UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Guilherme Schimanko de Godoy

Sequências Espectrais e Cohomologia de Farrell

Florianópolis
2021

Guilherme Schimanko de Godoy

Sequências Espectrais e Cohomologia de Farrell

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Sérgio Tadao Martins, Dr.

Florianópolis
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Godoy, Guilherme Schimanko de
Sequências Espectrais e Cohomologia de Farrell / Guilherme Schimanko de Godoy ; orientador, Sérgio Tadao Martins, 2021.
78 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Topologia Algébrica. 3. Cohomologia de Grupos. 4. Cohomologia de Farrell. 5. Sequências Espectrais. I. Martins, Sérgio Tadao. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Guilherme Schimanko de Godoy

Sequências Espectrais e Cohomologia de Farrell

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Sérgio Tadao Martins, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Francisco Carlos Caramello Junior, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Oscar Ocampo Uribe, Dr.
Universidade Federal da Bahia

Prof. Anderson Paião dos Santos, Dr.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Daniel Goncalves
Data: 16/08/2021 12:27:16-0300
CPF: 017.022.459-77
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Daniel Gonçalves, Dr.
Coordenador do Programa

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Sergio Tadao Martins
Data: 17/08/2021 07:19:17-0300
CPF: 313.598.118-50
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Sérgio Tadao Martins, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2021.

AGRADECIMENTOS

Agradeço os meus pais, Adelar e Teresinha, pelo apoio, exemplo de força e superação. À minha madrinha Geni e sua filha Marta, que considero minha irmã, pelo carinho que sempre tiveram comigo.

Agradeço ao orientador deste trabalho, professor Sérgio Tadao Martins, pela paciência e tempo que dedicou à orientação.

Agradeço a todos os professores que tive na UFSM e na UFSC, em especial o professor Juliano Damião Bittencourt de Godoi, pelo incentivo.

Agradeço aos amigos de mestrado: Jonatan, Maritza e Matheus, pelos diversos momentos de descontração que tivemos.

Não poderia deixar de agradecer à banca deste trabalho pelas sugestões feitas e ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho é feito um estudo das teorias de cohomologia de Tate e de Farrell. No contexto do trabalho, a teoria de Farrell é apresentada como uma extensão para a teoria de cohomologia de Tate sobre a classe dos grupos com dimensão cohomológica virtual finita. Para tanto, são apresentados resultados clássicos da teoria de cohomologia ordinária de grupos, tais como: módulos induzidos e coinduzidos, mudança de dimensão, morfismo *transfer* e produto *cup*. Além disso, é realizado um estudo das sequências espectrais e das condições de finitude de grupos.

Palavras-chave: Cohomologia de Tate. Cohomologia de Farrell. Dimensão cohomológica virtual. Sequências espectrais. Condições de finitude.

ABSTRACT

In this work a study of the Tate and Farrell cohomology theories is done. In the context of the work, Farrell's theory is presented as an extension of Tate cohomology theory to the class of groups with finite virtual cohomological dimension. For this purpose, classical objects and results of the ordinary cohomology of groups are presented, such as : induced and coinduced modules, dimension shifting, transfer map and cup product. In addition, a study of spectral sequences and finiteness conditions for groups is carried out.

Keywords: Tate cohomology. Farrell cohomology. Virtual cohomological dimension. Spectral sequences. Finiteness conditions.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A teoria de cohomologia de grupos é desenvolvida na "fronteira" da topologia com a álgebra abstrata. É atualmente um campo de pesquisa com bastante ascensão que relaciona diversas áreas da matemática, tais como teoria de grupos, teoria de homotopia, teoria dos números e geometria algébrica. Topologicamente, a cohomologia de um grupo G, denotada por $H^*(G)$, é a cohomologia de um CW-complexo do tipo $K(G,1)$[1]. Equivalentemente, a cohomologia de G pode ser definida em função de uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. É esta descrição, puramente algébrica, que utilizamos na maior parte do trabalho.

No capítulo 2, dado um grupo G, definimos os grupos de homologia e cohomologia de G com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$-módulo M, isto é, $H_*(G,M) := H_*(F \otimes_G M)$ e $H^*(G,M) := H^*(\mathscr{H}om_G(F,M))$, respectivamente, onde $F \to \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Posteriormente, apresentamos os módulos induzidos e coinduzidos e dentre outros resultados, enunciamos e demonstramos o Lema de Shapiro, que por diversas vezes utilizamos no transcorrer do trabalho. Ainda neste capítulo, apresentamos H^* e H_* como funtores de duas variáveis, a técnica de mudança de dimensão, o morfismo *transfer* e a construção do produto *cup*, que nos permite tomar $H^*(G,\mathbb{Z})$ como anel graduado. Para encerrar o capítulo, damos uma interpretação topológica para $H_*(G,M)$ e $H^*(G,M)$ com M um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial.

No capítulo 3, tratamos das sequências espectrais. Dentre outras coisas, demonstramos que as sequências espectrais associadas às filtrações por linha e por coluna de um complexo duplo de primeiro quadrante são convergentes. Este resultado é utilizado posteriormente, também neste capítulo, quando tratamos da homologia de um grupo associada a um complexo de cadeia. Dentre outros resultados deste capítulo, apresentamos a sequência espectral de Hochschild–Serre e a sequência espectral de Cartan–Leray.

No capítulo 4, dado um grupo G, apresentamos essencialmente algumas condições de finitude para G. Como a homologia e a cohomologia de G são definidas via a escolha de uma resolução projetiva arbitrária de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, é conveniente, quando possível, tomarmos esta resolução a mais simples possível. Escolhendo a "menor" resolução dentre as resoluções projetivas (quando possível), o cálculo da homologia e cohomologia se restringe a apenas uma quantidade finita (quando for possível tomar uma resolução finita), neste sentido, definimos a dimensão cohomológica de G, denotada por $cd\, G$, que será finita quando for possível tomar uma resolução projetiva de comprimento finito e infinita caso contrário. De encontro a escolha das resoluções, apresentamos os grupos do tipo FP_n, FP_∞, FP e FL. Ao fim do capítulo, tratamos dos grupos de dualidade e apresentamos algumas noções virtuais.

No capítulo 5, primeiramente, expomos alguns resultados de álgebra homológica relativa e de resoluções completas. Posteriormente, definimos a cohomologia de Tate e

[1] Um CW-complexo conexo X é do tipo $K(G,1)$ se $\pi_1(X) = G$ e $\pi_n(X) = 0$ para todo $n \geq 2$.

evidenciamos como esta teoria unifica o estudo da homologia e cohomologia de grupos finitos. Prosseguindo no capítulo, definimos a cohomologia de Farrell, que apresenta uma extensão natural para a teoria de cohomologia de Tate sobre a classe dos grupos com dimensão cohomológica virtual finita. Tal como feito no contexto da cohomologia ordinária, damos algumas propriedades análogas para cohomologia de Tate e de Farrell. Além disso, verificamos que a cohomologia de Farrell é uma obstrução para os grupos de dualidade virtual. Apresentamos, brevemente, alguns resultados de cohomologia equivariante de Farrell, de grupos com cohomologia periódica e encerramos o capítulo tratando de ações livres e propriamente descontínuas em $2n$-esferas de homotopia.

Ao final do trabalho, encontram-se dois apêndices, o primeiro versa sobre alguns resultados de álgebra homológica e o segundo trata dos espaços de Eilenberg-MacLane.

2 HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA DE GRUPOS

Neste capítulo, definimos a (co)homologia de um grupo G com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$-módulo M via resoluções projetivas e apresentamos alguns resultados clássicos da teoria. Ao final do capítulo é dada uma interpretação topológica para a (co)homologia de G com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial M. A menos de menção contrária, ao longo deste e dos demais capítulos, H é um subgrupo de G e R é um anel comutativo com unidade.

2.1 HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA COM COEFICIENTES

Sejam M e N dois $\mathbb{Z}G$-módulos à esquerda. Tomando M como $\mathbb{Z}G$-módulo à direita via ação $mg := g^{-1}m$, podemos considerar o produto tensorial $M \otimes_{\mathbb{Z}G} N$, denotado também por $M \otimes_G N$. Dado que $M \otimes_G N$ é obtido de $M \otimes N$ ao introduzirmos a relação $g^{-1}m \otimes n = m \otimes gn$, obtemos a relação $m \otimes n = gm \otimes gn$ ao trocar m por gm. A **ação diagonal** de G em $M \otimes N$ é dada por $g \cdot (m \otimes n) := gm \otimes gn$. Disto, $M \otimes_G N = (M \otimes N)_G$. Donde segue que $M \otimes_G N = (M \otimes N)_G \approx (N \otimes M)_G = N \otimes_G M$.

Se M e N são $\mathbb{Z}G$-módulos à esquerda, então a ação de G em M e N induz a **ação diagonal** de G em $Hom(M, N)$ dada por $(gu)(m) := g \cdot u(g^{-1}m)$ para $g \in G, u \in Hom(M, N)$ e $m \in M$ (é acrescentado g^{-1} na ação de G por conta da contravariância do funtor $Hom(-, N)$). Haja vista que $u \in Hom_{\mathbb{Z}G}(M, N)$ se, e somente se, $gu = u$ para todo $g \in G$, obtemos que $Hom_G(M, N) = Hom(M, N)^G$.

Definição 2.1. *Sejam F uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e M um $\mathbb{Z}G$-módulo. A **homologia de G com coeficientes em M** é definida por*

$$H_*(G, M) = H_*(F \otimes_G M)$$

*e a **cohomologia de G com coeficientes em M** é definida por*

$$H^*(G, M) = H^*(\mathscr{H}om_G(F, M)),$$

onde M é tomado como complexo de cadeia concentrado na dimensão 0.

Sejam $\mathscr{F} : \mathbb{Z}G\text{-mod} \to \mathbb{Z}\text{-mod}$ um funtor aditivo e $f, g : (C, d) \to (C', d')$ homomorfismos de cadeia homotópicos por uma homotopia h. Como $\mathscr{F}$ é aditivo, decorre que $\mathscr{F}(f_n) - \mathscr{F}(g_n) = \mathscr{F}(f_n - g_n) = \mathscr{F}(h_{n-1}d_n + d'_{n+1}h_n) = \mathscr{F}(h_{n-1})\mathscr{F}(d_n) + \mathscr{F}(d'_{n+1})\mathscr{F}(h_n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, logo $\mathscr{F}(h)$ é uma homotopia entre $\mathscr{F}(f)$ e $\mathscr{F}(g)$. Dadas duas resoluções projetivas F e F' de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, pelo Lema Fundamental da Álgebra Homológica (Lema A.36), existe uma única (a menos de homotopia) equivalência homotópica $f : F \to F'$. Ora, como $- \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ e $Hom_{\mathbb{Z}G}(-, M)$ são funtores aditivos, f induz uma equivalência homotópica entre os complexos $F \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ e $F' \otimes_{\mathbb{Z}G} M$, e, $Hom_{\mathbb{Z}G}(F, M)$ e $Hom_{\mathbb{Z}G}(F', M)$. Por conseguinte, $H_*(F \otimes_G M) \approx H_*(F' \otimes_G M)$ e $H^*(\mathscr{H}om_G(F, M)) \approx H^*(\mathscr{H}om_G(F', M))$. Portanto, $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$ são invariantes pela resolução projetiva escolhida.

Exemplo 2.2. *Se F é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, então, $0 \to Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \to Hom_{\mathbb{Z}G}(F_0, M) \to Hom_{\mathbb{Z}G}(F_1, M)$ é uma sequência exata, pois $Hom_{\mathbb{Z}G}(-, M)$ é contravariante e exato à esquerda. Portanto, $H^0(G, M)= Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \approx M^G$. Similarmente, $F_1 \otimes_{\mathbb{Z}G} M \to F_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} M \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \to 0$ é uma sequência exata, pois $- \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ é covariante e exato à direita. Portanto, $H_0(G, M)= \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \approx M_G$.*

Exemplo 2.3. *Seja $G = \langle t \rangle \approx \mathbb{Z}$. Pelo Exemplo A.31, $0 \to \mathbb{Z}G \stackrel{t-1}{\to} \mathbb{Z}G \stackrel{\varepsilon}{\to} \mathbb{Z} \to 0$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Logo, $H_*(G, M)$ é a homologia do complexo $0 \to M \stackrel{t-1}{\to} M \to 0$ e $H^*(G, M)$ é a cohomologia do complexo $0 \to M \stackrel{t-1}{\to} M \to 0$. Dado que $ker\,(t-1) = M^G$ e $im\,(t-1) = \langle gm - m \mid g \in G \text{ e } m \in M \rangle$, decorre que $H_0(G, M) = M_G = H^1(G, M)$, $H^0(G, M) = M^G = H_1(G, M)$ e $H_i(G, M) = H^i(G, M) = 0$ para $i > 1$.*

Exemplo 2.4. *Seja $G = \langle t \mid t^n = 1 \rangle \approx \mathbb{Z}_n$. Como $\cdots \to \mathbb{Z}G \stackrel{t-1}{\to} \mathbb{Z}G \stackrel{N}{\to} \mathbb{Z}G \stackrel{t-1}{\to} \mathbb{Z}G \stackrel{\varepsilon}{\to} \mathbb{Z} \to 0$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, onde $N = 1+t+\cdots+t^{n-1}$ (Exemplo A.32), decorre que $H_*(G, M)$ é a homologia do complexo $\cdots \to M \stackrel{t-1}{\to} M \stackrel{N}{\to} M \stackrel{t-1}{\to} M \to 0$. Portanto, $H_{2i-1}(G, M) = ker\,(t-1)/im\,N = M^G/NM$ e $H_{2i}(G, M) = ker\,N/im\,(t-1) = ker\,N/(t-1)M$ com $i \neq 0$. Similarmente, $H^*(G, M)$ é a cohomologia do complexo $0 \to M \stackrel{t-1}{\to} M \stackrel{N}{\to} M \stackrel{t-1}{\to} M \to \cdots$. Portanto, $H^{2i-1}(G, M) = ker\,N/im\,(t-1) = ker\,N/(t-1)M$ e $H^{2i}(G, M) = ker\,(t-1)/im\,N = M^G/NM$ com $i \neq 0$.*

2.1.1 TOR E EXT

Definição 2.5. *Sejam $\varepsilon : F \to M$ e $\eta : P \to N$ resoluções projetivas dos $\mathbb{Z}G$-módulos M e N. Definimos:*

$$Tor_*^G(M, N) := H_*(F \otimes_G N) = H_*(F \otimes_G P) = H_*(M \otimes_G P).$$

Similarmente, sejam $\varepsilon : F \to M$ uma resolução projetiva do $\mathbb{Z}G$-módulo M e $\eta : N \to Q$ uma resolução injetiva do $\mathbb{Z}G$-módulo N. Definimos:

$$Ext_G^*(M, N) := H^*(\mathscr{H}om_G(F, N)) = H^*(\mathscr{H}om_G(F, Q)) = H^*(\mathscr{H}om_G(M, Q)).$$

Como $H_*(G, -) = Tor_*^G(\mathbb{Z}, -)$ e $H^*(G, -) = Ext_G^*(\mathbb{Z}, -)$, obtemos $Tor_*^G(-, -)$ e $Ext_G^*(-, -)$ como uma generalização para $H_*(G, -)$ e $H^*(G.-)$.

Proposição 2.6 ((BROWN, 1982), Proposição 2.2, p. 61)**.** *Sejam M e N dois $\mathbb{Z}G$-módulos. Se M é $\mathbb{Z}$-livre de torção, então $Tor_*^G(M, N) \approx H_*(G, M \otimes N)$, onde G atua diagonalmente em $M \otimes N$. Além disso, se M é $\mathbb{Z}$-livre, então $Ext_G^*(M, N) \approx H^*(G, Hom(M, N))$, onde G atua diagonalmente em $Hom(M, N)$.*

2.2 MÓDULOS INDUZIDOS E COINDUZIDOS

2.2.1 EXTENSÃO E COEXTENSÃO DE ESCALARES

Seja $\alpha : R \to S$ um homomorfismo de anéis. Se M é um S-módulo (à esquerda), então M é um R-módulo (à esquerda) por meio da ação $r \cdot m := \alpha(r)m$. Isso descreve um funtor da categoria dos S-módulos (à esquerda) para a categoria dos R-módulos (à esquerda), chamado **restrição de escalares**.

No sentido contrário, se M é um R-módulo (à esquerda), então $S \otimes_R M$ é um S-módulo à esquerda por meio da ação $s \cdot (s' \otimes m) := ss' \otimes m$, onde S é tomado como R-módulo (à direita) por restrição de escalares via ação $s \cdot r := s\alpha(r)$. Nesse caso, dizemos que o S-módulo $S \otimes_R M$ é obtido de M por **extensão de escalares** de R para S. Similarmente, $Hom_R(S, M)$ é um S-módulo (à esquerda) por meio da ação $s \cdot f(s') = f(s's)$, onde S é tomado como R-módulo (à esquerda) por restrição de escalares via ação $r \cdot s := \alpha(r)s$. Nesse caso, dizemos que o S-módulo $Hom_R(S, M)$ é obtido de M por **coextensão de escalares** de R para S.

Exemplo 2.7. *Se $\varepsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$ é o homomorfismo de aumento, então, pela Proposição A.29, o funtor de extensão é dado por $M \mapsto M_G$ e o funtor de coextensão é dado por $M \mapsto M^G$.*

Tomando $S \otimes_R M$ como R-módulo obtido por restrição de escalares, existe o R-homomorfismo natural $i : M \to S \otimes_R M$ dado por $i(m) = 1 \otimes m$, pois $i(rm) = 1 \otimes rm = \alpha(r) \otimes m = \alpha(r)(1 \otimes m) = \alpha(r)i(m)$. Além disso, vale a seguinte propriedade universal:

Proposição 2.8 (Propriedade universal)**.** *Sejam N um S-módulo e $f : M \to N$ um R-homomorfismo. Então, existe um único S-homomorfismo $g : S \otimes_R M \to N$ dado por $g(s \otimes m) = s \cdot f(m)$, tal que $gi = f$. Disso, $Hom_S(S \otimes_R M, N) \approx Hom_R(M, N)$.*

Tomando $Hom_R(S, M)$ como R-módulo obtido por restrição de escalares, existe o R-homomorfismo natural $\pi : Hom_R(S, M) \to M$ dado por $\pi(f) = f(1)$, pois $\pi(\alpha(r)f) = (\alpha(r)f)(1) = f(\alpha(r)1) = rf(1) = r\pi(f)$. Além disso, vale a seguinte propriedade universal:

Proposição 2.9 (Propriedade universal)**.** *Sejam N um S-módulo e $f : M \to N$ um R-homomorfismo. Então, existe um único S-homomorfismo $g : N \to Hom_R(S, M)$ dado por $g(n)(s) = f(sn)$, tal que $\pi g = f$. Disso, $Hom_S(N, Hom_R(S, M)) \approx Hom_R(N, M)$.*

2.2.2 MÓDULOS INDUZIDOS E COINDUZIDOS

Definição 2.10. *Sejam $H \subseteq G$, $\mathbb{Z}H \hookrightarrow \mathbb{Z}G$ o homomorfismo de inclusão e M um $\mathbb{Z}H$-módulo. O $\mathbb{Z}G$-módulo $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$ é chamado de **indução** de H para G e denotado por $Ind_H^G M$. O $\mathbb{Z}G$-módulo $Hom_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)$ é chamado de **coindução** de H para G e* *denotado por $Coind_H^G M$. Em particular, $Ind_{\{1\}}^G M$ é chamado de **módulo induzido** e $Coind_{\{1\}}^G M$ é chamado de **módulo coinduzido**.*

Dado que a ação de translação à direita de H em G é livre, decorre, pela Proposição A.23, que $\mathbb{Z}G$ é um $\mathbb{Z}H$-módulo livre e admite a decomposição $\mathbb{Z}G \approx \bigoplus_{g\in E} g(\mathbb{Z}H)$, onde E é um sistema de representantes para as classes laterais à esquerda de H em G, logo, como grupo abeliano, $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M \approx \bigoplus_{g\in E} g \otimes M$, onde $g \otimes M = \{g \otimes m \mid m \in M\} \approx M$. Consideremos 1 como representante da classe lateral que o contém. Como o $\mathbb{Z}H$-homomorfismo $i : M \to \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$ aplica M isomorficamente em $1 \otimes M \approx M$, decorre que $Ind_H^G M$ contém M como $\mathbb{Z}H$-módulo. Mais geralmente, o somando direto $g \otimes M$ é a transformação de M pela ação de g, pois $g(1 \otimes m) = g \otimes m$. Portanto:

$$Ind_H^G M \approx \bigoplus_{g\in G/H} gM, \tag{1}$$

pois M é aplicado em si próprio pela ação de H e o subgrupo gM de $Ind_H^G M$ depende apenas da classe de g em G/H.

Proposição 2.11 ((BROWN, 1982), Proposição 5.3, p. 68)**.** *Seja N um $\mathbb{Z}G$-módulo cujo grupo abeliano subjacente decompõe-se como $\bigoplus_{i\in I} M_i$, onde I é um G-conjunto homogêneo tal que $gM_i = M_{gi}$ para todo $g \in G$ e todo $i \in I$. Então, se $M = M_i$ e $H = Stab(i)$, M é um $\mathbb{Z}H$-módulo e $N \approx Ind_H^G M$.*

Demonstração: Dado que $H = \mathrm{Stab}(i) \subseteq G$, N é um $\mathbb{Z}H$-módulo, logo M é um $\mathbb{Z}H$-módulo. Pela Proposição 2.8, a inclusão $M \hookrightarrow N$ estende-se a um único $\mathbb{Z}G$-homomorfismo $\varphi : Ind_H^G M \to N$. Ora, como φ aplica cada gM isomorficamente em M_{gi} e $G/H \approx G(i) = I$, decorre que $\varphi : Ind_H^G M \to N$ é um isomorfismo. ■

Corolário 2.12 ((BROWN, 1982), Corolário 5.4, p. 68)**.** *Seja N um $\mathbb{Z}G$-módulo cujo grupo abeliano subjacente decompõe-se como $\bigoplus_{i\in I} M_i$, tal que a G-ação permuta os somandos diretos de acordo com alguma ação de G em I. Sejam $G_i = Stab(i)$ e E um conjunto de representantes para I/G. Então, M_i é um $\mathbb{Z}G_i$-módulo e existe um $\mathbb{Z}G$-isomorfismo $N \approx \bigoplus_{i\in E} Ind_{G_i}^G M_i$.*

Demonstração: Dado que $I = \dot{\bigcup\limits_{i\in E}} G(i)$, temos $N = \bigoplus_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in E}(\bigoplus_{j\in G(i)} M_j)$. Ora, cada M_i é um $\mathbb{Z}G_i$-módulo e $\bigoplus_{j\in G(i)} M_j \approx Ind_{G_i}^G M_i$. Portanto, $N \approx \bigoplus_{i\in E} Ind_{G_i}^G M_i$. ■

Exemplo 2.13. $Ind_H^G \mathbb{Z} \approx \bigoplus_{g\in G/H} g\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}[G/H]$.

Exemplo 2.14. *Seja X um G-complexo. Consideremos o $\mathbb{Z}G$-módulo $C_n(X) \approx \bigoplus_{\sigma\in X_n} (\mathbb{Z})_\sigma$, onde X_n é o conjunto das n-células de X. Pelo Corolário 2.12, $C_n(X) \approx \bigoplus_{\sigma\in\Sigma_n} Ind_{G_\sigma}^G \mathbb{Z}_\sigma$, onde Σ_n é um conjunto de representantes para as G-órbitas de X_n, $G_\sigma = Stab(\sigma)$ e $\mathbb{Z}_\sigma$ é o módulo orientado associado a σ, isto é, $\mathbb{Z}_\sigma$ é um grupo* *cíclico infinito cujos dois geradores correspondem as duas orientações de σ . Um elemento $g \in G_\sigma$ atua em $\mathbb{Z}_\sigma$ como a multiplicação por $+1$ se g preserva a orientação de σ e por -1 caso contrário.*

Sejam $\pi_1 : N \to M_1$ e $\pi_2 : N \to M_2$ sobrejeções de grupos abelianos. Escrevemos $\pi_1 \sim \pi_2$ para indicar que existe um isomorfismo $h : M_1 \to M_2$ tal que $h\pi_1 = \pi_2$, ou equivalentemente, que $ker\, \pi_1 = ker\, \pi_2$. Se $\pi : N \to M$ é uma sobrejeção e N é um $\mathbb{Z}G$-módulo, então $\pi g : N \to M$ dada por $\pi g(n) = \pi(gn)$ também é uma sobrejeção. Uma **decomposição em produto direto** de N é uma família de sobrejeções $(\pi_i : N \to M_i)_{i\in I}$ tal que o morfismo correspondente $N \to \prod_{i\in I} M_i$ é um isomorfismo. Tal como para módulos de indução, o grupo abeliano subjacente de $Coind_H^G M$ possui uma decomposição em produto direto $(\pi g)_{g\in G/H}$, onde $\pi : Coind_H^G M \to M$ é o $\mathbb{Z}H$-homomorfismo canônico.

Proposição 2.15 ((BROWN, 1982), Proposição 5.8, p. 70)**.** *Seja N um $\mathbb{Z}G$-módulo cujo grupo abeliano subjacente admite uma decomposição em produto direto $(\pi_i : N \to M_i)_{i\in I}$, onde I é um G-conjunto homogêneo tal que $\pi_i g \sim \pi_{ig}$ para todo $g \in I$ e todo $i \in I$. Sejam $\pi : N \to M$ uma das π_i e $H = Stab(i) \subseteq G$. Então, M herda a estrutura de $\mathbb{Z}H$-módulo de M e $N \approx Coind_H^G M$.*

Demonstração: Se $g \in H$, então $\pi g = \pi_i g \sim \pi_{ig} = \pi_i = \pi$. Podemos definir uma H-ação em M por considerar $g \cdot m = \pi(gn)$, onde $\pi(n) = m$, $g \in H$ e $m \in M$. Se $\pi(n) = \pi(n') = m$, então $\pi(gn) = \pi(gn')$, pois $n - n' \in ker\, \pi = ker\, \pi g$, logo a H-ação está bem definida. Pela Proposição 2.9, $\pi : N \to M$ estende-se a um único $\mathbb{Z}G$-homomorfismo $\Psi : N \to Coind_H^G M$. Ora, como Ψ aplica cada fator π_{ig} de N isomorficamente em πg de $Coind_H^G M$ e $G/H \approx G(i) = I$, decorre que $\Psi : N \to Coind_H^G M$ é um isomorfismo. ∎

Corolário 2.16. *Seja N um $\mathbb{Z}G$-módulo cujo grupo abeliano subjacente admite uma decomposição em produto direto $(\pi_i : N \to M_i)_{i\in I}$, tal que a G-ação permuta os fatores diretos de acordo com alguma ação de G em I. Sejam $G_i = Stab(i)$ e E um conjunto de representantes para I/G. Então, M_i é um $\mathbb{Z}G_i$-módulo e existe um $\mathbb{Z}G$-isomorfismo $N \approx \prod_{i\in E} Coind_{G_i}^G M_i$.*

Demonstração: Dado que $I = \dot{\bigcup\limits_{i\in E}} G(i)$, temos $N \approx \prod_{i\in I} M_i = \prod_{i\in E}(\prod_{j\in G(i)} M_j)$. Ora, cada M_i é um $\mathbb{Z}G_i$-módulo e $\prod_{j\in G(i)} M_j \approx Coind_{G_i}^G M_i$. Portanto, $N \approx \prod_{i\in E} Coind_{G_i}^G M_i$. ∎

Proposição 2.17 ((BROWN, 1982), Proposição 5.9, p. 70)**.** *Se $(G : H) < \infty$, então $Ind_H^G M \approx Coind_H^G M$.*

Demonstração: Seja $\varphi_0 : M \to Hom_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)$ o $\mathbb{Z}H$-morfismo dado por:

$$\varphi_0(m)(g) = \begin{cases} gm, & g \in H, \\ 0, & g \notin H. \end{cases}$$

Pela Proposição 2.8, existe um único $\mathbb{Z}G$-morfismo $\varphi : \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M \to Hom_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)$ tal que $\varphi i = \varphi_0$. Seja E um sistema de representantes para as classes laterais de H em G. Tomando $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$ (resp. $Hom_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)$) como uma soma (resp. produto) de cópias de M, podemos identificar φ com a inclusão da soma direta no produto direto e desde que $(G : H) < \infty$, decorre que $Ind_H^G M \approx Coind_H^G M$. ■

Proposição 2.18 (Lema de Shapiro, (BROWN, 1982), Proposição 6.2, p. 73)**.** *Se $H \subseteq G$ e M é um $\mathbb{Z}H$-módulo, então $H_*(H, M) \approx H_*(G, Ind_H^G M)$ e $H^*(H, M) \approx H^*(G, Coind_H^G M)$.*

Demonstração: Se F é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, então F é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$, logo $H_*(H, M) = H_*(F \otimes_H M) \approx H_*(F \otimes_G (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M)) = H_*(F \otimes_G Ind_H^G M) = H_*(G, Ind_H^G M)$. Similarmente, $H^*(H, M) = H^*(\mathscr{H}om_H(F, M)) = H^*(Hom_H(F, M)) \approx H^*(Hom_G(F, Hom_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M))) = H^*(\mathscr{H}om_G(F, Coind_H^G M)) = H^*(G, Coind_H^G M)$. ■

Corolário 2.19 ((BROWN, 1982), Corolário 6.6, p. 73)**.** *Se A é um grupo abeliano, então $H_n(G, Ind_{\{1\}}^G A) = 0$ e $H^n(G, Coind_{\{1\}}^G A) = 0$ para todo $n > 0$.*

Demonstração: Se $n > 0$, então, pelo Lema de Shapiro, $H_n(G, Ind_{\{1\}}^G A) \approx H_n(\{1\}, A) = 0$ e $H^n(G, Coind_{\{1\}}^G A) \approx H^n(\{1\}, A) = 0$. ■

Mais geralmente, dizemos que um $\mathbb{Z}G$-módulo M é **$\mathbf{H}_*$-*acíclico*** se $H_n(G, M) = 0$ para todo $n > 0$. Similarmente, dizemos que um $\mathbb{Z}G$-módulo N é **$\mathbf{H}^*$-*acíclico*** se $H^n(G, N) = 0$ para todo $n > 0$.

Exemplo 2.20. $H_*(H, \mathbb{Z}) \approx H_*(G, Ind_H^G \mathbb{Z}) \approx H_*(G, \mathbb{Z}[G/H])$.

