UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

Eduardo Sabel

O PAPEL DAS FUNÇÕES DISCURSIVAS NA ANÁLISE DA PRODUÇÃO DE ALUNOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Florianópolis
2021

Eduardo Sabel

O PAPEL DAS FUNÇÕES DISCURSIVAS NA ANÁLISE DA PRODUÇÃO DE ALUNOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação submetida ao Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica, da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do título de mestre em Educação Científica e Tecnológica.
Orientador: Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti

Florianópolis
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Sabel, Eduardo
O papel das funções discursivas na análise da produção de alunos na resolução de problemas / Eduardo Sabel ; orientador, Méricles Thadeu Moretti, 2021.
94 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Educação Científica e Tecnológica. 2. Funções discursivas. 3. Registros de Representação Semiótica. 4. Aprendizagem matemática. 5. Resolução de problemas. I. Moretti, Méricles Thadeu. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. III. Título.

Eduardo Sabel

O papel das funções discursivas na análise
da produção de alunos na resolução de problemas

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado
por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof.(a) Bárbara Cristina Pasa, Dr.(a)
Universidade Federal da Fronteira Sul

Prof. David Antonio da Costa, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof.(a) Cintia Rosa da Silva, Dr.(a)
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Educação Científica e Tecnológica.

Documento assinado digitalmente
Juliano Camillo
Data: 16/08/2021 08:38:38-0300
CPF: 225.964.728-64
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof Juliano Camillo, Dr.
Coordenador do Programa

Documento assinado digitalmente
Mericles Thadeu Moretti
Data: 12/08/2021 20:10:39-0300
CPF: 169.097.639-04
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Merícles Thadeu Moretti, Dr. Orientador

Florianópolis
2021

AGRADECIMENTOS

Começo meus agradecimentos expressando gratidão à minha família, que sempre esteve presente e apoiando as minhas escolhas, incentivando e dando suporte em todos os momentos. Aos meus amigos e colegas, com quem dividi tantas coisas estes anos, pessoas fundamentais para manter minha saúde emocional, e com quem compartilhei muitas alegrias. Minhas colegas Gislena, Crislaine, Charlene e Nilcileia, que sempre estiveram presentes neste mestrado, me ajudando e dividindo as angústias que nos permearam nesta caminhada. A minha prima Marília, pelos momentos de apoio e força que tantas vezes precisei.

Também agradeço a Leonardo, Marcelo e José Paulo, meus amigos de infância que sempre acreditaram no meu potencial. A Nayara, Malaica e Cristiane, cuja amizade construí na graduação e ainda permanecem sendo um grupo de apoio e afeto. A todos os colegas do PPGECT e, em particular, ao Grupo de Pesquisa GPEEM, cujos encontros nas quintas-feiras contribuíram tanto em meus estudos quanto em tornar as coisas mais leves.

Não poderia deixar de agradecer meus queridos professores da UFSC Blumenau, que me permitiram conhecer a discussão da educação matemática, bem como os professores do PPGECT com quem tive tantos ensinamentos. Agradeço ao professor Davi e a professora Bárbara por fazerem parte da banca e pelas contribuições a esta pesquisa, cedendo seu tempo e experiência para este momento. A professora Cíntia, um agradecimento não só por estar na banca, mas por ter sido minha orientadora na graduação e ter me apresentado a teoria de Duval, além de sempre ter me incentivado para que eu continuasse minha formação.

Agradeço imensamente meu orientador, professor Méricles, que teve a bondade de aceitar me orientar e compartilhar toda sua experiência e sabedoria. Também gostaria de agradecer a professora Gestine Trindade (in memorian) que foi a minha primeira professora de uma disciplina de educação e disse que eu tinha perfil de quem estudaria o campo das ciências da educação. Agradeço também a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela possibilidade de ter uma bolsa de mestrado e poder me dedicar aos estudos da pós-graduação. Muito obrigado!

Por fim, agradeço a Deus pela possibilidade de estar aqui hoje, realizando uma etapa tão sonhada e aguardada. E é claro, agradeço aos meus alunos que participaram e contribuíram para que esta pesquisa fosse realizada. Gratidão a todos!

.

RESUMO

A linguagem tem a função primordial social de comunicação, mas para a aprendizagem matemática, esta função não basta, outras funções discursivas são requeridas. Esta pesquisa teve como principal objetivo investigar as contribuições das funções discursivas para a análise da aprendizagem matemática, em particular, na resolução de problemas. Nosso referencial teórico foi norteado pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Para sua realização, apoiamo-nos em princípios metodológicos da Engenharia Didática de Michele Artigue e aplicamos alguns problemas a estudantes do ensino médio. Com as produções dos estudantes tivemos o material analítico necessário para fundamentarmos nossa análise e atingir nossos objetivos. Por meio deste estudo, foi possível compreender maiores detalhes sobre as estruturas discursivas mais utilizadas pelos estudantes, destacando as funções e operações discursivas utilizadas nestes processos. Tivemos o destaque da função referencial de designação de objetos e da função de expansão discursiva que foram empregadas em todos os discursos. Consideramos que a aprendizagem da matemática requer o uso de tais funções, pois se mostraram essenciais para que os estudantes resolvessem os problemas e para que analisássemos elementos da aprendizagem dos objetos.

Palavras-chave: Aprendizagem matemática. Funções discursivas. Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

Language has the important social function of communication, but for mathematical learning, this function is not enough, other discursive functions are required. This research aimed to investigate the contributions of discursive functions in the analysis of mathematical learning, in particular, in problem solving. Our theorical reference was based on Semiotic Representation Theory, according to Raymund Duval. For its realization, we supported the methodological principles of Didactic Engineering by Michele Artigue and applied some problems with high school students. With the students' productions, we had the necessary analytical material to support our analysis and achieve our goals. Through this study, it was possible to understand more details about the discursive structures most used by students, highlighting the functions and discursive operations used in these processes. The highlight was the referential function of designating objects and the discursive expansion function that were used in all discourses. We consider that learning mathematics requires the use of such functions, as they proved to be essential for students to solve problems. They are essential for students to reveal their learned knowledge as well as their misunderstandings.

Keywords: Mathematical learning. Discursive functions. Semiotic Representation Theory.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A linguagem é o instrumento que permite socializar e comunicar os conhecimentos, e na matemática ela desempenha outro papel fundamental que é representar seus objetos. Reconhecendo que os conceitos matemáticos estão estruturados sob uma linguagem própria, é preciso promover pesquisas no campo da educação matemática que analisem seu funcionamento nos processos de ensino e aprendizagem.

Vergani (2002) fala que devido ao vasto campo de saber da matemática, é possível compreender a necessidade de constituir uma linguagem própria ao seu conhecimento. Ao falarmos de linguagem matemática, referimo-nos a todos os recursos discursivos que a matemática possui (números, letras, palavras, símbolos, gráficos, figuras, códigos etc.).

É necessário conhecer e dominar a linguagem matemática para que seja possível alcançarmos sua compreensão, uma vez que todo seu corpo de conhecimento está organizado por meio dessa linguagem. Sobre isso Granger (1974, p. 32) diz que "para a matemática, a linguagem é, ainda mais diretamente, parte integrante da atividade científica. [...] a matemática poderia ser qualificada de ciência por construção da linguagem". Ou seja, como a matemática foi desenvolvida e sendo aprimorada por meio de uma linguagem específica, essa linguagem precisa ser compreendida para a construção da aprendizagem.

Sobre esse tema, D'Ambrosio (1986, p. 35), argumenta que:

> [...] o fato de a matemática ser uma linguagem (mais fina e precisa que a linguagem natural) que permite ao homem comunicar-se sobre fenômenos naturais, consequentemente, ela se desenvolve no curso da história da humanidade desde os "sons" mais elementares, e, portanto intimamente ligada ao contexto sociocultural em que se desenvolve.

Notamos que os autores citados colocam a linguagem matemática como elemento fundamental ao trabalhar com esta ciência. Nesse sentido, acreditamos que é preciso que nos processos de ensino e aprendizagem da matemática tenha-se um olhar crítico para esses fenômenos linguísticos e as complexidades que carregam.

A importância de realizar investigações sobre processos de escrita em matemática vem sendo estudado por alguns autores, como Nacarato (2013) que aborda o registro escrito nas aulas de matemática e suas potencialidades, ou ainda, Powell e Bairral (2006) trazendo discussões sobre as funções metacognitivas que a escrita pode propiciar e como ela pode desenvolver a cognição matemática.

Nesta pesquisa, o principal aporte teórico é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, com enfoque em seus estudos em linguagem, funções do discurso e aprendizagem matemática. Segundo Duval (2004) existem certas funções discursivas que precisam ser cumpridas por um sistema semiótico para que seja considerado uma língua. Compreender o funcionamento dessas funções e sua importância pode contribuir para avançarmos nos estudos de linguagem e aprendizagem matemática.

Um discurso para Duval "é o emprego de uma língua para dizer alguma coisa, para falar dos objetos físicos, imaginários e ideais e está conectada a um funcionamento cognitivo" (2004, p. 87). Todo o discurso está relacionado com o emprego de diferentes funções discursivas e suas respectivas operações[1].

Na teoria de Duval, a análise de uma produção matemática perpassa a utilização de diferentes registros de representação semiótica e com relação ao discurso, de diferentes funções discursivas: a função referencial (designação de objetos), a apofântica, a expansão discursiva e reflexividade social. Cada uma delas irá possibilitar a construção de tais discursos e a mobilização das diferentes linguagens (algébrica, geométrica, numérica e língua materna[2]).

