



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Gustavo Olegário Heymans

Transições quânticas em teorias escalares

Florianópolis
2021

Gustavo Olegário Heymans

Transições quânticas em teorias escalares

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Física. Orientador: Prof. Marcus Emmanuel Benghi Pinto, Dr.

Florianópolis
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Heymans, Gustavo Olegário
Transições quânticas em teorias escalares / Gustavo
Olegário Heymans ; orientador, Marcus Emmanuel B. Pinto,
2021.
106 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Física. 2. Teoria quântica de campos. 3. Transições de
fase. 4. Modelos escalares. 5. Métodos de ressonância. I.
Pinto, Marcus Emmanuel B.. II. Universidade Federal de
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III.
Título.

Gustavo Olegário Heymans

Transições quânticas em teorias escalares

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Rudnei de Oliveira Ramos, Dr.
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Prof. Alejandro Mendoza Coto, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Paweł Klimas, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Física.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Marcus Emmanuel Benghi Pinto, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2021.

Este trabalho é dedicado aos meus pais e professores.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer aos meus pais e minha avó, pelo apoio e suporte que me deram em tudo. Seguindo, estendo os cumprimentos aos meus amigos, em especial: Betânia, Valéria, Gabriela, Acy e Olavo, pessoas que conheci no meu primeiro dia de universidade, no nem tão longínquo ano 2015, e que contribuíram com seu suporte desde então. Ressalto a gratidão por Valéria, pela leitura do manuscrito e pelas valiosas considerações.

Ainda agradeço a todos os professores que estiveram na minha formação pré-universitária, desde a professora Solange, do pré-escolar, passando pelas excelentes professoras Edilamar, Cristiane, dentre outras. Gostaria de ressaltar a importância do professor Thomas, um dos mais adorados e adoráveis professores de matemática de Blumenau, que não apenas me ensinou mas também incentivou meu desejo em aprender as ciências exatas.

No ensino universitário tive a sorte de conhecer excelentes professores e profissionais, ressaltarei os nomes do professor Paulo, da professora Débora e do professor Marcus, que sempre estiveram com as portas abertas, não apenas para sanar dúvidas relacionadas a Física mas também sendo fontes de inspiração, fornecendo valiosas dicas que sempre guardarei comigo.

Agradeço ao Antônio, pelo trabalho que efetua com muita atenção e cuidado, um exemplo profissional que pode ser levado a qualquer área. Agradeço a banca por ter aceito o trabalho de me avaliar, assim como pelos seus valiosos comentários. Ressalto a importância do professor Rudnei neste trabalho, o mesmo auxiliou na compreensão e forneceu o resultado apresentado no terceiro apêndice deste trabalho.

Agradeço a CAPES pelo auxílio financeiro.

Por último agradeço o ensino público, básico e universitário, o qual possibilitou que eu, e muitos outros, chagássemos aqui e que possibilita que eu continue.

*"All hope abandon, ye who enter here."
(Alighieri, 1782)*

RESUMO

Neste trabalho foram investigadas as possíveis transições de fase em modelos escalares com simetria $\mathcal{O}(N)$ em duas e três dimensões do espaço-tempo. Como transições de fase são fenômenos críticos, a teoria de perturbação não gera resultados confiáveis. Assim, foi aplicado um método de ressonância conhecido como teoria de perturbação otimizada (OPT). Primeiramente foi considerado o caso do modelo escalar em 1+1 dimensões. Limitado pelo teorema de Coleman, este modelo foi considerado no caso particular de simetria \mathbb{Z}_2 . Neste caso, com a utilização da OPT, foram obtidos valores de acoplamentos críticos (acoplamento no qual o sistema se torna conforme) que estão em ótima concordância com o estado da arte para este modelo. Como novidade foi proposta uma avaliação da região supercrítica, que normalmente é ignorada, mostrando que a mesma possui informações que podem acelerar a convergência da ressonância realizada. Ainda utilizando a OPT, foi mostrado que o caso com simetria $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$ em duas dimensões espaço-temporais pode não apresentar quebra de simetria, sob determinadas condições que envolvem o sinal de acoplamento entre os setores e o número de componentes. Neste caso o teorema de Coleman é preservado. Este resultado é completamente diferente ao obtido através da teoria de perturbação padrão. Também verificamos que o caso $\mathcal{O}(N) \times \mathbb{Z}_2$ pode não violar o teorema de Coleman, caso apresente uma repulsão entre os diferentes setores. Com o intuito de analisar teorias conformes, foi considerada a aproximação de campo médio para estudar o modelo $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$ em 2+1 dimensões no regime de temperaturas finitas e massas nulas. Foi verificado então que a entropia do sistema livre ($\lambda = 0$) decresce até atingir o valor de $s = 4/5 s_{free}$ no limite de acoplamentos fortes ($\lambda \rightarrow \infty$). Este resultado se conserva para qualquer escolha de N_ϕ e N_χ , sugerindo uma universalidade. Ainda mostramos que não há condições fisicamente aceitáveis para que seja uma teoria puramente conforme (ou seja, conforme em todos regimes de acoplamento). Por último, utilizando o limite de N -grande, verificamos que o modelo com simetria $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{O}(N)$ apresenta uma quebra dinâmica de simetria $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{O}(N) \rightarrow \mathcal{O}(N)$ e preserva a conformabilidade nos regimes de acoplamento fraco e forte.

Palavras-chave: Transições de fase. Modelos escalares. Métodos de ressonância.

ABSTRACT

In this work we have investigated possible phase transition patterns within $\mathcal{O}(N)$ scalar models in two and three space-time dimensions. Since phase transitions are related to critical phenomena standard perturbation theory breaks down so that these investigations require the use of resummation methods. In this vein we have mainly considered the technique known as optimized perturbation theory (OPT). Our first application aimed at the two dimensional case with \mathbb{Z}_2 symmetry which is the only case allowed by Coleman's theorem. The results for the critical coupling (where the theory is conformal) furnished by the OPT are in excellent agreement with the state of the art predictions. As a novelty, we have also explored the (often neglected) supercritical region showing that it contains information which can be used to accelerate convergence. Still at two space time dimensions we have considered the $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$ version concluding that under certain conditions dynamical symmetry breaking is suppressed and, contrary to the $\mathcal{O}(N)$ case, the model is allowed by Coleman's theorem. Our investigation shows that the case $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{O}(N) \rightarrow \mathcal{O}(N)$ is also allowed provided that there is no repulsion between the two different sectors. Concerning the study of conformality we have considered the three dimensional massless scalar $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$ model at finite temperatures. We have evaluated the entropy density for all couplings finding $s = 4/5 s_{free}$ at infinite coupling for all values of N_ϕ and N_χ . Exactly the same result was recently found in the $\mathcal{O}(N)$ case suggesting the universal character of the ratio s/s_{free} at the strong coupling limit. We have also shown that the only combination of coupling values which would describe a pure conformal theory is excluded by the boundness condition. Finally, by considering the special case $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{O}(N)$ we have observed the possible breaking $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{O}(N) \rightarrow \mathcal{O}(N)$ with the theory being conformal at the weak and strong coupling regimes but not in between.

Keywords: Phase transition. Scalar models. Resummation methods.

LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 1.1 – Esquemática da magnetização de um ferromagneto. Imagem à esquerda: estado inicial sem campo externo e com o ferromagneto sem magnetização. Imagem à direita: caso onde há a aplicação de um campo magnético externo (B), mostrando o aumento de tamanho dos domínios magnéticos na direção do campo.</p>	14
<p>Figura 1.2 – Diagrama de fases da água, com indicação das curvas de coexistência de fases assim como do ponto crítico.</p>	15
<p>Figura 1.3 – Magnetização em função da temperatura.</p>	16
<p>Figura 2.1 – Aplicação da OPT em primeira ordem do potencial efetivo (ou, energia livre de Landau). Gráfico de V_{eff}/m^2 em função de ϕ, para $g < g_c$ (linha vermelha tracejada), $g \simeq g_c$ (linha preta cheia) e $g > g_c$ (linha azul pontilhada).</p>	36
<p>Figura 3.1 – Representação esquemática da dualidade de Chang (CHANG; WRIGHT, 1975; CHANG, 1976). O primeiro caso $m^2 > 0$, apresenta apenas a quebra de simetria. No segundo caso, com $m^2 < 0$, apresenta uma restauração de simetria seguida por uma transição de fase de segunda ordem.</p>	39
<p>Figura 3.2 – Gráfico de M^2/m^2 em função de g. Comparação entre a teoria de perturbação (linha cinza tracejada) e OPT (linha azul cheia), ambos em segunda ordem. Os acoplamentos críticos ocorrem em $g_c = \sqrt{2/3} \simeq 0.82$ (teoria de perturbação) e $g_c = 1.511$ (OPT).</p>	44
<p>Figura 3.3 – Gráficos de $\bar{\eta}/m$ em função de g, para as oito primeiras ordens perturbativas.</p>	45
<p>Figura 3.4 – Imagem à esquerda: gráficos das ordens pares de M^2/m^2 em função de g. Imagem à direita: o mesmo, porém ampliado.</p>	46
<p>Figura 3.5 – Imagem à esquerda: gráficos das ordens pares de M/m em função de g. Imagem à direita: o mesmo, porém ampliado.</p>	46
<p>Figura 3.6 – Valores obtidos para o acoplamento crítico ordem a ordem. Pontos pretos se referem às ordens ímpares obtidas através da ressonância de M. Cruzes azuis representam valores obtidos para ordens pares através da ressonância de M^2. A faixa amarela representa o valor $g_c = 2.807(34)$ obtido na referência (SERONE <i>et al.</i>, 2018).</p>	48
<p>Figura 3.7 – Imagem à esquerda: gráficos das ressonâncias de M^2/m^2 em função de g, evidenciando a existência do segundo acoplamento crítico. Imagem à direita: interpolação dos mínimos (pontos vermelhos) e extrapolação da curva interpolada (ponto preto)</p>	49

Figura 3.8 – Gráfico de $\ln M/m $ em função de $\ln g - g_c $ em primeira ordem perturbativa ressonada pela OPT.	54
Figura 4.1 – Gráfico de M_i^2/m^2 em função de $ g $ com $\text{Sgn} = +1$ para o caso $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$. À esquerda o caso da teoria perturbativa e a direita o resultado da OPT. Para $N_\phi = 2$ (linha preta cheia) e $N_\chi = 3$ (linha vermelha tracejada).	60
Figura 4.2 – Gráfico de M_i^2/m^2 em função de $ g $ com $\text{Sgn} = -1$ para o caso $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$. À esquerda o caso da teoria perturbativa e a direita o resultado da OPT. Para $N_\phi = 2$ (linha preta cheia) e $N_\chi = 3$ (linha vermelha tracejada).	60
Figura 4.3 – Gráfico de M_i^2/m^2 em função de $ g $ para o caso $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathbb{Z}_2$. À esquerda o caso $\text{Sgn} = 1$ e a direita o caso $\text{Sgn} = -1$. Para $N_\phi = 2$ (linha preta cheia) e $N_\chi = 1$ (linha vermelha tracejada).	61
Figura 4.4 – Gráfico de M_i^2/m^2 em função de $ g $ para o caso $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. À esquerda o caso $\text{Sgn} = 1$ e a direita o caso $\text{Sgn} = -1$. Para $N_\phi = 1$ (linha preta cheia) e $N_\chi = 1$ (linha vermelha pontilhada).	62
Figura 4.5 – Gráfico de M_i^2/m^2 , com $\eta_\phi \neq \eta_\chi$, em função de $ g $ para o caso $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. A esquerda o caso $\text{Sgn} = 1$ e a direita o caso $\text{Sgn} = -1$. Sendo $N_\phi = 1$ (linha preta cheia) e $N_\chi = 1$ (linha vermelha tracejada).	64
Figura 4.6 – Gráfico de η_i^2/m^2 em função de $ g $ para o caso $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. À esquerda o caso $\text{Sgn} = 1$ e a direita o caso $\text{Sgn} = -1$	64
Figura 5.1 – Imagem à esquerda: gráfico de m_i^2 em função do acoplamento. m_1^2 , linha vermelha tracejada e m_2^2 na linha preta cheia. Imagem à direita: gráfico de m_1^2 em função do acoplamento.	73
Figura 5.2 – Densidade de entropia, normalizada por s_{free} , para todos os valores de acoplamento no modelo com simetria $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{O}(N)$	73
Figura 5.3 – Medida de interação, normalizada por NT^3 , para todos valores de acoplamento no modelo com simetria $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{O}(N)$	74

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	QUEBRAS DE SIMETRIA E TRANSIÇÕES DE FASE	13
1.1.1	Teoria de Landau	16
1.1.2	Relações entre a mecânica estatística e a teoria quântica de campos	17
1.2	OBJETIVOS	18
2	MODELO ESCALAR E TEORIA DE PERTURBAÇÃO OTIMIZADA .	21
2.1	MODELO ESCALAR	21
2.1.1	Revisão do Modelo Escalar	21
2.1.2	Classificação de renormalização	24
2.1.3	Regularização e Renormalização	25
2.1.4	Grupo de Renormalização	29
2.2	TEORIA DE PERTURBAÇÃO OTIMIZADA	31
2.2.1	Implementação do método	32
3	MODELO ESCALAR COM SIMETRIA \mathbb{Z}_2 EM 1+1 DIMENSÕES . .	38
3.1	A MASSA FÍSICA	39
3.2	A OPT E O GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO	42
3.3	RESSOMA DA SÉRIE PERTURBATIVA	43
3.4	RESULTADOS NUMÉRICOS EM OITAVA ORDEM	45
3.5	REGIÃO SUPERCRÍTICA	48
3.6	CÁLCULO DE EXPOENTES CRÍTICOS	51
4	MODELO ESCALAR $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$ EM 1+1 DIMENSÕES	56
4.1	O MODELO	57
4.2	MASSA FÍSICA OTIMIZADA	57
4.3	RESSOMA DA SÉRIE PERTURBATIVA	59
4.3.1	Caso com simetria $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$	59
4.3.2	Caso com simetria $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathbb{Z}_2$	60
4.3.3	Caso com simetria $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	61
4.3.4	Parametrização Alternativa	62
4.4	PARÂMETROS VARIACIONAIS NÃO DEGENERADOS	63
5	CONFORMABILIDADE DE MODELOS ESCALARES $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$ EM 2+1 DIMENSÕES	66
5.1	O MODELO	67
5.2	TERMODINÂMICA	69
5.3	RESULTADOS	69
5.4	CASO $N_1 = 1$ E $N_2 = N$	72
6	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS	75

REFERÊNCIAS	78
APÊNDICE A – AUTOENERGIA COM DOIS LOOPS	96
APÊNDICE B – POTENCIAIS LIMITADOS INFERIORMENTE . . .	101
APÊNDICE C – SETTING SUN COM DIFERENTES MASSAS . . .	102
APÊNDICE D – CAMPOS BOSÔNICOS EM TEMPERATURAS FI- NITAS	104

1 INTRODUÇÃO

1.1 QUEBRAS DE SIMETRIA E TRANSIÇÕES DE FASE

Simetria é um dos mais importantes temas em todas as áreas da Física. O início dos estudos relacionados com este tópico remonta ao trabalho publicado em 1894 por Pierre Curie (CURIE, 1894). Curie estabeleceu que “as simetrias das causas devem ser encontradas nos efeitos”, posteriormente esta relação tornou-se conhecida como *princípio de Curie* (SHUBNIKOV, 1989). Em 1918, com a publicação do trabalho de Emmy Noether (NOETHER, 1918), as bases matemáticas para o princípio de Curie foram solidificadas (LEONE, 2018).

Possivelmente, o aspecto mais importante da simetria em teorias físicas seja a ideia que os estados de um sistema não precisam possuir as mesmas simetrias da teoria que o descreve. Esta quebra espontânea de simetria governa a dinâmica da transição de fase, o aparecimento de novas partículas e excitações e é uma das principais maneiras da Física clássica emergir do mundo quântico (BEEKMAN *et al.*, 2019). Uma possível forma de entendermos isto é considerarmos um sistema sujeito ao seguinte potencial anarmônico:

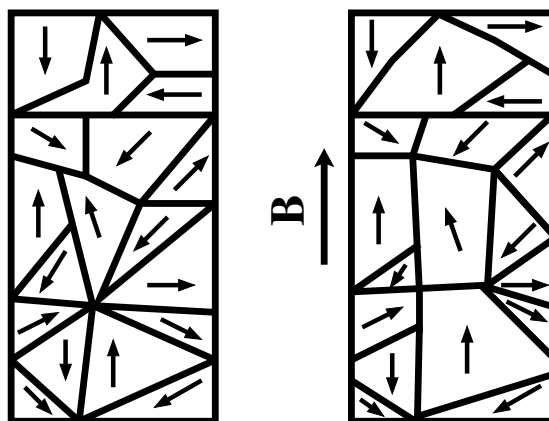
$$U(x) = ax^2 + bx^4, \quad (1.1)$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b > 0$. A dinâmica deste sistema é invariante sob a transformação de paridade $x \rightarrow -x$. Se estivermos no caso $a > 0$, teremos que o mínimo da teoria (vácuo) encontra-se em $\bar{x} = 0$ e o estado do sistema possui a mesma simetria do potencial. Contudo, se $a < 0$ teremos $\bar{x} = \pm\sqrt{-a/2b}$ e o vácuo da teoria não possui a mesma simetria do potencial. Dentro deste tema, o mecanismo de Higgs (HIGGS, 1964a, 1964b) é o que ganhou maior notoriedade nos últimos anos.

Um exemplo pictórico de quebra de simetria pode ser observado considerando-se um ferromagneto sem magnetização espontânea. O ferromagneto possui spins (domínios magnéticos) em direções aleatórias de tal forma que a soma de suas componentes resulta, em média, zero e em um meio isotrópico, isto seria o correspondente a uma simetria descrita pelo grupo $\mathcal{O}(3)$. Se escolhermos um eixo e aplicarmos um campo magnético em sua direção, os spins do ferromagneto tendem a se orientar na direção do campo aplicado (os domínios magnéticos na direção do campo aumentam seu tamanho). Observando o meio que estes spins formam, percebemos que temos uma direção preferencial, a direção do campo magnético, resultando na quebra da isotropia deste espaço. Agora este meio é simétrico apenas por rotações ao redor do eixo do campo externo, correspondente a uma simetria descrita por $\mathcal{O}(2)$. É de imediato vermos que o grupo de simetria final é *menor* que o inicial, sendo assim há uma *quebra de simetria*, $\mathcal{O}(3) \rightarrow \mathcal{O}(2)$. Este efeito está esquematizado na figura 1.1.

Na mecânica estatística os eventos conhecidos como transições de fase estão

Figura 1.1 – Esquematização da magnetização de um ferromagneto. Imagem à esquerda: estado inicial sem campo externo e com o ferromagneto sem magnetização. Imagem à direita: caso onde há a aplicação de um campo magnético externo (B), mostrando o aumento de tamanho dos domínios magnéticos na direção do campo.



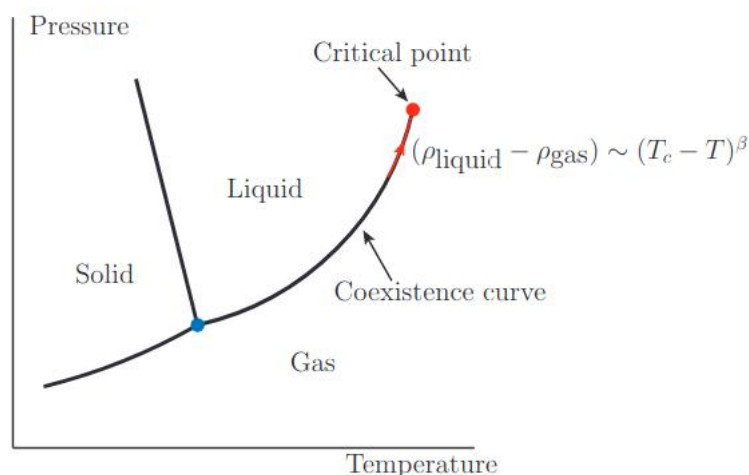
Fonte: Autoral (2021).

associados às quebras de simetria, tendo por sua vez o modelo de Ising (ISING, 1925) como um dos exemplos mais comuns. Com o passar dos anos verificou-se que esta relação entre quebras de simetria e transições de fase poderia ser benéfica ao desenvolvimento da teoria quântica de campos e da mecânica estatística. Um exemplo disto ocorre no modelo escalar em duas dimensões do espaço-tempo com simetria \mathbb{Z}_2 , que será considerado posteriormente, uma vez que este é análogo ao modelo de Ising bidimensional (SIMON; GRIFFITHS, 1973). Resultados analíticos previamente conhecidos para o modelo de Ising, como o caráter da transição de fase e os expoentes críticos obtidos por Onsager (ONSAGER, 1944), podem então ser aproveitados para a determinação e comparação de outras propriedades do modelo escalar com simetria \mathbb{Z}_2 .

Para transições de fase temos exemplos usuais e cotidianos, como o derretimento de gelo, evaporação e condensação da água. Tais eventos usuais são transições de fase de primeira ordem, e são identificados por uma descontinuidade no que é chamado parâmetro de ordem (magnetização, condensado, etc.) em relação a um parâmetro de controle (temperatura, potencial químico, etc.). Eventos mais raros, conhecidos como transições de fase de segunda ordem, por sua vez são caracterizados pela forma contínua com a qual o parâmetro de ordem evolui quando o parâmetro de controle se aproxima do valor onde ocorre a transição: *ponto crítico*. Estas transições podem ser observadas também na água, como apresenta a figura 1.2.

Para a água, a transição de segunda ordem se dá no ponto crítico, indicado na figura 1.2, que está localizado em $T_c \simeq 647 \text{ K}$ e $P_c \simeq 22 \text{ MPa}$. Partindo da linha de coexistência e nos aproximando do ponto crítico obtemos que a relação entre a densidade da fase líquida e a densidade da fase gasosa é dada por $(\rho_{\text{liquid}} - \rho_{\text{gas}}) \sim (T_c - T)^\beta$,

Figura 1.2 – Diagrama de fases da água, com indicação das curvas de coexistência de fases assim como do ponto crítico.



Fonte: (TARNOPOLSKIY, 2017).

sendo $\beta \simeq 0.33$. O mesmo valor também é medido em diversas outras substâncias em seus respectivos pontos críticos (LE GUILLOU; ZINN-JUSTIN, J., 1980).

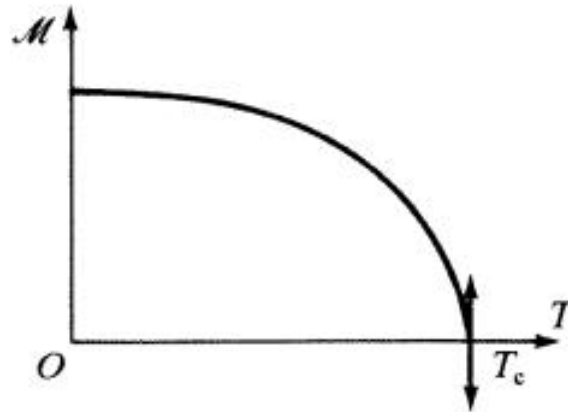
Quantidades definidas de forma similar à β , são chamadas de *expoentes críticos*. Tais observáveis, que caracterizam as transições de segunda ordem, estão correlacionados entre si (LE BELLAC, 1991). Quando sistemas diferentes, sejam estatísticos ou de teoria de campos, compartilham dois expoentes críticos iguais, podemos afirmar que os modelos que os descrevem pertencem a mesma *classe de universalidade*.

Uma outra análise possível, que mostra o poder dos expoentes críticos, vem da transição de fase sofrida por ferromagnetos (ZINN-JUSTIN, 1994). Considerando a magnetização (\mathcal{M}) em função da temperatura pode-se obter a figura 1.3. Fica evidente que a passagem da fase magnetizada para a desmagnetizada se dá por uma transição de fase de segunda ordem, uma vez que o parâmetro de ordem (\mathcal{M}) é uma função contínua do parâmetro de controle (T).

Neste caso, a maneira como a magnetização (\mathcal{M}) vai a zero é ditada por $\mathcal{M} \sim (T - T_c)^\beta$, onde T_c é conhecida como temperatura de Curie. Surpreendentemente, o valor do expoente β medido é $\beta \simeq 0.33$, isto é, dois sistemas distintos e aparentemente sem nenhuma relação entre si, possuem uma quantidade que deve ser exatamente a mesma.

O cálculo exato de expoentes críticos é de grande complexidade, sendo assim muitas vezes são realizadas estimativas de seus valores. Uma teoria simples que além de poder ser usada para tais estimativas e ainda estabelece uma clara ponte entre a mecânica estatística e a teoria quântica de campos é a teoria de Landau (LANDAU, 1937).

Figura 1.3 – Magnetização em função da temperatura.



Fonte: (LE BELLAC, 1991).

1.1.1 Teoria de Landau

A teoria de Landau, a qual nos possibilita uma descrição qualitativa de transições de fase de segunda ordem, surge de uma ideia simples: uma expansão em série de Taylor. Uma rápida reconstrução de tal teoria pode ser benéfica tanto para fins de compreensão das transições de fase, como também para evidenciar relações entre a mecânica estatística e a teoria quântica de campos (TARNOPOLSKIY, 2017).

Para ilustrar os aspectos mais importantes desta teoria, tomemos a energia livre $F(\mathcal{M}, T)$. Conforme há o aumento de temperatura, isto é, T vai ao encontro de T_c , a magnetização (\mathcal{M}) se reduz, como mostra a figura 1.3. Portanto, podemos realizar uma expansão da energia livre em torno do zero da magnetização e obter:

$$F(\mathcal{M}, T) = F_0(T) + a(T)\mathcal{M}^2 + b(T)(\mathcal{M}^2)^2 + \dots \quad (1.2)$$

O equilíbrio pode ser encontrado pela relação:

$$\frac{\partial F(\mathcal{M}, T)}{\partial \mathcal{M}} = 0. \quad (1.3)$$

Assim, se $a(T) > 0$, temos $|\mathcal{M}| = 0$, porém, se $a(T) < 0$, temos como solução $|\mathcal{M}| = \sqrt{-a(T)/2b(T)}$. Como a teoria é construída com $T \rightarrow T_c$, podemos tomar $a(T) \simeq a_0(T - T_c)$ e $b(T) \simeq b_0$, que nos leva a magnetização:

$$|\mathcal{M}| \sim (T_c - T)^{1/2}. \quad (1.4)$$

Vemos que a teoria de Landau consegue reproduzir algumas propriedades de transições de fase de segunda ordem, porém falha ao reproduzir o expoente crítico β , uma vez que o valor medido é de 0.33 e não 1/2 (campo médio).

Esta teoria toma a magnetização como um valor constante em todo o espaço e descarta possíveis flutuações, sendo assim, uma possível forma de melhorar a descri-

ção é introduzir um peso de Boltzmann em cada configuração:

$$W(\mathcal{M}) = e^{-\frac{F(\mathcal{M}(x), T)}{k_B T}}. \quad (1.5)$$

Como agora \mathcal{M} depende explicitamente das coordenadas, a energia livre precisa ser um funcional, pois pode possuir dependências nas derivadas da magnetização:

$$F[\mathcal{M}(x), T] = \int d^D x F(\mathcal{M}(x), \nabla \mathcal{M}(x), \dots, T). \quad (1.6)$$

Assim, a expansão em série de Taylor da energia livre fica:

$$F[\mathcal{M}(x), T] = \int d^D x \left\{ F_0(T) + a(T) \mathcal{M}^2(x) + b(T) [\mathcal{M}^2(x)]^2 + c(T) (\nabla \mathcal{M})^2 + \dots \right\}. \quad (1.7)$$

Então a função de partição, que será a soma sobre todas as configurações do sistema, é representada por:

$$\begin{aligned} Z[\mathcal{M}(x)] &= \int \mathcal{D}\mathcal{M}(x) e^{-\frac{1}{k_B T} F[\mathcal{M}(x), T]} \\ &= \int \mathcal{D}\mathcal{M}(x) e^{-\frac{1}{k_B T} \int d^D x \left\{ F_0(T) + a(T) \mathcal{M}^2(x) + b(T) [\mathcal{M}^2(x)]^2 + c(T) (\nabla \mathcal{M})^2 + \dots \right\}} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Com versões da equação acima Wilson e Fisher previram, em 1972, o valor $\beta \simeq 0.306$ (WILSON; FISHER, 1972), que se mantém um ótimo resultado até mesmo quando comparado aos cálculos mais recentes das referências (GUIDA; ZINN-JUSTIN, 1998; EL-SHOWK *et al.*, 2014)

1.1.2 Relações entre a mecânica estatística e a teoria quântica de campos

Um exemplo claro da intersecção entre a teoria quântica de campos e da mecânica estatística pode ser notado quando consideramos o modelo $\lambda\phi^4$, que é muito utilizado em teoria de campos. Algumas propriedades deste modelo serão apresentadas no capítulo 2.

Em particular, conforme já mencionado, quando se estuda este modelo no regime de 1+1 dimensões observa-se que ele é análogo ao modelo de Ising bidimensional (SIMON; GRIFFITHS, 1973), cujo comportamento crítico foi descrito analiticamente por Onsager (ONSAGER, 1944). A tabela 1.1 ilustra algumas equivalências entre os dois modelos.

Tabela 1.1 – Correlação entre quantidades do modelo escalar (teoria quântica de campos) e do modelo de Ising (mecânica estatística).

Teoria de Campos	Mecânica Estatística
Campos (ϕ, ψ, \dots)	Variáveis de spin (S)
Fonte (J)	Campo Magnético (\mathbf{H})
Ação Euclidiana (S)	Energia de configuração, Hamiltoniana
Integral Funcional	Soma sobre configuração de spins
Valor esperado do campo no vácuo	Magnetização (\mathcal{M})
Função de dois pontos com momento externo zero ($\Gamma^{(2)}(p^2 = 0)$)	Suscetibilidade magnética (χ)
Massa física ao quadrado (M^2)	Inverso do comprimento de correlação (ξ^{-1})
Teoria sem massa ($m^2 = 0$)	Teoria crítica

Fonte: (ZINN-JUSTIN , 1994)

1.2 OBJETIVOS

Nesta dissertação iremos explorar as possibilidades de transições de fase em diferentes versões de teorias escalares em baixas dimensões, isto é, sistemas em duas e três dimensões espaço-temporais. Para avaliar estas possibilidades iremos considerar diferentes quantidades em cada versão do modelo. Sempre respeitando os teoremas *no-go* (que estabelecem quais transições podem ocorrer em determinadas dimensões), iremos determinar quais os modelos que podem representar uma teoria conforme assim como quais os valores dos parâmetros críticos onde isto ocorre.

A teoria de perturbação é o método mais abrangente e utilizado para cálculos na Física, mas infelizmente a maioria das teorias físicas possuem séries perturbativas divergentes. Obter resultados de observáveis a partir destas séries (considerando um grande número de termos) é um problema de longa data. Como é bem estabelecido, no regime crítico a teoria de perturbação padrão não é capaz de reproduzir resultados confiáveis, uma vez que próximo da transição de fase a massa física ao quadrado da teoria se torna nula. Outro problema da teoria perturbativa aparece no caso de temperaturas finitas, que será abordado no capítulo 5, onde mesmo em limites de acoplamentos fracos as potências de temperatura acabam por sobrepujar os valores dos acoplamentos e carregam a teoria para a região não perturbativa. A teoria de perturbação também não é confiável em teorias que cuja constante de acoplamento não é pequena e assim não permitem uma expansão perturbativa, como acontece no caso da cromodinâmica quântica (QCD) em baixas energias. Nestes casos deve-se recorrer a métodos de ressonância (KNEUR *et al.*, 2002). Procedimentos de ressonância são aplicados em séries divergentes para que, a partir delas, obtenha-se uma

expansão convergente. O trabalho está dividido da seguinte maneira. No próximo capítulo serão apresentadas algumas propriedades do modelo escalar $\lambda\phi^4$. Também será apresentada e aplicada a teoria de perturbação otimizada (OPT), método de ressonância predominante neste trabalho.

No capítulo 3 utilizaremos a OPT para analisar o modelo escalar restrito a 1+1 dimensões. Como neste caso particular o teorema de Coleman (COLEMAN, 1973) proíbe a quebra de simetrias contínuas, consideraremos a simetria discreta \mathbb{Z}_2 . Os resultados obtidos mostram que apesar de sua simplicidade o modelo estudado apresenta características interessantes, como uma transição de fase puramente quântica de segunda ordem (CHANG, 1976). Este modelo é bastante explorado na literatura sob diferentes métodos e abordagens (SERONE *et al.*, 2018; RYCHKOV; VITALE, 2015; MILSTED *et al.*, 2013; ROMATSCHKE, 2019b), portanto fornece um campo fértil para que possamos testar e comparar valores obtidos para diferentes quantidades. Aplicaremos a teoria de perturbação otimizada para obter com precisão o valor do acoplamento crítico, onde o modelo descreve uma teoria conforme. Observando tal valor concluímos que a ressonância realizada pela OPT é confiável, uma vez que está em concordância com os resultados mais recentes que utilizam outros métodos de ressonância (SERONE *et al.*, 2018). Como novidade, exploraremos a região supercrítica (normalmente ignorada) e mostraremos que a mesma contém informações que podem ser utilizadas para obter resultados em extrapolações para ordens arbitrariamente altas. Os resultados originais deste capítulo podem ser encontrados na referência (HEYMANS; PINTO, 2021).