Exemplo 2.21. *Se $(G : H) < \infty$, então $H^*(H, \mathbb{Z}) \approx H^*(G, Coind_H^G \mathbb{Z}) \approx H^*(G, Ind_H^G \mathbb{Z}) \approx H^*(G, \mathbb{Z}[G/H])$ e $H^*(H, \mathbb{Z}H) \approx H^*(G, Coind_H^G \mathbb{Z}H) \approx H^*(G, Ind_H^G \mathbb{Z}H) \approx H^*(G, \mathbb{Z}G)$.*

Proposição 2.22 ((BROWN, 1982), Proposição 5.6, p. 69)**.** *Se M é um $\mathbb{Z}G$-módulo, então $Ind_H^G Res_H^G M \approx \mathbb{Z}[G/H] \otimes M$ (com a G-ação diagonal).*

2.3 MUDANÇA DE DIMENSÃO (*DIMENSION-SHIFTING*)

Dado um $\mathbb{Z}G$-módulo M, consideremos o morfismo injetor $\varphi : \overline{M} := \mathbb{Z}G \otimes M \to M$ dado por $\varphi(\alpha \otimes m) = \alpha m$ e $K = ker\ \varphi$. Tomando a sequência exata curta $0 \to K \to \overline{M} \to M \to 0$, obtemos a sequência exata longa em homologia $\cdots \to H_n(G, \overline{M}) \to H_n(G, M) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(G, K) \to H_{n-1}(G, \overline{M}) \to \cdots$. Como $H_i(G, \overline{M}) = 0$ para todo $n > 0$ ((BROWN, 1982), Corolário 6.6, p. 73), obtemos que:

$$H_n(G, M) \approx \begin{cases} H_{n-1}(G, K), & n > 1 \\ ker\ \{H_0(G, K) \to H_0(G, \overline{M})\}, & n = 1. \end{cases}$$

Portanto, desde que estejamos dispostos a alterar o módulo dos coeficientes, uma questão em H_n pode ser reduzida indutivamente a uma questão em H_0. De maneira similar, podemos considerar o morfismo sobrejetor $\Psi : M \to \overline{\overline{M}} := Hom(\mathbb{Z}G, M)$ dado por $\Psi(m)(\alpha) = \alpha m$ e $C = coker\ \Psi$. Então, obtemos que:

$$H^n(G,M) \approx \begin{cases} H^{n-1}(G,C), & n > 1 \\ coker\ \{H^0(G,C) \to H^0(G,\overline{\overline{M}})\}, & n = 1. \end{cases}$$

2.4 H_* E H^* COMO FUNTORES DE DUAS VARIÁVEIS

Consideremos a categoria $\mathscr{C}$ onde os objetos são pares (G,M) com G grupo e M $\mathbb{Z}G$-módulo e os morfismos são da forma $(\alpha, f) : (G,M) \to (G',M')$ com $\alpha : G \to G'$ morfismo de grupos e $f : M \to M'$ morfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos (tomando M' como $\mathbb{Z}G$-módulo via α). Sejam $(\alpha, f) : (G,M) \to (G',M')$ um morfismo de $\mathscr{C}$, F (resp. F') uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ (resp. $\mathbb{Z}G'$) e $\tau : F \to F'$ um homomorfismo de cadeia compatível com α, isto é, com $\tau(gx) = \alpha(g)\tau(x)$ para $g \in G$ e $x \in F$. Considerando $(\alpha, f)_* := (\tau \otimes f)_* : H_*(G,M) \to H_*(G',M')$ a aplicação em homologia induzida do homomorfismo de cadeia $\tau \otimes f : F \otimes_G M \to F' \otimes_{G'} M'$, obtemos H_* como funtor covariante da categoria $\mathscr{C}$ para a categoria dos grupos abelianos. Em particular, se $M = M'$ e $f = \mathrm{id}_{M'}$, temos que $\alpha_* := (\alpha, f)_* : H_*(G,M') \to H_*(G',M')$ fornece a seguinte decomposição:

$$H_*(G,M) \xrightarrow{H_*(G,f)} H_*(G,M') \xrightarrow{\alpha_*} H_*(G',M').$$

Exemplo 2.23. *Sejam $H \subseteq G$, M um $\mathbb{Z}G$-módulo, $g \in G$ e $c(g) : (H,M) \to (gHg^{-1}, M)$ o isomorfismo em $\mathscr{C}$ dado por $(h \mapsto ghg^{-1}, m \mapsto gm)$, chamado de* ***morfismo de conjugação****. Dada F uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ (que também será uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$ e sobre $\mathbb{Z}gHg^{-1}$) e $\tau : F \to F$ o homomorfismo de cadeia dado por $\tau(x) = gx$, obtemos $c(g)_*$ como a aplicação induzida por $F \otimes_H M \to F \otimes_{gHg^{-1}} M$, dada por $x \otimes m \mapsto gx \otimes gm$, isto é, $c(g)_*$ é a ação diagonal de g em $F \otimes M$ pela passagem dos quocientes.*

Para cada $z \in H_*(H,M)$, definimos $gz = c(g)_* z \in H_*(gHg^{-1}, M)$ e obtemos os seguintes resultados:

Proposição 2.24 ((BROWN, 1982), Proposição 8.1, p. 79)**.** *Se $h \in H$ e $z \in H_*(H,M)$, então $hz = z$.*

Demonstração: Se $h \in H$, então $c(h)_*$ é induzida por $F \otimes_H M \to F \otimes_H M$ dada por $x \otimes m \mapsto hx \otimes hm = xh^{-1} \otimes hm = x \otimes m$, isto é, $c(h)_* = \mathrm{id}_{H_*(H,M)}$. Portanto, $hz = c(h)_* z = z$. ■

Corolário 2.25 ((BROWN, 1982), Corolário 8.2, p. 79)**.** *Se $H \lhd G$ e M é um $\mathbb{Z}G$-módulo, então a ação de conjugação de G em (H,M) induz uma ação de G/H em $H_*(H,M)$.*

Demonstração: Se $g, g' \in G$ são tais que $gH = g'H$, então $g^{-1}g' \in H$, logo $g^{-1}g'z = z$, isto é, $gz = g'z$ para todo $z \in H_*(H, M)$. ■

Consideremos $\mathscr{D}$ a categoria cujos objetos são os mesmos de $\mathscr{C}$ e os morfismos são da forma $(\alpha, f) : (G, M) \to (G', M')$ com $\alpha : G \to G'$ morfismo de grupos e $f : M' \to M$ morfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos (tomando M' como $\mathbb{Z}G$-módulo via α). Sejam $(\alpha, f) : (G, M) \to (G', M')$ um morfismo de $\mathscr{D}$, F (resp. F') uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ (resp. $\mathbb{Z}G'$) e $\tau : F \to F'$ um homomorfismo de cadeia compatível com α. Considerando $(\alpha, f)^* : H^*(G', M') \to H^*(G, M)$ a aplicação em cohomologia induzida do homomorfismo de cocadeia $\mathscr{H}om(\tau, f) : \mathscr{H}om_{G'}(F', M') \to \mathscr{H}om_G(F, M)$, obtemos H^* como funtor contravariante da categoria $\mathscr{D}$ para a categoria dos grupos abelianos. Em particular, se $M = M'$ e $f = \mathrm{id}_M$, temos que $\alpha^* := (\alpha, f)^* : H^*(G', M') \to H^*(G, M')$ fornece a seguinte decomposição:

$$H^*(G', M') \xrightarrow{\alpha^*} H^*(G, M') \xrightarrow{H^*(G,f)} H^*(G, M).$$

Se $(\alpha, f) : (G, M) \to (G', M')$ é um morfismo de $\mathscr{C}$ com $f : M \to M'$ bijeção, então $(\alpha, f^{-1}) : (G, M) \to (G', M')$ é um morfismo de $\mathscr{D}$. Consideremos $\mathscr{C}_0$ a subcategoria de $\mathscr{C}$ que possui os mesmos objetos de $\mathscr{C}$ e morfismos (α, f) com f bijeção. Deste modo, $\mathscr{C}_0$ é isomorfa a uma subcategoria de $\mathscr{D}$. Haja vista que o morfismo de conjugação $c(g)$ está em $\mathscr{C}_0$, obtemos um isomorfismo $c(g)^* : H^*(gHg^{-1}, M) \to H^*(H, M)$ para cada $H \subseteq G, g \in G$ e $\mathbb{Z}G$-módulo M. Definimos $gz = (c(g)^*)^{-1}z \in H^*(gHg^{-1}, M)$.

Proposição 2.26 ((BROWN, 1982), Proposição 8.3, p. 80)**.** *Se $h \in H$ e $z \in H^*(H, M)$, então $hz = z$.*

Corolário 2.27 ((BROWN, 1982), Corolário 8.4, p. 80)**.** *Se $H \lhd G$ e M é um $\mathbb{Z}G$-módulo, então a ação de conjugação de G em (H, M) induz uma ação de G/H em $H^*(H, M)$.*

2.5 O MORFISMO *TRANSFER*

De acordo com a Seção 2.4, dados um $\mathbb{Z}G$-módulo M e $\alpha : H \hookrightarrow G$, existem $\alpha_* : H_*(H, M) \to H_*(G, M)$ e $\alpha^* : H^*(G, M) \to H^*(H, M)$. Dizemos que α_* é o **morfismo de correstrição** e o denotamos por cor_H^G. Similarmente, dizemos que α^* é o **morfismo de restrição** e o denotamos por res_H^G. Nesta seção, veremos que se $(G : H) < \infty$, então existem morfismos na direção contrária, chamados de morfismos ***transfer***.

Sejam M um $\mathbb{Z}G$-módulo e $H \subseteq G$. Pela Proposição 2.8, existe o morfismo (injetor) de $\mathbb{Z}G$-módulos:

$$\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M \to M \tag{2}$$

e pela Proposição 2.9, existe o morfismo (sobrejetor) de $\mathbb{Z}G$-módulos:

$$M \to Hom_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M). \tag{3}$$

Estes morfismos são chamados, respectivamente, de **injeção canônica** e **sobrejeção canônica**. Aplicando $H_*(G, -)$ em (2), obtemos, pelo Lema de Shapiro, o morfismo

$\alpha_* : H_*(H, M) \to H_*(G, M)$. Similarmente, aplicando $H^*(G, -)$ em (3) e utilizando o Lema de Shapiro, obtemos o morfismo $\alpha^* : H^*(G, M) \to H^*(H, M)$. Se $(G : H) < \infty$, então, pela Proposição 2.17, $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M \approx Hom_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)$, por conseguinte, aplicando $H^*(G, -)$ em (2) e $H_*(G, -)$ em (3), obtemos os morfismos *transfer*:

$$cor_H^G : H^*(H, M) \to H^*(G, M)$$

e

$$res_H^G : H_*(G, M) \to H_*(H, M).$$

Em nível zero, $cor_H^G : M^H \to M^G$ é dado por $cor_H^G z = \sum_{g \in G/H} gz$ e $res_H^G : M_G \to M_H$ é dado por $res_H^G \overline{z} = \sum_{g \in G/H} \overline{\overline{gz}}$ onde $\overline{z}$ (resp. $\overline{\overline{z}}$) denota a imagem de z em M_G (resp. M_H). Quando estiver evidente o contexto podemos utilizar apenas tr_G^H para denotar o morfismo de correstrição/restrição. Existem outras maneiras equivalentes de definir o morfismo *transfer* que podem ser encontradas com detalhes em ((BROWN, 1982), p. 81-82).

Proposição 2.28 ((BROWN, 1982), Proposição 9.5, p. 82)**.** *(i) Dados $K \subseteq H \subseteq G$ com $(G : K) < \infty$,*

$$cor_K^G = cor_H^G \circ cor_K^H \text{ e } res_K^G = res_K^H \circ res_H^G;$$

(ii) Dados $H \subseteq G$ com $(G : H) < \infty$ e $z \in H^*(G, M)$, $cor_H^G res_H^G z = (G : H)z$.

Demonstração: (i): Imediato. (ii): Para o caso cohomológico, em nível zero, $res_H^G : H^0(G, M) \approx M^G \hookrightarrow M^H \approx H^0(H, M)$ e $cor_H^G z = \sum_{g \in G/H} gz$, logo, dado $z \in M^G$, $cor_H^G res_H^G z = \sum_{g \in G/H} gz = \sum_{g \in G/H} z = (G : H)z$. Suponhamos que $cor_H^G res_H^G z = (G : H)z$ para todo $z \in H^n(G, M)$. Por mudança de dimensão $H^{n+1}(G, M) \overset{\theta}{\approx} H^n(G, C)$ onde $C = coker\, \Psi : M \to \overline{\overline{M}} = Hom(\mathbb{Z}G, M)$, por conseguinte, dado $z \in H^{n+1}(G, M)$, $cor_H^G res_H^G z = \theta^{-1} cor_H^G res_H^G \theta z = \theta^{-1}((G : H)\theta z) = (G : H)z$. O caso homológico é análogo. ■

2.6 PRODUTO *CUP* EM COHOMOLOGIA

Sejam M um $\mathbb{Z}G$-módulo (à esquerda) e M' um $\mathbb{Z}G'$-módulo (à esquerda). Então, $M \otimes M'$ é um $\mathbb{Z}[G \times G']$-módulo (à esquerda) por meio da ação $(g, g') \cdot (m \otimes m') = gm \otimes g'm'$. Além disso, se M é projetivo sobre $\mathbb{Z}G$ e M' é projetivo sobre $\mathbb{Z}G'$, então $M \otimes M'$ é projetivo sobre $\mathbb{Z}[G \times G']$. De fato, é suficiente verificar o caso em que $M = \mathbb{Z}G$ e $M' = \mathbb{Z}G'$, mas neste caso a afirmação decorre diretamente do isomorfismo $\mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}G' \approx \mathbb{Z}[G \times G']$.

Proposição 2.29 ((BROWN, 1982), Proposição 1.1, p. 107)**.** *Se $\varepsilon : P \to \mathbb{Z}$ e $\varepsilon' : P' \to \mathbb{Z}$ são resoluções projetivas de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e $\mathbb{Z}G'$, respectivamente, então $\varepsilon \otimes \varepsilon' : P \otimes P' \to \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G \times G']$.*

Demonstração: Como $P \otimes P'$ é um complexo de cadeia de $\mathbb{Z}[G \times G']$-módulos projetivos, é suficiente verificar que $P \otimes P'$ é exato. Seja $h : P \to P$ uma homotopia de contração, então $H : P \otimes P' \to P \otimes P'$, dada por $H(x \otimes y) = h(x) \otimes y$, é uma homotopia de contração.

$$\begin{aligned}
(\partial H + H\partial)(x \otimes y) &= \partial(h(x) \otimes y) + H(dx \otimes y + (-1)^{deg\ x} x \otimes d'y) \\
&= dh(x) \otimes y + (-1)^{deg\ h(x)} h(x) \otimes d'y + h(dx) \otimes y + (-1)^{deg\ x} h(x) \otimes d'y \\
&= (dh(x) + h(dx)) \otimes y \\
&= (dh + hd)x \otimes y \\
&= \mathrm{id}_{P \otimes P'}(x \otimes y).
\end{aligned}$$

Portanto, $\varepsilon \otimes \varepsilon' : P \otimes P' \to \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G \times G']$. ∎

Sejam M um $\mathbb{Z}G$-módulo, M' um $\mathbb{Z}G'$-módulo, $u \in \mathscr{H}om_G(P, M)$ e $v \in \mathscr{H}om_{G'}(P', M')$. Consideremos $u \times v \in \mathscr{H}om_{G \times G'}(P \otimes P', M \otimes M')$, definido por $\langle u \times v, x \otimes x' \rangle = (-1)^{deg\ v \cdot deg\ x} \langle u, x \rangle \otimes \langle v, x' \rangle$, isto é, $u \times v$ é o produto tensorial entre u e v. Haja vista que $\delta(u \times v) = \delta u \times v + (-1)^{deg\ u} u \times \delta v$ ((BROWN, 1982), Exercício 7, p. 10) e que $P \otimes P'$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G \times G']$ (Proposição 2.29), obtemos o produto induzido $H^p(G, M) \times H^q(G', M') \to H^{p+q}(G \times G', M \otimes M')$, chamado de **produto *cross***.

Definição 2.30. *Sejam $u \in H^p(G, M)$ e $v \in H^q(G, N)$. O **produto cup** entre u e v, denotado por $u \smile v$, é definido por $d^*(u \times v)$, onde $d : G \to G \times G$ é o morfismo diagonal e $M \otimes N$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo com a G-ação diagonal.*

Se $\varepsilon : P \to \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, então, pela Proposição 2.29, $\varepsilon \otimes \varepsilon : P \otimes P \to \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ em que G age diagonalmente em $P \otimes P$. Pelo Lema Fundamental da Álgebra Homológica (Lema A.36), existe um único (a menos de homotopia) homomorfismo de cadeia $\Delta : P \to P \otimes P$ que preserva o aumento (um homomorfismo de cadeia com esta propriedade é chamado de **aproximação da diagonal** para a resolução P), logo, dados $u \in \mathscr{H}om_G(P, M)$ e $v \in \mathscr{H}om_G(P, N)$, $[u] \smile [v] \in H^{p+q}(G, M \otimes N)$ pode ser tomado como $[(u \times v) \circ \Delta_{p,q}]$, onde $\Delta_{p,q}$ é dado pela composição $P_{p+q} \overset{\Delta_{p+q}}{\to} (P \otimes P)_{p+q} \overset{\pi_{p,q}}{\to} P_p \otimes P_q$.

Considerando o produto $H^*(G, \mathbb{Z}) \otimes H^*(G, \mathbb{Z}) \overset{\smile}{\to} H^*(G, \mathbb{Z})$ e observando que o elemento $1 \in H^0(G, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$ satisfaz $1 \smile u = u = u \smile 1$ para todo $u \in H^*(G, \mathbb{Z})$ (mais geralmente, para todo $u \in H^*(G, M)$, qualquer que seja o $\mathbb{Z}G$-módulo M), obtemos $H^*(G, \mathbb{Z})$ como anel graduado. Estas e outras propriedades do produto *cup* podem ser encontradas com detalhes em ((BROWN, 1982), p. 110-112).

Exemplo 2.31. *Sejam $G = \langle t \mid t^n = 1 \rangle \approx \mathbb{Z}_n$ e P a resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ dada, como no Exemplo 2.4, por $\cdots \to \mathbb{Z}G \overset{t-1}{\to} \mathbb{Z}G \overset{N}{\to} \mathbb{Z}G \overset{t-1}{\to} \mathbb{Z}G \overset{\varepsilon}{\to} \mathbb{Z} \to 0$,* *onde* $N = 1 + t + \cdots + t^{n-1}$*. Por meio desta resolução, obtemos que* $H^0(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$*,* $H^{2i-1}(G,\mathbb{Z}) = 0$ *e* $H^{2i}(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n$*. Em particular,* $H^2(G,\mathbb{Z}) = \langle\alpha\rangle$*, onde* $\alpha = [u]$ *com* $u : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}; 1 \mapsto 1$*. De acordo com ((BROWN, 1982), p. 108), existe uma aproximação da diagonal* $\Delta : P \to P \otimes P$ *dada em cada componente* (p,q) *por:*

$$\Delta_{p,q} = \begin{cases} 1 \otimes 1, & \textit{se } p \textit{ é par;} \\ 1 \otimes t, & \textit{se } p \textit{ ímpar e } q \textit{ par;} \\ \sum_{0 \le i,j \le n-1} t^i \otimes t^j, & \textit{se } p \textit{ ímpar e } q \textit{ ímpar.} \end{cases}$$

Por conseguinte, $(u \smile u)(1) = ((u \times u) \circ \Delta_{2,2})(1) = (u \times u)(1 \otimes 1) = u(1) \otimes u(1) = 1 \otimes 1$*. Portanto,* $\langle\alpha^2\rangle = H^4(G,\mathbb{Z})$*. Mais geralmente,* $H^{2i} = \langle\alpha^i\rangle$*.*

2.7 INTERPRETAÇÃO TOPOLÓGICA PARA $H_*(G,M)$ E $H^*(G,M)$

Nesta seção apresentamos uma maneira alternativa para o cálculo da homologia (resp. cohomologia) de um grupo G em função da homologia (resp. cohomologia) de um $K(G,1)$-complexo.

Lema 2.32 ((BROWN, 1982), Proposição 2.4, p. 34)**.** *Sejam* X *um* G*-complexo livre e* X/G *o* CW*-complexo das órbitas de* X*. Então,* $\big(C_*(X/G), d\big) \approx \big(C_*(X)_G, \bar{d}\big)$*.*

Demonstração: Seja $p : X \to X/G$ a projeção canônica dada por $p(x) = G(x)$. Para cada $n \ge 0$, p induz o homomorfismo de grupos abelianos $p_n : C_n(X) \to C_n(X/G)$ definido por $p_n(\sum r_i\sigma_i^n) = \sum r_i G(\sigma_i^n)$. Dado que $p_n(g\cdot\sigma - \sigma) = p_n(g\cdot\sigma) - p_n(\sigma) = G(g\cdot\sigma) - G(\sigma) = G(\sigma) - G(\sigma) = 0$ para todo $g \in G$ e toda n-célula $\sigma \in X_n$, decorre que $I_n := \langle g\cdot\sigma - \sigma \mid g \in G \text{ e } \sigma \in C_n(X)\rangle \subseteq ker\, p_n$. Assim, a aplicação $\varphi : C_n(X)_G = C_n(X)/I_n \to C_n(X/G)$ definida por $\varphi([\sum r_i\sigma_i^n]) = p_n(\sum r_i\sigma_i^n)$ está bem definida. Observamos que φ é sobrejetora, pois $\sum r_i G(\sigma_i) = \varphi\Big(\Big[\sum r_i\sigma_i\Big]\Big)$. Também, φ é injetora, pois se $[\alpha] = [\beta]$, então $\alpha - \beta \in I_n$, logo $\varphi([\alpha]) = \varphi([\beta])$. Portanto $C_n(X/G) \approx C_n(X)_G$ para todo $n \ge 0$. Consequentemente, $C_*(X/G) \approx C_*(X)_G$ como complexos de cadeia, pois φ é um homomorfismo de cadeia, isto é, $d \circ \varphi = \varphi \circ \bar{d}$. ■

Proposição 2.33 ((BROWN, 1982), Proposição 4.1, p. 36)**.** *Sejam* X *um* $K(G,1)$*-complexo e* M *um* $\mathbb{Z}G$*-módulo trivial. Então,* $H_*(G,M) \approx H_*(X,M)$ *e* $H^*(G,M) \approx H^*(X,M)$*.*

Demonstração: De fato, consideremos o complexo de cadeia celular aumentado do recobrimento universal $\widetilde{X}$ de X, $C(\widetilde{X}) : \cdots \longrightarrow C_2(\widetilde{X}) \longrightarrow C_1(\widetilde{X}) \longrightarrow C_0(\widetilde{X}) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$.

Dado que $C(\widetilde{X})$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e M é um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial,

$$\begin{array}{rcl} H_*(G,M) & = & Tor_*^G(\mathbb{Z},M) \\ & = & H_*(C(\widetilde{X})\otimes_G M) \\ & \approx & H_*(C(\widetilde{X})_G \otimes M) \\ & \overset{Lema 2.32}{\approx} & H_*(C(\widetilde{X}/G)\otimes M) \\ & \overset{X\approx\widetilde{X}/G}{\approx} & H_*(C(X)\otimes M) \\ & = & H_*(X,M). \end{array}$$

Similarmente,

$$\begin{array}{rcl} H^*(G,M) & = & Ext_G^*(\mathbb{Z},M) \\ & = & H^*(\mathscr{H}\!om_G(C(\widetilde{X}),M)) \\ & = & H^*(Hom_G(C(\widetilde{X}),M)) \\ & \approx & H^*(Hom(C(\widetilde{X})_G,M)) \\ & \overset{Lema 2.32}{\approx} & H^*(Hom(C(\widetilde{X}/G),M)) \\ & \overset{X\approx\widetilde{X}/G}{\approx} & H^*(Hom(C(X),M)) \\ & = & H^*(X,M). \end{array}$$

■

Corolário 2.34. *Se X é um $K(G,1)$-complexo, então $H_*(G,\mathbb{Z})\approx H_*(X)$ e $H^*(G,\mathbb{Z})\approx H^*(X)$.*

Exemplo 2.35. *De acordo com o Exemplo B.19, S^1 é um $K(\mathbb{Z},1)$-complexo. Logo, se M é um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial, então, pela Proposição 2.33 e pelo Exemplo 2.3,*

$$H^n(S^1,M)\approx H^n(\mathbb{Z},M)\approx \begin{cases} M^{\mathbb{Z}}=M, & se \quad n=0,\\ M_{\mathbb{Z}}=M, & se \quad n=1,\\ 0, & se \quad n\geq 2.\end{cases}$$

Exemplo 2.36. *De acordo com o Exemplo B.20, $X=\bigvee_{i\in I}S_i^1$ é um $K(G,1)$-complexo onde $G=F(I)$. Logo, pela Proposição 2.33,*

$$H_n(X,\mathbb{Z})\approx H_n(F(I),\mathbb{Z})\approx \begin{cases} \mathbb{Z}, & se \quad n=0,\\ \bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}, & se \quad n=1,\\ 0, & se \quad n\geq 2.\end{cases}$$

3 SEQUÊNCIAS ESPECTRAIS

Se C é um complexo de cadeia e $C' \subseteq C$, então $0 \to C' \to C \to C/C' \to 0$ é uma sequência exata curta de complexos de cadeia. Esta sequência induz uma sequência exata longa em homologia que fornece informações de $H_*(C)$ em termos de $H_*(C')$ e $H_*(C/C')$. Mais geralmente, o que faremos neste capítulo é considerar uma sequência de subcomplexos $\{F_pC\}_{p\in\mathbb{Z}}$ com $F_{p-1}C \subseteq F_pC$ de modo a obter informações de $H_*(C)$ em termos de $H_*(F_pC/F_{p-1}C)$.

3.1 SEQUÊNCIA ESPECTRAL ASSOCIADA A UM COMPLEXO FILTRADO

Definição 3.1. *Uma **filtração crescente** de um R-módulo M é uma sequência $(F_pM)_{p\in\mathbb{Z}}$ de R-submódulos de M, tal que $F_pM \subseteq F_{p+1}M$. Dizemos que a filtração é **finita** se $F_pM = 0$ para p suficientemente pequeno e $F_qM = M$ para q suficientemente grande.*

Definição 3.2. *Dada uma filtração $(F_pM)_{p\in\mathbb{Z}}$ de M, o **módulo graduado associado** GrM é definido por $Gr_pM = F_pM/F_{p-1}M$.*

Lema 3.3 ((BROWN, 1982), Lema 2.1, p. 162)**.** *Sejam M e M' módulos com filtrações finitas e $f : M \to M'$ uma aplicação que preserva filtração, isto é, $f(F_pM) \subseteq F_pM'$. Se $Grf : GrM \to GrM'$ (onde Grf é a aplicação induzida por f) é um isomorfismo, então f é um isomorfismo.*

Demonstração: Sejam $0 = F_pM \subseteq \cdots \subseteq F_qM = M$ e $0 = F_{p'}M' \subseteq \cdots \subseteq F_{q'}M' = M'$ filtrações finitas de M e M'. Afirmamos que $p = p'$ e $q = q'$. Se $F_{p+i}M = F_{p+i+1}M$, então $F_{p+i}M' = F_{p+i+1}M'$, pois $0 = Gr_{p+i+1}M \approx Gr_{p+i+1}M'$. Assumiremos que $F_{p+i}M \subsetneq F_{p+i+1}M$ e que $F_{p'+i}M' \subsetneq F_{p'+i+1}M'$. Se $p > p'$, então $F_{p'+1}M = 0$, pois $p \geq p' + 1$, logo $0 = Gr_{p'+1}M \approx Gr_{p'+1}M'$, isto é, $F_{p'}M' = F_{p'+1}M'$, que é um absurdo. Por simetria, $p \not< p'$. Similarmente, se $q > q'$, então $F_{q-1}M' = M'$, pois $q - 1 \geq q'$, logo $0 = Gr_qM' \approx Gr_qM$, isto é, $F_{q-1}M = F_qM$, que é um absurdo. Por simetria, $q' \not< q$. Portanto $p = p'$ e $q = q'$. Consideremos o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Gr_{p+1}M \arrow[r] \arrow[d] & F_{p+2}M \arrow[r] \arrow[d] & Gr_{p+2}M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Gr_{p'+1}M' \arrow[r] & F_{p'+2}M' \arrow[r] & Gr_{p'+2}M' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Dado que $Gr_{p+1}M \approx Gr_{p'+1}M'$ e $Gr_{p+2}M \approx Gr_{p'+2}M'$, decorre que $F_{p+2}M \approx F_{p'+2}M'$. Repetindo este processo até o q-ésimo nível, concluímos que $f : M \to M'$ é um isomorfismo.

■

Definição 3.4. *Seja M um módulo graduado filtrado com filtração $\{F_pM_n\}$ em cada M_n e com submódulo graduado F_pM. O **módulo bigraduado associado** a M é definido* *por* $Gr_{p,q}M = F_pM_{p+q}/F_{p-1}M_{p+q}$. *Dizemos que um elemento em* $Gr_{p,q}M$ *tem* ***grau de filtração*** p, ***grau complementar*** q *e* ***grau total*** $p+q$.

Seja (C, ∂) um complexo de cadeia ***finitamente filtrado***, isto é, com cada $\{F_pC_n\}_{p\in\mathbb{Z}}$ filtração finita de C_n. Considerando F_pC como um subcomplexo de diferencial $\partial'_n = \partial_n|_{F_pC_n}$, obtemos uma filtração para $H_n(C)$ dada por $F_pH_n(C) := im\,\{i_* : H_n(F_pC) \to H_n(C)\}$, onde i_* é a aplicação induzida pela inclusão $i : F_pC \hookrightarrow C$. Apresentamos a seguir uma caracterização alternativa para esta filtração.

Proposição 3.5 ((BROWN, 1982), p. 162)**.** $F_pH_n(C) = \dfrac{F_pC_n \cap Z}{F_pC_n \cap B}$, *onde* $Z = ker\,\partial_n$ *e* $B = im\,\partial_{n+1}$.

Demonstração: Dado que $ker\,\partial'_n = F_pC_n \cap Z$ e $ker\,i_* = \{\omega + im\,\partial'_{n+1} \mid \omega \in B \text{ e } \omega \in F_pC_n \cap Z\} = (B \cap (F_pC_n \cap Z))/im\,\partial'_{n+1} = F_pC_n \cap B/im\,\partial'_{n+1}$, decorre que:

$$F_pH_n(C) = im\,i_* \approx \frac{H_n(F_pC)}{ker\,i_*} = \frac{\dfrac{F_pC_n \cap Z}{im\,\partial'_{n+1}}}{\dfrac{F_pC_n \cap B}{im\,\partial'_{n+1}}} \approx \frac{F_pC_n \cap Z}{F_pC_n \cap B}.$$

■

Proposição 3.6 ((BROWN, 1982), p. 162)**.** $Gr_{p,q}H(C) \approx \dfrac{F_pC_{p+q} \cap Z}{F_pC_{p+q}B + F_{p-1}C_{p+q} \cap Z}$.

Demonstração: Pelo Teorema do Isomorfismo de Noether,

$$F_{p-1}H_{p+q}(C) = \frac{F_{p-1}C_{p+q} \cap Z}{F_{p-1}C_{p+q} \cap B} \approx \frac{F_pC_{p+q} \cap B + F_{p-1}C_{p+q} \cap Z}{F_pC_{p+q} \cap B}.$$

Dado que $F_pC_{p+q} \cap B \subseteq F_pC_{p+q} \cap B + F_{p-1}C_{p+q} \cap Z$,

$$Gr_{p,q}H(C) = \frac{F_pH_{p+q}(C)}{F_{p-1}H_{p+q}(C)} \approx \frac{\dfrac{F_pC_{p+q} \cap Z}{F_pC_{p+q} \cap B}}{\dfrac{F_pC_{p+q} \cap B + F_{p-1}C_{p+q} \cap Z}{F_pC_{p+q} \cap B}} \approx \frac{F_pC_{p+q} \cap Z}{F_pC_{p+q} \cap B + F_{p-1}C_{p+q} \cap Z}.$$

■

Definição 3.7. *Seja* (C, ∂) *um complexo de cadeia filtrado em que cada* C_n *é filtrado por* $\{F_pC_n\}$. *Consideremos os submódulos* $Z^r_{p,q} = F_pC_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-r}C_{p+q-1})$, $Z^\infty_{p,q} = F_pC_{p+q} \cap Z$, $B^r_{p,q} = F_pC_{p+q} \cap \partial(F_{p+r-1}C_{p+q+1})$ *e* $B^\infty_{p,q} = F_pC_{p+q} \cap B$, *onde* $Z = ker\,\partial_{p+q}$, $B = im\,\partial_{p+q+1}$ *e* $r \geq 0$. *A* ***sequência espectral*** *associada ao complexo* C, *denotada por* $\{E^r_{p,q}\}$, *é definida por:*

$$E^r_{p,q} := \frac{Z^r_{p,q}}{B^r_{p,q} + Z^{r-1}_{p-1,q+1}} = \frac{Z^r_{p,q}}{B^r_{p,q} + F_{p-1}C_{p+q} \cap Z^r_{p,q}}.$$

Analogamente:

$$E^\infty_{p,q} := \frac{Z^\infty_{p,q}}{B^\infty_{p,q} + Z^\infty_{p-1,q+1}} = \frac{F_pC_{p+q} \cap Z}{F_pC_{p+q} \cap B + F_{p-1}C_{p+q} \cap Z} \approx Gr_{p,q}H(C).$$

Observação 3.8. $B^0_{p,q} \subseteq B^1_{p,q} \subseteq \cdots \subseteq B^\infty_{p,q} \subseteq Z^\infty_{p,q} \subseteq \cdots \subseteq Z^1_{p,q} \subseteq Z^0_{p,q} = F_pC_{p+q}$.

