UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Leonardo Guarnieri Justino

Mônadas de Hopf

Florianópolis
2021

Leonardo Guarnieri Justino

Mônadas de Hopf

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Matemática Pura e Aplicada com concentração em Álgebra.
Orientador: Prof. Dr. Eliezer Batista

Florianópolis
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Justino, Leonardo Guarnieri
Mônadas de Hopf / Leonardo Guarnieri Justino ; orientador, Eliezer Batista, 2021.
152 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Mônadas. 3. Categorias Monoidais. 4. Álgebras. I. Batista, Eliezer. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Leonardo Guarnieri Justino

Mônadas de Hopf

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Felipe Lopes Castro
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Marcelo Muniz Alves
Universidade Federal do Paraná

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática Pura e Aplicada com concentração em Álgebra.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Daniel Goncalves
Data: 12/06/2021 15:20:42-0300
CPF: 017.022.459-77
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Eliezer Batista
Data: 12/06/2021 14:17:10-0300
CPF: 135.541.288-99
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Eliezer Batista
Orientador

Florianópolis, 2021.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo das chamadas mônadas de Hopf. Mônadas em geral são uma forma conhecida de se generalizar o conceito de uma álgebra sobre um espaço vetorial e tem grande importância devido a sua relação com adjunções e aplicações, dentro e fora da matemática. Uma vez notada essa generalização, pergunta-se como generalizar demais estruturas tais como coálgebras, biálgebras e álgebras de Hopf no contexto de funtores. É visto que a generalização de coálgebras são funtores com uma estrutura opmonoidal. Alguns resultados importantes incluem que bimônadas são mônadas em categorias monoidais nas quais a estrutura monoidal da categoria de base poder ser levantada para a categoria de Eilenberg-Moore e que mônadas de Hopf são bimônadas em categorias fechadas nas quais a estrutura fechada da categoria de base pode ser levantada para a categoria de Eilenberg-Moore. No decorrer do texto é feita uma introdução de pré-requisitos e um estudo das propriedades de mônadas e de categorias de Eilenberg-Moore, que é um tipo de categoria de módulos sobre uma mônada, incluindo resultados tais como o teorema de comparação e o teorema de monadicidade de Beck. O trabalho também conta com um apêndice no qual é dado o básico da teoria de categorias de modo a torná-lo mais acessível ao leitor sem muita experiência com a área.

Palavras-chave: Mônadas. Categorias. Álgebra.

ABSTRACT

This work presents the so-called Hopf Monads. Monads are a well-known generalization of algebras over a vector space, with great importance for their relation with adjunctions as well as for their applications in and out of mathematics. Once this generalization is noticed, one can ask how to generalize further structures such as coalgebras, bialgebras and Hopf algebras for the functorial context. We see that the generalization of coalgebras is as functors with an opmonoidal structure. Some important results are that bimonads are monads on monoidal categories whose underlying category has a monoidal structure that can be lifted to the Eilenberg-Moore category, and that Hopf monads are bimonads whose underlying category has a closed structure that can be lifted to the Eilenberg-Moore category. An introduction to prerequesites is developed along the text, as well as a study of the properties of monads and Eilenberg-Moore categories, which are a type of category of modules over monads, including results such as the comparison functor and Beck's monadicity theorem. The text also includes an appendix where the basics of category theory are given to make it more accessible to readers with little experience in the area.

Keywords: Monads. Categories. Algebra.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo definir o que é uma mônada de Hopf bem como dar uma caracterização da mesma. O nosso objetivo é manter o trabalho acessível ao maior público possível. Durante as demonstrações, serão usados diagramas para auxiliar o entendimento e, em casos aplicáveis, será empregado o uso de cores para indicar quais argumentos são utilizados em quais equações. Observamos que essas cores são meramente recursos auxiliares e o trabalho é acompanhável mesmo, digamos, em uma impressão em tons de cinza.

Como documentado em (ANDRUSKIEWITSCH; FERRER SANTOS, 2008), o estudo de álgebras de Hopf foi fortemente pelo estudo do anel de coomologia H de uma variedade M munido de uma operação binária contínua. Tal operação induz um homomorfismo $H \to H \otimes H$ que por sua vez torna H no que é hoje chamada de uma álgebra de Hopf. Desde então, álgebras de Hopf e seus casos particulares vêm sido objeto de estudo e em particular, mônadas de Hopf tem sido estudadas, por exemplo, como uma forma de unificar noções similares a álgebras de Hopf, como pode ser visto em (BÒHM, 2016).

Além do caso mais conhecido de álgebras de Hopf sobre espaços vetoriais, há também a necessidade de estudá-las em outros contextos tais como no caso do anel de coomologia. Uma primeira generalização do conceito com o objetivo de unificar tais casos particulares é o de uma álgebra de Hopf sobre uma categoria monoidal simétrica, o que não será estudado nesse trabalho. Podemos considerar ainda outras noções de álgebras de Hopf nos contextos de categorias duoidais e álgebras de Hopf fracas (ver (BÖHM, 2018)), e uma das generalizações possíveis nesse caso é via mônadas de Hopf.

Como mostraremos, a definição de uma mônada de Hopf está intimamente ligada com o Teorema Fundamental das Álgebras de Hopf, aqui separado nos teoremas 5.40 e 5.41, no sentido de que esta é caracterizada através do levantamento de uma estrutura fechada. O estudo de categorias fechadas por si só, além de uma ferramenta utilizada nesse trabalho, possui outras aplicações, como por exemplo possibilitar uma semântica para a logica linear. O leitor interessado nesse resultado pode encontrar uma exposição enfatizando os aspectos algébricos em (MURFET, 2017).

No capítulo 1, introduzimos o conceito de categorias monoidais como uma forma de generalizar o produto tensorial de espaços vetoriais. Fazemos um breve estudo das mesmas, apresentando alguns resultados básicos bem como algumas definições que serão indispensáveis para os capítulos seguintes. Em particular, apresentamos o teorema de estritização como uma forma de facilitar notações e demonstrações de resultados envolvendo categorias monoidais.

No segundo capítulo falamos de mônadas, nosso objeto de estudo principal. Ao longo do capítulo, estudamos adjunções e sua relação com mônadas e definimos a categoria de Eilenberg-Moore. Se pensarmos em mônadas como uma interpretação funtorial de uma álgebra, a categoria de Eilenberg-Moore é o análogo a uma categoria de módulos e essas são objetos finais de uma certa categoria de adjunções associadas à mônada. Vemos brevemente a chamada categoria de Kleisli, que é objeto inicial da categoria de adjunções mencionada acima.

A seguir, no capítulo 3, fazemos uma digressão para apresentar o teorema de Beck, caracterizando categorias isomorfas à de Eilenberg-Moore (por um isomorfismo que preserva a adjunção) através da criação de coequalizadores. Observamos que esse capítulo não será mencionado no decorrer do texto e portanto não é pré-requisito para o entendimento dos capítulos seguintes.

O quarto capítulo apresenta o conceito de levantamento para a categoria de Eilenberg-Moore, bem como três teoremas que caracterizam levantamentos de funtores, transformações naturais e adjunções. Esses teoremas serão úteis no último capítulo, quando caracterizarmos bimônadas e mônadas de Hopf pela possibilidade de se levantar, respectivamente, a estrutura monoidal e a estrutura fechada da categoria de base para a categoria de Eilenberg-Moore.

Damos os exemplos motivadores para as definições no capítulo 6 logo antes, no capítulo 5. O primeiro grande exemplo corresponde às álgebras, ou mais geralmente, aos monoides sobre uma categoria monoidal. Vemos inicialmente como podemos associar monoides a uma mônada e sob quais condições a recíproca é verdadeira. Comonoides também são considerados, mas nos restringimos à categoria dos espaços vetoriais a fim de simplificar a discussão. Coálgebras serão caracterizadas por funtores com uma estrutura opmonoidal. Biálgebras e álgebras de Hopf também são dadas, junto com seus respectivos teoremas fundamentais que serão estudados no caso geral em seguida.

No capítulo final, falamos sobre bimônadas e mônadas de Hopf. As definição dadas são motivadas diretamente pelas propriedades estudadas para espaços vetoriais e também será dadas equivalências análogas aos teoremas fundamentais das biálgebras e álgebras do Hopf nesse caso mais geral.

O trabalho também conta com um apêndice descrevendo as noções básicas de categorias, a fim de torná-lo um pouco mais acessível ao leitor sem experiência com o tema. Nesse apêndice, definimos o que são categorias, funtores e transformações naturais, apresentamos a noção de um objeto livre e explicamos os usos de diagramas como ferramentas auxiliares na demonstração de teoremas. Além disso, fazemos uma discussão de equivalências categóricas, apresentando diversas formas de ver esse conceito.

1 CATEGORIAS MONOIDAIS

Começamos o trabalho estudando categorias monoidais. Usamos como referência para esse capítulo o livro (MACLANE, 1971). Intuitivamente, em uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ podemos criar objetos que juntam dois ou mais objetos de $\mathcal{C}$ em um único. Dados objetos X e Y, denotamos esse objeto composto por $X \otimes Y$. Além disso, morfismos entre componentes também podem ser combinados de forma independente, isto é, dados $g : X \to X'$ e $h : Y \to Y'$ temos a composição

$$g \otimes h : X \otimes Y \to X' \otimes Y'.$$

Antes de definirmos formalmente, façamos dois exemplos que motivarão diretamente a definição.

Exemplo 1.1. *Considere a categoria $\underline{Set}$ dos conjuntos. Dados conjuntos X e Y, podemos compor estes em $X \times Y$. Além disso, dadas funções $g : X \to X'$ e $h : Y \to Y'$, temos uma função $g \times h : X \times Y \to X' \times Y'$ dada por $(g \times h)(x, y) = (g(x), h(y))$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$.*

Observe que na definição de $g \times h$, as funções componentes não interagem. A primeira entrada do resultado depende apenas de $g(x)$ e a segunda apenas de $h(y)$. A partir disso, podemos provar que o produto cartesiano é um funtor $\times : \underline{Set} \times \underline{Set} \to \underline{Set}$. De fato, para $x \in X$ e $y \in Y$.

$$\begin{aligned}\left(\left(g' \times h'\right) \circ (g \times h)\right)(x, y) &= \left(g' \times h'\right)(g(x), h(x)) = \left(g'(g(x)), h'(h(x))\right) \\ &= \left(\left(g' \circ g\right)(x), \left(h' \circ h\right)(x)\right) = \left(\left(g' \circ g\right) \times \left(h' \circ h\right)\right)(x, y); \\ (id_X \times id_Y)(x, y) &= (id_X(x), id_Y(y)) = (x, y) = id_{X \times Y}(x, y).\end{aligned}$$

Exemplo 1.2. *Considere a categoria ${}_R\mathcal{M}$ de módulos sobre um anel comutativo R. Podemos definir o funtor cartesiano em ${}_R\mathcal{M}$, o que consideraremos mais tarde, mas não é essa a estrutura que mais nos interessa no momento. Considere uma função $b : L \times M \to N$, com L, M e N módulos sobre R.*

Obtemos duas famílias de funções a partir dessa. Para cada $m \in M$ e $l \in L$ temos as funções $b^l(m) = b(l, m) = b_m(l)$. Note que $b^l : M \to N$ e $b_m : L \to N$ são funções entre módulos e podemos considerar os casos em que ambas são morfismos. Nesse caso, dizemos que b é bilinear. Observamos que b ser bilinear é equivalente às igualdades $b(\lambda l + l', m) = \lambda b(l, m) + b(l', m)$ e $b(l, \lambda m + m') = \lambda b(l, m) + b(l, m')$ serem ambas verdadeiras.

Existe em ${}_R\mathcal{M}$ um objeto $L \otimes M$ que, de certa forma, codifica transformações bilineares. Isso significa que cada $b : L \times M \to N$ bilinear corresponde bijetivamente a uma $h : L \otimes M \to N$ linear. Em particular, a função linear $id_{L \otimes M}$ deve corresponder a alguma transformação bilinear $\otimes : L \times M \to L \otimes M$, levando cada par (l, m) em um *elemento que denotaremos por $l \otimes m$. Com essas considerações feitas, começaremos a construção do produto tensorial.*

Para L e M R-módulos, considere $F(L \times M)$ o R-módulo livremente gerado por $L \times M$. Esse módulo tem como base os elementos da forma (l, m). Temos uma inclusão canônica $\iota : L \times M \to F(L \times M)$ e gostaríamos que esta fosse bilinear mas como poucas identidades existem em
$F(L \times M)$, esse módulo não é apropriado. Corrigiremos isso utilizando um quociente.

Considere o submódulo Q de $F(L \times M)$ gerado por elementos da forma
$(\lambda l + l', m) - \lambda(l, m) - (l', m)$ ou da forma $(l, \lambda m + m') - \lambda(l, m) - (l, m')$. Note que pedir que esses elementos sejam nulos é essencialmente pedir o mínimo possível para que ι se torne bilinear. Considerando $L \otimes M = F(L \times M)/Q$, temos a projeção canônica $\pi : F(L \times M) \to L \otimes M$.

Podemos definir $\otimes : L \times M \to L \otimes M$ por $\otimes = \pi \circ \iota$. Note que $L \otimes M$ é gerado pelas classes da forma $[(l, m)]$, isto é, pelos elementos $l \otimes m$. Como ι é bilinear e π é linear, então segue que $\otimes$ é bilinear. Disso, dado $\lambda \in R$, $l \in L$ e $m \in M$, temos $\lambda(l \otimes m) = (\lambda l) \otimes m$ e portanto, uma combinação linear de elementos da forma $m \otimes n$ pode ser reduzida a uma soma de elementos dessa forma. Concluímos que tais elementos geram $L \otimes M$ não só como R-módulo mas também como grupo. Agora considere uma transformação bilinear $b : L \times M \to N$ e defina a função $\overline{b} : F(L \times M) \to N$ como a única extensão linear de b. Note que

$$
\begin{aligned}
\overline{b}\left((\lambda l + l', m) - \lambda(l, m) - (l', m)\right) &= \overline{b}\left(\lambda l + l', m\right) - \lambda \overline{b}(l, m) - \overline{b}\left(l', m\right) \\
&= b\left(\lambda l + l', m\right) - \lambda b(l, m) - b\left(l', m\right) \\
&= b\left(\lambda l + l', m\right) - b\left(\lambda l + l', m\right) = 0; \\
\overline{b}\left((l, \lambda m + m') - \lambda(l, m) - (l, m')\right) &= \overline{b}(l, \lambda m) - \lambda \overline{b}(l, m) - \overline{b}\left(l, m'\right) \\
&= b\left(l, \lambda m + m'\right) - \lambda b(l, m) - b\left(l, m'\right) \\
&= b\left(l, \lambda m + m'\right) - b\left(l, \lambda m + m'\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Como $\overline{b}$ leva cada gerador de Q em 0, então existe uma única transformação linear $h : L \otimes M \to N$ tal que $h(l \otimes m) = h \circ \pi \circ \iota(l, m) = \overline{b} \circ \iota(l, m) = b(l, m)$. Reciprocamente, considere $h : L \otimes M \to N$ transformação linear. Defina $b(l, m) = h(l \otimes m)$. Temos que

$$
\begin{aligned}
b\left(\lambda l + l', m\right) &= h\left(\left(\lambda l + l'\right) \otimes m\right) = h\left(\lambda (l \otimes m) + \left(l' \otimes m\right)\right) \\
&= \lambda h(l \otimes m) + h\left(l' \otimes m\right) = \lambda b(l, m) + b(l', m).
\end{aligned}
$$

A outra identidade mostrando que b é bilinear é análoga. Definimos agora o funtor $\otimes : {}_R\mathcal{M} \times {}_R\mathcal{M} \to {}_R\mathcal{M}$ da seguinte forma.

Para L e M módulos, defina $\otimes(L, M) = L \otimes M$. Dados morfismos $g : L \to L'$ e $h : M \to M'$, considere a função $b : L \times M \to L' \times M'$ dada por $b(l, m) = g(l) \otimes h(m)$.

Essa função é bilinear pois

$$\begin{aligned} b(\lambda l + l', m) &= g(\lambda l + l') \otimes h(m) = \left(\lambda g(l) + g(l')\right) \otimes h(m) \\ &= \lambda\left(g(l) \otimes h(m)\right) + \left(g(l') \otimes h(m)\right) = \lambda b(l, m) + b(l', m) \end{aligned}$$

e analogamente para a outra entrada. Disso, b induz uma transformação linear $g \otimes h : L \otimes M \to L' \otimes M'$ *satisfazendo* $(g \otimes h)(l \otimes m) = g(l) \otimes h(m)$*. Observe novamente que cada componente se aplica independentemente, fazendo com que o resultado tenha duas componentes, uma sendo* $g(l)$ *e a outra* $h(m)$*.*

Provamos que $\otimes$ *é funtor. De fato,*

$$\begin{aligned} \left(g' \otimes h'\right) \circ (g \otimes h)(l \otimes m) &= \left(g' \otimes h'\right)\left(g(l) \otimes h(m)\right) \\ &= \left(g' \circ g(l)\right) \otimes \left(h' \circ h(m)\right) = \left(\left(g' \circ g\right) \otimes \left(h' \circ h\right)\right)(l \otimes m) \end{aligned}$$

e ainda,

$$(id_L \otimes id_M)(l \otimes m) = id_L(l) \otimes id_M(m) = l \otimes m = id_{L \otimes M}(l \otimes m).$$

Observação 1.3. *A construção dada acima pode ser generalizada para anéis não comutativos. Para isso, precisamos considerar bimódulos, ou mais precisamente, dados anéis* R*,* S *e* T*, consideramos um* R, S*-bimódulo* L *e um* S, T*-bimódulo* M*. O produto tensorial balanceado por* S *será um* R, T*-bimódulo denotado por* $L \otimes_S M$*. Mais detalhes disso serão dados no exemplo 1.26.*

Sabemos que na categoria $\underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}$ dos $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, um objeto V é caracterizado, a menos de isomorfismo, pela sua dimensão $\dim(V)$, isso é, a cardinalidade $\#(B)$ de qualquer base B. Com isso, podemos provar o teorema a seguir.

Teorema 1.4. *Sejam* V *e* W $\mathbb{K}$*-espaços vetoriais com respectivas bases* B_V *e* B_W*. Então* $B' = \left\{e \otimes e'; e \in B_V, e' \in B_W\right\}$ *é base de* $V \otimes W$ *e que a função* $\iota : B_V \times B_W \to B'$ *definida por* $\iota(e, e') = e \otimes e'$ *é uma bijeção. Em particular,*

$$\dim(V \otimes W) = \#(B') = \#(B_V \times B_W) = \#(B_V) \cdot \#(B_W) = \dim(V) \cdot \dim(W).$$

Demonstração. Para provar a primeira afirmação, provamos que B' é linearmente independente e gera $V \otimes W$. Suponha que tenhamos uma combinação linear nula da seguinte forma

$$\sum_{\substack{e \in B_V \\ e' \in B_W}} \lambda_{e,e'} e \otimes e' = 0.$$

Lembramos que todas as combinações lineares possuem uma quantidade finita de coeficientes não nulos. Considere, para $e \in B_V$ e $e' \in B_W$, as transformações lineares

$\xi_e^V : V \to \mathbb{K}$ e $\xi_{e'}^W : W \to \mathbb{K}$ definidas como abaixo.

$$\xi_e^V(e) = 1,\ \xi_e^V(\overline{e}) = 0 \text{ para } \overline{e} \in B_V \setminus \{e\};$$
$$\xi_{e'}^W(e') = 1,\ \xi_{e'}^W\left(\overline{e'}\right) = 0 \text{ para } \overline{e'} \in B_W \setminus \{e'\}.$$

Como $\mu_K : \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ definido por $\mu_K(x \otimes y) = xy$ é linear, obtemos uma transformação linear $\Xi_{e,e'} = \mu_K \circ \left(\xi_e^V \otimes \xi_{e'}^W\right) : V \otimes W \to \mathbb{K}$. Observamos que $\Xi_{e,e'}(v \otimes w) = \xi_e^V(v)\xi_{e'}^W(w)$. Aplicando nos elementos de B', para $e \in B_V$, $e' \in B_W$, $\overline{e} \in B_V \setminus \{e\}$ e $\overline{e'} \in B_W \setminus e'$:

$$\Xi_{e,e'}(e \otimes e') = \xi_e^V(e)\xi_{e'}^W(e') = 1 \cdot 1 = 1;$$
$$\Xi_{e,e'}\left(e \otimes \overline{e'}\right) = \xi_e^V(e)\xi_{e'}^W\left(\overline{e'}\right) = 1 \cdot 0 = 0;$$
$$\Xi_{e,e'}\left(\overline{e} \otimes e'\right) = \xi_e^V(\overline{e})\,\xi_{e'}^W(e') = 0 \cdot 1 = 0;$$
$$\Xi_{e,e'}\left(\overline{e} \otimes \overline{e'}\right) = \xi_e^V(\overline{e})\,\xi_{e'}^W\left(\overline{e'}\right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Em outras palavras, $\Xi_{e,e'}$, quando aplicado em B', identifica o elemento $e \otimes e'$. Agora aplicamos a função na combinação linear acima.

$$0 = \Xi_{e,e'}(0) = \Xi_{e,e'}\left(\sum_{\substack{i \in B_V \\ i' \in B_W}} \lambda_{i,i'}\, i \otimes i'\right) = \sum_{\substack{i \in B_V \\ i' \in B_W}} \lambda_{i,i'} \Xi_{e,e'}\left(i \otimes i'\right) = \lambda_{e,e'} \tag{1}$$

Com isso, temos que o coeficiente $\lambda_{e,e'}$ é nulo. Como o par (e, e') foi arbitrário, segue que todos os coeficientes da transformação linear são nulos e portanto B' é linearmente independente.

Para mostrar que B' gera $V \otimes W$, considere um elemento $\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i$ de $V \otimes W$. Podemos escrever

$$v_i = \sum_{e \in B_V} \kappa_e^i e;$$
$$w_i = \sum_{e' \in B_W} \zeta_{e'}^i e'.$$

Dessa forma,

$$\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{e \in B_V} \kappa_e^i e\right) \otimes \left(\sum_{e' \in B_W} \zeta_{e'}^i e'\right).$$

Usando a bilinearidade do produto tensorial,

$$\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{e \in B_V \\ e' \in B_W}} \kappa_e^i e \otimes \zeta_{e'}^i e' = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{e \in B_V \\ e' \in B_W}} \kappa_e^i \zeta_{e'}^i \left(e \otimes e'\right) = \sum_{\substack{e \in B_V \\ e' \in B_W}} \left(\sum_{i=1}^n \kappa_e^i \zeta_{e'}^i\right) . \left(e \otimes e'\right)$$

Com isso, escrevemos o elemento original como uma combinação linear dos elementos de B'. Temos então que B' gera $V \otimes W$.

A segunda afirmação, que $\iota : B_V \times B_W \to B'$ é bijeção, será provada mostrando que ι é injetora e sobrejetora. Que é sobrejetora, é claro pela construção de B'. Para mostrar que é injetora, note que podemos considerar as transformações lineares $O^V : V \to \mathbb{K}$ e $O^W : W \to \mathbb{K}$ definidas por $O^V(e) = 1$ e $O^W(e') = 1$ nos elementos da base além de $R : V \otimes \mathbb{K} \to V$ e $L : \mathbb{K} \otimes W \to W$ dadas por $R(v \otimes \lambda) = \lambda v$ e $L(\lambda \otimes w) = \lambda w$. Dessa forma, temos transformações lineares $\pi^V : V \otimes W \to V$ e $\pi^W : V \otimes W \to W$ dadas por $\pi^V = R \circ (\mathrm{id}_V \otimes O^W)$ e $\pi^W = L \circ (O^V \otimes \mathrm{id}_W)$. Observe que $\pi^V(e \otimes e') = e$ e $\pi^W(e \otimes e') = e'$ para quaisquer elementos $e \in B_V$ e $e' \in B_W$. Agora, se $e \otimes e' = \iota(e, e') = \iota(i, i') = i \otimes i'$, temos $e = \pi^V(e \otimes e') = \pi^V(i \otimes i') = i$ e $e' = \pi^W(e \otimes e') = \pi^W(i \otimes i') = i'$. Segue que ι é injetora. ■

Observe que no caso de Set, dados X, Y e Z podemos obter $(X \times Y) \times Z$ e $X \times (Y \times Z)$. A diferença entre esses dois conjuntos é que um elemento do primeiro tem a forma $((x, y), z)$ e um elemento do segundo tem a forma $(x, (y, z))$. Podemos definir uma função $a_{X,Y,Z}$ entre esses dois conjuntos precisamente por

$$a_{X,Y,Z}((x, y), z) = (x, (y, z)).$$

Afirmamos que $a : (\_\_ \times \_\_) \times \_\_ \Rightarrow \_\_ \times (\_\_ \times \_\_)$ é natural. De fato, considere funções $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ e $h : Z \to Z'$. Temos

$$a_{X',Y',Z'} \circ ((f \times g) \times h)\,((x, y), z) = a_{X',Y',Z'}((f(x), g(y)), h(z)) = (f(x), (g(y), h(y)));$$
$$(f \times (g \times h)) \circ a_{X,Y,Z}((x, y), z) = (f \times (g \times h))\,(x, (y, z)) = (f(x), (g(y), h(z))).$$

Mais ainda, a é isomorfismo natural com inversa dada por

$$a^{-1}_{X,Y,Z}(x, (y, z)) = ((x, y), z).$$

Temos também um análogo ao elemento neutro para o produto cartesiano. Considere um conjunto unitário $I = \{*\}$ qualquer. Temos transformações naturais $l_X : I \otimes X \to X$ e $r_X : X \otimes I \to X$, dadas por $l_X(*, x) = x = r_X(x, *)$ para $x \in X$. l e r também são isomorfismos naturais com inversas dadas por $l^{-1}_X(x) = (*, x)$ e $r^{-1}_X(x) = (x, *)$ para $x \in X$.

As mesmas considerações podem ser feitas para R-módulos. Nesse caso, $I = R$ e as transformações naturais com suas respectivas inversas são definidas por

$$a_{L,M,N}((l \otimes m) \otimes n) = l \otimes (m \otimes n)$$
$$a^{-1}_{L,M,N}(l \otimes (m \otimes n)) = (l \otimes m) \otimes n$$
$$l_M(\lambda \otimes m) = \lambda m = r_M(m \otimes \lambda)$$
$$l^{-1}_M(x) = 1_R \otimes x$$
$$r^{-1}_M(x) = x \otimes 1_R$$

Definição 1.5. *Uma categoria monoidal é uma categoria $\mathcal{C}$ munida da seguinte estrutura:*

Um funtor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, chamado de produto tensorial;

Um objeto I de $\mathcal{C}$, chamado de objeto identidade;

Um isomorfismo natural $a : ((\_\_ \otimes \_\_) \otimes \_\_) \Rightarrow (\_\_ \otimes (\_\_ \otimes \_\_))$, chamado de associador;

Um isomorfismo natural $l : I \otimes \_\_ \Rightarrow id_{\mathcal{C}}$, chamado de identidade à esquerda;

Um isomorfismo natural $r : \_\_ \otimes I \Rightarrow id_{\mathcal{C}}$, chamado de identidade à direita.

Essa estrutura deve ser tal que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd}
((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[rr, "a_{X,Y,Z} \otimes id_W"] \arrow[d, "a_{X \otimes Y, Z, W}"'] & & (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d, "a_{X, Y \otimes Z, W}"] \\
(X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[dr, "a_{X,Y,Z \otimes W}"'] & & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[dl, "id_X \otimes a_{Y,Z,W}"] \\
& X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes I) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,I,Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes id_Y"'] & & X \otimes (I \otimes Y) \arrow[dl, "id_X \otimes l_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

Observe que $\otimes$ ser funtor implica na chamada lei de intercâmbio: $(g' \circ g) \otimes (h' \circ h) = (g' \otimes h') \circ (g \otimes h)$ sempre que a expressão está definida. Chamamos essa propriedade de lei de intercâmbio. Compare com o teorema A.70. Ambos são casos particulares de uma 2-categoria fraca (BAEZ, 1997), mas não iremos estudar tal conceito aqui.

Exemplo 1.6. *Também podemos usar o produto cartesiano para tornar ${}_R\mathcal{M}$ uma categoria monoidal. A estrutura em si é a mesma de Set então basta mostrar que os produtos cartesianos realmente resultam em módulos e transformações lineares.*

Sabemos que uma estrutura de módulo existe em $M \times N$ definindo

$$\lambda(m, n) = (\lambda m, \lambda n).$$

Além disso, se $g : M \to M'$ e $h : N \to N'$ são transformações lineares, então

$$\begin{aligned}(g \times h)\left((m,n) + (m',n')\right) &= (g \times h)\left(m + m', n + n'\right) = \left(g(m + m'), h(n + n')\right)\\ &= \left(g(m) + g(m'), h(n) + h(n')\right) = \left(g(m), h(n)\right) + \left(g(m'), h(n')\right)\\ &= (g \times h)\,(m,n) + (g \times h)\,(m,n);\\ (g \times h)\left(\lambda(m,n)\right) &= (g \times h)\left(\lambda m, \lambda n\right) = \left(g(\lambda m), h(\lambda n)\right)\\ &= \left(\lambda g(m), \lambda h(n)\right) = \lambda\left(g(m), h(n)\right) = \lambda\,(g \times h)\,(m,n).\end{aligned}$$

Segue da mesma forma que o associador e as identidades são lineares e portanto temos uma categoria monoidal. Chamamos esta de categoria cartesiana de ${}_R\mathcal{M}^{Cart}$.

Definição 1.7. *Uma categoria monoidal estrita é uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ tal que valem as identidades*

$$\begin{aligned}(X \otimes Y) \otimes Z &= X \otimes (Y \otimes Z);\\ I \otimes X &= X \otimes I = X\end{aligned}$$

e os isomorfismos naturais a, l e r são as identidades em seus respectivos funtores. Denotamos $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z) = X \otimes Y \otimes Z$ nesse caso.

Observação 1.8. *Note que tomando a, l e r como as transformações naturais identidade, os diagramas da definição de categorial monoidal sempre comutam.*

Exemplo 1.9. *Considere a categoria End($\mathcal{C}$) cujos objetos são endofuntores de $\mathcal{C}$ e os morfismos são transformações naturais, tal como descrita na definição A.64. Podemos definir uma estrutura de categoria monoidal estrita sobre End($\mathcal{C}$). Para isso, defina $T \otimes U = T \circ U$ e $\eta \otimes \nu = \eta * \nu$, a composição horizontal dada na definição A.66, isto é, para $\eta : F \Rightarrow F'$ e $\nu : G \Rightarrow G'$ temos*

$$(\nu * \eta)_X = G'(\eta_X) \circ \nu_{F(X)} = \nu_{F'(X)} \circ G(\eta_X).$$

Além disso, I é dado pelo funtor identidade $id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. As propriedades dadas na definição de categoria monoidal estrita seguem das propriedades associativas e das identidades já conhecidas para funtores e transformações naturais.

Definição 1.10. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Um monoide sobre $\mathcal{C}$ é um objeto X de $\mathcal{C}$ munido de morfismos $\mu : X \otimes X \to X$ e $\eta : I \to X$ tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$
\begin{tikzcd}
(X \otimes X) \otimes X \arrow[r, "\mu \otimes id_X"] \arrow[d, "a_{X,X,X}"'] & X \otimes X \arrow[dd, "\mu"] \\
X \otimes (X \otimes X) \arrow[d, "id_X \otimes \mu"'] & \\
X \otimes X \arrow[r, "\mu"'] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "l_X^{-1}"'] \arrow[dr, "r_X^{-1}"] & \\
I \otimes X \arrow[dr, "\eta \otimes id_X"'] & & X \otimes I \arrow[dl, "id_X \otimes \eta"] \\
& X \otimes X \arrow[uu, "\mu"] &
\end{tikzcd}
$$

Alternativamente, tal que valem as seguintes equações:

$$\mu \circ (id_X \otimes \mu) \circ a_{X,X,X} = \mu \circ (\mu \otimes id_X)$$
$$\mu \circ (id_X \otimes \eta) = r_X, \ \ \mu \circ (\eta \otimes id_X) = l_X$$

Os morfismos μ e η são chamados, respectivamente, de <u>*multiplicação*</u> *e* <u>*unidade*</u> *do monoide.*

Em uma categoria monoidal estrita, os diagramas da definição de monoide se reduzem a

$$
\begin{tikzcd}
X \otimes X \otimes X \arrow[r, "\mu \otimes \mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X \otimes \mu"'] & X \otimes X \arrow[d, "\mu"] \\
X \otimes X \arrow[r, "\mu"'] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, equal] \arrow[dr, equal] & \\
I \otimes X \arrow[dr, "\eta \otimes \mathrm{id}_X"'] & & X \otimes I \arrow[dl, "\mathrm{id}_X \otimes \eta"] \\
& X \otimes X \arrow[uu, "\mu"] &
\end{tikzcd}
$$

e as equação se reduzem a

$$\mu \circ (\mathrm{id}_X \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes \mathrm{id}_X)$$
$$\mu \circ (\mathrm{id}_X \otimes \eta) = \mathrm{id}_X = \mu \circ (\eta \otimes \mathrm{id}_X)$$

Exemplo 1.11. *Em* <u>*Set*</u>*, um monoide M é um conjunto munido de duas funções $\mu : M \times M \to M$ e $\eta : \{*\} \to M$. O primeiro diagrama é a associatividade da operação (denotando $\mu(x, y) = xy$). Definindo $e = \eta(*)$, o segundo diagrama resulta em $ex = x = xe$ para todo x, isto é, um monoide em* <u>*Set*</u> *é simplesmente um monoide.*

Exemplo 1.12. *Se R é um anel comutativo com unidade, um monoide sobre ${}_R\mathcal{M}$ é, de fato, uma R-álgebra (associativa e unitária). De fato, se A é uma R-álgebra, temos que a multiplicação é bilinear, logo define uma transformação linear $\mu : A \otimes A \to A$ tal que para quaisquer $a, b \in A$, $\mu(a \otimes b) = ab$. Além disso, a função $\eta(r) = r1_A$ para $r \in R$ também é linear e a comutatividade dos diagramas segue da associatividade da multiplicação e do axioma da unidade. Reciprocamente, se (A, μ, η) é um monoide*

sobre ${}_R\mathcal{M}$*, então podemos definir*
$a \cdot b = \mu(a \otimes b)$ *e* $1_A = \eta(1_R)$*.*

Em particular, um monoide em AbGrp é um grupo abeliano A munido de uma operação de multiplicação bilinear, associativa e unitária. Da bilinearidade segue a propriedade distributiva, mostrando que A é anel com unidade (mas não necessariamente comutativo). Reciprocamente, se A é anel com unidade, então A é monoide sobre AbGrp.

Exemplo 1.13. *Considere Grp com estrutura monoidal dada pelo produto cartesiano, análoga à construída no exemplo 1.6. Considere um monoide G sobre Grp com elemento neutro e. Temos uma operação* $\cdot$ *em G, pois G é um grupo, e uma operação m que provém de G ser monoide. Como m é morfismo de grupos,* $m(ab, cd) = m(a, c)m(b, d)$ *e* $m(e, e) = e$*. Ainda, temos uma função* $\eta : I \to G$ *de forma que* $e' = \eta(*)$ *é elemento neutro de m. Observe que*

$$e' = m(e', e') = m(e'e, ee') = m(e', e)m(e, e') = ee = e.$$

A partir disso, $m(a, b) = m(ae, eb) = m(a, e)m(e, b) = ab$*, do que segue que a operação m necessariamente coincide com a do grupo. Mais ainda,*

$$ab = m(a, b) = m(ea, be) = m(e, b)m(a, e) = ba$$

e portanto G é grupo abeliano. Em outras palavras, monoides na categoria cartesiana Grp são grupos abelianos. Esse resultado um caso particular do Teorema de Eckmann-Hilton (ECKMANN; HILTON, 1962).

Exemplo 1.14. *Em* $End(\mathcal{C})$*, um monoide é um funtor* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *com transformações naturais* $\mu : T^2 \Rightarrow T$ *e* $\eta : id_{\mathcal{C}} \Rightarrow T$*. Dado um objeto A de* $\mathcal{C}$*, os diagramas resultam em*

$$\mu_A \circ T(\mu_A) = \mu_A \circ \mu_{T(A)}$$
$$\mu_A \circ T(\eta_A) = id_{T(A)} = \mu_A \circ \eta_{T(A)}$$

Tais monoides, denominados mônadas, serão um dos nossos principais objetos de estudo.

Definição 1.15. *Seja* $\mathcal{C}$ *uma categoria monoidal. Dados monoides* (X, μ_X, η_X) *e* (Y, μ_Y, η_Y) *sobre* $\mathcal{C}$*, um morfismo de monoides entre X e Y é um morfismo* $h : X \to Y$ *em* $\mathcal{C}$ *tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
X \otimes X \arrow[r, "h \otimes h"] \arrow[d, "\mu_X"'] & Y \otimes Y \arrow[d, "\mu_Y"] \\
X \arrow[r, "h"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \arrow[rr, "\eta_X"] \arrow[dr, "\eta_Y"'] & & X \arrow[dl, "h"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Isto é,

$$\mu_Y \circ (h \otimes h) = h \circ \mu_X$$
$$h \circ \eta_X = \eta_Y.$$

Exemplo 1.16. *Seja R um anel comutativo com unidade. Se A e B são R-álgebras (monoides na categoria ${}_R\mathcal{M}$), um morfismo de monoides entre A e B é um homomorfismo de álgebras no sentido usual. De fato, o primeiro diagrama se traduz para $h(ab) = h(a)h(b)$ enquanto o segundo significa $h(r1_A) = r1_B$. Observando que transformações lineares com domínio em R são unicamente definidas por seus valores em 1_R, podemos equivalentemente considerar a segunda propriedade para $\lambda = 1_R$. Nesse caso, ela é equivalente a $h(1_A) = 1_B$.*

Exemplo 1.17. *No caso de conjuntos, um morfismo entre monoides M e N é uma função $h : M \to N$ tal que para todos $a, b \in M$,*

$$h(ab) = h(a)h(b)$$

e

$$h(e_M) = h(\eta_M(*)) = \eta_N(*) = e_N.$$

Exemplo 1.18. *Em $End(\mathcal{C})$, considere mônadas (T_1, μ_1, η_1) e (T_2, μ_2, η_2). Um morfismo de monoides é uma transformação natural $h : T_1 \Rightarrow T_2$ tal que*

$$h_X \circ \mu_{1X} = \mu_{2X} \circ (h * h)_X = \mu_{2X} \circ T_2(h_X) \circ h_{T_1(X)} = \mu_{2X} \circ h_{T_2(X)} \circ T_1(h_X)$$

e $h_X \circ \eta_{1X} = \eta_{2X}$.

Definição 1.19. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal e X um monoide sobre $\mathcal{C}$. Um X-módulo (ou módulo sobre X) é um objeto M de $\mathcal{C}$ munido de um morfismo $\alpha : X \otimes M \to M$, denominado de ação, tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes X) \otimes M \arrow[r, "\mu \otimes id_M"] \arrow[d, "a_{X,X,M}"'] & X \otimes M \arrow[dd, "\alpha"] \\
X \otimes (X \otimes M) \arrow[d, "id_X \otimes \alpha"'] & \\
X \otimes M \arrow[r, "\alpha"'] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \otimes M \arrow[rr, "\eta \otimes id_M"] \arrow[dr, "l_M"'] & & X \otimes M \arrow[dl, "\alpha"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Em termos equacionais,

$$\alpha \circ (id_X \otimes \alpha) \circ a_{X,X,M} = \alpha \circ (\mu \otimes id_M)$$
$$\alpha \circ (\eta \otimes id_M) = l_M.$$

Para uma categoria monoidal estrita temos simplesmente

$$\begin{tikzcd} X \otimes X \otimes M \arrow[r, "\mathrm{id}_X \otimes \alpha"] \arrow[d, "\mu \otimes \mathrm{id}_M"'] & X \otimes M \arrow[d, "\alpha"] \\ X \otimes M \arrow[r, "\alpha"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \otimes M \arrow[rr, "\eta \otimes \mathrm{id}_M"] \arrow[dr, equal] & & X \otimes M \arrow[dl, "\alpha"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

ou ainda,

$$\alpha \circ (\mathrm{id}_X \otimes \alpha) = \alpha \circ (\mu \otimes \mathrm{id}_M)$$
$$\alpha \circ (\eta \otimes \mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_M.$$

Definição 1.20. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal e X um monoide sobre $\mathcal{C}$. Dados M e N módulos sobre X com respectivas ações α e β, um* <u>*morfismo de módulos*</u> *entre M e N é um morfismo $f : M \to N$ em $\mathcal{C}$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} X \otimes M \arrow[r, "id_X \otimes f"] \arrow[d, "\alpha"'] & X \otimes N \arrow[d, "\beta"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

Alternativamente,

$$\beta \circ (id_X \otimes f) = f \circ \alpha$$

Exemplo 1.21. *Na categoria* <u>*Set*</u>*, considere um monoide M. Um módulo sobre M é um conjunto S com uma função $\alpha : M \times S \to S$ (Denotamos $\alpha(m, s) = m \triangleright s$) tal que dados $m, n \in M$ e $s \in S$ temos*

$$mn \triangleright s = m \triangleright (n \triangleright s)$$
$$e \triangleright s = s.$$

Ainda mais, considere outro módulo (T, β), denotando $\beta(m, t) = m \triangleright' t$. Um morfismo de módulos em <u>*Set*</u> *entre (S, α) e (T, β) é uma função $h : S \to T$ tal que*

$$h(m \triangleright s) = h \circ \alpha(m, s) = \beta \circ (id_M \times h)(m, s) = \beta(m, h(s)) = m \triangleright' h(s).$$

Existe uma correspondência biunívoca entre módulos (S, α) e morfismos de monoides em $Hom(M, End(S))$ (lembrando que $End(S)$ é um monoide quando munido *da composição). Para isso, considere $\alpha_m : S \to S$ dada por $\alpha_m(s) = m \triangleright s$. Temos uma função $\overline{\alpha} : M \to End(S)$ definida por $\overline{\alpha}(m) = \alpha_m$. Note que*

$$\begin{aligned}\alpha_{mn}(s) &= (mn) \triangleright s = m \triangleright (n \triangleright s) = \alpha_m(\alpha_n(s)) = \alpha_m \circ \alpha_m(s)\\ \alpha_e(s) &= e \triangleright s = s\end{aligned}$$

Disso segue que $\overline{\alpha}(mn) = \overline{\alpha}(m) \circ \overline{\alpha}(n)$ e $\overline{\alpha}(e) = id_S$, isto é, $\overline{\alpha}$ é morfismo de monoides em $\underline{Set}$ entre M e $End(S)$. Reciprocamente, considere um monoide M e um conjunto S com um morfismo $\varphi : M \to End(S)$ levando cada $m \in M$ em $\varphi(m) = \varphi_m : S \to S$. Defina $\alpha_\varphi : M \times S \to S$ por $\alpha_\varphi(m, s) = \varphi_m(s)$ e denote $\alpha_\varphi(m, s) = m \triangleright s$. Segue de φ homomorfismo que $(mn) \triangleright s = m \triangleright (n \triangleright s)$ e $e \triangleright s = s$, logo (S, α_φ) é módulo sobre M.

No caso em que M é grupo, essa definição coincide com as definição clássica de ação de um grupo sobre um conjunto (nesse caso, prova-se que $Img(\varphi) \subseteq Aut(S)$ pois $\varphi_{m^{-1}} \circ \varphi_m = \varphi_m \circ \varphi_{m^{-1}} = \varphi_e = id$). Ainda mais, a definição de morfismo entre módulos pode ser escrita como $h \circ \alpha_m = \beta_m \circ h$, o que também coincide com a noção de homomorfismo de ações no caso de um grupo.

Exemplo 1.22. *Para um anel R visto como monoide em $\underline{AbGrp}$, um módulo sobre R é um grupo abeliano $(M, +)$ com um homomorfismo de grupos $\alpha : R \otimes M \to M$ tal que dados $r, s \in R$ e $m \in M$,*

$$\begin{aligned}\alpha(rs \otimes m) &= \alpha(r \otimes \alpha(s \otimes m))\\ \alpha(1_R \otimes m) &= m.\end{aligned}$$

Um morfismo de M em N (no qual N também é módulo sobre R) é um homomorfismo de grupos $h : M \to N$ tal que $h(\alpha(r \otimes m)) = \beta(r \otimes h(m))$. Podemos denotar $\alpha(r \otimes m) = rm$ e as propriedades acima são escritas como $(rs)m = r(sm)$, $1_R m = m$ e $h(rm) = rh(m)$. Do fato que α é homomorfismo de grupo, seguem as propriedades $(r + s)m = rm + sm$ e $r(m + n) = rm + rn$. Essas propriedades definem a categoria ${}_R\mathcal{M}$ e portanto um módulo sobre R em $\underline{AbGrp}$ é um R-módulo.

Exemplo 1.23. *Seja A uma R-álgebra, isto é, um monoide na categoria ${}_R\mathcal{M}$. Um módulo sobre A é um R-módulo M com uma transformação linear $\alpha : A \otimes M \to M$ (escrevemos $\alpha(a \otimes m) = a \triangleright m$) tal que dados $a, b \in A$ e $m \in M$,*

$$\begin{aligned}(ab) \triangleright m &= a \triangleright (b \triangleright m)\\ 1_A \triangleright m &= m.\end{aligned}$$

Se N também é módulo sobre A com ação β (e $\beta(a, n) = a \triangleright' n$), um morfismo de módulos $h : M \to N$ é uma transformação linear tal que para todos $a \in A$ e $m \in M$,

$$h(a \triangleright m) = a \triangleright' h(m).$$

Observação 1.24. *Para provar que h é morfismo de A-módulos, basta mostrar que h satisfaz $h(m+m') = h(m)+h(m')$ e $h(a \triangleright m) = a \triangleright' h(m)$ para quaisquer $a \in A$ e $m, m' \in M$. De fato,*

$$h(\lambda m) = h(\lambda(1_A \triangleright m)) = h((\lambda 1_A) \triangleright m) = (\lambda 1_A) \triangleright' h(m) = \lambda(1_A \triangleright' h(m)) = \lambda h(m).$$

Note que A é um módulo sobre A com a ação $a \triangleright b = ab$. A partir disso, podemos provar o seguinte resultado:

Teorema 1.25. *Seja A uma álgebra e M um módulo sobre A. Para cada $m \in M$, defina $\rho_m : A \to M$ por $\rho_m(a) = a \triangleright m$. Então ρ_m é morfismo de A-módulos.*

Demonstração. Temos

$$\rho_m(a+b) = (a+b) \triangleright m = (a \triangleright m) + (b \triangleright m) = \rho_m(a) + \rho_m(b);$$
$$\rho_m(ab) = (ab) \triangleright m = a \triangleright (b \triangleright m) = a \triangleright \rho_m(b).$$

■

Exemplo 1.26. *Daremos sem muitos detalhes uma generalização do produto tensorial de R-módulos para o caso em que R não é comutativo. Nesse caso, precisamos de uma estrutura a mais. Dados anéis R e S, um R, S-bimódulo é formado por um conjunto M munido simultaneamente de uma estrutura de R-módulo à esquerda $(M, \triangleright)$ e uma estrutura de S-módulo à direita $(M, \triangleleft)$ tal que para quaisquer $r \in R$, $m \in M$ e $s \in S$,*

$$r \triangleright (m \triangleleft s) = (r \triangleright m) \triangleleft s.$$

Um morfismo de R, S-bimódulos é, simultaneamente, um morfismo de R-módulos à esquerda e S-módulos à direita. Observe que se R é comutativo, então todo R-módulo pode ser visto como um R, R-bimódulo. Denotamos a categoria dos R, S-bimódulos por ${}_R\mathcal{M}_S$.

Considere M um R, S-bimódulo e N um S, T-bimódulo. De forma análoga ao exemplo 1.2, podemos definir um produto tensorial balanceado por S. Isso resulta em um R, T-bimódulo $M \otimes_S N$. Sendo um pouco mais preciso, dado um grupo abeliano $(G, +)$ dizemos que uma função $b : M \times N \to G$ é balanceada quando para todos $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ e $s \in S$,

1. *$b(m+m', n) = b(m, n) + b(m', n)$;*
2. *$b(m, n+n') = b(m, n) + b(m, n')$;*
3. *$b(m \triangleleft s, n) = b(m, s \triangleright n)$.*

Segue que $\otimes_S : M \times N \to M \otimes_S N$ é balanceado é que se $b : M \times N \to G$ é outra função balanceado, então existe um único morfismo de grupos $h : M \otimes_S N \to G$ tal que $h(m \otimes_S n) = b(m, n)$ para todos $m \in M$, $n \in N$. Ao menos de isomorfismo, $\otimes_S$ é a única função balanceada satisfazendo tal propriedade.

Definimos a estrutura de R, T-bimódulo em $M \otimes_S N$ por $r \triangleright (m \otimes_S n) = (r \triangleright m) \otimes_S n$ e $(m \otimes_S n) \triangleleft t = m \otimes_S (n \triangleleft t)$.

Em particular, se $R = S = T$, o produto tensorial balanceado define uma estrutura monoidal sobre ${}_R\mathcal{M}_R$ na qual o objeto unidade é dado por R. Se R é comutativo, as estruturas de R-módulo à esquerda e à direita estão em bijeção “comutando” as ações, isto é, através da relação $r \triangleright m = m \triangleleft r$ e portanto todo R-módulo à esquerda (ou à direita) pode ser visto como um R, R-bimódulo. Nesse caso,

$$r \triangleright (m \otimes_R n) = (r \triangleright m) \otimes_R n = (m \triangleleft r) \otimes_R n = m \otimes_R (r \triangleright n).$$

É possível mostrar que o produto tensorial de R-módulos como definido no exemplo 1.2 coincide com o produto tensorial balanceado $\otimes_R$ para R comutativo.

Definição 1.27. *Sejam $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ e $(\mathcal{D}, \boxtimes, J, a', l', r')$ categorias monoidais. Um funtor monoidal de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$ é uma terna (F, φ, φ_0) na qual $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é funtor, $\varphi_0 : J \to F(I)$ é morfismo em D e $\varphi : F(\_\_) \boxtimes F(\_\_) \Rightarrow F(\_\_ \otimes \_\_)$ é transformação natural de forma que para quaisquer objetos X, Y e Z de $\mathcal{C}$ os diagramas abaixo comutam.*

$$\begin{tikzcd}
(F(X) \boxtimes F(Y)) \boxtimes F(Z) \arrow[r, "\varphi_{X,Y} \boxtimes id_{F(Z)}"] \arrow[d, "a'_{F(X),F(Y),F(Z)}"'] & F(X \otimes Y) \boxtimes F(Z) \arrow[d, "\varphi_{X \otimes Y, Z}"] \\
F(X) \boxtimes (F(Y) \boxtimes F(Z)) \arrow[d, "id_{F(X)} \boxtimes \varphi_{Y,Z}"'] & F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[d, "F(a_{X,Y,Z})"] \\
F(X) \boxtimes F(Y \otimes Z) \arrow[r, "\varphi_{X, Y \otimes Z}"'] & F(X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
J \boxtimes F(X) \arrow[r, "l'_{F(X)}"] \arrow[d, "\varphi_0 \boxtimes id_{F(X)}"'] & F(X) \\
F(I) \boxtimes F(X) \arrow[r, "\varphi_{I,X}"'] & F(I \otimes X) \arrow[u, "F(l_X)"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(X)\boxtimes J \arrow[r, "r'_{F(X)}"] \arrow[d, "id_{F(X)}\boxtimes\varphi_0"'] & F(X) \\
F(X)\boxtimes F(I) \arrow[r, "\varphi_{X,I}"'] & F(X\otimes I) \arrow[u, "F(r_X)"']
\end{tikzcd}$$

Por outro lado, um <u>*funtor op-monoidal*</u> *é uma terna* (F,ψ,ψ_0) *na qual* $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ *é funtor,* $\psi_0 : F(I) \to J$ *é morfismo em* $\mathcal{D}$ *e* $\psi : F(\_\_\otimes\_\_) \Rightarrow F(\_\_)\boxtimes F(\_\_)$ *é transformação natural de forma que para quaisquer objetos* X*,* Y *e* Z *de* $\mathcal{C}$ *os diagramas abaixo comutam.*

$$\begin{tikzcd}
F((X\otimes Y)\otimes Z) \arrow[r, "F(a_{X,Y,Z})"] \arrow[d, "\psi_{X\otimes Y,Z}"'] & F(X\otimes(Y\otimes Z)) \arrow[r, "\psi_{X,Y\otimes Z}"] & F(X)\boxtimes F(Y\otimes Z) \arrow[d, "F(X)\boxtimes\psi_{Y,Z}"] \\
F(X\otimes Y)\boxtimes F(Z) \arrow[r, "\psi_{X,Y}\boxtimes id_{F(Z)}"'] & (F(X)\boxtimes F(Y))\boxtimes F(Z) \arrow[r, "a'_{F(X),F(Y),F(Z)}"'] & F(X)\boxtimes(F(Y)\boxtimes F(Z))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(I\otimes X) \arrow[r, "F(l_X)"] \arrow[d, "\psi_{I,X}"'] & F(X) \\
F(I)\boxtimes F(X) \arrow[r, "\psi_0\boxtimes id_{F(X)}"'] & J\boxtimes F(X) \arrow[u, "l'_{F(X)}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(X\otimes I) \arrow[r, "F(r_X)"] \arrow[d, "\psi_{X,I}"'] & F(X) \\
F(X)\boxtimes F(I) \arrow[r, "id_{F(X)}\boxtimes\psi_0"'] & F(X)\boxtimes J \arrow[u, "r'_{F(X)}"']
\end{tikzcd}$$

Se um funtor monoidal (F,φ,φ_0) *é tal que* φ *é isomorfismo natural e* φ_0 *é isomorfismo, dizemos que* F *é um* <u>*funtor monoidal forte*</u>*. Mais ainda,* (F,φ,φ_0) *será dito* <u>*funtor monoidal estrito*</u> *quando* $J = F(I)$ *e* $F(X)\boxtimes F(Y) = F(X\otimes Y)$ *para todos objetos* $X, Y \in \mathcal{C}^0$ *e* φ *e* φ_0 *forem ambos as identidades em seus respectivos domínios.*

Observação 1.28. *Se* (F,φ,φ_0) *é funtor monoidal forte, então* $(F,\varphi^{-1},\varphi_0^{-1})$ *é funtor op-monoidal. Além disso, se* (F,ψ,ψ_0) *é op-monoidal com* ψ *e* ψ_0 *inversíveis (conhecido como op-monoidal forte), então* $(F,\psi^{-1},\psi_0^{-1})$ *é monoidal. Isso mostra que há uma equivalência entre as noções de funtor monoidal forte e funtor op-monoidal forte. Mais ainda, note que todo funtor monoidal estrito é forte.*

Exemplo 1.29. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Então o funtor identidade em $\mathcal{C}$ é estritamente monoidal. Além disso, considere outras categorias monoidais $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$. Se $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ são tais que (F, φ, φ_0) e $(G, \varphi', \varphi'_0)$ são funtores monoidais, então $(G \circ F, \Phi, \Phi_0)$ é funtor monoidal definindo $\Phi_0 = G(\varphi_0) \circ \varphi'_0$ e Φ por*

$$\begin{tikzcd} GF(\_\_) \otimes GF(\_\_) \arrow[r, Rightarrow, "\varphi'_{F(\_\_),F(\_\_)}"] \arrow[rr, Rightarrow, bend right, "\Phi"'] & G(F(\_\_) \otimes F(\_\_)) \arrow[r, Rightarrow, "G\varphi"] & GF(\_\_ \otimes \_\_). \end{tikzcd}$$

Aqui, $\varphi'_{F(\_\_),F(\_\_)}$ é a transformação natural η definida por $\eta_{X,Y} = \varphi'_{F(X),F(Y)}$. Analogamente, a composição de funtores op-monoidais é um funtor op-monoidal.