Ainda interessados no estudo de quebras quânticas de simetria de modelos escalares em duas dimensões espaço-temporais, no capítulo 4 generalizaremos o caso anterior para o grupo $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$. Uma vez que o teorema de Coleman continua sendo aplicável, investigaremos se existe a possibilidade de alguma combinação, entre as constantes de acoplamento e/ou número de componentes de cada setor, que gere resultados onde o modelo seja fisicamente aceitável (isto é, que não viole o teorema de Coleman). Utilizando a teoria de perturbação observaremos que sempre há quebra de simetria, assim o único caso admissível seria o caso com simetria $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, onde as simetrias são discretas. Porém, como argumentado anteriormente, a teoria perturbativa não gera resultados confiáveis, sendo assim aplicando a OPT observaremos que, sob certas condições, mesmo o caso $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$ é permitido, uma vez que a possibilidade de quebra é inibida quando a série perturbativa é ressonada. Neste mesmo sentido o caso $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathbb{Z}_2$ poderá apresentar a quebra $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathcal{O}(N)$, permitida pelo teorema.

Por último, no capítulo 5 continuaremos a considerar o grupo de simetria $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$, mas passaremos a analisar o caso em 2+1 dimensões. Como estaremos interessados em investigar a conformabilidade deste modelo, consideraremos o caso sem

massa (teoria crítica, tabela 1.1) e em regime de temperaturas finitas. Utilizando o método de aproximação de campo médio calcularemos algumas quantidades termodinâmicas para quaisquer valores dos acoplamentos. Verificaremos que este modelo não pode ser uma teoria conforme pura, concluindo que a razão entre as entropias do sistema fortemente acoplado ($\lambda \rightarrow \infty$) e a entropia do sistema livre ($\lambda = 0$) é $s/s_{free} = 4/5$. Foi observado que esta razão não depende de nenhuma escolha particular de N_ϕ ou N_χ , sugerindo sua universalidade para modelos escalares. Notamos ainda que este resultado para a entropia do sistema com acoplamento forte é similar ao resultado $s = 3/4 s_{free}$ obtido no caso do modelo $\mathcal{N} = 4$ Super-Yang-Mills, que é um exemplo de teoria conforme pura. Consideraremos ainda o caso particular $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{O}(N)$ (CHAI *et al.*, 2020), no limite de N -grande obteremos o valor da medida de interação, assim como para as massas térmicas, em todos os valores dos acoplamentos. Também verificaremos que a geração térmica de massa é responsável por realizar uma transição de fase $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{O}(N) \rightarrow \mathcal{O}(N)$. Tal transição não quebra a conformabilidade do sistema no regime de baixas e altas temperaturas.

Finalmente, no capítulo 6 apresentaremos as conclusões assim como as perspectivas de estudos futuros que poderão seguir deste trabalho. No apêndice A realizaremos, em detalhes, o cálculo dos diagramas de segunda ordem da autoenergia. O apêndice B possui a demonstração das condições que limitam inferiormente o potencial do modelo escalar com simetria $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$. No apêndice C mostraremos o cálculo do diagrama de segunda ordem da autoenergia conhecido como *setting-sun* no espaço de coordenadas, para o modelo com simetria $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$. Por fim, no apêndice D introduziremos as transformações de Matsubara para o caso bosônico, que levam um sistema de temperatura zero para o regime de temperaturas finitas, com uma rápida aplicação ao caso da teoria escalar livre.

2 MODELO ESCALAR E TEORIA DE PERTURBAÇÃO OTIMIZADA

2.1 MODELO ESCALAR

Apesa de sua simplicidade o modelo $\lambda\phi^4$ é muito útil na descrição de quebras de simetria, permitindo diversas aplicações em diferentes abordagens físicas, além disto o mesmo é bastante utilizado como laboratório para o teste de diferentes aproximações. Os termos livres de interação deste modelo podem ser obtidos como solução da equação de Klein-Gordon (PESKIN; SCHROEDER, 1995). As aplicações desta teoria se dão em diversas áreas de teorias de campos, passando pelo setor de Higgs do modelo padrão, modelos de inflação em cosmologia (LINDE, 1990), modelos de condensação de Bose-Einstein (CASTELLANOS *et al.*, 2014), entre outras (NĂSTASE, 2019). No sistema de unidades naturais $\hbar = c = k_B = 1$, a densidade Lagrangiana que representa o modelo no espaço Euclidiano é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (2.1)$$

É simples perceber que a equação (2.1) possui a simetria de reflexão ($\phi \rightarrow -\phi$), isto é, uma simetria discreta descrita pelo grupo \mathbb{Z}_2 .

2.1.1 Revisão do Modelo Escalar

Conhecendo a densidade Lagrangiana de interesse podemos escrever o *gerador funcional das funções de Green* em termos das integrais de trajetória em D dimensões do espaço-tempo. O gerador funcional das funções de Green pode ser interpretado como a amplitude de transição entre o vácuo em um passado remoto e o vácuo em um futuro longínquo na presença de um termo de fonte ($J(x)$) (BAILIN; LOVE, 1993; RAMOND, 1981; FEYNMAN; HIBBS, 2010):

$$\langle 0^+ | 0^- \rangle_J = Z[J(x)] = \int \mathcal{D}\phi(x) e^{-i \int d^D x (\mathcal{L} + J(x)\phi(x))}. \quad (2.2)$$

Como o nome sugere, a partir da equação (2.2) podemos obter todas as funções de Green da teoria. A forma de gerar tais funções se dá a partir de derivadas funcionais em relação a fonte antes de tomar-se o limite $J(x) \rightarrow 0$. Uma vez que os observáveis físicos nos quais estaremos interessados são obtidos a partir das funções de Green irredutíveis de uma partícula (1PI), iremos definir o seu gerador funcional. Primeiramente definimos o gerador das funções de Green conectadas (reduzíveis) $W[J(x)]$ (BAILIN; LOVE, 1993):

$$e^{iW[J(x)]} \equiv \langle 0^+ | 0^- \rangle_J. \quad (2.3)$$

Em seguida, definimos o campo clássico e o valor esperado do vácuo na presença da fonte $J(x)$ como:

$$\phi_c(x) \equiv \frac{\delta W[J(x)]}{\delta J(x)} = \frac{\langle 0^+ | \phi(x) | 0^- \rangle_J}{\langle 0^+ | 0^- \rangle_J}, \quad (2.4)$$

$$\langle \phi \rangle \equiv \lim_{J(x) \rightarrow 0} \phi_c(x). \quad (2.5)$$

Realizando então uma transformada de Legendre em $W[J(x)]$ obtemos a *ação efetiva*:

$$\Gamma[\phi_c(x)] = W[J(x)] - \int dx J(x) \phi_c(x), \quad (2.6)$$

com $\Gamma[\phi_c(x)]$ sendo gerador funcional das funções de Green de n pontos 1PI. Note que a equação (2.6) é equivalente a relação termodinâmica para a energia em função da energia livre, $E = F + TS$ (BAILIN; LOVE, 1993). Assim, quando tomamos o limite $J(x) \rightarrow 0$, temos $\phi_c(x) \rightarrow \langle \phi \rangle$ e ficamos com:

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\phi_c(x)]}{\delta \phi_c(x)} \right|_{\langle \phi \rangle} = 0. \quad (2.7)$$

Poderíamos então expandir $\Gamma[\phi_c]$ em potências de $\phi_c(x)$ e tal expressão teria dependência nas coordenadas. Para obter a expressão no espaço dos momentos, como desejamos, faremos previamente uma transformada de Fourier e ficaremos, de forma completamente equivalente, com:

$$\Gamma[\tilde{\phi}_c(p)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dp_1 \dots dp_n \delta^{(D)}(p_1 + \dots + p_n) \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \tilde{\phi}_c(p_1) \dots \tilde{\phi}_c(p_n). \quad (2.8)$$

Definindo $\tilde{\phi}_c(p)$ como a transformada de Fourier do campo clássico e identificando $\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ como a *função de Green de n pontos 1PI*. A partir das funções de Green de n pontos 1PI poderemos obter as principais quantidades que serão de interesse no decorrer deste trabalho (RAMOND, 1981; BAILIN; LOVE, 1993; PESKIN; SCHROEDER, 1995).

Note ainda que podemos voltar para a equação (2.6) e realizar uma expansão nas derivadas de $\phi_c(x)$ (CALDAS *et al.*, 1977; BAILIN; LOVE, 1993):

$$\Gamma[\phi_c(x)] = \int d^D x \left[-V_{eff}(\phi_c) + \frac{A(\phi_c)}{2} \partial_\nu \phi_c \partial^\nu \phi_c + \dots \right]. \quad (2.9)$$

Sendo V_{eff} , A , ... funções de $\phi_c(x)$, não funcionais. Tomando todos os momentos externos na equação (2.8) como nulos e considerando que $\phi_c(x)$ seja invariante por translações, $\phi_c(x) \equiv \phi_c$, na equação (2.9), podemos realizar uma comparação entre as expressões e obter:

$$V_{eff}(\phi_c) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_c^n}{n!} \Gamma^{(n)}(p^2 = 0). \quad (2.10)$$

A quantidade V_{eff} é conhecida como potencial efetivo. Como ficará mais claro posteriormente, o potencial efetivo é dado pela soma do potencial clássico com correções radioativas (quânticas). Note ainda que, o potencial efetivo é dado por uma série de funções de Green 1PI, isto é, alternativamente poderemos descrevê-lo como uma soma de diagramas de Feynman.

Agora, ao compararmos a equação (2.2) com a equação (1.8) notamos uma grande similaridade. O mesmo pode ser observado ao compararmos as equações (2.9) e (1.7). Por conta dessas similaridades, muitas vezes quando aplicado a sistemas de matéria condensada o potencial efetivo é tratado como *energia livre de Landau* (\mathcal{F}). Como será visto no capítulo 5 deste trabalho, a minimização desta quantidade nos permite obter a pressão e conseqüentemente todas as outras quantidades termodinâmicas de fundamental importância para caracterizações e análises físicas dos modelos.

Prosseguindo, é educativo fazermos uma análise dimensional e estabelecer quais serão as dimensões de cada quantidade de interesse nas equações (2.1) e (2.2) (durante todo o trabalho permaneceremos no sistema de unidades naturais)

É imediato vemos que $[d^D x] = E^{-D} \rightarrow [\mathcal{L}] = E^D$, sendo que E possui unidades de energia. Dado que cada termo da equação (2.1) deve possuir a dimensão total da densidade Lagrangiana, podemos descobrir as unidades de cada um de seus componentes. Como as derivadas são dadas por $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ é imediato verificar que $[\partial_\mu] = E$ e, com isto, é possível construir a tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Unidades canônicas para cada termo que compõe a equação (2.1).

Quantidade	Unidade
$[\phi]$	$E^{D/2-1}$
$[m^2]$	E^2
$[\lambda]$	E^{4-D}

Fonte: Autoral (2021)

Vale ressaltar que este mesmo procedimento pode ser aplicado para determinar as unidades de qualquer outro modelo de interesse. Aplicando a teoria de perturbação e realizando a integração funcional na equação (2.8) (ZEE, 2003; PESKIN; SCHROEDER, 1995; BAILIN; LOVE, 1993; RAMOND, 1981), pode-se verificar que as regras de Feynman no espaço Euclidiano desta teoria são:

$$\text{---}\longrightarrow\text{---} = \frac{1}{p^2 + m^2}, \tag{2.11}$$

e

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = -\lambda, \tag{2.12}$$

lembrando que os momentos devem ser conservados em cada vértice enquanto os laços em momentos internos (k) são integrados com $\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}$.

Conhecendo estas regras pode-se montar diagramas de qualquer ordem. Em geral, nas primeiras ordens o cálculo é simples e pode ser feito analiticamente. Durante o desenvolvimento deste trabalho serão apresentadas algumas formas de realizar o cálculo dos diagramas relevantes. Além disso, o apêndice A inclui detalhes relativos ao cálculo explícito de diagramas de dois pontos com um e dois laços.

2.1.2 Classificação de renormalização

Com relação a renormalização, os modelos de teorias de campos podem ser subdivididos em três grupos:

- Super-renormalizáveis: São modelos com dimensões de energia da constante de acoplamento positivas.
- Renormalizáveis: Caso as dimensões de energia da constante de acoplamento da teoria sejam iguais a zero.
- Não-renormalizáveis: Para o caso em que as dimensões de energia do acoplamento da teoria sejam negativas.

Note que para um modelo (super) renormalizável a condição acima é *necessária mas não suficiente*, para que seja precisamente classificado como (super) renormalizável sua densidade Lagrangiana deve possuir termos que geram os contra-termos necessários para anular divergências primitivas da teoria (CHENG; LI, 1982). Para verificarmos em qual destas classificações o modelo escalar se encaixa podemos analisar a tabela 2.1. Como mesmo em teorias super-renormalizáveis ocorrem divergências, convém avaliar a divergência de cada diagrama separadamente. Para realizar tal avaliação podemos definir o *grau de divergência superficial* (θ) (RAMOND, 1981):

$$\theta = D - \frac{1}{2}(D-2)E + V_n\left(\frac{n-2}{2}D - n\right), \quad (2.13)$$

sendo D = número de dimensões do espaço-tempo, E = número de pernas externas, n = número de pernas do vértice e V_n = número de vértices com n pernas. Como estamos considerando o modelo $\lambda\phi^4$, os vértices sempre devem ter quatro pernas ($n = 4$). Desta maneira, se tomarmos o diagrama associado a função de Green de quatro pontos 1PI com um laço ($E = 4$) obtemos:

$$\text{Diagrama de um laço} \rightarrow \theta = D - 4. \quad (2.14)$$

Agora, com uma expressão muito mais simples podemos avaliar alguns casos possíveis para θ . A partir de algumas escolhas específicas montamos a tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Graus de divergência superficial para o diagrama (2.14) em diferentes dimensões.

D	θ	Superficialmente
6	2	Divergente
4	0	Divergente
2	-2	Convergente

Fonte: Autoral (2021)

De acordo com o *teorema de Weinberg* (WEINBERG, 1960), podemos separar os resultados desta análise em duas categorias importantes: diagramas com $\theta \geq 0$ são superficialmente divergentes e diagramas com $\theta < 0$ são superficialmente convergentes. Vale o lembrete de que isto é apenas uma contagem superficial da divergência, em ordens mais altas ou em teorias mais complexas alguns diagramas podem possuir $\theta < 0$ mas abrigar subdiagramas divergentes. Sendo assim sempre se faz necessário avaliar não apenas a divergência superficial mas também a divergência dos subdiagramas.

Estando ciente das classificações de renormazibilidade, podemos utilizar a tabela 2.1 e verificar que o modelo escalar é super-renormalizável em 1+1 e 2+1 dimensões, renormalizável em 3+1 dimensões e não-renormalizável em $k+1$ dimensões ($k > 3$). Contando a divergência superficial do diagrama de 4 pontos com um laço, tabela 2.2, podemos por exemplo ver que este diagrama é divergente em 5+1 e 3+1 dimensões e convergente em 1+1 dimensões.

2.1.3 Regularização e Renormalização

Como foi abordado anteriormente, as integrais sobre os momentos que aparecem em modelos de teoria quântica de campos podem apresentar pólos. Para que seja possível tratar tais divergências foram elaborados procedimentos matemáticos que primeiro separam as divergências da parte finita do diagrama (*regularização*) para em seguida redefinir os parâmetros originais de maneira a eliminar todas as divergências primitivas (*renormalização*).

Este programa (de renormalização) foi inicialmente desenvolvido durante o final dos anos 1940, tendo em vista as divergências presentes na eletrodinâmica quântica (QED). Estas divergências foram objetos de estudo de diversos pesquisadores da época, alguns tais como Hendrick Kramers (DRESDEN, 1993), Hans Bethe (BETHE, 1947), Julian Schwinger (SCHWINGER, 1948a, 1948b, 1949a, 1949b), Richard Feynman (FEYNMAN, 1948c, 1948a, 1948b) e Shin'ichiro Tomonaga (KOBA; TOMONAGA, 1948; TOMONAGA; OPPENHEIMER, 1948). Em seguida, tais procedimentos foram sistematizados por Freeman Dyson em 1949 (DYSON, 1949). Em 1965, Tomonaga, Schwinger e Feynman dividiram o prêmio Nobel pelos *seus trabalhos fundamentais*

na eletrodinâmica quântica, com grandes consequências na física de partículas elementares.

Para ilustrar estes conceitos, iremos realizar a regularização e renormalização do diagrama da autoenergia de 2 pontos 1PI de primeira ordem do modelo escalar, conhecido como *tadpole*. Aplicando as regras de Feynman (2.11) e (2.12), obtemos:

$$\begin{array}{c} \bigcirc \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \lambda f_s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{\Delta(p)} = \lambda f_s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + m^2}, \quad (2.15)$$

com f_s representando o fator de simetria deste diagrama. esta quantidade, f_s , está associada ao número de possíveis combinações que geram um diagrama com a mesma topologia. Deve-se notar que o cálculo do fator de simetria, em altas ordens pode representar uma tarefa complexa. Todavia para a primeira ordem chega-se facilmente a $f_s = 1/2$ (RAMOND, 1981). Os fatores de simetria de ordens mais altas utilizados neste trabalho foram tomados das referências (KLEINERT; SCHULTE-FROHLINDE, 2001; KLEINERT *et al.*, 2000).

Para facilitar a análise da equação (2.15) podemos reescrevê-la como:

$$\begin{array}{c} \bigcirc \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + m^2} \propto \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p^{D-1}}{p^2 + m^2}. \quad (2.16)$$

Sendo assim, é simples verificar que tal integral diverge quando $p \rightarrow \pm\infty$ nos casos em 1+1 e em 3+1 dimensões e que converge para o caso em três dimensões do espaço-tempo, tais divergências são conhecidas como *divergências ultravioletas*. Note ainda que caso estivéssemos interessados em um modelo que descreve campos sem massa ($m^2 = 0$), teríamos uma divergência adicional associada a $p \rightarrow 0$, conhecida como *divergência infravermelha*.

Existem diversas formas de realizarmos a regularização. Possivelmente, a forma mais simples de introduzir tal procedimento seja através da introdução de um limite superior (escala) na integral. Tal método é conhecido como regularização por *cut-off* (KLEINERT; SCHULTE-FROHLINDE, 2001). Para tornar claro como este método funciona iremos aplicá-lo para o caso de duas dimensões espaço-temporais. Neste caso, a equação (2.15) pode ser reescrita como:

$$\begin{array}{c} \bigcirc \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 + m^2} = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dp^2}{4\pi} \frac{1}{p^2 + m^2} = \frac{1}{8\pi} \ln \frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2}. \quad (2.17)$$

A implementação do cutoff é análoga ao espaçamento (a) de uma rede em um sistema de estado sólido, de sorte que o corte nos momentos poderia ser interpretado como $\Lambda \sim 1/a$. Obviamente, no caso de teorias de campos tal “rede” é contínua, ou seja, a rigor teríamos $a \rightarrow 0$. Agora considerando que $\Lambda^2 \gg m^2$, ou ainda $a \ll 1$,

podemos tomar uma expansão em uma série de Taylor em torno de m^2 , obtendo:

$$\text{Diagrama} = \frac{\lambda}{8\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + O((\Lambda^2)^{-1}). \quad (2.18)$$

Fica claro que o limite $\Lambda \rightarrow \infty$ é uma divergência logarítmica ultravioleta. Deve ser enfatizado que em teorias não renormalizáveis (por exemplo, teoria de Nambu–Jona-Lasinio em 3+1 dimensões), Λ é fixado em um valor finito que representa escala de energia relevante da teoria em questão. Neste caso, Λ pode ser interpretado como um limite para a teoria, que torna-se “efetiva” (isto é, a teoria possui validade até a escala de energia fixada pelo valor de Λ). Além disto, o método de cutoff, apesar de adequado para a regularização, acaba por quebrar a invariância translacional do sistema. Entre os métodos capazes de regularizar as integrais sem quebrar a invariância translacional estão: regularização de Pauli-Villars, regularização analítica e regularização dimensional (KLEINERT; SCHULTE-FROHLINDE, 2001).

Para seguir com os cálculos iremos introduzir aqui a *regularização dimensional* (’T HOOFT; VELTMAN, 1972; BOLLINI; GIAMBIAGI, 1996), que representa a técnica predominante neste trabalho. Primeiramente voltaremos para a equação (2.15) e nela realizaremos um deslocamento de 2ε no número de dimensões D do espaço-tempo. Assim, ficaremos com $D \rightarrow D-2\varepsilon$, para manter a consistência das unidades de energia é necessário redefinir a constante de acoplamento como $\lambda \rightarrow \lambda(\mu^2)^\varepsilon$, sendo μ uma escala arbitrária de energia, isto é: $[\mu] = 1$ (RAMOND, 1981). Com tais alterações reescrevemos:

$$\text{Diagrama} = \frac{\lambda(\mu^2)^\varepsilon}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{D-2\varepsilon} p}{(2\pi)^{D-2\varepsilon}} \frac{1}{p^2 + m^2}. \quad (2.19)$$

A partir da equação (2.19) podemos utilizar o resultado da integral em termos de função da $\Gamma(x)$. Seguindo o apêndice A, obtemos:

$$\text{Diagrama} = \frac{\lambda (m^2)^{D/2-\varepsilon-1} (\mu^2)^\varepsilon}{2 (4\pi)^{D/2-\varepsilon}} \Gamma(1 - D/2 + \varepsilon). \quad (2.20)$$

Agora tomando o caso de interesse, $D = 2$, realizaremos uma expansão em série de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$ e então obteremos o resultado em potências de ε . Assim, considerando até ordem ε^0 , obtemos:

$$\text{Diagrama} = \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon} + \frac{\lambda}{8\pi} \left[\ln(4\pi) + \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) - \gamma_E \right] + O(\varepsilon), \quad (2.21)$$

com $\gamma_E \approx 0.577216$ representando a constante de Euler-Mascheroni. Perceba que a parte da divergência está completamente contida no termo $1/\varepsilon$ e sendo assim, o diagrama está regularizado. Para continuar com o tratamento da divergência devemos selecionar um determinado tipo de *esquema de subtração*. A escolha do esquema

de subtração é a forma como os parâmetros que realizam a renormalização são fixados, estes parâmetros são conhecidos como *contratermos* (BAILIN; LOVE, 1993). O esquema de subtração adotado neste trabalho é o chamado esquema da subtração mínima modificado ($\overline{\text{MS}}$) (BARDEEN *et al.*, 1978) que nos permite remover, além da divergência, também termos constantes que não afetam as propriedades físicas do modelo, tais como $\ln(4\pi)$ e γ_E . Podemos introduzir o esquema $\overline{\text{MS}}$ através da multiplicação do volume da integral pelo fator $[e^{\gamma_E}/(4\pi)]^\varepsilon$ antes de realizar a expansão em ε , fazendo isto e tomando $D = 2$ na equação (2.20), obtemos:

$$\frac{\lambda}{2} \frac{(m^2)^\varepsilon}{(4\pi)^{1-\varepsilon}} \Gamma(\varepsilon) \left(\frac{e^{\gamma_E} \mu^2}{4\pi} \right)^\varepsilon \simeq \frac{\lambda}{8\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] + O(\varepsilon). \quad (2.22)$$

Portanto, se truncarmos na ordem ε^0 :

$$\text{---}\bigcirc\text{---} = \frac{\lambda}{8\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right]. \quad (2.23)$$

Note que, junto com a divergência aparece uma função logarítmica dependente da escala arbitrária. É comum tais termos aparecerem juntos e por conta disso estes logaritmos são chamados de *leading Logs*. Vale ressaltar que a regularização dimensional e o esquema de subtração $\overline{\text{MS}}$ podem ser introduzidos diretamente na equação (2.15) via o deslocamento no número de dimensões ($D \rightarrow D - 2\varepsilon$) e a multiplicação do fator $\left(\frac{e^{\gamma_E} \mu^2}{4\pi} \right)^\varepsilon$ gerando, após a expansão, a equação (2.23).

Como foi anteriormente dito, agora somos capazes de fixar o contratermo de tal forma que a divergência seja eliminada (BAILIN; LOVE, 1993; RAMOND, 1981). Em geral, exigindo que o contratermo anule a divergência, temos:

$$\text{---}\blacksquare\text{---} = -\frac{\lambda}{8\pi\varepsilon} + F, \quad (2.24)$$

sendo F um termo finito arbitrário que o contratermo pode conter. Agora, note que como estaremos sempre interessados no limite $\varepsilon \rightarrow 0$, a parte que contém $1/\varepsilon$ será sempre maior do que a parte finita do contratermo. Portanto o termo finito do contratermo, F , possui uma nova arbitrariedade e isto nos permite fazer a escolha de seu valor (RAMOND, 1981). Como neste trabalho elegemos o esquema de subtração $\overline{\text{MS}}$, a escolha que anula apenas a divergência é simplesmente $F = 0$. Os contratermos adicionais geram correções que devem ser adicionadas a densidade Lagrangiana original do modelo e geram a chamada *densidade Lagrangiana de contratermos* (RAMOND, 1981). Portanto o tadpole *renormalizado* (finito), soma da equação (2.23) com a equação (2.24), é:

$$\text{---}\bigcirc\text{---}_{\text{ren.}} = \frac{\lambda}{8\pi} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right), \quad (2.25)$$

finalizando assim o cálculo no caso bidimensional. Note que o diagrama ficou dependente de uma escala arbitrária introduzida através dos procedimentos de renormalização. Esta escala possui um papel importante, que será discutido na próxima subseção. Uma observação relevante é que o subíndice do diagrama (que indica a renormalização) não será mais utilizado, portanto quando nos referirmos ao tadpole deve ser subentendido que já está sendo levada em conta a renormalização, a menos que seja explicitamente dito o contrário.

Neste exemplo simples não se fez necessária a utilização de muitas das técnicas mais sofisticadas, como a introdução dos chamados parâmetros de Feynman. Estas são abordadas no apêndice A, onde apresentamos o cálculo explícito de contribuições de dois laços.

As divergências da teoria podem ser tratadas adicionando o contratermo à densidade Lagrangiana original, equação (2.1), para o modelo escalar em duas em 1+1 dimensões, onde temos apenas uma divergência primitiva relacionada com a função de Green de dois pontos 1PI e outra relacionada ao diagrama de vácuo. Neste caso, a correção se dá pela adição de um contratermo quadrático, similar ao termo de massa na densidade Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{\text{ren.}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + A \phi^2 + B = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{c.t.}}, \quad (2.26)$$

com $\mathcal{L}_{\text{c.t.}}$ representando os contratermos, de modo tal que A eliminará a divergência manifestada na equação (2.23), enquanto B eliminará a divergência do diagrama de vácuo. Neste caso, é imediato vermos que:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\lambda}{8\pi\epsilon}, \\ B &= -\frac{m^2}{8\pi\epsilon}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Como em duas dimensões do espaço-tempo o modelo escalar apresenta apenas as divergências primitivas ressaltada na equação (2.23) e do diagrama de vácuo, assim como de subdiagramas do tipo tadpole (teoria super-renormalizável), os contratermos presentes na equação (2.26) são suficientes para eliminar as divergências em todas as ordens perturbativas. No caso de teorias com mais divergências primitivas (teorias renormalizáveis) são necessários mais contratermos, uma vez que as mesmas podem apresentar divergências na massa, campos ou vértices (RAMOND, 1981; BAILIN; LOVE, 1993).

2.1.4 Grupo de Renormalização

Como visto no cálculo do tadpole, equação (2.25), o processo de regularização e renormalização insere um escala de energia arbitrária, μ , ao resultado finito do diagrama. Como tal escala não é original da teoria, os observáveis físicos não podem

ser sensíveis à sua escolha. Sendo que os observáveis serão representados por funções de Green 1PI de n pontos ($\Gamma^{(n)}$), podemos apresentar o que é conhecido como *equação do grupo de renormalização* (RG), ou equação de Callan-Symanzik (CALLAN, 1970; SYMANZIK, 1970, 1971):

$$\mu \frac{d\Gamma^{(n)}(m^2, \lambda, \mu)}{d\mu} = \mu \frac{\partial \Gamma^{(n)}}{\partial \mu} + \gamma(m^2, \lambda) \frac{\partial \Gamma^{(n)}}{\partial m^2} + \beta(m^2, \lambda) \frac{\partial \Gamma^{(n)}}{\partial \lambda} = 0, \quad (2.28)$$

sendo:

$$\beta(m^2, \lambda) \equiv \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu}, \quad (2.29)$$

e

$$\gamma(m^2, \lambda) \equiv \mu \frac{\partial m^2}{\partial \mu} \quad (2.30)$$

A equação (2.30), nos dá a variação do parâmetro de massa (m^2) em relação a escala de energia (μ). A função- β , equação (2.29), nos mostra como o parâmetro de acoplamento (λ) varia com a escolha da escala de energia. A função- β possui um papel fundamental na análise de teorias físicas. No caso de esta função ser negativa temos um efeito chamado de *liberdade assintótica*, a interação entre as partículas tornam-se assintoticamente fracas com o aumento da escala de energia. A liberdade assintótica para a QCD foi descoberta em 1973 (GROSS; WILCZEK, 1973; POLITZER, 1973). No caso da função- β ser positiva temos o caso da QED e do modelo $\lambda\phi^4$ em quatro dimensões espaço-temporais. Esta função ainda pode ser nula, que nos leva a uma teoria com *invariância de escala*, uma condição necessária para que uma teoria possa ser classificada como conforme.

Para realizarmos um exemplo, podemos aplicar a equação do RG à massa física ao quadrado. Esta quantidade é definida no pólo da função de Green de 2-pontos 1PI, sendo assim:

$$M^2 = m^2 + \Sigma(p^2, \lambda), \quad (2.31)$$

com $\Sigma(p^2, \lambda)$ representando a autoenergia e:

$$p^2 = -m^2 - \Sigma(p^2, \lambda). \quad (2.32)$$

Assim, podemos fazer a aproximação clássica $p^2 \approx -m^2$, isto é, desconsideramos as correções no momento. Para a primeira ordem já possuímos o resultado da autoenergia calculado, equação (2.25), portanto:

$$M^2(m^2, \lambda, \mu) = m^2 + \frac{\lambda}{8\pi} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) + O(\lambda^2). \quad (2.33)$$

Considerando o modelo escalar em 1+1 dimensões, podemos verificar a tabela 2.2 e perceber que a função de Green de quatro pontos 1PI de um laço é convergente. Portanto, a mesma não possui o leading Log com dependência da escala de energia

arbitrária. Assim a constante de acoplamento, que está associada a estas funções de Green, é independente da escala, o que nos leva à:

$$\beta(m^2, \lambda) = 0. \quad (2.34)$$

Com este resultado vemos que o modelo considerado possui invariância por escala. Sendo assim a equação do RG fica:

$$\mu \frac{dM^2(m^2, \lambda, \mu)}{d\mu} = \mu \frac{\partial M^2}{\partial \mu} + \gamma(m^2, \lambda) \frac{\partial M^2}{\partial m^2} = 0, \quad (2.35)$$

o que resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{4\pi} + \gamma(m^2, \lambda) \left(1 - \frac{\lambda}{8\pi m^2}\right) &= 0, \\ \gamma(m^2, \lambda) &= -\frac{\lambda}{4\pi} \left(1 - \frac{\lambda}{8\pi m^2}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Como na equação (2.33) calculamos apenas até a primeira ordem, devemos manter a coerência e reexpandir o resultado da equação (2.36) tomando apenas a ordem linear em λ , sendo assim:

$$\gamma(m^2, \lambda) = -\frac{\lambda}{4\pi}. \quad (2.37)$$

Voltando agora para a definição da função $\gamma(m^2, \lambda)$ podemos resolvê-la e obter como o parâmetro de massa, m^2 , varia com a escala, μ :

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial m^2}{\partial \mu} &= -\frac{\lambda}{4\pi}, \\ \int_{m^2(\mu_0)}^{m^2(\mu)} dm^2 &= -\frac{\lambda}{4\pi} \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\mu}, \\ m^2(\mu, \lambda) &= m^2(\mu_0) - \frac{\lambda}{8\pi} \ln \left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right), \end{aligned} \quad (2.38)$$

sendo μ_0 e $m^2(\mu_0)$ constantes de integração as quais temos liberdade para escolher. Isto conclui de forma geral a análise da renormalização do modelo escalar bidimensional.

2.2 TEORIA DE PERTURBAÇÃO OTIMIZADA

Métodos não perturbativos mostram-se cada vez mais confiáveis através de diversos testes sendo realizados em diferentes modelos, desde os mais simples como o modelo escalar, até os mais complexos como a cromodinâmica quântica (QCD). Existem diversas aproximações que se encaixam nesta categoria, como métodos de cálculos na rede (MILSTED *et al.*, 2013; BOSETTI *et al.*, 2015; BRONZIN *et al.*, 2019;

KADOH *et al.*, 2019; SCHAICH; LOINAZ, 2009) que muitas vezes utilizam resultados obtidos via Monte Carlo. Uma outra abordagem ainda é feita via métodos de ressonância, estes vão desde métodos de truncamento da Hamiltoniana (HT) (RYCHKOV; VITALE, 2015, 2016; BAJNOK; LAJER, 2016; BURKARDT *et al.*, 2016; ANAND *et al.*, 2017; ELIAS-MIRÓ *et al.*, 2017a, 2017b; FITZPATRICK *et al.*, 2018a; CHABYSHEVA; HILLER, 2020; FITZPATRICK *et al.*, 2018b), até métodos como a ressonância de Borel (SERONE *et al.*, 2018, 2019).

Aqui iremos apresentar o método de ressonância conhecido como *teoria de perturbação otimizada* (OPT) (OKOPIŃSKA, 1987; DUNCAN; MOSHE, 1988). A OPT é conhecida por ser capaz de gerar, com apenas uma ordem perturbativa, os resultados não perturbativos (todas as ordens perturbativas em um laço) contidas na expansão N -grande (GANDHI *et al.*, 1991). A convergência desta ressonância foi demonstrada para o oscilador anarmônico (modelo escalar $\lambda\phi^4$ em $0+1$ dimensão) em temperatura zero nas referências (GUIDA *et al.*, 1996; BELLET *et al.*, 1996a), a convergência ainda foi estendida para regimes de temperaturas finitas na referência (BELLET *et al.*, 1996b). O método é particularmente útil no tratamento de teorias sem massa, uma vez que introduz um parâmetro de massa variacional que atua naturalmente como um regulador infravermelho, impedindo a divergência das integrais no limite $p \rightarrow 0$.

