função linear y= ax+b, o parâmetro "a" nos dá, em termos gráficos, a inclinação da reta. E o parâmetro "b"?

Como você pode confirmar, o parâmetro "b", também chamado de **coeficiente linear**, é o valor de y quando x é igual a zero. Então, em termos gráficos temos que a reta do gráfico intercepta o eixo vertical no ponto (0,b).

Relembrando, o que significa dizer que, no caso do modelo de De Moivre, a taxa de variação é de $-\dfrac{100.000}{86}\,\dfrac{\text{pessoas}}{\text{ano}}$? Significa que, a 86 anos morrem 100.000 pessoas. Ou seja, nesse caso, conforme a variável "tempo" cresce, a variável "número de pessoas" decresce. A função, então, é **decrescente**. Sua taxa de variação é negativa, e seu gráfico seria da seguinte forma:

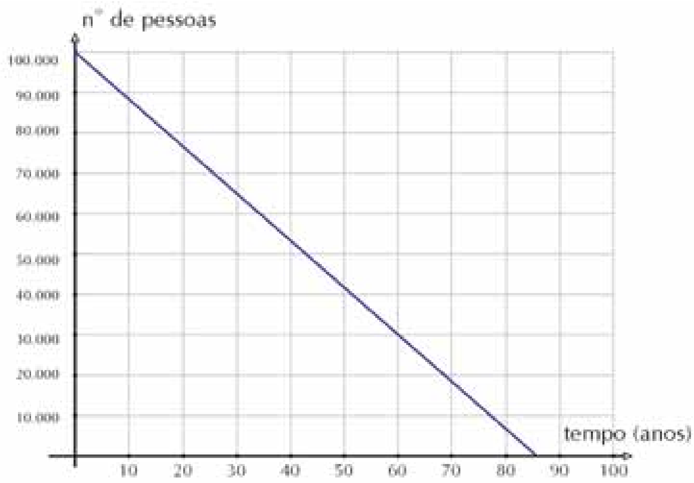


Gráfico 6

Logo, taxa de variação negativa → função está decrescendo.

Já se a taxa de variação fosse positiva, digamos 200 pessoas/ano, o número de pessoas estaria aumentando em 200 unidades a cada ano. A função estaria crescendo, e o gráfico seria uma reta com inclinação positiva:

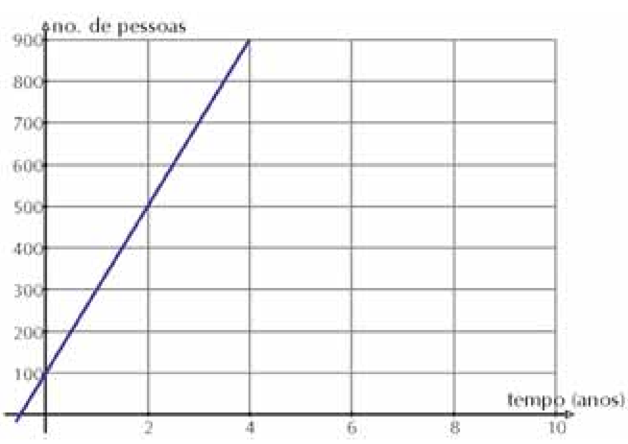


Gráfico 7

Logo, taxa de variação positiva → função está crescendo.

Articulando conhecimentos

Funções crescentes e funções decrescentes

Em uma função crescente, conforme a variável independente cresce, a variável dependente também cresce (gráfico 8):

Gráfico 8

Em uma função decrescente, conforme a variável independente cresce, a variável dependente decresce (gráfico 9):

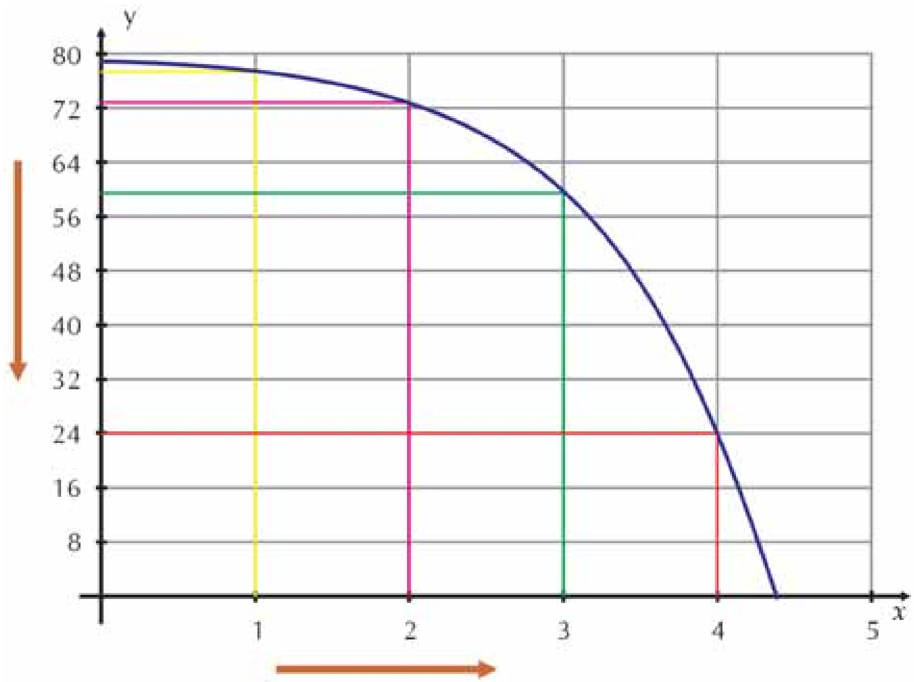


Gráfico 9

Atividade 9

Cada equação abaixo exprime uma função linear. Identifique, em cada uma, a taxa de variação e diga se ela é crescente ou decrescente.

a) $y = \frac{1}{3}x$

b) $y = 0{,}5x + 2$

c) $y = -3 - 25x$

d) $y = 5{,}3 + 6x$

e) $y = \frac{x}{2}$

f) $y = -10x - 65$

Atividade 10

Esboce gráficos para as funções lineares a seguir, prestando atenção apenas a dois fatores:

i) se a função é crescente ou decrescente (taxa de variação positiva e negativa, respectivamente);

ii) se a reta do gráfico cortará o eixo vertical acima ou abaixo do eixo horizontal, ou na origem (coeficiente linear positivo, negativo ou zero, respectivamente).

a) $y = \frac{x}{10}$

b) $y = -3 - 8x$

c) $y = 5{,}3 + 6x$

d) $y = 10x - 65$

e) $y = -6{,}2 + 3{,}1x$

f) $y = 4x$

Atividade 11

Relacione os gráficos da figura 3 com as equações abaixo:

a) y = $-3x$

b) y = $0{,}5 + 6x$

c) y = $18{,}3 - 0{,}1x$

d) y = $0{,}2x - 15{,}2$

e) y = $x/5$

f) y = $-6{,}2 - 3{,}1x$

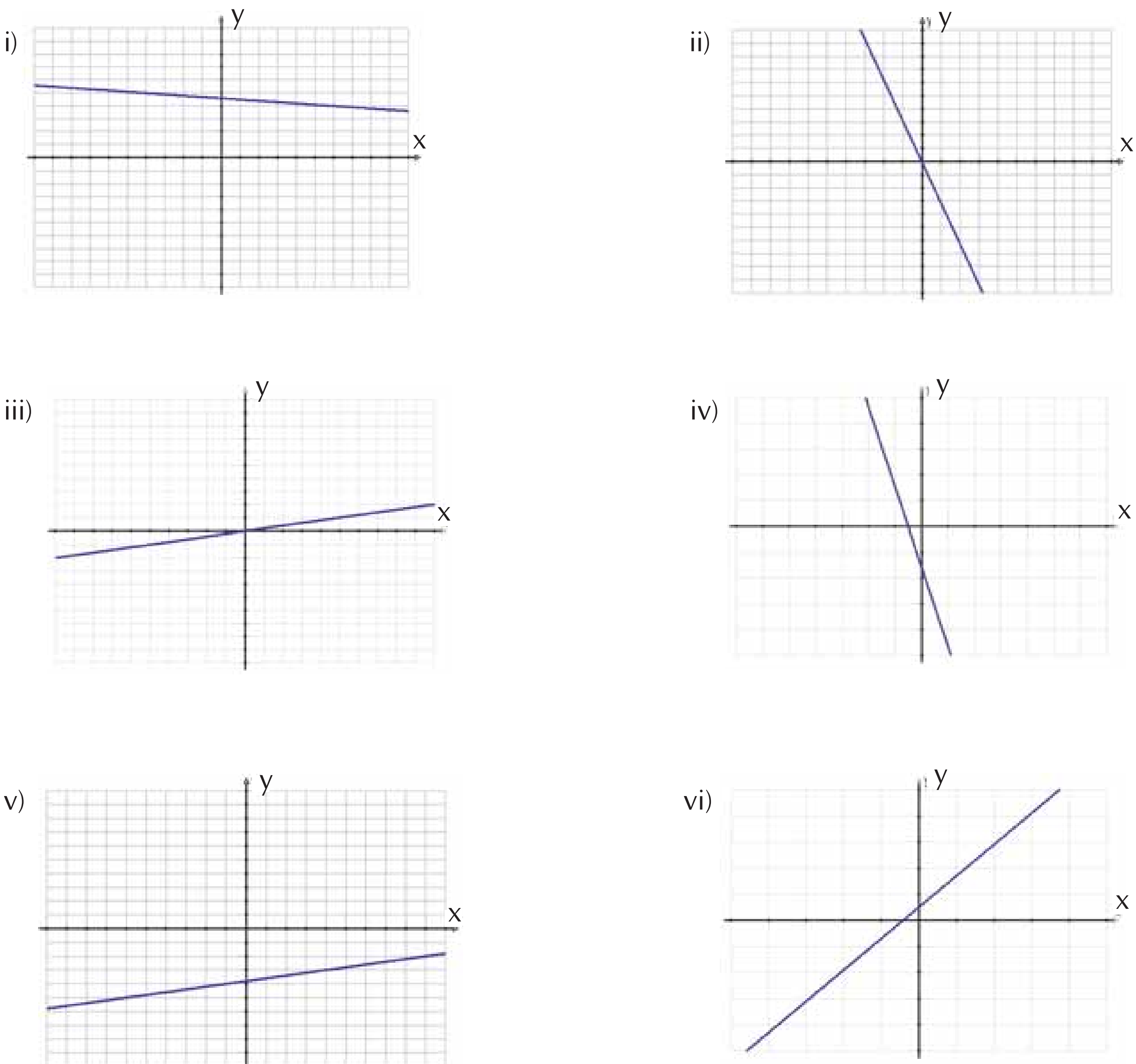


Figura 3

O valor do dinheiro ao longo do tempo

Na seção "Integrando a matemática ao mundo real: A expectativa de vida e a determinação de preços de seguros" mencionamos que, se um contratante de seguro demora muitos anos para falecer, durante esse tempo o prêmio pago por ele à seguradora rende juros e a seguradora tem ganho.

O princípio básico da matemática financeira é que o dinheiro tem seu valor no tempo: uma certa quantia de dinheiro na mão hoje vale mais que a mesma quantia de dinheiro no futuro.

Princípio básico da matemática financeira: uma quantia de dinheiro disponível hoje vale mais que a mesma quantia a ser disponível só no futuro.

Para saber quanto valerá no futuro uma quantia de dinheiro que você tem hoje, é necessário que você saiba **capitalizar**, isto é, aplicar uma **taxa de juros** a um **valor presente** por um certo período de tempo.

Da mesma forma, para saber a quanto seria equivalente, hoje, uma quantia que você só vai receber no futuro, é necessário que você saiba **descapitalizar**, ou seja, trazer quantias de dinheiro que você receberá ou pagará no futuro para o equivalente no presente.

Taxa de juros: é o índice que determina o rendimento de um capital num determinado período de tempo.

Pode ser apresentada de duas formas: percentual ou unitária.

Exemplos de taxas percentuais: 12% ao mês, 20 % ao semestre, 34% ao ano.

Agora as mesmas taxas, na forma unitária: 0,12 ao mês; 0,2 ao semestre; 0,34 ao ano. Ou seja, a forma unitária já traz a divisão por cem: $12\% = \frac{12}{100} = 0{,}12$.

Valor presente ou **Capital inicial**: É o valor do capital hoje, no presente.

Valor futuro ou **Montante**: É o capital inicial acrescido dos rendimentos obtidos durante o período de incidência de juros.

Valor futuro = valor presente + rendimentos

Rendimentos: São a remuneração que se dá a um capital pelo tempo em que ele fica aplicado. São os famosos juros.

Juros Simples

Quando o dinheiro é aplicado a juros simples, os juros incidem somente sobre a quantidade inicial de dinheiro (capital inicial). Por exemplo, se temos 100 reais aplicados à taxa de juros de 3% ao mês, os 3% incidirão, a cada mês, apenas sobre os 100 reais iniciais. E esses 100 reais "crescerão" da seguinte forma (tabela 5):

Tempo (em meses)	Valor (em reais)
0	100
1	100 + (3% de 100) = 103
2	103 + (3% de 100) = 106
3	106 + (3% de 100) = 109

Tabela 5

Na tabela 5 vemos que, sempre que o tempo aumenta em 1 mês, o valor aumenta em 3 reais.