Definição 1.30. *Sejam $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ e $(\mathcal{D}, \boxtimes, J, a', l', r')$ categorias monoidais. Dados dois funtores monoidais (F, φ, φ_0) e $(F', \varphi', \varphi'_0)$ entre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, uma transformação natural $\eta : F \Rightarrow F'$ é dita monoidal quando os diagramas abaixo comutam.*

$$\begin{tikzcd} F(X) \boxtimes F(Y) \arrow[r, "\eta_X \boxtimes \eta_Y"] \arrow[d, "\varphi_{X,Y}"'] & F'(X) \boxtimes F'(Y) \arrow[d, "\varphi'_{X,Y}"] \\ F(X \otimes Y) \arrow[r, "\eta_{X \otimes Y}"'] & F'(X \otimes Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} J \arrow[rr, "\varphi_0"] \arrow[dr, "\varphi'_0"'] & & F(I) \arrow[dl, "\eta_I"] \\ & F'(I) & \end{tikzcd}$$

Por outro lado, dados funtores op-monoidais (F, ψ, ψ_0) e (F', ψ', ψ'_0) entre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, uma transformação natural $\eta : F \Rightarrow F'$ é dita op-monoidal quando os diagramas abaixo comutam.

$$\begin{tikzcd} F(X \otimes Y) \arrow[r, "\eta_{X \otimes Y}"] \arrow[d, "\psi_{X,Y}"'] & F'(X \otimes Y) \arrow[d, "\psi'_{X,Y}"] \\ F(X) \boxtimes F(Y) \arrow[r, "\eta_X \boxtimes \eta_Y"'] & F'(X) \boxtimes F'(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(I) \arrow[rr, "\eta_I"] \arrow[dr, "\psi_0"'] & & F'(I) \arrow[dl, "\psi'_0"] \\ & J & \end{tikzcd}$$

1.1 TEOREMA DE ESTRITIZAÇÃO

O teorema de estritização de MacLane diz que toda categoria monoidal C é equivalente a uma categoria monoidal estrita por um funtor de equivalência monoidal forte. Entendamos intuitivamente o que isso significa. Se essa equivalência é dada por $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^E$, então os “tipos” de objetos que encontramos em $\mathcal{C}$ e em $\mathcal{C}^E$ são idênticos, podendo variar apenas a quantidade de cada objetos desses tipos. O fato de F ser monoidal forte nos garante que $F(I)$ é isomorfo à identidade monoidal de $\mathcal{C}^E$ e que $F(X \otimes Y)$ e $F(X) \otimes F(Y)$ são naturalmente isomorfos, garantindo que essa equivalência

F, além de preservar a estrutura de morfismos dos objetos, também preserva esses morfismo em cada componente de um produto tensorial.

Explicando a afirmação acima através de um exemplo, se $h : X \to X'$ e $g : Y \to Y'$ são morfismos, então temos o morfismo $(h \otimes g) : X \otimes Y \to X' \otimes Y'$. Apenas sabendo que F é equivalência, tudo que podemos saber é que $h \otimes g$ é associado a um morfismo $F(h \otimes g)$. Sabendo que F é monoidal forte, temos ainda que há uma relação entre $F(h \otimes g)$ e $F(h) \otimes F(g)$ vinda do isomorfismo natural entre $F(\_\_ \otimes \_\_)$ e $F(\_\_) \otimes F(\_\_)$.

A partir disso, podemos focar os estudos, quando conveniente, em categorias monoidais estritas uma vez que no caso geral, as relações entre objetos de $\mathcal{C}$, incluindo a estrutura monoidal, podem ser reduzidas a relações em $\mathcal{C}^E$ entre objetos de tipos correspondentes. Nesse trabalho, frequentemente usaremos esse teorema implicitamente omitindo os parênteses em produtos tensoriais com três ou mais termos. Escolhemos manter as referências explicitas a l e r, bem como a forma completa dos objetos $X \otimes I$ e $I \otimes X$, mas essa escolha é puramente notacional uma vez que em uma categoria monoidal estrita, $X = X \otimes I = I \otimes X$ e $l_X = r_X = \mathrm{id}_X$.

Considerando a categoria monoidal estrita $\mathrm{End}(\mathcal{C})$, note que para todo objeto A de $\mathcal{C}$, temos o funtor tensorial $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ dado por $T(A) = A \otimes X$ e $T(h) = \mathrm{id}_A \otimes h$. Queremos criar um funtor (que ainda não será o funtor que precisamos) entre essas categorias, digamos, $\Phi : \mathcal{C} \to \mathrm{End}(\mathcal{C})$. Podemos definir $\Phi(A)$ por $(\Phi(A))(X) = A \otimes X$ e dado um morfismo $h : A \to B$, podemos definir uma transformação natural $\Phi(h) : \Phi(A) \Rightarrow \Phi(B)$ por $\Phi(h)_X = h \otimes \mathrm{id}_X$. Note que

$$\Phi(h \circ g)_X = (h \circ g) \otimes \mathrm{id}_X = (h \otimes \mathrm{id}_X) \circ (g \otimes \mathrm{id}_X) = \Phi(h)_X \circ \Phi(g)_X,$$

caracterizando Φ como funtor.

Se I é o objeto identidade de $\mathcal{C}$, então o funtor $\Phi(I)$ leva cada objeto X em $I \otimes X$. Sabemos que $I \otimes X$ é isomorfo a X, mais precisamente, a transformação natural l nos dá, na componente X, o isomorfismo $l_X : I \otimes X \to X$. Disso, obtemos um morfismo em $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ entre $\Phi(I)$ e o $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$, que é o objeto identidade em $\mathrm{End}(\mathcal{C})$.

Mais ainda, o funtor $\Phi(A \otimes B)$ leva um objeto X em $(A \otimes B) \otimes X$ enquanto $\Phi(A) \circ \Phi(B)$ leva o mesmo objeto em $A \otimes (B \otimes X)$. Esses são claramente isomorfos quando consideramos $a^{-1}_{A,B,X} : (\Phi(A) \circ \Phi(B))(X) \to (\Phi(A \otimes B))(X)$. Lembrando que $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ tem transformações naturais como morfismos, podemos considerar a transformação natural $\varphi_{A,B} : \Phi(A) \circ \Phi(B) \Rightarrow \Phi(A \otimes B)$ dada por $(\varphi_{A,B})_X = a^{-1}_{A,B,X}$. Segue que φ em si é natural. Segue ainda de a isomorfismo natural que φ o é. Deste modo, podemos mostrar que Φ é um funtor monoidal forte.

Porém, Φ não é equivalência. Deste modo, $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ não é a categoria procurada. Ainda assim, esses dados nos darão uma noção do que estamos procurando.

Lema 1.31. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Então $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, com a estrutura definida a seguir, é uma categoria monoidal estrita. Os objetos de $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ são pares (T, c) nos* *quais $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é funtor e $c : T(\_\_) \otimes \_\_ \Rightarrow T(\_\_ \otimes \_\_)$ é isomorfismo natural tal que os diagramas abaixo comutam.*

$$\begin{tikzcd}
(T(X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[rr, "c_{X,Y} \otimes id_Z"] \arrow[d, "a_{T(X),Y,Z}"'] & & T(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[d, "c_{X \otimes Y,Z}"] \\
T(X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[dr, "c_{X,Y \otimes Z}"'] & & T((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[dl, "T(a_{X,Y,Z})"] \\
& T(X \otimes (Y \otimes Z)) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& T(X) \otimes I \arrow[dl, "c_{X,I}"'] \arrow[dr, "r_{T(X)}"] & \\
T(X \otimes I) \arrow[rr, "T(r_X)"'] & & T(X)
\end{tikzcd}$$

Um morfismo $\alpha : (T, c) \to (U, d)$ é uma transformação natural $\alpha : T \Rightarrow U$ tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
T(X) \otimes Y \arrow[r, "\alpha_X \otimes id_Y"] \arrow[d, "c_{X,Y}"'] & U(X) \otimes Y \arrow[d, "d_{X,Y}"] \\
T(X \otimes Y) \arrow[r, "\alpha_{X \otimes Y}"'] & U(X \otimes Y)
\end{tikzcd}$$

A composição é dada pela composição vertical de transformações naturais e $id_{(T,c)} = id_T$.

Observe acima que os diagramas na definição de objeto de $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ são idênticos aos diagramas que definem uma categoria monoidal quando o funtor $\Phi(A)$ é tomado no lugar de T e o isomorfismo natural $(c^A)_{X,Y} = a_{A,X,Z}$ é tomado no lugar de c. Isso significa que $(\Phi(A), c^A)$ é objeto de $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Mais ainda, observamos que todo morfismo $h : A \to B$ em $\mathcal{C}$ dá origem a um morfismo $\widehat{h} : (\Phi(A), c^A) \to (\Phi(B), c^B)$ em $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ definido por $\widehat{h}_X = h \otimes \mathrm{id}_X$.

A partir disso, podemos provar a seguinte afirmação, conhecida como o teorema de estritização de Mac Lane.

Teorema 1.32 (Teorema de Estritização)**.** *A categoria $\mathcal{C}$ é equivalente a $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ pelo funtor monoidal forte $\mathcal{F}$ dado por*

$$\mathcal{F}(A) = (\Phi_A, c^A);$$
$$\mathcal{F}(h) = \widehat{h}.$$

Omitimos a demonstração formal nesse trabalho mas o leitor interessado pode encontrá-la em (ANDRADE, 2016). Observamos que nessa referência o funtor tensorial é dado à direita, isso é, $T(X) = X \otimes A$. Essa observação não afeta a validade do teorema, necessitando apenas a adaptação de alguns dos argumentos.

2 MÔNADAS

Nesse capítulo estudaremos mônadas. Já definimos elas anteriormente como monoides na categoria End($\mathcal{C}$) e quase todo o estudo que faremos nesse texto será sobre elas. Através do uso de mônadas podemos generalizar a noção de monoides sobre uma categoria monoidal e estudaremos mônadas sob esse ponto de vista no capitulo 6. Usamos (BÖHM, 2018) como livro de referência.

2.1 ADJUNÇÕES

Antes de estudar mônadas iremos falar sobre um conceito relacionado. Adjunções são intimamente relacionadas com objetos livres (c.f. definição A.55), no sentido de que essas nos permitem fazer algo semelhante a estender morfismos para o objeto livre. De fato, objetos livres são exemplos de adjunções.

Definição 2.1. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Dados $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores, dizemos que F é adjunto à esquerda de G (ou alternativamente, G é adjunto à direita de F) se para cada X objeto de $\mathcal{C}$ e Y objeto de $\mathcal{D}$ existe uma bijeção*

$$\Phi_{X,Y} : Hom_{\mathcal{C}}(F(Y), X) \to Hom_{\mathcal{D}}(Y, G(X))$$

e estas podem ser escolhidas tais que o diagrama a seguir comute, para quaisquer $g : X \to X'$ e $f : Y' \to Y$ morfismos em, respectivamente, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$.

$$\begin{tikzcd}
Hom_C(F(Y), X) \arrow[r, "\Phi_{X,Y}"] \arrow[d, "g\circ__\circ F(f)"'] & Hom_D(Y, G(X)) \arrow[d, "G(g)\circ__\circ f"] \\
Hom(F(Y'), X')_{\mathcal{C}} \arrow[r, "\Phi_{X',Y'}"'] & Hom_{\mathcal{D}}(Y', G(X'))
\end{tikzcd}$$

Nesse caso, dizemos que (F, G, Φ) é uma adjunção.

Observe que a definição acima diz que Φ é uma transformação natural, no contexto de funtores Hom. Expandindo o diagrama, temos que dada uma $h : F(Y) \to X$, então

$$(G(g) \circ \_\_ \circ f) \circ \Phi_{X,Y}(h) = \Phi_{X',Y'} \circ (g \circ \_\_ \circ F(f))(h),$$

isto é,

$$G(g) \circ (\Phi_{X,Y}(h)) \circ f = \Phi_{X',Y'}(g \circ h \circ F(f)). \tag{2}$$

Também, podemos obter as seguinte equações para $h' : Y \to G(X)$:

$$\Phi^{-1}_{X',Y'} \circ (G(g) \circ \_\_ \circ f)(h) = (g \circ \_\_ \circ F(f)) \circ \Phi^{-1}_{X,Y}(h)$$

$$\Phi^{-1}_{X',Y'}((G(g) \circ h' \circ f)) = g \circ (\Phi^{-1}_{X,Y}(h')) \circ F(f) \tag{3}$$

O teorema a seguir será usado frequentemente para mostrar que uma Φ define uma adjunção.

Teorema 2.2. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias e $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores. Uma família $\{\Phi_{X,Y}\}$ de funções torna (F, G, Φ) uma adjunção se, e somente se, para quaisquer X, X' objetos de $\mathcal{C}$, Y, Y' objetos de $\mathcal{D}$ e $g : X \to X'$, $f : Y' \to Y$ morfismos, os dois diagramas a seguir comutam.*

$$\begin{tikzcd}
Hom(F(Y),X) \arrow[r, "\Phi_{X,Y}"] \arrow[d, "g\circ__"'] & Hom(Y,G(X)) \arrow[d, "G(g)\circ__"] \\
Hom(F(Y),X') \arrow[r, "\Phi_{X',Y}"'] & Hom(Y,G(X'))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Hom(F(Y),X) \arrow[r, "\Phi_{X,Y}"] \arrow[d, "__\circ F(f)"'] & Hom(Y,G(X)) \arrow[d, "__\circ f"] \\
Hom(F(Y'),X) \arrow[r, "\Phi_{X,Y'}"'] & Hom(Y',G(X))
\end{tikzcd}$$

Em equações, a comutatividade dos diagramas é representada por

$$G(g) \circ \Phi_{X,Y}(h) = \Phi_{X',Y}(g \circ h)$$
$$\Phi_{X,Y}(h) \circ f = \Phi_{X,Y'}(h \circ F(f))$$

para todo $h : F(Y) \to X$.

Demonstração. Suponha inicialmente que (F, G, Φ) seja uma adjunção. Então os diagramas que queremos mostrar que comutam seguem da naturalidade de Φ tomando $Y = Y'$, $f = id_Y$ para o primeiro diagrama e $X = X'$, $g = id_X$ para o segundo.

Suponha agora que os dois diagramas comutam. Então para quaisquer $g : X \to X'$ e $f : Y' \to Y$ temos

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(F(Y),X) \arrow[r, "\Phi_{X,Y}"] \arrow[d, "g\circ__"'] & \mathrm{Hom}(Y,G(X)) \arrow[d, "G(g)\circ__"'] \\
\mathrm{Hom}(F(Y),X') \arrow[r, "\Phi_{X',Y}"] \arrow[d, "__\circ F(f)"'] & \mathrm{Hom}(Y,G(X')) \arrow[d, "__\circ f"'] \\
\mathrm{Hom}(F(Y'),X') \arrow[r, "\Phi_{X',Y'}"'] & \mathrm{Hom}(Y',G(X'))
\end{tikzcd}$$

Note que o quadrado superior é um dos diagramas que, por hipótese, comutam enquanto o inferior é o outro diagrama, aplicado em X' e Y. Disso, concluímos que a quadrado externo comuta. Além disso, note que

$$(\_\_ \circ F(f)) \circ (g \circ \_\_) = g \circ \_\_ \circ F(f)$$
$$(G(g) \circ \_\_) \circ (\_\_ \circ f) = G(g) \circ \_\_ \circ f$$

Fazendo essas substituições, obtemos a naturalidade de Φ. ■

Para introduzir as noções de unidade e counidade de uma adjunção, daremos um exemplo de adjunção envolvendo objetos livres. Recomendamos a leitura da seção A.3 do apêndice para as notações.

Teorema 2.3. *Considere categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ com funtor esquecimento $U : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e funtor livre $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ com componentes da unidade $\eta_Y : Y \to UF(Y)$ (ver definição A.57). Então U é adjunto à direita de F.*

Demonstração. Dado um morfismo $h \in \mathrm{Hom}(F(Y), X)$, podemos definir

$$\Phi_{X,Y}(h) = U(h) \circ \eta_Y : Y \to U(X).$$

Por outro lado, dado $h' \in \mathrm{Hom}(Y, U(X))$, podemos definir $\Psi_{X,Y}(h') = \overline{h'}$, isto é, o único morfismo satisfazendo $U\left(\Psi_{X,Y}(h')\right) \circ \eta_Y = h'$. É claro que

$$\Phi_{X,Y}\left(\Psi_{X,Y}(h')\right) = U\left(\Psi_{X,Y}(h')\right) \circ \eta_Y = h'$$

e por outro lado, como $U(h) \circ \eta_Y = \Phi_{X,Y}(h)$ então

$$\Psi_{X,Y}\left(\Phi_{X,Y}(h)\right) = h.$$

Falta mostrar a naturalidade de Φ e para isso usamos o teorema 2.2. Considere morfismos $f : Y' \to Y$, $g : X \to X'$ e $h : F(Y) \to X$. Então

$$\begin{aligned} U(g) \circ \Phi_{X,Y}(h) &= U(g) \circ U(h) \circ \eta_Y = U(g \circ h) \circ \eta_Y = \Phi_{X',Y}(g \circ h); \\ \Phi_{X,Y'}(h \circ F(f)) &= U(h \circ F(f)) \circ \eta_{Y'} = U(h) \circ UF(f) \circ \eta_{Y'} \\ &= U(h) \circ \eta_Y \circ f = \Phi_{X,Y}(h) \circ f. \end{aligned}$$

Na penúltima igualdade é utilizada a naturalidade de η com o morfismo f. ■

Daremos outros exemplos em breve. Por hora, notamos que a transformação natural η não é algo específico de objetos livres. Na verdade, podemos definir $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \Rightarrow GF$ para qualquer adjunção (F, G, Φ). Podemos também definir outra transformação natural, dessa vez $\varepsilon : FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$.

Teorema 2.4. *Dada uma adjunção (F, G, Φ), sejam $\eta_Y : Y \to GF(Y)$ por $\Phi_{F(Y),Y}(id_{F(Y)})$ e $\varepsilon_X : FG(X) \to X$ tais que por $\Phi^{-1}_{X,G(X)}(id_{G(X)})$. Então η e ε são transformações naturais. Além disso, os diagramas abaixo comutam.*

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, Rightarrow, "F\eta"] \arrow[dr, equal] & FGF \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon F"] \\
& F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, Rightarrow, "\eta G"] \arrow[dr, equal] & GFG \arrow[d, Rightarrow, "G\varepsilon"] \\
& G
\end{tikzcd}
$$

Demonstração. Começaremos com η. Queremos mostrar que o seguinte diagrama comuta para qualquer $i : Z \to Z'$:

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\Phi_{F(Z),Z}(id_{F(Z)})"] \arrow[d, "i"'] & GF(Z) \arrow[d, "GF(i)"] \\
Z' \arrow[r, "\Phi_{F(Z'),Z'}(id_{F(Z')})"'] & GF(Z')
\end{tikzcd}
$$

Equacionando o diagrama, obtemos

$$GF(i) \circ \Phi_{F(Z),Z}(id_{F(Z)}) = \Phi_{F(Z'),Z'}(id_{F(Z')}) \circ i. \tag{4}$$

Mostraremos essa equação escrevendo cada termo como o termo à esquerda na equação 2 e mostrando que o termo à direita correspondente é o mesmo nos dois casos. Considere inicialmente os seguintes parâmetros:

$$X = F(Z),\ X' = F(Z'),\ g = F(i),\ Y = Z,\ Y' = Z,\ f = id_Z,\ h = id_{F(Z)}$$

Observe que, de fato, $g : X \to X'$, $f : Y' \to Y$ e $h : F(Y) \to X$. Dessa forma, a equação 2 nos garante que

$$GF(i) \circ (\Phi_{F(Z),Z}(id_{F(Z)})) = \Phi_{F(Z'),Z}(F(i)). \tag{5}$$

Por outro lado, considere os seguintes parâmetros:

$$X = F(Z'),\ X' = F(Z'),\ g = id_{F(Y')},\ Y = Z',\ Y' = Z,\ f = i,\ h = id_{F(Z')}.$$

Novamente, $g : X \to X'$, $f : Y' \to Y$ e $h : F(Y) \to X$ e portanto a equação 2 nos garante que

$$(\Phi_{F(Z'),Z'}(id_{F(Z')})) \circ i = \Phi_{F(Z'),Z'}(F(i)). \tag{6}$$

Usando as equações 5 e 6 obtemos a equação 4, isto é, obtemos que η é transformação natural. Falta agora mostrar que ε é transformação natural. Usaremos um argumento similar para isso. O diagrama correspondente é

$$\begin{tikzcd}
FG(W) \arrow[r, "\Phi^{-1}_{W,G(W)}(id_{G(W)})"] \arrow[d, "FG(j)"'] & W \arrow[d, "j"] \\
FG(W') \arrow[r, "\Phi^{-1}_{W',G(W')}(id_{G(W')})"'] & W'
\end{tikzcd}$$

Isso nos dá a seguinte equação:

$$j \circ (\Phi^{-1}_{W,G(W)}(id_{G(W)})) = (\Phi^{-1}_{W',G(W')}(id_{G(W')})) \circ FG(j). \tag{7}$$

Agora considere os parâmetros

$$X = W,\ X' = W',\ g = j,\ Y = G(W),\ Y' = G(W),\ f = id_{G(W)},\ h' = id_{G(W)}.$$

Observando que $g : X \to X'$, $f : Y' \to Y$ e $h' : Y \to G(X)$, a equação 3 resulta em

$$\Phi^{-1}_{W',G(W)}(G(j)) = j \circ (\Phi^{-1}_{W,G(W)}(id_{G(W)})). \tag{8}$$

Por outro lado, podemos escolher os parâmetros

$$X = W',\ X' = W',\ g = id_{W'},\ Y = G(W'),\ Y' = G(W),\ f = G(j),\ h' = id_{G(W')}.$$

Novamente notamos que $g : X \to X'$, $f : Y' \to Y$ e $h' : Y \to G(X)$ e através da equação 3, concluímos que

$$\Phi^{-1}_{W',G(W)}(G(j)) = (\Phi^{-1}_{X,Y}(id_{G(W')})) \circ FG(j). \tag{9}$$

Como antes, as equações 8 e 9 resultam na equação 7, provando que ε é transformação natural. Para mostrar que os dois diagramas do enunciado comutam, aplicamos as transformações naturais em objetos Z de $\mathcal{C}$ e W de $\mathcal{D}$.

$$\begin{tikzcd}
F(Z) \arrow[rr, "F(\eta_Z)"] \arrow[dr, equal] & & FGF(Z) \arrow[dl, "\varepsilon_{F(Z)}"] \\
& F(Z) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G(W) \arrow[rr, "\eta_{G(W)}"] \arrow[dr, equal] & & GFG \arrow[dl, "G(\varepsilon_W)"] \\
& G(W) &
\end{tikzcd}$$

Temos do diagrama à esquerda que

$$\varepsilon_{F(Z)} \circ F(\eta_Z) = \Phi^{-1}_{F(Z),GF(Z)}(id_{GF(Z)}) \circ F(\Phi_{F(Z),Z}(id_{F(Z)})).$$

Usando a equação 3 com parâmetros

$$X = F(Z),\ X' = F(Z),\ g = id_{F(Z)},\ Y = GF(Z),\ Y' = Z,\ f = \Phi_{F(Z),Z}(id_{F(Z)}),\ h' = id_{GF(Z)}.$$

obtemos, notando que são satisfeitos os requerimentos,

$$\Phi^{-1}_{F(Z),GF(Z)}(id_{GF(Z)}) \circ F(\Phi_{F(Z),Z}(id_{F(Z)})) = \Phi^{-1}_{F(Z),Z}(\Phi_{F(Z),Z}(id_{F(Z)})) = id_{F(Z)}.$$

Da mesma forma, temos do diagrama à direita que

$$G(\varepsilon_W) \circ \eta_{G(W)} = G(\Phi^{-1}_{W,G(W)}(id_{G(W)})) \circ \Phi_{FG(W),G(W)}(id_{FG(W)}).$$

Podemos aplicar os parâmetros abaixo na equação 2.

$$X = FG(W),\ X' = W, g = \Phi^{-1}_{W,G(W)}(id_{G(W)}),\ Y = G(W),\ Y' = G(W),\ f = id_{G(W)},\ h = id_{FG(W)}.$$

Com isso, obtemos

$$G(\Phi^{-1}_{W,G(W)}(id_{G(W)})) \circ (\Phi_{FG(W),G(W)}(id_{FG(W)})) = \Phi_{W,G(W)}(\Phi^{-1}_{W,G(W)}(id_{G(W)})) = id_{G(W)}.$$

■

Definição 2.5. *Dizemos que as transformações naturais η e ε são denominados, respectivamente, unidade e counidade da adjunção.*

Exemplo 2.6. *Considere categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ com funtor esquecimento $U : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e funtor livre $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ com componentes da unidade $\eta_Y : Y \to UF(Y)$. Temos que*

$$\Phi_{F(Y),Y}\left(id_{F(Y)}\right) = U\left(id_{F(Y)}\right) \circ \eta_Y = \eta_Y.$$

Concluímos que nesse caso η é, de fato, a unidade da adjunção. No caso da counidade,

$$\varepsilon_X = \Phi^{-1}_{X,U(X)}\left(id_{U(X)}\right) = \overline{id_{U(X)}}. \tag{10}$$

Dessa forma, ε_X é o morfismo satisfazendo $U(\varepsilon_X) \circ \eta_{U(X)} = id_{U(X)}$, que é uma das propriedades do teorema 2.4.

Exemplo 2.7. *Considere a adjunção $(F, U, \eta, \varepsilon)$ dada pelo funtor livre $F : \underline{Set} \to \underline{Vect_{\mathbb{K}}}$. Podemos considerar, a menos de isomorfismo, que todo conjunto X é base de $F(X)$ com η_X dada pela inclusão canônica. Dessa forma, podemos escrever um elemento de $F(X)$ por*

$$\sum_{x \in X} \lambda_x x,$$

no qual uma quantidade finita dos $\lambda_x \in \mathbb{K}$ são não-nulos. Dessa forma, $FU(V)$ pode ser dado por

$$\sum_{v \in V} \lambda_v v.$$

Observe que essa combinação linear formal não respeita as relações entre elementos de v. Por exemplo, dado $v \in V$ o elemento $(v + (-v)) \in V$ satisfaz $v + (-v) = 0$. Já a combinação linear formal $1v + 1(-v) \in FU(V)$ não corresponde ao zero de $FU(V)$, uma vez que v e $-v$ são ambos elementos da base de $FU(V)$.

Observe que temos uma avaliação canônica nesse caso: podemos considerar a função $id_V : V \to V$, e essa se estende unicamente a uma transformação linear $\overline{id_V} : FU(V) \to V$. Como vimos no exemplo 2.6, tal transformação linear corresponde à componente ε_V da counidade da adjunção.

Em termos concretos, ε_V associa uma combinação linear formal de $FU(V)$ à sua soma. Por exemplo, $\varepsilon_V(1v + 1(-v)) = (v + (-v)) = 0$, $\varepsilon_V(1v + 1u) = (v + u)$ e $\varepsilon_V(1v + 1(2v)) = (v + 2v) = (3v)$.

Como ε_V é linear, seu núcleo é um subespaço de $FU(V)$. Duas combinações lineares formais são equivalentes se, e somente se, essas representam o mesmo elemento de V. Por exemplo, para $V = \mathbb{K}^2$, $2(1,0) + (-3)(1,1) + 1(2,1) \in FU(V)$ é equivalente à $3(1,0) + (-2)(1,1) + 0(2,1) \in FU(V)$ uma vez que ambas as combinações lineares formais são levadas no par $(1,-2) \in R^2$.

Dessa forma, ao quocientarmos $FU(V)$ por ε_V, colapsamos todas as combinações lineares formais que tem o mesmo significado em V, reobtendo o espaço vetorial V (a menos de um isomorfismo).

Exemplo 2.8. *Considere a adjunção $(F, U, \eta, \varepsilon)$ com F sendo o funtor livre na categoria dos monoides sobre Set. A interpretação de $\varepsilon_M : FU(M) \to M$ é similar ao caso de espaços vetoriais. $FU(M)$ é o monoide das palavras em M. O morfismo de monoides ε_M opera os elementos de uma palavra, preservando a ordem na qual esses são apresentado.*

Por exemplo, seja $\mathbb{N}_+$ o monoide aditivo dos números naturais. Temos que $\varepsilon_{N_+}(2,3,4) = 2 + 3 + 4 = 9$. Por outro lado, note que se $N_\times$ é o monoide multiplicativo dos números naturais, então $\varepsilon_{\mathbb{N}_\times}(2,3,4) = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Observe que $U(\mathbb{N}_+) = U(\mathbb{N}_\times) = \mathbb{N}$, logo $FU(\mathbb{N}_+) = FU(\mathbb{N}_\times)$. Ainda assim, $\varepsilon_{N_+} \neq \varepsilon_{N_\times}$, do que concluímos que ε evidencia a diferença entre os dois monoides com mesmo conjunto base, dessa forma a counidade da adjunção pode ser usada para recuperar as relações especiais dos elementos de cada monoide M, perdidas ao se aplicar o funtor FU. Compare essa afirmação com o quociente de um espaço vetorial V por ε_V no exemplo acima.

A recíproca do teorema 2.4 também é verdadeira, isto é, se temos transformações naturais $\eta : Id_{\mathcal{D}} \Rightarrow GF$ e $\varepsilon : FG \Rightarrow Id_{\mathcal{C}}$ tais que os diagramas comutam, podemos definir uma adjunção (F, G, Φ) como abaixo.

Teorema 2.9. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias, $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores e $\eta : Id_{\mathcal{D}} \Rightarrow GF$ e $\varepsilon : FG \Rightarrow Id_{\mathcal{C}}$ transformações naturais tais que os diagramas abaixo comutam.*

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, Rightarrow, "F\eta"] \arrow[dr, equals] & & FGF \arrow[dl, Rightarrow, "\varepsilon F"] \\
& F &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, Rightarrow, "\eta G"] \arrow[dr, equals] & & GFG \arrow[dl, Rightarrow, "G\varepsilon"] \\
& G &
\end{tikzcd}
$$

Então a família de funções $\Phi_{X,Y} : Hom(F(Y), X) \to Hom(Y, G(X))$ definidas por $\Phi_{X,Y}(h) = G(h) \circ \eta_Y$ são tais que (F, G, Φ) forma uma adjunção. Além disso, $\eta_Y = \Phi_{F(Y),Y}(id_{F(Y)})$ e $\varepsilon_X = \Phi^{-1}_{X,G(X)}(id_{G(X)})$.

Demonstração. Defina $\Psi_{X,Y} : \mathrm{Hom}(Y, G(X)) \to \mathrm{Hom}(F(Y), X)$ por

$$\Psi_{X,Y}(h') = \varepsilon_X \circ F(h').$$

Afirmamos que $\Psi_{X,Y} = \Phi^{-1}_{X,Y}$.

$$\Psi_{X,Y}(\Phi_{X,Y}(h)) = \Psi_{X,Y}(G(h) \circ \eta_Y) = \varepsilon_X \circ FG(h) \circ F(\eta_Y)$$

Usando a naturalidade de ε, a expressão acima é igual a $h \circ \varepsilon_{F(Y)} \circ F(\eta_Y)$. Mas pelo diagrama da hipótese, isso resulta em $\Psi_{X,Y}(\Phi_{X,Y}(h)) = h$.

$$\Phi_{X,Y}(\Psi_{X,Y}(h')) = \Phi_{X,Y}(\varepsilon_X \circ F(h')) = G(\varepsilon_X) \circ GF(h') \circ \eta_Y$$

Como acima, podemos usar a naturalidade do η seguido do outro diagrama da hipótese. Nesse caso, obtemos

$$\Phi_{X,Y}(\Psi_{X,Y}(h')) = G(\varepsilon_X) \circ \eta_{G(X)} \circ h' = h'.$$

Agora, mostremos que Φ é natural. Isso será feito em duas partes, de acordo com o teorema 2.2. Considere $f : Y' \to Y$ e $g : X \to X'$. Então

$$G(g) \circ \Phi_{X,Y}(h) = G(g) \circ G(h) \circ \eta_Y = G(g \circ h) \circ \eta_Y = \Phi_{X',Y}(g \circ h)$$
$$\Phi_{X,Y}(h) \circ f = G(h) \circ \eta_Y \circ f = G(h) \circ GF(f) \circ \eta_{Y'} = \Phi_{Y',X}(h \circ F(f))$$

Note que na segunda linha usamos a naturalidade de η. Disso, obtemos que Φ resulta em uma adjunção. Agora, precisamos mostrar as duas igualdades finais.

$$\Phi_{F(Y),Y}(id_{F(Y)}) = G(id_{F(Y)}) \circ \eta_Y = \eta_Y$$
$$\Phi^{-1}_{X,G(X)}(id_{G(X)}) = \varepsilon_X \circ F(id_{G(X)}) = \varepsilon_X$$

■

Se (F, G, Φ) é uma adjunção e $\eta_Y = \Phi_{F(Y),Y}(id_{F(Y)})$, então da naturalidade de Φ,

$$G(h) \circ \eta_Y = G(h) \circ \Phi_{F(Y),Y}(id_{F(Y)}) = \Phi_{X,Y}(h \circ id_{F(Y)}) = \Phi_{X,Y}(h). \tag{11}$$

Desses fatos, concluímos que há uma equivalência entre adjunções e pares (η, ε) apropriados. No exemplo a seguir, construímos uma adjunção entre $\mathcal{M}_A$ e $\mathcal{M}_B$ para A e B R-álgebras e $\varphi : A \to B$ morfismo de R-álgebras.

Exemplo 2.10. *Fixe um anel R, duas R-álgebras A e B e um morfismo de R-álgebras $\varphi : A \to B$. Então B é um A, A-bimódulo dado por*

$$a \blacktriangleright b = \varphi(a)b;$$
$$b \blacktriangleleft a = b\varphi(a).$$

Dado M um A-módulo à direita, temos que $M \otimes_A B$ é B-módulo à direita com ação $(m \otimes_A b) \triangleleft b' = m \otimes_A (bb')$ e deste modo, temos o funtor $\_\_ \otimes_A B : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_B$. Na direção contrária, podemos definir uma estrutura de A-módulo à direita sobre qualquer objeto M de $\mathcal{M}_B$ através do morfismo φ, mais especificamente, dados $m \in M$ e $a \in A$, defina $m \blacktriangleleft a = m \triangleleft \varphi(a)$. Ainda, considere outro B-módulo à direita M' e $h : M \to M'$ um morfismo em $\mathcal{M}_B$. Então

$$h(m \blacktriangleleft a) = h(m \triangleleft \varphi(a)) = h(m) \triangleleft \varphi(a) = h(m) \blacktriangleleft a.$$

Segue que h é morfismo em relação às ações $\blacktriangleleft$. Isso nos dá outro funtor $\rho : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}_A$. Mostramos que $\_\_ \otimes_A B$ é adjunto à esquerda de ρ. Defina $\eta_M : M \to \rho(M \otimes_A B)$ e $\varepsilon_N : \rho(N) \otimes_A B \to N$ por

$$\eta_M(m) = m \otimes_A 1_B;$$
$$\varepsilon_N(n \otimes_A b) = n \triangleleft b.$$

É fácil ver que η_M e ε_N são lineares. Mostramos que também são morfismos de módulos.

$$\begin{aligned}\eta_M(m \triangleleft a) &= (m \triangleleft a) \otimes_A 1_B = m \otimes_A (a \triangleright 1_B) = m \otimes_A \varphi(a)1_B \\ &= m \otimes_A 1_B\varphi(a) = (m \otimes_A 1_B) \blacktriangleleft a = \eta_M(m) \blacktriangleleft a; \\ \varepsilon_N\left((n \otimes_A b) \triangleleft b'\right) &= \varepsilon_N\left(n \otimes_A bb'\right) = n \triangleleft bb' = (n \triangleleft b) \triangleleft b' = \varepsilon_N(n \otimes_A b) \triangleleft b'.\end{aligned}$$

Mais ainda, temos que η e ε são transformações naturais.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[d, "h"'] & \rho(M \otimes_A B) \arrow[d, "h\otimes_A id_B"] \\ M' \arrow[r, "\eta_{M'}"'] & \rho(M' \otimes_A B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \rho(N) \otimes_A B \arrow[r, "\varepsilon_N"] \arrow[d, "g\otimes_A id_B"'] & N \arrow[d, "g"] \\ \rho(N') \otimes_A B \arrow[r, "\varepsilon_{N'}"'] & N' \end{tikzcd}$$

Temos

$$\eta_{M'} \circ h(m) = h(m) \otimes_A 1_B = (h \otimes_A id_B)\,(m \otimes_A 1_B) = (h \otimes_A id_B) \circ \eta_M(m);$$
$$g \circ \varepsilon_N(n \otimes_A b) = g(n \triangleleft b) = g(n) \triangleleft b = \varepsilon_{N'}\,(g(n) \otimes_A b) = \varepsilon_{N'} \circ (g \otimes_A id_B)\,(n \otimes_A b).$$

Finalmente, mostramos as identidades do teorema 2.9.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{M\otimes_A B} \circ (\eta_M \otimes_A B)\,(m \otimes_A b) &= \varepsilon_{M\otimes_A B}\,(m \otimes_A 1_B \otimes_A b) \\ &= (m \otimes_A 1_B) \triangleright b = m \otimes_A b; \\ \rho(\varepsilon_N) \circ \eta_{\rho(N)}(n) &= \varepsilon_N(n \otimes_A 1_B) = n \triangleleft 1_B = n. \end{aligned}$$

Em particular, dados grupos G e H tal que H é subgrupo de G, então temos um morfismo inclusão entre os espaços vetoriais $\mathbb{K}H$ e $\mathbb{K}G$. Temos uma adjunção entre os funtores $\_\_ \otimes_{\mathbb{K}H} \mathbb{K}G$ e ρ. Esse resultado é conhecido como Teorema de Reciprocidade de Frobenius.

2.2 MÔNADAS

Agora, estudamos as mônadas propriamente ditas. Começamos repetindo a definição que foi mencionada antes.

Definição 2.11. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Uma mônada sobre $\mathcal{C}$ é um monoide sobre End($\mathcal{C}$).*

Observação 2.12. *Lembramos do exemplo 1.14 que a definição acima pode ser equacionada como*

$$\mu_X \circ (T(\mu_X)) = \mu_X \circ (\mu_{T(X)})$$
$$\mu_X \circ (T(\eta_X)) = id_{T(X)} = \mu_X(\eta_{T(X)})$$

Daremos um dos exemplos principais que ampliaremos no capitulo 6. Podemos definir uma mônada a partir de qualquer monoide A sobre uma categoria monoidal $\mathcal{C}$. Começamos definindo o funtor T sobre o qual definiremos a mônada.

Teorema 2.13. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal e A um objeto de $\mathcal{C}$. Então $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definido a seguir é um funtor. $T(X) = A \otimes X$ para todo X objeto de $\mathcal{C}$ e $T(h) = id_A \otimes h$ para todo h morfismo de $\mathcal{C}$.*

Demonstração. Observe que, de fato, dado um morfismo $h : X \to Y$ em $\mathcal{C}$, temos que $T(h)$ é morfismo de $A \otimes X$ para $A \otimes Y$. Considere ainda $g : Y \to Z$. Temos, usando a lei de intercâmbio,

$$\begin{aligned} T(g \circ h) &= \mathrm{id}_A \otimes (g \circ h) = (\mathrm{id}_A \circ \mathrm{id}_A) \otimes (g \circ h) \\ &= (\mathrm{id}_A \otimes g) \circ (\mathrm{id}_A \circ h) = T(g) \circ T(h). \end{aligned}$$

Finalmente, $T(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{A \otimes X} = \mathrm{id}_{T(X)}$. ■

Agora estamos em condições para definir a mônada. Para evitar ambiguidades, denotaremos a multiplicação do monoide por $\overline{\mu}$ e a unidade por $\overline{\eta}$. Isso será necessário pois trabalharemos simultaneamente com mônadas e monoides. Mesmo não estando no caso estrito, não utilizaremos os associadores. Esse abuso de notação irá simplificar drasticamente as equações com as quais iremos trabalhar.

Teorema 2.14. *Seja $(A, \overline{\mu}, \overline{\eta})$ um monoide sobre $\mathcal{C}$. Então podemos definir transformações naturais $\mu : T^2 \Rightarrow T$ e $\eta : Id_{\mathcal{C}} \Rightarrow T$ sobre o funtor $T = A \otimes \_\_$ da seguinte forma:*

1. $\mu_X = \overline{\mu} \otimes id_X$;
2. $\eta_X = (\overline{\eta} \otimes id_X) \circ l_X^{-1}$.

Além disso, (T, μ, η) é uma mônada sobre $\mathcal{C}$.

Demonstração. Considere um morfismo $h : X \to Y$. Precisamos mostrar que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes X \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "T^2(h)"'] & A \otimes X \arrow[d, "T(h)"] \\ A \otimes A \otimes Y \arrow[r, "\mu_Y"'] & A \otimes Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "h"'] & A \otimes X \arrow[d, "T(h)"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & A \otimes Y \end{tikzcd}$$

Para μ, usamos a lei de intercâmbio (LI).

$$\begin{aligned} T(h) \circ \mu_X &= (\mathrm{id}_A \otimes h) \circ \mu_X = (\mathrm{id}_A \otimes h) \circ (\overline{\mu} \otimes \mathrm{id}_X) \\ &\overset{LI}{=} (\mathrm{id}_A \circ \overline{\mu}) \otimes (h \circ \mathrm{id}_X) = \overline{\mu} \otimes h \\ \mu_Y \circ T^2(h) &= \mu_Y \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_A \otimes h) = (\overline{\mu} \otimes \mathrm{id}_X) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_A \otimes h) \\ &\overset{LI}{=} (\overline{\mu} \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_A)) \otimes (\mathrm{id}_X \circ h) = \overline{\mu} \circ h \end{aligned}$$

Para η, além da lei de intercâmbio, utilizamos a naturalidade de l^{-1} (N).

$$
\begin{aligned}
T(h)\circ\eta_X &= (\mathrm{id}_A\otimes h)\circ(\overline{\eta}\otimes \mathrm{id}_X)\circ l_X^{-1}\\
&\overset{LI}{=} (\mathrm{id}_A\circ\overline{\eta})\otimes(h\circ \mathrm{id}_X)\circ l_X^{-1} = (\overline{\eta}\otimes h)\circ l_X^{-1}\\
\eta_Y\circ h &= (\overline{\eta}\otimes\mathrm{id}_Y)\circ l_Y^{-1}\circ h \overset{N}{=} (\overline{\eta}\otimes \mathrm{id}_Y)\circ(\mathrm{id}_I\otimes h)\circ l_X^{-1}\\
&\overset{LI}{=} (\overline{\eta}\circ \mathrm{id}_I)\otimes(\mathrm{id}_Y\circ h)\circ l_X^{-1} = (\overline{\eta}\otimes h)\circ l_X^{-1}
\end{aligned}
$$

Uma vez provado que temos transformações naturais, iremos mostrar que (T,μ,η) é mônada. Em outras palavras, precisamos provar as identidades $\mu\circ T\mu = \mu\circ\mu T$ e $\mu\circ T\eta = \mu\circ\eta T = \mathrm{id}_T$.

$$
\begin{aligned}
\mu_X\circ T(\mu_X) &= (\overline{\mu}\otimes\mathrm{id}_X)\circ(\mathrm{id}_A\otimes\overline{\mu}\otimes\mathrm{id}_X) = (\overline{\mu}\circ(\mathrm{id}_A\otimes\overline{\mu}))\otimes\mathrm{id}_X\\
&= (\overline{\mu}\circ(\overline{\mu}\otimes\mathrm{id}_A))\otimes\mathrm{id}_X = (\overline{\mu}\otimes\mathrm{id}_X)\circ(\overline{\mu}\otimes\mathrm{id}_A\otimes\mathrm{id}_X)\\
&= (\overline{\mu}\otimes\mathrm{id}_X)\circ(\overline{\mu}\otimes\mathrm{id}_{A\otimes X}) = (\overline{\mu}\otimes\mathrm{id}_X)\circ(\overline{\mu}\otimes\mathrm{id}_{T(X)}) = \mu_X\circ\mu_{T(X)}\\
\mu_X\circ T(\eta_X) &= (\overline{\mu}\otimes\mathrm{id}_X)\circ(\mathrm{id}_A\otimes((\overline{\eta}\otimes\mathrm{id}_X)\circ l_X^{-1}))\\
&= (\overline{\mu}\otimes\mathrm{id}_X)\circ(\mathrm{id}_A\otimes\overline{\eta}\otimes\mathrm{id}_X)\circ(\mathrm{id}_A\otimes l_X^{-1})\\
&= (\overline{\mu}\circ(\mathrm{id}_A\otimes\overline{\eta})\otimes\mathrm{id}_X)\circ(\mathrm{id}_A\otimes l_X^{-1})\\
&= (r_A\otimes\mathrm{id}_X)\circ(r_A^{-1}\otimes\mathrm{id}_X) = (r_A\circ r_A^{-1})\otimes\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{T(X)}\\
\mu_X\circ\eta_{T(X)} &= (\overline{\mu}\otimes\mathrm{id}_X)\circ(\overline{\eta}\otimes\mathrm{id}_{T(X)})\circ l_{T(X)}^{-1}\\
&= (\overline{\mu}\otimes\mathrm{id}_X)\circ(\overline{\eta}\otimes\mathrm{id}_A\otimes\mathrm{id}_X)\circ l_{T(X)}^{-1}\\
&= ((\overline{\mu}\circ(\overline{\eta}\otimes\mathrm{id}_A))\otimes\mathrm{id}_X)\circ l_{T(X)}^{-1} = (l_A\otimes\mathrm{id}_X)\circ l_{T(X)}^{-1}\\
&= l_{A\otimes X}\circ l_{T(X)}^{-1} = l_{T(X)}\circ l_{T(X)}^{-1} = id_{T(X)}
\end{aligned}
$$

■

Teorema 2.15. *Sejam $(A,\overline{\mu},\overline{\eta})$ e $(B,\overline{\mu'},\overline{\eta'})$ monoides com respectivas mônadas associadas (T,μ,η) e (T',μ',η'). Se $h: A\to B$ é morfismo de monoides, então $\gamma: T\to T'$ dada por $\gamma_X = h\otimes id_X$ é morfismo de mônadas.*

Demonstração. Primeiro, vejamos que γ é natural. De fato, considere objetos X e Y de $\mathcal{C}$ e um morfismo $g: X\to Y$. Então o diagrama de naturalidade é dado como abaixo.

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes X \arrow[r, "h\otimes\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X\otimes g"'] & B\otimes X \arrow[d, "\mathrm{id}_B\otimes g"] \\
A\otimes Y \arrow[r, "h\otimes\mathrm{id}_Y"'] & B\otimes Y
\end{tikzcd}
$$

Como $(\mathrm{id}_B \otimes g) \circ (h \otimes \mathrm{id}_X) = h \otimes g = (h \otimes \mathrm{id}_Y) \circ (\mathrm{id}_X \otimes g)$, então γ é natural. Agora, mostramos que γ é morfismo de álgebras de Eilenberg-Moore. Seja X um objeto de $\mathcal{C}$ e note que

$$\begin{aligned}(\gamma * \gamma)_X &= T'(\gamma_X) \circ \gamma_{T(X)} = T'(h \otimes \mathrm{id}_X) \circ (h \otimes T(X)) \\ &= (\mathrm{id}_B \otimes h \otimes \mathrm{id}_X) \circ (h \otimes \mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_X) = h \otimes h \otimes \mathrm{id}_X.\end{aligned}$$

Então os diagramas representando o fato de γ ser morfismo são dados como abaixo.

$$\begin{tikzcd}
T^2(X) = A \otimes A \otimes X \arrow[r, "h\otimes h\otimes \mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\overline{\mu}\otimes \mathrm{id}_X"'] & (T')^2(X) = B \otimes B \otimes X \arrow[d, "\overline{\mu'}\otimes \mathrm{id}_X"] \\
T(X) = A \otimes X \arrow[r, "h\otimes \mathrm{id}_X"'] & T'(X) = B \otimes X
\end{tikzcd}$$

De fato, esse diagrama comuta pois h é morfismo de monoides. ■

A seguir iremos discutir as chamadas álgebras de Eilenberg-Moore. Estas são similares ao conceito de módulos sobre mônadas. Se T é uma mônada em $\mathcal{C}$, um módulo sobre T é um funtor $M : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ junto com uma transformação natural $\alpha : TM \to M$ tal que determinados diagramas de transformação natural comutam. Isso significa que para cada objeto X de $\mathcal{C}$, temos o objeto $M(X)$ e o morfismo $\alpha_X : TM(X) \to M(X)$ satisfazendo certas propriedades. Essas podem ser postas apenas em termos de $M(X)$ e α_X, não necessitando de menção explicita ao funtor M ou à transformação natural α. Uma álgebra de Eilenberg-Moore será um objeto A com um morfismo $\alpha : T(A) \to A$ tal que as propriedades mencionadas são verdadeiras. Formalmente:

Definição 2.16. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e T uma mônada sobre $\mathcal{C}$. Uma álgebra de Eilenberg-Moore sobre T é um objeto A de $\mathcal{C}$ munido de um morfismo $\alpha : T(A) \to A$ em $\mathcal{C}$, denominado ação de T em A, tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
T^2(A) \arrow[r, "T(\alpha)"] \arrow[d, "\mu_A"'] & T(A) \arrow[d, "\alpha"] \\
T(A) \arrow[r, "\alpha"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Id_{\mathcal{C}}(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, equal] & T(A) \arrow[d, "\alpha"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$

Em equações, $\alpha \circ \mu_A = \alpha \circ T(\alpha)$ e $\alpha \circ \eta_A = id_A$.

Definimos também o que é um morfismo nesse contexto. A motivação é a mesma de antes, se $M, N : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ são módulos sobre uma mônada T com ações $\alpha : TM \Rightarrow M$ e $\beta : TN \Rightarrow N$, um morfismo de módulos $\pi : M \Rightarrow N$ é uma transformação natural tal que $\pi \circ \alpha = \beta \circ T\pi$. Aplicando em um objeto X, $\pi_X \circ \alpha_X = \beta_X \circ T(\alpha_X)$. Definimos um morfismo entre álgebras de Eilenberg-Moore a partir dessa motivação.

Definição 2.17. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e T uma mônada sobre $\mathcal{C}$. Dadas A e B álgebras de Eilenberg-Moore sobre T com respectivas ações α e β, um morfismo de álgebras de Eilenberg-Moore entre A e B é um morfismo $f : A \to B$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\alpha"'] & T(B) \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Em equações, $f \circ \alpha = \beta \circ T(f)$.

É possível formar uma categoria $\mathcal{C}^T$ cujos objetos são álgebras de Eilenberg-Moore e os morfismos são como definidos acima. A composição e a unidade serão dadas da mesma forma que em $\mathcal{C}$. De fato, a associatividade e o axioma da unidade seguem diretamente das respectivas propriedades em $\mathcal{C}$. Basta mostrar o fechamento da composição, isto é, que a composição de dois morfismos de $\mathcal{C}^T$ resulta em um morfismo de $\mathcal{C}^T$. Sejam $f : (A, \alpha) \to (B, \beta)$ e $g : (B, \beta) \to (C, \gamma)$. Temos que em $\mathcal{C}$, $g \circ f : A \to C$. Além disso,

$$\gamma \circ T(g \circ f) = \gamma \circ T(g) \circ T(f) = g \circ \beta \circ T(f) = g \circ f \circ \alpha.$$

Em termos de diagramas:

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[rr, bend left, "T(g)\circ T(f)"] & T(B) \arrow[r, "T(g)"] \arrow[d, "\beta"'] & T(C) \arrow[d, "\gamma"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\alpha"'] & T(B) \arrow[r, "T(g)"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, "\gamma\circ T(g)=g\circ\beta"] & T(C) \arrow[d, "\gamma"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta\circ T(f)=f\circ\alpha"'] & T(B) \arrow[r, "T(g)"] \arrow[d, "\beta"'] & T(C) \arrow[d, "\gamma"] \\
A \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

Disso, segue que $g \circ f : (A, \alpha) \to (C, \gamma)$. Observe que um morfismo em $\mathcal{C}^T$ é simplesmente um morfismo em $\mathcal{C}$ que preserva a estrutura extra, isto é, as ações em seu domínio e contradomínio.

Definição 2.18. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e T uma mônada sobre $\mathcal{C}$. Então definimos $\mathcal{C}^T$ como a categoria cujos objetos são álgebras de Eilenberg-Moore (A, α) sobre T e cujos morfismos são morfismos de álgebras de Eilenberg-Moore. A composição e as unidades são definidas da mesma forma que em $\mathcal{C}$.*

Para futuras referências, faremos a observação abaixo, já mencionada anteriormente.

Observação 2.19. *Considere uma mônada (T, μ, η) sobre $\mathcal{C}$. Se (A, α) é álgebra de Eilenberg-Moore, então $id_{(A,\alpha)} = id_A$.*

Uma relação forte entre mônadas e álgebras de Eilenberg-Moore é que podemos definir o que são álgebras de Eilenberg-Moore livres. Os funtores esquecimento e livre serão apresentados no teorema abaixo.

Teorema 2.20. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e T uma mônada em $\mathcal{C}$. Então $U^T : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$ e $F^T : C \to \mathcal{C}^T$ são funtores tais como definidos abaixo.*

- *Para U^T, dado (A, α) objeto de $\mathcal{C}^T$, definimos $U^T((A, \alpha)) = A$ e dado $f : (A, \alpha) \to (B, \beta)$, definimos $U^T(f) = f : A \to B$.*
- *Para F^T, dado X objeto de $\mathcal{C}$, definimos $F^T(X) = (T(X), \mu_X)$ e dado $f : X \to Y$, definimos $F^T(f) = T(f) : (T(X), \mu_X) \to (T(Y), \mu_Y)$.*

Demonstração. É claro que $U^T((A, \alpha)) = A$ é objeto de $\mathcal{C}$ e que $U^T(f) = f$ é morfismo em $\mathcal{C}$. Ainda, assumindo que f e g sejam morfismos componíveis em $\mathcal{C}^T$,

$$U^T(f \circ g) = f \circ g = U^T(f) \circ U^T(g).$$

Basta mostrar que $U^T(id_{(A,\alpha)}) = id_{U^T((A,\alpha))}$. Para isso, mostraremos inicialmente que $id_A : (A, \alpha) \to (A, \alpha)$ é morfismo em $\mathcal{C}^T$.

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "T(\mathrm{id}_A)"'] & A \arrow[d, "\mathrm{id}_A"] \\
T(A) \arrow[r, "\alpha"'] & A
\end{tikzcd}$$

De fato, $\alpha \circ id_A = \alpha = id_{T(A)} \circ \alpha = T(id_A) \circ \alpha$, pois α é morfismo em $\mathcal{C}$ e T é funtor. Agora, usando que id_A é morfismo em $\mathcal{C}^T$ e que $id_{(A,\alpha)}$ é morfismo em $\mathcal{C}$, obtemos $id_A = id_A \circ id_{(A,\alpha)} = id_{(A,\alpha)}$. Finalmente, $U^T(id_{(A,\alpha)}) = U^T(id_A) = id_A = id_{U^T((A,\alpha))}$, provando que U^T é funtor.

Para F^T, precisamos primeiro provar que $(T(X), \mu_X)$ é álgebra. Sabemos que $\mu_X : T(T(X)) \to T(X)$. Agora, observe os diagramas abaixo.

$$\begin{tikzcd}
T \circ T \circ T \arrow[r, Rightarrow, "Id_T * \mu"] \arrow[d, Rightarrow, "\mu * T"'] & T \circ T \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] \\
T \circ T \arrow[r, Rightarrow, "\mu"'] & T(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Id_{\mathcal{C}}(T) \arrow[rr, Rightarrow, "\eta * T"] \arrow[dr, equal] & & T \circ T \arrow[dl, Rightarrow, "\mu"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T^2(T(X)) \arrow[r, "T \circ \mu_X"] \arrow[d, "\mu_{T(X)}"'] & T(T(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\
T(T(X)) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Id_{\mathcal{C}}(T(X)) \arrow[rr, "\eta_{T(X)}"] \arrow[dr, equal] & & T(T(X)) \arrow[dl, "\mu_X"] \\
& T(X) &
\end{tikzcd}$$

Os dois diagramas da primeira linha são verdadeiros pela definição de mônada como um monoide sobre End($\mathcal{C}$) (o da esquerda é a associatividade enquanto o da direita segue do diagrama da unidade). Os dois diagramas da segunda linha são obtido aplicando os da primeira linha na componente X. Disso, segue que $(T(X), \mu_X)$ é objeto de $\mathcal{C}^T$.

Agora, dado $f : X \to Y$ morfismo em $\mathcal{C}$, precisamos mostrar que

$$F^T(f) = T(f) : T(X) \to T(Y)$$

é morfismo em $\mathcal{C}^T$.

$$\begin{tikzcd} T(T(X)) \arrow[r, "T(T(f))"] \arrow[d, "\mu_X"'] & T(T(Y)) \arrow[d, "\mu_Y"] \\ T(X) \arrow[r, "T(f)"'] & T(Y) \end{tikzcd}$$

O diagrama acima segue da naturalidade de μ e prova que $T(f)$ é morfismo de $(T(X), \mu_X)$ para (T_Y, μ_Y). Finalmente, observe que de T funtor segue que

$$F^T(id_X) = T(id_X) = id_{T(X)} = id_{F^T(X)}$$

e que $F_{\mathcal{C}}(f \circ g) = T(f \circ g) = T(f) \circ T(g) = F^T(f) \circ F^T(g)$. ■

Definição 2.21. *Se T é uma mônada e X é um objeto de $\mathcal{C}$, definimos a* <u>*álgebra de Eilenberg-Moore livre*</u> *de X por $F(X)$.*

Exemplo 2.22. *Seja (T, μ, η) uma mônada sobre $\mathcal{C}$ e (A, α) uma álgebra de Eilenberg-Moore. Sabemos que $\alpha : T(A) \to A$ é morfismo em $\mathcal{C}$ e que $(T(A), \mu_A)$ também é objeto de $\mathcal{C}^T$. Provaremos que $\alpha : (T(A), \mu_A) \to (A, \alpha)$, isto é, α é morfismo em $\mathcal{C}^T$. De fato, o diagrama de morfismos em $\mathcal{C}^T$ para α (dado abaixo) coincide, nesse caso, com um dos diagramas de ação para α.*

$$\begin{tikzcd} T^2(A) \arrow[r, "T(\alpha)"] \arrow[d, "\mu_A"'] & T(A) \arrow[d, "\alpha"] \\ T(A) \arrow[r, "\alpha"'] & A \end{tikzcd}$$

Teorema 2.23. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e (T, μ, η) uma mônada sobre $\mathcal{C}$. Então U^T é adjunto à direita de F^T.*

Demonstração. Observe que $U_T : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$ é um funtor fiel. Dessa forma, podemos utilizar o teorema para obter a adjunção necessária desde que se configure a hipótese do exemplo.