Duval destaca a relevância da língua na aprendizagem quando explica que "a língua não é um código, mas um registro de representação semiótica [...]. Ela repousa nas operações discursivas que cumprem as funções cognitivas a que todo ato de expressão e de compreensão de um discurso produz" (2011, p. 76). Por isso, é preciso conhecer tais funções do discurso para que seja possível compreender todo o funcionamento cognitivo dos processos de aprendizagem matemática.

A motivação para realizar este estudo começou ainda na graduação, quando já havíamos realizado uma pesquisa com a teoria de Duval. Durante a produção da pesquisa, os estudantes já demonstravam curiosidade em compreender os elementos grafados, mas como o foco da pesquisa era outro, este tema não foi abordado. Nos quatro anos lecionando na educação básica, percebemos o quanto a comunicação entre professor e aluno é importante nas aulas de matemática, em particular, da forma como é escrita.

Os estudantes muitas vezes compreendiam o que era explicado verbalmente, mas na operacionalização discursiva mais formal da matemática dificuldades emergiam. Tendo em

---

[1] As funções e operações discursivas de uma língua, baseadas em Duval (2004, p. 87-118), serão explicadas no próximo capítulo, bem como alguns trabalhos que a abordam.

[2] A língua materna ou natural refere-se à língua nativa do indivíduo, ou seja, a primeira língua que sujeito aprende correspondendo ao grupo étnico-linguístico que pertence.

vista essa complexidade, desenvolvemos o interesse em investigar como a linguagem matemática influencia na aprendizagem da mesma e, mais precisamente, olhar o papel das funções discursivas de Duval nesse processo.

Desta maneira, esta pesquisa está preocupada com a construção de discursos nas aulas de matemática, em particular, na produção escrita dos estudantes na resolução de problemas. Temos como problema de pesquisa a seguinte pergunta: **Como as funções discursivas podem contribuir na análise da aprendizagem matemática, em particular, na resolução de problemas?**

O objetivo geral está delineado: <u>investigar como as funções discursivas podem contribuir na análise da aprendizagem matemática, em particular, na resolução de problemas</u>. Para responder à questão de pesquisa e atender ao objetivo geral, estabelecemos os seguintes objetivos específicos: (i) Aprofundar os estudos sobre as funções discursivas de Duval; (ii) Organizar e aplicar alguns problemas matemáticos para serem resolvidos por estudantes de ensino médio; (iii) Identificar as funções discursivas que são mais utilizadas na resolução dos problemas; (iv) Refletir acerca das dificuldades encontradas no uso das funções discursivas; (v) Analisar como esses discursos contribuem para diagnosticar os objetos matemáticos envolvidos nos problemas.

O foco no caso da resolução de problemas deve-se pela necessidade de definir um contexto analítico para pesquisar as funções discursivas na aprendizagem, e ainda, pelo fato de que na resolução de problemas há um discurso envolvido que é crucial para sua resolução. Esses discursos apresentam informações que podem nos ajudar a compreender erros, acertos, êxitos na aprendizagem e outros elementos que serão importantes para realizarmos nossa pesquisa.

Pesquisas como Huanca (2006) e Pereira (2004) já apontam que as resoluções de problemas nas aulas de matemática possibilitam melhoras na aprendizagem dos conceitos. Além disso, os documentos curriculares norteadores também destacam a importância de trabalhar problemas matemáticos como instrumento de ensino e de avaliação. Desta forma, acreditamos ser um meio que possibilita produzirmos um material que nos permita analisar a presença e as contribuições das funções discursivas na aprendizagem matemática, e atingir nossos objetivos delineados.

Nesta pesquisa, não pretendemos abordar o campo da resolução de problemas enquanto metodologia de ensino da matemática, na perspectiva já amplamente consagrada por autores como Polya (2006) e Onochic e Allevato (2004). Citamos a resolução de problemas enquanto um meio de abordar e trabalhar os conceitos matemáticos, e produzir materiais escritos pelos estudantes para análise. Por isso, não vamos nos preocupar em estudar os passos da resolução de problemas, suas concepções metodológicas ou analisar as aulas do professor em relação a isto. Nosso foco está na construção dos argumentos e discursos matemáticos e o caminho para gerar tal produção está em solicitar aos estudantes que resolvam alguns problemas.

Quando falamos de resolução de problemas, pensamos em um momento que coloca os estudantes para resolverem atividades elaboradas sobre determinado conteúdo, com objetivo de diagnosticar a aprendizagem. Esse contexto irá submeter os estudantes à necessidade de escrever na aula de matemática, buscando desenvolver uma produção escrita que mostre a resolução necessária para responder ao enunciado. A preocupação principal não será o acerto ou erro do problema em si, mas em como os discursos são mobilizados nesse processo, como contribuem e o que revelam sobre a aprendizagem.

A presente pesquisa tem como metodologia de investigação a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), onde iremos utilizar alguns de seus elementos para nosso percurso investigativo. A escolha da Engenharia Didática ocorreu pelo fato dela possuir fases bem estruturadas que possibilitam realizarmos todas as etapas desta pesquisa, e ainda, por ser um referencial metodológico amplamente utilizado na educação matemática e em pesquisas que envolvem atividades em sala de aula.

Para obter nosso material analítico, nos propomos a aplicar alguns problemas matemáticos em algumas turmas do ensino médio de uma Escola de Educação Básica da rede estadual de ensino do estado de Santa Catarina, em que já trabalhamos com os estudantes envolvidos. O material obtido será o acervo de dados (discursos) que subsidiará a análise à luz da teoria dos registros de representação semiótica.

Esta pesquisa também pode contribuir na difusão da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, mais precisamente o estudo das funções discursivas. A carência de trabalhos nessa área da teoria de Duval é relevada por Pontes, Brandt e Nunes (2017), que em seu estado da arte apontaram que dos 65 trabalhos encontrados sobre Duval, produzidos entre 2010 e 2015, apenas 7 utilizam ou comentam sobre as funções discursivas.

Os autores destacam que “as funções discursivas, têm um potencial teórico significativo para embasar pesquisas que abordam os processos de ensino e aprendizagem de matemática" (PONTES; BRANDT; NUNES, 2017, p. 309). Deste modo, também pretendemos contribuir no avanço dessas discussões pertinentes a esse campo menos explorado da teoria.

A maioria destes trabalhos utilizam as funções discursivas de forma pontual ou parcial, e não as têm como objetivo principal da pesquisa. Existem outras produções acadêmicas posteriores ao estado da arte supracitado que tiveram importante papel para desenvolvermos a problemática desta pesquisa. Algumas destas pesquisas serão comentadas e citadas ao longo do texto, contribuindo para a compreensão dos diferentes contextos que elas podem ser empregadas.

Um ponto desta pesquisa que precisa ser destacado é o fato de que ela foi realizada durante a Pandemia do Covid-19. Com o fechamento das escolas e cancelamento das aulas presenciais, surgiu uma nova dificuldade para realização de pesquisas de caráter empírico ou que necessitavam de intervenções na escola. Apesar de esta pesquisa precisar de poucos encontros para a aplicação dos problemas, deparamo-nos com a dificuldade realizá-la.

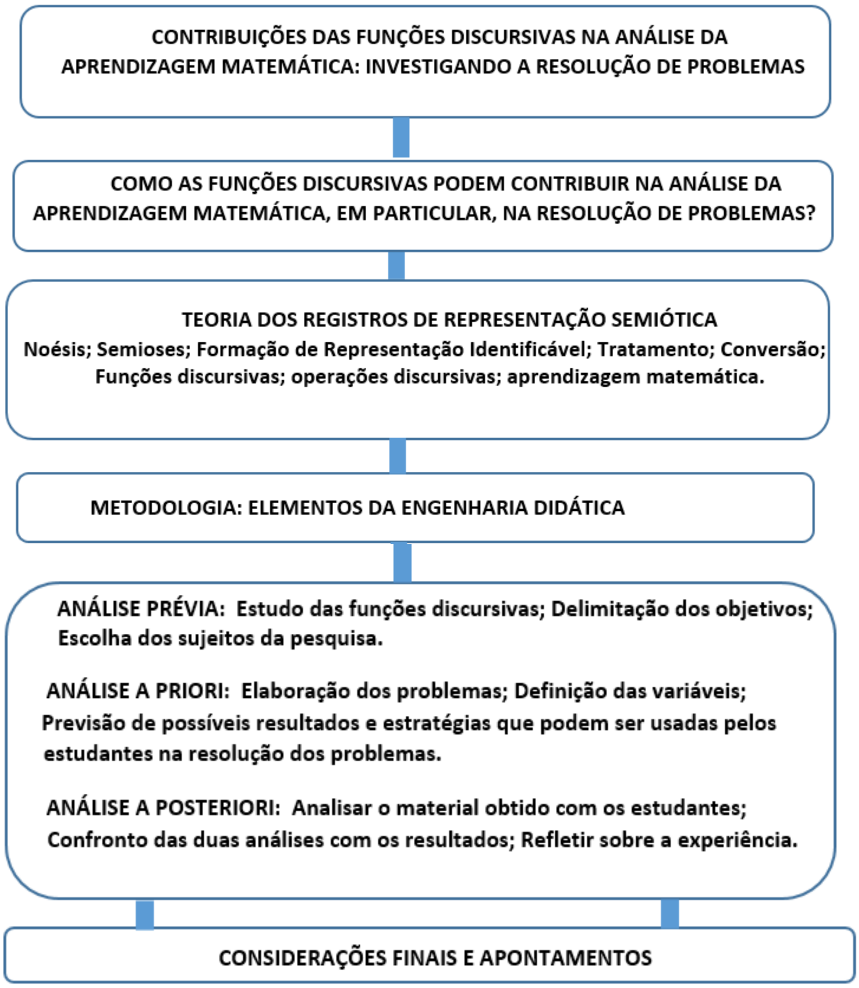
Como já estávamos atuando na escola escolhida para aplicação dos problemas, tivemos a oportunidade de continuarmos nosso estudo de forma não-presencial. Com uso de algumas plataformas tecnológicas foi possível obtermos um meio de interação com os estudantes e dar continuidade aos estudos dos conteúdos de matemática e assim, realizar a parte empírica da pesquisa com a aplicação dos problemas. Ao longo deste trabalho vamos destacar e comentar com mais profundidade sobre quais instrumentos e plataformas utilizamos no decorrer das aulas.

