UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Bruna Pacheco

O AXIOMA DA ESCOLHA E ALGUNS PRINCÍPIOS EQUIVALENTES

Florianópolis

2021

Bruna Pacheco

O AXIOMA DA ESCOLHA E ALGUNS PRINCÍPIOS EQUIVALENTES

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Cezar Augusto Mortari

Florianópolis

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pacheco, Bruna
O Axioma da Escolha e alguns princípios equivalentes / Bruna Pacheco ; orientador, Cezar Augusto Mortari, 2021.
56 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Axioma da Escolha. 3. Lema de Zorn. 4. Boa Ordenação. 5. Método Axiomático. I. Mortari, Cezar Augusto. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Matemática. III. Título.

Bruna Pacheco

O AXIOMA DA ESCOLHA E ALGUNS PRINCÍPIOS EQUIVALENTES

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para a obtenção do Título de "Licenciada em Matemática" e aprovado em sua forma final pelo Curso de Graduação em Matemática.

Florianópolis, 14 de Maio de 2021.

Profa. Dra. Silvia Martini de Holanda
Coordenadora do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Cezar Augusto Mortari
Orientador

Profa. Dra. Alda Dayana Mattos Mortari
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Paulinho Demeneghi
Universidade Federal de Santa Catarina

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Rubens e Bernadete, por todo amor e apoio que me deram durante toda a minha vida. Obrigada por sempre me incentivarem a ser uma pessoa melhor, amo vocês! Também gostaria de agradecer aos demais familiares, minha madrinha, padrinho, tias, tios, avô, primos e, em especial, minha amada avó Neide *(in memorian)* por todos os incríveis momentos que passamos juntas, fico muito honrada por ter todos vocês em minha vida.

Ao meu namorado Luis Eduardo Fritsch, agradeço por ter você em minha vida, obrigada por toda a ajuda e apoio incondicional em todos os momentos que estamos juntos. Admiro muito a pessoa incrível que você é, obrigada por tornar os meus dias muito mais felizes.

Um super agradecimento ao meu orientador Cezar Augusto Mortari. Muito obrigada por todo apoio, dedicação e paciência que teve comigo. Sem a sua ajuda este trabalho não teria acontecido.

Um agradecimento especial a todos os professores que tive durante a minha vida. Especialmente, à professora Alda Dayana Mattos Mortari, obrigada por todos os ensinamentos, oportunidades e apoio durante esses anos de curso. Agradeço aos professores Fernando de Lacerda Mortari, José Luiz Rosas Pinho, Paulinho Demeneghi, Rosilene Beatriz Machado e Silvia Martini de Holanda por toda a dedição e por serem exemplos de profissionais. Aos professores Natalia Vale Asari e Roberto Cid Fernandes Junior, agradeço por abrirem as portas do mundo da Astrofísica para mim, obrigada pela confiança. O meu mais sincero muito obrigada a todos vocês!

Agradeço a todas amizades que este curso me proporcionou. Juliane e Mayana vocês foram fundamentais nessa minha trajetória, agradeço por vocês serem as melhores amigas que eu poderia ter, por tudo que passamos e por tudo que vocês fizeram por mim. À minha melhor amiga Victória, agradeço muito pela sua amizade, por todo apoio e por toda companhia nesses anos. Aos meus amigos Andreza, Bruna Rayssa, Deborah, Fábio e Victor Pierri, muito obrigada por toda ajuda.

Aos meus amigos Bruna Camargo, Bruno Pacheco e Lucas Viapiana muito obrigada por sempre estarem presentes na minha vida. À Lurene Fernandes Geraldo, obrigada por toda a confiança e por sempre acreditar em mim. O mundo precisa de mais pessoas incríveis como vocês!

Eu não acho que isso significa que eu sou alguém, mas acho que estou no meu caminho.

(CHER)

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo apresentar considerações acerca do Axioma da Escolha, abordando o seu desenvolvimento histórico e suas principais equivalências nos campos da Matemática e da Lógica. O foco deste estudo é mostrar as consequências de sua aceitação ou não. Em particular, são apresentadas consequências práticas dentro da Matemática.

Palavras-chave: Axioma da Escolha. Boa Ordenação. Lema de Zorn. Método Axiomático. Zermelo-Fraenkel.

ABSTRACT

This research aims to present considerations about the Axiom of Choice, addressing its historical development and its main equivalences in the fields of Mathematics and Logic. The focus of this study is to show the consequences of its acceptance or not. In particular, practical consequences are presented within mathematics.

Keywords: Axiom of Choice. Well-Ordering. Zorn's Lemma. Axiomatic Method. Zermelo-Fraenkel.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O assunto deste trabalho está situado em duas grandes áreas de estudo: Matemática e Lógica.

O Axioma da Escolha, em uma de suas formas, é o princípio utilizado numa generalização para famílias infinitas da parte não-trivial de uma importante afirmação: seja $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência finita de conjuntos, então, uma condição necessária e suficiente para que seu produto cartesiano seja vazio é que pelo menos um deles seja vazio. (HALMOS, 1970, p. 64).

Através da inclusão deste axioma, obtemos a Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha (ZFC), sendo até hoje a teoria axiomática de conjuntos mais comum. Mesmo com a sua comprovada consistência teórica e utilidade, alguns matemáticos ainda têm ressalvas quanto ao seu uso. De fato, assumir esse axioma implica a existência de resultados contra-intuitivos. Por exemplo, o paradoxo de Banach-Tarski estabelece que é possível dividir uma esfera sólida tridimensional em um número finito de pedaços e com eles construir duas esferas, do mesmo tamanho da original.

Algo notório e interessante de se ressaltar, que será visto mais a fundo no decorrer deste estudo, é a necessidade de se pressupor o Axioma da Escolha para poder demonstrar o Teorema da Boa Ordenação, o qual sustenta que todo conjunto não-vazio pode ser bem ordenado, ou seja, todo subconjunto não-vazio de um conjunto possui menor elemento. Na verdade, pode-se demonstrar que na Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF), o Axioma da Escolha e o Teorema da Boa Ordenação são equivalentes (MOORE, 2013, p. 2-3).

Esse axioma também garante a existência de muitos outros resultados importantes, como é o caso do Teorema de Tychonoff e do Lema de Zorn. Entretanto, a equivalência com o Axioma da Escolha não é algo que vale em geral: alguns resultados são demonstráveis com esse axioma, mas não são equivalentes a ele. Como é o caso do Teorema de Representação de Stone para álgebras booleanas, o qual afirma que toda álgebra booleana é isomórfica a um determinado corpo de conjuntos (MOORE, 2013, p. 7).

Também é possível demonstrar vários teoremas sem usar esse axioma (ou a sua negação), eles serão verdadeiros em qualquer modelo de ZF, independentemente da verdade ou falsidade do Axioma da Escolha nesse modelo. Kurt Gödel (1938) anunciou a prova da consistência desse axioma referente aos axiomas de ZF.

Tendo essas ideias como panorama inicial, a estrutura deste trabalho está assim definida: inicia-se com uma contextualização histórica acerca da Teoria dos Conjuntos, a seguir, no referencial teórico, contempla-se o método axiomático e a linguagem empregada. Apresenta-se ainda os axiomas da teoria ZF. A abordagem desses resultados preliminares serve para introduzir o Axioma da Escolha, bem como suas equivalências e consequências. Por fim, a conclusão traz considerações acerca da temática estudada, contemplando algumas perspectivas matemáticas aprendidas sobre a pertinência do Axioma da Escolha.

O público-alvo deste trabalho é o estudante de graduação em Matemática, pois, em diversos momentos, assume o conhecimento de conceitos e resultados vistos nesse nível. Ainda, para uma melhor compreensão, recomenda-se a familiarização com alguns conceitos básicos das áreas de Lógica e Teoria dos Conjuntos.

2 DESENVOLVIMENTO

Neste capítulo, é feita uma breve contextualização histórica do surgimento do Axioma da Escolha, elencando as principais publicações que contribuíram para o seu desenvolvimento. Em seguida, são apresentados os conceitos fundamentais e os requisitos para a formalização do que é proposto neste trabalho.

2.1 CONTEXTO HISTÓRICO

O conceito de conjunto é tão enganosamente simples que até analisar corretamente as contribuições feitas pelos pioneiros dessa área se torna difícil. Os avanços conquistados para que ele pudesse ser formalmente aceito pela comunidade matemática, com esforço e tempo consideráveis, podem parecer bastante triviais hoje.

Para iniciar, observa-se um equívoco histórico muito difundido na literatura. A Teoria dos Conjuntos não iniciou com Georg Cantor; o surgimento dessa teoria precedeu as contribuições cruciais produzidas por ele.

Cronologicamente, Bernard Bolzano foi o primeiro a se aventurar mais a fundo nesse estudo. Em seu livro *Paradoxien des Unendlichen* (Paradoxos do Infinito), ele argumenta em detalhes que uma série de paradoxos aparentes em torno do infinito são logicamente inofensivos e montou uma defesa vigorosa do infinito real. Propôs também um argumento interessante tentando provar a existência de conjuntos infinitos, que pode ser comparado ao argumento posterior de Richard Dedekind (1888) (FERREIRÓS, 2020).

Bernhard Riemann, em sua célebre palestra inaugural sobre as hipóteses que estão nos fundamentos da Geometria, propôs ideias visionárias sobre Topologia e em como basear toda a Matemática na noção de conjunto ou "múltiplo", no sentido de classe (*Mannigfaltigkeit*) (FERREIRÓS, 2020).

O período de 1868-1872 pode ser considerado como o nascimento da matemática da Teoria dos Conjuntos. A aula de geometria de Riemann, proferida em 1854, foi publicada por Dedekind em 1868, juntamente com o artigo de Riemann sobre séries trigonométricas, que apresentava a sua integral. Este último foi o ponto de partida para um trabalho profundo na Análise Real, iniciando o estudo das funções seriamente descontínuas (FERREIRÓS, 2020).

Em 1872, Cantor introduziu uma operação sobre conjuntos de pontos, refletindo sobre a possibilidade de iterar essa operação ao infinito e também tendo o primeiro vislumbre do reino transfinito (FERREIRÓS, 2020).

Em 1873, em correspondências com Dedekind, Cantor questionava se os conjuntos infinitos $\mathbb{N}$ (dos números naturais) e $\mathbb{R}$ (dos números reais) poderiam ser colocados em correspondência um-a-um. Cantor, então, provou que o conjunto $\mathbb{Q}$ (dos números racionais) é contável (ou enumerável), bem como o conjunto $\mathbb{A}$ (dos números algébricos) — números que são raízes de polinômios cujos coeficientes são inteiros. Isto é, que existe "a mesma quantidade" de números naturais e de números algébricos (FERREIRÓS, 2020).

Por algum tempo, imaginou-se que a cardinalidade do infinito fosse única, isto é, que conjuntos infinitos possuíssem sempre a mesma quantidade de elementos. Mas, poucos dias depois da correspondência com Dedekind, Cantor chegou à conclusão contrária: o conjunto dos números reais é incontável. Assim, ele mostrou que há mais elementos em $\mathbb{R}$ do que em

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{A}$, no sentido preciso de que a cardinalidade de $\mathbb{R}$ é estritamente maior do que a cardinalidade de $\mathbb{N}$ (FERREIRÓS, 2020).

Pelo fato de que $\mathbb{R}$ não pode ser enumerado, então foi constituída a existência de um infinito não-enumerável. Logo, Cantor designou uma notação para representar a cardinalidade de conjuntos infinitos, reservando a notação $\aleph_0$ para o infinito (enumerável) dos números naturais. Essas cardinalidades de conjuntos infinitos: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$, receberam o nome de *números transfinitos*, começando com o infinito enumerável e seguindo com os infinitos não-enumeráveis.

Em 1874, Cantor faz a publicação do trabalho *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* (Sobre uma propriedade característica de todos os números algébricos). Prosseguindo com suas pesquisas, ele tentou demonstrar a impossibilidade de uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$, para $n > 1$. Em 1877, para sua surpresa, provou que estava errado: $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ são equipotentes, para $n > 1$ (BOURBAKI, 1968, p. 324).

O estudo dos ordinais transfinitos direcionou a atenção de Cantor para conjuntos ordenados e, em particular, conjuntos bem-ordenados. Entre 1879 e 1884, na *Mathematische Annalen*, Cantor publicou uma sequência de seis artigos que formularam uma axiomatização (introdução) à sua Teoria dos Conjuntos.

Em seu quinto artigo, Cantor (1883) propôs como válida uma "Lei do Pensamento" em que todo conjunto pode ser bem-ordenado, posteriormente conhecida como Princípio da Boa Ordenação. Porém, como essa proposta não foi bem aceita por seus contemporâneos, Cantor tentou prová-la como um teorema, uma década depois, mas não obteve sucesso (MOORE, 2013, p. 2).