Considere X um objeto de $\mathcal{C}$. Então temos um morfismo $\eta_X : X \to T(X)$. Se (A, α) é álgebra de Eilenberg-Moore, então dada $f : X \to A$, temos $\alpha \circ T(f) : T(X) \to A$ e além disso, podemos usar a naturalidade de η no morfismo f para obter

$$U(\alpha \circ T(f)) \circ \eta_X = \alpha \circ T(f) \circ \eta_X = \alpha \circ \eta_A \circ f = f.$$

Se temos outro morfismo $\widehat{f} : T(X) \to A$ tal que $\widehat{f} \circ \eta_X = U(\widehat{f}) \circ \eta_X = f$, então usando que $\widehat{f}$ é morfismo em $\mathcal{C}^T$,

$$\alpha \circ T(f) = \alpha \circ T(\widehat{f} \circ \eta_X) = \alpha \circ T(\widehat{f}) \circ T(\eta_X) = \widehat{f} \circ \mu_X \circ T(\eta_X) = \widehat{f}.$$

Podemos então aplicar o teorema 2.3 para concluir que U^T é adjunto à direita de F^T. ■

Podemos dar a recíproca do teorema 2.23, isto é, mostrar que toda adjunção dá origem a uma mônada.

Teorema 2.24. *Sejam $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores. Se (F, G, Φ) é uma adjunção, então $T = GF$ é uma mônada sobre $\mathcal{D}$ com a operação $\mu = G\varepsilon F$ e a unidade η da mônada dada pela unidade da adjunção.*

Demonstração. Temos

$$\mu_X \circ (T(\mu_X)) = G(\varepsilon_{F(X)}) \circ TG(\varepsilon_{F(X)}) = G(\varepsilon_{F(X)}) \circ GFG(\varepsilon_{F(X)}) = G(\varepsilon_{F(X)} \circ FG(\varepsilon_{F(X)})).$$

Usando a naturalidade de ε, obtemos

$$\mu_X \circ (T(\mu_X)) = G(\varepsilon_{F(X)} \circ \varepsilon_{FGF(X)}) = G(\varepsilon_{F(X)}) \circ G(\varepsilon_{FT(X)}) = \mu_X \circ \mu_{T(X)}.$$

Isso mostra que μ é associativa. Falta mostrar a propriedade da unidade.

$$\mu_X \circ T(\eta_X) = G(\varepsilon_{F(X)}) \circ T(\eta_X) = G(\varepsilon_{F(X)}) \circ G(F(\eta_X)) = G(\varepsilon_{F(X)} \circ F(\eta_X))$$

Usando um dos diagramas do teorema 2.4, temos que $\varepsilon_{F(X)} \circ F(\eta_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$, logo $\mu_X \circ T(\eta_X) = \mathrm{id}_{T(X)}$. Faremos agora o outro lado do diagrama. Usando o outro diagrama do teorema 2.4,

$$\mu_X \circ \eta_{T(X)} = G(\varepsilon_{F(X)}) \circ \eta_{GF(X)} = \mathrm{id}_{GF(X)} = \mathrm{id}_{T(X)}.$$

Segue que (T, μ, η) é mônada. Acabamos de ver que as componentes da mônada se escrevem em termos da adjunção, isto é, $T = GF$, $\mu = G\varepsilon F : GFGF \Rightarrow GF$ e $\eta : Id_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ é a unidade da adjunção. ■

Uma vez conhecida a equivalência entre mônadas e adjunções, podemos calcular a counidade da adjunção em termos mais simples na categoria de Eilenberg-Moore. Notamos inicialmente que $\varepsilon_{(A,\alpha)} : FU(A,\alpha) = (T(A), \mu_A) \to (A,\alpha)$. Como ε e η são unidade e counidade, podemos utilizar o diagrama da esquerda no 2.4 na componente A.

$$\begin{tikzcd} F^T(A) = (T(A), \mu_A) \arrow[rr, "F^T(\eta_A)"] \arrow[dr, equal] & & F^T U^T F^T(A) = (T^2(A), \mu_{T(A)}) \arrow[dl, "\varepsilon_{F^T(A)}"] \\ & F^T(A) = (T(A), \mu_A) & \end{tikzcd}$$

Temos que $\varepsilon_{F^T(A)} \circ F^T(\eta_A) = \mathrm{id}_{F^T(A)} = \mathrm{id}_{T(A)}$. Compondo $\alpha : T(A) \to A$ nos extremos da equação obtemos $\alpha \circ \varepsilon_{F^T(A)} \circ F^T(\eta_A) = \alpha \circ \mathrm{id}_{T(A)} = \alpha$. Sabemos que α é morfismo de álgebras de Eilenberg-Moore (ver exemplo 2.22) e portanto podemos utilizar a naturalidade de ε.

$$\begin{tikzcd} F^T U^T \left(F^T(A)\right) \arrow[r, "\varepsilon_{F^T(A)}"] \arrow[d, "F^T U^T(\alpha) = F^T(\alpha)"'] & F^T(A) \arrow[d, "\alpha"] \\ F^T U^T(A,\alpha) \arrow[r, "\varepsilon_{(A,\alpha)}"'] & (A,\alpha) \end{tikzcd}$$

Temos que $\varepsilon_{(A,\alpha)} \circ F^T(\alpha) \circ F^T(\eta_A) = \alpha \circ \varepsilon_{F^T(A)} \circ F^T(\eta_A)$ e portanto

$$\varepsilon_{(A,\alpha)} = \varepsilon_{(A,\alpha)} \circ F^T(\alpha \circ \eta_A) = \varepsilon_{(A,\alpha)} \circ F^T(\alpha) \circ F^T(\eta_A) = \alpha \circ \varepsilon_{F^T(A)} \circ F^T(\eta_A) = \alpha.$$

Terminamos a seção revisitando dois exemplos de adjunções.

Exemplo 2.25. *Considere a mônada T associada à adjunção $(F, U, \eta, \varepsilon)$ de $\underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}$. Nesse caso, $T(X) = UF(X)$ se refere ao conjunto das combinações lineares formais. Dado um conjunto X, $T^2(X)$ é composto por combinações lineares da forma*

$$\sum_{\alpha \in T(X)} \lambda_\alpha \alpha.$$

Vejamos através de exemplos como μ_X se comporta. Por definição, $\varepsilon_{F(X)}$ é a avaliação canônica, levando, por exemplo a combinação linear formal $(2x + 3y) \in T^2(X)$ em $2x + 3y \in T(X)$. Nesse caso,

$$\mu_X(2(2x + 3y)) = \varepsilon_{F(X)}(2(2x + 3y)) = 2\varepsilon_{F(X)}(2x + 3y) = 2(2x + 3y) = 4x + 6y.$$

Em outras palavras, μ_X "distribui" os escalares de um elemento de $T^2(X)$ em cada uma de suas respectivas combinações lineares em $T(X)$, essencialmente eliminando um grau de abstração.

Exemplo 2.26. *Considere agora a mônada T associada à adjunção $(F, U, \eta, \varepsilon)$ da categoria dos monoides em Set. Um elemento de $T^2(X)$ é uma palavra $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tal que cada α_i é uma palavra em X. Dessa maneira, um elemento de $T^2(X)$ tem a forma*

$$((x_{11}, \dots, x_{1k_1}), (x_{21}, \dots, x_{2k_2}), \dots, (x_{n1}, \dots, x_{nk_n})).$$

Uma maneira natural de levar esse elemento em $T(X)$ é eliminando os parênteses internos, obtendo

$$(x_{11}, \dots, x_{1k_1}, x_{21}, \dots, x_{2k_2}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nk_n}).$$

De fato, μ_X é a função definida dessa forma, uma vez que a operação do monoide $F(M)$ é, precisamente, a concatenação (c.f. exemplo 2.8).

2.3 FUNTOR COMPARAÇÃO

Seja (T, μ^T, η^T) uma mônada sobre $\mathcal{C}$. Sabemos que existe uma categoria $\mathcal{C}^T$ e funtores $U^T : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$, $F^T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^T$. Podemos definir $\varepsilon^T : F^T U^T \Rightarrow Id_{\mathcal{C}^T}$ por $\varepsilon^T_{X,\alpha} = \alpha$ e com isso temos que $(F^T, U^T, \eta^T, \varepsilon^T)$ é adjunção com mônada associada T. Podemos questionar se existem outras adjunções $(F, U, \eta, \varepsilon)$ tais que sua mônada associada é T. Isso é equivalente a $UF = T$, $\eta = \eta^T$ e $\mu^T = U\varepsilon F$. Sem, por hora, responder a esse questionamento, estudaremos algumas propriedades de tais adjunções. Note que para essa seção, usaremos (MACLANE, 1971) como referência.

Definição 2.27. *Seja (T, η^T, μ^T) uma mônada em $\mathcal{C}$. Uma adjunção $(F, U, \eta, \varepsilon)$ é dita associada a T quando T, por sua vez, for a mônada associada a essa adjunção, isto é, $T = UF$, $\mu^T = U\varepsilon F$ e $\eta^T \eta$.*

Definição 2.28. *Sejam (F, U) e (F', U') adjunções associadas a uma mônada T, digamos, $F : \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}$ e $F' : \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}'$. Um morfismo de adjunções associadas a T entre (F, U) e (F', U') é um funtor $K : \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}'$ tal que os seguintes diagramas comutam.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[d, "U"'] \arrow[dr, "K"] & \\
\mathcal{C} & \mathcal{D}' \arrow[l, "U'"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[dr, "K"] & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "F'"'] & \mathcal{D}'
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
KFU \arrow[rr, Rightarrow, "K\varepsilon"] \arrow[d, equal] & & KId_{\mathcal{D}} \arrow[dd, equal] \\
F'U \arrow[d, equal] & & \\
F'U'K \arrow[rr, Rightarrow, "\varepsilon' K"'] & & Id_{\mathcal{D}'}
\end{tikzcd}$$

Isto é, $U'K = U$, $KF = F'$ *e* $K\varepsilon = \varepsilon' K$.

Observação 2.29. *Para um morfismo* $K : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ *de adjunções associadas a* T*, frequentemente escrevemos o seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[d, shift right, "U"'] \arrow[drr, "K"] & & \\
\mathcal{C} \arrow[u, shift right, "F"'] \arrow[rr, shift right, "F'"'] & & \mathcal{D}' \arrow[ll, shift right, "U'"']
\end{tikzcd}$$

Esse deve ser entendido como na definição acima, isto é, $U'K = U$ *e* $KF = F'$.

Observação 2.30. *Na definição anterior pedimos uma compatibilidade de* K *com* F, U *e* ε. *Não foi exigida uma compatibilidade com* η *pois do fato que ambas as adjunções são associadas com a mesma mônada segue que* $\eta = \eta^T = \eta'$.

Exemplo 2.31. *Seja* $(F, U, \eta, \varepsilon)$ *uma adjunção associada à* T *com* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. *Então o funtor identidade de* $\mathcal{D}$ *é um endomorfismo de* $(F, U, \eta, \varepsilon)$. *De fato,* $UId_{\mathcal{D}} = U$, $Id_{\mathcal{D}}F = F$ *e* $Id_{\mathcal{D}}\varepsilon = \varepsilon Id_{\mathcal{D}}$.

Queremos definir uma categoria de adjunções associadas a uma mônada T fixa. Já vimos quais são os morfismos e a identidade dessa categoria. Uma noção de composição é dada de forma natural, através da composição de funtores.

Teorema 2.32. *Sejam* $(F, U, \eta, \varepsilon)$, $(F', U', \eta', \varepsilon')$ *e* $(F'', U'', \eta'', \varepsilon'')$ *adjunções associadas a uma mônada* T*, com* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $F' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}'$ *e* $F'' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}''$. *Se* $K : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ *e* $L : D' \to \mathcal{D}''$ *são morfismos de adjunções associadas a* T*, então* LK *também o é.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
U''LK &= U'K = U \\
LKF &= LF' = F'' \\
LK\varepsilon &= L\varepsilon' K = \varepsilon'' LK.
\end{aligned}$$

∎

Definição 2.33. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e T uma mônada sobre $\mathcal{C}$. Definimos a categoria $\underline{Adj}(T)$ que tem como objetos as adjunções associadas à mônada T e como morfismos os morfismos de adjunções associadas a T. A identidade e a composição são dadas da forma usual.*

Sabemos que a adjunção da categoria de Eilenberg-Moore é um objeto dessa categoria (c.f. teorema 2.23 e teorema 2.24). Ao longo dessa sessão, provaremos que tal adjunção é um objeto final e construiremos um objeto inicial.

Teorema 2.34. *Dada uma mônada T, a adjunção associada à categoria de Eilenberg-Moore $\mathcal{C}^T$ é objeto final na categoria $\underline{Adj}(T)$.*

Demonstração. Seja $(F, U, \eta, \varepsilon)$ uma adjunção associada a T com $U : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Construiremos passo a passo um funtor $K : \mathcal{D} \to \mathcal{C}^T$. Dado X objeto de $\mathcal{D}$, consideremos um possível funtor $K : \mathcal{D} \to \mathcal{C}^T$, com $K(X) = (K_0(X), \alpha_X)$, que é morfismo de adjunções associadas a T. Verificaremos quais propriedades K deve satisfazer para então obtermos uma definição apropriada. Queremos $U^T K(X) = U(X)$, isto é, $K_0(X) = U(X)$. Dessa forma, $\alpha_X : TU(X) \to U(X)$. Mas temos que $TU(X) = UFU(X)$. Defina $\alpha_X = U(\varepsilon_X)$. Dessa forma, a definição do funtor é dada por $K(X) = (U(X), U(\varepsilon_X))$. Mostraremos que $U(\varepsilon_X)$ é ação. Temos

$$\alpha_X \circ T(\alpha_X) = U(\varepsilon_X) \circ TU(\varepsilon_X) = U(\varepsilon_X) \circ UFU(\varepsilon_X).$$

Da naturalidade de ε no morfismo ε_X, $\varepsilon_X \circ FU(\varepsilon_X) = \varepsilon_X \circ \varepsilon_{FU(X)}$. Temos

$$\alpha_X \circ T(\alpha_X) = U(\varepsilon_X) \circ U(\varepsilon_{FU(X)}) = U(\varepsilon_X) \circ \mu_{U(X)} = \alpha_x \circ \mu_{U_X}.$$

Para o diagrama de identidade, usamos o teorema 2.4:

$$\alpha_X \circ \eta_{U(X)} = U(\varepsilon_X) \circ \eta_{U(X)} = \mathrm{id}_X.$$

Agora precisamos definir o valor de K nos morfismos. Considere $h : X \to Y$ morfismo em $\mathcal{D}$. Precisamos encontrar $K(h) = \hat{h} : (U(X), \alpha_x) \to (U(Y), \alpha_Y)$, isto é, $\hat{h} : U(X) \to U(Y)$ tal que $\hat{h} \circ \alpha_X = \alpha_Y \circ T(\hat{h})$. É natural considerar $\hat{h} = U(h)$. De fato,

$$U(h) \circ \alpha_X = U(h) \circ U(\varepsilon_X) = U(h \circ \varepsilon_X).$$

Usando a naturalidade de ε no morfismo h, obtemos $h \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ FU(h)$, logo

$$U(h) \circ \alpha_X = U(\varepsilon_Y) \circ UFU(h) = U(\varepsilon_Y) \circ TU(h) = \alpha_Y \circ TU(h).$$

Agora provamos as propriedades funtoriais para K. Temos que

$$K(Id_X) = U(Id_x) = Id_{U(X)} = Id_{(U(X),\alpha_X)},$$

do que foi visto na observação 2.19. Além disso,

$$K(h \circ g) = U(h \circ g) = U(h) \circ U(g) = K(h) \circ K(g),$$

provando que K é funtor.

Também, K é morfismo em $\underline{\text{Adj}}(T)$. Tome X objeto de $\mathcal{D}$, h morfismo de $\mathcal{D}$, X' objeto de $\mathcal{C}$ e h' morfismo de $\mathcal{C}$. Observando que $\alpha_{F(X')} = U\varepsilon_{F(X')} = \mu_{X'}$, temos

$$\begin{aligned}
U^T K(X) &= U^T(U(X), \alpha_X) = U(X)\\
U^T K(h) &= U^T U(h) = U(h)\\
KF(X') &= (UF(X'), \alpha_{F(X')}) = (T(X'), \mu_{X'}) = F^T(X')\\
KF(h') &= UF(h') = T(h') = U^T F^T(h') = F^T(h')
\end{aligned}$$

Finalmente, temos que provar que K é único. Suponha que K' seja outro funtor satisfazendo as propriedades desejadas, digamos, $K'(X) = (K'_0(X), \beta_X)$. Então

$$\begin{aligned}
K'_0(X) &= U^T K'(X) = U(X)\\
K'(h) &= U^T K'(h) = U(h) = K(h)
\end{aligned}$$

Falta mostrar que $\beta_X = \alpha_X = U(\varepsilon_X)$. Para isso, note que da definição de morfismo de álgebras de Eilenberg-Moore (e do fato que ações são morfismos) temos

$$\beta_X \circ TU(\varepsilon_X) = U(\varepsilon_X) \circ \mu_{U(X)}.$$

Transladando à direita por $T(\eta_{U(X)})$ obtemos

$$\beta_X \circ TU(\varepsilon_X) \circ T(\eta_{U(X)}) = U(\varepsilon_X) \circ \mu_{U(X)} \circ T(\eta_{U(X)})$$

Usando que $U(\varepsilon_X) \circ \eta_{U(X)} = id$ e $\mu_{U(X)} \circ T(\eta_{U(X)}) = id$ (respectivamente, teorema 2.4 e observação 2.12) obtemos $\beta_X = U(\varepsilon_X)$, como desejado. ■

Definição 2.35. *Seja T uma mônada sobre $\mathcal{C}$ e $(F, U, \eta, \varepsilon)$ uma adjunção associada a T com $U : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Chamamos de funtor comparação o único funtor $K : \mathcal{D} \to \mathcal{C}^T$ que é morfismo em $\underline{\text{Adj}}(T)$.*

Agora, construiremos o objeto inicial da categoria $\underline{\text{Adj}}(T)$. Observe o seguinte diagrama, obtido pelo resultado do teorema anterior.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[d, shift right, "U"'] \arrow[dr, "K"] & \\
\mathcal{C} \arrow[u, shift right, "F"'] \arrow[r, shift right, "F^T"'] & \mathcal{C}^T \arrow[l, shift right, "U^T"']
\end{tikzcd}$$

O funtor K não tem a necessidade de ser sobrejetor mas podemos obter algumas informações sobre os objetos em sua imagem. Dado $(A, \alpha) = K(X)$ objeto de $\mathcal{C}^T$, observe que $A = U^T K(X) = U(X)$. Por outro lado, dado $A = U(X)$ objeto de $\mathcal{C}$, temos $A = U^T K(X)$, logo $K(X)$ é da forma (A, α). Concluímos que a imagem (nos objetos) de K é formada pelos objetos da imagem de U com alguma estrutura. Dentre os possíveis objetos da imagem de U, temos uma classe distinta deles: os que estão ainda na imagem da mônada UF. Nesse caso, se $A = UF(B)$ temos que $KF(B) = F^T(B) = (T(B), \mu_B)$. Em particular, $A = T(B)$.

Pensando em K como uma forma de "ver" $\mathcal{D}$ dentro de $\mathcal{C}^T$, os objetos de $\mathcal{C}^T$ associados a algum dos de $\mathcal{D}$ incluem as álgebras de Eilenberg-Moore. Surge uma pergunta natural: é possível garantir mais algum objeto? Para responder essa pergunta na negativa (o que faremos), é preciso mostrar algum exemplo concreto no qual apenas as álgebras livres estão na imagem de K. Para isso, consideramos a categoria formada apenas por essas álgebras.

Definição 2.36. *Seja (T, μ, η) uma mônada sobre $\mathcal{C}$. Definimos a categoria das álgebras (de Eilenberg-Moore) livres dessa mônada como a subcategoria cheia de $\mathcal{C}^T$ formada pela álgebras de Eilenberg-Moore livres. Denotamos essa categoria por $\mathcal{C}^{T^*}$.*

Existe um funtor inclusão óbvio, $I : \mathcal{C}^{T^*} \to \mathcal{C}^T$ dado por $I(A, \alpha) = (A, \alpha)$ e $I(h) = h$. Além disso, podemos definir uma adjunção entre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}^{T^*}$ por

$$
\begin{aligned}
U^{T^*}(T(A), \mu_A) &= U^T(T(A), \mu_A) = T(A);\\
F^{T^*}(A) &= F^T(A) = (T(A), \mu_A).
\end{aligned}
$$

Que F^{T^*} é adjunto a esquerda de U^{T^*} com adjunção associada a T segue do fato que F^T o é em relação a U^T. Observe que

$$U^T I(T(A), \mu_A) = U^T(T(A), \mu_A) = U^{T^*}(T(A), \mu_A)$$

e também

$$F^{T^*} I(A) = F^{T^*}(A) = F^T(A).$$

Segue que a inclusão I é o funtor comparação relativo a $\mathcal{C}^{T^*}$. Ainda, a imagem de I é formada por, precisamente, as álgebras de Eilenberg-Moore livres. Intuitivamente, se $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é adjunto à esquerda de $U : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e essa adjunção é associada à mônada T, cada objeto X de $\mathcal{D}$ corresponde a um de $\mathcal{C}^T$ e, em particular, todos as álgebras livres estão em correspondência com algum objeto de $\mathcal{D}$. Ainda em termos intuitivos, isso significa que podemos associar a cada objeto $(T(A), \mu_A)$ de $\mathcal{C}^T$ um objeto de $\mathcal{D}$. Isso pode resultar em um problema: nada garante que a igualdade $(T(A), \mu_A) = (T(B), \mu_B)$ implique em $A = B$.

Para evitar esse problema, definimos uma nova categoria $\mathcal{C}_T$ onde cada objeto represente um $(T(A), \mu_A)$ com a diferença de que há distinção entre os objetos representando $(T(A), \mu_A)$ e $(T(B), \mu_B)$, caso $A \neq B$. A melhor forma de se fazer isso é associar os objetos de $\mathcal{C}_T$ aos de $\mathcal{C}$ de maneira injetora. Melhor ainda, $\mathcal{C}^0_T = \mathcal{C}^0$.

Quanto aos morfismos, note que dado $h : (T(A), \mu_A) \to (T(B), \mu_B)$ temos, em particular, $h : T(A) \to T(B)$. Disso, segue que $h \circ \eta_A : A \to T(B)$. Morfismos desse tipo são "especiais" pois como $T(B) = U^T F^T(B)$, dado $g : A \to T(B)$ podemos encontrar um morfismo $T(g) : T(A) \to T^2(B)$. Disso, obtemos $\mu_B \circ T(g) : T(A) \to T(B)$. Vemos que há uma relação entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, T(B))$ e $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^T}(F^T(A), F^T(B))$. Iremos definir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_T}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, T(B))$. Para tornar a notação mais curta, denotaremos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_T} = \mathrm{Hom}_T$.

Para motivar a composição e a identidade em $\mathcal{C}_T$, olharemos para as mesmas em $\mathcal{C}^{T^*}$. A identidade $\mathrm{id}_{F(X)} : F(X) \to F(X)$ corresponde a $\mathrm{id}_{F(X)} \circ \eta_X = \eta_X$, o que será a morfismo identidade de X em relação à categoria $\mathcal{C}_T$. A composição é mais difícil de motivar, para $g : X \to T(Y)$, $h : Y \to T(Z)$ morfismos temos os morfismos de $\mathcal{C}^{T^*}$ associados,

$$\mu_Y \circ T(g) : T(X) \to T(Y);$$
$$\mu_Z \circ T(h) : T(Y) \to T(Z).$$

Fazendo a composição, obtemos $\mu_Z \circ T(h) \circ \mu_Y \circ T(g)$. Este está associado a

$$\mu_Z \circ T(h) \circ \mu_Y \circ T(g) \circ \eta_X = \mu_Z \circ T(h) \circ \mu_Y \circ \eta_{T(Y)} \circ g = \mu_Z \circ T(h) \circ g,$$

que será definido como a composição em $\mathcal{C}_T$. Damos a definição formalmente abaixo.

Definição 2.37. *(KLEISLI, 1965) Seja (T, μ, η) uma mônada sobre $\mathcal{C}$. Defina a categoria de Kleisli $\mathcal{C}_T$ dessa mônada como segue. Os objetos de $\mathcal{C}_T$ são os objetos de $\mathcal{C}$ e a classe de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_T}(A, B) = \mathrm{Hom}_T(A, B)$ é dada por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, T(B))$. Para $A \in \mathcal{C}$, definimos a identidade em A como η^T_A e para $g \in \mathrm{Hom}_T(X, Y)$ e $h \in \mathrm{Hom}_T(Y, Z)$, definimos a composição $h \bullet g = \mu^T_Z \circ T(h) \circ g$.*

Observamos que a definição acima é, de fato, uma categoria. Para $h : X \to Y$ temos

$$\eta^T_Y \bullet h = \mu^T_Y \circ T(\eta^T_Y) \circ h = h;$$
$$h \bullet \eta^T_X = \mu^T_Y \circ T(h) \circ \eta^T_X = \mu^T_Y \circ \eta^T_{T(Y)} \circ h = h.$$

Além disso, se $f : X \to T(Y)$, $g : Y \to T(Z)$ e $h : Z \to T(W)$ são morfismos,

$$(h \bullet g) \bullet f = (\mu^T_W \circ T(h) \circ g) \bullet f = \mu^T_W \circ T(\mu^T_W) \circ T^2(h) \circ T(g) \circ f.$$

Segue da associatividade de μ^T que $\mu^T_W \circ T(\mu^T_W) = \mu^T_W \circ \mu^T_{T(W)}$. Temos

$$(h \bullet g) \bullet f = \mu^T_W \circ \mu^T_{T(W)} \circ T^2(H) \circ T(g) \circ f.$$

Da naturalidade de μ, $\mu^T_{T(W)} \circ T^2(h) = T(h) \circ \mu_Z$ e temos

$$(h \bullet g) \bullet f = \mu^T_W \circ T(h) \circ \mu^T_Z \circ T(g) \circ f = h \bullet (\mu^T_Z \circ T(g) \circ f) = h \bullet (g \bullet f).$$

Isso mostra que a categoria de Kleisli é, de fato, uma categoria.

Mais ainda, dessa essa categoria temos uma adjunção associada à mônada T. Assim, precisamos definir os funtores $F_T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_T$ e $U_T : \mathcal{C}_T \to \mathcal{C}$. Considere um objeto A. Lembramos que na categoria de Kleisli A representa intuitivamente, na verdade, a álgebra livre $(T(A), \mu^T_A)$. Definimos então $U_T(A) = T(A)$. Dado um morfismo $h : A \to T(B)$, precisamos encontrar $U_T(h) : T(A) \to T(B)$. Isso já foi feito, temos que considerar $U_T(h) = \mu^T_B \circ T(h)$.

O funtor F_T é definido com um raciocínio similar. Considere um objeto A em $\mathcal{C}$. Intuitivamente, esse deve ser levado no representante de $(T(A), \mu^T_A)$ em $\mathcal{C}_T$, em outras palavras, $F_T(A) = A$. Para um morfismo $f : A \to B$, levamos esse no representante de $T(f) : T(A) \to T(B)$, isto é, $F_T(f) = T(f) \circ \eta^T_A : A \to T(B)$. Precisamos provar que essa estrutura cumpre seu propósito.

Teorema 2.38. *Seja (T, μ^T, η^T) uma mônada em $\mathcal{C}$. Então F_T é adjunto à esquerda de U_T. Além disso, a mônada dessa adjunção é T.*

Demonstração. Considere $\eta^T_A : A \to T(A) = U_T F_T(A)$ e $\mathrm{id}_{T(A)} : T(A) \to T(A)$, observando que $\mathrm{id}_{T(A)} \in \mathrm{Hom}_T(F_T U_T(A), A)$. Essas são a unidade e a counidade da adjunção, como provaremos. Já sabemos que η^T é natural. No caso de id_T, queremos mostrar que esta é natural na categoria de Kleisli. Considere $h : A \to T(B)$ um morfismo. Temos que mostrar que o seguinte diagrama comuta, no qual as setas onduladas representam morfismos em $\mathcal{C}_T$.

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, rightsquigarrow, "\mathrm{id}_{T(A)}"] \arrow[d, rightsquigarrow, "T(h)"'] & A \arrow[d, rightsquigarrow, "h"] \\
T(B) \arrow[r, rightsquigarrow, "\mathrm{id}_{T(B)}"'] & B
\end{tikzcd}$$

Isso é, $\mathrm{id}_{T(B)} \bullet T(h) = h \bullet \mathrm{id}_{T(A)}$. De fato,

$$\mathrm{id}_{T(B)} \bullet T(h) = \mu^T_B \circ T(\mathrm{id}_{T(B)}) \circ T(h) = \mu^T_B \circ T(h) = \mu^T_B \circ T(h) \circ \mathrm{id}_{T(A)} = h \bullet \mathrm{id}_{T(A)}.$$

Usamos o Teorema 2.9 para mostrar que temos uma adjunção.

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}_{TF_T(A)} \bullet F_T(\eta^T_A) &= \mathrm{id}_{T(A)} \bullet \left(\eta^T_{T(A)} \circ \eta^T_A\right) \\
&= \mu^T_A \circ T(\mathrm{id}_{T(A)}) \circ \eta^T_{T(A)} \circ \eta_A \\
&= \mu^T_A \circ \eta^T_{T(A)} \circ \eta^T_A = \eta^T_A \\
&= T(\mathrm{id}_A) \circ \eta^T_A = F_T(\mathrm{id}_A) \\
U_T(\mathrm{id}_{T(A)}) \circ \eta^T_{U_T(A)} &= \mu^T_A \circ T(\mathrm{id}_{T(A)}) \circ \eta^T_{T(A)} \\
&= \mu^T_A \circ \eta^T_{T(A)} = \mathrm{id}_{T(A)} \\
&= \mathrm{id}_{U_T(A)} = U_T(\mathrm{id}_A)
\end{aligned}$$

Que $U_T F_T(A) = T(A)$ é claro. Se $f : A \to B$ é morfismo,

$$U_T F_T(f) = U_T(T(f) \circ \eta^T_A) = \mu^T_B \circ T^2(f) \circ T(\eta^T_A) = T(f) \circ \mu^T_A \circ T(\eta^T_A) = T(f).$$

Disso, segue o resultado. ■

A categoria de Kleisli é o lugar correto para se provar o teorema de comparação dual, isto é, a existência de um objeto inicial na categoria $\underline{\mathrm{Adj}}(T)$.

Teorema 2.39. *Considere categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $U : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e uma mônada T sobre $\mathcal{C}$ de forma que F seja adjunto à esquerda de U e que essa adjunção seja associada a T. Então existe um único funtor $I : \mathcal{C}_T \to \mathcal{D}$ que é morfismo de adjunções associadas a T.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_T \arrow[d, shift right, "U_T"'] \arrow[drr, "I"] & & \\
\mathcal{C} \arrow[u, shift right, "F_T"'] \arrow[rr, shift right, "F"'] & & \mathcal{D} \arrow[ll, shift right, "U"']
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Considere A um objeto de $\mathcal{C}_T$. Então A é um objeto de $\mathcal{C}$ e logo $F(A) \in \mathcal{D}^0$. Defina $I(A) = F(A)$. Ainda, dado um morfismo $h \in \mathrm{Hom}_T(A, B)$, isto é, $h : A \to T(B) = UF(B)$, usamos que F é adjunto à esquerda de U para obter um morfismo $I(h) : F(A) \to F(B)$. Lembramos que $I(h) = \Phi^{-1}_{F(B),A}(h) = \varepsilon_{F(B)} \circ F(h)$.

Provamos primeiro que I é funtor. De fato, $I(\eta_A) = \varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$. Além disso, dados $h : A \to T(B)$ e $g : B \to T(C)$, temos

$$I(g \bullet h) = \varepsilon_{F(C)} \circ F(g \bullet h) = \varepsilon_{F(C)} \circ F(\mu_C) \circ FT(g) \circ F(h).$$

Observe que da naturalidade de ε segue que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{F(C)} \circ F(\mu_C) &= \varepsilon_{F(C)} \circ FU(\varepsilon_F(C)) = \varepsilon_{F(C)} \circ \varepsilon_{FUF(C)}; \\
\varepsilon_{FUF(C)} \circ FT(g) &= \varepsilon_{FUF(C)} \circ FUF(g) = F(g) \circ \varepsilon_{F(B)}.
\end{aligned}$$

Aplicando isso, obtemos

$$I(g \bullet h) = \varepsilon_{F(C)} \circ F(g) \circ \varepsilon_{F(B)} \circ F(h) = I(g) \circ I(h).$$

Segue que I é funtor. Mostramos então que I é morfismo de adjunções associadas a T. Nos objetos,

$$\begin{aligned} UI(A) &= UF(A) = T(A) = U_T(A); \\ IF_T(A) &= I(A) = F(A). \end{aligned}$$

Por outro lado, dado um morfismo $h : A \to T(B)$,

$$UI(h) = U(\varepsilon_{F(B)}) \circ UF(h) = \mu_B \circ UF(h) = \mu_B^T \circ T(h) = U_T(h)$$

Para o outro lado, considere morfismo $f : A \to B$. Temos

$$IF_T(f) = I(T(f) \circ \eta_A) = \varepsilon_{FT(B)} \circ FT(f) \circ F(\eta_A) = \varepsilon_{FT(B)} \circ FUF(f) \circ F(\eta_A).$$

Usando a naturalidade de ε,

$$IF_T(f) = F(f) \circ \varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) = F(f).$$

Finalmente, precisamos provar a unicidade. Suponha que $I' : \mathcal{C}_T \to \mathcal{D}$ seja outro morfismo de adjunções associadas à T. Temos

$$I(A) = F(A) = I'F_T(A) = I'(A).$$

para todo objeto A. Por outro lado, se $h : A \to B$ é morfismo temos

$$I(h) = \varepsilon_F(B) \circ F(h) = \varepsilon_{F(B)} \circ I'F_T(h) = \varepsilon_{F(B)} \circ I'(T(h) \circ \eta_A).$$

Da naturalidade de η,

$$I(h) = \varepsilon_{F(B)} \circ I'(\eta_{T(B)} \circ h). \tag{12}$$

Temos como objetivo mostrar que $I'(\eta_{T(B)} \circ h) = F(\eta_B) \circ I'(h)$. Para isso, note inicialmente que da naturalidade de η, $T(\eta_B) \circ \eta_B = \eta_{T(B)} \circ \eta_B$, logo

$$T^2(\eta_B) \circ T(\eta_B) = T(\eta_{T(B)}) \circ T(\eta_B).$$

Agora,

$$\begin{aligned} F(\eta_B) \circ I'(h) &= I'F_T(\eta_B) \circ I'(h) = I'(F_T(\eta_B) \bullet I'(h)) \\ &= I'(\mu_{T(B)}) \circ T^2(\eta_B) \circ T(\eta_B) \circ h) = I'(\mu_{T(B)} \circ T(\eta_{T(B)}) \circ T(\eta_B) \circ h). \end{aligned}$$

Como $\mu_{T(B)} \circ T(\eta_{T(B)} = \mathrm{id}_{T(B)} = \mu_{T(B)} \circ \eta_{T^2(B)}$, podemos escrever

$$F(\eta_B) \circ I'(h) = I'(\mu_{T(B)} \circ \eta_{T^2(B)} \circ T\eta_B \circ h).$$

Segue da naturalidade de η aplicada ao morfismo $T(\eta_B)$ que

$$T^2(\eta_B) \circ \eta_{T(B)} = \eta_{T^2(B)} \circ T(\eta_B).$$

Isso pode ser substituído na equação acima para obter

$$F(\eta_B) \circ I'(h) = I'(\mu_{T(B)} \circ T^2(\eta_B) \circ \eta_{T(B)} \circ h) = I'(T(\eta_B) \bullet (\eta_{T(B)} \circ h)) = I'(\eta_{T(B)} \circ h),$$

pois $T(\eta_B) = \eta_{T(B)}$ é a identidade de $T(B)$ em $\mathcal{C}_T$. Provamos então que $I'(\eta_{T(B)} \circ h) = F(\eta_B) \circ I'(h)$. Substituindo na equação 12,

$$I(h) = \varepsilon_{F(B)} \circ I'(\eta_{T(B)} \circ h) = \varepsilon_{F(B)} \circ F(\eta_B) \circ I'(h) = I'(h).$$

Concluímos que $I = I'$ e portanto $\mathcal{C}_T$ é objeto inicial. ■

Sintetizando os resultados principais dessa sessão, dada uma categoria $\mathcal{C}$, uma mônada T sobre $\mathcal{C}$ e uma adjunção $(F, U, \eta, \varepsilon)$ associada a T, temos dois morfismos em $\underline{\mathrm{Adj}}(T)$, representados pelo diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_T \arrow[r, "I"] \arrow[dr, shift right, "U_T"'] & \mathcal{D} \arrow[r, "K"] \arrow[d, shift right, "U"'] & \mathcal{C}^T \arrow[dl, shift left, "U^T"'] \\
& \mathcal{C} \arrow[ul, shift right, "F_T"'] \arrow[u, shift right, "F"'] \arrow[ur, shift right, "F^T"'] &
\end{tikzcd}$$

Note também que a composição $KI : \mathcal{C}_T \to \mathcal{C}^T$ é o funtor comparação de $\mathcal{C}_T$.

3 COEQUALIZADORES E TEOREMA DE BECK

Faremos uma digressão do assunto atual para provar o teorema de Beck (c.f. teorema 3.14). Esse teorema caracteriza álgebras de Eilenberg-Moore (a menos de isomorfismo em $\underline{\mathrm{Adj}}(T)$) utilizando criação de coequalizadores especiais. Tomamos como referência (LANDRY; MARQUIS, 2005) mas observamos que o mesmo resultado pode ser encontrado em (MACLANE, 1971), que já usamos como referência anteriormente.

Definição 3.1. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Dois morfismos g e h são ditos paralelos se eles tem o mesmo domínio e contra-domínio.*

Definição 3.2. *Sejam $g, h : X \to Y$ morfismos paralelos. Uma forquilha de g e h é um objeto Z com um morfismo $c : Y :\to Z$ tal que $c \circ g = c \circ h$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & Y \arrow[r, "c"] & Z \end{tikzcd}$$

Observação 3.3. *Em alguns casos, é conveniente pensar no diagrama da forquilha como abaixo.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d, "c"] \\ Y \arrow[r, "c"'] & Z \end{tikzcd}$$

Exemplo 3.4. *Seja (A, α) uma álgebra de Eilenberg-Moore sobre T. Então (A, α) é forquilha de μ_A e $T(\alpha)$. De fato, o diagrama de associatividade de α é a diagrama de forquilha acima.*

$$\begin{tikzcd} T^2(A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "T(\alpha)"'] & T(A) \arrow[d, "\alpha"] \\ T(A) \arrow[r, "\alpha"'] & A \end{tikzcd}$$

Uma forquilha é formada por um objeto (Z) com uma estrutura (c). Podemos pensar em morfismos entre forquilhas como morfismos entre os objetos base que preservam essa estrutura. Isso resultará em uma categoria, como veremos mais precisamente abaixo.

Teorema 3.5. *Sejam g e h morfismos paralelos. Podemos definir uma categoria $\underline{\mathrm{Fork}}(f, g)$ cujos objetos são forquilhas de g e h e dados objetos (Z, c) e (Z', c'), um* *morfismo entre esses é um morfismo $\varphi : Z \to Z'$ tal que $\varphi \circ c = c'$. A composição e a unidade são tais como em $\mathcal{C}$.*

$$\begin{tikzcd}
 & & Z \arrow[d, "\varphi"] \\
X \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & Y \arrow[ur, "c"] \arrow[dr, "c'"'] & \\
 & & Z'
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Note que se (Z, c), (Z', c') e (Z'', c'') são forquilhas com $\varphi : Z \to Z'$ e $\psi : Z' \to Z''$ morfismos de forquilha temos $\psi \circ \varphi \circ c = \psi \circ c' \circ \varphi = c'' \circ \psi \circ \varphi$. Disso, a composição está bem definida. Ainda, $id_Z \circ c = c$, logo id_Z é morfismo de forquilhas. Segue direto das propriedades da composição em $\mathcal{C}$ a associatividade e que id_Z é identidade. ■

Definição 3.6. *Sejam $g, h : X \to Y$ morfismos paralelos em uma categoria $\mathcal{C}$.*

1. *Um <u>coequalizador de g e h</u> é um objeto inicial na categoria <u>Fork</u>(g, h).*

2. *Um <u>coequalizador absoluto de g e h</u> é uma forquilha $(\mathcal{K}, c)$ tal que para toda categoria $\mathcal{D}$ e todo funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $(F(\mathcal{K}), F(c))$ é um coequalizador de $F(g)$ e $F(h)$.*

3. *Um <u>coequalizador cindido de g e h</u> é uma forquilha $(\mathcal{K}, c)$ junto com morfismos $i : Y \to X$ e $j : \mathcal{K} \to Y$ tais que $g \circ i = id_Y$, $c \circ j = id_{\mathcal{K}}$ e o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "c"'] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & Y \arrow[d, "c"] \\
\mathcal{K} \arrow[r, "j"'] & Y \arrow[r, "c"'] & \mathcal{K}
\end{tikzcd}$$

A comutatividade deste diagrama é equivalente às equações

$$j \circ c = h \circ i;$$
$$c \circ h = c \circ g.$$

Alternativamente, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "c"'] \arrow[rr, bend left, "id_Y"] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d, "c"] \\
\mathcal{K} \arrow[r, "j"'] \arrow[rr, bend right, "id_{\mathcal{K}}"'] & Y \arrow[r, "c"'] & \mathcal{K}
\end{tikzcd}$$

Chamamos o par (i, j) de cisão de $(\mathcal{K}, c)$ em relação a g e h.

Exemplo 3.7. *A forquilha (A, α) de uma álgebra de Eilenberg-Moore é um coequalizador cindido. De fato, considere $i = \eta_{T(A)}$ e $j = \eta_A$.*

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "\eta_{T(A)}"] \arrow[d, "\alpha"'] & T^2(A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "T(\alpha)"'] & T(A) \arrow[d, "\alpha"] \\
A \arrow[r, "\eta_A"'] & T(A) \arrow[r, "\alpha"'] & A
\end{tikzcd}$$

Como visto no exemplo 3.4, o quadrado da direita comuta. Por outro lado, o quadrado da esquerda comuta pela naturalidade de η aplicado no morfismo α.

Teorema 3.8. *Todo coequalizador absoluto é um coequalizador. Todo coequalizador cindido é um coequalizador absoluto.*

Demonstração. Seja $(\mathcal{K}, c)$ um coequalizador absoluto. Então podemos tomar o funtor $Id_{\mathcal{C}}$ e concluir que $(\mathcal{K}, c)$ é coequalizador.

Seja $(\mathcal{K}, c, i, j)$ um coequalizador cindido. Mostramos inicialmente que $(\mathcal{K}, c, i, j)$ é um coequalizador. Considere (Z, d) forquilha de g e h.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "c"'] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d, "c"] \arrow[ddr, "d"] & \\
\mathcal{K} \arrow[r, "j"'] & Y \arrow[r, "c"'] \arrow[drr, "d"'] & \mathcal{K} \arrow[dr, dashed, "\varphi = d \circ j"] & \\
 & & & Z
\end{tikzcd}$$

Defina $\varphi = d \circ j$. Temos $\varphi \circ c = d \circ j \circ c = d$, logo φ é morfismo de forquilhas. Ainda, se $\psi : \mathcal{K} \to Z$ é morfismo de forquilha, temos $\psi = j \circ c \circ \psi = j \circ d = \varphi$. Concluímos que $(\mathcal{K}, c)$ é coequalizador.

Agora provamos que dado um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $(F(\mathcal{K}), F(c), F(i), F(j))$ é coequalizador cindido de $F(g)$ e $F(h)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
F(g) \circ F(i) &= F(g \circ i) = F(id_Y) = id_{F(Y)};\\
F(c) \circ F(j) &= F(c \circ j) = F(id_{\mathcal{K}}) = id_{F(\mathcal{K})};\\
F(j) \circ F(c) &= F(j \circ c) = F(h \circ i) = F(h) \circ F(i);\\
F(c) \circ F(h) &= F(c \circ h) = F(c \circ g) = F(c) \circ F(g).
\end{aligned}
$$

Segue dessas propriedades que $(\mathcal{K}, c)$ é coequalizador absoluto. De fato, como $(F(\mathcal{K}), F(c), F(i), F(j))$ é coequalizador cindido segue que $(F(\mathcal{K}), F(c))$ é coequalizador. ■

Teorema 3.9. *Sejam $g, h : X \to Y$ morfismos paralelos em uma categoria $\mathcal{C}$. Se $(\mathcal{K}, c)$ e $(\mathcal{K}', c')$ são coequalizadores de g e h, então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Existe um único isomorfismo de forquilhas φ entre $(\mathcal{K}, c)$ e $(\mathcal{K}', c')$.*
2. *Reciprocamente, se $(\mathcal{K}, c)$ é isomorfo a uma forquilha (Z, d), então (Z, d) é coequalizador.*
3. *Se $(\mathcal{K}, c)$ é absoluto, então $(\mathcal{K}', c')$ também o é.*
4. *Se (i, j) é uma cisão de $(\mathcal{K}, c)$, então $(i, j \circ \varphi^{-1})$ é uma cisão de $(\mathcal{K}', c')$.*

Demonstração. Os dois primeiros itens seguem da definição de coequalizadores como objetos iniciais de $\underline{\text{Fork}}(g, h)$. Suponha que $(\mathcal{K}, c)$ seja absoluto.

Dado um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, temos que $F(\varphi) : F(\mathcal{K}) \to F(\mathcal{K}')$ é isomorfismo (em $\mathcal{D}$). Mais ainda, $F(\varphi) \circ F(c) = F(\varphi \circ c) = F(c')$ logo $F(\varphi)$ é isomorfismo em $\underline{\text{Fork}}(F(g), F(h))$. Mas $(F(\mathcal{K}), F(c))$ é coequalizador e portanto, do item 2, $(F(\mathcal{K}'), F(c'))$ também o é. Como F foi arbitrário, $(\mathcal{K}', c')$ é absoluto, provando o item 3.

Finalmente, segue de que φ é isomorfismo de forquilhas que $g \circ i = id_Y$ além de que

$$
\begin{aligned}
c' \circ (j \circ \varphi^{-1}) &= \varphi \circ c \circ j \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1} = id_{\mathcal{K}'};\\
(j \circ \varphi^{-1}) \circ c' &= j \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c = j \circ c = h \circ i;\\
c' \circ h &= \varphi \circ c \circ h = \varphi \circ c \circ g = c' \circ g.
\end{aligned}
$$

■

Observação 3.10. *Devido a esse teorema, podemos falar em um par de morfismos paralelos possuir coequalizadores absolutos e cindidos sem necessariamente especificar qual. Além disso, podemos falar simplesmente "o coequalizador" uma vez que quaisquer deles são isomorfos.*

Teorema 3.11. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um isomorfismo de categorias, g e h morfismos paralelos em $\mathcal{C}$ e $(\mathcal{K}, c)$ um coequalizador de g e h. Então $(F(\mathcal{K}), F(c))$ é coequalizador de $F(g)$ e $F(h)$. Se $(\mathcal{K}, c)$ é absoluto, então $(F(\mathcal{K}), F(c))$ também o é.*

Demonstração. Considere (Z, d) uma forquilha de $F(g)$ e $F(h)$. Então

$$d \circ F(g) = d \circ F(h) \implies F^{-1}(d) \circ g = F^{-1}(d) \circ h.$$

Disso, existe um único $\varphi : \mathcal{K} \to F^{-1}(Z)$ morfismo de forquilha. Temos que

$$\varphi \circ c = F^{-1}(d) \implies F(\varphi) \circ F(c) = d,$$

logo $F(\varphi)$ é um morfismo de forquilhas. Ainda, se $\psi : F(\mathcal{K}) \to Z$ é outro morfismo de forquilha, então $F^{-1}(\psi) : \mathcal{K} \to F^{-1}(Z)$ também o é. Como $\mathcal{K}$ é coequalizador, $F^{-1}(\psi) = \varphi$, isto é, $\psi = F(\varphi)$.

Agora suponha que $(\mathcal{K}, c)$ seja absoluto. Então dado um funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, temos que $GF : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ e por consequência, $(GF(\mathcal{K}), GF(c))$ é coequalizador. Segue que $(F(\mathcal{K}), F(c))$ é absoluto. ■

Definição 3.12. *Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. Dizemos que F cria coequalizadores para um par paralelo $g, h : X \to Y$ quando dado um coequalizador $(\mathcal{K}, c)$ de $F(g)$ e $F(h)$, existe um único (Z, e) coequalizador de g e h tal que $F(Z) = \mathcal{K}$ e $F(e) = c$.*

Teorema 3.13. *Seja T uma mônada em $\mathcal{C}$. Então of funtor esquecimento U^T cria coequalizadores para todo par $g, h : (A, \alpha) \to (B, \beta)$ de morfismos paralelos tais que g e h admitem coequalizador absoluto em $\mathcal{C}$.*

Demonstração. Considere $(\mathcal{K}, c)$ um coequalizador absoluto de g e h em $\mathcal{C}$. Precisamos encontrar o objeto Z e o morfismo $e : (B, \beta) \to Z$ satisfazendo $U^T(Z) = \mathcal{K}$ e $e = U^T(e) = c$. Isso significa encontrar uma ação $\kappa : T(\mathcal{K}) \to \mathcal{K}$ tal que $c : B \to \mathcal{K}$ seja morfismo em $\mathcal{C}^T$. Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & T(\mathcal{K}) \arrow[dd, dashed, "\kappa"] \\
T(A) \arrow[r, shift left, "T(g)"] \arrow[r, shift right, "T(h)"'] & T(B) \arrow[ur, "T(c)"] \arrow[d, "\beta"'] & \\
 & B \arrow[r, "c"'] & \mathcal{K}
\end{tikzcd}$$

Como c é coequalizador de g e h temos $c \circ g = c \circ h$ e como g e h são morfismos em $\mathcal{C}^T$ temos $\beta \circ T(g) = g \circ \alpha$ e $\beta \circ T(h) = h \circ \alpha$. Disso,

$$c \circ \beta \circ T(g) = c \circ g \circ \alpha = c \circ h \circ \alpha = c \circ \beta \circ T(h).$$

Mas $(\mathcal{K}, c)$ é absoluto então $(T(\mathcal{K}), T(c))$ é coequalizador e existe um único $\kappa : T(\mathcal{K}) \to \mathcal{K}$ tal que

$$\kappa \circ T(c) = c \circ \beta. \tag{13}$$

Agora, provamos que $\kappa \circ \mu_{\mathcal{K}} = \kappa \circ T(\kappa)$. Novamente, $(\mathcal{K}, c)$ é absoluto logo $\left(T^2(\mathcal{K}), T^2(c)\right)$ é coequalizador. Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& & T^2(\mathcal{K}) \arrow[dd, shift right, "\kappa\circ\mu_{\mathcal{K}}"'] \arrow[dd, shift left, "\kappa\circ T(\kappa)"] \\
T^2(A) \arrow[r, shift left, "T^2(g)"] \arrow[r, shift right, "T^2(h)"'] & T^2(B) \arrow[ur, "T^2(c)"] \arrow[dr, "c\circ\beta\circ T(\beta)"'] & \\
& & \mathcal{K}
\end{tikzcd}$$

Podemos mostrar a equação desejada mostrando que ambos os termos são morfismos de forquilhas. Primeiro precisamos mostrar que $(\mathcal{K}, c \circ \beta \circ T(\beta))$ é forquilha. Temos

$$\begin{aligned}
c \circ \beta \circ T(\beta) \circ T^2(g) &= c \circ \beta \circ T(\beta \circ T(g)) = c \circ \beta \circ T(g \circ \alpha) = c \circ g \circ \alpha \circ T(\alpha) \\
&= c \circ h \circ \alpha \circ T(\alpha) = c \circ \beta \circ T(h) \circ T(\alpha) = c \circ \beta \circ T(\beta) \circ T^2(h).
\end{aligned}$$

Agora, mostramos que $\kappa \circ \mu_{\mathcal{K}}$ é morfismo de forquilha. Note que da naturalidade de $\mu_{\mathcal{K}}$ no morfismo c temos $\mu_{\mathcal{K}} \circ T^2(c) = T(c) \circ \mu_B$ e ainda, como β é ação, $\beta \circ \mu_B = \beta \circ T(\beta)$.

$$\kappa \circ \mu_{\mathcal{K}} \circ T^2(c) = \kappa \circ T(c) \circ \mu_B \overset{(13)}{=} c \circ \beta \circ \mu_B = c \circ \beta \circ T(\beta).$$

Também precisamos mostrar que $\kappa \circ T(\kappa)$ é morfismo de forquilha.

$$\begin{aligned}
\kappa \circ T(\kappa) \circ T^2(c) = \kappa \circ T(\kappa \circ T(c)) &\overset{(13)}{=} \kappa \circ T(c \circ \beta) \\
= \kappa \circ T(c) \circ T(\beta) &\overset{(13)}{=} c \circ \beta \circ T(\beta).
\end{aligned}$$

Como $(T^2(\mathcal{K}), T^2(\kappa))$ é coequalizador, concluímos que $\kappa \circ \mu_{\mathcal{K}} = \kappa \circ T(\kappa)$, isto é, κ é ação. Ainda, a equação 13 mostra que c é morfismo em $\mathcal{C}^T$. Para mostrar a unicidade, seja κ' outra ação tal que c é morfismo em $\mathcal{C}^T$, isto é, $\kappa' \circ T(c) = c \circ \beta$. Mas como $(T(\mathcal{K}), T(c))$ é coequalizador, $(\mathcal{K}, c \circ \beta)$ é forquilha e ambos κ e κ' são morfismos de forquilhas concluímos que $\kappa = \kappa'$.

Falta mostrar que $((\mathcal{K}, \kappa), c)$ é coequalizador. Considere uma forquilha $((Z, \zeta), d)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & (\mathcal{K}, \kappa) \arrow[dd, dashed, "\varphi"] \\
(A, \alpha) \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & (B, \beta) \arrow[ur, "c"] \arrow[dr, "d"'] & \\
 & & (Z, \zeta)
\end{tikzcd}
$$

Como $(\mathcal{K}, c)$ é coequalizador, existe um único morfismo φ em $\mathcal{C}$ comutando o diagrama. Se mostrarmos que φ também é morfismo em $\mathcal{C}^T$ provamos o teorema. Para isso usaremos o diagrama abaixo.

$$
\begin{tikzcd}
 & & T(\mathcal{K}) \arrow[dd, shift right, "\zeta \circ T(\varphi)"'] \arrow[dd, shift left, "\varphi \circ \kappa"] \\
T(A) \arrow[r, shift left, "T(g)"] \arrow[r, shift right, "T(h)"'] & T(B) \arrow[ur, "T(c)"] \arrow[dr, "d \circ \beta"'] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}
$$

Como (Z, d) é forquilha e g e h são morfismos,

$$d \circ \beta \circ T(g) = d \circ g \circ \alpha = d \circ h \circ \alpha = d \circ \beta \circ T(h).$$

De $(T(\mathcal{K}), T(c))$ coequalizador, existe um único morfismo de forquilhas de $T(\mathcal{K})$ para Z. Por um lado, usando que φ é morfismo de forquilhas e que d é morfismo em $\mathcal{C}^T$ obtemos

$$\zeta \circ T(\varphi) \circ T(c) = \zeta \circ T(d) = d \circ \beta.$$

Por outro lado, usando que c é morfismo em $\mathcal{C}^T$ e novamente que φ é morfismo de forquilhas,

$$\varphi \circ \kappa \circ T(c) = \varphi \circ c \circ \beta = d \circ \beta.$$

Concluímos que $\zeta \circ T(\varphi) = \varphi \circ \kappa$. ■

Teorema 3.14 (Teorema de Beck)**.** *Seja T uma mônada e $(F, U, \eta, \varepsilon)$ uma adjunção associada (digamos, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$) com funtor comparação $K : \mathcal{D} \to \mathcal{C}^T$. Então são equivalentes:*

1. *K é inversível (em $\underline{\mathrm{Adj}}(T)$);*

2. *U cria coequalizadores para todo par $g, h : A \to B$ de morfismos paralelos em $\mathcal{D}$ tais que $U(g)$ e $U(h)$ admitem coequalizadores absolutos.*

3. *U cria coequalizadores para todo par $g, h : A \to B$ de morfismos paralelos em $\mathcal{D}$ tais que $U(g)$ e $U(h)$ admitem coequalizadores cindidos.*

Demonstração. Suponha que K seja inversível. Se g e h são um par de morfismos paralelos como os do item 2, suponha que $(\mathcal{K}, c)$ seja coequalizador absoluto de $U(g) = U^T K(g)$ e $U(h) = U^T K(h)$. Do teorema 3.13, existe uma única ação $\kappa : T(\mathcal{K}) \to \mathcal{K}$ tal que c seja morfismo em $\mathcal{C}^T$ e além disso, $((\mathcal{K}, \kappa), c)$ é coequalizador de $K(g)$ e $K(h)$. Denote $\widehat{\mathcal{K}} = K^{-1}((\mathcal{K}, \kappa))$. Temos que

$$\begin{aligned} U(\widehat{\mathcal{K}}) = U^T K(\widehat{\mathcal{K}}) = U^T((\mathcal{K}, \kappa)) &= \mathcal{K}; \\ UK^{-1}(c) = KK^{-1}(c) &= c. \end{aligned}$$

Além disso, se $\mathcal{K}'$ é objeto de $\mathcal{D}$ satisfazendo $U(\mathcal{K}') = \mathcal{K}$ e $c' : B \to \mathcal{K}'$ é morfismo satisfazendo $U(c') = c$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = U(\mathcal{K}') &= U^T K(\mathcal{K}'); \\ c = U(c') &= U^T K(c'). \end{aligned}$$

Da unicidade na definição 3.12, $K(\mathcal{K}') = (\mathcal{K}, \kappa)$ e $K(c') = c$. Disso,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}' = K^{-1}((\mathcal{K}, \kappa)) &= \widehat{\mathcal{K}}; \\ c' &= K^{-1}(c). \end{aligned}$$

Em outras palavras, provamos que existe um único par $\left(\widehat{\mathcal{K}}, K^{-1}(c)\right)$ tal que $U(\widehat{\mathcal{K}}) = \mathcal{K}$ e $UK^{-1}(c) = c$. Falta mostrar que esse par é um coequalizador de g e h. De fato, do teorema 3.11, $\left(\widehat{\mathcal{K}}, K^{-1}(c)\right)$ é coequalizador de $K^{-1}K(g) = g$ e $K^{-1}K(h) = h$.