É preciso ter clareza de que executar uma pesquisa em educação dentro do cenário inédito das aulas não presenciais provocaram importantes adaptações e reflexões sobre a pesquisa dentro de uma escola. Sabemos que nem todos os estudantes possuem mesmo nível de acesso à internet ou recursos tecnológicos, por isso, o convite para que estes alunos participassem da pesquisa foi feito sem nenhuma exigência ou cobrança. Eles foram convidados a participar de forma voluntária e sem prejuízo para aqueles que não aceitassem. Os que aderiram, assinaram o Termo de Consentimento (Apêndice A).

Nosso texto está organizado nas seguintes etapas: primeiro apresentamos a Teoria dos Registros de Representação Semiótico de Duval, com enfoque nas Funções Discursivas. Em seguida o percurso metodológico da pesquisa, discutindo os elementos da Engenharia Didática que serão explorados. Depois apresentamos a aplicação dos problemas e analisá-los sob o olhar das Funções Discursivas de Duval. Por fim, nossas considerações finais, buscando retomar nosso problema de pesquisa e os apontamentos e conclusões gerados, bem como, possíveis desdobramentos da pesquisa realizada.

A seguir, apresentamos de forma sintetizada um esquema da estrutura de nossa pesquisa:

Figura 1 – Esquema da organização da dissertação



Fonte: elaborado pelo autor.

2 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE DUVAL

Desenvolvida pelo filósofo e psicólogo francês Raymond Duval na década de 80, a teoria dos Registros de Representação Semiótica investiga a aprendizagem matemática, sob uma perspectiva que analisa os processos cognitivos que promovem a compreensão da matemática. Para a teoria de Duval, os objetos matemáticos são materiais de estudo ideais, abstratos e conceituais, e por isso a forma de trabalhar com eles ocorre por meio de uma representação.

Nesta seção apresentamos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval em duas subseções. Na primeira apontamos os elementos principais da teoria, expondo o conceito de registro de representação semiótica e qual sua importância para a hipótese fundamental de aprendizagem de Duval. Na segunda subseção apresentamos as funções discursivas e metadiscursivas de Duval (2004), trazendo os conceitos e exemplos de cada das funções, propiciando assim a compreensão da teoria, que tem destaque nas discussões que serão apresentadas nesta pesquisa.

2.1 A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA PARA DUVAL E O PAPEL DOS REGISTROS

Vários problemas da aprendizagem matemática estão relacionados com a dificuldade dos estudantes em acessar os objetos, visto que quando tratamos da matemática, estamos lindando com objetos ideais, conceituais, não acessíveis ao mundo físico como nas outras ciências. Esta dificuldade exige que pensemos em formas de acessar estudar estes objetos, e nos processos cognitivos que envolvem a aprendizagem matemática.

A teoria dos Registros de Representação Semiótica apresenta um olhar cognitivo sobre a maneira de aquisição do conhecimento matemático, e sobre o funcionamento cognitivo do aluno que possa levá-lo a aprendizagem. A pesquisa de Colombo, Flores e Moretti (2008) sobre a teoria de Duval, afirmam que:

> [...] o trabalho com registros de representação semiótica com alunos, ou mesmo com professores em processo de formação, possibilita uma melhor compreensão não apenas do objeto matemático em estudo por parte dos estudantes, como também da especificidade da aprendizagem matemática (COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2008, p. 61).

Duval (2011) aponta a necessidade de pensarmos no funcionamento cognitivo que a matemática está envolvida, tendo em vista sua natureza epistemológica. Ele defende que o saber matemático atravessa a esfera das representações semióticas que possibilitam o acesso a estes objetos culturais. Na matemática utilizamos vários sistemas semióticos, como por exemplo, a língua natural, a linguagem algébrica, gráficos, tabelas, figuras geométricas, esquemas, sistema de numeração decimal, coordenadas cartesianas, dentre outros. Duval (2004) diferencia esses sistemas semióticos e aponta as características de um registro de representação semiótica.

Para um sistema semiótico ser considerado um registro de representação semiótica, ele necessita cumprir certas atividades cognitivas. São elas: a formação de uma representação identificável, tratamento e conversão.

Formação de Representação Identificável: É a forma que reconhecemos um objeto através de suas características específicas e regras que o compõe. Duval (2004, p. 36) diz que essa atividade está relacionada aos traços perceptíveis que possam identificar algum objeto em um sistema semiótico.

Podemos pensar no exemplo da função $g(x) = 3x +2$, essa é uma representação a qual pode nos remeter a uma função afim. Ou ainda, podemos exemplificar como formação as características da reta no plano cartesiano que está relacionada a esta função, que terá unidades e regras próprias para sua construção e que identificam o gráfico. Assim, a Formação de Representação Identificável é composta pelo conjunto de elementos, unidades, princípios e regras que identificam o objeto.

Tratamento: Consiste em alterar o conteúdo da representação, através de operações coerentes para o sistema semiótico envolvido, mas permanecendo ainda no registro de representação inicial. Duval (2003, p. 16) traz como exemplos de tratamento "[...] efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de sistema".

Outro exemplo de tratamento seria partir da expressão $(x + 3)^2$, e desenvolvê-la para obtermos $x^2 + 6x + 9$. Notemos que o registro inicial aqui era o algébrico e depois das operações pertinentes alterarmos o conteúdo sem extrapolar esse registro, caracterizando essa situação como um tratamento.

Conversão: essa atividade ocorre quando partimos de um registro de representação de um objeto e transformamos em outro registro diferente do inicial. Ou seja, quando o registro de partida é diferente do registro de chegada. Para Duval (2004, p. 16), "as conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados".

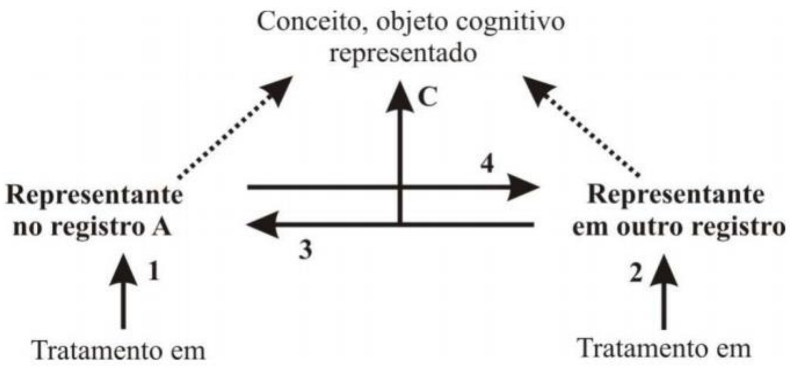
Um exemplo seria pensarmos nas expressões: dois terços e $\frac{2}{3}$. Na primeira temos o número sendo representado pelo registro escrito por meio da língua natural, enquanto na segunda temos uma representação dentro do registro simbólico. Como esses dois sistemas semióticos são diferentes, essa atividade é chamada de conversão.

Duval (2003, p. 14) salienta que "a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação". Desta forma a atividade cognitiva de conversão é a mais importante dentro da teoria de Duval.

Apesar das representações serem importantes para a aprendizagem, Duval (2012, p. 70) chama a atenção para que na matemática os objetos não sejam confundidos com suas representações, uma vez que "o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações". Desta maneira, utilizar mais registros evita que o indivíduo acredite que uma única representação seja o objeto como um todo.

A seguir, temos um esquema que representa a hipótese fundamental de aprendizagem de Duval, que destaca a importância da coordenação de registros:

Figura 2 – Esquema da hipótese fundamental da aprendizagem de Duval



Fonte: Duval (2012, p. 282).

Na figura 2, temos os processos cognitivos que fundamentam a hipótese de aprendizagem da teoria dos registros de representação semiótica. Havendo dois tipos diferentes de registros (A e o outro), é no processo de mudança (trânsito) entre esses registros que nos aproximamos do conceito matemático. A atividade de tratamento em cada registro também tem importante papel no processo, mas é na coordenação de diferentes registros que a aprendizagem acontece.

É na diversidade de registros que podemos promover a aprendizagem dos conceitos matemáticos, e obtermos o que Duval (2012, p. 282) chama de compreensão integral de um objeto, que para ele "repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão".

A importância de trabalhar matemática por meio dos registros justifica-se na teoria de Duval pelo fato de que a compreensão matemática envolve a relação *noesis e semiose*. A *semiose* é relacionada com a apreensão do registro de representação semiótica, e a *noesis* se volta para a apreensão conceitual do objeto. Na matemática não há *noesis* sem *semiose* (DUVAL, 2012) por isso ao ensinar um conceito matemático, na perspectiva desta teoria, devemos utilizar vários registros de representação de um objeto, efetuando as três atividades cognitivas pertinentes, destacando o papel das conversões nesse processo.