Definição 3.9. *Dizemos que $\{E^r_{p,q}\}$ é convergente se, para todo par (p,q), existe um r suficientemente grande tal que $E^{r+i}_{p,q} = E^\infty_{p,q}$ para todo $i \geq 0$.*

Dado que $E^\infty_{p,q} \approx Gr_{p,q}H(C)$, se a sequência espectral converge, então seu limite é $Gr_{p,q}H(C)$. Nos referimos a esta convergência dizendo que a sequência espectral converge para $H(C)$ e escrevemos $E^r_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}(C)$ ou simplesmente $E^r \Rightarrow H(C)$. A seguir, mostramos que toda sequência espectral associada a um complexo de cadeia finitamente filtrado é convergente.

Teorema 3.10. *Se (C,∂) é um complexo de cadeia finitamente filtrado, então a sequência espectral associada $\{E^r_{p,q}\}$ é convergente.*

Demonstração: Sejam $\{F_mC_{p+q-1}\}$ e $\{F_mC_{p+q+1}\}$ filtrações de C_{p+q-1} e C_{p+q+1}. Existem m' e m'' tais que $F_mC_{p+q-1} = 0$ para $m \leq m'$ e $F_mC_{p+q+1} = C_{p+q+1}$ para $m \geq m''$. Tomando $r = \max\{p-m', m''-p+1\}$ e $i \geq 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
E^{r+i}_{p,q} &= \frac{Z^{r+i}_{p,q}}{B^{r+i}_{p,q} + F_{p-1}C_{p+q} \cap Z^{r+i}_{p,q}} \\
&= \frac{F_pC_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-r-i}C_{p+q-1})}{F_pC_{p+q} \cap \partial(F_{p+r+i-1}C_{p+q+1}) + F_{p-1}C_{p+q} \cap (F_pC_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-r-i}C_{p+q+1}))} \\
&= \frac{F_pC_{p+q} \cap \partial^{-1}(0)}{F_pC_{p+q} \cap \partial(C_{p+q+1}) + F_{p-1}C_{p+q} \cap (F_pC_{p+q} \cap \partial^{-1}(0))} \\
&= \frac{F_pC_{p+q} \cap Z}{F_pC_{p+q} \cap B + F_{p-1}C_{p+q} \cap (F_pC_{p+q} \cap Z)} \\
&= \frac{Z^\infty_{p,q}}{B^\infty_{p,q} + F_{p-1}C_{p+q} \cap Z^\infty_{p,q}} = E^\infty_{p,q}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\{E^r_{p,q}\}$ é convergente. ■

O operador bordo ∂ de um complexo de cadeia C induz um diferencial $d^r_{p,q}$ em $E^r_{p,q}$ de bigrau $(-r, r-1)$, pois:

$$\begin{aligned}
\partial(Z^r_{p,q}) &= \partial(F_pC_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-r}C_{p+q-1})) \\
&\subseteq F_{p-r}C_{p+q-1} \cap \partial(F_pC_{p+q}) \\
&= B^{r+1}_{p-r,q+r-1} \subseteq Z^r_{p-r,q+r-1},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\partial(B^r_{p,q} + Z^{r-1}_{p-1,q+1}) &= \partial(B^r_{p,q}) + \partial(Z^{r-1}_{p-1,q+1}) \\
&= \partial(F_pC_{p+q} \cap \partial(F_{p+r-1}C_{p+q+1})) + \partial(Z^{r-1}_{p-1,q+1}) \\
&\subseteq \partial(F_pC_{p+q}) \cap \partial\partial(F_{p+r-1}C_{p+q+1}) + B^r_{p-r,q+r-1} = B^r_{p-r,q+r-1}.
\end{aligned}$$

Proposição 3.11 ((BROWN, 1982), p. 163)**.** *Seja $\{E^r_{p,q}\}$ a sequência espectral associada ao complexo de cadeia filtrado (C,∂). Então, $E^0_{p,q} = Gr_{p,q}C$ e $E^1_{p,q} \approx H_{p+q}(F_pC/F_{p-1}C)$.*

Demonstração: Dado que $\partial^{-1}(F_pC_{p+q-1}) = F_pC_{p+q}$ e $\partial(F_{p-1}C_{p+q+1}) \subseteq F_{p-1}C_{p+q}$,

$$\begin{aligned} E^0_{p,q} &= \frac{Z^0_{p,q}}{B^0_{p,q} + F_{p-1}C_{p+q} \cap Z^0_{p,q}} \\ &= \frac{F_pC_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_pC_{p+q-1})}{F_pC_{p+q} \cap \partial(F_{p-1}C_{p+q+1}) + F_{p-1}C_{p+q} \cap (F_pC_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_pC_{p+q-1}))} \\ &= \frac{F_pC_{p+q}}{F_pC_{p+q} \cap F_{p-1}C_{p+q}} \\ &= \frac{F_pC_{p+q}}{F_{p-1}C_{p+q}} = Gr_{p,q}C. \end{aligned}$$

Consideremos $F_pC/F_{p-1}C$ com operador bordo $d^0_{p,q} : E^0_{p,q} \to E^0_{p,q-1}$ induzido por ∂. Dado que $ker\ d^0_{p,q} = F_pC_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-1}C_{p+q-1})/F_{p-1}C_{p+q}$ e $im\ d^0_{p,q+1} = (\partial(F_pC_{p+q+1}) + F_{p-1}C_{p+q})/F_{p-1}C_{p+q}$, obtemos

$$\begin{aligned} H_{p+q}\left(\frac{F_pC}{F_{p-1}C}\right) &= \frac{ker\ d^0_{p,q}}{im\ d^0_{p,q+1}} \\ &\approx \frac{F_pC_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-1}C_{p+q-1})}{\partial(F_pC_{p+q+1}) + F_{p-1}C_{p+q}} \\ &= \frac{F_pC_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-1}C_{p+q-1})}{F_pC_{p+q} \cap \partial(F_pC_{p+q+1}) + F_{p-1}C_{p+q} \cap (F_pC_{p+q} \cap \partial^{-1}(F_{p-1}C_{p+q-1}))} \\ &= \frac{Z^1_{p,q}}{B^1_{p,q} + F_{p-1}C_{p+q}Z^1_{p,q}} = E^1_{p,q}. \end{aligned}$$

■

Observação 3.12. *Para cada p fixo,* $E^1_{p,q} \approx H_q(E^0_{p,*})$.

Observação 3.13. *De acordo com a Proposição 3.11,* $E^1_{p,q} \approx H_{p+q}(F_pC/F_{p-1}C) = H_{p+q}(E^0)$. *Mais geralmente,* $E^{r+1}_{p,q} \approx H_{p+q}(E^r)$.

Teorema 3.14 ((HILTON; WYLIE, 1965), Teorema 10.2.5, p. 402)**.** $E^{r+1}_{p,q} \approx H_{p+q}(E^r)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} H_{p+q}(E^r) &= \frac{ker\ d^r_{p,q}}{im\ d^r_{p+r,q-r+1}} \\ &= \frac{\dfrac{Z^r_{p,q} \cap \partial^{-1}(B^r_{p-r,q+r-1} + Z^{r-1}_{p-r-1,q+r})}{B^r_{p,q} + Z^{r-1}_{p-1,q+1}}}{\dfrac{\partial(Z^r_{p+r,q-r+1}) + (B^r_{p,q} + Z^{r-1}_{p-1,q+1})}{B^r_{p,q} + Z^{r-1}_{p-1,q+1}}} \\ &\approx \frac{Z^r_{p,q} \cap (\partial^{-1}B^r_{p-r,q+r-1} + \partial^{-1}Z^{r-1}_{p-r-1,q+r})}{B^{r+1}_{p,q} + (B^r_{p,q} + Z^{r-1}_{p-1,q+1})} \\ &= \frac{Z^r_{p,q} \cap (Z^{r-1}_{p-1,q+1} + \partial^{-1}F_{p-r-1}C_{p+q-1})}{B^{r+1}_{p,q} + Z^{r-1}_{p-1,q+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{Z^{r-1}_{p-1,q+1} + Z^{r+1}_{p,q}}{B^{r+1}_{p,q} + Z^{r-1}_{p-1,q+1}} \\ &\approx \frac{Z^{r+1}_{p,q}}{B^{r+1}_{p,q} + (Z^{r+1}_{p,q} \cap Z^{r-1}_{p-1,q+1})} \\ &= \frac{Z^{r+1}_{p,q}}{B^{r+1}_{p,q} + Z^{r}_{p-1,q+1}} \\ &= E^{r+1}_{p,q}. \end{aligned}$$

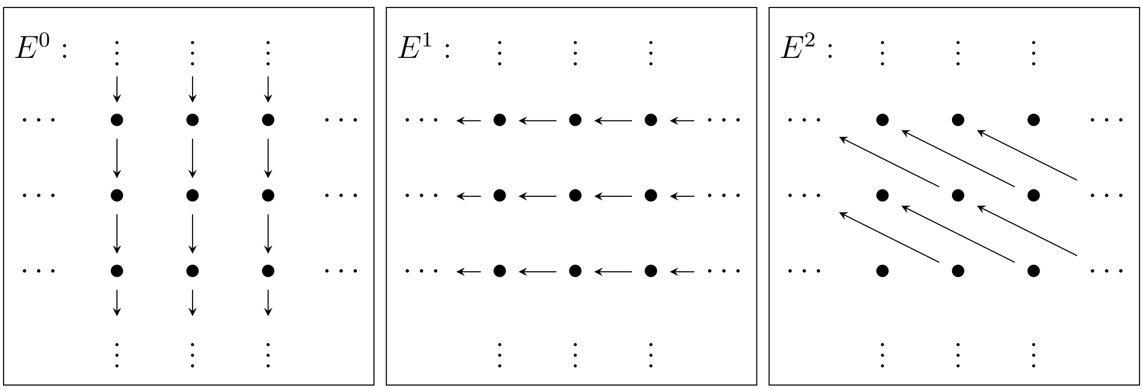
■

Proposição 3.15 ((BROWN, 1982), Proposição 2.6, p. 163)**.** *Sejam C e C' complexos de cadeia finitamente filtrados e $\tau : C \to C'$ um homomorfismo de cadeia que preserva filtração. Se a aplicação induzida das sequências espectrais $E^r(\tau) : E^r(C) \to E^r(C')$ é um isomorfismo para algum r, então $H(\tau) : H(C) \to H(C')$ é um isomorfismo.*

Demonstração: Dado que $E^r(\tau) : E^r(C) \to E^r(C')$ é um isomorfismo, decorre que $H(E^r(\tau)) : H(E^r(C)) \to H(E^r(C'))$ é um isomorfismo, logo, pelo Teorema 3.14, $E^{r+1}(\tau) : E^{r+1}(C) \to E^{r+1}(C')$ é um isomorfismo. Assim, $E^\infty(C) \approx GrH(C) \approx GrH(C') \approx E^\infty(C')$. Portanto, pelo Lema 3.3, $H(\tau) : H(C) \to H(C')$ é um isomorfismo. ■

O módulo bigraduado E^r pode ser representado por uma página da qual todo termo $E^r_{p,q}$ é indexado ao par ordenado (p,q) e cada diferencial $d^r_{p,r} : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ é representado por um vetor de (p,q) em $(p-r, q+r-1)$. O conjunto destas páginas compõe a sequência espectral, que pode ser pensada como um livro. Representamos abaixo (Figura 1) as páginas E^0, E^1 e E^2.

Figura 1 – Páginas E^0, E^1 e E^2



Fonte: Autor.

Proposição 3.16 ((MACLANE, 1967), p. 320)**.** *Se $\{E^r_{p,q}\}$ é de primeiro quadrante* [1]*, então, para $r > max\{p, q+1\}$, $E^{r+1}_{p,q} \approx E^r_{p,q}$.*

[1] A sequência espectral $\{E^r_{p,q}\}$ é de **primeiro quadrante** se $E^r_{p,q} = 0$ para $p < 0$ ou $q < 0$, qualquer que seja r.

Demonstração: Dado que $r > max\{p, q + 1\}$, $ker\ d^r_{p,q} = E^r_{p,q}$ e $im\ d^r_{p+r,q-r+1} = 0$, logo $E^{r+1}_{p,q} \approx H_{p+q}(E^r) = E^r_{p,q}$. ■

Definição 3.17. *Uma filtração F de um módulo graduado M é* ***canonicamente limitada*** *se $F_{-1}M_n = 0$ e $F_nM_n = M_n$ para cada M_n.*

Proposição 3.18 ((MACLANE, 1967), Teorema 3.3, p. 330)**.** *Sejam C um complexo de cadeia e F uma filtração canonicamente limitada de C. Então, a sequência espectral associada a F é de primeiro quadrante, a filtração induzida em $H_*(C)$ é canonicamente limitada e $E^\infty_{p,n-p} \approx F_pH_n(C)/F_{p-1}H_n(C)$.*

Demonstração: Pela Proposição 3.11, $E^0_{p,q} = F_pC_{p+q}/F_{p-1}C_{p+q}$. Se $p < 0$, então $E^0_{p,q} = 0$. Se $q < 0$, então $E^0_{p,q} = 0$, pois $F_pC_{p+q} = F_{p-1}C_{p+q}$. Logo, pelo Teorema 3.14, $E^r_{p,q} = 0$. Portanto, $\{E^r_{p,q}\}$ é de primeiro quadrante. Pela Proposição 3.5, $F_pH_n(C) = F_pC_n \cap Z/F_pC_n \cap B$, onde $Z = ker\ \partial_n$ e $B = im\ \partial_{n+1}$. Então, $F_{-1}H_n(C) = 0$ e $F_nH_n(C) = Z/B = H_n(C)$. Finalmente, $E^\infty_{p,n-p} \approx Gr_{p,n-p}H(C) = F_pH_n(C)/F_{p-1}H_n(C)$. ■

3.2 COMPLEXO DUPLO

Definição 3.19. *Um* ***complexo duplo*** *é um módulo bigraduado $C = (C_{p,q})_{p,q\in\mathbb{Z}}$ com um diferencial ∂' de bigrau $(-1, 0)$ e um diferencial ∂'' de bigrau $(0, -1)$ tal que $\partial'\partial'' = \partial''\partial'$.*

Definição 3.20. *Seja C um complexo duplo. O* ***complexo total*** *associado a C, denotado por TC, é dado por $(TC)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q}$ e tem diferencial ∂ dado por $\partial|_{C_{p,q}} = \partial' + (-1)^p\partial''$.*

Exemplo 3.21. *Sejam (C, ∂_C) e $(C', \partial_{C'})$ dois complexos de cadeia. O produto tensorial $C \otimes C'$ é o complexo total obtido do complexo duplo $C''_{p,q} = C_p \otimes C'_q$ com diferenciais $\partial' = \partial_C \otimes 1$ e $\partial'' = (-1)^p 1 \otimes \partial_{C'}$.*

Seja TC o complexo total associado ao complexo duplo C. Filtramos TC por considerar $F_p(TC)_n = \bigoplus_{i\leq p} C_{i,n-i}$, chamada ***filtração por coluna***. Pela Proposição 3.11, $E^0_{p,q} = F_p(TC)_{p+q}/F_{p-1}(TC)_{p+q} = C_{p,q}$, logo $d^0_{p,q} = \pm\partial''$, pois $\partial'(C_{p,q}) \subseteq C_{p-1,q} \subseteq F_{p-1}(TC)_{p+q-1}$. Dado que $E^1_{p,q} \approx H_{p+q}(E^0) = ker\ d^0_{p,q}/im\ d^0_{p,q+1} = ker\ \partial''/im\ \partial''$, decorre que $E^1_{p,q} = H_q(C_{p,*})$, isto é, E^1 é a homologia vertical de C. Haja vista que $d^1_{p,q} : E^1_{p,q} \to E^1_{p-1,q}$ é a aplicação induzida por $\partial' : C_{p,*} \to C_{p-1,*}$, pois $\partial(\omega) = \partial'(\omega) + (-1)^p\partial''(\omega) = \partial'(\omega)$ para todo $\omega + im\ \partial'' \in E^1_{p,q}$ e $E^2_{p,q} \approx H_{p+q}(E^1)$, decorre que $E^2_{p,q} \approx H_p(H_q(C))$, isto é, E^2 é a homologia horizontal da homologia vertical de C.

Similarmente, obtemos uma filtração de TC considerando $F'_p(TC)_n = \bigoplus_{j\leq p} C_{n-j,j}$, chamada ***filtração por linha***. Neste caso, $E^0_{p,q} = C_{q,p}$ e $d^0_{p,q} = \partial'$, pois $\partial''(C_{q,p}) \subseteq C_{q,p-1} \subseteq F'_{p-1}(TC)_{p+q-1}$. Então, $E^1_{p,q} \approx H_{p+q}(E^0) = ker\ d^0_{p,q}/im\ d^0_{p,q+1} = ker\ \partial'/im\ \partial' = H_q(C_{*,p})$, isto é, E^1 é a homologia horizontal de C. Similarmente, o diferencial $d^1_{p,q} : E^1_{p,q} \to E^1_{p-1,q}$

é a aplicação induzida de $\partial'' : C_{*,p} \to C_{*,p-1}$ (a menos de sinal) e E^2 a homologia vertical da homologia horizontal de C.

Proposição 3.22 ((MC CLEARY, 2001), p. 49)**.** *Sejam C um complexo duplo de primeiro quadrante, isto é, com $C_{p,q} = 0$ se $p < 0$ ou $q < 0$, e TC o complexo total associado. Então, as sequências espectrais associadas à filtração por linha e à filtração por coluna de TC convergem para $H_*(TC)$.*

Demonstração: Como C é um complexo de primeiro quadrante, $F_{-1}(TC)_n = F'_{-1}(TC)_n = 0$ e $F_n(TC)_n = \bigoplus_{i \leq n} C_{i,n-i} = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q} = \bigoplus_{j \leq n} C_{n-j,j} = F'_n(TC)_n$, ou seja, ambas as filtrações são canonicamente limitadas. Pelo Teorema 3.10, as sequências espectrais convergem para $H_*(TC)$. ∎

Observação 3.23. *Pela Proposição 3.18, as sequências espectrais associadas são de primeiro quadrante. Além disso, embora ambas as sequências espectrais tenham o mesmo limite $H_*(TC)$, em geral não tem o mesmo termo E^∞.*

3.3 HOMOLOGIA DE UM GRUPO COM COEFICIENTES EM UM COMPLEXO DE CADEIA

Sejam G um grupo, $C = (C_n)_{n \geq 0}$ um complexo de cadeia de $\mathbb{Z}G$-módulos e F uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Dado que $F \otimes_G C$ é o complexo total do complexo duplo dos grupos abelianos $C_{p,q} = F_p \otimes_G C_q$ (que é de primeiro quadrante), pela Proposição 3.22, as sequências espectrais associadas às filtrações por linha e por coluna convergem para $H_*(F \otimes_G C) = H_*(G, C)$, chamada de ***homologia de G com coeficientes em C***. Se C tem apenas o módulo M na dimensão 0, então $H_*(G, C) = H_*(G, M)$.

Ao considerarmos a sequência espectral associada à filtração por coluna de $F \otimes_G C$, $E^0_{p,q} = F_p \otimes_G C_q$ e $E^1_{p,q} \approx H_q(F_p \otimes_G C_*) \approx F_p \otimes_G H_q(C)$, pois, por F_p ser projetivo, a sequência $0 \to F_p \otimes_G im\,\partial_{q+1} \to F_p \otimes_G ker\,\partial_q \to F_p \otimes_G H_q(C) \to 0$ é exata, logo $F_p \otimes_G H_q(C) \approx F_p \otimes_G ker\,\partial_q / F_p \otimes_G im\,\partial_{q+1} = H_q(F_p \otimes_G C_*)$. Por conseguinte,

$$E^2_{p,q} \approx H_p(H_q(F_* \otimes_G C_q)) = H_p(F_* \otimes_G H_q(C)) = H_p(G, H_q(C)) \Rightarrow H_{p+q}(C). \qquad (4)$$

Ao considerarmos a sequência espectral associada a filtração por linha de $F \otimes_G C$, $E^0_{p,q} = F_q \otimes_G C_p$ e

$$E^1_{p,q} \approx H_q(F_* \otimes_G C_p) = H_q(G, C_p) \Rightarrow H_{p+q}(G, C). \qquad (5)$$

Além disso, $E^2_{p,q}$ é o p-ésimo grupo de homologia do complexo obtido de C via funtor $H_q(G, -)$. Em ambos os casos, as sequências espectrais oferecem aproximações para $H_*(G, C)$ em termos da homologia ordinária de grupos.

Proposição 3.24 ((BROWN, 1982), Proposição 5.2, p. 169)**.** *Se $\tau : (C, \partial) \to (C', \partial')$ é uma equivalência fraca de G-complexos de cadeia, então τ induz um isomorfismo $H_*(G, C) \approx H_*(G, C')$.*

Demonstração: Dado que τ é um homomorfismo de cadeia, decorre que $\mathrm{id}\otimes\tau : F\otimes_G C \to F\otimes_G C'$ é um homomorfismo de cadeia, pois $dx\otimes\tau y+(-1)^p x\otimes\tau\partial y = dx\otimes\tau y+(-1)^p x\otimes\partial'\tau y$ para todo $x \otimes y \in F_p \otimes_G C_q$. Pela Proposição 3.22, as sequências espectrais $E^r_{p,q}(C)$ e $E^r_{p,q}(C')$, obtidas das filtrações dadas na seção anterior, convergem para $H_*(G,C)$ e $H_*(G,C')$. Haja vista que $E^1(\mathrm{id} \otimes \tau) : E^1_{p,q} \approx F_p \otimes_G H_q(C) \to E^1_{p,q} \approx F_p \otimes_G H_q(C')$ é um isomorfismo, pois τ é uma equivalência fraca, decorre, pela Proposição 3.15, que $H(\mathrm{id}\otimes\tau) : H(F\otimes_G C) \to H(F\otimes_G C')$ é um isomorfismo. Portanto, $H_*(G,C) \approx H_*(G,C')$.

$\blacksquare$

Se G atua trivialmente em C, então $F \otimes_G C \approx F_G \otimes C$, pois $F_p \otimes_G C_q \approx F_p \otimes_G (\mathbb{Z} \otimes C_q) \approx (F_p \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes C_q \approx (F_p)_G \otimes C_q$, logo $H_p(F_G) \approx H_p(G)$. Além disso, dado que F_p é projetivo, existe um $\mathbb{Z}G$-módulo Q_p tal que $F_p \oplus Q_p = \oplus\mathbb{Z}G$, logo $(F_p)_G \oplus (Q_p)_G \approx (F_p \otimes_G \mathbb{Z}) \oplus (Q_p \otimes_G \mathbb{Z}) \approx (F_p \oplus Q_p) \otimes_G \mathbb{Z} = (\oplus\mathbb{Z}G) \otimes_G \mathbb{Z} \approx \oplus(\mathbb{Z}G \otimes_G \mathbb{Z}) \approx \oplus\mathbb{Z}$, então $(F_p)_G$ é um $\mathbb{Z}$-módulo livre, pois $\mathbb{Z}$ é um domínio de ideais principais. Por ((BROWN, 1982), Proposição 0.8, p.07), existe a Fórmula de Künneth:

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_p(G) \otimes H_q(C) \to H_n(G,C) \to \bigoplus_{p+q=n-1} Tor(H_p(G), H_q(C)) \to 0$$

Observação 3.25. *Sejam $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e $C = (C_n)_{n\geq 0}$ um complexo de cadeia finitamente filtrado de $\mathbb{Z}G$-módulos H_*-acíclicos. Consideremos a sequência espectral $\{E^r_{p,q}\}$ associada a filtração por linha do complexo $F \otimes_G C$. Como cada C_p é H_*-acíclico, decorre que $E^1_{p,q}(F \otimes_G C) \approx H_q(G,C_p) = 0$ para $q > 0$ e $E^1_{p,0}(F \otimes_G C) \approx H_0(G,C_p) \approx (C_p)_G$, isto é, o termo E^1 concentra-se na linha $q = 0$. Haja vista que $E^1_{p,q}(F \otimes_G C) \approx E^1_{p,q}(\mathbb{Z} \otimes_G C)$, pois $E^1_{p,q}(\mathbb{Z} \otimes_G C) \approx 0$ para $q > 0$ e $E^1_{p,0} \approx (C_p)_G$, decorre da Proposição 3.15 (pois $\varepsilon \otimes 1 : F \otimes_G C \to \mathbb{Z} \otimes_G C$ preserva filtração) que $H_*(G,C) = H_*(F \otimes_G C) \approx H_*(\mathbb{Z} \otimes_G C) = H_*(C_G)$. Além disso, a sequência colapsa [2] em E^2. De fato, $E^2_{p,q}(F \otimes_G C) \approx E^2_{p,q}(\mathbb{Z} \otimes_G C)$, pois $E^2_{p,q} \approx H_{p+q}(E^1)$ (Teorema 3.14). Ora, $E^2_{p,q}(F \otimes_G C) = 0$ para $q > 0$ e $E^2_{p,0}(F \otimes_G C) \approx E^2_{p,0}(\mathbb{Z} \otimes_G C) = H_p(\mathbb{Z} \otimes_G C) = \mathbb{Z} \otimes_G C_p \approx (C_p)_G = E^1_{p,q}$. Sucessivamente, $E^2_{p,q} \approx E^{2+i}_{p,q}$.*

Proposição 3.26 ((BROWN, 1982), Proposição 5.6, p. 170)**.** *Seja $C = (C_n)_{n\geq 0}$ um complexo de cadeia de $\mathbb{Z}G$-módulos onde cada C_n é H_*-acíclico. Então, existe uma sequência espectral da forma $E^2_{p,q} = H_p(G, H_q(C)) \Rightarrow H_{p+q}(C_G)$.*

3.4 SEQUÊNCIA ESPECTRAL DE HOCHSCHILD-SERRE

Sejam $1 \to H \to G \to Q \to 1$ uma extensão de grupos [3], F uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e M um $\mathbb{Z}G$-módulo. Dado que $F \otimes_G M = (F \otimes M)_G \approx ((F\otimes M)_H)_Q = (F\otimes_H M)_Q$ ((BROWN, 1982), Exercício 03. p. 35), decorre que $H_*(G,M) =$

[2] A sequência espectral $\{E^r_{p,q}\}$ colapsa no N-ésimo termo se para todo par (p,q), $d^r_{p,q} = 0$ para $r > N$.
[3] Uma extensão de um grupo Q por um grupo H é uma sequência exata curta de grupos $1 \to H \to G \to Q \to 1$.

$H_*(F \otimes_G M) = H_*((F \otimes_H M)_Q)$. Além disso, pelo Corolário 2.25, $H_*(F \otimes_H M) = H_*(H, M)$ é um $\mathbb{Z}Q$-módulo.

Lema 3.27. *$(F_p \otimes M)_H$ é H_*-acíclico.*

Demonstração: Sejam F' uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}Q$ e Q_p tal que $F_p \oplus Q_p = \oplus \mathbb{Z}G$. Então, $F' \otimes_Q ((\oplus \mathbb{Z}G) \otimes_H M) \approx (F' \otimes_Q (F_p \otimes_H M)) \oplus (F' \otimes_Q (Q_p \otimes_H M))$, logo $\oplus H_*(F' \otimes_Q (\mathbb{Z}G \otimes_H M)) \approx H_*(Q, (F_p \otimes M)_H) \oplus H_*(F' \otimes_Q (Q_p \otimes_H M))$. Ora, $\mathbb{Z}G \otimes_H M = (\mathbb{Z}G \otimes M)_H \approx \mathbb{Z}Q \otimes_G (\mathbb{Z}G \otimes M) \approx \mathbb{Z}Q \otimes M = Ind_{\{1\}}^{Q} M$, ou seja, $\mathbb{Z}G \otimes_H M$ é H_*-acíclico. Portanto, $(F_p \otimes M)_H$ é H_*-acíclico. ■

Teorema 3.28 (Sequência espectral de Hochschild–Serre, (BROWN, 1982), Teorema 6.3, p. 171)**.** *Sejam $1 \to H \to G \to Q \to 1$ uma extensão de grupos e M um $\mathbb{Z}G$-módulo. Então, existe uma sequência espectral $\{E^r_{p,q}\}$ tal que $E^2_{p,q} = H_p(Q, H_q(H, M)) \Rightarrow H_{p+q}(G, M)$.*

Demonstração: Dada uma resolução projetiva F de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, $(F \otimes M)_H$ é um complexo não negativo de $\mathbb{Z}Q$-módulos H_*-acíclicos. Pela Proposição 3.26, existe uma sequência espectral $E^r_{p,q}$ tal que $E^2_{p,q} = H_p(Q, H_q(H, M)) \Rightarrow H_{p+q}(G, M)$. ■

Corolário 3.29 ((BROWN, 1982), Corolário 6.4, p. 171)**.** *Sob as hipóteses do Teorema 3.28, existe uma sequência exata:*

$$H_2(G, M) \to H_2(Q, M_H) \to H_1(H, M)_Q \to H_1(G, M) \to H_1(Q, M_H) \to 0.$$

Demonstração: Sejam F uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e $TC = F \otimes_G M$. Filtrando TC por considerar $F_p(TC)_n = \bigoplus_{i \leq p} F_i \otimes_G M_{n-i}$, obtemos que $F_{-1}(TC)_n = 0$ e $F_n(TC)_n = F_n \otimes_G M = (TC)_n$. Pela Proposição 3.18, $\{E^r_{p,q}\}$ é de primeiro quadrante, $H_*(TC)$ é canonicamente limitada e $E^\infty_{p,n-p} \approx F_p H_n(TC)/F_{p-1} H_n(TC)$, em particular, $E^\infty_{0,1} \approx F_0 H_1(TC)/F_{-1} H_1(TC) = F_0 H_1(TC)$ e $E^\infty_{1,0} \approx F_1 H_1(TC)/F_0 H_1(TC) = H_1(G, M)/E^\infty_{0,1}$. Ora, pela Proposição 3.16, $E^\infty_{1,0} \approx E^2_{1,0}$, então obtemos a sequência exata:

$$0 \to E^\infty_{0,1} \to H_1(G, M) \to E^2_{1,0} \to 0. \tag{6}$$

Pela Proposição 3.16, $E^\infty_{0,1} \approx E^3_{0,1}$ e $E^\infty_{2,0} \approx E^3_{2,0}$. Como $E^\infty_{0,1} \approx E^3_{0,1} = ker\, d^2_{0,1}/im\, d^2_{2,0} = E^2_{0,1}/im\, d^2_{2,0}$, pois $E^2_{-2,2} = 0$, e $E^\infty_{2,0} \approx E^3_{2,0} = ker\, d^2_{2,0}/im\, d^2_{4,-1} = ker\, d^2_{2,0}$, pois $E^2_{4,-1} = 0$, produzimos a sequência exata:

$$0 \to E^\infty_{2,0} \to E^2_{2,0} \xrightarrow{d^2_{2,0}} E^2_{0,1} \to E^\infty_{0,1} \to 0. \tag{7}$$

De (6) e (7) produzimos a sequência exata:

$$0 \to E^\infty_{2,0} \to E^2_{2,0} \to E^2_{0,1} \to H_1(G, M) \to E^2_{1,0} \to 0.$$

Finalmente, como $E^\infty_{2,0} = F_2 H_2(G, M)/F_1 H_2(G, M)$ e $E^2_{p,q} = H_p(Q, H_q(H, M))$, obtemos a sequência exata:

$$H_2(G, M) \to H_2(Q, M_H) \to H_1(H, M)_Q \to H_1(G, M) \to H_1(Q, M_H) \to 0.$$

■

3.5 HOMOLOGIA EQUIVARIANTE

Sejam G um grupo, X um G-complexo, $C(X)$ o complexo de cadeia celular de X e M um $\mathbb{Z}G$-módulo. A ***homologia equivariante de G com coeficientes em M*** é definida por $H_*^G(X,M) = H_*(G, C(X,M))$, onde $C(X,M) = C(X) \otimes M$ é um G-complexo com a G-ação diagonal. Similarmente, a ***cohomologia equivariante de G com coeficientes em M*** é definida por $H_G^*(X,M) = H^*(G, C^*(X,M))$, onde $C^*(X,M) = \mathscr{H}\!om_G(C(X),M)$. Os resultados desta seção são tratados apenas para homologia equivariante, mas podem ser tomados analogamente para cohomologia equivariante.