Se calcularmos a taxa de variação, veremos que ela é constante:

$$\frac{\text{variação no valor}}{\text{variação no tempo}} = \frac{3}{1} = 3 \quad \text{reais/mês}$$

O crescimento do valor do dinheiro no sistema de juros simples é linear!

Articulando conhecimentos: juros simples e funções lineares

No sistema de juros simples, o valor em dinheiro cresce linearmente.

A taxa de variação de uma quantia no sistema de juros simples é a taxa de juros aplicada ao capital inicial.

Por exemplo:

Um capital inicial de R$200,00, aplicado no sistema de juros simples com uma taxa de 3% ao mês, valerá, daqui a x meses: $y=200+6x$

Você pode verificar que, na fórmula acima,

a) A taxa de variação é a taxa de juros (3%) aplicada ao capital inicial (R$200,00):

$$\frac{3}{100} \times 200 = 6$$

b) O coeficiente linear é o valor do capital inicial (R$200,00):

Atividade 12

Se cobrarmos juros simples de 2% ao mês sobre R$250,00, quanto teremos após 5 meses?

Crescimento exponencial

Considere os dados populacionais mostrados na tabela 6. Para observar como a população está crescendo, compute a variação da população na terceira coluna.

Ano	População	Variação da população (milhões)
1990	53.400.000	–
1991	56.604.000	
1992	60.000.240	
1993	63.600.250	
1994	67.416.270	
1995	71.461.250	

Tabela 6

Se a população estivesse crescendo linearmente em função do tempo, os números da terceira coluna seriam iguais. No entanto, as populações costumam crescer mais depressa à medida que ficam maiores, pois há mais indivíduos para se reproduzirem.

Se dividirmos a população de cada ano pela população do ano anterior vamos notar que o **fator de crescimento** da população se mantém praticamente constante. Utilizando duas casas decimais, teremos (tabela 7):

Ano	População	Variação da população (milhões)
1990	53.400.000	–
1991	56.604.000	1,06
1992	60.000.240	1,06
1993	63.600.250	1,06
1994	67.416.270	1,06
1995	71.461.250	1,06

Tabela 7

Sempre que se tem fator de crescimento constante, tem-se crescimento exponencial.

O **fator de crescimento** é o número pelo qual temos que multiplicar o valor de uma variável dependente para obtermos a variação correspondente ao acréscimo de uma unidade na variável independente.

Por exemplo, na tabela 7, cada vez que a variável "Ano" aumenta 1 unidade, a variável "População" é multiplicada por 1,06 (cresce pelo fator 1,06).

No crescimento exponencial, o fator de crescimento é constante.

Juros compostos

Quando o dinheiro é aplicado a juros compostos, os juros obtidos a cada novo período são incorporados ao capital, formando um novo montante que passará a participar da geração de juros no período seguinte (conforme vimos na Unidade 4 do TP 1). Dessa forma, os juros incidem não apenas sobre o capital inicial, mas também sobre os juros que vão sendo acumulados. Por exemplo, se temos 100 reais aplicados à taxa de juros de 3% ao mês, esses 100 reais crescem da seguinte forma (tabela 8):

Tempo (em meses)	Valor (em reais)
0	100
1	100 + (3% de 100) = 103
2	103 + (3% de 103) = 106,09
3	106,09 + (3% de 106,09) = 109,27

Tabela 8

Se dividirmos o valor de um mês pelo valor do mês anterior, vemos que o fator de crescimento é de 1,03 (tabela 9):

Tempo (em meses)	Valor (em reais)
0	$100\ (1{,}03)^0$
1	$100\ (1{,}03)^1$
2	$100\ (1{,}03)^2$
3	$100\ (1{,}03)^3$

Tabela 9

Esse número (1 + taxa) pelo qual devemos multiplicar um valor para obter o valor do período seguinte é chamado fator de capitalização.

Articulando conhecimentos: Juros compostos e funções exponenciais

No sistema de juros compostos, o valor em dinheiro cresce exponencialmente. O **fator de crescimento** da função exponencial é o equivalente, no contexto dos juros compostos, ao **fator de capitalização**.

A operação de multiplicar uma quantia de dinheiro pelo fator de capitalização sucessivas vezes para saber seu valor em períodos futuros se chama **capitalizar**.

Do mesmo modo, para saber a quanto equivale hoje uma quantia de dinheiro futura, devemos fazer a operação inversa, isto é, dividir pelo fator de capitalização sucessivas vezes. Essa operação se chama **descapitalizar**.

Na atividade 2 da situação-problema desta unidade você teve que descapitalizar o valor de R$1.997.000,00 por um período (um ano), considerando uma taxa de 10% ao ano. O resultado foi:

$$x = \frac{R\$1.997.000,00}{\left(1+\frac{10}{100}\right)} = R\$1.815.454,55$$

Agora vamos ver como faríamos para descapitalizar por períodos maiores.

A que valor equivaleria hoje uma quantia de R$1.000,00 a ser recebida daqui a 4 meses, considerando a taxa de juros de 3% ao mês?

Em outras palavras, que quantia de dinheiro x, ao render 3% ao mês no sistema de juros compostos por 4 meses, resultaria em R$1.000,00?

$$\rightarrow \quad x\left(1+\frac{3}{100}\right)^4 = R\$1.000,00$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{R\$1.000,00}{\left(1+\frac{3}{100}\right)^4} = R\$888,49$$

Veja que isso equivale a dividir R$1.000,00 pelo fator de capitalização quatro vezes, cada uma correspondendo a um período de um mês.

Atividade 13

a) Se cobrarmos juros de 2% ao mês sobre R$250,00 no sistema de juros compostos, quanto teremos após 5 meses?

b) Qual a diferença entre esse valor e o que você encontrou na atividade 12, em que a mesma taxa de juros foi aplicada ao mesmo capital pelos mesmos 5 meses, mas no sistema de juros simples?

c) Qual seria essa diferença entre os dois sistemas, se o período de tempo de aplicação for de 10 meses?

O gráfico 10 mostra como o valor de R$250,00 aumenta, nos dois sistemas. A linha verde mostra o sistema de juros compostos, e a linha azul mostra o sistema de juros simples. Observe que, apesar de no início a diferença ser pequena, esta cresce rapidamente conforme o tempo passa.

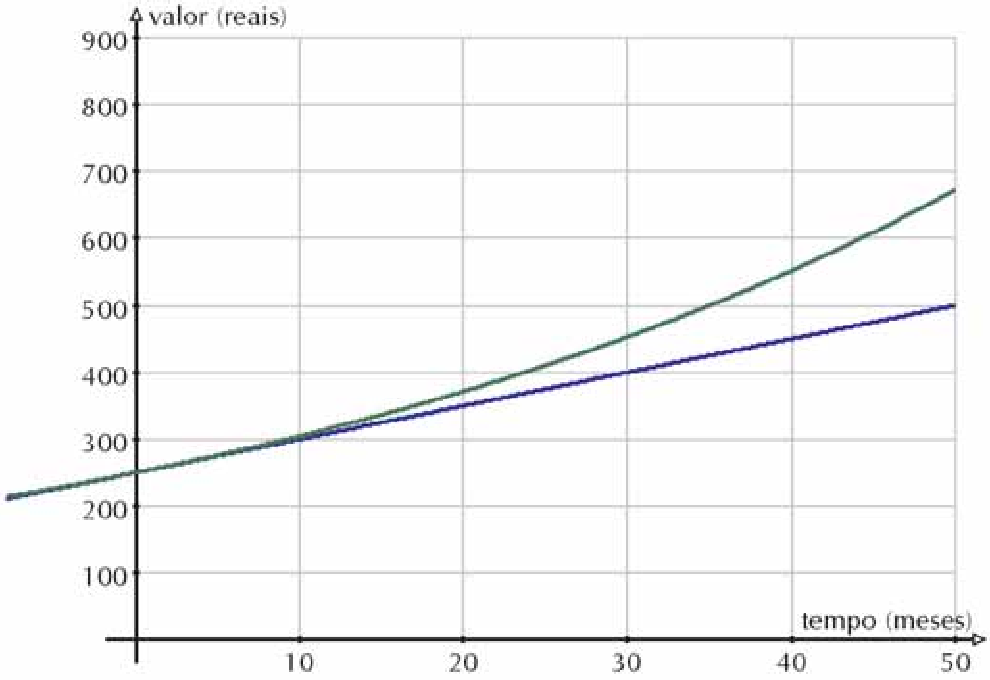


Gráfico 10

Atividade 14

Estamos no mês de julho e esperamos receber R$500,00 de 13º salário no mês de novembro. Considerando que a taxa de juros atual é de 3,3% ao mês, a quanto essa quantia equivaleria hoje?

Valor esperado

Digamos que você vá fazer o seguinte jogo de “cara ou coroa”:

- Você paga 1 real para jogar.
- O jogo é feito com duas moedas.
- Se as duas caírem em “cara”, você recebe 50 centavos (então sai perdendo 50 centavos, pois pagou 1 real para jogar).
- Se sair “uma cara e uma coroa”, você recebe 1 real (então não sai ganhando nem perdendo).
- Se saírem “duas coroas”, você recebe 2 reais (sai ganhando 1 real).

O valor esperado é o valor que você espera ganhar, em média, após um número bem grande de jogadas.

Não é o valor que você espera ganhar em 1 jogada. Mais uma vez estamos usando a idéia de um grande número de repetições!

Vamos supor que você faça esse jogo 1.000 vezes. Vamos ver quanto você pode esperar ganhar no total para estes 1.000 jogos, e depois computar a média ganha ou perdida por jogo.

Vimos na Unidade 7 deste caderno que as probabilidades, quando jogamos duas moedas, são as seguintes:

- Probabilidade de obter “duas caras”: 1/4.
- Probabilidade de obter “uma cara e uma coroa”: 1/2.
- Probabilidade de obter “duas coroas”: 1/4.

O que significa isto?

Que esperamos obter “duas caras” 1/4 das vezes em que jogamos, “duas coroas” em 1/4 das vezes, e “uma cara e uma coroa” em metade das jogadas.

Agora, vamos ao cálculo do valor esperado.

1) Qual vai ser o custo de jogar 1.000 vezes? 1 mil reais, pois cada jogada custa 1 real.

2) Qual vai ser o ganho com as jogadas nas quais sai “duas caras”?

Esperamos obter “duas caras” em 1/4 das jogadas, isto é, em 250 jogadas. Em cada uma, ganharíamos 50 centavos. Então, no total ganharíamos 125 reais.

3) Qual vai ser o ganho com as jogadas nas quais sai “1 cara e 1 coroa”?

Esperamos obter “uma cara e uma coroa” em 1/2 das jogadas, isto é, em 500 jogadas. Em cada uma, ganharíamos 1 real. Então, no total ganharíamos 500 reais.

4) Qual vai ser o ganho com as jogadas nas quais sai “duas coroas”?

Esperamos obter “duas coroas” em 1/4 das jogadas, isto é, em 250 jogadas. Em cada uma, ganharíamos 2 reais. Então, no total ganharíamos 500 reais.

No total:

Você pagou 1.000 reais para fazer o jogo 1.000 vezes, e recebeu 125, mais 500 mais 500 reais, isto é, 1.125 reais. Então o ganho total foi de 125 reais (tirando os 1.000 que você pagou para jogar).

O valor esperado é a média que você poderia esperar por jogo, ou seja, $\frac{125}{1000}$, que é igual a 0,125; ou 12,5 centavos por jogada.

Para saber mais – Generalização do cálculo de valor esperado

Vamos generalizar o raciocínio seguido no exemplo acima, para encontrar uma fórmula para o valor esperado.

No exemplo acima, fizemos uma lista de todos os valores que você poderia ganhar em uma jogada: $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$. Depois fizemos uma lista da fração das vezes que esperamos que o jogo produza os valores $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$. Vamos chamá-los agora de $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, respectivamente (Por exemplo, p_1 foi 1/4 porque esperávamos obter o valor v_1 em 1/4 das jogadas).

Então calculamos o valor que você esperaria ganhar em x jogadas, da seguinte forma:

$$v_1 p_1 x + v_2 p_2 x + \ldots + v_n p_n x$$

Para saber a média ganha por jogada (valor esperado), dividimos tudo pelo número de jogadas, x:

$$\frac{v_1 p_1 x + v_2 p_2 x + \ldots + v_n p_n x}{x}$$

No exemplo que fizemos, utilizamos x = 1.000, pois supusemos 1.000 jogadas. Mas, pela fórmula acima, você pode ver que podemos dividir o numerador e o denominador da fração por x (ou seja, "cancelar" o x), ficando com:

$$\textit{valor esperado} = v_1 p_1 + v_2 p_2 + \ldots + v_n p_n$$

E aí vemos que o valor esperado não depende de x, o número de jogadas. Ele será sempre:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i p_i = v_1 p_1 + v_2 p_2 + \ldots + v_n p_n$$

em que cada v_i é um valor que se espera ganhar ou perder, e p_i é a probabilidade de ganhar ou perder aquele valor.

Atividade 15

Uma instituição vende bilhetes de rifas por R$5,00 cada um. Há 10 prêmios no valor de R$25,00 e um prêmio maior no valor de R$100,00. Se forem vendidos 200 bilhetes e você comprar um deles, qual a sua expectativa em relação ao sorteio?

Para facilitar seus cálculos, utilize a tabela 10.