A aprendizagem na teoria de Duval é entendida como um processo *semio-cognitivo*. O termo *semio*, faz referência à forma de acesso aos objetos matemáticos, que para o autor sempre irá atravessar um campo semiótico para representação. O termo *cognitivo* é relacionado com os processos cognitivos e mentais que ocorrem durante o pensamento matemático (DUVAL, 2011).

Duval (2004) apresenta três fenômenos relativos à *semiose* e à conversão de registros, ou seja, associados ao acesso aos objetos. O primeiro fenômeno é a diversificação dos registros de representação, pois cada registro explicita certas informações do objeto que permitem diferentes aprendizagens. O segundo fenômeno é a diferenciação entre representante e representado, ou seja, a forma e o conteúdo, isso está relacionado com o cuidado em não confundir o objeto com sua representação. O terceiro fenômeno, a coordenação entre os registros, que acontece quando o indivíduo é capaz de transformar a forma de representação e assim, compreendeu o objeto.

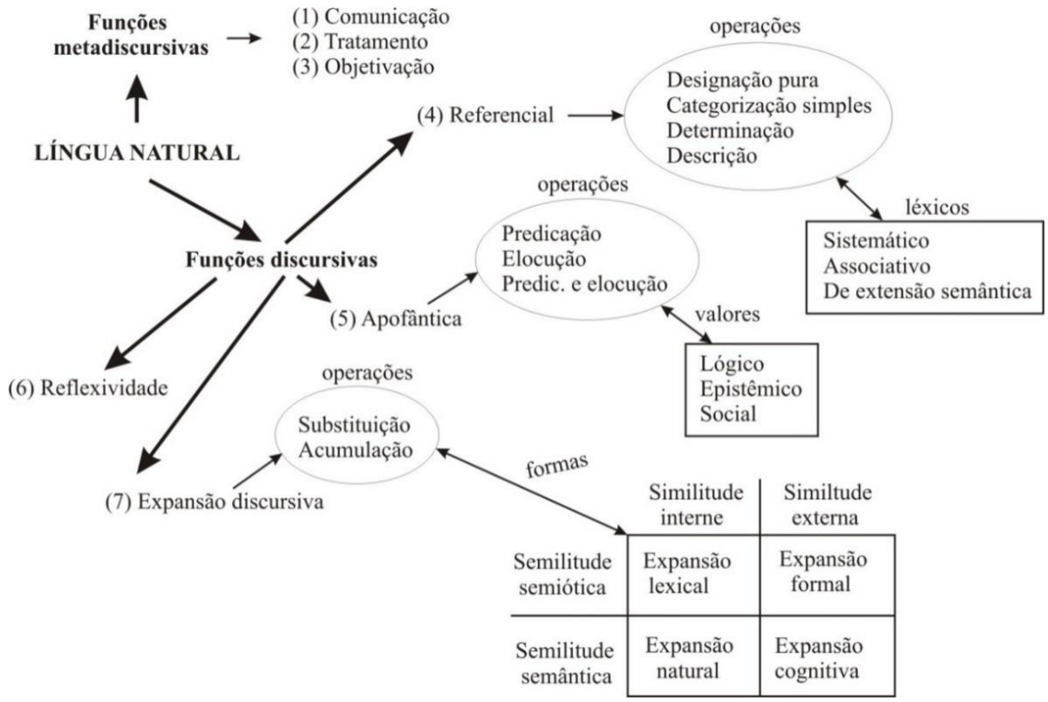
Cada registro de representação semiótica possui aspetos diferentes de um mesmo objeto, e sobre isso Duval (2011, p. 47) diz que "a dificuldade cognitiva vem do fato de que duas representações diferentes não apresentam ou não explicitam a mesma coisa do objeto que elas representam”. Este fato dificulta os processos de conversão de registro, pois o sujeito pode não saber se está convertendo para outra representação ou se já é outro objeto. Novamente, é somente na diversidade de registro de representação que o objeto pode ser conhecido e explorado em sua totalidade, revelando todas suas propriedades matemáticas.

A teoria dos registros de representação semiótica tem potencial de contribuir nos estudos da aprendizagem matemática, oferecendo subsídios para uma análise de um ponto de vista cognitivo do processo, condicionando ao ensino de matemática a necessidade de usar diferentes registros de representação semiótica.

2.2 AS FUNÇÕES DISCURSIVAS E METADISCURSIVAS DE UMA LÍNGUA

Para Duval (2004, p. 88), um sistema semiótico ao cumprir certas funções discursivas se torna uma língua. Sobre elas, podemos separá-las em dois grupos: As Funções Metadiscursivas e as Discursivas, conforme mostra o esquema a seguir:

Figura 3 - Esquema das funções discursivas e metadiscursivas de uma língua



Fonte: Dionizio, Brandt e Moretti (2014, p. 517), a partir de Duval (2004).

Na figura 3, temos um esquema que mostra o conjunto de todas as funções determinadas por Duval (2004), bem como suas operações e formas. Cada uma delas pode ser empregada para uma determinada função, sendo que geralmente atuam de forma conjunta nos discursos. Nas próximas subseções iremos apresentar mais detalhes sobre cada uma delas.

2.2.1 As funções Metadiscursivas

As funções metadiscursivas são caracterizadas como "as funções cognitivas comuns a todos os registros de representação (linguísticos, simbólicos, figurativos...)" (DUVAL, 2004, p. 87). Estão relacionadas a qualquer registro de representação e não apenas aos escritos. São três as funções metadiscursivas: Comunicação, Tratamento e Objetivação.

Comunicação: essa função é a primordial que todo sistema de representação deve cumprir. Ela tem o papel de agir com fins de comunicação, transmitindo informações e permitindo a socialização entre os indivíduos. Ela acontece em uma conversa, de uma fala, um questionamento, por exemplo.

Tratamento: Dado uma informação, devemos conseguir fazer algumas alterações sobre ela para extrair novas inferências. O tratamento acontece sem alterar o sistema de representação semiótica que a informação tinha inicialmente. Um exemplo de tratamento seria:

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{4}=\frac{4}{20}+\frac{10}{20}=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$$

A expressão fracionária acima pertence ao sistema de representação numérico, e a operação realizada alterou a representação inicial e permaneceu dentro desse mesmo sistema, caracterizando essa atividade como um tratamento.

Objetivação: Para Duval, a objetivação é uma função importante que o indivíduo necessita ter em suas experiências e atividades. "É a externalização ou conscientização que não se tinha antes" (2004, p. 88). Na objetivação, ocorre a tomada de consciência do sujeito, onde se dá conta que aprendeu. Geralmente, essa atividade se manifesta por meio uma fala, uma escrita, expressão, figura e até um gesto do estudante.

2.2.2 As Funções Discursivas

As funções discursivas são os elementos indispensáveis para haver a produção de um discurso em um sistema semiótico (Duval, 2004). Assim como na metadiscursivas, essas funções também admitem algumas classificações conforme sua funcionalidade em um discurso, são elas: função referencial (designação de objetos), apofântica (falar sobre os objetos por meio de enunciados), expansão discursiva (interligar preposições de forma coerente) e reflexividade social (indicar o estatuto, modo ou valor da expressão).

Função Referencial: o objetivo principal da função referencial em um discurso é designar objetos, ou seja, utilizar signos (palavras, letras, símbolo, números...) para representar os objetos matemáticos. Duval (2004, p. 88) estabelece as quatro operações discursivas que acontecem por meio desta função: designação pura, categorização simples, determinação e descrição.

A Designação Pura, ocorre na indicação de um signo ou marca, para identificar um objeto específico. Para exemplificar, observamos o uso das letras *M* e *AB* na seguinte frase: *Seja M o ponto médio do segmento AB*. Nesta situação, a atribuição das letras foi importante para nomear e representar os objetos (ponto e reta).

A Categorização Simples indica qualidades e características dos objetos designados. Ela é importante, pois possibilita classificarmos o objeto em relação a qual grupo esses elementos pertencem, como por exemplo: *Considere M uma matriz quadrada.* Veja que a letra *M* foi designada para representar uma matriz, enquanto a palavra *quadrada* atribuiu uma qualidade específica desta matriz. Com essa informação poderíamos saber que é possível obtermos o determinante desta matriz visto que é quadrada.

A Determinação consiste em utilizar artigos definidos ou indefinidos nas preposições para indicar a existência e unicidade de objetos, como por exemplos quando usamos os artigos *o, os, a, as.* Essa operação atua em conjunto com as demais, completando e atribuindo maior precisão nas informações.

A Descrição tem como objetivo combinar as demais operações com relações diretas para indicar os objetos. Duval diz que “Nenhuma língua, mesmo a natural, pode ter um nome para cada objeto ou classe de objetos. Portanto, é por meio da operação de descrição que se pode nomear qualquer objeto, apesar da limitação lexical” (2004, p. 95). Muitas vezes precisamos dar nomes para objetos que ainda não tem um nome específico, ou explicar determinada situação criando termos específicos para elas, nesse caso, a descrição permite que criamos e atribuímos novas nomenclaturas para representar esses objetos.