Como $C(\{pt.\}) \approx \mathbb{Z}$, $H_*^G(\{pt.\},M) = H_*(G, \mathbb{Z} \otimes_G M) = H_*(G,M)$. Dado um G-complexo X, existe uma aplicação canônica $H_*^G(X,M) \to H_*(G,M)$, pois existe uma (única a menos de homotopia) G-aplicação a um ponto.

Proposição 3.30 ((BROWN, 1982), Proposição 7.3, p. 173)**.** *Se $f : X \to Y$ é uma aplicação celular*[4] *entre G-complexos tal que $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ é um isomorfismo, então f induz um isomorfismo $H_*^G(X,M) \approx H_*^G(Y,M)$ para todo $\mathbb{Z}G$-módulo M.*

Demonstração: Haja vista que $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ é um isomorfismo, decorre que $f_\# \otimes 1 : C(X,M) \to C(Y,M)$ é uma equivalência fraca, onde $f_\# : C(X) \to C(Y)$ é o homomorfismo de cadeia induzido de f. Pela Proposição 3.24, $f_\# \otimes 1$ induz um isomorfismo $H_*^G(X,M) = H_*(G, C(X,M)) \approx H_*(G, C(Y,M)) = H_*^G(Y,M)$. ∎

Observação 3.31. *Se X for um G-complexo acíclico, então $H_*^G(X,M) \to H_*(G,M)$ é um isomorfismo.*

De acordo com (4), ao considerarmos a sequência espectral associada à filtração por coluna de $C(X,M)$, obtemos que:

$$E_{p,q}^2 \approx H_p(G, H_q(X,M)) \Rightarrow H_{p+q}^G(X,M).$$

Para analisarmos a sequência espectral associada à filtração por linha de $C(X,M)$, faremos primeiramente algumas considerações. De acordo com o Exemplo 2.14, para cada p-célula de X, podemos considerar o G_σ-módulo orientado $\mathbb{Z}_\sigma$. Tomando $M_\sigma := \mathbb{Z}_\sigma \otimes M$, observamos que M_σ é um G_σ-módulo aditivamente isomorfo a M com a G_σ-ação "torcida" por χ_σ, onde $\chi_\sigma : G_\sigma \to \{\pm 1\}$ é a aplicação que leva g em $+1$ se g preserva a orientação de σ e em -1 caso contrário, isto é, $g \cdot m = \chi_\sigma(g)m$. Sejam X_p o conjunto das p-células de X e Σ_p um sistema de representantes para X_p/G. Haja vista que $C_p(X,M) = C_p(X) \otimes M = \bigoplus_{\sigma \in X_p} M_\sigma$ é uma decomposição aditiva de $C_p(X,M)$, obtemos, pelo Corolário 2.12, que $C_p(X,M) \approx \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} Ind_{G_\sigma}^G M_\sigma$. Portanto, de acordo com (5):

$$E_{p,q}^1 = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} H_q(G_\sigma, M_\sigma) \Rightarrow H_{p+q}^G(X,M), \tag{8}$$

pois, pelo Lema de Shapiro (Proposição 2.18), $H_q(G, C_p(X,M)) \approx \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} H_q(G_\sigma, M_\sigma)$.

[4] Uma aplicação $f : X \to Y$ entre CW-complexos é celular se $f(X^n) \subseteq Y^n$ para todo $n \geq 0$.

Teorema 3.32 (Sequência espectral de Cartan–Leray, (BROWN, 1982), Teorema 7.9, p. 173)**.** *Se X é um G-complexo livre, então existe uma sequência espectral da forma $E^2_{p,q} = H_p(G, H_q(X)) \Rightarrow H_{p+q}(X/G)$.*

Demonstração: Como $C(X)$ é um complexo de $\mathbb{Z}G$-módulos H_*-acíclico (pois X é um G-complexo livre), pela Proposição 3.26, existe uma sequência espectral da forma $E^2_{p,q} = H_p(G, H_q(C(X))) \Rightarrow H_{p+q}(C(X)_G) \overset{Lema 2.32}{\approx} H_{p+q}(C(X/G))$. ∎

Observação 3.33. *Se X é um G-complexo acíclico (com a G-ação não necessariamente livre), então, de acordo com (8):*

$$E^1_{p,q} = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} H_q(G_\sigma, M_\sigma) \Rightarrow H_{p+q}(G, M), \tag{9}$$

pois, pela Observação 3.31, $H^G_*(X, M) \approx H_*(G, M)$.

Observação 3.34. *De acordo com o Corolário 2.34, se X é um $K(G,1)$-complexo, então $H_*(G) \approx H_*(X)$. Utilizando a sequência espectral de Cartan-Leray é possível chegar ao mesmo resultado. Se $(\widetilde{X}, p)$ é o recobrimento universal de X, então $G \approx \pi_1(X) \approx Aut(\widetilde{X}, p)$ atua livremente em $\widetilde{X}$, ou seja, $\widetilde{X}$ é um G-complexo livre. Identificando X com $\widetilde{X}/G$ via aplicação $p(x) \mapsto G(p(x))$, obtemos, pelo Teorema 3.32, a sequência espectral $E^2_{p,q} = H_p(G, H_q(\widetilde{X})) \Rightarrow H_{p+q}(X)$. Ora, como $\widetilde{X}$ é contrátil, então, para $q > 0$, $H_q(\widetilde{X}) = 0$, logo $E^2_{p,q} = 0$, por conseguinte $E^\infty_{p,q} = 0$. Em particular, para $q = 0$, $E^2_{p,0} = H_p(G, H_0(\widetilde{X})) = H_p(G, \mathbb{Z}) = H_p(G)$. Tomando a sequência $E^2_{p+2,-1} \xrightarrow{d^2_{p+2,-1}} E^2_{p,0} \xrightarrow{d^2_{p,0}} E^2_{p-2,1}$ e observando que $E^2_{p+2,-1} = 0$ (pois a sequência é de primeiro quadrante) e que $E^2_{p-2,1} = 0$ (pois $1 > 0$), obtemos que $H_p(E^2) = E^2_{p,0}$. Portanto, $H_p(X) \approx E^\infty_{p,0} \approx E^2_{p,0} \approx H_p(G)$.*

4 CONDIÇÕES DE FINITUDE

Em nosso contexto, o cálculo da (co)homologia de um grupo G é feito por meio de uma resolução projetiva arbitrária de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Assim sendo, é conveniente, quando possível, escolhermos resoluções "simples" no sentido de resoluções com comprimento finito e/ou com um conjunto de gerador finito para cada módulo da resolução. De encontro a isto, neste capítulo, definimos as condições de finitude do tipo FP_n, FP_∞, FP e FL. Além disso, tratamos brevemente dos grupos de dualidade e apresentamos algumas noções virtuais de grupos.

4.1 DIMENSÃO COHOMOLÓGICA

Nesta seção definimos a dimensão cohomológica de um grupo e apresentamos algumas de suas propriedades.

Definição 4.1. *A **dimensão projetiva** de um R-módulo M, denotada por $proj\ dim_R\ M$, é o ínfimo dentre os inteiros n para os quais M admite uma resolução projetiva de comprimento n:*

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Se M não admite nenhuma resolução projetiva de comprimento finito, então $proj\ dim_R\ M = \infty$.

Lema 4.2 ((BROWN, 1982), Lema 2.1, p. 184)**.** *$proj\ dim_R\ M \leq n$ se, e somente se, toda sequência exata de R-módulos $0 \to K \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ com cada P_i projetivo possui K projetivo.*

Demonstração: Sejam

$$\begin{tikzcd}
P: & \cdots \arrow[r, "d_{n+2}"] & P_{n+1} \arrow[rr, "d_{n+1}"] \arrow[dr] & & P_n \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr] & & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & L \arrow[ur, tail] & & K \arrow[ur, tail] & & & & &
\end{tikzcd}$$

a resolução projetiva completada de $0 \to K \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ e N um R-módulo. Dado qualquer cociclo $\varphi \in \mathscr{H}om_R(P,N)^{n+1}$, como $\varphi d_{n+2} = 0$ e $L = ker\ d_n \approx coker\ d_{n+2}$, decorre, pela Propriedade Universal do *coker* , que existe um único R-homomorfismo $\psi : L \to N$, tal que $\psi\pi = \varphi$, onde $\pi : P_{n+1} \to L$ é a projeção canônica. Afirmamos que ψ pode ser estendido a uma aplicação $\overline{\psi} : P_n \to N$ se, e somente se, φ é um cobordo. De fato, se $\overline{\psi} : P_n \to N$ estende ψ, então $\varphi = \psi\pi = \overline{\psi}|_L\pi = \overline{\psi}i\pi = \overline{\psi}d_{n+1}$, onde $i : L \to P_n$ é a inclusão, ou seja, φ é um cobordo. Por outro lado, se φ é um cobordo, então existe $\overline{\psi} : P_n \to N$ tal que $\varphi = \overline{\psi}d_{n+1}$, logo $\overline{\psi}i = \psi$, pois $\overline{\psi}i\pi = \overline{\psi}d_{n+1} = \varphi = \psi\pi$. Como $Ext_R^{n+1}(M,N) = H^{n+1}(\mathscr{H}om_R(P,N)^{n+1}) = 0$, todo R-homomorfismo $L \to N$

estende-se a uma aplicação $P_n \to N$. Em particular, se $N = L$, então id_L estende-se à uma aplicação $P_n \to L$ de modo que a sequência exata

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mathrm{id}_L"'] & P_n \arrow[r] \arrow[dl] & K \arrow[r] & 0 \\ & L & & & \end{tikzcd}$$

cinde. Portanto, $P_n = L \oplus K$ e como P_n é livre, decorre que K é projetivo. A reciproca é imediata. ■

Definição 4.3. *Sejam $R = \mathbb{Z}G$ e $M = \mathbb{Z}$. A* ***dimensão cohomológica*** *de G, denotada por $\mathrm{cd}\, G$, é o menor inteiro n para o qual o Lema 4.2 é satisfeito. Caso contrário, $\mathrm{cd}\, G = \infty$.*

Observação 4.4.

$$\begin{aligned} cd\, G &= proj\ dim_{\mathbb{Z}G}\, \mathbb{Z} \\ &= \inf\{n \mid \mathbb{Z} \textit{ admite uma resolução projetiva de comprimento } n\} \\ &= \inf\{n \mid H^i(G, -) = 0 \textit{ para } i > n\} \\ &= \sup\{n \mid H^n(G, M) \neq 0 \textit{ para algum } \mathbb{Z}G\textit{-módulo } M\}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.5. *$cd\, G = 0$ se, e somente se, G é trivial. De fato, se $cd\, G = 0$, então $\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo projetivo, pois existe uma resolução projetiva da forma $0 \to P \to \mathbb{Z} \to 0$. Ora, o único grupo para o qual $\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo projetivo é o trivial (Proposição A.26). Reciprocamente, se G é o grupo trivial, então, dado qualquer $\mathbb{Z}G$-módulo M, $H^i(G, M) = 0$ para $i > 0$ e $H^0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, logo $cd\, G = 0$.*

Definição 4.6. *A* ***dimensão geométrica*** *de um grupo G, denotada por geom dim G, é definida como sendo a menor dimensão de um $K(G, 1)$-complexo.*

Proposição 4.7 ((BROWN, 1982), Proposição 2.2, p. 185)**.** *$cd\, G \leq geom\ dim\, G$.*

Demonstração: Se X é um $K(G, 1)$-complexo, então $C(\widetilde{X})$, o complexo de cadeia celular aumentado do recobrimento universal $\widetilde{X}$ de X, é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ (de comprimento igual a dimensão de X), logo $cd\, G \leq geom\ dim\, G$. ■

Exemplo 4.8. *Seja $G = \langle t \rangle \approx \mathbb{Z}$. Pelo Exemplo 2.3, dado qualquer $\mathbb{Z}G$-módulo M, $H^i(G, M) = 0$ para $i > 1$ e $H^1(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Portanto, $cd\, G = 1$.*

Exemplo 4.9. *Seja $G = \langle t \mid t^n = 1 \rangle \approx \mathbb{Z}_n$. Pelo Exemplo 2.4, $H^0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H^{2i-1}(G, \mathbb{Z}) = 0$ e $H^{2i}(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n$. Portanto, $cd\, G = \infty$*

Proposição 4.10 ((BROWN, 1982), Proposição 2.4, p. 187)**.** *Se $H \subseteq G$, então $cd\, H \leq cd\, G$. A igualdade é válida se $cd\, G < \infty$ e $(G : H) < \infty$.*

Demonstração: Dado que uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ é também uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$, decorre que $cd\, H \leq cd\, G$. Se $cd\, G = n < \infty$, então $H^n(G, F) \neq 0$ para algum $\mathbb{Z}G$-módulo livre F ((BROWN, 1982), Proposição 2.4, p. 186). Se F' é um $\mathbb{Z}H$-módulo livre de mesmo posto que F, então, pela Proposição 2.17, $Coind_H^G F' \approx Ind_H^G F' = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} F' \approx \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} (\bigoplus \mathbb{Z}H) \approx \bigoplus(\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}H) \approx \bigoplus \mathbb{Z}G \approx F$. Por conseguinte, pelo Lema de Shapiro (Proposição 2.18), $H^n(H, F') \approx H^n(G, Coind_H^G F') \approx H^n(G, F) \neq 0$. Portanto, $cd\, H = n = cd\, G$. ■

Corolário 4.11 ((BROWN, 1982), Corolário 2.5, p. 187)**.** *Se $cd\, G < \infty$, então G é livre de torção.*

Demonstração: Se existir $t \in G$ de ordem finita n, então, pelo Exemplo 4.9, $cd\, H = \infty$, onde $H = \langle t \rangle \approx \mathbb{Z}_n$. Por conseguinte, pela Proposição 4.10, $cd\, G = \infty$. Portanto, G é livre de torção. ■

Lema 4.12 ((BROWN, 1982), Lema 2.7, p. 188)**.** *Se P é um R-módulo projetivo, então existe um R-módulo livre F tal que $P \oplus F \approx F$.*

Demonstração: Dado que P é projetivo, existe um R-módulo Q tal que $P \oplus Q$ é livre. Seja F a soma direta enumerável $(P \oplus Q) \oplus (P \oplus Q) \oplus \cdots$. Como cada parcela $P \oplus Q$ é livre, decorre que F é livre. Reescrevendo F como $(P \oplus P \cdots) \oplus (Q \oplus Q \cdots)$ e adicionando mais uma cópia de P, obtemos que $P \oplus F \approx F$. ■

Proposição 4.13 ((BROWN, 1982), Proposição 2.6, p. 187)**.** *Seja G um grupo. Existe uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento $cd\, G$.*

Demonstração: Sejam $0 < cd\, G = n < \infty$ e $F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to \mathbb{Z} \to$ uma resolução livre parcial. Pelo Lema 4.2, $P := ker\, \{F_{n-1} \to F_{n-2}\}$ é um R-módulo projetivo. Pelo Lema 4.12, existe um R-módulo livre F tal que $P \oplus F \approx F$. Por conseguinte, obtemos a resolução livre $0 \to F \to F_{n-1} \oplus F \to \cdots \to F_0 \to \mathbb{Z} \to 0$. ■

4.2 RESOLUÇÕES DO TIPO FINITO

Lema 4.14 (Lema de Schanuel, (BROWN, 1982), Lema 4.2, p. 192)**.** *Se $0 \to K {\to} P \xrightarrow{f} M \to 0$ e $0 \to K' {\to} P' \xrightarrow{f'} M \to 0$ são sequências exatas de R-módulos com P e P' projetivos, então $P \oplus K' \approx P' \oplus K$.*

Demonstração: Sejam Q o R-módulo dado por $Q = \{(x, x') \in P \times P' \mid f(x) = f'(x')\}$ e $\pi : Q \to P$ a projeção sobre a primeira coordenada. Como $ker\, (\pi) = \{(0, x') \in Q \mid f'(x') = 0\} \approx ker\, f' \approx K'$ e P é projetivo, decorre que a sequência exata $0 \to K' \to Q \to P \to 0$ cinde, logo $P \oplus K' \approx Q$. Similarmente, $P' \oplus K \approx Q$. ■

Proposição 4.15 ((BROWN, 1982), Proposição 4.1, p. 192)**.** *Seja M um R-módulo. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) Existe uma sequência exata $R^m \to R^n \to M \to 0$ para certos inteiros m e n;

(ii) Existe uma sequência exata $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ de R-módulos projetivos e finitamente gerados;

(iii) M é finitamente gerado e todo R-epimorfismo $\varepsilon : P \to M$ onde P é projetivo e finitamente gerado possui $ker\, \varepsilon$ finitamente gerado.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$: R^m e R^n são projetivos e finitamente gerados. $(ii) \Rightarrow (iii)$: Dado que $P_0 \to M$ é um R-epimorfismo e P_0 é finitamente gerado, decorre que M é finitamente gerado. Aplicando o Lema 4.14 às sequências $0 \to ker\, \{P_0 \to M\} \to P_0 \to M \to 0$ e $0 \to ker\, \varepsilon \to P \to M \to 0$ obtemos que $P_0 \oplus ker\, \varepsilon \approx P \oplus ker\, \{P_0 \to M\}$, logo $ker\, \varepsilon$ é finitamente gerado, pois $P \oplus ker\, \{P_0 \to M\}$ é finitamente gerado. $(iii) \Rightarrow (i)$: Como M é finitamente gerado, existe um R-epimorfismo $R^n \to M$. Dado que R^n é projetivo, decorre da hipótese que $ker\, \{R^n \to M\}$ é finitamente gerado, então, mais uma vez, existe um R-epimorfismo $R^m \to ker\, \{R^n \to M\}$, donde produzimos a sequência exata:

$$\begin{tikzcd}
R^m \arrow[r] \arrow[d, two heads] & R^n \arrow[r, two heads] & M \arrow[r] & 0. \\
ker\, \{R^n \to M\}. \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

■

Definição 4.16. *Seja M um R-módulo. Se M satisfaz as condições da Proposição 4.15, então M é dito* ***finitamente presentado****. Neste caso, a sequência $R^m \to R^n \to M \to 0$ é dita uma* ***presentação finita*** *de M. Uma resolução (ou resolução parcial) $P \xrightarrow{\varepsilon} M$ é dita do* ***tipo finito*** *se cada P_i é finitamente gerado. Se existe uma resolução parcial projetiva do tipo finito $P_n \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$, então M é dito do* ***tipo*** $\mathbf{FP_n}$*.*

Observação 4.17. *Se M é do tipo FP_0, então M é finitamente gerado. Se M é do tipo FP_1, então M é finitamente presentado.*

Lema 4.18 ((BROWN, 1982), Lema 4.4, p. 193)**.** *Se*

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

e

$$0 \to P'_n \to P'_{n-1} \to \cdots \to P'_0 \to M \to 0$$

são sequências exatas com P_i e P'_i projetivos para todo $i \leq n-1$, então

$$P_0 \oplus P'_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \approx P'_0 \oplus P_1 \oplus P'_2 \oplus \cdots .$$

Demonstração: Provaremos usando indução em n. Para $n = 2$ o resultado decorre do Lema 4.14. Sejam $K = ker\,\{P_{n-2} \to P_{n-3}\}$, $K' = ker\,\{P'_{n-2} \to P'_{n-3}\}$, $Q = P'_{n-2} \oplus P_{n-3} \oplus P'_{n-4} \oplus \cdots$ e $Q' = P_{n-2} \oplus P'_{n-3} \oplus P_{n-4} \oplus \cdots$. Por hipótese de indução $K \oplus Q \approx K' \oplus Q'$. Consideremos as sequências exatas

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \oplus Q \to K \oplus Q \to 0$$

e

$$0 \to P'_n \to P'_{n-1} \oplus Q' \to K' \oplus Q' \to 0.$$

Como $P_{n-1} \oplus Q$ e $P'_{n-1} \oplus Q'$ são projetivos, obtemos, pelo Lema 4.14, que $P_n \oplus P'_{n-1} \oplus Q' \approx P'_n \oplus P_{n-1} \oplus Q$. ■

Proposição 4.19 ((BROWN, 1982), Proposição 4.3, p. 193)**.** *Sejam M um R-módulo e $n \geq 0$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Existe uma resolução parcial $P_n \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ com cada P_i livre de posto finito;

(ii) M é do tipo FP_n;

(iii) M é finitamente gerado e toda resolução parcial projetiva do tipo finito $P_k \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ com $k < n$ possui $ker\,\{P_k \to P_{k-1}\}$ finitamente gerado.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$: É imediato. $(ii) \Rightarrow (iii)$: Se M é do tipo FP_n, então existe uma resolução parcial projetiva do tipo finito $P'_k \to \cdots \to P'_0 \to M \to 0$, com $k < n$. Dado que P'_0 é finitamente gerado e $P'_0 \to M$ é um R-epimorfismo, decorre que M é finitamente gerado. Como $ker\,\{P_k \to P_{k-1}\}$ é finitamente gerado, decorre, pelo Lema 4.18, que $ker\,\{P_k \to P_{k-1}\}$ é finitamente gerado. $(iii) \Rightarrow (i)$: Se M é finitamente gerado, então existe um R-epimorfismo $\varepsilon : P_0 \to M$ com P_0 livre e finitamente gerado. Como, por hipótese, $ker\,\varepsilon$ é finitamente gerado, também existe um R-epimorfismo $\varepsilon_1 : P_1 \to ker\,\varepsilon$ com P_1 livre e finitamente gerado. Tomando $d_1 = i \circ \varepsilon_1$ e repetindo este processo até o nível n produzimos a resolução parcial livre do tipo finito $P_n \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$.

■

Definição 4.20. *Um R-módulo M é dito do **tipo** $\mathbf{FP}_\infty$ se for do tipo FP_n para todo $n \geq 0$.*

Proposição 4.21 ((BROWN, 1982), Proposição 4.5, p. 195)**.** *Seja M R-módulo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) M admite uma resolução livre do tipo finito;

(ii) M admite uma resolução projetiva do tipo finito;

(iii) M é do tipo FP_n para todo $n \geq 0$.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ trivialmente. $(iii) \Rightarrow (i)$: Basta estender a todos os níveis a construção feita na implicação $(iii) \Rightarrow (i)$ da Proposição 4.19. ■

Definição 4.22. *Dizemos que G é um grupo do tipo FP_n (FP_∞) se $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo é do tipo FP_n (FP_∞) .*

Exemplo 4.23. *Como $\mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ é uma resolução parcial de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento 0, decorre que todo grupo G é do tipo FP_0.*

Exemplo 4.24. *G é do tipo FP_1 se, e somente se, G é finitamente gerado. De fato, se G é do tipo FP_1, então $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo é finitamente presentado, logo G é finitamente gerado ((BROWN, 1982), Exercício 1, p. 196). Reciprocamente, se G é finitamente gerado, então $ker\,\varepsilon$ é finitamente gerado ((BROWN, 1982), Exercício 1, p. 12), logo $ker\,\varepsilon \to \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} \to 0$ é uma presentação finita de $\mathbb{Z}$, então G é do tipo FP_1.*

Exemplo 4.25. *Se G é finitamente presentado, então G é do tipo FP_2. De fato, se G é finitamente presentado, então existe um CW-complexo X de dimensão 2 com $\pi_1(X) = G$ ((BROWN, 1982), p. 44). Como $C(\widetilde{X})$, o complexo de cadeia celular celular aumentado do recobrimento universal $\widetilde{X}$ de X, é uma resolução parcial livre do tipo finito de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento 2, decorre que G é do tipo FP_2.*

Proposição 4.26 ((BROWN, 1982), Proposição 5.1, p. 197)**.** *Se H é um subgrupo de G de índice finito, então G é do tipo FP_n se, e somente se, H é do tipo FP_n.*

Demonstração: Se G é do tipo FP_n, então, pela Proposição 4.19, existe uma resolução parcial $P : P_n \to \cdots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ com cada P_i um $\mathbb{Z}G$-módulo livre de posto finito n_i, por conseguinte, P é uma resolução parcial livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$. Como $(G : H) < \infty$, decorre que $\mathbb{Z}G \approx (\mathbb{Z}H)^{|G/H|}$ é um $\mathbb{Z}H$-módulo finitamente gerado, então $P_i \approx (\mathbb{Z}G)^{n_i} \approx (\mathbb{Z}H)^{n_i|G/H|}$ também é um $\mathbb{Z}H$-módulo finitamente gerado, logo H é do tipo FP_n. Reciprocamente, se $P : P_k \to \cdots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ é uma resolução parcial projetiva do tipo finito de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento $k < n-1$, então P é uma resolução parcial projetiva do tipo finito de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$ também de comprimento $k < n-1$. Pela Proposição 4.19, $ker\,\{P_k \to P_{k-1}\}$ é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}H$, então $ker\,\{P_k \to P_{k-1}\}$ é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}G$. Portanto, por esta mesma proposição, G é do tipo FP_n. ■

4.3 GRUPOS DO TIPO FP E FL

Definição 4.27. *Um grupo G é do **tipo FP** (resp. **FL**) se $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo admite uma resolução projetiva (resp. livre) do tipo finito e de comprimento finito.*

Proposição 4.28 ((BROWN, 1982), Proposição 6.1, p. 199)**.** *G é do tipo FP se, e somente se, $cd\,G < \infty$ e G é do tipo FP_∞.*

Demonstração: É imediato que se G é do tipo FP, então $cd\,G < \infty$ e G é do tipo FP_∞. Reciprocamente, se $cd\,G = n < \infty$ e G é do tipo FP_∞, então, pela Proposição 4.21, existe uma resolução projetiva do tipo finito $P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$. Considerando $P_n = ker\,\{P_{n-1} \to P_{n-2}\}$, obtemos, pelo Lema 4.2 e pela Proposição 4.19, que P_n é projetivo e finitamente gerado. Portanto G é do tipo FP. ■

Exemplo 4.29. *Seja G um grupo finitamente presentado com $cd\,G = 2$, então, pelo Exemplo 4.25, G é do tipo FP_2, por conseguinte, G é do tipo FP.*

Observação 4.30. *A priori, se G é um grupo do tipo FP, não necessariamente G é do tipo FL. Entretanto, se G é do tipo FP, $0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ é a resolução do tipo finito em que P_n é projetivo e P_i é livre para cada $0 \leq i \leq n-1$ dada na Proposição 4.28 e F é um módulo livre de posto finito para o qual $P_n \oplus F$ é livre, então, pelo Lema 4.18, existe uma resolução livre do tipo finito e de comprimento finito.*

4.4 GRUPOS DE DUALIDADE

Se G é um grupo do tipo FP e M é um $\mathbb{Z}G$-módulo, então $H^n(G, M) \approx H_0(G, D \otimes M)$, onde $n = cd\,G$, D é o $\mathbb{Z}G$-módulo (à direita) $H^n(G, \mathbb{Z}G)$ e $D \otimes M$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo com a G-ação diagonal ((BROWN, 1982), Proposição 6.8, p. 202). Nesta seção, estudaremos os grupos G para os quais este isomorfismo pode ser estendido às demais dimensões, isto é, para os quais $H^i(G, M) \approx H_{n-i}(G, D \otimes M)$.