Aplicações da OPT em física da matéria condensada mostraram, através de correções não perturbativas para N finito, que ela reproduz resultados com grande precisão para a concentração crítica de dopante no poliacetileno (CALDAS *et al.*, 2008), a temperatura crítica de gases de Bose homogêneos (KNEUR *et al.*, 2004) e o diagrama de fases de um sistema fermiônico planar magnetizado (KNEUR *et al.*, 2013).

Em Física de altas energias, seus resultados incluem a suscetibilidade de quarks (RESTREPO *et al.*, 2015), o diagrama de fases de modelos efetivos da QCD (FERRONI *et al.*, 2010) dentre outros.

2.2.1 Implementação do método

A OPT pode ser formalmente implementada introduzindo-se as seguintes deformações na densidade de Lagrangiana:

$$\begin{aligned} m^2 &\rightarrow m^2 + (1 - \delta)\eta^2, \\ \lambda &\rightarrow \delta\lambda. \end{aligned} \tag{2.39}$$

A deformação no termo de massa (m^2) é Gaussiana e sendo assim não altera nenhuma propriedade física do modelo ao qual a OPT seja aplicada. Note que no caso de uma teoria crítica ($m^2 = 0$), bastaria aplicar a OPT e *depois* fixar $m^2 = 0$, evitando o aparecimento da divergência infravermelha característica deste tipo de teoria.

Portanto, a densidade Lagrangiana (2.1) se modifica para:

$$\mathcal{L}_{\text{OPT}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\eta^2(1-\delta)}{2} \phi^2 + \frac{\delta \lambda}{4!} \phi^4. \quad (2.40)$$

Perceba que a partir da equação (2.40) podemos recuperar tanto a teoria livre, com $\delta = 0$, quanto a teoria original, com $\delta = 1$. Como é de se esperar, a introdução de novos termos na densidade Lagrangiana acaba por gerar novos diagramas, porém estes podem ser obtidos diretamente dos resultados perturbativos originais. Para isso basta tomarmos o resultado perturbativo padrão, aplicar a equação (2.39) e então reexpandir o resultado em potências de δ até a ordem k , mantendo-se coerente com a ordem máxima de λ considerada. Aplicando esse procedimento na equação (2.25), $k = 1$, ficamos com:

$$\frac{\lambda}{8\pi} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \rightarrow \delta \frac{\lambda}{8\pi} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2 + \eta^2} \right) + O(\delta^2). \quad (2.41)$$

Depois disto realizamos a otimização do parâmetro η através do *princípio de mínima sensibilidade* (PMS)(STEVENSON, 1981, 1982). A aplicação do PMS advém justamente da ideia de que um observável físico não pode ser sensível à escolha do parâmetro de deformação (η), que atua como um multiplicador de Lagrange, introduzido pela OPT. Para aplicar este princípio, tomamos uma quantidade física (P) já expandida até a ordem k em δ , $P^{(k)}(\delta, \eta)$, fixamos $\delta = 1$ (valor na teoria original) e buscamos o resultado otimizado através da resolução da seguinte equação variacional:

$$\left. \frac{\partial P^{(k)}(1, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\bar{\eta}} = 0. \quad (2.42)$$

Resolve-se então a equação (2.42) para $\bar{\eta}$, em geral, a otimização presente na equação (2.42) gera uma equação autoconsistente no parâmetro otimizado, $\bar{\eta} = f(\bar{\eta}, g)$, o que torna explícito o caráter não perturbativo da OPT. Uma vez que $\bar{\eta}$ esteja determinado obtemos a quantidade otimizada $P^{(k)}(1, \bar{\eta})$. Como durante este trabalho estaremos interessados no modelo escalar em 1+1 dimensões, podemos exemplificar este procedimento aplicando-o ao seu potencial efetivo.

Utilizando a expressão (2.10), em terceira ordem obtemos a seguinte expansão perturbativa:

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} = & m^2 \frac{\phi^2}{2} + \frac{\lambda \phi^4}{4!} + \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3} + \text{diagrama 4} + \text{diagrama 5} + \text{diagrama 6} + \text{diagrama 7} \\ & + \text{diagrama 8} + \text{diagrama 9} + \text{diagrama 10} + \text{diagrama 11} + \text{diagrama 12} + \text{diagrama 13} + \text{diagrama 14} + \text{diagrama 15} \\ & + \text{diagrama 16} + \text{diagrama 17} + \text{diagrama 18} + \text{diagrama 19} + \text{diagrama 20}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde diagramas com laços e n pernas externas carregam um fator de $\phi^n/n!$. Note que os dois primeiros termos da expansão (termos de “árvore”) pertencem ao potencial clássico do modelo. Os termos que seguem contêm laços, como cada laço é proporcional a \hbar podemos interpretar tais termos como correções quânticas ao potencial clássico do modelo. De forma geral, diagramas que não possuem pernas externas, como o terceiro, quarto e sexto termos da equação (2.43), são subtraídos do potencial efetivo, uma vez que a princípio isto seria apenas uma redefinição do mínimo do potencial. Na OPT isto não é possível, já que após aplicarmos as modificações da equação (2.39) eles dependem de η e assim necessitam ser considerados na otimização. Aplicando a OPT na equação (2.43) e expandindo potências de δ até primeira ordem, encontramos:

$$\begin{aligned}
 V_{\text{eff}}^{\text{OPT}} &= \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\eta^2(1-\delta)\phi^2 + \delta\frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{1}{2}\int\frac{d^D p}{(2\pi)^D}\ln(p^2+m^2+\eta^2) \\
 &- \frac{\delta\eta^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^D p}{(2\pi)^D}\frac{1}{p^2+m^2+\eta^2} + \frac{\delta\lambda}{8}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^D p}{(2\pi)^D}\frac{1}{p^2+m^2+\eta^2}\right)^2 \\
 &+ \frac{\phi^2}{4}\delta\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^D p}{(2\pi)^D}\frac{1}{p^2+m^2+\eta^2}. \tag{2.44}
 \end{aligned}$$

Diagramaticamente a equação (2.44) pode ser representada por:

$$V_{\text{eff}} = m^2\frac{\phi^2}{2} + \eta^2(1-\delta)\frac{\phi^2}{2} + \frac{\delta\lambda\phi^4}{4!} + \bigcirc + \bigcirc \times + \bigcirc \bigcirc + \bigcirc \bigcirc \times. \tag{2.45}$$

Enfatizamos que o segundo e o quinto termos presentes na equação (2.45) não estão na equação (2.43), uma vez que são exclusivamente gerados pela aplicação da OPT. Fixando $\delta = 1$, aplicando a equação (2.42) e simplificando, temos:

$$\left.\frac{\partial V_{\text{eff}}^{\text{OPT}}}{\partial \eta}\right|_{\bar{\eta}} = \bar{\eta}^2 - \frac{\lambda}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{8}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^D p}{(2\pi)^D}\frac{1}{p^2+m^2+\bar{\eta}^2} = 0. \tag{2.46}$$

Perceba que primeiramente consideramos δ como pequeno e então realizamos uma expansão em série de Taylor ao redor de $\delta = 0$, todavia após a expansão, fixamos $\delta = 1$. Tal procedimento é análogo ao que acontece na consagrada expansão de N -grande, onde é realizado o reescalonamento $\lambda \rightarrow \lambda/N$, então formalmente considera-se o limite $N \rightarrow \infty$ ($1/N \rightarrow 0$) e ao final do procedimento escolhe-se valores finitos para N . Seguindo, podemos escrever:

$$\bar{\eta}^2 = \frac{\lambda}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{8}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^D p}{(2\pi)^D}\frac{1}{p^2+m^2+\bar{\eta}^2}. \tag{2.47}$$

Note que esta equação é autoconsistente e que seu segundo termo é o mesmo que aparece na equação (2.15), apenas com o deslocamento $m^2 \rightarrow m^2 + \bar{\eta}^2$. Apesar

da autoconsistência apontada, esta equação se mantém *válida para qualquer número de dimensões do espaço-tempo*, uma vez que a integral ainda não foi resolvida. Aqui fica evidente a importância da contribuição dos termos de ponto zero (muitas vezes chamados de diagramas de bolha) que, apesar de sua independência em relação ao campo, dependem do parâmetro de otimização.

Como $\bar{\eta}$ é uma função de λ , podemos realizar uma expansão até primeira ordem, por consistência, e obter:

$$\bar{\eta}^2 = \frac{\lambda}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + m^2} + O(\lambda^2). \quad (2.48)$$

Agora se analisarmos o potencial efetivo, verificamos que:

$$V_{\text{eff}}^{\text{OPT}} = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \ln \left(p^2 + m^2 + \bar{\eta}^2 \right). \quad (2.49)$$

Analisando a equação (2.48), observamos que a integral não depende de ϕ , portanto se considerarmos apenas os termos com dependência em ϕ , reexpandiremos o potencial efetivo em um laço voltando para a equação (2.49). Neste caso, ficamos com:

$$V_{\text{eff}}^{\text{OPT}} = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \ln \left(p^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^2 \right), \quad (2.50)$$

que ainda pode ser reescrito como:

$$V_{\text{eff}}^{1\text{Loop}} = V_c + \frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \ln \left(1 + \frac{V_c''}{p^2 + m^2} \right), \quad (2.51)$$

sendo que V_c'' representa a segunda derivada do potencial clássico. A expressão (2.51) é conhecida como *potencial efetivo de Coleman-Weinberg* (COLEMAN; WEINBERG, 1973), e nos dá a expansão do potencial efetivo em um laço (ITZYKSON; ZUBER, 1980). Esta expansão em um laço é não perturbativa, uma vez que considera todas as ordens em λ , mas não representa um resultado exato, já que desconsidera termos de dois ou mais laços, como o quarto diagrama da equação (2.43).

No caso ilustrado, considerando apenas os termos presentes na equação (2.45), a OPT foi capaz de gerar a série infinita contida na ressonância de um laço do potencial de Coleman-Weinberg.

Tendo mostrado que a OPT é eficiente como método de ressonância, vamos continuar com sua implementação no modelo escalar sem realizar a expansão apresentada na equação (2.47), que foi introduzida para fins pedagógicos apenas com o intuito de recobrar o resultado de um laço de Coleman e Weinberg. Contudo, a partir das equações (2.44) e (2.45) vemos que já em primeira ordem a OPT carrega informação contida em termos de dois laços. Primeiramente precisamos escolher o número de dimensões no qual estamos interessados. Escolhendo $D = 2$ e aplicando os resultados

já apresentados para a integral, a solução para a equação (2.47) pode ser colocada na forma:

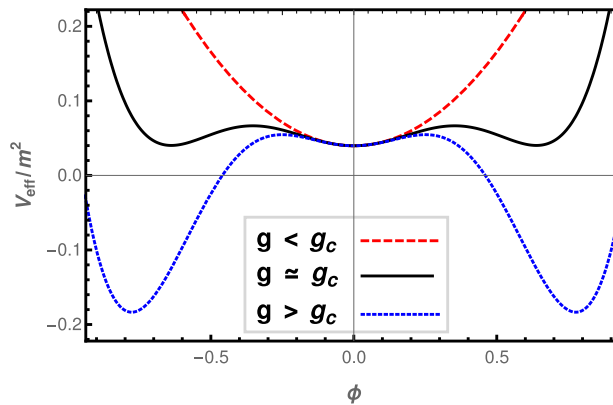
$$\bar{\eta}^2 = m^2 \left[\frac{g}{8\pi} W \left(\frac{8e^{\frac{\pi}{3g} + 4\pi\phi^2} \pi}{g} \right) - 1 \right], \quad (2.52)$$

sendo $W(x)$ conhecida como *função W de Lambert* (CORLESS *et al.*, 1996), que pode ser representada por:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^{n-2}}{(n-1)!}. \quad (2.53)$$

Também foi utilizado a adimensionalização da constante de acoplamento, $g \equiv \lambda/m^2$, uma vez que em duas dimensões a mesma possui unidade canônica igual a m^2 , como mostra a tabela 2.1. Substituindo $\bar{\eta}$ obtido na expressão para o potencial efetivo em primeira ordem (equação (2.44)) pode-se gerar o gráfico apresentado na figura 2.1.

Figura 2.1 – Aplicação da OPT em primeira ordem do potencial efetivo (ou, energia livre de Landau). Gráfico de V_{eff}/m^2 em função de ϕ , para $g < g_c$ (linha vermelha tracejada), $g \simeq g_c$ (linha preta cheia) e $g > g_c$ (linha azul pontilhada).



Fonte: Autoral (2021).

O comportamento apresentado pelo potencial efetivo é característico de uma transição de fase de primeira ordem, ou seja, o mínimo global do potencial possui uma descontinuidade. Note que na linha cheia temos a situação na qual o potencial possui mínimos globais degenerados, o que nos indica uma coexistência de fases, neste caso, da fase simétrica e da fase quebrada. Também é possível perceber a existência de pontos de metaestabilidade, indicados pelos máximos locais nas linhas cheia e pontilhada da figura 2.1.

Tal comportamento do modelo escalar em duas dimensões do espaço-tempo foi originalmente reportado por Chang na referência (CHANG; WRIGHT, 1975) que utiliza a aproximação de Hartree. Isto evidencia a capacidade de ressonância da OPT, uma vez que a partir da primeira ordem (os cinco primeiros termos da equação (2.43)) ela já é

capaz de reproduzir resultados não perturbativos da aproximação de Hartree, que é análoga a aproximação de campo médio e o método de N -grande, de acordo com a referência (GANDHI *et al.*, 1991). Contudo, como é discutido pelo próprio Chang na referência (CHANG, 1976), tal comportamento viola o *teorema de Simon-Griffiths* (SIMON; GRIFFITHS, 1973), que proíbe transições de primeira ordem neste modelo. Pelo menos até a ordem perturbativa aqui considerada a OPT aplicada ao potencial efetivo deste modelo também não é capaz de recuperar o resultado exato (transição de fase de segunda ordem), sempre reproduzindo uma transição de fase de primeira ordem.

Ainda vale ressaltar que existem outros métodos similares a OPT, como a expansão δ linear (LDE) (DUNCAN; JONES, 1989), teoria de perturbação variacional (VPT)(FEYNMAN; KLEINERT, 1986) e teoria de perturbação blindada (SPT)(KARSCH *et al.*, 1997). Além destes métodos citados existe ainda uma variante da OPT que carrega propriedades do grupo de renormalização e que foi aplicada para determinar a equação de estado de matéria hadrônica na QCD em temperatura zero (KNEUR *et al.*, 2019) e em temperaturas não nulas (KNEUR *et al.*, 2021a, 2021b). Esta variante é chamada de OPT com grupo de renormalização (RGOPT) (KNEUR; NEVEU, 2010, 2013), os resultados obtidos através da RGOPT estão em excelente acordo com o que é obtido em cálculos para a QCD na rede (KNEUR *et al.*, 2021a, 2021b).

3 MODELO ESCALAR COM SIMETRIA \mathbb{Z}_2 EM 1+1 DIMENSÕES

Uma vez que estamos interessados no estudo de transições de fase em modelos escalares em duas dimensões espaço-temporais seria, em princípio, natural optarmos por considerar o grupo de simetria $\mathcal{O}(N)$ e analisar suas possibilidades. Porém, segundo o já mencionado teorema de Coleman (COLEMAN, 1973) (que será devidamente apresentado no próximo capítulo) simetrias contínuas não podem ser quebradas em sistemas em duas dimensões do espaço-tempo, portanto a única possibilidade é a do grupo $\mathcal{O}(1) \cong \mathbb{Z}_2$ que apresenta apenas simetria discreta.

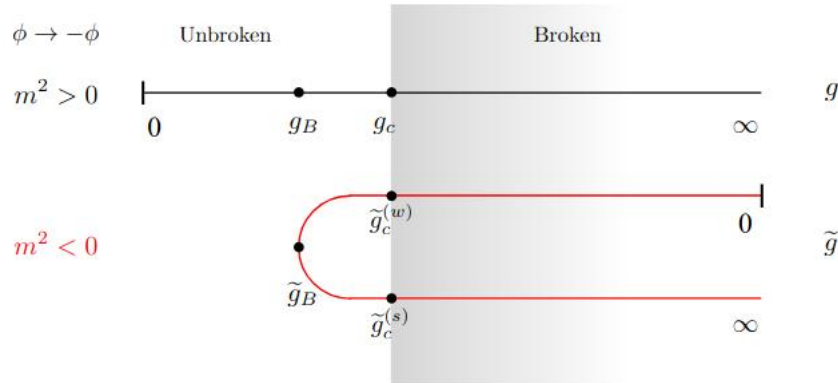
O modelo escalar $\lambda\phi^4$ que será aqui considerado não pode ser resolvido exatamente, uma vez que apresenta uma não-linearidade no seu potencial. Em duas dimensões do espaço-tempo, é super-renormalizável e ainda apresenta o efeito de quebra dinâmica de simetria (DSB) em temperatura zero. A DSB observada, e que será discutida, é uma transição dinâmica gerada por flutuações quânticas. Tais flutuações ocorrem em temperatura zero com o aumento da constante de acoplamento (CHAMATI; TONCHEV, 2011). Se escolhermos o parâmetro de massa positivo, $m^2 > 0$, este modelo possui simetria \mathbb{Z}_2 no regime de acoplamentos fracos. Conforme o valor do acoplamento aumenta, o gap de massa diminui ($M \rightarrow 0$) até ser identicamente nulo em um valor de acoplamento crítico ($M(g_c) = 0$). Então para valores de acoplamento maiores do que o crítico ($g > g_c$) o sistema passa por uma transição de fase de segunda ordem, perdendo sua invariância pela reflexão $\phi \rightarrow -\phi$ (CHANG, 1976).

Conforme mencionamos no capítulo anterior, a função- β deste modelo escalar em 1+1 dimensões é nula para todas as ordens da teoria de perturbação. Portanto com o gap de massa anulando-se, quando o acoplamento crítico atinge seu valor, a teoria se torna *conforme*. Pertencendo à mesma classe de universalidade do modelo de Ising bidimensional (SIMON; GRIFFITHS, 1973).

Por outro lado, se considerarmos que o parâmetro de massa é negativo, $m^2 < 0$, temos um caso ainda mais interessante para as transições de fase. Neste caso, a simetria \mathbb{Z}_2 é quebrada em baixos valores do acoplamento, até ser restaurada por uma transição de fase de segunda ordem em um primeiro acoplamento crítico (SERONE *et al.*, 2019). O sistema permanece neste estado simétrico até atingir um segundo acoplamento crítico e retornar para a fase quebrada. Tais comportamentos das fases ordenada e não ordenada, que nos permite três acoplamentos nos quais a teoria é conforme, foi relatado por Chang na referência (CHANG, 1976) e está esquematizada na figura 3.1.

Esta variedade de efeitos físicos, juntamente com sua simplicidade faz com que este modelo seja excelente para testar e comparar diferentes métodos não perturbativos. Nos últimos anos foram realizados diversos testes com variados métodos, tais como: cálculos na rede (MILSTED *et al.*, 2013; BOSETTI *et al.*, 2015; BRONZIN *et al.*,

Figura 3.1 – Representação esquemática da dualidade de Chang (CHANG; WRIGHT, 1975; CHANG, 1976). O primeiro caso $m^2 > 0$, apresenta apenas a quebra de simetria. No segundo caso, com $m^2 < 0$, apresenta uma restauração de simetria seguida por uma transição de fase de segunda ordem.



Fonte: (SERONE *et al.*, 2019)

2019; KADOH *et al.*, 2019; SCHAICH; LOINAZ, 2009), truncamento Hamiltoniana (HT) (RYCHKOV; VITALE, 2015, 2016; BAJNOK; LAJER, 2016; BURKARDT *et al.*, 2016; ANAND *et al.*, 2017; ELIAS-MIRÓ *et al.*, 2017a, 2017b; FITZPATRICK *et al.*, 2018a; CHABYSHEVA; HILLER, 2020; FITZPATRICK *et al.*, 2018b) e também a ressonância de Borel (SERONE *et al.*, 2018, 2019; SBERVEGLIERI *et al.*, 2019).

Para determinar o ponto crítico utilizaremos a OPT como método de ressonância. Conforme já discutido este método pode ser particularmente útil neste caso, dado que a referência (SBERVEGLIERI *et al.*, 2019) disponibiliza uma série perturbativa até oitava ordem para autoenergia, neste caso a ressonância de contribuições perturbativas altamente não triviais pode ser realizada sem maiores dificuldades. A OPT também foi aqui escolhida pois, diferente de métodos tais como expansão de daisy, super-daisy (BANERJEE; MALLIK, 1991; PARWANI, 1992) e do método de operador composto (AMELINO-CAMELIA; PI, 1993), é facilmente implementada a partir dos resultados perturbativos, além de não gerar os problemas de autoconsistência apresentados pelos demais métodos quando realizam a ressonância de ordens mais altas.

3.1 A MASSA FÍSICA

Para que obtenhamos a massa física do sistema, com as devidas correções quânticas, precisamos primeiramente definir a densidade Lagrangiana que utilizaremos. Com o intuito de realizar uma comparação direta com os resultados obtidos na referência (SERONE *et al.*, 2018), iremos tomar novamente a densidade Lagrangiana no espaço Euclidiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \lambda \phi^4. \quad (3.1)$$

Note que para que possamos efetuar a comparação, a equação (3.1) utiliza con-

venções da referência (SERONE *et al.*, 2018), onde a intensidade da anarmonicidade é parametrizada por λ ao invés de $\lambda/4!$ (veja a equação (2.1)). Como já mencionado na equação (2.31), a massa física ao quadrado é associada a função de Green de dois pontos 1PI, sendo assim podemos utilizar a mesma aproximação clássica do capítulo anterior ($p^2 = -m^2$). Assim, considerando a autoenergia em primeira ordem perturbativa já renormalizada (equação (2.25)), temos:

$$M^2 = m^2 + \frac{3\lambda}{\pi} L_m + O(\lambda^2), \quad (3.2)$$

sendo:

$$L_m \equiv \ln \frac{\mu^2}{m^2}. \quad (3.3)$$

Agora podemos aplicar a relação de Callan-Symanzik, apresentada na equação (2.35), e realizar a sequência de cálculos seguida entre as equações (2.36)-(2.38), obtendo:

$$m^2(\mu) = m^2(\mu_0) - \frac{3\lambda}{\pi} \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}, \quad (3.4)$$

com μ_0 representando uma escala de referência. Esta equação nos dá a dependência entre o parâmetro de massa e a escala arbitrária, introduzida durante o processo de regularização. Vale notar que em nosso caso particular o procedimento é realizado em primeira ordem pois a renormalização do *tadpole*, equação (2.25), garante a convergência da teoria em todas as ordens perturbativas do modelo.

Como este é um modelo simples, diversos grupos de pesquisa já o estudaram em diversas aproximações e realizaram os cálculos perturbativos em diferentes ordens. Neste caso a série perturbativa para a massa ao quadrado em N⁰LO, originalmente obtida na referência (SBERVEGLIERI *et al.*, 2019), é de particular interesse. Esta série é explicitamente dada por:

$$\begin{aligned}
M^2 = & m^2 + \frac{3\lambda}{\pi} L_m - \frac{9\lambda^2}{\pi^2 m^2} L_m - \frac{3\lambda^2}{2m^2} \\
& + \frac{\lambda^3}{(m^2)^2} \left\{ \frac{9}{\pi} + \frac{63}{2\pi^3} \zeta(3) + \frac{27}{\pi^3} L_m + \frac{9}{2\pi} L_m + \frac{27}{2\pi^3} L_m^2 \right\} \\
& - \frac{\lambda^4}{(m^2)^3} \left\{ 14.655869(22) + (6 + 5\pi^2 + 14\zeta(3)) L_m + \frac{27}{2\pi^4} (9 + \pi^2) L_m^2 + \frac{27}{\pi^4} L_m^3 \right\} \\
& + \frac{\lambda^5}{(m^2)^4} \left\{ 65.97308(43) + 51.538171(63) L_m + \frac{81}{4\pi^5} (36 + 17\pi^2 + 42\zeta(3)) L_m^2 \right. \\
& \left. + \frac{81}{2\pi^5} (11 + \pi^2) L_m^3 + \frac{243}{4\pi^5} L_m^4 \right\} \\
& - \frac{\lambda^6}{(m^2)^5} \left\{ 347.8881(28) + 301.2139(16) L_m + 114.49791(12) L_m^2 \right. \\
& \left. + \frac{81}{2\pi^6} (105 + 37\pi^2 + 84\zeta(3)) L_m^3 + \frac{243}{4\pi^6} (25 + 2\pi^2) L_m^4 + \frac{729}{5\pi^6} L_m^5 \right\} \\
& + \frac{\lambda^7}{(m^2)^6} \left\{ 2077.703(36) + 1948.682(14) L_m + 828.4327(39) L_m^2 + 205.20516(19) L_m^3 \right. \\
& \left. + \frac{243}{8\pi^7} (675 + 197\pi^2 + 420\zeta(3)) L_m^4 + \frac{729}{5\pi^5} (137 + 10\pi^2) L_m^5 + \frac{729}{5\pi^7} L_m^6 \right\} \\
& - \frac{\lambda^8}{(m^2)^7} \left\{ 13771.04(54) + 13765.22(21) L_m + 6373.657(40) L_m^2 + 1778.1465(75) L_m^3 \right. \\
& \left. + 323.93839(27) L_m^4 + \frac{2187}{20\pi^8} (812 + 207\pi^2 + 420\zeta(3)) L_m^5 \right. \\
& \left. + \frac{2187}{20\pi^8} (147 + 10\pi^2) L_m^6 + \frac{6561}{7\pi^8} L_m^7 \right\}, \tag{3.5}
\end{aligned}$$

com $\zeta(s)$ sendo a *função zeta de Riemann*, que é dada por:

$$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{e^u - 1} du. \tag{3.6}$$

Para maiores detalhes quanto a definição e propriedades desta função especial, veja a referência (DITTRICH, 2017).

Vale notar que se neste estágio ingenuamente escolhêssemos $\mu = m$ todos os termos com L_m se anulariam e teríamos a mesma expressão apresentada na referência (SERONE *et al.*, 2018). Porém como estamos interessados em implementar a OPT, apresentada no capítulo 2, não podemos fazer esta escolha neste estágio, uma vez que após a aplicação das modificações Gaussianas, apresentadas na equação (2.39), os termos de L_m passarão a ter dependência nos parâmetros de deformação e serão importantes para a otimização, isto é, $L_m \rightarrow L_\eta = \ln \left[\frac{\mu^2}{m^2 + \eta^2} \right]$.

3.2 A OPT E O GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO

Como foi enfatizado anteriormente, o processo de regularização dimensional acaba por inserir a escala arbitrária, μ , nas relações das quais extraímos os observáveis físicos. Uma vez que estabelecemos qual o comportamento do parâmetro de massa em relação a escala, equação (3.4), utilizaremos a OPT para analisar como a massa física responderá a escolha de μ .

Verificando a equação (3.4), vemos que podemos aplicar diretamente as substituições características da OPT, equação (2.39), e assim obter:

$$m^2(\mu) = m^2(\mu_0) + \eta^2(1 - \delta) - \frac{3\delta\lambda}{\pi} \ln \left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right). \quad (3.7)$$

Agora, para exemplificar, vamos tomar o resultado para a massa física ao quadrado até ordem λ^2 , isto é, os quatro primeiros termos da equação (3.5). Escolhendo $\mu = \mu_0$, temos:

$$\begin{aligned} M^2(\mu_0) &= m^2(\mu_0) + \eta^2(1 - \delta) + \frac{3\delta\lambda}{\pi} \ln \left[\frac{\mu_0^2}{m^2(\mu_0) + \eta^2(1 - \delta)} \right] \\ &\quad - \frac{9\delta^2\lambda^2}{\pi^2} \ln \left[\frac{\mu_0^2}{m^2(\mu_0) + \eta^2(1 - \delta)} \right] - \frac{3\delta^2\lambda^2}{2 [m^2(\mu_0) + \eta^2(1 - \delta)]}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

expandindo até a ordem quadrática em δ e definindo $m^2(\mu_0) \equiv m^2$:

$$\begin{aligned} M^2(\mu_0) &= m^2 + \eta^2(1 - \delta) + \frac{3\delta\lambda}{\pi} \ln \left(\frac{\mu_0^2}{m^2 + \eta^2} \right) \\ &\quad + \frac{3\delta^2\eta^2\lambda}{\pi(m^2 + \eta^2)} - \frac{9\delta^2\lambda^2}{\pi^2(m^2 + \eta^2)} \ln \left(\frac{\mu_0^2}{m^2 + \eta^2} \right) \\ &\quad - \frac{3\delta^2\lambda^2}{2\pi(m^2 + \eta^2)} + O(\delta^3). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Agora se escolhermos $\mu = \mu'$ a massa física ao quadrado passa a ser:

$$M^2(\mu') = m^2(\mu') + \frac{3\delta\lambda}{\pi} \ln \left(\frac{\mu'^2}{m^2(\mu')} \right) - \frac{9\delta^2\lambda^2}{\pi} \ln \left(\frac{\mu'^2}{m^2(\mu')} \right) - \frac{3\delta^2\lambda^2}{2m^2(\mu')}. \quad (3.10)$$

Substituindo cada termo $m^2(\mu')$ pela equação (3.4) e expandindo em potências de δ até ordem quadrática é simples de ver que:

$$\begin{aligned} M^2(\mu') &= m^2 + \eta^2(1 - \delta) + \frac{3\delta\lambda}{\pi} \ln \left(\frac{\mu_0^2}{m^2 + \eta^2} \right) \\ &\quad + \frac{3\delta^2\eta^2\lambda}{\pi(m^2 + \eta^2)} - \frac{9\delta^2\lambda^2}{\pi^2(m^2 + \eta^2)} \ln \left(\frac{\mu_0^2}{m^2 + \eta^2} \right) \\ &\quad - \frac{3\delta^2\lambda^2}{2\pi(m^2 + \eta^2)} + O(\delta^3). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Portanto, ao compararmos as equações (3.9) e (3.11), verificamos que:

$$M^2(\mu') = M^2(\mu_0). \quad (3.12)$$

Fica assim demonstrado que a OPT aplicada neste modelo em duas dimensões espaço-temporais respeita a equação do RG (apresentada na equação 2.35). Assim, para qualquer escolha de μ obteremos os mesmos valores para um observável físico (neste caso representado pela massa física ao quadrado). Este resultado foi explicitamente obtido para a ordem quadrática mas é claro que, assim como o contratermo dado pela equação (2.24), vale para todas as ordens perturbativas.

3.3 RESSOMA DA SÉRIE PERTURBATIVA

Para implementar a OPT aplicaremos as modificações prescritas pela equação (2.39) na equação (3.5). Para que seja possível realizar uma análise analítica, começaremos aplicando a OPT nas duas primeiras ordens perturbativas:

$$\begin{aligned} M^2 &= m^2 + \eta^2(1 - \delta) + \delta \frac{3\lambda}{\pi} L_\eta + \delta^2 \frac{3\lambda\eta^2}{\pi(m^2 + \eta^2)} - \delta^2 \frac{9\lambda^2}{\pi^2(m^2 + \eta^2)} L_\eta \\ &- \delta^2 \frac{3\lambda^2}{2(m^2 + \eta^2)} + O(\delta^3), \end{aligned} \quad (3.13)$$

sendo definido:

$$L_\eta \equiv \ln \frac{\mu^2}{m^2 + \eta^2}. \quad (3.14)$$

Por conveniência é interessante definirmos a seguinte constante de acoplamento adimensionalizada:

$$g \equiv \frac{\lambda}{m^2}, \quad (3.15)$$

em termos de g a massa física ao quadrado em unidades de m^2 torna-se:

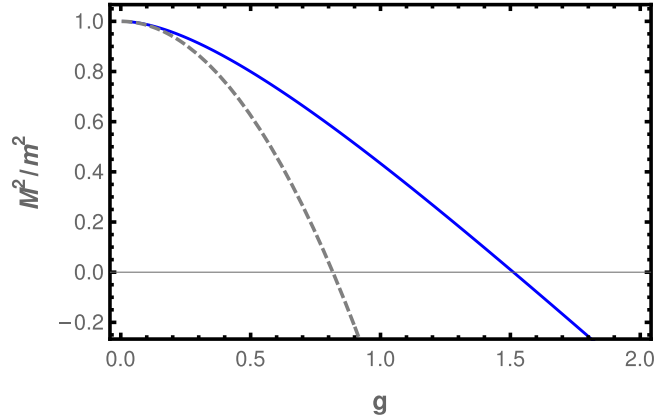
$$\frac{M^2}{m^2} = 1 + \frac{\eta^2}{m^2}(1 - \delta) + \delta \frac{3g}{\pi} L_\eta + \delta^2 \frac{1}{(1 + \eta^2/m^2)} \left(g \frac{3\eta^2}{\pi m^2} - g^2 \frac{9}{\pi^2} L_\eta - g^2 \frac{3}{2} \right) + O(\delta^3). \quad (3.16)$$

Podemos agora implementar a otimização. Em primeira ordem a aplicação do PMS, equação (2.42), nos dá uma única solução real: $\bar{\eta} = 0$, implicando no resultado trivial $M^2/m^2 = 1$. Um resultado não trivial é obtido em ordem δ^2 :

$$\bar{\eta}^2 = m^2 \left[\frac{3g}{\pi} W \left(\frac{\pi e^{1 + \frac{\pi}{3g} + \frac{\pi^2}{6}}}{3g} \right) - 1 \right]. \quad (3.17)$$

Observe que exatamente em $g = 0$ a solução apresentada na equação (3.17) se torna $\bar{\eta}^2 = -m^2$, nos levando a divergências. Porém neste caso estaremos considerando uma teoria livre e o parâmetro otimizado será dado por $\bar{\eta} = 0$. A figura 3.2

Figura 3.2 – Gráfico de M^2/m^2 em função de g . Comparação entre a teoria de perturbação (linha cinza tracejada) e OPT (linha azul cheia), ambos em segunda ordem. Os acoplamentos críticos ocorrem em $g_c = \sqrt{2/3} \simeq 0.82$ (teoria de perturbação) e $g_c = 1.511$ (OPT).



