

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

GABRIELA JACOBY RODRIGUES

Intérpretes de Libras nas aulas de matemática: qual o vocabulário básico necessário para interpretar uma aula sobre Princípio Fundamental da Contagem?

FLORIANÓPOLIS

2021

GABRIELA JACOBY RODRIGUES

Intérpretes de Libras nas aulas de matemática: qual o vocabulário básico necessário para interpretar uma aula sobre Princípio Fundamental da Contagem?

Trabalho de Conclusão do Curso de Graduação em Licenciatura em matemática do Centro de física e matemática da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do título de Licenciada em matemática.

Orientador: Janine Soares de Oliveira

FLORIANÓPOLIS

2021

GABRIELA JACOBY RODRIGUES

Intérpretes de Libras nas aulas de matemática: qual o vocabulário básico necessário para interpretar uma aula sobre Princípio Fundamental da Contagem?

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de “Licenciada em Matemática”, e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática.

Florianópolis, 12 de maio de 2021.

Prof. Dra. Silvia Martini de Holanda
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Janine Soares de Oliveira
Orientadora
Instituição Universidade Federal de Santa Catarina

Profa. Dra. Débora Campos Wanderley
Instituição Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Felipe Lopes Castro
Instituição Universidade Federal de Santa Catarina

AGRADECIMENTOS

Eu sou grata a tantos seres que fazem parte desse processo a tantos anos. Agradeço muito ao universo por todas as possibilidades de crescimento e troca presentes nos últimos anos.

Agradeço muito aos meus pais, Luciana e Marcelo, por todas as contribuições ao longo desses anos. O amor e apoio de vocês me leva mais longe. A minha irmã, Camila por todas as reflexões e estímulos a buscar o que de fato faz meu coração mais feliz.

À dinda Ana e à tia Mara que sempre deram o exemplo em relação a seguir os estudos e se destacar por apenas ser. Tia Mara eu tenho muito orgulho e tu me inspira muito a seguir estudando e me aperfeiçoando como professora.

Aos meus avós Maria e Alcides por me ensinar o que é ser amada e valorizada. Vó, seguir com os estudos foi mais difícil sem ter o teu apoio e teus olhos atentos a observar os meus passos no colégio e posteriormente na faculdade. Sinto muita falta de vocês.

Aos meus colegas da matemática que me ajudaram muito ao longo do curso e que fizeram meus dias mais felizes com truço e amora. Em especial Sabrina, Paulo e Thaís que me acompanharam em diversas aventuras durante esses anos. Amo vocês.

Ao Gustavo por todas as tardes na BU, noites em claro e palavras de incentivo, sem nunca duvidar que esse dia chegaria. Te amo.

Aos meu amores, Gal e Gil. Meus dias não seriam tão felizes e ronronantes sem vocês.

Aos meus amigos da dança de salão por todas as trocas, aprendizados e risadas. A vida é mais leve com vocês ao meu lado.

Serena, Tainá e Aline amo vocês Tudo se torna mais divertido e engraçado com vocês. Tai tu foi uma catalisadora na finalização deste ciclo. Eu não tenho palavras para agradecer a tua confiança em me levar para o Escola-Mundo e reviver a minha vontade em estar presente no “meio” acadêmico.

Dani, Vavá e André, as nossas diferenças nos tornam únicos e nosso amorzinho é sem fim. Talvez com o André tenha fim, mas faz parte. Dani não tenho palavras por todos os incentivos e conversas ao longo desses anos, te amo muito. Dona Valéria, ser mais debochado desse Universo, te amo demais da conta. Gratidão

sem fim por todo o apoio nessa escrita, por ter me indicado a melhor orientadora que eu poderia ter e por estar sempre presente, mesmo estando a vários quilômetros.

Gabriela Rohenkohl, Anelisi Landarin e Thamyres Pacheco são tantos anos de amizade que o coração transborda. Vocês fazem parte de quem sou.

À Renata por todo o suporte espiritual e mental das últimas semanas, tudo seria bem mais difícil sem a tua amizade.

À Priscila Procópio por todos os tapas que eu precisava e os que eu não queria também ahaha esteve junto comigo desde os primeiros dias nessa jornada de UFSC. Gratidão por sempre ter confiado no meu potencial. Te amo

À Andrea Lapa por toda a compreensão ao longo desse meio ano trabalhando juntas. És um ser humano excepcional. Espero ainda aprender muito mais contigo.

À minha orientadora, Janine Soares de Oliveira, por ser esse ser dotado de paciência e conhecimento. Gratidão por todos os semestre que tu apenas me escutou e que não exigiu mais do que eu poderia dar. Sigo aprendendo muito contigo e espero que a nossa jornada esteja apenas começando.

À Bruna Rayssa, esse Ser que eu não tenho palavras para agradecer pelo companheirismo ao longo desses anos. Uma pessoa que se doa e que está aqui como minha revisora (na prorrogação do segundo tempo) por puro amor a minha pessoa. Ainda foi ela que me proporcionou o prazer de ser tia, Andrea transborda alegria nas nossas vidas. Te amo e sei que seguiremos crescendo muito juntas como professoras de matemática e como indivíduos.

Aos meus professores por toda a dedicação para minha formação e a banca por aceitar o convite.

RESUMO

O presente trabalho trata do Surdo e de possibilidades no ensino da matemática ao estudante Surdo. Onde, busca-se o vocabulário básico necessário para interpretar uma aula sobre o Princípio Fundamental da Contagem em Libras. Ele apresenta reflexões sobre a importância da Libras na construção do conhecimento do educando Surdo, e outras particularidades desse indivíduo. Ele trata, também, sobre o ensino-aprendizagem da matemática, e traz uma análise sobre estudos que propiciam a discussão do ensino da matemática para esse estudante. O livro base para a construção dessa discussão sobre os conceitos é a apostila do PIC, em anexo neste. Foi feita uma busca pelos sinais desses conceitos em dicionários, mas a grande maioria não foi encontrada.

Palavras-chave: Libras; Ensino matemática; Intérprete Educacional; Contagem; Educação de Surdos.

ABSTRACT

The present work deals with the Deaf and possibilities in teaching mathematics to the Deaf student. Where, the basic vocabulary needed to interpret a class on the Fundamental Principle of Counting in Pounds is sought. It presents reflections on the importance of Libras in the construction of the knowledge of the Deaf student, and other particularities of this individual. It also deals with the teaching-learning of mathematics and brings an analysis of studies that provide a discussion of the teaching of mathematics for this student. The basic book for the construction of this discussion on concepts is the PIC handout, attached to this one. A search was made for the signs of these concepts in dictionaries, but the vast majority were not found.

Keywords: Libras; Teaching mathematics; Educational Interpreter; Score; Deaf Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Imagem da bandeira e as cores disponíveis para a questão	31
Figura 2 - Imagem que representa as possíveis bandeiras	32
Figura 3 - Imagem que representa diagrama de árvore das possíveis	32
Figura 4 - Imagem que representa a bandeira para a questão	33
Figura 5 - Imagem que representa os 3 espaços da bandeira	33
Figura 6 - Imagem que representa os 4 quadrantes do círculo.....	34
Figura 7 - Sinal em Libras para a palavra modo	37
Figura 8- Sinal em Libras para a palavra escolher	37
Figura 9 - Sinal em Libras para a palavra número	38
Figura 10 -Sinal em Libras para a palavra possível	38
Figura 11 - Sinal em Libras para a palavra probabilidade	39

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AEE	Atendimento Educacional Especializado
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
GEPAM	Grupo de Estudos e Pesquisa em Alteridade e Educação Matemática
IE	Intérprete Educacional
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
INES	Instituto Nacional de Educação de Surdos
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LIBRAS	Língua Brasileira de Sinais
MCTIC	Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações
MEC	Ministério da Educação
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PFC	Princípio Fundamental da Contagem
PIC	Programa de Iniciação Científica
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
2 EDUCAÇÃO DE SURDOS NO BRASIL	12
2.1 PERFIL DOS EDUCANDOS SURDOS	12
2.2 BREVE HISTÓRICO DA EDUCAÇÃO DE SURDOS NO BRASIL	14
2.3 PROFISSIONAIS E RECURSOS ENVOLVIDOS NA EDUCAÇÃO DE SURDOS	17
3 ENSINO DE MATEMÁTICA	21
3.1 ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO	21
3.2 ENSINO DE MATEMÁTICA PARA SURDOS	27
4 METODOLOGIA	28
5 ANÁLISE DA APOSTILA DA OBMEP	29
5.1 EXPLICAÇÃO DE ALGUNS CONCEITOS E SEUS RESPECTIVOS SINAIS EM LIBRAS	36
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	41
REFERÊNCIAS	43
ANEXO A	46

1 INTRODUÇÃO

A educação inclusiva parte do princípio que a escola é o lugar de direito de todos e no Brasil leis e decretos garantem ao Surdo uma educação diferenciada em classes regulares, em que a sua língua de sinais é valorizada. A lei 10.436(24/04/2005) reconhece a Libras, como meio legal de comunicação e expressão. A Língua Brasileira de Sinais (Libras) é a língua natural adquirida de forma espontânea pela criança surda. Porém ser natural não significa ser inata, pois ela deve ser apreendida nas diferentes situações de interação entre os usuários.(ARAÚJO; SILVA; SOUSA, 2006)

Na educação do aluno Surdo existem três personagens ativos: o aluno, o professor e o intérprete educacional (IE). O aluno Surdo possui cultura e língua diferente da qual o professor está acostumado (BARBOSA e QUARESMA, 2011). O IE fica responsável pela mediação do conteúdo entre o professor e o aluno, mas o responsável pelo aluno Surdo é o professor. Ele que é o detentor do conhecimento. O intérprete e o professor devem trabalhar juntos para que o aluno tenha a melhor aprendizagem possível.

No curso de matemática licenciatura existe uma disciplina de Libras, devido a legislação que exige que isso aconteça (Decreto 5.626/2005). Quando fiz essa disciplina surgiu uma curiosidade a respeito da educação de Surdos. Fui bolsista do Projeto de Iniciação Científica da Olimpíada Brasileira de Matemática do Ensino Público (PIC-OBMEP) em 2017. Meu trabalho no projeto era ministrar aulas virtuais para preparação de alunos que já foram medalhistas em edições anteriores da OBMEP. Questionamentos sobre como esse conteúdo poderia ser transmitido para alunos Surdos foram surgindo.

Após algumas reflexões fui em busca de alguém que pudesse me dar informações sobre as possibilidades no ensino de matemática para Surdos. Encontrei a professora Janine Soares de Oliveira, graduada em matemática licenciatura porém com formação em tradução Libras. Desde o começo das nossas conversas foram propostas leituras voltadas para os personagens na formação desse aluno Surdo e nisso veio o contato com alguns intérpretes. Como a UFSC é referência na formação de tradutores-intérpretes pensamos numa possível parceria

entre os cursos enquanto ainda “somos alunos”, podendo assim trazer as dificuldades dos dois profissionais, tanto do intérprete quanto do professor regente.

Conforme foram feitas pesquisas percebemos a dificuldade em encontrar materiais que trabalhassem num diálogo entre intérpretes de Libras e professores. Após definir que seria trabalhado o conteúdo de contagem, fizemos o recorte dentro do Princípio Fundamental da Contagem, já que é o conceito base de todo o conteúdo de Análise Combinatória que pode ser trabalhado tanto no ensino fundamental, por não exigir uma grande base de conhecimento matemático, quanto no ensino médio.

Nesse contexto foi definida a seguinte pergunta de pesquisa: qual é o vocabulário básico necessário para que um tradutor se prepare para interpretar uma aula de contagem em Libras?

Buscando responder a essa questão apresenta-se a seguir o percurso de investigação estruturado em 5 capítulos. O primeiro capítulo trata-se de uma apresentação de quem é o sujeito surdo, seguindo com a escrita acerca do histórico e os profissionais e recursos envolvidos na educação de surdos. No segundo capítulo fala-se acerca do ensino da matemática e ensino de matemática para surdos. O terceiro capítulo trata-se da metodologia utilizada na pesquisa, trazendo nela a proposta deste trabalho. Por fim, o último capítulo trata-se de uma análise de termos encontrados nos enunciados da apostila do PIC, no que diz respeito ao conteúdo de Contagem, particularmente, ao Princípio Fundamental da Contagem.

2 EDUCAÇÃO DE SURDOS NO BRASIL

2.1 PERFIL DOS EDUCANDOS SURDOS

A capacidade de “falar” (oral) não está conectada ao fato da pessoa escutar ou não. E, embora não se possa ouvir, pode-se de alguma forma desenvolver a fala. Observe que aqui o falar não diz respeito necessariamente ao falar a língua portuguesa, nesse falar queremos dizer que esse indivíduo pode se expressar e se comunicar. É evidente que a pessoa surda não possui a capacidade de ouvir a voz e sons, e portanto precisarão de outros métodos e técnicas caso queiram desenvolver a sua oralidade.

É importante fazer a diferenciação entre os termos pessoa Surda e pessoa com deficiência auditiva. Para esta diferenciação, devemos considerar o fator cultural e não somente a perspectiva clínica.

Do ponto de vista clínico, o que difere surdez de deficiência auditiva é a profundidade da perda auditiva. As pessoas que têm perda profunda, e não escutam nada, são surdas. Já as que sofreram uma perda leve ou moderada, e têm parte da audição, são consideradas deficientes auditivas. (Bogas, sf)

Algumas pessoas da comunidade surda, incomodadas ao serem classificados como deficientes auditivos, indicam uma distinção, segundo Silva (2016):

na qual a surdez auditiva é escrita com ‘s’ minúsculo, distinguindo-a da Surdez com ‘S’ maiúsculo referindo-se à entidade linguística e cultural. Para a comunidade, o termo surdo indica pertencimento e reconhecimento linguístico e cultural.

Assim, todas as vezes neste trabalho quando estivermos nos referindo ao indivíduo Surdo, usuário de Libras e inserido na comunidade Surda iremos utilizar o termo surdo com **S** maiúsculo.

A linguagem pode ser considerada a capacidade que as pessoas têm de se comunicar. Ou seja, a gente utiliza a linguagem para passar uma mensagem para as outras pessoas. A língua, por outro lado, é um conjunto organizado de sons e gestos que um grupo usa para se comunicar, um sistema que possui uma estrutura e regras próprias. (Bogas, sf).

É importante que seja esclarecido o fato de que a Libras é uma língua e não uma linguagem, já que possui suas próprias regras. Ela é um **acrônimo**¹ que significa Língua Brasileira de Sinais.

A Libras é a língua natural adquirida de forma espontânea pelo indivíduo surdo. Por ser uma língua visual-espacial, ela é muito mais fácil de ser aprendida pelos Surdos e por isso é o primeiro idioma da comunidade Surda no país. Esse é um ponto a ser analisado na diferenciação entre Surdos e deficientes auditivos. A escolha do termo está baseada na participação do indivíduo na comunidade Surda. As pessoas que estão inseridas nessa comunidade se identificam como Surdos.

Analisando a participação desse sujeito na comunidade Surda, tão pouco importa o grau de perda auditiva, a definição do termo utilizado está relacionado a identidade Surda. Na comunidade Surda não há “perda auditiva” e sim um “ganho Surdo”. Este é um dos motivos pelos quais os Surdos não gostam de serem encaixados na classificação de deficiente auditivo, já que os mesmos não acreditam que algo falte a eles e sim que eles experienciam a vida de um modo diferente.

Em “As imagens do outro sobre a cultura surda”, a autora traz reflexões sobre a sob a ótica de quem vive a experiência da surdez. De acordo com Strobel (2009), podemos definir a cultura surda é como

o jeito de o sujeito surdo entender o mundo e modificá-lo a fim de torná-lo acessível e habitável ajustando-o com suas percepções visuais, que contribuem para a definição das identidades surdas. [...] Isso significa que abrange a língua, as idéias, as crenças, os costumes e os hábitos do povo surdo. (STROBEL, 2009, p. 27).

Ainda de acordo com Strobel, há diferença entre o povo Surdo e a comunidade surda. Na comunidade surda estão inseridos os surdos e ouvintes militantes da causa surda, tais como: pais, intérpretes e professores, e o povo surdo, composto apenas por surdos, ligados por um traço em comum, que é a surdez.

Como o português não é a primeira língua do indivíduo Surdo, e sim a Libras, muitos apresentam dificuldades em desenvolver a leitura, assim como a escrita, em português. Conforme Guarinello et al (2009),

Atualmente muitos surdos são considerados iletrados funcionais por não dominarem a língua portuguesa em sua forma escrita. Além disso, há uma considerável parcela de surdos brasileiros que não

¹ Palavra que se forma pela junção das primeiras letras ou das sílabas iniciais de um grupo de palavras, de uma expressão. Encontrado em: <https://www.dicio.com.br/acronimo/>

teve acesso à língua de sinais, ou por motivo de isolamento social ou por estarem inseridos em escolas que não utilizam essa língua.

A maioria dos surdos não possuem o domínio da Língua Portuguesa e esse é um fato relevante para o desenvolvimento das competências de leitura e escrita. “Além disso, não há o compartilhamento de uma língua comum entre os surdos e seus familiares, que geralmente utilizam a linguagem oral, o que dificulta a realização das práticas de letramento.” (Guarinello et al, 2009).

Para que o indivíduo estabeleça o seu letramento, ele precisa ter um convívio efetivo com a leitura e por meio deste apropriar-se da escrita. Ainda de acordo com Guarinello (2009), essa pessoa só irá desenvolver a escrita e a fala diante do contato com adultos usuários e competentes nesta língua em momento que tiver chance de participar de atividades significativas. A falta desses momentos com a escrita/fala impede que os Surdos compreendam a possível contribuição e ou contribuições da Língua Portuguesa. Observando o caso da escrita, o Surdo irá construir e desenvolver a língua escrita de acordo com as experiências na língua que já domina que, em geral, é Língua de Sinais.

Agora, conhecemos quem é o indivíduo Surdo, e sabemos que ele é tão capaz de se expressar e comunicar quanto o ouvinte, usando para tal a Língua de sinais. Sem deixar de reconhecer a importância de que o Surdo também tenha conhecimento da Língua Portuguesa, pelo fato de essa ser usada de forma generalizada, e muitas vezes única, em muitos âmbitos sociais. E, nas próximas páginas falaremos sobre a Educação de surdos.

2.2 BREVE HISTÓRICO DA EDUCAÇÃO DE SURDOS NO BRASIL

O Instituto Nacional de Educação de Surdos (INES) foi criado em meados do século XIX por iniciativa do Surdo francês E. Huet, tendo como primeira denominação Collégio Nacional para Surdos-Mudos, para ambos os sexos. O estabelecimento começou a funcionar em 1º de janeiro de 1856, mesma data em que foi publicada a proposta de ensino apresentada por Huet. Essa proposta continha as disciplinas de Língua Portuguesa, Aritmética, Geografia, História do Brasil, Escrituração Mercantil, Linguagem Articulada, Doutrina Cristã e Leitura sobre os Lábios.

Durante os seus quase dois séculos de história, o Instituto respondeu por outras denominações, sendo que a mudança mais significativa deu-se no ano de 1957, que foi a substituição da palavra “Mudo” pela palavra “Educação”. Por ser a única instituição de educação de surdos em território brasileiro e mesmo em países vizinhos, por muito tempo o INES recebeu alunos de todo o Brasil e do exterior, tornando-se referência para os assuntos de educação, profissionalização e socialização de surdos.

A língua de sinais utilizada no INES tinha forte influência francesa, devido a nacionalidade de Huet, ela foi sendo difundida entre os estados brasileiros conforme os estudantes Surdos regressavam às suas cidades de origem. A conclusão do curso no INES estava aliada ao desenvolvimento de algum ofício de acordo com suas aptidões. Algumas das possibilidades eram sapataria, marcenaria e artes plásticas. Ainda eram disponibilizadas oficinas de bordado para meninas que frequentavam o Instituto.

Em 1911, o Instituto seguiu a tendência mundial (decorrente do Congresso de Milão²) e estabeleceu o oralismo puro em todos os conteúdos do currículo. Até o final da década de 60, o método oralista predominou na educação de surdos. Nesse método era excluída a língua de sinais, os professores acreditavam que os surdos deveriam “falar” para que conseguissem estudar junto com os ouvintes. A oralização era utilizada como um modo de correção da deficiência auditiva.

No Brasil, no final dos anos 1980, os Surdos lideraram o movimento de oficialização da Língua Brasileira de Sinais (Libras). A valorização da Língua de Sinais fez com que começassem a surgir discussões sobre a implantação de uma educação bilíngue na educação de surdos. De acordo com Sales (2013):

Os surdos se apropriam com naturalidade e rapidez das línguas de sinais, permitindo-lhes uma comunicação/interação completa e eficaz, igualmente àquela desenvolvida por indivíduos ouvintes, proporcionando-lhes um desenvolvimento social e cognitivo apropriado para a faixa etária.

² Primeira conferência internacional de educadores de surdos, que ocorreu em setembro de 1880, em Milão, na Itália.

Quanto antes o surdo for exposto à língua de sinais, irá aprender os sinais tão rapidamente quanto os ouvintes aprendem a pronunciar palavras. A aquisição da língua de sinais proporciona que o sujeito Surdo se aproprie de conceitos, de informações e, assim, seja capaz de desenvolver as suas habilidades, além de refletir, compreender e entender o mundo ao seu redor. Já a Língua Portuguesa possibilitará a leitura e a escrita ao sujeito Surdo, para que o mesmo possa acessar o conhecimento e se desenvolver como um sujeito bilíngue (Kipper, 2014).

Com a criação da Lei 10.436 de 24 de abril de 2002, a Libras foi reconhecida como língua e os Surdos passaram a ter **direito** de ter aulas ministradas de forma diferenciada, ou seja, em Libras já que a surdez não interfere no desenvolvimento cognitivo.

O Decreto nº 5.626/05, que regulamenta a Lei nº 10.436/2002, visando o acesso à escola dos alunos surdos, dispõe sobre a inclusão da Libras como disciplina curricular, a formação e a certificação de professor, instrutor e tradutor/intérprete de Libras, o ensino da Língua Portuguesa como segunda língua para alunos surdos e a organização da educação bilíngüe no ensino regular (BRASIL, 2008).

O movimento mundial pela educação inclusiva é uma ação política, cultural, social e pedagógica, desencadeada na defesa de todos os alunos estarem juntos, aprendendo e participando, sem nenhum tipo de discriminação. Ao reconhecer que as dificuldades enfrentadas nos sistemas de ensino evidenciam a necessidade de confrontar as práticas discriminatórias e criar alternativas para superá-las, a educação inclusiva assume espaço central no debate acerca da sociedade contemporânea e do papel da escola na superação da lógica da exclusão (BRASIL, 2008).

A tendência de hoje é perceber cada vez mais a educação como “inclusiva” e cada vez menos como “especial”. O ensino e a estrutura da escola não devem ser adaptados com materiais diferenciados às pessoas com deficiência e sim repensados de um modo a atender todos os alunos presentes em sala de aula.

A educação inclusiva se dá com a inserção desse aluno Surdo nas salas de aulas regulares, estando amparado o direito a “uma educação bilíngue, em Libras como primeira língua e na modalidade escrita da língua portuguesa como segunda língua, em escolas e classes bilíngues e em escolas inclusivas” (BRASIL, 2015).

Desde o ano de 2017, o aluno Surdo que tiver a Libras como sua primeira língua pode realizar a prova do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) em Libras. Essa foi uma conquista da comunidade Surda onde o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) buscou possibilitar um futuro melhor por meio da educação. No ano de 2018 foi lançada a Plataforma Enem em Libras onde os alunos têm a possibilidade de acessar as vídeo provas em Libras para se familiarizar com o recurso. Nela, o Inep disponibiliza os vídeos com os enunciados e as opções de respostas da vídeo prova, permitindo que surdos e deficientes auditivos estudem no mesmo formato acessível em que elas são aplicadas (Site INEP).

A comunicação é um fator fundamental para a relação entre seres humanos. A língua representa uma possibilidade de interação social. Por meio dela, o indivíduo não só se comunica, mas também tem acesso à informação. Com isso, uma pessoa pode se comunicar por diversas formas de linguagem: oral, escrita, gráfica, visual-espacial e sensorial. Para as pessoas surdas há uma língua específica para se comunicar com qualquer pessoa, chamada no Brasil de Libras. E, unida a isso, a educação também busca proporcionar ao indivíduo surdo, autonomia e integração. Assim como há a legislação que rege acerca da Libras e apresenta como pode/deve ser tratada no âmbito educacional, há que se conhecer os sujeitos e recursos que envolvem a educação do aluno surdo, e sobre os tais é tratado na próxima seção.

2.3 PROFISSIONAIS E RECURSOS ENVOLVIDOS NA EDUCAÇÃO DE SURDOS

É dever do estado garantir o chamado Atendimento Educativo Especial. E, é responsabilidade desse atendimento “identificar, elaborar e organizar recursos pedagógicos e de acessibilidade que eliminem as barreiras para a plena participação dos alunos, considerando suas necessidades específicas.” (Site do MEC)

De acordo com o Decreto 7.611, são objetivos do Atendimento Educacional Especializado (AEE):

- I - prover condições de acesso, participação e aprendizagem no ensino regular e garantir serviços de apoio especializados de acordo com as necessidades individuais dos estudantes;
- II - garantir a transversalidade das ações da educação especial no ensino regular;

- III - fomentar o desenvolvimento de recursos didáticos e pedagógicos que eliminem as barreiras no processo de ensino e aprendizagem; e
- IV - assegurar condições para a continuidade de estudos nos demais níveis, etapas e modalidades de ensino.

No projeto pedagógico das escolas de ensino regular deve constar a oferta do atendimento educacional especial, e na sua organização deverão estar previstos, dentre outros itens, tradutor e intérprete de Língua Brasileira de Sinais (Libras).

A oferta do atendimento educacional especializado - AEE, no centro de atendimento educacional especializado público ou privado sem fins lucrativos conveniado para essa finalidade, deve constar no projeto pedagógico do centro, contemplando na sua organização os recursos, o plano de AEE, os professores e demais profissionais, conforme orientação da Secretaria de Educação. (Site do MEC)

Na educação do aluno Surdo existem três personagens ativos: o aluno, o professor e o intérprete educacional (IE). No que diz respeito ao Intérprete Educacional: intérprete educacional é aquele que atua como profissional intérprete de língua de sinais na educação. É a área de interpretação mais requisitada atualmente (BRASIL, 2004).