Valores que você pode ganhar	**Probabilidade de ganho**	**Produto: valor x probabilidade**
0	189/200	
25	10/200	
100	1/200	
Valor esperado (soma):		

Tabela 10

Subtraindo esse valor dos 5 reais que você tem que pagar pela rifa, na verdade sua expectativa é de perda!

Resumindo

- Em uma situação de incerteza, o valor esperado é o valor que ganharíamos ou perderíamos, em média, se repetíssemos aquela situação um grande número de vezes. É dado pelo somatório do produto dos valores que se pode ganhar ou perder por suas probabilidades de ocorrência respectivas.

- Em funções lineares, variações iguais na variável independente provocam variações iguais na variável dependente.

- Os gráficos de funções lineares são retas.

- A equação das funções lineares são da forma $y=ax+b$, em que x é a variável independente, y é a variável dependente, a é a taxa de variação e b é o valor de y quando $x=0$. Em termos gráficos, a é a inclinação da reta do gráfico e b é o local onde a reta do gráfico corta o eixo vertical.

- No crescimento exponencial, o fator de crescimento é constante.

- No sistema de juros simples, o valor do dinheiro cresce linearmente. No sistema de juros compostos, o valor do dinheiro cresce exponencialmente.

Seção 3

Transposição didática

Objetivo da seção

Ao final desta seção esperamos que você possa:

• Formular atividades nas quais seus alunos reconheçam a interdependência linear entre duas variáveis em situações significativas para eles;

• Proporcionar experiências concretas a seus alunos para que eles fortaleçam suas intuições sobre probabilidade e valor esperado.

Para trabalhar com a situação-problema desta unidade, você precisou de vários conceitos matemáticos: probabilidade, valor esperado, juros compostos, funções lineares.

Na seção 2 examinamos mais detalhadamente esses conceitos. É preciso que você esteja bem por dentro deles.

Mas, e na sala de aula, como você pode trabalhar esses conceitos?

Crescimento linear

O crescimento linear é um tipo de interdependência entre variáveis que acontece em várias situações da vida real. É importante você levar seus alunos a observar esse tipo de relação entre variáveis, conceitualmente e graficamente.

Você pode pedir a seus alunos que usem variáveis para expressar a relação com uma fórmula. Eles conseguem fazer isso examinando as características da situação real em que a função ocorre. Sem precisar saber o que é "taxa de variação", "tangente", ou outras formalidades. Esses conceitos são apropriados para que você, professor, saiba mais a fundo as características da função linear.

Para seus alunos, procure situações em que haja crescimento linear e que façam parte do dia-a-dia deles.

Peça para eles construírem tabelas com alguns valores da variável em questão; peça também para eles construírem gráficos com esses valores.

Para chamar a atenção dos alunos para as características do gráfico da função linear que exploramos na seção 2, mude a equação, ou a situação-problema, em apenas um dos parâmetros. Por exemplo, se a equação for $y = ax+b$, mude apenas o "a" ou apenas o "b", peça para eles construírem gráficos e ver o que acontece. É importante que os alunos descubram esses padrões por si próprios. Isso vai ter muito mais significado e será muito mais gratificante para eles do que se você simplesmente der-lhes os fatos e pedir-lhes para aprenderem ou memorizarem.

As atividades a seguir são um exemplo de como você pode trabalhar funções lineares com seus alunos.

Atividade 16

1. Uma turma da 6ª série foi para a biblioteca e cada aluno pegou 3 livros. Encontre uma equação que relacione o número de alunos (x) com o número de livros (y):

2. Um parque de diversões cobra 5 reais na entrada mais 1 real por brinquedo que você usar. Encontre uma equação que relacione o número de brinquedos que você usar (x) com o gasto que você terá (y):

3. Você brincou com seu colega menor de medir o tamanho de suas passadas. Vocês viram que cada passada sua equivale a três passadas dele. Encontre uma equação que relacione o número de passadas de seu colega (x) com o número correspondente de passadas suas (y):

Atividade 17

Sua escola e uma igreja de sua cidade resolveram fazer suas festas juninas logo na mesma noite! Para decidir em qual delas você e seus colegas vão, vocês resolveram analisar o preço da entrada e das barraquinhas de pescaria, porque vocês pretendem pescar várias vezes.

O preço da entrada da festa da igreja é 3 reais, e o da pescaria é 1 real.

Já o preço da entrada da festa da escola é 1 real, e o da pescaria é 1 real e 50 centavos.

1. Quanto você vai gastar na festa da igreja se você for à pescaria 3 vezes? E na festa da escola?

2. E se você for à pescaria cinco vezes, quanto você gastaria em cada festa?

3. Preencha as tabelas 11 e 12:

FESTA DA IGREJA							
Nº de idas à pescaria	0	1	2	3	4	5	6
Gasto							

Tabela 11

FESTA DA ESCOLA							
Nº de idas à pescaria	0	1	2	3	4	5	6
Gasto							

Tabela 12

4. Encontre duas equações: uma que relacione o gasto de cada criança com o número de vezes que ela usou a barraca da pescaria na festa da igreja, e outra que faça a mesma coisa para a festa da escola.

5. Coloque em um plano cartesiano os dados de suas tabelas. No eixo horizontal, coloque o número de vezes que você poderá pescar, e no eixo vertical, o gasto correspondente. Faça um gráfico para a festa da igreja e outro para a festa da escola.

6. Faça novos gráficos da festa da igreja supondo que o preço da entrada passe de 3 reais para:

a) 2 reais

b) 1 real

c) 5 reais

Faça todos os gráficos em um mesmo sistema de coordenadas! O que você observou? Qual foi a diferença entre os gráficos?

7. Faça novos gráficos da festa da igreja supondo que o preço da pescaria passe de 1 real para:

a) 2 reais

b) 3 reais

c) 5 reais

Faça todos os gráficos em um mesmo sistema de coordenadas! O que você observou? Qual foi a diferença entre os gráficos?

8. Até quantas idas à pescaria compensa ir à festa da escola, e a partir de quantas idas à pescaria compensa ir à festa da igreja?

Professor,

Esta pergunta 8 pode ser respondida por meio de um sistema de equações, mas os alunos que ainda não têm esse conhecimento podem buscar suas próprias estratégias para responder a essa pergunta. Um meio de ajudá-los é pedir que eles coloquem os dois gráficos, o da festa da igreja e o da festa da escola, e ver com quantas idas à pescaria gastaríamos o mesmo nas duas festas (ponto onde os dois gráficos se interceptam). Outro modo que eles podem encontrar de responder a essa pergunta é simplesmente experimentando com diferentes números de idas à pescaria e vendo qual foi o gasto correspondente.

Crescimento exponencial

Para que os alunos apreciem melhor o crescimento linear, é importante que eles contrastem esse tipo de interdependência entre variáveis com outros que não são lineares. O crescimento exponencial é um exemplo. Juros simples e compostos proporcionam um contexto no qual você pode explorar crescimento linear (juros simples) e crescimento exponencial (juros compostos).

Valor esperado

O que seus alunos podem aprender sobre valor esperado?

Que o valor esperado é o valor que se obtém, em média, após um grande número de repetições de uma situação.

Não é adequado, de 5ª a 8ª séries, preocupar-se com a fórmula para o valor esperado.

Mas para aprender que o valor esperado é o valor que se obtém, em média, após um grande número de repetições de uma situação, problemas que usam o conceito de valor esperado podem ser feitos com seus alunos **experimentalmente**.

Assim como na Unidade 7 deste Caderno usamos modelos de situações concretas para calcular probabilidades experimentais, que aproximam as probabilidades teóricas, podemos calcular o valor esperado experimentalmente usando um grande número de repetições de um experimento. Esse valor irá aproximar o valor esperado teórico, que é calculado como fizemos na seção 2.

A atividade 18 é um exemplo de atividade que pode ser feita com seus alunos experimentalmente.

O cálculo do valor teórico nesta atividade está acima do nível de 5ª a 8ª séries. Mas a atividade é boa para os alunos aprenderem que, em problemas que envolvem probabilidades, e, em particular, em problemas que procuram descobrir qual é o valor esperado, eles podem obter resultados experimentalmente, se encontrarem um modo de "imitar" a situação-problema por meio de um modelo.

E a atividade feita experimentalmente serve também para eles aprenderem que o valor esperado é o valor que se pode esperar após um grande número de repetições.

Atividade 18

Suponha que um chocolate venha com figurinhas dentro. Há 6 tipos de figurinhas, e queremos colecionar todas elas. Quantos chocolates você acha que teremos que comprar, para que saiam todos os tipos de figurinhas? Você não pode ir à loja e comprar um monte de chocolates de uma vez só. É muito caro!

Vamos usar um dado, papel e lápis, para imitar essa situação. Assim, não teremos que gastar todo nosso dinheiro comprando chocolates.

São 6 figurinhas diferentes. Então podemos fingir que cada número do dado é uma figurinha (o dado tem 6 números, não tem?). Vamos jogar o dado várias vezes e ver quantas jogadas são necessárias para conseguir todos os números.

É claro que, como isso depende de sorte, o resultado vai variar. Então vamos repetir a jogada muitas vezes – 20 vezes – e ver qual foi a média dos resultados.

Vamos dar um exemplo do que vamos fazer. Vamos rolar o dado e ir anotando, com marquinhas em uma lista, os resultados. Por exemplo, se rolarmos o dado uma vez e conseguirmos o número 4, fazemos uma marquinha em uma tabela como a tabela 13.

Vamos repetindo o processo até que todos os números tenham sido obtidos. Aí somamos o total de marquinhas para ver quantas jogadas foram necessárias.

	Número 1	**Número 2**	**Número 3**	**Número 4**	**Número 5**	**Número 6**	**Total jogadas**
Repetição 1							
Repetição 2							
Repetição 3							
Repetição 4							
Repetição 5							
Repetição 6							
Repetição 7							
Repetição 8							
Repetição 9							
Repetição 10							
Repetição 11							
Repetição 12							
Repetição 13							
Repetição 14							
Repetição 15							
Repetição 16							
Repetição 17							
Repetição 18							
Repetição 19							
Repetição 20							
Média (o número de chocolates que uma pessoa tem que comprar, em média, para conseguir as 6 figurinhas.)							Obs.: soma dos valores da coluna dividida por 20

Tabela 13

Quando tiver repetido o processo 20 vezes, ache a média dos valores e coloque-a na última linha da tabela. O número de chocolates que uma pessoa tem que comprar, em média, para conseguir as 6 figurinhas é obtido somando-se todos os valores e dividindo-se pelo número de repetições – nesse caso, vinte.

Resumindo

Nesta seção você viu que é importante que os alunos façam experimentações para construir os conceitos estudados nesta unidade. Experimentando diferentes valores para a entrada na festa e para o preço da pescaria e observando o efeito que isso tem no gráfico da função, eles constróem em ação o papel dos parâmetros de uma função linear.

Você viu também um exemplo de simulação: um problema envolvendo figurinhas e a compra de chocolates foi simulado por lançamentos de um dado. Com a simulação podemos resolver uma série de problemas experimentalmente, sem precisar realizar um experimento de difícil execução, mas substituindo-o por outro experimento fácil de realizar em sala de aula.

Glossário de termos relacionados a seguros

Apólice: Documento-chave, cuja emissão é o último passo do estabelecimento do seguro. A emissão da apólice significa que a seguradora aceitou a cobertura de risco proposta pelo segurado.

Indenização: Valor pago pela seguradora ao segurado ou beneficiário – em dinheiro, restituição em espécie ou reembolso de despesas – quando o risco coberto pela apólice é efetivado.

Prêmio: É a remuneração paga pelo segurado para que o segurador assuma a responsabilidade dos seus riscos. É a fonte de receitas necessária à cobertura dos riscos da carteira de seguros da companhia. O valor do prêmio é calculado matematicamente, de acordo com a probabilidade de ocorrência de determinado sinistro, e pode ser pago à vista ou em parcelas. Além do prêmio, o segurado ainda pode ter outros gastos, como o pagamento de impostos e o custo da emissão da apólice.

Previdência Privada: Sistema composto por empresas do setor privado que tem como objetivo oferecer planos de seguro assemelhados aos da Previdência Social.

Seguridade Social: Sistema nacional de políticas públicas de proteção contra a exploração, a doença, o abandono e a impossibilidade do trabalho. É composta pela Previdência Social, a Saúde e a Assistência Social.

Seguro: Contrato em que o segurador se obriga a pagar ao segurado, mediante o recebimento de um prêmio, a indenização de um prejuízo. Existem seguros com cobertura de acidentes pessoais, de viagem, de veículos, residenciais e outros.

Sinistro: Evento que concretiza o risco previsto no contrato de seguro e que gera a indenização.

Leituras sugeridas

TINOCO, L.A.A. (coord.) *Construindo o conceito de função no 1. grau*. Rio de Janeiro: UFRJ/Instituto de Matemática/Projeto Fundão,1998.

Este livro é uma produção da equipe do Projeto Fundão. São apresentadas atividades com gráficos e articulações com geometria. Há comentários sobre a aplicação dessas atividades em sala de aula.

Na apresentação, são comentadas idéias gerais que nortearam a obra, como o histórico das funções, o que pensam alunos e professores sobre o ensino de funções; as idéias básicas , as formas de representação e os níveis de compreensão do conceito de função. São discutidos no livro os vários aspectos do conceito de função e as representações analítica, gráfica e verbal.