Com tantas menções sobre conjuntos, tornou-se cada vez mais importante definir da melhor forma tal conceito. Podemos pensar que um conjunto é um agrupamento, uma coleção de objetos. Para Cantor, um conjunto é a coleção de todos os objetos que satisfazem uma certa propriedade, ou seja:

$$\{x \mid x \; tem \; a \; propriedade \; P\}.$$

Essa é uma definição bem natural de conjunto e, com ela, Gottlob Frege baseou seu trabalho. Frege estava desenvolvendo uma escrita para a Matemática, uma formalização em que lógica e conjuntos eram praticamente indissociáveis. Para sua felicidade, estava obtendo bons resultados e tendo um avanço significativo.

Porém, aconteceu algo que iria mudar todo esse cenário. Em 1903, Bertrand Russell enviou uma carta a Frege afirmando ter encontrado um paradoxo na teoria de Frege, o que deixava a teoria dos conjuntos de Cantor (e a Matemática) inconsistente, implicando na invalidade do trabalho de Frege. Isso gerou um grande impacto na época, pois a Teoria dos Conjuntos é um dos pilares da Matemática e, se ela está incorreta, toda a Matemática fica comprometida.

Ainda em 1903, Russell publicou o livro *The Principles of Mathematics*, no qual apresentou para o mundo seu paradoxo, chamado de Paradoxo de Russell. Tal paradoxo foi muito importante por motivar o desenvolvimento de novas e mais restritas formulações da Teoria dos Conjuntos (MOORE, 2013, p. 53).

Dada a ideia de conjunto de Cantor, o paradoxo aparece na seguinte situação: se qualquer propriedade determina um conjunto, então podemos definir um conjunto x como o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos. Ou seja, basta considerar o conjunto x cujos elementos obedecem a propriedade de não pertencer a si mesmo. Então, será que x pertence a si mesmo? Veja que, se x pertencer a si mesmo, pela propriedade, ele não pode pertencer a si mesmo. E se x não pertence a si mesmo, pela propriedade, implica que ele pertence. Simbolicamente:

$$x \in x \leftrightarrow x \notin x.$$

O que é um absurdo, pois nega o Princípio da Não-Contradição: duas afirmações contraditórias não podem simultaneamente ser verdadeiras.

Uma versão popular desse paradoxo é conhecida como *Paradoxo do Barbeiro*. Essa versão conta que em uma cidade todo homem é obrigado a não ter barba. Existe apenas um barbeiro e a regra é que o barbeiro faz a barba somente de quem não faz a própria barba. Mas, quem faz a barba do barbeiro?

Ou seja, para não haver uma contradição, não podemos tomar como verdade a existência de um conjunto cujos elementos são exatamente todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos. Como mencionado por Hrbacek e Jech,

> A lição contida no Paradoxo de Russell e outros exemplos semelhantes é que simplesmente definindo um conjunto não provamos sua existência (da mesma forma que ao definir um unicórnio não provamos que os unicórnios existem). Existem propriedades que não definem conjuntos; ou seja, não é possível coletar todos os objetos com essas propriedades em um conjunto. Essa observação deixa os teóricos dos conjuntos com a tarefa de determinar as propriedades que definem os conjuntos. Infelizmente, nenhuma maneira de fazer isso é conhecida, e alguns resultados na lógica (especialmente os chamados Teoremas da Incompletude descobertos por Kurt Gödel) parecem indicar que uma resposta completa nem mesmo é possível (HRBACEK; JECH, 1999, p. 3).

Descoberto esse paradoxo, o primeiro responsável pela axiomatização da Teoria dos Conjuntos foi Ernst Zermelo. Porém, antes de sua formalização axiomática ser apresentada, Zermelo estava causando um outro grande impacto na Matemática, com a publicação do seu famigerado Axioma da Escolha.

Em 1904, Zermelo apresentou uma demonstração do Princípio da Boa Ordenação (PBO) e, para isso, introduziu o Axioma da Escolha (AC). Para decidir se o seu axioma e a demonstração estavam corretos, essa publicação de Zermelo iniciou um debate acalorado entre os matemáticos de toda a Europa (MOORE, 2013, p. 2).

Até hoje, os matemáticos estão em desacordo quanto a se este axioma deve ser aceito dentro da Matemática, embora, sem dúvida, tenha sido muito mais aceito do que rejeitado. A aceitação ou rejeição do Axioma da Escolha reflete as concepções filosóficas subjacentes sobre a natureza da Matemática e da existência matemática (ROGERS, 1971, p. 165).

As objeções a esse axioma surgiram do fato de que ele afirma a existência de conjuntos que não podem ser explicitamente definidos. Durante as décadas de 1920 e 1930, existia inclusive a prática ritual de mencioná-lo com destaque, sempre que um teorema dependesse dele. Esse costume foi abandonado após a prova de consistência relativa de Gödel (FERREIRÓS, 2020).

Por conta dessa polêmica, em 1908, Zermelo publica uma vigorosa defesa de sua prova, uma nova versão do seu Axioma da Escolha e também sua primeira axiomatização da Teoria dos Conjuntos, chamada de Teoria dos Conjuntos de Zermelo (Z), que era composta por seis axiomas. Mas ainda continuou sendo muito atacado por seus críticos (MOORE, 2013, p. 3).

Nessa sua primeira formulação da Teoria dos Conjuntos, Zermelo propôs uma nova definição de conjunto, que seria parecida com a de Cantor, mas continha um acréscimo. Ele definiu da seguinte forma:

$$\{x \in y \mid x\ tem\ uma\ propriedade\ P\},$$

ou seja, esses elementos devem pertencer a um outro conjunto já definido. Essa definição evita o paradoxo de Russell e essa nova formulação é o chamado Axioma da Separação, que será melhor abordado no decorrer deste trabalho.

Anos depois, Abraham Fraenkel começou a estudar os modelos de axiomatização de Zermelo e a estabelecer a independência do Axioma da Escolha. Com isso, em 1922, a Teoria dos Conjuntos de Zermelo foi aprimorada com a adição de mais dois axiomas, surgindo então a Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF) (MOORE, 2013, p. 3).

Em 1938, Gödel demonstrou a consistência do Axioma da Escolha em relação aos axiomas de ZF. Ou seja, se ZF não deriva contradições (paradoxos), então, ao se adicionar o Axioma da Escolha, a teoria de ZF continua a não derivar contradições (ROGERS, 1971, p. 178). A prova completa só foi publicada dois anos depois por Gödel (1940).

São conhecidos diversos resultados independentes e consistentes em ZF. Um importante resultado disto é a *Hipótese do Continuum*. Essa hipótese foi apresentada pela primeira vez por Cantor, em 1878, e afirma que não existe conjunto cuja cardinalidade seja estritamente menor do que a cardinalidade dos números reais e maior do que a cardinalidade dos naturais. Ela foi considerada tão importante que, em 1900, David Hilbert colocou-a na primeira posição em sua famosa lista de 23 problemas, que iniciou no Congresso Internacional de Matemática, em Paris.

Em 1963, Paul Cohen mostrou que o Axioma da Escolha não é derivável dos axiomas de ZF. Para isso, Cohen construiu um modelo considerado "padrão", no sentido de que, dentro dele, "$x \in y$" é interpretado como "x é um elemento de y". Com isso, Cohen mostra que este é um modelo de todos os axiomas de ZF, sem o Axioma da Escolha. Em seguida, ele mostra que neste modelo, o conjunto dos números reais não é bem-ordenado e concluiu a partir daí que o Axioma da Escolha é falso neste modelo e, portanto, não é derivável dos axiomas de ZF (ROGERS, 1971, p. 174).

Em 1938, Gödel mostrou que a *Hipótese do Continuum* dentro de ZF não pode ser refutada. E, ao mesmo tempo, em 1963, enquanto provava a independência do Axioma da Escolha, Cohen também mostrou que essa hipótese não é derivável dos axiomas de ZF. Ele fez isso também apresentando um modelo no qual os axiomas de ZF são todos verdadeiros, enquanto a própria *Hipótese do Continuum* é falsa nesse modelo. Esse resultado é, de fato, o resultado mais notável dos últimos anos dentro dos fundamentos da Matemática (ROGERS, 1971, p. 175).

2.2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Inicialmente, apresentaremos uma noção sobre o que é o método axiomático, a linguagem formal que usaremos para descrever logicamente cada axioma e a teoria axiomática de Zermelo-Fraenkel, que são aspectos imprescindíveis para a compreensão da discussão realizada neste trabalho. As definições e resultados seguintes são baseados em Mortari (2001).

2.2.1 Método Axiomático

Em Matemática, proposições são provadas ao se mostrar que seguem logicamente de algumas outras, cuja verdade já foi estabelecida. Logo, a demonstração de alguma tese matemática consiste em mostrar que ela segue logicamente de outras proposições matemáticas, por hipótese, verdadeiras.

Para se ter alguma garantia de que aquilo que se está provando é, de fato, verdadeiro, a questão se reduz a mostrar que as premissas dos argumentos utilizados são verdadeiras. Porém, essas premissas também são outras proposições matemáticas. Então, como garantir a veracidade destas?

Esse questionamento remonta a Euclides. Basicamente, ele sugeriu que a coisa deveria funcionar à base de demonstrações. Se eu tenho um conjunto de proposições verdadeiras, e estas acarretam uma outra, então esta outra é obviamente verdadeira. Mas como determinar a verdade das primeiras sentenças?

Para resolver esse impasse, Euclides notou que algumas proposições geométricas são tão simples que realmente não se poderia duvidar de sua validade. Portanto, ao tomar o conjunto de tais proposições como ponto de partida e mostrar que a partir delas pode-se demonstrar todo o resto, há uma garantia de verdade das demais proposições.

Deste modo, Euclides escolheu um grupo de proposições que não seria preciso demonstrar e separou-as em dois grupos: os axiomas, mais gerais, que podem ser usados em qualquer ciência, e os postulados, específicos à geometria (MORTARI, 2001, p. 230).

Sistematicamente, Euclides passou a demonstrar todas as proposições conhecidas da Geometria, à época (como o famoso Teorema de Pitágoras). Em seu livro, *Os Elementos*, organizou a Geometria como um sistema — o sistema axiomático — em que as proposições são demonstradas a partir de um pequeno número inicial de outras proposições, aceitas sem prova.

Tais proposições iniciais foram definidas da seguinte forma (EUCLIDES, 2009, p. 98):

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Contudo, desde a época de Euclides, o entendimento contemporâneo do que são axiomas ou postulados mudou: o surgimento de geometrias não-euclidianas e outros avanços teóricos alterou isso; não eram mais resultados "evidentemente verdadeiros", mas simplesmente qualquer proposição aceita sem demonstração em determinado sistema (MORTARI, 2001, p. 231).

Outro conjunto de axiomas muito conhecido e importante foi apresentado por Giuseppe Peano, em 1889. Os Axiomas de Peano formam a base da estrutura dos números naturais e foram dados como segue (DOMINGUES, 1991, p. 80-81):

1. Zero é um número natural.

2. Se x é um número natural, então x tem um único sucessor que também é um número natural.

3. Zero não é sucessor de nenhum número natural.

4. Dois números naturais que têm sucessores naturais iguais, são, eles próprios, iguais.

5. Se uma coleção S de números naturais contém o zero e, também, o sucessor de todo elemento de S, então S é o conjunto de todos os números naturais.

O quinto e último axioma é o chamado de *Princípio de Indução Finita*.

2.2.2 Linguagem

Antes de apresentarmos os axiomas da Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha (ZFC) como uma teoria de primeira ordem, ou seja, baseada no cálculo de predicados clássicos de primeira ordem, é necessário que tenhamos noções básicas dessa linguagem. Essas noções são dadas a seguir:

i. Variáveis: utiliza-se letras minúsculas $u, \ldots, z$, com ou sem subscritos, para a representação das variáveis;

ii. Conectivos (operadores): $\neg$ (negação - 'não'), $\wedge$ (conjunção - 'e'), $\vee$ (disjunção - 'ou'), $\rightarrow$ (implicação - 'se... então'), $\leftrightarrow$ (bi-implicação - 'se e somente se');

iii. Quantificadores: $\forall$ (universal - 'para todo', 'cada') e $\exists$ (existencial - 'existe');

iv. Símbolo de igualdade: =;

v. Pertinência: $\in$ (indica que um objeto é elemento de um conjunto);

vi. Sinais de pontuação: utiliza-se o parênteses esquerdo '(' e o parênteses direito ')'.

A definição de fórmula que será dada, a seguir, é feita por indução. São apresentados os elementos iniciais do conjunto a ser definido e, em seguida, listadas as regras que tornam possível obter novos elementos a partir dos já existentes:

i. Existem somente dois tipos de fórmula atômica: $x = y$ e $x \in y$;

ii. Se φ e ψ são fórmulas, então $\neg\varphi, (\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \rightarrow \psi)$ e $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ são fórmulas (moleculares);

iii. Se x é uma variável e φ é uma fórmula, então $\forall x\varphi$ e $\exists x\varphi$ são fórmulas (gerais);

iv. Nada mais é uma fórmula.

O âmbito de ação de um quantificador é chamado de '*escopo* do quantificador' e pode ser definido da seguinte forma: em uma fórmula do tipo $\forall x\varphi$ ou $\exists x\varphi$, o escopo do quantificador é φ.

Uma variável x é dita *ligada*, em uma fórmula φ, se x ou faz parte de um quantificador ou está no escopo de um quantificador para x em φ.