O aluno Surdo possui cultura e língua diferente da qual o professor está acostumado (BARBOSA e QUARESMA, 2011). E, como, em geral, o professor não possui domínio da Libras, o intérprete fica responsável pela mediação do conteúdo entre o professor e o aluno, mas é importante lembrar que o responsável pelo aluno Surdo é o professor. Ele, o professor, é o detentor do conhecimento de conteúdo, e o intérprete tem um papel de facilitador no entendimento, na transcrição, do conteúdo na língua portuguesa para a Libras. Pois, frequentemente o papel do intérprete é confundido com o do professor, de acordo com BRASIL (2004):

O intérprete especialista para atuar na área da educação deverá ter um perfil para intermediar as relações entre os professores e os alunos, bem como, entre os colegas surdos e os colegas ouvintes. No entanto, as competências e responsabilidades destes profissionais não são tão fáceis de serem determinadas. Há vários problemas de ordem ética que acabam surgindo em função do tipo de intermediação que acaba acontecendo em sala de aula. Muitas vezes, o papel do intérprete em sala de aula acaba sendo confundido com o papel do professor. Os alunos dirigem questões diretamente ao intérprete, comentam e travam discussões em relação aos tópicos abordados com o intérprete e não com o professor.

Assim, o intérprete deve ser incluído nas reuniões pedagógicas e em todos os momentos de preparação das aulas e atividades que envolvam o aluno Surdo, já que o mesmo é quem, normalmente, tem mais conhecimento da comunidade Surda e pode ajudar com que os exemplos e abordagens sejam mais efetivas para a compreensão desse aluno Surdo que experiencia o mundo de um modo muito mais visual.

Somente ter o domínio da língua de sinais não é o suficiente para desempenhar uma interpretação satisfatória. Para ser um bom intérprete é necessário ser um bom tradutor, como é citado em Ferrari (2014).

Embora qualquer falante bilíngue possua competência comunicativa nas línguas que domina, nem todo bilíngue possui competência tradutória. A competência tradutória é um conhecimento especializado, integrado por um conjunto de conhecimentos e habilidades, que singulariza o tradutor e o diferencia de outros falantes bilíngues não tradutores (HURTADO ALBIR, 2005 apud FERRARI, 2014, p. 26).

A função dos intérpretes em sala de aula ainda é uma dúvida para muitos professores e alguns profissionais da educação que acabam atribuindo toda a responsabilidade da construção do conhecimento do aluno Surdo ao intérprete. Esse profissional é responsável por fazer a mediação entre línguas diferentes, sendo uma visual e a outra oral.

O professor deve considerar o intérprete como a pessoa que está mais familiarizada, muitas vezes tendo formação nesses assuntos, com a identidade Surda e a cultura Surda. Para que a educação desse aluno tenha mais “sucesso” é importante que o planejamento da metodologia a ser usada no ensino seja construída por esses dois profissionais.

O intérprete muitas vezes não tem formação ou familiaridade com o conteúdo que está sendo trabalhado em sala de aula, sendo importante a construção de uma metodologia para que ele saiba direcionar as dúvidas dos alunos Surdos sem que ele tenha que dominar o conteúdo no qual o professor está trabalhando em sala de aula. Se faz, assim, importante a formação continuada desse profissional, buscando materiais de apoio nos quais o mesmo consiga construir uma base, tanto de vocabulário quanto de conceitos, para que as interações em sala de aula com o aluno Surdo possam fluir com mais eficácia.

Ainda no que diz respeito à educação do aluno surdo, a partir do próximo capítulo voltaremos o trabalho ao ensino da matemática a esse aluno, pensando de que forma o ensino da matemática pode-se dar a esse aluno, com o apoio do profissional intérprete, além de trazer possíveis dificuldades que o intérprete enfrentará durante as aulas de matemática.

3 ENSINO DE MATEMÁTICA

3.1 ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Os conhecimentos matemáticos são essenciais na vida pessoal e profissional da população, e é um direito de todo e qualquer cidadão adquiri-lo, sendo responsabilidade da escola mediar caminhos para a obtenção desse conhecimento. O saber matemático permite à pessoa intervir criticamente nas ações cotidianas, adquirindo maior capacidade de argumentar suas considerações frente às problemáticas da vida.

Ao analisar a LDB 9.394, de 20 de dezembro de 1996, no que diz respeito ao ensino médio, verificou-se que esta etapa da educação básica deixou de ser apenas uma expectativa de profissionalização ou de preparo para o ensino superior, passando a ser uma etapa indispensável para o exercício da cidadania. No artigo 35 deste documento educacional estão expressas as finalidades do ensino médio, as quais seguem abaixo:

Art. 35. O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:

- I. a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
- II. a preparação básica para o trabalho e o exercício da cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
- III. o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
- IV. a compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática no ensino de cada disciplina.(LDB, 1996).

Dessa forma, o ensino médio se organiza num conjunto de competências para cada uma das áreas de Linguagem, Ciências Humanas e Ciências da Natureza e Matemática. A área “Ciências da Natureza e Matemática”, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM, 2004), é organizada pelas competências: representação e comunicação, investigação e compreensão e contextualização sócio-cultural. Com a finalidade de que as

competências listadas sejam alcançadas e exista a articulação dos conteúdos matemáticos com idéias lógicas, estruturou-se um conjunto de temas que possibilitam esse desenvolvimento ao longo das três séries do ensino médio. Esse conjunto pode ser sistematizado em três áreas norteadoras:

1. Álgebra: números e funções.
2. Geometria e medidas.
3. Análise de dados.

Cada tópico, por sua vez, organiza-se por unidades temáticas. Dessa forma, temos a seguinte organização:

- Álgebra: números e funções que compõem-se por duas unidades temáticas: variação de grandezas e trigonometria;
- Geometria e medidas compõem-se por quatro unidades temáticas que remetem ao estudo das geometrias plana, espacial, métrica e analítica.
- Análise de dados é composto por três unidades temáticas: Estatística, Contagem e Probabilidade.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), onde é falado sobre o Ensino Médio, tem-se que:

Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

A matemática não deve ser trabalhada de maneira desassociada, descontextualizada e repetitiva, sem considerar a realidade em que a escola está inserida. O aluno deve estar capacitado para avaliar as informações de cunho matemático com as quais se encontra. Conforme as orientações curriculares para o ensino médio, ao final desse nível de ensino:

Espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; perceber a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2006, p.69)

Em busca de aumentar a aprendizagem da Matemática na escolaridade básica, são apresentadas, de tempos em tempos, algumas mudanças curriculares e sugestões de novas metodologias e ferramentas que podem contribuir para isso. O Ensino Médio tem o desafio de promover a ampliação da visão de mundo dos estudantes e desenvolver suas competências gerais, a fim de articularem os conhecimentos e os usarem na vida cotidiana.

Os documentos oficiais apontam algumas possibilidades pedagógicas e metodológicas, no sentido de promover o desenvolvimento das habilidades e competências dos estudantes, como os recursos da contextualização e interdisciplinaridade, o uso da modelagem, da resolução de problemas, jogos e a história das ciências (Lopes, 2011).

Nos anos 80, há uma mudança no pensamento sobre o ensino de matemática. A resolução de problemas passa a ser pensada como uma metodologia de ensino de matemática, trazendo o aluno como um ser ativo na sua aprendizagem. De acordo com o PCN existiram apontamentos sobre:

- direcionamento do ensino fundamental para aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão e não apenas voltadas para a preparação de estudos posteriores;
- importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento;
- ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas;
- importância de trabalhar com amplo espectro de conteúdos, incluindo já no ensino fundamental, por exemplo, elementos de estatística, probabilidade e combinatória para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos;
- necessidade de levar os alunos a compreender a importância do uso da tecnologia e a acompanhar sua permanente renovação.

Nessas idas e vindas da discussão sobre o currículo da Matemática se insere também a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBMEP), criada em 2005 para estimular o estudo de matemática e reconhecer os talentos na área. A OBMEP é um projeto nacional realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), e promovida com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC).

Os principais objetivos da OBMEP são:

- Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
- Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

A OBMEP tem como público-alvo alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e alunos do Ensino Médio, de escolas públicas municipais, estaduais e federais, e escolas privadas. Os alunos participantes da OBMEP são divididos em três níveis, de acordo com o grau de escolaridade: Nível 1, alunos matriculados nos 6º ou 7º anos do Ensino Fundamental, Nível 2, alunos matriculados nos 8º ou 9º anos do Ensino Fundamental e, Nível 3, alunos matriculados em qualquer série do Ensino Médio.

A OBMEP desenvolveu o programa PIC Jr (Programa de Iniciação Científica Júnior) que busca transmitir aos alunos medalhistas “a cultura matemática básica e treiná-los no rigor da leitura e da escrita de resultados, nas técnicas e métodos, na independência do raciocínio analítico, entre outros” (Site OBMEP). Esses alunos recebem uma bolsa mensal do CNPq como incentivo a dedicação aos estudos.

O programa funciona com encontros (presenciais ou virtuais dependendo da existência de pólos próximos à residência dos alunos), discussões virtuais no Fórum da OBMEP, tarefas para serem executadas fora dos encontros e outras atividades virtuais no Portal da Matemática.

Após observações durante o período de participação no PIC em conjunto com os questionamentos vindos acerca do ensino da matemática para surdos, as próximas linhas vão nortear-se para o que diz respeito ao ensino da matemática para o aluno surdo.

3.2 ENSINO DE MATEMÁTICA PARA SURDOS

O estudo acerca do ensino da matemática ao aluno surdo tem se expandido e conquistado um espaço que beneficia tanto a educação matemática quanto o aluno surdo. Essa expansão deve-se de forma direta ao aumento das discussões e estudos que envolvem o tema inclusão.

Para alunos onde a língua materna é o português, a interpretação dos enunciados muitas vezes é uma barreira para acessar a matemática de um problema. Pensando assim, surge o questionamento de como será para alunos cuja língua utilizada como meio de comunicação é diferente daquela presente nos textos escritos? A grande dificuldade dos alunos Surdos com a matemática está relacionada à comunicação. E, ainda, de acordo com Leite (2007):

a partir da década de 1970, várias pesquisas internacionais têm concentrado esforços em medir a aprendizagem dos surdos em relação aos ouvintes, demonstrando que os surdos apresentavam mais dificuldades em Matemática, quando comparados com os ouvintes. (*apud* PEIXOTO, 2015)

Conforme exposto por Borges (2013), existe uma necessidade de perguntas cognitivamente desafiadoras que estimulem a capacidade dos surdos. Segundo Nunes, Evans, Barros e Burman (2011 *apud* Borges, 2013) não há comprometimentos intelectuais nos surdos que interfiram no processo numérico dessas crianças e ainda enfatizam que há uma dedicação demasiada ao ensino da língua, em detrimento de preocupação com o estímulo ao raciocínio matemático antes do ingresso na escola, o que acarreta uma dificuldade de aprendizado de conhecimentos socialmente transmitidos.

Além de entender-se que as dificuldades na aprendizagem não remetem, necessariamente, à cognição. A partir da pesquisa feita por Zarfaty, Nunes e Bryant (2004 *apud* PEIXOTO, 2015), com crianças surdas e ouvintes de 3 a 4 anos, observou-se que:

A representação de número em crianças surdas pré-escolares é no mínimo tão avançada como a de crianças ouvintes, e eles são realmente melhores do que as crianças ouvintes na representação do número de objetos na disposição espacial. Conclui-se que as dificuldades das crianças surdas com a aprendizagem matemática não são uma consequência de um atraso na representação do número. Além disso, as crianças surdas devem se beneficiar da

instrução matemática que enfatiza a representação espacial (ZARFATY; NUNES; BRYANT, 2004, p. 315, tradução nossa 14 *apud* PEIXOTO, 2015).

Com a diferença entre surdos e ouvintes em relação à comunicação nas atividades diárias, segundo Nunes, Evans, Barros e Burman (2011)

[...] alguns conceitos matemáticos não são bem desenvolvidos, até porque tais conceitos não participam dos currículos voltados para os anos iniciais. Conceitos como composição aditiva de números, relação inversa entre adição e subtração e o raciocínio multiplicativo começam, segundo as autoras, a serem desenvolvidos antes do início da vida escolar e que, sem eles, dificulta-se a continuidade dos estudantes na escola em seu aprendizado matemático, sendo que muitas crianças surdas entram na escola sem esses conceitos básicos. (NUNES et.al., 2011 *apud* BORGES, 2013, p.27)

Em contrapartida, os professores de Surdos costumam considerar que a Matemática é a disciplina que menos apresenta dificuldades para as suas crianças, à exceção dos problemas, cujos entraves são atribuídos, não sem razão, às dificuldades óbvias de interpretação dos enunciados. (NOGUEIRA e MACHADO, 1996 *apud* MIRANDA, 2011). Ainda que apresentem-se distinções acerca do aprendizado do aluno surdo e do ouvinte, segundo Serrano Pau (1995, *apud* PEIXOTO, 2015), muitas investigações concordam que a aprendizagem do aluno surdo segue os mesmos processos dos ouvintes, embora de forma mais lenta, e que este fato deve ser atribuído à escassez de experiências e de comunicação que envolve o déficit sensorial.

Mesmo alguns estudos apontando que a linguagem matemática possibilita um maior desenvolvimento do Surdo nessa disciplina, existe uma falta de material que facilite a adequação da metodologia utilizada para atender esses alunos.

De acordo com Camini (2019), muitos autores trazem a importância de tornar a matemática mais visual no ensino de alunos Surdos. Trabalhar com materiais manipuláveis, recursos digitais e Libras fazem com que a aprendizagem desse sujeito seja mais significativa. Pela Libras ser uma língua nova que segue em construção ainda faltam sinais relacionados aos conteúdos matemáticos.

Embora reconhecida a importância do uso da Libras no ensino da matemática, por Nogueira e Zanquetta (2008, p. 228, *apud* PEIXOTO, 2015), de acordo com pesquisas feitas por ela: a utilização da Libras, por si só, não significou avanços significativos no desempenho dos sujeitos surdos. Há de ser necessário

que haja um bom e efetivo uso da Libras, no que diz respeito à contextualização e simbologias de conteúdos matemáticos.

E, conforme as pesquisas sobre a resolução de problemas matemáticos, de Fávero e Pimenta (2006, *apud* PEIXOTO, 2015), com surdos entre 18 e 33 anos percebeu-se que:

A dificuldade dos surdos frente a problemas de matemática advém do processo de escolarização, que prima pela aquisição de regras de procedimentos de resolução, em detrimento da aquisição conceitual e pelo uso inadequado da Libras, como instrumento para a organização de significados semióticos e aquisição de conhecimentos (FÁVERO; PIMENTA, 2006, p. 225).

Assim, conforme pesquisas lidas, em paralelo com a proposta deste trabalho, segue o entendimento de que a Libras é de muita importância para o ensino/aprendizagem da matemática ao aluno surdo. Mais profundamente, percebe-se a necessidade de, além do uso da Libras, fazer-se com que a contextualização do uso de um ou outro símbolo seja verificada, isso para o bom entendimento dos saberes matemáticos.

Ligando isso ao discutido sobre os profissionais intérpretes educacionais é essencial que esses profissionais tenham um entendimento do contexto (não cobrando a eles o conhecimento matemático em si, mas que esses compreendam a situação/contexto apresentado). Observando essa necessidade, os textos a seguir trazem o estudo acerca de situações matemáticas que necessitam de uma atenção distinta no uso da Libras.

4 METODOLOGIA

A proposta deste trabalho vai ao encontro do que estudamos e discutimos no Grupo de Estudos e Pesquisa em Alteridade e Educação Matemática (GEPAM) que é: elaborar, produzir e analisar materiais de apoio para o ensino de matemática em Libras.

Este trabalho foi pensado sobre o conteúdo Princípio Fundamental da Contagem (PFC) por se tratar de um tema base para a construção de toda a Análise Combinatória e também por ser um conteúdo que podemos trazer para o campo visual, facilitando assim a compreensão do aluno Surdo.

A partir da minha experiência como professora virtual no PIC da OBMEP durante dois anos, fiz um levantamento de alguns conceitos que considero importantes para o entendimento dos enunciados das atividades. Na sequência, foi feita uma busca desses conceitos em glossários e dicionários. Posteriormente foi feita uma apresentação destes conceitos para que os enunciados ficassem mais claros e objetivos para que o intérprete educacional transmita para o aluno Surdo o que está sendo solicitado.

5 ANÁLISE DA APOSTILA DA OBMEP

Neste capítulo, apresentaremos uma explicação de alguns termos contidos nos enunciados dos três exemplos abaixo, bem como uma resolução detalhada deles, de modo a facilitar a compreensão do intérprete para que ele possa traduzir o solicitado ao aluno Surdo.

O conteúdo de contagem está inserido dentro da divisão Análise de dados, de acordo com o PCNEM (2004). Neste trabalho, iremos trabalhar o Princípio Fundamental da Contagem com exercícios resolvidos, adaptados da apostila do Programa de Iniciação Científica (PIC) da OBMEP **Métodos de Contagem e Probabilidade** (anexo A).

Esta apostila é usada de base para trabalhar os treinamentos voltados para a OBMEP. Aqui apresentaremos alguns termos e conceitos para facilitar a compreensão do intérprete de Libras sobre o assunto possibilitando que o mesmo tenha mais ferramentas para traduzir as questões aos alunos Surdos.

A Análise Combinatória enquanto componente curricular do Ensino Médio tem se configurado como um tema de grande dificuldade para os alunos. O modo como são abordados os conteúdos é o maior causador de dúvidas nos alunos. Os alunos desde o ensino fundamental vêm com dificuldades em situações de contagem e probabilidade, ao chegarem no ensino médio encontram situações-problema que exigem maior habilidade intuitiva (Conceição et al, 2016).

No que diz respeito à Contagem, de acordo com Carvalho, a estratégia a ser seguida para resolvermos problemas é:

1. **Postura:** Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões temos que tomar.
2. **Divisão:** Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisão.
3. **Não adiar dificuldades.** Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restritiva que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

Para introdução do assunto a ser abordado (Princípio Fundamental da Contagem), trago o seguinte exemplo:

Exemplo 1: Uma bandeira com o formato abaixo vai ser pintada com duas das cores dadas (Figura). Liste todas as possíveis bandeiras. Quantas são?

Figura 1: Imagem da bandeira e as cores disponíveis para a questão

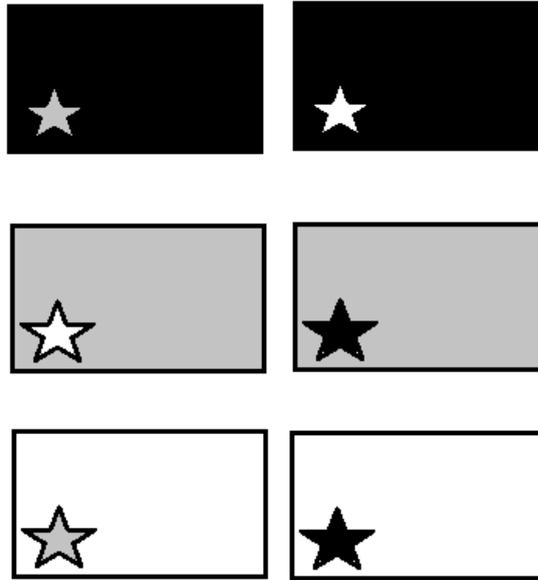


Fonte: Adaptada CARVALHO (2015)

ANÁLISE DE RESOLUÇÃO: Primeiramente, devemos entender o que o enunciado nos pede. Temos uma bandeira com uma área externa (retângulo) e outra interna (estrela) que deverão ser pintadas com duas cores diferentes, pois se fossem pintadas com a mesma cor não haveria uma diferença visual entre os espaços. Quando o enunciado fala em cores dadas, devemos pensar que temos 3 opções de cores a serem utilizadas (branca, cinza ou preta). Por exemplo, se usamos a cor preta para pintar o retângulo ela não deverá ser utilizada para pintar a área da estrela.

Precisamos tomar algumas decisões e examinar as possibilidades para elas. Se começarmos pintando a parte externa, temos 3 possibilidades de cor, já que podemos utilizar qualquer uma das disponíveis. Depois de tomar essa decisão, restam 2 possibilidades para a área interna.

Figura 2: Imagem que representa as possíveis bandeiras



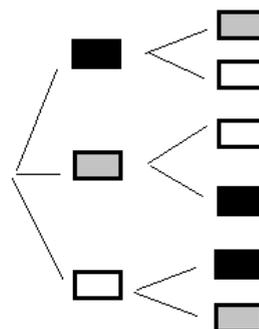
Fonte: Elaborada pela autora

A cor externa pode ser escolhida de três modos diferentes. Qualquer que seja essa escolha, a cor da estrela pode ser escolhida de dois modos. Logo, o número total de possibilidades é $2+2+2=3 \times 2=6$.

Esse procedimento ilustra o Princípio Fundamental da Contagem ou PFC, que diz: *Se uma decisão D1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja essa escolha, a decisão D2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D1 e D2 é igual a pq.*

O PFC pode ser ilustrado com o auxílio de uma árvore de enumeração como da figura a seguir:

Figura 3: Imagem que representa diagrama de árvore das possíveis cores da bandeira

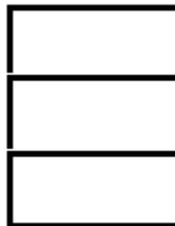


Fonte: Elaborada pela autora

Ou seja, escolhida uma cor para a primeira área, então restará 2 possibilidades de cores para pintar a segunda área. E, por serem 3 cores, temos então 3×2 possibilidades de pintar a bandeira. Deste modo, concluímos que podemos pintar a bandeira de 6 configurações diferentes.

Exemplo 2: Para pintar a bandeira abaixo (Figura 4), existem quatro cores disponíveis. De quantas maneiras ela pode ser pintada de modo que faixas adjacentes tenham cores distintas?

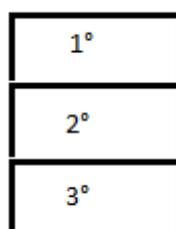
Figura 4: Imagem que representa a bandeira para a questão



Fonte: Elaborada pela autora

Observação: Nesta questão aparece um novo conceito: adjacente. Esse termo é utilizado para falar sobre um espaço que faz fronteira com outro, que está ao lado com “contato”. Para os ouvintes pode parecer um conceito fácil de trabalhar, mas devemos estar atentos, porque às vezes alguns termos podem dificultar a compreensão dos enunciados.

Figura 5: Imagem que representa os 3 espaços da bandeira



Fonte: Elaborada pela autora

Resolução: Supondo que as cores que temos para pintar essa bandeira seja: vermelho, azul, verde e amarelo. Se no 1º espaço utilizarmos a cor amarela, no 2º espaço não poderemos utilizá-la, então quantas cores teremos para utilizar nesse espaço? Teremos 3 cores possíveis: vermelho, azul e verde. Para pintar o 3º espaço, independente de qual cor escolhamos (façamos a escolha de utilizar no segundo espaço), não poderemos utilizar a do segundo espaço no terceiro espaço, mas voltamos a poder utilizar a cor amarela, restando portanto a possibilidade de usar 3 cores com exceção da usada no 2º espaço.

Logo, ainda temos três opções de cor para o terceiro espaço. Assim, para o primeiro espaço podemos utilizar qualquer uma das quatro opções, no segundo espaço podemos utilizar três opções (já que não podemos utilizar a que foi usada no primeiro espaço) e no terceiro espaço podemos utilizar três também, já que voltamos a poder utilizar a do primeiro espaço.

Concluimos então que temos $4 \times 3 \times 3 = 36$ possibilidades de combinação de cores para a bandeira.

Exemplo 3: Quantos são os números de três algarismos distintos?

Alguns dos pontos que podemos destacar nesse exemplo:

- 1 - Qual a diferença entre **algarismo** e **número**?
- 2 - O que define um número de três algarismos?
- 3 - O que é **distinto**?

Resposta 1: **Algarismos** são os símbolos utilizados para caracterizar os números, ou popularmente conhecidos como os números de 0 até 9. Já **número** é a noção de quantidade que idealizamos ao contar, ordenar e/ou medir.

Resposta 2: Um número de três algarismos é um número de 100 até 999. Observe que o primeiro algarismo desses números varia entre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Logo, temos 9 possibilidades para esse primeiro algarismo, enquanto os demais algarismos tem 10 possibilidades.

Resposta 3: E ainda temos o termo **distinto**. O que ele significa nesse contexto? Que todos esses algarismos (três) que compõem esse número não devem se repetir, devem todos serem diferentes entre si. Assim, se o três for o primeiro algarismo do número, ele não poderá ser o segundo e nem o último.

Resolução: para o primeiro algarismo temos 9 opções, para o segundo 9 também (porque podemos usar o 0) e para o terceiro temos 8 opções, já que não podemos utilizar nenhum dos algarismos utilizado para a primeira posição e nem para a segunda. Então teremos $9 \times 9 \times 8 = 648$ números de três algarismos distintos.

Exemplo 4: Quantos algarismos são escritos ao se escreverem os números inteiros de 1 a 100?

No exemplo 3 já falamos sobre a diferença entre o conceito de algarismo e número. Aqui temos o conceito de “número inteiro” que quando consideramos esse intervalo de 1 a 100 são os números naturais, os números que usamos para contar.

Dentro desse grupo de números temos os que possuem: um algarismo, do 1 até o 9, depois dois algarismos, do 10 até o 99 e ainda o 100 que possui três algarismos.

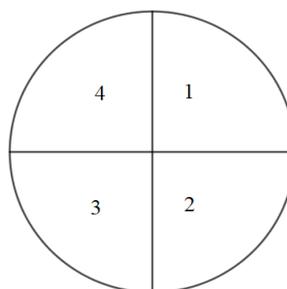
Assim, temos 9 números que possuem um algarismo, 90 números que possuem dois algarismos e mais 1 número que possui três algarismos.

$1 \times 9 + 2 \times 90 + 3 \times 1 = 192$ algarismos.

Exemplo 5: Dispomos de 5 cores distintas. De quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um círculo, cada quadrante com uma cor só, se quadrantes cuja fronteira é uma linha não podem receber a mesma cor?

O que são quadrantes de um círculo? Se pegarmos um círculo e dividirmos em 4 partes iguais teremos os quatro quadrantes do círculo, conforme a figura abaixo.

Figura 6: Imagem que representa os 4 quadrantes do círculo



Fonte: Elaborada pela autora

Podemos dividir em dois casos: no primeiro os quadrantes 1 e 3 estão pintados com a mesma cor e no segundo caso eles estão pintados com cores diferentes.

No primeiro caso, temos cinco possibilidades para o quadrante 1, quatro possibilidades para o quadrante 2 (já que não podemos utilizar a cor usada no quadrante 1 porque eles têm como fronteira uma linha), no quadrante 3 temos uma possibilidade (que é a mesma utilizada no quadrante 1) e para o quadrante 4 temos quatro possibilidades (já que não podemos utilizar a cor utilizada nos quadrantes 1 e 3). Assim, temos $5 \times 4 \times 1 \times 4 = 80$ possibilidades..

No segundo caso, temos cinco possibilidades para o quadrante 1, quatro possibilidades para o quadrante 3, no quadrante 2 temos três possibilidades (já que não podemos utilizar nem a cor do quadrante 1 e nem a do quadrante 3) e no quadrante 4 também temos três possibilidades porque não podemos utilizar as cores do quadrante 1 e 3. Assim, temos $5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$ possibilidades.