Bibliografia

NG, Ho Kuen. *Mortality Discount*. Module 699. UMAP, 1990.

PONTE, J. P. *Matemática e Realidade*: uma relação didáctica essencial. Actas do Prof-Mat 92. Lisboa, 1992. p. 13-24.

<http://www.estadao.com.br/ext/economia/financas/servicos/seguro.htm>

Texto de referência

Modelagem matemática

Ana Lúcia Braz Dias

Professor, na seção 2 desta unidade você teve uma breve introdução ao processo de modelagem. É provável também que você já tenha ouvido falar sobre esse tema em outras ocasiões, pois, além de a modelagem matemática ser usada na resolução de problemas das mais diversas áreas, a recriação da modelagem na sala de aula como metodologia de ensino é amplamente estudada em educação matemática. Alguns professores já a incorporam a suas práticas. Neste texto vamos explorar um pouco mais o assunto.

Como os professores vêm usando a modelagem em sala de aula?

Além de propor atividades nas quais os alunos realizem, eles próprios, a modelagem de problemas, alguns professores vêm propondo as seguintes atividades aos alunos:

a) analisar diferentes categorias de modelos, em termos das suas características matemáticas e das suas utilizações;

b) tomar consciência das características do processo de modelagem, em geral, e com base em exemplos concretos;

c) aplicar modelos conhecidos a situações novas;

d) modificar modelos previamente estabelecidos;

e) estudar as propriedades matemáticas de certos modelos (ou seja, tratar a matemática envolvida no modelo como objeto de estudo);

f) analisar a qualidade e justificar o uso de um modelo como forma de representar certa situação do mundo real.

Um exemplo de estudo de modelos já existentes

A discussão a seguir foi adaptada do artigo: *Matemática e Realidade: uma relação didáctica essencial*, de João Pedro da Ponte.

A forma como o autor aborda a modelagem pode ser classificada como a colocada no item (a) acima: a análise de diferentes categorias de modelos, em termos das suas características matemáticas e das suas utilizações. Ele se propõe a considerar o tema "processos de crescimento", e estudar a natureza dos modelos a ele associados. Ele procura mostrar como um certo número de"modelos-chave" descreve uma grande variedade de processos e situações.

Modelos de Crescimento

Crescimento Linear

Um problema que pode ser descrito por este modelo é o enchimento de uma piscina. Como uma piscina demora muito tempo para ser enchida, ao invés de ter que ficar de olho na altura da água à espera do momento de fechar a torneira, podemos usar o modelo linear para calcular quanto tempo vai ser necessário para encher a piscina.

As variáveis de interesse nesse problema são: o volume da piscina (v) e a quantidade de água que a torneira despeja por unidade de tempo (t).

Com um modelo linear, essas duas variáveis se relacionam obedecendo à equação: $y = v \times t$

Crescimento Quadrático

Este modelo pode ser aplicado ao cálculo do calor libertado pela passagem de uma corrente elétrica em um condutor.

Nesse modelo, a variável dependente varia cada vez mais depressa, segundo a lei $y = a \times t^2$

Crescimento Exponencial

Este tipo de crescimento ocorre, como já vimos, nas aplicações financeiras a juros compostos. Mas ocorre também em muitas outras situações, como no crescimento de populações. A equação que exprime essa relação é:

$y = e^{at}$

Crescimento Logístico

Neste caso o crescimento é parecido com o exponencial, mas é condicionado por um valor que corresponde ao máximo da capacidade, e que para simplificar podemos fazer igual a 1 (ou seja, pode-se imaginar que 1 representa 100% da capacidade).

Este modelo pode ser usado para simular o crescimento de uma população em um meio com capacidade limitada por razões de espaço ou recursos de sobrevivência. Se considerarmos y_n como o número de indivíduos existentes no momento n, a população crescerá de acordo com a seguinte lei:

$y_{n+1} = y_n - ay_n - ay_n^{\,2}$

Modelo Binomial

Este modelo serve para representar o que ocorre em algumas situações aleatórias que podem ser interpretadas como situações de crescimento. Por exemplo, na produção de uma peça de algum produto podem ocorrer, em um lote, peças defeituosas. Uma peça pode ser defeituosa ou não (dois resultados possíveis).

Se os defeitos ocorrem com probabilidade *p*, a probabilidade de uma peça não ser defeituosa é *1-p* (já que apenas esses dois resultados são possíveis). E o número de peças defeituosas em um lote cresce de acordo com uma lei probabilística.

A probabilidade de termos *k* peças defeituosas em um lote de *n* peças será:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Crescimento Logístico-Probabilístico

Finalmente, podemos combinar aspectos de alguns modelos em outro novo modelo. Por exemplo, podemos imaginar uma população que cresce de acordo com o modelo logístico, mas, na qual, de vez em quando, e com probabilidade p, ocorre um desastre que vitima metade do número de indivíduos existentes. Teremos assim: $y_{n+1} = y_n - ay_n - ay_n^2$, se não ocorrer o desastre $y_{n+1} = y_n/2$, em que y_n é o número de indivíduos existentes no momento n.

Uma aula envolvendo esses modelos pode estudar as características de cada um deles, usá-los para fazer previsões e aplicá-los a diferentes situações.

Uma observação sobre Resolução de Situações-Problema e Modelagem

A resolução de situações-problema tem semelhanças com o processo de modelagem matemática. Ambos envolvem a organização e interpretação de dados, a identificação ou criação de conceitos matemáticos que traduzam aspectos do mundo real, e a volta ao mundo real para a validação dos resultados.

Mas há também diferenças sutis: na modelagem geralmente são utilizados certos modelos matemáticos já conhecidos. Correndo o risco de sermos injustos na comparação, é como se, enquanto muitos alunos tentam resolver problemas rotineiros ou tradicionais procurando palavras-chave que indiquem processos de resolução adequados, a modelagem parece sempre determinar "qual é o modelo", dentre os modelos matemáticos mais conhecidos, que descreve de forma mais ou menos adequada uma situação.

Outra diferença fundamental é que a modelagem tem fins preditivos – objetiva possibilitar predições do comportamento do fenômeno modelado. É o caso, por exemplo, do estudo por modelagem matemática de uma epidemia. Ao final, ele deve prever as expectativas de seu desdobramento, número de pessoas e áreas a serem atingidas.

A modelagem pode ter também um caráter generativo – pode permitir imaginar novas propriedades ou aspectos de fenômenos anteriormente desconhecidos.

Por exemplo, quando Kepler propôs seu modelo para os movimentos dos planetas com base na Lei da Gravitação de Newton, as descrições desses movimentos ficaram tão precisas que permitiram a descoberta de novos planetas. Com aquele modelo, tornou-se possível observar a órbita de um planeta específico e calcular a influência da força gravitacional de todos os outros planetas conhecidos sobre aquele planeta considerado. As predições com base nesses cálculos, ou seja, com base no modelo, foram comparadas com as observações. Como havia discrepâncias entre as predições do modelo (usando para o cálculo apenas os planetas conhecidos) e os dados reais observados, chegou-se à conclusão de que deveria haver outros planetas, de determinada massa e em determinada órbita, para estarem causando aquela movimentação observada na realidade. Os planetas Urano, Netuno e Plutão foram descobertos dessa maneira.

As dificuldades mais comuns

Os obstáculos e dificuldades que podem surgir na realização pedagógica de experiências de modelagem não são poucos. Mas, também, são muitos os ganhos que se podem ter ao se realizarem atividades de modelagem com os alunos.

Uma dificuldade bem comum é que, geralmente, a modelagem e a resolução de problemas tornam as aulas mais exigentes e menos previsíveis do que as propostas tradicionais. Alguns alunos preferem tarefas rotineiras, que possam ser desempenhadas apenas seguindo um conjunto de regras.

Alguns professores têm receio também de não saberem conduzir a modelagem, por não estarem eles mesmos muito por dentro dos assuntos específicos do problema a ser modelado (por exemplo, problemas de biologia, engenharia, física). Muitos professores não se sentem à vontade para tratar problemas relacionados com áreas que eles próprios não estudaram, o que é natural. Mas, geralmente, esse problema pode ser vencido com a escolha de um problema simples e um esforço do professor em pesquisar e coletar informações sobre aquele problema, da mesma forma que esperamos que nossos alunos façam.

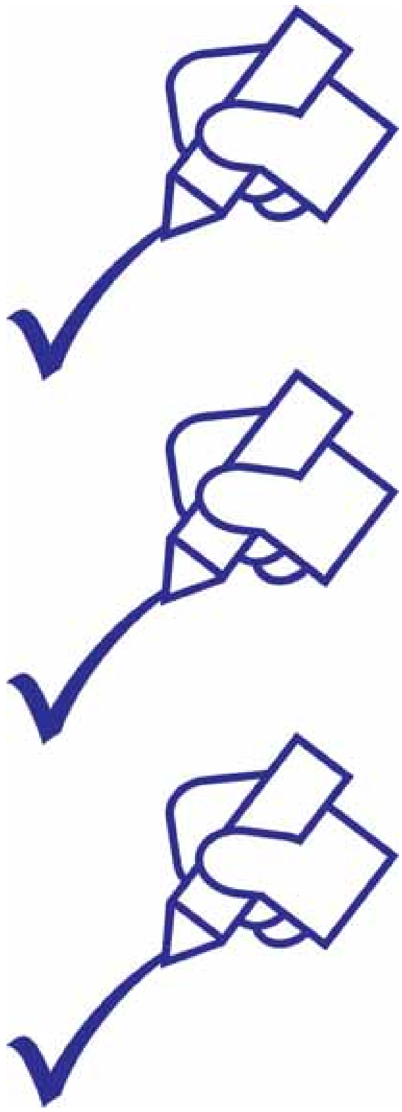
Outra dificuldade inicial dos professores está em não disporem de suficientes exemplos de atividades de modelagem. No entanto, o número de publicações sobre o uso de modelagem na sala de aula está aumentando, e depois de um certo tempo e quantidade de leitura fica bem mais fácil para o professor extrair, ele próprio, problemas de sua realidade, ou criar outros.

Atividades

1) Explique para um leitor leigo no assunto (você pode imaginar seus alunos como leitores) o que é um modelo.

2) Explique os dois aspectos que um modelo pode ter: preditivo e generativo.

Solução das atividades



Solução das atividades

Atividade 1

a) A seguradora espera ter que pagar R$100.000,00 a 10 pessoas, ou R$1.000.000,00, e espera receber R$300,00 de 9.990 pessoas, ou seja, R$2.997.000,00. Seu ganho total esperado é, então, R$2.997.000,00 - R$1.000.000,00 = R$1.997.000,00

b) Como a seguradora tem 10.000 segurados na faixa etária de 40 a 50 anos, o ganho médio por segurado será $\dfrac{R\$1.997.000,00}{10.000} = R\$199,70$

Atividade 2

O valor x procurado, mais 10% daquele valor x (que seriam os juros ganhos ao final do ano), terá que ser igual a R$1.997.000,00. Ou seja,

$$x + \frac{10}{100}x = R\$1.997.000,00$$

$$\rightarrow \quad x\left(1+\frac{10}{100}\right) = R\$1.997.000,00 \quad \rightarrow \quad x = \frac{R\$1.997.000,00}{\left(1+\frac{10}{100}\right)} = R\$1.815.454,55$$

Atividade 3

Quando x é 0, S(x) é igual a 100.000, pois ninguém tinha morrido ainda.

Quando x é 86, S(x) é igual a 0, pois estamos supondo que ninguém chegará à idade de 86 anos (De Moivre supôs isso).

De 0 a 86, x variou 86 unidades.

Quando x variou de 0 a 86, S(x) variou de 100.000 a 0, portanto, -100.000 unidades.

A taxa de variação nesta função é $\dfrac{\text{variação de } S(x)}{\text{variação de } x} = \dfrac{-100.000}{86}$

Atividade 4

A fórmula de funções lineares é do tipo y = ax+b.

No nosso caso, ao invés de y, chamamos nossa variável dependente de S(x), então a fórmula será: S(x) = ax+b.

Falta achar o "a" e o "b".

Podemos achar "a" e "b" fazendo um sistema de equações, colocando os dois pontos que sabemos fazer parte de nossa reta:

- quando x é 0, o valor de $S(x)$ será 100.000;
- quando x é 86, o valor de $S(x)$ será 0.

Substituindo essas informações na fórmula S(x) = ax+b, nosso sistema de equações fica: $\begin{cases} 100.000 = 0 + b \\ 0 = 86a + b \end{cases}$.

Resolvendo o sistema encontramos: $a = \frac{-100.000}{86}$ e b = 100.000.

O "a" é a taxa de variação que encontramos na atividade 3: $\frac{-100.000}{86}$. O "b" também pode ser achado olhando-se a altura na qual o gráfico toca o eixo vertical. No gráfico 2 vemos que esse valor é 100.000.

Atividade 5

a) Sim.

b) Uma variação de 1 talão na variável x ocasiona uma variação de R$0,50 no total pago, R. Então a taxa de variação é $\frac{0,50}{1} = 0,50$.

c) R = 0,50x + 3,00

Atividade 6

O valor do livro **não** cresce linearmente em função do tempo:

Ano	Valor (em US$)
2002	200
2022	400
2042	800
2062	1600

Cada vez que a variável "tempo" cresce 20 anos, a variável "valor do livro" **não** cresce quantidades iguais:

- De 2002 a 2022, o valor do livro aumentou 200 unidades.
- De 2022 a 2042, o valor do livro aumentou 400 unidades.
- De 2042 a 2062, o valor do livro aumentou 800 unidades.