Por outro lado, a ocorrência de alguma variável x em uma fórmula φ que esteja fora do escopo de qualquer quantificador para x é chamada de ocorrência *livre* dessa variável em φ.

Uma fórmula é dita *aberta* se possui pelo menos uma ocorrência livre de alguma variável. Analogamente, uma fórmula é dita *fechada* caso não possua nenhuma ocorrência livre de variável. As fórmulas fechadas são chamadas de *sentenças*.

Para este trabalho, salvo menção contrária, as variáveis sempre estarão representando conjuntos. Para mais informações a respeito de linguagens de primeira ordem, ver Mortari (2001), Capítulo 7.

2.3 AXIOMAS DE ZERMELO-FRAENKEL

A seguir, são apresentados e discutidos cada um dos oito axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF). Tal versão dos axiomas, e as explicações correspondentes, foram retiradas do capítulo 7 de Rogers (1971).

i. **Axioma da Extensionalidade**

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

Este axioma afirma que se os elementos de x são idênticos aos elementos de y, então x e y são o mesmo conjunto. Ele expressa a ideia básica de um conjunto: um conjunto é determinado por seus elementos.

Convenciona-se que se $z \in x$, então z é chamado de *elemento* ou *membro* de x.

ii. **Axioma (Esquema) da Separação**

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z))$$

O axioma garante que para qualquer conjunto x e qualquer fórmula φ, existe um subconjunto y de x que contém apenas os elementos de x que satisfazem a fórmula φ.

Ele é um esquema de axiomas, pois se obtém um axioma para cada condição φ em z. Por exemplo, considere a fórmula: $\exists w (w \in z)$. Para essa escolha de φ, nosso esquema fornece a seguinte expressão (o conjunto dos subconjuntos não vazios de x) como um axioma de ZF:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \exists w (w \in z)).$$

Também vale observar como ele serve para excluir alguns paradoxos lógicos conhecidos. Suponha que a expressão "$z \in x$" (juntamente com o quantificador "$\forall x$") fosse omitida do esquema. Tal esquema seria então:

$$\exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \varphi(z)).$$

Este esquema leva diretamente a uma contradição, uma vez que se escolhe "$\neg(z \in z)$" como sendo a fórmula φ. Tem-se então a fórmula:

$$\exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \neg(z \in z)),$$

que implica na fórmula:

$$\exists y (y \in y \leftrightarrow \neg(y \in y)),$$

que implica em:

$$\exists y \neg(y \in y \leftrightarrow y \in y).$$

Porém, é válido o seguinte teorema da lógica:

$$\neg \exists y \neg(y \in y \leftrightarrow y \in y).$$

Portanto, o Axioma da Separação sem a expressão "$z \in x$" leva a uma contradição. Em particular, essencialmente ao Paradoxo de Russell.

iii. **Axioma do Par**

$$\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y)$$

Este axioma afirma que, dados quaisquer dois conjuntos x e y, existe um conjunto z que contém como seus elementos apenas x e y e nenhum outro mais.

O Axioma da Extensionalidade nos garante que esse conjunto z é único. Ou seja, se dois conjuntos quaisquer tiverem como elementos x e y, esses dois conjuntos seriam idênticos entre si.

A seguir serão definidos conceitos importantes que serão necessários ao decorrer deste trabalho. O primeiro é chamado de *par não-ordenado* formado por x e y o conjunto $\{x, y\}$ definido a seguir:

Definição 1. $\{x, y\} = z \leftrightarrow \forall w (w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y)$.

Especificando, tem-se que os únicos elementos de $\{x, y\}$ são x e y, ou seja:

$$\forall w (w \in \{x, y\} \leftrightarrow w = x \vee w = y). \tag{2.1}$$

Teorema 1. Sejam os conjuntos x, y, u, v arbitrários. Se $\{x, y\} = \{u, v\}$, então $x = u$ e $y = v$ ou $x = v$ e $y = u$.

Demonstração. Como visto acima, $x \in \{u, v\}$ e $y \in \{u, v\}$. Como $\{x, y\} = \{u, v\}$ deduz-se que:

(i) $u \in \{x, y\} \leftrightarrow u = x \vee u = y$;

(ii) $v \in \{x, y\} \leftrightarrow v = x \vee v = y$.

Note que existem dois casos a se considerar: $x = y$ ou $x \neq y$.

Se $x = y$, de (i), implica que $x = u$ ou $x = v$ e, de (ii) que $y = u$ ou $y = v$. Mas, como $x = y$, então $x = u = y = u$, o que satisfaz o teorema.

Se $x \neq y$, de (i), se $x = u$, então (ii) implica em $y \neq u$ e $y = v$ ($y = u$ implicaria em $x = u = y$ e a hipótese não seria satisfeita). Assim, obtém-se que $x = u \wedge y = v$. Analogamente, se $x = v$, então $y = u$ e $y \neq v$. Logo, $x = v \wedge y = u$.

■

Quando $x = y$, é obtido o chamado *conjunto unitário de x*. A notação usual de conjunto unitário de x é apresentada pela seguinte definição:

Definição 2. $\{x\} = \{x, x\}$.

É importante ainda ressaltar que os conjuntos x e $\{x\}$ são diferentes. Para perceber essa diferença, suponha x sendo o conjunto dos números naturais. Então x possui infinitos elementos, mas $\{x\}$, no entanto, possui apenas um elemento.

Corolário 1. $\forall x \forall y(\{x\} = \{y\} \rightarrow x = y)$.

Demonstração. É uma decorrência imediata do Teorema 1.

■

Agora, é importante definir o que é um *par ordenado*. Para efeitos matemáticos, o requisito que necessita ser imposto a qualquer possível definição de par ordenado é o de que dois pares ordenados $\langle x, y\rangle$ e $\langle u, v\rangle$ são idênticos se e somente se $x = u$ e $y = v$. A próxima definição atende a esse requisito:

Definição 3. $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Nessa definição, o par ordenado de x e y, $\langle x, y\rangle$, é um certo par não ordenado; especificamente, o par não ordenado cujos elementos são: o conjunto unitário de x e o par não ordenado de x e y.

Neste trabalho, prefere-se esta versão do que a usual vista no curso de Matemática pela simplicidade que ela representa. Ela requer apenas poucos axiomas para ser formulado: o Axioma da Extensionalidade, o Axioma da Separação e o Axioma do Par.

Teorema 2. $\forall x \forall y \forall u \forall v(\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \rightarrow (x = u \wedge y = v))$.

Demonstração. Pela Definição 3, $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$ equivale a $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$, e do Teorema 1, segue-se dois casos:

(i) $\{x\} = \{u\} \wedge \{x, y\} = \{u, v\}$;

(ii) $\{x\} = \{u, v\} \wedge \{x, y\} = \{u\}$.

Caso (i) ocorra, pelo Corolário 1, claramente $x = u$. E, pelo Teorema 1, $y = v$.

Caso (ii) ocorra, percebe-se que $\{x,x\} = \{u,v\}$ e $\{x,y\} = \{u,u\}$, implicando que

$$(x = u \wedge x = v) \wedge (u = x \wedge u = y),$$

logo, $x = y = u = v$ e, consequentemente, $x = u$ e $y = v$.

■

Teorema 3. $\exists x \forall y \neg (y \in x)$.

Demonstração. Esse resultado segue como consequência do Axioma da Separação. De fato, note que a sentença $\exists y(y = y)$ já pode ser provada através desse axioma.

Usemos, então, o referido axioma para esse y e para a fórmula $x \neq x$. Com isso, o conjunto obtido é:

$$\{x \in y \mid x \neq x\} \leftrightarrow \exists x \forall y \neg (y \in x),$$

que é o conjunto vazio.

■

A partir deste resultado, é introduzido outro conceito: o *não pertencimento*, denotado por $\notin$. Ou seja, $x \notin y$ é uma outra maneira para representar $\neg(x \in y)$. E, assim, pode-se reescrever a definição acima como sendo $\exists x \forall y (y \notin x)$.

Definição 4. $x \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$.

Essa definição apresenta o conceito de *subconjunto*. Ela diz que x é um subconjunto de y $(x \subseteq y)$ se, e somente se, todos os elementos de x forem elementos de y. Em particular, verifica-se que todo conjunto é um subconjunto de si mesmo.

Note que "$x \in y$" e "$x \subseteq y$" representam conceitos diferentes. A primeira sentença expressa que x é um elemento de y; a segunda afirma que os elementos de x, caso existam, são também elementos de y, mas, de forma alguma, isso garante que o conjunto x pertença ao conjunto y.

Se x for um subconjunto de y, sem ser idêntico a ele, então diz-se que x é um *subconjunto próprio* de y. É o que expressa a seguinte definição:

Definição 5. $x \subset y \leftrightarrow x \subseteq y \wedge x \neq y$.

Outro resultado importante é o da existência de um conjunto vazio. E ele será representado a seguir:

Definição 6. O *conjunto vazio* é dado por:

$$\emptyset = y \leftrightarrow \forall z(z \in y \leftrightarrow z \neq z).$$

Teorema 4. Existe um conjunto vazio e ele é único.

Demonstração. A existência de um conjunto vazio já foi demonstrada em um teorema anterior. Mostremos a unicidade.

Suponha que existem x e y conjuntos vazios distintos. Pelo Axioma da Extensionalidade, existe um elemento de x que não pertence a y, ou existe um elemento de y que não pertence a x, o que, em ambos os casos, contradiz que x e y são vazios.

Então, os conjuntos x e y não podem ser distintos. Portanto, existe um único conjunto vazio.

■

Teorema 5. O conjunto-vazio está contido em qualquer conjunto:

$$\forall x(\emptyset \subseteq x).$$

Demonstração. Suponha que existe um x tal que $\emptyset$ não está contido em x. Logo, existe y que pertence a $\emptyset$ mas que não pertence a x, contradizendo a definição do conjunto vazio.

Assim, tem-se que $\emptyset$ está contido em x. E como x é um conjunto qualquer, o resultado segue.

■

iv. **Axioma da União**

$$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists w(z \in w \wedge w \in x))$$

Este axioma diz que para cada conjunto x existe um conjunto y que contém como seus elementos apenas os elementos dos objetos de x.

O Axioma da Extensionalidade garante que o conjunto y é único.

Os dois axiomas juntos, então, garantem a existência da união de x, para qualquer conjunto x. Essa *união* será denotada pelo símbolo $\cup$ e definida da seguinte maneira:

Definição 7. $\cup x = y \leftrightarrow \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists w(z \in w \wedge w \in x))$.

Assim, para uma coleção x de conjuntos, $\cup x$ caracteriza a união da família x, isto é, a união de todos os elementos que pertencem a algum elemento de x. Disso decorre o seguinte teorema:

Teorema 6. $\forall z(z \in \cup x \leftrightarrow \exists w(z \in w \wedge w \in x))$.

Uma vez introduzido um termo designando a união de um conjunto de conjuntos ($\cup x$), é conveniente apresentar um termo especial que designe a *união de dois conjuntos*.

Definição 8. Sejam x e y conjuntos. A *união* entre os dois é dada por:

$$x \cup y = z \leftrightarrow \forall w(w \in z \leftrightarrow w \in x \vee w \in y).$$

Com isso, tomando o par não ordenado $\{x,y\}$ e $\cup\{x,y\}$, como os únicos elementos de $\{x,y\}$ são x e y, tem-se que $\cup\{x,y\} = x\cup y$.

A garantia de que o conjunto $x\cup y$, de fato, existe é dada no teorema a seguir:

Teorema 7. $\forall z(z \in \cup\{x,y\} \leftrightarrow z \in x \vee z \in y)$.

Demonstração. Pelo Teorema 6, tem-se que

$$z \in \cup\{x,y\} \leftrightarrow \exists w(w \in \{x,y\} \wedge z \in w).$$

Da Definição 1, por (2.1), segue que

$$z \in \cup\{x,y\} \leftrightarrow \exists w((w = x \vee w = y) \wedge z \in w) \leftrightarrow z \in x \vee z \in y.$$

■

Intimamente relacionada com a operação de união, tem-se a operação de *interseção*. A interseção de um conjunto (não-vazio) de conjuntos, $\cap x$, é o conjunto cujos elementos são exatamente os conjuntos que pertencem a todos os objetos de x simultaneamente.

Em particular, a *intersecção entre dois conjuntos*, $x\cap y$, é formalizada a seguir:

Definição 9. Sejam x e y conjuntos. Então, a *interseção* entre os dois é dada por:

$$x\cap y = z \leftrightarrow \forall w(w \in z \leftrightarrow w \in x \wedge w \in y).$$

Essa definição diz que a interseção é o conjunto que contém como seus elementos apenas os conjuntos que são elementos de ambos, x e y.

De maneira análoga, $x\cap y$ é um conjunto cujos elementos pertencem a x e a y, ou seja, $\cap\{x,y\} = x\cap y$.

A garantia de existência de $x\cap y$ é feita no teorema a seguir:

Teorema 8. $\forall z(z \in \cap\{x,y\} \leftrightarrow z \in x \wedge z \in y)$.