Somando os dois casos, temos $80 + 180 = 260$ possibilidades de colorir os 4 quadrantes do círculo.

Exemplo 6: Quantos são os inteiros positivos de 4 algarismos nos quais o algarismo 5 aparece?

Os números inteiros positivos são os números naturais que como explicado no exemplo 4 são os números que nós usamos para contar. Por exemplo: 1, 2, 3, 4 em diante.

Queremos saber quantos são os números que o algarismo 5 aparece pelo menos uma vez. Nesse caso, será mais fácil se contarmos todos os números de 4 algarismos e depois excluirmos os que o algarismo 5 não aparece. Como faremos isso?

Sabemos que a **quantidade de números de 4 algarismos** pode ser calculada como:

$9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$ **números**. Porque temos 9 possibilidades para o primeiro algarismo (não podemos incluir o algarismo 0) e 10 possibilidades para os algarismos restantes.

A quantidade de números de 4 algarismos onde o algarismo 5 não aparece é facilmente calculada, pois tiramos a possibilidade do algarismo 5 em qualquer uma

das posições, logo temos 8 possibilidades para o primeiro algarismo e 9 possibilidades para os algarismos restantes. Assim a quantidade de **números de 4 algarismos que o algarismo 5 não aparece** será $8 \times 9 \times 9 \times 9 = 5832$ números.

Logo, teremos $9000 - 5832 = 3168$ números onde o algarismo 5 aparece.

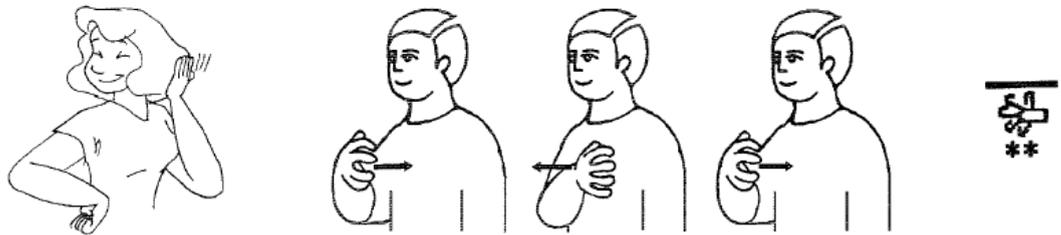
5.1 EXPLICAÇÃO DE ALGUNS CONCEITOS E SEUS RESPECTIVOS SINAIS EM LIBRAS

Após fazer um estudo sobre os conceitos básicos necessários para a compreensão do Princípio Fundamental da Contagem foi feito um levantamento sobre termos e feita uma pesquisa sobre os sinais em Libras dos mesmos. Como alguns desses termos estão presentes na comunicação diária dos Surdos, os respectivos sinais foram encontrados com mais facilidade, porém outros conceitos são mais específicos da matemática não são encontrados nos glossários e dicionários com a mesma facilidade.

Alguns dos sinais relacionados à matemática são encontrados em diferentes fontes com diferentes configurações porque muitas vezes esses sinais são criados em sala de aula num combinado entre o intérprete educacional e o aluno Surdo para facilitar a comunicação.

- **Modo:** normalmente essa palavra é utilizada para se referir à conduta ou comportamento diante a uma situação. Ex.: De quantos modos podemos combinar 3 blusas e 2 calças? Ou seja, desejamos saber quais são as possíveis combinações com essas 5 peças disponíveis.

Figura 7: Sinal em Libras para a palavra modo



modo (inglês: *manners, behavior, habit, custom, use, way, style, form, way*):

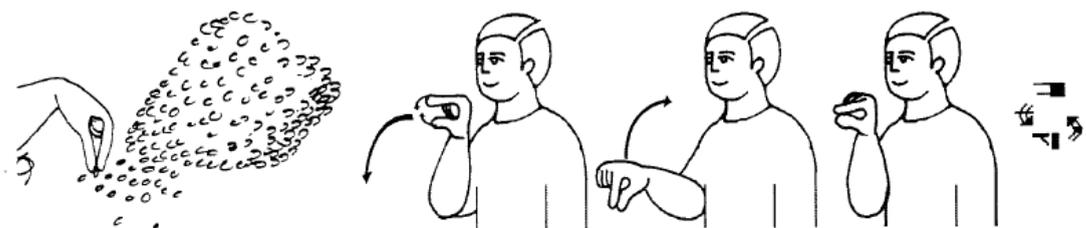
s. m. Forma ou maneira de ser ou manifestar-se uma coisa. Maneira ou forma particular de fazer as coisas, ou de falar. Disposição de espírito das pessoas. Jeito, habilidade, destreza. Modos. Comportamento. Forma. Maneira. Hábito. Costume. Método ou técnica para fazer qualquer coisa. Ex.: Seu modo de falar e de se comportar é encantador.

Fazer o sinal de **jeito**.

Fonte: CAPOVILLA; RAPHAEL, 2001, p. 916

- **Escolher:** normalmente essa palavra é utilizada no contexto de selecionar, separar.

Figura 8: Sinal em Libras para a palavra escolher



escolher (inglês: *to choose, to select, to pick out*):

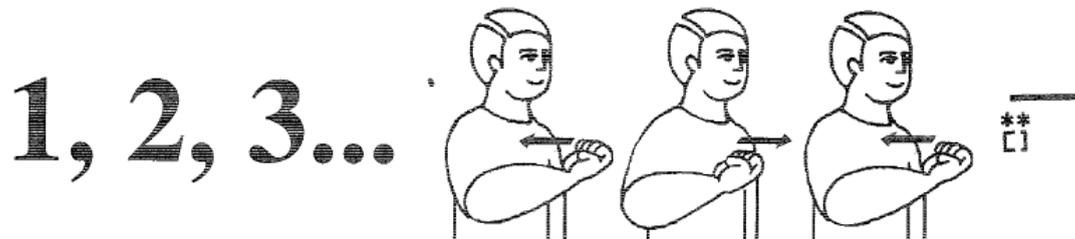
v. t. d. Dar preferência a, entre coisas da mesma espécie. Eleger, nomear. Optar. Ex.: É difícil para o adolescente escolher a profissão que deseja seguir na vida adulta.

Mão direita vertical fechada, palma para frente, dedos indicador e polegar distendidos para frente, diante do ombro direito. Mover a mão para frente e para baixo, unindo as pontas dos dedos, e movê-la para trás, em direção ao corpo.

Fonte: CAPOVILLA; RAPHAEL, 2001, p. 600

- **Número:** trouxemos a importância desse conceito em relação a diferença do conceito de algarismo, porém não encontramos o sinal de algarismo em dicionários e glossários.

Figura 9: Sinal em Libras para a palavra número



número (inglês: *number, numeral*):

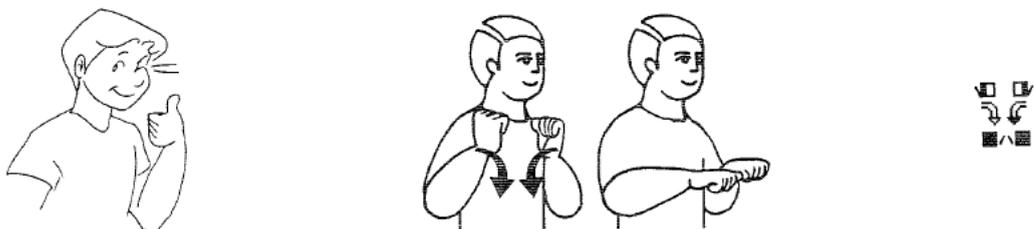
s. m. Algarismo, numeral, dígito. Expressão da quantidade. Ex.: Anote o número do telefone do médico.

Mão direita em S horizontal, palma para cima, tocar o lado esquerdo do peito, duas vezes.

Fonte: CAPOVILLA; RAPHAEL, 2001, p. 956

- **Possibilidade (possível):** esse é um termo muito utilizado nas questões de contagem, pois sempre estamos querendo saber de quantos modos, quantas escolhas temos. Ou seja, normalmente esses três conceitos (escolha, possibilidade e modo) são usados como sinônimos dentro do conteúdo de Contagem.

Figura 10: Sinal em Libras para a palavra possível



possível (inglês: *possible, attainable, feasible*):

adj. m. e f. Que pode ser, existir, acontecer, fazer-se ou praticar-se. Provável, plausível, viável, praticável, verossímil. Ex.: É possível diminuir o índice de mortalidade infantil, investindo mais recursos na área da saúde.

Mãos em A vertical, palma a palma. Mover as mãos em um arco, uma em direção à outra, e para baixo, virando as palmas para baixo.

Fonte: CAPOVILLA; RAPHAEL, 2001, p. 1067

Estes termos abaixo são recorrentes nos enunciados dos problemas e mesmo assim não encontramos sinais para eles no dicionário do INES e no Capovilla, que são os dicionários mais acessados.

- **Probabilidade:** Qualidade do que é provável, do que tem possibilidade de acontecer, do que pode ocorrer. Razão que faz supor a verdade ou possibilidade de um fato. Tendência favorável para que alguma coisa ocorra; possibilidade³.

Figura 11: Sinal em Libras para a palavra Probabilidade



Fonte: Tradutora Maria Cristina Bianchini⁴

Diversos termos que frequentemente são encontrados nos enunciados carecem de sinais em Libras que os representem. A falta desses sinais dificulta a comunicação e transmissão desses conhecimentos para o aluno Surdo em sala de aula, tornando o diálogo mais demorado e confuso (VASCONCELOS, 2010 *apud* CAMINI, 2019). Alguns deles são listados abaixo:

- Contagem
- Permutação
- Combinação
- Arranjo
- Anagrama
- Espaço Amostral
- Equiprovável
- Princípio Multiplicativo

³ Disponível em: <https://www.dicio.com.br/probabilidade/#:~:text=Significado%20de%20Probabilidade,acontecer%2C%20do%20que%20pode%20ocorrer.&text=A%20palavra%20probabilidade%20deriva%20do,que%20%C3%A9%20prov%C3%A1vel%20ou%20verossimilhan%C3%A7a>

⁴ Reprodução do sinal encontrado em Martins (2019) para melhor visualização da imagem.

- Algarismo
- Coplanares
- Condicional
- Impasses
- Restrita
- Analogamente
- Adjacente
- Ordenação

O ensino é dificultado quando ainda não existem sinais matemáticos em Libras e quando existem são sinais combinados entre intérpretes e Surdos, não sendo conhecidos e utilizados de maneira uniforme dentro da comunidade Surda. A criação de sinais possibilita uma melhora no ensino de matemática para as pessoas Surdas (GUIMARÃES, *sf apud* CAMINI, 2019).

Por Libras ser dinâmica e, principalmente com a pandemia, muitos materiais em vídeo estão sendo disponibilizados, futuramente será interessante expandir a pesquisa coletando dados em vídeos disponibilizados no Youtube.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para que a educação desses alunos seja mais efetiva não basta apenas termos sinais para facilitar a comunicação dos Surdos com o intérprete, precisamos repensar toda a metodologia de ensino de matemática. Não basta termos sinais para agilizar a transmissão em Libras, do que o professor fala, para o aluno Surdo e o professor “[...]continuar baseando as suas aulas em estímulos da esfera auditivo-oral, não ocorrerá a inclusão desses sujeitos na escola”. (Miranda;Miranda, 2011).

Neste trabalho apenas foram dados os primeiros passos em relação à construção de um material de apoio para o Intérprete educacional. É esperado o desenvolvimento de um material no formato de oficinas para apresentar essa discussão para intérpretes dentro da proposta do GEPAM. Nesta oficina serão trabalhados vocabulários e abordagens metodológicas acerca do conteúdo.

Dentro do recorte definido para a presente pesquisa buscou-se refletir sobre qual seria o vocabulário básico necessário para interpretar uma aula sobre o Princípio Fundamental da Contagem?

Para isso, compartilhou-se o próprio percurso da pesquisadora enquanto professora de Matemática em formação e participante de Grupo de Pesquisa que busca refletir sobre a construção de conhecimentos com estudantes Surdos, ressaltando a parceria fundamental com o intérprete educacional. Deste modo, a fim de contemplar outros colegas pesquisadores da área da Matemática, inicialmente apresentou-se brevemente um perfil geral do sujeito surdo, passando por dados históricos e destacando os profissionais e recursos envolvidos na educação de surdos.

Para valorizar as pesquisas que já estão sendo desenvolvidas no âmbito do ensino de matemática para surdos foram apresentadas algumas discussões nesta área e finalmente situar o recorte deste trabalho com relação à análise de enunciados de atividades sobre o Princípio Fundamental da Contagem. Além de indicar alguns termos-chave para a interpretação dos enunciados, também foi realizada uma busca nos principais dicionários de Libras para verificar se existem sinais correspondentes para estes termos-chave.

A exploração inicial evidenciou que o vocabulário em Libras ainda está se

expandindo, isso se deve, provavelmente, ao pouco tempo de visibilidade que a Libras e as pessoas Surdas têm nas escolas regulares.

A intenção dessa pesquisa foi colaborar no sentido de indicar que há um caminho a se percorrer na Educação Matemática de Surdos e pensar sobre as questões de linguagem e sobre o intérprete educacional, mediador da comunicação em sala de aula, parece ser determinante para o desenvolvimento escolar das pessoas Surdas.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Danielle Mirelli da Silva.; SILVA, Marcele de Castro e; SOUSA, Wilma Pastor de Andrade. **A influência da LIBRAS no processo educacional de estudantes surdos em escola regular.** Universidade Federal de Pernambuco, 2006.

BARBOSA, Sândala; QUARESMA, Soraia. **A importância do ensino de LIBRAS - Língua Brasileira de Sinais - no contexto escolar.** Universidade Vale do Acaraú, 2011.

BOGAS, João Vitor. **Porque você não deve falar linguagem de sinais**

Disponível em:

<<https://blog.handtalk.me/linguagem-de-sinais/#:~:text=A%20pr%C3%B3pria%20Libras%20se%20originou,de%20contato%20entre%20os%20surdos!>> Acesso em: 02/05/2021.

BOGAS, João Vitor. **Surdo ou Deficiente Auditivo: qual é a nomenclatura**

correta? Disponível em: <<https://blog.handtalk.me/surdo-ou-deficiente-auditivo/>>

Acesso em: 02/05/2021.

BORGES, Fábio Alexandre **A educação Inclusiva para Surdos: uma análise do saber matemático intermediado pelo Intérprete de Libras** Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação para a Ciência e a Matemática, 2013.

BORGES, Fábio Alexandre; NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. **Um panorama da inclusão de estudantes surdos nas aulas de matemática.** In: NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius (Org.). Surdez, inclusão e matemática. Curitiba: CRV, 2013. p. 43-70

BRASIL. Lei nº 10.436, de 24 de abril de 2002. **Dispõe sobre a Língua Brasileira de Sinais – LIBRAS.** Brasília, 2002.

___BRASIL. Decreto nº 5.626, de 22 de dezembro de 2005. **Regulamenta a Lei no 10.436, de 24 de abril de 2002,** que Dispõe sobre a Língua Brasileira de Sinais – Libras. Brasília, 2005.

___BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Especial, Programa Nacional de Apoio à Educação de Surdos – **O tradutor e intérprete de língua brasileira de sinais e língua portuguesa.** Brasília: MEC; SEESP, 2004

___BRASIL, Ministério da Educação. **Política nacional de educação especial na perspectiva da educação inclusiva.** Brasília, DF: Secretaria de Educação especial, MEC, 2008.

___BRASIL, **Lei nº 13.146,** de 06 de julho de 2015. **Institui a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência** (Estatuto da Pessoa com Deficiência).

BRASIL. Ministério da Educação. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Brasília: 2006. (volume 2).

CAMINI, Lidiane. **Educação Matemática para surdos: Uma análise das publicações do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)** . Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática, Florianópolis, 2019.

CAPOVILLA, Fernando César. RAPHAEL, Walkiria Duarte. **Dicionário Enciclopédico Ilustrado Trilíngue da Língua de Sinais Brasileira – Libras**. São Paulo: Edusp, 2001. 2 v.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Métodos de Contagem e Probabilidade**. Rio de Janeiro, IMPA, 2015.

CONCEIÇÃO, Dérick de Carvalho; PEREIRA, Ducival Carvalho; SANTOS, Maria de Lourdes Silva. **O ensino-aprendizagem de Análise Combinatória: o desempenho de alunos de Belém do Pará** Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016

FERRARI, Ana Carolina Machado, **Atuação do tradutor intérprete de libras na aprendizagem matemática de surdos no ensino fundamental** Dissertação - (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação. Belo Horizonte, 2014.

GESSER, Audrey. **LIBRAS? Que língua é essa?: crenças e preconceitos em torno da língua de sinais e da realidade surda**. São Paulo: Parábola Editorial, 2009.

GUARINELLO, Ana Cristina; BERBERIAN, Ana Paula ; SANTANA, Ana Paula de Oliveira; BORTOLOZZI, Kyrlian Bartira; SCHEMBERG, Simone; FIGUEIREDO, Luciana Cabral. **Surdez e letramento: pesquisa com surdos universitários de Curitiba e Florianópolis**. Rev. bras. educ. espec. vol.15 no.1 Marília Jan./Apr. 2009

KIPPER, Daiane. **Currículo de Matemática: Estratégias e recursos de ensino para alunos surdos**. X ANPED SUL, Florianópolis, outubro de 2014.

LDB. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, 1996.

LOPES, Celi Espasandin. **Os desafios e as perspectivas para a educação matemática no Ensino Médio**. Sessão Trabalho Encomendado – Anped34 - 2011. Grupo de Trabalho - GT19 - Educação Matemática.

MACHADO, R. B.; OLIVEIRA, J. S. de.. **Na vibração com a alteridade surda, o que pode a matemática?** 2021. 5f. Projeto de Pesquisa - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2021.

MACHADO, R. B.; OLIVEIRA, J. S. de.. **Por uma Matemática Surda: ensino de Matemática em Libras**. 2021. 3f. Projeto de Extensão - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2021

MARTINS, Leila Alves. **Glossário de Probabilidade e Estatística em Libras: Produto Educacional vinculado à dissertação “Educação matemática para surdos: contribuições de um glossário para o ensino de probabilidade e estatística”** [manuscrito] / Leila Alves Martins; Adelino Cândido Pimenta. -- 2019.

MIRANDA, Crispim Joaquim de Almeida; MIRANDA, Tatiana Lopes de. **O Ensino de Matemática para Alunos Surdos: Quais os Desafios que o Professor Enfrenta?** Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Santa Catarina, v. 6, n. 1, p. 31-46, 2012.

MOREIRA, Geraldo Eustáquio. **O ensino de matemática para alunos surdos: dentro e fora do texto em contexto** Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.18, n.2, pp.741-757, 2016

PEIXOTO, Jurema Lindote Botelho. **Análise dos esquemas de surdos sinalizadores associados aos significados da divisão**. Jurema Lindote Botelho Peixoto. - Salvador, 2015.

SALES, Elielson Ribeiro de. **A visualização no ensino de matemática: uma experiência com alunos surdos**. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2013.

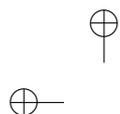
SILVA, Iramí Bila da. **Libras como interface no ensino de funções matemáticas para surdos: uma abordagem a partir das narrativas**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, 2016.

STROBEL, Karin. **As imagens do outro sobre a cultura surda**. 2. ed. rev. Florianópolis: Ed. da UFSC, 2009.

UNESCO. **DECLARAÇÃO DE SALAMANCA**: Sobre princípios, políticas e práticas na área das necessidades educativas especiais. Salamanca – Espanha, 1994.

ANEXO A - Apostila PIC

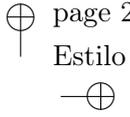
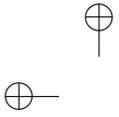
MÉTODOS DE CONTAGEM E PROBABILIDADE
AUTOR: PAULO CEZAR PINTO CARVALHO



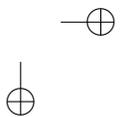
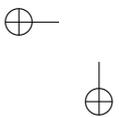
Métodos de Contagem e Probabilidade

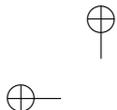
Paulo Cezar Pinto Carvalho





Texto já revisado pela nova ortografia.





Sobre o Autor

Paulo Cezar Pinto Carvalho é formado em Engenharia pelo Instituto Militar de Engenharia, Mestre em Estatística pelo IMPA e PhD em Pesquisa Operacional pela Universidade Cornell. Atualmente é pesquisador do IMPA, na área de Visão Computacional e Computação Gráfica. Divide o tempo devotado à pesquisa com atividades ligadas à melhoria do ensino em todos os níveis. Desde 1991 é professor do Programa de Aperfeiçoamento de Professores, promovido pelo IMPA. É autor de diversos livros da Coleção do Professor de Matemática, publicada pela SBM. Também tem se dedicado às Olimpíadas de Matemática, participando da organização da Olimpíada Brasileira de Matemática, desempenhando a função de líder em várias olimpíadas internacionais e, mais recentemente, servindo no Comitê Executivo da OBMEP.





Antes de começar

Este livro é dedicado a um tema que, paradoxalmente, é extremamente simples, mas é muitas vezes considerado difícil por alunos e professores. Talvez isto se deva ao fato de que, diferentemente do que ocorre com outros assuntos da matemática secundária, cujo ensino muitas vezes é fortemente baseado na aplicação de fórmulas e repetição de problemas-modelo, é preciso pensar para resolver problemas, mesmo os mais simples, de contagem. Isto faz com que o tema seja especialmente apropriado para este estágio, contribuindo para desenvolver a imaginação dos alunos e a sua confiança para resolver problemas.

Durante muitos anos, o estudo de problemas de contagem (e mais recentemente de probabilidade) fez parte, exclusivamente, do Ensino Médio. Entretanto, o tema é perfeitamente acessível aos alunos do Ensino Fundamental, o que tem sido reconhecido, por exemplo, pelos Parâmetros Curriculares editados pelo MEC.

Esta apostila possui 5 capítulos. O primeiro é destinado a ambos os grupos. É desejável que os alunos, principalmente os do grupo 1, resolvam todos os problemas propostos e que os instrutores encorajem a exposição de soluções diferentes e, principalmente, de soluções erradas. Como em outras áreas da Matemática, muitas vezes aprendemos mais com os erros do que com os acertos ao resolver problemas de contagem. Os Capítulos 2 e 3 contêm essencialmente o mesmo

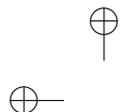
ii

material (uma introdução à noção de probabilidade), escritos para diferentes níveis de maturidade, sendo, em princípio, indicados para os grupos 1 e 2, respectivamente. Os Capítulos 4 e 5 foram escritos com os alunos do grupo 2 em mente, mas também são acessíveis aos do grupo 1, caso haja tempo.

Soluções para todos os problemas podem ser encontradas no final. Mas é claro que só devem ser consultadas após uma tentativa séria de resolução dos problemas.

Gostaria de terminar com dois agradecimentos. O primeiro é para a Profa. Maria Lúcia Villela, pela revisão extremamente benfeita do material, tendo contribuído com diversas sugestões que foram incorporadas ao texto. Mas o agradecimento mais especial vai para o Prof. Augusto César Morgado. Se os leitores acharem que estas notas são parecidas com os seus escritos e suas aulas, isto não é mera coincidência. Tive a sorte de ter sido aluno do Prof. Morgado no 3º ano do Ensino Médio, quando tive ocasião de aprender sobre contagem do modo exposto nesta apostila. Até hoje continuo aprendendo com ele, como colega e coautor. Espero que cada um de vocês, alunos, tenha a oportunidade de ter um professor de Matemática tão inspirador quanto ele.

O autor

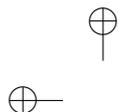


Sumário

1	Métodos de Contagem	1
2	Probabilidade (grupo 1)	16
3	Probabilidade (grupo 2)	21
4	Mais Permutações e Combinações (grupo 2)	30
5	Probabilidade Condicional (grupo 2)	40
	Exercícios Adicionais	47
	Soluções dos Exercícios	55





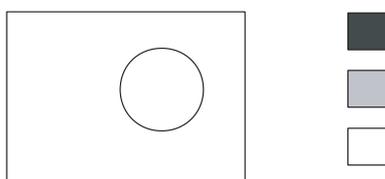


Capítulo 1

Métodos de Contagem

Problemas de contagem são, muitas vezes, considerados difíceis entre alunos e professores, apesar de as técnicas matemáticas necessárias serem bastante elementares: essencialmente, o conhecimento das operações aritméticas de soma, subtração, multiplicação e divisão. O objetivo deste material é habituar o aluno a trabalhar com problemas de contagem e a ver que, afinal de contas, tais problemas podem ser resolvidos com raciocínios simples na grande maioria dos casos, sem exigir o uso de fórmulas complicadas. É isto o que procuramos mostrar nos exemplos a seguir.

Exemplo 1. Uma bandeira com a forma abaixo vai ser pintada utilizando duas das cores dadas.



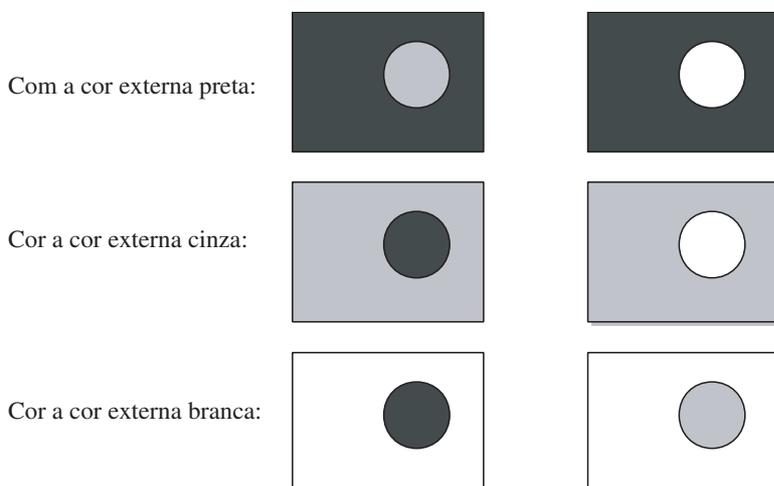
(a) *Liste todas as possíveis bandeiras. Quantas são elas?*

Solução: É importante ter um procedimento sistemático para listar todas as possíveis bandeiras, sem repeti-las. Para tal, devemos identificar as diferentes decisões a serem tomadas e examinar todas as possibilidades para cada uma delas. No caso deste problema, uma forma natural para planejar o preenchimento da bandeira é:

- escolher a cor a ser utilizada para a parte externa;
- a seguir, escolher a cor para o círculo interno.