Definição 4.31. *Um grupo G do tipo FP é um **grupo de dualidade** se $H^i(G, M) \approx H_{n-i}(G, D \otimes M)$ para todo $\mathbb{Z}G$-módulo M e para todo $i \in \mathbb{Z}$, onde $D = H^n(G, \mathbb{Z}G)$ e $n = cd\,G$. O $\mathbb{Z}G$-módulo D é chamado **módulo dualizante** de G. Dizemos que G é um **grupo de dualidade de Poincaré** se D é isomorfo a $\mathbb{Z}$ como grupo abeliano. Neste caso, dizemos que G é **orientável** se G atua trivialmente em D e **não orientável** caso contrário.*

Os grupos de dualidade foram tratados primeiramente em (BIERI; ECKMANN, 1973), que apresenta a seguinte caracterização:

Teorema 4.32 ((BIERI; ECKMANN, 1973))**.** *Seja G um grupo do tipo FP. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Existem um inteiro n e um $\mathbb{Z}G$-módulo D tais que $H^i(G, M) \approx H_{n-i}(G, D \otimes M)$ para todo $\mathbb{Z}G$-módulo M e todo inteiro i;

(ii) Existe um inteiro n tal que $H^i(G, \mathbb{Z}G \otimes A) = 0$ para todo $i \neq n$ e todo grupo abeliano A;

(iii) Existe um inteiro n tal que $H^i(G, \mathbb{Z}G) = 0$ para todo $i \neq n$ e $H^n(G, \mathbb{Z}G)$ é livre de torção (como grupo abeliano);

(iv) Existem isomorfismos naturais $H^i(G, -) \approx H_{n-i}(G, D \otimes -)$, onde $n = cd\, G$ e $D = H^n(G, \mathbb{Z}G)$.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$: Se A é um grupo abeliano, então $H^i(G, \mathbb{Z}G \otimes A) = H^i(G, Ind_{\{1\}}^G A) \approx H_{n-i}(G, D \otimes Ind_{\{1\}}^G A) \approx H_{n-i}(G, Ind_{\{1\}}^G D \otimes A) = 0$ para $i \neq n$ (Corolário 2.2.2). $(ii) \Rightarrow (iii)$: Se $A = \mathbb{Z}$, então $H^i(G, \mathbb{Z}G) = H^i(G, \mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}) = 0$ para $i \neq n$. Para mostrar que $H^n(G, \mathbb{Z}G)$ é livre de torção, consideremos, para cada $k > 0$, a sequência exata curta $0 \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{k} \mathbb{Z}G \xrightarrow{l} \mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}_k \to 0$, onde $k(\alpha) = k \cdot \alpha$ e $l(\alpha) = \alpha \otimes \bar{1}$. Observando a parcela da sequência exata longa em cohomologia $0 = H^{n-1}(G, \mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}_k) \xrightarrow{\delta} H^n(G, \mathbb{Z}G) \xrightarrow{k^*} H^n(G, \mathbb{Z}G)$, concluímos que k^* é injetora. Logo, se $[\alpha] \in H^n(G, \mathbb{Z}G)$ é tal que $0 = k \cdot [\alpha] = [k \cdot \alpha] = k^*[\alpha]$, então $[\alpha] = 0$. Portanto $H^n(G, \mathbb{Z}G)$ é livre de torção. $(iii) \Rightarrow (iv)$: Como $D = H^n(G, \mathbb{Z}G) \neq 0$ e $H^i(G, \mathbb{Z}G) = 0$ para todo $i > n$, decorre que $cd\, G = n$ ((BROWN, 1982), Proposição 6.7, p. 202). Seja $P : 0 \to P_n \to \cdots \to P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ uma resolução projetiva do tipo finito de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Como $H^i(G, \mathbb{Z}G) = H^i(\mathscr{H}om_G(P, \mathbb{Z}G)) = 0$ para $i \neq n$ e $H^n(G, \mathbb{Z}G) = D$, obtemos a resolução projetiva do tipo finito $0 \to P_0^* \to \cdots \to P_n^* \to D \to 0$ de D sobre $\mathbb{Z}G$, onde cada $P_i^* = Hom_{\mathbb{Z}G}(P_i, \mathbb{Z}G)$. Esta resolução equivale à suspensão $\Sigma^n P^*$ onde cada $(\Sigma^n P^*)_i = P_{n-i}^*$, isto é, $0 \to (\Sigma^n P^*)_n \to \cdots \to (\Sigma^n P^*)_0 \to D \to 0$. Pela Proposição A.47, $(\Sigma^n P^*)_{n-i} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \approx P_i^* \otimes_{\mathbb{Z}G} M \approx Hom_{\mathbb{Z}G}(P_i, M)$ para todo $\mathbb{Z}G$-módulo à direita M. Assim, $H^i(G, M) = H^i(\mathscr{H}om_G(P, M)) \approx H_{n-i}(\Sigma^n P^* \otimes_{\mathbb{Z}G} M) = Tor_{n-1}^G(D, M)$. Ora, como D é por hipótese livre de torção, decorre que $Tor_{n-1}^G(D, M) \approx H_{n-1}(G, D \otimes M)$ (Proposição 2.6). Ou seja, $H^i(G, M) \approx H_{n-1}(G, D \otimes M)$ para todo $\mathbb{Z}G$-módulo M. $(iv) \Rightarrow (i)$: É imediato. ∎

Exemplo 4.33. *Seja G o grupo trivial. Como G é do tipo FP (pois $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}$), $cd\, G = 0$ (Exemplo 4.5), $H^0(G, \mathbb{Z}G) \approx \mathbb{Z}^G = \mathbb{Z}$ e $H^i(G, \mathbb{Z}G) = H^i(G, Coind_G^G \mathbb{Z}G) = 0$ para $i \neq 0$ (Corolário 2.2.2), decorre que G é um grupo de dualidade de Poincaré (orientável).*

Exemplo 4.34. *Seja $G \approx \langle t \rangle \approx \mathbb{Z}$. Como G é do tipo FP (pois $0 \to \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} 0$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$), $cd\, G = 1$ (Exemplo 4.8), $H^0(G, \mathbb{Z}G) \approx H_1(G, Ind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}) \approx H_1(\{1\}, \mathbb{Z}) = 0$, $D = H^1(G, \mathbb{Z}G) \approx H_0(G, Ind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}) \approx H_0(\{1\}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$*

e $H^i(G, \mathbb{Z}G) = 0$ para $i > 1$ (Exemplo 4.8), decorre que G é um grupo de dualidade de Poincaré (orientável).

Exemplo 4.35. *Seja $G = \langle t \mid t^n = 1\rangle \approx \mathbb{Z}_n$ não trivial. Como G não é do tipo FP, pois $cd\, G = \infty$ (Lema B.22), decorre que G não é um grupo de dualidade.*

4.5 NOÇÕES VIRTUAIS

Se G é um grupo com torção, então, pelo Corolário 4.11, $cd\, G = \infty$, logo G não é do tipo FP (ou FL) e tampouco um grupo de dualidade. Entretanto, mediante a existência de um subgrupo H livre de torção de índice finito, podemos descrever resultados similares.

Definição 4.36. *Um grupo G tem uma propriedade **virtualmente** se existe um subgrupo de índice finito com esta propriedade.*

Definição 4.37. *Seja G um grupo. Dizemos que G é virtualmente livre de torção se existe um subgrupo H livre de torção e índice finito. A **dimensão cohomológica virtual** de G, denotada por $vcd\, G$, é a dimensão cohomológica de H.*

Sejam H e K subgrupos de G, livres de torção e de índice finito, então $H \cap K$ é um subgrupo de índice finito de H e de K, por conseguinte, $cd\, H = cd\, H \cap K = cd\, K$ ((BROWN, 1982), Teorema 3.1, p. 190), ou seja, a dimensão cohomológica virtual está bem definida.

Exemplo 4.38. *Pelo Exemplo 4.5, $vcd\, G = 0$ se, e somente se, G é finito.*

Definição 4.39. *Um grupo G é do **tipo** **VFP** (**VFL**) se existe um subgrupo do tipo FP (FL) de índice finito.*

Sejam G um grupo do tipo VFP e K um subgrupo livre de torção e de índice finito. Por definição, existe um subgrupo H de G do tipo FP (portanto livre de torção) de índice finito. Dado que $H \cap K$ é um subgrupo de índice finito de H, decorre que $H \cap K$ é do tipo FP. Ora, como $H \cap K$ é também um subgrupo de índice finito de K, decorre que K é do tipo FP ((BROWN, 1982), Proposição 6.6, p. 201). Ou seja, todo subgrupo livre de torção e de índice finito de G é do tipo FP desde que G seja do tipo VFP. Haja vista que a correspondência para grupos do tipo VFL ainda é desconhecida, introduzimos a seguinte condição: G é do **tipo WFL** se é virtualmente livre de torção e todo subgrupo livre de torção e índice finito é do tipo FL. Vale a cadeia de implicações: $WFL \Rightarrow VFL \Rightarrow VFP \Rightarrow (vcd\ < \infty)$.

Teorema 4.40 ((BROWN, 1982), Teorema 11.1, p. 226)**.** *Seja G um grupo virtualmente livre de torção. Então, $vcd\, G < \infty$ se, e somente se, existe um G-complexo finito, próprio[1] e contrátil.*

[1] Um G-complexo é próprio se, para cada σ-célula, $\mathrm{Stab}(\sigma)$ é finito.

Definição 4.41. *Um grupo G é de **dualidade virtual** se existe um subgrupo de dualidade de índice finito.*

Exemplo 4.42. *Sejam $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$ e $H = \mathbb{Z}$. Então, $\operatorname{vcd} G = 1$, pois $(G : H) = n$, $\mathbb{Z}$ é livre de toção e $\operatorname{cd} \mathbb{Z} = 1$ (Exemplo 4.8). Também, G é um grupo de dualidade virtual, pois $\mathbb{Z}$ é um grupo de dualidade (Exemplo 4.34).*

Proposição 4.43 ((BROWN, 1982), Proposição 11.3, p. 229)**.** *G é um grupo de dualidade virtual se, e somente se, satisfaz as condições:*

(i) G é do tipo VFP;

(ii) Existe um inteiro n tal que $H^i(G, \mathbb{Z}G) = 0$ para todo $i \neq n$ e $H^n(G, \mathbb{Z}G)$ é livre de torção.

Demonstração: Se G é um grupo de dualidade virtual, então, por definição, existe um subgrupo H de dualidade de índice finito, logo G é do tipo VFP. Pelo Teorema 4.32, existe um inteiro n tal que $H^i(G, \mathbb{Z}G) \approx H^i(H, \mathbb{Z}H) = 0$ para todo $i \neq n$ e $H^n(G, \mathbb{Z}G) \approx H^n(H, \mathbb{Z}H)$ é livre de torção. Reciprocamente, se G é do tipo VFP, existe, por definição, um subgrupo H do tipo FP de índice finito. Se existe um inteiro n tal que $H^i(H, \mathbb{Z}H) \approx H^i(G, \mathbb{Z}G) = 0$ para $i \neq n$ e $H^n(H, \mathbb{Z}H) \approx H^n(G, \mathbb{Z}G)$ é livre de torção, decorre do Teorema 4.32 que H é um grupo de dualidade. Portanto, G é um grupo de dualidade virtual[2]. ∎

[2] Como $(G : H) < \infty$, pelo Lema de Shapiro, $H^*(G, \mathbb{Z}G) \approx H^*(G, Ind_H^G \mathbb{Z}H) \approx H^*(G, Coind_H^G \mathbb{Z}H) \approx H^*(H, \mathbb{Z}H)$.

5 COHOMOLOGIA DE TATE E DE FARRELL

Neste capítulo, tratamos da teoria de cohomologia de Tate, desenvolvida sobre a classe dos grupos finitos. Posteriormente, apresentamos a teoria de cohomologia de Farrell, que fornece uma generalização natural para a cohomologia de Tate sobre a classe dos grupos com dimensão cohomológica virtual finita.

5.1 ÁLGEBRA HOMOLÓGICA RELATIVA

Nesta seção apresentamos alguns resultados de Álgebra Homológica Relativa.

Definição 5.1. *Uma injeção $i : M' \to M$ de $\mathbb{Z}G$-módulos é chamada de **admissível** se existe uma aplicação $\pi : M \to M'$ de $\mathbb{Z}H$-módulos, tal que $\pi \circ i = id_{M'}$. Uma sequência exata $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M''$ é admissível se $\operatorname{im} j \hookrightarrow M''$ é admissível. Um complexo de cadeia acíclico C é admissível se cada sequência $C_{i+1} \to C_i \to C_{i-1}$ é admissível.*

Observação 5.2. *Um complexo de cadeia C é admissível se, e somente se, é contrátil como complexo de $\mathbb{Z}H$-módulos (Proposição A.13).*

Definição 5.3. *Um $\mathbb{Z}G$-módulo Q é **relativamente injetivo** se satisfaz as seguintes condições equivalentes:*

(i) Todo diagrama de $\mathbb{Z}G$-módulos, como abaixo, com $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M''$ admissível, pode ser resolvido.

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "0"'] & M \arrow[r, "j"] \arrow[d] & M'' \arrow[dl, dashed] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

(ii) Todo diagrama de $\mathbb{Z}G$-módulos, como abaixo, com $M' \overset{i}{\hookrightarrow} M$ injeção admissível, pode ser resolvido.

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "i"] \arrow[d] & M \arrow[dl, dashed] \\ Q & \end{tikzcd}$$

(iii) O funtor contravariante $Hom_G(-, Q)$ leva injeções admissíveis de $\mathbb{Z}G$-módulos em sobrejeções de grupos abelianos.

Observação 5.4. *Todo módulo injetivo é relativamente injetivo. A recíproca não é verdadeira.*

Proposição 5.5 ((BROWN, 1982), Proposição 2.1, p. 130)**.** *Se N é um $\mathbb{Z}H$-módulo, então, $Coind_H^G N$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo relativamente injetivo.*

Demonstração: Pela Propriedade Universal de Coindução (Proposição 2.9),

$$Hom_G(-, Coind_H^G N) \approx Hom_H(Res_H^G(-), N).$$

Dado que $Hom_H(Res_H^G(-), N)$ leva injeções admissíveis de $\mathbb{Z}G$-módulos em sobrejeções de grupos abelianos, decorre que $Coind_H^G N$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo relativamente injetivo. ■

Corolário 5.6 ((BROWN, 1982), Corolário 2.2, p. 130)**.** *Se M é um $\mathbb{Z}G$-módulo, então existem um $\mathbb{Z}G$-módulo $\overline{M}$ relativamente injetivo e uma injeção admissível canônica $M \hookrightarrow \overline{M}$. Além disso, se $(G : H) < \infty$, então:*

(i) Se M é livre (projetivo) como $\mathbb{Z}H$-módulo, então $\overline{M}$ é livre (projetivo) como $\mathbb{Z}G$-módulo;

(ii) Se M é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$-módulo, então $\overline{M}$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$-módulo.

Demonstração: Consideremos, para a primeira parte, $\overline{M} = Coind_H^G Res_H^G M$ e a injeção canônica $M \hookrightarrow \overline{M}$. Se $(G : H) < \infty$, então, pelas Proposições 2.17 e 2.22, $\overline{M} = Coind_H^G Res_H^G M \approx Ind_H^G Res_H^G M \approx \mathbb{Z}[G/H] \otimes M$. Portanto, se M é livre (projetivo) como $\mathbb{Z}H$-módulo, então $\overline{M}$ é livre (projetivo) como $\mathbb{Z}G$-módulo. Finalmente, como $\mathbb{Z}[G/H]$ é finitamente gerado, decorre que $\overline{M}$ é finitamente gerado sempre que M for finitamente gerado. ■

Corolário 5.7 ((BROWN, 1982), Corolário 2.3, p. 130)**.** *Se $(G : H) < \infty$, então todo $\mathbb{Z}G$-módulo projetivo é relativamente injetivo.*

Demonstração: Sejam F um $\mathbb{Z}G$-módulo livre e F' um $\mathbb{Z}H$-módulo livre de mesmo posto que F. Então, $F \approx \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} F' = Ind_H^G F' \approx Coind_H^G F'$, ou seja, F é relativamente injetivo. Haja vista que todo módulo projetivo é somando direto de um módulo livre e que todo somando direto de um módulo relativamente injetivo é relativamente injetivo, decorre o resultado. ■

Proposição 5.8 ((BROWN, 1982), Proposição 2.4, p. 130)**.** *Sejam (C, ∂) e (C', ∂') dois complexos de cadeia de $\mathbb{Z}G$-módulos e r um número inteiro. Se C'_i é relativamente injetivo para todo $i < r$ e $C_{i+1} \to C_i \to C_{i-1}$ é uma sequência exata admissível para todo $i \leq r$. Então:*

(i) Toda família de morfismos $(f_i : C_i \to C'_i)_{i \geq r}$ que comuta com os operadores bordo estende-se a um morfismo de cadeia $C \to C'$;

(ii) Se $f, g : C \to C'$ são morfismos de cadeia e $(h_i : C_i \to C'_{i+1})_{i \geq r-1}$ é uma família de morfismos tal que $\partial'_{i+1} h_i + h_{i-1}\partial_i = f_i - g_i$ para $i \geq r$, então, $(h_i)_{i \geq r-1}$ estende-se a uma homotopia de f para g.

Demonstração: (i) Suponhamos que f_i esteja bem definida para cada $i \geq n$ com $n \leq r$, tal que $\partial'_{i+1} f_{i+1} = f_i \partial_{i+1}$. Haja vista que $C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1}$ é uma sequência exata admissível e $\partial'_n f_n : C_n \to C'_{n-1}$ é tal que $\partial'_n f_n \partial_{n+1} = \partial'_n \partial'_{n+1} f_{n+1} = 0$, decorre pelo fato de C'_{n-1} ser relativamente injetivo que existe $f_{n-1} : C_{n-1} \to C'_{n-1}$ tal que $f_{n-1}\partial_n = \partial'_n f_n$. (ii) Suponhamos que h_i esteja bem definida para cada $i \geq n-1$ com $n \leq r$ tal que $\partial'_{i+1} h_i + h_{i-1}\partial_i = f_i - g_i$. Seja $\tau_i = f_i - g_i$ e consideremos a aplicação $\tau_{n-1} - \partial'_n h_{n-1} : C_{n-1} \to C'_{n-1}$. Haja vista que $(\tau_{n-1} - \partial'_n h_{n-1})\partial_n = \tau_{n-1}\partial_n - \partial'_n h_{n-1}\partial_n = \tau_{n-1}\partial_n - \partial'_n(\tau_n - \partial'_{n+1} h_n) = \tau_{n-1}\partial_n - \partial'_n \tau_n = 0$, decorre, pelo fato de C'_{n-1} ser relativamente injetivo e $C_n \to C_{n-1} \to C_{n-2}$ ser uma sequência exata admissível, que existe $h_{n-1} : C_{n-2} \to C'_{n-1}$ tal que $h_{n-2}\partial_{n-1} = \tau_{n-1} - \partial'_n h_{n-1}$, isto é, $h_{n-2}\partial_{n-1} + \partial'_n h_{n-1} = \tau_{n-1} = f_{n-1} - g_{n-1}$. ∎

Definição 5.9. *Uma **resolução relativamente injetiva** de um $\mathbb{Z}G$-módulo M é um complexo de cocadeia não negativo Q de módulos relativamente injetivos junto com uma equivalência fraca $\eta : M \to Q$, tal que o complexo aumentado $0 \to M \to Q^0 \to Q^1 \to \cdots$ é admissível.*

Observação 5.10. *Pelo Corolário 5.6, existe uma resolução relativamente injetiva para todo $\mathbb{Z}G$-módulo M. Além disso, se $\eta : M \to Q$ e $\eta' : M \to Q'$ são duas resoluções relativamente injetivas, então, pela Proposição 5.8, existem únicos (a menos de homotopia) morfismos de cocadeia $f : Q \to Q'$ e $f' : Q' \to Q$ tais que $f_0\eta = \eta'$ e $f'_0\eta' = \eta$, logo, $f'_0 f_0 \eta = \eta$ e $f_0 f'_0 \eta' = \eta'$, por conseguinte, $f'f \simeq id_Q$ e $ff' \simeq id_{Q'}$. Portanto, quaisquer duas resoluções relativamente injetivas de M são homotopicamente equivalentes.*

Proposição 5.11 ((BROWN, 1982), Proposição 2.6, p. 132). *Se $(G : H) < \infty$ e M é um $\mathbb{Z}G$-módulo que é projetivo (finitamente gerado e projetivo) como $\mathbb{Z}H$-módulo, então existe uma resolução relativamente injetiva $\eta : M \to Q$ com cada Q^n projetivo (finitamente gerado e projetivo).*

Demonstração: Pelo Corolário 5.6, existe uma injeção admissível $\eta : M \to Q^0$ com $Q^0 := \overline{M}$ projetivo como $\mathbb{Z}G$-módulo. Haja vista que η cinde como morfismo de $\mathbb{Z}H$-módulos, decorre que *coker* η é projetivo (finitamente gerado e projetivo) como $\mathbb{Z}H$-módulo. Logo, pelo Corolário 5.6, $Q^1 := \overline{coker\,\eta}$ é projetivo (finitamente gerado e projetivo) como $\mathbb{Z}G$-módulo. Repetindo este processo indutivamente obtemos a resolução relativamente injetiva desejada. ∎

5.2 RESOLUÇÕES COMPLETAS

Nesta seção assumiremos que $vcd\, G = n < \infty$. Apresentaremos a definição de resolução completa de G e mostraremos que existe uma única (a menos de homotopia) resolução completa (F, P, ε) de G, tal que F e P coincidem em dimensões maiores que $n - 1$.

Definição 5.12. *Seja G um grupo com $vcd\, G = n < \infty$. Dizemos que (F, P, ε) é uma* ***resolução completa*** *de G se F é um complexo de cadeia acíclico de $\mathbb{Z}G$-módulos projetivos, $\varepsilon : P \to \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e F coincide com P em dimensões suficientemente altas.*

Exemplo 5.13. *Se $G = \langle t \mid t^n = 1\rangle \approx \mathbb{Z}_n$, então o complexo*

$$\begin{tikzcd}
F : \cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}G \arrow[r, "N"] & \mathbb{Z}G \arrow[r, "t-1"] & \mathbb{Z}G \arrow[r, "N"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & \mathbb{Z}G \arrow[r, "t-1"] & \mathbb{Z}G \arrow[r] & \cdots, \\
& & & & \mathbb{Z} & &
\end{tikzcd}$$

é uma resolução completa de G, onde $N = 1 + t + \cdots + t^{n-1}$.

Lema 5.14 ((BROWN, 1982), Lema 2.2, p. 274)**.** *Se $cd\, G = n < \infty$, então qualquer complexo de cadeia acíclico de $\mathbb{Z}G$-módulos projetivos é contrátil.*

Demonstração: Sejam M um $\mathbb{Z}G$-módulo que é livre como $\mathbb{Z}$-módulo e P uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento n. Então, $P \otimes M$ (com a G-ação diagonal) é uma resolução projetiva de M sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento n. Portanto, $proj\ dim_{\mathbb{Z}G}\, M \leq cdG = n$. Dado F um complexo de cadeia acíclico de $\mathbb{Z}G$-módulos projetivos, consideremos, para cada $k \in \mathbb{Z}$, a sequência exata $0 \to Z_k \to F_k \to \cdots \to F_{k-n+1} \to Z_{k-n} \to 0$. Haja vista que $proj\ dim_{\mathbb{Z}G}\, Z_{k-n} \leq n$, decorre do Lema 4.2 que Z_k é projetivo. Logo, a sequência exata $0 \to Z_{k+1} \to F_{k+1} \to Z_k \to 0$ cinde para todo $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, F é contrátil (Proposição A.13). ■

Proposição 5.15 ((BROWN, 1982), Proposição 2.1, p. 274)**.** (i) *Existe uma resolução completa (F, P, ε) de G tal que F e P coincidem em dimensões $\geq n = vcd\, G$. Se G é do tipo VFP, então F pode ser considerado do tipo finito.*
(ii) *Se (F, P, ε) e (F', P', ε') são duas resoluções completas de G, então existe uma única classe de homotopia de aplicações de (F, P, ε) em (F', P', ε') e estas aplicações são equivalentes.*

Demonstração: (i): Como $vcd\, G = n$, existe $H \subseteq G$ tal que $(G : H) < \infty$ e $cd\, H = n$. Se $\varepsilon : P \to \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e $K := ker\ \{P_{n-1} \to P_{n-2}\}$, então $(P_i)_{i \geq n}$ é uma resolução projetiva de K sobre $\mathbb{Z}G$. Como K é um $\mathbb{Z}H$-módulo projetivo, pois $cd\, H = n$ (Lema 4.2), existe, pela Proposição 5.11, uma resolução relativamente injetiva $\eta : K \to Q$ onde cada Q^n é um $\mathbb{Z}G$-módulo projetivo. Unindo $(P_i)_{i \geq n}$ e $(Q^i)_{i \geq 0}$ obtemos a resolução completa desejada. Se G é do tipo VFP então P e Q podem ser tomados do tipo finito.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[dr] & Q^0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q^{n-1} \arrow[r] & Q^n \arrow[r] & \cdots \\
 & & & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

(ii): Se (F, P, ε) é uma resolução completa de G, então, pelo Lema 5.14, F é contrátil como complexo de $\mathbb{Z}H$-módulos. Logo, pela Observação 5.2, F é um complexo de cadeia admissível. Além disso, como $(G : H) < \infty$, pelo Corolário 5.7, cada F_i é relativamente injetivo. Se (F', P', ε') é outra resolução completa de G, podemos construir uma única (a menos de homotopia) aplicação de cadeia $P \to P'$ que preserva o homomorfismo de aumento (Lema A.36). Pela Proposição 5.8, esta aplicação pode ser estendida a uma única (a menos de homotopia) aplicação de cadeia $F \to F'$, pois cada F_i é relativamente injetivo e F é um complexo de cadeia admissível. ■

Exemplo 5.16. *Consideremos $G = K \times L$ com $cd\, K = k < \infty$ e $vcd\, L = l < \infty$. Sejam $\varepsilon : P \to K$ uma resolução projetiva de K de comprimento k e (F, P', ε') uma resolução completa de L. Então, $P \otimes F$ é um complexo de cadeia acíclico e $P \otimes P'$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Dado que $(P \otimes F)_n = (P \otimes P')_n$ para todo $n \geq k + l$, decorre que $(P \otimes F, P \otimes P', \varepsilon \otimes \varepsilon')$ é uma resolução completa de G.*

5.3 COHOMOLOGIA DE TATE

Se G é um grupo finito, então $vcd\, G = 0$, logo, pela Proposição 5.15, existe uma resolução completa (F, P, ε) de G, tal que F e P coincidem em todas as dimensões não negativas. Alternativamente, uma resolução completa de G pode ser definida como um complexo de cadeia acíclico F de $\mathbb{Z}G$-módulos projetivos juntamente com um epimorfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos $\varepsilon : F_0 \to \mathbb{Z}$, tal que $\varepsilon : F_+ \to \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, onde $F_+ := (F_i)_{i \geq 0}$. Segue da definição que $\partial : F_0 \to F_{-1}$ se fatora unicamente como $\partial = \eta\varepsilon$, onde $\eta : \mathbb{Z} \to F_{-1}$ é um monomorfismo.

Definição 5.17. *Sejam G um grupo finito, F uma resolução completa de G e M um $\mathbb{Z}G$-módulo. A **cohomologia de Tate** de G com coeficientes em M é definida por*

$$\widehat{H}^*(G, M) = H^*(\mathscr{H}om_G(F, M)).$$

Exemplo 5.18. *Sejam $G = \langle t \mid t^n = 1\rangle \approx \mathbb{Z}_n$ e F a resolução completa de G dada no Exemplo 5.13. Haja vista que $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$, $\partial_{2i} = 0$ e $\partial_{2i+1} = |G| = n$, decorre que $\widehat{H}^{2i+1}(G, \mathbb{Z}) = \dfrac{ker\ n}{im\ 0} = 0$ e $\widehat{H}^{2i}(G, \mathbb{Z}) = \dfrac{ker\ 0}{im\ n} = \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_n$.*

Proposição 5.19 ((BROWN, 1982), Proposição 3.5, p. 133)**.** *Se $\varepsilon : P \to \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva do tipo finito de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, então $\varepsilon^* : \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \to \overline{P}$ é uma resolução projetiva contrária. A menos de isomorfismo, toda resolução projetiva contrária do tipo finito é obtida desta forma. Consequentemente, toda resolução completa do tipo finito é obtida a partir de resoluções projetivas do tipo finito $P' \to \mathbb{Z}$ e $P \to \mathbb{Z}$ juntando P' e $\overline{\Sigma P}$, onde ΣP é a suspensão de P.*

Observação 5.20. *Se G é um grupo finito, então existe uma resolução completa de G do tipo finito, logo, os grupos $\widehat{H}^i(G, M)$ são finitamente gerados.*

Lema 5.21 ((BROWN, 1982), Exemplo 2. p. 58)**.** *Sejam $G = \{1_G = g_0, \ldots, g_{n-1}\}$ um grupo de ordem n e M um $\mathbb{Z}G$-módulo. Então, a aplicação norma $\overline{N} : M_G \to M^G$, induzida por $N(m) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} g_i\right)m$, é um homomorfismo de grupos abelianos.*

Demonstração: Para cada $g \in G$, existe uma permutação de G que faz corresponder g_i a $g_i g$. Deste modo, $N(gm) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} g_i\right)gm = \left(\sum_{i=0}^{n-1} g_i g\right)m = \left(\sum_{i=0}^{n-1} g_i\right)m = N(m)$. Logo, $\overline{N}$ está bem definida. Como N é um homomorfismo de grupos abelianos, decorre que $\overline{N}$ é um homomorfismo de grupos abelianos. ■

Teorema 5.22 ((BROWN, 1982), p. 134-135)**.** *Sejam G um grupo finito e M um $\mathbb{Z}G$-módulo. Então:*

$$\widehat{H}^i(G, M) = \begin{cases} H^i(G, M), & i > 0; \\ coker\ \overline{N}, & i = 0; \\ ker\ \overline{N}, & i = -1; \\ H_{-i-1}(G, M), & i < -1. \end{cases}$$

Demonstração: Sejam F uma resolução completa de G do tipo finito, $F_+ = (F_i)_{i \geq 0}$ e $F_- = (F_i)_{i<0}$. Consideremos C^+ (respectivamente C^-) o complexo $\mathscr{H}om_{\mathbb{Z}G}(F_+, M)$ (respectivamente $\mathscr{H}om_{\mathbb{Z}G}(F_-, M)$). É imediato que:

$$\widehat{H}^i(G, M) = \begin{cases} H^i(C^+), & i > 0; \\ H^i(C^-), & i < -1 \end{cases}$$

e que existe uma sequência exata $0 \to \widehat{H}^{-1}(G, M) \to H^{-1}(C^-) \xrightarrow{\overline{\delta}} H^0(C^+) \to \widehat{H}^0(G, M) \to 0$, onde $\overline{\delta} : H^{-1}(C^-) \to H^0(C^+)$ é induzido por $\delta : C^{-1} \to C^0$ via o diagrama:

$$\begin{tikzcd} C^{-1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & C^0 \\ H^{-1}(C^-) \arrow[r, dashed, "\overline{\delta}"] & H^0(C^+). \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Como $\varepsilon : F_+ \to \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, decorre que $H^*(G, M) = H^*(C^+)$ para $i > 0$. Pela Proposição 5.19, existe uma resolução projetiva do tipo finito $P \to \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, tal que $F_- = \overline{\Sigma P}$. Assim, pela Proposição A.47, $C^- = \mathscr{H}\!om_{\mathbb{Z}G}(F_-, M) = \mathscr{H}\!om_{\mathbb{Z}G}(\overline{\Sigma P}, M) \approx \Sigma P \otimes_{\mathbb{Z}G} M$. Logo, $H^i(C^-) \approx H_{-i}(\Sigma P \otimes_{\mathbb{Z}G} M) = H_{-i-1}(P \otimes_{\mathbb{Z}G} M) = H_{-i-1}(G, M)$. Por conseguinte:

$$\widehat{H}^i(G, M) = \begin{cases} H^i(G, M), & i > 0; \\ H_{-i-1}(G, M), & i < -1. \end{cases}$$

e existe uma sequência exata $0 \to \widehat{H}^{-1}(G, M) \to H_0(G, M) \xrightarrow{\overline{\delta}} H^0(G, M) \to \widehat{H}^0(G, M) \to 0$. Afirmamos que $\overline{\delta}$ é o morfismo norma $\overline{N} : M_G \to M^G$. De fato, assumindo que as resoluções F_+ e P tem $\mathbb{Z}G$ na dimensão zero (pois ambas resoluções podem ser tomadas arbitrariamente como resoluções projetivas do tipo finito) e que ambas tem o homomorfismo de aumento canônico, decorre que $\eta = \varepsilon^* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}G$ é dado por $\eta(1) = \sum_{g \in G} g$. Ora, como $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \approx M$, obtemos o diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "N"] \arrow[d, two heads] & M \\ H_0(G, M) \arrow[r, dashed, "\overline{\delta}"] & H^0(G, M). \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

onde as aplicações verticais são as aplicações canônicas $M \to M_G$ e $M^G \hookrightarrow M$. Portanto, $\widehat{H}^{-1}(G, M) = ker\, \overline{N}$ e $\widehat{H}^0(G, M) = coker\, \overline{N}$. O diagrama abaixo simplifica os resultados desta demonstração.

$$\begin{tikzcd} & & & & H^0 \arrow[d, two heads] & H^1 \arrow[d, equal] & H^2 \arrow[d, equal] & \cdots \\ \cdots & \widehat{H}^{-3} \arrow[d, equal] & \widehat{H}^{-2} \arrow[d, equal] & \widehat{H}^{-1} \arrow[d, hook] & \widehat{H}^0 & \widehat{H}^1 & \widehat{H}^2 & \cdots \\ \cdots & H_2 & H_1 & H_0 \arrow[uur, "\overline{N}"] & & & & \end{tikzcd}$$

■

Similarmente, a **homologia de Tate** de G com coeficientes em M é definida por $\widehat{H}_*(G, M) = H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} M)$ e é inteiramente caracterizada por:

$$\widehat{H}_i(G, M) = \begin{cases} H_i(G, M), & i > 0; \\ ker\, \overline{N}, & i = 0; \\ coker\, \overline{N}, & i = -1; \\ H^{-i-1}(G, M), & i < -1. \end{cases}$$

Deste modo, obtemos que $\widehat{H}_i(G, M) = \widehat{H}^{-i-1}(G, M)$.