Atividade 7

Esta fica a seu encargo.

Atividade 8

a) ii, b) ii

Atividade 9

Observe que a taxa de variação é sempre o coeficiente do termo que tem a variável dependente!

a) $y = \frac{1}{3}x$ → taxa de variação: 1/3 (positiva → função é crescente)

b) $y = 0,5\ x + 2$ → taxa de variação: 0,5 (positiva → função é crescente)

c) $y = -3 - 25x$ → taxa de variação: -25 (negativa → função é decrescente)

d) $y = 5,3 + 6x$ → taxa de variação: 6 (positiva → função é crescente)

e) $y = \frac{x}{2}$ → taxa de variação: 1/2 (positiva → função é crescente)

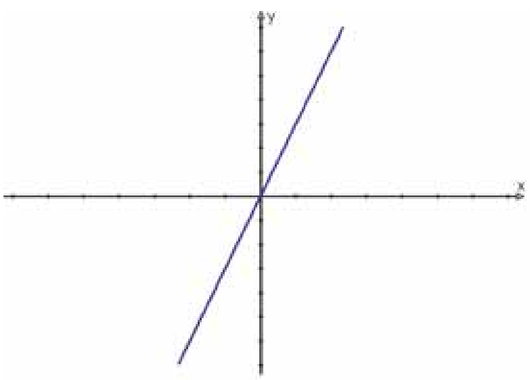
f) $y = -10x - 65$ → taxa de variação: -10 (negativa → função é decrescente)

Atividade 10

a) $y = \frac{x}{10}$

Taxa de variação	1/10 (positiva) → função é crescente
Coeficiente linear	zero → gráfico corta eixo vertical na origem

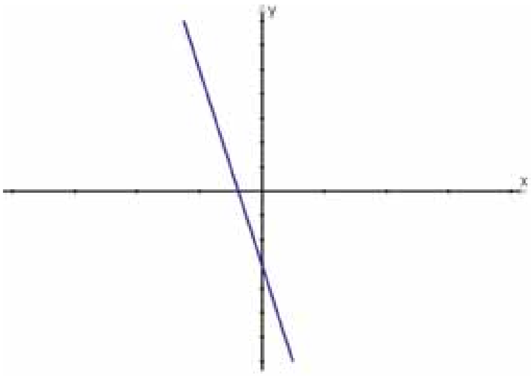
Esboço do gráfico:



b) y = - 3 - 8x

Taxa de variação	-8 (negativa) → função é decrescente
Coeficiente linear	-3 → (negativo) gráfico corta eixo vertical abaixo do eixo horizontal

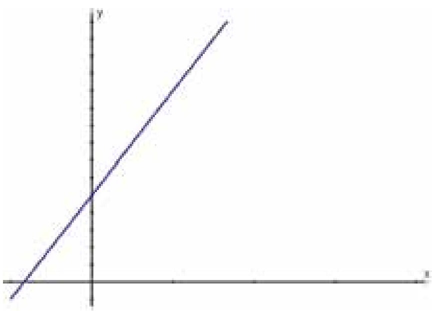
Esboço do gráfico:



c) y = 5,3 + 6x

Taxa de variação	6 (positiva) → função é crescente
Coeficiente linear	5,3 → (positivo) gráfico corta eixo vertical acima do eixo horizontal

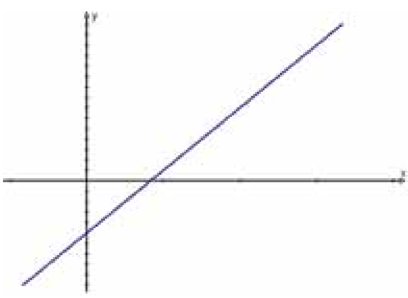
Esboço do gráfico:



d) y = 10x - 65

Taxa de variação	10 (positiva) → função é crescente
Coeficiente linear	-65 → (negativo) gráfico corta eixo vertical abaixo do eixo horizontal

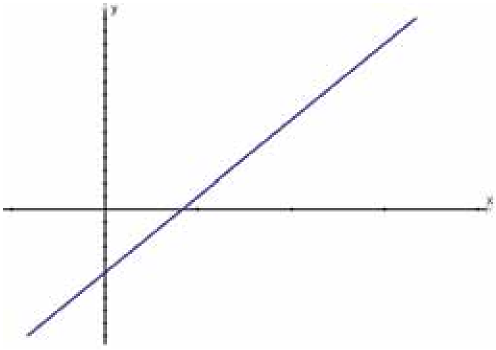
Esboço do gráfico:



e) y = - 6,2 + 3,1x

Taxa de variação	3,1 (positiva) → função é crescente
Coeficiente linear	-6,2 → (negativo) gráfico corta eixo vertical abaixo do eixo horizontal

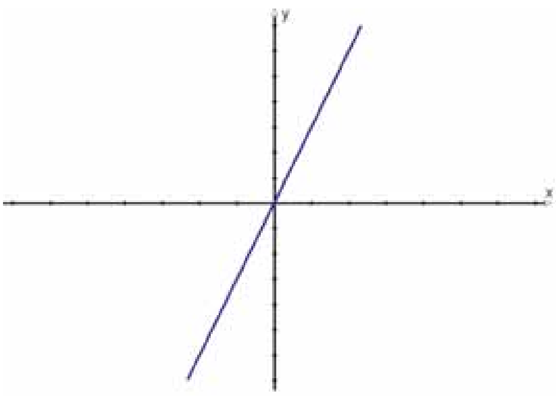
Esboço do gráfico:



f) y = 4x

Taxa de variação	4 (positiva) → função é crescente
Coeficiente linear	zero → gráfico corta eixo vertical na origem

Esboço do gráfico:



Atividade 11

a) ii, b) vi, c) i, d) v, e) iii, f) iv

Atividade 12

250+5(250x0,02) = 275 reais

Atividade 13

a) $250\ (1+0{,}02)^5 = 276{,}02$

b) $276{,}02 - 275 = R\$1{,}02$

c) juros simples: $250+10(250\text{x}0{,}02) = 300$ reais

juros compostos: $250\ (1+0{,}02)^{10} = 304{,}75$ reais

diferença: R$4,75

Atividade 14

De julho a novembro temos 4 meses.

O valor presente é $\dfrac{500}{(1+0{,}033)^4} = 439{,}1053 = R\$439{,}11$.

Atividade 15

Valores que você pode ganhar	Probabilidade de ganho	Produto: valor x probabilidade
0	189/200	0
25	10/200	250/200
100	1/200	100/200
valor esperado (soma):		**1,75**

Esse valor é o que você espera ganhar. Mas você paga R$5,00 pela rifa. Então, na verdade a expectativa é de perder R$3,25 (ou seja, 5-1,75).

Atividade 16

1. $y=3x$
2. $y=5+x$
3. $y=3x$

Atividade 17

O preço da entrada da festa da igreja é 3 reais, e o da pescaria é 1 real.

Já o da entrada da festa da escola é 1 real, e o da pescaria é 1 real e 50 centavos.

1. Na festa da igreja: R$6,00. Na festa da escola: R$5,50.
2. Na festa da igreja: R$8,00. Na festa da escola: R$8,50.

3.

FESTA DA IGREJA							
Nº de idas à pescaria	0	1	2	3	4	5	6
Gasto	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00

FESTA DA ESCOLA							
Nº de idas à pescaria	0	1	2	3	4	5	6
Gasto	1,00	2,50	4,00	5,50	7,00	8,50	10,00

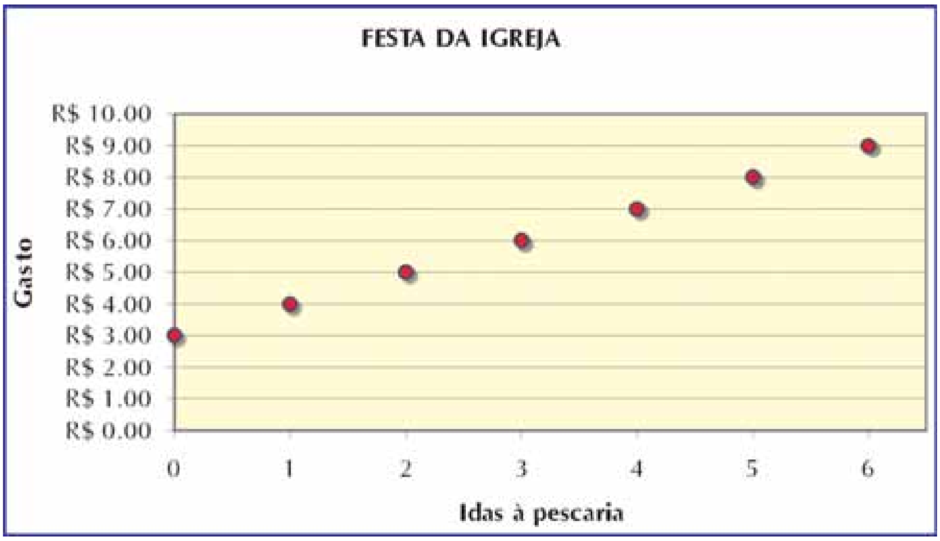
4.
y= gasto de cada criança

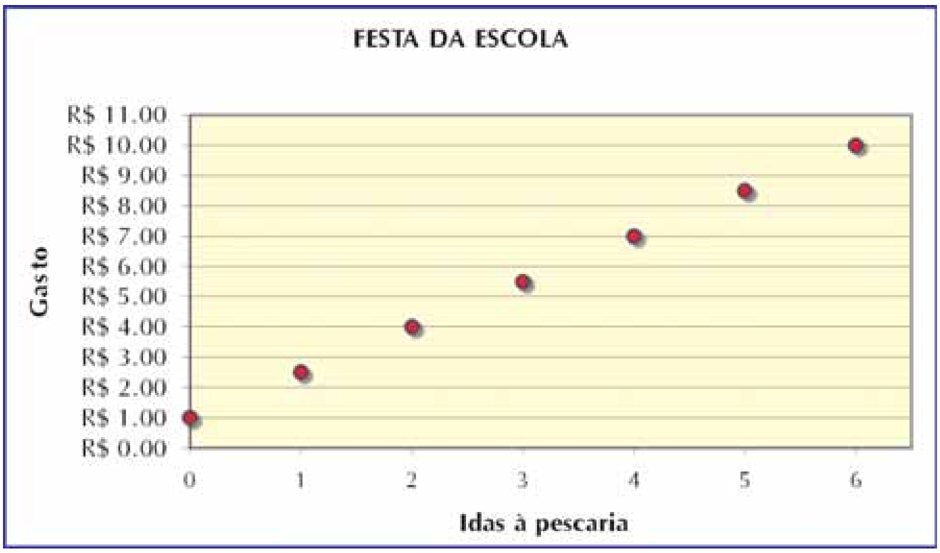
x = número de vezes que ela usou a barraca da pescaria

festa da igreja: $y=3+x$

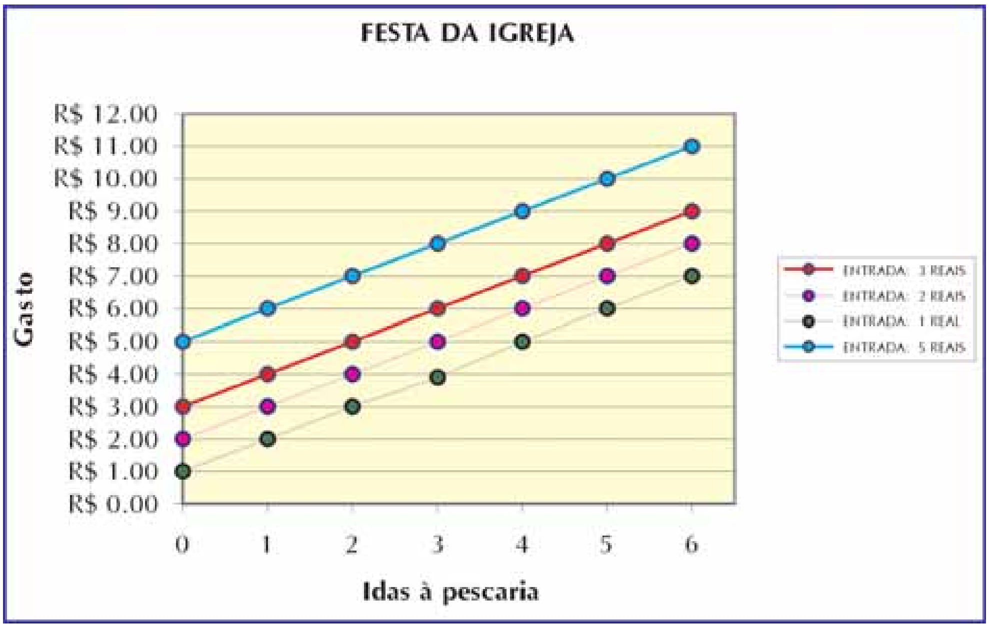
festa da escola: $y=1+1,50x$

5.