Função Apofântica: Para Duval “somente designar objetos não cria uma língua, é preciso poder dizer qualquer coisa sobre os objetos sob a forma de uma proposição, ou seja, cumprir a Função Apofântica” (2004, p. 104). A função apofântica serve para criarmos expressões, falas e escritas sobre os objetos de modo coerente e coeso. Além da criação das frases, ela também permite atribuir valor lógico (verdadeiro ou falso), valor epistêmico (se a frase segue as regras internas da matemática) e valor social (a razão que motivou a construção da frase). Ela ocorre por meio de duas operações:

A predicação tem o objetivo de falar sobre os objetos por meio de preposições escritas, que tenha sentido e valor lógico. Um exemplo pode ser a preposição: *o ponto m no triângulo ABC representa seu baricentro.* Esta operação será muito necessária para que o aluno escreva algo que o ajude a explicar um passo de sua resolução, por exemplo.

O ato ilocutório acontece no momento de promover pensamentos, raciocínios ou argumentos por meio da oralidade. É o diálogo entre os sujeitos que ocorre da necessidade de expressar uma ideia, explicação ou comentário sobre um objeto ou situação. Como por exemplo, em uma conversa entre estudante e professor, para sanar dúvidas sobre determinado conceito.

A **Função de Expansão Discursiva:** corresponde à possibilidade de "articular diversos enunciados completos na unidade coerente de uma narração, de uma descrição, de uma explicação ou de um raciocínio" (Duval, 2004, p. 94). Ela permite articular frases e relacionar enunciados de forma coerente, permitindo que o sujeito faça inferências e desenvolva novas informações, aumentando o discurso e possibilitando falar sobre um assunto de diferentes formas (DIONIZIO; BRANDT; MORETTI, 2014). Suas operações discursivas são: a substituição e a acumulação.

Na substituição, a continuidade de um discurso acontece por substituir as informações por outras, alterando a primeira obtendo um resultado. Neste tipo de operação, "as inferências possibilitadas a partir da progressão das proposições podem ser realizadas pela substituição do resultado das novas inferências sobre as que foram feitas nas proposições anteriores" (BRANDT; MORETTI; BASSOI, 2014, p. 483). Para realizar as substituições é preciso respeitar as regras e os funcionamentos internos do sistema semiótico que está inserido.

Na operação discursiva de acumulação, o discurso se expande por frases que são unidas por conectores, enriquecendo as informações e agregando novos elementos ao texto. Ela acontece por uma narração, explicação ou descrição (DUVAL, 2004, p. 117).

Além disso, Duval (2004, p. 118) explica que existem algumas formas que a expansão pode ocorrer, são elas: expansão natural, expansão formal, expansão cognitiva e expansão lexical. Elas acontecem embasadas em similaridades interna e externa, na natureza semântica ou semiótica. Mesmo que vistas isoladamente é preciso ter em mente que todas podem operar juntas com as demais funções discursivas, pois é na complementação de um com outra que podemos construir um discurso coeso.

Nesta pesquisa buscamos identificar a maior quantidade destas funções dentro das produções dos estudantes, porém, devido a sua complexidade e especificidades, nem todas serão abordadas com tanta ênfase. Nosso foco são as funções e operações do discurso que mais contribuem para a aprendizagem, especialmente, dentro da esfera da resolução de problemas.

A seguir apresentamos um quadro que organiza as formas da expansão discursiva com seus mecanismos e características:

Quadro 1 – As quatro formas de expansão discursiva de uma expressão

Mecanismos de expansão	**Similaridade interna** (continuidade sem um terceiro enunciado)	**Similaridade externa** (continuidade com um terceiro enunciado)
Similaridade semiótica (são recuperados alguns significantes)	Expansão LEXICAL (recuperação do sentido de uma mesma unidade do vocabulário sob um modo fonético-auditivo ou gráfico-visual) Associações verbais, ocorrências Linguagem do inconsciente	Expansão FORMAL (recurso exclusivo aos símbolos: notações, escrita algébrica,...) Raciocínio dedutivo (proposições de estrutura funcional) Cálculo proposicional, cálculos de predicados
Similaridade semântica Lei de Frege: Significantes diferentes e mesmo objeto. (Invariância referencial estrita ou global)	Expansão NATURAL (somente o conhecimento da linguagem corrente é suficiente) Descrição, Narração Argumentação retórica Silogismo aristotélico (proposição de estrutura temática predicativa) Raciocínio pelo absurdo	Expansão COGNITIVA (exige o conhecimento de definições, regras e leis para um domínio de objetos) Explicação Raciocínio dedutivo (proposição de estrutura temática condicional) Raciocínio pelo absurdo

Fonte: Duval (2004, p. 119), tradução elaborada por Dionizio; Brandt e Moretti (2014, p. 8).

A similaridade semântica acontece quando as unidades apofânticas têm como referência o mesmo objeto, porém não abrangem significantes comuns, promovendo assim continuidade entre os enunciados. Exemplo: *um número elevado ao quadrado é maior ou igual a 4* e $x^2 \geq 4$. No caso da similaridade semiótica, ela é caracterizada pela repetição dos mesmos signos, mas fazendo referência a elementos distintos, como no exemplo a palavra *máximo* em: *você é o máximo!* ou *calcule o máximo dessa função quadrática.*

Dentro da função de expansão discursiva, é possível identificarmos quatro formas que ela ocorre: a expansão lexical e formal (similaridades semióticas), expansão natural e cognitiva (similaridades semânticas). Cada uma delas pode agir separadamente ou em conjunto em um discurso, sendo que outras operações discursivas também podem aparecer nesse meio.

Na expansão lexical, um significante é recuperado e utilizado para referenciar outro objeto, dando continuidade e coesão às preposições. Por exemplo: *O banco da praça...* e *Fui ao banco tirar um extrato...* Já na expansão formal, utilizamos a substituição dos elementos seguindo as regras internas da matemática, expandindo o que tínhamos e extraindo novas informações.

Um exemplo da expansão formal seria tomarmos como partida a equação $x^2 -5x + 6 = 0$ e por meio dos mecanismos de expansão pertinentes às regras da linguagem algébrica, podemos substituir os termos até chegarmos em $(x -3).(x-2) = 0$. Note que essa expansão formal possibilitou nesse exemplo a identificação das raízes dessa equação, apenas olhando para sua forma canônica, elemento que na primeira equação não estava evidenciado.

A expansão natural objetiva empregar elementos da linguagem materna. Para Brandt, Moretti e Bassoi (2014, p. 7), é a “mobilização simultânea da rede semântica de uma língua natural e dos conhecimentos práticos do próprio meio sociocultural dos alunos que produziram esses discursos”. É a linguagem natural utilizada de forma prática.

Por fim, temos a expansão cognitiva que utiliza a língua natural com um caráter especializado, onde as palavras são usadas de forma exclusiva a um certo conteúdo. Exemplo: “Um número ímpar excede um número par em uma unidade. Logo, a soma de dois ímpares resulta em um número par” (BRANDT; MORETTI; BASSOI, 2014, p. 7). Notamos que houve uma continuidade da primeira para segunda frase e isso ocorreu somente pela língua natural mesmo tratando-se de um contexto matemático.

Todas estas formas são possibilidades de expandir os discursos, e mesmo que as apresentamos separadamente, elas atuam em conjunto nos discursos. Todas essas funções e operações devem surgir no momento de resolver problemas e será por meio delas, que faremos uma análise de discurso das resoluções dos estudantes.

2.3 ALGUMAS PESQUISAS QUE UTILIZARAM AS FUNÇÕES DISCURSIVAS

O trabalho de Tozetto (2010) pesquisou sobre um curso de Licenciatura em Pedagogia da UEPG com o objetivo de investigar as competências e habilidades desenvolvidas pelo curso que resulte em um letramento para a docência em matemática nos anos iniciais, relevando lacunas que dificultem este letramento. As funções discursivas não foram o foco principal, mas foram utilizadas para analisar o material analítico produzido por esta pesquisa.

A pesquisadora aplicou algumas questões para licenciandos do curso com objetivo de verificar se a formação inicial conseguiu desenvolver as habilidades e competências esperadas e elencadas pelo currículo do curso, no que se refere ao letramento para ensino de matemática. Uma das partes da análise das questões foi realizada com uso das funções discursivas da língua, mais especificamente, a verificação do uso da descrição, narração e explicação como formas de construir os discursos e argumentos matemáticos.

Por meio das contribuições das funções discursivas, a pesquisadora identificou que as formas mais utilizadas para construir o discurso pelos discentes da Pedagogia estavam voltadas à descrição e narração, sendo níveis mais simples de discurso. Os discursos matemáticos privilegiavam raciocínios mais naturais e intuitivos, do que formais e cognitivos, e desta forma algumas lacunas na aprendizagem e no letramento foram reveladas pela pesquisa. O trabalho teve foco em outras questões, mas as funções discursivas foram apresentadas neste momento.

Dionizio (2013), em sua dissertação, realizou sua pesquisa com objetivos de: caracterizar conhecimento sobre trigonometria por professores de matemática na educação básica e; desvelar a natureza desses conhecimentos dos professores de matemática em relação a questões de ensino de aprendizagem de trigonometria. Em uma das etapas desta pesquisa, os professores receberam algumas questões de trigonometria que haviam sido resolvidas por estudantes para que apontassem o tipo de erro cometido pelo estudante, para posteriormente sugerirem uma forma de superar tal erro.

As funções discursivas foram utilizadas nessa pesquisa no momento em que os conhecimentos destes professores foram caracterizados em relação a três tipos de conhecimento: o pedagógico, o do conteúdo da matéria ensinada e o curricular. A autora identificou e sistematizou as formas de expansão discursiva que cada um dos sujeitos da pesquisa usou para construir e desenvolver o discurso.