Exemplo 5.23. *Seja* $G = \langle t \mid t^n = 1 \rangle \approx \mathbb{Z}_n$. *Dado que a ação de* G *em* $\mathbb{Z}$ *é trivial,* $\mathbb{Z}_G = \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^G$ *e* $N(z) = nz$. *Portanto,* $\widehat{H}_{-1}(G, \mathbb{Z}) = \widehat{H}^0(G, \mathbb{Z}) = coker\ N = \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_n$ *e* $\widehat{H}^{-1}(G, \mathbb{Z}) = \widehat{H}_0(G, \mathbb{Z}) = ker\ N = 0$.

A seguir, apresentamos algumas propriedades da cohomologia de Tate que podem ser encontradas com detalhes em ((BROWN, 1982), p. 136).

(1) Para qualquer sequência exata $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ de $\mathbb{Z}G$-módulos, existe uma sequência exata longa

$$\cdots \xrightarrow{\delta} \widehat{H}^i(G, M') \to \widehat{H}^i(G, M) \to \widehat{H}^i(G, M'') \xrightarrow{\delta} \widehat{H}^{i+1}(G, M') \to \cdots .$$

(2) Se $H \subseteq G$, então qualquer resolução completa de G é uma resolução completa de H. Como G é finito, a indução e a coindução de H para G coincidem. Portanto, a versão do Lema de Shapiro para cohomologia de Tate é: se $H \subseteq G$ e M é um $\mathbb{Z}H$-módulo, então $\widehat{H}^*(H, M) \approx \widehat{H}^*(G, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M)$.

(3) Como $\widehat{H}^*(\{1\}, -) = 0$, decorre, pelo item (2), que $\widehat{H}^*(G, \mathbb{Z}G \otimes A) = 0$ para todo grupo abeliano A.

(4) Existe um produto *cup* $\widehat{H}^p(G, M) \otimes \widehat{H}^q(G, N) \to \widehat{H}^{p+q}(G, M \otimes N)$ com propriedades análogas as propriedades do produto *cup* da cohomologia ordinária.

De acordo com a Seção 2.6, dada uma resolução F, o produto *cup* na cohomologia ordinária em nível de cocadeia é o morfismo:

$$\mathscr{H}\!om_G(F, M) \otimes \mathscr{H}\!om_G(F, N) \to \mathscr{H}\!om_G(F \otimes F, M \otimes N). \tag{10}$$

Para tanto, utilizamos que $F \otimes F$ é uma resolução. Além disso, dada uma aproximação da diagonal $\Delta : F \to F \otimes F$, o produto *cup* pode ser tomado, em nível de cocadeia, via composição do morfismo:

$$\mathscr{H}\!om_G(\Delta, M \otimes N) : \mathscr{H}\!om_G(F \otimes F, M \otimes N) \to \mathscr{H}\!om_G(F, M \otimes N) \tag{11}$$

com o morfismo de (10). Deste modo,

$$\mathscr{H}\!om_G(F, M)^p \otimes \mathscr{H}\!om_G(F, N)^q \to \mathscr{H}\!om_G(F, M \otimes N)^{p+q} \tag{12}$$

depende apenas da componente $\Delta_{p,q} : P_{p+q} \to P_p \otimes P_q$.

O produto *cup* na cohomologia de Tate não é definido de forma análoga, pois, se F é uma resolução completa, $F \otimes F$ não é uma resolução completa e tampouco para cada inteiro n existem únicos inteiros (p, q) tais que $p + q = n$, inviabilizando a escolha de uma aproximação da diagonal $F \to F \otimes F$. O produto *cup* na cohomologia de Tate é definido via o produto tensorial completo[1] $F\widehat{\otimes}F$ de uma resolução completa F e por uma aproximação completa da diagonal[2] $\Delta : F \to F\widehat{\otimes}F$, isto é, que preserva o morfismo de aumento $\varepsilon\widehat{\otimes}\varepsilon : F\widehat{\otimes}F \to \mathbb{Z}\widehat{\otimes}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Deste modo, o produto *cup* em nível de cocadeia

$$\mathscr{H}\!om_G(F, M) \otimes \mathscr{H}\!om_G(F, N) \xrightarrow{\smile} \mathscr{H}\!om_G(F, M \otimes N) \tag{13}$$

é definido por $u \smile v = (u\widehat{\otimes}v) \circ \Delta$ e satisfaz $\delta(u \smile v) = \delta u \smile v + (-1)^p u \smile \delta v$. Isto induz o produto $\widehat{H}^p(G, M) \otimes \widehat{H}^q(G, N) \to \widehat{H}^{p+q}(G, M \otimes N)$.

Observação 5.24. *Considerando o produto* $\widehat{H}^*(G, \mathbb{Z}) \otimes \widehat{H}^*(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\smile} \widehat{H}^*(G, \mathbb{Z})$ *e observando que o elemento* $1 \in \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z} = \widehat{H}^0(G, \mathbb{Z})$ *(Exemplo 5.23) satisfaz* $1 \smile u = u = u \smile 1$ *para todo* $u \in \widehat{H}^*(G, \mathbb{Z})$*, obtemos* $\widehat{H}^*(G, \mathbb{Z})$ *como anel graduado.*

5.4 COHOMOLOGIA DE FARRELL

A cohomologia de Farrell estende a cohomologia de Tate para a classe dos grupos com dimensão cohomológica virtual finita e naturalmente apresenta resultados análogos.

Definição 5.25. *Sejam* G *um grupo com* $\operatorname{vcd} G = n < \infty$, (F, P, ε) *uma resolução completa de* G *e* M *um* $\mathbb{Z}G$*-módulo. A* ***cohomologia de Farrell*** *de* G *com coeficientes em* M *é definida por:*

$$\widehat{H}^*(G, M) = H^*(\mathscr{H}\!om_G(F, M)).$$

Observação 5.26. *Pela Proposição 5.15,* $\widehat{H}^*(G, M)$ *está bem definida. Além disso, dado que* $\operatorname{vcd} G = 0$ *se, e somente se,* G *é finito (Exemplo 4.38), decorre que a cohomologia de Farrell é consistente com a cohomologia de Tate e apresenta uma generalização para tal.*

Exemplo 5.27. *Se* G *é um grupo livre de torção com* $\operatorname{vcd} G = n$*, então* $\operatorname{cd} G = n$ *((BROWN, 1982), Teorema 3.1, p. 190), logo, existe uma resolução projetiva de* $\mathbb{Z}$ *sobre* $\mathbb{Z}G$ *de comprimento* n*. Tomando* $F = 0$*, obtemos que* $\widehat{H}^*(G, -) = 0$.

Proposição 5.28 (Lema de Shapiro)**.** *Sejam* G *um grupo com* $\operatorname{vcd} G < \infty$*,* $H \subseteq G$ *e* M *um* $\mathbb{Z}H$*-módulo. Então,* $\widehat{H}^*(H, M) \approx \widehat{H}^*(G, Coind_H^G M)$.

Exemplo 5.29. *Sejam* G *um grupo com* $\operatorname{vcd} G < \infty$*,* H *um subgrupo livre de torção com índice finito e* M *um* $\mathbb{Z}H$*-módulo. Então, pela Proposição 5.28, Proposição 2.17 e Exemplo 5.27,* $\widehat{H}^*(G, Ind_H^G M) \approx \widehat{H}^*(G, Coind_H^G M) \approx \widehat{H}^*(H, M) = 0$.

Assim como o Lema de Shapiro, as propriedades citadas para cohomologia de Tate também valem para cohomologia de Farrell e podem ser provadas tal como para a cohomologia de Tate. Além disso, também existe um produto *cup* na cohomologia de Farrell definido de maneira análoga ao produto *cup* na cohomologia de Tate.

1 O produto tensorial completo é definido no Apêndice A (Definição A.44).

2 De acordo com ((BROWN, 1982), p. 140-141), existe uma aproximação completa da diagonal $\Delta : F \to F\widehat{\otimes}F$.

5.4.1 UMA OBSTRUÇÃO PARA GRUPOS DE DUALIDADE VIRTUAL

Nesta subseção, apresentamos os grupos de cohomologia de Farrell como uma obstrução para os grupos de dualidade virtual.

Proposição 5.30 ((BROWN, 1982), Proposição 2.5, p. 276)**.** *Sejam G um grupo de dualidade virtual com módulo dualizante D, $\varepsilon : (P, d) \to \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva do tipo finito de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e $\eta : Q \to D$ uma resolução projetiva do tipo finito de D sobre $\mathbb{Z}G$. Então, existe uma resolução completa F tal que o complexo dual $\overline{F} = \mathscr{H}om_{\mathbb{Z}G}(F, \mathbb{Z}G)$ é o mapping cone de uma aplicação de cadeia $\Sigma^{-n}Q \to \overline{P}$. Em particular, $F_i = P_i$ para $i \geq n$ e $F_i = (Q_{n-1-i})^*$ para $i \leq -1$.*

Demonstração: Seja $\overline{P} = \mathscr{H}om_G(P, \mathbb{Z}G)$ o complexo dual de P. Dado que P é uma resolução projetiva do tipo finito, decorre que $0 \to \overline{P}_0 \to \cdots \to \overline{P}_n \to coker\, d^*_{n-1} \to 0$ é uma resolução projetiva de $coker\, d^*_{n-1}$ sobre $\mathbb{Z}G$ (Proposição A.47). Como $D = H^n(G, \mathbb{Z}G) = ker\, d^*_n / im d^*_{n-1} \subseteq coker\, d^*_{n-1}$ e Q é uma resolução projetiva de D sobre $\mathbb{Z}G$, pelo Lema A.36, existe um único homomorfismo de cadeia (a menos de homotopia) $f : \Sigma^{-n}Q \to \overline{P}$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & Q_{n+1} & & Q_n & & & & Q_1 & & Q_0 & & \\
 & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel & & \\
\cdots & \longrightarrow & (\Sigma^{-n}Q)_1 & \longrightarrow & (\Sigma^{-n}Q)_0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & (\Sigma^{-n}Q)_{-n+1} & \longrightarrow & (\Sigma^{-n}Q)_{-n} & \longrightarrow 0 \longrightarrow & \cdots \\
 & & {\scriptstyle f_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle f_0}\big\downarrow & & & & {\scriptstyle f_{-n+1}}\big\downarrow & & {\scriptstyle f_{-n}}\big\downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P^*_0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P^*_{-n+1} & \longrightarrow & P^*_{-n} & \longrightarrow 0 \longrightarrow & \cdots \\
 & & & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel & & \\
 & & & & \overline{P}_0 & & & & \overline{P}_{n-1} & & \overline{P}_n & &
\end{array}
$$

Ora, como f é uma equivalência fraca, decorre que o *mapping cone* C de f é um complexo acíclico ((BROWN, 1982), Proposição 0.6, p. 6) de módulos projetivos finitamente gerados. Se F é o complexo dual $\overline{C}$, então $F_i = (C_{-i})^* = (\overline{P}_{-i} \oplus (\Sigma^{-n}Q)_{-1-i})^* = P^{**}_i \oplus (Q_{n-1-i})^* = P_i \oplus (Q_{n-1-i})^*$, por conseguinte, $F_i = P_i$ para $i \geq n$ e $F_i = (Q_{n-1-i})^*$ para $i \leq -1$. Finalmente, como $vcd\, G < \infty$, existe um subgrupo $H \subseteq G$ livre de torção de índice finito, então $F = \mathscr{H}om_{\mathbb{Z}G}(C, \mathbb{Z}G) \approx \mathscr{H}om_{\mathbb{Z}H}(C, \mathbb{Z}H)$, logo, pelo Lema 5.14, C é $\mathbb{Z}H$-contrátil, por conseguinte, F também é $\mathbb{Z}H$-contrátil, portanto, acíclico. ■

Observação 5.31. *Se $C = \overline{F}$, então $C = \Sigma^{1-n}Q$ em dimensões ≥ 1, pois, se $i \geq 1$, então $\overline{F}_i = F^*_{-i} = C^{**}_i = C_i = P^*_i \oplus (\Sigma^{-n}Q)_{i-1} = Q_{i-1+n} = (\Sigma^{1-n}Q)_i$. Portanto, $\Sigma^{n-1}C = Q$ em dimensões $\geq n$, pois, se $i \geq n$, então $(\Sigma^{n-1}C)_i = C_{i-n+1} = (\Sigma^{1-n}Q)_{i-n+1} = Q_i$.*

Proposição 5.32 ((BROWN, 1982), p. 279)**.** *Se G é um grupo de dualidade virtual com módulo dualizante $D = H^n(G, \mathbb{Z}G)$, então $\widehat{H}^i(G, -) \approx H_{n-1-i}(G, D \otimes -)$ para todo $i < -1$.*

Demonstração: Sejam F a resolução completa dada pela Proposição 5.30 e $E = \Sigma^{n-1}\overline{F}$. Então, $\widehat{H}^i(G,-) = H^i(\mathscr{H}\!om_G(F,-)) = H_{-i}(\overline{F}\otimes_G -) = H_{n-1-i}(E\otimes_G -)$. Pela Observação 5.31, tomando Q a resolução projetiva de D sobre $\mathbb{Z}G$ (dada pela Proposição 5.30), existe uma aplicação de cadeia $E \to Q$ que coincide com a identidade em dimensões $\geq n$, logo, para cada $j > n$, induzimos o isomorfismo $H_j(E \otimes_G -) \to Tor_j^G(D,-)$. Ora, como D é livre de torção (Proposição 4.43), $Tor_j^G(D,-) \approx H_j(G, D\otimes -)$ (Proposição 2.6). Portanto, $\widehat{H}^i(G,-) \approx H_{n-1-i}(E \oplus_G -) \approx Tor_{n-1-i}^G(D,-) \approx H_{n-1-i}(G, D \otimes -)$. ■

Seja M é um $\mathbb{Z}G$-módulo. A sequência exata $0 \to \overline{P} \otimes_G M \to \overline{F} \otimes_G M \to \Sigma^{-n}Q \otimes_G M \to 0$, induz a sequência exata longa em homologia:

$$\cdots \to H_j(\overline{P} \otimes_G M) \to H_j(\overline{F} \otimes_G M) \to H_j(\Sigma^{-n}Q \otimes_G M) \to H_{j-1}(\overline{P} \otimes_G M) \to \cdots \quad (14)$$

Haja vista que $\overline{F} \otimes_G M \approx \mathscr{H}\!om_G(F, M)$ e $\overline{P} \otimes_G M \approx \mathscr{H}\!om_G(P, M)$ (Proposição A.47), obtemos de (14) a sequência exata:

$$\cdots \to H^{-j}(G,M) \to \widehat{H}^{-j}(G,M) \to H_{n+j-1}(G, D \otimes M) \to H^{-j+1}(G,M) \to \cdots \quad (15)$$

Tomando $j = -i$, obtemos de (15) a sequência exata:

$$\cdots \to H^i(G,M) \to \widehat{H}^i(G,M) \to H_{n-i-1}(G, D \otimes M) \to H^{i+1}(G,M) \to \cdots \quad (16)$$

Denotando $H_i(G, D\otimes -)$ por $\widetilde{H}_i$, $\widehat{H}^i(G,-)$ por $\widehat{H}^i$ e $H^i(G,-)$ por H^i e observando que $H^{-1} = \widetilde{H}_{-1} = 0$, obtemos de (16) a sequência exata:

$$0 \to \widehat{H}^{-1} \to \widetilde{H}_n \to H^0 \to \widehat{H}^0 \to \widetilde{H}_{n-1} \to H^1 \to \cdots \to \widetilde{H}_0 \to H^n \to \widehat{H}^n \to 0.$$

O diagrama abaixo apresenta esta sequência e também é possível observar que $H^i \approx \widehat{H}_{n-i}$ para todo $0 \leq i \leq n$ se, e somente se, $\widehat{H}^i = 0$ para $-1 \leq i \leq n$, ou seja, a cohomologia de Farrell é uma obstrução para que esse isomorfismo ocorra.

$$\begin{tikzcd}
 & & & H^0 \arrow[d] & \cdots & H^{n-1} \arrow[d] & H^n \arrow[d, two heads] & H^{n+1} \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots & \widehat{H}^{-2} \arrow[d, equal] & \widehat{H}^{-1} \arrow[d, tail] & \widehat{H}^0 \arrow[d] & \cdots & \widehat{H}^{n-1} \arrow[d] & \widehat{H}^n & \widehat{H}^{n+1} & \cdots \\
\cdots & \widetilde{H}_{n+1} & \widetilde{H}_n \arrow[uur] & \widetilde{H}_{n-1} & \cdots & \widetilde{H}_0 \arrow[uur] & & &
\end{tikzcd}$$

5.5 COHOMOLOGIA EQUIVARIANTE DE FARRELL

Sejam G um grupo com $vcd\, G < \infty$, X um G-complexo de dimensão finita, F uma resolução completa de G e M um $\mathbb{Z}G$-módulo. A ***cohomologia equivariante de Farrell de X com coeficientes em M*** é definida por:

$$\widehat{H}_G^*(X,M) = H^*(\mathscr{H}\!om_G(F, C^*(X,M))).$$

Ao considerarmos o caso particular em que X é um G-complexo próprio e contrátil, obtemos, pela versão cohomológica da Observação 3.33, a sequência espectral

$$E_1^{p,q} = \prod_{\sigma \in \Sigma_p} \widehat{H}^q(G_\sigma, M_\sigma) \Rightarrow \widehat{H}^{p+q}(G, M), \tag{17}$$

onde Σ_p é um conjunto de representantes para X_p/G. Neste caso, estabelecemos uma relação entre a cohomologia de Farrell e a cohomologia de Tate dos subgrupos finitos de G. Além disso, embora a sequência espectral fica compreendida no primeiro e no quarto quadrante, não há problemas com sua convergência, pois $dimX < \infty$. Especificamente, a sequência espectral está delimitada na faixa vertical $0 \leq p \leq dimX$ de modo que $E_r = E_\infty$ para $r > dimX$.

Por simplicidade, assumiremos que X é um complexo simplicial[3] ordenado cuja ordem é preservada pela G-ação, por conseguinte, $M_\sigma = M$, ou seja, $\mathbb{Z}_\sigma = \mathbb{Z}$ com a G_σ-ação trivial para cada simplexo σ. Isso nos permite suprimir M de $\widehat{H}^*(G_\sigma, M)$. Além disso, de acordo com ((BROWN, 1982), Adendo 11.2, p. 227), podemos tomar X de modo que X^H é não vazio e conexo para todo subgrupo finito $H \subseteq G$.[4]

Nosso primeiro objetivo é obter uma descrição puramente algébrica para $E_2^{0,q}$, para tanto, precisamos calcular o diferencial $d_1^{0,q}$. Relembramos que para todo simplexo σ de X e todo $g \in G$, obtemos o isomorfismo de conjugação $c(g^{-1})^* : \widehat{H}^*(G_\sigma) \to \widehat{H}^*(G_{g\sigma})$ denotado simplesmente por $u \mapsto gu$.

Lema 5.33 ((BROWN, 1982), Lema 4.2, p. 282)**.** *Se X_p é o conjunto dos p-simplexos de X, então $E_1^{p,q}$ pode ser identificado com o subgrupo de $\prod_{\sigma \in X_p} \widehat{H}^q(G_\sigma)$ formado pelas famílias $(u_\sigma)_{\sigma \in X_p}$, tal que $gu_\sigma = u_{g\sigma}$ para todo $g \in G$ e todo $\sigma \in X_p$. Além disso, o diferencial $d_1^{p,q}$ é a restrição deste subgrupo com relação a aplicação*

$$d : \prod_{\sigma \in X_p} \widehat{H}^q(G_\sigma) \to \prod_{\tau \in X_{p+1}} \widehat{H}^q(G_\tau),$$

definida por: para todo $\tau = (v_0, \ldots, v_{p+1}) \in X_{p+1}$, sejam $\tau_i = (v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_{p+1})$, com $v_0 < \cdots < v_{p+1}$ e $i = 0, \ldots, p+1$, e $\rho_i : \widehat{H}^q(G_{\tau_i}) \to \widehat{H}^q(G_\tau)$ o morfismo de restrição. Então, d é dado por:

$$(u_\sigma) \mapsto \Big(\tau \mapsto \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \rho_i(u_{\tau_i})\Big).$$

Demonstração: Como $\prod_{\sigma \in X_p} \widehat{H}^q(G_\sigma) = \prod_{\sigma \in \Sigma_p} \prod_{g \in G/G_\sigma} \widehat{H}^q(G_{g\sigma})$ e a ação de conjugação de G_σ em $\widehat{H}^q(G_\sigma)$ é trivial (Proposição 5.42), decorre que a injeção $\alpha : E_1^{p,q} = \prod_{\sigma \in \Sigma_p} \widehat{H}^q(G_\sigma) \to \prod_{\sigma \in X_p} \widehat{H}^q(G_\sigma)$ dada por $(u_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_p} \mapsto (gu_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_p, g \in G/G_\sigma}$ está bem definida. Haja vista que a imagem de α compreende o conjunto das famílias $(u_\sigma)_{\sigma \in X_p}$ tal que

[3] Mais detalhes sobre complexos simpliciais podem ser encontrados em (GEOGHEGAN, 2007).
[4] O conjunto X^H é definido pelos pontos fixados na ação de H em X. Equivalentemente, $X^H = \{x \in X \mid \mathrm{Stab}(x) = H\}$.

$gu_\sigma = u_{g\sigma}$ para todo $\sigma \in X_p$ e todo $g \in G$, fica provado a primeira parte do lema. Para a segunda parte, seja F uma resolução completa de G. Então,

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} &= \widehat{H}^q(G, C^p(X, M)) \\ &= H^q(\mathscr{H}om_{\mathbb{Z}G}(F, Hom(X_p, M))) \\ &= H^q(Hom_G(X_p, \mathscr{H}om_{\mathbb{Z}}(F, M))). \end{aligned}$$

Portanto, um elemento $u \in E_1$ pode ser representado por uma família $(c_\sigma)_{\sigma \in X_p}$ tal que $c_\sigma \in \mathscr{H}om_{\mathbb{Z}}(F, M)$ e $gc_\sigma = c_{g\sigma}$ para todo $g \in G$ e todo $\sigma \in X_p$. Tomando $g \in G_\sigma$, decorre que $c_\sigma \in \mathscr{H}om_{\mathbb{Z}G_\sigma}(F, M)$. Como cada c_σ representa um elemento $u_\sigma \in \widehat{H}^q(G_\sigma, M)$, decorre que $\alpha(u) = (\alpha_\sigma)_{\sigma \in X_p}$. O diferencial d_1 é simplesmente o morfismo $\widehat{H}^q(G, \delta)$: $\widehat{H}^q(G, C^p(X, M)) \to \widehat{H}^q(G, C^{p+1}(X, M))$ induzido pelo operador de cobordo

$$\delta : C^p(X, M) \to C^{p+1}(X, M).$$

O lema decorre da definição de δ em temos das aplicações face $X_{p+1} \to X_p$ e do fato que a restrição $\rho_i : \widehat{H}^q(G_{\tau_i}) \to \widehat{H}^q(G_\tau)$ é induzida pela inclusão $\mathscr{H}om_{\mathbb{Z}G_{\tau_i}}(F, M) \hookrightarrow \mathscr{H}om_{\mathbb{Z}G_\tau}(F, M)$. ■

Em particular, podemos calcular $E_2^{0,q} = ker\ d_1^{0,q}$ de modo a obter:

Lema 5.34 ((BROWN, 1982), Lema 4.3, p. 283)**.** *$E_2^{0,q}$ pode ser identificado com o subgrupo de $\prod_{v \in X_0} \widehat{H}^q(G_v)$ formado pelas famílias $(u_v)_{v \in X_0}$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $gu_v = u_{gv}$ para todo $g \in G$ e todo $v \in X_0$;

(ii) Se e é um 1-simplexo de X com vértices v_0 e v_1, então u_{v_0} e u_{v_1} são restrições de um mesmo elemento de $\widehat{H}^q(G_e)$.

Mediante a hipótese de que X^H é não vazio e conexo para todo subgrupo finito $H \subseteq G$, obtemos a seguinte descrição algébrica para $E_2^{0,q}$:

Proposição 5.35 ((BROWN, 1982), Proposição 4.4, p. 284)**.** *Seja $\mathfrak{F}$ o conjunto dos subgrupos finitos de G. Então, $E_2^{0,q}$ é isomorfo ao subgrupo $\mathfrak{G}^q(G) \subseteq \prod_{H \in \mathfrak{F}} \widehat{H}^q(H)$ formado pelas famílias $(u_H)_{H \in \mathfrak{F}}$ que satisfazem as seguintes condições:*

(i) $gu_H = u_{gHg^{-1}}$ para todo $g \in G$ e todo $H \in \mathfrak{F}$;

(ii) Se $H' \subseteq H$, então $res^H_{H'} u_H = u_{H'}$.

Demonstração: Consideremos a descrição de $E_2^{0,q}$ dada no Lema 5.34. Seja $\varphi : \mathfrak{G}^q(G) \to E_2^{0,q}$ a aplicação dada por $(u_H)_{H \in \mathfrak{F}} \mapsto (u_{G_v})_{v \in X_0}$. Como $X^H \neq \emptyset$, existe um vértice v tal que $H \subseteq G_v$ e pelo item (ii) obtemos que φ é injetivo. Suponhamos que $(u_v)_{v \in X_0}$

satisfaz as condições do Lema 5.34. Dado $H \in \mathfrak{F}$, escolhemos um vértice v tal que $H \subseteq G_v$ e tomamos $w_H := res_H^{G_v} u_v$. Como X^H é conexo, o item (ii) do Lema 5.34 mostra que w_H é independente da escolha de v. Logo, a família $(w_H)_{H\in\mathfrak{F}} \in \mathfrak{G}^q(G)$ é tal que $(w_H)_{H\in\mathfrak{F}} \mapsto (u_v)_{v\in X_0}$. Portanto, $\mathfrak{G}^q(G) \overset{\mathcal{L}}{\approx} E_2^{0,q}$. ■

É possível introduzirmos uma estrutura multiplicativa à sequência espectral dada em (17). Para tanto, a fim de simplificar a notação, assumiremos que o módulo dos coeficientes M é um anel comutativo R com a G-ação trivial. O complexo de cocadeia $C^*(X, R)$, que por simplificação denotaremos por $C^*(X)$, tem um produto *cup*

$$C^*(X) \otimes C^*(X) \to C^*(X)$$

associativo e comutativo, a menos de homotopia. Sejam F uma resolução completa de G e $\Delta : F \to F\widehat{\otimes}F$ uma aproximação da diagonal. Consideremos o seguinte produto *cup*:

$$\mathscr{H}om_G(F, C^*(X))\otimes \mathscr{H}om_G(F, C^*(X)) \to \mathscr{H}om_G(F, C^*(X)\otimes C^*(X)) \to \mathscr{H}om_G(F, C^*(X)),$$

onde o primeiro morfismo é induzido por Δ e o segundo morfismo é induzido pelo produto *cup* em cocadeia. O produto *cup* acima definido é compatível com as filtrações do complexo total que determina $E_1^{p,q}$, isto é, tem-se um produto

$$F^p\, \mathscr{H}om_G(F, C^*(X)) \otimes F^{p'}\, \mathscr{H}om_G(F, C^*(X)) \to F^{p+p'}\, \mathscr{H}om_G(F, C^*(X) \otimes C^*(X)).$$

Portanto, temos um produto *cup* induzido

$$E_r^{p,q} \otimes E_r^{p',q'} \overset{\smile}{\to} E_r^{p+p',q+q'},$$

para todo $r \geq 1$.

Apresentamos a seguir duas proposições. Suas respectivas demostrações podem ser encontradas em (BROWN, 1982).

Proposição 5.36 ((BROWN, 1982), Proposição 4.5, p. 285)**.** (i) *O diferencial d_r é uma derivação com respeito ao produto em E_r, isto é, $d_r(uv) = d_r(u) \cdot v + (-1)^{deg\ u} u \cdot d_r(v)$;*

(ii) O produto em $E_{r+1} = H(E_r)$ é obtido do produto em E_r pela passagem à homologia;

(iii) O produto em E_1 é dado pela composição:

$$\widehat{H}^q(G, C^p(X))\otimes\widehat{H}^{q'}(G, C^{p'}(X)) \to \widehat{H}^{q+q'}(G, C^p(X)\otimes C^{p'}(X)) \to \widehat{H}^{q+q'}(G, C^{p+p'}(X)),$$

onde o primeiro morfismo é o produto cup usual em $\widehat{H}^*(G, -)$ e o segundo morfismo é induzido pelo produto cup em $C^*(X)$;

(iv) O produto em E_r é associativo para $r \geq 1$ e comutativo para $r \geq 2$;

(v) O produto em E_∞ é compatível com o produto usual em $\widehat{H}^*(G, R)$ via identificação de E_∞ com $Gr\widehat{H}^*(G, R)$;

(vi) O isomorfismo de grupos $E_2^{0,*} \approx \mathfrak{G}^*(G)$ *dado pela Proposição 5.35 é também um isomorfismo de anéis.*

Para cada p primo, podemos considerar o homomorfismo de anéis $\rho : \widehat{H}^*(G, \mathbb{Z}_p) \to \mathfrak{G}^*(G, \mathbb{Z}_p)$ dado via morfismos de restrição $\widehat{H}^*(G) \to \widehat{H}^*(H)$ com $H \in \mathfrak{F}$.

Proposição 5.37 ((BROWN, 1982), Proposição 4.6, p. 286)**.** *O morfismo* $\rho : \widehat{H}^*(G, \mathbb{Z}_p) \to \mathfrak{G}^*(G, \mathbb{Z}_p)$ *possui as seguintes propriedades:*

(i) Todo elemento de ker ρ *é nilpotente;*

(ii) Se $u \in \mathfrak{G}^*(G, \mathbb{Z}_p)$*, então existe um inteiro* $k \geq 0$ *tal que* $u^{p^k} \in im\, \rho$.

5.6 GRUPOS COM COHOMOLOGIA PERIÓDICA

Dizemos que um grupo G com $vcd\, G < \infty$ tem ***cohomologia periódica*** se, para algum $d \neq 0$, existe um elemento $u \in \widehat{H}^d(G, \mathbb{Z})$ invertível no anel $\widehat{H}^*(G, \mathbb{Z})$. Mediante a existência de u, obtemos, para cada $\mathbb{Z}G$-módulo M e todo $i \in \mathbb{Z}$, um isomorfismo de periodicidade $\widehat{H}^i(G, M) \approx \widehat{H}^{i+d}(G, M)$. Similarmente, dizemos que G tem ***cohomologia p-periódica*** (com p primo) se a componente p-primária $\widehat{H}^*(G, \mathbb{Z})_{(p)}$ contém um elemento invertível de grau não nulo d para o qual $\widehat{H}^i(G, M)_{(p)} \approx \widehat{H}^{i+d}(G, M)_{(p)}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Dado que $\widehat{H}^*(G, \mathbb{Z}) \approx \prod_p \widehat{H}^*(G, \mathbb{Z})_{(p)}$ é um produto finito de anéis com p variando sobre os primos com p-torção, decorre que G tem cohomologia periódica se, e somente se, G tem cohomologia p-periódica.

Por conveniência, podemos utilizar $\widehat{H}^*(G, \mathbb{Z}_p)$ em vez de $\widehat{H}^*(G, \mathbb{Z})_{(p)}$. A fim de justificar este fato, expomos uma série de lemas de modo a demonstrar a Proposição 5.42, que trata desta equivalência.