A primeira decisão pode ser feita de 3 modos diferentes, já que a cor externa pode ser qualquer uma das disponíveis. Uma vez tomada esta decisão, a cor escolhida não pode mais ser usada para o círculo interno. Por exemplo, se a cor preta for escolhida para a parte externa, a cor interna deverá ser cinza ou branca.

Podemos, então, listar todas as possíveis bandeiras, que são 6, de acordo com a figura abaixo.



Um fato importante, que pode ser explorado na contagem eficiente do

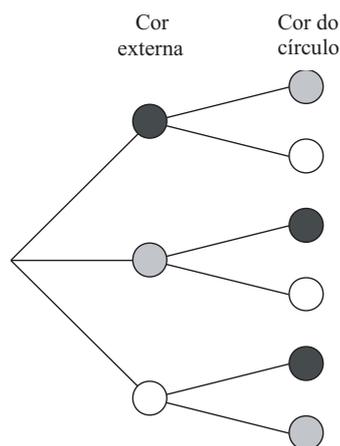
número possível de bandeiras, é o seguinte: as cores disponíveis para pintar o círculo mudam de acordo com a escolha da parte externa, mas a sua quantidade é sempre a mesma, já que, qualquer que seja a cor externa escolhida, há sempre duas cores restantes para o círculo. Portanto, poderíamos ter empregado o seguinte raciocínio para contar o número de possíveis bandeiras, sem listá-las:

A cor externa pode ser escolhida de três modos diferentes. Qualquer que seja essa escolha, a cor do círculo pode ser escolhida de dois modos. Logo, o número total de possibilidades é $2 + 2 + 2 = 3 \times 2 = 6$.

O procedimento acima ilustra o *Princípio Multiplicativo* ou *Princípio Fundamental da Contagem*:

Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja essa escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual a pq .

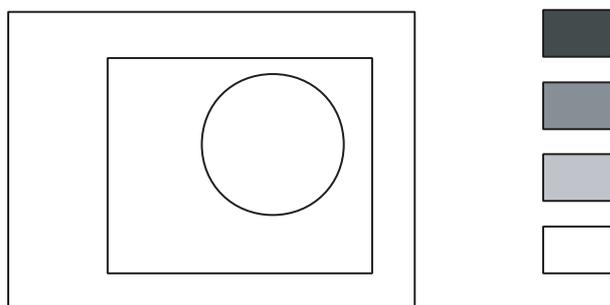
O Princípio Multiplicativo pode ser ilustrado com o auxílio de uma árvore de enumeração como a da figura a seguir.



(b) *Quantas são as possíveis bandeiras no caso em que 4 cores estão disponíveis?*

Solução: As decisões a serem tomadas são exatamente as mesmas do caso anterior, tendo mudado apenas o número de possibilidades de escolha. Para a cor externa, temos agora 4 possibilidades. Uma vez escolhida a cor externa, a cor do círculo pode ser qualquer uma das outras 3. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o número de modos diferentes para pintar a bandeira é $4 \times 3 = 12$.

Exemplo 2. Quantas são as formas de pintar a bandeira a seguir utilizando 3 cores diferentes dentre 4 dadas?



Solução: Agora, temos 3 decisões consecutivas a tomar: a cor externa, a do retângulo e a do círculo. A cor externa pode ser qualquer uma das 4 cores; uma vez escolhida a cor externa, o retângulo pode ser pintado de três modos distintos. Logo, a escolha combinada da cor externa e do retângulo pode ser feita de $4 \times 3 = 12$ modos. Para cada um destes 12 modos, o círculo pode ser pintado com uma das duas cores que sobraram. Logo, o número total de possibilidades é $4 \times 3 \times 2 = 24$.

O raciocínio acima mostra que o Princípio Multiplicativo pode, na realidade, ser aplicado quando temos diversas etapas de decisão: desde que o número de possibilidades em cada etapa não dependa das decisões anteriores, basta multiplicá-los para achar o número total de possibilidades.

Exemplo 3. Para pintar a bandeira abaixo, há 4 cores disponíveis. De quantos modos ela pode ser pintada de modo que faixas adjacentes tenham cores distintas?



Solução: O primeiro passo é escolher em que ordem vamos pintar a bandeira. Podemos, por exemplo, pintar as faixas de cima para baixo (veja, no exercício 16, o que ocorre quando escolhemos mal a ordem de preenchimento). A cor da primeira faixa pode ser qualquer uma das 4 cores. Qualquer que seja a cor escolhida, para a segunda faixa temos 3 cores para escolher. Escolhida a cor da segunda faixa, a terceira pode ser pintada de qualquer cor, exceto a usada para a segunda faixa. Assim, temos novamente 3 possibilidades de escolha.

O número total de possibilidades é, então:

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & \times & 3 & \times & 3 & = & 36 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1^{\text{a}} \text{ faixa} & & 2^{\text{a}} \text{ faixa} & & 3^{\text{a}} \text{ faixa} & & \end{array}$$

Exemplo 4. Quantos são os números de três algarismos distintos?

Solução: Vamos escolher, sucessivamente, os três algarismos, começando com o da esquerda (isto é importante, como veremos abaixo). O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual a 0. O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo algarismo.

A resposta é $9 \times 9 \times 8 = 648$.

Exemplo 5. O código Morse usa duas letras, ponto e traço, e as palavras têm de 1 a 4 letras. Quantas são as palavras do código Morse?

Solução: Há palavras de 1, 2, 3 e 4 letras, em quantidades diferentes. Assim, nossa estratégia é a de usar o Princípio Multiplicativo para contar separadamente estas palavras e, depois, somar estas quantidades. Há 2 palavras de uma letra; há $2 \times 2 = 4$ palavras de duas letras, pois há dois modos de escolher a primeira letra e dois modos de escolher a segunda letra; analogamente, há $2 \times 2 \times 2 = 8$ palavras de três letras e $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ palavras de 4 letras. O número

total de palavras é $2 + 4 + 8 + 16 = 30$.

Você já deve ter percebido nesses exemplos qual é a estratégia para resolver problemas de contagem:

1. Postura: Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. Nas diversas situações dos Exemplos 1 a 3, nós nos colocamos no papel da pessoa que deveria colorir a bandeira; no Exemplo 4, colocamo-nos no papel da pessoa que deveria escrever o número.

2. Divisão: Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisão. Colorir a bandeira foi dividido em colorir cada região; formar um número de três algarismos foi dividido em escolher cada um dos três algarismos. Formar a palavra no código Morse foi dividido em escolher o número de letras e, a seguir, em escolher cada letra.

A ordem em que as decisões são tomadas pode ser extremamente importante para a simplicidade do processo de resolução. Vamos voltar ao Exemplo 4 (*Quantos são os números de três algarismos distintos?*) para ver como uma estratégia equivocada pode levar a uma solução desnecessariamente complicada.

Começando a escolha dos algarismos pelo último algarismo, há 10 modos de escolher o último algarismo. Em seguida, há 9 modos de escolher o algarismo central, pois não podemos repetir o algarismo já usado. Agora temos um impasse: de quantos modos podemos escolher o primeiro algarismo? A resposta é “depende”. Se não tivermos

usado o 0, haverá 7 modos de escolher o primeiro algarismo, pois não poderemos usar nem o 0 nem os dois algarismos já usados nas demais casas; se já tivermos usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro algarismo.

Para evitar, na medida do possível, impasses como o acima, uma outra recomendação importante é:

3. Não adiar dificuldades. Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. No Exemplo 4, a escolha do primeiro algarismo era uma decisão mais restrita do que as outras, pois o primeiro algarismo não pode ser igual a 0. Essa é, portanto, a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar, e, conforme acabamos de ver, postergá-la só serve para causar problemas.

Exemplo 6. Quantos são os números pares de três algarismos distintos?

Solução: Há 5 modos de escolher o último algarismo. Note que começamos pelo último algarismo, que é o mais restrito; o último algarismo só pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8.

Em seguida, vamos ao primeiro algarismo. De quantos modos se pode escolher o primeiro algarismo? A resposta é "depende": se não tivermos usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro algarismo, pois não poderemos usar nem o 0 nem o algarismo já usado na última casa; se já tivermos usado o 0, haverá 9 modos de escolher o primeiro algarismo, pois apenas o 0 não poderá ser usado na primeira casa.

Assim, apesar de termos procurado atacar inicialmente a escolha mais restrita, chegamos a um impasse no uso do Princípio Multiplicativo. Esse tipo de impasse é comum na resolução de problemas e há dois métodos para vencê-lo.

O primeiro método consiste em voltar atrás e contar separadamente. Contaremos separadamente os números que terminam em 0 e os que não terminam em 0. Começemos pelos que terminam em 0. Há 1 modo de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o algarismo central. Há, portanto, $1 \times 9 \times 8 = 72$ números de três algarismos distintos terminados em 0.

Para os que não terminam em 0, há 4 modos de escolher o último algarismo, 8 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o algarismo central. Há $4 \times 8 \times 8 = 256$ números pares de três algarismos distintos que não terminam em 0.

A resposta é $72 + 256 = 328$.

O segundo método consiste em ignorar uma das restrições do problema, o que nos fará contar em demasia. Depois descontaremos o que houver sido contado indevidamente.

Primeiramente fazemos de conta que o 0 pode ser usado na primeira casa do número. Procedendo assim, há 5 modos de escolher o último algarismo (só pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8), 9 modos de escolher o primeiro algarismo (não podemos repetir o algarismo usado na última casa – note que estamos permitindo o uso do 0 na primeira casa) e 8 modos de escolher o algarismo central. Há $5 \times 9 \times 8 = 360$ números, aí inclusos os que começam por 0.

Agora vamos determinar quantos desses números começam por zero; são esses os números que foram contados indevidamente. Há 1 modo de escolher o primeiro algarismo (tem que ser 0), 4 modos de escolher o último (só pode ser 2, 4, 6 ou 8 – lembre-se de que os algarismos são distintos) e 8 modos de escolher o algarismo central (não podemos repetir os algarismos já usados). Há $1 \times 4 \times 8 = 32$ números começados por 0.

A resposta é $360 - 32 = 328$.

Exemplo 7. De quantos modos diferentes 6 pessoas podem ser colocadas em fila?

Solução: Este é um problema clássico de contagem, chamado de *problema das permutações simples*, que é facilmente resolvido pelo Princípio Multiplicativo. De fato, basta escolher sucessivamente as pessoas colocadas em cada posição da fila. Para escolher o primeiro da fila, temos 6 possibilidades; o segundo pode ser qualquer uma das 5 pessoas restantes, e assim por diante. Logo, o número total de possibilidades é $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$. De um modo geral, o número de modos de ordenar n objetos é igual a $n \times (n - 1) \times \cdots \times 1$, que é representado por $n!$ (lê-se: n fatorial).

Exemplo 8. De quantos modos podem-se escolher três dos jogadores de um time de futebol para representá-lo em uma cerimônia de premiação?

Solução: Este é um outro problema clássico de contagem, chamado de *problema das combinações simples*. À primeira vista, parece ser simples resolvê-lo pelo Princípio Multiplicativo: basta escolher um representante de cada vez. O primeiro pode ser escolhido de 11 modos, o segundo, de 10 e o terceiro, de 9. Logo, o número total de

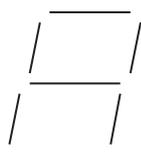
possibilidades parece ser $11 \times 10 \times 9 = 990$. Esta solução está incorreta, mas podemos consertá-la para chegar à resposta certa. Suponha que tivéssemos escolhido, sucessivamente, os jogadores A , B e C . A comissão de representantes assim formada seria exatamente a mesma se tivéssemos selecionado, por exemplo, primeiro B , depois A , depois C . No entanto, as duas escolhas foram contadas por nós como se fossem distintas. O que nos permite corrigir o resultado da contagem é o fato de que todas as possíveis comissões são repetidas o mesmo número de vezes, correspondente a todas as suas possíveis ordenações. Por exemplo, A , B e C vão surgir, em nosso processo de enumeração, $3 \times 2 \times 1 = 6$ vezes, o mesmo ocorrendo com todas as possíveis comissões. Logo, o número correto de comissões é igual a $990/6 = 165$.

De modo geral, o número de modos de escolher p dentre n objetos é representado por C_n^p (lê-se: combinação de n tomados p a p) e é igual a $\frac{n(n-1) \cdots (n-p+1)}{p(p-1) \cdots 1}$.

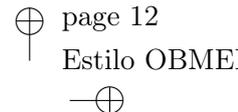
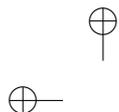
Exercícios

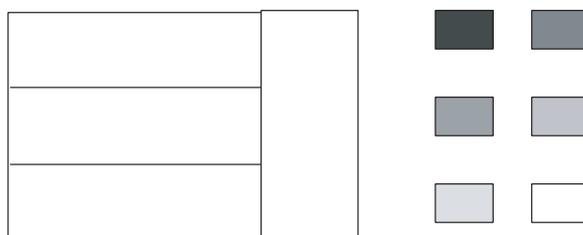
- 1) Um grupo de 4 alunos (Alice, Bernardo, Carolina e Daniel) tem que escolher um líder e um vice-líder para um debate.
 - (a) Faça uma lista de todas as possíveis escolhas (use a inicial de cada nome, para facilitar). Organize a sua lista do seguinte modo: primeiro, escreva todas as possibilidades em que Alice é a presidente, depois, aquelas em que Bernardo é presidente, e assim por diante.
 - (b) Conte o número de possíveis escolhas e verifique que o Princípio Multiplicativo fornece a mesma resposta.

- 2) Um restaurante possui um cardápio que apresenta escolhas de saladas (salada verde, salada russa ou salpicão), sopas (caldo verde, canja ou de legumes) e pratos principais (bife com fritas, peixe com puré, frango com legumes ou lasanha).
- (a) De quantos modos se pode escolher um prato deste cardápio?
- (b) De quantos modos se pode escolher uma refeição completa, formada por uma salada, uma sopa e um prato principal?
- 3) Quantos Algarismos são escritos ao se escreverem os números inteiros de 1 a 100?
- 4) João e Isabel lançam, cada um, um dado.
- (a) Quantas são as possíveis combinações de resultado?
- (b) Quantas são as possíveis somas que eles podem obter?
- 5) Cada dígito de uma calculadora é mostrado no visor acendendo filamentos dispostos como mostra a figura a seguir. Quantos símbolos diferentes podem ser representados? (Não inclua o caso em que nenhum filamento é aceso.)



- 6) Para pintar a bandeira abaixo estão disponíveis as seis cores dadas, sendo que regiões adjacentes devem ser pintadas de cores diferentes.
- (a) Qual é o número mínimo de cores a serem usadas?





(b) De quantos modos a bandeira pode ser pintada?

- 7) Dispostos de 5 cores distintas. De quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um círculo, cada quadrante com uma só cor, se quadrantes cuja fronteira é uma linha não podem receber a mesma cor?
- 8) Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão? Em quantos destes gabaritos a letra A aparece exatamente uma vez? Em quantos a letra A não aparece?
- 9) Liste todos os subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$. Quantos são eles? De modo geral, quantos são os subconjuntos de um conjunto que tem n elementos?
- 10) De quantos modos 3 pessoas podem se sentar em 5 cadeiras em fila?
- 11) De quantos modos 5 homens e 5 mulheres podem se sentar em 5 bancos de 2 lugares, se em cada banco deve haver um homem e uma mulher?
- 12) De quantos modos podemos colocar 2 reis diferentes em casas não adjacentes de um tabuleiro 8×8 ? E se os reis fossem iguais?
- 13) De quantos modos podemos formar uma palavra de 5 letras de um alfabeto de 26 letras, se a letra A deve figurar na palavra

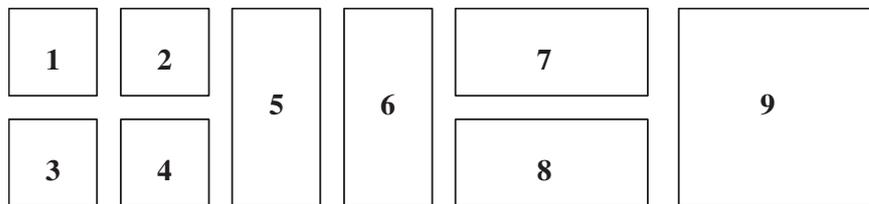
mas não pode ser a primeira letra da palavra? E se a palavra devesse ter letras distintas?

- 14) As placas dos veículos são formadas por três letras (de um alfabeto de 26) seguidas por 4 algarismos. Quantas placas poderão ser formadas?
- 15) Um vagão do metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem se sentar de frente, 3 preferem se sentar de costas, e os demais não têm preferência. De quantos modos eles podem se sentar, respeitadas as preferências?
- 16) Escrevem-se os inteiros de 1 até 2 222.
 - (a) Quantas vezes o algarismo 0 é escrito?
 - (b) Em quantos números aparece o algarismo 0?
- 17) Quantos são os inteiros positivos de 4 algarismos nos quais o algarismo 5 figura?
- 18) Em uma banca há 5 exemplares iguais da *Veja*, 6 exemplares iguais da *Época* e 4 exemplares iguais da *Isto É*. Quantas coleções não vazias de revistas dessa banca podem ser formadas?
- 19) *Tendo 4 cores disponíveis, de quantos modos se pode pintar uma bandeira com 3 listras, tendo listras adjacentes de cores distintas?* Um aluno deu a seguinte solução: "Primeiro, eu vou pintar as listras extremas; para cada uma, eu tenho 4 possibilidades de escolha. Depois, eu pinto a listra central; como ela tem que ter cor diferente das duas vizinhas, eu posso escolher sua cor de apenas 2 modos. Logo, o número total de modos de pintar a bandeira é $4 \times 4 \times 2 = 32$ ". A solução está certa ou errada? Se estiver errada, onde está o erro?

- 20) *Com 5 homens e 5 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal?* Este problema foi resolvido por um aluno do modo a seguir: “A primeira pessoa do casal pode ser escolhida de 10 modos, pois ela pode ser homem ou mulher. Escolhida a primeira pessoa, a segunda pessoa só poderá ser escolhida de 5 modos, pois deve ser de sexo diferente do da primeira pessoa. Há, portanto, $10 \times 5 = 50$ modos de formar um casal.”

A solução está certa ou errada? Se estiver errada, onde está o erro?

- 21) Cada peça de um dominó apresenta um par de números de 0 a 6, não necessariamente distintos. Quantas são essas peças? E se os números forem de 0 a 8?
- 22) Quantos retângulos há formados por casas adjacentes em um tabuleiro de xadrez 8×8 ? Por exemplo, em um tabuleiro 2×2 há 9 retângulos, como mostra a figura abaixo.



Capítulo 2

Probabilidade (grupo 1)

Uma das principais aplicações das técnicas de contagem é a resolução de problemas simples de Probabilidade. O interesse dos matemáticos no estudo sistemático de probabilidades é relativamente recente e tem suas raízes no estudo dos jogos de azar.

No estudo desses jogos, normalmente ocorre a seguinte situação: todos os possíveis resultados têm a mesma chance de ocorrer. Por exemplo, ao lançar um dado “honesto” (quer dizer, construído de forma perfeitamente cúbica e homogênea), todas as faces têm a mesma chance de sair. Como as faces são 6, esperamos que cada uma delas ocorra em aproximadamente $1/6$ dos lançamentos. Dizemos, então, que cada uma delas tem *probabilidade* $1/6$ de sair.

Também atribuímos probabilidades a conjuntos de resultados possíveis, chamados de *eventos*. A probabilidade de um evento é simplesmente a soma das probabilidades dos resultados que o compõem.

Exemplo 1. Qual é a probabilidade de se obter um resultado maior que 4 ao se lançar um dado honesto?

Solução: Dizer que sai resultado maior do que 4 é equivalente a dizer

que sai 5 ou 6. Como cada uma destas faces têm probabilidade $\frac{1}{6}$ de ocorrer, a probabilidade de sair um número maior do que 4 é igual a $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

De um modo geral, quando todos os resultados têm a mesma chance de ocorrer, a probabilidade de um evento é a razão entre o número de resultados relativos ao evento e o número total de resultados. Em outras palavras, é a razão entre o número de casos favoráveis à ocorrência do evento e o número total de casos.

Exemplo 2. Ao lançar um dado duas vezes, qual é a probabilidade de se obter soma 5?

Solução: Como em cada lançamento há 6 possibilidades, o número de casos possíveis é $6 \times 6 = 36$, todos com a mesma probabilidade de ocorrência. Destes, aqueles em que a soma é 5 são $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$ e $(4, 1)$. Logo, o número de casos favoráveis ao evento é 4, e sua probabilidade é $4/36 = 1/9$.

Exemplo 3. Em uma urna há 5 bolas vermelhas e 4 pretas, todas de mesmo tamanho e feitas do mesmo material. Retiramos duas bolas sucessivamente da urna, sem repô-las. Qual é a probabilidade de que sejam retiradas duas bolas vermelhas?

Solução: Precisamos, antes de mais nada, identificar quais são os possíveis resultados. Como tudo o que observamos é a cor de cada bola retirada (as bolas de mesma cor são indistinguíveis entre si), poderíamos ser tentados a dizer que temos apenas 4 casos: vv , vp , pv , pp . O problema é que estes casos **não têm** a mesma chance de ocorrer (é óbvio, por exemplo, que duas bolas vermelhas saem com mais frequência que duas bolas pretas, já que há mais bolas vermelhas). A solução con-

siste em considerar individualmente as 9 bolas presentes na urna. Ou seja, os resultados possíveis são todos os pares de bolas distintas, cuja quantidade é $9 \times 8 = 72$. Como todas as bolas são iguais (a menos da cor), todos estes pares têm a mesma probabilidade de sair. Para calcular o número destes pares em que ambas as bolas são vermelhas, devemos observar que a primeira bola vermelha pode ser escolhida de 5 modos, enquanto a segunda pode ser qualquer uma das 4 restantes. Logo, o número de casos favoráveis é igual a $5 \times 4 = 20$. Portanto, a probabilidade de que sejam retiradas duas bolas vermelhas é igual a $20/72 = 5/18$.

Exemplo 4. Pedro e João combinaram de lançar uma moeda 4 vezes. Pedro apostou que, nesses 4 lançamentos, não apareceriam 2 caras seguidas; João aceitou a aposta. Quem tem maior chance de ganhar a aposta?

Solução: Vamos considerar todas as sequências possíveis de resultados. Como em cada lançamento sai cara (C) ou coroa (K), há 2 possibilidades; logo, o número total de possibilidades é igual a $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$. Todas essas sequências têm a mesma probabilidade de ocorrência, já que o resultado de um lançamento não afeta os demais e há a mesma chance de sair cara ou coroa. Vamos agora verificar quais dessas sequências levam à vitória de Pedro.

- Se só saírem coroas ($KKKK$), é claro que Pedro vence.
- Se só sair uma cara ($CKKK, KCKK, KKCK, KKKC$), Pedro também vence.
- Com duas caras, Pedro vence nos casos $KCKC, CKCK$ e $CKKC$.
- Quando saem três ou mais caras, Pedro perde.

Logo, o número de seqüências favoráveis a Pedro é igual a 8, e sua probabilidade de vitória é igual a $8/16 = 1/2$. Portanto, Pedro e João têm a mesma chance de vitória.

Exercícios

- 1) Dois dados são lançados e observa-se a soma de suas faces.
 - (a) Quais são os possíveis resultados para esta soma?
 - (b) Esses resultados são equiprováveis? Caso contrário, que resultado é mais provável? Com que probabilidade? E o menos provável?
 - (c) Qual é a probabilidade de cada resultado possível?
- 2) Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual é a probabilidade de que saiam 2 caras?
- 3) Um casal decidiu que vai ter 4 filhos. O que é mais provável: que tenham dois casais ou três filhos de um sexo e um de outro?
- 4) Laura e Telma retiram um bilhete cada de uma urna em que há 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Qual é a probabilidade de que o número retirado por Laura seja maior do que o de Telma? E se elas, depois de consultarem o número, devolvem o bilhete à urna?
- 5) Duas peças de um dominó comum são sorteadas. Qual é a probabilidade de que tenham um número em comum?
- 6) Ana, Joana e Carolina apostam em um jogo de cara-e-coroa. Ana vence na primeira vez que saírem duas caras seguidas; Joana vence na primeira vez que saírem duas coroas seguidas; Carolina vence quando sair uma cara seguida de uma coroa. Qual é a probabilidade de que cada uma tem de vencer?

- 7) O trecho a seguir foi obtido em um site de internet que se propõe a aumentar as chances de vitória no jogo da Sena (que consiste em sortear 6 dentre 60 dezenas). *“Quando afirmamos, por exemplo, que as dezenas atrasadas são importantes, é porque já observamos, em nossos estudos, que todas as dezenas são sorteadas a cada quarenta testes, portanto, seria útil você acompanhar e apostar em dezenas atrasadas; você estaria assim aumentando muito suas chances.”* Você concorda que apostar em uma dezena atrasada aumenta as chances de vitória na Sena?
- 8) Suponhamos que você tenha duas escolhas para apostar na Sena. Na primeira escolha aposta nas dezenas 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11, e na segunda escolha nas dezenas 8 – 17 – 31 – 45 – 49 – 55. Qual você acha que tem maiores chances de ser vitoriosa?
- 9) (O Problema do Bode) Este problema foi proposto em um programa de rádio nos Estados Unidos e causou um enorme debate na internet.

Em um programa de prêmios, o candidato tem diante de si três portas. Atrás de uma dessas portas, há um grande prêmio; atrás das demais há um bode. O candidato escolhe inicialmente uma das portas. O apresentador (que sabe qual é a porta que contém o prêmio) abre uma das portas não indicadas pelo candidato, mostrando necessariamente um bode. A seguir, ele pergunta se o candidato mantém sua escolha ou deseja trocar de porta. O candidato deve trocar ou não? (Uma forma de você guiar sua intuição consiste em simular o problema.)

Capítulo 3

Probabilidade (grupo 2)

Uma das principais aplicações das técnicas de contagem é a resolução de problemas simples de Probabilidade. O interesse dos matemáticos no estudo sistemático de probabilidades é relativamente recente e tem suas raízes no estudo dos jogos de azar. Um problema clássico, que tem origem em autores do século XV e que despertou o interesse de autores como Pascal e Fermat, é o

Problema dos pontos: *Dois jogadores apostaram R\$ 10,00 cada um em um jogo de cara-e-coroa, combinando que o primeiro a conseguir 6 vitórias ficaria com o dinheiro da aposta. O jogo, no entanto, precisa ser interrompido quando um dos jogadores tem 5 vitórias e o outro tem 3. Qual é a divisão justa da quantia apostada?*

(Para um “clássico moderno”, veja o exercício 9, que provocou grande discussão na internet alguns anos atrás). Parece razoável que a quantia apostada seja dividida de forma proporcional à chance (ou probabilidade) de vitória de cada jogador. O cálculo dessas probabilidades se baseia, como veremos mais adiante, na hipótese de que a moeda

seja honesta, ou seja, de que haja iguais chances, em um lançamento, de sair cara ou coroa. Esta crença, por sua vez, corresponde à seguinte ideia intuitiva: em uma sequência longa de lançamentos, esperamos observar, aproximadamente, o mesmo número de caras e coroas.