Suponha agora que o item 2 seja verdadeiro. Como todo coequalizador cindido é absoluto, segue o item 3.

Finalmente, suponha que o item 3 seja verdadeiro. Precisamos definir um funtor $L : \mathcal{C}^T \to \mathcal{D}$ inverso de K. Seja (A, α) uma álgebra de Eilenberg-Moore. Para definir $(L((A, \alpha))$, basta encontrar um coequalizador cindido em $\mathcal{C}$ de morfismos da forma $U(g)$ e $U(h)$. Lembrando do exemplo 3.7, $(A, \alpha, \eta_{T(A)}, \eta_A)$ é coequalizador cindido de μ_A e $T(\alpha)$. Mas de $T = UF$ e $\mu = U\varepsilon F$, temos que (A, α) coequaliza $U(\varepsilon_{F(A)})$ e $UF(\alpha)$. Como este é cindido, existem únicos $\widehat{A}$ e $\widehat{\alpha}$ tais que $U(\widehat{A}) = A$ e $U(\widehat{\alpha}) = \alpha$. Além disso, $(\widehat{A}, \widehat{\alpha})$ é coequalizador de $\varepsilon_{F(A)}$ e $F(\alpha)$. Defina $L((A, \alpha)) = \widehat{A}$. Falta definir L nos morfismos. Seja $h : (A, \alpha) \to (B, \beta)$ um morfismo. Observe que $\widehat{\beta} \circ F(h)$ é morfismo de $F(A)$ em $\widehat{B}$.

Mostraremos que este é uma forquilha.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \widehat{A} \arrow[ddd, dashed, "L(h)"] \\
FT(A) \arrow[r, shift left, "\varepsilon_{F(A)}"] \arrow[r, shift right, "F(\alpha)"'] & F(A) \arrow[urr, "\widehat{\alpha}"] \arrow[dr, "F(h)"'] & & \\
 & & F(B) \arrow[dr, "\widehat{\beta}"'] & \\
 & & & \widehat{B}
\end{tikzcd}$$

Para isso, note que de h morfismo temos $h \circ \alpha = \beta \circ T(h)$ e da naturalidade de ε em $F(h)$ temos $\varepsilon_{F(B)} \circ FT(h) = \varepsilon_{F(B)} \circ FUF(h) = F(h) \circ \varepsilon_{F(A)}$.

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta} \circ F(h) \circ F(\alpha) &= \widehat{\beta} \circ F(h \circ \alpha) = \widehat{\beta} \circ F(\beta \circ T(h)) \\
&= \widehat{\beta} \circ F(\beta) \circ FT(h) = \widehat{\beta} \circ \varepsilon_{F(B)} \circ FT(h) = \widehat{\beta} \circ FT(h) \circ \varepsilon_{F(A)}.
\end{aligned}$$

Como $(\widehat{A}, \widehat{\alpha})$ é coequalizador, exite um único morfismo, que definiremos como $L(h) : \widehat{A} \to \widehat{B}$, tal que $L(h) \circ \widehat{\alpha} = \widehat{\beta} \circ F(h)$. Considere $h : (A, \alpha) \to (B, \beta)$ e $g : (B, \beta) \to (C, \gamma)$ morfismos. Queremos mostrar que $L(g \circ h) = L(g) \circ L(h)$. Note que $L(g \circ h)$ é o morfismo universal do um coequalizador logo, basta mostrar que $L(g) \circ L(h)$ comuta um diagrama análogo.

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{A} \arrow[dd, "L(h)"] \arrow[dddd, dashed, bend left, "L(g\circ h)"] \\
F(A) \arrow[ur, "\widehat{\alpha}"] \arrow[dr, "\beta\circ F(h)"] \arrow[dd, "F(h)"'] & \\
 & \widehat{B} \arrow[dd, "L(g)"] \\
F(B) \arrow[ur, "\widehat{\beta}"] \arrow[dr, "\gamma\circ F(g)"'] & \\
 & \widehat{C}
\end{tikzcd}$$

Mais precisamente, $L(g \circ h)$ é o único morfismo satisfazendo $L(g \circ h) \circ \widehat{\alpha} = \gamma \circ F(g \circ h)$. Mas temos

$$L(g) \circ L(h) \circ \widehat{\alpha} = L(g) \circ \beta \circ F(h) = \gamma \circ F(g) \circ F(h) = \gamma \circ F(g \circ h).$$

Segue que $L(g) \circ L(h) = L(g \circ h)$. Antes de mostrar que $L(id_A) = id_{\widehat{A}}$ mostraremos que $KL = Id_{\mathcal{C}^T}$ e $LK = Id_{\mathcal{D}}$. De fato,

$$LK(X) = L((U(X), U(\varepsilon_X))) = \widehat{U(X)}$$

Temos que $U(X) = U(X)$. Mas da definição 3.12, o único objeto com essa propriedade é $\widehat{U(X)}$. Concluímos que $\widehat{U(X)} = X$. Observe também que $\widehat{U(\varepsilon_X)}$ é o único morfismo satisfazendo $U\left(\widehat{U(\varepsilon_X)}\right) = U(\varepsilon_X)$ e portanto, concluímos que $\widehat{U(\varepsilon_X)} = \varepsilon_X$. Agora considere $h : X \to Y$ morfismo. Temos

$$h \circ \widehat{U(\varepsilon_X)} = h \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ FU(h) = \widehat{U(\varepsilon_Y)} \circ FK(h).$$

Mas $LK(h)$ é o único morfismo que satisfaz tal propriedade (definição de L para morfismos), logo $LK(h) = h$. Concluímos que $LK = Id_{\mathcal{D}}$.

Para mostrar que $KL = Id_{\mathcal{C}^T}$, note que $KL((A, \alpha)) = K(\widehat{A}) = \left(U(\widehat{A}), U(\varepsilon_{\widehat{A}})\right)$. Sabemos que $U(\widehat{A}) = A$. Basta mostrar que $U(\varepsilon_{\widehat{A}}) = \alpha$. Lembrando do teorema 2.4, temos que $U(\varepsilon_{\widehat{A}}) \circ \eta_{U(\widehat{A})} = id_{U(\widehat{A})}$, em outras palavras, $U(\varepsilon_{\widehat{A}}) \circ \eta_A = id_A$. Aplicando α à direita em ambos os lados e usando que $\eta_A \circ \alpha = id_{T(A)}$,

$$U(\varepsilon_{\widehat{A}}) = U(\varepsilon_{\widehat{A}}) \circ \eta_A \circ \alpha = \alpha.$$

Disso, $KL((A, \alpha)) = (A, \alpha)$. Para morfismos, considere $h : (A, \alpha) \to (B, \beta)$. Lembremos do seguinte diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \widehat{A} \arrow[ddd, dashed, "L(h)"] \\
FT(A) \arrow[r, shift left, "\varepsilon_{F(A)}"] \arrow[r, shift right, "F(\alpha)"'] & F(A) \arrow[urr, "\widehat{\alpha}"] \arrow[dr, "F(h)"'] & & \\
 & & F(B) \arrow[dr, "\widehat{\beta}"'] & \\
 & & & \widehat{B}
\end{tikzcd}$$

Este diagrama, que comuta pela definição de L, pode ser transladado por U para obtermos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & & & A \arrow[ddd, "UL(h)"] \\
T^2(A) \arrow[r, shift left, "\mu_A"] \arrow[r, shift right, "T(\alpha)"'] & T(A) \arrow[urr, "\alpha"] \arrow[dr, "T(h)"'] & & \\
 & & T(B) \arrow[dr, "\beta"'] & \\
 & & & B
\end{tikzcd}$$

Como (A, α) é um coequalizador, $UL(h)$ é o único morfismo satisfazendo $UL(h) \circ \alpha = \beta \circ T(h)$. Mas da definição de morfismo em $\mathcal{C}^T$, $h \circ \alpha = \beta \circ T(h)$. Concluímos que $h = UL(h) = KL(h)$. Temos agora que $KL = Id_{\mathcal{C}^T}$.

Lembrando que ainda não mostramos que L é funtor. Provamos anteriormente que $F(g \circ h) = F(g) \circ F(h)$ e portanto falta apenas mostrar que para todo (A, α) objeto de $\mathcal{C}^T$, $L(id_{(A,\alpha)}) = id_{\widehat{A}}$. De fato, notando que $K(\widehat{A}) = KL((A, \alpha)) = (A, \alpha)$,

$$L(id_{(A,\alpha)}) = L(id_{K(\widehat{A})}) = LK(id_{\widehat{A}}) = id_{\widehat{A}}.$$

$\blacksquare$

4 LEVANTAMENTO

Voltamos agora a falar de mônadas. Dada uma mônada T sobre $\mathcal{C}$, queremos transportar conceitos de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{C}^T$ de forma que o funtor U^T os preserve. O mais simples é dado um objeto $X \in \mathcal{C}$, encontrar um objeto $X' \in \mathcal{C}^T$ tal que $U^T(X') = X$. Isso é equivalente a encontrar $\alpha : T(X) \to X$ tal que α é ação. De fato, nesse caso, $X' = (X, \alpha)$. Para outros conceitos a caracterização será mais complicada. O conceito em $\mathcal{C}^T$ que é preservado pelo funtor esquecimento é chamado de levantamento do original. Esse capitulo é dedicado a provar três desses, um para funtores, um para transformações naturais e um para adjunções. No capitulo 6 daremos também o levantamento de uma estrutura monoidal e de uma estrutura fechada. A referência utilizada nesse capitulo é (BÖHM, 2018).

Teorema 4.1. *Considere mônadas (T_1, μ_1, η_1) sobre uma categoria $\mathcal{C}_1$ e (T_2, μ_2, η_2) sobre uma categoria $\mathcal{C}_2$ e $G : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ um funtor. Então existe uma correspondência biunívoca entre:*

1. *Funtores $\widehat{G} : \mathcal{C}_1^{T_1} \to \mathcal{C}_2^{T_2}$ tal que o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_1^{T_1} \arrow[r, "\widehat{G}"] \arrow[d, "U_{T_1}"'] & \mathcal{C}_2^{T_2} \arrow[d, "U_{T_2}"] \\
\mathcal{C}_1 \arrow[r, "G"'] & \mathcal{C}_2
\end{tikzcd}$$

2. *Transformações naturais $\gamma : T_2G \Rightarrow GT_1$ tal que os diagramas abaixo comutam.*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, Rightarrow, "\eta_2 G"] \arrow[dr, Rightarrow, "G\eta_1"'] & & T_2G \arrow[dl, Rightarrow, "\gamma"] \\
& GT_1 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T_2^2G \arrow[r, Rightarrow, "T_2\gamma"] \arrow[d, Rightarrow, "\mu_2 G"'] & T_2GT_1 \arrow[r, Rightarrow, "\gamma T_1"] & GT_1^2 \arrow[d, Rightarrow, "G\mu_1"] \\
T_2G \arrow[rr, Rightarrow, "\gamma"'] & & GT_1
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Inicialmente, faremos algumas considerações a respeito do primeiro diagrama. Em termos equacionais temos que $U_{T_2} \circ \widehat{G} = G \circ U_{T_1}$. Aplicando em um objeto (A, α) de $\mathcal{C}_1^T$ obtemos

$$U_{T_2} \circ \widehat{G}((A, \alpha)) = G \circ U_{T_1}((A, \alpha)) = G(A).$$

Como $\widehat{G}((A, \alpha))$ é objeto de $\mathcal{C}_2^{T_2}$, ele é formado por um objeto de $\mathcal{C}_2$ com uma álgebra de Eilenberg-Moore sobre T_2. Por definição de U_{T_2}, esse objeto é $U_{T_2} \circ \widehat{G}((A, \alpha))$, isto é, $\widehat{G}((A, \alpha)) = (G(A), \xi_{A,\alpha})$ para alguma ação $\xi_{A,\alpha} : T_2(G(A)) \to G(A)$. Agora, considere outro objeto (B, β) de $\mathcal{C}_1^{T_1}$ e um morfismo $h : A \to B$ que também é morfismo entre (A, α) e (A, β). Do diagrama, temos

$$\widehat{G}(h) = U_{T_2} \circ \widehat{G}(h) = G \circ U_{T_1}(h) = G(h)$$

Reciprocamente, se $\widehat{G}$ é um funtor satisfazendo $\widehat{G}((A, \alpha)) = (G(A), \xi_{A,\alpha})$ para algum $\xi_{A,\alpha} : T_2G(A) \to G(A)$ e $\widehat{G}(h) = G(h)$, temos que o diagrama comuta. Ainda supondo a existência de $\widehat{G}$, temos que ξ é transformação natural, mais especificamente, $\xi : T_2\widehat{G} \Rightarrow \widehat{G}$. Note que de fato $\xi_{A,\alpha}$ é morfismo em $\mathcal{C}_2^{T_2}$ pois é uma ação (exemplo 2.22). Ainda, dado $h : (A, \alpha) \to (B, \beta)$, temos que $\widehat{G}(h)$ é morfismo, pois $\widehat{G}$ é funtor. Usando a definição de morfismo em $\mathcal{C}_2^{T_2}$,

$$G(h) \circ \xi_{A,\alpha} = \xi_{B,\beta} \circ T_2G(h).$$

Segue disso que ξ é natural.

Agora, suponha que tal $\widehat{G}$ tornando o primeiro diagrama comutativo exista. Dado A objeto de $\mathcal{C}_1$, sabemos que $(T_1(A), \mu_{1A})$ é objeto de $\mathcal{C}_1^{T_1}$, onde μ_1 é a multiplicação da mônada T_1. Com as notações acima, considere $\kappa_A = \xi_{T_1(A),\mu_{1A}}$, isto é, $\widehat{G}((T_1(A), \mu_{1A})) = (GT_1(A), \kappa_A)$. Considere os morfismos em $\mathcal{C}_2$ abaixo.

$$\begin{aligned} &\kappa_A : T_2GT_1(A) \to GT_1(A) \\ &\eta_{1A} : A \to T_1(A) \implies T_2G(\eta_{1A}) : T_2G(A) \to T_2GT_1(A) \end{aligned}$$

Compondo-os obtemos um morfismo $\gamma_A = \kappa_A \circ T_2G(\eta_{1A}) : T_2G(A) \to GT_1(A)$ e assim, obtemos uma família de morfismos γ. Mostraremos que $\gamma : T_2G \Rightarrow GT_1$ é transformação natural. Da naturalidade de η_1 segue a mesma propriedade para $T_2G(\eta_1)$; Além disso, afirmamos que $\kappa : T_2GT_1 \Rightarrow GT_1$ também é natural. De fato, tome $h : A \to B$. Então do teorema 2.20, $T_1(h) : (T_1(A), \mu_{1A}) \to (T_1(B), \mu_{1B})$. Segue da naturalidade de ξ que

$$GT_1(h) \circ \kappa_A = GT_1(h) \circ \xi_{T_1(A),\mu_{1A}} = \xi_{T_1(B),\mu_{1B}} \circ T_2GT_1(h) = \kappa_B \circ T_2GT_1(h),$$

do que segue a afirmação. Mas $\gamma = \kappa \circ T_2G(\eta_1)$, logo γ é natural. Seja A objeto de $\mathcal{C}_1$. Então da naturalidade de η_2 e da definição de ação para κ_A,

$$\gamma_A \circ \eta_{2G(A)} = \kappa_A \circ T_2G(\eta_{1A}) \circ \eta_{2G(A)} = \kappa_A \circ \eta_{2GT_1(A)} \circ G(\eta_{1A}) = G(\eta_{1A}).$$

Falta mostrar o outro diagrama do enunciado. Temos

$$\begin{aligned} &G(\mu_{1A}) \circ \gamma_{T_1(A)} \circ T_2(\gamma_A) \\ &= G(\mu_{1A}) \circ \kappa_{T_1(A)} \circ T_2G(\eta_{1T_1(A)}) \circ T_2(\kappa_A) \circ T_2^2G(\eta_{1A}). \end{aligned}$$

Usando a naturalidade de κ, obtemos

$$\begin{aligned}&G(\mu_{1A}) \circ \gamma_{T_1(A)} \circ T_2(\gamma_A)\\ &= \kappa_A \circ T_2G(\mu_{1A}) \circ T_2G(\eta_{1\,T_1(A)}) \circ T_2(\kappa_A) \circ T_2^2G(\eta_{1A}).\end{aligned}$$

Do diagrama da unidade na definição de mônada e de κ_A ação,

$$\begin{aligned}G(\mu_{1A}) \circ \gamma_{T_1(A)} \circ T_2(\gamma_A) &= \kappa_A \circ T_2(\kappa_A) \circ T_2^2G(\eta_{1A})\\ &= \kappa_A \circ \mu_{2GT_1(A)} \circ T_2^2G(\eta_{1A}).\end{aligned}$$

Finalmente, da naturalidade de μ e da definição de γ,

$$\begin{aligned}G(\mu_{1A}) \circ \gamma_{T_1(A)} \circ T_2(\gamma_A) &= \kappa_A \circ T_2G(\eta_{1A}) \circ \mu_{2G(A)}\\ &= \gamma_A \circ \mu_{2G(A)}.\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que exista $\gamma : T_2G \Rightarrow GT_1$ tornando os dois diagramas comutativos. Definimos $\widehat{G}((A, \alpha)) = (G(A), G(\alpha)\circ\gamma_A)$ e $\widehat{G}(h) = G(h)$. Das considerações iniciais, basta mostrar que $\widehat{G}$ é funtor. Primeiro, mostraremos que $(G(A), G(\alpha)\circ\gamma_A)$ é objeto de $C_2^{T_2}$. Para isso, mostremos que $G(\alpha) \circ \gamma_A$ é ação.

$$\begin{aligned}G(\alpha) \circ \gamma_A \circ T_2G(\alpha) \circ T_2(\gamma_A) &= G(\alpha) \circ GT_1(\alpha) \circ \gamma_{T_1(A)} \circ T_2(\gamma_A)\\ &= G(\alpha) \circ G(\mu_{1A}) \circ \gamma_{T_1(A)} \circ T_2(\gamma_A)\\ &= G(\alpha) \circ \gamma_A \circ \mu_{2G(A)}\end{aligned}$$

Agora, mostraremos que $G(h)$ é morfismo em $\mathcal{C}_2^{T_2}$ sempre que h for morfismo em $\mathcal{C}_1^{T_1}$, digamos, $h : (A, \alpha) \to (B, \beta)$.

$$G(\beta) \circ \gamma_B \circ T_2G(h) = G(\beta) \circ GT_1(h) \circ \gamma_A = G(h) \circ G(\alpha) \circ \gamma_A$$

Considerando morfismos $h : (A, \alpha) \to (B, \beta)$ e $g : (B, \beta) \to (D, \delta)$, temos $G(g \circ h) = G(g) \circ G(h)$. Finalmente, a afirmação $G(id_{(A,\alpha)}) = id_{(G(A),\xi_{A,\alpha})}$ segue direto de $id_{(B,\beta)} = id_B$ para todo objeto (B, β), como provaremos abaixo. Note que id_B é morfismo em $C_1^{T_1}$, uma vez que $id_B\circ\beta = \beta\circ id_B$. Disso, segue que $id_{(B,\beta)} = id_{(B,\beta)}\circ id_B = id_B$.

Obtemos assim uma função levando um funtor $\widehat{G}$ em uma transformação natural $\gamma^{\widehat{G}} = \kappa \circ T_2G\eta_1$ e uma função levando uma transformação natural γ em um funtor $G^{\gamma}((A, \alpha)) = (G(A), G(\alpha) \circ \gamma_A)$. Para mostrar que os dois itens do enunciado são equivalentes, falta mostrar que essas funções são mutualmente inversas.

Primeiro, lembremos que $\alpha : T_1(A) \to A$ é morfismo em $\mathcal{C}_1^{T_1}$ e que $G(\alpha) = \widehat{G}(\alpha)$, logo $G(\alpha)$ é morfismo em $C_2^{T_2}$.

$$\begin{aligned}G^{\gamma^{\widehat{G}}}((A, \alpha)) &= (G(A), G(\alpha) \circ \gamma_{\widehat{G}(A)}) = (G(A), G(\alpha) \circ \kappa_A \circ T_2G(\eta_{1A}))\\ &= (G(A), \xi_{A,\alpha} \circ T_2G(\alpha) \circ T_2G(\eta_{1A})) = (G(A), \xi A, \alpha) = \widehat{G}((A, \alpha)).\end{aligned}$$

Para mostrar a outra identidade, isto é, $\gamma^{G^\gamma} = \gamma$, tome $G^\gamma((A,\alpha)) = (G(A), \xi_{A,\alpha})$ e $\kappa_A = \xi_{T_1(A),\mu_A}$. Concluímos as seguintes três identidades preliminares:

$$\begin{aligned} \xi_{A,\alpha} &= G(\alpha)\circ\gamma_A \\ \kappa_A = G(\mu_A)\circ\gamma_{T_1(A)} = (G\mu\circ\gamma T_1)_A &\implies \kappa = G\mu\circ\gamma T_1 \\ (G^\gamma\eta_1)_A = G^\gamma(\eta_{1A}) = G(\eta_{1A}) = (G\eta_1)_A &\implies G^\gamma\eta_1 = G\eta_1 \end{aligned}$$

Com elas, provamos

$$\gamma^{G^\gamma} = \kappa\circ T_2G^\gamma\eta_1 = G\mu\circ\gamma T_1\circ T_2G^\gamma\eta_1 = G\mu\circ\gamma T_1\circ T_2G\eta_1.$$

Usando a naturalidade de γ,

$$\gamma^{G^\gamma} = G\mu\circ\gamma T_1\circ T_2G\eta_1 = G\mu\circ GT_1\eta_1\circ\gamma = \gamma.$$

■

Definição 4.2. *Nas notações acima, caso exista uma γ, denotamos o funtor $\widehat{G}$ por G^γ. Tal funtor é denominado <u>levantamento de G por γ</u>.*

Exemplo 4.3. *Considerando (T_1,μ_1,η_1) e (T_2,μ_2,η_2) mônadas sobre $\mathcal{C}$ e o funtor $id_\mathcal{C}$, verifiquemos para quais transformações naturais $\gamma : T_2 id_\mathcal{C} \Rightarrow id_\mathcal{C} T_1$ a segunda condição do teorema 4.1 é satisfeita. Nesse caso, temos $\gamma : T_2 \Rightarrow T_1$ e os diagramas são reduzidos aos abaixo.*

$$\begin{tikzcd} id_\mathcal{C} \arrow[rr, Rightarrow, "\eta_2"] \arrow[dr, Rightarrow, "\eta_1"'] & & T_2 \arrow[dl, Rightarrow, "\gamma"] \\ & T_1 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_2^2 \arrow[r, Rightarrow, "T_2\gamma"] \arrow[d, Rightarrow, "\mu_2"'] & T_2T_1 \arrow[r, Rightarrow, "\gamma T_1"] & T_1^2 \arrow[d, Rightarrow, "\mu_1"] \\ T \arrow[rr, Rightarrow, "\gamma"'] & & T \end{tikzcd}$$

Notando que $\gamma T_1\circ T_2\gamma = \gamma * \gamma$ e lembrando que endofuntores e transformações naturais formam uma categoria monoidal End($\mathcal{C}$), é fácil ver que o diagrama comuta se, e somente se, γ é morfismo de monoides nessa categoria. Ainda, o funtor $id_\mathcal{C}^\gamma$ é dado por

$$id_\mathcal{C}^\gamma((A,\alpha)) = (A, \alpha\circ\gamma_A),\, id_\mathcal{C}^\gamma(h) = h.$$

Exemplo 4.4. *Em particular no exemplo anterior, suponha que $T_1 = T_2 = T$ e γ seja a transformação natural identidade id_T de T. Como id_T é morfismo de álgebra na categoria monoidal End($\mathcal{C}$), temos que $id_\mathcal{C}^{id_T}$ é levantamento. Nesse caso, $\xi_{A,\alpha} = \alpha\circ T(A)$.*

Exemplo 4.5. *Ainda no contexto do exemplo 4.3, seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Dados monoides $(A, \overline{\mu}, \overline{\eta})$ e $(B, \overline{\mu'}, \overline{\eta'})$, considere os funtores $T = A \otimes \_\_$ e $T' = B \otimes \_\_$ com respectivas mônadas (T, μ, η) e (T', μ', η'). Se $h : A \to B$ é morfismo de monoides, considere o morfismo de mônadas $\gamma : T \Rightarrow T'$ dado por $\gamma_X = h \otimes id_X$ como no teorema 2.15. Então o funtor $id_{\mathcal{C}}$ admite levantamento $id_{\mathcal{C}}^{\gamma} : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}^{T'}$.*

Observamos que como provaremos no teorema 5.8, uma álgebra de Eilenberg-Moore sobre T é um objeto X com uma ação $\alpha : A \otimes X \to X$ tornando X um A-módulo e nesse caso, as noções de morfismo de álgebras de Eilenberg-Moore e de morfismo de A módulos coincidem. Dado um A-módulo (X, α), $id_{\mathcal{C}}^{\gamma}(X, \alpha)$ é da forma $(X, \xi_{A,\alpha})$ para $\xi_{A,\alpha} : B \otimes X \to X$ ação dada por $\xi_{A,\alpha} = \alpha \circ \gamma_X = \alpha \circ (h \otimes id_X)$.

Note a semelhança entre esse exemplo e o exemplo 2.10. De fato, ambos coincidem no caso da categoria monoidal ${}_R\mathcal{M}$ para um anel comutativo R.

Provamos que a composição de levantamentos é um levantamento.

Teorema 4.6. *Considere (T_i, μ_i, η_i) mônadas em $\mathcal{C}_i$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) e funtores $G : T_1 \to T_2, H : T_2 \to T_3$. Suponha ainda que esses funtores admitem levantamentos G^{γ} e H^{χ}. Então podemos definir $I = HG : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_3$ e $\rho = H\gamma \circ \chi G : T_3 HG \Rightarrow HGT_1$. Temos que I admite levantamento por ρ.*

Demonstração.

$$\rho \circ \eta_3 I = H\gamma \circ \chi G \circ \eta_3 HG = H\gamma \circ H\eta_2 G = HG\eta_1 = I\eta_1,$$

provando que um dos diagramas comuta. Para o outro, note que das definições de I e ρ

$$I\mu_1 \circ \rho T_1 \circ T_3\rho = HG\mu_1 \circ H\gamma T_1 \circ \chi G T_1 \circ T_3 H\gamma \circ T_3\chi G.$$

Pela naturalidade de χ,

$$I\mu_1 \circ \rho T_1 \circ T_3\rho = HG\mu_1 \circ H\gamma T_1 \circ HT_2\gamma \circ \chi T_2 G \circ T_3\chi G.$$

Finalmente, usando o diagrama para γ (transladado por H) seguido deste para χ (transladado à direita por G),

$$\begin{aligned} I\mu_1 \circ \rho T_1 \circ T_3\rho &= H\gamma \circ H\mu_2 G \circ \chi T_2 G \circ T_3\chi G \\ &= H\gamma \circ \chi G \circ \mu_3 G = \rho \circ \mu_3 G. \end{aligned}$$

■

Teorema 4.7. *Considere funtores $G, H : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$, mônadas (T_1, μ_1, η_1) sobre $\mathcal{C}_1$ e (T_2, μ_2, η_2) sobre $\mathcal{C}_2$ e uma transformação natural $\omega : G \Rightarrow H$. Se G^{γ} e H^{χ} são levantamentos, então existe no máximo uma transformação natural $\overline{\omega} : G^{\gamma} \Rightarrow H^{\chi}$ tal que $U_{T_2}\overline{\omega} = \omega U_{T_1}$. Além disso, $\overline{\omega}$ existe se, e somente se, o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{tikzcd} T_2G \arrow[r, Rightarrow, "\gamma"] \arrow[d, Rightarrow, "T_2\omega"'] & GT_1 \arrow[d, Rightarrow, "\omega T_1"] \\ T_2H \arrow[r, Rightarrow, "\chi"'] & HT_1 \end{tikzcd}$$

Demonstração. Sejam $\overline{\omega}$ e $\widetilde{\omega}$ duas transformações naturais satisfazendo a propriedade do enunciado. Então para todo objeto (A, α) de $\mathcal{C}_1^{T_1}$ temos

$$U_{T_2}(\overline{\omega}_{(A\alpha)}) = \omega_{U_{T_1}((A,\alpha))} = \omega_A$$

$$U_{T_2}(\widetilde{\omega}_{(A\alpha)}) = \omega_{U_{T_1}((A,\alpha))} = \omega_A$$

e portanto, $\overline{\omega}_{(A,\alpha)} = U_{T_2}(\overline{\omega}_{(A,\alpha)}) = U_{T_2}(\widetilde{\omega}_{(A,\alpha)}) = \widetilde{\omega}_{(A,\alpha)}$. Segue que $\overline{\omega} = \widetilde{\omega}$.

Suponha que $\overline{\omega}$ exista. O nosso objetivo é mostrar a comutatividade do diagrama no enunciado. Faremos isso em etapas. Primeiramente, utilize a naturalidade de ω no morfismo η_{1A} para obter

$$H(\eta_{1A}) \circ \omega_A = \omega_{T_1(A)} \circ G(\eta_{1A}). \tag{14}$$

Além disso, considerando o funtor livre F_{T_1} e lembrando que $F_{T_1}(A) = (T_1(A), \mu_A)$, seja κ_A^G a ação de $G^\gamma(F_{T_1}(A))$ e κ_A^H a ação de $G^\chi(F_{T_1}(A))$, similar ao que foi feito no teorema 4.1. Podemos usar que $\overline{\omega}_{F_{T_1}(A)}$ é morfismo em $\mathcal{C}_2^{T_2}$ para obter

$$\kappa_A^H \circ T_2(\overline{\omega}_{F_{T_1}(A)}) = \overline{\omega}_{F_{T_1}(A)} \circ \kappa_A^G. \tag{15}$$

Agora, usamos a hipótese. Temos que dada uma álgebra de Eilenberg-Moore (A, α) sobre T_1, $\overline{\omega}_{A,\alpha} = \omega_A$. Disso, obtemos que para qualquer objeto A de $\mathcal{C}$,

$$\overline{\omega}_{F_{T_1}(A)} = \overline{\omega}_{(T_1(A),\mu_A)} = \omega_{T_1(A)}. \tag{16}$$

Substituindo na equação 15,

$$\kappa_A^H \circ T_2(\omega_{T_1(A)}) = \omega_{T_1(A)} \circ \kappa_A^G. \tag{17}$$

Das equações acima e com as notações do teorema 4.1,

$$\begin{aligned} \omega_{T_1(A)} \circ \gamma_A = \omega_{T_1(A)} \circ \kappa_A^G \circ T_2G(\eta_{1A}) &\overset{(17)}{=} \kappa_A^H \circ T_2(\omega_{T_1(A)}) \circ T_2G(\eta_{1A}) \\ &\overset{(14)}{=} \kappa_A^H \circ T_2H(\eta_{1A}) \circ T_2(\omega_A) = \chi_A \circ T_2(\omega_A). \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que o diagrama do enunciado comute. Então defina $\overline{\omega}_{(A,\alpha)} = \omega_A$. Precisamos mostrar que $\omega_A : (G(A), G(\alpha) \circ \gamma_A) \to (H(A), H(\alpha) \circ \chi_A)$ é morfismo. De fato,

$$\omega_A \circ G(\alpha) \circ \gamma_A = H(\alpha) \circ \omega_{T_1(A)} \circ \gamma_A = H(\alpha) \circ \chi_A \circ T_2(\omega_A).$$

Finalmente, se $h : (A, \alpha) \to (B, \beta)$ é morfismo, então

$$H^{\chi}(h) \circ \overline{\omega}_A = H(h) \circ \omega_A = \omega_B \circ G(h) = \overline{\omega}_B \circ G^{\gamma}(h).$$

■

Definição 4.8. *Se as condições do teorema 4.7 são satisfeitas, chamamos a transformação natural $\overline{\omega}$ de levantamento de ω com respeito às transformações naturais γ e ξ.*

Teorema 4.9. *Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ categorias e $G : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ e $H : \mathcal{C}_2 \to C_1$ funtores tais que G seja adjunto à esquerda de H com unidade η e counidade ε. Suponha ainda que (T_1, μ_1, η_1) e (T_2, μ_2, η_2) sejam mônadas sobre $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ respectivamente e $\gamma : T_2G \Rightarrow GT_1$ seja transformação natural tal que G admita levantamento por γ. Então γ é inversível se, e somente se, todas as condições abaixo são satisfeitas.*

1. *Existe uma transformação natural $\chi : T_1H \Rightarrow HT_2$ tal que H admite levantamento por χ.*
2. *$\eta : id_{\mathcal{C}_1} \Rightarrow HG$ admite levantamento $\overline{\eta}$ com respeito a id_{T_1} e $H\gamma \circ \chi G$.*
3. *$\varepsilon : GH \Rightarrow id_{\mathcal{C}_2}$ admite levantamento $\overline{\varepsilon}$ com respeito a $G\chi \circ \gamma H$ e id_{T_2}.*
4. *G^{γ} é adjunto à esquerda de H^{χ} com unidade e counidade dessa adjunção sendo, respectivamente, $\overline{\eta}$ e $\overline{\varepsilon}$.*

Demonstração. Suponha que γ seja inversível. Defina

$$\chi = HT_2\varepsilon \circ H\gamma^{-1}H \circ \eta T_1H : T_1H \Rightarrow HT_2.$$

Provaremos que H admite levantamento por χ.

$$\chi \circ \eta_1 H = HT_2\varepsilon \circ H\gamma^{-1}H \circ \eta T_1 H \circ \eta_1 H$$

Usando a naturalidade de η,

$$\chi \circ \eta_1 H = HT_2\varepsilon \circ H\gamma^{-1}H \circ HG\eta_1 H \circ \eta H.$$

Usando que G^{γ} é levantamento ($G\eta_1 = \gamma \circ \eta_2 G \implies \gamma^{-1} \circ G\eta_1 = \eta_2 G$) seguido da naturalidade de η_2 e usando que η e ε são unidade e counidade,

$$\chi \circ \eta_1 H = HT_2\varepsilon \circ H\eta_2 GH \circ \eta H = H\eta_2 \circ H\varepsilon \circ \eta H = H\eta_2.$$

Falta mostrar o outro diagrama do teorema para provar que H admite levantamento com respeito a χ.

$$\begin{tikzcd} T1^2H \arrow[r, Rightarrow, "T_1\chi"] \arrow[d, Rightarrow, "\mu_1 H"'] & T_1HT_2 \arrow[r, Rightarrow, "\chi T_2"] & HT_2^2 \arrow[d, Rightarrow, "H\mu_2"] \\ T_1H \arrow[rr, Rightarrow, "\chi"'] & & GT_2 \end{tikzcd}$$

Mostraremos duas equações auxiliares. A primeira dessas é

$$\chi GT_1H \circ T_1\eta T_1H = (H\gamma^{-1} \circ \eta T_1)T_1H. \tag{18}$$

Para prová-la, começamos expandindo χ.

$$\begin{aligned}\chi GT_1H \circ T_1\eta T_1H &= (HT_2\varepsilon \circ H\gamma^{-1}H \circ \eta T_1H)GT_1H \circ T_1\eta T_1H \\ &= HT_2\varepsilon GT_1H \circ H\gamma^{-1}HGT_1H \circ \eta T_1HGT_1H \circ T_1\eta T_1H \\ &= HT_2\varepsilon GT_1H \circ (H\gamma^{-1}HG \circ \eta T_1HG \circ T_1\eta)T_1H \\ &= HT_2\varepsilon GT_1H \circ ((H\gamma^{-1} \circ \eta T_1)HG \circ T_1\eta)T_1H\end{aligned}$$

Observe que aplicando a naturalidade de $H\gamma^{-1} \circ \eta T_1$ e η obtemos

$$(H\gamma^{-1} \circ \eta T_1)HG \circ T_1\eta = HT_2G\eta \circ (H\gamma^{-1} \circ \eta T_1).$$

Substituindo isso na equação anterior,

$$\begin{aligned}\chi GT_1H \circ T_1\eta T_1H &= HT_2\varepsilon T_1H \circ (HT_2G\eta \circ (H\gamma^{-1} \circ \eta T_1))T_1H \\ &= HT_2\varepsilon T_1H \circ HT_2G\eta T_1H \circ H\gamma^{-1}T_1H \circ \eta T_1^2H.\end{aligned}$$

E então usamos que η e ε são unidade e counidade, provando a equação 18.

$$\chi GT_1H \circ T_1\eta T_1H = H\gamma^{-1}T_1H \circ \eta T_1^2H = (H\gamma^{-1} \circ \eta T_1)T_1H$$

Agora passamos para a segunda equação auxiliar:

$$H\mu_2 \circ HT_2(T_2\varepsilon \circ \gamma^{-1}H) = HT_2\varepsilon \circ H(\gamma^{-1} \circ G\mu_1 \circ \gamma T_1)H \tag{19}$$

Usamos primeiro a naturalidade de μ_2 e ε.

$$H\mu_2 \circ HT_2(T_2\varepsilon \circ \gamma^{-1}H) = HT_2\varepsilon \circ H\mu_2GH \circ HT_2\gamma^{-1}H$$

Então, verificamos que de G admitir levantamento com respeito a γ, segue

$$G\mu_1 \circ \gamma T_1 \circ T_2\gamma = \gamma \circ \mu_2 G \implies \gamma^{-1} \circ G\mu_1 \circ \gamma T_1 \circ = \mu_2 G \circ T_2\gamma^{-1}.$$

Aplicando isso,

$$H\mu_2 \circ HT_2(T_2\varepsilon \circ \gamma^{-1}H) = HT_2\varepsilon \circ H(\gamma^{-1} \circ G\mu_1 \circ \gamma T_1)H.$$

Finalmente, mostramos que o diagrama principal comuta.

$$H\mu_2 \circ \chi T_2 \circ T_1\chi = H\mu_2 \circ \chi T_2 \circ T_1(HT_2\varepsilon \circ H\gamma^{-1}H \circ \eta T_1 H)$$

A naturalidade de χ e $T_2\varepsilon \circ \gamma^{-1}H$ obtém

$$\chi T_2 \circ T_1 H(T_2\varepsilon \circ \gamma^{-1}H) = HT_2(T_2\varepsilon \circ \gamma^{-1}H) \circ \chi GT_1 H.$$

Aplicando isso,

$$H\mu_2 \circ \chi T_2 \circ T_1\chi = H\mu_2 \circ HT_2(T_2\varepsilon \circ \gamma^{-1}H) \circ \chi GT_1 H \circ T_1\eta T_1 H.$$

Podemos usar as equações auxiliares 18 e 19 para obter

$$\begin{aligned} H\mu_2 \circ \chi T_2 \circ T_1\chi &= HT_2\varepsilon \circ H(\gamma^{-1} \circ G\mu_1 \circ \gamma T_1)H \circ (H\gamma^{-1} \circ \eta T_1)T_1 H \\ &= HT_2\varepsilon \circ H(\gamma^{-1} \circ G\mu_1)H \circ \eta T_1^2 H. \end{aligned}$$

Usando a naturalidade de μ e η,

$$\begin{aligned} H\mu_2 \circ \chi T_2 \circ T_1\chi &= HT_2\varepsilon \circ H\gamma^{-1}H \circ HG\mu_1 H \circ \eta T_1^2 H \\ &= HT_2\varepsilon \circ H\gamma^{-1}H \circ \eta T_1 H \circ \mu_1 H = \chi \circ \mu_1 H. \end{aligned}$$

Com isso, mostramos que H admite levantamento com respeito a χ. Para mostrar que η também admite levantamento, temos que pela definição de χ,

$$H\gamma \circ \chi G \circ T_1\eta = H\gamma \circ HT_2\varepsilon G \circ H\gamma^{-1}HG \circ \eta T_1 HG \circ T_1\eta.$$

Usando a naturalidade de η,

$$H\gamma \circ \chi G \circ T_1\eta = H\gamma \circ HT_2\varepsilon G \circ H\gamma^{-1}HG \circ HGT_1\eta \circ \eta T_1.$$

Pela naturalidade de γ^{-1},

$$H\gamma \circ \chi G \circ T_1\eta = H\gamma \circ HT_2\varepsilon G \circ HT_2 G\eta \circ H\gamma^{-1} \circ \eta T_1$$

e como η e ε são unidade e counidade,

$$H\gamma \circ \chi G \circ T_1\eta = H\gamma \circ H\gamma^{-1} \circ \eta T_1 = \eta T_1.$$

Similarmente, mostramos que ε admite levantamento. Aplicamos a definição de χ:

$$\varepsilon T_2 \circ G\chi \circ \gamma H = \varepsilon T_2 \circ GHT_2\varepsilon \circ GH\gamma^{-1}H \circ G\eta T_1 H \circ \gamma H$$

A naturalidade de ε resulta em

$$\varepsilon T_2 \circ G\chi \circ \gamma H = T_2\varepsilon \circ \varepsilon T_2 GH \circ GH\gamma^{-1}H \circ G\eta T_1 H \circ \gamma H.$$

Novamente, pela naturalidade de ε

$$\varepsilon T_2 \circ G\chi \circ \gamma H = T_2\varepsilon \circ \gamma^{-1}H \circ \varepsilon G T_1 H \circ G\eta T_1 H \circ \gamma H.$$

E pela relação entre η e ε

$$\varepsilon T_2 \circ G\chi \circ \gamma H = T_2\varepsilon \circ \gamma^{-1}H \circ \gamma H = T_2\varepsilon.$$

Para mostrar que $\overline{\eta}$ e $\overline{\varepsilon}$ definem uma adjunção, lembremos de alguns resultados obtidos nos teoremas 4.1 e 4.7. Se $h : (A, \alpha) \to (B, \beta)$ é morfismo de álgebras de Eilenberg-Moore sobre T_1, então $G^{\gamma}((A, \alpha)) = (G(A), G(\alpha) \circ \gamma_A)$ e $G^{\gamma}(h) = G(h)$. Afirmações análogas valem para H^{χ}. Além disso, se (A, α) é objeto de $\mathcal{C}_1^{T_1}$, então $\overline{\eta}_{(A,\alpha)} = \eta_A$. Analogamente, para (B, β) objeto de $\mathcal{C}_2^{T_2}$, $\overline{\varepsilon}_{(B,\beta)} = \varepsilon_B$. Também provamos no teorema 4.1 que $id_{G^{\gamma}((A,\alpha))} = id_{G(A)}$ e o mesmo para H^{χ}. Agora, usamos esses para provar a comutatividade dos diagramas requiridos.

$$\begin{aligned}(\overline{\eta}H^{\chi} \circ H^{\chi}\overline{\varepsilon})_{(B,\beta)} &= \overline{\eta}_{H^{\chi}(B,\beta)} \circ H^{\chi}(\overline{\varepsilon}_{B,\beta}) = \overline{\eta}_{(H(B),H(\beta)\circ\chi_B)} \circ H(\varepsilon_B)\\ &= \eta_{H(B)} \circ H(\varepsilon_B) = (\mathrm{id}_H)_B = id_{H(B)} = id_{H^{\chi}((B,\beta))}\end{aligned}$$

Segue que $\overline{\eta}H^{\chi} \circ H^{\chi}\overline{\varepsilon} = \mathrm{id}_{H^{\chi}}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}(G^{\gamma}\overline{\eta} \circ \overline{\varepsilon}G^{\gamma})_{A,\alpha} &= G^{\gamma}(\overline{\eta}_{(A,\alpha)}) \circ \overline{\varepsilon}_{G^{\gamma}((A,\alpha))} = G(\eta_A) \circ \overline{\varepsilon}_{(G(A),G(\alpha)\circ\gamma_A)}\\ &= G(\eta_A) \circ \varepsilon_{G(A)} = id_{G(A)} = id_{G^{\gamma}((A,\alpha))},\end{aligned}$$

provando $G^{\gamma}\overline{\eta} \circ \overline{\varepsilon}G^{\gamma} = \mathrm{id}_{G^{\gamma}}$. Falta apenas mostrar a reciproca. Suponha que os itens do enunciado são verdadeiros e defina uma transformação natural $\delta : GT_1 \Rightarrow T_2G$ como $\delta = \varepsilon T_2 G \circ G\chi G \circ GT_1\eta$. Temos da naturalidade de ε que

$$\gamma \circ \delta = \gamma \circ \varepsilon T_2 G \circ G\chi G \circ GT_1\eta = \varepsilon GT_1 \circ GH\gamma \circ G\chi G \circ GT_1\eta$$

Por hipótese, $\overline{\eta}$ é levantamento e portanto

$$\gamma \circ \delta = \varepsilon GT_1 \circ G\eta T_1 = \mathrm{id}_{GT_1}$$

E por outro lado, da naturalidade de γ,

$$\delta \circ \gamma = \varepsilon T_2 G \circ G\chi G \circ GT_1\eta \circ \gamma = \varepsilon T_2 G \circ G\chi G \circ \gamma HG \circ T_2 G\eta.$$

Finalmente, podemos usar que $\overline{\varepsilon}$ é levantamento e obter

$$\delta \circ \gamma = T_2\varepsilon G \circ T_2 G\eta = \mathrm{id}_{T_2G}.$$

■

Definição 4.10. *Se as condições do teorema 4.9 são satisfeitas, dizemos que* $(G^{\gamma}, H^{\chi}, \overline{\eta}, \overline{\varepsilon})$ *é um* *<u>levantamento</u>* *da adjunção* $(G, H, \eta, \varepsilon)$ *por* γ*.*

5 ÁLGEBRAS DE HOPF

Nesse capítulo, iremos definir conceitos derivados de álgebras. Esses resultados podem ser encontrados em (DASCALESCU et al., 2000) no ponto de vista algébrico e em (BÖHM, 2018) no ponto de vista monádico.

Lembramos que uma $\mathbb{K}$-álgebra é um monoide na categoria $\underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}$. Começaremos com um estudo de monoides num ponto de vista funtorial. Para isso, consideraremos funtores $T = A \otimes \_\_$ e mostraremos como podemos relacionar monoides sobre A e mônadas sobre T.

Como monoides foram definidos em termos de diagramas, podemos inverter a direção das setas e obter a noção dual de um monoide, os chamados comonoides que serão introduzidos na seção 5.2. Também faremos um estudo do que são comonoides na categoria $\underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}$, as coálgebras, e caracterizaremos essas utilizando funtores da forma $T = C \otimes \_\_$.

Podemos também considerar simultaneamente uma estrutura de álgebra e uma de coálgebra sobre o mesmo espaço vetorial. Quando essas forem compatíveis teremos as chamadas biálgebras. O teorema fundamental das biálgebras nos dá uma forma de caracterizá-las a nível de funtores, uma estrutura de biálgebra pode ser definida sobre uma álgebra H simplesmente definindo certas estrutura de módulo sobre $M \otimes N$ para H-módulos M e N.

Terminamos o capítulo discutindo álgebras de Hopf, biálgebras com uma antípoda S. O teorema fundamental das álgebras de Hopf nos permite entender quando uma biálgebra H admite tal antípoda.

5.1 MONOIDES

Considere um objeto A de uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ e $T = A \otimes \_\_$ o funtor tensorial definido no teorema 2.13. Durante essa seção, fixaremos o objeto A e o funtor $T = A \otimes \_\_$. Denotaremos por $\mathcal{A}$ o conjunto de todos os monoides da forma $(A, \overline{\mu}, \overline{\eta})$, isto é, monoides tendo o objeto A previamente fixado como objeto subjacente, e por $\mathcal{M}$ o conjunto das mônadas sobre $\mathcal{C}$ da forma $(T = A \otimes \_\_, \mu, \eta)$. Lembramos que denotaremos as operações de monoide por $\overline{\mu}$ e $\overline{\eta}$ para não confundir-las com a estrutura de mônada, cujas transformações naturais serão denotadas por μ e η, uma vez que usaremos ambas no mesmo contexto.

Do teorema 2.14, podemos definir uma função $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ de maneira que a mônada $\Phi(A, \overline{\mu}, \overline{\eta}) = (T, \mu, \eta)$ tenha multiplicação $\mu_X = \overline{\mu} \otimes \mathrm{id}_X$ e unidade $\eta_X = (\overline{\eta} \otimes \mathrm{id}_X) \circ l_X^{-1}$.

Observe que com a definição acima, para quaisquer objetos X e Y,

$$\mu_X \otimes \mathrm{id}_Y = \overline{\mu} \otimes \mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_Y = \overline{\mu} \otimes \mathrm{id}_{X \otimes Y} = \mu_{X \otimes Y}.$$

Um caso particular disso é $\mu_I \otimes \mathrm{id}_X = \mu_{I \otimes X}$. Como mostraremos no decorrer dessa seção, caso essa condição particular valha para toda mônada em $\mathcal{M}$, podemos definir uma função inversa à Φ. Isso implica que Φ é sobrejetora e portanto toda mônada em $\mathcal{M}$ vem de uma álgebra. Construiremos esses resultados agora.

Teorema 5.1. *A função Φ definida acima é injetora.*

Demonstração. Considere dois monoides $(A, \overline{\mu}, \overline{\eta})$ e $(A, \overline{\mathrm{M}}, \overline{\mathrm{H}})$ e suponha que $\Phi(A, \overline{\mu}, \overline{\eta}) = \Phi(A, \overline{\mathrm{M}}, \overline{\mathrm{H}})$. Chamando $\Phi(A, \overline{\mathrm{M}}, \overline{\mathrm{H}})$ de $(T, \mathrm{M}, \mathrm{H})$ temos $\overline{\mu} \otimes \mathrm{id}_X = \overline{\mathrm{M}} \otimes \mathrm{id}_X$ para qualquer objeto X. Em particular, considerando $X = I$, segue da naturalidade de r que

$$
\begin{aligned}
\overline{\mu} &= \overline{\mu} \circ r_{A\otimes A} \circ r^{-1}_{A\otimes A} = r_A \circ (\overline{\mu} \otimes \mathrm{id}_I) \circ r^{-1}_{A\otimes A} \\
&= r_A \circ (\overline{\mathrm{M}} \otimes \mathrm{id}_I) \circ r^{-1}_{A\otimes A} = \overline{\mathrm{M}} \circ r_{A\otimes A} \circ r^{-1}_{A\otimes A} = \overline{\mathrm{M}}.
\end{aligned}
$$

Similarmente, $(\overline{\eta} \otimes \mathrm{id}_I) \circ l^{-1} = (\overline{\mathrm{H}} \otimes \mathrm{id}_I) \circ l^{-1}$. Segue que $\overline{\eta} \otimes \mathrm{id}_I = \overline{\mathrm{H}} \otimes \mathrm{id}_I$ e logo

$$
\begin{aligned}
\overline{\eta} &= \overline{\eta} \circ r_I \circ r_I^{-1} = r_A \circ (\overline{\eta} \otimes \mathrm{id}_I) \circ r_I^{-1} \\
&= r_A \circ (\overline{\mathrm{H}} \otimes \mathrm{id}_I) \circ r_I^{-1} = \overline{\mathrm{H}} \circ r_I \circ r_I^{-1} = \overline{\mathrm{H}}.
\end{aligned}
$$

Portanto Φ é injetora. ■

Teorema 5.2. *Dados objetos A, X e Y de $\mathcal{C}$ e uma mônada $(T = A \otimes \_\_, \mu, \eta)$, se $\mu_X \otimes id_Y = \mu_{X\otimes Y}$, então $\eta_X \otimes id_Y = \eta_{X\otimes Y}$.*

Demonstração. Sabemos que $\mu_{X\otimes Y} \circ \eta_{A\otimes X\otimes Y} = \mathrm{id}_{A\otimes X\otimes Y}$. Disso, concluímos que $\mu_{X\otimes Y} \circ \eta_{A\otimes X\otimes Y} \circ (\eta_X \otimes \mathrm{id}_Y) = \eta_X \otimes \mathrm{id}_Y$. Usamos agora a naturalidade de η no objeto $A \otimes X \otimes Y$.

$$
\begin{tikzcd}
X \otimes Y \arrow[r, "\eta_{X\otimes Y}"] \arrow[d, "\eta_X \otimes \mathrm{id}_Y"'] & A \otimes X \otimes Y \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes \eta_X \otimes \mathrm{id}_Y"] \\
A \otimes X \otimes Y \arrow[r, "\eta_{A\otimes X\otimes Y}"'] & A \otimes A \otimes X \otimes Y
\end{tikzcd}
$$

Concluímos que $\mu_{X\otimes Y} \circ \eta_{A\otimes X\otimes Y} \circ (\eta_X \otimes \mathrm{id}_Y) = \mu_{X\otimes Y} \circ (\mathrm{id}_A \otimes \eta_X \otimes \mathrm{id}_Y) \circ \eta_{X\otimes Y}$.

Utilizando a hipótese $\mu_X \otimes \mathrm{id}_Y = \mu_{X\otimes Y}$ e a identidade

$$(\mu_X \otimes \mathrm{id}_Y) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \eta_X \otimes \mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_{A\otimes X\otimes Y}$$

obtemos

$$\mu_{X\otimes Y} \circ (\mathrm{id}_A \otimes \eta_X \otimes \mathrm{id}_Y) \circ \eta_{X\otimes Y} = (\mu_X \otimes \mathrm{id}_Y) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \eta_X \otimes \mathrm{id}_Y) \circ \eta_{X\otimes Y} = \eta_{X\otimes Y}.$$

Segue que $\eta_X \otimes \mathrm{id}_Y = \eta_{X\otimes Y}$. ■

Um caso em que a hipótese do teorema acima é verdadeira é quando a mônada T vem de um monoide sobre o objeto A.

Teorema 5.3. *Seja A um monoide de $\mathcal{C}$. Então a mônada $\Phi(A, \overline{\mu}, \overline{\eta}) = (T = A \otimes \_\_, \mu, \eta)$ satisfaz $\mu_X \otimes id_Y = \mu_{X \otimes Y}$ para quaisquer objetos X e Y.*

Demonstração. De fato, temos

$$\mu_X \otimes \mathrm{id}_Y = \overline{\mu} \otimes \mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_Y = \overline{\mu} \otimes \mathrm{id}_{X \otimes Y} = \mu_{X \otimes Y}.$$

■

Teorema 5.4. *Seja A um objeto de $\mathcal{C}$ e $(T = A \otimes \_\_, \mu, \eta)$ uma mônada tal que $\mu_I \otimes id_A = \mu_{I \otimes A}$. Então $\overline{\mu}$ e $\overline{\eta}$ como definidas abaixo tornam A um monoide.*

1. $\overline{\mu} = r_A \circ \mu_I \circ (id_A \otimes r_A^{-1})$;
2. $\overline{\eta} = r_A \circ \eta_I$.

Além disso, se $\mu_I \otimes id_X = \mu_{I \otimes X}$ para todo X, então $\Phi(A, \overline{\mu}, \overline{\eta}) = (T, \mu, \eta)$.