Demonstração. Da Definição 1, por (2.1), sabe-se que $x \in \{x,y\}$, assim $\{x,y\} \neq \emptyset$.

Logo, é verdade que existe $\cap\{x,y\}$. Como $z \in \cap\{x,y\}$, então z pertence a todos os elementos de $\{x,y\}$, ou seja, $z \in x$ e $z \in y$.

Analogamente, como $z \in x$ e $z \in y$, então z pertence a todos os elementos de $\{x,y\}$.

■

Definição 10. Sejam x e y conjuntos. Então, x e y são ditos *disjuntos* se, e somente se, $x\cap y = \emptyset$.

Definição 11. Sejam x e y conjuntos. A coleção de todos os elementos que pertencem a x mas que não pertencem a y é dada por:

$$x - y = z \leftrightarrow \forall w(w \in z \leftrightarrow w \in x \wedge w \notin y).$$

Esse é o dito conjunto *diferença entre x e y* ou *complementar de y em relação a x*.

v. **Axioma da Potência**

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

Esse axioma garante que, para todo conjunto x, existe um conjunto y que contém como seus elementos apenas os subconjuntos de x.

O Axioma da Extensionalidade garante a unicidade do conjunto y.

Chama-se esse axioma de Axioma do conjunto de Potência pelo fato de que se um conjunto x tem n elementos, então seu conjunto de potência y — o conjunto de todos os subconjuntos de x — tem 2^n elementos, isto é, o número de elementos de y é 2 elevado à potência n.

Definição 12. Define-se o *conjunto de potência* ou *conjunto das partes* de x como o conjunto dos subconjuntos de x, denotando-o por:

$$\mathscr{P}(x) = y \leftrightarrow \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x).$$

Do que se obtém o seguinte teorema:

Teorema 9. $\forall z (z \in \mathscr{P}(x) \leftrightarrow z \subseteq x)$.

vi. **Axioma do Infinito**

O que nenhum dos outros axiomas afirma, mas este sim, é a existência de, pelo menos, um conjunto que satisfaz uma determinada condição. Qualquer conjunto que satisfaça essa condição terá, pelo menos, uma infinidade numerável de elementos.

Dentro do domínio de ZF, ele assegura a existência de, pelo menos, um conjunto que contém um número infinito de elementos. É importante notar que este axioma não é necessário para provar que existe um número infinito de conjuntos dentro do domínio de ZF. Isso pode ser facilmente comprovado usando apenas alguns axiomas de ZF, não incluindo este último (como será visto mais adiante).

Existem diferentes formulações que podem servir como Axioma do Infinito dentro de ZF. A seguir, são mencionados dois exemplos.

O primeiro enuncia o *Axioma do Infinito* da seguinte forma:

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)).$$

Ou seja, há, pelo menos, um conjunto x que contém o conjunto vazio ($\emptyset$) como um elemento e, para cada um de seus elementos y, contém também a união daquele elemento e seu próprio conjunto unitário.

Qualquer conjunto que satisfaça esta condição terá infinitos elementos, pois ele conterá, pelo menos, os seguintes conjuntos como elementos:

$$\emptyset,\ \emptyset \cup \{\emptyset\},\ \emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\}, \ldots$$

Tais conjuntos podem ser reescritos como:

$$\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ldots$$

Todos os conjuntos nesta progressão infinita são distintos dois-a-dois. Em particular, observe que $\{\emptyset\}$ é diferente de $\emptyset$, já que $\{\emptyset\}$ possui um elemento, enquanto $\emptyset$ não possui nenhum elemento.

Portanto, qualquer conjunto x que contenha cada um desses conjuntos como elementos (junto com outros conjuntos, possivelmente) será um conjunto infinito.

Em contrapartida, poderia ser definido o Axioma do Infinito através da seguinte fórmula:

$$\exists x(\phi \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow \{y\} \in x)).$$

Todo conjunto x que satisfaça este axioma conterá uma infinidade de elementos; por exemplo, $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, ... Claramente, esses conjuntos são todos distintos.

Com isto, já é possível desenvolver a aritmética de $\mathbb{N}$ (números naturais) dentro de ZF. Primeiro, considere a progressão infinita acima:

$$\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ldots$$

Pelo que foi provado por Neumann (1923), o número natural 0 pode ser definido como o primeiro termo dessa progressão e, em geral, o número natural n é o $n+1$ primeiro termo desta progressão (ROGERS, 1971, p. 160-161).

Ou seja, nessa definição, de Neumann, dos números naturais, pensamos em um número natural como o conjunto dos números naturais menores que ele. Assim, o 0 é o conjunto dos números naturais menores que 0. Como não existe número natural menor que 0, então ele será representado pelo conjunto vazio. O número 1 será o conjunto formado pelos números menores que ele, então, 1 é o conjunto $\{0\}$, que é igual a $\{\emptyset\}$. Seguindo a mesma definição, o número 2 será o conjunto $\{0,1\}$, ou seja, o conjunto $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, e assim sucessivamente.

Com os axiomas já introduzidos, pode-se mostrar ainda que existe exatamente um conjunto que contém, como elementos, cada um dos termos desta progressão e nenhum outro elemento. Por exemplo, o menor conjunto que contém cada um desses termos. Chamemos esse conjunto de ω. Este conjunto, então, pode ser considerado o conjunto de todos os números naturais, da forma:

Definição 13. $\omega = \{n \mid n \text{ é número natural}\}$.

Logo, a operação sucessora S para conjuntos em geral pode ser definida da seguinte forma:

$$Sx = x \cup \{x\},$$

ou ainda,

$$Sx = x + 1 = x \cup \{x\}.$$

Para este trabalho, adotaremos a notação $x+1$ para representar o sucessor de x.

Definição 14. Um conjunto x é dito *indutivo* se, e somente se,

(i) $\emptyset \in x$;

(ii) $\forall y(y \in x \to y+1 \in x)$.

O Axioma do Infinito garante a existência de conjuntos indutivos.

Por meio do conjunto indutivo x também podemos definir o conjunto dos naturais, denotado por ω, como a interseção de todos os conjuntos indutivos. É isso que passaremos a demonstrar a seguir:

Definição 15. $\omega = \cap\{x \in \mathscr{P}(I) \mid x \text{ é indutivo}\}$, em que I é o conjunto indutivo determinado pelo Axioma do Infinito.

Note que a intersecção acima é permitida, pois a família de subconjuntos de I que são indutivos é não-vazia, dado que pelo menos o próprio conjunto I é indutivo.

Teorema 10. Seja ω a intersecção de todos os conjuntos indutivos. Então:

(i) ω é um conjunto indutivo;

(ii) Se W é um conjunto indutivo, então $\omega \subseteq W$.

Demonstração. (i) Seja I um conjunto indutivo. Primeiramente, note que $\emptyset \in \omega$. De fato, se W é um subconjunto de I, que é um conjunto indutivo, então $\emptyset \in W$. Assim, $\emptyset$ pertence à intersecção de todos os subconjuntos indutivos de I.

Agora, suponha que $x \in \omega$. Isso significa que $x \in W$, para todo subconjunto W indutivo de I. O que implica que $x+1 \in W$, para todo $W \subseteq I$ indutivo. Portanto, $x+1 \in \omega$ e segue o resultado.

(ii) Seja W um conjunto indutivo. Pelo argumento apresentado no item (i), tem-se que $W \cap I$ é indutivo. Como $W \cap I \subseteq I$, pela definição de ω, todo elemento de ω também pertence a $W \cap I$. Então, $\omega \subseteq W \cap I$ e, assim, $\omega \subseteq W$.

■

Logo, formalizamos em ZFC o conjunto dos números naturais ω. Seus elementos, denominados números naturais, são obtidos por sucessão a partir de 0 de tal modo que todo número natural, exceto 0, é sucessor de algum outro número natural e é sucedido por outro número natural.

Embora possa parecer peculiar considerar números como coleções de elementos, o que importa é o fato de que tais conjuntos se comportam conforme esperaríamos que números naturais o fizessem, em outras palavras, ω satisfaz os Axiomas de Peano.

vii. **Axioma (Esquema) da Substituição**

Antes da exposição deste axioma, faz-se necessária uma definição prévia:

Definição 16. φ é dita *funcional* em x caso ela satisfaça a condição suficiente imposta pelo Axioma da Substituição, isto é, se para todo x existir no máximo um y tal que a fórmula $\varphi(x,y)$ seja verdadeira.

Agora, seja φ qualquer fórmula de ZF que é funcional para todos os elementos de algum conjunto w, em que para cada elemento de w existe um conjunto y que satisfaz $\varphi(x,y)$. Com isso, podemos também definir o Axioma da Substituição da seguinte maneira:

$$\forall w(\forall x \forall y \forall z(x \in w \wedge \varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \rightarrow y = z) \rightarrow \exists u \forall y(y \in u \leftrightarrow \exists x(x \in w \wedge \varphi(x,y))))$$

O axioma diz, neste caso, que existirá um conjunto u cujos elementos são apenas aqueles valores que $\varphi(x,y)$ associa aos elementos de w. Assim, este axioma postula a existência de um conjunto u que é definido em termos de um determinado conjunto w e uma condição $\varphi(x,y)$.

Analogamente ao Axioma da Separação, perceba que este é um esquema de axiomas, ou seja, para cada fórmula $\varphi(x,y)$ que satisfaz a condição do Axioma da Substituição, obtém-se um novo axioma.

Pode-se relacionar o Axioma da Separação com o Axioma da Substituição, como foi bem explicitado por Hrbacek e Jech:

> Outra justificativa intuitiva para o Axioma da Substituição pode ser dada comparando-o com o Axioma da Separação. Este último nos permite percorrer os elementos de um dado conjunto A, verificar para cada $x \in A$ se ele possui ou não a propriedade φ, e coletar aqueles x em um conjunto. De maneira inteiramente análoga, o axioma da substituição nos permite percorrer os elementos de A, tomar para cada $x \in A$ o único y correspondente com a propriedade $\varphi(x,y)$ e reunir todos esses y em um conjunto, $\varphi(A)$. É intuitivamente óbvio que o conjunto $\varphi(A)$ 'não é maior que' o conjunto A. Em contraste, todos os exemplos conhecidos de 'conjuntos paradoxais' são 'grandes', na ordem do 'conjunto de todos os conjuntos' (HRBACEK; JECH, 1999, p. 112-113).

Teorema 11. O Axioma da Separação é derivável do Axioma da Substituição.

Demonstração. Considere ψ uma condição em x.

Tome a fórmula $\varphi(x,y)$ como sendo $x = y \wedge \psi(y)$. Note que, φ é funcional em x. Então, pelo Axioma da Substituição, tem-se

$$(i) \qquad \forall x \exists y \forall w(x \in y \leftrightarrow \exists z(z \in x \wedge z = w \wedge \psi(w))),$$

onde y não é livre em $\varphi(x,y)$ e, consequentemente, não é livre em φ.

Observe que (i) equivale a

$$\forall x \exists y \forall w(w \in y \leftrightarrow w \in y \wedge \psi(w)),$$

disso obtém-se exatamente o Axioma da Separação.

■

viii. **Axioma da Regularidade**

$$\forall x(\exists y(y \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in y \wedge z \in x)))$$

Este axioma diz que todo conjunto não vazio x tem um elemento y que não tem elementos em comum com x. Ou seja, todo conjunto não vazio possui um elemento tal que nenhum outro elemento do conjunto pertence a ele.

Além de ser útil dentro da Teoria dos Conjuntos, este axioma é importante porque com a sua ajuda, pode ser estabelecido que, em ZF, não existe uma cadeia (esse conceito será melhor abordado mais adiante, quando falarmos sobre as *relações de ordem*) infinita descendente de conjuntos na relação de pertinência.

Logo, não existe uma cadeia infinita de conjuntos x_n $(n \geq 1)$ da forma $\ldots \in x_{n+1} \in x_n \in \ldots \in x_3 \in x_2 \in x_1$ e toda cadeia descendente de conjuntos em ZF é finita e termina com o conjunto vazio.

Apesar de não existir nenhuma cadeia infinita descendente, por outro lado, é possível a existência de uma cadeia infinita ascendente. Assim, existem cadeias infinitas da forma: $x_0 \in x_1 \in x_2 \in \ldots \in x_n \in x_{n+1} \in \ldots$

Um exemplo simples disso pode ser visto no conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais.

De forma mais geral, o Axioma da Regularidade implica que cada conjunto no domínio de ZF pode ser obtido começando com o conjunto vazio e, em seguida, aplicando o conjunto de potência e as operações de união um número finito ou transfinito de vezes.

O número ordinal de vezes que essas operações devem ser aplicadas a fim de alcançar qualquer conjunto particular x é chamado de *classificação de x*. Assim, esse axioma implica que todo conjunto dentro do domínio de ZF tem uma classificação ou é *bem fundado*.

2.4 RESULTADOS PRELIMINARES

Nesta seção são apresentados resultados necessários para uma introdução mais simples e fluida do nosso próximo assunto, o Axioma da Escolha.

2.4.1 Relações

No Axioma do Par, foi definido o conceito de par ordenado de x e y como sendo: $\langle x,y \rangle = \{\{x\},\{x,y\}\}$. É imediatamente aparente que esta definição serve para distinguir a ordem dos elementos de um par ordenado.