Tomando $H(k) := \widehat{H}^*(G, \mathbb{Z}_{p^k})$ e considerando, para cada par (k, l) de inteiros positivos, a sequência exata curta $0 \to \mathbb{Z}_{p^l} \to \mathbb{Z}_{p^{k+l}} \to \mathbb{Z}_{p^k} \to 0$, obtemos a sequência exata longa em cohomologia:

$$\cdots \to H(l) \to H(k+l) \xrightarrow{\alpha_{k+l,k}} H(k) \xrightarrow{\beta_{k,l}} H(l) \to \cdots . \tag{18}$$

Lema 5.38 ((BROWN, 1982), Lema 6.3, p. 289)**.** *Se* $k \geq l$*, então* $\beta_{k,l}(uv) = \beta_{k,l}(u) \cdot u + (-1)^{deg\ u} u \cdot \beta_{k,l}(v)$.[5]

Demonstração: Sejam F uma resolução completa e $F \to F \widehat{\otimes} F$ uma aproximação completa da diagonal. Dado $u \in H(k)$, existe uma cocadeia $c \in \mathscr{H}om_G(F, \mathbb{Z})$ cuja redução $modp^k$ é um cociclo que representa u, por conseguinte, δc é divisível por p^k e $\delta c / p^k$ é um cociclo cuja redução $modp^l$ representa $\beta_{k,l}(u)$. A propriedade de derivação de $\beta_{k,l}$ é decorrente da propriedade de derivação do operador de cobordo δ. ■

[5] O lado direito faz sentido porque o produto *cup* $H(H) \otimes H(l) \to H(l)$ para $k \geq l$.

Lema 5.39 ((BROWN, 1982), Lema 6.4, p.289)**.** *Para todo $u \in H(1)$ e todo $k \geq 1$, $u^{p^k} \in im\, \alpha_{k+1,1} = ker\, \beta_{1,k}$.*

Tomando $H(\infty) := \widehat{H}^*(G, \mathbb{Z})_{(p)}$, podemos obter uma sequência exata como em (18), para isto, consideramos as componentes p-primária da sequência exata em cohomologia associada à sequência exata curta $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{p^k} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{p^k} \to 0$ $(k < \infty)$.

Lema 5.40 ((BROWN, 1982), Lema 6.5, p. 289)**.** *Existe um k suficientemente grande tal que $im\, \alpha_{k+1,1} = im\, \alpha_{\infty,1}$.*

Demonstração: Haja vista que $H(\infty)$ é aniquilado por p^k para algum k ((BROWN, 1982), Exercício 2, p. 280), decorre que $\alpha_{\infty,k} : H(\infty) \hookrightarrow H(k)$ é injetiva, por conseguinte, $ker\, \beta_{1,k} = ker\, \beta_{1,\infty}$, pois $\beta_{1,k} = \alpha_{\infty,k}\beta_{1,\infty}$. Portanto, $im\, \alpha_{k+1,1} = ker\, \beta_{1,k} = ker\, \beta_{1,\infty} = im\, \alpha_{\infty,1}$. ■

Lema 5.41 ((BROWN, 1982), Lema 6.6, p. 289)**.** *A aplicação $\alpha := \alpha_{\infty,1} : H(\infty) \to H(1)$ tem as seguintes propriedades:*

(i) Todo elemento de $ker\, \alpha$ é nilpotente;

(ii) Para todo $u \in H(1)$, existe um inteiro k tal que $u^{p^k} \in im\, \alpha$.

Demonstração: (i): Se $u \in ker\, \alpha$, então existe $v \in H(\infty)$ tal que $u = pv$. Ora, como $H(\infty)$ é aniquilado por p^k para k suficientemente grande, decorre que $u^k = p^k v^k = 0$, logo, u é nilpotente. (ii): Pelo Lema 5.40, existe um k suficientemente grande tal que $im\, \alpha = im\, \alpha_{k+1,1}$ e pelo Lema 5.39, $u^{p^k} \in im\, \alpha$. ■

Proposição 5.42 ((BROWN, 1982), Proposição 6.1, p. 288)**.** *G tem cohomologia p-periódica se, e somente se, $\widehat{H}^*(G, \mathbb{Z}_p)$ contém um elemento invertível de grau não nulo.*

Demonstração: Dado que $\widehat{H}^*(G, \mathbb{Z}) \to \widehat{H}^*(G, \mathbb{Z}_p)$ é um homomorfismo de anéis que leva cada componente p-primária em zero, exceto $\widehat{H}^*(G, \mathbb{Z})_{(p)}$, decorre que $\alpha : H(\infty) \to H(1)$ é um homomorfismo de anéis, logo, elementos invertíveis de $H(\infty)$ são levados por α em elementos invertíveis de $H(1)$. Reciprocamente, se $u \in H(1)$ é um elemento invertível de grau não nulo, então, pelo Lema 5.41, existe um inteiro k tal que $u^k, u^{-k} \in im\, \alpha$. Tomando $u^k = \alpha(\widetilde{u})$ e $u^{-k} = \alpha(\widetilde{v})$, obtemos que $\alpha(\widetilde{u}\widetilde{v}) = 1$, por conseguinte, pelo Lema 5.41, $\widetilde{u}\widetilde{v} = 1 - x$ com x nilpotente, então $1 - x$ é invertível com inverso $1 + x + x^2 + \cdots$, logo $\widetilde{u}$ é invertível. Portanto, G tem cohomologia p-periódica. ■

Teorema 5.43 ((BROWN, 1982), Teorema 6.7, p. 290)**.** *G tem cohomologia p-periódica se, e somente se, todo subgrupo finito de G tem cohomologia p-periódica.*

Demonstração: Se G tem cohomologia p-periódica, então, por definição, existem inteiros i e $d \neq 0$ tais que $\widehat{H}^i(G, M)_{(p)} \approx \widehat{H}^{i+d}(G, M)_{(p)}$ para todo $\mathbb{Z}G$-módulo M, em particular, se $H \subseteq G$ é finito, então, pelo Lema de Shapiro, $\widehat{H}^i(H, M)_{(p)} \approx \widehat{H}^i(G, Coind_H^G M)_{(p)} \approx \widehat{H}^{i+d}(G, Coind_H^G M)_{(p)} \approx \widehat{H}^{i+d}(H, M)_{(p)}$ para todo $\mathbb{Z}H$-módulo M. Portanto, H tem cohomologia p-periódica (vide versão p-periódica de ((BROWN, 1982), Teorema 9.1, p. 154)). Reciprocamente, sejam $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}^*(G)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}_p$ (como na Proposição 5.35). Afirmamos que existe uma família $u = (u_H)_{H\in\mathfrak{F}}$ de elementos invertíveis $u_H \in \widehat{H}^d(H) = \widehat{H}^d(H, \mathbb{Z}_p)$ tal que $u \in \mathfrak{G}^d(G)$. Seja $G' \subseteq G$ um subgrupo normal, livre de torção e com índice finito. Dado $H \in \mathfrak{F}$, como $H \cap G' = \{1_G\}$, decorre que $H \approx HG'/G' \subseteq G/G'$. Para cada $H \in \mathfrak{F}$, seja $v_H \in \widehat{H}^*(H)$ um elemento invertível de grau $d_H \neq 0$. Dado que existe apenas uma quantidade finita de graus distintos d_H, podemos tomar todo d_H igual a um único d. Se $c : H_1 \to H_2$ é um morfismo de grupos finitos dada pela conjugação de um elemento de G, então v_{H_1} e $c^*v_{H_2}$ são dois geradores de $\widehat{H}^d(H_1) \approx \widehat{H}^0(H_1)$ com $c^*v_{H_2} = \lambda v_{H_1}$ para algum λ não nulo em $\mathbb{Z}_p$. Ora, como $\lambda^{p-1} = 1$, decorre que $v_{H_1}^{p-1} = (c^*v_{H_2})^{p-1} = c^*(v_{H_2}^{p-1})$. Tomando $u_H = v_H^{p-1}$, obtemos $u = (u_H)_{H\in\mathfrak{F}} \in \mathfrak{G}^*(G)$ com inverso $(u_H^{-1})_{H\in\mathfrak{F}} \in \mathfrak{G}^*(G)$. Pela Proposição 5.37, existe um inteiro $k \geq 0$ tal que $u^{p^k} \in im\, \rho$. Ora, como u é invertível em $\mathfrak{G}(G)$, decorre que u^{p^k} também é invertível em $\mathfrak{G}(G)$, por conseguinte, vide demonstração análoga à Proposição 5.42, decorre que G tem cohomologia p-periódica. ■

5.7 AÇÕES LIVRES E PROPRIAMENTE DESCONTÍNUAS EM 2N-ESFERAS DE HOMOTOPIA

O único grupo finito não trivial que atua livremente em uma esfera de dimensão par é o $\mathbb{Z}_2$, mais geralmente, de acordo com ((SWAN, 1960), Teorema 4.8, p. 12), este também é o único grupo finito que atua livremente em uma esfera de homotopia de dimensão par. Além disso, todo grupo infinito com torção que atua livremente em uma esfera de homotopia de dimensão par é da forma $G_0 \rtimes \mathbb{Z}_2$ onde G_0 é um grupo livre de torção. Tratamos destes fatos com mais detalhes nesta seção.

Definição 5.44. *Uma* ***n-esfera de homotopia*** *é um CW-complexo $\Sigma(n)$ de dimensão finita com o mesmo tipo de homotopia de S^n.*

Proposição 5.45 ((GOLASIŃSKI; GONÇALVES; JIMENEZ, 2018), Proposição 2.2, p. 309)**.** *Seja $G \times \Sigma(2n) \to \Sigma(2n)$ uma ação livre, celular e propriamente descontínua.*

(i) Se G é finito e não trivial, então $G \approx \mathbb{Z}_2$ e a ação $\mathbb{Z}_2 \to Aut(H^{2n}(\Sigma(2n), \mathbb{Z}))$ é não trivial;

(ii) Se G é infinito, então G é livre de torção ou $G \approx G_0 \rtimes \mathbb{Z}_2$ para algum $G_0 \subseteq G$ livre de torção.

Demonstração: (i): Dado que G atua livremente em $\Sigma(2n)$, observamos, primeiramente, que G induz um homomorfismo $G \to Aut(H^{2n}(\Sigma(2n), \mathbb{Z}))$. Além disso, existe a sequência espectral de Cartan-Leray $E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(\Sigma(2n))) \Rightarrow H^{p+q}(\Sigma(2n)/G)$ (Teorema 3.32). Ora, como $\Sigma(2n)$ possui cohomologia não nula apenas nos níveis 0 e $2n$, decorre que na página E_2 as únicas linhas não nulas estão nas alturas 0 e $2n$, por conseguinte, para p suficientemente grande, $H^p(G, H^{2n}(\Sigma(2n))) \overset{d_{2n+1}}{\approx} H^{p+2n+1}(G, H^0(\Sigma(2n)))$. Dado $g \in G$, $\langle g \rangle \approx \mathbb{Z}_k$ atua livremente em $\Sigma(2n)$, pois G atua livremente em $\Sigma(2n)$. Se k é ímpar, então $\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_k]$-módulo trivial. Se k é par, então $\mathbb{Z}$ pode ser um $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_k]$-módulo não trivial via homomorfismo $g \mapsto -1$, neste caso, denotamos $\mathbb{Z}$ por $\widetilde{\mathbb{Z}}$. Observamos que $H^{2i}(\mathbb{Z}_k, \widetilde{\mathbb{Z}}) = 0$ e $H^{2i-1}(\mathbb{Z}_k, \widetilde{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}_2$. Analisando a página E_2 com relação ao grupo $\langle g \rangle$, concluímos que $H^{2n}(\Sigma(2n))$ é não trivial e dado que para p suficientemente grande, $H^p(\langle g \rangle, H^{2n}(\Sigma(2n))) \overset{d_{2n+1}}{\approx} H^{p+2n+1}(\langle g \rangle, H^0(\Sigma(2n)))$, decorre que $G \approx \mathbb{Z}_2$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[drrr] & \mathbb{Z}_2 \arrow[drrr] & 0 \arrow[drrr] & \mathbb{Z}_2 \arrow[drrr] & 0 \arrow[drrr] & \mathbb{Z}_2 \cdots \arrow[drrr] & & & \\
\mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z}_k & 0 & \mathbb{Z}_k & 0 & \mathbb{Z}_k & 0 & \mathbb{Z}_k \cdots
\end{tikzcd}$$

(ii): Se G não é livre de torção, então $\rho : G \to Aut(H^{2n}(\Sigma(2n), \mathbb{Z})) \approx \mathbb{Z}_2$ é sobrejetor, $G_0 = ker\,\rho$ é livre de torção e a extensão $1 \to G_0 \to G \to \mathbb{Z}_2 \to 1$ cinde. Portanto, $G \approx G_0 \rtimes \mathbb{Z}_2$. ■

Como $(G : G_0) = 2$, decorre que G_0 é um subgrupo normal de G. Além disso, G é virtualmente livre de torção, pois G_0 é livre de torção, por conseguinte, $vcd\,G = vcd\,G_0 = cd\,G_0$. Supondo que $cd\,G_0 < \infty$, tem sentido considerarmos $\widehat{H}^*(G, \mathbb{Z})$. Se H é um subgrupo finito não trivial de G, então $H \approx HG_0/G_0 \subseteq G/G_0 = \mathbb{Z}_2$, ou seja, todo subgrupo finito não trivial de G é isomorfo à $\mathbb{Z}_2$. Ora, como $\mathbb{Z}_2$ tem cohomologia periódica de período dois (Exemplo 5.18 e Exemplo 2.31), decorre, pelo Teorema 5.43, que G tem cohomologia 2-periódica.

REFERÊNCIAS

BIERI, R.; ECKMANN, B. Groups with Homological Duality Generalizing Poincaré Duality. **Inventiones Mathematicae**, v. 20, p. 103, 1973.

BROWN, K. S. **Cohomology of Groups**. New York: Springer-Verlag, 1982.

GEOGHEGAN, R. **Topological Methods in Group Theory**. New York: Springer Science & Business Media, 2007.

GOLASIŃSKI, M.; GONÇALVES, D. L.; JIMENEZ, R. Free and Properly Discontinuous Actions of Groups on Homotopy 2n-spheres. **Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society**, Cambridge University Press, v. 61, n. 2, p. 305–327, 2018.

HATCHER, A. **Algebraic Topology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

HILTON, P. J.; STAMMBACH, U. **A Course in Homological Algebra**. New York: Springer-Verlag, 1970.

HILTON, P. J.; WYLIE, S. **Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology**. New York: Cambridge University Press, 1965.

HUNGERFORD, T. W. **Algebra**. New York: Springer-Verlag, 1974.

MACLANE, S. **Homology**. Berlin: Springer-Verlag, 1967.

MASSEY, W. S. **Algebraic Topology: An Introduction**. New York: Springer-Verlag, 1977.

MC CLEARY, J. **A User's Guide to Spectral Sequences**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

SWAN, R. G. A New Method in Fixed Point Theory. **Commentarii Mathematici Helvetici**, Springer, v. 34, n. 1, p. 1–16, 1960.

APÊNDICE A – ÁLGEBRA HOMOLÓGICA

Neste apêndice, apresentamos brevemente alguns resultados de álgebra homológica que foram utilizados ao longo do trabalho, tais como, de complexos de cadeia (e cocadeia), de resoluções projetivas e outros que foram usados pontualmente no texto. Utilizamos como referência (HILTON; STAMMBACH, 1970) e (BROWN, 1982).

A.1 COMPLEXOS DE CADEIA

Definição A.1. *Seja R um anel. Um **R-módulo graduado** é uma sequência $C = (C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de R-módulos. Dado $x \in C_n$, dizemos que x tem **grau n** e escrevemos $deg\, x = n$. Um **morfismo de grau p** de um R-módulo graduado C para um R-módulo graduado C' é uma família $f = (f_n : C_n \to C'_{n+p})_{n\in\mathbb{Z}}$ de R-homomorfismos de módulos tal que $deg\,(f(x)) = deg\,(f) + deg\,(x)$.*

Definição A.2. *Um **complexo de cadeia** sobre um anel R é um par (C, d) onde C é um R-módulo graduado e $d : C \to C$ é um morfismo de grau -1 tal que $d^2 = 0$. O complexo de cadeia (C, d) pode ser representado por:*

$$C : \cdots \to C_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} C_n \overset{d_n}{\to} C_{n-1} \to \cdots .$$

*Similarmente, um **complexo de cocadeia** sobre um anel R é um par (C, d) onde $C = (C^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é um R-módulo graduado e $d : C \to C$ é um morfismo de grau 1 tal que $d^2 = 0$. O complexo de cocadeia (C, d) pode ser representado por:*

$$C : \cdots \to C^{n-1} \overset{d^{n-1}}{\to} C^n \overset{d^n}{\to} C^{n+1} \to \cdots .$$

Observação A.3. *Essencialmente, não há diferenças entre complexos de cadeia e cocadeia, uma vez que podemos sempre considerar a conversão $C_n = C^{-n}$.*

Definição A.4. *Seja (C, d) um complexo de cadeia (resp. cocadeia). Dizemos que $Z(C) := ker\, d$ é o módulo dos ciclos (resp. cociclos) de C e, similarmente, dizemos que $B(C) := im\, d$ é o módulo dos bordos (resp. cobordos) de C. A **homologia** (resp. **cohomologia**) de C é definida por $H_*(C) = Z(C)/B(C)$ (resp. $H^*(C) = Z(C)/B(C)$).*

Definição A.5. *Sejam (C, d) e (C', d') dois complexos de cadeia. Um **homomorfismo de cadeia** é um morfismo de módulos graduados $f : C \to C'$ de grau 0 tal que $d'f = fd$. Uma **homotopia** h entre dois homomorfismos de cadeia $f, g : C \to C'$ é um morfismo de módulos graduados de grau 1 tal que $d'h + hd = f - g$. Dizemos que f é homotópica a g se existe uma homotopia entre f e g e escrevemos $f \simeq g$.*

Proposição A.6 ((HILTON; STAMMBACH, 1970), Lema 3.2, p. 125)**.** *A relação de homotopia "$\simeq$" é uma relação de equivalência.*

Observação A.7. *Se $f : C \to C'$ é um homomorfismo de cadeia, então f induz o homomorfismo $H(f) : H(C) \to H(C')$ dado por $H(f)([x]) = [f(x)]$.*

Proposição A.8 ((BROWN, 1982), Proposição 0.1, p. 5)**.** *Sejam $f, g : C \to C'$ dois homomorfismos de cadeia. Se $f \simeq g$, então $H(f) = H(g)$.*

Demonstração: Seja h uma homotopia entre f e g. Se $[x] \in H(C)$, então $(f-g)(x) = d'h(x) + hd(x) = d'h(x)$, ou seja, $(f-g)(x) \in B(C')$, logo $H(f)([x]) = H(g)([x])$. Portanto $H(f) = H(g)$. ■

Definição A.9. *Um homomorfismo de cadeia $f : C \to C'$ é uma **equivalência homotópica** se existe um homomorfismo de cadeia $g : C' \to C$ tal que $gf \simeq Id_C$ e $fg \simeq Id_{C'}$.*

Definição A.10. *Seja $f : C \to C'$ um homomorfismo de cadeia. Dizemos que f é uma **equivalência fraca** se $H(f) : H(C) \to H(C')$ é um isomorfismo.*

Proposição A.11. *Toda equivalência homotópica é uma equivalência fraca.*

Definição A.12. *Dizemos que um complexo de cadeia C é **contrátil** se $id_C \simeq 0$. Neste caso, a homotopia entre C e 0 é chamada de **homotopia de contração**.*

Proposição A.13 ((BROWN, 1982), Proposição 0.3, p. 5)**.** *Um complexo de cadeia (C, d) é contrátil se, e somente se, é acíclico, isto é $H(C) = 0$, e cada sequência exata curta $0 \to Z_{n+1} \hookrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\overline{d}} Z_n \to 0$ cinde, onde $\overline{d}$ é induzido por d.*

Definição A.14. *A **n-ésima suspensão** de um complexo C é definida pelo complexo $(\Sigma^n C, \Sigma^n d)$ com $(\Sigma^n C)_p = C_{p-n}$ e $\Sigma^n d = (-1)^n d$.*

Definição A.15. *Seja $f : (C', d') \to (C, d)$ um homomorfismo de cadeia. O **mapping cone** de f é definido pelo complexo de cadeia (C'', d'') com $C'' = C \oplus \Sigma C'$ e $d''(c, c') = (dc + fc', -d'c')$.*

Teorema A.16 ((HILTON; STAMMBACH, 1970), Teorema 2.1, p. 121)**.** *Seja $0 \to C' \xrightarrow{g} C \xrightarrow{f} C'' \to 0$ uma sequência exata curta de complexos de cadeia (resp. cocadeia). Então existe um morfismo de módulos graduados $\partial : H(C'') \to H(C')$ de grau -1 tal que a sequência:*

$$\cdots \to H_n(C') \xrightarrow{H(g)} H_n(C) \xrightarrow{H(f)} H_n(C'') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(C') \to \cdots$$

é exata. Respectivamente, existe um morfismo de módulos graduados $\delta : H(C'') \to H(C')$ de grau 1 tal que a sequência:

$$\cdots \to H^n(C') \xrightarrow{H(g)} H^n(C) \xrightarrow{H(f)} H^n(C'') \xrightarrow{\delta} H^{n+1} \to \cdots$$

é exata.

A.2 AÇÃO DE GRUPOS

Nesta seção, apresentamos brevemente algumas definições envolvendo ações de grupos. Utilizamos (HUNGERFORD, 1974) como referência.

Definição A.17. *Sejam $X \neq \emptyset$ um conjunto e $(G, \cdot)$ um grupo. Uma* ***G-ação à esquerda de G em X*** *é uma aplicação $\cdot : G \times X \to X$ que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$, para quaisquer $g_1, g_2 \in G$;

(ii) $1_G \cdot x = x$, para todo $x \in X$.

Caso X tenha uma estrutura de grupo, digamos $(X, +)$, exigimos que além destas condições seja também satisfeita a condição:

(iii) $g \cdot (x_1 + x_2) = g \cdot x_1 + g \cdot x_2$, para todo $g \in G$ e para quaisquer $x_1, x_2 \in X$.

Equivalentemente, uma G-ação em X pode ser definida via um homomorfismo $(G, \cdot) \to (Bij(X), \circ)$. Em particular, se X for um espaço topológico, uma G-ação em X pode ser definida via um homomorfismo $(G, \cdot) \to (Homeo(X), \circ)$. Dizemos que X é um **G-conjunto** se existe uma G-ação em X. Em particular, se X é um espaço topológico, dizemos que X é um **G-espaço**. Similarmente, pode-se definir uma G-ação à direita de G em X.

Definição A.18. *Seja X um G-espaço. Dizemos que a ação de G em X é uma* ***ação de recobrimento*** *ou* ***propriamente descontínua*** *se para todo $x \in X$ existe uma vizinhança aberta V de x para a qual $g \cdot V \cap V = \emptyset$ para todo $g \neq 1_G$.*

Definição A.19. *Seja X um G-conjunto. Dizemos que X é um* ***G-conjunto livre*** *se a ação de G em X é livre, isto é, se $g \cdot x = x$ para algum $x \in X$, então $g = 1_G$. Dizemos que X é um* ***G-conjunto trivial*** *se a ação de G em X for trivial, isto é, $g \cdot x = x$ para todo $(g, x) \in G \times X$. Dizemos que X é um* ***G-conjunto homogêneo*** *se a ação de G em X for transitiva, isto é, se para quaisquer $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$.*

Se X for um G-conjunto, podemos definir a seguinte relação de equivalência em X: $x \sim y$ se, e somente se, existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$. Dizemos que o conjunto $G(x) := \{g \cdot x \mid g \in G\}$ é a **G-órbita de x**. Neste caso, $X = \dot{\bigcup}_{x_i \in E} G(x_i)$ onde $E = \{x_i\}_{i \in I}$ é um sistema de representantes para as G-órbitas de X. Para cada $x \in X$ é possível definir também o subgrupo $\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$, chamado de **estabilizador de x** ou de **isotropia de x**. Existe uma correspondência biunívoca entre o quociente $G/\mathrm{Stab}(x)$ e $G(x)$ ((HUNGERFORD, 1974), Teorema 4.3, p. 89).

A.3 ANEL DE GRUPO

Nesta seção, apresentamos a definição de anel de grupo. Utilizamos (HILTON; STAMMBACH, 1970) como referência.

Definição A.20. *Seja* $(G, \cdot)$ *um grupo. O* ***anel de grupo*** $\mathbb{Z}G$ *é o anel das somas formais* $\sum_{g \in G} r_g g$ *com* $r_g \in \mathbb{Z}$ *e* $g \in G$*, em que* $r_g \neq 0$ *apenas para uma quantidade finita de índices* g*, com as operações de adição e multiplicação dadas respectivamente por:*

$$\left(\sum_{g \in G} r_g g\right) + \left(\sum_{g \in G} s_g g\right) = \sum_{g \in G} (r_g + s_g) g \ \text{ e } \ \left(\sum_{g \in G} r_g g\right) \cdot \left(\sum_{h \in G} s_h h\right) = \sum_{g,h \in G} (r_g s_h)(gh).$$

O elemento neutro multiplicativo de $\mathbb{Z}G$ *é dado por* $1_{\mathbb{Z}G} := 1_{\mathbb{Z}} 1_G$.

Definição A.21. *O homomorfismo* $\varepsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$ *definido por* $\varepsilon(g) = 1$ *para todo* $g \in G$ *é chamado de* ***homomorfismo de aumento****. O núcleo de* ε *é chamado de* ***ideal de aumento****.*

Proposição A.22 ((HILTON; STAMMBACH, 1970), Proposição 1.1, p. 186)**.** *Sejam* $(G, \cdot)$ *um grupo e* R *um anel. Se* $f : G \to R$ *é uma função que satisfaz* $f(1_G) = 1_R$ *e* $f(xy) = f(x)f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in G$*, então existe um único homomorfismo de anéis* $f' : \mathbb{Z}G \to R$ *tal que* $f' \circ i = f$*, onde* $i : G \hookrightarrow \mathbb{Z}G$ *é a inclusão.*

Sejam M um grupo abeliano e $\sigma : G \to Aut(M)$ um homomorfismo. Dado que $Aut(M) \subseteq End(M)$, pela Proposição A.22, existe um homomorfismo de anéis $\sigma' : \mathbb{Z}G \to End(M)$. Logo, M é um $\mathbb{Z}G$-módulo. Reciprocamente, supondo que M é um $\mathbb{Z}G$-módulo e observando que σ' manda elementos invertíveis de G em elementos invertíveis, obtemos que G atua em M. Portanto, M é um $\mathbb{Z}G$-módulo se, e somente se, é um $\mathbb{Z}$-módulo com uma ação de G.

Proposição A.23 ((BROWN, 1982), Proposição 3.1, p. 13)**.** *Sejam* X *um* G*-conjunto livre e* E *um sistema de representantes para as* G*-órbitas de* X*. Então,* $\mathbb{Z}X$ *é um* $\mathbb{Z}G$*-módulo livre*[1] *com base* E*.*

Demonstração: Dado que X é um G-conjunto livre, $\text{Stab}(x) = \{1_G\}$ para todo $x \in X$, logo, $G(x) \approx G/\text{Stab}(x) = G$ para todo $x \in X$. Assim:

$$\mathbb{Z}X = \mathbb{Z}\Big(\dot{\bigcup_{x \in E}} G(x) \Big) \approx \bigoplus_{x \in E} \mathbb{Z}\big(G(x)\big) \approx \bigoplus_{x \in E} (\mathbb{Z}G)_x. \tag{19}$$

Portanto, $\mathbb{Z}X$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo livre com base E. ■

Corolário A.24. *Se* H *é subgrupo de* G*, então* $\mathbb{Z}G$ *é um* $\mathbb{Z}H$*-módulo livre.*

[1] $\mathbb{Z}X$ é o $\mathbb{Z}$-módulo livre gerado por X.

Demonstração: Basta observarmos que a multiplicação à esquerda dos elementos de H por elementos de G descreve uma H-ação livre em G. Portanto, $\mathbb{Z}G$ é um $\mathbb{Z}H$-módulo livre. ■

Observação A.25. *As H-órbitas de G são exatamente as classes laterais à esquerda de H em G.*

Proposição A.26 ((BROWN, 1982), Exercício 1, p. 30)**.** *$\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo projetivo se, e somente se, G é o grupo trivial.*

Demonstração: Se G é o grupo trivial, então $\mathbb{Z}G \approx \mathbb{Z}$ é projetivo. Reciprocamente, se $\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo projetivo com a G-ação trivial, então a sequência $0 \to ker\,\varepsilon \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ cinde. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}G$ definido por $\varphi(1) = x \neq 0$ tal que $\varepsilon\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. Dado $g \in G$, $x = \varphi(1) = \varphi(g \cdot 1) = g \cdot \varphi(1) = g \cdot x$, logo $(g-1) \cdot x = 0$, por conseguinte, $g = 1$. Portanto, G é o grupo trivial. ■

A.3.1 GRUPO DE INVARIANTES E COINVARIANTES

Definição A.27. *Seja M um $\mathbb{Z}G$-módulo. O* ***grupo de invariantes*** *de M, denotado por M^G, é definido por $M^G = \{m \in M \mid gm = m, \forall g \in G\}$. O* ***grupo de coinvariantes*** *de M, denotado por M_G, é definido pelo quociente $M/\langle gm - m \mid g \in G \text{ e } m \in M\rangle$.*

Observação A.28. *M_G é o maior quociente de M no qual G atua trivialmente e M^G é o maior submódulo de M em que G atua trivialmente. Além disso, se M é um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial, então $M_G = M = M^G$.*

Proposição A.29 ((HILTON; STAMMBACH, 1970), Proposição 3.1, p. 191)**.** *Se $\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial, então $M_G \approx \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ e $M^G \approx Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$.*

A.4 RESOLUÇÕES PROJETIVAS

Definição A.30. *Seja M um R-módulo. Uma* ***resolução projetiva*** *(resp.* ***livre****) de M é um complexo de cadeia (P, d) onde cada R-módulo é projetivo (resp. livre) com $P_i = 0$ para $i < 0$, munido de um R-homomorfismo $\varepsilon : P_0 \to M$ tal que a sequência:*

$$\cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

é exata. Denotamos esta resolução por $\varepsilon : P \to M$ ou simplesmente por $P \to M$.

Exemplo A.31. *Seja $G = \langle t \rangle \approx \mathbb{Z}$. Então, $0 \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. De fato, $(t-1)\sum r_i t^i = 0$ se, e somente se, $\sum r_i t^i = \sum r_i t^{i+1} = \sum r_{i-1} t^i$, isto é, se $r_i = r_{i-1}$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, por conseguinte, $\sum r_i t^i = 0$, pois cada $r_i = 0$. Agora, observamos que $ker\,\varepsilon = \langle t-1 \rangle$ como um ideal à esquerda[2] de $\mathbb{Z}G$: dado*

[2] Mais geralmente, se T é um conjunto gerador de G, então $ker\,\varepsilon = \langle t-1 \mid t \in T\rangle$ como um ideal a esquerda de $\mathbb{Z}G$.