Demonstração. Primeiro note que de fato os morfismos $\overline{\mu} : A \otimes A \to A$ e $\overline{\eta} : I \to A$ possuem domínio e contradomínio adequados. Provamos agora a associatividade de $\overline{\mu}$.

$$\begin{aligned}
\overline{\mu} \circ (\mathrm{id}_A \otimes \overline{\mu}) &= r_A \circ \mu_I \circ (\mathrm{id}_A \otimes r_A^{-1}) \circ (\mathrm{id}_A \otimes (r_A \circ \mu_I \circ (\mathrm{id}_A \otimes r_A^{-1}))) \\
&= r_A \circ \mu_I \circ (\mathrm{id}_A \otimes r_A^{-1}) \circ (\mathrm{id}_A \otimes r_A) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mu_I) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_A \otimes r_A^{-1}) \\
&= r_A \circ \mu_I \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mu_I) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_A \otimes r_A^{-1}) \\
&= r_A \circ \mu_I \circ (\mu_{A \otimes I}) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_A \otimes r_A^{-1}) \\
&= r_A \circ \mu_I \circ (\mathrm{id}_A \otimes r_A^{-1}) \circ \mu_A = \overline{\mu} \otimes \mu_A \\
&= \overline{\mu} \circ (\mathrm{id}_A \otimes l_A) \circ (\mathrm{id}_A \otimes l_A^{-1}) \circ \mu_A \\
&= \overline{\mu} \circ (\mathrm{id}_A \otimes l_A) \circ \mu_{I \otimes A} \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_A \otimes l_A^{-1}) \\
&= \overline{\mu} \circ (r_A \otimes \mathrm{id}_A) \circ (\mu_I \otimes \mathrm{id}_A) \circ (\mathrm{id}_A \otimes r_A^{-1} \otimes \mathrm{id}_A) \\
&= \overline{\mu} \circ ((r_A \circ \mu_I \circ (\mathrm{id}_A \otimes r_A^{-1})) \otimes \mathrm{id}_A) = \overline{\mu} \circ (\overline{\mu} \otimes \mathrm{id}_A)
\end{aligned}$$

Também provamos que $\overline{\eta}$ é unidade. A prova é direta para a identidade à direita.

$$\begin{aligned}
\overline{\mu} \circ (\mathrm{id}_A \otimes \overline{\eta}) &= r_A \circ \mu_I \circ (\mathrm{id}_A \otimes r_A^{-1}) \circ (\mathrm{id}_A \otimes (r_A \circ \eta_I)) \\
&= r_A \circ \mu_I \circ (\mathrm{id}_A \otimes r_A^{-1}) \circ (\mathrm{id}_A \otimes r_A) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \eta_I) \\
&= r_A \circ \mu_I \circ (\mathrm{id}_A \otimes \eta_I) = r_A
\end{aligned}$$

Para a identidade à esquerda, usamos o teorema 5.3 para concluir que $\eta_I \otimes \mathrm{id}_A = \eta_{I \otimes \mathrm{id}_A}$ além de lembrar que $\mathrm{id}_A \otimes r_A^{-1} = r_{A \otimes A}^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\overline{\mu} \circ (\overline{\eta} \otimes \mathrm{id}_A) &= r_A \circ \mu_I \circ r_{A\otimes A}^{-1} \circ ((r_A \circ \eta_I) \otimes \mathrm{id}_A) \\
&= r_A \circ \mu_I \circ r_{A\otimes A}^{-1} \circ (r_A \otimes \mathrm{id}_A) \circ (\eta_I \otimes \mathrm{id}_A) \\
&= r_A \circ \mu_I \circ r_{A\otimes A}^{-1} \circ (\mathrm{id}_A \otimes l_A) \circ (\eta_{I\otimes A}) \\
&= r_A \circ \mu_I \circ r_{A\otimes A}^{-1} \circ \eta_A \circ l_A \\
&= r_A \circ \mu_I \circ (\eta_A \otimes \mathrm{id}_I) \circ r_A^{-1} \circ l_A \\
&= r_A \circ r_A^{-1} \circ l_A = l_A
\end{aligned}$$

Segue que $(A, \overline{\mu}, \overline{\eta})$ é monoide. Falta mostrar que sob a hipótese adicional de $\mu_I \otimes \mathrm{id}_X = \mu_{I\otimes X}$, $\Phi(A, \overline{\mu}, \overline{\eta}) = (T, \mu, \eta)$, isto é,

$$\begin{aligned}
\mu_X &= \overline{\mu} \otimes \mathrm{id}_X \text{ e} \\
\eta_X &= (\overline{\eta} \otimes \mathrm{id}_X) \circ l_X^{-1}.
\end{aligned}$$

Provamos inicialmente para μ.

$$\begin{aligned}
\overline{\mu} \otimes \mathrm{id}_X &= (r_A \circ \mu_I \circ (\mathrm{id}_A \otimes r_A^{-1})) \otimes \mathrm{id}_X \\
&= (r_A \otimes \mathrm{id}_X) \circ (\mu_I \otimes \mathrm{id}_X) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_A \otimes l_X^{-1}) \\
&= (\mathrm{id}_A \otimes l_X) \circ (\mu_{I\otimes X}) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_A \otimes l_X^{-1}) \\
&= \mu_X \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_A \otimes l_X) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_A \otimes l_X^{-1}) = \mu_X
\end{aligned}$$

Usando novamente o teorema 5.3, temos que $\eta_I \otimes \mathrm{id}_X = \eta_{I\otimes X}$ para qualquer objeto X. Podemos então provar a afirmação para η.

$$\begin{aligned}
(\overline{\eta} \otimes \mathrm{id}_X) \circ l_X^{-1} &= ((r_A \circ \eta_I) \otimes \mathrm{id}_X) \circ l_X^{-1} = (r_A \otimes \mathrm{id}_X) \circ (\eta_I \otimes \mathrm{id}_X) \circ l_X^{-1} \\
&= (\mathrm{id}_A \otimes l_X) \circ \eta_{I\otimes X} \circ l_X^{-1} = (\mathrm{id}_A \otimes l_X) \circ (\mathrm{id}_A \otimes l^{-1} X) \circ \eta_X = \eta_X
\end{aligned}$$

∎

Juntando os dois teoremas anteriores obtemos o teorema a seguir.

Teorema 5.5. *Considere um objeto A de $\mathcal{C}$ e seja $\mathcal{M}'$ o conjunto das mônadas $(T = A \otimes \_\_, \mu, \eta)$ satisfazendo $\mu_I \otimes id_X = \mu_{I\otimes X}$ para qualquer objeto X. Então a função $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{M}'$ é uma bijeção. Sua inversa $\Psi : \mathcal{M}' \to \mathcal{A}$ é dada por*

$$\Psi(T, \mu, \eta) = \left(A, r_A \circ \mu_I \circ (id_A \otimes r_A^{-1}), r_A \circ \eta_I\right).$$

Corolário 5.6. *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria monoidal tal que para qualquer objeto A de $\mathcal{C}$, qualquer mônada $(T = A \otimes \_\_, \mu, \eta)$ satisfaz $\mu_I \otimes id_X = \mu_{I\otimes X}$ para qualquer objeto X, então a função $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ é uma bijeção. Sua inversa $\Psi : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ é dada por*

$$\Psi(T, \mu, \eta) = \left(A, r_A \circ \mu_I \circ (id_A \otimes r_A^{-1}), r_A \circ \eta_I\right).$$

Podemos mostrar que a categoria $\underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}$ satisfaz a hipótese do corolário acima. De fato, dados $a, b \in A$, podemos escrever

$$\mu_{\mathbb{K}}(a \otimes b \otimes 1_{\mathbb{K}}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \otimes \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i \otimes 1_{\mathbb{K}}.$$

Defina $ab = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i$ e note que

$$\mu_{\mathbb{K}}(a \otimes b \otimes \lambda) = \lambda \mu_{\mathbb{K}}(a \otimes b \otimes 1_{\mathbb{K}}) = \lambda(ab \otimes 1_{\mathbb{K}}) = ab \otimes \lambda.$$

Além disso, dados um espaço vetorial X e $v \in X$ existe uma única transformação linear $L_v : \mathbb{K} \to X$ tal que $L_v(1_{\mathbb{K}}) = v$. Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes \mathbb{K} \arrow[r, "\mu_{\mathbb{K}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_A \otimes L_v"'] & A \otimes \mathbb{K} \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes L_v"] \\
A \otimes A \otimes X \arrow[r, "\mu_X"'] & A \otimes X
\end{tikzcd}$$

Esse diagrama comuta devido a naturalidade de μ. Escrevendo em termos de elementos de X,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}_A \otimes L_v) \circ \mu_{\mathbb{K}}(a \otimes b \otimes 1_{\mathbb{K}}) &= (\mathrm{id}_A \otimes L_v)(ab \otimes 1_{\mathbb{K}}) = ab \otimes v \\
\mu_X \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_A \otimes L_v)(a \otimes b \otimes 1_{\mathbb{K}}) &= \mu_X(a \otimes b \otimes v)
\end{aligned}$$

Obtemos $ab \otimes v = \mu_X(a \otimes b \otimes v)$. Podemos aplicar a igualdade para o espaço $\mathbb{K} \otimes X$ e o elemento $\lambda \otimes v$. Obtemos que

$$\mu_{\mathbb{K} \otimes X}(a \otimes b \otimes \lambda \otimes v) = ab \otimes \lambda \otimes v = \mu_{\mathbb{K}}(a \otimes b \otimes \lambda) \otimes v.$$

Como os elementos da forma $a \otimes b \otimes \lambda \otimes v$ geram $A \otimes A \otimes \mathbb{K} \otimes X$, segue que $\mu_{\mathbb{K} \otimes X} = \mu_{\mathbb{K}} \otimes X$, como queríamos.

Após isso, podemos fazer a seguinte pergunta: existe alguma categoria monoidal na qual alguma mônada em T (com $T(X) = A \otimes X$) não é associada a um monoide sobre A? A resposta é sim.

Exemplo 5.7. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo com característica diferente de 2 e considere a estrutura cartesiana sobre $\underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}$, como definida em 1.6. Nesse caso, o produto tensorial é dado pelo produto cartesiano e I é dado pelo espaço nulo $\{0\}$. Seja $T : \underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}} \to \underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}$ o funtor dado por $T(V) = I \times V$ e para V espaço vetorial, defina $\mu_V : I \times I \times V \to I \times V$ e $\eta_V : V \to I \times V$ por*

$$\mu_V(0,0,v) = (0,-v);$$
$$\eta_V(v) = (0,-v).$$

Mostramos que estas são lineares. De fato, dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u, v \in V$

$$\mu_V(0,0,\lambda u + v) = (0,-(\lambda u + v)) = \lambda(0,-u) + (0,-v) = \lambda\mu_V(0,0,u) + \mu_V(0,0,v)$$
$$\eta_V(\lambda u + v) = (0,-(\lambda u + v)) = \lambda(0,-u) + (0,-v) = \lambda\eta_V(u) + \eta_V(v)$$

Ainda, considere $L : V \to W$ uma transformação linear. Temos que μ e η são naturais pois

$$\begin{aligned}\mu_W \circ (I \times I \times h)(0,0,v) &= \mu_W(0,0,h(v)) = (0,-h(v))\\ &= (0,h(-v)) = (I \times h)(0,-v) = (I \times h) \circ \mu_V(0,0,v),\end{aligned}$$

provando a naturalidade de μ, e

$$\eta_W \circ h(v) = \eta_W(h(v)) = (0,-h(v)) = (0,h(-v)) = (I \times h)(0,-v) = (I \times h) \circ \eta_V(v),$$

provando a naturalidade de η. Podemos provar agora que (T,μ,η) é uma mônada. Usaremos uma notação com o mínimo de parênteses (eg. $(a,(b,c)) = (a,b,c) = ((a,b),c)$) para facilitar os cálculos. Observe que $-(0,v) = (0,-v)$. Quanto à associatividade,

$$\mu_V \circ \mu_{I\times V}(0,0,0,v) = \mu_V(0,0,-v) = (\mu_V \circ (I \times \mu_V))\,(0,0,0,v).$$

A unidade sai de forma similar.

$$\mu_V \circ \eta_{I\times V}(0,v) = \mu_V(0,0,-v) = (0,v)$$
$$(\mu_V \circ (I \times V))\,(0,v) = \mu_V(0,0,-v) = (0,v)$$

Para concluir que a mônada não vem de um monoide sobre I, mostraremos que $\mu_{I\times\mathbb{K}} \neq \mu_I \times \mathbb{K}$. De fato,

$$\mu_{I\times\mathbb{K}}(0,0,0,1_{\mathbb{K}}) = (0,0,-1_{\mathbb{K}}) \neq (0,0,1_{\mathbb{K}}) = \mu_I \times id_{\mathbb{K}}(0,0,0,1_{\mathbb{K}}).$$

Uma última observação é que a mônada associada ao único monoide de I é a que se esperaria, $\mu_V(0,0,v) = (0,v)$ e $\eta_V(v) = (0,v)$. Isso dá outra forma de mostrar que a mônada acima não vem de um monoide.

Uma vez que sabemos a relação entre monoides e mônadas, podemos relacionar módulos com álgebras de Eilenberg-Moore.

Teorema 5.8. *Seja (T,μ,η) uma mônada em $\mathcal{C}$ na qual $T(X) = A \otimes X$. Se essa mônada está associada a um monoide $(A,\overline{\mu},\overline{\eta})$, então as categorias $\mathcal{C}^T$ e ${}_A\mathcal{M}$ coincidem.*

Demonstração. Seja $\alpha : T(X) \to X$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Observe que a comutatividade de cada um dos dois diagramas na definição 2.16 corresponde a uma propriedade de módulo. De fato, como no primeiro diagrama,

$$\alpha \circ T(\alpha) = \alpha \circ \mu_A \iff \alpha \circ (A \otimes \alpha) = \alpha \circ (\overline{\mu} \otimes A)$$

e o segundo diagrama já é um dos axiomas de módulo. Além disso, relacionamos um morfismo em $\mathcal{C}^T$ com um morfismo em ${}_A\mathcal{M}$ por

$$f \circ \alpha = \beta \circ T(f) \iff f \circ \alpha = \beta \circ (A \otimes f).$$

Segue daí que cada módulo (M, α) é uma álgebra de Eilenberg-Moore e vice-versa, com um morfismo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ sendo morfismo em ${}_A\mathcal{M}$ se, e somente se, ele o for em $\mathcal{C}^T$. ■

A partir desses resultados, podemos generalizar definições conhecidas sobre monoides para mônadas arbitrárias desde que escrevamos essas definições (ou alguma afirmação equivalente) em termos de T. Nesse caso, propriedades de módulos são escritos em termos da categoria $\mathcal{C}^T$. Faremos isso no capítulo 6.

Terminamos a seção com dois exemplos que serão usados posteriormente.

Exemplo 5.9. *Seja M um monoide em <u>Set</u> com identidade e. Na categoria <u>$Vect_{\mathbb{K}}$</u>, podemos considerar o $\mathbb{K}$-espaço vetorial livre $F(M)$. Lembramos que podemos considerar $F(M)$ como um espaço vetorial que tem M como base. Nesse caso, lembrando do que foi provado no teorema 1.4, definimos as funções $\mu : F(M) \otimes F(M) \to F(M)$ e $\eta : \mathbb{K} \to F(M)$ nas bases. Temos $\mu(m \otimes n) = mn$ para $m, n \in M$ e $\eta(\lambda) = \lambda e$ para $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Observe que

$$\begin{aligned}(\mu \circ (id_{F(M)} \otimes \mu))(m \otimes n \otimes o) &= \mu(m \otimes no) = m(no) = (mn)o \\ &= \mu(mn \otimes o) = (\mu \circ (\mu \otimes id_{F(M)}))(m \otimes n \otimes o).\end{aligned}$$

Temos que as transformações lineares $\mu \circ (id_{F(M)} \otimes \mu)$ e $\mu \circ (\mu \otimes id_{F(M)})$ coincidem na base de $F(M) \otimes F(M) \otimes F(M)$ e disso segue a associatividade de μ. Para mostrar que η é unidade, também usamos a base de $F(M)$ e lembramos que $\eta(1) = 1e = e$.

$$\begin{aligned}\left(\mu \circ (id_{F(M)} \otimes \eta) \circ r^{-1}_{F(M)}\right)(m) &= (\mu \circ (id_{F(M)} \otimes \eta))(m \otimes 1) \\ &= \mu(m \otimes e) = me = m = id_{F(M)}(m); \\ \left(\mu \circ (\eta \otimes id_{F(M)}) \circ l^{-1}_{F(M)}\right)(m) &= (\mu \circ (\eta \otimes id_{F(M)}))(1 \otimes m) \\ &= \mu(e \otimes m) = em = m = id_{F(M)}(m).\end{aligned}$$

Dessas equações, segue que η é, de fato, unidade. Chamamos $(F(M), \mu, \eta)$ de álgebra do monoide M.

Exemplo 5.10. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Intuitivamente, definimos a $\mathbb{K}$-álgebra de Sweedler como uma $\mathbb{K}$-álgebra contendo elementos x e g tais que $x^2 = 0$, $g^2 = 1$ e $xg = -gx$. Além disso, os elementos 1, x, g e gx formam uma base para tal álgebra. Formalmente, seja H o espaço vetorial livremente gerado pelo conjunto $\{1, x, g, y\}$ (aqui, y representa o elemento xg). Definimos uma estrutura de álgebra sobre H com unidade 1 e tal que a multiplicação $\mu : H \otimes H \to H$ é dada na base por*

$$\begin{array}{cccc} 1 \cdot 1 = 1 & 1x = x & 1g = g & 1y = y \\ x1 = x & xx = 0 & xg = y & xy = 0 \\ g1 = g & gx = -y & gg = 1 & gy = -x \\ y1 = 1 & yx = 0 & yg = x & yy = 0 \end{array}$$

Façamos alguma observações sobre essa definição. É imediato que 1 é a unidade da álgebra. Além disso, μ foi definida de forma consistente com as propriedades de álgebra, levando em conta a "definição" $y = xg$. De fato,

- $x(xg) = (xx)g = 0 = xy$;
- $g(xg) = (gx)g = -(xg)g = -x(gg) = -x = gy$;
- $(xg)x = x(gx) = -x(xg) = -(xx)g = 0$;
- $(xg)g = x(gg) = x$;
- $(xg)(xg) = ((xg)x)g = 0$.

Para mostrar a associatividade, basta mostrá-la para todas as ternas de elementos na base. Note que isso é trivial para as ternas contendo o elemento 1. Mostremos a propriedade para as ternas que não contém y. Tal fato pode ser facilmente verificado caso por caso. É útil observar que como $xx = yx = xy = 0$ e $gg = 1$, então todas as ternas como duas ou mais ocorrências de x terão produto igual a 0.

Segue então a associatividade para produtos de x e g com tamanhos arbitrários e como podemos expandir $y = xg$, segue a associatividade de ternas com ocorrências de y. Disso, segue a associatividade de μ.

5.2 COMONOIDES E COÁLGEBRAS

Considere uma categoria monoidal $\mathcal{C}$. Sabemos que um monoide sobre $\mathcal{C}$ pode ser visto como um objeto munido de determinados morfismos. Dualizando esse conceito, isto é, olhando para essa definição na categoria $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, obtemos a definição de um comonoide.

Definição 5.11. *Um <u>comonoide</u> sobre uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ é um objeto C munido de morfismos $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to I$ tais que os seguintes diagramas comutam.*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "id_C \otimes \Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes id_C"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "r_C^{-1}"'] \arrow[dr, "l_C^{-1}"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\
C \otimes I & & I \otimes C \\
& C \otimes C \arrow[ul, "id_C \otimes \varepsilon"] \arrow[ur, "\varepsilon \otimes id_C"'] &
\end{tikzcd}$$

Devido à comutatividade do primeiro diagrama, dizemos que Δ é <u>coassociativa</u>. Devido à comutatividade do segundo diagrama, dizemos que ε é <u>counidade</u> de Δ.

Dados comonoides (C, Δ, ε) e $(C', \Delta', \varepsilon')$, Um <u>morfismo de comonoides</u> é um morfismo $h : C \to C'$ tal que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "h"'] & C \otimes C \arrow[d, "h \otimes h"] \\
C' \arrow[r, "\Delta'"'] & C' \otimes C'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & C' \arrow[dl, "\varepsilon'"] \\
& I &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 5.12. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma coálgebra sobre $\mathbb{K}$ é um comonoide na categoria <u>$Vect_{\mathbb{K}}$</u>. Vejamos como essa definição se aplica nesse caso. Dado $x \in C$, $\Delta(x) \in C \otimes C$. Podemos escrever*

$$\Delta(x) = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} \otimes x_{2i}.$$

É comum o uso da chamada notação de Sweedler, na qual se omitem os índices ou até mesmo o simbolo de somatório. Nesse caso, podemos escrever

$$\Delta(x) = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} \otimes x_{2i} = \sum x_1 \otimes x_2 = x_1 \otimes x_2.$$

É importante lembrar que mesmo com a notação $\Delta(x) = x_1 \otimes x_2$, a expressão à direita da igualdade ainda representa, implicitamente, um somatório. Vejamos então como a coassociatividade e a propriedade da counidade se aplicam nesse caso concreto.

$$(id_C \otimes \Delta) \circ \Delta(x) = (id_C \otimes \Delta)(x_1 \otimes x_2) = x_1 \otimes x_{21} \otimes x_{22}$$
$$(\Delta \otimes id_C) \circ \Delta(x) = (\Delta \otimes id_C)(x_1 \otimes x_2) = x_{11} \otimes x_{12} \otimes x_2$$

Da coassociatividade temos que $x_1 \otimes x_{21} \otimes x_{22} = x_{11} \otimes x_{12} \otimes x_2$.

$$(id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta(x) = (id_C \otimes \varepsilon)(x_1 \otimes x_2) = x_1 \otimes \varepsilon(x_2) = x_1 \varepsilon(x_2) \otimes 1_{\mathbb{K}} = r_C^{-1}(x_1 \varepsilon(x_2))$$
$$(\varepsilon \otimes id_C) \circ \Delta(x) = (\varepsilon \otimes id_C)(x_1 \otimes x_2) = \varepsilon(x_1) \otimes x_2 = 1_k \otimes \varepsilon(x_1)x_2 = l_C^{-1}(\varepsilon(x_1) \otimes x_2)$$

E da counidade temos $x_1 \varepsilon(x_2) = x$ *e* $\varepsilon(x_1)x_2 = x$. *No caso de um morfismo de coálgebra, temos*

$$(h \otimes h) \circ \Delta(c) = (h \otimes h)(c_1 \otimes c_2) = h(c_1) \otimes h(c_2);$$
$$\Delta' \circ h(c) = \Delta'(h(c)) = h(c)_1 \otimes h(c)_2.$$

Concluímos que h ser morfismo de coálgebras é equivalente a

$$h(c_1) \otimes h(c_2) = h(c)_1 \otimes h(c)_2.$$

É interessante analisar o conceito visto na categoria <u>Set</u>.

Exemplo 5.13. *Seja* X *um conjunto. Defina* $\Delta(x) = (x, x)$ *e considerando* $I = \{*\}$, *defina* $\varepsilon(x) = *$. *Temos que* X *é comonoide. De fato,*

$$(id_X \times \Delta) \circ \Delta(x) = (id_X \times \Delta)(x, x) = (x, x, x) = (\Delta \times id_X)(x, x(\Delta \times id_X) \circ \Delta(x);$$
$$(id_X \times \varepsilon) \circ \Delta(x) = (id_X \times \varepsilon)(x, x) = (x, *) = r^{-1}(x);$$
$$(\varepsilon \times id_C) \circ \Delta(x) = (\varepsilon \times id_C)(x, x) = (*, x) = l^{-1}(x).$$

Reciprocamente, suponha que C *seja comonoide. Então claramente,* $\varepsilon(x) = *$, *uma vez que* I *é unitário. Ainda, escreva* $\Delta(x) = (x_1, x_2)$.

$$r_C^{-1}(x) = (id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta(x) = (id_C \otimes \varepsilon)(x_1, x_2) = (x_1, *) = r_C^{-1}(x_1)$$
$$l_C^{-1}(x) = (\varepsilon \otimes id_C) \circ \Delta(x) = (\varepsilon \otimes id_C)(x_1, x_2) = (*, x_2) = l_C^{-1}(x_2)$$

Concluímos que $x_1 = x$ *e* $x_2 = x$, *em outras palavras,* $\Delta(x) = (x, x)$. *Com esse argumento, chegamos a conclusão que cada conjunto* X *admite uma única estrutura de comonoide.*

Exemplo 5.14. *Seja* V *um espaço vetorial e* B *uma base de* V. *Defina* $\Delta : V \to V \otimes V$ *por* $\Delta(e) = e \otimes e$ *e* $\varepsilon : V \to \mathbb{K}$ *por* $\varepsilon(e) = 1$ *para* $e \in B$. *Observe que nesse caso*

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes id_V) \circ \Delta(e) &= (\Delta \otimes id_V)(e \otimes e) = e \otimes e \otimes e \\ &= (id_V \otimes \Delta)(e \otimes e) = (id_V \otimes \Delta) \circ \Delta(e).\end{aligned}$$

Como $(\Delta \otimes id_V) \circ \Delta(e)$ *e* $(id_V \otimes \Delta) \circ \Delta$ *são lineares e* B *é base de* V, *segue que vale a coassociatividade de* Δ.

Por outro lado,

$$l_V \circ (\varepsilon \otimes id_V) \circ \Delta(e) = l_V \circ (\varepsilon \otimes id_V)(e \otimes e) = l_V(\varepsilon(e) \otimes e) = l_V(1 \otimes e) = e;$$
$$r_V \circ (id_V \otimes \varepsilon) \circ \Delta(e) = r_V \circ (id_V \otimes \varepsilon)(e \otimes e) = r_V(e \otimes \varepsilon(e)) = r_V(e \otimes 1) = e.$$

Similarmente ao caso anterior, usamos a linearidade das funções envolvidas junto com o fato de B ser base para concluir que vale a condição da counidade. Segue que (V, Δ, ε) *é coálgebra.*

A relação de comonoides com a teoria apresentada não será dada por meio de mônadas. Seria possível definir comônadas por comonoides em $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ a realizar uma teoria análoga mas usaremos outra abordagem. Precisaremos de uma transformação natural específica na categoria $\underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}$.

Exemplo 5.15. *Defina um funtor* $\boxtimes : \underline{Vect_{\mathbb{K}}} \times \underline{Vect_{\mathbb{K}}} \to \underline{Vect_{\mathbb{K}}}$ *por* $\boxtimes(U, V) = V \otimes U$*. Podemos definir uma família de transformações lineares.* $\tau_{U,V} : U \otimes V \to V \otimes U$ *por* $\tau_{U,V}(u \otimes v) = v \otimes u$*. Mostramos que* τ *é transformação natural de* $\otimes$ *para* $\boxtimes$*.*

Primeiro, provamos que $\tau_{U,V}$ *está bem definida. Considere* $t : U \times V \to V \otimes U$ *na qual* $t(u, v) = v \otimes u$*. Temos*

$$t(\lambda u + u', v) = v \otimes (\lambda u + u') = \lambda(v \otimes u) + v \otimes u' = \lambda t(u, v) + t(u', v);$$
$$t(u, \lambda v + v') = (\lambda v + v') \otimes u = \lambda(v \otimes u) + v' \otimes u = \lambda t(u, v) + t(u, v').$$

Como t é bilinear, temos a extensão linear $\tau_{X,Y} : U \otimes V \to V \otimes U$ *satisfazendo* $\tau_{X,Y}(u \otimes v) = t(u, v) = v \otimes u$*, como desejado. Para mostrar que* τ *é natural, considere* $h : U \to U'$ *e* $g : V \to V'$ *lineares.*

$$\begin{tikzcd} U \otimes V \arrow[r, "\tau_{U,V}"] \arrow[d, "h \otimes g"'] & V \otimes U \arrow[d, "g \otimes h"] \\ U' \otimes V' \arrow[r, "\tau_{U',V'}"'] & V' \otimes U' \end{tikzcd}$$

Temos

$$\tau_{U',V'} \circ (h \otimes g)(u \otimes v) = \tau_{U',V'}(h(u) \otimes g(v)) = g(v) \otimes h(u);$$
$$(g \otimes h) \circ \tau_{U,V}(u \otimes v) = (g \otimes h)(v, u) = g(v) \otimes h(u).$$

Concluímos que τ *é transformação natural.*

Essa transformação natural pode ser generalizada para algumas categorias monoidais. Essas são chamadas de categorias monoidais trançadas e τ é chamada de trança. Não faremos o estudo de tais categorias nesse trabalho, focando no caso $\underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}$.

Considere o funtor $T(V) = C \otimes V$ na categoria $\underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}$. A comultiplicação de C nos dá um morfismo linear $\Delta : C \to C \otimes C$. Podemos obter a partir de Δ um morfismo $\varphi_{U,V} : T(U \otimes V) \to T(U) \otimes T(V)$ por

$$\varphi_{U,V}(c \otimes u \otimes v) = c_1 \otimes u \otimes c_2 \otimes v = (\mathrm{id}_C \otimes \tau_{C,V} \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}_U \otimes \mathrm{id}_V)(c \otimes u \otimes v).$$

Além disso, a counidade $\varepsilon : C \to I$ resulta em um morfismo $\varphi_0 = \varepsilon \circ r_I : T(I) \to I$. Mais explicitamente, $\varphi_0(c \otimes 1_{\mathbb{K}}) = \varepsilon(c)$. Observe a semelhança entre isso e a definição 1.27. De fato:

Teorema 5.16. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo, C um objeto de $\underline{Vect}_{\mathbb{K}}$ e T o funtor definido por $T(X) = C \otimes X$. Então existe uma bijeção entre estruturas opmonoidais sobre o funtor T e $\mathbb{K}$-coálgebras.*

Demonstração. Considere um comonoide (C, Δ, ε). Defina

$$\begin{aligned}\varphi_{U,V} &= (\mathrm{id}_C \otimes \tau_{C,V} \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}_U \otimes \mathrm{id}_V);\\ \varphi_0 &= \varepsilon \circ r_I\end{aligned}$$

Mostramos que (T, φ, φ_0) é opmonoidal.

$$\begin{aligned}((T(\mathrm{id}_U) \otimes \varphi_{V,W}) \circ \varphi_{U,V\otimes W})(c \otimes u \otimes v \otimes w) &= (T(\mathrm{id}_U) \otimes \varphi_{V,W})(c_1 \otimes u \otimes c_2 \otimes v \otimes w)\\ &= c_1 \otimes u \otimes c_{21} \otimes v \otimes c_{22} \otimes w\\ ((\varphi_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W) \circ \varphi_{U\otimes V,W})(c \otimes u \otimes v \otimes w) &= ((\varphi_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W)(c_1 \otimes u \otimes v \otimes c_2 \otimes w)\\ &= c_{11} \otimes u \otimes c_{12} \otimes v \otimes c_2 \otimes w\end{aligned}$$

Segue da coassociatividade de Δ que φ satisfaz a propriedade desejada.

$$\begin{aligned}((\varphi_0 \otimes \mathrm{id}_{T(V)}) \circ \varphi_{I,V})(c \otimes 1_{\mathbb{K}} \otimes v) &= (\varphi_0 \otimes \mathrm{id}_{T(V)})(c_1 \otimes 1_{\mathbb{K}} \otimes c_2 \otimes v) = \varepsilon(c_1) \otimes c_2 \otimes v\\ &= 1_{\mathbb{K}} \otimes \varepsilon(c_1)c_2 \otimes v = 1_{\mathbb{K}} \otimes c \otimes v =\\ &(l^{-1}_{C\otimes V} \circ (\mathrm{id}_C \otimes l_V))(c \otimes 1_{\mathbb{K}} \otimes v)\end{aligned}$$

Segue que $(\varphi_0 \otimes \mathrm{id}_{T(V)}) \circ \varphi_{I,V} = l^{-1}_{C\otimes V} \circ (\mathrm{id}_C \otimes l_V)$ e analogamente para o outro diagrama. Obtemos que (T, φ, φ_0) é funtor opmonoidal.

Reciprocamente, suponha que (T, φ, φ_0) seja funtor opmonoidal. Observe que um elemento de um espaço vetorial da forma $V \otimes I$ é escrito como $\sum v_i \otimes \lambda_i = \sum \lambda_i v_i \otimes 1_{\mathbb{K}}$. Isso se dá devido à aplicação de $r_V^{-1} \circ r_V = \mathrm{id}_{V\otimes I}$. Uma situação análoga ocorre para espaços evolvendo tensorização por I.

Em particular, escreva $\varphi_{I,I}(c \otimes 1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}}) = \sum d_i \otimes 1_{\mathbb{K}} \otimes e_i \otimes 1_{\mathbb{K}}$. Fazemos uma adaptação da notação de Sweedler, obtendo $\varphi_{I,I}(c \otimes 1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}}) = c_1 \otimes 1_{\mathbb{K}} \otimes c_2 \otimes 1_{\mathbb{K}}$ como abreviação do somatório. Defina

$$\Delta(c) = c_1 \otimes c_2 = (r_C \otimes r_C)(c_1 \otimes 1_{\mathbb{K}} \otimes c_2 \otimes 1_{\mathbb{K}}) = (r_C \otimes r_C) \circ \varphi_{I,I}(c \otimes 1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}}).$$

Além disso, defina $\varepsilon(c) = \varphi_0(c\otimes 1_{\mathbb{K}})$. Observaremos o que T ser funtor monoidal representa nesse caso particular.

$$\begin{aligned}
((T(I)\otimes\varphi_{I,I})\circ\varphi_{I,I\otimes I})(c\otimes 1_{\mathbb{K}}\otimes 1_{\mathbb{K}}\otimes 1_{\mathbb{K}}) &= (T(I)\otimes\varphi_{I,I})(c_1\otimes 1_{\mathbb{K}}\otimes c_2\otimes 1_{\mathbb{K}}\otimes 1_{\mathbb{K}})\\
&= c_1\otimes 1_{\mathbb{K}}\otimes c_{21}\otimes 1_{\mathbb{K}}\otimes c_{22}\otimes 1_{\mathbb{K}}\\
((\varphi_{I,I}\otimes \mathrm{id}_I)\circ\varphi_{I\otimes I,I})(c\otimes 1_{\mathbb{K}}\otimes 1_{\mathbb{K}}\otimes 1_{\mathbb{K}}) &= (\varphi_{I,I}\otimes \mathrm{id}_{T(I)})(c_1\otimes 1_{\mathbb{K}}\otimes 1_{\mathbb{K}}\otimes c_2\otimes 1_{\mathbb{K}})\\
&= c_{11}\otimes 1_{\mathbb{K}}\otimes c_{12}\otimes 1_{\mathbb{K}}\otimes c_2\otimes 1_{\mathbb{K}}
\end{aligned}$$

Segue que $c_1\otimes c_{21}\otimes c_{22} = c_{11}\otimes c_{12}\otimes c_2$ e portanto Δ é coassociativa. No caso dos outros dois diagramas,

$$\begin{aligned}
((\varphi_0\otimes \mathrm{id}_{T(I)})\circ\varphi_{I,I})(c\otimes 1_{\mathbb{K}}\otimes 1_{\mathbb{K}}) &= (\varphi_0\otimes \mathrm{id}_{T(I)})(c_1\otimes 1_{\mathbb{K}}\otimes c_2\otimes 1_{\mathbb{K}})\\
&= \varepsilon(c_1)\otimes c_2\otimes 1_{\mathbb{K}}\\
&= 1_{\mathbb{K}}\otimes \varepsilon(c_1)c_2\otimes 1_{\mathbb{K}}\\
((\mathrm{id}_{T(I)}\otimes\varphi_0)\circ\varphi_{I,I})(c\otimes 1_{\mathbb{K}}\otimes 1_{\mathbb{K}}) &= (\mathrm{id}_{T(I)}\otimes\varphi_0)(c_1\otimes 1_{\mathbb{K}}\otimes c_2\otimes 1_{\mathbb{K}})\\
&= c_1\otimes 1_{\mathbb{K}}\otimes\varepsilon(c_2)\\
&= c_1\varepsilon(c_2)\otimes 1_{\mathbb{K}}\otimes 1_{\mathbb{K}}
\end{aligned}$$

Concluímos que $\varepsilon(c_1)c_2 = c_1\varepsilon(c_2) = c$. ■

Ainda, podemos caracterizar as transformações lineares $h : C \to C'$ que são morfismos de coálgebras dentro do contexto funtorial.

Teorema 5.17. *Considere coálgebras C e C' com funtores opmonoidais $(T = C\otimes\_\_, \varphi, \varphi_0)$ e $(T' = C'\otimes\_\_, \varphi', \varphi'_0)$ associados. Temos que $h : C \to C'$ linear é morfismo de coálgebras se, e somente se, $\alpha_V : C\otimes V \to C'\otimes V$ dada por $\alpha_V = h\otimes id_V$ define uma transformação natural opmonoidal $\alpha : T \Rightarrow T'$. (definição 1.30).*

Demonstração. Calculamos cada caminho dos diagramas relevantes na definição 1.30.

$$\begin{aligned}
\varphi'_{U,V}\circ\alpha_{U\otimes V}(c\otimes u\otimes v) &= \varphi'_{U,V}(h(c)\otimes u\otimes v) = h(c)_1\otimes u\otimes h(c)_2\otimes v;\\
(\alpha_U\otimes\alpha_V)\circ\varphi_{U,V}(c\otimes u\otimes v) &= (\alpha_U\otimes\alpha_V)(c_1\otimes u\otimes c_2\otimes v) = h(c_1)\otimes u\otimes h(c_2)\otimes v;\\
\varphi'_0\circ\alpha_{\mathbb{K}}(c\otimes\lambda) &= \varphi'_0(h(c)\otimes\lambda) = \varepsilon(h(c))\otimes\lambda;\\
\varphi_0(c\otimes\lambda) &= \varepsilon(c)\otimes\lambda.
\end{aligned}$$

Se h é morfismo de coálgebras, então fica claro que

$$h(c)_1\otimes u\otimes h(c)_2\otimes v = h(c_1)\otimes u\otimes h(c_2)\otimes v$$

e que

$$\varepsilon(h(c))\otimes\lambda = \varepsilon(c)\otimes\lambda.$$

Segue disso que os diagramas de transformação natural opmonoidal na definição 1.30 comutam.

Reciprocamente, suponha que tais diagramas comutem. Aplicando a comutatividade do quadrado em $U = V = \mathbb{K}$ e $u = v = 1$ obtemos

$$h(c)_1 \otimes 1 \otimes h(c)_2 \otimes 1 = h(c_1) \otimes 1 \otimes h(c_2) \otimes 1.$$

Segue disso que $h(c)_1 \otimes h(c)_2 = h(c_1) \otimes h(c_2)$. Por outro lado, $\varepsilon(h(c)) \otimes \lambda = \varepsilon(c) \otimes \lambda$ segue da comutatividade do triângulo. Concluímos que h é morfismo de coálgebras. ■

5.3 BIÁLGEBRAS

Se temos um espaço vetorial H munido simultaneamente de uma estrutura de álgebra e uma de coálgebra, podemos fazer a seguinte pergunta: quando essas estruturas podem ser consideradas compatíveis? Para esse fim, damos dois novos exemplos, um de álgebra e um de coálgebra.

Exemplo 5.18. *Sejam (A, μ_A, η_A) e (B, μ_B, η_B) álgebras com unidades $1_A = \eta_A(1_{\mathbb{K}})$ e $1_B = \eta_B(1_{\mathbb{K}})$. Definimos uma estrutura de álgebra sobre $A \otimes B$. A multiplicação é dada por $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$ e definimos a unidade dessa álgebra por $1_A \otimes 1_B$.*

Note que $\mu = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (id_A \otimes \tau_{B,A} \otimes id_B)$. Segue disso que μ é transformação linear. Além disso,

$$\begin{aligned}\left[(a \otimes b)(a' \otimes b')\right](a'' \otimes b'') &= (aa' \otimes bb')(a'' \otimes b'') = (aa'a'' \otimes bb'b'') \\ &= (a \otimes b)(a'a'' \otimes b'b'') = (a \otimes b)\left[(a' \otimes b')(a'' \otimes b'')\right],\end{aligned}$$

mostrando que a operação é associativa. Finalmente,

$$(a \otimes b)(1_A \otimes 1_B) = a1_A \otimes b1_B = a \otimes b = 1_A a \otimes 1_B b = (1_A \otimes 1_B)(a \otimes b),$$

isto é, $1_A \otimes 1_B$ é unidade de $A \otimes B$.

Observamos que a definição de μ pode ser utilizada no caso mais geral de categorias monoidais trançadas, obtendo o resultado análogo nelas. A igualdade também nos motiva a realizar a definição análoga no caso de coálgebras quando considerado que $\eta = (\eta_A \otimes \eta_B) \circ r_I^{-1}$. Vale a mesma observação feita aqui a respeito de categorias monoidais trançadas.

Exemplo 5.19. *Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ coálgebras. Então podemos definir uma coálgebra $(C \otimes D, \Delta, \varepsilon)$ da seguinte forma:*

$$\begin{aligned}&\Delta(c \otimes d) = c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2 = (id_C \otimes \tau_{D,C} \otimes id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)(c \otimes d); \\ &\varepsilon(c \otimes d) = \varepsilon_C(c)\varepsilon_D(d) = r_I \circ (\varepsilon_C(c) \otimes \varepsilon_D(d)).\end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes id_{C\otimes D})(\Delta(c \otimes d)) &= (\Delta \otimes id_{C\otimes D})(c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2)\\ &= c_{11} \otimes d_{11} \otimes c_{12} \otimes d_{12} \otimes c_2 \otimes d_2\\ &= c_1 \otimes d_1 \otimes c_{21} \otimes d_{21} \otimes c_{22} \otimes d_{22}\\ &= (id_{C\otimes D} \otimes \Delta)(c_1 \otimes c_1 \otimes c_2 \otimes d_2) = (id_{C\otimes D} \otimes \Delta)(\Delta(c \otimes d)).\end{aligned}$$

Além disso,

$$\varepsilon(c_1 \otimes d_1)(c_2 \otimes d_2) = \varepsilon_C(c_1)\varepsilon_D(d_1)(c_2 \otimes d_2) = \varepsilon_C(c_1)c_2 \otimes \varepsilon_D(d_1)d_2 = c \otimes d;$$
$$(c_1 \otimes d_1)\varepsilon(c_2 \otimes d_2) = (c_1 \otimes d_1)\varepsilon_C(c_2)\varepsilon_D(d_2) = c_1\varepsilon_C(c_2) \otimes d_1\varepsilon_D(d_2) = c \otimes d.$$

Segue que $C \otimes D$ é coálgebra.

Suponha agora que (H, μ, η) e (H, Δ, ε) sejam, respectivamente, álgebra e coálgebra. Temos duas possíveis forma de compatibilizar essas estruturas:

1. $\mu : H \otimes H \to H$ e $\eta : \mathbb{K} \to H$ são morfismos de coálgebra.
2. $\Delta : H \to H \otimes H$ e $\varepsilon : H \to \mathbb{K}$ são morfismos de álgebra.

Essas duas são equivalentes, como mostrado abaixo. Lembramos antes que em $\mathbb{K}$, temos estruturas naturais de álgebra e de coálgebra dadas por

$$\begin{aligned}\mu(\lambda \otimes \kappa) &= \lambda\kappa;\\ \eta(\lambda) &= \lambda;\\ \Delta(\lambda) &= \lambda \otimes 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} \otimes \lambda;\\ \varepsilon(\lambda) &= \lambda.\end{aligned}$$

Teorema 5.20. *Seja H um espaço vetorial que possui uma estrutura de álgebra e uma de coálgebra. Então μ e η são morfismos de coálgebra se, e somente se Δ e ε são morfismos de álgebra.*

Demonstração. Começamos estudando cada uma das afirmações relevantes. μ é morfismo de coálgebra se, e somente se,

$$\Delta(ab) = \Delta(\mu(a \otimes b)) = \mu(\Delta(a) \otimes \Delta(b)) = \mu((a_1 \otimes a_2) \otimes (b_1 \otimes b_2)) = a_1b_1 \otimes a_2b_2; \quad (20)$$
$$\varepsilon(ab) = \varepsilon(\mu(a \otimes b)) = \varepsilon(a \otimes b) = \varepsilon(a)\varepsilon(b). \quad (21)$$

η é morfismo de coálgebra se, e somente se,

$$\Delta(1_H) = \Delta(\eta(1_{\mathbb{K}})) = (\eta \otimes \eta)(\Delta(1_{\mathbb{K}})) = \eta(1_{\mathbb{K}}) \otimes \eta(1_{\mathbb{K}}) = 1_H \otimes 1_H; \quad (22)$$
$$\varepsilon(1_H) = \varepsilon(\eta(1_{\mathbb{K}})) = \varepsilon(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}} \quad (23)$$

Δ é morfismo de álgebra se, e somente se,

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b) = (a_1 \otimes a_2)(b_1 \otimes b_2) = a_1b_1 \otimes a_2b_2; \tag{24}$$

$$\Delta(1_H) = 1_{H\otimes H} = 1_H \otimes 1_H. \tag{25}$$

ε é morfismo de álgebra se, e somente se,

$$\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b); \tag{26}$$

$$\varepsilon(1_H) = 1_{\mathbb{K}}. \tag{27}$$

Observe que há uma correspondência entre as quatro primeiras e as quatro últimas equações. Mais precisamente, (20) $\iff$ (24), (21) $\iff$ (26), (22) $\iff$ (25) e (23) $\iff$ (27). ∎

Definição 5.21. *Uma biálgebra é uma estrutura $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ na qual (H, μ, η) é uma álgebra, (H, Δ, ε) é uma coálgebra e valem as condições do teorema 5.20. Um morfismo de biálgebras é uma transformação linear que é simultaneamente um morfismo de álgebras e de coálgebras.*

Exemplo 5.22. *Seja M um monoide em Set e considere a álgebra do monoide M dada no exemplo 5.9. Além disso, considere a estrutura de coálgebra sobre $F(M)$ dada pelo exemplo 5.14 quando fixada a base M de $F(M)$. Mostramos que $(F(M), \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ é biálgebra. De fato,*

$$\varepsilon(mn) = 1 = 1 \cdot 1 = \varepsilon(m)\varepsilon(n);$$
$$\varepsilon(e) = 1,$$

logo ε é morfismo de álgebras. Ainda,

$$\Delta(mn) = (mn) \otimes (mn) = (m \otimes m)(n \otimes n) = \Delta(m)\Delta(n).$$

Falta mostrar que Δ leva unidade em unidade. De fato, $\Delta(e) = e \otimes e$, provando que Δ é morfismo de álgebras, e logo, $F(M)$ possui estrutura de biálgebra.

Exemplo 5.23. *Considere a $\mathbb{K}$-álgebra de Sweedler H dada no exemplo 5.10. Definimos uma estrutura da coálgebra sobre H da seguinte forma:*

- $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, $\varepsilon(1) = 1_{\mathbb{K}}$;
- $\Delta(x) = (x \otimes 1) + (g \otimes x)$, $\varepsilon(x) = 0_{\mathbb{K}}$;
- $\Delta(g) = g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1_{\mathbb{K}}$;
- $\Delta(y) = (y \otimes g) + (1 \otimes y)$, $\varepsilon(y) = 0$.

Observamos que as definições para 1 *e* y *são dadas tal que* Δ *e* ε *sejam multiplicativas e levem unidade em unidade, levando em conta que* $y = xg$*. Em particular,* $\Delta(y) = \Delta(x)\Delta(g)$*, isto é,*

$$y_1 \otimes y_2 = (x_1 \otimes x_2)(g_1 \otimes g_2) = (x_1g_1) \otimes (x_2g_2).$$

Mostramos então que Δ *é coassociativa. Fazemos isso mostrando que para cada* $z \in \{1, x, g, y\}$ *temos* $\Delta(z_1) \otimes z_2 = z_1 \otimes \Delta(z_2)$*. Isso é trivial para* $z = 1$ *e* $z = g$*. Para* $z = x$ *temos*

$$(\Delta(x) \otimes 1) + (\Delta(g) \otimes x) = (x \otimes 1 \otimes 1) + (g \otimes x \otimes 1) + (g \otimes g \otimes x) = (x \otimes \Delta(1)) + (g \otimes \Delta(x)).$$

Para y*, podemos usar a coassociatividade em* x *e* g *junto com a multiplicatividade de* Δ*.*

$$\begin{aligned}\Delta(y_1) \otimes y_2 &= (\Delta(x_1g_1)) \otimes (x_2g_2) = (\Delta(x_1) \otimes x_2)(\Delta(g_1) \otimes g_2)\\ &= (x_1 \otimes \Delta(x_2))(g_1 \otimes \Delta(g_2)) = (x_1g_1) \otimes (\Delta(x_2g_2)) = y_1 \otimes \Delta(y_2)\end{aligned}$$

Disso tudo, segue que Δ *é coassociativa. Que* ε *é counidade de* Δ *segue por um argumento similar, mostrando que* $\varepsilon(z_1)z_2 = z = z_1\varepsilon(z_2)$ *para qualquer* $z \in \{1, x, g, y\}$*. Essa biálgebra é chamada de biálgebra de Sweedler.*

No contexto funtorial, seja $T(V) = H \otimes V$ com H biálgebra. Então T é uma mônada e existe uma estrutura opmonoidal sobre T. Encontraremos condições sobre T que sejam equivalentes à compatibilidade. Uma das compatibilidades é que a estrutura de álgebra seja formada por morfismos de coálgebra. A ideia do teorema a seguir será considerar quando a estrutura da mônada respeita a estrutura opmonoidal. Como uma mônada é formada por transformações naturais, é intuitivo considerar que respeitar a estrutura nesse caso signifique dizer que tais transformações naturais são opmonoidais.

Teorema 5.24. *Considere uma álgebra* $(H, \overline{\mu}, \overline{\eta})$*, uma coálgebra* (H, Δ, ε) *e o funtor* $T(V) = H \otimes V$*. Então* $(H, \overline{\mu}, \overline{\eta}, \Delta, \varepsilon)$ *é biálgebra se, e somente se, as transformações naturais* $\mu : T^2 \Rightarrow T$ *e* $\eta : id_T \Rightarrow T$ *da mônada associada à álgebra* H *forem opmonoidais.*

Demonstração. H é biálgebra se, e somente se, $\overline{\mu}$ e $\overline{\eta}$ são morfismos de coálgebra. Pelo teorema 5.17, isso é equivalente a $\overline{\mu} \otimes V$ e $\overline{\eta} \otimes V$ serem transformações naturais opmonoidais. Mas essas são precisamente as expressões das componentes μ e η da mônada, provando o teorema. ■

Considere H uma biálgebra e módulos (M, α) e (N, β) sobre H (ou mais corretamente, sobre a estrutura de álgebra que H possui). Como H é uma coálgebra, existe uma transformação natural $\varphi : T(\_\_ \otimes \_\_) \Rightarrow T(\_\_) \otimes T(\_\_)$ que provem da opmonoidalidade de T. Podemos considerar a seguinte função $\gamma : A \otimes M \otimes N \to M \otimes N$:

$$\gamma(a \otimes m \otimes n) = \alpha(a_1 \otimes m) \otimes \beta(a_2 \otimes n) = \left((\alpha \otimes \beta) \circ \varphi_{M,N}\right)(a \otimes m \otimes n).$$

Como provaremos abaixo, γ resulta em um módulo sobre $M \otimes N$. Disso, obtemos que se H é álgebra, então cada estrutura de coálgebra compatível induz estruturas de módulo no produto tensorial e ainda, isso torna ${}_H\mathcal{M}$ uma categoria monoidal. Veremos no mesmo teorema que a recíproca também é verdadeira.

Teorema 5.25. *Seja H uma álgebra. Então existe uma bijeção entre as estruturas de coálgebra sobre H compatíveis com a estrutura de álgebra dada e estruturas monoidais sobre ${}_H\mathcal{M}$ tal que*

1. *Se (M, α) e (N, β) são H-módulos, então $(M, \alpha) \otimes (N, \beta)$ tem $M \otimes N$ como espaço vetorial base;*
2. *O objeto identidade de ${}_H\mathcal{M}$ é da forma $(\mathbb{K}, e)$ para alguma ação $e : H \otimes \mathbb{K} \to \mathbb{K}$;*
3. *Para todo H-módulo (M, α), l_M e r_M são morfismos de H-módulos;*
4. *Se L, M e N possuem uma estrutura de H-módulo, então $a_{L,M,N}$ é morfismo de H-módulos.*

Demonstração. Considere uma estrutura de coálgebra sobre H. Podemos definir uma estrutura monoidal sobre ${}_H\mathcal{M}$ da seguinte forma. Dados módulos (M, α) e (N, β), defina

$$(M, \alpha) \otimes (N, \beta) = \left(N \otimes M, (\alpha \otimes \beta) \circ \varphi_{M,N}\right).$$

Mostramos que esse produto tensorial está bem definido provando que o resultado obtido é um H-módulo. Seja $\gamma = (\alpha \otimes \beta) \circ \varphi_{M,N} \circ \overline{\mu}(x \otimes y \otimes m \otimes n)$. Então

$$\begin{aligned}
\gamma \circ \left(\overline{\mu} \otimes \mathrm{id}_{M \otimes N}\right)(x \otimes y \otimes m \otimes n) &= (\alpha \otimes \beta) \circ \varphi_{M,N}(xy \otimes m \otimes n) \\
&= \alpha\left((xy)_1 \otimes m\right) \otimes \beta\left((xy)_2 \otimes n\right); \\
\gamma \circ (\mathrm{id}_H \otimes \gamma)(x \otimes y \otimes m \otimes n) &= \gamma(x \otimes \alpha(y_1 \otimes m) \otimes \beta(y_2 \otimes n)) \\
&= \alpha(x_1 \otimes \alpha(y_1 \otimes m)) \otimes \beta(x_2 \otimes \beta(y_2 \otimes n)) \\
&= \alpha(x_1 y_1 \otimes m) \otimes \beta(x_2 y_2 \otimes n).
\end{aligned}$$

Como Δ é morfismo de álgebras, as duas expressões são, de fato, iguais. Ainda,

$$\gamma \circ \left(\overline{\eta} \otimes \mathrm{id}_{M \otimes N}\right)(\lambda \otimes m \otimes n) = \gamma(1_H \otimes m \otimes n) = \alpha(1_H \otimes m) \otimes \beta(1_H \otimes n) = m \otimes n.$$

Como $\otimes$ precisa ser um funtor, mostramos que o produto tensorial em $\underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}$ de morfismos de módulos também é morfismo de módulos. É claro que $g \otimes h$ é linear. Para mostrar que é morfismo de módulos,

$$\begin{aligned}
(g \otimes h) \circ \gamma(x \otimes m \otimes n) &= (g \otimes h)(\alpha(x_1 \otimes m) \otimes \beta(x_2 \otimes n)) \\
&= (g \circ \alpha(x_1 \otimes m)) \otimes (h \circ \beta(x_2 \otimes n)) \\
&= \big(\alpha'(x_1 \otimes g(m))\big) \otimes \big(\beta'(x_2 \otimes h(n))\big)\ ; \\
\gamma' \circ (\mathrm{id}_H \otimes g \otimes h)(x \otimes m \otimes n) &= \gamma'(x \otimes g(m) \otimes h(n)) \\
&= \alpha'(x_1 \otimes g(m)) \otimes \beta'(x_2 \otimes h(m)).
\end{aligned}$$

A igualdade que precisamos segue de g e h morfismos de módulos. Ainda, podemos considerar $e = \varphi_0 : H \otimes \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ tal como na estrutura opmonoidal de H, garantida pelo teorema 5.24. Temos que φ_0 é ação pois

$$\begin{aligned}
\varphi_0 \circ (\overline{\mu} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{K}})\,(x \otimes y \otimes \lambda) &= \varphi_0(xy \otimes \lambda) = \varepsilon(xy)\lambda = \varepsilon(x)\varepsilon(y)\lambda; \\
\varphi_0 \circ (\mathrm{id}_H \otimes \varphi_0)\,(x \otimes y \otimes \lambda) &= \varphi_0(x \otimes \varepsilon(y)\lambda) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)\lambda; \\
\varphi_0 \circ (\overline{\eta} \otimes \lambda)\,(\kappa \otimes \lambda) &= \varphi_0(\kappa 1_H \otimes \lambda) = \varepsilon(\kappa 1_H)\lambda = \kappa\lambda.
\end{aligned}$$

Isso nos dá um H-módulo sobre $\mathbb{K}$, que é o objeto identidade em ${}_H\mathcal{M}$. Agora mostramos que l, r e a tem morfismos de H-módulos como componentes. Temos

$$\begin{aligned}
r_M(x \triangleright (m \otimes \lambda)) &= r_M((x_1 \triangleright m) \otimes (x_2 \triangleright \lambda)) = r_M((x_1 \triangleright m) \otimes \varepsilon(x_2)\lambda) \\
&= \varepsilon(x_2)\lambda x_1 \triangleright m = \lambda x \triangleright m = x \triangleright (\lambda m) = x \triangleright r_M(m \otimes \lambda)
\end{aligned}$$

e analogamente para l_M. Finalmente,

$$\begin{aligned}
a_{L,M,N}(x \triangleright ((l \otimes m) \otimes n)) &= a_{L,M,N}((x_1 \triangleright (l \otimes m)) \otimes (x_2 \triangleright n)) \\
&= a_{L,M,N}(((x_{11} \triangleright l) \otimes (x_{12} \triangleright m)) \otimes (x_2 \triangleright n)) \\
&= (x_{11} \triangleright l) \otimes ((x_{12} \triangleright m) \otimes (x_2 \triangleright n)) \\
&= (x_1 \triangleright l) \otimes ((x_{21} \triangleright m) \otimes (x_{22} \triangleright n)) \\
&= (x_1 \triangleright l) \otimes (x_2 \triangleright (m \otimes n)) = x \triangleright (l \otimes (m \otimes n)) \\
&= x \triangleright (a_{L,M,N}((l \otimes m) \otimes n)).
\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que temos uma estrutura monoidal sobre ${}_H\mathcal{M}$ para alguma álgebra H nas condições do enunciado. Em particular, temos um módulo $(\mathbb{K}, e)$ com $e : H \otimes \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Ainda, como H é um H-módulo, temos um módulo $(H \otimes H, D)$ no qual $D : H \otimes H \otimes H \to H \otimes H$. Defina

$$\Delta = D \circ (\mathrm{id}_H \otimes \overline{\eta} \otimes \overline{\eta}) \circ r_{H\otimes\mathbb{K}}^{-1} \circ r_H^{-1},$$

em outras palavras, $\Delta(h) = D(h \otimes 1_H \otimes 1_H) = h \triangleright (1_H \otimes 1_H)$. Ainda, defina $\varepsilon = e \circ r_H^{-1}$, isto é, $\varepsilon(h) = e(h \otimes 1_{\mathbb{K}}) = h \triangleright 1_{\mathbb{K}}$. Mostramos que H é biálgebra com a estrutura dada. Como $\Delta : H \to H \otimes H$ é transformação linear, usamos uma notação de Sweedler e denotamos $\Delta(h) = h_1 \otimes h_2$.