Como a ordem assumida pelos elementos numa relação se torna importante, definimos relação binária como sendo um conjunto cujos elementos são pares ordenados.

Uma tripla ordenada também pode ser definida como um par ordenado. Por exemplo, $\langle x,y,z \rangle = \langle \langle x,y \rangle, z \rangle$. Assim, sucessivamente, essa ideia pode ser estendida para as n-úplas ordenadas em geral. Para cada n, há uma relação n-ária – que é uma certa relação binária.

Com tal observação, segue a próxima definição.

Definição 17. R é uma *relação* $\Leftrightarrow \forall z(z \in R \rightarrow \exists x \exists y(z = \langle x,y \rangle))$.

Deste modo, e como mencionado anteriormente, um conjunto R é uma relação (binária) se todos os elementos de R são pares ordenados.

Para representar relações, faz-se o uso de letras maiúsculas, a fim de diferenciá-las dos elementos de seus pares ordenados.

A definição, a seguir, apresenta uma notação para referir os elementos pertencentes a uma relação R:

Definição 18. Sejam R uma relação e x, y conjuntos quaisquer. Se $\langle x, y\rangle \in R$ diz-se que *x está em uma relação R com y*, ou ainda que *y é uma imagem de x na relação R*. E denota-se por xRy.

Definição 19. $X \times Y = \{\langle x, y\rangle \mid x \in X \wedge y \in Y\}$.

O conjunto definido anteriormente é chamado de *produto cartesiano de X e Y*. Ele será denotado por $X \times Y$. Quando os conjuntos X e Y são iguais, o produto cartesiano $X \times X$ será denotado por X^2.

Se R é uma relação incluída em um produto cartesiano $X \times Y$ é conveniente dizer que R é uma relação de X em Y. E quando X e Y são iguais, ao invés de dizer que R é uma relação de X em X, pode-se dizer apenas que R é uma relação em X.

Teorema 12. Dados dois conjuntos X e Y, existe o conjunto de todos os pares ordenados $\langle x, y\rangle$ que satisfazem $x \in X$ e $y \in Y$.

Demonstração. Usando os Axiomas do Par, da União, da Separação e da Potência (Partes), define-se o seguinte conjunto:

$$W = \{w \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X \cup Y)) \mid \exists x \exists y(x \in X \wedge y \in Y \wedge w = \langle x, y\rangle)\}.$$

Para verificar que W atende as condições do teorema, basta verificar que todo par ordenado $\langle x, y\rangle$, com $x \in X$ e $y \in Y$, pertence a $\mathscr{P}(\mathscr{P}(X \cup Y))$.

De fato, $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X \cup Y))$ é equivalente a $\{\{x\}, \{x, y\}\} \subset \mathscr{P}(X \cup Y)$, que ocorre se, e somente se, $\{x\} \in \mathscr{P}(X \cup Y)$ e $\{x, y\} \in \mathscr{P}(X \cup Y)$, o que é verdade, pois $\{x\} \subset X \cup Y$ e $\{x, y\} \subset X \cup Y$.

■

Definição 20. Define-se, a seguir, conjuntos importantes para o estudo das relações. Em todos os casos, R denota uma relação:

(i) O conjunto de todos os x que estão em relação R com algum y é chamado de *domínio de R*

$$\mathscr{D}(R) = \{x \mid \exists y(xRy)\};$$

(ii) O conjunto de todos os y tal que, para algum x, x está em relação R com y é chamado de *imagem de R*

$$\mathscr{I}(R) = \{y \mid \exists x(xRy)\}.$$

Definida a noção de relação dentro da Teoria dos Conjuntos, torna-se lícito introduzir alguns conceitos mais específicos. É o que será feito, a seguir, com a definição de *função*:

Definição 21. Sejam X e Y conjuntos. Uma *função* de X em Y é uma relação R de X em Y tal que $\mathscr{D}(R) = A$ e

$$\forall x \forall y \forall z((xRy \wedge xRz) \rightarrow y = z).$$

Os conceitos definidos anteriormente para relações (domínio e imagem) estendem-se para funções, uma vez que toda função também é uma relação.

Agora, sejam A e B dois conjuntos e f uma função de A em B. Então, o conjunto A é o *domínio* de f, denotado por $\mathscr{D}(f) = A$, o conjunto B é o *contradomínio* de f e a notação usual para explicitar esse tipo de relação é:

$$f : A \rightarrow B.$$

Os elementos pertencentes ao domínio são chamados de *argumentos* e os do contradomínio de *valores* da função. Um elemento de B que é associado por f a um elemento de A é chamado de *imagem*.

A aplicação de f a algum elemento $x \in A$ é representada por $f(x)$. Assim, também se representa o fato de y ser a imagem de x pela função f escrevendo:

$$f(x) = y.$$

O conjunto dos valores que são imagens de f de algum elemento em A é chamado de *conjunto imagem* de f. Veja que o conjunto imagem de f não é necessariamente idêntico ao contradomínio B – mas, obrigatoriamente, é um subconjunto dele. É o que se denota por $\mathscr{I}(f) \subseteq B$.

Definição 22. Seja $f : A \rightarrow B$. Diz-se que:

(i) f é *injetora* $\Leftrightarrow \forall x \forall y((x, y \in A \wedge x \neq y) \rightarrow f(x) \neq f(y))$;

(ii) f é *sobrejetora* $\Leftrightarrow \mathscr{I}(f) = B$;

(iii) f é *bijetora* $\Leftrightarrow f$ é injetora e sobrejetora.

Em outras palavras, uma função é injetora se elementos diferentes no domínio de f tem imagens diferentes no contradomínio, isto é, se $x \neq y$, então $f(x) \neq f(y)$; ela é sobrejetora se o seu conjunto imagem é igual ao seu contradomínio.

Antes de entender o conceito de boa ordem, é importante definir os seguintes conceitos:

Definição 23. Seja R uma relação em X, dizemos que:

(i) R é *reflexiva* em $X \Leftrightarrow \forall x(x \in X \rightarrow xRx)$;

(ii) R é *irreflexiva* em $X \Leftrightarrow \forall x(x \in X \rightarrow \neg(xRx))$;

(iii) R é *simétrica* em $X \Leftrightarrow \forall x \forall y(x, y \in X \wedge xRy \rightarrow yRx)$;

(iv) R é *assimétrica* em $X \Leftrightarrow \forall x \forall y(x, y \in X \wedge xRy \rightarrow \neg(yRx))$;

(v) R é *antissimétrica* em $X \Leftrightarrow \forall x \forall y((x, y \in X \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x = y))$;

(vi) R é *transitiva* em $X \Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z((x, y, z \in X \wedge xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$;

(vii) R é *conectada* em $X \Leftrightarrow \forall x \forall y(x, y \in X \wedge x \neq y \rightarrow xRy \vee yRx)$.

Definição 24. Dizemos que uma relação $\preceq$ (ou $\leq$) é uma *relação de ordem* ou *ordem parcial* em X se for:

(i) reflexiva;

(ii) antissimétrica;

(iii) transitiva.

O conjunto X, munido da relação $\preceq$, é chamado de *conjunto parcialmente ordenado*.

Definição 25. Seja $\leq$ uma relação de ordem em X. Para quaisquer $a,b \in X$, diz-se que a e b são *comparáveis* na relação $\leq$ se, e somente se, $a \leq b$ ou $b \leq a$. Caso contrário, diz-se que a e b são *incomparáveis*.

Note que, se a relação é conectada, todos os elementos do conjunto são comparáveis.

Definição 26. Uma relação $\prec$ (ou $<$) é uma *ordem estrita* em X se, e somente se, é assimétrica e transitiva sobre X.

O conjunto X, munido da relação $<$, é chamado de *conjunto estritamente ordenado*.

Definição 27. Uma relação $\leq$ é dita ser de *ordem total* em X se, e somente se, for:

(i) uma ordem parcial em X;

(ii) uma relação conectada.

Definição 28. Sejam $\langle Y, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado e $X \subseteq Y$. Diz-se que a relação de ordem é *restrita* ao conjunto X, quando o domínio dessa relação são apenas os elementos de $X \subseteq Y$.

Definição 29. Sejam $\langle Y, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado e $X \subseteq Y$. Diz-se que X é uma *cadeia* de Y se, e somente se, $\langle X, \leq \rangle$ é uma ordem total.

Definição 30. Seja $\langle Y, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado e $X \subseteq Y$. Então:

(i) $x \in X$ é um *menor elemento* de X se $x \leq y$, para todo $y \in X$;

(ii) $x \in X$ é um *elemento minimal* de X se não existir $y \in X$ tal que $y \leq x$ e $x \neq y$;

(iii) $x \in X$ é um *maior elemento* de X se $y \leq x$, para todo $y \in X$;

(iv) $x \in X$ é um *elemento maximal* de X se não existir $y \in X$ tal que $x \leq y$ e $x \neq y$.

Definição 31. Seja $\langle Y, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado e $X \subseteq Y$. Então:

(i) $x \in Y$ é um *limitante inferior* de X em $\langle Y, \leq \rangle$ se $x \leq y$, para todo $y \in X$;

(ii) $x \in Y$ é um *limitante superior* de X em $\langle Y, \leq \rangle$ se $y \leq x$, para todo $y \in X$;

Teorema 13. Sejam $\langle Y, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado e $X \subseteq Y$. Então:

(i) O menor elemento de X (se existir) é único. E também é o único elemento mínimo;

(ii) O maior elemento de X (se existir) é único. E também é o único elemento máximo.

Demonstração. (i) Suponha, por absurdo, que $x_1, x_2 \in X$ sejam menores elementos distintos de X. Então,

(1) Como x_1 é mínimo de X, então $x_1 \leq x$, para todo $x \in X$. Particularmente, $x_1 \leq x_2$;

(2) Como x_2 é mínimo de X, então $x_2 \leq x$, para todo $x \in X$. Particularmente, $x_2 \leq x_1$.

Como $x_1 \neq x_2$, de (1) e (2) obtém-se que

$$x_1 < x_2 \text{ e } x_2 < x_1$$

e a antissimetria implica em $x_1 = x_2$, o que contratria a hipótese de que x_1 e x_2 são distintos. Logo, $x_1 = x_2$.

(ii) Este item se mostra de maneira análoga ao item anterior.

■

Proposição 1. Sejam $\langle Y, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado e $X \subset Y$, com $X \neq \emptyset$. Se X admite um mínimo, então o conjunto $\langle Y, \leq \rangle$ é totalmente ordenado.

Demonstração. Considere $x_1, x_2 \in Y$ e $X = \{x_1, x_2\}$.

Por hipótese, B admite um mínimo. Ou seja, $x_1 \leq x_2$ ou $x_2 \leq x_1$.

Logo, x_1 e x_2 são comparáveis e, portanto, a relação é conectada, o que implica na ordem total do conjunto.

■

Definição 32. Uma relação $\leq$ é dita uma *boa ordem* sobre o conjunto X se:

(i) $\leq$ for uma ordem parcial;

(ii) Cada subconjunto não-vazio de X tem um menor elemento.

O conjunto X, munido da relação $\leq$, é dito ser um *conjunto bem ordenado*.

Proposição 2. Todo conjunto bem ordenado é totalmente ordenado.

Demonstração. Considere $\langle X, \leq \rangle$ um conjunto bem ordenado. Dados quaisquer $x, y \in X$ tem-se que $\{x, y\}$ é um subconjunto não-vazio de $\langle X, \leq \rangle$ e, portanto, possui um menor elemento, de fato, se x ou y é o menor elemento, tem-se $x \leq y$ ou $y \leq x$. Logo, conclui-se que X é um conjunto totalmente ordenado.

■

2.5 AXIOMA DA ESCOLHA

Este axioma, na formulação de Zermelo, afirma o seguinte: se x é um conjunto de conjuntos não vazios, dois-a-dois disjuntos, então há pelo menos um conjunto y que tem exatamente um elemento em comum com cada um dos elementos de x. Simbolicamente:

$$\forall x(\forall y\forall z(((y\in x)\wedge(z\in x)\wedge(y\neq z))\rightarrow((y\neq\emptyset)\wedge(y\cap z=\emptyset)))\rightarrow\exists y\forall z(z\in x\rightarrow\exists w(y\cap z=\{w\}))).$$

Basicamente, ele argumenta que, se houver uma coleção de conjuntos não vazios, então é possível afirmar a existência de um outro (o conjunto de escolha) que contém exatamente um elemento de cada um deles – mesmo que haja um número infinito de conjuntos e sem uma regra que determine como fazer essa escolha.

Um exemplo disso pode ser dado da seguinte forma: imagine que uma loja está tentando vender sapatos para Salma Hayek e precisa escolher um sapato de cada par para mostrar a ela, dentre um número infinito de pares de sapatos. Para facilitar, essa loja pode definir uma regra de sempre pegar o pé direito para que seja exibido. Logo, forma um conjunto de escolha.