Um dos resultados da pesquisa apontou que o conhecimento dos professores sobre trigonometria está relacionado, prioritariamente, como conhecimentos específicos de conteúdo da matéria, e usam a expansão cognitiva como forma de construírem seus argumentos sobre a justificativa dos erros e acertos dos estudantes, uma vez que condicionam os erros com base em termos específicos da disciplina como forma de condução do ensino. Desta forma, a avaliação da aprendizagem fica limitada, deixando de valorizar e aproveitar outras formas de argumentação dos estudantes.

Em Duval *et al.* (2015), tivemos acesso a uma continuidade das ideias de Duval (2004) sobre as funções discursivas onde juntamente com outros autores foi construído um trabalho sobre a aprendizagem da álgebra. Neste texto fica evidente o papel fundamental das funções discursivas no campo algébrico, tendo destaque para função referencial de designação de objetos. Essa função discursiva é crucial para representarmos as relações algébricas entre números e letras, levando a necessidade de desenvolver o que os autores chamem de semiosfera da designação.

Duval *et al.* (2015, p. 29) fala de uma "ruptura epistemológica" que ocorre entre álgebra e aritmética, pois existe uma notória dificuldade apresentada pelos estudantes em utilizar letras no lugar de números. Os autores citam como exemplo a situação onde um problema fala de um retângulo com perímetro de 920m sendo a medida do comprimento 20m maior que a medida da largura. Em geral, eles explicam que o estudante consegue estabelecer a designação da relação: $920 = 2C + 2L$, porém, muitos não conseguem estabelecer $C = L + 20$, pois isso exige a capacidade de uma dupla designação.

Nesta obra de Duval *et al.* (2015) temos vários exemplos de situações que nos fazem refletir sobre as dificuldades de efetuar as designações exigidas nos problemas algébricas, como é o caso da designação funcional que estabelece relação entre variáveis. Este estudo foi significativo para a continuidade das pesquisas em aprendizagem da álgebra segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. A pesquisa de Brandt e Moretti (2018) que será comentada posteriormente é um dos exemplos de trabalhos feitos baseados nesta obra.

Outra pesquisa que contribui para compreensão do campo das funções discursivas foi a de Pasa (2017) que buscou problematizar o estudo do esboço de curvas no ensino médio, no qual apontou um caminho alternativo para fazê-lo com base na abordagem de interpretação global das propriedades figurais segundo a teoria de Duval. Para se manter dentro da perspectiva da interpretação global, a pesquisa utilizou como artifício as taxas de variação da função entendidas por meio da noção de infinitésimo, porém, sem formalizar com o conceito de limite. O estudo teve a participação de estudantes de terceiro ano do ensino médio onde foi aplicada uma sequência didática sobre o esboço de curvas.

As funções e operações discursivas foram utilizadas nesta pesquisa no momento da análise das produções dos estudantes na elaboração do esboço das curvas propostas pela sequência didática. A autora considera que com o olhar dado às funções do discurso mobilizadas pelos estudantes, foi possível identificar a apropriação dos conhecimentos e possibilitar aos estudantes criarem narrações, explicações, descrições e inferências com uso principalmente da função referencial, apofântica e da expansão discursiva. Apesar de a pesquisa ter focado em outros objetivos que envolviam a construção do esboço das curvas e da noção de infinitésimo, as funções discursivas foram empregadas como referencial analítico das produções escritas dos estudantes, nos oferecendo mais um exemplo de sua aplicabilidade prática.

A pesquisa de Brandt e Moretti (2018) buscou apresentar especificidades da aprendizagem da álgebra segundo a teoria de Duval. Um dos pontos principais apontados é na álgebra o mais importante não seria conhecer as letras, mas sim, a operação de designação de objetos e relações. Neste momento que as funções discursivas da língua ganharam destaque, uma vez que estariam trazendo como elemento necessário para a aprendizagem da álgebra a capacidade de utilizar a função referencial por meio da operação de designação.

Na pesquisa foram apresentados dados empíricos com resultados de estudos anteriores devolvidos pelos autores sobre o tema. Durante a discussão as funções discursivas se mostraram essenciais no tocante ao aprendizado da álgebra e atenderam às expectativas já apresentadas por Duval *et al.* (2015), dando ênfase para as designações verbais e numéricas dos dados dos problemas apresentados, bem como a designação funcional, redesignação e dupla designação, foram desdobramentos da função referencial de designação de objetos cujo uso foi necessário para resolver os problemas algébricos expostos na pesquisa. A expansão discursiva formal também foi importante nos momentos em que os sujeitos da pesquisa buscaram formas de narração, raciocínio e explicação para relevar seus conhecimentos algébricos.

A pesquisa de Silva (2018) contemplou um estudo que analisou o ensino e aprendizagem das superfícies quádricas, com ênfase nas quádricas não cilíndricas e não degeneradas. Por meio da Engenharia Didática a pesquisa também realizou uma etapa empírica com um grupo de estudantes do ensino superior. Em um dos momentos da análise *a posteriori*, o pesquisador fez uso das funções discursivas da língua para discutir as produções dos estudos e entender como desenvolvem seus discursos no tratamento das situações propostas que envolviam as quádricas. Um dos pontos a destacar foi que a função referencial e a expansão discursiva tiveram destaque como principais meios de progressão gradual do discurso

Os principais resultados da pesquisa eram voltados aos objetivos do ensino e aprendizagem das quádricas, contudo, o olhar prático dado às funções do discurso foi importante para trazer mais fundamento às análises e valorizar qualitativamente as produções dos estudantes. Como o trabalho teve foco na geometria, nem todas as funções discursivas foram identificadas e necessárias para compor os discursos, mas trouxe para nós mais informações e exemplos de como poderíamos realizar nossa pesquisa que também seguiria os mesmos moldes da etapa empírica deste estudo.

As pesquisas apresentadas neste tópico foram algumas das quais tivemos contato durante a elaboração do projeto desta dissertação. Elas tiveram papel essencial na construção da ideia desta dissertação, na busca por caminhos a seguir e quais problemáticas poderiam ser exploradas por meio das funções discursivas. Por mais que tais estudos a utilizassem em algum momento do texto, as funções e operações discursivas não foram o foco dos estudos em si, mas sim um instrumento teórico para alguns momentos da análise. Em nossa pesquisa decidimos que o elemento central seria a compreensão dessas funções, que apesar de também serem utilizadas durante as análises, daríamos maior relevância e foco sobre elas do que as pesquisas anteriores fizeram.

3 O PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

A presente pesquisa se caracteriza como uma pesquisa qualitativa que segundo Andre (2013), é capaz de promover reflexões e discussões sobre uma temática, fundamentada por um quadro teórico definido e trazendo novos conhecimentos para o campo. A pesquisa qualitativa se preocupa com a qualidade e profundidade da análise e das reflexões, e não com a quantidade de dados e instrumentos comparativos ou estatísticos.

Utilizaremos como referencial metodológico a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), explorando alguns de seus elementos que norteiam a estrutura e organização da realização desta pesquisa. Nas próximas subseções, iremos aprofundar cada um destes elementos e apresentar como devem contribuir com nossa estratégia investigativa.

3.1 A ENGENHARIA DIDÁTICA

A Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa cujo termo faz referência ao trabalho de um engenheiro, pois prepara um projeto que possui necessidades e fases bem delimitadas, contendo uma concepção, um planejamento e etapas de execução definidas. Na educação, o professor ocupa o lugar do engenheiro e prepara seu projeto para ser aplicado em sala de aula.

Segundo Artigue (1996) foi na didática da matemática sob influência francesa que surgiu a ideia da Engenharia Didática, sendo ela um novo modelo de organizar um trabalho didático. A Engenharia didática possui alguns procedimentos que a caracterizam, cada uma delas com objetivos específicos para a investigação, sendo capaz de relacionar o plano prático e teórico da pesquisa.

Artigue (1996, p. 193) destaca a função do pesquisador na Engenharia Didática, sendo ele:

> [...] comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia nos conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objetos muito mais complexos do que os objetos depurados da ciência, e, portanto, a estudar de uma forma prática, com todos os meios ao seu alcance.

A Engenharia Didática pode ser entendida como uma estratégia de investigação científica, apoiada geralmente por ‘realizações didáticas’, ou seja, na aplicação, observação e análise de um processo ou sequência de ensino (ARTIGUE, 1996). Dessa forma, é preciso compreender os procedimentos dessa metodologia para se pensar na estruturação de um projeto. Existem quatro fases que compõem a Engenharia Didática, são elas: análise prévia, concepção e análise a *priori*; experimentação; análise a *posteriori* e validação.

Este referencial metodológico foi escolhido uma vez que as fases da Engenharia Didática oferecem uma estratégia de investigação estruturada em etapas e processos que são necessários para a realização desta pesquisa. Teremos momentos anteriores a aplicação dos problemas, depois a aplicação e posteriormente uma análise qualitativa sobre os dados, sendo essas etapas conduzidas pela metodologia adotada que norteia estes caminhos. A seguir, iremos comentar as características e elementos de cada uma das fases da Engenharia Didática, bem como mencionar como elas são utilizadas no decorrer da pesquisa.

3.1.1 Análise prévia

Na primeira fase denominada análise prévia devemos nos apoiar em um quadro teórico e didático, a fim de introduzir o referencial estudado, que contribuirá para as análises da pesquisa. Segundo Artigue (1996, p. 198) devemos olhar para três dimensões: a dimensão epistemológica, analisando o conhecimento que será pesquisado; a dimensão cognitiva, que se preocupa com o público alvo da pesquisa e suas características cognitivas; e a dimensão didática que inspeciona o sistema de ensino.