Fonte: Autoral (2021).

compara, em ordem quadrática, o resultado obtido pela ressonância da OPT com o que é obtido com a teoria perturbativa padrão. Fica evidenciado que a transição de fase (quântica) ocorre em $M^2(g_c) = 0$, onde a teoria é conforme.

Antes de considerar o cálculo de M^2 em ordens superiores, é importante ressaltar que os autores da referência (SBERVEGLIERI *et al.*, 2019) argumentam que a ressonância da série de M proporciona resultados melhores do que a ressonância de M^2 , uma vez que M se aproxima da região crítica de forma mais suave. Portanto, para que façamos comparações, iremos também realizar a ressonância de M e determinar g_c a partir da condição de $M(g_c) = 0$. Tomando a raiz quadrada da equação (3.5), reexpandindo até ordem λ^8 e aplicando as substituições da OPT (equação (2.39)) é simples obter a série da OPT para M até ordem δ^8 . Em ordem δ^2 obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{M}{m} &= \sqrt{1 + \eta^2/m^2} - \delta \frac{1}{2\sqrt{1 + \eta^2/m^2}} \left(\frac{\eta^2}{m^2} - g \frac{3}{\pi} L_\eta \right) \\ &- \delta^2 \frac{\eta^2}{m^2(1 + \eta^2/m^2)^{3/2}} \left[\frac{\eta^2}{8m^2} - g \frac{1}{2\pi} \left(3 + \frac{1}{2} L_\eta \right) \right] \\ &- \delta^2 g^2 \frac{3}{(1 + \eta^2/m^2)^{3/2}} \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{2\pi^2} L_\eta \left(1 + \frac{1}{4} L_\eta \right) \right] + O(\delta^3). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Fixando $\delta = 1$ e aplicando o PMS, é imediato verificar que, ao contrário do que ocorre com a otimização da massa física ao quadrado, a otimização da massa física em ordem δ resulta em:

$$\bar{\eta}^2 = m^2 \left[\frac{3g}{\pi} W \left(\frac{\pi e^{2 + \frac{\pi}{3g}}}{3g} \right) - 1 \right], \quad (3.19)$$

que é similar ao que obtivemos ressonando a massa física ao quadrado em ordem δ^2 . Todavia a otimização de M na ordem quadrática não reproduz nenhum resultado

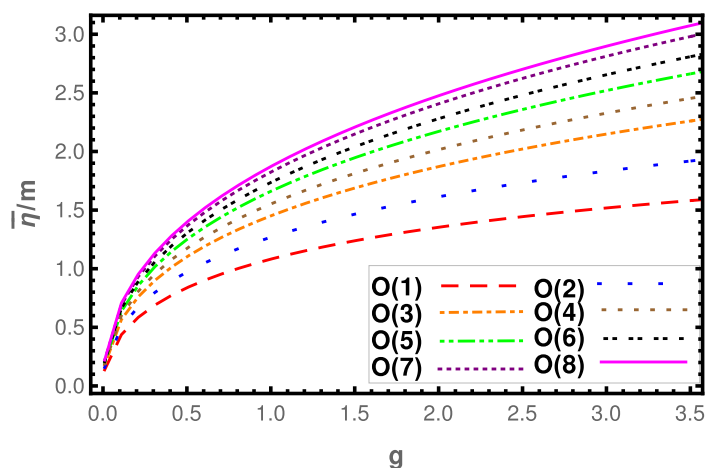
real não trivial. Então, tomando o parâmetro variacional otimizado dado pela equação (3.19) e substituindo na equação (3.18) em ordem δ , obtemos $g_c = 3.760$. Apesar do valor do acoplamento crítico não estar próximo do valor obtido na referência (SERONE *et al.*, 2018) ($g_c = 2.807(34)$), ainda representa um resultado bastante razoável, uma vez que ele é obtido pela ressonância apenas da contribuição do *tadpole*. Este resultado também mostra a importância que os termos de L_η , presentes nos *tadpoles*, possuem na OPT.

Assim como ocorreu para a primeira e segunda ordem, foi observado que a otimização do parâmetro variacional possui resultado não trivial para ordens ímpares (pares) quando M (M^2) é o objeto de ressonância.

3.4 RESULTADOS NUMÉRICOS EM OITAVA ORDEM

Utilizando a equação perturbativa até oitava ordem, equação (3.5), juntamente com as observações apresentadas na última seção, é possível obter um conjunto de resultados para os parâmetros variacionais otimizados em função do acoplamento adimensional para cada ordem da teoria perturbativa disponível. Os resultados são apresentados ordem a ordem na figura 3.3.

Figura 3.3 – Gráficos de $\bar{\eta}/m$ em função de g , para as oito primeiras ordens perturbativas.



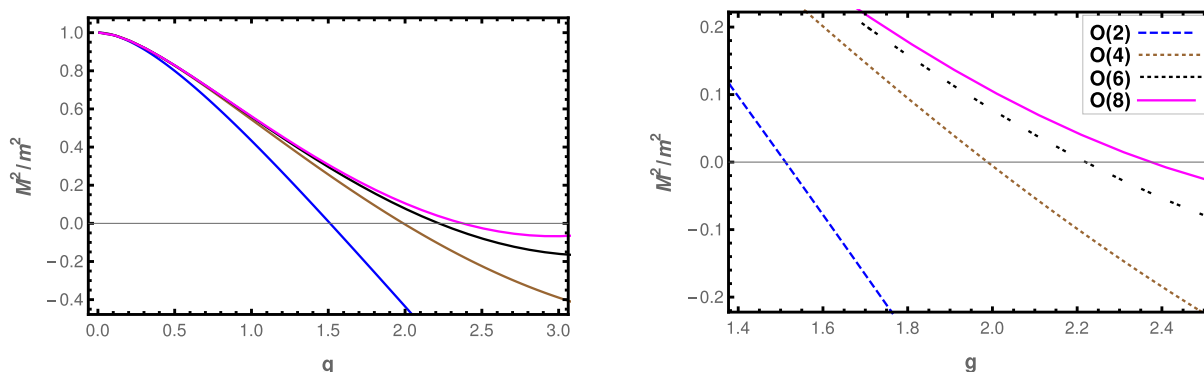
Fonte: Autoral (2021).

Vale a observação de que, apesar de não termos resultados analíticos para ordens maiores do que a segunda, o comportamento da otimização é similar em todas as ordens. Ainda percebe-se que, independente da comparação que se faça, a distância entre as curvas se reduz conforme aumenta-se a ordem. Indicando uma convergência com o aumento das ordens perturbativas consideradas.

Como temos uma forma de determinar valores de $\bar{\eta}$ em todas as ordens perturbativas disponíveis, podemos aplicar a ressonância da OPT. Uma vez que os resultados

para ordens pares e ordens ímpares são obtidos da ressonância de quantidades diferentes, convém apresentar os resultados das ressonâncias separadamente. Para ordens pares, temos o resultado apresentado na esquerda da figura 3.4. Se quisermos ver com mais clareza o comportamento de suas raízes em cada ordem, convém aproximarmos o gráfico do eixo das abscissas. Assim obtemos o gráfico na direita da figura 3.4.

Figura 3.4 – Imagem à esquerda: gráficos das ordens pares de M^2/m^2 em função de g . Imagem à direita: o mesmo, porém ampliado.

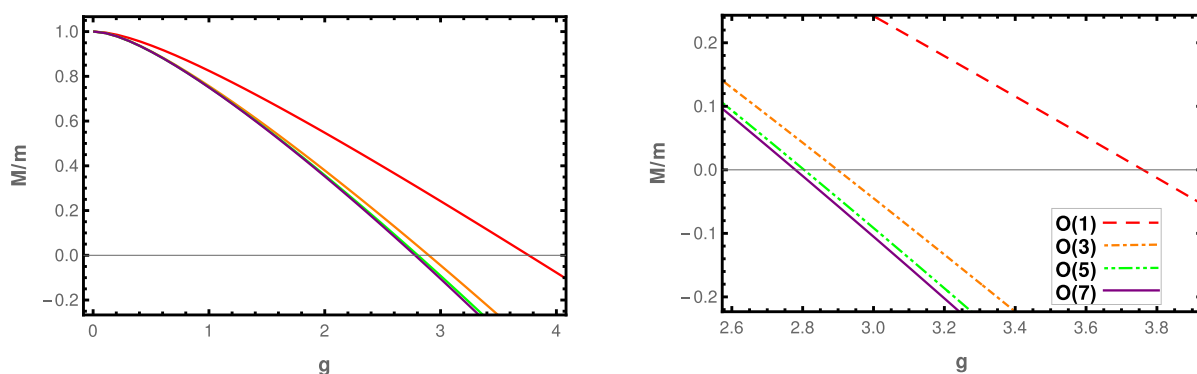


Fonte: Autoral (2021).

Note que é clara a tendência de aumento do valor do acoplamento crítico, assim como também é claro que as diferenças entre sucessivas ordens tornam-se cada vez menores, indicando certa convergência ao valor obtido na referência (SERONE *et al.*, 2018).

Da mesma forma podemos obter os resultados para as ordens ímpares, utilizando a otimização do parâmetro variacional vindo da massa física, M . Conforme ilustra o gráfico na esquerda da figura 3.5. Novamente, aproximando o gráfico do eixo das abscissas podemos ver claramente o comportamento das raízes no gráfico à direita da figura 3.5.

Figura 3.5 – Imagem à esquerda: gráficos das ordens pares de M/m em função de g . Imagem à direita: o mesmo, porém ampliado.



Fonte: Autoral (2021).

Desta vez temos o comportamento contrário ao caso anterior, os valores do acoplamento crítico diminuem conforme se aumenta a ordem, também indo ao encontro do que é obtido na referência (SERONE *et al.*, 2018).

De posse dos resultados figuras 3.4 e 3.5 podemos obter os valores precisos de g_c em cada ordem ressonada e assim coletar os dados da tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Acoplamentos críticos obtidos da ressonância da OPT para M (M^2) em ordens ímpares (pares).

Ressonância de M		Ressonância de M^2	
Ordem	g_c	Ordem	g_c
1	3.76015	2	1.51147
3	2.89809	4	1.98859
5	2.80400	6	2.21970
7	2.77947	8	2.37301

Fonte: Autoral (2021).

Para compararmos os valores resultantes da aplicação da OPT com outros processos de ressonância, como HT (ELIAS-MIRÓ *et al.*, 2017a, 2017b) e ressonância de Borel (SERONE *et al.*, 2018), podemos tomar alguns valores de acoplamento que ilustram desde a situação perturbativa até o limite onde é esperado a falha da teoria perturbativa, tais comparações são feitas na tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Comparação de alguns valores de massa física normalizada, com os previstos por HT (ELIAS-MIRÓ *et al.*, 2017a, 2017b) e ressonância de Borel (SERONE *et al.*, 2018).

g	$M(g)$	Referência
0.02	0.979733(5)	(ELIAS-MIRÓ <i>et al.</i> , 2017a, 2017b)
	0.9797313(4)	(SERONE <i>et al.</i> , 2018)
	0.9797315(1)	OPT
1	0.7494(2)	(ELIAS-MIRÓ <i>et al.</i> , 2017a, 2017b)
	0.7507(5)	(SERONE <i>et al.</i> , 2018)
	0.750520(2)	OPT
2	0.345(2)	(ELIAS-MIRÓ <i>et al.</i> , 2017a, 2017b)
	0.357(5)	(SERONE <i>et al.</i> , 2018)
	0.352838(14)	OPT

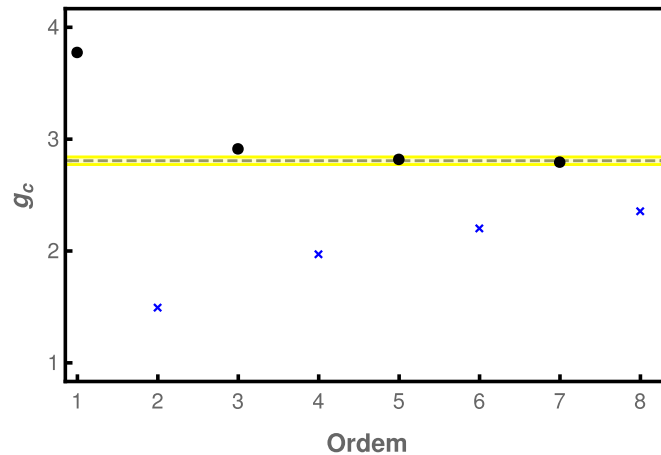
Fonte: Autoral (2021).

Perceba que os resultados obtidos pela OPT estão em ótima concordância com aqueles obtidos pelos outros dois métodos.

Com a confiabilidade estabelecida, percebe-se que a ressonância feita pela OPT na massa física converge muito mais rapidamente para a janela de valores previstos

para o acoplamento do que a ressonância feita em na massa física ao quadrado. Para que isto fique ainda mais claro, a partir da tabela 3.1 podemos gerar a figura 3.6.

Figura 3.6 – Valores obtidos para o acoplamento crítico ordem a ordem. Pontos pretos se referem às ordens ímpares obtidas através da ressonância de M . Cruzes azuis representam valores obtidos para ordens pares através da ressonância de M^2 . A faixa amarela representa o valor $g_c = 2.807(34)$ obtido na referência (SERONE *et al.*, 2018).



Fonte: Autoral (2021).

Portanto, o resultado que mais se aproxima do obtido na referência (SERONE *et al.*, 2018) é o de sétima ordem, uma vez que é a maior ordem que temos para ressonar M .

3.5 REGIÃO SUPERCRÍTICA

Uma vez que a OPT apresenta bons resultados para o acoplamento crítico, isto é, possui valores que estão de acordo com o estado de arte do modelo escalar em duas dimensões espaço-temporais, podemos analisar o que acontece em valores de acoplamento maiores do que $g_c \equiv g_c^{(w)}$, que representa a pouco explorada região supercrítica. A motivação para tal investigação é dada pelas recentes análises do modelo escalar em 2+1 dimensões, que apontam para a possibilidade de uma segunda transição após a quebra de simetria, com o modelo retornando para a fase simétrica em um valor $g_c^{(s)} > g_c^{(w)}$ (SBERVEGLIERI *et al.*, 2021).

Tal possibilidade não é completamente explorada na referência (SBERVEGLIERI *et al.*, 2021) pois $g_c^{(s)}$ ocorre depois da teoria ter passado por uma transição de fase e, nesses casos, ressonâncias de séries perturbativas não são confiáveis, uma vez que $g_c^{(w)}$ representa um ponto não analítico. Apesar desta não-analiticidade, vamos explorar tal região para eventualmente obter informações extras que possam contribuir para acelerar a convergência da ressonância.

Primeiramente, consideremos a massa física ao quadrado, já que tal quantidade é comumente tomada como parâmetro de ordem para o estudo de transições de fase no modelo escalar (PINTO; RAMOS, 1999). Além disto, após a transição, $g > g_c$, a massa física (M) não possui uma interpretação física clara.

O resultado em segunda ordem (primeira ordem não trivial da ressonância de M^2), sugere que a simetria \mathbb{Z}_2 , após quebrada em $g_c^{(w)}$, pode ser restaurada em um dado $g_c^{(s)}$. O valor observado para esta aparente restauração na primeira ordem não trivial é de $g_c^{(s)} \simeq 14g_c^{(w)}$. Por conta deste valor elevado, esta segunda transição poderia ser vista como uma indicação de que a ressonância não é eficiente para acoplamentos muito elevados. Além disto, considerando que $g_c^{(s)}$ surge como um artefato da aproximação, seria de se esperar que em ordens superiores seu valor continuasse aumentando até desaparecer, em ordens suficientemente altas.

Todavia, quando fazemos a análise da tabela 3.3 vemos que, conforme as ordens aumentam a diferença entre os dois acoplamentos críticos se reduz até atingir $g_c^{(s)} \simeq 1.5g_c^{(w)}$ na oitava ordem.

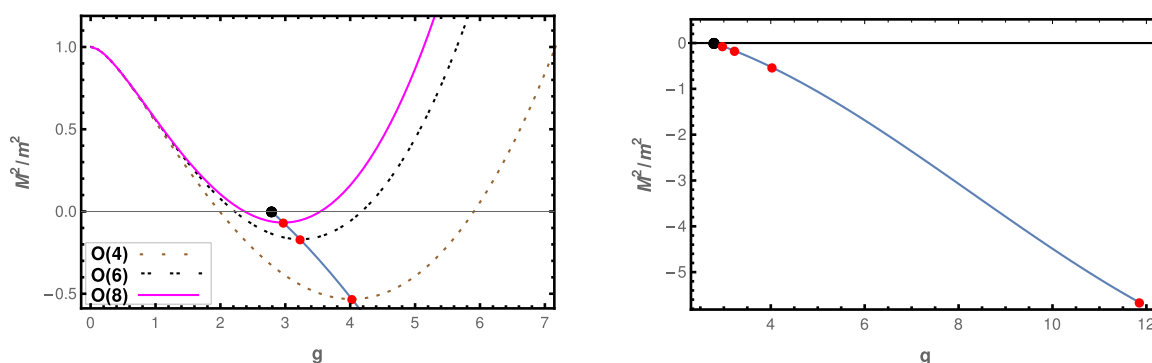
Tabela 3.3 – Valores dos primeiros e segundos acoplamentos críticos, $g_c^{(w)}$ e $g_c^{(s)}$, resultantes da ressonância da massa física ao quadrado.

Ordem	$g_c^{(w)}$	$g_c^{(s)}$
2	1.51	21.4
4	1.98	5.89
6	2.21	4.16
8	2.37	3.53

Fonte: Autoral (2021).

Ainda fazendo a análise das quatro ordens (pares) disponíveis somos capazes de gerar o gráfico à esquerda da figura 3.7.

Figura 3.7 – Imagem à esquerda: gráficos das ressonâncias de M^2/m^2 em função de g , evidenciando a existência do segundo acoplamento crítico. Imagem à direita: interpolação dos mínimos (pontos vermelhos) e extrapolação da curva interpolada (ponto preto)



Fonte: Autoral (2021).

Vale o comentário que o cenário supercrítico apresentado no gráfico à esquerda da figura 3.7 reflete um comportamento que aparece em muitos sistemas de matéria condensada. Um dos mais conhecidos é o padrão de transição observado no tartarato de sódio e potássio, mais conhecido como sal de Rochelle. Neste sistema, conforme a temperatura aumenta, o sal que possui uma estrutura simétrica cristalina ortorrômbica passa para uma estrutura cristalina monocíclica, menos simétrica, em $T \simeq 255K$ (JONA; SHIRANE, 1962), retornando então para a fase ortorrômbica em $T \simeq 297K$, até seu derretimento em $T \simeq 348K$. Exibindo uma quebra inversa de simetria intermediária através da fase reentrante. Na referência (SCHUPPER; SHNERB, 2005) pode-se encontrar uma lista detalhada de diferentes materiais que apresentam este fenômeno. Ingenuamente, poderíamos pensar que este fenômeno está ocorrendo no modelo escalar em duas dimensões do espaço-tempo, onde o acoplamento faria o papel análogo à temperatura, porém os resultados para M , em ordens ímpares, mostram o aparecimento de apenas um acoplamento crítico, além de que a existência de apenas um acoplamento crítico é suportado por outros estudos (ELIAS-MIRÓ *et al.*, 2017a, 2017b; SERONE *et al.*, 2018; SBERVEGLIERI *et al.*, 2019). Em face destes argumentos não iremos aqui considerar que a transição reentrante realmente seja um efeito físico desta teoria (diferente do que pode ocorrer em alguns modelos $\mathcal{O}(\mathcal{N}) \times \mathcal{O}(\mathcal{N})$ (PARREIRA *et al.*, 2005)). Contudo, mesmo adotando este ponto de vista pragmático mostraremos que a região supercrítica pode oferecer algumas informações valiosas para extrapolações de ordens mais altas.

Observe que para a ressonância da massa física ao quadrado sempre há um mínimo localizado entre os dois acoplamentos críticos. Conforme aumenta-se as ordens perturbativas consideradas tanto a distância entre os acoplamentos críticos quanto a diferença do módulo da massa física ao quadrado diminuem. Portanto é plausível assumir que em ordens arbitrariamente altas o resultado *exato e único* do acoplamento crítico será tal que satisfaça $g_c^{(w)} = g_c^{(s)} \equiv g_c$. Assumindo que isto seja verdade, podemos utilizar resultados de baixas ordens para estimar o valor do acoplamento crítico em ordens suficientemente altas. Neste sentido com uma simples extrapolação obtemos o gráfico na esquerda da figura 3.7. Interpolando os quatro mínimos das quatro ordens (pares) disponíveis obtemos $g_c = 2.785$.

Estas simples considerações mostram que, apesar da ressonância de M^2 apresentar uma convergência muito mais lenta do que a ressonância de M , podemos utilizar a informação da região supercrítica para acelerar substancialmente a convergência da ressonância da massa física ao quadrado. Finalmente, a tabela 3.4 compara as melhores previsões para o acoplamento crítico com o que é obtido através de outros métodos. Esta conclusão é um dos resultados originais apresentados na referência (HEYMANS; PINTO, 2021).

Enfatizamos que não se deve interpretar o valor extrapolado do acoplamento crí-

Tabela 3.4 – Previsões recentes para g_c , encontradas em: 1-Monte Carlo (MC)(SCHAICH; LOINAZ, 2009), 2-produto de matrizes de estados uniformes (PMEU)(BOSETTI *et al.*, 2015), 3-MC(MILSTED *et al.*, 2013), 4-teoria de perturbação ressomada(RPT)(PELISSETTO; VICARI, 2015), 5-HT(RYCHKOV; VITALE, 2015), 6-HT(ELIAS-MIRÓ *et al.*, 2017a), 7-HT(ELIAS-MIRÓ *et al.*, 2017b), 8-ressoma de Borel (RB)(SERONE *et al.*, 2018), 9-OPT(HEYMANS; PINTO, 2021)

Método	Ano, Fonte	g_c
MC	2009, [1]	$2.70^{+0.025}_{-0.013}$
PMEU	2013, [2]	2.766(5)
MC	2015, [3]	2.788(15)(8)
RPT	2015, [4]	2.75(1)
HT	2015, [5]	2.97(14)
HT	2016, [6]	2.78(6)
HT	2017, [7]	2.76(3)
RB	2018, [8]	2.807(34)
OPT em M até $O(\delta^7)$	2021, [9]	2.779(25)
OPT em M^2 extrapolado	2021, [9]	2.785

Fonte: Autoral (2021).

tico como representando o valor exato, uma vez que este foi obtido através de um procedimento de extrapolação numérica muito simplificada. Este valor deve ser tomado como uma indicação de que a M^2 pode ser tão útil quanto M , desde que consigamos extrair as informações contidas na região supercrítica para acelerar a convergência.

3.6 CÁLCULO DE EXPOENTES CRÍTICOS

Como fica evidente a partir da figura 3.2, a transição de fase que ocorre neste modelo é uma transição de segunda ordem, uma vez que o parâmetro de ordem (M^2) atinge o acoplamento crítico de forma contínua. Como sabemos da mecânica estatística, associada a uma transição de segunda ordem temos os chamados *expoentes críticos*. Estes expoentes são objetos de estudos tanto na mecânica estatística quanto em teoria quântica de campos, uma vez que eles estabelecem o que é conhecido como *classe de universalidade*, nas quais diferentes teorias que apresentam os mesmos expoentes críticos pertencem a uma mesma classe. Por sua vez, as classes são determinadas a partir das simetrias que cada modelo/teoria respeita sendo independente da dinâmica microscópica do sistema (WILSON; KOGUT, 1974).

Em geral, os resultados para os expoentes críticos são obtidos de diferentes formas com diversos métodos. Um dos mais usuais é o expansão- ϵ , que pode ser encontrada na referência (ZINN-JUSTIN, 1994). Porém a aplicação deste método exige que a função- β não seja nula em todas as ordens perturbativas, que é o caso do modelo escalar em duas dimensões do espaço-tempo (veja a equação 2.29). Sendo

assim, precisamos procurar outra forma de realizar tal cálculo.

Como mencionamos, o modelo escalar em 1+1 dimensões pode ser visto como um modelo de Ising em duas dimensões (SIMON; GRIFFITHS, 1973), portanto eles pertencem a mesma classe de universalidade. Assim podemos usufruir dos resultados exatos para os expoentes críticos, $\nu = 1$ e $\eta_e = 1/4$, que foram determinados por Onsager (ONSAGER, 1944). A disponibilidade de tais resultados cria uma oportunidade para o teste de outros métodos, tais como a OPT, no cálculo dos expoentes.

Uma possível forma de determinar os expoentes críticos de uma teoria é via aproximação de campo médio (MFA). Utilizando tal aproximação no modelo escalar pode-se obter $\nu = 1/2$ e $\eta_e = 0$ (ZINN-JUSTIN, 1994). Note que apesar do resultado para o expoente ν ser reproduzido em cinquenta por cento do valor exato, a MFA nesta aplicação é incapaz de reproduzir qualquer valor não nulo para η_e . Outra particularidade de tal aproximação nestes cálculos é que ela ignora o número de dimensões, sendo assim, este resultado é mantido para sistemas em três e quatro dimensões espaço-temporais.

Considerando o sistema quando este se aproxima do comportamento crítico e seguindo as convenções de funções apresentadas na referência (PARISI, 1988), temos:

$$M^2 \propto (r - r_c)^{2\nu} \Rightarrow Z_2(\lambda) = \frac{dr}{dm^2} \sim M^{2C_2}, \quad (3.20)$$

com

$$C_2 = \frac{1}{2\nu} - 1. \quad (3.21)$$

Na equação (3.20) definimos a quantidade $r \equiv m^2 - \Sigma(p^2 = 0, m^2)$ onde $\Sigma(p^2 = 0, m^2)$ representa a autoenergia com momento externo zero. Uma outra quantidade relevante é:

$$M^{2C_1} \propto Z_1(\lambda) \equiv \frac{[G^{(2)}(p)]^2}{(dG^{(2)}(p)/dp^2)} \Bigg|_{p^2=0}, \quad (3.22)$$

sendo

$$C_1 = \frac{\eta_e}{2}, \quad (3.23)$$

enquanto $G^{(2)}(p)$ representa a função de Green (reduzível) de 2-pontos. Em seguida, utilizando as equações (3.20)-(3.23) juntamente com a adimensionalização da constante de acoplamento ($g \equiv \lambda/m^2$), obtemos:

$$C_1(g) = g \frac{d}{dg} \ln(Z_1(g)), \quad (3.24)$$

e

$$C_2(g) = g \frac{d}{dg} \ln(Z_2(g)). \quad (3.25)$$

Podemos agora determinar os expoentes críticos tomando o valor das funções $C_1(g = g_c) \equiv C_1^c$ e $C_2(g = g_c) \equiv C_2^c$, e então utilizar as equações (3.21) e (3.23)

para determinar os expoentes ν e η_e respectivamente. Na referência (PARISI, 1988) os valores $\nu = 3/4$ e $\eta_e = 0$ são obtidos ao nível de um loop. Ao nível de dois loops, a mesma referência apresenta o valor $\nu = 1.01$ enquanto o resultado para η_e se mantém nulo. Quando comparamos ao que foi obtido exatamente, $\nu = 1$ e $\eta_e = 1/4$, constatamos uma considerável melhora do valor do expoente ν . Todavia, o método utilizado é incapaz de estimar o erro, além de aparentemente não ser capaz de obter quaisquer valores não nulos para η_e . De qualquer maneira, analisando tais resultados vemos que as expansões em um ou dois loops, representam uma melhora do resultado obtido pela aplicação da MFA.

Inspirados pela referência (PINTO *et al.*, 2004), podemos utilizar os resultados da OPT e obter valores de expoentes críticos para o modelo e então comparar com os valores obtidos através de outros métodos.

Tendo em perspectiva como proceder, seguindo a referência (PARISI, 1988), com o cálculo dos expoentes, precisamos avaliar como se dará a aplicação da OPT. As alterações implicadas por este método se dão, naturalmente, em todos os termos que carregam o parâmetro de massa (m^2) e a constante de acoplamento (λ). Estas quantidades se fazem presentes apenas na autoenergia com momento externo zero ($\Sigma(p^2 = 0, m^2)$) e na função de Green de 2-pontos ($G^{(2)}(p)$), que por sua vez estão nas definições de $Z_2(g)$ e $Z_1(g)$ respectivamente. Como aqui estaremos utilizando g_c obtido a partir da otimização de M^2 em segunda ordem iremos tomar $\bar{\eta}$, por coerência, obtido a partir da equação (3.17) com $g = g_c$.

Assim, considerando os resultados em segunda ordem perturbativa tomamos $g_c \simeq 1.5147$ e $\bar{\eta} \simeq 1.4690$. Obtemos então:

$$\begin{aligned} C_{1OPT}^C &\simeq 0.031429 \quad \rightarrow \quad \eta_e \simeq 0.062859, \\ C_{2OPT}^C &\simeq -0.12151 \quad \rightarrow \quad \nu \simeq 0.56919. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Estes resultados se aproximam daqueles obtidos via MFA, porém com correções que vão ao encontro dos valores exatos em ambos os expoentes. Como podemos ver a partir da equação (3.22), para realizar o cálculo dos expoentes é necessário as expressões de todos os diagramas redutíveis em uma certa ordem (perturbativa ou de número de loops). Em face deste fato, a equação (3.5) não pode ser utilizada pois nela já é considerado $p^2 = -m^2$, portanto, não iremos reproduzir este cálculo para ordens superiores à segunda. Comparando o resultado obtido na equação (3.26) com o resultado $\nu = 0.92(30)$ e $\eta_e = 0.08(20)$ obtidos através do cálculo em 4 loops da referência (BAKER *et al.*, 1978) vemos que, apesar da disparidade do resultado de ν , o valor de η_e é particularmente condizente, mesmo tendo considerado apenas a segunda ordem. Mais recentemente, através da ressonância de Borel, a referência (SERONE *et al.*, 2018) prevê $\nu = 0.96(6)$ em 8 loops e $\eta_e = 0.244(28)$ em 6 loops.

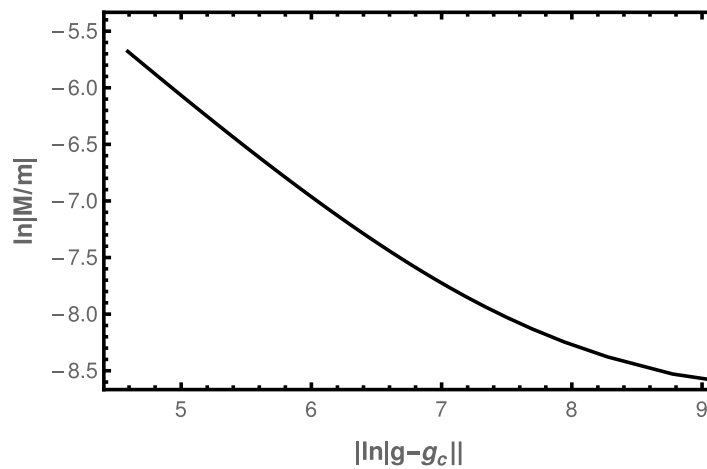
Uma outra forma de obter o expoente ν vem diretamente da análise de que

quando o parâmetro de ordem se aproxima do acoplamento crítico. Nesta região esta quantidade pode ser expressa na forma:

$$\frac{M^2}{m^2} = (g - g_c)^{2\nu} \rightarrow \ln \left| \frac{M}{m} \right| = \nu \ln |g - g_c| \quad (3.27)$$

Fica evidente que em um gráfico da forma $\ln |M/m|$ em função de $\ln |g - g_c|$ a inclinação da reta será o próprio expoente ν . Sendo assim podemos gerar a figura 3.8 para a obtenção numérica do expoente.

Figura 3.8 – Gráfico de $\ln |M/m|$ em função de $\ln |g - g_c|$ em primeira ordem perturbativa ressonada pela OPT.



Fonte: Autoral (2021).

A partir de tal gráfico é possível obter $\nu = 0.9367$. Como consideramos quantidades de ressonância distintas (M e M^2), convém verificar os expoentes resultantes de cada uma delas separadamente. Com um procedimento numérico completamente análogo em cada ordem podemos construir a tabela 3.5.

Tabela 3.5 – Expoente crítico ν obtido de forma numérica, para cada ordem perturbativa gerado pela ressonância de M (M^2) em ordens ímpares (pares).

Ressonância de M		Ressonância de M^2	
Ordem	ν	Ordem	ν
1	0.9367	2	0.4997
3	0.9995	4	0.5000
5	0.9998	6	0.5017
7	0.9999	8	0.5023

Fonte: Autoral (2021).

Note que os resultados em ordens ímpares convergem rapidamente para o valor exato de ν , enquanto o valor obtido via ressonância de M^2 sai lentamente do resultado da MFA e parece convergir muito lentamente em direção ao valor exato. Este comportamento é esperado e muito esclarecedor. De fato, a diferença da velocidade

de convergência entre as ressonâncias da massa física e da massa física ao quadrado é algo que já foi abordado anteriormente, na tabela 3.1 e na figura 3.6. Esta diferença também justifica o resultado obtido na equação (3.26), uma vez que nela foram utilizados resultados advindos da otimização de M^2 , assim as previsões para os expoentes críticos são um pouco mais precisas do que aquelas feitas pela MFA. O mesmo tipo de comportamento foi observado na referência (PINTO *et al.*, 2004), onde a otimização de M^2 , em 2+1 dimensões, também gerou valores próximos aos de MFA.