Por outro lado, se tivesse que escolher uma meia de cada par (dentre um número infinito de pares), sendo as meias de cada par iguais, não seria possível estabelecer uma regra para isso (RUSSELL, 1917, p. 126-127). É o Axioma da Escolha que garante a existência desse conjunto de escolha que contém uma meia de cada par, mesmo que não se tenha um método para fazer essa escolha.

Duas formulações alternativas úteis desse axioma, equivalentes à formulação anterior, podem ser declaradas informalmente como segue:

(i) Existe uma *função escolha* para qualquer família não vazia de conjuntos.

Definição 33. Seja $X\neq\emptyset$ uma família não vazia de conjuntos. Uma função $f:X\rightarrow\cup X$ é uma *função escolha* para X se $f(x)\in x$ para todo $x\neq\emptyset$ tal que $x\in X$.

Note que se $f:\mathscr{P}(X)\rightarrow X$ é tal que $f(x)\in x$ para todo subconjunto não vazio x de X, então f é uma função escolha, pois $X=\cup(\mathscr{P}(X))$.

(ii) Para cada relação R, existe uma função f contida nela (f é um subconjunto de R), com o mesmo domínio da relação.

Deste modo, para cada um dos elementos x, R atribui um ou mais elementos y, f atribui exatamente um desses elementos y.

O Axioma da Escolha é conhecido por ser equivalente a uma série de outros princípios ou teoremas importantes dentro da matemática; no sentido de que, uma vez concedidos os axiomas restantes da teoria dos conjuntos, podemos derivar cada um desses princípios e teoremas do Axioma da Escolha e vice-versa.

Mencionaremos a seguir seis dessas equivalências, retiradas de Rubin e Rubin (1985, p. 7-8):

1. Para cada função f existe uma função g tal que para cada x, se $x\in\mathscr{D}(f)$ e $f(x)\neq\emptyset$, então $g(x)\in f(x)$.

2. Para cada relação R existe uma função f tal que $\mathscr{D} = \mathscr{D}(R)$ e $f \subseteq R$.

3. Para toda função f existe uma função g, tal que $\mathscr{D}(g) = \mathscr{I}(f)$ e para todo $x \in \mathscr{D}(g)$, $f(g(x)) = x$.

4. O produto cartesiano de um conjunto de conjuntos não-vazios é não vazio.

5. O produto cartesiano de um conjunto de conjuntos não-vazios de mesma cardinalidade é não-vazio.

6. Se x é um conjunto de conjuntos de mesma cardinalidade, então há uma função que associa a cada par, uma bijeção mapeando um no outro.

Existe um grupo de matemáticos que se recusa a aceitar o Axioma da Escolha — os intuicionistas. Na concepção intuicionista, não é permitido dizer que existe algum elemento matemático que satisfaça tal condição, a menos que alguém dê um exemplo de tal elemento ou mostre como encontrar um exemplo. Eles rejeitam esse axioma por causa dessa concepção que têm da natureza da existência matemática.

O que os intuicionistas se recusam a aceitar no Axioma da Escolha é sua chamada natureza "não construtiva". O axioma afirma que para qualquer conjunto x de conjuntos não-vazios e dois-a-dois disjuntos, existe algum conjunto y que contém como seus elementos um elemento de cada um desses elementos de x. Não nos diz, entretanto, como definir algum conjunto y, uma vez dado qualquer conjunto x.

> O "comportamento" matemático do Axioma da Escolha, por assim dizer, é suficiente para convencer alguns matemáticos de que o axioma não deve ser aceito. Como já observamos, alguns matemáticos (isto é, além dos intuicionistas) duvidam muito que todo conjunto possa ser bem ordenado; em particular, que o conjunto de números reais pode ser bem ordenado. Esses matemáticos devem rejeitar (ou de alguma forma restringir) o Axioma da Escolha, por causa da equivalência desse axioma ao Teorema da Boa-Ordenação. Além disso, como também foi apontado, alguns dos resultados que se seguem a este axioma são curiosos, para dizer o mínimo; por exemplo, o Teorema de Banach-Tarski (ROGERS, 1971, p. 171).

É sem dúvida verdade que um número maior de matemáticos hoje aceita o axioma do que o rejeita, principalmente por causa de sua utilidade e muitas vezes indispensabilidade, para obter muitos resultados desejados. Exemplos disso são dados na figura a seguir:

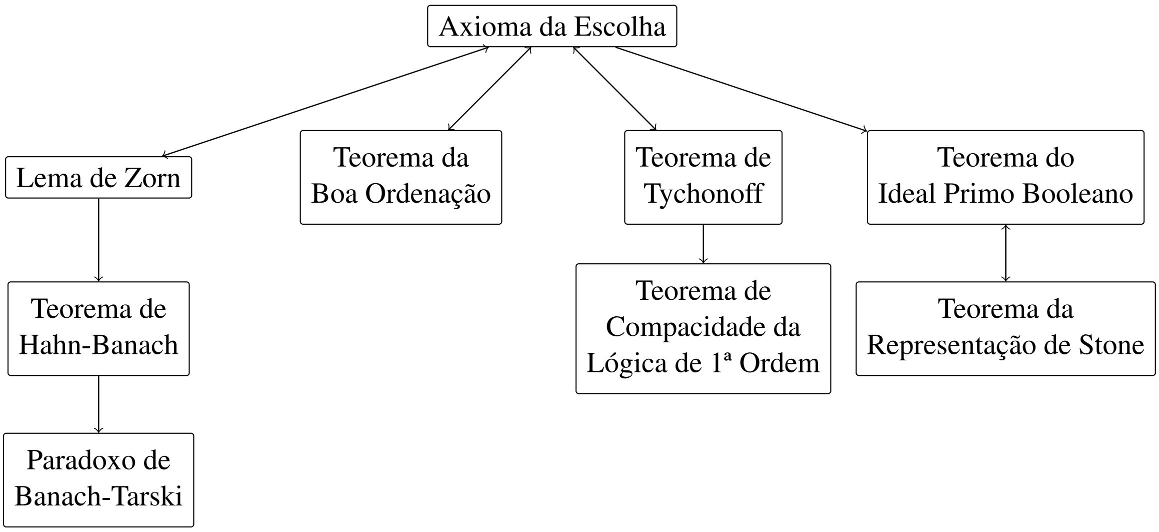

Figura 1: Alguns resultados envolvendo o Axioma da Escolha

Nesta figura, as setas duplas ($\leftrightarrow$) representam equivalências do Axioma da Escolha, enquanto as setas simples ($\rightarrow$) representam consequências.

Com base neste esquema, veremos adiante algumas equivalências e consequências do Axioma da Escolha — com ênfase no Lema de Zorn e no Princípio da Boa-Ordenação.

2.6 EQUIVALÊNCIAS DO AXIOMA DA ESCOLHA

2.6.1 Lema de Zorn

Um importante resultado equivalente ao Axioma da Escolha é o Lema de Zorn. As principais aplicações do Lema de Zorn foram feitas por Kazimierz Kuratowski, em 1922, e, em 1935, por Max Zorn, cuja versão é apresentada neste trabalho.

O Lema de Zorn é usado em diversas demonstrações de resultados importantes da matemática; um grande destaque é na área da Análise Funcional, pois a partir dele é feita a demonstração do Teorema de Hahn-Banach.

Antes de apresentar, de fato, o Lema de Zorn, seguem algumas definições que serão muito úteis em sua demonstração. Tal demonstração será adaptada da Seção 16 de Halmos (1970).

Definição 34. Sejam X um conjunto não vazio parcialmente ordenado, $\overline{X}$ o conjunto de todas as cadeias em X e $g : \overline{X} \to \overline{X}$ uma função. Um subconjunto T de $\overline{X}$ é dito uma torre (com respeito a g) se:

(i) $\emptyset \in T$;

(ii) se $Y \in T$, então $g(Y) \in T$;

(iii) se W é uma cadeia em T, então $\cup W \in T$.

Definição 35. Nas mesmas condições da definição anterior, define-se

$$\overline{X_0} = \cap\{T \subset \overline{X} \mid \text{T é uma torre}\}.$$

Sendo assim, $\overline{X_0}$ é um torre.

Definição 36. Nas mesmas condições da definição 34, seja $\overline{X_0}$ a intersecção de todas as torres em $\overline{X}$. Diz-se que $C \in \overline{X_0}$ é *comparável* se, para todo $A \in \overline{X_0}$, $A \subset C$ ou $C \subset A$.

Lema 1 (Lema de Zorn)**.** Se $\langle X, \leq \rangle$ é um conjunto não-vazio parcialmente ordenado tal que toda cadeia em X tem um limitante superior, então X contém um elemento maximal.

Demonstração. Defina $\overline{X}$ como sendo o conjunto das cadeias de X ordenado pela relação de inclusão.

Afirmação 1. Se $\overline{X}$ possui um elemento maximal, então X possui um elemento maximal.

De fato, suponha que W é um elemento maximal de $\overline{X}$.

Pela hipótese sobre X, seja $x \in X$ um limitante superior de W, ou seja, $w \leq x$, para todo $w \in W$. Assim, temos que $x \in W$, pois, caso contrário, teríamos que $W \cup \{x\}$ seria uma cadeia que contém propriamente W, contradizendo a maximalidade de W.

Logo, temos que x é maximal em X, pois, se existisse $y \in X$ tal que $x \leq y$ e $x \neq y$, teríamos novamente que $W \cup \{y\}$ seria uma cadeia maior que W.

Afirmação 2. Se W é uma cadeia em $\overline{X}$, então $\cup W \in \overline{X}$.

Como $\cup W$ é um subconjunto de X, para mostrarmos a afirmação deve-se provar que $\cup W$ é uma cadeia em X.

Sejam $y, z \in \cup W$ e $Y, Z \in W$ tais que $y \in Y, z \in Z$. Como W é uma cadeia, temos que $Y \subset Z$ ou $Z \subset Y$, ou seja, $y, z \in Y$ ou $y, z \in Z$. Como $W \subset \overline{X}$, tanto Y quanto Z são cadeias, assim $y \leq z$ ou $z \leq y$. O que conclui que $\cup W$ é uma cadeia em X.

O objetivo agora passar a ser: encontrar um elemento maximal em $\overline{X}$, para se utilizar a Afirmação 1.

Seja f uma função de escolha em $\mathscr{P}(X) \setminus \emptyset$.

Para cada conjunto $Y \in \overline{X}$, seja $\hat{Y}$ o conjunto de todos elementos $x \in X$ cuja adjunção a Y produz um conjunto em $\overline{X}$; em outras palavras, $\hat{Y} = \{x \in X \mid Y \cup \{x\} \in \overline{X}\}$.

Seja a função $g : \overline{X} \to \overline{X}$, definida por:

$$g(A) = \begin{cases} Y \cup \{f(\hat{Y} - Y)\}, & \text{se } \hat{Y} - Y \neq \emptyset, \\ Y, & \text{se } \hat{Y} - Y = \emptyset. \end{cases}$$

Segue da definição de $\hat{Y}$ que $\hat{Y} - Y = \emptyset$ se, e somente se, Y é maximal.

A função g define que se Y é uma cadeia não-maximal, g estende Y acrescentando-lhe um único elemento, isto é, existirá $x \notin Y$ tal que $Y \cup \{x\}$ é uma cadeia. Então, o objetivo será mostrar que existe Y tal que $g(Y) = Y$.

Repare a necessidade de usar o Axioma da Escolha para podermos escolher um elemento para estender a cadeia Y.

Note que existe, pelo menos, uma torre, pois $\overline{X}$ será uma torre. Como a interseção de uma coleção de torres é uma torre, segue, em particular, que se $\overline{X_0}$ é a interseção de todas as torres, então $\overline{X_0}$ é a menor torre.

A próxima etapa é mostrar que a torre $\overline{X_0}$ é uma cadeia. E dizer que $\overline{X_0}$ é uma cadeia significa que todos os conjuntos em $\overline{X_0}$ são comparáveis.

Afirmação 3. $\overline{X_0}$ é uma cadeia em $\overline{X}$.

Sabe-se que $\overline{X_0}$ é uma cadeia se, e somente se, todo $C \in \overline{X}$ é comparável.

Note que $\emptyset \in \overline{X_0}$ e $\emptyset$ é comparável, então, existe, pelo menos, um elemento comparável em $\overline{X_0}$. Seja C um conjunto comparável não-vazio. Se A é um subconjunto próprio de C, como C é comparável, tomando a função g definida anteriormente, segue que $g(A) \subseteq C$ ou $C \subset g(A)$.

Se $C \subset g(A)$, A é um subconjunto próprio de um subconjunto próprio de $g(A)$, isto é, $A \subset C \subset g(A)$, isto contradiz o fato de que $g(A) - A$ não pode ser mais do que um conjunto unitário. Então, $g(A) \subseteq C$.

Defina os seguintes conjuntos:

$$U = \{A \in \overline{X_0} : A \subseteq C \vee g(C) \subseteq A\} \text{ e}$$

$$U_1 = \{A \in \overline{X_0} : A \subset g(C) \vee g(C) \subset A\}.$$

Veja que U_1 é o conjunto dos elementos de $\overline{X_0}$ comparáveis com $g(C)$. Do fato de que $C \subseteq g(C)$, conclui-se que a coleção U é menor que a coleção U_1, ou seja, $U \subset U_1$.