De modo mais geral, suponhamos que um determinado experimento tenha n resultados possíveis $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$; o conjunto Ω desses possíveis resultados é chamado de *espaço amostral*. Suponhamos, ainda, que julguemos que, ao repetir o experimento um grande número de vezes, esperemos que o resultado ω_i ocorra em uma certa fração p_i das realizações do experimento. Dizemos, então, que a probabilidade de se observar ω_i é igual a p_i . Evidentemente, devemos ter $p_i \geq 0$ para cada i e, além disso, $p_1 + \dots + p_n = 1$. Uma vez estabelecidos os valores para as probabilidades de cada resultado possível, podemos definir a probabilidade de qualquer *evento* A (ou seja, de qualquer subconjunto de Ω) como a soma das probabilidades dos resultados em A .

Mas como encontrar os valores das probabilidades p_i ? No caso geral, esses valores são obtidos de forma experimental. Mas há certos casos em que é razoável supor que todos os resultados são igualmente prováveis e que, portanto, a probabilidade de cada um deles é igual a $1/n$. Por exemplo, ao lançar um dado perfeitamente cúbico não há nenhuma razão para esperar que uma face apareça com mais frequência que qualquer das outras. Logo, a probabilidade associada a cada face é igual a $1/6$. Modelos probabilísticos que têm esta característica são chamados de *equiprováveis* e estão frequentemente associados a jogos de azar. Nos modelos probabilísticos equiprováveis, a probabilidade associada a um evento A com p elementos é igual a $p \cdot \frac{1}{n} = \frac{p}{n}$. Muitas vezes se exprime este fato dizendo que a *probabilidade de um evento é igual à razão entre o número de casos favoráveis ao evento*

e o número de casos possíveis.

Exemplo 1. Qual é a probabilidade de se obter um resultado maior que 4 ao se lançar um dado honesto?

Solução: O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, com todos os resultados tendo probabilidade $1/6$. Desejamos calcular a probabilidade do evento $A = \{5, 6\}$, que é dada por $P(A) = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Exemplo 2. Ao lançar um dado duas vezes, qual é a probabilidade de se obter soma 5?

Solução: O espaço amostral é formado por todos os pares de resultados possíveis. Como em cada lançamento há 6 possibilidades, o número de casos possíveis é $6 \times 6 = 36$, todos com a mesma probabilidade de ocorrência. Destes, aqueles em que a soma é 5 são $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$ e $(4, 1)$. Logo, o número de casos favoráveis ao evento é 4, e sua probabilidade é $4/36 = 1/9$.

Exemplo 3. Em uma urna há 5 bolas vermelhas e 4 pretas, todas de mesmo tamanho e feitas do mesmo material. Retiramos duas bolas sucessivamente da urna, sem repô-las. Qual é a probabilidade de que sejam retiradas duas bolas vermelhas?

Solução: Precisamos, antes de mais nada, encontrar um espaço amostral apropriado para descrever os resultados dos experimentos. Como tudo o que observamos é a cor de cada bola retirada (as bolas de mesma cor são indistinguíveis entre si), poderíamos ser tentados a escolher o espaço amostral $\{vv, vp, pv, pp\}$, formado pelos pares de cores observadas. Essa escolha não está errada, mas não é conveniente para a solução do problema. O que ocorre é que o modelo probabilístico baseado nesse espaço amostral não é equiprovável (é óbvio, por exemplo, que duas bolas vermelhas saiam com mais frequência que

duas bolas pretas, já que há mais bolas vermelhas). Para obter um espaço equiprovável, devemos considerar individualmente as 9 bolas presentes na urna. Ou seja, o espaço amostral é o conjunto de todos os pares de bolas distintas, que tem $9 \times 8 = 72$ elementos. Como todas as bolas são iguais (ao menos na cor), todos esses pares têm a mesma probabilidade de sair. Para calcular o número desses pares em que ambas as bolas são vermelhas, devemos observar que a primeira bola vermelha pode ser escolhida de 5 modos, enquanto a segunda pode ser qualquer uma das 4 restantes. Logo, o número de casos favoráveis é igual a $5 \times 4 = 20$. Portanto, a probabilidade de que sejam retiradas duas bolas vermelhas é igual a $20/72 = 5/18$.

Exemplo 4. Pedro e João combinaram de lançar uma moeda 4 vezes. Pedro apostou que, nesses 4 lançamentos, não apareceriam 2 caras seguidas; João aceitou a aposta. Quem tem maior chance de ganhar a aposta?

Solução: O espaço amostral apropriado é formado por todas as sequências possíveis de resultados. Como em cada lançamento sai cara (C) ou coroa (K), há 2 possibilidades; logo, o número total de possibilidades é igual a $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$. Todas essas sequências têm a mesma probabilidade de ocorrência, já que o resultado de um lançamento não afeta os demais e há a mesma chance de sair cara ou coroa. Vamos verificar quais dessas sequências levam à vitória de Pedro.

- Se só saírem coroas ($KKKK$), é claro que Pedro vence.
- Se só sair uma cara ($CKKK, KCKK, KKCK, KKKC$), Pedro também vence.
- Com duas caras, Pedro vence nos casos $KCKC, CKCK$ e $CKKC$.
- Quando saem três ou mais caras, Pedro perde.

Logo, o número de sequências favoráveis a Pedro é igual a 8, e sua probabilidade de vitória é igual a $8/16 = 1/2$. Portanto, Pedro e João têm a mesma chance de vitória.

Exemplo 5. Qual é a forma justa de dividir os R\$ 20,00 apostados no problema dos pontos?

Solução: O jogador *I* tem 5 vitórias, faltando apenas uma para vencer o jogo. O jogador *II* tem apenas 3 vitórias, necessitando de mais 3 para vencer. Portanto, para que *II* vença, ele tem que vencer três partidas seguidas. Há $2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades para os resultados dessas partidas, e apenas um destes é favorável à vitória de *II*. Logo, *II* vence com probabilidade $1/8$, enquanto a probabilidade de vitória de *I* é $7/8$. Logo, *I* deve ficar com R\$ 17,50 e *II* com R\$ 2,50.

Uma possível objeção quanto à solução acima é o fato de construirmos nosso espaço amostral com base nas três partidas restantes, quando o jogo pode, na verdade, terminar em uma, duas ou três partidas. Fizemos isto para obter um espaço amostral para o qual o modelo é equiprovável. Note que usar esse espaço amostral é equivalente a supor que, mesmo que *I* tenha vencido na primeira ou segunda partida, eles continuam a disputar, como “amistosos”, as partidas seguintes. É claro que isso não modifica em nada as chances de vitória de cada jogador.

Vimos acima que a ideia intuitiva de probabilidade de um evento está ligada à frequência observada desse evento quando o experimento é realizado um grande número de vezes. Essa relação pode ser estabelecida de modo preciso, através de um teorema conhecido como a Lei dos Grandes Números. Embora, por vezes, ela não seja muito bem entendida (veja, por exemplo, o exercício 7), a Lei dos Grandes

Números é um instrumento fundamental para estabelecer uma via de mão dupla entre modelos probabilísticos teóricos e os experimentos aleatórios.

Consideremos, novamente, o exemplo 5. Uma forma de se ter uma ideia da resposta do problema seria utilizar uma simulação da situação pretendida. Essa simulação é repetida um grande número de vezes e, através da frequência de vitórias de cada jogador, estimaríamos sua probabilidade de vitória. A simulação pode ser feita manualmente, usando uma moeda (é uma atividade apropriada para sala de aula: cada aluno repete o experimento algumas poucas vezes e, reunindo todos os resultados, temos uma quantidade razoável de repetições). É possível, também, fazer a simulação com auxílio de um computador, através da geração de números aleatórios. A tabela abaixo mostra o resultado obtido simulando 100 realizações do jogo.

I ganha na primeira partida	52 vezes
I ganha na segunda partida	20 vezes
I ganha na terceira partida	13 vezes
II ganha (na terceira partida)	15 vezes

Os resultados obtidos mostram, ao mesmo tempo, o poder e a limitação do método de simulação. Por um lado, permite estimar que *II* tem uma chance de vitória muito menor do que a de *I*. Na simulação que fizemos, *II* ganhou em apenas 15% das vezes (o que está razoavelmente próximo da probabilidade exata, que é $1/8 = 0,125$). Por outro lado, o valor obtido na simulação é sempre uma aproximação, cujo erro diminui com o número de repetições.

Exercícios

- 1) Dois dados são lançados e observa-se a soma de suas faces.
 - (a) Quais são os possíveis resultados para essa soma?
 - (b) Esses resultados são equiprováveis? Caso contrário, que resultado é mais provável? Com que probabilidade? E o menos provável?
 - (c) Qual é a probabilidade de cada resultado possível?
- 2) Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual é a probabilidade de que saiam 2 caras?
- 3) Um casal decidiu que vai ter 4 filhos. O que é mais provável: que tenham dois casais ou três filhos de um sexo e um de outro?
- 4) Laura e Telma retiram um bilhete cada de uma urna em que há 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Qual é a probabilidade de que o número retirado por Laura seja maior do que o de Telma? E se elas, depois de consultarem o número, devolvem o bilhete à urna?
- 5) Duas peças de um dominó comum são sorteadas. Qual é a probabilidade de que tenham um número em comum?
- 6) Ana, Joana e Carolina apostam em um jogo de cara-e-coroa. Ana vence na primeira vez que saírem duas caras seguidas; Joana vence na primeira vez que saírem duas coroas seguidas; Carolina vence quando sair uma cara seguida de uma coroa. Qual é a probabilidade que cada uma tem de vencer?
- 7) O trecho a seguir foi obtido em um site de internet que se propõe a aumentar as chances de vitória no jogo da Sena (que consiste

em sortear 6 dentre 60 dezenas). “Quando afirmamos, por exemplo, que as dezenas atrasadas são importantes, é porque já observamos, em nossos estudos, que todas as dezenas são sorteadas a cada quarenta testes, portanto, seria útil você acompanhar e apostar em dezenas atrasadas; você estaria assim aumentando muito suas chances.” Você concorda que apostar em uma dezena atrasada aumenta as chances de vitória na Sena?

- 8) Suponhamos que você tenha duas escolhas para apostar na Sena. Na primeira escolha aposta nas dezenas 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11, e na segunda escolha nas dezenas 8 – 17 – 31 – 45 – 49 – 55. Qual você acha que tem maiores chances de ser vitoriosa?
- 9) (O Problema do Bode) Este problema foi proposto em um programa de rádio nos Estados Unidos e causou um enorme debate na internet.

Em um programa de prêmios, o candidato tem diante de si três portas. Atrás de uma dessas portas, há um grande prêmio; atrás das demais há um bode. O candidato escolhe inicialmente uma das portas. O apresentador (que sabe qual é a porta que contém o prêmio) abre uma das portas não indicadas pelo candidato, mostrando necessariamente um bode. A seguir, ele pergunta se o candidato mantém sua escolha ou deseja trocar de porta. O candidato deve trocar ou não? (Uma forma de você guiar sua intuição consiste em simular o problema.)

- 10) Suponha que 16 seleções, entre as quais Brasil e Argentina, vão participar de um torneio. Serão formados quatro grupos de quatro seleções, através de sorteio. Qual é a probabilidade de que Brasil e Argentina fiquem no mesmo grupo?
- 11) A China tem um sério problema de controle de população. Várias políticas foram propostas (e algumas colocadas em efeito)

visando proibir as famílias de terem mais de um filho. Algumas dessas políticas, no entanto, tiveram consequências trágicas. Por exemplo, muitas famílias de camponeses abandonaram suas filhas recém-nascidas, para terem uma outra chance de ter um filho do sexo masculino. Por essa razão, leis menos restritivas foram consideradas. Uma das leis propostas foi a de que as famílias teriam o direito a um segundo (e último) filho, caso o primeiro fosse do sexo feminino. Deseja-se saber que consequências isso traria para a composição da população, a longo prazo. Haveria uma maior proporção de mulheres? De homens?

- (a) Com auxílio de uma moeda, simule a prole de um conjunto de 10 famílias (jogue a moeda; se obtiver cara, é um menino, e a família para por aí; se der coroa, é uma menina; jogue a moeda mais uma vez e veja se o segundo filho é menino ou menina).
- (b) Reúna os resultados obtidos pelos integrantes do grupo e produza estatísticas mostrando o número médio de crianças por família, a proporção de meninos e meninas na população e a proporção de famílias que têm um filho homem. O que esses resultados sugerem?
- (c) Qual é a probabilidade de que uma família tenha um filho do sexo masculino? Qual o número médio de filhos por família? Dentre todas as crianças nascidas, qual é a proporção de meninos e meninas?

Capítulo 4

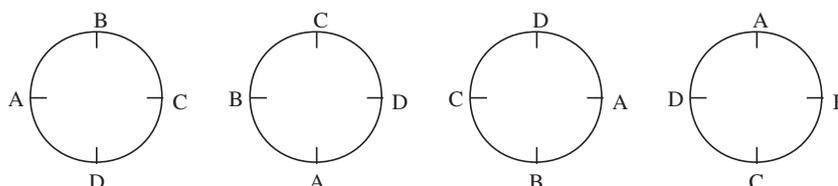
Mais Permutações e Combinações (grupo 2)

Como vimos anteriormente, é possível resolver um grande número de problemas interessantes de contagem sem utilizar fórmulas, apenas empregando apropriadamente as quatro operações. Há, no entanto, certos problemas que ocorrem com frequência e que não são imediatos, como o problema das combinações simples, para os quais é interessante conhecer a fórmula que expressa sua solução, para empregá-la em outros problemas. Neste material adicional, veremos alguns problemas que utilizam permutações e combinações em sua solução e travaremos contato com algumas outras fórmulas combinatórias que podem ser úteis.

Exemplo 1. De quantos modos 4 crianças podem formar uma roda?

Solução: À primeira vista, pode parecer que para formar uma roda com as 4 crianças basta escolher uma ordem para elas, o que pode ser feito de $4! = 24$ modos. Entretanto, as rodas ABCD, BCDA, CDAB e DABC mostradas na figura abaixo são iguais, já que cada

uma resulta da anterior por uma “virada” de $1/4$ de volta.



Para calcular o número de maneiras possíveis de formar uma roda, podemos raciocinar de dois modos diferentes. Um deles consiste em partir do resultado anterior ($4! = 24$) e perceber que cada roda está sendo contada 4 vezes. Logo, o número correto de rodas que podem ser formadas é $\frac{24}{4} = 6$. Alternativamente, podemos começar por fixar a criança A na posição à esquerda (já que em qualquer roda A pode ficar nesta posição). Agora, temos 3 lugares para as 3 crianças que restaram, para um total de $3! = 6$ possibilidades.

De modo geral, o número de modos de colocar n objetos em círculo, considerando-se iguais disposições que coincidam por rotação (ou seja, o número de *permutações circulares* de n objetos) é $PC_n = (n - 1)!$.

Exemplo 2. Considere um grupo formado por 7 homens (entre os quais José) e 5 mulheres (entre as quais Maria), do qual se quer extrair uma comissão constituída por 4 pessoas. Quantas são as comissões:

(a) Possíveis?

Solução: Devemos escolher 4 das 12 pessoas, o que pode ser feito de C_{12}^4 modos, que é igual a $\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 495$ comissões.

(b) Formadas por 2 homens e 2 mulheres?

Solução: Para formar uma comissão, devemos escolher os 2 homens, o que pode ser feito de C_7^2 modos, e, a seguir, as 2 mulheres, o que pode ser feito de C_5^2 maneiras. O número total de possibilidades de escolha, pelo princípio multiplicativo, é $C_7^2 \times C_5^2 = 21 \times 10 = 210$ comissões.

(c) Em que haja pelo menos 2 mulheres?

Solução: Há 3 tipos de comissão possíveis: com 2 homens e 2 mulheres, com 1 homem e 2 mulheres e com 4 mulheres. Para obter o número total de comissões, contamos separadamente as comissões de cada tipo e somamos os resultados, obtendo

$$C_7^2 \times C_5^2 + C_7^1 \times C_5^3 + C_5^4 = 210 + 70 + 5 = 285 \quad \text{comissões.}$$

Uma tentativa de contagem que leva a um erro muito comum é a seguinte: como a comissão deve ter pelo menos 2 mulheres, inicialmente escolhemos 2 mulheres, o que podemos fazer de $C_5^2 = 10$ modos. A seguir, basta escolher 2 pessoas quaisquer entre as 10 que sobraram, o que pode ser feito de $C_{10}^2 = 45$ modos. Logo, por este raciocínio, teríamos $10 \times 45 = 450$, que difere do resultado (correto) encontrado acima. Essa solução, portanto, está **errada**. Você sabe explicar onde está o erro no raciocínio?

(d) Em que José participe, mas Maria não?

Solução: Como José deve participar da comissão, resta escolher apenas 3 outras pessoas, entre as 10 restantes (já que José já foi escolhido e Maria não pode ser escolhida). Logo, o número de possibilidades é igual a $C_{10}^3 = 120$.

(e) Formadas por 2 homens, entre os quais José, e 2 mulheres, mas sem incluir Maria?

Solução: Temos que escolher 1 homem entre 6 (José já está escolhido) e 2 mulheres entre 4 (Maria não pode ser escolhida). O número de comissões é $6 \times C_4^2 = 6 \times 6 = 36$.

Exemplo 3. Quantos anagramas podemos formar com a palavra MATEMATICA?

Solução: Um anagrama é uma palavra (não necessariamente fazendo sentido) formada com as mesmas letras, mas em uma ordem qualquer. Quando as n letras de uma palavra são todas distintas, o número de anagramas é igual ao número de permutações de n , que, como vimos, é igual a $n!$. Mas a palavra MATEMATICA tem letras repetidas: há 3 A, 2 M e 2 T, além de E, I e C, que aparecem uma vez cada.

Uma solução (consistente com o princípio de atacar o mais complicado antes) é, antes de mais nada, decidir o que fazemos com as letras repetidas. Para colocar os A, temos que escolher 3 dentre os 10 lugares possíveis, o que pode ser feito de C_{10}^3 modos. Para colocar os M, restam agora 7 lugares, dos quais devemos escolher 2, o que pode ser feito de C_7^2 maneiras. Agora só restam 5 lugares, dos quais devemos escolher 2 para colocar os T; temos C_5^2 possibilidades. Agora, só restam 3 lugares, nos quais devem ser colocadas as 3 letras restantes, o que pode ser feito de $3 \times 2 \times 1$ modos. Logo, o número total de anagramas é $C_{10}^3 C_7^2 C_5^2 \times 6 = 151\,200$.

Mas há um outro modo de pensar, partindo do número de permutações de 10 letras distintas (igual a $10!$). Esta contagem não está correta, porque consideramos letras iguais como se fossem distintas. Ou seja, é como se considerássemos as permutações de $A_1, A_2, A_3, M_1, M_2, T_1, T_2, E, I$ e C . Para corrigir a contagem, basta contar quantas vezes cada anagrama foi contado. Por exemplo, o anagrama $AAAMMTTEIC$ foi contado várias vezes: um como $A_1 A_2 A_3 M_1 M_2 T_1 T_2 EIC$, outro como $A_2 A_1 A_3 M_1 M_2 T_1 T_2 EIC$

etc. Na verdade, ele foi contado tantas vezes como os modos de ordenar os 3 A, os 2 M e os 2 T, que é igual a $3! \times 2! \times 2!$. O número de anagramas é, então, $\frac{10!}{3!2!2!} = 151\,200$, como encontrado anteriormente.

O segundo raciocínio pode ser facilmente estendido para uma situação geral. O número de permutações de n objetos nem todos distintos, em que um deles aparece n_1 vezes, outro n_2 vezes, e assim por diante, é $F_n^{n_1, n_2, \dots} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots}$.

Exemplo 4. De quantos modos 6 pessoas (João, Maria, Pedro, Janete, Paulo e Alice) podem ser divididas em 3 duplas?

Solução: O problema é mais sutil do que parece a princípio. À primeira vista, pode parecer que a situação é a mesma do problema anterior. Uma maneira de dividir as 6 pessoas em duplas é colocar as pessoas em fila e formar uma permutação de AABBC. Como visto no exemplo anterior, isto pode ser feito de $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$ modos. Mas isto não está correto, pois atribuiu nomes específicos (A, B e C) às duplas formadas. Note que colocar João e Maria na dupla A e Pedro e Janete na dupla B é equivalente a colocar João e Maria na dupla B e Pedro e Janete na dupla A. Portanto, uma mesma distribuição em duplas está sendo contada várias vezes. Mais precisamente, cada distribuição em duplas está sendo contada tantas vezes quanto o número de modos de ordenar A, B e C, ou seja, $3! = 6$ vezes. Logo, o número de possíveis distribuições em duplas é $\frac{90}{6} = 15$.

Exemplo 5. Uma professora tem 3 bolas de gude para distribuir para 5 meninos (digamos, Alfredo, Bernardo, Carlos, Diogo e Eduardo). De quantos modos ela pode fazer essa distribuição:

(a) Supondo que ela dê as bolas para 3 alunos distintos?

Solução: Neste caso, ela deve escolher 3 dentre os 5 meninos para

receber as bolas, o que pode ser feito de $C_5^3 = 10$ modos.

(b) Supondo que os contemplados possam ganhar mais de uma bola?
(Por exemplo, Carlos pode receber todas as bolas.)

Solução: Listamos abaixo algumas possíveis escolhas dos contempla-
dos:

Alfredo, Bernardo, Eduardo

Alfredo, Alfredo, Diogo

Alfredo, Diogo, Diogo

Carlos, Carlos, Carlos

Esses grupamentos são chamados de *combinações completas* (ou *com repetição*) dos 5 meninos tomados 3 a 3. Note que o que distingue as diferentes distribuições é o número de bolas que cada aluno recebe. Portanto, o número de possibilidades é igual ao número de listas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de números inteiros não negativos (representando o número de objetos dados a Alfredo, Bernardo, Carlos, Diogo e Eduardo, respectivamente) que satisfazem a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$.

Neste caso simples, podemos resolver o problema separando a contagem em casos. A primeira possibilidade é a de que haja três premiados, cada um ganhando uma bola. Como vimos acima, isto pode ser feito de $C_5^3 = 10$ modos. A segunda possibilidade é de que haja dois premiados, um ganhando 1 bola e outro 2 bolas. O primeiro menino pode ser escolhido de 5 modos, e o segundo, de 4; logo, há $4 \times 5 = 20$ maneiras de distribuir as bolas para dois dos meninos. Finalmente, as bolas podem ir todas para um só menino, que pode ser escolhido de 5 modos. Portanto, o número total de possibilidades é $10 + 20 + 5 = 35$.

No entanto, dividir a contagem em casos, como fizemos acima, não

vai ser prático caso o número de bolas e meninos seja maior. Para contar de modo eficiente o número de distribuições, vamos recorrer a um truque, que nos permite transformar este problema em outro mais simples. Para formar as diferentes distribuições, colocamos as bolas em fila e as separamos em cinco lotes (correspondentes a cada um dos meninos), através de traços verticais. É claro que, neste caso, alguns desses lotes estarão vazios.

Vejamos alguns exemplos:

- $0||0|0|$ corresponde a dar 1 bola para Alfredo, para Carlos e para Diogo, enquanto Bernardo e Eduardo não ganham bolas.
- $||00||0$ corresponde a dar 2 bolas para Carlos e 1 para Eduardo, enquanto Alfredo, Bernardo e Carlos não ganham bolas.

Note que há uma correspondência perfeita entre as possíveis distribuições e as listas formadas por 3 bolas e 4 traços. Mas estas últimas nós já sabemos contar! Basta escolher 3 das 7 posições para colocar as bolas, o que pode ser feito de $C_7^3 = 35$ maneiras, como encontramos acima.

Naturalmente, podemos aplicar esta solução para o problema geral de contar o número de maneiras de distribuir p objetos para n pessoas (ou seja, de calcular o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$, ou ainda, de calcular o número CR_n^p de combinações completas de n elementos tomados p a p). Temos p bolas, que devem ser separadas por $n - 1$ tracinhos. Ou seja, precisamos escolher p das $n + p - 1$ posições para as bolas. A resposta, portanto, é $CR_n^p = C_{n+p-1}^p$.

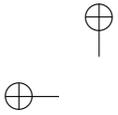
Exercícios

- 1) De quantos modos podemos formar uma roda com 5 meninos

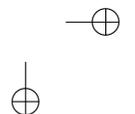
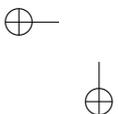
e 5 meninas de modo que crianças de mesmo sexo não fiquem juntas?

- 2) De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 6 crianças, de modo que duas delas, Vera e Isadora, não fiquem juntas?
- 3) De quantos modos é possível dividir 15 atletas em três times de 5 atletas, denominados Esporte, Tupi e Minas?
- 4) De quantos modos é possível dividir 15 atletas em três times de 5 atletas?
- 5) De quantos modos é possível dividir 20 objetos em 4 grupos de 3 e 2 grupos de 4?
- 6) Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os jogos da primeira rodada?
- 7) Quantos são os anagramas da palavra ESTRELADA?
- 8) Quantos são os números naturais de 7 algarismos nos quais o algarismo 4 figura exatamente 3 vezes e o algarismo 8 exatamente 2 vezes?
- 9) Quantos são os subconjuntos de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, com p elementos, nos quais:
 - (a) a_1 figura?
 - (b) a_1 não figura?
 - (c) a_1 e a_2 figuram?
 - (d) pelo menos um dos elementos a_1, a_2 figura?
 - (e) exatamente um dos elementos a_1, a_2 figura?

- 10) Considere um conjunto C de 20 pontos do espaço que tem um subconjunto C_1 formado por 8 pontos coplanares. Sabe-se que toda vez que 4 pontos de C são coplanares, então, eles são pontos de C_1 . Quantos são os planos que contêm pelo menos três pontos de C ?
- 11) Quantos são os anagramas da palavra PARAGUAIO que não possuem consoantes juntas?
- 12) De quantos modos podemos selecionar p elementos do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ sem selecionar dois números consecutivos?
- 13) Depois de ter dado um curso, um professor resolve se despedir de seus 7 alunos oferecendo, durante 7 dias consecutivos, 7 jantares para 3 alunos cada, de modo que o mesmo par de alunos não compareça a mais de um jantar.
- (a) Prove que cada aluno deve comparecer a exatamente 3 jantares.
- (b) De quantos modos o professor pode fazer os convites para os jantares?
- 14) Em uma escola, um certo número de professores se distribuem em 8 bancas examinadoras de modo que cada professor participa de exatamente duas bancas e cada duas bancas têm exatamente um professor em comum.
- (a) Quantos são os professores?
- (b) Quantos professores há em cada banca?
- 15) Quantas são as soluções inteiras e positivas de $x + y + z = 7$?
- 16) Quantas são as soluções inteiras e não negativas da desigualdade $x + y + z \leq 6$?