4 MODELO ESCALAR $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$ EM 1+1 DIMENSÕES

O estudo de modelos escalares com simetria $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$ foi primeiramente abordado por Weinberg na referência (WEINBERG, 1974). Naquele trabalho o autor explorou o modelo em quatro dimensões espaço-temporais no regime de temperaturas finitas e com três acoplamentos distintos: λ_ϕ , λ_χ e λ . Para que o potencial seja limitado inferiormente: $\lambda_\phi > 0$, $\lambda_\chi > 0$ enquanto λ pode ser positivo ou negativo. No caso $\lambda < 0$ foi notado que poderia ocorrer o fenômeno de quebra inversa de simetria (ISB, onde uma simetria do sistema é quebrada em altas temperaturas) e também o efeito da não-restauração de simetria (SNR, uma simetria que estava quebrada em temperatura zero não é restaurada em altas temperaturas). Estes efeitos físicos contra intuitivos são interessantes e possibilitam diversos estudos, como aqueles que se utilizam de métodos de ressonância, já que no caso de sistemas em temperaturas finitas a teoria de perturbação (originalmente considerada por Weinberg) não gera resultados confiáveis, conforme já discutido. Os resultados de ISB e SNR do modelo foram estendidos para o regime não relativístico na referência (PARREIRA *et al.*, 2005). Escolhas particulares para o número de componentes (N_ϕ e N_χ) ainda possuem outras aplicações, como o caso $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ em 3+1 dimensões, que faz parte de modelos híbridos de inflação (LINDE, 1994).

Modelos escalares $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$ em três dimensões do espaço-tempo também são objetos de estudo em diversos sistemas de matéria condensada, onde tal grupo de simetria é associado com a existência de pontos multicríticos em antiferromagnetos (especialmente) bidimensionais (PELISSETTO; VICARI, 2007; CALABRESE *et al.*, 2003). Estes pontos podem ser observados em experimentos devotados ao estudo de antiferromagnetos uniaxiais quase bidimensionais como K_2MnF_4 , Rb_2MnF_4 e Rb_2MnCl_4 (JONGH *et al.*, 1982; DE JONGH; DE GROOT, 1985; DE GROOT; DE JONGH, 1986; RAUH *et al.*, 1986; COWLEY *et al.*, 1993; VAN DE KAMP *et al.*, 1997; CHRISTIANSON *et al.*, 2001). O efeito deste grupo de simetria também é estudado em processos de competição entre ordenamentos em antiferromagnetos dopados (JIN *et al.*, 2001), assim como em sistemas com competição de parâmetros de ordem com comportamento multicrítico (EICHHORN *et al.*, 2013).

Conforme apresentado, esta classe de modelos escalares possui diversas aplicações em três e em quatro dimensões do espaço-tempo. Por outro lado, neste trabalho também estamos interessados no estudo de transições de fase quânticas em duas dimensões espaço-temporais, portanto é natural que investiguemos o modelo escalar $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$ em 1+1 dimensões que, até onde temos conhecimento, ainda não foi considerado na literatura. À luz do teorema de Coleman (COLEMAN, 1973), iremos mostrar que a simples soma da série perturbativa nos levaria à conclusão errônea de que o modelo $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$ em duas dimensões espaço-temporais não é fisicamente

aceitável. Porém através da ressonância realizada pela OPT (que pode ser facilmente implementada até a segunda ordem perturbativa aqui considerada) será possível obter uma combinação de condições que não descartam o modelo, já que a quebra da simetria contínua não ocorre em nenhum regime de acoplamento. Mostraremos ainda que o caso $\mathcal{O}(N) \times \mathbb{Z}_2$, recentemente explorado em 2+1 dimensões na referência (CHAI *et al.*, 2020), pode apresentar a quebra tipo $\mathcal{O}(N) \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathcal{O}(N)$, permitida pelo teorema de Coleman.

4.1 O MODELO

A densidade Lagrangiana que define o modelo que consideraremos neste capítulo é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi_a \phi_a + \lambda_\phi (\phi_a \phi_a)^2 \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi_a \partial^\mu \chi_a + \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi_a \chi_a + \lambda_\chi (\chi_a \chi_a)^2 + \lambda \phi_a \phi_a \chi_b \chi_b. \end{aligned} \quad (4.1)$$

A equação (4.1), que está representada no espaço Euclidiano, pode ser vista como a soma de duas cópias do modelo escalar, uma para o campo ϕ e uma para o campo χ , adicionada de um termo que acopla os diferentes setores. Perceba ainda que, por estarmos tratando de um modelo escalar, as regras de Feynman assim como as definições anteriormente apresentadas, podem ser obtidas de maneira similar.

Como sabemos, sistemas físicos precisam ter sua energia potencial limitada inferiormente. Portanto, como demonstrado no apêndice B, as condições que limitam o potencial neste caso particular são dadas por:

$$\begin{aligned} \lambda_\phi & > 0, \\ \lambda_\chi & > 0, \\ \lambda^2 & < 4\lambda_\phi \lambda_\chi. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para a interação entre os campos (λ) temos uma liberdade de escolha do sinal, que pode ser explorada para determinarmos as possíveis transições. Tal qual a versão com apenas um campo, estudada no capítulo anterior, este modelo também é super-renormalizável em duas dimensões do espaço-tempo. Sendo assim, as divergências se manifestam apenas nos diagramas e subdiagramas do tipo tadpole. Portanto, o processo de renormalização pode ser feito de forma análoga ao realizado no capítulo 2.

4.2 MASSA FÍSICA OTIMIZADA

Assim como anteriormente, avaliaremos as quebras de simetria via aplicação da OPT na massa física ao quadrado. Para simplificar o cálculo dos diagramas de

Feynman iremos considerar o caso de massas degeneradas, onde $m_\phi^2 = m_\chi^2 \equiv m^2 > 0$ e definiremos $\lambda \equiv \text{Sgn}|\lambda|$. Neste caso, além do acréscimo de novos diagramas, o cálculo do fator de simetria pode ser particularmente desafiador. Como o objetivo é obter resultados qualitativos com relação aos tipos de transições permitidas para este modelo, será suficiente considerá-lo apenas até a segunda ordem perturbativa. Sendo assim, a massa até ordem quadrática em λ para o campo ϕ fica:

$$M_\phi^2 = m_\phi^2 + \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3} + \text{diagrama 4} + \text{diagrama 5} + \text{diagrama 6} + \text{diagrama 7} + \text{diagrama 8} + \text{diagrama 9} . \quad (4.3)$$

Da mesma maneira, uma expressão completamente análoga pode ser obtida para M_χ . Generalizando, podemos então escrever:

$$\begin{aligned} M_i^2 &= m^2 + \frac{Lm}{\pi} \left[\lambda_i (N_i + 2) + \frac{\lambda}{2} N_j \right] \\ &- \frac{Lm}{(4\pi)^2 m^2} \left[16\lambda_i^2 (N_i + 2)^2 + 8\lambda_i \lambda (N_i + 2) N_j + 8\lambda_j \lambda (N_j + 2) N_i + 4\lambda^2 N_i N_j \right] \\ &- \frac{1}{64m^2} \left[32\lambda_i^2 (N_i + 2) + 4\lambda^2 N_j \right] , \end{aligned} \quad (4.4)$$

com $i \neq j = \phi, \chi$. Note que, exceto pelos fatores que multiplicam as funções de m^2 , a expressão (4.4) é similar aos primeiros termos de (3.5). Assim se considerarmos, por simplicidade, que os parâmetros de otimização são iguais, $\eta_\phi = \eta_\chi \equiv \eta$, é de se esperar que obteremos expressões similares às equações (3.19) e (3.17). Portanto, aplicando as modificações da OPT e expandindo em potências de δ até segunda ordem, determinamos:

$$\frac{M_i^2}{m^2} = 1 + \hat{\eta}^2 (1 - \delta) + \delta \frac{L\hat{\eta}}{\pi} A_i + \delta^2 \frac{\hat{\eta}^2}{\pi(1 + \hat{\eta}^2)} \left(A_i - \frac{L\hat{\eta}}{(4\pi)^2} B_i - C_i \right) , \quad (4.5)$$

que é completamente análoga a (3.13). Na equação (4.5) utilizamos as seguintes definições:

$$A_i \equiv g_i (N_i + 2) + \frac{g}{2} N_j , \quad (4.6)$$

$$B_i \equiv 16g_i^2 (N_i + 2)^2 + 8g_i g (N_i + 2) N_j + 8g_j g (N_j + 2) N_i + 4g^2 N_i N_j , \quad (4.7)$$

$$C_i \equiv 32g_i^2 (N_i + 2) + 4g^2 N_j , \quad (4.8)$$

além da adimensionalização das constantes de acoplamento: $g_i \equiv \lambda_i/m^2$ e $g \equiv \lambda/m^2 = \text{Sgn}|\lambda|$. Agora podemos aplicar e resolver a equação do PMS, equação (2.42), obtendo:

$$\hat{\eta}_i^2 = m^2 \left[\frac{B_i}{16A_i\pi} W \left(\frac{16\pi A_i \hat{\eta}^2}{B_i} e^{1+\pi(64A_i+C_i\pi)/(4B_i)} - 1 \right) - 1 \right] , \quad (4.9)$$

onde definimos $\hat{\eta} \equiv \eta/m$ e $\hat{\mu} \equiv \mu/m$. Assim fica evidente que apesar de termos expressões similares ao caso anterior elas poderão ser qualitativamente diferentes, uma vez que na expressão (4.9) temos uma dependência direta com o sinal de g .

4.3 RESSOMA DA SÉRIE PERTURBATIVA

Após escolher a escala arbitrária como $\mu = m$ podemos estabelecer algumas relações entre os acoplamentos para que enfim possamos realizar a ressonância da massa. Motivados pela equação (4.6), podemos *escolher* a seguinte parametrização:

$$g_\phi < \frac{|g|}{2} \frac{N_\chi}{N_\phi + 2}. \quad (4.10)$$

Então, utilizando a condição para que a energia possua um limite inferior, $g^2 < 4g_\phi g_\chi$, obtemos:

$$g_\chi > |g| \frac{N_\phi + 2}{N_\chi}. \quad (4.11)$$

Para fins computacionais *escolheremos*:

$$g_\phi = \frac{|g|}{4} \frac{N_\chi}{N_\phi + 2}, \quad (4.12)$$

$$g_\chi = 2|g| \frac{N_\phi + 2}{N_\chi}. \quad (4.13)$$

Tendo estabelecido como se dá a interdependência dos acoplamentos, podemos começar a analisar explicitamente as possíveis transições em cada caso.

4.3.1 Caso com simetria $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$

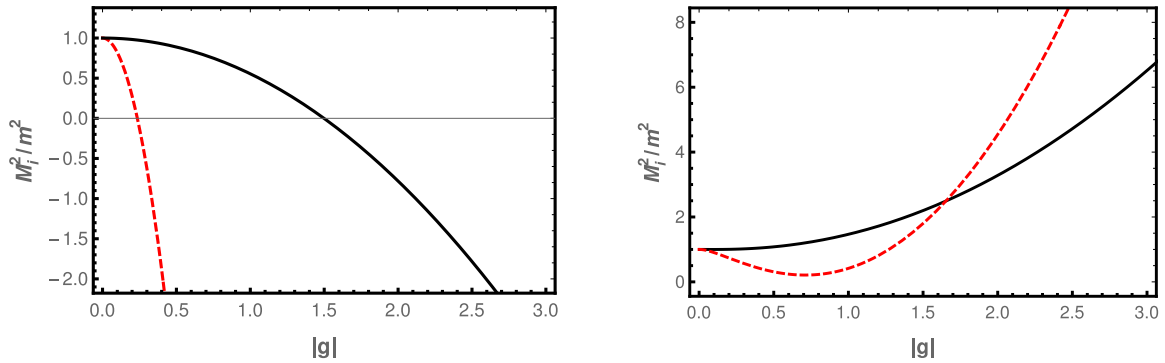
Primeiro consideraremos o caso mais geral: $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$, cuja viabilidade física para os diferentes acoplamentos possíveis será investigada. Se primeiro escolhermos $S_{gn} = +1$, que representa uma interação atrativa entre os dois setores, podemos gerar os gráficos presentes na figura 4.1.

Através de uma análise simples podemos afirmar que a teoria perturbativa apresenta quebra de simetria, enquanto a OPT não a apresenta.

Entretanto, o teorema de Coleman nos diz que *não pode haver* bósons de Goldstone (GOLDSTONE *et al.*, 1962) em sistemas em duas dimensões do espaço-tempo. Como sabemos, bósons de Goldstone estão associados com a quebra de simetria contínuas. Portanto podemos dizer que o teorema de Coleman proíbe quebras de simetrias contínuas em sistemas em 1+1 dimensões.

A par disto, vemos que o caso perturbativo viola o teorema de Coleman, sendo assim o comportamento fisicamente aceitável é dado apenas pela OPT, gráfico apresentado à direita da figura 4.1. Dentro das ordens em δ perturbativas consideradas até

Figura 4.1 – Gráfico de M_i^2/m^2 em função de $|g|$ com $\text{Sgn}= +1$ para o caso $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$. À esquerda o caso da teoria perturbativa e a direita o resultado da OPT. Para $N_\phi = 2$ (linha preta cheia) e $N_\chi = 3$ (linha vermelha tracejada).

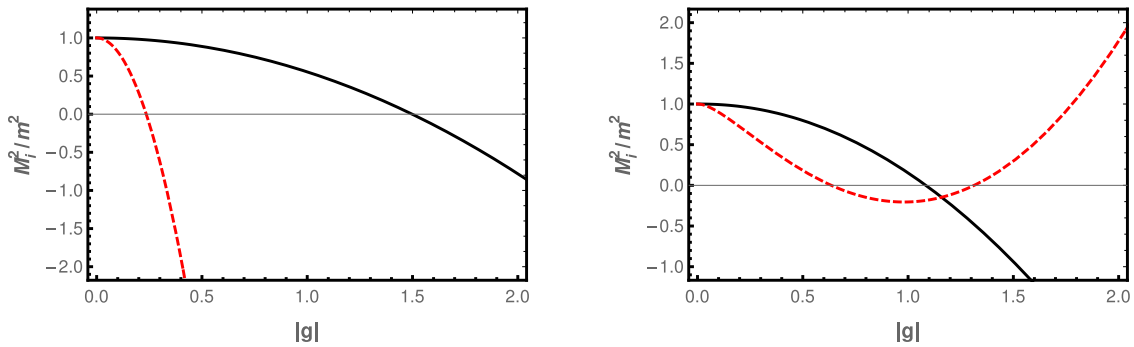


Fonte: Autoral (2021)

o momento, verificamos que este resultado se mantém válido apenas para $N_\chi \geq 3$ e $\forall N_\phi$.

Seguindo para o cenário onde $\text{Sgn}= -1$, que indica uma repulsão entre os dois setores do modelo, obtemos a figura 4.2

Figura 4.2 – Gráfico de M_i^2/m^2 em função de $|g|$ com $\text{Sgn}= -1$ para o caso $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$. À esquerda o caso da teoria perturbativa e a direita o resultado da OPT. Para $N_\phi = 2$ (linha preta cheia) e $N_\chi = 3$ (linha vermelha tracejada).



Fonte: Autoral (2021)

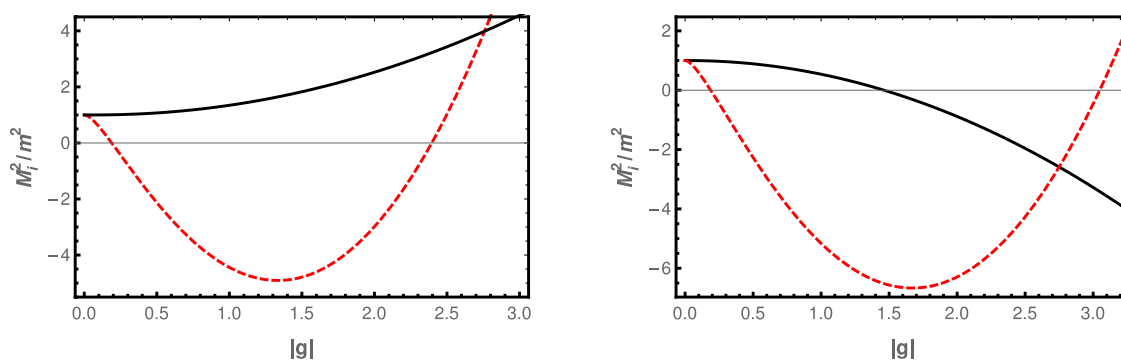
Desta vez tanto a teoria perturbativa quanto a OPT apresentam quebra de simetria em ambos os campos, portanto dois resultados violam o teorema de Coleman. Assim o caso $\text{Sgn}= -1$, em ambos métodos, gera apenas resultados não físicos, tornando-se um caso proibido para quaisquer valores de N_ϕ e N_χ (pelo menos até a ordem aqui considerada).

4.3.2 Caso com simetria $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathbb{Z}_2$

Para uma próxima análise fixamos $N_\chi = 1$, isto é, o grupo $\mathcal{O}(N_\chi)$ passa de um grupo de simetria contínuo para o grupo de simetria discreta \mathbb{Z}_2 , que nos leva a

uma teoria com simetria $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathbb{Z}_2$. Esta escolha particular de N_χ é motivada por uma tentativa de evitar as complicações levantadas pelo teorema de Coleman. Tal proposta foi feita na referência (CHAI *et al.*, 2020) para o caso tridimensional em temperatura finita, que também abordaremos no capítulo 5. Uma vez que a teoria perturbativa sempre resulta em uma quebra de simetria em ambos os setores, e isto é uma clara violação do teorema de Coleman, a figura 4.3 apresenta apenas os resultados obtidos com a OPT.

Figura 4.3 – Gráfico de M_i^2/m^2 em função de $|g|$ para o caso $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathbb{Z}_2$. À esquerda o caso $\text{Sgn} = 1$ e a direita o caso $\text{Sgn} = -1$. Para $N_\phi = 2$ (linha preta cheia) e $N_\chi = 1$ (linha vermelha tracejada).



Fonte: Autoral (2021)

Note que, se avaliarmos diretamente o modelo $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathbb{Z}_2$ à luz do teorema de Coleman, a única quebra de simetria possível seria $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathcal{O}(N_\phi)$, uma vez que a simetria \mathbb{Z}_2 é uma simetria discreta. Portanto, com esta pequena e simples análise prévia vemos que o único caso possível é de $\text{Sgn} = 1$, conforme ilustra o gráfico à esquerda da figura 4.3.

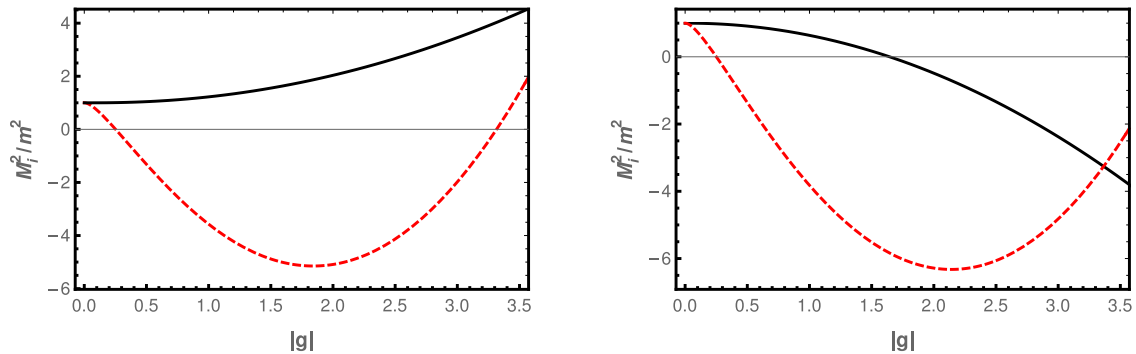
Em uma análise precipitada poderíamos afirmar que $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathcal{O}(N_\phi) \rightarrow \mathcal{O}(N_\phi) \times \mathbb{Z}_2$, mas como já justificamos no capítulo 3, a aparente fase reentrante é um efeito da falta de eficiência da ressonância após o ponto crítico, e não há um efeito físico real associado com a reentrância.

4.3.3 Caso com simetria $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Para uma última análise fixaremos $N_\phi = 1$ e $N_\chi = 1$, formando assim uma teoria $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Neste caso a teoria poderia ser vista como representando dois modelos de Ising bidimensionais acoplados. Com esta escolha, o modelo possui apenas simetrias discretas e o teorema de Coleman não é mais aplicável. Os resultados obtidos para a OPT estão ilustrados na figura 4.4.

Como fica evidente, neste caso poderemos ter $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, no caso $\text{Sgn} = 1$, e $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Assimétrico}$, no caso $\text{Sgn} = -1$. Já que o teorema de Coleman não é válido

Figura 4.4 – Gráfico de M_i^2/m^2 em função de $|g|$ para o caso $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. À esquerda o caso $\text{Sgn} = 1$ e a direita o caso $\text{Sgn} = -1$. Para $N_\phi = 1$ (linha preta cheia) e $N_\chi = 1$ (linha vermelha pontilhada).



Fonte: Autoral (2021).

para esta versão particular do modelo, qualquer escolha de sinal do acoplamento entre os campos é fisicamente permitida.

A tabela 4.1 resume os resultados que obtivemos em cada caso considerado.

Tabela 4.1 – Resultados Obtidos pela OPT dentro das parametrizações (4.12) e (4.13).

Grupo de Simetria	Sinal do Acoplamento	Admissibilidade
$\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$	+	Fisicamente admissível, se $N_\chi \geq 3$
	-	Fisicamente inadmissível
$\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathbb{Z}_2$	+	Fisicamente admissível
	-	Fisicamente inadmissível
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	+	Fisicamente admissível
	-	Fisicamente admissível

Fonte: Autoral (2021).

4.3.4 Parametrização Alternativa

Para verificar que os comportamentos observados não são dependentes da parametrização que escolhemos, podemos voltar à equação (4.6) e fazer a escolha oposta que fizemos na equação (4.10) :

$$g_\phi > \frac{|g| N_\chi}{2 N_\phi}. \quad (4.14)$$

Isto nos leva a seguinte escolha para a parametrização:

$$g_\phi = \frac{5}{6} |g| \frac{N_\chi}{N_\phi + 2}, \quad (4.15)$$

$$g_\chi = |g| \frac{N_\phi + 2}{N_\chi}. \quad (4.16)$$

Avaliando cada um dos três casos apresentados anteriormente, agora neste conjunto de parametrização, notou-se que, do ponto de vista qualitativo, todos os comportamentos observados não foram alterados. Vale ressaltar que para o caso particular do modelo $\mathcal{O}(N) \times \mathbb{Z}_2$ foi realizada a troca entre a simetria dos setores, ou seja, foi considerado o modelo $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{O}(N)$, para manter a coerência.

4.4 PARÂMETROS VARIACIONAIS NÃO DEGENERADOS

Uma análise mais geral pode ser feita considerando o caso onde não temos os parâmetros variacionais degenerados. Neste caso, mantendo $m_\phi^2 = m_\chi^2 \equiv m$, a introdução dos termos Gaussianas da OPT tornam-se: $m_\phi^2 \rightarrow m^2 + \eta_\phi^2$ e $m_\chi^2 \rightarrow m^2 + \eta_\chi^2$. Com tais considerações, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{M_i^2}{m^2} &= 1 + \hat{\eta}_i^2(1 - \delta) + \delta \frac{(2 + N_i)g_i}{\pi} L_{\eta_i} + \delta \frac{N_j g}{2\pi} L_{\eta_j} + \delta^2 \frac{(N_i + 2)g\hat{\eta}_i^2}{\pi(1 + \hat{\eta}_i^2)} + \delta^2 \frac{N_j g \hat{\eta}_j^2}{2\pi(1 + \hat{\eta}_j^2)} \\ &- \delta^2 \frac{(N_i + 2)g_i^2}{(1 + \hat{\eta}_i^2)\pi^2} L_{\eta_i} - \delta^2 \frac{(N_i + 2)N_j g_i g}{2\pi^2(1 + \hat{\eta}_i^2)} L_{\eta_j} - \delta^2 \frac{(N_j + 2)N_j g_j g}{2\pi^2(1 + \hat{\eta}_j^2)} L_{\eta_i} - \delta^2 \frac{N_i N_j g^2}{4\pi^2(1 + \hat{\eta}_j^2)} L_{\eta_i} \\ &- \delta^2 \frac{(N_i + 2)g_i}{2(1 + \hat{\eta}_i^2)} - \delta^2 \frac{N_j g^2}{2\pi^2 \sqrt{(1 + \hat{\eta}_i^2)(1 + \hat{\eta}_j^2)}} \left[\pi^2 \right. \\ &- \left. 2 \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 + \hat{\eta}_j^2}{1 + \hat{\eta}_i^2}} \right) \ln \left(\frac{1 + \hat{\eta}_j^2}{1 + \hat{\eta}_i^2} \right) - \sqrt{\frac{1 + \hat{\eta}_j^2}{1 + \hat{\eta}_i^2}} \Phi \left(\frac{1 + \hat{\eta}_j^2}{1 + \hat{\eta}_i^2}, 2, \frac{1}{2} \right) \right], \quad (4.17) \end{aligned}$$

sendo que $\Phi(z, s, a)$ é a função transcendental de Lerch, que é dada por:

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(a+n)^s}. \quad (4.18)$$

Diferentemente dos demais, o cálculo do último termo foi realizado no espaço de posições (detalhes deste cálculo podem ser encontrados no apêndice C). Neste caso, a otimização das massas físicas ao quadrado serão dadas por:

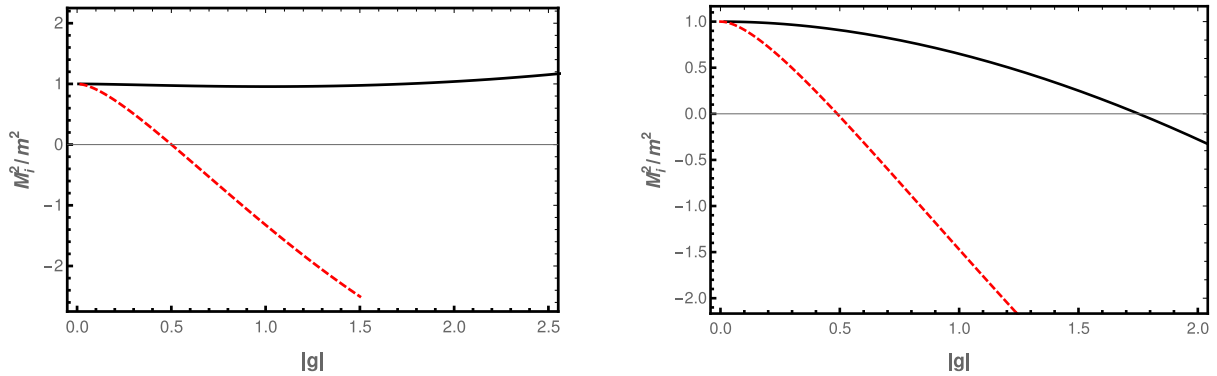
$$\left. \frac{dM_i^2}{d\eta_i^2} \right|_{\bar{\eta}_i} = 0, \quad (4.19)$$

e

$$\left. \frac{dM_j^2}{d\eta_j^2} \right|_{\bar{\eta}_j} = 0, \quad (4.20)$$

gerando assim um conjunto de dois parâmetros variacionais otimizados para cada um dos dois campos. A única diferença que esta formulação gera nos resultados está no fato de que os gráficos não mostram mais a suposta fase reentrante. A figura 4.5 ilustra o caso $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ com parâmetros diferentes.

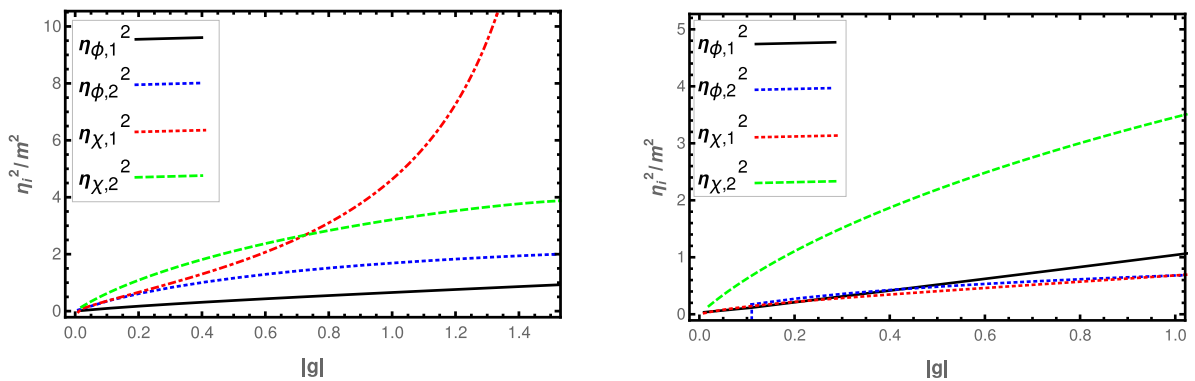
Figura 4.5 – Gráfico de M_i^2/m^2 , com $\eta_\phi \neq \eta_\chi$, em função de $|g|$ para o caso $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. À esquerda o caso $\text{Sgn}= 1$ e à direita o caso $\text{Sgn}= -1$. Sendo $N_\phi = 1$ (linha preta cheia) e $N_\chi = 1$ (linha vermelha tracejada).



Fonte: Autoral (2021).

Como o sistema no qual obtivemos a otimização dos parâmetros variacionais são mais complexos, uma vez que vem da solução simultânea de duas equações, não é possível otimizar-se η para todos os valores de acoplamento. Para que os valores otimizados sejam da mesma magnitude, não podemos ter um parâmetro com valores muito superiores aos dos demais. A figura 4.6 ilustra bem a situação, mostrando que em torno de $g \simeq 1.5$, η_1^2 vindo da otimização de M_χ^2 passa a assumir valores muito maiores que os demais parâmetros otimizados. Sendo assim os resultados considerados para o campo χ na figura 4.5 estão limitados até $g \simeq 1.5$.

Figura 4.6 – Gráfico de η_i^2/m^2 em função de $|g|$ para o caso $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. À esquerda o caso $\text{Sgn}= 1$ e à direita o caso $\text{Sgn}= -1$.



Fonte: Autoral (2021).

Percebe-se que no regime considerado o sistema não apresenta nenhuma evidência da fase reentrante, diferentemente da figura 4.4. Porém, o mesmo comportamento qualitativo é observado (o mesmo vale para os demais casos). Este comportamento reforça a argumentação de que a fase reentrante é apenas um reflexo da falta da analiticidade da expansão perturbativa após o acoplamento crítico ter sido atingido.

E portanto fica evidente que, independentemente da formulação e parametrização adotadas, os resultados qualitativos se mantêm os mesmos, com a vantagem de que o caso onde consideramos parâmetros de otimização distintos o aparecimento de uma (falsa) reentrância é automaticamente excluído.

5 CONFORMABILIDADE DE MODELOS ESCALARES $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$ EM 2+1 DIMENSÕES

O estudo da teoria de campos conforme (CFT) teve como ponto de partida a publicação da referência (BELAVIN *et al.*, 1984) e desde então tem sido explorada em diferentes linhas de pesquisa em Física e Matemática. Uma das possíveis aplicações de CFT é em teoria de cordas, uma vez que a variável dinâmica desta teoria pode ser representada por uma CFT em duas dimensões espaço-temporais (BANKS, 1988). Uma outra aplicação para CFT aparece em fenômenos críticos em 1+1 dimensões e, mais especificamente, no efeito Hall quântico (PETERSEN, 2019). Na mecânica estatística a CFT pode ser utilizada para a classificação da classe de universalidade, cálculo dos expoentes críticos, cálculo de amplitudes universais, assim como efeitos de tamanho finito na criticalidade. Além disto, também possibilita o cálculo de proporções de quantidades termodinâmicas e de funções de correlação em regiões próximas e distantes da criticalidade (CARDY, 2008).

Um exemplo da descrição do comportamento crítico por uma CFT pode ser visto no modelo de Ising em duas dimensões. Em altas temperaturas este modelo apresenta uma fase desordenada, ao passo que uma fase ordenada é observada em baixas temperaturas. As duas fases estão relacionadas por uma dualidade no modelo e há uma transição de fase de segunda ordem no ponto auto dual. Na transição de fase, as configurações típicas possuem flutuações em todas as escalas de comprimento. Portanto, a teoria de campos que descreve este modelo na região crítica deve, no mínimo, apresentar uma invariância sob a escolha de escalas (GINSPARG, 1988). Note que o comportamento descrito é exatamente o que observamos no capítulo 3, onde o modelo considerado se torna independente de qualquer escala (conforme) em $g = g_c$.

Modelos super-renormalizáveis, em três dimensões do espaço-tempo, com parâmetro de massa nulo e em temperaturas não nulas são promissores para o estudo e análise de CFT. Neste número de dimensões a constante de acoplamento possui dimensão canônica $[\lambda] = 1$, o que permite uma adimensionalização em termos da temperatura, ou seja $\lambda \rightarrow \lambda/T$. Assim regiões de acoplamento forte podem ser estudadas no regime de baixas temperaturas, enquanto regiões de acoplamentos fracos são investigadas tomando o limite de altas temperaturas. Com estas considerações, o modelo escalar com simetria $\mathcal{O}(N)$ foi estudado na referência (ROMATSCHKE, 2019a), no limite de N -grande. Um dos resultados mais importantes deste estudo mostra que a proporção entre a densidade de entropia do sistema fortemente acoplado ($\lambda \rightarrow \infty$) e do sistema livre ($\lambda = 0$) pode ser expressa como a razão $s/s_{free} = 4/5$. É interessante que esta proporção seja similar ao valor de $3/4$ obtida dentro do contexto calibre/gravidade para o sistema de $\mathcal{N} = 4$ Super-Yang-Mills quadridimensional (GUBSER *et al.*, 1998).