Agora, mostraremos que U é uma torre. De $U \subset \overline{X_0}$ e de $\overline{X_0}$ ser a menor de todas as torres, concluiremos que $U = \overline{X_0}$.

(i) Veja que $\emptyset \in U$, pois $\emptyset \subset C$;

(ii) Para mostrar a segunda condição (se $A \in U$, então $g(A) \in U$), divide-se a prova em três casos:

  (a) A subconjunto próprio de C. Então, $g(A) \subset C$ e, portanto, $g(A) \in U$;

  (b) $A = C$. Então, $g(A) = g(C)$ e, assim, $g(C) \subseteq g(A)$ e, portanto, $g(A) \in U$;

  (c) g(C)$\subseteq$ A. Então, $g(C) \subseteq g(A)$ e, portanto, $g(A) \in U$.

(iii) Para a terceira condição (que a reunião de uma cadeia em U pertença a U), tome S uma cadeia em U. Tem-se duas possibilidades:

  (a) Todo $A \in S$ está contido em C. Ou seja, $\cup S \subset C$ e, portanto, $\cup S \in U$;

  (b) Existe, pelo menos, um $A \in S$ tal que $g(C) \subseteq A$. Isto é, como $A \subset \cup S$, tem-se que $g(C) \subset \cup S$ e, novamente, $\cup S \in U$.

Logo, U é uma torre incluída em $\overline{X_0}$ e, portanto, como $\overline{X_0}$ é a menor torre, tem-se que $U = \overline{X_0}$. Disso, se $A \in \overline{X_0}$, temos que $(A \subset C \to A \subset g(C))$ ou $g(C) \subset A$. Logo, $\emptyset$ é comparável e g leva os conjuntos comparáveis de $\overline{X_0}$ em conjuntos comparáveis de $\overline{X_0}$.

Considere uma família de conjuntos comparáveis P_i e seja $Q \in \overline{X}$ qualquer. Para cada i, como P_i é comparável, devemos ter $Q \subset P_i$ ou $P_i \subset Q$. Se Q está contido em pelo menos um P_i, então obviamente Q está contido na união deles. Se todos os P_i estão contidos em Q, então a união dos P_i também está contida em Q. Logo, a união dos P_i é comparável.

Agora, como a união de conjuntos comparáveis é um conjunto comparável, se $\overline{X_1}$ for o conjunto dos comparáveis em $\overline{X_0}$, podemos garantir, pela definição, que $\overline{X_1}$ é uma torre.

Portanto, é imediato que $\overline{X_0} = \overline{X_1}$ e que $\overline{X_0}$ é uma cadeia, concluindo a demonstração.

Afirmação 4. $\cup\overline{X_0}$ é maximal em $\overline{X}$.

Seja $C = \cup\overline{X_0}$. É suficiente mostrar que $g(C) = C$.

Pela afirmação anterior, $\overline{X_0}$ é uma cadeia e é uma torre. Isso nos garante que $C \in \overline{X_0}$. Portanto, $g(C) \in \overline{X_0}$. Logo, $g(C) \subset \cup\overline{X_0}$. Ou seja, $g(C) \subset C$. Como $C \subset g(C)$, conclui-se que $g(C) = C$.

Provamos, então, que $\overline{X}$ tem um elemento maximal e, pela Afirmação 1, X também possui um elemento maximal. Provando-se, assim, o Lema de Zorn.

■

Veja que se A é uma cadeia em X, a hipótese do Lema de Zorn garante que existe um limitante superior para A em X; não garante a existência de um limitante superior para A em A.

2.6.2 Teorema da Boa Ordenação

O Axioma da Escolha é equivalente também ao famoso Teorema da Boa Ordenação, que foi provado pela primeira vez, em 1904, por Zermelo. De fato, a prova de Zermelo do teorema da boa ordenação contém o primeiro (importante) aparecimento do Axioma da Escolha, embora este axioma tenha sido implicitamente pressuposto inúmeras vezes por matemáticos. O teorema afirma que cada conjunto pode ser bem ordenado.

Teorema 14 (Teorema da Boa Ordenação)**.** Para todo conjunto, não vazio, X existe uma relação $\leq$ tal que $\langle X, \leq\rangle$ é bem ordenado.

A ideia para a demonstração será aplicar o Lema de Zorn, tomando Y como elemento maximal do conjunto com essa ordem, se Y não for maximal em X, chegaremos a uma contradição de maximalidade de Y. Como base para a demonstração foram utilizados Halmos (1970, p. 75) e Fajardo (2013, p. 89-90).

Demonstração. Definimos uma ordem parcial $\langle\overline{X}, \preceq\rangle$ da seguinte forma: $\overline{X}$ é o conjunto de todos os conjuntos bem ordenados $\langle Y, \leq\rangle$ tais que $Y \subset X$ e $\langle Y_1 \leq_1\rangle \preceq \langle Y_2, \leq_2\rangle$ se:

(i) $Y_1 \subset Y_2$;

(ii) $x \leq_1 y$ se, e somente se, $x \leq_2 y$, para todo $x, y \in Y_1$;

(iii) se $x \in Y_1$ e $y \in Y_2 \backslash Y_1$, então $x \leq_2 y$.

Seja S uma cadeia em $\overline{X}$.

Como S é uma cadeia, sabemos que dados $x,y,z \in Y$ existe $\langle Y', \leq' \rangle \in S$ tal que $x,y,z \in Y'$ e, para quaisquer $u,v \in Y'$, tem-se que $u \leq v$ se, e somente se, $u \leq' v$. Assim, a relação $\leq$ é uma relação de ordem, já que as propriedades de ordem são satisfeitas para $\leq$, uma vez que são satisfeitas para $\leq'$.

Afirmação 5. $\langle Y, \leq \rangle \in \overline{X}$ é um limitante superior de S.

Verifica-se que $\leq$ é uma relação bem ordenada. Suponha $Z \subset Y$ um conjunto não-vazio. Assim, existe $\langle Y_1, \leq_1 \rangle \in S$ tal que $Z \cap Y_1 \neq \emptyset$. Note que, pela hipótese, existe $z \in Z \cap Y_1$, que é o mínimo em relação a ordem $\leq_1$.

Devemos mostrar agora que z é o mínimo em Z, em relação a ordem $\leq$.

Suponha, por absurdo, que existe $w \in Z$ tal que $w \neq z$ e $w \leq z$. Como z é o mínimo em $Z \cap Y_1$, segue que $w \notin Y_1$, caso contrário, z não seria o mínimo.

Suponha, então, $\langle Y_2, \leq_2 \rangle$ tal que $w \in Y_2$. Como S é uma cadeia, é válido que: $\langle Y_2, \leq_2 \rangle \preceq \langle Y_1, \leq_1 \rangle$ ou $\langle Y_1, \leq_1 \rangle \preceq \langle Y_2, \leq_2 \rangle$.

Note que o primeiro caso não é válido, pois $w \in Y_2 \backslash Y_1$. Assim, temos que $\langle Y_1, \leq_1 \rangle \preceq \langle Y_2, \leq_2 \rangle$. Pela terceira condição de ordem $\preceq$ (transitividade), segue que $z \leq_2 w$. Mas, como $w \leq z$, da definição de relação de ordem $\leq$, do fato de S ser uma cadeia e da segunda condição de ordem $\preceq$ (simetria), segue que $w \leq_2 z$.

Logo, como $w \in Z$ e $z \in Z$, vale $z \leq_2 w$ ou $w \leq_2 z$. Portanto, pela relação de antissimetria de $\leq_2$, conclui-se que $w = z$; o que contradiz a hipótese e garante a validade da afirmação.

Por fim, vamos utilizar o Lema de Zorn para obter que $\langle \hat{Y}, \leq \rangle$ é maximal em $\overline{X}$. O que falta para concluirmos é mostrar que $\hat{Y} = X$. Suponha que $\hat{Y} \neq X$ e $x \in X \backslash \hat{Y}$. Seja $Y' = \hat{Y} \cup \{x\}$ e defina uma ordem $\leq'$ em Y', acrescentando a condição de que $y \leq x$, para todo $y \in \hat{Y}$.

A relação $\leq'$ é dada por $\leq' = \leq \cup \{\langle y, x \rangle : y \in Y\}$. Veja que $\langle Y', \leq' \rangle$ é um conjunto bem ordenado, que é diferente de $\langle \hat{Y}, \leq \rangle$ e é tal que $\langle \hat{Y}, \leq \rangle \preceq \langle Y', \leq' \rangle$, o que nega a maximalidade de $\langle \hat{Y}, \leq \rangle$, levando a uma contradição.

Portanto, todo conjunto X pode ser bem ordenado.

■

A boa ordenação não necessita ter qualquer relação, seja ela de que natureza for, com qualquer outra estrutura que o conjunto já possua. Conclui-se apenas que certos conjuntos podem ser ordenados de muitos modos, alguns dos quais bem ordenados e outros não.

Teorema 15. Os seguintes resultados são equivalentes:

(i) Axioma da Escolha;

(ii) Lema de Zorn;

(iii) Teorema da Boa Ordenação.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Como para demonstrar o Lema de Zorn foi utilizado o Axioma da Escolha, já está feito que o Axioma da Escolha implica no Lema de Zorn.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Como para demonstrar o Teorema da Boa Ordenação utilizamos o Lema de Zorn, a implicação entre o Lema de Zorn e o Teorema da Boa Ordenação já está feita.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Queremos mostrar que, se todo conjunto X pode ser bem ordenado, então existe uma função escolha para esse conjunto de conjuntos.

Seja X um conjunto de conjuntos não-vazios qualquer. Define-se $\cup X = \{x : x \in Z$ para algum $Z \in X\}$. Como, por hipótese, todo conjunto é bem ordenável, existe uma relação de ordem $\leq$ tal que $\langle \cup X, \leq \rangle$ é um conjunto bem ordenado.

Agora, como $\langle \cup X, \leq \rangle$ é uma boa ordem, todo subconjunto não-vazio de $\cup X$ possui um (único) menor elemento. Assim, seja a função $f : X \to \cup X$ dada por $f(Z) = \min(Z)$, para todo $Z \in X$, que é a função associa cada elemento de X ao seu mínimo.

Em particular, f é uma função escolha do conjunto de conjuntos X, do que segue o resultado.

■

2.6.3 Teorema de Tychonoff

Uma equivalência muito forte do Axioma da Escolha é o Teorema de Tychonoff. Esse teorema é de extrema importância no ramo da Topologia e da Análise Matemática.

Teorema 16. O produto de uma família de espaços topológicos compactos é compacto.

A demonstração deste teorema requer vigorosamente o uso do Lema de Zorn; para consulta, recomenda-se o livro de Lima (1976, p. 257).

Este teorema foi originalmente demonstrado por Andrei Tychonoff, em 1930, através de vários métodos, porém todos utilizavam o Axioma da Escolha. Em 1950, John Kelley provou que o teorema de Tychonoff implica o Axioma da Escolha em ZF (MOORE, 2013, p. 239).

2.6.4 Espaços Vetoriais

O seguinte teorema foi originalmente demonstrado em 1905, por Georg Hamel. Tal resultado, por vezes, citado unicamente como consequência do Axioma da Escolha é, na verdade, equivalente a ele, conforme provado em 1984, por Andreas Blass.

Teorema 17. Todo espaço vetorial V, sobre um corpo $\mathbb{K}$, possui uma base.

Demonstração. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um conjunto $X \subset V$ é linearmente independente quando nenhum elemento (vetor) de X é combinação linear não trivial dos outros elementos de X. Uma base B de um espaço vetorial V é um conjunto $B \subset V$ linearmente independente que gera V.

(i) Se $V = \{0\}$, neste caso, $B = \emptyset$ é uma base para V.

(ii) Se $V \neq \{0\}$, neste caso, seja $E = \{X \subseteq V : X$ é linearmente independente$\}$, um conjunto ordenado pela inclusão, e $\mathscr{C}$ uma cadeia de elementos em E. Provar que existe um limitante superior para $\mathscr{C}$ consiste em mostrar um subconjunto Z linearmente independente em V tal que, para todo $C \in \mathscr{C}$, $C \subseteq Z$. Essa existência possibilitará a aplicação do Lema de Zorn.

Afirmação 6. $Z = \cup\mathscr{C} = \cup\{C : C \in \mathscr{C}\}$ é limitante superior para $\mathscr{C}$.

Seja $Z' = \{u_0, ..., u_n\} \subseteq Z$. Para cada $i \leq n$, existe $C_i \in \mathscr{C}$ tal que $u_i \in C_i$. Como $\mathscr{C}$ é uma cadeia, segue que existe $j \leq n$ tal que $u_i \in C_j$, para todo $i \leq n$ e, como $C_j \in \mathscr{C}$, decorre que Z' é linearmente independente. Como Z' é um subconjunto qualquer de Z, conclui-se que Z é linearmente independente e um limitante superior para $\mathscr{C}$.

Pelo Lema de Zorn, existe $B \in E$ tal que B é um elemento maximal de E. Em particular, B é linearmente independente. Na sequência, provaremos que B é gerador de V, isto é, $V = [B]$.