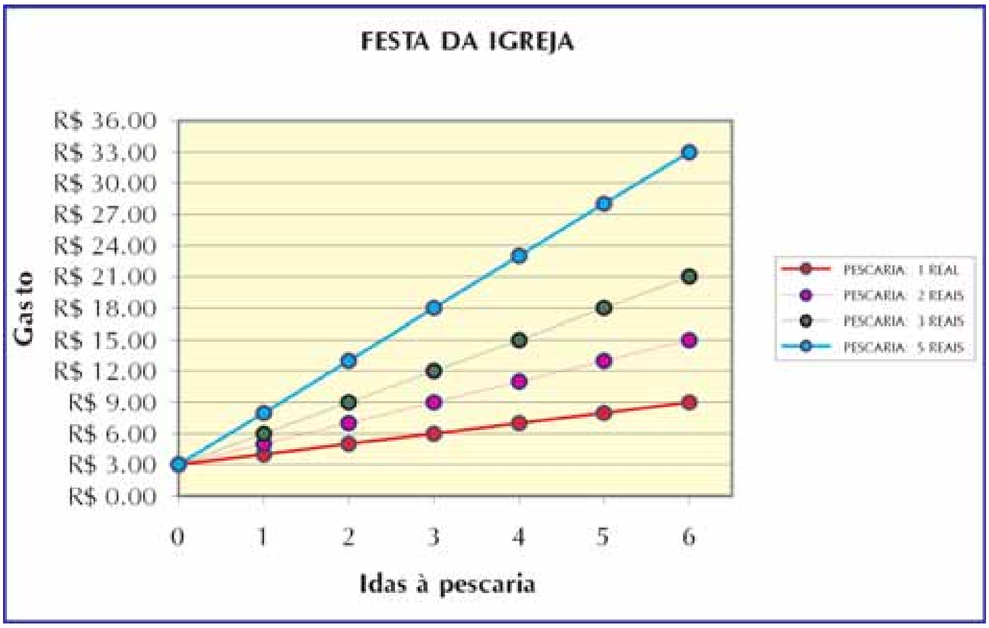


6.



Qual foi a diferença entre os gráficos? Eles tocam o eixo vertical em pontos diferentes.

7.



Qual foi a diferença entre os gráficos? Eles têm inclinações diferentes.

8. Até três idas à pescaria compensa ir à festa da escola. Com quatro idas à pescaria o gasto será o mesmo nas duas festas. A partir de cinco idas à pescaria compensa ir à festa da igreja.

PARTE II

TEORIA E PRÁTICA 2

Socializando o seu conhecimento e experiências de sala de aula

Socializando o seu conhecimento e experiências de sala de aula – unidade 6

Esse momento final tem por objetivo: 1) rever e sintetizar por escrito as principais idéias tratadas na unidade; 2) refletir sobre os desafios propostos na transposição didática, registrando-as por escrito; e 3) elaborar uma produção escrita a ser entregue ao Formador na próxima oficina, contendo produções dos seus alunos.

Para tanto, três tarefas devem ser preparadas para serem levadas à oficina e socializadas entre os colegas:

Tarefa 1

Uma síntese por escrito dos principais conceitos matemáticos trabalhados na unidade. Esse documento será para seu uso pessoal durante a oficina.

Tarefa 2

Uma listagem contendo: a) o ponto mais interessante, e b) duas das maiores dificuldades na realização do trabalho da proposta de transposição com seus alunos. Esse documento será um apoio seu para discussão da transposição didática na oficina. Essa lista é de seu uso pessoal para servir de apoio na socialização das experiências realizadas.

Tarefa 3

Essa tarefa é composta por três produções:

a) Aplique a pelo menos uma turma de alunos a atividade 11. Nessa atividade prevê-se a realização de ações que foram iniciadas em atividades anteriores. Não esqueça de realizá-las inicialmente. Você pode fazer as adaptações que julgar necessárias para o bom êxito da atividade atendendo às necessidades do grupo.

b) Para criar uma memória de sua produção, para seu uso futuro, a começar pela oficina: organize, registre e catalogue em uma pasta (ou similar) as produções mais significativas de alguns de seus alunos.

c) Procure escrever com suas próprias palavras aproximadamente dez linhas sobre a importância desta atividade para a aprendizagem matemática de seus alunos; comente fatos ocorridos em sala de aula e outros observados na produção dos alunos. **Esse material deve ser entregue ao seu Formador ao final da oficina.**

Socializando o seu conhecimento e experiências de sala de aula – unidade 8

Este momento final tem por objetivo: 1) rever e sintetizar por escrito as principais idéias tratadas na unidade; 2) refletir sobre os desafios propostos na transposição didática, registrando-as por escrito, e 3) elaborar uma produção escrita a ser entregue ao Formador na próxima oficina, contendo produções dos seus alunos.

Para tanto, três tarefas devem ser preparadas para serem levadas à oficina e socializadas entre os colegas:

Tarefa 1

Uma síntese por escrito dos principais conceitos matemáticos trabalhados na unidade. Esse documento será destinado a seu uso pessoal durante a oficina.

Tarefa 2

Uma listagem contendo: a) o ponto mais interessante, e b) duas das maiores dificuldades na realização do trabalho da proposta de transposição com seus alunos. Esse documento será um apoio seu para discussão da transposição didática na oficina. Essa lista é de seu uso pessoal para servir de apoio na socialização das experiências realizadas.

Tarefa 3

Esta tarefa é composta por três produções:

a) Aplique aos alunos a atividade 17. Você pode fazer as adaptações que julgar necessárias para o bom êxito da atividade atendendo às necessidades do grupo.

b) Organize, registre e catalogue em uma pasta (ou similar) as produções mais significativas de alguns de seus alunos.

c) Escreva aproximadamente 10 linhas sobre a importância dessa atividade para a aprendizagem matemática de seus alunos; comente fatos ocorridos em sala de aula e outros observados na produção dos alunos. **Esse material deve ser entregue ao seu Formador ao final da seção coletiva.**

PARTE III

TEORIA E PRÁTICA 2

SESSÃO COLETIVA

Sessão Coletiva 3
Unidade 5

Agora é o momento de discutir suas dúvidas e dificuldades com os seus outros colegas.

Vamos discutir algumas questões relevantes desse TP.

Parte A

Atividade 1

Na *internet* descobrimos um problema aberto bem interessante:

A pele que recobre nosso corpo desempenha funções muito importantes. Ela tem participação ativa na manutenção da temperatura corporal, na eliminação de substâncias tóxicas geradas pelo próprio metabolismo do corpo e na proteção contra agressões do meio exterior. Em determinadas situações é importante saber quanto vale a superfície corporal de um indivíduo. (Adaptado de Aguiar e outros, Cálculo para Ciências Médicas e Biológicas, São Paulo, Ed. Harbra,1988.).

Como você pode medir aproximadamente a sua superfície corporal?

Divida em grupos de três ou quatro elementos e discuta algumas das soluções possíveis. Crie uma estratégia para a resolução do problema e anote abaixo o resultado da discussão. Em seguida, calcule a superfície corporal de um dos colegas do grupo.

Atividade 2

Veja algumas maneiras que foram apresentadas na *internet* para resolver o problema da Atividade 1:

Solução 1
Separamos o corpo em vários cilindros, e resolvemos o problema através da aproximação das áreas de cada membro, somando-as. Dividimos o corpo em: cabeça, pescoço, tronco, braços, pernas, quadris, pés e mãos. Sabemos que a área da pele varia com a altura e o peso da pessoa, por isso, analisando o peso e a altura de cada um, constatamos que nossos cálculos estão aproximados da realidade.

Solução 2
Inicialmente,supondo que a pele esteja achatada, a dividimos num número máximo de retângulos possíveis. Os retângulos que foram divididos são:rosto, orelha, nariz, pescoço, braço, mão, perna, pé e tronco. Com o auxílio de uma fita métrica, coletamos as medidas necessárias para podermos calcular as áreas dos retângulos pré-definidos. Supondo-se que a pessoa possui 1,70cm de altura e pese 57kg aproximadamente, com medidas (unidade cm):

- Rosto: 27 x 29
- Orelha: 6 x 3,5
- Nariz: (Triângulo retângulo) 5 x 5 x 2,5
- Pescoço: 15 x 7
- Braço: 57 x 11
- Mão: 18 x 8,5
- Perna: 95 x 22
- Pé: (paralelepípedo) 25 x 8 x 9
- Tronco: 69 x 42

Com os subsídios adquiridos até o momento, podemos alcançar nosso objetivo, o de calcular, aproximadamente, a superfície do corpo de um indivíduo. Somando todas as medidas de áreas encontradas e multiplicando-as por 2, temos que ÁREA DA SUPERFÍCIE DESTE INDIVÍDUO É 1,42165 metros quadrados.

Solução 3
Considerando que a pele é o limite do corpo, e calculando-se o volume deslocado pelo corpo (um método seria entrar numa banheira graduada e medir o deslocamento de água que seria igual ao volume), tomar a massa corporal e calcular a densidade corporal (d=m/v), tomar uma esfera com a mesma densidade, verificar o seu volume. Relacionando volume da esfera, área superficial da esfera com volume do corpo consegue-se calcular a área da superfície do corpo. Favor mandar considerações sobre o exposto.

1) Alguma das soluções acima assemelha-se com a do seu grupo? Se sim, em que?

2) Das soluções apresentadas, seu grupo discorda de alguma das metodologias? Justifique a resposta.

O cálculo da superfície corporal é utilizado por médicos nefrologistas e cirurgiões plásticos no seu trabalho.

Eles usam a fórmula abaixo para fazer o cálculo:

SC (m^2) = 0,007184 x $[ALTURA\ (cm)]^{0,725}$ x $[PESO\ (kg)]^{0,425}$

Ou é usada a tabela abaixo:

Peso(kg)/Altura (cm)	150	155	160	165	170	175	180
40	1,30	1,33	1,37	1,40	1,43	1,46	1,49
45	1,37	1,40	1,44	1,47	1,50	1,53	1,56
50	1,43	1,47	1,50	1,54	1,57	1,60	1,64
55	1,49	1,53	1,56	1,60	1,63	1,67	1,70
60	1,55	1,59	1,62	1,66	1,70	1,73	1,77
65	1,60	1,64	1,68	1,72	1,75	1,79	1,83
70	1,65	1,69	1,73	1,77	1,81	1,85	1,89
75	1,70	1,74	1,78	1,82	1,86	1,90	1,94
80	1,75	1,79	1,83	1,87	1,92	1,96	2,00
85	1,80	1,84	1,88	1,92	1,97	2,01	2,05
90	1,84	1,88	1,93	1,97	2,01	2,06	2,10

3) Em relação à tabela acima, o resultado feito pelo seu grupo foi aproximado?

Atividade 3

Vamos discutir algumas questões relativas à proporcionalidade.

1. Depois de fazer a unidade 5 do TP2, o que você sugere como exemplos de grandezas diretamente, inversamente ou não proporcionais?

2. Os conceitos de razão e proporção foram apresentados numa forma não muito comum de introduzir este tema. O objetivo foi fazer uma análise de proporcionalidade a partir das razões, representações gráficas e tabelas. Você acha esta metodologia aplicável?

3. Os pontos num plano cartesiano, quando ligados, formam uma reta. Isso significa que as grandezas são diretamente proporcionais? Toda curva é inversamente proporcional? Veja os exemplos do TP e discuta.

4. Sobre a questão levantada na atividade 16, apresente sua resposta.

É importante compreender que proporcionalidade entre dimensão e área não é linear, ou seja, se uma "dobra" não é verdade que a outra será dobrada, por exemplo, vejamos as situações a seguir:

x	1	2	4	8	x
Y	4	8	16	32	$4 \times x$

No exemplo acima o fator de proporcionalidade é uma razão 1/2, então podemos escrever que a função que a representa é $y = 4x$.

x	1	2	4	8	x
Y	2	4	16	64	x^2

Desse segundo exemplo, podemos retirar a seguinte expressão $y = x^2$, e a relação, portanto, não é linear e, sim, quadrática.

Que tal usar este exemplo para introduzir conceitos de funções quadráticas? Perguntas do tipo: qual é a área máxima; qual seria o custo do piso da sala da dona Maricota; podem ser feitas.

Atividade 4

Relato dos grupos

É hora de ouvir e conhecer o que os outros grupos desenvolveram sobre o assunto. Cada relator deve fazer a apresentação das dúvidas e encaminhamentos de soluções dadas pelos integrantes do seu grupo. Procure relacionar as dúvidas e soluções similares entre os grupos.

Parte B

Discussão da transposição didática

Na situação-problema apresentada na unidade 5 os temas matemáticos foram trabalhados como recursos para a sua resolução. Vários outros temas poderiam ser trabalhados e aprofundados.

Divida novamente em grupos de quatro integrantes.

Atividade 5

a) Pegue um jornal, revista ou matéria da TV que tenha achado interessante e formule uma situação-problema. Faça apenas o levantamento de algumas perguntas, não precisa ser muito detalhado.

b) Utilizando o conceito de mapa conceitual: faça o mapa conceitual da situação-problema que seu grupo levantou.

Atividade 6

Com todos os grupos reunidos.

a) Cada grupo apresentará a pergunta principal da situação-problema e deverá escrever o mapa conceitual em uma folha de papel cartaz.