Com os resultados obtidos para o caso bosônico podemos nos perguntar como o sistema é afetado pela introdução de férmions. Para obter esta resposta a referência (DEWOLFE; ROMATSCHKE, 2019) utiliza o modelo supersimétrico $\mathcal{O}(N)$ Wess-Zumino, que representa uma CFT *pura* (é conforme para todos os valores de acoplamento). Neste caso foi obtida a proporção $s/s_{free} = 31/35$ para o caso com mesmo número de bósons (N_B) e de férmions (N_F). A proporção de 31/35 foi confirmada para o modelo de Yukawa-Gross-Neveu no caso de $N_F = 1/4$ e para o modelo de Yukawa-Nambu-Jona-Lasinio com $N_F = 1/2$ (PINTO, 2020).

Uma outra pergunta possível é se a proporção de 4/5 entre as densidades de entropia do sistema bosônico se mantém válida no caso de incluirmos a interação com um outro campo bosônico. Para verificar esta possibilidade, neste capítulo iremos analisar o comportamento de quantidades termodinâmicas para todos os regimes de acoplamento no modelo $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$ no caso de temperaturas finitas e massa nula em 2+1 dimensões. Além disso exploraremos a possibilidade de existirem condições que tornem o modelo uma CFT pura.

Investigaremos ainda o caso particular do modelo $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{O}(N)$ proposto na referência (CHAI *et al.*, 2020), no limite de N -grande. Este modelo é uma interessante proposta entre os modelos de CFT, uma vez que ele pode apresentar uma quebra de simetria global na forma $\mathcal{O}(N) \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathcal{O}(N)$, conforme discutido no capítulo anterior.

5.1 O MODELO

Fazendo uma pequena adaptação na nomenclatura anterior, reescrevemos: $\phi \rightarrow \phi_1$ e $\chi \rightarrow \phi_2$. Desta maneira podemos adotar a mesma notação da referência (GRABOWSKI, 1990). Para o presente estudo devemos também anular os termos massivos, uma vez que estamos interessados na conformabilidade do modelo. Assim temos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i (\partial_\mu \phi_i)^2 - \frac{1}{8} \sum_{i,j=1}^2 \phi_i^2 \lambda_{ij} \phi_j^2, \quad (5.1)$$

com $i, j = 1, 2$ e $\lambda_{11} = \lambda_1$, $\lambda_{22} = \lambda_2$, $\lambda_{12} = \lambda_{21} \equiv -\lambda$ sendo as componentes da matriz de acoplamento. Note que caso escolhêssemos a matriz de acoplamento na forma $\Lambda = \lambda \mathbb{1}$, sendo λ uma constante e $\mathbb{1}$ a matriz identidade, não teríamos um modelo $\mathcal{O}(N_1) \times \mathcal{O}(N_2)$ e sim duas cópias do modelo $\mathcal{O}(N)$. Como apresentado no capítulo anterior (e detalhado no apêndice C), as condições para que a energia potencial seja limitada inferiormente impõem que $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ e $4\lambda_1\lambda_2 > \lambda^2$, e portanto, λ pode ser negativo ou positivo. Diferentemente dos capítulos anteriores, estamos agora interessados na obtenção direta de quantidades termodinâmicas. Aqui calcularemos o potencial efetivo (ou energia livre de Landau) através da aproximação de campo médio (MFA):

$$\frac{1}{2} \left(\sigma_i - \frac{\lambda_{ik}}{2} \phi_k^2 \right) \lambda_{ij}^{-1} \left(\sigma_j - \frac{\lambda_{jl}}{2} \phi_l^2 \right). \quad (5.2)$$

A aproximação de campo médio para o potencial de interesse pode ser escrita como:

$$\frac{1}{8}\phi_j^2\lambda_{jj}\phi_j^2 \approx -\frac{1}{2}\sigma_i\lambda_{ij}^{-1}\sigma_j + \frac{1}{2}\sigma_i\phi_i^2, \quad (5.3)$$

com os elementos da matriz de acoplamento inversa sendo $\lambda_{11}^{-1} = \lambda_2/\gamma$, $\lambda_{22}^{-1} = \lambda_1/\gamma$, $\lambda_{12}^{-1} = \lambda_{21}^{-1} \equiv \lambda/\gamma$ e $\gamma = \det(\Lambda) = \lambda_1\lambda_2 - \lambda^2$. Portanto, utilizando a MFA obtemos a seguinte densidade Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{\text{MFA}} \approx \frac{1}{2} \sum_i (\partial_\mu \phi_i)^2 - V_C(\phi_1^2, \phi_2^2, \sigma_1, \sigma_2), \quad (5.4)$$

com o potencial clássico representado por:

$$V_C(\phi_1^2, \phi_2^2, \sigma_1, \sigma_2) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \sigma_i \lambda_{ij}^{-1} \sigma_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sigma_i \phi_i^2. \quad (5.5)$$

É fácil ver que a equação (5.4) é completamente equivalente à equação (5.1). A partir da equação (5.4) podemos seguir a referência (KLIMENKO, 1989) e assim obter a seguinte energia livre de Landau:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & -\frac{1}{2\gamma}(\lambda_2\sigma_1^2 + \lambda_1\sigma_2^2 + 2\lambda\sigma_1\sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1\phi_1^2 + \sigma_2\phi_2^2) \\ & - \frac{N_1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(p^2 - \sigma_1) - \frac{N_2}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(p^2 - \sigma_2). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Com o intuito de introduzir a temperatura no sistema e calcular as integrais em três dimensões espaço-temporais, vamos adotar as transformações de Matsubara (descritas no apêndice D) em 2 + 1 dimensões. Assim obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & -\frac{1}{2\gamma}(\lambda_2\sigma_1^2 + \lambda_1\sigma_2^2 + 2\lambda\sigma_1\sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1\phi_1^2 + \sigma_2\phi_2^2) \\ & - \frac{N_1}{2} \left[\frac{\sigma_1^{3/2}}{6\pi} + \sqrt{\sigma_1} \frac{T^2}{\pi} \text{Li}_2\left(e^{-\sqrt{\sigma_1}/T}\right) + \frac{T^3}{\pi} \text{Li}_3\left(e^{-\sqrt{\sigma_1}/T}\right) \right] \\ & - \frac{N_2}{2} \left[\frac{\sigma_2^{3/2}}{6\pi} + \sqrt{\sigma_2} \frac{T^2}{\pi} \text{Li}_2\left(e^{-\sqrt{\sigma_2}/T}\right) + \frac{T^3}{\pi} \text{Li}_3\left(e^{-\sqrt{\sigma_2}/T}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Onde $\text{Li}_n(x)$ representa a função polilogarítmica de ordem n dada por:

$$\text{Li}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}, \quad (5.8)$$

cujas propriedades podem ser encontradas na referência (HABER; WELDON, 1982).

5.2 TERMODINÂMICA

Para começarmos a obter algumas quantidades termodinâmicas do modelo precisamos minimizar a energia livre em relação aos campos: $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\phi}_i} \Big|_{\bar{\phi}_i} = 0$ e $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\sigma}_i} \Big|_{\bar{\sigma}_i} = 0$. Isto resulta nas equações de gap:

$$\bar{\sigma}_i \bar{\phi}_i = 0, \forall i, \quad (5.9)$$

e

$$-\frac{1}{\gamma}(\lambda_j \bar{\sigma}_i + \lambda \bar{\sigma}_j) + \frac{1}{2} \bar{\phi}_i^2 + \frac{N_j}{2} \frac{1}{4\pi} \left[\sqrt{\bar{\sigma}_i} + 2T \ln(1 - e^{-\sqrt{\bar{\sigma}_i}/T}) \right] = 0. \quad (5.10)$$

Como pode-se verificar, a função $\ln(1 - e^{-x})$ é monotonicamente decrescente no intervalo $x \in (0, \infty)$, sendo assim desnecessário nos preocuparmos com pólos. Tomando a equação (5.9) e escolhendo $\bar{\phi}_i = 0$ podemos reescrever a equação (5.10) como:

$$\frac{1}{\gamma}(\lambda_j \bar{\sigma}_i + \lambda \bar{\sigma}_j) + \frac{N_j}{8\pi} [\sqrt{\bar{\sigma}_i} + 2T \ln(1 - e^{-\sqrt{\bar{\sigma}_i}/T})] = 0, \quad (5.11)$$

com $i \neq j = 1, 2$. Note que, a partir de uma análise mais cuidadosa da equação (5.6), é possível reconhecer o argumento das funções logarítmicas como o inverso do propagador bosônico, onde σ_i faz o papel do parâmetro de massa ao quadrado. Assim, $\sqrt{\bar{\sigma}_i}$ pode ser interpretado como a massa térmica da teoria. Uma vez estabelecidos os pontos de mínimo da energia livre de Landau podemos utilizar $P = -\mathcal{F}(\bar{\phi}_i, \bar{\sigma}_i)$ para obter a pressão:

$$P = \frac{T}{2\gamma}(\lambda_2 \bar{\sigma}_1^2 + \lambda_1 \bar{\sigma}_2^2 + 2\lambda \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2) + \sum_i \frac{N_i}{2} \left[\frac{\bar{\sigma}_i^{3/2}}{6\pi} + \frac{\sqrt{\bar{\sigma}_i} T^2}{\pi} \text{Li}_2 \left(e^{-\frac{\sqrt{\bar{\sigma}_i}}{T}} \right) + \frac{T^3}{\pi} \text{Li}_3 \left(e^{-\frac{\sqrt{\bar{\sigma}_i}}{T}} \right) \right]. \quad (5.12)$$

Tomando a relação termodinâmica que associa pressão e a densidade de entropia: $s = \frac{\partial P}{\partial T} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial P}{\partial \sigma}$, obtemos:

$$s = \frac{1}{2\pi} \sum_i N_i \left[-\bar{\sigma}_i \ln \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{\bar{\sigma}_i}}{T}} \right) + 3T \sqrt{\bar{\sigma}_i} \text{Li}_2 \left(e^{-\frac{\sqrt{\bar{\sigma}_i}}{T}} \right) + 3T^2 \text{Li}_3 \left(e^{-\frac{\sqrt{\bar{\sigma}_i}}{T}} \right) \right]. \quad (5.13)$$

Uma vez tendo obtido expressões que determinam as quantidades termodinâmicas relevantes, estamos prontos para obter os primeiros resultados deste capítulo.

5.3 RESULTADOS

Inicialmente é interessante voltarmos para a equação (5.11) e reescrevê-la em termos de quantidades adimensionais. Isto pode ser facilmente feito notando que as constantes de acoplamento possuem dimensões canônicas $[\lambda_j] = [\lambda] = 1$ e portanto

podem ser reescritas na forma adimensional com $g_j \equiv \lambda_j/T$ e $g \equiv \lambda/T$. Também podemos definir a massa térmica adimensional por $m \equiv \sqrt{\sigma_j}/T$. Resultando em:

$$\frac{1}{\gamma g} \left(g_j m_i^2 + g m_j^2 \right) + \frac{N_i}{8\pi} \left[m_i + 2 \ln(1 - e^{-m_i}) \right] = 0, \quad (5.14)$$

onde $\gamma g \equiv (\lambda_1 \lambda_2 - \lambda^2)/T^2 = g_1 g_2 - g^2$. Perceba agora que os casos de acoplamento forte e fraco podem ser facilmente obtidos ao tomarmos, respectivamente, $T \rightarrow 0$ e $T \rightarrow \infty$. Tomando $g \rightarrow 0$ (ou $T \rightarrow \infty$) obtemos $m_1 = m_2 = 0$, enquanto no caso $g \rightarrow \infty$ (ou $T \rightarrow 0$) o resultado $m_1 = m_2 \equiv 2 \ln \Phi$, sendo $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a proporção áurea.

Retornando para a pressão e a densidade de entropia, dadas pelas equações (5.12) e (5.13) respectivamente, podemos reescrevê-las em termos das quantidades adimensionalizadas:

$$P = \frac{T^3}{2\gamma g} \left(g_2 m_1^4 + g_1 m_2^4 + 2g m_1^2 m_2^2 \right) + \frac{T^3}{2\pi} \sum_i N_i \left[\frac{m_i^3}{6} + m_i \text{Li}_2(e^{-m_i}) + \text{Li}_3(e^{-m_i}) \right], \quad (5.15)$$

e

$$s = \frac{T^2}{2\pi} \sum_i N_i \left[-m_i^2 \ln(1 - e^{-m_i}) + 3m_i \text{Li}_2(e^{-m_i}) + 3\text{Li}_2(e^{-m_i}) \right]. \quad (5.16)$$

Utilizando as últimas expressões podemos avaliar a entropia nos limites de acoplamento fraco e forte. Com este fim, basta utilizarmos os resultados para a massa térmica adimensional. Obtemos então:

$$\lim_{m_{1,2} \rightarrow 0} s = \frac{3T^2}{2\pi} \zeta(3)(N_1 + N_2) = s_{free}, \quad (5.17)$$

sendo $\zeta(x)$ a função zeta de Riemann. Note que este resultado pode ser facilmente obtido se considerarmos dois gases ideais bosônicos relativísticos. Para o regime de acoplamento forte temos:

$$\lim_{m_{1,2} \rightarrow 2 \ln \Phi} s = \frac{12T^2}{10\pi} \zeta(3)(N_1 + N_2) = \frac{4}{5} s_{free}. \quad (5.18)$$

Portanto, a proporção entre a densidade de entropia do sistema livre e do sistema altamente interagente é a mesma para todos valores de N_1 e N_2 . Como este é exatamente o valor obtido para o caso do modelo $\mathcal{O}(N)$ tridimensional estudado na referência (ROMATSCHKE, 2019a), concluímos que a proporção $s/s_{free} = 4/5$ parece ser universal para modelos escalares.

A próxima quantidade a ser analisada é a medida de interação (ou anomalia do traço), que em d dimensões espaciais, é definida por:

$$\Delta = \epsilon - dP, \quad (5.19)$$

com $\epsilon = Ts - P$ representando a densidade de energia. A medida de interação também pode ser vista como o traço do tensor energia momento e para uma CFT pura possui um valor identicamente nulo, assim como para o gás livre. Esta quantidade está diretamente associada com a medida conforme $C = \frac{\Delta}{\epsilon}$. Substituindo a entropia e pressão dadas pelas equações (5.15) e (5.16), obtemos:

$$\frac{\Delta}{T^3} = \frac{1}{2\gamma g} \left(g_2 m_1^4 + g_1 m_2^4 + 2g m_1^2 m_2^2 \right). \quad (5.20)$$

Se quisermos estabelecer condições para que o modelo $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$ seja um CFT pura, será necessário exigir $\Delta = 0$, em todos valores de acoplamento. Isto apenas ocorrerá no caso onde:

$$g_2 m_1^4 + g_1 m_2^4 + 2g m_1^2 m_2^2 = 0. \quad (5.21)$$

É simples obter que a solução para a equação (5.21) é dada por:

$$m_j^2 = -\frac{g m_j^2 \pm \sqrt{g^2 - 4g_1 g_2 m_j^2}}{2g_2}, \quad (5.22)$$

entretanto, por conta das condições de limite inferior sabemos que $g^2 < 4g_1 g_2$. Portanto para que a equação (5.21) seja satisfeita é necessário que $m_j^2 \in \mathbb{C}$. Isto descarta a possibilidade do modelo ser uma CFT pura. Apesar disto continua sendo interessante avaliar a equação (5.20) nos limites de acoplamento forte ($m_1 = m_2 = 2 \ln \Phi$) e fraco ($m_1 = m_2 = 0$). Vemos que, se fizermos a escolha $g < 0$, a medida de interação do sistema se anula em ambos os limites nos revelando que, nestes limites, o modelo é uma CFT.

Após ter explorado as propriedades de conformabilidade, podemos investigar as possíveis transições de fase. Para realizar esta investigação de forma coerente é necessário o conhecimento do teorema apresentado a seguir.

Teorema de Mermin-Wagner (MERMIN; WAGNER, 1966), diferente do teorema de Coleman, apresentado anteriormente, refere-se a quebras de simetrias contínuas em temperaturas finitas. Este teorema nos diz que sistemas com interações de curto alcance, em baixas dimensões (especialmente uni e bidimensionais) e $T > 0$ não podem apresentar quebras de simetrias contínuas. Uma forma intuitiva de pensarmos nesse teorema é se identificarmos as transformações de Matsubara (equações (D.1) e (D.2) do apêndice D) como uma redução dimensional aplicada à coordenada temporal do modelo. Assim este procedimento poderia ser visto como uma transformação que remove a dependência temporal do sistema (substituindo pela temperatura). Portanto o modelo em 2+1 dimensões passa a ser em 2 dimensões, caindo novamente no teorema de Coleman.

Portanto, a existência deste teorema implica que se quisermos avaliar quebras de simetrias será necessário que, pelo menos, um dos setores apresente uma simetria discreta. Assim, iremos fixar $N_1 = 1$ e $N_2 = N$.

5.4 CASO $N_1 = 1$ E $N_2 = N$

Quando fazemos a escolha $N_1 = 1$ e $N_2 = N$, temos como resultado uma teoria $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{O}(N)$ (CHAI *et al.*, 2020), um caso interessante, onde misturamos um grupo de simetria discreto e um contínuo, para o estudo deste modelo iremos aplicar o limite de N -grande. Para que o limite de N -grande seja aplicado de forma consistente, é necessário realizar o reescalonamento das constantes de acoplamento : $\lambda_j \rightarrow \lambda_j/N$ e $\lambda \rightarrow \lambda/N$, assim como também lembrar que estaremos considerando $N \rightarrow \infty$.

Aplicando os teoremas da última seção, conseguimos saber de antemão o que é fisicamente permitido acontecer quando calculamos as contribuições térmicas neste modelo em 2+1 dimensões. Devido ao teorema de Mermin-Wagner, a simetria que pode ser quebrada é a discreta, portanto se tivermos uma quebra de simetria ela deve ser da forma $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{O}(N) \rightarrow \mathcal{O}(N)$.

Então podemos voltar à equação (5.7) e utilizar nossa escolha do número de espécies de cada setor assim como aplicar os reescalonamentos e tomar o limite de N -grande. Tomando $\bar{\phi} = 0$, obtendo as seguintes equações de gap:

$$\frac{m_2^2}{g_2} + \frac{1}{8\pi} [m_2 + 2 \ln(1 - e^{-m_2})] = 0, \quad (5.23)$$

e

$$m_1^2 = -\frac{g}{g_2} m_2^2. \quad (5.24)$$

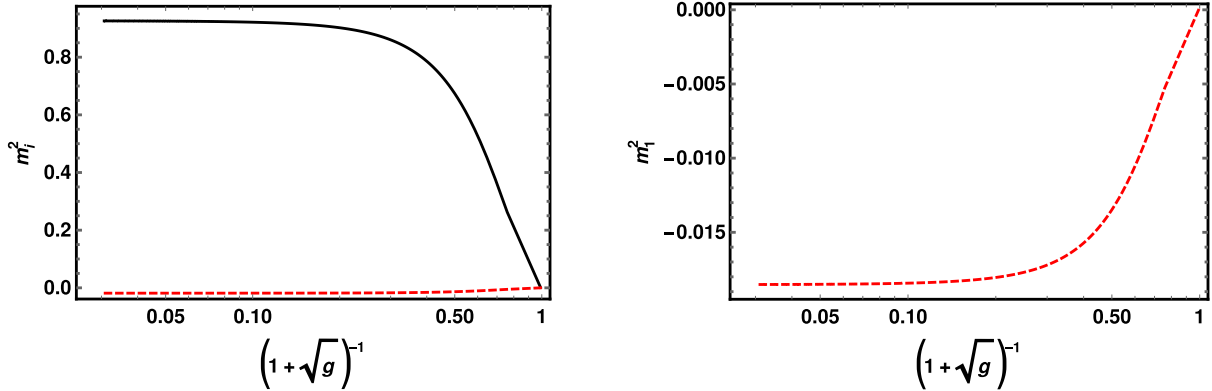
Note que no caso $T \rightarrow \infty$ ($g \rightarrow 0$) temos $m_i = 0$, portanto não há quebra de simetria. Para $T > 0$ temos, como solução não trivial, $m_2^2 > 0$ e $m_1^2 < 0$. Em particular, para $T \rightarrow 0$ ($g \rightarrow \infty$) teremos $m_2 = 2 \ln \Phi$ e $m_1^2 < 0$. Portanto vemos explicitamente que ocorreu uma quebra de simetria nos valores intermediários dos acoplamentos (ou temperaturas finitas).

Como verificamos, a quebra ocorrerá no setor associado a ϕ_1 . Portanto para fins computacionais escolheremos $g_1 = 0.1|g|$ e $g_2 = 50|g|$, garantindo as condições de limite inferior na energia potencial e possibilitando a obtenção da figura 5.1. Em um dos gráficos temos o comportamento das massas térmicas adimensionais ao quadrado, enquanto o segundo mostra explicitamente a quebra da simetria no setor \mathbb{Z}_2 . Isto é, mostra m_1^2 partindo de zero, no limite $|g| \rightarrow 0$ e assumindo valores negativos, quando $|g| \rightarrow \infty$.

Para obtermos a pressão podemos utilizar a equação (5.12) e aplicar as escolhas do número de componentes em cada setor, assim como as considerações de N -grande. Portanto é simples de ver que a pressão será:

$$\begin{aligned} \frac{P}{N} = & T^3 \left[\frac{1}{2\gamma g} \left(g_2 m_1^4 + g_1 m_2^4 + 2g m_1^2 m_2^2 \right) \right. \\ & \left. - \frac{m_2^3}{6\pi} - \frac{m_2}{\pi} \text{Li}_2(e^{-m_2}) - \frac{1}{\pi} \text{Li}_3(e^{-m_2}) \right]. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Figura 5.1 – Imagem à esquerda: gráfico de m_1^2 em função do acoplamento. m_1^2 , linha vermelha tracejada e m_2^2 na linha preta cheia. Imagem à direita: gráfico de m_1^2 em função do acoplamento.



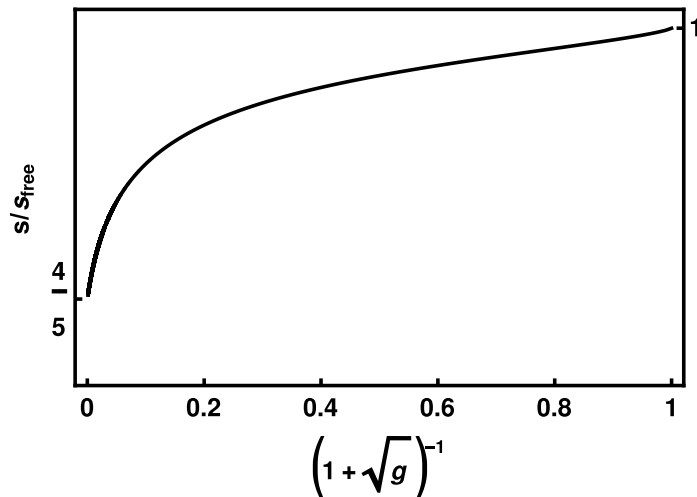
Fonte: Autoral (2021).

Fazendo o mesmo na equação (5.13), obtemos a densidade de entropia:

$$\frac{s}{N} = \frac{T^2}{2\pi} [3m_2 \text{Li}_2(e^{-m_2}) + 3\text{Li}_3(e^{-m_2}) - m_2 \ln(1 - e^{-m_2})], \quad (5.26)$$

que nos permite gerar a figura 5.2, a qual mostra explicitamente que a proporção entre as densidades de entropia em regime de acoplamento forte e acoplamento fraco é $s/s_{free} = 4/5$.

Figura 5.2 – Densidade de entropia, normalizada por s_{free} , para todos os valores de acoplamento no modelo com simetria $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{O}(N)$



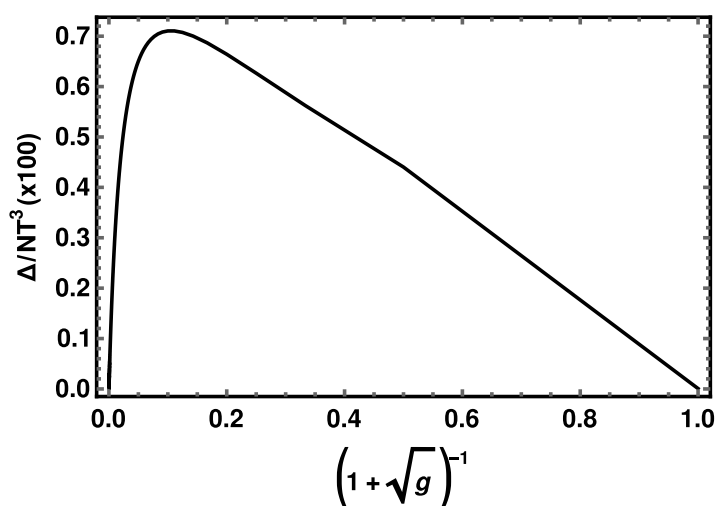
Fonte: Autoral (2021).

Utilizando a definição da medida de interação dada na equação (5.19), é simples obter:

$$\frac{\Delta}{T^3 N} = \frac{m_2^4}{2g_2} \quad (5.27)$$

A figura 5.3 ilustra o comportamento desta quantidade, confirmando que o modelo representa uma CFT nos limites de acoplamento fraco e forte, portanto o modelo $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{O}(N)$ é um exemplo possível de teoria conforme em temperatura finita que aceita quebra de simetria global.

Figura 5.3 – Medida de interação, normalizada por NT^3 , para todos valores de acoplamento no modelo com simetria $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{O}(N)$



Fonte: Autoral (2021).

Assim, neste capítulo concluímos que o resultado $s/s_{free} = 4/5$ obtido pela referência (ROMATSCHKE, 2019a) é universal para modelos escalares. Também verificamos que não há condições fisicamente aceitáveis onde o modelo $\mathcal{O}(N_1) \times \mathcal{O}(N_2)$ descreva uma CFT pura. Considerando o modelo $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{O}(N)$ proposto na referência (CHAI *et al.*, 2020), verificamos que a quebra de simetria $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{O}(N) \rightarrow \mathcal{O}(N)$ ocorre pela geração de massa térmica, sem alterar o comportamento da medida de interação nos limites de acoplamentos fortes e fraco.

6 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Neste trabalho estivemos principalmente interessados em estudar transições de fase em modelos escalares, em 1+1 dimensões e 2+1 dimensões. Primeiramente focamos no modelo $\lambda\phi^4$ em 1+1 dimensões com simetria \mathbb{Z}_2 , uma vez que o teorema de Coleman proíbe quebras de simetrias contínuas neste número de dimensões. Utilizando resultados perturbativos recentes disponíveis em N⁸LO pudemos testar e estabelecer a confiabilidade do método de ressonância conhecido como OPT. Tal aplicação forneceu valores para acoplamento crítico que estão em ótima concordância com o estado da arte do modelo. Implementando a ressonância na massa física, M , obtivemos soluções apenas para as ordens ímpares. Os resultados obtidos partem de $g_c = 3.760$ em primeira ordem até atingirem $g_c = 2.779$ em sétima ordem. Este resultado está em ótima concordância com o valor $g_c = 2.807(34)$, considerado o estado da arte, obtido para em oitava ordem através da ressonância de Borel na referência (SERONE *et al.*, 2018). Quando a OPT é aplicada na massa física ao quadrado, M^2 , os resultados aparecem nas ordens perturbativas pares, partindo de $g_c = 1.511$ na segunda ordem até atingir o valor $g_c = 2.373$ na oitava ordem. Isto nos permite concluir que a convergência da ressonância da massa física se dá de maneira muito mais eficiente do que aquela da massa física ao quadrado.

Tendo em vista recentes resultados (SBERVEGLIERI *et al.*, 2021), que apontam para uma possível segunda transição na versão tridimensional do modelo, analisamos o comportamento da ressonância da massa física ao quadrado na região supercrítica, $g > g_c$. Os resultados obtidos nos permitem concluir que, apesar da região supercrítica ser muitas vezes negligenciada, ela pode possuir informações que aceleram a convergência da ressonância de M^2 . A exploração desta região nos permitiu fazer uma extrapolação simples que nos forneceu o valor $g_c = 2.785$, que também está próximo ao valor obtido na referência (SERONE *et al.*, 2018).

Assim, mostramos que os resultados obtidos tanto pela ressonância de M quanto de M^2 estão em ótimo acordo com o que foi obtido em outros procedimentos de ressonância, como truncamento de hamiltoniana (RYCHKOV; VITALE, 2015; BAJNOK; LAJER, 2016; FITZPATRICK *et al.*, 2018b), produto de matrizes de estados uniformes (BOSETTI *et al.*, 2015) e métodos não perturbativos como Monte Carlo (MILSTED *et al.*, 2013; SCHAICH; LOINAZ, 2009), que prevêm um valor de acoplamento crítico entre 2.75 – 2.788. Como ficou evidenciado, os diagramas associados aos tadpoles, que são proporcionais a $\ln(\mu^2/m^2)$, desempenham um importante papel na ressonância realizada pela OPT. Enquanto na teoria perturbativa estes diagramas se anulam quando se escolhe $\mu = m$, na OPT estes termos se tornam $\ln[\mu^2/(m^2 + \eta^2)]$ e devem ser considerados.

Através da OPT também conseguimos obter valores para os expoentes críticos

na segunda ordem perturbativa (primeira ordem não trivial). Os resultados obtidos indicam uma ligeira melhora em relação aos obtidos por meio da MFA. Verificamos também que é possível obter, numericamente, valores próximos ao valor exato para um dos expoentes críticos.

Em seguida, interessados em transições quânticas em modelos escalares em duas dimensões espaço-temporais, voltamos nossa atenção para o grupo de simetria $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$. Neste caso estudamos se seria possível determinar condições nas quais o modelo respeite o teorema de Coleman. Utilizando a OPT verificamos que, sob determinadas condições (interação repulsiva e número de componentes em um dos setores maior que três), o caso $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$ não apresenta nenhuma quebra de simetria e portanto é fisicamente viável. Também concluímos que a escolha especial $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathbb{Z}_2$ pode ser considerada uma vez que haja uma interação repulsiva entre os dois diferentes setores. Neste caso o sistema apresenta uma quebra de simetria na forma $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathcal{O}(N)$. O caso trivial de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ também foi investigado. Como o teorema de Coleman não é aplicável neste caso, a interação entre os diferentes setores pode ser tanto repulsiva quanto atrativa.

No último capítulo, interessados na análise de teorias conformes, estudamos o modelo $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$ em três dimensões espaço-temporais no regime de temperaturas finitas e massas nulas. A fim de avaliar se seria possível estabelecer condições onde o modelo é uma CFT pura obtivemos quantidades termodinâmicas, tais como a pressão e a densidade de entropia, em todos os regimes de acoplamento. Concluímos que não há condições fisicamente aceitáveis para que o modelo $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$ seja uma CFT pura. Também verificamos que a densidade de entropia deste modelo em regimes de acoplamento forte é $s = 4/5s_{free}$, independente de escolhas particulares para N_χ e N_ϕ , mostrando que nos limites de acoplamentos forte e fracos o modelo é uma CFT. Analisando a densidade de entropia em acoplamentos fortes, notamos que ela sugere uma universalidade entre os modelos escalares para os resultados obtidos no modelo $\mathcal{O}(N)$ em três dimensões espaço-temporais estudado na referência (ROMATSCHKE, 2019a), que é um resultado similar aquele obtido através da dualidade calibre/gravidade no sistema $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills quadrimensional (GUBSER *et al.*, 1998).

Finalmente, motivados pela referência (CHAI *et al.*, 2020), investigamos a possível existência de uma teoria conforme com quebra de simetria global, $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{O}(N)$. Verificamos que, assim como proposto, este modelo apresenta uma quebra de simetria $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{O}(N) \rightarrow \mathcal{O}(N)$, porém a quebra não afeta a sua conformabilidade nos regimes de acoplamento forte e fraco.

Um passo futuro para a análise do modelo \mathbb{Z}_2 seria o estudo do caso de SSB, $m^2 < 0$, que dá origem a dualidade de Chang (CHANG; WRIGHT, 1975; CHANG, 1976), sob a perspectiva da OPT. Outro ponto de interesse é o cálculo analítico dos

expoentes críticos em ordens superiores a segunda.

No modelo $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{O}(N_\chi)$ em 1+1 dimensões ainda pode ser realizado o estudo de um caso onde um dos campos sofre uma SSB, isto é, um dos parâmetros de massa dos campos sejam negativos (por exemplo, $m_\phi^2 < 0$ e $m_\chi^2 > 0$). Isto pode levar em um resultado similar a já mencionada dualidade de Chang.

REFERÊNCIAS

'T HOOFT, G.; VELTMAN, M. Regularization and renormalization of gauge fields.

Nuclear Physics B, v. 44, p. 189–213, jun. 1972. DOI:

[https://doi.org/10.1016/0550-3213\(72\)90279-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(72)90279-9). Disponível em:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321372902799>.

AMELINO-CAMELIA, G.; PI, So-Young. Self-consistent improvement of the

finite-temperature effective potential. **Phys. Rev. D**, v. 47, p. 2356–2362, mar. 1993.

DOI: 10.1103/PhysRevD.47.2356. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.47.2356>.