Demonstramos uma propriedade auxiliar: Dados H-módulos M e N, temos

$$x \triangleright (m \otimes n) = (x_1 \triangleright m) \otimes (x_2 \triangleright n).$$

De fato, usamos os morfismo de módulos ρ dados no teorema 1. Temos $\rho_m^M(x) = x \triangleright m$ e $\rho_n^N(x) = x \triangleright n$. Disso,

$$\begin{aligned}(x_1 \triangleright m) \otimes (x_2 \triangleright n) &= \rho_m^M(x_1) \otimes \rho_n^N(x_2) = (\rho_m^M \otimes \rho_n^N)(x_1 \otimes x_2) = (\rho_m^M \otimes \rho_n^N)(x \triangleright (1_H \otimes 1_H)) \\ &= x \triangleright ((\rho_m^M \otimes \rho_n^N)(1_H \otimes 1_H)) = x \triangleright (\rho_m^M(1_H) \otimes \rho_n^N(1_H)) \\ &= x \triangleright ((1_H \triangleright m) \otimes (1_H \triangleright n)) = x \triangleright (m \otimes n).\end{aligned}$$

Para mostrar que Δ é coassociativa, usamos que o associador é morfismo de H-módulos. Lembrando que $x_1 \otimes x_2 = x \triangleright (1_H \otimes 1_H)$, temos

$$\begin{aligned}a_{H,H,H} \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}_H)(x_1 \otimes x_2) &= a_{H,H,H}((x_{11} \otimes x_{12}) \otimes x_2) \\ &= a_{H,H,H}((x_1 \triangleright (1_H \otimes 1_H)) \otimes (x_2 \triangleright 1_H)) \\ &= a_{H,H,H}(x \triangleright ((1_H \otimes 1_H) \otimes 1_H)) \\ &= x \triangleright a_{H,H,H}((1_H \otimes 1_H) \otimes 1_H) \\ &= x \triangleright (1_H \otimes (1_H \otimes 1_H)) \\ &= (x_1 \triangleright 1_H) \otimes (x_2 \triangleright (1_H \otimes 1_H)) \\ &= (x_1 \triangleright 1_H) \otimes ((x_{21} \otimes 1_H) \otimes (x_{22} \otimes 1_H)) \\ &= x_1 \otimes (x_{21} \otimes x_{22}) = (\mathrm{id}_H \otimes \Delta)(x_1 \otimes x_2).\end{aligned}$$

Ainda, usando que r e l tem morfismos de H-módulos como componentes, obtemos o axioma da counidade:

$$\begin{aligned}\varepsilon(x_1)x_2 &= l_H(\varepsilon(x_1) \otimes x_2) = l_H((x_1 \triangleright 1_{\mathbb{K}}) \otimes (x_2 \triangleright 1_H)) \\ &= l_H(x \triangleright (1_{\mathbb{K}} \otimes 1_H)) = x \triangleright l_H(1_{\mathbb{K}} \otimes 1_H) = x \triangleright 1_H = x.\end{aligned}$$

O caso $x_1 \varepsilon(x_2) = x$ é análogo, utilizando r_H. Agora provamos que Δ é morfismo de álgebras. Para mostrar que Δ é multiplicativa,

$$\Delta(xy) = (xy) \triangleright (1_H \otimes 1_H) = x \triangleright (y \triangleright (1_H \otimes 1_H)) = x \triangleright (y_1 \otimes y_2) = x_1 y_1 \otimes x_2 y_2.$$

Além disso, $\Delta(1_H) = 1_H \triangleright (1_H \otimes 1_H) = 1_H \otimes 1_H$. Finalmente, mostramos que ε é morfismo de álgebras. Por um lado,

$$\begin{aligned}\varepsilon(xy) &= (xy) \triangleright 1_H = x \triangleright (y \triangleright 1_{\mathbb{K}}) = x \triangleright \varepsilon(y) \\ &= x \triangleright (\varepsilon(y)1_{\mathbb{K}}) = \varepsilon(y)(x \triangleright 1_{\mathbb{K}}) = \varepsilon(y)\varepsilon(x) = \varepsilon(x)\varepsilon(y).\end{aligned}$$

Por outro lado, $\varepsilon(1_H) = 1_H \triangleright 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}}$. Disso, segue que H é biálgebra. ∎

Observe que os itens no teorema são equivalentes a dizer que cada componente da estrutura monoidal de ${}_H\mathcal{M}$ é um levantamento do correspondente em $\underline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{K}}$. Essa correspondência será dada em mais detalhes quando falarmos de bimônadas.

5.4 CATEGORIAS FECHADAS

Faremos uma digressão para falar sobre categorias fechadas. O motivo dessa discussão é utilizar tais conceitos para generalizar álgebras de Hopf (que definiremos na seção 5.5) para um contexto funtorial. Começaremos a discussão com alguns exemplos.

Exemplo 5.26. *Considere a categoria monoidal* Set *dos conjuntos. Dada uma função $f : X \times Y \to Z$, podemos gerar uma família $f_X : Y \to Z$ de funções definidas por $f_X(y) = f(x, y)$. Mais ainda, cada família dessa forma gera uma função f apropriada, isto é, temos uma bijeção entre $Hom(X \times Y, Z)$ e $Hom(X, Hom(Y, Z))$. Note que é possível escrever o segundo conjunto pois $Hom(Y, Z)$ é um objeto de* Set*. Fixado Y, denote a bijeção mencionada anteriormente por $\Phi_{Z,X} : Hom(X \times Y, Z) \to Hom(X, Hom(Y, Z))$.*

Como sugerido pela notação, temos uma adjunção. Para entendê-la, observe que o funtor cartesiano levando X em $X \times Y$ aparece no domínio. Por outro lado, temos um funtor levando Z em $Hom(Y, Z)$. Denotaremos esse funtor por $[Y, \_\_]$. Já sabemos como esse funtor se comporta nos objetos. Nos morfismos, se $h : Z \to Z'$ é uma função, então $[Y, h] : Hom(Y, Z) \to Hom(Y, Z')$ é definido por $[Y, h](f) = h \circ f$ para toda $f : Y \to Z$. Temos então que $\Phi_{Z,X} : Hom(X \times Y, Z) \to Hom(X, [Y, Z])$.

Para mostrar a naturalidade, usamos o teorema 2.2. Considere inicialmente uma função $g : Z \to Z'$ e $h : X \times Y \to Z$. Então

$$\left(\left(\Phi_{Z',X}(g \circ h)\right)(x)\right)(y) = ((g \circ h)_X)(y) = g \circ h(x, y).$$

Por outro lado,

$$\left(\left([Y, g] \circ \Phi_{Z,X}(h)\right)(x)\right)(y) = ([Y, g](h_X))(y) = (g \circ h_X)(y) = g \circ h(x, y).$$

Concluímos então que um dos diagramas comutam. Para o outro diagrama, considere $f : X' \to X$. Temos

$$\left(\left(\Phi_{Z,X'}(h \circ (f \times id_Y))\right)(x)\right)(y) = (h \circ (f \times id_Y))_X(y) = h \circ (f \times id_Y)(x, y) = h(f(x), y).$$

Por outro lado,

$$\left(\left(\Phi_{Z,X}(h) \circ f\right)(x)\right)(y) = \left(\Phi_{Z,X}(f(x))\right)(y) = h_{f(x)}(y) = h(f(x), y).$$

Concluímos que o outro diagrama comuta, nos dando a prova que $\_\_ \times Y$ é adjunto à esquerda de $[Y, \_\_]$. Observe que as transformações naturais $\eta_X : X \to [Y, X \times Y]$ e $\varepsilon_Z : [Y, Z] \times Y \to Z$ são dadas por

$$(\eta_X(x))(y) = (x, y);$$
$$\varepsilon_Z(f, y) = f(y).$$

Exemplo 5.27. *Considere a categoria ${}_R\mathcal{M}$ para R anel comutativo com unidade. Lembramos que dados R-módulos M e N, o conjunto Hom(M, N) possui uma estrutura de módulo. Considere ainda outro R-módulo L. Dado $h : L \otimes M \to N$ um morfismo de módulos, podemos definir uma família $h_x : M \to N$ de morfismos por $h_x(y) = h(x \otimes y)$. Observe que, de fato,*

$$\begin{aligned} h_x(\lambda \triangleright y + y') &= h(x \otimes (\lambda \triangleright y + y')) = h(\lambda \triangleright (x \otimes y) + (x \otimes y')) \\ &= \lambda \triangleright h(x \otimes y) + h(x \otimes y') = \lambda \triangleright h_x(y) + h_x(y'). \end{aligned}$$

Por outro lado, considere um morfismo $H : L \to$ Hom(M, N) levando x em um morfismo $H(x) = h_x : M \to N$. Definimos um único morfismo $h : L \otimes M \to N$ por $h(x \otimes y) = h_x(y)$. Para mostrar que h está bem definida, considere a função $h' : L \times M \to N$ dada por $h'(x, y) = h_x(y)$, como no exemplo anterior. Lembramos que de H morfismo temos $H(\lambda \triangleright x + x') = \lambda \triangleright H(x) + H(x')$ e portanto, $h_{\lambda \triangleright x + x'} = \lambda \triangleright h_x + h_y$.

$$\begin{aligned} h'(\lambda \triangleright x + x', y) &= h_{\lambda \triangleright x + x'}(y) = \lambda \triangleright h_x(y) + h_{x'}(y) = \lambda \triangleright h'(x, y) + h'(x', y) \\ h'(x, \lambda \triangleright y + y') &= h_x(\lambda \triangleright y + y') = \lambda \triangleright h_x(y) + h_x(y') = \lambda \triangleright h'(x, y) + h'(x, y') \end{aligned}$$

Observamos das equações acima que h' é morfismo em cada entrada e portanto h está bem definida. Assim como antes, temos funtores $\_\_ \otimes M$ e $[M, \_\_]$ e uma função $\Phi_{N,L}$: Hom$(L \otimes M, N) \to$ Hom$(L, [M, N])$. Também temos $(\eta_L(x))\,(y) = x \otimes y$ e $\varepsilon_N(f \otimes y) = f(y)$.

Uma das equivalências que provaremos é que uma biálgebra H é álgebra de Hopf se, e somente se, podemos definir estruturas de módulo sobre $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}}(M, N)$. Isso torna tal conjunto de morfismos um objeto de ${}_H\mathcal{M}$. O estudo de mônadas de Hopf, dado em 6.2, envolve entender como isso se aplica nos casos gerais.

Definição 5.28. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Dizemos que $\mathcal{C}$ é <u>fechada (à direita)</u> se, para todo objeto Y de $\mathcal{C}$, o funtor $\_\_ \otimes Y$ possui adjunto à direita. Nesse caso, denotamos o adjunto à direita de $\_\_ \otimes Y$ por $[Y, \_\_]$, a unidade por η^Y e a counidade por ε^Y. Chamamos essas adjunções (como um todo) de <u>estrutura fechada (à direita)</u> de $\mathcal{C}$.*

Façamos uma discussão intuitiva sobre estruturas fechadas. Similarmente aos exemplos anteriores, $[Y, Z]$ é um objeto de $\mathcal{C}$ que representa Hom(Y, Z) e podemos separar um morfismo $h : X \otimes Y \to Z$ em componentes via $\Phi_{Z,X}(h) : X \to [Y, Z]$. Ainda, lembramos que $\eta_X = \Phi_{X \otimes Y, X}(\mathrm{id}_{X \otimes Y})$ ou em outras palavras, $\eta_X : X \to [Y, X \otimes Y]$ é associado à identidade $\mathrm{id}_{X \otimes Y}$ pelo isomorfismo natural Φ.

Em termos intuitivos, η_X^Y representa, internamente, o ato de levar as componentes X e Y em seu produto tensorial $X \otimes Y$. Por outro lado, $\varepsilon_Z^Y : [Y, Z] \otimes Y \to Z$ é uma avaliação, levando um morfismo de Y para Z e um elemento fixado de Y no seu correspondente em Z.

Podemos perguntar o que significa um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre categorias fechadas preservar a estrutura fechada. Essa estrutura é formada por quatro tipos de componentes, o produto tensorial (adjunto à esquerda), o objeto que representa morfismos (adjunto à direita) e os representantes internos da tensorização (unidade) e da avaliação (counidade).

Os dois primeiro são fáceis de lidar por se tratarem de objetos. Basta pedir que $F(X \otimes Y) = F(X) \otimes F(Y)$ e que $F([X, Y]) = [F(X), F(Y)]$. Em particular,

$$F([X, Y] \otimes X) = [F(X), F(Y)] \otimes F(X);$$
$$F([Y, X \otimes Y]) = [F(Y), F(X) \otimes F(Y)].$$

Para a unidade, temos que dados objetos X e Y de $\mathcal{C}$, podemos realizar internamente a tensorização de X e Y bem como a de $F(X)$ e $F(Y)$ via morfismos η_X^Y e $\eta_{F(Y)}^{F(Y)}$. Pedimos que esses morfismos sejam associados, isto é, $F\left(\eta_X^Y\right) = \eta_{F(X)}^{F(Y)}$. Similarmente, dados objetos Y e Z, podemos fazer a avaliação de morfismos de Y para Z por ε_Z^Y e a de morfismos de $F(Y)$ para $F(Z)$ por $\varepsilon_{F(Z)}^{F(Y)}$ e pedimos que essas duas sejam associadas, $F\left(\varepsilon_Z^Y\right) = \varepsilon_{F(Z)}^{F(Y)}$.

Observamos que mesmo sem exigir que $F([X, Y]) = [F(X), F(Y)]$, podemos encontrar um morfismo entre esses desde que tenhamos $F(X \otimes Y) = F(X) \otimes F(Y)$. Intuitivamente, aplicamos a tensorização com componentes $F([X, Y])$ e $F(X)$ e em seguida fazemos o análogo da avaliação com essas componentes. Formalmente, $F([X, Y])$ é levado em $[F(X), F([X, Y]) \otimes F(X)]$ via $\eta_{F([X,Y])}^{F(X)}$ que por sua vez é levado em $[F(X), F(Y)]$ por $\left[F(X), F\left(\varepsilon_Y^X\right)\right]$. É natural pensar que se F preserva a estrutura fechada, então essa função $\left[F(X), F\left(\varepsilon_Y^X\right)\right] \circ \eta_{F([X,Y])}^{F(X)}$ é na verdade a identidade, em particular implicando $F([X, Y]) = [F(X), F(Y)]$.

Veremos no teorema abaixo que não precisamos exigir tanto pois há equivalências que nos permitem provar certas condições a partir de outras. Antes do teorema, notamos que a condição $F(X \otimes Y) = F(X) \otimes F(Y)$ é bastante similar à encontrada na definição 1.27, mais precisamente, a de um funtor monoidal estrito. Fica faltando apenas $F(I_{\mathcal{C}}) = I_{\mathcal{D}}$, condição essa que também exigiremos.

Teorema 5.29. *Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor monoidal estrito entre categorias fechadas tal que $F([X, Y]_{\mathcal{C}}) = [F(X), F(Y)]_{\mathcal{D}}$. Então são equivalentes:*

1. $\left[F(Y), F\left(\varepsilon_X^Y\right)\right]_{\mathcal{D}} \circ \eta_{F([Y,X])}^{F(Y)} = id_{F([Y,X])}$ *para quaisquer objetos X e Y;*

2. $F\left(\eta_X^Y\right) = \eta_{F(X)}^{F(Y)}$ *para quaisquer objetos Y e Z;*

3. *$F\left(\varepsilon^Y_Z\right) = \varepsilon^{F(Y)}_{F(Z)}$ para quaisquer objetos Y e Z.*

Demonstração. Suponha inicialmente que $\left[F(X), F\left(\varepsilon^Y_X\right)\right] \circ \eta^{F(X)}_{F([X,Y])} = \mathrm{id}_{F([X,Y])}$. Observe que podemos aplicar a naturalidade de $\eta^{F(Y)}$ para o morfismo $F\left(\eta^Y_X\right)$, o que resulta na comutatividade do diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\eta^{F(Y)}_{F(X)}"] \arrow[d, "F(\eta^Y_X)"'] & {[F(Y), F(X) \otimes F(Y)]} \arrow[d, "{[F(Y), F(\eta^Y_X) \otimes F(Y)]}"] \\
F([Y, X \otimes Y]) \arrow[r, "\eta^{F(Y)}_{F([Y,X\otimes Y])}"'] & {[F(Y), F([Y, X \otimes Y]) \otimes F(Y)]}
\end{tikzcd} \tag{28}$$

Vejamos agora o que o fato de η^Y e ε^Y serem unidade e counidade significa. Denotamos temporariamente $A = \_\_ \otimes Y$. Temos que

$$\varepsilon^Y_{X\otimes Y} \circ \left(\eta^Y_X \otimes Y\right) = \varepsilon^Y_{A(X)} \circ A\left(\eta^Y_X\right) = \mathrm{id}_{X\otimes Y}.$$

Notando que $F\left(\eta^Y_X \otimes Y\right) = F\left(\eta^Y_X\right) \otimes F(Y)$,

$$\left[F(Y), F\left(\varepsilon^Y_{X\otimes Y}\right)\right] \circ \left[F(Y), F(\eta^Y_X) \otimes F(Y)\right] = \mathrm{id}_{[F(Y), F(X)\otimes F(Y)]}.$$

Note ainda que por hipótese o mesmo morfismo $\left[F(Y), F\left(\varepsilon^Y_{X\otimes Y}\right)\right]$ também é inverso à esquerda de $\eta^{F(Y)}_{F([Y,X\otimes Y])}$. Compondo esse morfismo no diagrama 28, obtemos que $\eta^{F(Y)}_{F(X)} = F\left(\eta^Y_X\right)$.

Provamos agora a recíproca. Suponha que $F\left(\eta^Y_X\right) = \eta^{F(Y)}_{F(X)}$ para quaisquer objetos X e Y. Em particular, $F\left(\eta^Y_{[}Y, X]\right) = \eta^{F(Y)}_{F([Y,X])}$. Ainda, usando que η^Y e ε^Y são unidade e counidade, segue que $\left[Y, \varepsilon^Y_X\right] \circ \eta^Y_{[Y,X]} = \mathrm{id}_{[Y,X]}$ e portanto $F\left(\left[Y, \varepsilon^Y_X\right]\right) \circ F\left(\eta^Y_{[Y,X]}\right) = \mathrm{id}_{F([Y,X])}$. Segue que

$$\begin{aligned}
\left[F(Y), F\left(\varepsilon^Y_X\right)\right] \circ \eta^{F(Y)}_{F([Y,X])} &= \left[F(Y), F\left(\varepsilon^Y_X\right)\right] \circ F\left(\eta^Y_{[Y,X]}\right) \\
&= F\left(\left[Y, \varepsilon^Y_X\right]\right) \circ F\left(\eta^Y_{[Y,X]}\right) = \mathrm{id}_{F([Y,X])}.
\end{aligned}$$

Com isso estabelecemos uma equivalência entre os itens 1 e 2. Provar que 1 e 3 são equivalentes é análogo. ■

Definição 5.30. *Dizemos que um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre categorias fechadas preserva a estrutura fechada (estritamente) quando F é monoidal estrito e satisfaz as condições equivalentes do teorema 5.29.*

5.5 ÁLGEBRAS DE HOPF

Nessa seção definiremos uma álgebra de Hopf como uma biálgebra H munida de uma antípoda $S : H \to H$. Para entender o que é essa antípoda construiremos a álgebra de convolução.

Definição 5.31. *Seja C uma coálgebra e A uma álgebra. Definimos a* <u>*álgebra de convolução*</u> *em* $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{K}}}(C, A)$ *por* $(f * g)(x) = f(x_1)g(x_2)$ *com unidade* $\eta \circ \varepsilon$*. Chamamos essa operação de convolução.*

Vejamos que a estrutura acima é, de fato, uma álgebra. $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{K}}}(C, A)$ é um espaço vetorial e ainda

$$((f * g) * h)(x) = (f * g)(x_1)h(x_2) = f(x_{1\,1})g(x_{1\,2})h(x_2);$$
$$(f * (g * h))(x) = f(x_1)(g * h)(x_2) = f(x_1)g(x_{2\,1})h(x_{2\,2}).$$

Como a comultiplicação é coassociativa, $(f * g) * h = f * (g * h)$. Quanto a unidade,

$$(f * (\eta \circ \varepsilon))(x) = f(x_1)(\eta \circ \varepsilon)(x_2) = f(x_1)\eta(\varepsilon(x_2)) = f(x_1)\varepsilon(x_2)\eta(1_{\mathbb{K}}) = f(x_1\varepsilon(x_2)) = f(x);$$
$$((\eta \circ \varepsilon) * f)(x) = (\eta \circ \varepsilon)(x_1)f(x_2) = \eta(\varepsilon(x_1))f(x_2) = \varepsilon(x_1)\eta(1_{\mathbb{K}})f(x_2) = f(\varepsilon(x_1)x_2) = f(x).$$

Suponha agora que H seja uma biálgebra. Temos a álgebra de convolução $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{K}}}(H, H) = \mathrm{End}(H)$. Analisamos como essa operação se relacionam com a função identidade. Por um lado, $(f * \mathrm{id}_H)(x) = f(x_1)x_2$ e por outro $(\mathrm{id}_H * f)(x) = x_1 f(x_2)$. Podemos perguntar se existe uma função $S : H \to H$ tal que $\mathrm{id}_{\mathbb{K}} * S = S * \mathrm{id}_{\mathbb{K}} = \eta \circ \varepsilon$, isto é, S é a inversa de $\mathrm{id}_{\mathbb{K}}$ por convolução. Nesse caso, dizemos que H é uma álgebra de Hopf. Mais formalmente:

Definição 5.32. *Uma* <u>*álgebra de Hopf*</u> *é uma biálgebra H munida de uma função $S : H \to H$, chamada* <u>*antípoda*</u>*, tal que S é a inversa de id_H por convolução.*

Observação 5.33. *Pela definição, é claro que se H é uma biálgebra, então H possui no máximo uma antípoda, dessa forma, uma biálgebra ser álgebra de Hopf pode ser visto como uma propriedade extra em vez de uma estrutura extra.*

Observamos o que esses conceitos significam na linguagem de categoria monoidal em $\underline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{K}}$. Temos

$$(f * g)(x) = f(x_1)g(x_2) = \mu(f(x_1) \otimes g(x_2)) = (\mu \circ (f \otimes g))(x_1 \otimes x_2) = (\mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta)(x).$$

Podemos definir $f * g = \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta$. Além disso, se H é uma álgebra de Hopf temos que S ser antípoda significa $\mu \circ (S \otimes \mathrm{id}_H) \circ \Delta = \mu \circ (\mathrm{id}_H \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon$. Em diagramas,

$$\begin{tikzcd}
& H\otimes H \arrow[rr, "S\otimes \mathrm{id}_H"] & & H\otimes H \arrow[dr, "\mu"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] \arrow[rr, "\varepsilon"] & & \mathbb{K} \arrow[rr, "\eta"] & & H \\
& H\otimes H \arrow[rr, "\mathrm{id}_H\otimes S"'] & & H\otimes H \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 5.34. *Considere a biálgebra $F(M)$ como definida no exemplo 5.22. Suponha que $F(M)$ seja álgebra de Hopf. De $\Delta(x) = x \otimes x$, segue que a antípoda S satisfaz*

$$S(x)x = xS(x) = \eta \circ \varepsilon(x) = \eta(1) = e,$$

para todo $x \in F(M)$. Disso, segue que $S(x)$ é a inversa de x no monoide M e portanto M é grupo. Reciprocamente, se G é grupo, então podemos definir $S : F(G) \to F(G)$ por $S(x) = x^{-1}$. Segue que S é antípoda e $F(G)$ é álgebra de Hopf.

Teorema 5.35. *A antípoda S é um antimorfismo de álgebras, isto é, S é uma transformação linear tal que $S(1_H) = 1_H$ e $S(xy) = S(y)S(x)$.*

Demonstração. Já sabemos que S é linear. Temos

$$1_H = \eta \circ \varepsilon(1_H) = S * \mathrm{id}_H(1_H) = S(1_H)\mathrm{id}_H(1_H) = S(1_H).$$

Para mostrar a outra propriedade, precisamos mostrar que as funções $F, G : H \otimes H \to H$ dadas por

$$F(x \otimes y) = S(y)S(x);$$
$$G(x \otimes y) = S(xy)$$

são iguais. Note que $F = \mu \circ (S \otimes S) \circ \tau_{H,H}$ e $G = S \circ \mu$, mostrando que não só as funções estão bem definidas como também as mesmas são lineares. Lembramos o seguinte resultado elementar: em um monoide (na categoria <u>Set</u>), se x possui inversa à esquerda x_e e inversa à direita x_d, então $x_e = x_d$ (e consequentemente, x é inversível). Usamos esse resultado na álgebra de convolução $\mathrm{Hom}(H \otimes H, H)$, que é um monoide quando esquecida a estrutura de espaço vetorial. Observe que μ é um elemento dessa.

$$\begin{aligned}
\mu * F(x \otimes y) &= \mu(x_1 \otimes y_1)F(x_2 \otimes y_2) = x_1 y_1 S(y_2)S(x_2) = x_1 y_1 \varepsilon(y_2)1_H \varepsilon(x_2)1_H \\
&= x_1 y \varepsilon(x_2)1_H = xy1_H = \eta_H \circ \varepsilon_{H\otimes H}(x \otimes y) \\
G * \mu(x \otimes y) &= G(x_1 \otimes y_1)\mu(x_2 \otimes y_2) = S(x_1 y_1)x_2 y_2 = S((xy)_1)(xy)_2 = \eta_H \circ \varepsilon_{H\otimes H}(x \otimes y)
\end{aligned}$$

Das equações acima observamos que G é inversa à esquerda de μ e F é inversa à direita de μ. segue que $F = G$ e portanto, $S(xy) = S(y)S(x)$. ■

Exemplo 5.36. *Considere a $\mathbb{K}$-biálgebra de Sweedler H dada em 5.23. Mostramos que H possui antípoda. De fato, defina $S : H \to H$ na base por*

- $S(1) = 1$;
- $S(x) = y$;
- $S(g) = g$;
- $S(y) = -x$.

Novamente, notamos que $S(1)$ e $S(y)$ foram definidos de forma a tornar S um antimorfismo de álgebras. Para mostrar que S é antípoda, verificamos que $S(z_1)z_2 = z_1S(z_2) = \eta(\varepsilon(z))$ para todo $z \in \{1, x, g, y\}$. Isso é trivial para $z = 1$ e $z = g$. Para $z = x$ e $z = y$, o resultado segue de

$$yx = xy = \eta(\varepsilon(x)) = \eta(\varepsilon(y)) = 0.$$

Lembramos que como H possui estrutura de coálgebra, então o funtor $T(X) = H \otimes X$ possui estrutura opmonoidal. Temos morfismos $\varphi_{U,V} : H \otimes U \otimes V \to H \otimes U \otimes H \otimes V$. Queremos, de alguma forma, relacionar isso com a estrutura de álgebra do ponto de vista funtorial. Para isso, precisamos utilizar a transformação natural $\mu : T^2 \Rightarrow T$. Se em vez de V tivéssemos $H \otimes V$ estaríamos em uma situação na qual μ_V pode ser aplicada. De fato, podemos definir $\alpha_{U,V} = (\mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_U \otimes \mu_V) \circ \varphi_{U,H\otimes V}$. Observe que α é a composição de duas transformações naturais e portanto também é natural. Mais especificamente, se $F : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é o funtor definido por $F(U, V) = H \otimes U \otimes H \otimes V$, então $\alpha : F \Rightarrow F$ é transformação natural. Podemos aplicar $\alpha_{U,V}$ em um ponto específico, obtendo

$$\alpha_{U,V}(x \otimes u \otimes y \otimes v) = x_1 \otimes u \otimes x_2y \otimes v.$$

Um morfismo derivado de $\alpha_{I,I}$ é o chamado morfismo canônico $\mathrm{can} : H \otimes H \to H \otimes H$. Esse é dado por $\mathrm{can}(x \otimes y) = x_1 \otimes x_2y$. O teorema abaixo é uma parte do Teorema Fundamental das Álgebras de Hopf. Tal teorema diz que uma biálgebra admite antípoda se, e somente se, α é inversível. Podemos enfraquecer a hipótese mostrando que α é inversível se, e somente se, o morfismo canônico o é.

Lema 5.37. *Seja H uma biálgebra. Então α é inversível se, e somente se, o morfismo canônico can o é.*

Demonstração. Note que

$$\mathrm{can} = (r_H \otimes r_H) \circ \alpha_{I,I} \circ \left(r_H^{-1} \otimes r_H^{-1}\right).$$

Se α é inversível então, em particular, $\alpha_{I,I}$ o é. Segue que can é composição de isomorfismos e logo can é inversível.

Reciprocamente, suponha que can seja inversível. Temos que

$$\alpha_{U,V} = \left(\mathrm{id}_H \otimes \tau_{H,U} \otimes \mathrm{id}_V\right) \circ (\mathrm{can} \otimes \mathrm{id}_U \otimes \mathrm{id}_V).$$

Como $\alpha_{U,V}$ é a composição de isomorfismos, então α é isomorfismo natural. ■

Teorema 5.38. *Seja H uma biálgebra. Então H é álgebra de Hopf se, e somente se, a transformação natural α definida acima é inversível.*

Demonstração. Suponha que H seja álgebra de Hopf. Então existe uma antípoda $S : H \to H$. Lembramos que $S(x_1)x_2 = x_1 S(x_2) = \varepsilon(x)1_H$. Em particular

$$S(x_{21})x_{22} = x_{21}S(x_{22}) = \varepsilon(x_2)1_H.$$

Agora, defina $\mathrm{can}'(x \otimes y) = x_1 \otimes S(x_2)y$. Temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{can} \circ \mathrm{can}'(x \otimes y) &= \mathrm{can}(x_1 \otimes S(x_2)y) = x_{11} \otimes x_{12}S(x_2)y \\
&= x_1 \otimes x_{21}S(x_{22})y = x_1 \otimes \varepsilon(x_2)y = x_1\varepsilon(x_2) \otimes y = x \otimes y; \\
\mathrm{can}' \circ \mathrm{can}(x \otimes y) &= \mathrm{can}'(x_1 \otimes x_2 y) = x_{11} \otimes S(x_{12})x_2 y \\
&= x_1 \otimes S(x_{21})x_{22}y = x_1 \otimes \varepsilon(x_2)y = x_1\varepsilon(x_2) \otimes y = x \otimes y.
\end{aligned}$$

Temos que $\mathrm{can}' = \mathrm{can}^{-1}$ e do lema, α é isomorfismo natural. Por outro lado, suponha que α seja inversível. Então o morfismo canônico can possui inversa can^{-1}. Intuitivamente, $\mathrm{can}^{-1}(x \otimes y) = x_1 \otimes S(x_2)y$, mas lembramos que ainda não foi definido S. Usamos essa intuição para definir

$$S(x) = l_H \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_H) \circ \mathrm{can}^{-1}(x \otimes 1_H).$$

Agora mostramos que S é antípoda. De fato, notando que $x \otimes 1_H = x \otimes \eta(1_{\mathbb{K}})$, temos

$$S = l_H \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_H) \circ \mathrm{can}^{-1} \circ (\mathrm{id}_H \otimes \eta) \circ r_H^{-1},$$

do que segue que S é linear. Mais ainda, note que como

$$\overline{\mu} \circ (l_H \otimes H) \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_H) = l_H \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_H) \circ (\mathrm{id}_H \otimes \overline{\mu}),$$

então

$$\begin{aligned}
\overline{\mu} \circ (S \otimes \mathrm{id}_H) &= \overline{\mu} \circ (l_H \otimes \mathrm{id}_H) \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_H) \circ \left(\mathrm{can}^{-1} \otimes \mathrm{id}_H\right) \circ (\mathrm{id}_H \otimes \eta \otimes \mathrm{id}_H) \circ \left(r_H^{-1} \otimes \mathrm{id}_H\right) \\
&= l_H \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_H) \circ (\mathrm{id}_H \otimes \overline{\mu}) \circ \left(\mathrm{can}^{-1} \otimes \mathrm{id}_H\right) \circ (\mathrm{id}_H \otimes \eta \otimes \mathrm{id}_H) \circ \left(r_H^{-1} \otimes \mathrm{id}_H\right).
\end{aligned}$$

Além disso, observe que

$$\mathrm{can} \circ (\mathrm{id}_H \otimes \overline{\mu}) = (\mathrm{id}_H \otimes \overline{\mu}) \circ (\mathrm{can} \otimes \mathrm{id}_H)$$

e portanto

$$(\mathrm{id}_H \otimes \overline{\mu}) \circ \left(\mathrm{can}^{-1} \otimes \mathrm{id}_H\right) = \mathrm{can}^{-1} \circ (\mathrm{id}_H \otimes \overline{\mu}) .$$

Concluímos disso que

$$\begin{aligned}
\overline{\mu} \circ (S \otimes \mathrm{id}_H) &= l_H \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_H) \circ \mathrm{can}^{-1} \circ (\mathrm{id}_H \otimes \overline{\mu}) \circ (\mathrm{id}_H \otimes \eta \otimes \mathrm{id}_H) \circ \left(r_H^{-1} \otimes \mathrm{id}_H\right) \\
&= l_H \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_H) \circ \mathrm{can}^{-1} \circ (\mathrm{id}_H \otimes l_H) \left(r_H^{-1} \otimes \mathrm{id}_H\right) \\
&= l_H \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_H) \circ \mathrm{can}^{-1} \circ (r_H \otimes \mathrm{id}_H) \left(r_H^{-1} \otimes \mathrm{id}_H\right) = l_H \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_H) \circ \mathrm{can}^{-1}.
\end{aligned}$$

Agora,

$$S(x_1)x_2 = (\overline{\mu} \circ (S \otimes \mathrm{id}_H) \circ \Delta)(x) = \left(l_H \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_H) \circ \mathrm{can}^{-1} \circ \Delta\right)(x).$$

Observe também que

$$\Delta(x) = x_1 \otimes x_2 = \mathrm{can}(x \otimes 1_H) = \left(\mathrm{can} \circ (\mathrm{id}_H \otimes \overline{\eta}) \circ r_H^{-1}\right)(x)$$

e portanto

$$\mathrm{can}^{-1} \circ \Delta = (\mathrm{id}_H \otimes \overline{\eta}) \circ r_H^{-1} .$$

Finalmente concluímos que

$$S(x_1)x_2 = \left(l_H \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_H) \circ (\mathrm{id}_H \otimes \overline{\eta}) \circ r_H^{-1}\right)(x) = l_H(\varepsilon(x) \otimes \overline{\eta}(1_{\mathbb{K}})) = \varepsilon(x)\overline{\eta}(1_{\mathbb{K}}) = \overline{\eta} \circ \varepsilon(x).$$

Segue de maneira análoga que $x_1 S(x_2) = \overline{\eta} \circ \varepsilon(x)$. ■

A outra parte do Teorema Fundamental é dada definindo uma estrutura de módulo sobre $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}}(M, N)$ na qual H é álgebra de Hopf para quaisquer H-módulos M e N. Sabemos que $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}}(M, N)$ é espaço vetorial com a estrutura definida pontualmente. Podemos definir uma ação sobre $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}}(M, N)$ da seguinte forma: Para $h : M \to N$, $(x \triangleright h)(m) = x_1 h(S(x_2) \triangleright m)$. Como provaremos abaixo na segunda parte do Teorema Fundamental das álgebras de Hopf, dadas estruturas de módulo sobre os objetos da forma $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}}(M, N)$, podemos obter uma antípoda para H. Essa será dada por $S(x) = x \triangleright \mathrm{id}_H$, uma vez que $\mathrm{id}_H \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}}(H, H)$.

Observação 5.39. *Sejam U e V espaços vetoriais. Como vimos (mais geralmente) no exemplo 5.27, $\underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}$ é categoria fechada. Para evitar uma notação ambígua, denotaremos por $ev_{U,V} : Hom(U, V) \otimes U \to V$ a componente $ev_{U,V}(h \otimes u) = h(u)$ da counidade da adjunção.*

Teorema 5.40. *Seja H uma biálgebra. Se H é álgebra de Hopf, então para quaisquer módulos M e N, $Hom_{\underline{Vect_{\mathbb{K}}}}(M, N)$ é módulo com a ação*

$$(x \triangleright h)(m) = x_1 \triangleright (h(S(x_2) \triangleright m)).$$

Ainda, uma vez fixado M podemos definir um endofuntor sobre ${}_H\mathcal{M}$

$$[M, N] = Hom_{\underline{Vect_{\mathbb{K}}}}(M, N);$$
$$[M, h] = h \circ \_\_.$$

Que dá uma estrutura fechada para ${}_H\mathcal{M}$. A unidade e a counidade dessa adjunção são dadas por

$$\left(\eta_L^M(l)\right)(m) = l \otimes m;$$
$$\varepsilon_N^M(h \otimes m) = h(m).$$

Demonstração. Denote $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}}(M, N) = [M, N]$. Suponha que H seja álgebra de Hopf. Observe que a ação descrita acima é dada por

$$\begin{aligned}(x \triangleright h)(m) = \triangleright \circ (\mathrm{id}_H \otimes \mathrm{ev}_{M,N}) \circ \left(\mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_{[M,N]} \otimes \triangleright\right) \circ \left(\mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_{[M,N]} \otimes S \otimes \mathrm{id}_M\right) \\ \circ \left(\mathrm{id}_H \otimes \tau_{H,[M,N]} \otimes M\right) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}_H \otimes M)(x \otimes h \otimes m).\end{aligned}$$

Essa equação pode ser facilmente confirmada fazendo manualmente cada operação. Disso, obtemos que existe uma transformação linear levando $x \otimes h \otimes m$ em $x_1 \triangleright (h(S(x_2) \triangleright m))$. Segue facilmente disso que $x \triangleright h : M \to N$ é uma transformação linear, bem como que $\triangleright : H \otimes [M, N] \to [M, N]$ é linear. Falta mostrar que temos, de fato, uma ação. Lembramos antes que S é antimorfismo de álgebras.

$$\begin{aligned}(x \triangleright (y \triangleright h))(m) &= x_1 \triangleright ((y \triangleright h)(S(x_2) \triangleright m)) = x_1 \triangleright (y_1 \triangleright (h(S(y_2) \triangleright (S(x_2) \triangleright m)))) \\ &= x_1 y_1 \triangleright (h(S(y_2)S(x_2) \triangleright m)) = x_1 y_1 \triangleright (h(S(x_2 y_2) \triangleright m)) \\ &= (xy)_1 \triangleright (h(S((xy)_2) \triangleright m)) = (xy \triangleright h)(m); \\ (1_H \triangleright h)(m) &= 1_H \triangleright (h(S(1_H)m) \triangleright) = h(m).\end{aligned}$$

De acordo com o exemplo 5.27, $\underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}$ possui estrutura fechada. Disso, segue que η_L^M e ε_N^M são lineares, naturais e satisfazem as identidades dadas no teorema 2.9.

A única coisa que falta mostrar é que ambas são morfismos de módulos. De fato,

$$\begin{aligned}
\left(x \triangleright \eta_L^M(l)\right)(m) &= x_1 \triangleright \left(\left(\eta_L^M(l)\right)(S(x_2) \triangleright m)\right) = x_1 \triangleright (l \otimes (S(x_2) \triangleright m)) \\
&= (x_{11} \triangleright l) \otimes \left(x_{12} \triangleright (S(x_2) \triangleright m)\right) = (x_1 \triangleright l) \otimes \left(x_{21} \triangleright \left(S(x_{22}) \triangleright m\right)\right) \\
&= (x_1 \triangleright l) \otimes \left(x_{21} S(x_{22}) \triangleright m\right) = (x_1 \triangleright l) \otimes (\varepsilon(x_2) 1_H \triangleright m) \\
&= ((x_1 \varepsilon(x_2)) \triangleright l) \otimes (1_H \triangleright m) = (x \triangleright l) \otimes m = \left(\eta_L^M(x \triangleright l)\right)(m); \\
\varepsilon_N^M (x \triangleright (h \otimes m)) &= \varepsilon_N^M ((x_1 \triangleright h) \otimes (x_2 \triangleright m)) = (x_1 \triangleright h)(x_2 \triangleright m) \\
&= x_{11} \triangleright \left(h\left(S(x_{12}) \triangleright (x_2 \triangleright m)\right)\right) = x_{11} \triangleright \left(h\left(S(x_{12}) x_2 \triangleright m\right)\right) \\
&= x_1 \triangleright \left(h\left(S\left(x_{21}\right) x_{22} \triangleright m\right)\right) = x_1 \triangleright (h(\varepsilon(x_2) 1_H \triangleright m)) \\
&= x_1 \varepsilon(x_2) \triangleright (h(1_H \triangleright m)) = x \triangleright h(m) = x \triangleright \left(\varepsilon_N^M(h \otimes m)\right).
\end{aligned}$$

Com isso, provamos que ${}_H\mathcal{M}$ possui estrutura fechada. ■

A recíproca desse resultado também é verdadeira. A demonstração será dada mais geralmente no teorema 6.8. Por hora, enunciaremos o resultado sem prova e consideraremos algumas consequências.

Teorema 5.41. *Seja H uma biálgebra. Se podemos definir uma estrutura de módulo sobre $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{K}}}(M, N)$ para quaisquer módulos M e N tal que o funtor $[M, \_\_]$ é adjunto à direita de $\_\_ \otimes M$, então H é álgebra de Hopf.*

Uma vez conhecida a equivalência, podemos tentar calcular a antípoda de H a partir dessa estrutura fechada. Observe que para cada funcional linear f de H (isto é, $f : H \to \mathbb{K}$ com f linear) temos

$$h(S(x)) = h(S(\varepsilon(x_1) x_2)) = \varepsilon(x_1) h(S(x_2)) = x_1 \triangleright h(S(x_2) \triangleright 1_H) = (x \triangleright h)(1_H).$$

Seja B uma base de H. Então para cada $b \in B$ temos um funcional linear ξ_b tal que $\xi_b(b) = 1$ e $\xi_b(b') = 0$ para $b' \in B \setminus \{b\}$. Esse funcional linear leva um elemento $x \in H$ na sua coordenada $\xi_b(x)$ em relação a b. Disso, temos que $\xi_b(x) \neq 0$ para uma quantidade finita de $b \in B$ e que $\sum_{b \in B} \xi_b(x) b = x$. Aplicando o resultado anterior, obtemos que

$$S(x) = \sum_{b \in B} (x \triangleright \xi_b)(1_H) b,$$

o que nos permite calcular a antípoda usando apenas a estrutura fechada.

Note que assim como no caso de biálgebras, uma álgebra de Hopf pode ser vista como um levantamento. De fato, cada componente da estrutura fechada em ${}_H\mathcal{M}$ é uma adjunção da forma $(\_\_ \otimes M, [M, \_\_], \eta^M, \varepsilon^M)$, esta sendo um levantamento da componente correspondente da estrutura fechada em $\underline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{K}}$. Essa ideia será útil para provarmos o teorema 6.8 mais a frente.

6 MÔNADAS DE HOPF

No capítulo 5 estudamos álgebras, coálgebras, biálgebras e álgebras de Hopf sobre espaços vetoriais e demos algumas equivalências entre esses conceitos de um ponto de vista funtorial. Lembramos que álgebras correspondem a mônadas, coálgebras a funtores opmonoidais, biálgebras a mônadas opmonoidais ou a extensões da estrutura monoidal para a categoria de módulos (categoria de Eilenberg-Moore) e uma biálgebra ser álgebra de Hopf é equivalente à invertibilidade de uma transformação natural ou à possibilidade de ser definir uma estrutura de módulo no conjunto dos morfismos de módulos.

Nesse capítulo, estudamos bimônadas e mônadas de Hopf. Essas generalizações são dadas via propriedades análogas às do caso vetorial, provando-se também as equivalências. Esses resultados podem ser encontrados em (BÖHM, 2018).

6.1 BIMÔNADAS

Generalizamos a definição de biálgebra para um funtor T sobre uma categoria monoidal arbitrária utilizando o teorema 5.24.

Definição 6.1. *Considere um funtor T sobre uma categoria monoidal $\mathcal{C}$. T é dito ser uma <u>bimônada</u> quando T está munido de uma estrutura de mônada sobre T juntamente com uma estrutura opmonoidal sobre T tais que a multiplicação e a unidade da mônada sejam ambas transformações naturais opmonoidais.*

Podemos caracterizar bimônadas em termos da categoria de Eilenberg-Moore analogamente ao teorema fundamental das biálgebras. Para isso, definimos o que é o levantamento de uma estrutura monoidal. Lembramos que uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ é composta pelo produto tensorial, um objeto identidade e isomorfismos naturais a, l e r. Levantar a estrutura monoidal significa levantar cada componente.

Definição 6.2. *Seja $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ uma categoria monoidal e T uma mônada sobre $\mathcal{C}$. Um <u>levantamento da estrutura monoidal de $\mathcal{C}$</u> é uma estrutura monoidal sobre $\mathcal{C}^T$, digamos $(\mathcal{C}^T, \boxtimes, J, a', l', r')$ tal que*

1. *$U^T(J) = I$;*
2. *$\boxtimes : \mathcal{C}^T \times \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}^T$ é levantamento do funtor $\otimes$;*
3. *As transformações naturais a', l' e r' são, respectivamente, levantamento de a, l e r.*

Teorema 6.3. *Seja T uma mônada sobre uma categoria monoidal $\mathcal{C}$. Uma estrutura monoidal sobre $\mathcal{C}^T$ torna o funtor U^T monoidal estrito se, e somente se, essa é um le-*

vantamento da estrutura de $\mathcal{C}$. Além disso, existe uma bijeção entre tais levantamentos e estruturas opmonoidais sobre T que tornam T uma bimônada.

Demonstração. Considere uma estrutura monoidal $(\mathcal{C}^T, \boxtimes, J, a', l', r')$. Observe que a condição $U^T(J) = I$ é comum nos dois casos. Além disso, dizer que $\boxtimes$ é levantamento de $\otimes$ é equivalente a dizer que $U^T((A,\alpha) \boxtimes (B,\beta)) = A \otimes B$, o que é parte da definição de ser funtor monoidal estrito. De forma análoga, dizer que as transformações naturais são levantamentos é equivalente ao restante da definição de funtor monoidal estrito.

Agora suponha que a estrutura monoidal de $\mathcal{C}^T$ seja um levantamento da de $\mathcal{C}$. Do teorema 4.1, $\boxtimes$ é levantamento de $\otimes$ por alguma transformação natural dada por $\varphi_{X,Y} : T(X \otimes Y) \to T(X) \otimes T(Y)$. Além disso, de $U^T(J) = I$ segue que $J = (I, \varphi_0)$ para algum $\varphi_0 : T(I) \to I$. Os diagramas da definição de funtor opmonoidal seguem dos do teorema 4.1 e de φ_0 ser ação.

Reciprocamente, suponha T bimônada. De maneira análoga acima, os diagramas de funtor opmonoidal garantem que $\otimes$ admite levantamento por φ para um funtor $\boxtimes$ e que φ_0 não só é ação sobre I como também torna $(T(I), \varphi_0)$ a unidade de $\boxtimes$. O fato que a associação feita é uma bijeção vem da existência (sobrejetividade) e unicidade (injetividade) do teorema 4.1. ∎

Durante o teorema utilizamos o símbolo $\boxtimes$ para denotar o produto tensorial em $\mathcal{C}^T$. Para simplificar notações, usaremos o mesmo símbolo $\otimes$ para denotar o produto tensorial em $\mathcal{C}$ e seu levantamento.

Corolário 6.4. *Seja T uma bimônada sobre uma categoria monoidal $\mathcal{C}$. Para cada (B,β) objeto de $\mathcal{C}^T$, o funtor $\_\_ \otimes (B,\beta)$ é levantamento de $\_\_ \otimes B$ pela transformação natural dada por $\alpha_X^{(B,\beta)} = (id_X \otimes \beta) \circ \varphi_{X,B} : T(X \otimes B) \to T(X) \otimes B$.*

Demonstração. É claro que $\_\_ \otimes (B,\beta)$ é levantamento de $\_\_ \otimes B$. Para mostrar que a transformação natural dada é a procurada usamos o teorema 4.1. Nesse teorema, definimos as transformações naturais ξ, κ e γ a partir do levantamento. Vejamos como essas se aplicam no nosso caso.

A transformação ξ é dada levando uma álgebra de Eilenberg-Moore (X,χ) na ação de $(X,\chi) \otimes (B,\beta)$, isto é, $\xi_{X,\chi} = (\chi \otimes \beta) \circ \varphi_{X,B}$. Para obter κ, tomamos $\kappa_X = \xi_{T(X),\mu_X} = (\mu_X \otimes \beta) \circ \varphi_{T(X),B}$ e finalmente,

$$\begin{aligned}
\gamma_X = \kappa_X \circ T(\eta_X \otimes \mathrm{id}_B) &= (\mu_X \otimes \beta) \circ \varphi_{T(X),B} \circ T(\eta_X \otimes \mathrm{id}_B) \\
&= (\mu_X \otimes \beta) \circ (T(\eta_X) \otimes T(\mathrm{id}_B)) \circ \varphi_{X,B} \\
&= \Big((\mu_X \circ T(\eta_X)) \otimes \big(\beta \circ \mathrm{id}_{T(B)}\big)\Big) \circ \varphi_{X,B} \\
&= \big(\mathrm{id}_{T(X)} \otimes \beta\big) \circ \varphi_{X,B} = \alpha_X^{(B,\beta)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
X \otimes B \arrow[rr, "\eta_{X\otimes B}"] \arrow[dr, "\eta_X \otimes \mathrm{id}_B"'] & & T(X \otimes B) \arrow[dl, "(\mathrm{id}_X \otimes \beta)\circ\varphi_{X,B}"] \\
& T(X) \otimes B &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T^2(X \otimes B) \arrow[r, "T((\mathrm{id}_X\otimes\beta)\circ\varphi_{X,B})"] \arrow[d, "\mu_{X\otimes B}"'] & T(T(X) \otimes B) \arrow[r, "(\mathrm{id}_{T(X)}\otimes\beta)\circ\varphi_{T(X),B}"] & T^2(X) \otimes B \arrow[d, "\mu_X \otimes B"] \\
T(X \otimes B) \arrow[rr, "(\mathrm{id}_X\otimes\beta)\circ\varphi_{X,B}"'] & & T(X) \otimes B
\end{tikzcd}$$

■

Observação 6.5. *Observamos que $\alpha_X^{(B,\beta)}$ define outra transformação natural (com dois argumentos), que denotaremos por $\alpha^\star : T(\_\_ \otimes \_\_) \Rightarrow T(\_\_) \otimes \_\_$. De fato, considere $g : X \to Y$ morfismo em $\mathcal{C}$ e $h : (B,\beta) \to (C,\gamma)$ morfismo em $\mathcal{C}^T$. Temos que o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{tikzcd}
T(X \otimes B) \arrow[r, "\varphi_{X,B}"] \arrow[d, "T(g\otimes h)"'] & T(X) \otimes T(B) \arrow[r, "id_{T(X)}\otimes\beta"] \arrow[d, "T(g)\otimes T(h)"'] & T(X) \otimes B \arrow[d, "T(g)\otimes h"] \\
T(Y \otimes C) \arrow[r, "\varphi_{Y,C}"'] & T(Y) \otimes T(C) \arrow[r, "id_{T(Y)}\otimes\gamma"'] & T(Y) \otimes C
\end{tikzcd}$$

De fato, o quadrado da esquerda vem da naturalidade de φ enquanto o da direita vem de h ser morfismo em $\mathcal{C}^T$. Segue que $(T(g) \otimes h) \circ \alpha_X^{(B,\beta)} = \alpha_Y^{(C,\gamma)} \circ (T(g \circ h))$.

6.2 MÔNADAS DE HOPF

Na seção 5.5, provamos que uma biálgebra H é uma álgebra de Hopf se, e somente se, determinada transformação natural α é inversível. Observe que a α pode ser definida para qualquer bimônada T. De fato,

$$\alpha_{X,Y} = \left(\mathrm{id}_{T(X)} \otimes \mu_Y\right) \circ \varphi_{X,T(Y)}.$$

Usamos isso como forma de definir mônada de Hopf. Note que poderíamos tê-la definido como o levantamento da estrutura fechada de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{C}^T$, o que é o análogo a definir estruturas de módulo sobre $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}}(M, N)$. Ambas as definições são equivalentes, como provado em 6.8.

Definição 6.6. *Seja T uma bimônada sobre uma categoria monoidal fechada $\mathcal{C}$. Dizemos que T é mônada de Hopf quando a transformação natural dada por*

$$\alpha_{X,Y} = \left(id_{T(X)} \otimes \mu_Y\right) \circ \varphi_{X,T(Y)}$$

for um isomorfismo natural.

Finalizamos nosso texto com o nosso resultado principal, caracterizando mônadas de Hopf através de sua álgebra de Eilenberg-Moore. No teorema 6.3 caracterizamos bimônadas como formas de levantar a estrutura monoidal para a categoria de Eilenberg-Moore. Nesse resultado, classificaremos mônadas de Hopf de forma similar, levantando uma estrutura fechada. Definimos um levantamento de uma estrutura fechada.

Definição 6.7. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria fechada e T uma mônada em $\mathcal{C}$. Um levantamento da estrutura fechada de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{C}^T$ é uma estrutura fechada em $\mathcal{C}^T$ tal que para cada (B,β) objeto de $\mathcal{C}^T$ a adjunção $\left(\_\_ \otimes (B,\beta), [(B,\beta),\_\_], \eta^{(B,\beta)}, \varepsilon^{(B,\beta)}\right)$ seja um levantamento de $\left(\_\_ \otimes B, [B,\_\_], \eta^B, \varepsilon^B\right)$.*

Teorema 6.8. *Seja T uma bimônada sobre uma categoria monoidal fechada $\mathcal{C}$. Então uma estrutura fechada em $\mathcal{C}^T$ é tal que o funtor U^T a preserva estritamente se, e somente se, ela for um levantamento da estrutura fechada em $\mathcal{C}$. Além disso, essa hipótese ocorre se, e somente se, T é uma mônada de Hopf.*

Demonstração. Como T é bimônada, então o teorema 6.3 garante que existe uma estrutura monoidal em $\mathcal{C}^T$ tal que o funtor esquecimento é estritamente monoidal. Além disso, o mesmo teorema diz que essa estrutura é um levantamento da de $\mathcal{C}$.

Suponha que temos uma estrutura fechada em $\mathcal{C}^T$. Então U^T preservar essa estrutura implica que $U^T([(B,\beta),(C,\gamma)]) = [B,C]$ do que segue que $[(B,\beta),\_\_]$ levanta $[B,\_\_]$. Mais ainda, temos que para cada (A,α), $U^T\left(\eta^{(B,\beta)}_{(A,\alpha)}\right) = \eta^B_A$, do que segue que $\eta^{(B,\beta)}$ levanta η^B e similarmente $U^T\left(\varepsilon^{(B,\beta)}_{(C,\gamma)}\right) = \varepsilon^B_C$, e logo $\varepsilon^{(B,\beta)}$ levanta ε^B. Observe também que todas essas implicações na verdade são equivalências, das quais provamos a recíproca.