- 17) Uma indústria fabrica 5 tipos de balas, que são vendidas em caixas de 20 balas, de um só tipo ou sortidas. Quantos tipos diferentes de caixa podem ser fabricados?



Capítulo 5

Probabilidade Condicional (grupo 2)

Veremos a seguir exemplos de situações em que a probabilidade de um evento é modificada pela informação de que um outro evento ocorreu, levando-nos a definir *probabilidades condicionais*.

Exemplo 1. Em uma urna há duas moedas aparentemente iguais. Uma delas é uma moeda comum, com uma cara e uma coroa. A outra, no entanto, é uma moeda falsa, com duas caras. Suponhamos que uma dessas moedas seja sorteada e lançada.

(a) Qual é a probabilidade de que a moeda lançada seja a comum?

Solução: A resposta é $1/2$, já que ambas as moedas têm a mesma chance de serem sorteadas.

(b) Qual é a probabilidade de que saia uma cara?

Solução: Há quatro possíveis resultados para o sorteio da moeda e o resultado do lançamento, todos com a mesma probabilidade:

- a moeda sorteada é a comum, e o resultado é cara;
- a moeda sorteada é a comum, e o resultado é coroa;
- a moeda sorteada é a falsa, e o resultado é cara;
- a moeda sorteada é a falsa, e o resultado também é cara, mas saindo a outra face.

Como em 3 dos 4 casos acima o resultado é cara, a probabilidade de sair cara é $\frac{3}{4}$.

(c) Se o resultado do lançamento é cara, qual é a probabilidade de que a moeda sorteada tenha sido a comum?

Solução: No item (a) verificamos que a probabilidade de sair cara é $1/2$. Mas a situação é diferente agora: temos uma informação adicional, a de que, após o lançamento da moeda, o resultado foi cara. Com esta informação, podemos rever o cálculo da probabilidade da moeda honesta ter sido sorteada. Dos quatro resultados possíveis para o experimento, listados acima, o segundo deve ser excluído. Restam, assim, três possibilidades igualmente prováveis. Delas, apenas na primeira a moeda sorteada é a comum. Logo, com a informação de que o lançamento resultou em cara, a probabilidade de que a moeda sorteada tenha sido a comum se reduziu a $1/3$.

A probabilidade que calculamos no exemplo anterior é uma *probabilidade condicional*. De um modo geral, a probabilidade condicional de um evento A , na certeza da ocorrência de um evento B (de probabilidade não nula) é denotada por $P(A|B)$ e definida como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

No caso do exemplo anterior, chamemos de A o evento “sortear a

moeda comum”, e de B o evento “obter resultado cara”. O evento $A \cap B$ é “sortear a moeda comum e tirar cara”. Temos:

$$P(A \cap B) = 1/4, P(B) = 3/4 \text{ e, assim, } P(A|B) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3},$$

como encontramos anteriormente.

Exemplo 2. Uma carta é sorteada de um baralho comum, que possui 13 cartas (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K) de cada naipes (ouros, copas, paus e espadas).

(a) Qual é a probabilidade de que a carta sorteada seja um A?

Solução: Como o baralho tem $13 \times 4 = 52$ cartas e 4 delas são ases, a probabilidade de tirar um A é $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

(b) Sabendo que a carta sorteada é de copas, qual é a probabilidade de que ela seja um A?

Solução: O fato de que a carta sorteada é de copas restringe os casos possíveis às 13 cartas de copas, das quais exatamente uma é A. Logo, a probabilidade de ser sorteado um A, dado que a carta sorteada é de copas, permanece igual a $\frac{1}{13}$. Mais formalmente, designando por A o evento “sortear A” e, por B , “sortear copas”, o evento $A \cap B$ é “sortear o A de copas”, e a probabilidade pedida é

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/52}{13/52} = \frac{1}{13}.$$

O exemplo acima ilustra uma situação importante: aquela na qual a probabilidade condicional de A na certeza de B é igual à probabilidade de A (ou seja a ocorrência de B não influi na probabilidade de ocorrência de A). Esta condição implica em $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$, ou

seja, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Dizemos, então, que dois eventos A e B tais que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ são *independentes*.

Exemplo 3. Um sistema de segurança tem dois dispositivos que funcionam de modo independente e que tem probabilidades iguais a 0,2 e 0,3 de falharem. Qual é a probabilidade de que pelo menos um dos dois componentes não falhe?

Solução: Como os componentes funcionam independentemente, os eventos $A =$ “o primeiro dispositivo falha” e $B =$ “o segundo dispositivo falha” são independentes. Logo, o evento $A \cap B =$ “ambos falham” tem probabilidade $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$ e, assim, a probabilidade de que pelo menos um não falhe é igual a $1 - 0,06 = 0,94$.

Exemplo 4. Uma questão de múltipla escolha tem 5 alternativas. Dos alunos de uma turma, 50% sabem resolver a questão, enquanto os demais “chutam” a resposta. Um aluno da turma é escolhido ao acaso.

(a) Qual é a probabilidade de que ele tenha acertado a questão?

Solução: Neste caso, vamos utilizar probabilidades condicionais conhecidas para calcular a probabilidade de dois eventos ocorrerem simultaneamente. Observe que, da expressão $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ decorre $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$. Se o aluno sabe resolver a questão, ele tem probabilidade 1 de acertá-la, enquanto, se ele não sabe, sua probabilidade de acerto é $1/5 = 0,2$. Portanto, $P(\text{acerta}|\text{sabe}) = 1$, enquanto $P(\text{acerta}|\text{não sabe}) = 0,2$. Podemos, então, obter as seguintes probabilidades:

$$P(\text{sabe e acerta}) = P(\text{sabe}) \cdot P(\text{acerta}|\text{sabe}) = (0,5) \cdot 1 = 0,5$$

$$\begin{aligned}P(\text{não sabe e acerta}) &= P(\text{não sabe}) \cdot P(\text{acerta}|\text{não sabe}) \\ &= 0,5 \cdot 0,2 = 0,1.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}P(\text{acerta}) &= P(\text{sabe e acerta}) + P(\text{não sabe e acerta}) \\ &= 0,5 + 0,1 = 0,6.\end{aligned}$$

(b) Dado que o aluno acertou a questão, qual é a probabilidade de que ele tenha “chutado”?

Solução: O que desejamos calcular é a probabilidade condicional de que o aluno não saiba resolver a questão, dado que ele a acertou. Temos:

$$P(\text{não sabe}|\text{acerta}) = \frac{P(\text{não sabe e acerta})}{P(\text{acerta})} = \frac{0,1}{0,6} = \frac{1}{6}.$$

Exercícios

- 1) Joga-se um dado viciado duas vezes. Determine a probabilidade condicional de obter 3 na primeira jogada sabendo que a soma dos resultados foi 7.
- 2) Um juiz de futebol meio trapalhão tem no bolso um cartão amarelo, um cartão vermelho e um cartão com uma face amarela e uma face vermelha. Depois de uma jogada violenta, o juiz mostra um cartão, retirado do bolso ao acaso, para um atleta. Se a face que o jogador vê é amarela, qual é a probabilidade da face voltada para o juiz ser vermelha?

- 3) Um exame de laboratório tem eficiência de 95% para detectar uma doença quando ela de fato existe. Além disso, o teste aponta um resultado falso positivo para 1% das pessoas sadias testadas. Se 0,5% da população tem a doença, qual é a probabilidade de que uma pessoa, escolhida ao acaso, tenha a doença, sabendo que o seu exame foi positivo?
- 4) Quantas vezes, no mínimo, se deve lançar um dado para que a probabilidade de obter algum 6 seja superior a 0,9?
- 5) Em uma cidade, as pessoas falam a verdade com probabilidade $1/3$. Suponha que A faz uma afirmação e D diz que C diz que B diz que A falou a verdade. Qual é a probabilidade de que A tenha falado a verdade?
- 6) 2^n jogadores de igual habilidade disputam um torneio. Eles são divididos em grupos de 2, ao acaso, e jogadores de um mesmo grupo jogam entre si. Os perdedores são eliminados, e os vencedores são divididos novamente em grupos de 2 e assim por diante, até restar apenas um jogador, que é proclamado campeão.
- (a) Qual é a probabilidade de os jogadores A e B se enfrentarem durante o torneio?
- (b) Qual é a probabilidade de o jogador A jogar exatamente k partidas?
- 7) Duas máquinas A e B produzem 3000 peças em um dia. A máquina A produz 1000 peças, das quais 3% são defeituosas. A máquina B produz as restantes 2000, das quais 1% são defeituosas. Da produção total de um dia, uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que ela é defeituosa. Qual é a probabilidade de que ela tenha sido produzida pela máquina A ?

- 8) Um prisioneiro recebe 50 bolas brancas e 50 bolas pretas. O prisioneiro deve distribuir, do modo que preferir, as bolas em duas urnas, mas de modo que nenhuma das duas urnas fique vazia. As urnas serão embaralhadas e o prisioneiro deverá, de olhos fechados, escolher uma urna e, nesta urna, uma bola. Se a bola for branca, ele será libertado; caso contrário, ele será condenado. De que modo o prisioneiro deve distribuir as bolas nas urnas para que a probabilidade de ele ser libertado seja máxima? Qual é essa probabilidade?

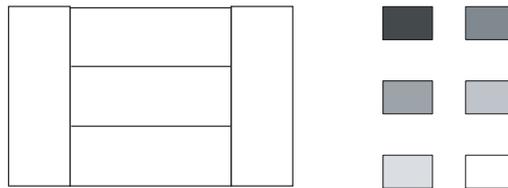
Exercícios Adicionais

Para os alunos dos Grupos 1 e 2

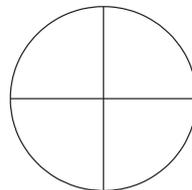
- 1) Um grupo de 4 alunos (Alice, Bernardo, Carolina e Daniel) tem que escolher um líder e um vice-líder para um debate.
 - (a) Faça uma lista de todas as possíveis escolhas (use a inicial de cada nome, para facilitar). Organize a sua lista do seguinte modo: primeiro, escreva todas as possibilidades em que Alice é a presidente, depois aquelas em que Bernardo é presidente, e assim por diante.
 - (b) Usando agora o princípio multiplicativo, ache quantas são as escolhas possíveis de líder e vice-líder em que os alunos têm sexos diferentes.
- 2) De quantos modos é possível colocar 8 pessoas em fila de modo que duas dessas pessoas, Vera e Paulo, não fiquem juntas e duas outras, Helena e Pedro, permaneçam juntas?
- 3) Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6, 7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente. Determine:
 - (a) Que lugar ocupa o número 62 417?
 - (b) Que número que ocupa o 66^o lugar?

- (c) Qual o 166º algarismo escrito?
- 4) De um baralho comum de 52 cartas, sacam-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas. De quantos modos isso pode ser feito se a primeira carta deve ser de copas, e a segunda não deve ser um rei?
- 5) Uma turma tem aulas às segundas, quartas e sextas, das 13h às 14h e das 14h às 15h. As matérias são Matemática, Física e Química, cada uma com duas aulas semanais em dias diferentes. De quantos modos pode ser feito o horário dessa turma?
- 6) De quantos modos podemos colocar uma torre branca e outra preta em um tabuleiro de xadrez, sem que uma ameace a outra? (Ou seja, as duas torres não devem estar na mesma linha ou coluna.)
- 7) Um anagrama de uma palavra é uma nova “palavra” obtida reordenando suas letras (essa nova palavra pode não fazer sentido).
- (a) Quantos são os anagramas da palavra SAVEIRO?
- (b) Quantos deles começam com S?
- (c) Quantos deles terminam com vogal?
- (d) Quantos apresentam o pedaço VEIR?
- 8) Em uma festa há 5 homens e 5 mulheres, que vão formar 5 casais para uma dança de quadrilha. Quantas são as maneiras de formar esses casais? E se houvesse 5 homens e 8 mulheres?
- 9) De quantos modos 5 homens e 5 mulheres podem se sentar em 5 bancos de 2 lugares, se em cada banco deve haver um homem e uma mulher?

- 10) Para pintar a bandeira abaixo, estão disponíveis as seis cores dadas, sendo que regiões adjacentes devem ser pintadas de cores diferentes.



- (a) Qual é o número mínimo de cores a serem usadas?
 (b) De quantos modos a bandeira pode ser pintada?
- 11) Supondo que as mesmas 6 cores estejam disponíveis, de quantos modos pode-se pintar o símbolo abaixo de modo que quadrantes adjacentes não tenham a mesma cor (quadrantes opostos podem ter a mesma cor)?



- 12) Quantos dados diferentes é possível formar gravando números de 1 a 6 sobre as faces de um cubo?
- (a) Suponha uma face de cada cor.
 (b) Suponha as faces iguais.
 (c) Suponha que as faces são iguais e que a soma dos pontos de faces opostas deva ser igual a 7.
- 13) Um estacionamento, inicialmente vazio, tem 10 vagas adjacentes. O primeiro carro pode parar em qualquer vaga. A partir

do segundo carro, porém, cada carro deve parar em uma vaga vizinha a uma vaga já ocupada. De quantos modos diferentes as vagas podem ser preenchidas? [SUGESTÃO: passe o filme ao contrário; de onde sai o último carro? E o penúltimo?]

- 14) Para sortear uma vaga em uma reunião de condomínio, da qual participaram 12 pessoas, foram colocados 12 pedaços de papel idênticos, todos em branco, exceto um, no qual foi escrita a palavra "vaga". Cada pessoa retira, na sua vez, um papel da urna. O que é melhor: ser o primeiro ou o último a sortear seu papel?
- 15) Considere uma turma de 20 alunos.
- (a) Quantas são as maneiras de escolher um representante, um secretário e um tesoureiro?
 - (b) Considere agora que desejemos escolher três dos alunos para formar uma comissão. Por que a resposta não é a mesma do item anterior?
 - (c) O que é necessário fazer com a resposta do item a para obter a resposta do item b?
- 16) Um casal decidiu que vai ter 4 filhos. Qual é a probabilidade de que:
- (a) Tenham pelo menos um menino?
 - (b) Tenham filhos de ambos os sexos?
 - (c) Tenham dois filhos de cada sexo?
- 17) Os alunos de um certo curso fazem 4 matérias, entre as quais Cálculo e Álgebra Linear. As provas finais serão realizadas em uma única semana (de segunda a sexta). Admitindo que cada

professor escolha o dia da sua prova ao acaso, qual é a probabilidade de que:

- (a) As provas de Álgebra Linear e Probabilidade sejam marcadas para o mesmo dia?
 - (b) Não haja mais do que uma prova em cada dia?
- 18) 24 times são divididos em dois grupos de 12 times cada. Qual é a probabilidade de dois desses times ficarem no mesmo grupo?
- 19) Em um armário há 6 pares de sapatos. Escolhem-se 2 pés de sapatos. Qual é a probabilidade de se formar um par de sapatos?

Para os alunos do Grupo 2

- 20) Em uma turma há 12 rapazes e 15 moças. Quantos são os modos de escolher uma comissão de 4 pessoas:
- (a) Sem restrições?
 - (b) Que incluam José (que é um dos alunos)?
 - (c) Que não incluam Márcia (que é uma das alunas)?
 - (d) Com 2 rapazes e 2 moças?
 - (e) Que tenham pelo menos um rapaz e uma moça?
- 21) No jogo da Megassena são sorteados, a cada extração, 6 dos números de 1 a 60.
- (a) Quantos são os resultados possíveis da Megassena?
 - (b) Um apostador aposta nos números 2, 7, 21, 34, 41 e 52. Qual é a sua chance de ganhar? E se ele tivesse apostado nos números 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

- (c) Quantas vezes maiores são as chances de ganhar de quem aposta em 8 números?
- (d) Suponha que o número 17 não é sorteado há muito tempo. Isso modifica as chances de ele ser sorteado da próxima vez?
- 22) Cinco dados são jogados simultaneamente. Determine a probabilidade de se obter:
- (a) um par;
 - (b) dois pares;
 - (c) uma trinca;
 - (d) uma quadra;
 - (e) uma quina;
 - (f) uma sequência;
 - (g) um *full hand*, isto é, uma trinca e um par.
- 23) Em um grupo de 4 pessoas, qual é a probabilidade de:
- (a) Haver alguma coincidência de signos zodiacais?
 - (b) Haver exatamente três pessoas com um mesmo signo e uma pessoa com outro signo?
 - (c) As quatro pessoas terem o mesmo signo?
 - (d) Haver duas pessoas com um mesmo signo e duas outras pessoas com outro signo?
- 24) Em um torneio há 16 jogadores de habilidades diferentes. Eles são sorteados em grupos de 2, que jogam entre si. Os perdedores são eliminados, e os vencedores jogam entre si, novamente divididos em grupos de 2, até restar só um jogador, que é declarado

campeão. Suponha que não haja "zebras" (ou seja, o jogador de habilidade superior sempre vence).

- (a) Qual é a probabilidade de o segundo melhor jogador ser vice-campeão do torneio?
 - (b) Qual é a probabilidade de o quarto melhor jogador ser vice-campeão do torneio?
 - (c) Qual é o número máximo de partidas que o décimo melhor jogador consegue disputar?
 - (d) Qual é a probabilidade de ele disputar esse número máximo de partidas?
- 25) Um dado honesto tem duas de suas faces pintadas de vermelho e as demais, de azul. O dado é lançado três vezes, anotando-se a cor da face obtida.
- (a) Qual é a probabilidade de que a cor obtida no 1º lançamento seja igual à obtida no 3º?
 - (b) Dado que a mesma cor foi obtida nos 1º e 2º lançamentos, qual é a probabilidade de que no 3º lançamento saia esta mesma cor?
- 26) Sejam $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$ e $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, com $m \geq n$. Quantas são as funções $f : I_m \rightarrow I_n$ estritamente crescentes? E não decrescentes?
- 27) Quantos são os números naturais de 7 dígitos nos quais o dígito 4 figura exatamente 3 vezes, e o dígito 8, exatamente 2 vezes?
- 28) O conjunto A possui p elementos, e o conjunto B possui n elementos. Determine o número de funções $f : A \rightarrow B$ sobrejetivas para:
- (a) $p = n$;

- (b) $p = n + 1$;
- (c) $p = n + 2$.
- 29) Considere um conjunto C de 20 pontos do espaço que tem um subconjunto C_1 formado por 8 pontos coplanares. Sabe-se que toda vez que 4 pontos de C são coplanares, então, eles são pontos de C_1 . Quantos são os planos que contêm pelo menos três pontos de C ?
- 30) Onze cientistas trabalham num projeto sigiloso. Por questões de segurança, os planos são guardados em um cofre protegido por muitos cadeados, de modo que só é possível abri-los todos se houver pelo menos 5 cientistas presentes.
- (a) Qual é o número mínimo possível de cadeados?
- (b) Na situação do item a, quantas chaves cada cientista deve ter?

Soluções dos Exercícios

Capítulo 1

- 1) (a) As possíveis escolhas de líder e vice-líder são (usando somente as iniciais): A-B, A-C, A-D, B-A, B-C, B-D, C-A, C-B, C-D, D-A, D-B, D-C. Portanto, no total há 12 escolhas possíveis.
- (b) Há 4 maneiras de escolher o líder. Para cada uma dessas escolhas, o vice-líder pode ser escolhido de 3 modos (já que a mesma pessoa não pode, ao mesmo tempo, ser líder e vice-líder). Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o número de possibilidades é $4 \times 3 = 12$, que foi o que obtivemos contando diretamente.
- 2) (a) Como há 3 opções de saladas, 3 de sopas e 4 de pratos principais, há $3 + 3 + 4 = 20$ modos de escolher um prato do cardápio.
- (b) O número de possíveis refeições é
- $$3 \text{ (saladas)} \times 3 \text{ (sopas)} \times 4 \text{ (pratos principais)} = 36.$$

- 3) São escritos 9 números de 1 algarismo, 90 números de 2 algarismos (de 10 a 99) e 1 número de 3 algarismos. Logo, o total de algarismos escritos é $9 + 2 \times 90 + 3 = 192$.
- 4) (a) Cada um dos dois jogadores pode obter qualquer dos números de 1 a 6. Logo, o número de possíveis combinações de resultados é $6 \times 6 = 36$.
- (b) A soma pode ser qualquer número inteiro de $1 + 1 = 2$ até $6 + 6 = 12$. Há, portanto, 11 somas possíveis.
- 5) São 7 filamentos. Para cada um, há duas possibilidades (aceso ou apagado). Logo, o número total de configurações possíveis é

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 = 128.$$

Excluindo aquela em que estão todos apagados, obtemos 127 símbolos diferentes.

- 6) (a) São necessárias pelo menos 3 cores.
- (b) A faixa vertical pode ser pintada de 6 modos. Pintando a faixa vertical de cima para baixo, temos que a primeira pode ser pintada de 5 modos (não pode usar a cor da faixa vertical), a segunda de 4 (não pode usar a cor da faixa vertical e a da 1ª faixa horizontal) e a terceira também de 4 (não pode usar a cor da faixa vertical e a da 2ª faixa horizontal). Logo, o número total de bandeiras é

$$6 \times 5 \times 4 \times 4 = 480.$$

- 7) Vamos contar separadamente os casos em que os quadrantes 1 e 3 têm cores iguais e cores diferentes. Pondo cores iguais nos

quadrantes 1 e 3, temos $5 \times 4 \times 4 = 80$ possibilidades, pois há 5 modos de escolher a cor única para os quadrantes 1 e 3, há 4 modos de escolher a cor do quadrante 2 e há 4 modos de escolher a cor do quadrante 4. Pondo cores diferentes nos quadrantes 1 e 3, há $5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$ possibilidades, pois há 5 modos de escolher a cor para o quadrante 1, há 4 modos de escolher a cor do quadrante 3, há 3 modos de escolher a cor do quadrante 2 e há 3 modos de escolher a cor do quadrante 4. A resposta é $80 + 180 = 260$.

- 8) Há 5^{10} gabaritos possíveis. Para ter a letra A aparecendo exatamente uma vez, devemos escolher a questão em que ela aparece (10 possibilidades) e, a seguir, escolher a alternativa das demais (4 para cada, para um total de 4^9). Logo, o número total de possibilidades é 10×4^9 . Se a letra A não aparece, temos somente 4 possibilidades de escolha para cada questão, para um total de 4^{10} possibilidades.
- 9) Os subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ são 8 :

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}.$$

De um modo geral, um subconjunto de um conjunto de n elementos é formado decidindo se cada elemento entra ou não no subconjunto. Para cada elemento há 2 possibilidades; o número total de possibilidades é 2^n .

- 10) A primeira pessoa pode escolher sua cadeira de 5 modos; a segunda, de 4; a terceira, de 3. A resposta é $5 \times 4 \times 3 = 60$.
- 11) A primeira mulher pode escolher sua posição de 10 modos. A

segunda, de 8 modos. As outras, de 6, de 4 e de 2 modos. O primeiro homem, de 5 modos. Os demais, de 4, de 3, de 2 e de 1. A resposta é $10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 460\,800$.

- 12) O tabuleiro de 64 casas possui 4 casas de canto (vértices), 24 casas laterais que não são vértices e 36 casas centrais. Cada casa de canto possui 3 casas adjacentes; cada lateral possui 5 casas adjacentes e cada central possui 8 casas adjacentes. Vamos contar separadamente os casos que ocorrem conforme o rei negro ocupe uma casa de canto, lateral ou central. Se o rei negro ocupar uma casa de canto, haverá 4 posições para o rei negro e 60 posições para o rei branco, pois das 64 casas do tabuleiro uma estará ocupada, e as 3 a ela adjacentes não poderão ser ocupadas pelo rei branco. Haverá, portanto, $4 \times 60 = 240$ modos de dispor os reis.

Se o rei negro ocupar uma casa lateral que não seja de canto, haverá 24 posições para o rei negro e 58 posições para o rei branco, pois das 64 casas do tabuleiro uma estará ocupada e as 5 a ela adjacentes não poderão ser ocupadas pelo rei branco. Haverá, portanto,

$$24 \times 58 = 1\,392$$

modos de dispor os reis.

Se o rei negro ocupar uma casa central, haverá 36 posições para o rei negro e 55 posições para o rei branco, pois das 64 casas do tabuleiro uma estará ocupada, e as 8 a ela adjacentes não poderão ser ocupadas pelo rei branco. Haverá, portanto,

$$36 \times 55 = 1\,980$$

modos de dispor os reis. Portanto, a resposta é

$$240 + 1\,392 + 1\,980 = 3\,612.$$

Se os reis fossem iguais, a resposta seria a metade da resposta anterior, 1 806.

- 13) Note que no caso em que são permitidas repetições, a condição de a letra A figurar na palavra é terrível, pois ela pode figurar uma só vez, ou duas etc... Por isso, é melhor contar todas as palavras do alfabeto e diminuir as que não têm A e as que começam por A . A resposta é $26^5 - 25^5 - 26^4 = 1\,658\,775$.

No caso sem repetição, pode-se contar diretamente: há 4 modos de escolher a posição do A , 25 modos de escolher a letra da primeira casa restante, 24 para a segunda casa restante etc. A resposta é $4 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 1\,214\,400$. Pode-se também repetir o raciocínio do caso com repetição:

$$26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 - 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 - 1 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 1\,214\,400.$$

- 14) Há 26 modos de escolher cada letra e 10 modos de escolher cada algarismo. A resposta é $26^3 \times 10^4 = 175\,760\,000$.
- 15) Os passageiros que preferem se sentar de frente podem fazê-lo de $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ modos; os que preferem se sentar de costas podem fazê-lo de $5 \times 4 \times 3 = 60$ modos; os demais podem se colocar nos lugares restantes de $3 \times 2 \times 1 = 6$ modos. A resposta é $120 \times 60 \times 6 = 43\,200$.
- 16) (a) O algarismo 0 aparece nas unidades 222 vezes, nos números 10, 20, 30, ..., 2 200. Aparece nas dezenas 220 vezes, nos

números $10x, 20x, \dots, 220x$. Aparece nas centenas 200 vezes, nos números $10xy$ e $20xy$. A resposta é

$$222 + 220 + 200 = 642.$$

- (b) Contamos os números com algum algarismo igual a 0, descontando do cálculo anterior o que houver sido contado indevidamente. O 0 aparece nas unidades 222 vezes, nos números $10, 20, 30, \dots, 2200$. Das 220 vezes em que aparece nas dezenas devemos descontar o total dos números do conjunto

$$\{10x, 20x, \dots, 220x ; x = 0\},$$

que é 22. Das 200 vezes em que aparece nas centenas devemos descontar o total dos números do conjunto $\{10xy, 20xy ; x = 0 \text{ ou } y = 0\}$, que é $2 \times (9 + 9 + 1) = 38$. A resposta é

$$222 + (220 - 22) + (200 - 38) = 222 + 198 + 162 = 582.$$

Outra solução: O algarismo 0 aparece nas unidades 222 vezes, nos números $10, 20, 30, \dots, 2200$. Faltam os números dos conjuntos $\{10x, 20x, \dots, 220x ; x \neq 0\}$ e $\{10xy, 20xy ; x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\}$. O primeiro tem $22 \times 9 = 198$ números, e o segundo, $2 \times 9 \times 9 = 162$ números. A resposta é $222 + 198 + 162 = 582$.