ANAND, Nikhil; GENEST, Vincent X.; KATZ, Emanuel; KHANDKER, Zuhair U.;

WALTERS, Matthew T. RG flow from ϕ^4 theory to the 2D Ising model. **JHEP**, Springer Science e Business Media LLC, v. 08, 56(1)–56(57), ago. 2017. DOI:

10.1007/jhep08(2017)056. arXiv: 1704.04500. Disponível em:

[http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08\(2017\)056](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08(2017)056).

BAILIN, David; LOVE, Alexander. **Introduction to Gauge Field Theory**. Rev. ed.

Londres: IOP Publ. Ltd, 1993. (Graduate Student Series in Physics).

BAJNOK, Zoltan; LAJER, Marton. Truncated Hilbert space approach to the 2d ϕ^4 theory. **JHEP**, Springer Science e Business Media LLC, v. 10, 50(1)–50(50), out.

2016. DOI: 10.1007/jhep10(2016)050. arXiv: 1512.06901. Disponível em:

[http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10\(2016\)050](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10(2016)050).

BAKER, George A.; NICKEL, Bernie G.; MEIRON, Daniel I. Critical indices from

perturbation analysis of the Callan-Symanzik equation. **Phys. Rev. B**, v. 17,

p. 1365–1374, fev. 1978. DOI: 10.1103/PhysRevB.17.1365. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.17.1365>.

BANERJEE, N.; MALLIK, S. Critical temperature in a Higgs scalar field theory. **Phys.**

Rev. D, v. 43, p. 3368–3375, mai. 1991. DOI: 10.1103/PhysRevD.43.3368. Disponível

em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.43.3368>.

BANKS, Thomas. Lectures on Conformal Field Theory. *In*: RICHARD SLANSKY AND

GEOFFREY WEST (Ed.). **The Santa Fe TASI-87**. Singapura: World Scientific Publ.

Co. Pte. Ltd., 1988. P. 572–627.

BARDEEN, William A.; BURAS, A. J.; DUKE, D. W.; MUTA, T. Deep-inelastic scattering beyond the leading order in asymptotically free gauge theories. **Phys. Rev. D**, v. 18, p. 3998–4017, dez. 1978. DOI: 10.1103/PhysRevD.18.3998. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.18.3998>.

BEEKMAN, Aron; RADEMAKER, Louk; VAN WEZEL, Jasper. An introduction to spontaneous symmetry breaking. **SciPost Phys. Lect. Notes**, dez. 2019. DOI: 10.21468/scipostphyslectnotes.11. arXiv: 1909.01820. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.21468/SciPostPhysLectNotes.11>.

BELAVIN, A.A.; POLYAKOV, A.M.; ZAMOLODCHIKOV, A.B. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. **Nuc. Phys. B**, v. 241, p. 333–380, 1984. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(84\)90052-X](https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90052-X). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032138490052X>.

BELLET, B.; GARCIA, P.; NEVEU, A. CONVERGENT SEQUENCES OF PERTURBATIVE APPROXIMATIONS FOR THE ANHARMONIC OSCILLATOR I: HARMONIC APPROACH. **Int. Jour. of Mod. Phys. A**, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 11, n. 31, p. 5587–5606, dez. 1996a. DOI: 10.1142/S0217751X9600256X. arXiv: hep-th/95007155. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X9600256X>.

BELLET, B.; GARCIA, P.; NEVEU, A. CONVERGENT SEQUENCES OF PERTURBATIVE APPROXIMATIONS FOR THE ANHARMONIC OSCILLATOR II: COMPACT TIME APPROACH. **Int. Jour. of Mod. Phys. A**, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 11, n. 31, p. 5607–5622, dez. 1996b. DOI: 10.1142/S0217751X96002571. arXiv: hep-th/95007156. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X96002571>.

BETHE, H. A. The Electromagnetic Shift of Energy Levels. **Phys. Rev.**, v. 72, p. 339–341, ago. 1947. DOI: 10.1103/PhysRev.72.339. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.72.339>.

BOLLINI, C. G.; GIAMBIAGI, J. J. Dimensional regularization in configuration space. **Phys. Rev. D**, v. 53, p. 5761–5764, mai. 1996. DOI: 10.1103/PhysRevD.53.5761. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.53.5761>.

BOSETTI, Paolo; DE PALMA, Barbara; GUAGNELLI, Marco. Monte Carlo determination of the critical coupling in ϕ_2^4 theory. **Phys. Rev. D**, v. 92, 034509(1)–034509(6), ago. 2015. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.034509. arXiv:

1506.08587. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.034509>.

BRAATEN, Eric; NIETO, Agustin. Effective field theory approach to high-temperature thermodynamics. **Phys. Rev. D**, v. 51, p. 6990–7006, jun. 1995. DOI:

10.1103/physrevd.51.6990. arXiv: hep-ph/9501375. Disponível em:

<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.51.6990>.

BRONZIN, Simone; DE PALMA, Barbara; GUAGNELLI, Marco. New Monte Carlo determination of the critical coupling in ϕ_2^4 theory. **Phys. Rev. D**, v. 99,

034508(1)–034508(5), fev. 2019. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.034508. arXiv:

1807.03381. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.99.034508>.

BURKARDT, Matthias; CHABYSHEVA, Sophia S.; HILLER, John R. Two-dimensional light-front ϕ^4 theory in a symmetric polynomial basis. **Phys. Rev. D**, American

Physical Society, v. 94, 065006(1)–065006(11), 2016. DOI:

10.1103/PhysRevD.94.065006. arXiv: 1607.00026. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.065006>.

CALABRESE, Pasquale; PELISSETTO, Andrea; VICARI, Ettore. Multicritical phenomena in $O(n_1) \oplus O(n_2)$ -symmetric theories. **Phys. Rev. B**, v. 67,

054505(1)–054505(12), fev. 2003. DOI: 10.1103/PhysRevB.67.054505. arXiv:

cond-mat/0209580. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.67.054505>.

CALDAS, Heron; KNEUR, Jean-Loïc; PINTO, Marcus Benghi; RAMOS, Rudnei O.

Critical dopant concentration in polyacetylene and phase diagram from a continuous four-Fermi model. **Phys. Rev. B**, v. 77, 205109(1)–205109(10), mai. 2008. DOI:

10.1103/physrevb.77.205109. arXiv: 0804.2675. Disponível em:

<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.77.205109>.

CALDAS, P. S. S.; FLEMING, H.; LOPEZ GARCIA, R. How to Compute Effective Potentials. **Rev. Bras. Fis.**, v. 7, p. 43–53, nov. 1977. Disponível em:

sbfisica.org.br/bjp/download/v07/v07a05.pdf.

CALLAN, Curtis G. Broken Scale Invariance in Scalar Field Theory. **Phys. Rev. D**, v. 2, p. 1541–1547, out. 1970. DOI: 10.1103/PhysRevD.2.1541. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.2.1541>.

- CARDY, John. **Conformal Field Theory and Statistical Mechanics**. [S.l.: s.n.], ago. 2008. [Aulas ministradas nas escola de verão de métodos exatos em Física estatística em baixas dimensões e computação quântica em les Houches.] arXiv: 0807.3472 [cond-mat.stat-mech].
- CASTELLANOS, Elías; ESCAMILLA-RIVERA, Celia; MACÍAS, Alfredo; NÚÑEZ, Darío. Scalar field as a Bose-Einstein condensate? **Jour. of Cosm. and Astropart. Phys.**, v. 2014, p. 034–034, set. 2014. DOI: 10.1088/1475-7516/2014/11/034. arXiv: 1310.3319. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2014/11/034>.
- CHABYSHEVA, Sophia S.; HILLER, John R. Transitioning from equal-time to light-front quantization in ϕ_2^4 theory. **Phys. Rev. D**, v. 102, 116010(1)–116010(14), dez. 2020. DOI: 10.1103/physrevd.102.116010. arXiv: 1811.01685. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.102.116010>.
- CHAI, Noam; CHAUDHURI, Soumyadeep; CHOI, Changha; KOMARGODSKI, Zohar; RABINOVICI, Eliezer; SMOLKIN, Michael. Thermal Order in Conformal Theories. **Phys. Rev. D**, v. 102, 065014(1)–065014(30), 2020. DOI: 10.1103/PhysRevD.102.065014. arXiv: 2005.03676 [hep-th].
- CHAMATI, H.; TONCHEV, N. S. Quantum critical scaling and the Gross-Neveu model in 2+1 dimensions. **EPL**, v. 95, 40005(1)–40005(6), ago. 2011. DOI: 10.1209/0295-5075/95/40005. arXiv: 1112.4853. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1209/0295-5075/95/40005>.
- CHANG, Shau-Jin. Existence of a second-order phase transition in a two-dimensional ϕ^4 field theory. **Phys. Rev. D**, v. 13, p. 2778–2788, mai. 1976. [Errata: Phys. Rev. D 16, 1979 (1977)]. DOI: 10.1103/PhysRevD.13.2778. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.13.2778>.
- CHANG, Shau-Jin; WRIGHT, Jon A. Quantum fluctuations in a ϕ^4 field theory. II. One-mode approximation. **Phys. Rev. D**, v. 12, p. 1595–1605, set. 1975. DOI: 10.1103/PhysRevD.12.1595. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.12.1595>.
- CHENG, Ta-Pei; LI, Ling-Fong. **Gauge theory of elementary particle physics**. Oxford: Clarendon Press, 1982.

CHRISTIANSON, R. J.; LEHENY, R. L.; BIRGENEAU, R. J.; ERWIN, R. W. Critical dynamics of a spin-5/2 two-dimensional isotropic antiferromagnet. **Phys. Rev. B**, v. 63, 140401(1)–140401(4), mar. 2001. DOI: 10.1103/PhysRevB.63.140401. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.63.140401>.

COLEMAN, Sidney; WEINBERG, Erick. Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking. **Phys. Rev. D**, v. 7, p. 1888–1910, mar. 1973. DOI: 10.1103/PhysRevD.7.1888. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.7.1888>.

COLEMAN, Sidney R. There are no Goldstone bosons in two-dimensions. **Commun. Math. Phys.**, v. 31, p. 259–264, dez. 1973. DOI: 10.1007/BF01646487.

COLLINS, Jhon C. **Renormalization**. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.

CORLESS, Robert M; GONNET, Gaston H; HARE, David EG; JEFFREY, David J; KNUTH, Donald E. On the Lambert W function. **Adv. in Comput. Math.**, v. 5, p. 329–359, dez. 1996. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02124750>.

COWLEY, R. A.; AHARONY, A; BIRGENEAU, R. J.; PELCOVITS, R. A.; SHIRANE, G.; THURSTON, T. R. The bicritical phase diagram of two-dimensional antiferromagnets with and without random fields. **Zeits. für Phys. B Cond. Matter**, v. 93, p. 5–19, mar. 1993. DOI: 10.1007/BF01308802. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01308802>.

CURIE, Pierre. Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique. **J. Phys. Theor. Appl.**, v. 3, p. 393–415, set. 1894. DOI: 10.1051/jphystap:018940030039300. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00239814>.

DE GROOT, H.J.M.; DE JONGH, L.J. Phase diagrams of weakly anisotropic Heisenberg antiferromagnets, nonlinear excitations (solitons) and random-field effects. **Physica B+C**, v. 141, p. 1–36, jun. 1986. DOI: [https://doi.org/10.1016/0378-4363\(86\)90346-3](https://doi.org/10.1016/0378-4363(86)90346-3). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0378436386903463>.

DE JONGH, L.J.; DE GROOT, H.J.M. Phase diagrams of weakly anisotropic Heisenberg antiferromagnets: II. Quasi 2-dimensional systems. **Sol. State Commun.**, v. 53, p. 737–741, mar. 1985. DOI:

[https://doi.org/10.1016/0038-1098\(85\)90210-8](https://doi.org/10.1016/0038-1098(85)90210-8). Disponível em:
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0038109885902108>.

DEWOLFE, Oliver; ROMATSCHKE, Paul. Strong coupling universality at large N for pure CFT thermodynamics in $2+1$ dimensions. **JHEP**, v. 10, 727(1)–272(10), out. 2019. DOI: 10.1007/jhep10(2019)272. arXiv: 1905.06355. Disponível em:
[http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10\(2019\)272](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10(2019)272).

DITTRICH, W. **On Riemann's Paper, "On the Number of Primes Less Than a Given Magnitude"**. [S.l.: s.n.], 2017. arXiv: 1609.02301 [math.HO].

DRESDEN, Max. Kramers: The Unexpected End of the First Phase. *In*: LAURIE M. BROWN (Ed.). **Renormalization From Lorentz to Landau (and Beyond)**. Nova York: Springer-Verlag New York Inc., 1993. [O trabalho de Kramers foi primeiramente apresentado em 1947 na conferência de Shelter Island e repetido em 1948 na conferência de Solvay.] P. 37–55.

DUNCAN, A; JONES, HF. Interpolating lagrangians and $U(1)$ gauge theory on the lattice. **Nuc. Phys. B**, v. 320, p. 189–201, jun. 1989. DOI:
10.1016/0550-3213(89)90216-2.

DUNCAN, Anthony; MOSHE, Moshe. Nonperturbative physics from interpolating actions. **Phys. Lett. B**, v. 215, p. 352–358, dez. 1988. DOI:
[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(88\)91447-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(88)91447-5). Disponível em:
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269388914475>.

DYSON, F. J. The Radiation Theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman. **Phys. Rev.**, v. 75, p. 486–502, fev. 1949. DOI: 10.1103/PhysRev.75.486. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.75.486>.

EICHHORN, Astrid; MESTERHÁZY, David; SCHERER, Michael. Multicritical behavior in models with two competing order parameters. **Phys. Rev. E**, v. 88, 042141(1)–042141(14), out. 2013. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.042141.

ELIAS-MIRÓ, Joan; RYCHKOV, Slava; VITALE, Lorenzo G. High-precision calculations in strongly coupled quantum field theory with next-to-leading-order renormalized Hamiltonian Truncation. **JHEP**, Springer Science e Business Media LLC, v. 10, 213(1)–213(13), out. 2017a. DOI: 10.1007/jhep10(2017)213. arXiv: 1706.06121. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10\(2017\)213](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP10(2017)213).

ELIAS-MIRÓ, Joan; RYCHKOV, Slava; VITALE, Lorenzo G. NLO renormalization in the Hamiltonian truncation. **Phys. Rev. D**, v. 96, 065024(1)–065024(43), 2017b. DOI: 10.1103/physrevd.96.065024. arXiv: 1706.09929. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.96.065024>.

FERRONI, Lorenzo; KOCH, Volker; PINTO, Marcus B. Multiple critical points in effective quark models. **Phys. Rev. C**, v. 82, 055205(1)–055205(19), nov. 2010. DOI: 10.1103/physrevc.82.055205. arXiv: 1007.4721. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.82.055205>.

FEYNMAN, Richard P; KLEINERT, Hagen. Effective classical partition functions. **Phys. Rev. A**, v. 34, p. 5080–5084, dez. 1986. DOI: 10.1103/PhysRevA.34.5080.

FEYNMAN, Richard P. A Relativistic Cut-Off for Classical Electrodynamics. **Phys. Rev.**, v. 74, p. 939–946, out. 1948a. DOI: 10.1103/PhysRev.74.939. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.74.939>.

FEYNMAN, Richard P. Relativistic Cut-Off for Quantum Electrodynamics. **Phys. Rev.**, v. 74, p. 1430–1438, nov. 1948b. DOI: 10.1103/PhysRev.74.1430. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.74.1430>.

FEYNMAN, Richard P. Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics. **Rev. Mod. Phys.**, v. 20, p. 367–387, abr. 1948c. DOI: 10.1103/RevModPhys.20.367. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.20.367>.

FEYNMAN, Richard P.; HIBBS, Albert R. **Quantum Mechanics and Path Integrals**. Emen. ed. Mineola: Dover Publ., 2010.

FITZPATRICK, A. Liam; KAPLAN, Jared; KATZ, Emanuel; VITALE, Lorenzo G.; WALTERS, Matthew T. Lightcone effective Hamiltonians and RG flows. **JHEP**, v. 08, 120(1)–120(52), set. 2018a. DOI: 10.1007/jhep08(2018)120. arXiv: 1803.10793. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08\(2018\)120](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08(2018)120).

FITZPATRICK, A. Liam; KATZ, Emanuel; WALTERS, Matthew T. **Nonperturbative Matching Between Equal-Time and Lightcone Quantization**. [*S.l.: s.n.*], 2018b. arXiv: 1812.08177 [hep-th].

- GANDHI, Sunil K.; JONES, H. F.; PINTO, Marcus B. The δ -expansion in the large-N limit. **Nuc. Phys. B**, v. 359, p. 429–440, ago. 1991. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(91\)90067-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(91)90067-8). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321391900678>.
- GINSPARG, Paul. **Applied Conformal Field Theory**. [S.l.: s.n.], ago. 1988. [Aulas ministradas nas escola de verão em les Houches.] arXiv: hep-th/9108028 [hep-th].
- GOLDSTONE, Jeffrey; SALAM, Abdus; WEINBERG, Steven. Broken Symmetries. **Phys. Rev.**, v. 127, p. 965–970, ago. 1962. DOI: 10.1103/PhysRev.127.965. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.127.965>.
- GRABOWSKI, Marek P. The Effective potential and symmetry breaking in the $O(N) \times O(N)$ model. **Z. Phys. C**, v. 48, p. 505–510, set. 1990. DOI: 10.1007/BF01572032.
- GROSS, David J.; WILCZEK, Frank. Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories. **Phys. Rev. Lett.**, v. 30, p. 1343–1346, jun. 1973. DOI: 10.1103/PhysRevLett.30.1343. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1343>.
- GUBSER, Steven S.; KLEBANOV, Igor R.; TSEYTLIN, Arkady A. Coupling constant dependence in the thermodynamics of $N = 4$ supersymmetric Yang-Mills theory. **Nuc. Phys. B**, v. 534, p. 202–222, nov. 1998. DOI: 10.1016/S0550-3213(98)00514-8. arXiv: hep-ph/9805156. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213\(98\)00514-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213(98)00514-8).
- GUIDA, R; ZINN-JUSTIN, J. Critical exponents of the N -vector model. **J. of Phys. A: Math. and Gen.**, v. 31, p. 8103–8121, out. 1998. DOI: 10.1088/0305-4470/31/40/006. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/31/40/006>.
- GUIDA, Riccardo; KONISHI, Kenichi; SUZUKI, Hiroshi. Improved Convergence Proof of the Delta Expansion and Order Dependent Mappings. **Ann. of Phys.**, Elsevier BV, v. 249, p. 109–145, jul. 1996. DOI: 10.1006/aphy.1996.0066. arXiv: hep-th/9505084. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1006/aphy.1996.0066>.
- HABER, Howard E.; WELDON, H.Arthur. On the Relativistic Bose-einstein Integrals. **J. Math. Phys.**, v. 23, p. 1852–1858, out. 1982. DOI: 10.1063/1.525239. eprint: <https://doi.org/10.1063/1.525239>.

HEYMANS, Gustavo O.; PINTO, Marcus B. Critical behavior of the 2d scalar theory: resumming the N⁸LO perturbative mass gap. **JHEP**, v. 07, 163(1)–163(15), jul. 2021. DOI: 10.1007/JHEP07(2021)163. arXiv: 2103.00354 [hep-th].

HIGGS, Peter W. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. Edição: J. C. Taylor. **Phys. Rev. Lett.**, v. 13, p. 508–509, 1964a. DOI: 10.1103/PhysRevLett.13.508.

HIGGS, Peter W. Broken symmetries, massless particles and gauge fields. **Phys. Rev. Lett.**, v. 12, p. 132–133, 1964b. DOI: 10.1016/0031-9163(64)91136-9.

ISING, Ernst. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. **Z. Physik**, v. 31, p. 253–258, fev. 1925. DOI: 10.1007/BF02980577. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02980577>.

ITZYKSON, Claude; ZUBER, Jean-Beernard. **Quantum Field theory**. Nova York: McGraw-Hill Int. Book Comp., 1980. (International series in pure and applied physics).

JIN, An; CHANG-DE, Gong; HAI-QING, Lin. Competition Between Two Ordering Processes in Two-Dimensional Doped Antiferromagnets. **Chin. Phys. Lett.**, v. 18, n. 3, p. 419–421, fev. 2001. DOI: 10.1088/0256-307x/18/3/337. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0256-307x/18/3/337>.

JONA, Franco; SHIRANE, G. **Ferroelectric Crystals**. Oxford: Pergamon Press, 1962. (Monographs in Solid State Physics).

JONGH, L. J. de; REGNAULT, L. P.; ROSSATMIGNOD, J.; HENRY, J. Y. Field dependent neutron scattering study of the quasi 2D Heisenberg antiferromagnet K₂MnF₄. **Jour. of Appl. Phys.**, v. 53, p. 7963–7965, nov. 1982. DOI: 10.1063/1.330242. eprint: <https://doi.org/10.1063/1.330242>. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.330242>.

KADOH, Daisuke; KURAMASHI, Yoshinobu; NAKAMURA, Yoshifumi; SAKAI, Ryo; TAKEDA, Shinji; YOSHIMURA, Yusuke. Tensor network analysis of critical coupling in two dimensional ϕ^4 theory. **JHEP**, v. 05, 184(1)–184(21), mai. 2019. DOI: 10.1007/jhep05(2019)184. arXiv: 1811.12376. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP05\(2019\)184](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP05(2019)184).

KAPUSTA, Joseph I. **Finite-Temperature Field Theory**. Cambridge: Cambridge Uni. Press, 1989. (Cambridge monographs on mathematical physics).

KARSCH, F.; PATKÓS, A.; PETRECZKY, P. Screened perturbation theory. **Phys. Lett. B**, v. 401, p. 69–73, mai. 1997. DOI:

[https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(97\)00392-4](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(97)00392-4). arXiv: hep-ph/9702376.

Disponível em:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269397003924>.

KLEINERT, Hagen; PELSTER, Axel; KASTENING, Boris; BACHMANN, Michael. Recursive graphical construction of Feynman diagrams and their multiplicities in ϕ^4 and ϕ^2A theory. **Phys. Rev. E**, v. 62, p. 1537–1559, ago. 2000. DOI:

10.1103/PhysRevE.62.1537. arXiv: hep-th/9907168v1. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.62.1537>.

KLEINERT, Hagen; SCHULTE-FROHLINDE, Verena. **Critical Properties of ϕ^4 -Theories**. Londres: World Scientific Publ. Comp., 2001.

KLIMENKO, K.G. $1/N$ expansion in the $O(N) \times O(N)$ scalar theory and the problem of symmetry restoration at high temperature. **Theor. Math. Phys.**, v. 80, p. 929–935, jun. 1989. DOI: 10.1007/BF01016185.

KNEUR, Jean-Loïc; NEVEU, André. α_S from F_π and renormalization group optimized perturbation theory. **Phys. Rev. D**, v. 88, 074025(1)–074025(29), out. 2013. DOI:

10.1103/PhysRevD.88.074025. arXiv: 1305.6910. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.88.074025>.

KNEUR, Jean-Loïc; NEVEU, André. Renormalization group improved optimized perturbation theory: Revisiting the mass gap of the $O(2N)$ Gross-Neveu model. **Phys. Rev. D**, v. 81, 125012(1)–125012(13), jun. 2010. DOI: 10.1103/PhysRevD.81.125012. arXiv: 1004.4834. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.125012>.

KNEUR, Jean-Loïc; NEVEU, André; PINTO, Marcus B. Improved optimization of perturbation theory: Applications to the oscillator energy levels and Bose-Einstein condensate critical temperature. **Phys. Rev. A**, v. 69, 053624(1)–053624(8), mai. 2004. DOI: 10.1103/physreva.69.053624. arXiv: cond-mat/0401324. Disponível em:

<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.69.053624>.

KNEUR, Jean-Loïc; PINTO, Marcus B.; RAMOS, Rudnei O. Convergent Resummed LinearExpansion in the CriticalO(N)(i2)3d2Model. **Phys. Rev. Lett.**, v. 89, n. 21, nov. 2002. DOI: 10.1103/physrevlett.89.210403. arXiv: cond-mat/0207089. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.210403>.

KNEUR, Jean-Loïc; PINTO, Marcus Benghi; RAMOS, Rudnei O. Phase diagram of the magnetized planar Gross-Neveu model beyond the large-N approximation. **Phys. Rev. D**, v. 88, 045005(1)–045005(18), ago. 2013. DOI: 10.1103/physrevd.88.045005. arXiv: 1306.2933. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.88.045005>.

KNEUR, Jean-Loïc; PINTO, Marcus Benghi; RESTREPO, Tulio E. **QCD pressure: renormalization group optimized perturbation theory confronts lattice**. [*S.l.: s.n.*], 2021a. arXiv: 2101.02124 [hep-ph].

KNEUR, Jean-Loïc; PINTO, Marcus Benghi; RESTREPO, Tulio E. **Renormalization group improved pressure for hot and dense quark matter**. [*S.l.: s.n.*], 2021b. arXiv: 2101.08240 [hep-ph].

KNEUR, Jean-Loïc; PINTO, Marcus Benghi; RESTREPO, Tulio Eduardo. Renormalization group improved pressure for cold and dense QCD. **Phys. Rev. D**, v. 100, 114006(1)–114006(13), dez. 2019. DOI: 10.1103/physrevd.100.114006. arXiv: 1908.08363. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.100.114006>.

KOBA, Ziro; TOMONAGA, Shin'ichiro. On Radiation Reactions in Collision Processes. I: Application of the Self-Consistent Subtraction Method to the Elastic Scattering of an Electron*. **Progr. of Theo. Phys.**, v. 3, p. 290–303, set. 1948. DOI: 10.1143/ptp/3.3.290. eprint: <https://academic.oup.com/ptp/article-pdf/3/3/290/5286283/3-3-290.pdf>. Disponível em: <https://doi.org/10.1143/ptp/3.3.290>.

LAINE, Mikko; VUORINEN, Aleks. Basics of Thermal Field Theory. **Lect. Notes in Phys.**, p. 1–290, 2016. DOI: 10.1007/978-3-319-31933-9. arXiv: 1701.01554. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-31933-9>.

LANDAU, L. D. On the theory of phase transitions. I. **Zh. Eksp. Teor. Fiz.**, v. 7, p. 19–32, 1937.

LE BELLAC, Michel. **Thermal Field Theory**. Oxford: Oxford Univ. Press, 1991. (Oxford Science Publications).

LE GUILLOU, J. C.; ZINN-JUSTIN, J. Critical exponents from field theory. **Phys. Rev. B**, v. 21, p. 3976–3998, mai. 1980. DOI: 10.1103/PhysRevB.21.3976. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.21.3976>.

LEONE, Raphaël. **On the wonderfulness of Noether's theorems, 100 years later, and Routh reduction**. [S.l.: s.n.], abr. 2018. arXiv: 1804.01714.

LINDE, Andrei. Hybrid inflation. **Phys. Rev. D**, v. 49, p. 748–754, jan. 1994. DOI: 10.1103/PhysRevD.49.748. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.49.748>.

LINDE, Andrei. **Particle Physics and Inflationary Cosmology**. 1st. Boca Raton: CRC Press, LLC, 1990. arXiv: hep-th/0503203.

MERMIN, N.D.; WAGNER, H. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one-dimensional or two-dimensional isotropic Heisenberg models. **Phys. Rev. Lett.**, v. 17, p. 1133–1136, nov. 1966. [Errata: Phys. Rev. Lett. 17, 1307 (1966)]. DOI: 10.1103/PhysRevLett.17.1133.

MILSTED, Ashley; HAEGEMAN, Jutho; OSBORNE, Tobias J. Matrix product states and variational methods applied to critical quantum field theory. **Phys. Rev. D**, v. 88, 085030(1)–085030(23), out. 2013. DOI: 10.1103/PhysRevD.88.085030. arXiv: 1302.5582. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.88.085030>.

NĂSTASE, H. **Classical field theory**. Cambridge: Cambridge Uni. Press, 2019. cap. 6, p. 54–64. DOI: 10.1017/9781108569392.010.

NOETHER, E. Invariante Variationsprobleme. ger. **Nach. von der Gesell. der Wissens. zu Göttingen, Math.-Physik. Klasse**, v. 1918, p. 235–257, jul. 1918. Disponível em: <http://eudml.org/doc/59024>.

OKOPIŃSKA, Anna. Nonstandard expansion techniques for the effective potential in $\lambda\phi^4$ quantum field theory. **Phys. Rev. D**, v. 35, p. 1835–1847, mar. 1987. DOI: 10.1103/PhysRevD.35.1835. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.35.1835>.

ONSAGER, Lars. Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition. **Phys. Rev.**, v. 65, p. 117–149, fev. 1944. DOI: 10.1103/PhysRev.65.117. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.65.117>.

PARISI, Giorgio. **Statistical Field Theory**. Nova York: Addison-Wesley Publ. Comp., 1988. (Frontiers in Physics).

PARREIRA, Júlia E; PINTO, Marcus Benghi; RAMOS, Rudnei O. Phase transition patterns in relativistic and nonrelativistic multi-scalar-field models. **Phys. Rev. D**, v. 71, 123519(1)–123519(14), jun. 2005. DOI: 10.1103/PhysRevD.71.123519. arXiv: hep-th/0506131. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.71.123519>.

PARREIRA, Júlia Esteves. **Análise dos efeitos da temperatura nos acoplamentos de modelos escalares $O(N) \times O(N)$** . Mar. 2005. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.

PARWANI, Rajesh R. Resummation in a hot scalar field theory. **Phys. Rev. D**, v. 45, p. 4695–4705, jun. 1992. [Errata: Phys. Rev. D 48, 5965 (1993)]. DOI: 10.1103/PhysRevD.45.4695. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.45.4695>.

PELISSETTO, Andrea; VICARI, Ettore. Critical mass renormalization in renormalized ϕ^4 theories in two and three dimensions. **Phys. Lett. B**, v. 751, p. 532–534, nov. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2015.11.015>. arXiv: 1508.00989. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026931500862X>.

PELISSETTO, Andrea; VICARI, Ettore. Multicritical behavior of two-dimensional anisotropic antiferromagnets in a magnetic field. **Phys. Rev. B**, v. 76, 024436(1)–024436(9), jul. 2007. DOI: 10.1103/PhysRevB.76.024436. arXiv: cond-mat/702273. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.76.024436>.

PESKIN, Michael E.; SCHROEDER, Daniel V. **An Introduction to Quantum Field Theory**. Nova York: Addison-Wesley Publ. Comp., 1995. (Advanced Book Program).

PETERSEN, Jens Lyng. **Notes on Conformal Field Theory**. [S.l.: s.n.], ago. 2019. Disponível em: <https://nbi.ku.dk/bibliotek/noter-og-undervisningsmateriale-i-fysik/notes-on-conformal-field-theory/>.

PINTO, Marcus B.; RAMOS, Rudnei O. High temperature resummation in the linear δ expansion. **Phys. Rev. D**, v. 60, 105005(1)–105005(8), out. 1999. DOI: 10.1103/physrevd.60.105005. arXiv: hep-ph/9903353. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.60.105005>.

PINTO, Marcus B.; RAMOS, Rudnei O.; SENA, Paulo J. Evaluating critical exponents in the optimized perturbation theory. **Phys. A: Stat. Mech. and its Applic.**, v. 342, p. 570–582, nov. 2004. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.05.042>. arXiv: cond-mat/0410056. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0378437104006880>.

PINTO, Marcus Benghi. Three-dimensional Yukawa models and CFTs at strong and weak couplings. **Phys. Rev. D**, v. 102, set. 2020. DOI: 10.1103/physrevd.102.065005. arXiv: 2007.03784. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.102.065005>.

POLITZER, H. David. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? **Phys. Rev. Lett.**, v. 30, p. 1346–1349, jun. 1973. DOI: 10.1103/PhysRevLett.30.1346. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1346>.

RAMOND, Pierre. **Field Theory: A Modern Primer**. Reading: Benjamin-Cummings Publ. Co., Subs. of Addison Wesley Longman, US, 1981. (A Lecture Note and Reprint Series).

RAUH, H; ERKELENS, W A C; REGNAULT, L P; ROSSAT-MIGNOD, J; KULLMAN, W; GEICK, R. Magnetic phase diagram of Rb₂MnCl₄, a quasi-two-dimensional uniaxial antiferromagnet. **Jour. of Phys. C: Sol. State Phys.**, v. 19, p. 4503–4510, ago. 1986. DOI: 10.1088/0022-3719/19/23/013. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0022-3719/19/23/013>.

RESTREPO, Tulio E.; MACIAS, Juan Camilo; PINTO, Marcus Benghi; FERRARI, Gabriel N. Dynamical generation of a repulsive vector contribution to the quark pressure. **Phys. Rev. D**, v. 91, 065017(1)–065017(16), mar. 2015. DOI: 10.1103/physrevd.91.065017. arXiv: 1412.3074. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.91.065017>.

ROMATSCHKE, Paul. Finite-Temperature Conformal Field Theory Results for All Couplings: $O(N)$ Model in 2+1 Dimensions. **Phys. Rev. Lett.**, v. 122, 231603(1)–231603(5), jun. 2019a. [Errata: Phys.Rev.Lett. 123, 209901 (2019)]. DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.231603. arXiv: 1904.09995 [hep-th].

ROMATSCHKE, Paul. Simple non-perturbative resummation schemes beyond mean-field: case study for scalar ϕ^4 theory in 1+1 dimensions. **JHEP**, v. 03, 149(1)–149(16), mar. 2019b. DOI: 10.1007/jhep03(2019)149. arXiv: 1901.05483. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03\(2019\)149](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03(2019)149).

RYCHKOV, Slava; VITALE, Lorenzo G. Hamiltonian truncation study of the ϕ^4 theory in two dimensions. **Phys. Rev. D**, v. 91, 085011(1)–085011(26), abr. 2015. DOI: 10.1103/physrevd.91.085011. arXiv: 1412.3460. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.91.085011>.