$\sum r_i t^i \in ker\,\varepsilon$, $\sum r_i = 0$, logo $\sum r_i t^i = \sum r_i t^i - \sum r_i = \sum r_i(t^i - 1) = \sum r_i(1+\cdots+t^{i-1})(t-1)$. Portanto, $ker\,\varepsilon = \langle t-1 \rangle$ (a inclusão contrária é trivial). Deste modo, como G é cíclico, decorre que $(t-1)\sum r_i t^i = \sum r_i t^i (t-1)$, logo $im\,(t-1) = ker\,\varepsilon$. Finalmente, como ε é um epimorfismo, decorre que $0 \to \mathbb{Z}G \overset{t-1}{\to} \mathbb{Z}G \overset{\varepsilon}{\to} \mathbb{Z} \to 0$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Exemplo A.32. *Se $G = \langle t \mid t^n = 1 \rangle \approx \mathbb{Z}_n$, então, de maneira similar ao exemplo anterior, verifica-se que $\cdots \to \mathbb{Z}G \overset{t-1}{\to} \mathbb{Z}G \overset{N}{\to} \mathbb{Z}G \overset{t-1}{\to} \mathbb{Z}G \overset{\varepsilon}{\to} \mathbb{Z} \to 0$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, onde $N = 1 + t + \cdots + t^{n-1}$.*

Exemplo A.33 (Resolução padrão)**.** *Seja G um grupo. Para cada $n \geq 0$, consideremos X_n o conjunto das $(n+1)$-uplas $(g_0, \ldots, g_n)$ de elementos de G. Dado que X_n é um G-conjunto livre obtido pela ação de translação à esquerda de G em X_n, obtemos, pela Proposição A.23, que $F_n := \mathbb{Z}X_n$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo livre. Definindo $d : F_n \to F_{n-1}$ por $d = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$ com $d_i(g_0, \ldots, g_n) = (g_0, \ldots, \widehat{g_i}, \ldots, g_n)$ e $\varepsilon : F_0 \to \mathbb{Z}$ por $\varepsilon(g_0) = 1$, obtemos o complexo de cadeia (F, d) onde $F_{-1} = \mathbb{Z}$. Afirmamos que (F, d) é uma sequência exata de grupos abelianos. De fato, existe a homotopia de contração $h = (h_n : F_n \to F_{n+1})$ dada por $h_{-1}(1) = (1)$ e $h_n(g_0, \ldots, g_n) = (1, g_0, \ldots, g_n)$ para todo $n \geq 0$. Por conseguinte, (F, d) é exato. Portanto, (F, d) é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, chamada de* ***resolução padrão****.*

Exemplo A.34 (Resolução Bar)**.** *Seja (F, d) a resolução livre dada no Exemplo A.33. Consideremos como representante da G-órbita de $(g_0, \ldots, g_n)$ em X_n o elemento $g_0^{-1}(g_0, \ldots, g_n) = (1, g_0^{-1}g_1, \ldots, g_0^{-1}g_n) = (1, g_1', g_1'g_2', \ldots, g_1'g_2'\cdots g_n')$ onde $g_i' = g_{i-1}^{-1}g_i$. Um elemento de F_n da forma $(1, g_1, g_1g_2, \ldots, g_1g_2\cdots g_n)$ será denotado simplesmente por $[g_1|g_2|\cdots|g_n]$. Esta notação é chamada de* ***notação bar****. Deste modo, F_n é um $\mathbb{Z}G$-módulo livre gerado pelos símbolos $[g_1|g_2|\cdots|g_2]$ e o diferencial $d : F_n \to F_{n-1}$ tem cada parcela d_i dada por:*

$$d_i[g_1|g_2|\cdots|g_n] = \begin{cases} [g_1|g_2|\cdots|g_n], & i = 0, \\ [g_1|\cdots|g_{i-1}|g_ig_{i+1}|g_{i+2}|\cdots|g_n], & 1 \leq i < n, \\ [g_1|\cdots|g_{n-1}], & i = n. \end{cases}$$

Em particular, como F_0 é gerado pela 1-upla (1), obtemos pela notação bar que F_0 é o $\mathbb{Z}G$-módulo livre gerado pelo símbolo $[\quad] \equiv 1$. Vide esta mudança de notação, passamos a chamar a resolução padrão de ***resolução bar****.*

Proposição A.35 ((HILTON; STAMMBACH, 1970), Lema 4.2, p. 128)**.** *Para todo R-módulo M existe uma resolução projetiva.*

Demonstração: Dado qualquer R-módulo M, exitem um R-módulo livre P_0 e um R-epimorfismo $\varepsilon : P_0 \to M$. Como o $ker\,\varepsilon \subseteq P_0$ é também um R-módulo, existem um R-módulo livre P_1 e um R-epimorfismo $\varepsilon_1 : P_1 \to ker\,\varepsilon$. Repetindo este processo produzimos a resolução livre (logo projetiva) $\varepsilon : P \to M$ em que $P_i = 0$ para $i < 0$ e $d_i = i\varepsilon_i$ onde $i : ker\ \varepsilon_{i-1} \hookrightarrow P_{i-1}$ é a inclusão. ■

Lema A.36 (Lema Fundamental da Álgebra Homológica, (BROWN, 1982), Lema 7.4, p. 22)**.** *Sejam (C, d) e (C, d') dois complexos de cadeia e r um inteiro tal que C_i é projetivo para $i > r$, $H_i(C') = 0$ para $i \geq r$ e $(f_i : C_i \to C'_i)_{i\leq r}$ é uma família de morfismos tais que $d'_i f_i = f_{i-1}d_i$ para todo $i \leq r$. Então, $(f_i)_{i\leq r}$ estende-se a um único (a menos de homotopia) homomorfismo de cadeia $f : C \to C'$.*

Demonstração: Vamos supor indutivamente que f_n esteja definida para $i \leq n$ com $n \geq r$ tal que $d'_i f_i = f_{i-1}d_i$ para todo $i \leq n$. Haja vista que $d'_n f_n d_{n+1} = f_{n-1}d_n d_{n+1} = 0$, decorre que $im\ f_n d_{n+1} \subseteq ker\ d'_n = im\ d'_{n+1} \subseteq C_n$, por conseguinte, como C_{n+1} é projetivo, existe um morfismo $f_{n+1} : C_{n+1} \to C'_{n+1}$ tal que $d_{n+1}f_{n+1} = f_n d_{n+1}$. Suponhamos que g estende $(f_i)_{i\leq r}$ e que $h_i : C_i \to C'_{i+1}$ tenha sido definida para todo $i \leq n$ com $n \geq r$ tal que $d'_{i+1}h_i + h_{i-1}d_i = f_i - g_i$ para todo $i \leq n$. Consideremos o homomorfismo de cadeia $\tau : C \to C'$ definido por $\tau_i = f_i - g_i$. Haja vista que $d'_{n+1}h_n d_{n+1} = (\tau_n - h_{n-1}d_n)d_{n+1} = \tau_n d_{n+1} = d'_{n+1}\tau_{n+1}$, decorre que $im\ (\tau_{n+1} - h_n d_{n+1}) \subseteq ker\ d'_{n+1} = im\ d'_{n+2} \subseteq C'_{n+1}$, por conseguinte, como C_{n+1} é projetivo, existe um morfismo $h_{n+1} : C_{n+1} \to C'_{n+2}$ tal que $d'_{n+2}h_{n+1} = \tau_{n+1} - h_n d_{n+1}$, isto é, tal que $d'_{n+2}h_{n+1} - h_n d_{n+1} = \tau_{n+1} = f_{n+1} - g_{n+1}$. ■

Observação A.37. *Sejam $\varepsilon : P \to M$ e $\varepsilon' : P' \to M$ duas resoluções projetivas de M. Pelo Lema A.36, existem únicos (a menos de homotopia) homomorfismos de cadeia $f : P \to P'$ e $f' : P' \to P$ tais que $\varepsilon' f_0 = \varepsilon$ e $\varepsilon f'_0 = \varepsilon'$, por conseguinte, $f'f : P \to P$ é um homomorfismo de cadeia tal que $\varepsilon f'_0 f_0 = \varepsilon' f_0 = \varepsilon$, logo $f'f \simeq id_P$. Analogamente, $ff \simeq id_{P'}$. Portanto, f é uma equivalência homotópica, ou seja quaisquer duas resoluções projetivas de M são homotopicamente equivalentes.*

A.5 PRODUTO TENSORIAL

Definição A.38. *Sejam (C, d) e (C', d') dois complexos de cadeia sobre um anel R. O complexo de cadeia $\mathscr{H}om_R(C, C')$ é definido em cada n-ésimo nível por $\mathscr{H}om_R(C, C')_n = \prod_{q\in\mathbb{Z}} Hom_R(C_q, C'_{q+n})$, isto é, $\mathscr{H}om_R(C, C')_n$ é o conjunto dos morfismos de grau n de C para C'. O diferencial $D_n : \mathscr{H}om_R(C, C')_n \to \mathscr{H}om_R(C, C')_{n-1}$ em $\mathscr{H}om_R(C, C')$ é definido por $D_n(f) = d'f - (-1)^n fd$. Em particular, $\mathscr{H}om_R(C, C')_0$ é exatamente o conjunto de todos os homomorfismos de cadeia de C para C'.*

Observação A.39. *Se M é um $\mathbb{Z}G$-módulo e $P \to \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, então $\mathscr{H}om_G(P, M)$ é o complexo de cadeia em que M é tomado como complexo de cadeia concentrado na dimensão 0. Dado que $\mathscr{H}om_G(P, M)_n = Hom_G(P_{-n}, M)$, por conveniência, consideramos $\mathscr{H}om_G(P, M)$ como complexo de cocadeia via conversão $\mathscr{H}om_G(P, M)^n = \mathscr{H}om_G(P, M)_{-n} = Hom_G(P_n, M)$. Neste caso, $\mathscr{H}om_G(P, M)$ é o com-*

plexo de cocadeia obtido de P ao aplicarmos o funtor contravariante (exato à esquerda) $Hom_G(-, M)$.

Definição A.40. *Sejam C e C' (resp. E e E') complexos de R-módulos à direita (resp. à esquerda). Dados $u \in \mathscr{H}om_R(C, C')$ e $v \in \mathscr{H}om_R(E, E')$, definimos o* ***produto tensorial*** *$u \otimes v \in \mathscr{H}om_{\mathbb{Z}}(C \otimes_R E, C' \otimes_R E')$ por $\langle u \otimes v, c \otimes e\rangle = (-1)^{deg\ v \cdot deg\ c}\langle u, c\rangle \otimes \langle v, e\rangle$ para todo $c \in C$ e todo $e \in E$.*

Proposição A.41 ((BROWN, 1982), Exercício 7, p. 10)**.** *Denotemos por D qualquer um dos três diferenciais dos complexos $\mathscr{H}om$ da definição anterior. Então, $D(u \otimes v) = Du \otimes v + (-1)^{deg\ u} u \otimes Dv$. Ou seja, o "produto tensorial de morfismos graduados" induz o morfismo de cadeia:*

$$\mathscr{H}om_R(C, C') \otimes \mathscr{H}om_R(E, E') \to \mathscr{H}om_{\mathbb{Z}}(C \otimes_R E, C' \otimes_R E')$$

Definição A.42. *Seja (C, d) (resp. (C', d')) um complexo de cadeia de R-módulos à direita (resp. à esquerda). O* ***produto tensorial*** *$C \otimes_R C'$ é definido em cada n-ésimo nível por $(C \otimes_R C')_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes_R C_q$ com operador bordo D definido por $D(c \otimes c') = dc \otimes c' + (-1)^{deg\ c} c \otimes d'c'$ para todo $c \in C$ e todo $c' \in C'$.*

Observação A.43. *Se M é um $\mathbb{Z}G$-módulo e $\varepsilon : P \to \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, então $P \otimes_G M$ é o complexo de cadeia em que M é tomado como complexo de cadeia concentrado na dimensão 0. Neste caso, dado que $(P \otimes_G M)_n = P_n \otimes_G M$, decorre que $P \otimes_G M$ é o complexo de cadeia obtido de P ao aplicarmos o funtor covariante (exato à direita) $- \otimes_G M$.*

Definição A.44. *Sejam C e C' módulos graduados. O* ***produto tensorial completo*** *$C \widehat{\otimes} C'$ é definido por:*

$$(C \widehat{\otimes} C')_n = \prod_{p+q=n} C_p \otimes C'_q.$$

Proposição A.45 ((BROWN, 1982), p. 137)**.** *Se $u : C \to D$ e $v : C' \to D'$ são morfismos de módulos graduados de grau r e s, respectivamente, então $u \widehat{\otimes} v : C \widehat{\otimes} C' \to D \widehat{\otimes} D'$ definido por:*

$$(u \widehat{\otimes} v)_n = \prod_{p+q=n} (-1)^{ps} u_p \otimes v_q : \prod_{p+q=n} C_p \otimes C'_q \to \prod_{p+q=n} D_{p+r} \otimes D'_{q+r}$$

é um morfismo de grau $r + s$.

Observação A.46. *Seja $\varepsilon : (P, d) \to \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Então, $P \widehat{\otimes} P$ possui "diferenciais parciais" $d \widehat{\otimes} id_P$ e $id_P \widehat{\otimes} d$. Ora, como $(d \widehat{\otimes} id_P)^2 = (id_P \widehat{\otimes} d)^2 = 0$, $(d \widehat{\otimes} id_P)(id_P \widehat{\otimes} d) = d \widehat{\otimes} d$ e $(id_P \widehat{\otimes} d)(d \widehat{\otimes} id_P) = -d \widehat{\otimes} d$, decorre que o "diferencial total" $\partial = d \widehat{\otimes} id_P + id_P \widehat{\otimes} d$ tem quadrado igual a zero, por conseguinte $P \widehat{\otimes} P$ é um complexo de cadeia*[3]*.*

[3] A composição de morfismos graduados é dada por $(u \widehat{\otimes} v)(u' \widehat{\otimes} v') = (-1)^{deg\ v \cdot deg\ u'} uu' \widehat{\otimes} vv'$.

Proposição A.47 ((BROWN, 1982), Proposição 8.3, p. 28)**.** *Seja P um R-módulo à esquerda projetivo e finitamente gerado. Então:*

(i) $P^* := Hom_R(P, R)$ *é um R-módulo à direita projetivo e finitamente gerado;*

(ii) *Para cada R-módulo à esquerda M, $\varphi : P^* \otimes_R M \to Hom_R(P, M)$, definido por $\varphi(u \otimes m)(x) = u(x) \cdot m$ para $u \in P^*$, $m \in M$ e $x \in P$, é um isomorfismo de grupos abelianos;*

(iii) *Para cada R-módulo à direita M, $\varphi' : M \otimes_R P \to Hom_R(P^*, M)$, definido por $\varphi'(m \otimes x)(u) = m \cdot u(x)$ para $m \in M$, $x \in P$ e $u \in P^*$, é um isomorfismo;*

(iv) *Existe o isomorfismo $\varphi'' : P \to P^{**}$, definido por $\varphi''(x)(u) = u(x)$ para $x \in P$ e $u \in P^*$.*

APÊNDICE B – ESPAÇOS DE EILENBERG-MACLANE DO TIPO $\mathbf{K(G,1)}$

Apresentamos, neste apêndice, definições, exemplos e propriedades de CW-complexos, G-complexos e Espaços de Eilenberg-MacLane do tipo $K(G,1)$. Utilizamos estes resultados essencialmente para dar uma interpretação topológica da homologia e cohomologia de grupos.

B.1 CW-COMPLEXO E G-COMPLEXO

Definição B.1. *Seja X um espaço topológico de Hausdorff. Dizemos que X tem uma estrutura de* **CW*-complexo*** *se existir uma sequência ascendente de fechados $X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \ldots$, tal que:*

(i) *X^0 tem a topologia discreta;*

(ii) *Para $n \geq 1$, X^n é obtido de X^{n-1} pela adjunção de n-células e^n_α por meio de aplicações contínuas $\varphi_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}$. Neste caso, $X^n = \dfrac{X^{n-1} \coprod_\alpha D^n_\alpha}{\sim}$ onde $x \sim \varphi_\alpha(x)$ quando $x \in \partial D^n = S^{n-1}$. Em termos de conjunto, $X^n = X^{n-1} \coprod_\alpha e^n_\alpha$ onde e^n_α é um n-disco aberto;*

(iii) *$X = \bigcup_n X^n$. Além disso, se $X^n \neq X^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então X possui a topologia fraca, isto é: $A \subset X$ é aberto (ou fechado) se, e somente se, $A \cap X^n$ é aberto (ou fechado) em cada X^n.*

O conjunto X^n é chamado de ***n-esqueleto*** *e os pontos de X^0 são chamados de 0-células. Se $X = X^n$ para algum n, dizemos que X é um CW-complexo finito de dimensão n.*

Observação B.2. *A cada n-célula e^n_α é possível associar a aplicação $\Phi_\alpha : D^n_\alpha \to X$, chamada de* ***função característica****, dada pela composição $D^n_\alpha \hookrightarrow X^{n-1} \coprod_\alpha D^n_\alpha \to X^n \hookrightarrow X$. Observemos que Φ_α estende φ_α e Φ_α aplica $\mathrm{Int}\, D^n_\alpha$ homeomorficamente sobre e^n_α. Comumente uma n-célula de X é denotada simplesmente por σ^n, ou, quando estiver evidente sua dimensão, simplesmente por σ.*

Definição B.3. *Um* ***subcomplexo*** *de um CW-complexo X é um subespaço fechado A de X que é dado como uma união de células de X.*

Observação B.4. *A condição de A ser um subespaço fechado de X torna-o um CW-complexo, haja vista que a função característica de cada célula em A terá imagem em A.*

Exemplo B.5. *$\mathbb{R}$ é um CW-complexo de dimensão 1 em que as 0-células e as 1-células são dadas, respectivamente, por $e^1_m = \{m\}$ e $e^2_m = (m, m+1)$, com $m \in \mathbb{Z}$.*

Exemplo B.6. $\mathbb{R}^2$ *é um CW-complexo de dimensão 2 em que as* 0*-células, as* 1*-células e as* 2*-células são dadas, respectivamente, por* $e^0_{(m,n)} = \{(m,n)\}$, $e^1_{(m,n)1} = (m, m+1) \times \{n\}$, $e^1_{(m,n)2} = \{m\} \times (n, n+1)$ *e* $e^2_{(m,n)} = (m, m+1) \times (n, n+1)$, *com* $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Exemplo B.7. S^n *é um CW-complexo de dimensão* n *com uma* 0*-célula e uma* n*-célula, ou seja,* $S^n = e^0 \cup e^n$.

Exemplo B.8. *O toro* T^2 *é um CW-complexo de dimensão 2 com uma* 0*-célula, duas* 1*-células e uma* 2*-célula, ou seja,* $T^2 = e^0 \cup e^1_1 \cup e^1_2 \cup e^2$. *Mais geralmente, a soma conexa de* n *toros* $T^2\# \cdots \#T^2$ *é um CW-complexo de dimensão* 2 *com uma* 0*-célula,* $2n$ *células de dimensão* 1 *e uma* 2*-célula, ou seja,* $T^2\# \cdots \#T^2 = e^0 \cup e^1_1 \cup \cdots \cup e^1_{2n} \cup e^2$.

Exemplo B.9. *Seja* $X = \bigvee_{i \in I} S^1_i$ *o bouquet de círculos indexado pelo conjunto* I. *Então,* X *é um CW-complexo de dimensão* 1 *com uma* 0*-célula e uma* 1*-célula para cada* $i \in I$, *ou seja,* $X = e^0 \cup \left(\bigcup_{i \in i} e^1_i \right)$.

Definição B.10. *Um **G-complexo** é um CW-complexo* X *munido de uma* G*-ação que permuta suas células. Quando a* G*-ação for livre, dizemos que* X *é um* G*-complexo livre.*

Observação B.11. *Se* σ *é uma* n*-célula de* X, *então* $g \cdot \sigma$ *também é uma* n*-célula de* X, *haja vista que a ação de* G *em* X *induz o homomorfismo* $\varphi_g : X \to X$, *dado por* $\varphi_g(x) = g \cdot x$, *que aplica* σ *homeomorficamente sobre* $g \cdot \sigma$.

Exemplo B.12. *Sejam* $G = \langle t \rangle \approx \mathbb{Z}$ *e* $\mathbb{R}$ *com a estrutura de CW-complexo dada pelo exemplo B.5. Notemos que* $t^m \cdot x := m + x$ *é uma* G*-ação que permuta as células de* $\mathbb{R}$, *pois* $t^m \cdot \sigma^0_n = m + n = e^0_{m+n}$ *e* $t^m \cdot e^1_n = (m+n, m+n+1) = e^1_{m+n}$ *para todo* $m, n \in \mathbb{Z}$. *Além disso,* $t^m \cdot x = m + x = x$ *se, e somente se,* $t^m = 1$, *ou seja,* G *permuta livremente as células de* $\mathbb{R}$, *por conseguinte,* $\mathbb{R}$ *é um* $\mathbb{Z}$*-complexo livre.*

B.2 HOMOLOGIA CELULAR

Sejam X um CW-complexo e $C_n(X) := H_n(X^n, X^{n-1})$ o n-ésimo grupo de homologia singular relativa com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Tomando $\partial_n : H_n(X^n, X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1})$ o homomorfismo de conexão do par (X^n, X^{n-1}) e $p_{n-1*} : H_{n-1}(X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ o homomorfismo induzido pela projeção $p_{n-1} : C_{n-1}(X^{n-1}) \to C_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$, produzimos o complexo de cadeia $(C_*(X), d)$, onde $d_n = p_{n-1*} \circ \partial_n$. De fato, $d_n \circ d_{n+1} = p_{n-1*} \circ \partial_n \circ p_{n*} \circ \partial_{n+1} = 0$. A este complexo da-se o nome de complexo de cadeia celular de X. A **homologia celular** de X, denotada por $H^{CW}_*(X)$, é a homologia do complexo de cadeia $(C_*(X), d)$.

Lema B.13 ((HATCHER, 2001), Lema 2.34, p. 137)**.** *Se* X *é um CW-complexo, então:*

(i) $H_k(X^n, X^{n-1}) = 0$ *se* $k \neq n$ *e* $H_n(X^n, X^{n-1}) \approx \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}$, *onde* I *é um conjunto de índices das* n*-células de* X;

(ii) $H_k(X^n) = 0$ *para* $k > n$;

(iii) A inclusão $i : X^n \hookrightarrow X$ *induz um isomorfismo* $i_* : H_k(X^n) \to H_k(X)$ *se* $k < n$.

Teorema B.14 ((HATCHER, 2001), Teorema 2.35, p.139)**.** *Se* X *é um* CW*-complexo, então* $H_n^{CW}(X) \approx H_n(X)$.

Demonstração: Pelo Lema B.13, podemos considerar o seguinte diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & 0 & \\
 & 0 \arrow[dr] & & H_n(X^{n+1}) \approx H_n(X) \arrow[urr] & & & \\
 & & H_n(X^n) \arrow[ur] \arrow[dr, "p_{n*}"] & & & & \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \arrow[ur, "\partial_{n+1}"] \arrow[rr, "d_{n+1}"] & & H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[dr, "\partial_n"'] \arrow[rr, "d_n"] & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \arrow[r] & \cdots \\
 & & & & H_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[ur, "p_{n-1*}"'] & & \\
 & & & 0 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

Como p_{n*} é injetivo, decorre que $im\,\partial_{n+1}$ é aplicado isomorficamente em $im\,p_{n*}\partial_{n+1} = im\,d_{n+1}$. Além disso, $H_n(X^n)$ é aplicado isomorficamente em $im\,p_{n*} = ker\,\partial_n = ker\,d_n$, pois p_{n-1*} é injetivo, por conseguinte $H_n(X) \approx H_n(X^n)/im\,\partial_{n+1} \approx ker\,d_n/im\,d_{n+1} = H_n^{CW}(X)$. ■

De acordo com o Lema B.13, $C_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$ é um grupo abeliano livre cuja base está em correspondência biunívoca com o conjunto $X_n = \{\sigma \mid \sigma$ é uma n-célula de $X\}$. Portanto, se X é um CW-complexo de dimensão $n < \infty$, então $C_i(X) = 0$, para todo $i > n$.

Proposição B.15 ((BROWN, 1982), Proposição 4.1, p. 14)**.** *Se* X *é um* G*-complexo livre contrátil, então o complexo de cadeia celular aumentado de* X*, dado por* $C(X) : \cdots \longrightarrow C_2(X) \xrightarrow{d_2} C_1(X) \xrightarrow{d_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$*, em que* $\varepsilon(\sigma) = 1$ *para toda célula* $\sigma \in X^0$*, é uma resolução livre de* $\mathbb{Z}$ *sobre* $\mathbb{Z}G$.

Demonstração: Pelo Lema B.13, $C_n(X)$ é um grupo abeliano livre cuja base está em correspondência biunívoca com os elementos de X_n, logo, $C_n(X)$ pode ser identificado com $\mathbb{Z}X_n$. Dado que X é um G-complexo livre, decorre que X_n é um G-conjunto livre, então, pela Proposição A.23, $C_n(X) \approx \mathbb{Z}X_n$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo livre. Como X é contrátil, para $i > 0$, $im\,d_{i+1} = ker\,d_i$, pois, para $i > 0$, $H_i^{CW}(X) \approx H_i(X) = 0$. Além disso, como $H_0^{CW} \approx H_0(X) = \mathbb{Z} \approx C_0(X)/im\,d_1$, pois ε é um epimorfismo, e $im\,d_1 \subseteq Ker\varepsilon \subseteq C_0(X)$, decorre que

$$\mathbb{Z} \approx \frac{C_0(X)}{ker\,\varepsilon} \approx \frac{\dfrac{C_0(X)}{im\,d_1}}{\dfrac{ker\,\varepsilon}{im\,d_1}} \approx \frac{\mathbb{Z}}{\dfrac{ker\,\varepsilon}{im\,d_1}},$$

logo, $ker\,\varepsilon = im\,d_1$. Portanto, $\cdots \to C_2(X) \stackrel{d_2}{\to} C_1(X) \stackrel{d_1}{\to} C_0(X) \stackrel{\varepsilon}{\to} \mathbb{Z} \to 0$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. ■

Exemplo B.16. *De acordo com o Exemplo B.12, $\mathbb{R}$ é um $\mathbb{Z}$-complexo livre. Dado que $\mathbb{R}$ é contrátil, pela Proposição B.15, o complexo celular aumentado de $\mathbb{R}$, $\cdots \to C_2(\mathbb{R}) \stackrel{d_2}{\to} C_1(\mathbb{R}) \stackrel{d_1}{\to} C_0(\mathbb{R}) \stackrel{\varepsilon}{\to} \mathbb{Z} \to 0$, é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Como $\mathbb{R}$ não possui células de dimensão maior que 1, $C_n(X) = 0$ para todo $n > 1$. Sejam $\sigma^0 = \{0\}$ e $\sigma^1 = (0,1)$. Haja vista que $G(\sigma^0) = \{t^m \cdot \sigma^0 \mid m \in \mathbb{Z}\} = \{\{m\} \mid m \in \mathbb{Z}\} = X_0$ e $G(\sigma^1) = \{t^m \cdot \sigma^1 \mid m \in \mathbb{Z}\} = \{(m, m+1) \mid m \in \mathbb{Z}\} = X_1$, decorre que existem apenas uma G-órbita de 0-células e uma G-orbita de 1-células, logo, $C_0(\mathbb{R}) \approx X_0\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}G$ e $C_1(\mathbb{R}) \approx X_1\mathbb{R} \approx \mathbb{Z}G$. Portanto, a resolução em questão se resume a $0 \to \mathbb{Z}G \stackrel{d_1}{\to} \mathbb{Z}G \stackrel{\varepsilon}{\to} \mathbb{Z} \to 0$.*

B.3 ESPAÇOS DE EILENBERG-MACLANE DO TIPO $K(G,1)$

Primeiramente, faremos algumas observações que podem ser encontradas com detalhes em (MASSEY, 1977). Se X é um CW-complexo conexo e $p : \widetilde{X} \to X$ é um recobrimento de X, então $\widetilde{X}$ é um CW-complexo onde as n-células de $\widetilde{X}$ são descritas pelas componentes conexas de $p^{-1}(\sigma^n)$. Também, se $G = Aut(\widetilde{X}, p)$ é o grupo das transformações de recobrimento, então G atua livremente sobre $\widetilde{X}$ permutando suas células. Portanto, $\widetilde{X}$ é um G-complexo livre. Se $p : \widetilde{X} \to X$ é um recobrimento regular, então $G = Aut(\widetilde{X}, p) \approx \pi_1(X)/p_*(\pi_1(\widetilde{X}))$. Em particular, $G \approx \pi_1(X)$ se o recobrimento $p : \widetilde{X} \to X$ for universal. Se $\widetilde{X}$ for contrátil, então, de acordo com a Proposição B.15, o complexo de cadeia celular aumentado de $\widetilde{X}$ será uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Neste sentido, definimos:

Definição B.17. *Seja X um CW-complexo. Dizemos que X é um **complexo de Eilenberg-MacLane do tipo** $\mathbf{K(G,1)}$, ou simplesmente um $\mathbf{K(G,1)}$-complexo, se:*

(i) X é conexo;

(ii) $\pi_1(X) = G$;

(iii) O recobrimento universal $\widetilde{X}$ de X é contrátil.

Observação B.18 ((BROWN, 1982), p. 15)**.** *A condição (iii) pode ser substituída pela condição de que $H_n(\widetilde{X}) = 0$ para todo $n \geq 2$ ou $\pi_n(X) = 0$ para todo $n \geq 2$.*

Exemplo B.19. *Como S^1 é um CW-complexo conexo e seu recobrimento universal $\mathbb{R}$ é contrátil, decorre que S^1 é um $K(\mathbb{Z},1)$-complexo, pois $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Mais geralmente, o toro n-dimensional $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{-vezes}}$ é um $K(\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}, 1)$-complexo.*

Exemplo B.20. *Sejam $G = F(I)$ o grupo livre gerado pelo conjunto I e $X = \bigvee_{i\in I} S^1_i$. De acordo com o Exemplo B.9, X é um CW-complexo de dimensão 1. Além disso, X é conexo e $\pi_1(X) = G$ ((MASSEY, 1977), IV, Exemplo 3.4, p.125). Se $p : \widetilde{X} \to X$*

é o recobrimento universal de X, então $\widetilde{X}$ é um CW-complexo de dimensão 1, pois $p : \widetilde{X} \to X$ é um homomorfismo local, logo, $H_n(\widetilde{X}) = 0$ para todo $n \geq 2$. Portanto, X é um $K(G,1)$-complexo.

Proposição B.21 ((BROWN, 1982), Proposição 4.2, p. 15)**.** *Se X é um $K(G,1)$-complexo, então o complexo de cadeia celular aumentado do recobrimento universal $\widetilde{X}$ de X é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.*

Dado que para qualquer grupo G existe um $K(G,1)$-complexo ((BROWN, 1982), Teorema 7.1, p. 205), sempre é possível considerar uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ tal como na Proposição B.21.

Lema B.22. *Se $H \approx \mathbb{Z}_n$ é um grupo cíclico, finito e não trivial, então não existe uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$ de comprimento finito.*

Demonstração: De fato, se $0 \to P_k \to \cdots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$, então $H^{2k}(H,\mathbb{Z}) = 0$, mas, pelo Exemplo 2.4, $H^{2k}(H,\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}_n$. Portanto, não exite uma resolução projetiva de comprimento finito de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$. ■

Proposição B.23. *Se G tem torção, então não existe um $K(G,1)$-complexo de dimensão finita.*

Demonstração: Se G tem torção, então existe um elemento $g \in G$ de ordem finita $n \geq 2$. Seja $H = \langle g \rangle \approx \mathbb{Z}_n$. Se supormos por absurdo que existe um $K(G,1)$-complexo X de dimensão $m < \infty$, então o recobrimento universal $\widetilde{X}$ de X tem também dimensão m, logo, a resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ dada pela Proposição B.21 se reduz à resolução $0 \to C_m(\widetilde{X}) \to \cdots \to C_0(\widetilde{X}) \to \mathbb{Z} \to 0$. Haja vista que esta resolução é também uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$, obtemos o absurdo, pois, de acordo com o Lema B.22, não existem resoluções projetivas de comprimento finito de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$. Portanto, não existe $K(G,1)$-complexo de dimensão finita. ■

ÍNDICE REMISSIVO