Note que do corolário 6.4 e do teorema 4.9, a estrutura fechada de $\mathcal{C}$ levanta para $\mathcal{C}^T$ se, e somente se, cada $\alpha^{(B,\beta)}$ é isomorfismo natural. Notando que $\alpha_{X,Y} = \alpha_X^{F^T(Y)}$, temos que se a estrutura fechada levanta, então α é isomorfismo natural. Finalmente, suponha que α seja isomorfismo natural. Então $\alpha_X^{F^T(Y)}$ é inversível para quaisquer objetos X e Y. Defina $\nu_X^{(B,\beta)} = T(\mathrm{id}_X \otimes \beta) \circ \left(\alpha_X^{F^T(B)}\right)^{-1} \circ \left(\mathrm{id}_{T(X)} \otimes \eta_B\right)$. Mostraremos que $\nu_X^{(B,\beta)}$ é a inversa de $\alpha_X^{(B,\beta)}$. De fato, observe que a naturalidade de φ implica na comutatividade do diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
T(X \otimes T(B)) \arrow[r, "\varphi_{X,T(B)}"] \arrow[d, "T(\mathrm{id}_X \otimes \beta)"'] & T(X) \otimes T^2(B) \arrow[d, "T(\mathrm{id}_X) \otimes T(\beta)"] \\
T(X \otimes B) \arrow[r, "\varphi_{X,B}"'] & T(X) \otimes T(B)
\end{tikzcd}$$

Usando essa comutatividade e o fato que β é ação temos

$$\begin{aligned}
\alpha_X^{(B,\beta)} \circ \nu_X^{(B,\beta)} &= \left[\left(\mathrm{id}_{T(X)} \otimes \beta\right) \circ \varphi_{X,B}\right] \circ \left[T\left(\mathrm{id}_X \otimes \beta\right) \circ \left(\alpha_X^{F^T(B)}\right)^{-1} \circ \left(\mathrm{id}_{T(X)} \otimes \eta_B\right)\right] \\
&= \left(\mathrm{id}_{T(X)} \otimes \beta\right) \circ \left(T(\mathrm{id}_X) \otimes T(\beta)\right) \circ \varphi_{X,T(B)} \circ \left(\alpha_X^{F^T(B)}\right)^{-1} \circ \left(\mathrm{id}_{T(X)} \otimes \eta_B\right) \\
&= \left(\mathrm{id}_{T(X)} \otimes \beta\right) \circ \left((\mathrm{id}_{T(X)}) \otimes \mu_B\right) \circ \varphi_{X,T(B)} \circ \left(\alpha_X^{F^T(B)}\right)^{-1} \circ \left(\mathrm{id}_{T(X)} \otimes \eta_B\right) \\
&= \left(\mathrm{id}_{T(X)} \otimes \beta\right) \circ \alpha_X^{F^T(B)} \circ \left(\alpha_X^{F^T(B)}\right)^{-1} \circ \left(\mathrm{id}_{T(X)} \otimes \eta_B\right) \\
&= \left(\mathrm{id}_{T(X)} \otimes \beta\right) \circ \left(\mathrm{id}_{T(X)} \otimes \eta_B\right) = \mathrm{id}_{T(X) \otimes B}.
\end{aligned}$$

A outra composição é mais complicada, precisaremos de equações auxiliares. Primeiro mostramos que

$$\alpha_X^{(B,\beta)} = (T(\mathrm{id}_X) \otimes \beta) \circ \alpha_X^{F(B)} \circ T\left(\mathrm{id}_X \otimes \eta_B\right). \tag{29}$$

De fato, lembrando que $\beta : T(B) \to B$ é morfismo em $\mathcal{C}^T$, a equação 29 segue da naturalidade de $\alpha^\star$ (ver observação 6.5), mais especificamente, segue de

$$(T(\mathrm{id}_X) \otimes \beta) \circ \alpha_X^{F(B)} = \alpha^{T(B)} \circ T\left(\mathrm{id}_X \otimes \beta\right).$$

A segunda equação auxiliar é

$$T(\mathrm{id}_X \otimes \beta) \circ \left(\alpha_{X,B}\right)^{-1} \circ \left(\mathrm{id}_{T(X)} \otimes T(\beta)\right) = T(\mathrm{id}_X \otimes \beta) \circ \left(\alpha_X^{F(B)}\right)^{-1} \circ \left(T(\mathrm{id}_X) \otimes \mu_B\right). \tag{30}$$

Começamos aplicando a naturalidade de α^{-1} com os morfismos $\mathrm{id}_{T(X)}$ e $T(\beta)$. Isso nos dá

$$T(\mathrm{id}_X \otimes \beta) \circ \left(\alpha_{X,B}\right)^{-1} \circ \left(\mathrm{id}_{T(X)} \otimes T(\beta)\right) = T(\mathrm{id}_X \otimes \beta) \circ T\left(\mathrm{id}_X \otimes T(\beta)\right) \circ \left(\alpha_{X,T(B)}\right)^{-1}.$$

Agora, usamos que β é ação e portanto

$$T(\mathrm{id}_X \otimes \beta) \circ \left(\alpha_{X,B}\right)^{-1} \circ \left(\mathrm{id}_{T(X)} \otimes T(\beta)\right) = T(\mathrm{id}_X \otimes \beta) \circ T\left(\mathrm{id}_X \otimes \mu_B\right) \circ \left(\alpha_{X,T(B)}\right)^{-1}. \tag{31}$$

Escrevendo $\alpha_{X,T(B)}$ como $\alpha_X^{FT(B)}$ e notando que a associatividade de μ implica que μ_B é morfismo em $\mathcal{C}^T$ entre $FT(B) = \left(T^2(B), \mu_{T(B)}\right)$ e $F(B) = (T(B), \mu_B)$, podemos aplicar a naturalidade de $\alpha^\star$ nos morfismos id_X e μ_B e obter

$$T(\mathrm{id}_X \otimes \mu_B) \circ \alpha_X^{FT(B)} = \alpha_X^{F(B)} \circ (T(\mathrm{id}_X) \otimes \mu_B).$$

Como $\alpha_X^{FT(B)} = \alpha_{X,T(B)}$ e $\alpha_X^{F(B)} = \alpha_{X,B}$ são inversíveis,

$$\left(\alpha_X^{F(B)}\right)^{-1} \circ T(\mathrm{id}_X \otimes \mu_B) = (T(\mathrm{id}_X) \otimes \mu_B) \circ \left(\alpha_X^{FT(B)}\right)^{-1}.$$

Aplicando isso na equação 31 obtemos exatamente o enunciado da equação 30. Finalmente, provamos que $\nu_X^{(B,\beta)} \circ \alpha_X^{(B,\beta)} = \mathrm{id}_{T(X \otimes B)}$.

$$\begin{aligned}
\nu_X^{(B,\beta)} \circ \alpha_X^{(B,\beta)} &= T(\mathrm{id}_X \otimes \beta) \circ \left(\alpha_X^{F(B)}\right)^{-1} \circ \left(\mathrm{id}_{T(X)} \otimes \eta_B\right) \circ \alpha_X^{(B,\beta)} \\
&\overset{(29)}{=} T(\mathrm{id}_X \otimes \beta) \circ \left(\alpha_X^{F(B)}\right)^{-1} \circ \left(\mathrm{id}_{T(X)} \otimes \eta_B\right) \\
&\qquad \circ (T(\mathrm{id}_X) \otimes \beta) \circ \alpha_X^{F(B)} \circ T(\mathrm{id}_X \otimes \eta_B)
\end{aligned}$$

Aplicamos a naturalidade de η no morfismo β e obtemos

$$\begin{aligned}
\nu_X^{(B,\beta)} \circ \alpha_X^{(B,\beta)} &= T(\mathrm{id}_X \otimes \beta) \circ \left(\alpha_X^{F(B)}\right)^{-1} \circ \left(\mathrm{id}_{T(X)} \otimes T(\beta)\right) \\
&\qquad \circ \left(T(\mathrm{id}_X) \otimes \eta_{T(B)}\right) \circ \alpha_X^{F(B)} \circ T(\mathrm{id}_X \otimes \eta_B) \\
&\overset{(31)}{=} T(\mathrm{id}_X \otimes \beta) \circ \left(\alpha_X^{F(B)}\right)^{-1} \circ (T(\mathrm{id}_X) \otimes \mu_B) \\
&\qquad \circ \left(T(\mathrm{id}_X) \otimes \eta_{T(B)}\right) \circ \alpha_X^{F(B)} \circ T(\mathrm{id}_X \otimes \eta_B).
\end{aligned}$$

Resta agora utilizar que η é unidade da mônada para a multiplicação μ e a ação β para produzir o resultado desejado.

$$\begin{aligned}
\nu_X^{(B,\beta)} \circ \alpha_X^{(B,\beta)} &= T(\mathrm{id}_X \otimes \beta) \circ \left(\alpha_X^{F(B)}\right)^{-1} \circ \alpha_X^{F(B)} \circ T(\mathrm{id}_X \otimes \eta_B) \\
&= T(\mathrm{id}_X \otimes \beta) \circ T(\mathrm{id}_X \otimes \eta_B) = T(\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{T(X \otimes B)}
\end{aligned}$$

■

Fazemos uma última observação no contexto do teorema 5.41. Primeiro, note que esse resultado não foi necessário para a prova que demos do teorema 6.8 e com isso, podemos utilizá-lo para demonstrar o teorema 5.41 sem o risco de um argumento cíclico. De fato, o primeiro é um caso particular do segundo. De acordo com a definição 6.6 e o teorema 5.38, uma biálgebra H é álgebra de Hopf se, e somente se, o funtor tensorial associado é mônada de Hopf. Ainda, a estrutura descrita no teorema 5.41 é, precisamente, um levantamento da estrutura fechada de H. Esse teorema, então, segue diretamente do teorema 6.8.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Gabriel Samuel de. **Categorias monoidais e o Teorema de Mac Lane para a condição estrita**. Mar. 2016. F. 137. Mestrado em Matemática com Área de Concentração em Álgebra – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

ANDRUSKIEWITSCH, Nicolás; FERRER SANTOS, Walter. The Beginnings of the Theory of Hopf Algebras. **Acta Applicandae Mathematicae**, v. 108, n. 1, p. 3, dez. 2008. ISSN 1572-9036. DOI: 10.1007/s10440-008-9393-1. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s10440-008-9393-1.

BAEZ, John C. **An Introduction to n-Categories**. [S.l.: s.n.], 1997. cite arxiv:q-alg/9705009Comment: 34 pages LaTeX, 30 encapsulated Postscript figures, 2 style files. Disponível em: http://arxiv.org/abs/q-alg/9705009.

BERGMAN, G.M. **An Invitation to General Algebra and Universal Constructions**. [S.l.]: Center for Pure e Applied Mathematics, Department of Mathematics, University of California, 1995. (Berkeley mathematics lecture notes). Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=CvfuAAAAMAAJ.

BÒHM, G. Hopf polyads, Hopf categories and Hopf group monoids viewed as Hopf monads. In.

BÖHM, G. **Hopf Algebras and Their Generalizations from a Category Theoretical Point of View**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2018. (Lecture Notes in Mathematics). ISBN 9783319981376. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=n-11DwAAQBAJ.

DASCALESCU, S.; NASTASESCU, C.; RAIANU, S. **Hopf Algebra: An Introduction**. [S.l.]: Taylor & Francis, 2000. (Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics). ISBN 9780824704810. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=pBJ6sbPHA0IC.

ECKMANN, Beno; HILTON, Peter J. Group-like structures in general categories. I. Multiplications and comultiplications. English. **Math. Ann.**, Springer, Berlin/Heidelberg, v. 145, p. 227–255, 1962. ISSN 0025-5831; 1432-1807/e.

FRAENKEL, A.A.; BAR-HILLEL, Y.; LEVY, A. **Foundations of Set Theory**. [S.l.]: Elsevier Science, 1973. (ISSN). ISBN 9780080887050. Disponível em: `https://books.google.com.br/books?id=ah2bwOwc06MC`.

KLEISLI, H. Every standard construction is induced by a pair of adjoint functors. English. **Proc. Am. Math. Soc.**, American Mathematical Society (AMS), Providence, RI, v. 16, p. 544–546, 1965. ISSN 0002-9939; 1088-6826/e.

LANDRY, Elaine; MARQUIS, Jean-Pierre. Categories in Context: Historical, Foundational, and Philosophical†. **Philosophia Mathematica**, v. 13, n. 1, p. 1–43, fev. 2005. ISSN 0031-8019. DOI: `10.1093/philmat/nki005`. eprint: `https://academic.oup.com/philmat/article-pdf/13/1/1/4466938/nki005.pdf`. Disponível em: `https://doi.org/10.1093/philmat/nki005`.

MACLANE, Saunders. **Categories for the Working Mathematician**. New York: Springer-Verlag, 1971. P. ix+262. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.

MURFET, Daniel. **Logic and linear algebra: an introduction**. [S.l.: s.n.], 2017. arXiv: `1407.2650 [math.LO]`.

TRYBULEC, Andrzej. Tarski Grothendieck set theory. **Journal of Formalized Mathematics, Axiomatics**, v. 1, 1989.

APÊNDICE A – CATEGORIAS

Nesse apêndice construiremos as noções básicas de categorias e daremos alguns exemplos das mesmas. Uma categoria busca generalizar de forma abstrata a noção de conjuntos com estruturas e funções preservando essas estruturas. Daremos alguns exemplos para motivar a definição formal mais a frente. A exposição de cada exemplo será rápida, assumindo que o leitor já teve contato com esses casos particulares no passado, uma vez que nosso objetivo é somente evidenciar alguns padrões existentes que serão usados na generalização.

Exemplo A.1. *Um semigrupo é um conjunto S munido de uma operação $\cdot$ tal que para todos $x, y, z \in S$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (propriedade associativa). Denotamos esse semigrupo pelo par ordenado $(S, \cdot)$ e abreviamos $x \cdot y$ por xy. Dados semigrupos S e T, um morfismo entre eles é uma função $h : S \to T$ tal que $h(xy) = h(x)h(y)$. Dizemos nesse caso que h preserva as estruturas dadas. Observe que $id_S : S \to S$ é um morfismo e que se U é outro semigrupo com $g : T \to U$ morfismo, então $g \circ h$ também o é. Em outras palavras, a classe de todos os morfismos de semigrupos contém as identidades e é fechada na composição.*

Exemplo A.2. *Um monoide é um semigrupo M munido de um elemento $e \in M$ tal que $xe = ex = x$ para todo $x \in M$, denotado $(M, \cdot, e)$. Um morfismo de monoides $h : M \to N$ precisa preservar toda a estrutura, ou seja, h deve ser um morfismo de semigrupos e satisfazer $h(e) = e$. Assim como no caso dos semigrupos, os morfismos de monoide são fechados na composição e contém as identidades.*

Exemplo A.3. *Um grupo é um monoide G munido de uma função $^{-1} : G \to G$ satisfazendo $xx^{-1} = x^{-1}x = e$ para todo $x \in G$. A princípio, um morfismo de grupo precisaria preservar toda a estrutura, isto é, $h(xy) = h(x)h(y)$, $h(e) = e$ e $h(x^{-1}) = h(x)^{-1}$. É possível provar que se $h(xy) = h(x)h(y)$ para todos $x, y \in G$, então h é morfismo de grupo. Como as duas outras propriedades são consequência dessa, frequentemente omitimos os requerimentos redundantes.*

Um grupo abeliano G é um grupo satisfazendo $xy = yx$ para todos $x, y \in G$. Como não houve alteração na estrutura, apenas nas propriedades requiridas, a noção de morfismo é a mesma.

Notamos que em ambos os casos, valem as considerações sobre identidade e composição.

A observação feita até agora sobre composição e identidade será verdadeira para todos os exemplos que daremos. A partir de agora não a faremos novamente.

Exemplo A.4. *Um anel é um conjunto A munido de uma estrutura de grupo abeliano, denotada $(A, +, 0, -)$ e de uma estrutura de semigrupo, denotada $(A, \cdot)$ que é distributiva,* *isto é,* $x(y+z) = xy + xz$ *e* $(x+y)z = xz + yz$. *Um morfismo de anel é uma função* $h : A \to B$ *que é morfismo entre as estruturas de grupo abeliano bem como entre as de monoide. Explicitamente,* $h(x+y) = h(x) + h(y)$ *e* $h(xy) = h(x)h(y)$.

Um anel com unidade é um anel A *munido de um elemento* $1 \in A$ *tal que* $(A, \cdot, 1)$ *é monoide. Se um morfismo de anel satisfaz* $h(1) = 1$ *dizemos que este é unitário. Observe que um morfismo de anéis entre anéis com unidade não precisa ser unitário. Nesse trabalho daremos o nome "morfismo de anéis com unidade" apenas aos que forem unitários.*

Um anel é dito comutativo se vale $xy = yx$ *para todos* $x, y \in A$. *Note que o adjetivo comutativo se refere exclusivamente à multiplicação uma vez que a adição de um anel é, por definição, comutativa. Como não houve mudança de estrutura também não haverá mudança na noção de morfismo.*

Exemplo A.5. *Um domínio de integridade é um anel comutativo com unidade satisfazendo* $xy = 0 \implies x = 0$ *ou* $y = 0$, *não havendo alterações na noção de morfismo.*

Um corpo é um anel comutativo com unidade $\mathbb{K}$ *munido de uma função* ${}^{-1} : \mathbb{K}^* \to \mathbb{K}^*$ *(aqui,* $\mathbb{K}^*$ *representa o conjunto* $\mathbb{K} \setminus \{0\}$*) satisfazendo* $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ *para todo* $x \in \mathbb{K}^*$. *Um morfismo de corpos é um morfismo de anéis comutativos com unidade que preserva a inversa, isto é,* $h(x^{-1}) = h(x)^{-1}$. *Há redundância nos requerimentos: Basta uma função ser um morfismo de anéis para que a mesma seja morfismo de corpos. Os requerimento mínimos, então, são* $h(x+y) = h(x) + h(y)$ *e* $h(xy) = h(x)h(y)$. *Observamos também que todo corpo é um domínio de integridade.*

Exemplo A.6. *Para um exemplo menos algébrico, podemos considerar espaços topológicos. Dado um conjunto* X, *uma topologia sobre* X *é um conjunto* $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ *(no qual* $\mathcal{P}(X)$ *é a coleção dos subconjuntos de* X*) tal que*

1. $\emptyset, X \in \tau$;
2. $U, V \in \tau \implies U \cap V \in \tau$;
3. $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Considere $f : X \to Y$ *com* (X, τ_X) *e* (Y, τ_Y) *espaços topológicos. Se a imagem inversa* $f^{-1}(V) = \{x \in X; f(x) \in V\} \in \tau_X$ *para todo* $V \in \tau_Y$, *dizemos que* f *é contínua. Mesmo parecendo diferente das noções anteriores, essa ainda é uma noção de preservação de estrutura.*

Observando as estruturas acima, todas tem algum tipo de objeto estudado, nesses caso, um conjunto com alguma estrutura. Chamaremos estes de objetos. Dados dois objetos X e Y, temos uma noção de morfismo, no caso dos exemplos são funções preservando a estrutura. Esses morfismos não necessariamente são todas as possíveis funções mas ao menos estes podem ser compostos (desde que os domínios e contradomínios sejam compatíveis) para obter outro morfismo. Além disso, a função identidade serve como elemento neutro sempre que a mesma pode ser composta e a composição, quando possível ser feita, é associativa. Essas características, em nível abstrato, são o que definem uma categoria.

Definição A.7. *Uma categoria $\mathcal{C}$ é composta por uma classe $\mathcal{C}^0$ chamada classe de objetos de $\mathcal{C}$ e para cada par (X, Y) de objetos, uma classe $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ chamada classe de morfismos de X para Y em $\mathcal{C}$. Ainda, munimos uma categoria $\mathcal{C}$ uma composição levando morfismos $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ em um morfismo $g \circ f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$ além de um morfismo $id_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X)$ para cada objeto X satisfazendo*

1. *$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, para quaisquer $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ e $h \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, W)$;*

2. *$id_Y \circ f = f = f \circ id_X$, para qualquer $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$.*

Quando não houver ambiguidades (por exemplo, quando trabalhamos com uma única categoria relevante) denotamos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ simplesmente por $\mathrm{Hom}(X, Y)$. Ainda, dado $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ morfismo, denotamos o fato de f estar nessa classe por $f : X \to Y$.

Observação A.8. *Ao trabalhar diretamente com classes e conjuntos surgem vários problemas fundamentais de existência. Com o objetivo de simplificar a discussão não levaremos em conta a maior parte desses problemas mas é importante lembrar que tais problemas são, de fato, relevantes do ponto de vista formal. Deixaremos esses pontos por meio de referências bibliográficas. Uma boa exposição com ênfase filosófica escrita na época em que esses problemas estavam sendo estudados é o livro (FRAENKEL et al., 1973).*

Todos os exemplos citados anteriormente são categorias. Nessas, os objetos são dados por conjuntos com alguma estrutura e os morfismos por funções preservando essas estruturas. A composição e a identidade é dada da forma usual para funções. Isso nos revela a importância de morfismos serem fechados na composição e conterem todas as identidades, caso contrário não poderíamos definir as componentes necessárias para a definição de categorias. Daremos agora mais exemplos de categorias que serão usados recorrentemente durante o texto.

Exemplo A.9. *A categoria Set é formada por conjuntos como objetos e funções como morfismos. A composição e as identidades são dadas da maneira usual.*

O exemplo acima corresponde a um dos mais importantes que iremos usar. Muitas das nossas categorias serão obtidas tomando conjuntos com estruturas extras.

Exemplo A.10. *Seja R um anel. A categoria ${}_R\mathcal{M}$ dos R-módulos à esquerda tem como objetos, denominados R-módulos a esquerda ou simplesmente módulos, grupos abelianos $(M, +, 0)$ munidos de uma função $\triangleright : R \times M \to M$, denominada ação, tal que*

1. $(rs) \triangleright m = r \triangleright (s \triangleright m)$, *para todos* $r, s \in R$ *e* $m \in M$;
2. $(r + s) \triangleright m = (r \triangleright m) + (s \triangleright m)$, *para todos* $r, s \in R$ *e* $m \in M$;
3. $r \triangleright (m + n) = (r \triangleright m) + (r \triangleright n)$, *para todos* $r \in R$ *e* $m, n \in M$.

Dados módulos M e N, a classe $Hom(M, N)$ é dada pelos morfismos de módulos entre M e N, isto é, morfismos de grupos $h : M \to N$ tais que $h(r \triangleright m) = r \triangleright h(m)$ para quaisquer $r \in R$ e $m \in M$. A composição e a identidade são as mesmas de funções.

Observação A.11. *Uma ação $\triangleright$ nos resulta em duas famílias de funções. Uma se dá por $\lambda_m : R \to M$ para cada $m \in M$ e outra por $\rho_r : M \to M$ para cada $r \in R$ tais que $\lambda_m(r) = r \triangleright m = \rho_r(m)$. Observando a definição vemos que as propriedades correspondem respectivamente a*

1. $\lambda_m(rs) = r \triangleright \lambda_m(s)$;
2. $\lambda_m(r + s) = \lambda_m(r) + \lambda_m(s)$;
3. $\rho_r(m + n) = \rho_r(m) + \rho_r(n)$.

Em particular, cada λ_m e ρ_r é um morfismo de grupos abelianos (itens 2 e 3).

Exemplo A.12. *Se R é um anel, então R é um R-módulo tomando como ação a multiplicação em R. Com isso, $\lambda_m : R \to M$ acima é morfismo de R-módulos.*

Exemplo A.13. *Seja R um anel comutativo. A categoria Alg_R das R-álgebras tem como objetos R-módulos A munidos de uma operação $\cdot : A \times A \to A$ (como de costume, denotamos $\cdot(x, y) = x \cdot y = xy$) satisfazendo:*

1. $(r \triangleright x)y = r \triangleright (xy) = x(r \triangleright y)$;
2. $x(y + z) = xy + xz$;
3. $(x + y)z = xz + yz$.

Tais objetos são denominados R-álgebras ou álgebras sobre R. Um morfismo nessa categoria é um morfismo de R-módulos $h : A \to B$ satisfazendo $h(xy) = h(x)h(y)$.

Dizemos que a álgebra A é associativa se a sua multiplicação o for e que A é unitária se a sua multiplicação possui elemento neutro.

Observação A.14. *Cabe a mesma observação de antes. Se $\lambda_x, \rho_y : A \to A$ são definidas por $\lambda_x(y) = xy = \rho_y(x)$, então as propriedades acima são re-escritas como*

1. $\rho_y(r \triangleright x) = r \triangleright \rho_y(x)$ e $\lambda_x(r \triangleright y) = r \triangleright \lambda_x(y)$;

2. $\lambda_x(y + z) = \lambda_x(y) + \lambda_x(z)$;

3. $\rho_z(x + y) = \rho_z(x) + \rho_z(y)$.

Obtemos dessas que cada λ_x e ρ_y é um morfismo de R-módulos. Para A associativa, essa propriedade pode ser escrita como

$$\lambda_x(\lambda_y(z)) = x(yz) = (xy)z = \lambda_{xy}(z);$$
$$\rho_z(\rho_y(x)) = (xy)z = x(yz) = \rho_{yz}(x).$$

Em outras palavras, $\lambda_x \circ \lambda_y = \lambda_{xy}$ e $\rho_z \circ \rho_y = \rho_{yz}$.

Finalmente, observe que A é associativa se, e somente se, $(A, +, \cdot)$ é um anel. Nesse caso, um morfismo de álgebras é simultaneamente um morfismo de R-módulos e de anéis e A é unitária se, e somente se, esse anel possui unidade.

Exemplo A.15. *Seja M um R-módulo sobre um anel comutativo R e considere o conjunto $Hom(M, M)$ dos morfismos de R-módulo com domínio e contradomínio iguais a M. Definimos em $Hom(M, M)$ uma estrutura de R-módulo por $(r \triangleright h)(m) = h(r \triangleright m)$. Ainda, definimos em $Hom(M, M)$ uma estrutura de R-álgebra via composição. Observe que esse é uma R-álgebra associativa e que ela possui unidade id_M.*

Segue da observação acima que uma R-álgebra A é associativa se, e somente se, a função $\lambda : A \to Hom(A, A)$ definida por $\lambda(x) = \lambda_x$ é um morfismo de álgebra. Observe que a função ρ análoga não necessariamente é um morfismo de álgebra. A função satisfaz $\rho(yz) = \rho(z) \circ \rho(y)$. Uma função dessa forma é comumente chamada de um antimorfismo de álgebra. Não estudaremos antimorfismos nesse texto.

Já vimos que podemos formar a categoria dos monoides. Mais do que isso, temos uma forma de definir categoricamente o que é um monoide. Isso é feito nos dois exemplos abaixo.

Exemplo A.16. *Seja M um monoide. Definimos uma categoria $\mathcal{M}(M)$ que tem um único objeto M (isso significa que M é um objeto de $\mathcal{M}(M)$ e não que os elementos de M sejam objetos) e que tem como morfismos os elementos de M. Em outras palavras, $Hom(M, M) = M$. Definimos a composição como a operação do monoide e a identidade id_M como a identidade e do monoide. Note que isso define uma categoria pois a operação já é associativa e unitária.*

Exemplo A.17. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com um único objeto X. Defina uma estrutura de monoide sobre $M = Hom(X, X)$ pela composição. Então M é monoide com identidade $e = id_X$. Note que se aplicamos o exemplo anterior no monoide M obtemos uma categoria muito parecida com $\mathcal{C}$. A diferença entre elas é que o único objeto de $\mathcal{C}$ é X enquanto o único objeto de $\mathcal{M}(M)$ é $M = Hom(X, X)$.*

Devido a isso, normalmente nos referimos a uma categoria com um único objeto como sendo um monoide. O exemplo anterior pode ser generalizado.

Exemplo A.18. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e X um objeto de $\mathcal{C}$. Podemos definir uma estrutura de monoide sobre $M = Hom(X, X)$ por meio da composição e da identidade na categoria $\mathcal{C}$.*

Como de costume, podemos utilizar categorias já conhecidas para gerar novas.

Exemplo A.19. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Então definimos a categoria $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ que tem como objetos pares da forma (X, Y) com $X \in \mathcal{C}^0$ e $Y \in \mathcal{D}^0$. Ainda, $Hom((X, Y), (X', Y'))$ é formada por pares (g, h) nos quais $g : X \to X'$ e $h : Y \to Y'$. A composição é dada pontualmente e a identidade em um objeto (X, Y) é definida por $id_{(X,Y)} = (id_X, id_Y)$. Provamos que isso de fato nos dá uma categoria.*

1. $\left((g'', h'') \circ (g', h')\right) \circ (g, h) = \left(g'' \circ g', h'' \circ h'\right) \circ (g, h) = \left(g'' \circ g' \circ g, h'' \circ h' \circ h\right) = \left(g'', h''\right) \circ \left(g' \circ g, h' \circ h\right) = \left(g'', h''\right) \circ \left((g', h') \circ (g, h)\right)$
2. $(g, h) \circ (id_X, id_Y) = (g \circ id_X, h \circ id_Y) = (g, h)$
3. $(id_{X'}, id_{Y'}) \circ (g, h) = (id_{X'} \circ g, id_{Y'} \circ h) = (g, h)$

Definição A.20. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Uma categoria $\mathcal{C}'$ é dita ser uma <u>subcategoria de $\mathcal{C}$</u> quando $\mathcal{C}'^0 \subseteq \mathcal{C}^0$, para todos X e Y objetos de $\mathcal{C}'$, $Hom_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e se a composição e a unidade de $\mathcal{C}'$ coincidem com as de $\mathcal{C}$. Se além disso temos $Hom_{\mathcal{C}'}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, então dizemos que $\mathcal{C}'$ é <u>subcategoria cheia de $\mathcal{C}$</u>.*

Definição A.21. *Seja $\mathcal{C}$ um categoria. Definimos a categoria $\mathcal{C}^{op}$ tendo como objetos os de $\mathcal{C}$ e definimos $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = Hom_{C}(Y, X)$. A composição em $\mathcal{C}^{op}$ é dada por $g \circ^{op} f = f \circ g$. Observe que a identidade em $\mathcal{C}^{op}$ continua sendo a mesma de $\mathcal{C}$.*

Finalizaremos definindo grafos e mostrando a relação que eles têm com categorias. Intuitivamente, um grafo (dirigido) pode ser visto como pontos no plano conectados por setas.

Exemplo A.22.

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}
$$

Considere uma seta *a*. A seta tem um ponto de partida e um ponto de chegada bem definidos. Obtemos assim funções *s* e *t* (do inglês, *source* e *target*) levando cada seta, respectivamente, em seu ponto de partida e seu ponto de chegada. Obtemos então uma quádrupla ordenada (V, A, s, t) onde V é o conjunto de vértices (pontos) do grafo, A o conjunto de setas e $s, t : A \to V$ as funções mencionadas acima. Abstraindo a interpretação geométrica acima, podemos considerar os conjuntos V e A como conjuntos arbitrários, ou até classes próprias. Formalizando:

Definição A.23. *Um grafo é uma quádrupla ordenada $G = (V, A, s, t)$ na qual V e A são classes e $s, t : V \to A$ são funções. Denominamos V a classe de vértices (ou pontos) e A a classe de arestas (ou setas) do grafo. Ainda, dada $a \in A$, denominamos $s(a)$ o vértice de partida de a e $t(a)$ o vértice de chegada de a. Dizemos que G é um grafo pequeno se V e A são conjuntos. Se u e v são vértices, denotamos por $Ar(u, v)$ a classe das arestas a tais que $s(a) = u$ e $t(a) = v$. Também denotamos o fato de que $a \in Ar(u, v)$ por $a : u \to v$.*

Para representar visualmente um grafo finito (ou uma parte finita do grafo), representamos cada vértice por um ponto e cada aresta a por uma seta de $s(a)$ até $t(a)$. Caso tenhamos um nome para um vértice, podemos usar esse nome como representação do ponto (ver exemplo abaixo) e no caso de uma aresta que foi nomeada, podemos acrescentar esse nome próximo à aresta.

Exemplo A.24. *O grafo abaixo é da mesma forma que o presente no exemplo A.22 mas com seus elementos nomeados.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"] & Z \arrow[d, "\mu"] \\
X' \arrow[r, shift left, "g'"] \arrow[r, shift right, "h'"'] & Y' \arrow[r, "f'"'] & Z'
\end{tikzcd}$$

A primeira relação com categorias se dá vendo uma categoria como um grafo. Dada uma categoria $\mathcal{C}$, denote por $\mathcal{C}^1$ a união disjunta das classes $\mathrm{Hom}(X, Y)$ com $X, Y \in \mathcal{C}^0$.

Exemplo A.25. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Então $\mathcal{C}$ define um grafo $G = (V, A, s, t)$ no qual $V = \mathcal{C}^0$ e $A = \mathcal{C}^1$. Ainda, para cada $h \in \mathcal{C}^1$, considere os objetos X e Y que dão origem a h, isto é, tais que $h \in Hom(X, Y)$. Definimos $s(h) = X$ e $t(h) = Y$.*

Note que na maioria dos nossos exemplos, $\mathcal{C}^1$ era um conjunto de funções e dada $h \in \mathcal{C}^1$, $s(h)$ era o domínio de h enquanto $t(h)$ era o contradomínio de h. Generalizamos essa notação.

Definição A.26. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $h \in \mathcal{C}^1$. Nas notações do exemplo A.25, dizemos que $s(h)$ é o domínio de h e que $t(h)$ é o contradomínio de h. Denotamos esses objetos respectivamente por $Dom(h)$ e $CoDom(h)$.*

Outra forma de relacionar ambos é considerando a categoria dos grafos. Para isso, precisamos definir o que é um morfismo de grafos. Intuitivamente, dados grafos $G_1 = (V_1, A_1, s_1, t_1)$ e $G_2 = (A_2, V_2, s_2, t_2)$ precisamos transformar cada vértice de G_1 em um vértice de G_2 e cada aresta a de G_1 em uma aresta de G_2. Preservar a estrutura significa garantir que arestas correspondentes tenham seus pontos de partida correspondentes, bem como seus pontos de chegada. Com isso, precisamos de duas funções $h_V : V_1 \to V_2$ e $h_A : A_1 \to A_2$. Se $a : u \to v$ em G_1 então $a' = h_A(a)$ é a aresta correspondente a a e portanto, $s_2(a')$ corresponde a u bem como $t_2(a')$ corresponde a v. Essa definição é organizada abaixo.

Definição A.27. *Considere $G_1 = (V_1, A_1, s_1, t_1)$ e $G_2 = (A_2, V_2, s_2, t_2)$ grafos. Um* <u>*morfismo de grafos entre G_1 e G_2*</u> *é um par $h = (h_V, h_A)$ satisfazendo $s_2 \circ h_A = h_V \circ s_1$ e $t_2 \circ h_A = h_v \circ t_2$. Equivalentemente, h leva cada aresta $a : u \to v$ de G_1 em uma aresta $h_A(a) : h_V(u) \to h_V(v)$. Quando não houver ambiguidades, para $v \in V_1$ denotamos $h(v) = h_V(v)$ e para $a \in A_1$ denotamos $h(a) = h_A(a)$.*

Podemos então definir a categoria dos grafos. Pode ser conveniente se limitar apenas a grafos pequenos pelos motivos mencionados na observação A.8 mas não nos preocuparemos formalmente com esse ponto.

Definição A.28. *A categoria* <u>*Graph*</u> *tem grafos como objetos e morfismos entre eles como morfismos. A composição é dada por $(g_V, g_A) \circ (h_V, h_A) = (g_V \circ h_V, g_A \circ h_A)$ e a unidade de um grafo $G = (V, A, s, t)$ por $id_G = (id_V, id_A)$.*

Provaremos que a definição acima de fato nos dá uma categoria. Para isso, precisamos que as funções identidade sejam morfismos e que a composição de funções seja fechada nos morfismos. De fato, dada uma aresta $a : u \to v$ apropriada, essa aresta é levada em uma aresta $h(a) : h(u) \to h(v)$ que por sua vez é levada em $g \circ h : g \circ h(u) \to g \circ h(v)$. Segue que a composição de morfismos também o é. Para a identidade, simplesmente observe que $\mathrm{id}(a) : \mathrm{id}(u) \to \mathrm{id}(v)$. Concluímos que <u>Graph</u> é uma categoria.

Em uma terceira forma de relacionar grafos e categorias, podemos fazer a seguinte pergunta: dado um grafo G, sob quais hipóteses este é uma categoria? Para que G seja uma categoria, precisamos definir sobre ele uma composição de arestas e arestas identidades tais que os axiomas de categorias sejam verdadeiros. Não responderemos a pergunta em geral mas daremos um caso particular em que isso é possível.

Definição A.29. *Seja $G = (V, A, s, t)$ um grafo. Um* <u>*caminho de G*</u> *é uma lista*

$$(v_1, a_1, v_2, a_2, \ldots, v_{n-1}, a_{n-1}, v_n)$$

tal que

1. $v_1, \ldots v_n$ *são vértices;*

2. $a_1, \ldots a_{n-1}$ *são arestas;*

3. $v_i = s(a_i)$ *para todo índice* $i \in \{1, \ldots, n-1\}$*;*

4. $v_{i+1} = t(a_i)$ *para todo índice* $i \in \{1, \ldots, n-1\}$*.*

Dado um vértice v, o caminho trivial de v é (v). Também definimos os vértices iniciais e finais de um caminho respectivamente por

$$s(v_1, a_1, \ldots, v_{n-1}, a_{n-1}, v_n) = v_1;$$
$$t(v_1, a_1, \ldots, v_{n-1}, a_{n-1}, v_n) = v_n.$$

Se γ é um caminho satisfazendo $s(\gamma) = u$ e $t(\gamma) = v$, denotamos esse fato por $\gamma : u \to v$. Para uma aresta a, definimos o caminho associado a a por $(s(a), a, t(a))$. Observe que para $\overline{a} = (s(a), a, t(a))$ temos $s(\overline{a}) = s(a)$ e $t(\overline{a}) = t(a)$.

Em termos intuitivos, o caminho $(v_1, a_1, v_2, a_2, \ldots, v_{n-1}, a_{n-1}, v_n)$ representa um movimento por vértices no grafo passando por arestas. Esse movimento começa em v_1, passando em seguida por v_2 por intermédio da aresta a_1 e assim por diante. As condições $v_i = s(a_i)$ e $v_{i+1} = t(a_i)$ garantem que a aresta a_i faz corretamente a passagem do vértice v_i para v_{i+1}. O caminho trivial de v começa em v e fica parado. Observe que este é de fato um caminho: a condição 1 da definição é trivial e as demais condições são satisfeitas por vacuidade.

Note que se temos dois caminhos γ e δ, podemos percorrer γ e então percorrer δ desde que $t(\gamma) = s(\delta)$. Nesse caso, obtemos um só caminho começando em $s(\gamma)$ e terminando em $t(\delta)$. Isso é muito parecido com composição de funções e isso motiva a definição abaixo.

Definição A.30. *Sejam $\gamma = (u_1, a_1, \ldots u_{n-1}, a_{n-1}, u_n)$ e $\delta = (v_1, b_1, \ldots v_{k-1}, b_{k-1}, v_k)$ caminhos. Se $u_n = v_1$, definimos a composição $\delta \circ \gamma : u_1 \to v_k$ por*

$$\delta \circ \gamma = (u_1, a_1, \ldots u_{n-1}, a_{n-1}, u_n = v_1, b_1, \ldots v_{k-1}, b_{k-1}, v_k)$$

Temos então os seguintes resultados:

Definição A.31. *Dado um grafo $G = (V, A, s, t)$, o grafo de caminhos de G é dado por $Path(G) = (V, P, s, t)$ no qual P é a classe dos caminhos de G (s e t nesse caso denotam as função de caminho).*

Teorema A.32. *Seja G um grafo. Então $\varphi = (\varphi_V, \varphi_A)$ definida por $\varphi_V(v) = v$ e $\varphi_A(a) = (s(a), a, t(a))$ é um morfismo de grafos entre G e $Path(G)$. Além disso, φ_V e φ_A são injetoras.*

Demonstração. Como notamos na definição A.29,

$$\varphi_V(s(a)) = s(a) = s(s(a), a, t(a)) = s(\varphi_A(a)) \text{ e} \tag{32}$$

$$\varphi_V(t(a)) = t(a) = t(s(a), a, t(a)) = t(\varphi_A(a)). \tag{33}$$

As injetividades são triviais. ■

Exemplo A.33. *Dado um grafo G, podemos definir a* <u>*categoria de caminhos de G*</u> *tendo como objetos os vértices de G, como morfismos os caminhos de G, a composição como definida em A.30 e a identidade num objeto v definida pelo caminho trivial* (v).

A.1 FUNTORES

Definimos uma noção de morfismo para várias estruturas, em particular, funções entre as estruturas que as preservam. De forma similar, temos funtores que são funções (na verdade pares, como no caso de grafos) que preservam as estruturas.

Como toda categoria possui um grafo subjacente, temos aí um bom ponto de início. Vejamos como um morfismo *de grafos* entre categorias se escreve nesse caso. Considere categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Temos um par $F = (F_V, F_A)$ de funções com $F_V : \mathcal{C}^0 \to \mathcal{D}^0$ e $F_A : \mathcal{C}^1 \to \mathcal{D}^1$. Note que se $h : X \to Y$, então $F(h) : F(X) \to F(Y)$. Podemos então separar F_A em funções "menores" da forma $F_{X,Y} : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$ nas quais $F_{X,Y}(h) = F_A(h) = F(h)$.

Agora basta ver como esses morfismos de grafo podem preservar o restante da estrutura, isto é, composições e identidades. Motivado pela definição de morfismo de monoide, observe que $g \circ h$ faz sentido se, e somente se, $F(g) \circ F(h)$ o faz. Pedimos que $F(g \circ h) = F(g) \circ F(h)$ nesse caso. Mais ainda, é necessário que $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ para qualquer objeto X.

Definição A.34. *Sejam* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{D}$ *categorias. Um* <u>*funtor de* $\mathcal{C}$ *para* $\mathcal{D}$</u> *é uma função* $F : \mathcal{C}^0 \to \mathcal{D}^0$ *munida de funções* $F_{X,Y} : Hom(X, Y) \to Hom(F(X), F(Y))$ *para quaisquer objetos X e Y de forma que*

1. $F_{X,Z}(g \circ h) = F_{Y,Z}(g) \circ F_{X,Y}(h)$, *para quaisquer* $h \in Hom(X, Y)$ *e* $g \in Hom(Y, Z)$;

2. $F_{X,X}(id_X) = id_{F(X)}$ *para todo objeto X.*

Denotamos $F_{X,Y}(h)$ *por* $F(h)$ *sempre que não houver ambiguidades.*

Dizemos que F é <u>*injetor*</u> *se ele se aplica de forma injetora nos objetos. Dizemos que F é* <u>*fiel*</u> *se fixados X e Y, então a função* $F_{X,Y}$ *é injetora.*

Podemos perguntar se a composição de funtores é um funtor e se o funtor identidade (isto é, o funtor obtido pelo morfismo de grafos identidade) é, de fato, um funtor. Nesse último caso é bem claro:

$$\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(g \circ h) = g \circ h = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}(g) \circ \mathrm{id}_{\mathcal{C}}(h);$$
$$\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(X)}.$$

Também é verdade a primeira afirmação. Se $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ são funtores, então

$$\begin{aligned}(G \circ F)(g \circ h) &= G(F(g \circ h)) = G(F(g) \circ F(h)) \\ &= G(F(g)) \circ G(F(h)) = (G \circ F)(g) \circ (G \circ F)(h); \\ (G \circ F)(\mathrm{id}_X) &= G(F(\mathrm{id}_X)) = G\left(\mathrm{id}_{F(X)}\right) = \mathrm{id}_{(G \circ F)(X)}.\end{aligned}$$

Na demonstração anterior, o símbolo $\circ$ é usado para denotar composição de funtores e composição de morfismos. Para evitar uma notação muito pesada, denotaremos $G \circ F = GF$ a partir de agora.

Observação A.35. *Poderíamos considerar a categoria $\underline{Cat}$ das categorias porém o adendo na observação A.8 vale aqui em proporção maior. Poderíamos, caso tal categoria existisse, obter versões de paradoxos previamente resolvidos, tais como o paradoxo de Russel. Isto é, considerando $\underline{Cat}'$ a subcategoria cheia de $\underline{Cat}$ cujos objetos são categorias $\mathcal{C}$ tais que $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}^0$, nos perguntamos se $\underline{Cat}' \in \underline{Cat}'^0$.*

Construindo formalmente a teoria de conjuntos que trabalhamos, esse paradoxo não é preocupante uma vez que construir $\underline{Cat}$ como acima é impossível. Em vez disso, construímos categorias menores que contém apenas algumas categorias como objetos.

Esboçamos intuitivamente outra possível solução. Podemos fixar uma teoria de conjuntos e pensar em uma categoria dentro dessa teoria, cuja totalidade (o que quer que isso signifique) dos objetos são conjuntos nessa teoria e para cada par de objetos, a totalidade dos morfismos entre eles também são conjuntos. Por motivos similares aos que mencionamos, não podemos ter o conjunto de todas as categorias e portanto não podemos ter a categoria de todas as categorias.

Ainda assim, podemos estender a teoria de conjuntos para uma maior, esta composta por "conjuntos pequenos", ou seja, os conjuntos da teoria que havíamos fixado inicialmente, bem como outros conjuntos maiores, incluindo o conjunto das categoria dentro da teoria menor, o que chamaremos de "categorias pequenas". Podemos também considerar categorias dentro da teoria de conjuntos maior e essas incluem a categoria de todas as categoria pequenas. Não podemos, mesmo dentro dessa teoria maior, falar na categoria de todas as categorias uma vez que as novas categorias acrescentadas impossibilitam a criação de um conjunto de todas elas mas podemos repetir esse processo para obter teorias de conjuntos cada vez maiores e portanto noções cada vez mais abrangentes de categorias.

O leitor interessado pode encontrar uma exposição dessas extensões da teoria de conjuntos em (TRYBULEC, 1989) bem como aplicações disso para categorias em (BERGMAN, 1995).

Definição A.36. *Uma categoria de categorias é uma categoria cujos objetos são categorias (não necessariamente todas) e cujos morfismos são todos os funtores entre dois objetos. Em particular, definimos a categoria das categorias pequenas dessa forma, tomando como objetos as categorias tais que $\mathcal{C}^0$ e $\mathcal{C}^1$ são conjuntos.*

Observação A.37. *Note que se $\mathcal{C}$ é categoria pequena, se, e somente se, seu grafo associado é pequeno. De forma análoga, um grafo G é pequeno se, e somente se, sua categoria de caminhos é pequena.*

Vários exemplos de funtores podem ser dados utilizando estruturas concretas já construídas. Temos vários exemplos de pares $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ de categorias para as quais os objetos de $\mathcal{C}$ são objetos de $\mathcal{D}$ com alguma estrutura extra (e possivelmente propriedades extras) e os morfismos de $\mathcal{C}$ são morfismos de $\mathcal{D}$ que respeitam essa estrutura extra.

Exemplos incluem $\mathcal{D}$ = Set e $\mathcal{C}$ como qualquer das categoria de anéis, grupos, monoides, R-módulos, espaços topológicos, etc... Outros exemplos são anéis e grupos abelianos, grupos e monoides, R-álgebras e R-módulos e até mesmo $\mathcal{C}$ como a categoria das categorias pequenas e $\mathcal{D}$ como a categoria dos grafos pequenos. Normalmente, denotamos por $U : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ o funtor levando objetos de $\mathcal{C}$ no objeto de $\mathcal{D}$ obtido esquecendo essa estrutura extra e levando cada morfismo em si mesmo (ou em seu representante em $\mathcal{D}$, como no caso de categorias e grafos).

Definição A.38. *Considere duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Um funtor contravariante de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$ é um funtor $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$.*

Note que na definição acima, um funtor contravariante leva um objeto X de $\mathcal{C}$ em um objeto $F(X)$ de $\mathcal{D}$ e um morfismo $h : X \to Y$ em um morfismo $F(h) : F(Y) \to F(X)$. Além disso, deve valer que $F(g \circ h) = F(h \circ^{op} g) = F(h) \circ F(h)$. Segue que um funtor contravariante também pode ser visto como um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$. Observe também que um funtor $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}^{op}$ é simplesmente um funtor de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$, não necessitando de uma definição especial.

Exemplo A.39. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Então o funtor $id_{\mathcal{C}^{op}} : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{C}^{op}$ é um funtor contravariante de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{C}^{op}$. Esse também pode ser visto como um funtor contravariante de $\mathcal{C}^{op}$ para $\mathcal{C}$.*

A.2 OBJETO INICIAL E OBJETO FINAL

Frequentemente consideramos objetos X de uma categoria $\mathcal{C}$ com alguma estrutura que são "universais", no sentido de que para cado objeto Y com a mesma estrutura, existe um único morfismo entre esses objetos (fixando domínio em X ou contradomínio em X) que preserva tal propriedade, chamados de limites (ou colimites). Uma exposição detalhada pode ser encontrada em (BERGMAN, 1995).

Limites e colimites são, respectivamente, objetos finais e iniciais (que definiremos em breve) de alguma categoria, o que mostra a importância de se estudar tais objetos. No capítulo 3 damos um exemplo, construindo coequalizadores como objetos iniciais da chamada categoria de forquilhas. Intuitivamente, a estrutura de um objeto final ou inicial é simplesmente esse objeto, resultando na definição a seguir.

Definição A.40. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Dizemos que F é objeto final de $\mathcal{C}$ quando para todo objeto X de $\mathcal{C}$, existe um único morfismo $h : F \to X$. Dizemos que I é objeto inicial de $\mathcal{C}$ quando para todo objeto Y de $\mathcal{C}$, existe um único morfismo $g : Y \to I$.*

Teorema A.41. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Se F é objeto final de $\mathcal{C}$, então F é objeto inicial de $\mathcal{C}^{op}$. Se I é objeto inicial de $\mathcal{C}$, então I é objeto final de $\mathcal{C}^{op}$.*

Demonstração. Considere X um objeto de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ (isto é, X é um objeto de $\mathcal{C}$). Então existe um único $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F)$ e um único $g :\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I, X)$. Segue que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(F, X) = \{h\}$ e $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, I) = \{g\}$, do que segue que F e I são, respectivamente, objeto inicial e objeto final de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. ■

Observação A.42. *Uma propriedade provada para todo objeto final de toda categoria $\mathcal{C}$ é valida, em particular, para objetos finais de $\mathcal{C}^{op}$, isto é, objetos iniciais de $\mathcal{C}$, e analogamente para propriedades provadas para todo objeto inicial de toda categoria $\mathcal{C}$. Esse argumento é frequentemente chamado de argumento de dualidade.*

Teorema A.43. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Se F e F' são objetos finais, então o único morfismo $\varphi : F \to F'$ é um isomorfismo com inversa dada pelo único morfismo $\varphi' : F' \to F$. Analogamente, se I e I' são objetos finais, então o único morfismo $\psi : I \to I'$ é um isomorfismo com inversa dada pelo único morfismo $\psi' : I' \to I$.*

Demonstração. Observe que $\varphi \circ \varphi'$ e $\mathrm{id}_{F'}$ são morfismos de F' para F'. Como F' é objeto final, segue que $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_{F'}$. Da mesma forma, $\varphi' \circ \varphi$ e id_F são morfismos de F para F, do que segue que $\varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}_F$. Segue que φ é isomorfismo e $\varphi' = \varphi^{-1}$. O caso do objeto inicial segue por dualidade. ■

Observação A.44. *Como quaisquer objetos finais (ou iniciais) de uma categoria são isomorfos, escrevemos simplesmente "o objeto final" (ou "o objeto inicial") da categoria.*

Exemplo A.45. *Na categoria Set dos conjuntos, o objeto inicial é* $\emptyset$ *e os objetos finais são os conjuntos unitários. De fato, a única função que tem o conjunto vazio como domínio é a função vazia e a única função que tem* $\{*\}$ *como contradomínio é a função constante.*

Exemplo A.46. *Na categoria* $_R\mathcal{M}$*, os conjuntos unitários são simultaneamente objetos iniciais e finais. De fato,* $\{*\}$ *é objeto final pois a única função que o tem como contradomínio é, de fato, morfismo de módulo. Por outro lado,* $\{*\}$ *é objeto inicial pois nesse caso* $*$ *é o elemento neutro da adição, que deve ser preservado por morfismos de módulos, isto é, se* M *é um* R*-módulo com* $0 \in M$ *elemento neutro da adição, então* $h : \{*\} \to M$ *definida por* $h(*) = 0$ *é o único morfismo de módulos de* $\{*\}$ *para* M*.*

Exemplo A.47. *Na categoria dos anéis com unidade,* $\mathbb{Z}$ *é objeto inicial e os anéis triviais* $*$ *são objetos finais.* $\mathbb{Z}$ *ser objeto inicial se deve ao fato de* $h(1_R) = 1_S$ *ser um requerimento da definição de morfismos na categoria dos com unidade, dessa forma, dado* R *anel com unidade, temos que o único morfismo* $h : \mathbb{Z} \to R$ *é dado da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} h(0) &= 0_R; \\ h(n+1) &= h(n) + 1_R, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}; \\ h(-n) &= -h(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

A.3 OBJETOS LIVRES

Falaremos de objetos livres. Para isso começaremos com o exemplo que motivará nossa definição. Seja V um espaço vetorial. Em álgebra linear definimos uma base (de Hamel) de V como um subconjunto $B \subseteq V$ que é linearmente independente e gera V.

Também prova-se que B é base de V se, e somente se, para todo espaço vetorial W e toda função $f : B \to W$ existe um único morfismo $h : V \to W$ que estende f. Notando que uma transformação linear nada mais é do que um morfismo na categoria de espaços vetoriais, vemos que esse caracterização de base é dada apenas em termos de conjuntos e da estrutura categórica relevante, não utilizando noções particulares de espaços vetoriais tais como combinações lineares.

A observação acima nos leva a tentar definir uma noção análoga para categorias mais gerais. Devido ao fato que precisamos "estender uma função a um morfismo" vemos que essa noção não é pertinente a categorias em geral, mas apenas a categorias nas quais os objetos são relacionados com conjuntos e os morfismos com funções entre esses. Ainda não daremos uma definição precisa do que isso significa, optando por explicar os conceitos de forma mais intuitiva e com o auxílio de exemplos.

Analisaremos um pouco mais o que ocorre com espaços vetoriais. Seja V um espaço vetorial e suponha que um subconjunto $V' \subseteq V$ seja dado. O que podemos falar sobre V? Sabemos que a adição de vetores em V possui um elemento neutro, o vetor nulo (que pode ou não ser elemento de V'). Ainda, dados elementos $x, y \in V'$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, podemos obter λx e $x + y$. Podemos ainda obter novos elementos a partir desses: $\lambda(x + y)$, $\lambda x + y$, $x + \lambda(0 + y)$, etc...

Note que, utilizando os axiomas de espaço vetorial, todas as expressões obtidas utilizando elementos de V', o vetor nulo, a adição de V e a multiplicação por escalar podem ser reduzidas a coisas da forma $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ para $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ e $x_1, \ldots, x_n \in V$ no qual esses vetores x_i são distintos. Mais ainda, sem saber a natureza do espaço V e do subconjunto V' não podemos fazer outras simplificações (por exemplo, mesmo que por um acaso ocorra $2x_1 + x_2 = x_3$ não podemos provar que isso ocorre sem informações extras, isto é, sem utilizar algo a mais do que os axiomas de espaço vetorial e o fato de que $V' \subseteq V$).

Notemos mais: Se $y \in V' \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, podemos escrever a combinação linear anterior como $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + 0y$. Como a adição de vetores é comutativa, podemos a escrever sem uma ordem específica com uma notação de somatório. Assumindo que os elementos $y \in V'$ que não aparecem na combinação linear original foram acrescentados com escalar 0, reescrevemos a expressão como

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = \sum_{v \in V'} \lambda_v v$$

no qual $\lambda_{x_i} = \lambda_i$ e $\lambda_y = 0$ para $y \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Atenção ao abuso de notação! Caso V' seja um conjunto infinito, temos um "somatório infinito". Mas note que os únicos escalares que poderiam ser não nulos são os associados a algum x_i. Como temos n deles, uma quantidade finita, interpretamos tal somatório como sendo feito apenas sobre uma quantidade finita de termos, ignorando vários termos $\lambda_v v$ com $\lambda_v = 0$. É interessante notar que como somar $0 = \lambda_v v$ não afeta o resultado não precisamos ignorar todos os termos do tipo, desde que sobre apenas uma quantidade finita de termos e que todos os termos para os quais λ_v pode ser não nula apareçam.

A grande vantagem da notação de somatório é que ele tem uma certa unicidade. Suponha que tenhamos dois deles arbitrários:

$$\sum_{v \in V'} \lambda_v v, \quad \sum_{v \in V'} \mu_v v.$$

Sob quais condições podemos garantir uma igualdade usando <u>apenas</u> os axiomas de espaço vetorial? Sabemos que a igualdade seria garantida caso $\lambda_v = \mu_v$ para todo v, pois teríamos os mesmo termos sendo somados. Segue que essa é a única condição plausível. Observe que para toda condição como requirimos, tal igualdade deve ser válida para quaisquer V, V', λ_v's e μ_v's satisfazendo a condição, uma vez que a igualdade foi provada apenas com os axiomas de espaço vetorial.