À medida em que cada grupo for apresentando registre o novo mapa sobre o anterior. Procure fazer as ligações.

b) Depois que todos os grupos apresentaram, veja quantos temas puderam ser trabalhados em rede. Discuta sobre os pontos positivos e negativos dessa forma de trabalhar os temas matemáticos.

c) A partir do mapa final, sugerimos que seja montado um mapa conceitual para cada série. Porém, procure trabalhar com uma visão não linear, ou seja, perguntas como: será que é preciso falar em números decimais só depois que estudar frações? É possível falar sobre o Teorema de Pitágoras apenas na sétima ou oitava série?

Parte C

Atividade 7

Já é sabido que a prática de esportes faz bem ao corpo e à alma! Quem pratica esportes pode ter uma vida mais saudável. Porém, qual é o melhor esporte para você? Se você é uma pessoa comunicativa, gosta de conversar, você deve procurar atividades que envolvem grupos, ou seja, deve procurar os esportes coletivos: vôlei, futebol, handebol etc.

Vamos fazer agora um levantamento de qual esporte tem mais a ver com você, que está em maior sintonia com o seu temperamento. Marque a alternativa que você pensa relacionar melhor ao seu gosto pessoal.

1. Quando penso no meu final de semana, prefiro:

( ) Planejar as atividades com dias de antecedência.

( ) Deixar para definir a programação na noite de sexta-feira, pois até a última hora podem surgir idéias interessantes.

( ) Imaginar apenas programas que me estimulem intelectualmente.

( ) Programar viagens em grupo para lugares tranqüilos, com o objetivo de conviver com pessoas e manter contato com a natureza.

2. Se eu fosse um líder entre meus colegas de trabalho, procuraria:

( ) Estimulá-los a desenvolver o potencial individual e colocar todo o seu conhecimento a serviço do grupo.

( ) Ler obras de auto-ajuda sobre os princípios da liderança para colocá-los em prática.

( ) Resolver todas as crises e conflitos que surgissem.

( ) Montar estratégias para melhorar o rendimento da equipe.

3. Sempre que participo de jogos ou de atividades esportivas:

( ) Uso estratégias que já testei anteriormente para chegar a vitória.

( ) Gosto de variar a estratégia a cada partida.

( ) Acho que a diversão é mais importante do que a vitória.

( ) Utilizo mais a emoção e a inspiração.

4. Meus amigos costumam dizer que:

( ) Sou esperto e inteligente.

( ) Sou capaz de me divertir em qualquer situação.

( ) Sou seguro e independente.

( ) Sou simpático e bem-humorado.

5. Em atividades que exigem planejamento, como uma reforma em casa ou a implantação de uma nova tarefa no trabalho, procuro:

( ) Incentivar as pessoas a apresentar suas idéias, pois várias cabeças pensam melhor do que uma.

( ) Analisar a situação em seu conjunto antes de tomar uma decisão.

( ) Resolver os problemas de uma vez.

( ) Ser metódico e observar cada detalhe.

6. Meus amigos mais íntimos me consideram:

( ) Um bom ouvinte para os problemas alheios.

( ) Firme em minhas opiniões.

( ) Curioso.

( ) Flexível.

Faça a contagem dos pontos:

____

____

____

____

Veja a cor predominante em suas respostas:

■ Você é aberto ao convívio social e sua personalidade é afeita aos esportes coletivos, como futebol, vôlei e basquete. Nas academias procure as aulas de dança de salão, dance mix e capoeira.

■ Você é o tipo organizado e se adapta a atividades repetitivas, como os exercícios na esteira e na bicicleta ergométrica. O importante para você é avaliar o seu progresso.

■ Repetir atividades para você é entediante. Seu temperamento,mais para o inquieto, combina com as novas modalidades da academia, como aerocapoeira.

■ Para você o exercício deve envolver criatividade e raciocínio. Entre os esportes, os recomendados são o tênis e o iatismo, que envolvem táticas mais apuradas e atenção.

Pesquisa retirada:http://www2.uol.com.Br/veja/idade/testes/esporte.html

Agora que você sabe qual esporte é mais adequado ao seu temperamento, procure no seu grupo se existe algum outro professor que se assemalha a você no tipo de esporte. Que tal montar um time? Ou uma equipe para reunir algum dia e fazer uma caminhada?

Então, vamos continuar nossos estudos. Na próxima unidade você vai continuar estudando sobre esportes e conhecer outros conhecimentos matemáticos a partir de uma nova situação-problema. Bom estudo!

Sessão Coletiva 4
Unidade 7

Parte A
Exploração dos conceitos desenvolvidos pela situação-problema da unidade

Atividade 1

O gráfico 1 fornece os percentuais por faixa etária das vítimas de acidentes de trânsito, de acordo com dados divulgados pelo DENATRAN – Departamento Nacional de Trânsito:

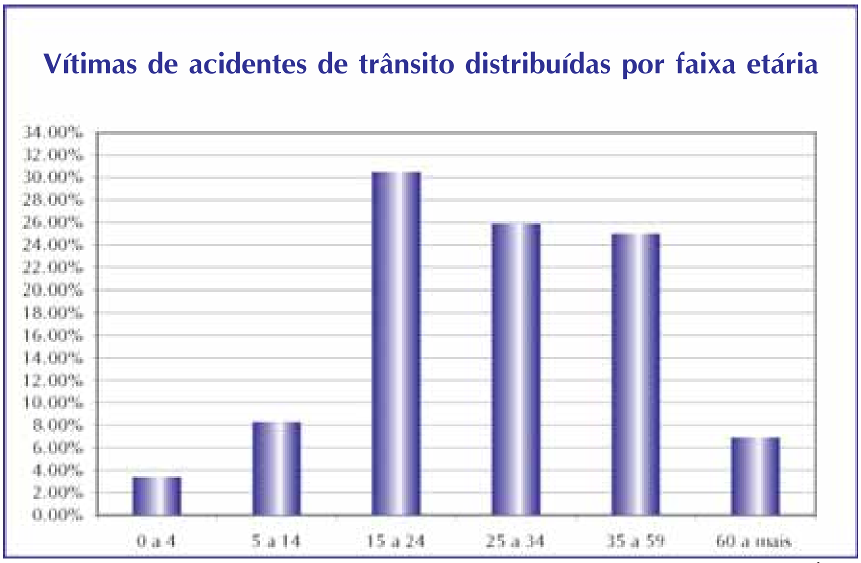


Gráfico 1

a) Estes dados são suficientes para dizermos que faixa etária da população brasileira corre mais risco de ser vitimada por acidentes de trânsito?

b) A tabela 1 mostra o número de pessoas (total de brasileiros) em cada faixa etária mostrada no gráfico 1 do DENATRAN. Estes números foram resultados do Censo 2000 do IBGE.

Faixa etária	População brasileira
0 a 4	16.386.239
5 a 14	33.929.942
15 a 24	34.092.224
25 a 34	26.876.600
35 a 59	44.048.864
60 a mais	14.538.988

Tabela 1

Use os dados da tabela 1 para construir, no gráfico 2, colunas referentes ao percentual de brasileiros em cada faixa etária. Uma coluna, a referente à faixa de idade de 0 a 4 anos, já foi feita.

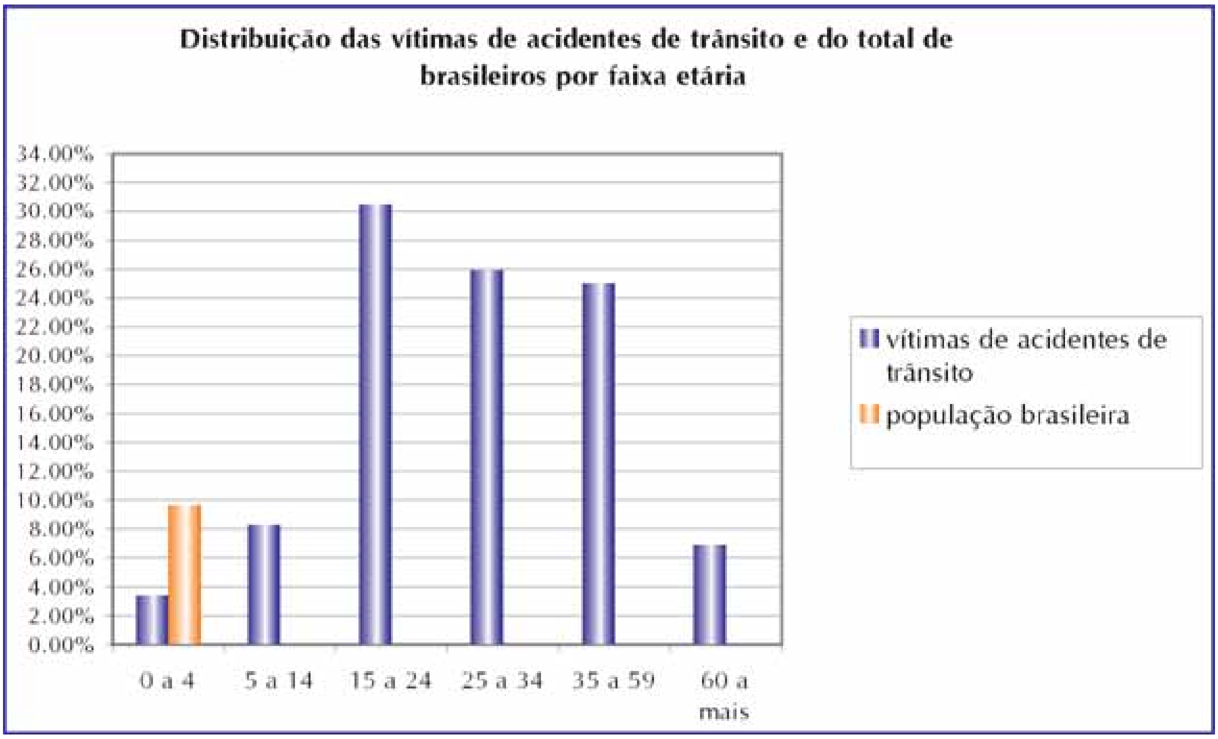


Gráfico 2

Após terminado, o gráfico 2 vai permitir visualizar, lado a lado, o percentual de brasileiros e o percentual de vítimas de acidentes de trânsito por faixa etária.

c) Revisite a questão "a": Os dados do gráfico 1 eram suficientes para determinar que faixa etária da população brasileira corre mais risco de ser vitimada por acidentes de trânsito?

d) Olhando o gráfico 2, aponte qual faixa etária tem maior risco de acidentes de trânsito. E qual a que tem menor risco? Como o gráfico permite determinar isto?

e) Explique como a informação veiculada pelo gráfico 2 foi usada para visualizar o risco de acidente de cada faixa etária.

Parte B
Transposição Didática

Atividade 2

Lançar uma moeda 3 vezes equivale a lançar 3 moedas?

A turma será dividida em três grupos.

Procedimento para o grupo 1
Este grupo será encarregado do experimento "lançar três moedas iguais simultaneamente".

a) Lançar três moedas iguais ao mesmo tempo, várias vezes, durante 10 minutos. Para cada vez que forem lançadas as moedas, registrar se o resultado foi: 0 cara, 1 cara, 2 caras ou 3 caras. (O grupo pode se dividir em duplas, nas quais uma pessoa lança as moedas e a outra anota o resultado). A tabela 2 pode ser usada para "ticar" (marcar) que resultado saiu a cada jogada.

b) Calcular a freqüência relativa de cada resultado, anotando-os na tabela 2:

	0 cara	1 cara	2 caras	3 caras
Freqüência absoluta ("ticar")				
Freqüência relativa				

Tabela 2

Procedimento para o grupo 2
Este grupo será encarregado do experimento "lançar três moedas distintas simultaneamente".

a) Lançar três moedas distintas ao mesmo tempo, várias vezes, durante 10 minutos. Para cada vez que forem lançadas as moedas, registrar o resultado. (O grupo pode se dividir em duplas, nas quais uma pessoa lança as moedas e a outra anota o resultado). A tabela 3 pode ser usada para "ticar" (marcar) que resultado saiu a cada jogada.

b) Calcular a freqüência relativa de cada resultado, anotando-os na tabela 3 (cara = c, coroa = k):

	(c,c,c)	(c,k,c)	(c,c,k)	(k,c,c)	(k,k,c)	(k,c,k)	(c,k,k)	(k,k,k)
Freqüência absoluta ("ticar")								
Freqüência relativa								

Tabela 3

Procedimento para o grupo 3
Encarregado do experimento "lançar uma moeda três vezes".
a) Lançar uma moeda três vezes e anotar o resultado. Repetir este experimento várias vezes, durante 10 minutos. (O grupo pode se dividir em duplas, nas quais uma pessoa lança as moedas e a outra anota o resultado). O diagrama 1 pode ser usado para "ticar" (marcar) que resultado saiu a cada jogada.