Nesta fase é necessário que o pesquisador/professor estude sobre os objetos que serão abordados em sala de aula, as dificuldades e limitações que ele já carrega. É preciso pensar sobre os estudantes que irão fazer parte da pesquisa, em qual nível estão e que atividades já conseguem realizar. E também, refletir como a realidade do ensino da escola está configurada, seus obstáculos e elementos que podem influenciar no processo.

Em nossa pesquisa, essa fase é contemplada nos estudos prévios que realizamos sobre as funções discursivas de Duval, compreendendo o uso da linguagem matemática como elemento fundamental no ensino e aprendizagem deste campo de conhecimento. E ainda, estudamos os elementos discursivos que representam os objetos matemáticos (dimensão epistemológica).

Também procuramos ter consciência da fase do desenvolvimento dos estudantes que fazem parte desta pesquisa. No caso nosso público são alunos do ensino médio, sendo que por meio das nossas aulas ao longo do ano letivo foi possível identificar as características cognitivas desses alunos (dimensão cognitiva). Ao longo da estruturação da pesquisa julgamos que os estudantes precisam receber problemas com conteúdos abordados recentemente, para evitar ao máximo que deixem de responder as questões-problemas pelo motivo de falta de conhecimento dos objetos matemáticos envolvidos. E ainda, pensar na melhor forma de executar a pesquisa durante as aulas (dimensão do ensino).

Nessa última dimensão, a do ensino, foi preciso ter ciência de que as interações entre o pesquisador/professor e os estudantes envolvidos são em sua maioria de forma assíncrona, devido a Pandemia do Covid-19. Não seria adequado aplicarmos uma quantidade excessiva de questões, visto a grande demanda e sobrecarga de estudos que os estudantes estavam tendo e ainda, a adaptação que os discentes precisaram ter para estudar no formato remoto.

Tendo em vista toda complexidade envolvida nesta situação atípica da vida escolar, decidimos ainda na etapa da análise prévia que seriam aplicados cinco problemas em duas turmas de séries diferentes do ensino médio (posteriormente denominadas turmas A e B), em que tais problemas contemplassem conteúdos matemáticos diferentes. A elaboração de quais problemas seriam aplicados foi realizada na etapa a seguir, a análise *a priori.*

3.1.2 Análise *a priori*

A análise *a priori*, segunda fase, é o momento que o pesquisador por meio do seu referencial teórico, define as variáveis para considerar no projeto. Esta fase tem como objetivo, segundo Artigue (1996, p. 205), “determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos”. Ou seja, devemos criar previsões das ações e comportamentos que podem ocorrer na experimentação, buscando hipóteses que poderão ser confrontadas na etapa final da análise *a posteriori.*

Esta pesquisa já possui o referencial teórico bem definido, amparada pela teoria de Duval e seus estudos sobre as funções discursivas e metadiscursivas da língua. Sobre as variáveis do projeto e nossas previsões da pesquisa, temos definido um grupo de duas turmas de estudantes do ensino médio onde o pesquisador já atua como professor.

Elaboramos atividades que explorem diferentes conceitos matemáticos, com intuito de investigar diferentes aprendizagens. Foram escolhidos os seguintes conteúdos para serem abordados nos problemas: razão e proporção; área de figuras planas; volume e área de cone; sistemas lineares; trigonometria no triângulo retângulo.

Apresentaremos a análise *a priori* de cada problema e uma previsão das estratégias de resolução que acreditamos que seriam as mais usadas pelos estudantes, nos antecipando aos resultados que serão encontrados. Essas hipóteses serão contrapostas no momento da análise dos discursos.

3.1.3 Experimentação

A terceira fase, a experimentação, é a parte prática da pesquisa e onde serão produzidos os dados/materiais para toda a análise do projeto. Nesse momento, acontece o encontro entre o pesquisador e os estudantes, onde geralmente as aulas/atividades planejadas são aplicadas.

Segundo Machado (1999, p. 206), nessa fase ocorre:

> [...] a explicitação dos objetos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação; o estabelecimento do contrato didático; a aplicação dos instrumentos de pesquisa; o registro das observações feitas durante a experimentação.

Pais (2001) afirma a necessidade de o pesquisador ter uma observação direta e cuidadosa dos estudantes, registrando todas as informações que são necessárias para compreender, analisar e posteriormente validar a experiência. A experimentação nesta pesquisa é desenvolvida no momento em que os estudantes receberam e resolveram as atividades. Por meio da plataforma Google Classroom[3], o presente professor da turma disponibilizou um arquivo virtual em PDF contendo atividades dos conteúdos que já foram explicados aos estudantes, para que cada um possa resolver em seu caderno o respectivo problema que cada PDF continha. Tendo resolvido o problema, o estudante poderia tirar uma foto ou escanear a folha com a resolução para anexar a(s) imagem(s) como resposta(s) ao professor, para que o mesmo tivesse acesso a sua produção.

---

[3] Google Classroom é um sistema criado em 2014 pelo Google com objetivo de ser uma plataforma que ajudasse instituições de ensino a organizar turmas, facilitar a distribuição de materiais, servindo de instrumento de apoio para professores e alunos. Em março de 2020, com a Pandemia do Covid-19, a Secretaria do Estado da Educação de Santa Catarina começou uma parceria com a plataforma para que todos os estudantes e professores tivessem acesso a ela com todos seus recursos e fosse o principal meio de condução das aulas não presenciais no estado.

Foram enviados os cinco problemas em cinco aulas diferentes, ao longo dos meses de setembro e outubro de 2020. Esses intervalos foram necessários, pois os estudantes também precisaram realizar outras atividades da disciplina para serem avaliados e para cumprirmos o planejamento anual das turmas. Os estudantes foram convidados a participar da pesquisa e os que aceitaram foram aqueles que enviaram a assinatura de um Termo de Consentimento (Anexo A)[4]. Não houve prejuízo para os que optaram em não participar, assim como os que participaram fizeram de livre e espontânea vontade, entendendo que estariam ajudando ao professor e pesquisador.

Duas turmas de duas séries diferentes do ensino médio foram convidadas a resolver os problemas, e por isso, uma turma foi denominada Turma A e outra Turma B. Os estudantes da primeira turma serão identificados anonimamente como A1, A2, A3, e assim por diante, bem como os estudantes da outra turma que serão identificados como B1, B2, B3, sucessivamente. Esta pesquisa contou com a participação de 50 estudantes, sendo 25 da turma A e 25 da turma B.

Não foi possível aplicarmos os cinco problemas nas duas turmas A e B, pois como fazem parte de séries distintas, os estudantes admitiam conhecimentos diferentes sobre os conteúdos matemáticos. O intuito era evitar que um estudante precisasse resolver um problema cujo objeto matemático envolvido ainda não havia sido trabalhado com ele. Por isso, os três primeiros problemas que foram apresentados foram aplicados na Turma A, pois eram conteúdos que eles haviam visto alguns meses ou semanas anteriores. Os dois últimos problemas foram direcionados para a Turma B, pelo mesmo motivo de os estudantes já terem estudado os conceitos anteriormente.

3.1.4 Análise *a posteriori* e validação

A análise *a posteriori* e validação, é a quarta fase da Engenharia Didática, e ocorre "no confronto das duas análises, *a priori* e *a posteriori*, que se funda essencialmente a validação das hipóteses envolvidas na investigação" (ARTIGUE, 1996, p. 208). A validação irá depender dos resultados desse confronto, investigando se a pesquisa conseguiu alcançar os objetos traçados no planejamento. Essa é a fase mais importante da Engenharia Didática, pois permite

---

[4] O Termo de Consentimento também foi enviado para os estudantes pela plataforma Google Classroom, onde os responsáveis poderiam ter acesso a ele e permitir a participação dos estudantes que manifestaram interesse.

ao pesquisador promover seus apontamentos e resultados da pesquisa, seja eles positivos ou negativos em relação à expectativa inicial.

Após a experimentação, iniciamos a etapa principal da pesquisa na busca para atendermos o nosso objetivo. Faremos a análise dos discursos produzidos e discutiremos quais aspectos foram atendidos segundo nossas expectativas realizadas na análise *a priori.* Esse momento final da pesquisa será onde todos os dados serão confrontados e discutidos com base em nosso referencial teórico e as considerações mais importantes da pesquisa serão expostas.

O uso da Engenharia Didática em pesquisas como esta é justificada, pois esta metodologia pode “ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático” (ALMOULOUD, 2007, p. 171). Em nossa pesquisa, pretendemos nos apoiar nos elementos presentes nas diferentes fases da Engenharia Didática para desenvolver nossos procedimentos metodológicos.

Justificamos o fato de usarmos alguns elementos da Engenharia Didática e não ela em seu todo, pois apresentamos procedimentos que não pretendem seguir todas as características de cada fase. Nossa fase de experimentação, por exemplo, não irá constar com um conjunto de aulas (situações didáticas) como geralmente ocorre nesta metodologia. Nosso contexto se delimita na execução de atividades cujos conceitos não foram explicados pelo pesquisador, uma vez que são conteúdos que os estudantes já aprenderam nas aulas de matemática. Por isso, nossa pesquisa não tem foco no processo de ensino, mas sim na aprendizagem.

Como não realizamos uma análise da aplicação de uma sequência de aulas para diagnosticar se ela chegou aos objetivos traçados, logo não consideramos utilizar o conceito de validação. Esses detalhes, assim como outros, demonstram o uso de alguns elementos da Engenharia Didática como referencial metodológico.