Suponha, por absurdo, que B não seja gerador de V. Assim, existe $v \in V \backslash [B]$ e $B' = (B \cup \{v\})$ seria linearmente independente. E como consequência disso, teríamos que $B' \in E$ e $B \subset B'$, o que contraria a maximalidade de B.

Portanto, B é um conjunto gerador (linearmente independente) de V, ou seja, B é uma base de V.

■

Este teorema não pode ser provado na teoria dos conjuntos de ZF, é necessária a utilização do Axioma da Escolha para a demonstração.

Pelo Axioma da Escolha, duas bases de um espaço vetorial V têm a mesma cardinalidade (mesmo se a base for um conjunto infinito).

2.7 CONSEQUÊNCIAS DO AXIOMA DA ESCOLHA

O Axioma da Escolha tem aplicações importantes dentro de quase todas as áreas da Matemática; em particular, dentro da própria Teoria dos Conjuntos e da Álgebra, Análise e Topologia. Nesta seção, veremos algumas dessas consequências.

2.7.1 União Enumerável

A aplicação do Axioma da Escolha ocorre demasiadas vezes na área da Análise, onde muitas pessoas, mesmo desconhecendo, estão aplicando o referido axioma. O Teorema 21 é um exemplo disso. Antes de sua demonstração, são enunciados alguns resultados úteis, para conferir a demonstração de tais resultados recomenda-se a leitura do Capítulo 1 de Lima (2006).

Definição 37. Um conjunto X é dito *enumerável* se for finito ou existir uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$.

Teorema 18. Todo subconjunto $X \subseteq \mathbb{N}$ é enumerável.

Ou seja, todo subconjunto infinito de um conjunto enumerável é enumerável.

Proposição 3. O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

Teorema 19. A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Demonstração. Seja $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma família enumerável de conjuntos enumeráveis.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, existe uma bijeção $f_i : \mathbb{N} \to X_i$. Defina

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \cup X_i \ . \\ & \langle m,n\rangle & \mapsto & f_m(n) \end{array}$$

Como o produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável, resta mostrar que f é sobrejetiva para concluir que $\cup X_i$ é enumerável.

Seja $x \in \cup X_i$. Assim, existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in X_m$. Como $f_m : \mathbb{N} \to X_m$ é bijeção, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_m(n) = x$. Logo, $x \in f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ e f é sobrejetiva.

■

Note que, nessa demonstração não foi evidenciado o uso do Axioma da Escolha, mas ele está sim sendo utilizado (implicitamente): veja que, cada X_i pode ser enumerado, mas para cada um dos X_i existem infinitas enumerações, sendo assim, devemos escolher, para todo $i \in \mathbb{N}$, uma das possíveis enumerações de X_i, logo devemos fazer um número infinito de escolhas.

2.7.2 Funções Contínuas

Definição 38. A função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita *contínua* em $a \in X$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x-a| < \delta$ implicam $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

A função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $A \subseteq X$ se ela é contínua em todos os pontos $a \in A$.

Utiliza-se o Axioma da Escolha para provar que a definição de função contínua pode ser caracterizada de uma outra maneira, muito útil em demonstrações sobre continuidade.

Teorema 20. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a se, e somente se, $f(x_n)$ converge para $f(a)$, para toda sequência $(x_n) \subseteq X$ tal que x_n converge para a.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha f contínua em a e $(x_n) \subseteq X$ uma sequência qualquer tal que $(x_n) \to a$ (x_n converge para a).

Seja $\varepsilon > 0$. Como f é contínua em a, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X \cap (a-\delta, a+\delta)$ implica que

$$f(x) \in (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon). \qquad (i)$$

Como $x_n \to a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in (a-\delta, a+\delta), \forall n \geq n_0. \qquad (ii)$$

De (i) e (ii), obtemos que se $n \geq n_0$

$$f(x_n) \in (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon),$$

isto é, $f(x_n) \to f(a)$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $(x_n) \to a$ e que f não seja contínua em a. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existe x_δ em que $|x_\delta - a| < \delta$, em que $|f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Particularmente, para cada $k = 1,2,3,\ldots$, escolhemos x_k tal que $|x_k - a| < \frac{1}{k}$ e $|f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon$ — perceba que a utilidade do Axioma da Escolha aparece neste momento, onde a função escolha possui domínio A, sendo que os elementos de A são os conjuntos da forma $A_k = \{x \in X : |x-a| < \frac{1}{k} \text{ e } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon\}$.

Portanto, obtemos que $(x_k) \to a$, mas $f(x_k) \not\to a$. O que conclui a demonstração.

■

2.7.3 Teorema do Ideal Primo Booleano e Teorema da Representação de Stone

Diversas proposições que dependiam do Axioma da Escolha foram estudadas por matemáticos. Suspeitava-se de que várias delas eram mais fracas do que ele, como é o caso do Teorema do Ideal Primo para álgebras booleanas. No entanto, não havia maneira conhecida de determinar completamente a força relativa dessas proposições.

Em 1936, o algebrista Marshall Stone teve grandes avanços com suas descobertas sobre a representação dos anéis booleanos. Em uma delas, demonstrou o teorema que mais tarde seria a pedra angular do seu trabalho. (MOORE, 2013, p. 229-230). Este teorema é visto a seguir:

Teorema 21 (Teorema do Ideal Primo Booleano)**.** Em um anel booleano existe pelo menos um ideal primo.

O Teorema do Ideal Primo é uma consequência do Axioma da Escolha, porém, o inverso não é verdade: o Axioma da Escolha não pode ser provado a partir dele.

Stone deduziu uma proposição equivalente ao teorema abordado, posteriormente conhecida como o Teorema de Representação de Stone. Tal resultado é um dos mais fundamentais sobre álgebras booleanas e é uma consequência do Axioma da Escolha.

Teorema 22 (Teorema da Representação de Stone)**.** Todo anel booleano é isomórfico a um anel de conjuntos.

Para uma melhor compreensão da álgebra booleana e os dois teoremas citados, veja a Seção 2.3 de Jech (1973).

2.7.4 Teorema de Hahn-Banach

O Teorema de Hahn-Banach é uma das bases da Análise Funcional. Ele pode ser apresentado de duas formas: analítica ou geométrica. A forma analítica trata sobre a extensão de funcionais lineares definidos em subespaços a todo espaço vetorial. Já na forma geométrica o resultado provém da existência de um hiperplano fechado que separa certos tipos de conjuntos convexos. A seguir, é vista a forma analítica desse teorema:

Teorema 23 (Teorema de Hahn-Banach)**.** Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $p : V \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ um funcional linear definido em um subespaço vetorial $U \subset V$ tal que f é dominado por p, isto é, $f(v) \leq p(v)$, para qualquer $v \in U$. Então, f possui uma extensão linear $F : V \to \mathbb{R}$ que é dominada por p, ou seja, F satisfaz $F(x) \leq p(x)$, para todo $x \in V$. F é dita ser extensão de Hahn-Banach de f.

A demonstração deste teorema utiliza o Lema de Zorn, a fim de garantir a existência de um elemento maximal e conseguir um candidato para ser a extensão linear.

2.7.5 Paradoxo de Banach-Tarski

Um dos resultados decorrentes do Axioma da Escolha e que mais agravaram a polêmica em torno dele é o Paradoxo de Banach-Tarski.

Teorema 24 (Banach-Tarski)**.** Uma bola compacta em $\mathbb{R}^3$ pode ser dividida em uma quantidade finita de subconjuntos disjuntos que podem ser rotacionados de modo a obter duas cópias idênticas da bola original.

A demonstração deste resultado, ao contrário da maioria dos teoremas em geometria, depende dos axiomas escolhidos para a Teoria dos Conjuntos de uma forma crítica. Pode ser comprovado através do Axioma da Escolha, que permite a construção de conjuntos não-mensuráveis, ou seja, de coleções de pontos que não possuem volume no sentido comum e cuja construção requer um número incontável de escolhas (TOMKOWICZ; WAGON, 2016).

Para muitos, esse resultado apenas prova que não existe uma medida universal finitamente aditiva em $\mathbb{R}^3$. Para outros, no entanto, essa é uma evidência de que as aplicações do Axioma da Escolha são inúteis, sem nenhuma conexão com a realidade.

Se pode pensar que tal resultado é uma impossibilidade lógica e que uma contradição formal poderia ser derivada do teorema de Banach-Tarski. Mas, sabe-se que nenhuma contradição formal é derivável desse teorema, pela razão de que nenhuma contradição é derivável do próprio Axioma da Escolha (dada a sua consistência na Teoria dos Conjuntos).

Os matemáticos Matthew Foreman e Friedrich Wehrung, mostraram que o Teorema de Hahn–Banach produz conjuntos não-mensuráveis. E, inspirado nesse trabalho, Janusz Pawlikowski mostrou que o Paradoxo de Banach-Tarski é uma consequência do próprio Teorema de Hahn-Banach. Para uma leitura completa dessas demonstrações, veja, respectivamente, Foreman e Wehrung (1991) e Pawlikowski (1991).

3 CONCLUSÃO

Este trabalho abordou vários aspectos do Axioma da Escolha. Começando com a sua contextualização histórica, não apenas falou-se do surgimento desse axioma, mas também de diversos eventos que levaram a sua consequente formulação. Percebeu-se uma árdua jornada até que a Teoria dos Conjuntos, de fato, pudesse se estabilizar da maneira como conhecemos hoje.

Há centenas de consequências do Axioma da Escolha espalhadas pelas mais diversas áreas da Matemática e da Lógica. Algumas dessas equivalências e consequências foram abordadas, mas representam um ínfimo dos resultados existentes.

O foco deste trabalho é o Axioma da Escolha, mas é difícil falar desse axioma e não mencionar o Lema de Zorn ou o Princípio da Boa Ordenação, que representam equivalências tão poderosas e úteis quanto.

Com isso, o Axioma da Escolha se mostrou extremamente importante em diversas áreas da Matemática, tais como: Análise, Topologia, Álgebra e Lógica. Sem o Axioma da Escolha, provavelmente nem haveria Análise Funcional.

Finalmente, se nota que o Axioma da Escolha, tanto de maneira positiva quanto negativa, chegou abalando a Matemática e os matemáticos. Inclusive é um fato curioso de se constatar que, mesmo já sendo um resultado utilizado inconscientemente, a sua exposição e a análise formal dos seus fundamentos abalaram tantas estruturas. Assim, o axioma de Zermelo exemplifica muito bem os problemas gerados pela tentativa séria de formular explicitamente uma suposição implícita.

REFERÊNCIAS

BOURBAKI, N. *Elements of Mathematics, Theory of Sets*. London: Addison-Wesley, 1968. 414 p.

CANTOR, G. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, n. 21, p. 51–58, 545–591, 1883.

DOMINGUES, H. H. *Fundamentos de aritmética*. São Paulo: Atual, 1991. 297 p.

EUCLIDES. *Os Elementos*. São Paulo: Unesp, 2009. 600 p.

FAJARDO, R. A. dos S. *Elementos da Teoria dos Conjuntos*. 2013. Disponível em: `https://www.ime.usp.br/~fajardo/Elementos_Conjuntos.pdf`. Acesso em: 02 março 2021.

FERREIRÓS, J. *The Early Development of Set Theory*. 2020. Disponível em: `https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/settheory-early/`. Acesso em: 18 março 2021.

FOREMAN, M.; WEHRUNG, F. The Hahn-Banach theorem implies the existence of a non-Lebesgue measurable set. *Fundamenta Mathematicae*, n. 138, p. 13–19, 1991.

GÖDEL, K. The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, n. 24, p. 556–557, 1938.

GÖDEL, K. *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis with the Axioms of Set Theory*. Princeton: Princeton University Press, 1940. 149 p.

HALMOS, P. R. *Teoria Ingênua dos Conjuntos*. São Paulo: Polígono, 1970. 116 p.

HRBACEK, K.; JECH, T. *Introduction to Set Theory*. 3. ed. New York: Marcel Dekker, 1999. 291 p.

JECH, T. *The Axiom of Choice*. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1973. 202 p.

LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1976. 299 p.

LIMA, E. L. *Análise Real, Volume 1: Funções de uma Variável*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. 189 p.

MOORE, G. H. *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, & Influence*. Mineola, New York: Dover, 2013. 410 p.

MORTARI, C. A. *Introdução à lógica*. São Paulo: UNESP, 2001. 393 p.

PAWLIKOWSKI, J. The Hahn-Banach theorem implies the Banach-Tarski paradox. *Fundamenta Mathematicae*, n. 138, p. 21–22, 1991.

ROGERS, R. *Mathematical Logic and Formalized Theories. A Survey of Basic Concepts and Results*. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1971. 235 p.

RUBIN, H.; RUBIN, J. E. *Equivalents of the Axiom of Choice, II*. Amsterdam: Elsevier Science Ltd, 1985. 352 p.

RUSSELL, B. *Introduction to Mathematical Philosophy*. London: George Allen & Unwin, 1917. 338 p.

TOMKOWICZ, G.; WAGON, S. *The Banach-Tarski Paradox*. New York: Cambridge University Press, 2016. 348 p.