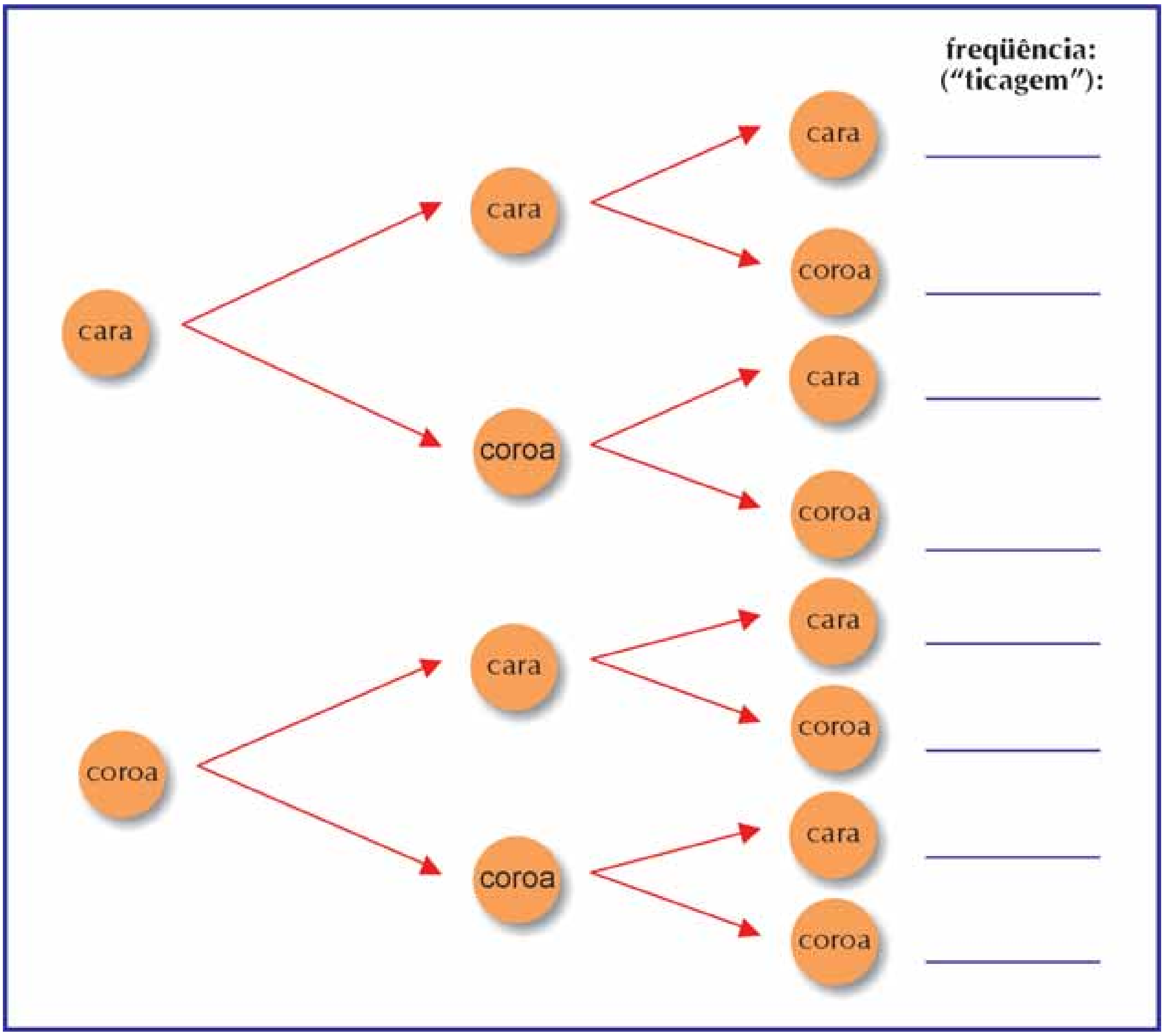


Diagrama 1

1º lançamento	2º lançamento	3º lançamento	freqüência absoluta (número de marcas feitas no diagrama 1)	freqüência relativa
cara	cara	cara		
cara	cara	coroa		
cara	coroa	cara		
cara	coroa	coroa		
coroa	cara	cara		
coroa	cara	coroa		
coroa	coroa	cara		
coroa	coroa	coroa		

Tabela 4

b) Calcular a freqüência relativa de cada resultado, anotando-os na tabela 4.

Discussão

a) Como se comparam os resultados dos três grupos? São parecidos?

b) Os quatro resultados do grupo 1 têm a mesma probabilidade?

c) Os oito resultados do grupo 2 têm a mesma probabilidade?

d) Os oito resultados do grupo 3 têm a mesma probabilidade?

e) A freqüência relativa de cada resultado do grupo 2 foram parecidas com as obtidas pelo grupo 3?

f) Como expressar os resultados destes grupos de forma a compará-los melhor aos resultados do grupo 1?

g) Expressem os resultados dos grupos 2 e 3 em termos do número de caras (0 cara, 1 cara, 2 caras ou 3 caras). Calculem as freqüências relativas de cada um destes resultados, com base nos registros dos experimentos. As freqüências relativas obtidas se assemelham às obtidas pelo grupo 1?

Atividade 3

Prepare o material que seu grupo recebeu para que ele possa ser usado para fazer dois experimentos, de forma que:

a) um tenha, entre seus possíveis resultados, um cuja probabilidade seja $\frac{5}{12}$, e

b) o outro tenha, entre seus possíveis resultados, um cuja probabilidade seja $\frac{11}{20}$.

O texto de referência pode ajudá-lo a ter idéias de como usar os materiais.

Atividade 4

Parte 1 – (8 minutos)
Sua dupla deverá lançar uma moeda e ir anotando os resultados. Não se esqueçam de anotar quantas vezes a moeda foi lançada e quantas vezes saiu cara, quantas vezes saiu coroa. Faremos isto durante 8 minutos.

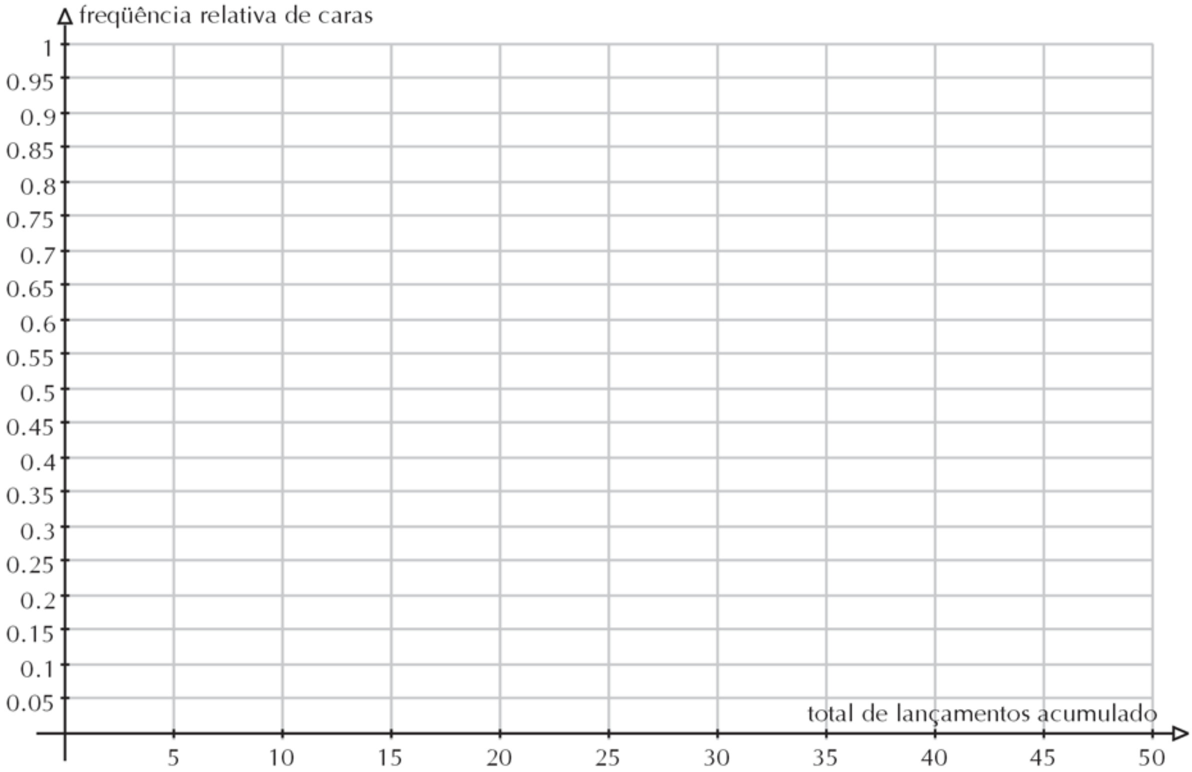
Parte 2 – (17 minutos)
Combinação dos resultados:

a) Sintetizem os resultados obtidos pela turma, fornecendo seus dados para que sejam anotados em uma tabela como a tabela 5:

Dupla	Total de lançamentos da dupla	Freqüência absoluta de caras obtida pela dupla	Freqüência relativa de caras	Freqüência relativa de caras acumulada
A				
B				
C				
...				

Tabela 5

b) Façam o gráfico cartesiano da variação da freqüência relativa de caras a cada novo acúmulo (tomada de resultados de mais um grupo). Coloque no eixo horizontal o total acumulado de jogadas.



c) Discuta com a turma o que o gráfico e a tabela mostram.

Parte C
Introdução à próxima unidade

Na vida, as incertezas muitas vezes vêm relacionadas a ganhos e perdas.

Não basta apenas sabermos calcular probabilidades, mas calcular se podemos esperar ganhos ou perdas ao corrermos riscos, já que muitas pessoas e empresas (seguradoras, bancos, investidores, organizadores de bingos e vendedores de rifas) ligam ao risco um fator monetário.

Muitas vezes aceitamos correr o risco de pequenas perdas na esperança de ter grandes ganhos.

Como na loteria: quem joga na loteria aceita perder o valor das apostas, na esperança de ter um grande ganho um dia. Só que esse grande ganho tem probabilidade muito pequena de acontecer.

Não só nas loterias e jogos isso ocorre:

- Nos planos de saúde pagamos uma quantia todo mês. Ao final do mês, poderemos ter perdido essa quantia se não tivermos precisado utilizar nenhum serviço médico. Ou poderemos ter ganho a diferença entre o que pagamos e o preço dos serviços que utilizamos.

- Os seguros de automóvel usam a idéia de risco para cobrar mensalmente a cobertura de gastos com acidentes que nem sabemos se irão ocorrer.

Em situações como estas, é importante o conceito de valor esperado.

Por exemplo, em uma loteria qual seria o valor que podemos esperar ganhar ou perder? O prêmio é muito grande, mas só temos uma pequena probabilidade de ganhar esse prêmio. Já os gastos com as apostas podem ser pequenos, mas são gastos certos: É um dinheiro que é perdido com certeza. Combinando eventuais ganhos e gastos, podemos esperar, ao fazermos muitas jogadas, ganhar ou perder? Qual seria o valor esperado de ganho ou de perda?

Na próxima unidade vamos examinar uma dessas situações, os seguros de vida.

Na atividade a seguir vamos introduzir a idéia de valor esperado, para que você já esteja melhor preparado para a leitura da próxima unidade.

Atividade 5

A roleta tem 37 casas. Então a probabilidade de a bolinha cair em cada casa é de

_______________ .

Considere o seguinte jogo: O jogador aposta 10 reais nos números de 1 a 12. Ele ganha 20 reais se a bolinha cair em um desses números (e ainda fica com os 10 reais que apostou). Se a bolinha não cair em um número de 1 a 12 ele perde os 10 reais, que vão para a banca.

a) Esse jogo é favorável ao jogador ou à banca?

b) Qual o valor que o jogador pode esperar ganhar ou perder ao final de muitas apostas?

Para compreender esse conceito, vamos simular esse jogo.

a) Seu grupo acionará a roleta 25 vezes, anotando quantas vezes o jogador ganhou. Lembre-se que ele ganha se sair um número de 1 a 12.

b) Repasse o resultado de seu grupo para o Formador. Ele o combinará com o dos outros grupos para saber quantas vezes o jogador ganhou nas 100 jogadas.

c) Em média, quanto ele ganhou ou perdeu por jogada?

d) Que probabilidade o jogador tem de ganhar 20 reais em uma jogada?

e) Que probabilidade o jogador tem de perder 10 reais em uma jogada?

f) Se ele jogar muitas vezes, qual é o percentual que devemos esperar de jogadas ganhas? E qual o percentual que devemos esperar de jogadas perdidas?

g) Complete:

Em aproximadamente __________ % do total de jogadas ele ganhará 20 reais, e em aproximadamente __________ % do total de jogadas ele perderá 10 reais. Então, em média ele perderá __________ reais.

Atividade 6

Quantas vezes será que precisaríamos, em média, lançar um dado para conseguirmos todos os números, de 1 a 6?

É claro que, como isso depende da sorte, o resultado vai variar. Então vamos experimentar várias vezes – 5 vezes no seu grupo. Depois vamos agrupar os resultados de todos os grupos e ver qual foi a média dos resultados. Esse valor será o número de vezes que esperamos ter que lançar um dado para obter todos os números.

Seu grupo deverá lançar o dado e ir anotando, com marquinhas na tabela recebida, os resultados. Por exemplo, se vocês rolarem o dado uma vez e conseguirem o número 4, façam uma marquinha na coluna do número 4, na tabela. Repitam o processo até que todos os números, de 1 a 6, tenham sido obtidos. Aí some o total de marquinhas para ver quantas jogadas foram necessárias.

Quando tiver repetido o processo 5 vezes, calcule a média dos resultados de seu grupo.

Repasse a média de seu grupo para o Formador. Ela será agrupada às médias dos outros grupos para o cálculo da média da turma toda.

	Número 1	**Número 2**	**Número 3**	**Número 4**	**Número 5**	**Número 6**	**Total jogadas**
Repetição 1							
Repetição 2							
Repetição 3							
Repetição 4							
Repetição 5							
Média							soma dos valores da coluna dividida por 5