- 17) O mais simples é fazer todos os números menos aqueles em que o 5 não figura. A resposta é $9 \times 10 \times 10 \times 10 - 8 \times 9 \times 9 \times 9 = 3168$.
- 18) Para formar uma coleção, você deve decidir quantas *Veja* farão

Soluções dos Exercícios

61

parte da coleção etc. A quantidade de revistas *Veja* pode ser escolhida de 6 modos (0, 1, 2, 3, 4, 5). A de *Época*, de 7 modos. A de *Isto É*, de 5 modos. O número de coleções é $6 \times 7 \times 5 = 210$. O número de coleções não vazias é 209.

- 19) A solução está errada. É possível que a mesma cor tenha sido escolhida para as faixas extremas. Neste caso, o número de possibilidades de escolha para a cor da faixa central é 3, e não 2. Logo, para esta ordem de pintura não é possível aplicar diretamente o Princípio Multiplicativo.
- 20) O casal João e Maria foi considerado diferente do casal Maria e João. Isso é devido ao fato de termos trabalhado com o conceito de primeira pessoa do casal. Por isso a resposta encontrada é o dobro da resposta real.
- 21) Há dois tipos de peças: as formadas por números iguais (que são 7: de 0 – 0 até 6 – 6) e as formadas por um par de números distintos. Destas, há $7 \times 6/2 = 21$ peças. O total é 28. Se os números forem até 8, o número de peças é $9 + 9 \times 8/2 = 45$.
- 22) Cada retângulo corresponde a escolher 2 linhas e 2 colunas entre as 9 linhas e colunas de separação das casas. As duas linhas podem ser escolhidas de $9 \times 8/2 = 36$ modos. O número de possibilidades para as colunas é o mesmo. Logo, o número total de retângulos é $36 \times 36 = 1\,296$.

Capítulo 2

- 1) (a) Os resultados possíveis são 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12.
- (b) As probabilidades são diferentes, porque o número de casos favoráveis varia. O resultado mais provável é o 7, que pode ocorrer de 6 modos diferentes e que tem, portanto, probabilidade $6/36 = 1/6$. Os menos prováveis são 2 e 12, que só podem ocorrer de um modo e que têm, cada um, probabilidade $1/36$.
- (c) A tabela abaixo tem todos os resultados possíveis $s + t$, onde s é resultado do lançamento do primeiro dado e t , do segundo. Colocamos os valores de s na primeira linha e os de t na primeira coluna.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

A probabilidade dos resultados 2, 12 e 7 já foi calculada. O resultado 3 tem probabilidade $2/36 = 1/18$, assim como o resultado 11. O resultado 4 tem probabilidade $3/36 = 1/12$, assim como o resultado 10. O resultado 5 tem probabilidade $4/36 = 1/9$, assim como o resultado 9. O resultado 6 tem probabilidade $5/36$, assim como o resultado 8.

Soluções dos Exercícios

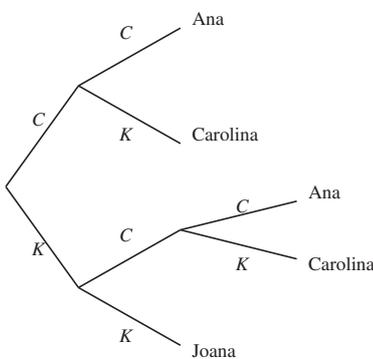
63

- 2) Vamos considerar todas as sequências possíveis de resultados. Como em cada lançamento sai cara C ou coroa K , há 2 possibilidades; logo, o número de possibilidades é igual a $2 \times 2 \times 2 = 8$. Todas as sequências têm a mesma probabilidade de ocorrência igual a $1/8$. Com duas caras temos CCK , CKC e KCC . Logo, a probabilidade de que saiam duas caras é $3/8$.
- 3) São $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ possíveis sequências para os sexos das crianças, todas equiprováveis. Em 6 delas há 2 casais ($HMHM$, $MHMH$, $HHMM$, $MMHH$, $MHMH$, $HMMH$). Em 8 delas há 3 filhos de um sexo e um de outro ($MHHH$, $HMHH$, $HHMH$, $HHHM$, $MMMh$, $MMHM$, $MHMM$, $HMMM$). Logo, é mais provável ter três filhos de um sexo e um de outro.
- 4) Em ambos os casos, Laura e Telma têm a mesma probabilidade de tirar um número maior que o da outra. Se não há devolução, não pode haver empate, e a probabilidade de que Laura tenha o maior número é 50%. Se há devolução, há possibilidade de empate, e a probabilidade de que isso ocorra é igual a 100 casos de empate dividido por 100×100 casos possíveis, que é igual a 0,01, ou seja, $\frac{100}{100 \times 100} = 0,01$. Logo, neste caso a probabilidade de que Laura tenha um número maior do que o de Telma é $(1 - 0,01)/2 = 0,99/2 = 0,495$.
- 5) Um dominó tem 28 peças, como vimos no Capítulo 1. Logo, podemos selecionar duas peças, uma de cada vez, de 28×27 modos. Se a primeira peça é uma das 7 que são duplas, há 6 modos de escolher a segunda de modo a conter o mesmo número (há, no total, 7 peças em que esse número aparece). Se a primeira peça é uma das 21 que têm dois números, a segunda pode ser

escolhida de 12 modos (6 para cada). Logo, a probabilidade é

$$\frac{6 \times 7 + 21 \times 12}{28 \times 27} = \frac{7}{18}.$$

- 6) A árvore de possibilidades abaixo mostra que o jogo pode terminar em 2 ou 3 lançamentos.



Ana só vence em dois casos (CC , com probabilidade $1/4$, e KCC , com probabilidade $1/8$); logo, tem probabilidade $3/8$ de vencer. Carolina vence se sai CK (probabilidade $1/4$) ou KCK (probabilidade $1/8$); logo, também tem probabilidade $3/8$ de vencer. Já Joana só vence se sair KK , que tem probabilidade $1/4$.

- 7) Embora haja pessoas que ganhem a vida com esse tipo de afirmação, ela é completamente sem sentido. As extrações são independentes, o que faz com que o fato de uma dezena estar atrasada seja completamente irrelevante para o que vai acontecer no futuro. Na verdade, se estamos em dúvida sobre a equiprobabilidade das diversas dezenas, poderíamos concluir exatamente o contrário: se uma dezena sai menos que outras,

talvez seja porque seja menos provável (por exemplo, a bolinha correspondente pode ser maior ou mais leve que as outras).

- 8) Obviamente, os dois jogos têm a mesma probabilidade de serem vitoriosos (mas você acha que as pessoas, em geral, concordariam com isso? Por quê?).
- 9) O candidato deve trocar a porta. Se ele não o faz, sua chance de vitória está em ter escolhido a porta certa da primeira vez, o que ocorre com probabilidade $1/3$. Trocando a porta, ele vai ganhar o prêmio exatamente nos casos em que a porta escolhida é a errada, o que tem probabilidade $2/3$.

Capítulo 3

As soluções dos exercícios 1 a 9 estão no Capítulo 2, pois são os mesmos. A seguir, as soluções dos exercícios 10 e 11 desse capítulo.

- 10) *Solução rápida:* Suponha que o sorteio é feito com cada seleção retirando uma bola de uma urna, onde há quatro bolas de mesma cor. Suponha, ainda, que o Brasil seja o primeiro, e a Argentina, a segunda a retirar (isto não afeta a probabilidade pedida; se você não acredita nisso, veja a segunda solução). Depois que o Brasil retirou sua bolinha, restam 15 bolas na urna, 3 das quais têm a mesma cor da retirada pelo Brasil. Logo, a probabilidade de que a Argentina retire uma bola de mesma cor é $3/15 = 1/5$.

Solução mais detalhada: O espaço amostral das bolas retiradas

por Brasil e Argentina é formado por todos os pares de bolas distintas, que são $16 \times 15 = 240$. É claro que todos os pares são equiprováveis. Deles, os favoráveis às duas seleções ficarem no mesmo grupo são aqueles em que as cores são iguais. Estes são $4 \text{ cores} \times 4 \text{ bolas (Brasil)} \times 3 \text{ bolas (Argentina)} = 48$. Logo, a probabilidade de que eles estejam no mesmo grupo é

$$48/240 = 1/5.$$

- 11) As sequências possíveis de filhos são H (prob. $1/2$), MH (prob. $1/4$) e MM (prob. $1/4$). Logo, as famílias têm um filho do sexo masculino com probabilidade $3/4$. A probabilidade de que elas tenham pelo menos um filho do sexo feminino é $1/2$. As famílias têm um ou dois filhos com probabilidade $1/2$ cada. Logo, em média, elas têm 1,5 filhos. O número de meninos é 0 (com prob. $1/4$) ou 1 (com prob. $3/4$). Logo, em média há 0,75 meninos por família. Em consequência, há também 0,75 meninas em média por família. Na verdade, isso era óbvio: a política adotada não modifica o fato de que os nascimentos são divididos igualmente entre meninos e meninas.

Capítulo 4

- 1) Há $PC_5 = 4!$ modos de formar uma roda com as meninas. Depois disso, os 5 meninos devem ser postos nos 5 lugares entre as meninas, o que pode ser feito de $5!$ modos. A resposta é $4! \times 5! = 24 \times 120 = 2880$.
- 2) É mais simples calcular o número total de rodas e excluir aquelas

em que Vera e Isadora ficam juntas. O número total de rodas é $PC_6 = 5! = 120$. Para formar as rodas em que Vera e Isadora ficam juntas, a primeira decisão a tomar é a ordem em que Vera e Isadora se colocarão na roda. Há 2 possibilidades: Vera-Isadora e Isadora-Vera. Agora tudo se passa como se Vera e Isadora fossem uma única criança. Assim, há

$$2(PC_5) = 2 \times 4! = 48 \text{ rodas em que Vera e Isadora ficam juntas.}$$

A resposta é $120 - 48 = 72$ rodas.

- 3) Há C_{15}^5 modos de formar o Esporte; depois disso, C_{10}^5 modos de formar o Tupi; finalmente, 1 único modo de formar o Minas.

$$\text{A resposta é } C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times 1 = 756\,756.$$

- 4) O número de possibilidades é igual ao número obtido no problema anterior dividido por $3! = 6$, já que permutando os nomes dos times a subdivisão continua a mesma. A resposta é $756\,756/6 = 126\,126$.

- 5) Escolha, sucessivamente, 3 objetos para formar os 4 grupos de 3; isso pode ser feito, sucessivamente, de C_{20}^3 , C_{17}^3 , C_{14}^3 e C_{11}^3 modos. A seguir, com os 8 objetos restantes forme os 2 grupos restantes, o que pode ser feito de C_8^4 e C_4^4 modos, respectivamente. Fazendo isso, contamos cada divisão $4! \cdot 2!$ vezes, porque, quando formamos os mesmos grupos de 3 e os mesmos grupos 4 em outra ordem, contamos como se fosse outra divisão em grupos.

A resposta é

$$\frac{C_{20}^3 \cdot C_{17}^3 \cdot C_{14}^3 \cdot C_{11}^3 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4}{4! \cdot 2!} = \frac{20!}{(3!)^4 (4!)^2 4! 2!} = 67\,897\,830\,000.$$

Outra solução: Forme uma fila com as 20 pessoas. Isso automaticamente as divide em 4 grupos de 3 e 2 grupos de 4: as 3 primeiras formam um grupo, as 3 seguintes formam outro etc. Há $20!$ modos de formar a fila. Entretanto, uma mesma divisão em grupos corresponde a várias filas diferentes, o que faz com que, no resultado $20!$, cada divisão tenha sido contada várias vezes. Devemos corrigir nossa contagem dividindo o resultado pelo número de vezes em que cada divisão foi contada. Trocando a ordem dos elementos em cada grupo, o que pode ser feito de $3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 4!$ modos, ou a ordem dos grupos, o que pode ser feito de $4! \cdot 2!$ modos, a divisão em grupos não se altera, mas a fila sim. Cada divisão foi, assim, contada $(3!)^4 \cdot (4!)^2 \cdot 4! \cdot 2!$ vezes, e a resposta é $\frac{20!}{(3!)^4(4!)^24!2!}$.

- 6) Os adversários em cada jogo podem ser escolhidos, sucessivamente, de C_{12}^2 , C_{10}^2 , C_8^2 , C_6^2 , C_4^2 e C_2^2 modos. No entanto, assim contamos cada possível rodada $6!$ vezes, já que contamos diferentes ordens dos jogos como se fossem rodadas diferentes. A resposta é

$$\frac{C_{12}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{6!} = \frac{12!}{2^6 \cdot 6!} = 10\,395.$$

Outra solução: Colocando os 12 times em fila automaticamente formamos os 6 jogos da rodada. No entanto, a mesma rodada é contada várias vezes; os adversários em cada jogo podem ser ordenados de 2 modos, enquanto os jogos podem ser ordenados de $6!$ modos. A resposta é, portanto, $\frac{12!}{2^6 \cdot 6!}$.

- 7) Em ESTRELADA as letras A e E aparecem 2 vezes cada, e as letras S, T, R, L e D aparecem 1 vez cada uma, havendo,

portanto, 9 letras na palavra.

Para formar um anagrama, devemos escolher 2 das 9 posições para colocar as letras A, o que pode ser feito de C_9^2 modos, 2 das 7 posições restantes para colocar as letras E, o que pode ser feito de C_7^2 modos, e arrumar as letras S, T, R, L e D nas 5 posições restantes, o que pode ser feito de $5!$ modos. A resposta é $C_9^2 \cdot C_7^2 \cdot 5! = 90\,720$.

Outra solução: O número de anagramas é

$$P_9^{2,2,1,1,1,1,1} = \frac{9!}{2!2!1!1!1!1!1!} = 90\,720.$$

- 8) Vamos esquecer que a primeira casa do número não pode ser igual a zero. Isso fará com que contemos a mais e, depois, descontaremos o que foi contado indevidamente.

Há C_7^3 modos de escolher as casas que serão ocupadas pelo algarismo 4; depois disso, há C_4^2 modos de selecionar as casas que serão ocupadas pelo algarismo 8; finalmente, as duas casas restantes podem ser preenchidas de 8×8 modos (não podemos usar nessas casas os algarismos 4 e 8).

A “resposta” seria $C_7^3 \times C_4^2 \times 8 \times 8 = 35 \times 6 \times 64 = 13\,440$.

Devemos subtrair os números começados por 0. Se o número começa por 0, há C_6^3 modos de escolher as casas que serão ocupadas pelo algarismo 4; depois disso, há C_3^2 modos de selecionar as casas que serão ocupadas pelo algarismo 8; finalmente, a casa restante pode ser preenchida de 8 modos (não podemos usar nessa casa os algarismos 4 e 8). Há $C_6^3 \times C_3^2 \times 8 = 20 \times 3 \times 8 = 480$ números começados por 0.

A resposta é $13\,440 - 480 = 12\,960$.

Outra solução: Vamos contar separadamente:

- i) números que começam em 4;
- ii) números que começam em 8;
- iii) números que não começam nem em 4 nem em 8.

i) Há 1 modo de preencher a primeira casa; depois disso, há C_6^2 modos de escolher as outras duas casas do número que também serão preenchidas com o algarismo 4; depois disso, há C_4^2 modos de escolher as duas casas que serão ocupadas pelo algarismo 8; finalmente, as duas casas restantes podem ser preenchidas de 8×8 modos (não podemos usar nessas casas os algarismos 4 e 8).

Há $1 \times C_6^2 \times C_4^2 \times 8 \times 8 = 1 \times 15 \times 6 \times 64 = 5\,760$ números do tipo i).

ii) Há 1 modo de preencher a primeira casa; depois disso, há 6 modos de escolher a outra casa do número que também será preenchida com o algarismo 8; depois disso, há C_5^3 modos de escolher as três casas que serão ocupadas pelo algarismo 4; finalmente, as duas casas restantes podem ser preenchidas de 8×8 modos (não podemos usar nessas casas os algarismos 4 e 8).

Há $1 \times 6 \times C_5^3 \times 8 \times 8 = 6 \times 10 \times 64 = 3\,840$ números do tipo ii).

iii) Há 7 modos de preencher a primeira casa (não podemos usar nem 4, nem 8, nem 0); depois disso, há C_6^3 modos de escolher as três casas do número que serão preenchidas com o algarismo 4; depois disso, há C_3^2 modos de escolher as duas casas que serão ocupadas pelo algarismo 8; finalmente, a casa restante pode ser preenchida de 8 modos (não podemos usar nessas casas os algarismos 4 e 8).

Há $7 \times C_6^3 \times C_3^2 \times 8 = 7 \times 20 \times 3 \times 8 = 3\,360$ números do tipo iii).

A resposta é $5\,760 + 3\,840 + 3\,360 = 12\,960$.

- 9) (a) Para formar o subconjunto devemos escolher os $p-1$ outros elementos do subconjunto dentre os $n-1$ outros elementos do conjunto.

A resposta é C_{n-1}^{p-1} .

- (b) Para formar o subconjunto devemos escolher os p elementos do subconjunto dentre os $n-1$ outros elementos do conjunto.

A resposta é C_{n-1}^p .

Outra solução: Há C_n^p p -subconjuntos, ou seja, subconjuntos com p elementos, e o elemento a_1 figura em C_{n-1}^{p-1} deles. Logo, há $C_n^p - C_{n-1}^{p-1}$ subconjuntos nos quais o elemento a_1 não figura.

A resposta é $C_n^p - C_{n-1}^{p-1}$.

Observação. *As duas soluções apresentadas mostram que $C_n^p - C_{n-1}^{p-1} = C_{n-1}^p$. Essa é a famosa Relação de Stifel.*

- (c) Para formar o subconjunto devemos escolher os $p-2$ outros elementos do subconjunto dentre os $n-2$ outros elementos do conjunto.

A resposta é C_{n-2}^{p-2} .

- (d) O total de p -subconjuntos é C_n^p . Para formar um subconjunto em que nem a_1 nem a_2 figurem devemos escolher os p elementos do subconjunto dentre os $n-2$ outros elementos do conjunto. Há, portanto, C_{n-2}^p subconjuntos nos quais nem a_1 nem a_2 figuram. Logo, o número de subconjuntos

nos quais pelo menos um desses dois elementos figura é $C_n^p - C_{n-2}^p$.

Outra solução: Há C_{n-1}^{p-1} p -subconjuntos nos quais o elemento a_1 figura e há C_{n-1}^{p-1} subconjuntos nos quais o elemento a_2 figura. Há, também, C_{n-2}^{p-2} p -subconjuntos nos quais os elementos a_1 e a_2 figuram ambos. Ao somarmos $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p-1} = 2C_{n-1}^{p-1}$ obtemos o número de subconjuntos nos quais pelo menos um dos elementos a_1 e a_2 figura, mas contamos duas vezes aqueles em que a_1 e a_2 figuram ambos.

A resposta é, portanto, $2C_{n-1}^{p-1} - C_{n-2}^{p-2}$.

Outra solução: Há, como mostrado em (c), C_{n-2}^{p-2} p -subconjuntos em que os elementos a_1 e a_2 figuram ambos.

Há C_{n-2}^{p-1} p -subconjuntos em que o elemento a_1 figura e o elemento a_2 não figura, pois, para formar um tal subconjunto, basta escolher os outros $p - 1$ elementos do subconjunto dentre os $n - 2$ elementos do conjunto que são diferentes de a_1 e de a_2 .

Há, analogamente, C_{n-2}^{p-1} p -subconjuntos em que o elemento a_2 figura e o elemento a_1 não figura. Portanto, o número de p -subconjuntos em que figura pelo menos um desses dois elementos é $2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$.

(e) Como visto na solução anterior, a resposta é $2C_{n-2}^{p-1}$.

Outra solução: Há, como visto em (d), $2C_{n-1}^{p-1} - C_{n-2}^{p-2}$ p -subconjuntos nos quais pelo menos um dos elementos a_1 e a_2 figura. Há, como visto em (c), C_{n-2}^{p-2} p -subconjuntos em que os elementos a_1 e a_2 figuram ambos.

A resposta é, portanto,

$$2C_{n-1}^{p-1} - C_{n-2}^{p-2} - C_{n-2}^{p-2} = 2C_{n-1}^{p-1} - 2C_{n-2}^{p-2}.$$

Outra solução: Há, como visto em (d), $2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$ p -subconjuntos nos quais pelo menos um dos elementos a_1 e a_2 figura. Há, como visto em (c), C_{n-2}^{p-2} p -subconjuntos em que os elementos a_1 e a_2 figuram ambos.

A resposta é, portanto,

$$2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2} - C_{n-2}^{p-2} = 2C_{n-2}^{p-1}.$$

10) Chamemos de D o conjunto $C - C_1$.

Há quatro tipos de planos:

- i) determinados por três pontos de D ;
- ii) determinados por dois pontos de D e um de C_1 ;
- iii) determinados por um ponto de D e dois de C_1 ;
- iv) determinados por três pontos de C_1 .

A resposta é $C_{12}^3 + (C_{12}^2) \cdot 8 + 12 \cdot C_8^2 + 1 = 1\,085$.

Outra solução: Para determinar um plano, devemos selecionar 3 dos 20 pontos, o que pode ser feito de $C_{20}^3 = 1\,140$ modos. Nessa contagem, o plano que contém os 8 pontos de C_1 foi contado $C_8^3 = 56$ vezes.

A resposta é $1\,140 - 56 + 1 = 1\,085$.

11) Primeiro, colocamos as vogais. Como a letra A aparece 3 vezes e as letras U, I e O aparecem 1 vez cada, o número de modos

de dispô-las é $P_6^{3,1,1,1} = \frac{6!}{3!} = \frac{720}{6} = 120$. A seguir, colocamos as consoantes em três dos 7 espaços antes, entre e depois das vogais. O lugar do P pode ser qualquer um desses 7 espaços, o do R, qualquer dos 6 restantes, e o do G, qualquer dos 5 restantes. O número total de possibilidades é $120 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 25\,200$.

- 12) Vamos formar uma fila com os números $1, 2, \dots, n$ e assinalar com **E** os p números escolhidos e com **N** os $n - p$ não escolhidos. A condição para que não sejam escolhidos números consecutivos é que entre dois **E** haja pelo menos um **N**. Começamos escrevendo os $n - p$ **E**. A seguir, devemos escolher, para colocar os **E**, p dentre os $n - p + 1$ espaços situados antes, entre e depois dos **N**. Isso pode ser feito de C_{n-p+1}^p modos.
- 13) (a) Nenhum aluno pode comparecer a mais de três jantares. Com efeito, se A_1 vai a um jantar com A_2 e A_3 , ele só pode ir a outro jantar com outros dois estudantes, digamos A_4 e A_5 e só pode ir a um terceiro jantar em companhia de outros dois, digamos A_6 e A_7 e não terá companhia para ir a um quarto jantar. Como há 21 convites e são 7 estudantes, cada estudante terá que comparecer a exatamente 3 jantares.
- (b) Se A_1 comparece a três jantares, podemos escolher os seus companheiros dividindo os outros 6 estudantes em 3 grupos de 2, o que pode ser feito de $\frac{C_6^2 \times C_4^2 \times 1}{3!} = 15$ modos. Então, os 3 jantares são, digamos, $A_1A_2A_3$, $A_1A_4A_5$ e $A_1A_6A_7$.
- A_2 deverá comparecer a mais dois jantares, nenhum deles em companhia de A_3 , e A_3 também deverá comparecer a mais dois jantares. Portanto, os 4 jantares que faltam são:

$A_2_ _$, $A_2_ _$, $A_3_ _$, $A_3_ _$.

Como A_4 deve comparecer a mais dois jantares (A_4 não pode comparecer a ambos em companhia de A_2 nem a ambos em companhia de A_3), esses quatro jantares são:

$A_2A_4_$, $A_2_ _$, $A_3A_4_$, $A_3_ _$.

A_5 tem que comparecer ainda a dois jantares, nenhum deles em companhia de A_4 .

$A_2A_4_$, $A_2A_5_$, $A_3A_4_$, $A_3A_5_$.

Agora há duas possibilidades:

$A_2A_4A_6$, $A_2A_5A_7$, $A_3A_4A_7$, $A_3A_5A_6$ e

$A_2A_4A_7$, $A_2A_5A_6$, $A_3A_4A_6$, $A_3A_5A_7$.

Há, portanto, $15 \times 2 = 30$ maneiras de escolher os grupos de convidados.

Para distribuir os 7 grupos nos 7 dias, há $7!$ alternativas.

A resposta é $7! \times 30 = 151\,200$.

- 14) (a) Cada professor fica caracterizado pelas duas bancas a que pertence. O número de professores é igual ao número de modos de escolher duas das oito bancas.

A resposta é $C_8^2 = 28$.

- (b) O número de professores pertencentes a uma banca é igual ao número de modos de escolher a outra banca a que ele pertence.

A resposta é 7.

- 15) Chamando x de $1 + a$, y de $1 + b$ e z de $1 + c$, o problema se transforma em encontrar todas as soluções inteiras e não negativas de $(a + 1) + (b + 1) + (c + 1) = 7$, ou seja, de $a + b + c = 4$.

A resposta é $CR_3^4 = C_6^4 = 15$.

76

16) Cada solução inteira e não negativa de $x + y + z \leq 6$ corresponde a uma solução inteira e não negativa da equação $x + y + z + f = 6$. Logo, há $CR_4^6 = C_9^6 = 84$ soluções.

17) Para formar uma caixa, devemos selecionar 20 dentre os 5 tipos, valendo repetição na escolha. Ou seja, devemos formar soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$, onde x_i é o número de bombons do tipo i . A resposta é

$$CR_5^{20} = C_{24}^{20} = 10\,626.$$

Capítulo 5

1) Sejam X e Y os resultados do primeiro e segundo lançamentos, respectivamente.

$$\begin{aligned} P(X = 3 \mid X + Y = 7) &= \frac{P(X = 3, X + Y = 7)}{P(X + Y = 7)} \\ &= \frac{1/6 \cdot 1/6}{6/36} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Outra solução: Se a soma é 7, há 6 casos possíveis igualmente prováveis: $X = 1, Y = 6$; $X = 2, Y = 5$; $X = 3, Y = 4$; $X = 4, Y = 3$; $X = 5, Y = 2$; $X = 6, Y = 1$. Dos seis casos, somente $X = 3, Y = 4$ é favorável. A resposta é $\frac{1}{6}$.