RYCHKOV, Slava; VITALE, Lorenzo G. Hamiltonian truncation study of the ϕ^4 theory in two dimensions. II. The Z_2 -broken phase and the Chang duality. **Phys. Rev. D**, v. 93, 065014(1)–065014(16), mar. 2016. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.065014. arXiv: 1512.00493. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.065014>.

SBERVEGLIERI, Giacomo; SERONE, Marco; SPADA, Gabriele. Renormalization scheme dependence, RG flow, and Borel summability in ϕ^4 theories in $d < 4$. **Phys. Rev. D**, v. 100, 045008(1)–045008(14), ago. 2019. DOI: 10.1103/physrevd.100.045008. arXiv: 1905.02122. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.100.045008>.

SBERVEGLIERI, Giacomo; SERONE, Marco; SPADA, Gabriele. Self-Dualities and Renormalization Dependence of the Phase Diagram in 3d $O(N)$ Vector Models. **JHEP**, v. 02, 98(1)–98(38), fev. 2021. DOI: 10.1007/JHEP02(2021)098. arXiv: 2010.09737 [hep-th].

SCHAICH, David; LOINAZ, Will. Improved lattice measurement of the critical coupling in ϕ_2^4 theory. **Phys. Rev. D**, v. 79, 056008(1)–056008(6), mar. 2009. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.056008. arXiv: 0902.0045. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.056008>.

SCHUPPER, Nurith; SHNERB, Nadav M. Inverse melting and inverse freezing: A spin model. **Phys. Rev. E**, v. 72, 046107(1)–046107(16), out. 2005. DOI:

10.1103/PhysRevE.72.046107. arXiv: cond-mat/0502033. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.72.046107>.

SCHWINGER, Julian. On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron. **Phys. Rev.**, v. 73, p. 416–417, fev. 1948a. DOI: 10.1103/PhysRev.73.416. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.73.416>.

SCHWINGER, Julian. Quantum Electrodynamics. I. A Covariant Formulation. **Phys. Rev.**, v. 74, p. 1439–1461, nov. 1948b. DOI: 10.1103/PhysRev.74.1439. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.74.1439>.

SCHWINGER, Julian. Quantum Electrodynamics. II. Vacuum Polarization and Self-Energy. **Phys. Rev.**, v. 75, p. 651–679, fev. 1949a. DOI: 10.1103/PhysRev.75.651. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.75.651>.

SCHWINGER, Julian. Quantum Electrodynamics. III. The Electromagnetic Properties of the Electron—Radiative Corrections to Scattering. **Phys. Rev.**, v. 76, p. 790–817, set. 1949b. DOI: 10.1103/PhysRev.76.790. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.76.790>.

SERONE, Marco; SPADA, Gabriele; VILLADORO, Giovanni. $\lambda\phi^4$ theory -Part II. the broken phase beyond NNNN(NNNN)LO. **JHEP**, v. 05, 47(1)–47(35), mai. 2019. DOI: 10.1007/JHEP05(2019)047. arXiv: 1901.05023 [hep-th].

SERONE, Marco; SPADA, Gabriele; VILLADORO, Giovanni. $\lambda\phi^4$ Theory I: The Symmetric Phase Beyond NNNNNNNNLO. **JHEP**, v. 08, 148(1)–148(35), ago. 2018. DOI: 10.1007/JHEP08(2018)148. arXiv: 1805.05882 [hep-th]. Disponível em:
[http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08\(2018\)148](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08(2018)148).

EL-SHOWK, Sheer; PAULO, Miguel F.; POLAND, David; RYCHKOV, Slava; SIMMONS-DUFFIN, David; VICHI, Alessandro. Solving the 3d Ising Model with the Conformal Bootstrap II. c-Minimization and Precise Critical Exponents. **J. of Stat. Phys.**, v. 157, p. 869–914, jun. 2014. DOI: 10.1007/s10955-014-1042-7. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s10955-014-1042-7>.

SHUBNIKOV, A. V. On the works of Pierre Currie on symmetry. In: I. HARGITTAI, B. K. VAINSHTEIN (Ed.). **Crystal Symmetries: Shubnikov Centennial Papers**. Oxford:

Elsevier B.V, Pergamon Press, 1989. (Modern Applied Mathematics and Computer Science). P. 357–364.

SIMON, Barry; GRIFFITHS, Robert B. The $(\phi^4)_2$ field theory as a classical Ising model. **Commun. Math. Phys.**, v. 33, p. 145–164, jun. 1973. DOI: 10.1007/BF01645626. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01645626>.

STEVENSON, P. M. Optimized perturbation theory. **Phys. Rev. D**, v. 23, p. 2916–2944, jun. 1981. DOI: 10.1103/PhysRevD.23.2916. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.2916>.

STEVENSON, P. M. Sense and nonsense in the renormalization-scheme-dependence problem. **Nuc. Phys. B**, v. 203, p. 472–492, ago. 1982. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(82\)90325-X](https://doi.org/10.1016/0550-3213(82)90325-X). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032138290325X>.

SYMANZIK, K. Small distance behaviour in field theory and power counting. **Commun. Math. Phys.**, v. 18, p. 227–246, set. 1970. DOI: 10.1007/BF01649434. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01649434>.

SYMANZIK, K. Small-distance-behaviour analysis and Wilson expansions. **Commun. Math. Phys.**, v. 23, p. 49–86, jul. 1971. DOI: 10.1007/BF01877596. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01877596>.

TARNOPOLSKIY, Grigory M. **Conformal and Nearly Conformal Theories at Large N**. Jul. 2017. Tese (Doutorado) – Faculty of Princeton University, Princeton, Estados Unidos da América.

TOMONAGA, Shin'ichiro; OPPENHEIMER, J. R. On Infinite Field Reactions in Quantum Field Theory. **Phys. Rev.**, v. 74, p. 224–225, jul. 1948. DOI: 10.1103/PhysRev.74.224. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.74.224>.

VAN DE KAMP, R; STEINER, M; TIETZE-JAENSCH, H. Study of the phase diagram and the critical behaviour of the 2D Heisenberg antiferromagnet with small uniaxial anisotropy. **Physica B: Cond. Matter**, v. 241-243, p. 570–572, dez. 1997. [Pareceres da conferência internacional de espalhamento de neutrôns]. DOI:

[https://doi.org/10.1016/S0921-4526\(97\)00646-7](https://doi.org/10.1016/S0921-4526(97)00646-7). Disponível em:
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921452697006467>.

WEINBERG, Steven. Gauge and global symmetries at high temperature. **Phys. Rev. D**, v. 9, p. 3357–3378, jun. 1974. DOI: 10.1103/PhysRevD.9.3357. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.9.3357>.

WEINBERG, Steven. High-Energy Behavior in Quantum Field Theory. **Phys. Rev.**, v. 118, p. 838–849, mai. 1960. DOI: 10.1103/PhysRev.118.838. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.118.838>.

WILSON, Kenneth G.; FISHER, Michael E. Critical exponents in 3.99 dimensions. **Phys. Rev. Lett.**, v. 28, p. 240–243, jan. 1972. DOI: 10.1103/PhysRevLett.28.240. Disponível em:
<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.28.240>.

WILSON, Kenneth G.; KOGUT, J. The renormalization group and the ϵ expansion. **Phys. Rep.**, v. 12, p. 75–199, ago. 1974. DOI:
[https://doi.org/10.1016/0370-1573\(74\)90023-4](https://doi.org/10.1016/0370-1573(74)90023-4). Disponível em:
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157374900234>.

ZEE, Anthony. **Quantum field theory in a nutshell**. Princeton: Princeton Univ. Press, 2003.

ZINN-JUSTIN, Jean. **Quantum Field Theory and Critical Phenomena**. Oxford: Oxford Univ. Press, 1994. (The international series of monographs on physics).

APÊNDICE A – AUTOENERGIA COM DOIS LOOPS

O objetivo deste apêndice é realizar, de forma explicativa, o cálculo dos diagramas de Feynman para o modelo $\lambda\phi^4$ em segunda ordem, deixando claro quais passos foram dados e quais identidades matemáticas foram utilizadas. Vale lembrar que os cálculos destes diagramas são, em geral, uma combinação entre resultados obtidos analiticamente e resultados numéricos para certas integrais que envolvem os chamados parâmetros de Feynman, como veremos a seguir.

Primeiramente comecemos com o cálculo da integral de propagadores em D dimensões espaço-temporais que será muito utilizada. O cálculo desta integral pode ser feito seguindo a referência (RAMOND, 1981). Entretanto o procedimento realizado na referência (KLEINERT; SCHULTE-FROHLINDE, 2001) é muito mais detalhado e algumas de suas partes estarão aqui expostas.

Primeiro fazemos a transformação para coordenadas polares:

$$\begin{aligned} I(D) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{2\pi}{(2\pi)^D} \prod_{k=1}^{D-2} \int_0^{\infty} \sin^k \theta_k d\theta_k \int_0^{\infty} dp p^{D-1} \frac{1}{p^2 + m^2} = \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} \int_0^{\infty} dp p^{D-1} \frac{1}{p^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Agora com a seguinte mudança de variáveis: $p^2 = ym^2$, podemos reconhecer a representação integral de uma função Beta:

$$B(\alpha, \gamma) \equiv \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha + \gamma)} = \int_0^{\infty} dy y^{\alpha-1} (1 + y)^{-\alpha-\gamma}. \quad (\text{A.2})$$

Assim, ficamos com:

$$\begin{aligned} I(D) &= \frac{1}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} \int_0^{\infty} dp p^{D-1} \frac{1}{p^2 + m^2} \\ &= \frac{(m^2)^{D/2-1}}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} \int_0^{\infty} dy y^{D/2-1} (1 + y)^{-1} \\ &= \frac{(m^2)^{D/2-1}}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} \frac{\Gamma(D/2)\Gamma(1 - D/2)}{\Gamma(1)} \\ &= \frac{(m^2)^{D/2-1}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(1 - D/2). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A integral apresentada em (A.1) é a versão mais simplificada entre as que aparecem durante o cálculo de diagramas da teoria escalar, porém sua generalização é quase imediata. Sendo assim a forma mais geral desta integral é dada por:

$$I(D, a; q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 + 2pq + m^2)^A} = \frac{\Gamma(A - D/2)}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(A) (m^2 - q^2)^{A-D/2}}. \quad (\text{A.4})$$

Nos próximos diagramas, a equação (A.4) será utilizada de forma direta. Antes de seguirmos para o cálculo dos diagramas será útil introduzir as seguintes notações:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \equiv \int_p, \quad (\text{A.5})$$

e

$$\frac{1}{\Delta(p)} \equiv \frac{1}{p^2 + m^2}. \quad (\text{A.6})$$

Um exemplo um pouco mais complexo deste tipo de cálculo diz respeito ao diagrama conhecido como *double scoop*:

$$\begin{array}{c} \text{O} \\ | \\ \text{O} \\ | \\ \text{---} \end{array} = -\frac{\lambda^2}{4} \int_p \frac{1}{\Delta(p)} \int_q \frac{1}{\Delta^2(q)}. \quad (\text{A.7})$$

Note que o loop externo deste diagrama é muito similar ao que foi considerado na equação (2.15). Por conta disto podemos esperar o mesmo comportamento de divergências em 2 e 4 dimensões apresentadas anteriormente. Utilizando a equação (A.4) e considerando, primeiramente, a integral em q temos:

$$I(q; 2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + m^2)^2} = \frac{\Gamma(2 - D/2)}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(2) (m^2)^{2-D/2}} = \frac{1}{4\pi m^2}. \quad (\text{A.8})$$

Note que na última igualdade foi utilizado $D = 2 - 2\varepsilon$, efetuada a expansão em torno de ε e tomado o limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Ao mesmo tempo a integral em p é idêntica a equação (A.1), ou seja, apresenta uma divergência ultravioleta. Utilizando a densidade Lagrangiana de contratermos é possível mostrar que o contratermo apresentado na equação (2.24) é suficiente para cancelar quaisquer divergências decorrentes de uma inserção do tipo *tadpole*. Sendo assim, o diagrama do tipo *double scoop* já está renormalizado e nos permite obter o seguinte resultado finito:

$$\begin{array}{c} \text{O} \\ | \\ \text{O} \\ | \\ \text{---} \end{array} = -\frac{\lambda^2}{4(4\pi)^2} \frac{1}{m^2} \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \quad (\text{A.9})$$

Agora podemos passar para um exemplo consideravelmente mais complexo que requererá mais atenção e a utilização de um novo ferramental. O diagrama que calcularemos é conhecido como *setting sun*:

$$\begin{array}{c} \text{O} \\ | \\ \text{---} \end{array} = -\frac{\lambda^2}{6} \int_k \int_l \frac{1}{\Delta(k)\Delta(l)\Delta(p+k-l)}. \quad (\text{A.10})$$

Note que agora temos um propagador que mistura os momentos internos (k e l) com o momento externo (p). Esta mistura nos impede de usar (A.4) diretamente e nos faz primeiro manipular os propagadores para que fiquem de uma forma mais usual.

Para tratarmos com esses propagadores iremos introduzir o conceito de *parâmetros de Feynman*, os quais podem ser obtidos a partir da seguinte identidade matemática, a demonstração desta identidade pode ser encontrada na referência (KLEINERT; SCHULTE-FROHLINDE, 2001):

$$\frac{1}{A_1^{\alpha_1} \cdots A_n^{\alpha_n}} = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_i)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^n \int_0^1 dx_i \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^n x_i) \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i - 1}}{(\sum_{i=1}^n x_i A_i)^{\sum_{i=1}^n \alpha_i}}. \quad (\text{A.11})$$

As quantidades representadas por x_i são identificadas como parâmetros de Feynman. Munidos da equação (A.11) podemos combinar os propagadores:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta(p+k-l)\Delta(l)} &= \frac{1}{[(p+k-l)^2 + m^2] (l^2 + m^2)} \\ &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)\Gamma(1)} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \frac{\delta(1-x_1-x_2) x_1^0 x_2^0}{\{x_1 [(p+k-l)^2 + m^2] + x_2 (l^2 + m^2)\}^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Analisando a função δ de Dirac verificamos que:

$$\begin{aligned} 1 - x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 &= 1 - x_1 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = 1 - x. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Utilizando a equação (A.13) e simplificando a equação (A.12) obtemos:

$$\frac{1}{\Delta(p+k-l)\Delta(l)} = \int_0^1 dx \frac{1}{\{x [(p+k-l)^2 + m^2] + (1-x) (l^2 + m^2)\}^2}. \quad (\text{A.14})$$

Considerando apenas o denominador do integrando:

$$\begin{aligned} &x [(p+k-l)^2 + m^2] + (1-x) (l^2 + m^2) \\ &= x(p+k-l)^2 + (1-x)l^2 + m^2 \\ &= x [l^2 + (p+k)^2 - 2l(p+k)] + (1-x)l^2 + m^2 \\ &= l^2 + x(p+k)^2 + 2xl(p+k) + m^2. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Como faremos uma integração sobre todos os momentos l , isto é, a integração se dá no intervalo $(-\infty, \infty)$, podemos reescalonar o momento sem alterar seus limites de integração, assim: $l \rightarrow l - x(p+k)$ portanto a equação (A.15) fica:

$$\begin{aligned} &l^2 + x^2(p+k)^2 - 2lx(p+k) + x(p+k)^2 + 2lx(p+k) - 2x^2(p+k)^2 + m^2 \\ &= l^2 + (p+k)^2 x - (p+k)^2 x^2 + m^2 \\ &= l^2 + (p+k)^2 x(1-x) + m^2. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Utilizando a equação (A.16) na equação (A.14), obtemos:

$$\frac{1}{\Delta(p+k-l)\Delta(l)} = \int_0^1 dx \frac{1}{[l^2 + (p+k)^2 x(1-x) + m^2]^2}. \quad (\text{A.17})$$

Agora, com uma rápida inspeção, podemos verificar que toda a dependência em l que existia no diagrama (A.10) está condensada em um único termo no denominador da equação (A.17), portanto se identificarmos $(p+k)^2 x(1-x) + m^2$ como uma espécie de massa efetiva (já que possuem as mesmas unidades) podemos usar o resultado da equação (A.4) diretamente em l e obter:

$$I(D, 2; 0) = \int_l \frac{1}{[l^2 + (p+k)^2 x(1-x) + m^2]^2} = \frac{\Gamma(2-D/2)}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(2) [(p+k)^2 x(1-x) + m^2]^{2-D/2}}. \quad (\text{A.18})$$

Juntando o que temos até o momento, ficamos com:

$$\text{Diagrama} = -\frac{\lambda^2}{6} \frac{\Gamma(2-D/2)}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(2)} \int_0^1 dx \int_k \frac{1}{\Delta(k) [(p+k)^2 x(1-x) + m^2]^{2-D/2}}. \quad (\text{A.19})$$

Ainda precisamos fazer a integração em k para que possamos concluir o cálculo do diagrama. Assim sigamos trabalhando no integrando, uma vez que ainda há a mistura do momento interno (k) com o externo (p):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[(p+k)^2 x(1-x) + m^2]^{2-D/2} \Delta(k)} = \frac{[x(1-x)]^{D/2-2}}{\left[(p+k)^2 + \frac{m^2}{x(1-x)} \right]^{2-D/2} (k^2 + m^2)} \\ &= \frac{\Gamma(3-D/2)}{\Gamma(1)\Gamma(2-D/2)} \int_0^1 dy \frac{[x(1-x)]^{D/2-2} y^{1-D/2}}{\left\{ y \left[(p+k)^2 + \frac{m^2}{x(1-x)} \right] + (1-y)(k^2 + m^2) \right\}^{3-D/2}} \\ &= \frac{\Gamma(3-D/2)}{\Gamma(2-D/2)} \int_0^1 dy \frac{[x(1-x)]^{D/2-2} y^{1-D/2}}{\left\{ k^2 + p^2 y(1-y) + m^2 \left[1-y + \frac{y}{x(1-x)} \right] \right\}^{3-D/2}}, \quad (\text{A.20}) \end{aligned}$$

que é obtida após utilizarmos a equação (A.11), a função δ de Dirac e aplicarmos um procedimento análogo ao feito entre as equações (A.15)-(A.16). Agora podemos realizar a integral sobre k utilizando novamente o resultado da equação (A.4), basta identificarmos $p^2 y(1-y) + m^2 \left[1-y + \frac{y}{x(1-x)} \right]$ como a massa efetiva, assim:

$$\begin{aligned} & \int_k \frac{1}{\left\{ k^2 + p^2 y(1-y) + m^2 \left[1-y + \frac{y}{x(1-x)} \right] \right\}^{3-D/2}} \\ &= \frac{\Gamma(3-D)}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(3-D/2) \left\{ p^2 y(1-y) + m^2 \left[1-y + \frac{y}{x(1-x)} \right] \right\}^{3-D}}. \quad (\text{A.21}) \end{aligned}$$

Colocando todos os termos juntos, efetuando as devidas simplificações, podemos colocar m^2 em evidência, resultando em:

$$\text{Diagrama} = -\frac{\lambda^2}{6} \frac{\Gamma(3-D)}{(4\pi)^D (m^2)^{3-D}} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{[x(1-x)]^{D/2-2} y^{1-D/2}}{\left[\frac{p^2}{m^2} y(1-y) + 1-y + \frac{y}{x(1-x)} \right]^{3-D}}. \quad (\text{A.22})$$

Perceba que eliminamos as integrais nos momentos mas ficamos com integrais nos parâmetros de Feynman, tais integrais são não-triviais, por conta disto são geralmente calculadas de forma numérica. Antes de analisarmos as integrais vale notar que em duas dimensões, que o caso de interesse, não encontraremos divergências adicionais. Para fazer tais integrações numéricas precisamos escolher as dimensões, neste caso $D = 2$, assim como eliminar p^2/m^2 do integrando. Para eliminar esta dependência, tomamos p^2 na camada de massa, isto é, $p^2 = -m^2$. Com esta escolha e calculando a integral de maneira numérica obtemos:

$$\begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \bigcirc \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} = -\frac{\lambda^2}{6} \frac{1}{(4\pi)^2 m^2} \frac{\pi^2}{4}. \quad (\text{A.23})$$

APÊNDICE B – POTENCIAIS LIMITADOS INFERIORMENTE

Aqui serão apresentadas como obtêm-se as condições que limitam inferiormente o potencial de um modelo escalar com simetria $\mathcal{O}(N_\phi) \times \mathcal{O}(N_\chi)$, iremos seguir os passos feitos na referência (PARREIRA, 2005), para uma energia potência da forma:

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + \lambda_\phi\phi^4 + \frac{1}{2}m_\chi^2\chi^2 + \lambda_\chi\chi^4 + \lambda\phi^2\chi^2, \quad (\text{B.1})$$

sendo que realizamos a seguinte simplificação da notação dos campos: $\phi_a\phi_a = \phi_1^2 + \dots + \phi_{N_\phi}^2 \equiv \phi^2$. Para que o potencial seja limitado em ϕ e em χ , ele deve obedecer:

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} > 0, \quad (\text{B.2})$$

e

$$\lim_{\chi \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 V}{\partial \chi^2} > 0. \quad (\text{B.3})$$

Tais condições implicam em:

$$\lambda_\phi > 0, \quad (\text{B.4})$$

e

$$\lambda_\chi > 0. \quad (\text{B.5})$$

Extremizando a equação (B.1), temos como resultado:

$$\phi_0 = \pm \sqrt{\frac{6(m_\phi^2\lambda_\chi - 3m_\chi^2\lambda)}{\lambda^2 - 4\lambda_\chi\lambda_\phi}}, \quad (\text{B.6})$$

e

$$\chi_0 = \pm \sqrt{\frac{6(m_\chi^2\lambda_\phi - 3m_\phi^2\lambda)}{\lambda^2 - 4\lambda_\chi\lambda_\phi}}. \quad (\text{B.7})$$

Agora, se exigirmos que os pontos de extremização sejam reais, o discriminante da equação (B.1) deverá ser positivo para que tenhamos um ponto de mínimo:

$$D(\phi_0, \chi_0) = -\frac{4(m_\phi^2\lambda_\chi - 3m_\chi^2\lambda)(m_\chi^2\lambda_\phi - 3m_\phi^2\lambda)}{\lambda^2 - 4\lambda_\chi\lambda_\phi} > 0. \quad (\text{B.8})$$

Assim é imediato ver que:

$$\lambda^2 - 4\lambda_\phi\lambda_\chi < 0 \Rightarrow \lambda^2 < 4\lambda_\phi\lambda_\chi. \quad (\text{B.9})$$

Portanto as equações (B.4),(B.5) e (B.9), são as condições que estabelecem que o potencial seja limitado inferiormente.

APÊNDICE C – SETTING SUN COM DIFERENTES MASSAS

Neste apêndice será apresentado o cálculo para o diagrama conhecido como setting sun, mas considerando que ele é dado pela combinação de dois campos escalares (ϕ e χ). Neste caso o diagrama, já no esquema \overline{MS} , pode ser escrito como:

$$\text{Diagrama} = -\frac{\lambda^2 N_\chi}{2} \left(\frac{\mu^2 e^{\gamma_E}}{4\pi} \right)^\epsilon \int_k \int_q \frac{1}{k^2 + m_\phi^2} \frac{1}{q^2 + m_\chi^2} \frac{1}{(p-k-q)^2 + m_\chi^2}. \quad (\text{C.1})$$

Diferente do caso anterior, o cálculo deste diagrama será realizado no espaço de posições (x). Uma introdução a este tipo de regularização pode ser encontrada nas referências (COLLINS, 1984; BRAATEN; NIETO, 1995). Primeiramente precisamos sair do espaço dos momentos e ir para o espaço das posições. A forma natural de fazer isto é simplesmente tomar a transformada de Fourier:

$$\text{Diagrama} = -\frac{\lambda^2 N_\chi}{2} \left(\frac{\mu^2 e^{\gamma_E}}{4\pi} \right)^\epsilon \int d^D x e^{ipx} F_1(x) F_2^2(x), \quad (\text{C.2})$$

com $F_i(x)$ representando o propagador no espaço de posições:

$$F_i(x) \equiv \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{l^2 + m_i^2} \right\} = \int_l \frac{e^{ilx}}{l^2 + m_i^2} = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \frac{m_i}{(m_i x)^{D/2-1}} K_{\frac{D}{2}-1}(m_i x). \quad (\text{C.3})$$

Na equação (C.3), $K_i(x)$ representa as funções de Bessel modificadas de segunda espécie de ordem i , estas funções podem ser representadas segundo a seguinte forma integral:

$$K_\nu(z) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})(2z)^\nu}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos(u)}{(u^2 + z^2)^{\nu+1/2}} du. \quad (\text{C.4})$$

A integração angular pode ser reescrita como:

$$\int d^D x e^{ipx} = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \int_0^\infty dx x^{D-1} {}_0F_1\left(\frac{D}{2}, -\frac{p^2 x^2}{4}\right), \quad (\text{C.5})$$

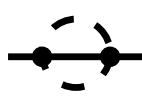
sendo ${}_iF_j(a, b; c; z)$ as conhecidas funções hipergeométricas, definidas por:

$${}_iF_j(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!}, \quad (\text{C.6})$$

onde se é utilizada a seguinte notação:

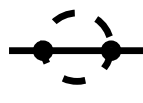
$$(a)_n \equiv \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \cdots (a+n-1). \quad (\text{C.7})$$

Substituindo as equações (C.3) e (C.5) na equação (C.2), ficamos com:



$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\lambda^2 N_\chi}{2} \left(\frac{\mu^2 e^{\gamma_E}}{4\pi} \right)^\varepsilon \frac{2^{1-\frac{3D}{2}}}{\pi^D \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \int_0^\infty dx x^{D-1} {}_0F_1\left(\frac{D}{2}, -\frac{p^2 x^2}{4}\right) \\
 &\times K_{1-\frac{D}{2}}(m_\phi x) K_{1-\frac{D}{2}}^2(m_\chi x) \frac{(m_\phi^2)^{\frac{D}{3}-\frac{5}{6}} (m_\chi^2)^{\frac{2D}{3}-\frac{5}{3}}}{(m_\phi x)^{\frac{D}{6}-\frac{8}{3}} (m_\chi x)^{\frac{D}{8}-\frac{4}{3}}}. \quad (\text{C.8})
 \end{aligned}$$

Como é perceptível, a integral presente na equação (C.8) não é trivialmente calculável, porém em duas dimensões do espaço-tempo ela deve convergir, uma vez que sabemos que este diagrama converge neste número de dimensões. Portanto fazendo $p^2 = -m_\phi^2$, $D \rightarrow D - 2\varepsilon$ e tomando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos:



$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\lambda^2 N_\chi}{2} \frac{1}{32\pi^2 m_\phi m_\chi} \left[\pi^2 - 4 \tanh^{-1}\left(\frac{m_\chi}{m_\phi}\right) \ln\left(\frac{m_\phi}{m_\chi}\right) \right. \\
 &\left. - \frac{m_\chi}{m_\phi} \Phi\left(\frac{m_\chi^2}{m_\phi^2}, 2, \frac{1}{2}\right) \right]. \quad (\text{C.9})
 \end{aligned}$$

Concluindo assim o cálculo deste diagrama no espaço de coordenadas. Vale ressaltar que aqui fizemos o caso onde o propagador externo é o associado ao campo ϕ , todavia, para obter o mesmo diagrama para o campo χ basta fazer a simples troca $\phi \leftrightarrow \chi$.

APÊNDICE D – CAMPOS BOSÔNICOS EM TEMPERATURAS FINITAS

Neste apêndice vamos introduzir temperaturas finitas e calcular quantidades termodinâmicas (pressão, entropia, etc.) que desempenham um importante papel no estudo de transições de fase. Para isto é necessário algumas transformações nas regras de Feynman, a partir da função de partição e integrais de caminho (BAILIN; LOVE, 1993; KAPUSTA, 1989; LAINE; VUORINEN, 2016).

As transformações mencionadas acima podem ser condensadas nas seguintes substituições:

$$p_0 \longrightarrow i\omega_n, \quad (\text{D.1})$$

e

$$\int d^{d+1}p \longrightarrow iT \sum_n \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \equiv iT \int_{\mathbf{p}}, \quad (\text{D.2})$$

sendo T a temperatura, d o número de dimensões *espaciais* e $\omega_n = 2\pi Tn$ as frequências de Matsubara para bósons. Com tais substituições, a densidade de energia para um sistema bosônico livre fica:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} T \int_{\mathbf{p}} \ln(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2) = \frac{1}{2} T \int_{\mathbf{p}} \ln(\omega_n^2 + \omega_{\mathbf{p}}^2). \quad (\text{D.3})$$

Utilizando o resultado da soma sob as frequências de Matsubara (BAILIN; LOVE, 1993) e a transformação de coordenadas cartesianas para esféricas, obtemos:

$$\sum_n \ln(\omega_n^2 + x^2) = \frac{1}{T}x + 2 \ln(1 - e^{-x/T}), \quad (\text{D.4})$$

e

$$d^d p = \frac{d\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 1)} p^{d-1} dp. \quad (\text{D.5})$$

Voltando à energia livre, teremos dois termos, o primeiro (diverge e independe da temperatura) pode ser calculado como anteriormente e um segundo termo (finito) que depende da temperatura. Fazendo uma mudança de variáveis $x = p/T$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(-1/2 - d/2 + \epsilon)}{(4\pi)^{d/2 - \epsilon} \Gamma(-1/2)} \frac{1}{(m^2)^{-1/2 - d/2 + \epsilon}} \left(\frac{\mu^2 e^{\gamma_E}}{4\pi} \right)^\epsilon \\ &+ \frac{d\pi^{d/2}}{(2\pi)^d \Gamma(d/2 + 1)} T^{d+1} \int_0^\infty dx x^{d-1} \ln(1 - e^{-\sqrt{x^2 + m^2/T^2}}). \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Note que foi *escolhido* o sistema de subtração $\overline{\text{MS}}$. Utilizando $P = -\mathcal{F}$, obtemos uma expressão geral para a pressão, os resultados para sistemas (especialmente)

uni, bi e tri-dimensional:

$$\begin{aligned}
 P^{(1)} &= -\frac{m^2}{2(4\pi)} \left[1 + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] - \frac{1}{\pi} T^2 \int_0^\infty dx \ln\left(1 - e^{-\sqrt{x^2+m^2/T^2}}\right), \\
 P^{(2)} &= \frac{m^3}{2(6\pi)} - \frac{1}{2\pi} T^3 \int_0^\infty dx x \ln\left(1 - e^{-\sqrt{x^2+m^2/T^2}}\right), \\
 P^{(3)} &= \frac{m^4}{2(8\pi)} \left[3 + 2 \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] - \frac{1}{2\pi^2} T^4 \int_0^\infty dx x^2 \ln\left(1 - e^{-\sqrt{x^2+m^2/T^2}}\right).
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

Podemos notar, pela ausência do *leading log*, que para o sistema planar não há divergência. Isto ocorre por conta da regularização dimensional utilizada, se tivéssemos utilizado o método de *cutoff* tal divergência estaria presente. Vale ressaltar que a integral em duas dimensões espaciais pode ser calculada analiticamente (ROMATSCHE, 2019a).

Agora iremos analisar situações de altas temperaturas (limite de Stefan-Boltzmann), isto é, $T \gg m$. Em tal regime, apenas o termo dependente de temperatura será relevante, pois as flutuações térmicas superam os efeitos de interação, portanto podemos ainda realizar uma expansão em série de Taylor sobre a exponencial, obtendo:

$$P_{SB}^{(d)} \simeq -\frac{d\pi^{d/2}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\Gamma(d/2 + 1)} T^{d+1} \int_0^\infty dx x^{d-1} \ln(1 - e^{-x}), \tag{D.8}$$

considerando os casos particulares para $d = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
 P_{SB}^{(1)} &= \frac{\pi}{6} T^2, \\
 P_{SB}^{(2)} &= \frac{\zeta(3)}{2\pi} T^3, \\
 P_{SB}^{(3)} &= \frac{\pi^2}{90} T^4.
 \end{aligned} \tag{D.9}$$

Como a densidade de entropia é dada por $s_{SB} = \frac{\partial P_{SB}}{\partial T}$, temos:

$$s_{SB}^{(d)} \simeq -\frac{d(d+1)}{(2\pi)^d} \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 1)} T^d \int_0^\infty dx x^{d-1} \ln(1 - e^{-x}), \tag{D.10}$$

com os casos particulares:

$$\begin{aligned}
 s_{SB}^{(1)} &= \frac{\pi}{3} T, \\
 s_{SB}^{(2)} &= \frac{3\zeta(3)}{2\pi} T^2, \\
 s_{SB}^{(3)} &= \frac{2\pi^2}{45} T^3.
 \end{aligned} \tag{D.11}$$

De posse da densidade de entropia e da pressão, podemos calcular a densidade de energia por: $\epsilon_{SB} = Ts_{SB} - P_{SB}$, obtendo:

$$\epsilon_{SB}^{(d)} \simeq -\frac{d^2\pi^{d/2}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\Gamma(d/2 + 1)} T^{d+1} \int_0^\infty dx x^{d-1} \ln(1 - e^{-x}). \tag{D.12}$$

Tomando os d 's usuais, temos:

$$\begin{aligned}\epsilon_{SB}^{(1)} &= \frac{\pi}{6} T^2, \\ \epsilon_{SB}^{(2)} &= \frac{\zeta(3)}{\pi} T^3, \\ \epsilon_{SB}^{(3)} &= \frac{\pi^2}{30} T^4.\end{aligned}\tag{D.13}$$

Com estas quantidades, podemos obter a *medida de interação*, que é definida por: $\Delta_{SB} = \epsilon_{SB} - dP_{SB}$. Substituindo as quantidades na definição, temos:

$$\Delta_{SB}^{(d)} = 0.\tag{D.14}$$

Que é um resultado completamente esperado, uma vez que para teorias livre sabemos que o traço do tensor energia-momento é nulo.