Mas podemos encontrar exemplos para os quais $\sum_{v\in V'} \lambda_v v \neq \sum_{v\in V'} \mu_v v$ desde que para algum $v \in V'$ tenhamos $\lambda_v \neq \mu_v$. Por exemplo, para qualquer V, tome $v \in V \setminus \{0\}$ e $V' = \{v\}$. Com $\lambda_v = 1$ e $\mu_v = 0$ temos $\lambda_v v = v \neq 0 = \mu_v v$. Em outras palavras, "para todo $v \in V'$, $\lambda_v = \mu_v$" é a condição mais geral que sempre garante a igualdade $\sum_{v\in V'} \lambda_v v = \sum_{v\in V'} \mu_v v$. Podemos dizer que caso essa condição seja válida, a igualdade vale trivialmente.

Como pode se notar, os conceitos discutidos acima são relacionados com noções conhecidas da álgebra linear. As "expressões não simplificáveis" utilizadas para gerar elementos de V a partir de elementos dados (ie. pertencentes a V') são as combinações lineares, o conjunto V' é gerador de V se todo elemento de V pode ser escrito dessa forma e V' é linearmente independente se para quaisquer coeficientes λ_v e μ_v a igualdade $\sum_{v\in V'} \lambda_v v = \sum_{v\in V'} \mu_v v$ vale apenas nos casos triviais.

Por outro lado, vamos discutir a caracterização de base dada acima. Lembrando que V' é base de V se, e somente se, para todo espaço vetorial W e toda função $f : V' \to W$ existe uma única transformação linear $h : V \to W$ que estende f. Essa é dada por

$$h\left(\sum_{v\in V'} \lambda_v v\right) = \sum_{v\in V'} \lambda_v f(v).$$

A transformação linear h podem ser interpretada como "substituir v por $f(v)$".

Em contextos mais gerais, diremos que conjuntos com a propriedade análoga à V' são geradores livres. A discussão dada aqui será similar com a estratégia utilizada para encontrar objetos livremente gerados por um conjunto X dado. Encontraremos formas de escrever um elemento de um objeto arbitrário que contém X, simplificando essa expressão ao máximo, de forma que duas tais expressões sejam iguais apenas em casos triviais. O conjunto de todas as expressões nos dará um objeto livremente gerado.

Para formalizar o objeto precisamos definir precisamente quais os parâmetros que o definem. No caso de espaços vetoriais, um elemento da forma $\sum_{v\in V'} \lambda_v v$ é definido pelos coeficientes λ_v. Podemos representá-los por uma função $\lambda : V' \to \mathbb{K}$ tal que $\lambda(v) = \lambda_v \neq 0$ para uma quantidade finita de elementos v. Daremos a definição formal análoga para um módulo sobre um anel com unidade R:

Definição A.48. *Seja X um conjunto. O R-módulo livre gerado por X, denotado $F(X)$, é dado pelo conjunto das funções $f : X \to R$ tal que $f(x) \neq 0$ para uma quantidade finita de $x \in X$. As operações em $F(X)$ são dadas pontualmente, isto é, para $f, g \in F(X)$ e $\lambda \in R$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Dizemos que $F(X)$ é livremente gerado por X.*

Que $F(X)$ é módulo segue de que o conjunto de todas as funções $f : X \to R$ o é e de que as operações definidas são fechadas em $F(X)$. De fato, $f(x) + g(x) \neq 0$ só é possível nos casos em que $f(x)$ e $g(x)$ são ambos não-nulos e $\lambda f(x) \neq 0$ só é possível caso $f(x) \neq 0$.

Note que por essa definição X não é subconjunto de $F(X)$ mas temos uma função $\iota : X \to F(X)$ dada por $(\iota(x))(x) = 1$ e $(\iota(x))(y) = 0$ para $y \in X \setminus \{x\}$. Observe que ι é injetora. Por um abuso de notação, podemos denotar o elemento $\iota(x)$ simplesmente por x.

Agora seja $f \in F(X)$. Definindo $\operatorname{supp}(f) = \{x \in X; f(x) \neq 0\}$ temos que $\operatorname{supp}(f)$ é finito, digamos $\operatorname{supp}(f) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Podemos escrever

$$f(x) = f(x_1)\iota(x_1) + \cdots + f(x_n)\iota(x_n).$$

Assim como na discussão feita com espaços vetoriais, podemos escrever

$$f(x) = \sum_{x \in X} f(x)\iota_x = \sum_{x \in X} f(x)x.$$

Disso, X (ou mais corretamente, $\operatorname{Img}(\iota)$) gera $F(X)$.

Teorema A.49. *Seja X um conjunto. Então para todo R-módulo M e toda função $f : X \to M$ existe um único morfismo $h : F(X) \to M$ tal que para todo $x \in X$, $h(\iota(x)) = f(x)$.*

Demonstração. Dada $\alpha \in F(X)$, defina

$$h(\alpha) = \sum_{x \in X} \alpha(x)f(x).$$

Observe que $h(\iota(x)) = f(x)$ pois os termos da forma $(\iota(x))(y)f(y)$ para $y \neq x$ se anulam. Mostramos que h é morfismo. De fato, dados $\alpha, \beta \in F(X)$ e $\lambda \in R$,

$$\begin{aligned} h(\alpha + \beta) &= \sum_{x \in X} (\alpha + \beta)(x)f(x) = \sum_{x \in X} (\alpha(x) + \beta(x))f(x) \\ &= \sum_{x \in X} \alpha(x)f(x) + \sum_{x \in X} \beta(x)f(x) = h(\alpha) + h(\beta) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h(\lambda\alpha) &= \sum_{x \in X} (\lambda\alpha)(x)f(x) = \sum_{x \in X} \lambda\alpha(x)f(x) \\ &= \lambda \sum_{x \in X} \alpha(x)f(x) = \lambda h(\alpha). \end{aligned}$$

Agora seja $h' : F(X) \to M$ outro homomorfismo tal que $h' \circ \iota = f$. Então h e h' são homomorfismos de módulos que coincidem em um conjunto gerador $\operatorname{Img}(\iota)$. Concluímos que $h = h'$. ∎

Note que a função h acima pode ser descrita como

$$h\left(\sum_{x\in X}\lambda_x\iota(x)\right) = h\left(\sum_{x\in X}\lambda_x x\right) = \sum_{x\in X}\lambda_x f(x).$$

Se $\iota(x)$ for interpretado como "a variável associada a x", h pode ser interpretada como "substituição de x por $f(x)$ na expressão dada".

F pode ser vista como um funtor de Set para ${}_R\mathcal{M}$. De fato, já definimos $F(X)$ para um conjunto X e para $f : X \to Y$ função, podemos estender o contradomínio de f para $F(Y)$, obtendo $\overline{f} : X \to F(Y)$, ou mais precisamente, definir $\overline{f}(x) = \iota(f(x))$. Do teorema A.49, existe um único homomorfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$ tal que $F(f)\circ\iota = \overline{f} = \iota\circ f$. Em termos concretos, $F(f)$ é definida por

$$(F(f))\left(\sum_{x\in X}\lambda_x\iota(x)\right) = \sum_{x\in X}\lambda_x\iota(f(x))$$

ou simplesmente

$$(F(f))\left(\sum_{x\in X}\lambda_x x\right) = \sum_{x\in X}\lambda_x f(x).$$

Observe que $F(\mathrm{id}_X)\circ\iota = \iota\circ\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{F(X)}\circ\iota$, logo $F(\mathrm{id}_X)$ e $\mathrm{id}_{F(X)}$ coincidem no gerador $\mathrm{Img}(\iota)$. Como são ambos homomorfismos, $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$. Ainda, dadas funções $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$,

$$F(g\circ f)\circ\iota = \iota\circ g\circ f = F(g)\circ\iota\circ f = F(g)\circ F(f)\circ\iota.$$

Disso, $F(g\circ f)$ e $F(g)\circ F(f)$ coincidem na imagem de ι e portanto são iguais. Segue que F é funtor.

O próximo exemplo será dado na categoria dos monoides. Seja M um monoide e M' um subconjunto de M. Como antes, queremos identificar elementos de M utilizando apenas a estrutura de M e elementos de M'. Temos a identidade e de M e dados $x, y \in M'$, temos o elemento $xy \in M$. Utilizando a multiplicação de M iterativamente podemos obter elementos da forma $x_1x_2\dots x_n \in M$ para $x_1, \dots, x_n \in M' \cup \{e\}$. Observando que o elemento neutro não afeta o produto, podemos reduzir qualquer expressão dessa composta de ao menos um elemento de M' para algo da forma $y_1y_2\dots y_k$ com $y_1, y_2, \dots, y_k \in M'$ removendo do produto os elementos $x_i = e$. Caso $x_1 = x_2 = \dots = x_n = e$, o produto pode ser reduzido a e.

Note que as expressões acima não são simplificáveis apenas com os axiomas de monoide e que vale a "unicidade", no sentido de que a condição mais geral que implica a igualdade de duas tais expressões através do uso dos axiomas é que ambas coincidam termo a termo e tenham o mesmo comprimento. O conjunto de todas as expressões desse tipo será considerado para definir um monoide livre. Utilizaremos a definição abaixo.

Definição A.50. *Seja X um conjunto. O conjunto $W(X)$ das palavras em X é definido por*

$$W(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\prod_{i\in\{1,\ldots,n\}} X \right) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n); n \in \mathbb{N} \text{ e } x_1, x_2, \ldots, x_n \in X\}\,.$$

Chamamos o elemento $() \in W(X)$ de palavra vazia. Se $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W(X)$ é palavra não vazia, podemos a denotar simplesmente por $x_1x_2\ldots x_n$. Dizemos que n é o comprimento de $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, denotado $l(\alpha)$, e convencionamos que $l(()) = 0$. Se $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\beta = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ são palavras definimos a concatenação de α e β por

$$\alpha\beta = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_k).$$

Note que a palavra vazia é elemento neutro da concatenação. Definimos ainda uma inclusão $\iota : X \to W(X)$ por $\iota(x) = (x)$.

Vemos que os elementos do conjunto que queremos definir como o monoide livre gerado por X são dados por $W(X)$, o elemento e representado pela palavra vazia. A concatenação é uma operação em $W(X)$.

Teorema A.51. *O conjunto $W(X)$ munido da operação de concatenação e da palavra vazia forma um monoide.*

Demonstração. Sabemos que a palavra vazia é elemento neutro da concatenação, falta mostrar que a concatenação é associativa. Considere as seguintes palavras:

$$\begin{aligned}
\alpha &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)\\
\beta &= (y_1, y_2, \ldots, y_k)\\
\gamma &= (z_1, z_2, \ldots, z_m)
\end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}
\alpha\beta &= (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_k)\\
\beta\gamma &= (y_1, y_2, \ldots, y_k, z_1, z_2, \ldots, z_m)\\
(\alpha\beta)\gamma &= (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_k)(z_1, z_2, \ldots, z_m)\\
&= (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_k, z_1, z_2, \ldots, z_m)\\
&= (x_1, x_2, \ldots, x_n)(y_1, y_2, \ldots, y_k, z_1, z_2, \ldots, z_m) = \alpha(\beta\gamma)
\end{aligned}$$

Disso, segue que $(W(X), *)$ é monoide, com $* : W(X) \times W(X) \to W(X)$ sendo a concatenação. ■

Para fixar uma notação similar ao do exemplo anterior definimos o monoide acima por $F(X)$. Dessa forma, $W(X)$ é o conjunto base de $F(X)$, isto é, $W(X) = U(F(X))$.

Teorema A.52. *O conjunto $Img(\iota) \subseteq W(X)$ gera $F(X)$.*

Demonstração. Suponha que $M \subseteq W(X)$ seja submonoide de $F(X)$ contendo $\mathrm{Img}(\iota)$. Tome $\alpha \in W(X)$. Mostramos que $\alpha \in M$ por indução sobre $l(\alpha)$. Para $l(\alpha) = 0$, $\alpha = ()$. Como M é submonoide, segue que $\alpha \in M$. Para $l(\alpha) = 1$, $\alpha = (x)$ para algum $x \in X$. Como $\alpha \in \mathrm{Img}(\iota)$, segue que $\alpha \in M$.

Finalmente, suponha que $\beta \in M$ para todo $\beta \in W(X)$ tal que $l(\beta) = n$. Se $l(\alpha) = n+1$, então α é da forma $x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1}$. Defina $\beta = x_1 x_2 \dots x_n$. Concluímos que $\alpha = \beta\iota(x_{n+1})$. Como $\beta, \iota(x_{n+1}) \in M$ e M é fechado na concatenação temos que $\alpha \in M$ e portanto $M = W(X)$. ■

Provamos agora que $F(X)$ é o monoide livre gerado por X.

Teorema A.53. *Seja X um conjunto. Então para todo monoide M e toda função $f : X \to M$, existe um único homomorfismo $h : F(X) \to M$ tal que $h \circ \iota = f$.*

Demonstração. Dada uma palavra $\alpha = x_1 x_2 \dots x_n$, defina

$$h(\alpha) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n) \in M$$

e também defina $h(()) = e$. Se $\beta = y_1 y_2 \dots y_k$ também é palavra, temos

$$\begin{aligned} h(\alpha\beta) &= h(x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_k) \\ &= f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n) \cdot f(y_1) \cdot f(y_2) \cdot \dots \cdot f(y_k) \\ &= h(x_1 x_2 \dots x_n) h(y_1 y_2 \dots y_k) = h(\alpha)h(\beta) \end{aligned}$$

e portanto h é homomorfismo. Ainda, dado $x \in X$, $h(\iota(x)) = h((x)) = f(x)$. Suponha que h':$F(X) \to M$ seja homomorfismo tal que $h \circ \iota = f$. Então h e h' coincidem em $\mathrm{Img}(\iota)$. Como $\mathrm{Img}(\iota)$ é gerador de $F(X)$, segue que $h = h'$. ■

Como no caso dos módulos, podemos criar um funtor F levando a categoria dos conjuntos na dos monoides. Para isso, considere uma função $f : X \to Y$. Definindo $\bar{f} : X \to F(Y)$ por $\bar{f}(x) = \iota(f(x))$, existe um único morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$ satisfazendo $F(f)\iota = \iota \circ f$. Temos que

$$F(f)(x_1 x_2 \dots x_n) = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n).$$

A demonstração que F é funtor é análoga à para módulos.

Note que em todos os casos acima temos analogias claras. Parte dessas analogias serão dadas formalmente agora com uma generalização enquanto outras serão dadas, em um contexto ainda mais geral, na seção 2.1 sobre adjunções.

Definição A.54. *Uma categoria concreta é uma categoria $\mathcal{C}$ munida de um funtor fiel $U : \mathcal{C} \to \underline{Set}$. Se X é objeto de $\mathcal{C}$, dizemos que $U(X)$ é o conjunto base de X. Chamamos U de funtor esquecimento. Se X e Y são objetos de $\mathcal{C}$, uma função $f : U(X) \to U(Y)$ é dita preservar as estruturas de X e Y se $f = U(h)$ para alguma $h : X \to Y$.*

Intuitivamente, um objeto X de uma categoria concreta é um conjunto $U(X)$ com alguma informação extra que o separa dos demais com o mesmo conjunto base. Podemos fazer um abuso de notação e identificar um morfismo $h : X \to Y$ com a função $U(h) : U(X) \to U(Y)$ desde que tenhamos em mente os objetos X e Y originais. Isso não causa ambiguidades pois o funtor U é fiel. Podemos usar notações similares quando temos um funtor $U : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ fiel para outras categorias $\mathcal{D}$.

Definição A.55. *$\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias e $U : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor fiel. Dado um objeto X de $\mathcal{C}$, dizemos que um gerador livre de X é um objeto Y de $\mathcal{D}$ com um morfismo $\iota : Y \to U(X)$ tal que para todo morfismo $f : Y \to U(Z)$ em $\mathcal{D}$, existe um único morfismo $\overline{f} : X \to Z$ tal que $U(\overline{f}) \circ \iota = f$.*

Note que se um objeto Y de $\mathcal{D}$ é gerador livre de X e X' com respectivos morfismos $\iota : Y \to U(X)$ e $\iota' : Y \to U(X')$, então podemos estender ambos os morfismos para $\overline{\iota} : X' \to X$ e $\overline{\iota'} : X \to X'$. Note que

$$U\left(\overline{\iota} \circ \overline{\iota'}\right) \circ \iota = U(\overline{\iota}) \circ U(\overline{\iota'}) \circ \iota = U\left(\overline{\iota}\right) \circ \iota' = \iota = U(\mathrm{id}_X) \circ \iota.$$

Concluímos da unicidade que $\overline{\iota} \circ \overline{\iota'} = \mathrm{id}_X$. De maneira análoga, $\overline{\iota'} \circ \overline{\iota} = \mathrm{id}'_X$. Segue que $\overline{\iota}^{-1} = \overline{\iota'}$ e portanto X e X' são isomorfos.

Teorema A.56. *Considere $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias e $U : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor fiel. Se para cada objeto Y de $\mathcal{D}$ temos um objeto $F(Y)$ de $\mathcal{C}$ tal que $F(Y)$ é livremente gerado por Y pelo morfismo $\eta_Y : Y \to UF(Y)$, então podemos tornar F um funtor da seguinte forma: dado $f : X \to Y$, defina $F(f) : F(X) \to F(Y)$ por $\overline{\eta_Y \circ f}$.*

Demonstração. Temos que $F(\mathrm{id}_X) = \overline{\eta_X \circ \mathrm{id}_X} = \overline{\eta_X}$. Por outro lado,

$$U\left(\mathrm{id}_{F(X)}\right) \circ \eta_X = \mathrm{id}_X \circ \eta_X = \eta_X$$

e segue da unicidade que $\mathrm{id}_{F(X)} = \overline{\eta_X} = F(\mathrm{id}_X)$. Ainda, se $h : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são morfismos, então $F(g \circ h) = \overline{\eta_Z \circ g \circ h}$. Mas

$$F(g) \circ F(h) \circ \eta_X = \overline{\eta_Z \circ g} \circ \overline{\eta_Y \circ h} \circ \eta_X = \overline{\eta_Z \circ g} \circ \eta_Y \circ h = \eta_Z \circ g \circ h.$$

Segue que $F(g \circ h) = F(g) \circ F(h)$ e portanto F é funtor. ■

Definição A.57. *Denominamos um funtor como acima de funtor livre e os morfismos η_Y são denominados componentes da unidade.*

A.3.1 Diagramas

Por mais que o estudo de categorias possa ser feito usando apenas equações, frequentemente isso é inconveniente devido a complexidade de algumas delas. Para ajudar nisso usamos diagramas para representar categorias de forma gráfica, usando grafos. Mostraremos antes que se G é grafo, então a categoria de caminhos oposta de G é livremente gerada por G.

Teorema A.58. *Seja G um grafo e $\mathcal{C}$ uma categoria. Então cada morfismo $h : G \to U(\mathcal{C})$ pode ser estendido unicamente a um funtor $\overline{h} : PathG \to \mathcal{C}$ e portanto $(PathG)^{op}$ é livremente gerado por G pela inclusão canônica $\varphi : G \to Path(G)$.*

Demonstração. Defina $\overline{h}$ levando cada vértice V em $h(V)$ e cada caminho

$$\alpha = (v_1, a_1, \ldots, v_{n-1}, a_{n-1}, v_n)$$

em $h(a_{n-1}) \circ h(a_{n-2}) \circ \cdots \circ h(a_1)$. Convencionamos que o caminho vazio (v) é levado em $\mathrm{id}_{h(v)}$. Observe que com essa definição, $\overline{h}(\alpha) : h(v_1) \to h(v_n)$ é morfismo. Mostramos que $\overline{h}$ é funtor. De fato, é claro que $\overline{h}(\mathrm{id}_v) = \mathrm{id}_{\overline{h}(v)}$. No caso da composição, considere caminhos

$$\alpha = (v_1, a_1, \ldots, v_{n-1}, a_{n-1}, v_n);$$
$$\beta = (u_1, b_1, \ldots, u_{k-1}, b_{k-1}, u_k)$$

tais que $v_n = u_1$. Então

$$\begin{aligned}\overline{h}(\beta \circ \alpha) &= \overline{h}(v_1, a_1, \ldots, v_{n-1}, a_{n-1}, v_n = u_1, b_1, \ldots, u_{k-1}, b_{k-1}, u_k)\\ &= h(b_{k-1}) \circ h(b_{k-2}) \circ \cdots \circ h(b_1) \circ h(a_{n-1}) \circ h(a_{n-2}) \circ \cdots \circ h(a_1)\\ &= \overline{h}(u_1, b_1, \ldots, u_{k-1}, b_{k-1}, u_k) \circ \overline{h}(v_1, a_1, \ldots, v_{n-1}, a_{n-1}, v_n) = \overline{h}(\beta) \circ \overline{h}(\alpha).\end{aligned}$$

Ainda, dado um vértice v e uma aresta a,

$$\overline{h} \circ \varphi(v) = \overline{h}(v) = h(v);$$
$$\overline{h} \circ \varphi(a) = \overline{h}(s(t), a, t(a)) = h(a).$$

Concluímos que $\overline{h}$ de fato é um morfismo da forma procurada. Agora suponha que $\widetilde{h} : \mathrm{Path}G \to \mathcal{C}$ seja outro funtor tal que $\widetilde{h} \circ \varphi = h = \overline{h} \circ \varphi$. Temos que dado um vértice v,

$$\widetilde{h}(v) = \widetilde{h} \circ \varphi(v) = \overline{h} \circ \varphi(v) = \overline{h}(v)$$

Para um caminho $\alpha = (v_1, a_1, \ldots, v_{n-1}, a_{n-1}, v_n)$, note que α se decompõe como

$$\alpha = \varphi(a_{n-1}) \circ \varphi(a_{n-2}) \circ \cdots \circ \varphi(a_1).$$

Disso,

$$\begin{aligned}\widetilde{h}(\alpha) &= \widetilde{h}(\varphi(a_{n-1}) \circ \varphi(a_{n-2}) \circ \cdots \circ \varphi(a_1)) \\ &= \widetilde{h}(\varphi(a_{n-1})) \circ \widetilde{h}(\varphi(a_{n-2})) \circ \cdots \circ \widetilde{h}(\varphi(a_1)) \\ &= \overline{h}(\varphi(a_{n-1})) \circ \overline{h}(\varphi(a_{n-2})) \circ \cdots \circ \overline{h}(\varphi(a_1)) \\ &= \overline{h}(\varphi(a_{n-1}) \circ \varphi(a_{n-2}) \circ \cdots \circ \varphi(a_1)) = \overline{h}(\alpha).\end{aligned}$$

Concluímos que $\widetilde{h} = \overline{h}$, provando a unicidade. ■

Com isso, podemos dar uma aplicação do teorema A.56 para categorias de categorias.

Teorema A.59. *Seja $\underline{Cat}$ uma categoria de categorias e $\mathcal{D}$ uma categoria cujos objetos são grafos e os morfismos são todos os morfismos de grafos entre os objetos selecionados. Se $\underline{Graph}(G) \in \underline{Cat}^0$ para todo $G \in \mathcal{D}^0$ e $U(\mathcal{C}) \in \mathcal{D}^0$ para rodo $\mathcal{C} \in \underline{Cat}$, então existe um funtor livre $F : \mathcal{D} \to \underline{Cat}$. Em particular, tomando $\underline{Cat}$ como a categoria das categorias pequenas e $\mathcal{D}$ como a categoria dos grafos pequenos, então o funtor livre existe.*

Demonstração. A primeira afirmação segue dos teoremas A.56 e A.58. A segunda segue dos fatos que $U(\mathcal{C})$ é pequeno se, e somente se $\mathcal{C}$ a é e que Path(G) é pequena se, e somente se G o é. ■

Para representar pedaços finitos de categorias graficamente (isto é, subcategorias com uma quantidade finita de objetos e morfismos), basta definir um morfismo $h : G \to U(\mathcal{C})$ no qual G é grafo finito. Desse modo, $\overline{h} : F(G) \to \mathcal{C}$ está bem definido e podemos usar a representação gráfica de G para ilustrar objetos e morfismos de $\mathcal{C}$. A vantagem de utilizar $\overline{h}$ é que não só temos morfismos correspondentes a arestas como também a caminhos, dados pela composição. Um exemplo prático de diagrama que será encontrado no capítulo 3 segue abaixo.

Exemplo A.60.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "c"'] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d, "c"] \\ \mathcal{K} \arrow[r, "j"'] & Y \arrow[r, "c"'] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

O diagrama acima pode ser pensado como gerado por um morfismo $f : G \to U(\mathcal{C})$ com o grafo G a seguir.

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "a"] \arrow[d, "m"'] & v \arrow[r, "b"] \arrow[d, "n"'] & w \arrow[d, "o"] \\
x \arrow[r, "k"'] & y \arrow[r, "l"'] & z
\end{tikzcd}$$

O morfismo f é definido por $f(u) = f(w) = f(y) = Y$, $f(v) = X$ e $f(x) = f(z) = \mathcal{K}$ nos vértices e $f(a) = i$, $f(b) = g$, $f(m) = f(o) = f(l) = c$, $f(n) = h$ e $f(k) = j$. Como f induz um funtor $\overline{f}$, podemos ter outros morfismos. Por exemplo, $\overline{f}(u, a, v, n, y) = h \circ i$. Isso reduz o trabalho de entender domínios, contradomínios e composições a olhar para as setas do diagrama e percorrer caminhos.

Na prática, diagramas são usados de forma muito mais intuitiva, sem que seja discutido qual grafo e morfismo está sendo utilizado. Uma definição formal será importante para esse texto.

Definição A.61. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, G um grafo finito e $h : G \to U(\mathcal{C})$ um morfismo. Dizemos que essas componentes definem um <u>diagrama comutativo</u> ou que o diagrama definido por elas <u>comuta</u> se para todo par (α, β) de caminhos paralelos não triviais de G, $\overline{h}(\alpha) = \overline{h}(\beta)$.*

O que a definição acima nos diz é que em um diagrama comutativo, todos os caminhos que começam e terminam no mesmo vértice definem o mesmo morfismo.

Exemplo A.62. *Suponha que o diagrama no exemplo A.60 comuta. O caminho $\alpha = (u, a, v, n, y)$ é paralelo ao caminho $\beta = (u, m, x, k, y)$. Segue da comutatividade que $h \circ i = \overline{f}(\alpha) = \overline{f}(\beta) = j \circ c$. De fato, é possível mostrar que esse diagrama comuta se, e somente se, valem as igualdades $h \circ i = j \circ c$ e $c \circ g = c \circ h$. As demais são consequências dessas duas. Por exemplo,*

$$c \circ g \circ i = c \circ h \circ i = c \circ j \circ c.$$

O argumento acima pode ser facilmente acompanhado observando quais caminhos estão sendo percorridos no diagrama.

A.4 TRANSFORMAÇÕES NATURAIS

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias e considere funtores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Lembramos que ambos os funtores levam objetos e morfismos de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$ com a diferença de que dado $h : X \to Y$, temos $F(h) : F(X) \to F(Y)$ e $G(h) : G(X) \to G(Y)$. Isso nos dá uma ideia do que significa "preservar a estrutura" no caso de funtores, precisamos de uma forma de transforma $F(X)$ em $G(X)$ e $F(Y)$ em $G(Y)$ de forma que $F(h)$ fique relacionado com $G(h)$. Esses morfismos devem depender dos objetos X e Y e não do morfismo h, em outras palavras precisamos de um morfismo $\eta_X : F(X) \to G(X)$ para cada objeto X de forma que o diagrama a seguir comuta para qualquer $h : X \to Y$.

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(h)"'] & G(X) \arrow[d, "G(h)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

O que isso quer dizer é que $G(h) \circ \eta_X = \eta_Y \circ F(h)$. Se $\eta = \{\eta_X\}_{X \in \mathcal{C}^0}$ é uma transformação natural entre funtores F e G, denotamos isso por $\eta : F \Rightarrow G$.

Exemplo A.63. *Considere categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ com funtor esquecimento $U : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e funtor livre $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ com componentes da unidade $\eta_Y : Y \to UF(X)$. Então η é uma transformação natural. De fato, tome $h : Y \to Y'$. Temos*

$$UF(h) \circ \eta_Y = U\left(\overline{\eta_{Y'} \circ h}\right) \circ \eta_Y = \eta_{Y'} \circ h.$$

Se nos mantivermos apenas a um par de categorias $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, podemos definir uma composição de transformações naturais. Se $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ são funtores e $\nu : F \Rightarrow G$ e $\eta : G \Rightarrow H$ são transformações naturais, definimos $\eta \circ \nu : F \Rightarrow H$ por $(\eta \circ \nu)_X = \eta_X \circ \nu_X$. De fato, dado $h : X \to Y$,

$$\begin{aligned} H(h) \circ (\eta \circ \nu)_X = H(h) \circ \eta_X \circ \nu_X &= \eta_Y \circ G(h) \circ \nu_X \\ &= \eta_Y \circ \nu_Y \circ F(h) = (\eta \circ \nu)_Y \circ F(h) \end{aligned}$$

Temos uma transformação natural $\mathrm{id}_F : F \Rightarrow F$ definida por $(\mathrm{id}_F)_X = \mathrm{id}_{F(X)}$. Observe que dada qualquer transformação natural $\eta : F \Rightarrow G$, temos

$$\begin{aligned} (\mathrm{id}_G \circ \eta)_X &= \mathrm{id}_{G(X)} \circ \eta_X = \eta_X; \\ (\nu \circ \mathrm{id}_F)_X &= \nu_X \circ \mathrm{id}_{F(X)} = \nu_X. \end{aligned}$$

Ainda, considere transformações naturais componíveis θ, ν e η. Temos

$$((\theta \circ \nu) \circ \eta)_X = (\theta \circ \nu)_X \circ \eta_X = \theta_X \circ \nu_X \circ \eta_X = \theta_X \circ (\nu_X \circ \eta_X) = (\theta \circ (\nu \circ \eta))_X$$

Com isso, podemos criar uma categoria de funtores.

Definição A.64. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Definimos $Func(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ como a categoria cujos objetos são funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e os morfismos são transformações naturais. A* *identidade é definida por $(id_F)_X = id_{F(X)}$ e a composição por $(\eta \circ \nu)_X = \eta_X \circ \nu_X$. Em particular, definimos a categoria End($\mathcal{C}$) = Func(C, C). Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ dessa forma é chamado de um endofuntor.*

Teorema A.65. *Seja $\eta : F \Rightarrow G$ uma transformação natural. Então η é isomorfismo natural se, e somente se, cada η_X o é. Nesse caso, $\left(\eta^{-1}\right)_X = (\eta_X)^{-1}$, valor que será denotado simplesmente por η_X^{-1}.*

Demonstração. Se η é inversível, então para cada X, $\left(\eta \circ \eta^{-1}\right)_X = \mathrm{id}_{G(X)}$ e $\left(\eta^{-1} \circ \eta\right)_X = \mathrm{id}_{F(X)}$. Segue que $\eta_X \circ \left(\eta^{-1}\right)_X = \mathrm{id}_{G(X)}$ e $\left(\eta^{-1}\right)_X \circ \eta_X = \mathrm{id}_{F(X)}$ mostrando que cada η_X é inversível.

Por outro lado, suponha que cada η_X seja inversível. Então podemos definir a família de morfismos $(\eta_X)^{-1}$. Considere $h : X \to Y$. Como η é natural, segue que $\eta_Y \circ F(h) = G(h) \circ \eta_X$. Mas disso, $F(h) \circ (\eta_X)^{-1} = (\eta_Y)^{-1} \circ G(h)$ e logo a família descrita acima define uma transformação natural. Fica claro que essa é precisamente η^{-1}. ■

Temos outra composição de transformações naturais, dessa vez com categorias distintas. Considere funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $F' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ e $G' : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ além de transformações naturais $\eta : F \Rightarrow F'$ e $\nu : G \Rightarrow G'$. Queremos definir $\nu * \eta : GF \Rightarrow G'F'$ e para isso, encontraremos um morfismo $(\nu * \eta)_X : GF(X) \to G'F'(X)$. Existem duas formas de se fazer isso.

Na primeira, consideramos $G(\eta_X) : GF(X) \to GF'(X)$ e $\nu_{F'(X)} : GF'(X) \to G'F'(X)$. Temos a composição $\nu_{F'(X)} \circ G(\eta_X) : GF(X) \to G'F'(X)$. Similarmente, temos

$$\nu_{F(X)} : GF(X) \to G'F(X);$$
$$G'(\eta_X) : G'F(X) \to G'F'(X).$$

Obtemos a composição $G'(\eta_X) \circ \nu_{F(X)} : GF(X) \to G'F'(X)$. Usando a naturalidade de ν, temos que $G'(\eta_X) \circ \nu_{F(X)} = \nu_{F'(X)} \circ G(\eta_X)$.

$$\begin{tikzcd}
GF(X) \arrow[r, "\nu_{F(X)}"] \arrow[d, "G(\eta_X)"'] & G'F(X) \arrow[d, "G'(\eta_X)"] \\
GF'(X) \arrow[r, "\nu_{F'(X)}"'] & G'F'(X)
\end{tikzcd}$$

Esse valor comum é o que definimos como $(\nu * \eta)_X$.

Mostremos que $\nu * \eta$ é de fato uma transformação natural. Considere um morfismo $h : X \to Y$.

$$\begin{tikzcd} GF(X) \arrow[r, "(\nu*\eta)_X"] \arrow[d, "GF(h)"'] & G'F'(X) \arrow[d, "G'F'(h)"] \\ GF(Y) \arrow[r, "(\nu*\eta)_Y"'] & G'F'(Y) \end{tikzcd}$$

Temos

$$G'F'(h) \circ (\nu * \eta)_X = G'F'(h) \circ \nu_{F'(X)} \circ G(\eta_X).$$

Usando a naturalidade de ν com o morfismo $F'(h)$, temos

$$G'F'(h) \circ \nu_{F'(X)} \circ G(\eta_X) = \nu_{F'(Y)} \circ GF'(h) \circ G(\eta_X) = \nu_{F'(Y)} \circ G(F'(h) \circ \eta_X).$$

Finalmente, usando a naturalidade de η com o morfismo h, temos

$$\begin{aligned} \nu_{F'(Y)} \circ G(F'(h) \circ \eta_X) &= \nu_{F'(Y)} \circ G(\eta_Y \circ F(h)) \\ &= \nu_{F'(Y)} \circ G(\eta_Y) \circ GF(h) = (\nu * \eta)_Y \circ GF(h), \end{aligned}$$

provando que $\nu * \eta$ é transformação natural. Por organização, definiremos essa operação abaixo.

Definição A.66. *Sejam $F, F' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G, G' : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$. Dadas transformações naturais $\eta : F \Rightarrow F'$ e $\nu : G \Rightarrow G'$, definimos a composição horizontal $\nu * \eta : GF \Rightarrow G'F'$ por*

$$(\nu * \eta)_X = G'(\eta_X) \circ \nu_{F(X)} = \nu_{F'(X)} \circ G(\eta_X).$$

Exemplo A.67. *Considere funtores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $\eta : F \Rightarrow G$ transformação natural. Dado $H : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ e $H' : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ temos*

$$\begin{aligned} (\eta * id_H)_X &= \eta_{H(X)} \circ F\left((id_H)_X\right) = \eta_{H(X)} \circ F(id_{H(X)}) = \eta_{H(X)}; \\ (id_{H'} * \eta)_X &= (id_{H'})_{G(X)} \circ H'(\eta_X) = id_{H'G(X)} \circ H'(\eta_X) = H'(\eta_X). \end{aligned}$$

As transformações naturais definidas acima serão importantes no estudo de mônadas, que faremos no capítulo 2. Daremos nomes a essas.

Definição A.68. *Nas notações do exemplo, definimos as transformações naturais*

$$\begin{aligned} (\eta H)_X &= \eta_{H(X)}; \\ \left(H'\eta\right)_X &= H'(\eta_X). \end{aligned}$$

Encerramos esse apêndice voltando ao básico de transformações naturais. Se $\eta : F \to G$ é transformação natural, podemos identificar um possível uso da naturalidade de η na própria estrutura da equação. Para todo morfismo $h : X \to Y$, temos $\eta_Y \circ F(h) = G(h) \circ \eta_X$. Observe o padrão, em ambos os termos temos η e h (os chamaremos de “componentes” para os fins dessa discussão) mas em lados trocados da composição.

Além disso, temos em ambos os casos uma aplicação, η se aplica em um objeto e um funtor é aplicado em h. Em ambos os termos, a aplicação à esquerda da composição é feita com o contradomínio da componente à direita enquanto a aplicação à direita da composição é feita com o domínio da componente à esquerda. Verificar se estamos em uma situação dessas dá uma forma visual de perceber um possível uso da naturalidade da η sem a necessidade de recorrer a um diagrama.

Há outro caso em que podemos usar informações visuais semelhantes na própria equação, dado no teorema A.69. O leitor poderá perceber que as informações que sugerem um uso de naturalidade são análogas ao caso acima.

Teorema A.69. *Sejam $\eta : F \Rightarrow G$ e $\nu : F' \Rightarrow G'$ transformações naturais. Então $\eta G' \circ F\nu = G\nu \circ \eta F'$.*

Demonstração. Temos que $\left(\eta G' \circ F\nu\right)_X = \eta_{G'(X)} \circ F(\nu_X)$. Podemos considerar o morfismo $\nu_X : F'(X) \to G'(X)$ η, assim obtendo

$$\eta_{G'(X)} \circ F(\nu_X) = \left(G\nu \circ \eta F'\right)_X = G(\nu_X) \circ \eta_{F'(X)}.$$

■

Finalmente, provamos a chamada lei de intercâmbio. Essa propriedade nos dá uma conexão entre as duas noções de composição que definimos anteriormente.

Teorema A.70. *Considere α, β, γ e δ transformações naturais. Então a igualdade abaixo é verdadeira sempre que estiver bem definida.*

$$(\alpha * \beta) \circ (\gamma * \delta) = (\alpha \circ \gamma) * (\beta \circ \delta)$$

Demonstração. Escreva $\alpha : F_1 \Rightarrow G_1$, $\beta : F_2 \Rightarrow G_2$, $\gamma : F_3 \Rightarrow G_3$ e $\delta : F_4 \Rightarrow G_4$. Note que em ambos os casos temos transformações naturais com domínio F_3F4 e contradomínio G_1G_2. Dado um objeto X apropriado,

$$\begin{aligned}
((\alpha * \beta) \circ (\gamma * \delta))_X &= (\alpha * \beta)_X \circ (\gamma * \delta)_X = G_1(\beta_X) \circ \alpha_{F_2(X)} \circ G_3(\delta_X) \circ \gamma_{F_4(X)};\\
((\alpha \circ \gamma) * (\beta \circ \delta))_X &= G_1((\beta \circ \delta)_X) \circ (\alpha \circ \gamma)_{F_4(X)} = G_1(\beta_X \circ \delta_X) \circ \alpha_{F_4(X)} \circ \gamma_{F_4(X)}\\
&= G_1(\beta_X) \circ G_1(\delta_X) \circ \alpha_{F_4(X)} \circ \gamma_{F_4(X)}.
\end{aligned}$$

Agora, olhamos para $\delta_X : F_4(X) \to G_4(X)$ simplesmente como um morfismo e aplicamos a naturalidade de α, obtendo

$$G_1(\delta_X) \circ \alpha_{F_4(X)} = \alpha_{G_4(X)} \circ F_1(\delta_X).$$

Para concluir a igualdade basta mostrar que $F_1 = G_3$ e $F_2 = G_4$. A primeira é consequência de $\alpha \circ \gamma$ estar definida enquanto a segunda de $\beta \circ \delta$ a estar. ■

A.5 EQUIVALÊNCIAS

Sabemos que duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são isomorfas quando existem funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tais que $FG = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ e $GF = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$, nesse caso, $G = F^{-1}$. Podemos enfraquecer as identidades pedindo que os funtores sejam naturalmente isomorfos em vez de iguais.

Definição A.71. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Então um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é dito uma equivalência categórica se existem $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos naturais $\alpha : FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ e $\beta : GF \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. Se existe uma equivalência categórica entre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, dizemos que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são equivalentes.*

Teorema A.72. *Todo isomorfismo categórico é uma equivalência categórica. Para toda categoria $\mathcal{C}$, o funtor $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ é uma equivalência categórica. Se $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $F' : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ são equivalências categóricas, então $F'F$ também o é.*

Demonstração. No primeiro resultado, se $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é isomorfismo, então $F^{-1} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ é tal que $FF^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ e $F^{-1}F = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. Nesse caso, os isomorfismos naturais $\mathrm{id}_{FF^{-1}}$ e $\mathrm{id}_{F^{-1}F}$ são da forma desejada. Em particular, $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ é isomorfismos, logo é equivalência, provando o segundo resultado.

Para o último resultado, considere $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e $G' : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ funtores com isomorfismos naturais $\alpha : FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, $\beta : GF \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$, $\alpha' : F'G' \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ e $\beta' : G'F' \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$. A “inversa” de $F'F$ será dada por GG'. Encontraremos isomorfismos naturais $\alpha'' : F'FGG' \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ e $\beta'' : GG'F'F \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. De fato, o resultado segue definindo

$$\alpha''_X = \alpha' \circ F'\left(\alpha_{G'(X)}\right);$$
$$\beta''_Y = \beta \circ G\left(\beta'_{F(Y)}\right).$$

■

Observação A.73. *Se $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é equivalência, então sabemos que existem $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, $\alpha : FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ e $\beta : GF \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. Fica claro que nesse caso G também é equivalência categórica.*

Daremos duas outras forma de ver uma equivalência categórica. A primeira é motivada pela adaptação do teorema A.75. Lembramos que um funtor é dito injetor se este se aplica de forma injetora em seus objetos e fiel se para cada par (X, Y) de objetos, o funtor se aplica injetivamente em $\mathrm{Hom}(X, Y)$. Definimos duas noções similares.

Definição A.74. *Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. Dizemos que F é sobrejetor se F é sobrejetor nos objetos e cheio so o for em $Hom(X, Y)$ para cada par (X, Y) de objetos.*

Teorema A.75. *Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um isomorfismo se, e somente se, F for injetor, sobrejetor, fiel e cheio.*

Demonstração. Suponha que F seja isomorfismo. Então dados dois objetos X e Y tais que $F(X) = F(Y)$, temos $X = F^{-1}F(X) = F^{-1}F(Y) = Y$, mostrando que F é injetor. De forma similar, fixados objetos X e Y, se $g, h : X \to Y$ são tais que $F(g) = F(h)$, então $g = F^{-1}F(g) = F^{-1}F(h) = h$ e portanto F é fiel.

Ainda, se X' é objeto de $\mathcal{D}$, para $X = F^{-1}(X')$ temos $F(X) = X'$, logo F é sobrejetora. Fixados objetos X e Y, se $h' : F(X) \to F(Y)$ é morfismo, então tomando $h = F^{-1}(h) : X \to Y$ temos $F(h) = h'$, logo F é cheio.

Reciprocamente, suponha que F seja injetor, sobrejetor, fiel e cheio. Definimos um funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ como segue. Dado X' objeto de $\mathcal{D}$, como F é injetor e sobrejetor, existe um único objeto X de $\mathcal{C}$ tal que $F(X) = X'$. Defina $G(X') = X$. Ainda, fixados objetos X' e Y' (com as notações $X = G(X')$ e $Y = G(Y')$), e dado um morfismo $h' : X' \to Y'$, de F fiel e cheio existe um único morfismo $h : X \to Y$ tal que $F(h) = h'$. Defina $G(h') = h$.

Mostramos que G é funtor. De fato, $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$, logo $G(\mathrm{id}_{F(X)}) = \mathrm{id}_X$. Em particular, para qualquer objeto X' de $\mathcal{D}$, $G(\mathrm{id}_{X'}) = G(\mathrm{id}_{FG(X')}) = \mathrm{id}_{G(X')}$. Também, para $g : X \to Y$ e $h : Y \to Z$, temos $F(h \circ g) = F(h) \circ F(g)$ do que segue

$$G(h' \circ g') = G(FG(h') \circ FG(g')) = GF(G(h') \circ G(g')) = G(h') \circ G(g').$$

Finalmente, é claro que $GF = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ e $FG = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$. ■

No caso de uma equivalência, não estamos interessados em preservar os objetos mas somente a estrutura de morfismos dos mesmos, isto é, as classes $\mathrm{Hom}(X, Y)$. A única condição que precisamos garantir é que cada objeto de $\mathcal{D}$ é isomorfo a algum objeto na imagem de F, isto é, não só a estrutura de morfismos na imagem de F é definida por $\mathcal{C}$ mas também a de $\mathcal{D}$ como um todo. Damos um nome a essa última propriedade.

Definição A.76. *Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. Então F é dito essencialmente sobrejetor quando para todo objeto X' de $\mathcal{D}$, existe um objeto X de $\mathcal{C}$ tal que $F(X)$ é isomorfo a X'.*

Teorema A.77. *Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. Então F é uma equivalência categórica se, e somente se, F for fiel, cheio e essencialmente sobrejetor.*

Demonstração. Suponha que F seja equivalência com "inversa" G e isomorfismos naturais $\alpha : FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ e $\beta : GF \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. Dado X' objeto de $\mathcal{D}$, podemos considerar o objeto $X = G(X')$. Temos que $F(X) = FG(X')$ e um isomorfismo $\alpha_{X'}$ entre X' e $FG(X') = F(X)$, provando que F é essencialmente sobrejetor.

Agora fixe objetos X e Y de $\mathcal{C}$. Considere morfismos $g, h : X \to Y$ tais que $F(g) = F(h)$. Então $GF(g) = GF(h)$ e $\beta_Y \circ GF(g) = \beta_Y \circ GF(h)$. Observe o seguinte diagrama para um morfismo $m : X \to Y$ qualquer.

$$\begin{tikzcd}
GF(X) \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "GF(m)"'] & X \arrow[d, "m"] \\
GF(Y) \arrow[r, "\beta_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Esse diagrama comuta pela naturalidade de β. Aplicando essa comutatividade para $m = g$ e para $m = h$ na identidade acima temos $g \circ \beta_X = h \circ \beta_X$ e de β isomorfismo natural segue $g = h$ e logo, F é fiel.

Agora suponha que $h' : F(X) \to F(Y)$ seja um morfismo. Temos um morfismo $G(h') : GF(X) \to GF(Y)$. usando β e sua inversa, obtemos um morfismo $h : X \to Y$ dado por $h = \beta_Y \circ G(h') \circ \beta_X^{-1}$. Segue que $\beta_Y \circ G(h') = h \circ \beta_X = \beta_Y \circ GF(h)$. Notando que da observação A.73, G é equivalência, segue do que já provamos que G é fiel. Como $h', F(h) : F(X) \to F(Y)$, então concluímos que $h' = F(h)$ e portanto F é cheio.

Reciprocamente, suponha que F seja cheio, fiel e essencialmente sobrejetor. Então para cada X' objeto de $\mathcal{D}$, escolha arbitrariamente algum objeto X de $\mathcal{C}$ com um isomorfismo fixo $\varepsilon_{X'} : F(X) \to X'$ e defina $G(X') = X$. Ainda, dado um morfismo em $h' : X' \to Y'$ em $\mathcal{D}$ (denotamos $X = G(X')$ e $Y = G(Y')$), temos $\overline{h} = \varepsilon_{Y'}^{-1} \circ h' \circ \varepsilon_{X'} : F(X) \to F(Y)$. Como F é fiel e cheio, existe um único morfismo $h : X \to Y$ tal que $F(h) = \overline{h}$. Defina $G(h') = h$.

Queremos mostrar que $G(\mathrm{id}_{X'}) = \mathrm{id}_{G(X')}$. Para isso, basta mostrar que

$$F(\mathrm{id}_{G(X')}) = \varepsilon_{X'}^{-1} \circ \mathrm{id}_{X'} \circ \varepsilon_{X'}.$$

Mas de fato,

$$\varepsilon_{X'}^{-1} \circ \mathrm{id}_{X'} \circ \varepsilon_{X'} = \varepsilon_{X'}^{-1} \circ \varepsilon_{X'} = \mathrm{id}_{FG(X')} = F(\mathrm{id}_{G(X')}).$$

E ainda, dados $h : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, queremos mostrar que $G(g \circ h) = G(g) \circ G(h)$. Basta mostrar que

$$F(G(g) \circ G(h)) = \varepsilon_Z^{-1} \circ (g \circ h) \circ \varepsilon_X.$$

Da fato,

$$F(G(g) \circ G(h)) = FG(g) \circ FG(h) = \varepsilon_Z^{-1} \circ g \circ \varepsilon_Y \circ \varepsilon_Y^{-1} \circ h \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Z^{-1} \circ (g \circ h) \circ \varepsilon_X.$$

Concluímos que G é funtor. Precisamos agora definir isomorfismos naturais $\alpha : FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ e $\beta : GF \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. Dado X' objeto de $\mathcal{D}$, defina $\alpha_{X'} = \varepsilon_{X'}$. Temos que $\alpha_{X'}$ é isomorfismo. Para mostrar que α é natural, considere $h' : X' \to Y'$. Precisamos mostrar que o diagrama a seguir comuta.

$$\begin{tikzcd} FG(X') \arrow[r, "\alpha_{X'}"] \arrow[d, "FG(h')"'] & X' \arrow[d, "h'"] \\ FG(Y') \arrow[r, "\alpha_{Y'}"'] & Y' \end{tikzcd}$$

A comutatividade segue direto de $FG(h') = \varepsilon_{Y'}^{-1} \circ h' \circ \varepsilon_{X'}$. Finalmente, definimos β. Lembramos que $GF(X)$ se refere a uma escolha prévia de um objeto $\overline{X}$ com um isomorfismo $\varepsilon_{F(\overline{X})} : FGF(X) = F(\overline{X}) \to F(X)$. Como F é fiel e cheio, existe um único morfismo $m : GF(X) = \overline{X} \to X$ tal que $F(m) = \varepsilon_{F(X)}$. Definimos $\beta_X = m$. Ainda, como $\varepsilon_{F(X)}$ é isomorfismo, segue que m também o é. Falta mostrar que β é natural, isto é, que o diagrama a seguir comuta para qualquer $h : X \to Y$.

$$\begin{tikzcd} GF(X) \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "GF(h)"'] & X \arrow[d, "h"] \\ GF(Y) \arrow[r, "\beta_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Mas observando que α é natural, $F(h) \circ \alpha_{F(X)} = \alpha_{F(Y)} \circ FGF(h)$, isto é,

$$\begin{aligned} F(h \circ \beta_X) &= F(h) \circ F(\beta_X) = F(h) \circ \alpha_{F(X)} = \alpha_{F(Y)} \circ FGF(h) \\ &= F(\beta_Y) \circ FGF(h) = F(\beta_Y \circ GF(h)). \end{aligned}$$

A naturalidade de β segue de F fiel. ■

Motivaremos o último teorema com uma discussão intuitiva. Mencionamos antes que quando duas categorias são equivalentes, então podemos saber a estrutura de morfismos de uma olhando apenas para a da outra. Podemos pensar em “tipos” de objetos, no qual cada objeto X possui um tipo $\overline{X}$ e que a estrutura de morfismos da categoria não depende do objeto em si, e sim do seu tipo. Substituir um objeto X por um X' de mesmo tipo não muda os morfismos da categoria e suas propriedades, sendo essencialmente uma troca de notação (a noção intuitiva por traz de isomorfismos).

Note que se X e X' são isomorfos, então estes devem ser do mesmo tipo, uma vez que um isomorfismo $h : X \to X'$ e seu inverso, quando composto com algum morfismo partido de X ou chegando em X, resulta em um análogo com X'. Reciprocamente, se X e X' são do mesmo tipo, o morfismo id_X deve ter um análogo $h : X \to X'$. Como as propriedades categóricas de id_X e h devem ser as mesmas, então de id_X isomorfismo, obtemos h isomorfismo.

A discussão acima sugere que a noção de tipo intuitivamente apresentada é formalmente uma classe de isomorfismo. O problema com essa abordagem é que fazer quocientes em classes arbitrárias é problemático e dessa forma, fazemos uma escolha arbitrária de um representante de cada classe. Em outras palavras, para cada objeto X, escolhemos um objeto $\overline{X}$ isomorfo a X de forma que se X é isomorfo a X', então $\overline{X} = \overline{X'}$. A estrutura de morfismos na categoria em questão se reduz a observar os morfismos envolvendo apenas objetos da forma $\overline{X}$. Formalizamos essa discussão abaixo.

Definição A.78. *Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita esquelética quando, dados objetos X e X', se X é isomorfo a X' então $X = X'$.*

Lema A.79. *Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias com $\mathcal{D}$ esquelética, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ são funtores e $\alpha : \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}$ é isomorfismo natural, então $F = G$ e $\alpha = id_F$.*

Demonstração. De fato, dado X objeto de $\mathcal{C}$, $\alpha_X : F(X) \to G(X)$ é isomorfismo. Como $\mathcal{D}$ é esquelética, então $F(X) = G(X)$ e $\alpha_X = \mathrm{id}_{F(X)}$. Como X foi arbitrário, $F = G$ e $\alpha = \mathrm{id}_F$. ∎

Teorema A.80. *Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias esqueléticas, então $\mathcal{C}$ é isomorfa a $\mathcal{D}$ se, e somente se, $\mathcal{C}$ é equivalente a $\mathcal{D}$.*

Demonstração. Já sabemos que todo isomorfismo é uma equivalência. Reciprocamente, suponha que existam $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, $\alpha : FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ e $\beta : GF \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. Como $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são esqueléticas, segue do lema que $FG = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ e $GF = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. ∎

Os objetos de uma categoria esquelética correspondem aos “tipos” mencionados acima e podemos gerar uma categoria esquelética associada a uma categoria $\mathcal{C}$ escolhendo um elemento de cada classe de isomorfismo.

Teorema A.81. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Então existe uma subcategoria cheia de $\mathcal{C}$ que é esquelética e equivalente a $\mathcal{C}$. Além disso, todas as categorias esqueléticas equivalentes a $\mathcal{C}$ são isomorfas.*

Demonstração. Para cada objeto X, considere a classe dos objetos isomorfos a X. Para cada classe do tipo, escolha um representante, denotado $\overline{X}$. Note que se X e X' são isomorfos, então estes geram a mesma classe e portanto, como a escolha foi feita em cada classe, $\overline{X} = \overline{X'}$.

Seja $\mathcal{D}$ a subcategoria cheia de $\mathcal{C}$ gerada pelos objetos $\overline{X}$. Se existe um isomorfismo entre $\overline{X}$ e $\overline{X'}$, então, como X é isomorfo a $\overline{X}$ e X' a $\overline{X'}$, segue que X é isomorfo a X' e portanto, $\overline{X} = \overline{X'}$. Temos que $\mathcal{D}$ é esquelética.

Considere o funtor inclusão $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Da natura de funtores inclusão, F é fiel. Como $\mathcal{D}$ é cheia, F é cheio. Ainda, se X é objeto de $\mathcal{C}$, então X é isomorfo a $\overline{X} = F\left(\overline{X}\right)$ e portanto F é essencialmente sobrejetor. Segue do teorema A.77 que F é equivalência.

Agora seja $\mathcal{E}$ uma categoria esquelética equivalente a $\mathcal{C}$. Então existe uma equivalência $F' : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$. Segue que $F'F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ é equivalência. ■

Definição A.82. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um esqueleto de $\mathcal{C}$ é uma categoria esquelética equivalente a $\mathcal{C}$.*

Uma vez que sabemos que todos os esqueletos de $\mathcal{C}$ são isomorfos, podemos simplesmente falar em “o esqueleto” de $\mathcal{C}$, normalmente denotado Sk($\mathcal{C}$). Interpretamos Sk($\mathcal{C}$) como a categoria dos “tipos” de objetos presentes em $\mathcal{C}$, caracterizando sua estrutura de morfismos. De acordo com essa interpretação, duas categorias são equivalentes se essas têm o mesmo esqueleto. Essa afirmação está quase correta, lembrando que se tratando de categorias, é suficiente garantir que duas coisas são isomorfas. Isso nos dá a segunda caracterização de equivalência categórica.

Teorema A.83. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Então $\mathcal{C}$ é equivalente a $\mathcal{D}$ se, e somente se, Sk($\mathcal{C}$) é isomorfo a Sk($\mathcal{D}$).*

Demonstração. Lembramos que Sk($\mathcal{C}$) é equivalente a $\mathcal{C}$ e Sk($\mathcal{D}$) é equivalente a $\mathcal{D}$. Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são equivalentes, então Sk($\mathcal{C}$) e Sk($\mathcal{D}$) o são. Segue que Sk($\mathcal{C}$) é isomorfo a Sk($\mathcal{D}$) por estes são categorias esqueléticas.

Reciprocamente, suponha que Sk($\mathcal{C}$) e Sk($\mathcal{D}$) sejam isomorfos. Então pelas equivalências dadas no início da demonstração, segue que $\mathcal{C}$ é equivalente a $\mathcal{D}$. ■