2) $P(\text{vê vermelha} \mid \text{mostra amarela}) =$

$$= \frac{P(\text{vê vermelha e mostra amarela})}{P(\text{mostra amarela})} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

Soluções dos Exercícios

77

$$\begin{aligned}
 3) P(\text{doente} \mid \text{positivo}) &= \frac{P(\text{doente e positivo})}{P(\text{positivo})} = \\
 &= \frac{P(\text{doente}) \cdot P(\text{positivo} \mid \text{doente})}{P(\text{doente}) \cdot P(\text{positivo} \mid \text{doente}) + P(\text{sadio}) \cdot P(\text{positivo} \mid \text{sadio})} = \\
 &= \frac{0,005 \cdot 0,95}{0,005 \cdot 0,95 + 0,995 \cdot 0,01} = \frac{95}{294} \cong 0,3231
 \end{aligned}$$

4) A probabilidade de não obter nenhum seis em n lançamentos é $\left(\frac{5}{6}\right)^n$, e a de obter pelo menos um seis é $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Devemos ter $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9$, ou seja, $\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,1$. Daí,

$$\begin{aligned}
 \ln \left(\frac{5}{6}\right)^n &< \ln 0,1 \\
 n \cdot \ln \frac{5}{6} &< \ln 0,1 \\
 n &> \frac{\ln 0,1}{\ln \left(\frac{5}{6}\right)} \cong 12,6.
 \end{aligned}$$

A resposta é 13.

5) Considere os eventos:

$A = \{A \text{ falou a verdade}\};$

$B = \{B \text{ disse que } A \text{ falou a verdade}\};$

$C = \{C \text{ disse que } B \text{ disse que } A \text{ falou a verdade}\};$

$D = \{D \text{ disse que } C \text{ disse que } B \text{ disse que } A \text{ falou a verdade}\}.$

Vamos aliviar a notação escrevendo XY para representar $X \cap Y$.

Queremos calcular $P(A \mid D) = \frac{P(AD)}{P(D)}$.

$$\begin{aligned}
 P(AD) &= P(ABCD) + P(\overline{A}BCD) + P(AB\overline{C}D) + P(\overline{A}B\overline{C}D) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \\
 &= \frac{13}{81}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(\overline{A}D) &= P(\overline{A}BCD) + P(\overline{A}\overline{B}CD) + P(\overline{A}B\overline{C}D) + P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}D) \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \\
 &= \frac{28}{81}.
 \end{aligned}$$

$$P(D) = P(AD) + P(\overline{A}D) = \frac{13}{81} + \frac{28}{81} = \frac{41}{81}.$$

A resposta é $P(A | D) = \frac{P(AD)}{P(D)} = \frac{13/81}{41/81} = \frac{13}{41}$.

- 6) (a) A probabilidade de eles se enfrentarem na primeira rodada é $\frac{1}{2^n - 1}$ porque, posto A na tabela, há $2^n - 1$ posições possíveis para B , e em 1 delas ele enfrenta B . A probabilidade de eles se enfrentarem na segunda rodada é $\frac{2}{2^n - 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^n - 1} \cdot \frac{1}{2}$, porque, posto A na tabela, há $2^n - 1$ posições possíveis para B , e em 2 delas ele pode vir a enfrentar B na segunda rodada, desde que, naturalmente, A e B vençam seus jogos da primeira rodada, o que ocorre com probabilidade $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. A probabilidade de eles se enfrentarem na terceira rodada é $\frac{2^2}{2^n - 1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2^n - 1} \cdot \frac{1}{2^2}$ etc.

A resposta é

Soluções dos Exercícios

79

$$\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

- (b) Se $k < n$, o jogador disputa exatamente k partidas se, e somente se, perde a k -ésima partida e ganha as $k - 1$ partidas anteriores. A probabilidade de isso acontecer é $(\frac{1}{2})^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$.

O jogador disputa n partidas – ou seja, chega à final – se, e somente se, ganha as $n - 1$ partidas anteriores. A probabilidade de isso acontecer é $(\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

A resposta é $\frac{1}{2^k}$, se $k < n$; $\frac{1}{2^{n-1}}$, se $k = n$.

7)

$$\begin{aligned} P(A \mid \text{defeituosa}) &= \frac{P(A \text{ e defeituosa})}{P(\text{defeituosa})} \\ &= \frac{P(A) \cdot P(\text{defeituosa} \mid A)}{P(A) \cdot P(\text{defeituosa} \mid A) + P(B) \cdot P(\text{defeituosa} \mid B)} \\ &= \frac{(1/3) \cdot 0,03}{(1/3) \cdot 0,03 + (2/3) \cdot 0,01} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

- 8) Uma urna recebe uma bola branca e a outra urna recebe as demais 99 bolas. Com efeito, se a 1ª urna recebe k bolas das quais a são brancas, a probabilidade de libertação é

$$f(a, k) = \frac{1}{2} \left[\frac{a}{k} + \frac{50 - a}{100 - k} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{50k + a(100 - 2k)}{k(100 - k)}.$$

Observe que para $k = 50$ a expressão vale $\frac{1}{2}$, independentemente do valor de a .

Observe também que basta estudar agora o caso $k < 50$ (isto é, podemos considerar a primeira urna como sendo a que recebeu menos bolas). Nesse caso, é claro que, fixado o valor de k , quanto maior for a , maior será $f(a, k)$. Logo, para $f(a, k)$ ser máximo, devemos ter $a = k$, e a probabilidade será

$$g(k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{150 - 2k}{100 - k} = \frac{75 - k}{100 - k} = 1 - \frac{25}{100 - k},$$

que é máxima para k mínimo.

Devemos, pois, ter $k = 1$, o que dá uma probabilidade de libertação de $\frac{74}{99} \cong 0,75$.

Exercícios Adicionais

- 1) (a) AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC.
 (b) O líder pode ser escolhido de 4 modos; uma vez escolhido o líder, o vice-líder pode ser escolhido de 3 modos. O número total de possibilidades é $4 \times 3 = 12$.
- 2) As filas em que Helena e Pedro estão juntos são $2! \times 7! = 10\,080$. As filas em que Helena e Pedro estão juntos e Vera e Paulo também estão juntos são em número de $2! \times 2! \times 6! = 2\,880$. A resposta é $10\,080 - 2\,880 = 7\,200$.
- 3) (a) Para descobrir o lugar do 62417 você tem que contar quantos são os números que o antecedem. Antecedem-no todos os números começados em 1 ($4! = 24$ números), em 2 ($4! = 24$ números), em 4 ($4! = 24$ números), em 61 ($3! = 6$ números) e em 621 ($2! = 2$ números), num total

de $24 + 24 + 24 + 6 + 2 = 80$ números. Ele ocupa o 81º lugar.

- (b) Ao escrever os números começados por 1, escrevemos $4! = 24$ números; incluindo agora os começados por 2, teremos mais $4! = 24$ números, acumulando um total de 48 números; incluindo agora os começados por 41, 42 e 46, teremos mais $3! + 3! + 3! = 18$ números, acumulando um total de 66 números. O 66º número é o último dos começados por 46, ou seja, 46 721.
- (c) Como em cada número há 5 algarismos e $166 = 5 \times 33 + 1$, o 166º algarismo escrito é o 1º algarismo do 34º número. Ao escrever os números começados por 1, escrevemos $4! = 24$ números; incluindo agora os começados por 2, teremos mais $4! = 24$ números, acumulando um total de 48 números. Logo, todos os números do 25º ao 48º, inclusive, começam por 2. A resposta é 2.
- 4) Contaremos separadamente os casos em que a carta de copas é um rei e em que a carta de copas não é um rei. A resposta é $1 \times 48 + 12 \times 47 = 612$.
- 5) Há 3 modos de escolher os dias de Matemática. Escolhidos os dias, digamos segundas e quartas, há 2 modos de escolher o horário da aula de Matemática da segunda e 2 modos de escolher o horário da aula de Matemática da quarta. Há 2 modos de escolher os dias da Física (não podem ser os mesmos da Matemática, senão a Química ficaria com as aulas no mesmo dia). Escolhidos os dias da Física, em um deles há 2 modos de escolher o horário da aula e, no outro, apenas 1. Finalmente, há apenas 1 modo de pôr as aulas de Química no horário. A resposta é $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 48$.
- 6) A torre branca pode ser colocada em qualquer uma das 64 casas.

Há um total de 15 casas que estão na mesma linha ou coluna em que ela foi colocada. A torre preta pode estar em qualquer uma das $64 - 15 = 49$ casas restantes. Logo, o número de possibilidades é $64 \times 49 = 3\,136$.

- 7) (a) $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5\,040$.
 (b) $6! = 720$.
 (c) A vogal final pode ser A, E, I ou O (4 possibilidades). Para as primeiras 6 letras há $6!$ possibilidades. Logo, o número de anagramas terminados com vogal é $4 \times 6! = 2\,880$.
 (d) Tudo se passa como se VEIR fosse uma única letra (digamos α). Assim, o problema se reduz a encontrar o número de anagramas de $SA\alpha O$, que é igual a $4! = 24$.
- 8) O par do primeiro homem pode ser escolhido de 5 modos, do segundo, de 4 e assim por diante, para um total de

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ possibilidades.}$$

No segundo caso, a resposta é $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6\,720$. (Se considerar que os casais devem ser dispostos na quadrilha, o número de possibilidades, em ambos os casos, deve ser multiplicado por $5!$ ou por $5!25$, conforme a interpretação.)

- 9) A primeira mulher pode escolher sua posição de 10 modos. A segunda, de 8 modos. As outras, de 6, de 4 e de 2 modos. O primeiro homem, de 5 modos. Os demais, de 4, de 3, de 2, de 1. A resposta é $10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 460\,800$.
- 10) (a) No mínimo devem ser usadas 3 cores (duas, no mínimo, para a parte central e pelo menos mais uma para as laterais).

(b) A faixa do topo pode ser pintada de 6 modos, a do meio, de 5, a de baixo, outra vez de 5 modos. Mas o número de possibilidades para as faixas laterais depende de termos usado 2 ou 3 cores para as faixas horizontais. Não é possível, assim, usar diretamente o princípio multiplicativo. Vamos dividir a contagem em dois casos:

i) **3 cores são utilizadas para a parte central:** neste caso, a faixa de cima pode ser pintada de 6 modos, a do meio, de 5, e a de baixo, de 4 modos. Para a faixa da esquerda temos 3 possibilidades, o mesmo ocorrendo com a da direita. São, portanto, $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 3 = 1\,080$ modos.

ii) **2 cores são utilizadas para a parte central:** neste caso, as faixas de cima e de baixo têm a mesma cor, que pode ser escolhida de 6 modos. A faixa central pode ser escolhida de 5 modos, e a cor de cada faixa lateral, de 4 modos. Logo, o número de possibilidades neste caso é $6 \times 5 \times 4 \times 4 = 480$ modos. Logo, o número total de modos de pintar a bandeira é $1\,080 + 480 = 1\,560$.

11) O primeiro quadrante pode ser pintado de 6 modos, o segundo, de 5, e o terceiro, novamente de 5 modos. Mas o número de modos de pintar o quarto quadrante vai depender de termos usado ou não a mesma cor para o primeiro e terceiro quadrantes. Portanto, outra vez temos que dividir em casos:

i) **cores distintas são usadas para o primeiro e terceiro quadrantes:** neste caso, a cor do primeiro quadrante pode ser escolhida de 6 modos, a do segundo, de 5, a do terceiro, de 4 (tem que ser diferente das duas anteriores), e a do quarto, também de 4. Logo, o número de possibilidades é $6 \times 5 \times 4 \times 4 = 480$.

- ii) **a mesma cor é usada para o primeiro e terceiro quadrantes:** neste caso, essa cor comum pode ser escolhida de 6 modos, e as cores do segundo e quarto quadrantes podem ser escolhidas de 5 modos cada. Logo, o número de possibilidades é $6 \times 5 \times 5 = 150$. Portanto, o número total de possibilidades é $480 + 150 = 730$.
- 12) (a) Devemos colocar 6 números em 6 lugares. A resposta é $6! = 720$.
- (b) Agora, quando mudamos o cubo de posição, obtemos o mesmo dado. Por exemplo, um dado que tem o 1 e o 6 em faces opostas. Antes, colocar o 1 em cima, na face preta, e o 6 em baixo, na face branca, era diferente de colocar o 6 em cima e o 1 embaixo. Agora não, é o mesmo dado de cabeça para baixo. A resposta é a anterior dividida pelo número de posições de colocar um cubo. Como há 6 modos de escolher a face que fica em baixo e 4 modos de escolher nessa face a aresta que fica de frente, são $6 \times 4 = 24$ posições de colocar um cubo. A resposta é $720/24 = 30$.
- 13) A última vaga a ser ocupada é necessariamente uma das duas extremas (há possibilidades, portanto). A penúltima é uma das vagas extremas, ou a vaga adjacente à outra (2 possibilidades, de novo). De modo geral, para cada carro, exceto o primeiro, há 2 possibilidades. O número total de modos de ocupar as vagas é, portanto, $2^9 = 512$.
- 14) O espaço amostral, neste caso, é o conjunto de todas as possíveis ordenações dos papéis. O número de vezes em que o papel premiado aparece em cada posição é o mesmo. Logo, as chances de premiação são iguais, qualquer que seja a ordem em que os papéis são sorteados.

Soluções dos Exercícios

85

- 15) (a) $20 \times 19 \times 18 = 6\,840$.
- (b) A resposta não é a mesma porque cada comissão de 3 membros corresponde a 6 modos diferentes para escolher representante, secretário e tesoureiro.
- (c) Dividir o resultado em (a) por 6. Portanto, o número de comissões é $6\,840/6 = 1\,140$.
- 16) Há $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ possibilidades para os sexos dos filhos.
- (a) Dos 16 casos possíveis, em apenas 1 são todas meninas. Logo, em 15 casos há pelo menos um menino, e a probabilidade correspondente é $15/16$.
- (b) Há 1 caso em que os filhos são todos do sexo masculino e 1 caso em que são todos do sexo feminino. Logo, há 14 casos em que há filhos de ambos os sexos. A probabilidade correspondente é $14/16 = 7/8$.
- (c) Os possíveis casos são 6: HHMM, HMHM, HMMH, MHHM, MHMH, MMHH (que correspondem a). Logo, a probabilidade de que os filhos formem 2 casais é $6/16 = 3/8$.
- 17) (a) Os professores de Cálculo e Álgebra Linear podem escolher seus dias de provas de $5 \times 5 = 25$ modos. Em 5 desses casos, as provas caem no mesmo dia. Logo, a probabilidade de que as provas sejam marcadas para o mesmo dia é igual a $5/25 = 1/5$. Outro raciocínio: uma vez que o professor de Cálculo tenha marcado sua prova, a chance de que o de Álgebra Linear escolha o mesmo dia é $1/5$.
- (b) O número total de escolhas para os dias de prova é $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$. O número de modos de marcar as provas sem que caiam duas no mesmo dia é $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ (o primeiro professor pode escolher qualquer dos 5 dias, o

segundo, um dos 4 restantes e assim por diante). Logo, a probabilidade de que as provas caiam em dias distintos é $120/625 = 24/125$.

- 18) Suponha o time A posicionado em seu grupo. B terá 23 posições possíveis, em 11 das quais fica no grupo de A. A resposta é $11/23$.
- 19) O número de modos de selecionar 2 pés de sapatos é C_{12}^6 . Para selecionar 1 par de sapatos devemos selecionar um dos 6 pares. A probabilidade de que se forme um par é igual a $6/66 = 1/11$.
- 20) (a) $C_{27}^4 = 17\,750$.
- (b) Como José já está escolhido, devemos escolher 3 pessoas dentre as 26 que sobraram. A resposta é $C_{26}^3 = 2\,600$.
- (c) Como Márcia não pode ser escolhida, devemos escolher 4 dentre 26 pessoas. A resposta é $C_{26}^4 = 14\,950$.
- (d) $C_{12}^2 \cdot C_{15}^2 = 6\,930$.
- (e) $C_{12}^1 \cdot C_{15}^3 + C_{12}^2 \cdot C_{15}^2 + C_{12}^3 \cdot C_{15}^1 = 15\,690$.
- 21) (a) $C_{60}^6 = 50\,063\,860$.
- (b) Em ambos os casos, a probabilidade de ganhar é $1/50\,063\,860$.
- (c) Quem aposta em 8 números, aposta em $C_8^6 = 56$ resultados. Logo, as chances de ganhar são 56 vezes maiores.
- (d) Não.
- 22) O número de resultados possíveis é 6^5 .
- (a) Para formar um par, deve-se primeiramente selecionar o tipo do par (6 modos), depois, os dados em que o par se formará ($C_5^2 = 10$ modos) e, finalmente, os resultados dos

outros três dados ($5 \times 4 \times 3 = 60$ modos). A resposta é $\frac{6 \times 10 \times 60}{6^5} = \frac{25}{54}$.

(b) Para formar dois pares, deve-se primeiramente selecionar os tipos dos pares ($C_6^2 = 15$ modos), depois os dados em que os pares se formarão ($C_5^2 \cdot C_3^2 = 30$ modos) e, finalmente, o resultado do outro dado (4 modos). A resposta é $\frac{15 \times 30 \times 4}{6^5} = \frac{25}{108}$.

(c) Para formar uma trinca, deve-se primeiramente selecionar o tipo da trinca (6 modos), depois, os dados em que a trinca se formará ($C_5^3 = 10$ modos) e, finalmente, os resultados dos outros dois dados ($5 \times 4 = 20$ modos). A resposta é $\frac{6 \times 10 \times 20}{6^5} = \frac{25}{162}$.

(d) Para formar uma quadra, deve-se primeiramente selecionar o tipo da quadra (6 modos), depois, os dados em que a quadra se formará (= 5 modos) e, finalmente, os resultados do outro dado ($C_5^4 = 5$ modos). A resposta é

$$\frac{6 \times 5 \times 5}{6^5} = \frac{25}{1\,296}$$

(e) Há apenas 6 quinas. A resposta é $\frac{6}{6^5} = \frac{1}{1\,296}$.

(f) Há dois tipos de sequências (12345 e 23456). Para formar uma delas, basta escolher o resultado de cada dado ($5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ modos). A resposta é $\frac{2 \times 120}{6^5} = \frac{5}{162}$.

(g) Para formar um *full hand*, deve-se primeiramente selecionar o tipo da trinca (6 modos), depois, os dados em que a trinca se formará ($C_5^3 = 10$ modos) e, finalmente, o tipo do par (5 modos). A resposta é $\frac{6 \times 10 \times 5}{6^5} = \frac{25}{648}$.

23) O número de casos possíveis para os signos é

$$12 \times 12 \times 12 \times 12 = 12^4.$$

- (a) O número de casos em que os signos são diferentes é $12 \times 11 \times 10 \times 9$. Logo, a probabilidade de haver alguma coincidência de signos zodiacais é $1 - \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{12^4} = \frac{41}{96}$.
- (b) As três pessoas podem ser selecionadas de $C_4^3 = 4$ modos; o signo delas, de 12 modos; o signo da pessoa restante, de 11 modos. A resposta é $\frac{4 \times 12 \times 11}{12^4} = \frac{11}{432}$.
- (c) Há 12 casos em que as quatro pessoas têm o mesmo signo. A resposta é $\frac{12}{12^4} = \frac{1}{1728}$.
- (d) Para que haja duas pessoas com um mesmo signo e duas outras pessoas com outro signo, os signos podem ser selecionados de $C_{12}^2 = 66$ modos; depois, os pares de cada signo podem ser selecionados de $C_4^2 = 6$ modos. A resposta é $\frac{66 \times 6}{12^4} = \frac{11}{576}$.
- 24) (a) O segundo melhor jogador será vice-campeão se, e somente se, não enfrentar o melhor jogador antes da final. Posto o segundo melhor jogador na tabela, há 15 posições possíveis para o melhor, e em 8 delas ele enfrenta o segundo melhor jogador apenas na final. A resposta é $8/15$.
- (b) O quarto melhor jogador será vice-campeão se, e somente se, não enfrentar nenhum dos três melhores jogadores antes da final. Posto o quarto melhor jogador na tabela, há 15 posições possíveis para os melhores que ele, em 8 das quais eles só enfrentarão o quarto melhor jogador na final. A resposta é $\frac{C_8^3}{C_{15}^3} = \frac{8}{65}$.
- (c) O número máximo é 3. Suponhamos os 16 jogadores numerados de 1 a 16 e os jogos sendo: primeira fase: 1 2, 3 4, ..., 15, 16; segunda fase: vencedor do jogo 1 \times vencedor do 2, ... vencedor do jogo 7 \times vencedor do 8. Há 6 jogadores piores que ele. Se ele ocupa a posição 1, devem

ser ocupadas por piores que ele as posições 2 (para que ele passe para a segunda fase), 3 e 4 (para que ele passe para a terceira fase); para que ele passe para a quarta fase, as posições 5, 6, 7 e 8 também devem ser ocupadas por jogadores piores que ele, o que é impossível.

- (d) A probabilidade de ele disputar 3 partidas é a probabilidade de as posições 2, 3 e 4 serem ocupadas por jogadores piores que ele, que é igual a $\frac{C_6^3}{C_{15}^3} = \frac{4}{91}$.

- 25) (a) Cada lançamento possui 6 resultados possíveis. Assim, há $6 \times 6 = 36$ resultados possíveis para os resultados do 1º e 3º dados (o 2º não importa aqui). Desses, há $2 \times 2 = 4$ casos em que em ambos os casos sai uma face azul e $4 \times 4 = 16$ casos em que as faces são ambas vermelhas. Logo, a probabilidade de que as faces tenham a mesma cor no 1º e 3º lançamentos é $\frac{4 + 16}{36} = \frac{5}{9}$.
- (b) O número total de resultados em que o 1º e 2º dados fornecem o mesmo resultado é igual a

$$2 \times 2 \times 6 + 4 \times 4 \times 6 = 120$$

(a primeira parcela corresponde à situação em que as duas primeiras faces são vermelhas, e a segunda, à situação em que as duas primeiras faces são azuis). O número de resultados em que as 3 faces têm a mesma cor é $2 \times 2 \times 2 + 4 \times 4 \times 4 = 72$. Logo, a probabilidade pedida é $\frac{72}{120} = \frac{3}{5}$ (note que esta probabilidade é maior do que a do item anterior).

- 26) A função fica determinada quando se escolhem os m elementos de I_n que formarão a imagem, o que pode ser feito de C_n^m maneiras, no primeiro caso, e de $CR_n^m = C_{n+m-1}^m$ maneiras, no

segundo caso.

- 27) Ignoremos o problema do 0 na primeira casa. Há $C_7^3 = 35$ modos de escolher os lugares dos algarismos 4, $C_4^2 = 6$ de escolher os lugares dos 8, e $8 \times 8 = 64$ modos de preencher as casas restantes, num total de $35 \times 6 \times 64 = 13\,440$ números. Devemos descontar os números começados em 0. Há $C_6^3 = 20$ modos de escolher os lugares dos algarismos 4, $C_3^2 = 3$ de escolher os lugares dos 8, e 8 modos de preencher a casa restante, num total de $20 \times 3 \times 8 = 480$ números começados em 0. A resposta é $13\,440 - 480 = 12\,960$.
- 28) (a) Essas funções são bijetoras. A resposta é $n!$.
- (b) Um elemento de B tem sua imagem inversa formada por dois elementos, e os demais têm imagens inversas unitárias. Esse elemento de B pode ser selecionado de n modos, e sua imagem inversa, de C_{n+1}^2 modos. Depois disso, há $(n-1)!$ modos de determinar as imagens dos demais elementos de A , pois a correspondência entre esses elementos restantes em A e B é biunívoca. A resposta é

$$n \cdot C_{n+1}^2 \cdot (n-1)! = \frac{(n+1)!n}{2}.$$

- (c) Neste caso, temos as alternativas:

- i) Três elementos de A têm a mesma imagem em B , e a correspondência entre os demais $n-1$ elementos de A e os demais $n-1$ elementos de B é biunívoca. Há C_{n+2}^3 modos de escolher os três elementos de A , n modos de escolher a imagem deles em B e $(n-1)!$ modos de construir uma correspondência biunívoca entre os elementos restantes. Há $C_{n+2}^3 \cdot n \cdot (n-1)! = \frac{n(n+2)!}{6}$ funções desse tipo.

ii) Há dois pares de elementos de A com imagens idênticas em B , e a correspondência entre os demais $n - 2$ elementos de A e os demais $n - 2$ elementos de B é biunívoca. Há C_n^2 modos de escolher os dois elementos de B , $C_{n+2}^2 \cdot C_n^2$ modos de escolher suas imagens inversas em A e $(n - 2)!$ modos estabelecer a correspondência entre os elementos restantes. Há $C_n^2 \cdot C_{n+2}^2 \cdot C_n^2 \cdot (n - 2)! = \frac{n(3n + 1)(n + 2)!}{24}$ funções desse tipo.

A resposta é

$$\frac{n(n + 2)!}{6} + \frac{n(3n + 1)(n + 2)!}{24} = \frac{n(3n + 1)(n + 2)!}{24}.$$

29) Chamemos de D o conjunto $C - C_1$. Há quatro tipos de planos, determinados por:

- i) três pontos de D ;
- ii) dois pontos de D e um de C_1 ;
- iii) um ponto de D e dois de C_1 ;
- iv) três pontos de C_1 .

A resposta é $C_{12}^3 + 8 \cdot C_{12}^2 + 12 \cdot C_8^2 + 1 = 1\,085$.

30) Chegam 4 cientistas A, B, C, D. Com as chaves que possuem, abrem alguns cadeados, mas não todos. Existe pelo menos um cadeado que eles não conseguem abrir. Na situação do número mínimo de cadeados, existe exatamente um cadeado que eles não conseguem abrir. Batize tal cadeado de ABCD. Portanto, ABCD é o cadeado cuja chave não está em poder de A, nem de B, nem de C e nem de D. Qualquer outro cientista tem a chave desse cadeado, pois esse cientista e A, B, C e D formam um grupo de 5 cientistas e, portanto, nesse grupo alguém possui

a chave. Como o alguém não é nem A, nem B, nem C e nem D, deve ser o outro. Batize, analogamente, os demais cadeados. Verifique agora que a correspondência entre cadeados e seus nomes é biunívoca, isto é, cadeados diferentes têm nomes diferentes (isso porque estamos na situação do número mínimo de cadeados) e cadeados de nomes diferentes são diferentes (se X está no nome de um cadeado e não está no nome do outro, X tem a chave deste e não tem a chave daquele).

- (a) O número mínimo de cadeados é igual ao número de nomes de cadeados, $C_{11}^4 = 330$.
- (b) Cada cientista X possui as chaves dos cadeados que não possuem X no nome. A resposta é $C_{10}^4 = 210$.