4 A ANÁLISE DOS DISCURSOS MATEMÁTICOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS À LUZ DAS FUNÇÕES DISCURSIVAS

Neste capítulo, relatamos o processo de aplicação e análise dos problemas propostos aos estudantes. Na primeira seção, faremos uma análise *a priori* de cada problema aplicado, apresentando o enunciado completo, os objetos matemáticos que envolvem, observando características de suas possíveis resoluções e quais aspectos das funções discursivas esperamos que possam ser mobilizadas nos discursos dos estudantes. Comentaremos alguns conhecimentos matemáticos que os estudantes teriam que possuir para resolver cada um dos problemas. Esta pesquisa não pretende discutir com profundidade sobre estes aspectos de competências e habilidades, apenas apresentará possíveis conhecimentos que possam ser diagnosticadas pelas funções discursivas.

Na segunda seção teremos a etapa da experimentação de cada problema e sua respectiva análise *a posteriori.* Esses dois elementos serão discutidos em conjunto, onde vamos colocar figuras com respostas de alguns estudantes e realizar o estudo das produções, identificando e refletindo sobre o emprego das funções e operações discursivas. As figuras que serão utilizadas fazem parte do acervo obtido pela pesquisa e pela grande quantidade de produções apenas algumas serão expostas ao longo do texto, contudo, todas as demais respostas serão analisadas e os resultados principais apontados.

Na última seção deste capítulo, faremos um relato geral da experiência onde os principais aspectos sejam destacados, no que tange à importância das funções discursivas para a resolução dos problemas propostos. Buscamos trazer um olhar diagnóstico e reflexivo que sejam capazes de permitir que atinjamos nosso objetivo principal: compreender o papel das funções discursivas na aprendizagem matemática, em particular, na resolução de problemas.

4.1 ANÁLISE *A PRIORI* DOS PROBLEMAS

4.1.1 Análise *a priori* do Problema 1

Quadro 2 – Problema 1 aplicado na Turma A

Um chapéu de festa infantil tem o formato de um cone, com altura de 12cm e raio da base com 9cm. Determine: a) a área lateral desse chapéu. b) se aumentar o raio em 7cm, quanto aumenta a área lateral do chapéu?

Fonte: elaborado pelo autor.

O primeiro problema aplicado envolvia o conteúdo de geometria espacial, especificamente sobre o cone. Este problema exige do estudante o conhecimento sobre a área lateral de um chapéu em formato de cone, necessitando da aplicação de uma fórmula. Para atender ao item (a), primeiramente é preciso conhecer a relação interna das medidas de um cone que envolve o raio da base, a altura e a geratriz, visto que para calcular a área lateral é preciso determinar o valor da geratriz do cone. Empregando o Teorema de Pitágoras o estudante consegue obter a medida da geratriz, e em seguida, calcular a área lateral do cone em questão.

No item (b) os mesmos conhecimentos matemáticos anteriores serão necessários, porém, aqui existe a presença de uma situação de comparação entre dois resultados. O estudante deve refazer os cálculos do item (a) com o raio aumentado em 7cm e depois comparar as duas respostas para indicar o quanto aumentou a área lateral do chapéu.

No que se refere às funções discursivas, acreditamos que inicialmente os estudantes irão utilizar a função referencial por meio das operações de designação. Eles precisam designar letras para indicar as informações extraídas do problema para depois utilizá-las na aplicação da fórmula. Como o enunciado contém apenas a língua natural com alguns algarismos, acreditamos que algumas figuras possam ser construídas pelos estudantes com intuito de representar o cone do problema, e observar as relações internas que levarão ao Teorema de Pitágoras.

A forma da expansão discursiva formal, deve se fazer presente no momento de realizar os cálculos para obter a medida da geratriz e das áreas laterais que ambos os itens pedem, por meio de substuições com similaridades semióticas. No item (b), especificamente, a função apofântica com a operação de predicação pode ser usada por alguns estudantes com objetivo de criar uma frase que explique ao professor o quanto a área lateral foi aumentada com a mudança do raio. E ainda, esperamos a criação de frases que se interliguem com coerência para fins de explicação e descrição dos raciocínios dos estudanantes, conduzida pela expansão discursiva na forma natural por meio da operação de acumulação.

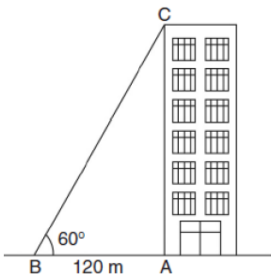
Por meio da função apofântica também poderemos atribuir um valor lógico que será avaliado conforme a organização do discurso, assim como o valor epistêmico que irá verificar se as regras internas da matemática foram utilizadas corretamente e o valor social que seria a intenção de atender ao problema dado pelo professor. Todos esses valores advindos da função apofântica também serão atribuídos nos demais problemas.

De forma geral, alguns conhecimentos que este problema envolve são: Reconhecer as relações entre as medidas internas do cone; domínio do Teorema de Pitágoras; Capacidade de calcular a área lateral de um cone. Dito isso, temos os elementos necessários para analisar as produções dos estudantes sobre este problema e diagnosticar as contribuições das funções discursivas na aprendizagem matemática.

4.1.2 Análise *a priori* do Problema 2

Quadro 3 – Problema 2 aplicado na Turma A

A figura a seguir mostra um prédio, onde temos 3 pontos destacados. Bruno encontra-se no ponto B da figura, enquanto Carla está no ponto C, e o térreo do prédio é o ponto A. Observando a figura, responda:



a) Que tipo de triângulo é formado pelos pontos ABC?

b) Qual a distância entre Bruno e Carla?

c) Qual a altura do prédio?

Fonte: elaborado pelo autor.

O problema 2 que também foi aplicado na Turma A, envolve o conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo e suas relações de seno, cosseno e tangente. O problema está estruturado com dois registros de representação semióticas, um deles é a língua natural que permeia o enunciado e o registro geométrico com a figura que complementa as informações e indica os valores numéricos.

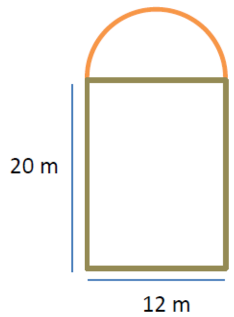
Para responder ao item (a) do problema, os estudantes terão que utilizar da função apofântica e criar um enunciado ou frase completa com a operação de predicação, que justifique qual tipo do triângulo que está referido na figura. Caso mais frases sejam criadas e conectadas para progredir um discurso, a expansão discursiva na forma natural será empregada para interligá-las utilizando a operação de acumulação. Ou ainda, podem utilizar diretamente uma designação na forma de uma categorização (indicando uma característica), para dizer que é retângulo.

No item (b) a determinação correta da relação triginométrica do cosseno é o ponto de partida, sendo essa uma expansão cognitiva, onde o estudante irá revelar que reconhece a relação e utilizar léxicos para designar e indicar a hipotenusa e o cateto adjcente. A expansão discursiva formal, com a operação de substuição será necessária para equacionar e resolver os algebrismos para calcular a medida solicitada. No item (c) processos discursivos similares devem ser encontrados para determinar a altura do prédio. Existe também a possibilidade de no item (c) ser utilizado o Teorema de Pitágoras ao invés da relação do seno, uma vez que realizando o item (b) corretamente, teremos a hipotenusa e cateto adjcente calculados.

A expansão discursiva na forma natural também poderá aparecer por meio de acumulações para expandir o raciocínio e também no caso de um estudante desejar criar argumentações para explicar alguma parte do problema ou justificar alguma resposta. Com este problema é possível diagnosticarmos a aprendizagem dos estudantes em relação a: compreender e aplicar as relações trigonométricas de um triângulo retângulo.

4.1.3 Análise *a priori* do Problema 3

Quadro 4 – Problema 3 aplicado na Turma A

Uma empresa possui um salão composto por um retângulo e uma metade de círculo, conforme a figura a seguir:  Considerando as medidas indicadas, calcule: a) Qual a área deste salão? (utilize o valor aproximado de $\pi = 3,14$) b) Digamos que a empresa irá pintar o piso deste salão e possui duas opções: o **pintor A** cobra 15 reais por metro quadrado e mais uma taxa fixa de deslocamento até o local de 400 reais. Já **pintor B** cobra 17 reais o metro quadrado e não cobrará nenhuma taxa de deslocamento. Qual pintor sairá mais barato? Justifique.

Fonte: elaborado pelo autor.

O problema 3 foi o último aplicado na Turma A, e trata do conteúdo de geometria plana, especificamente de área de quadrilátero e círculo. O enunciado dispõe do registro em língua natural, numérico e geométrico, contendo as informações necessárias para responder aos dois itens solicitados. No item (a) os estudantes precisavam primeiro entender que a área da figura que representa o salão poderá ser calculada por meio da soma da área de duas figuras planas. Acreditamos que a estratégia utilizada será calcular as duas figuras separadamente e depois obter a soma total. E no item (b) temos uma proposição em que alguns cálculos devem ser realizados para comparar qual das duas opções de pintores é a mais vantajosa.

Sobre o uso das funções discursivas neste problema, o cálculo das áreas das figuras exige a evocação das fórmulas e aplicação dos números dispostos, designando os termos. O momento em que as funções e operações discursivas serão mais significativas, deve ocorrer no item (b), que necessita de alguma argumentação matemática para justificar a resposta. Acreditamos que teremos a construção de proposições com língua natural e simbólica (palavras e números),o uso da operação de predicação (função apofântica) para formar frases completas e a expansão dos discursos deve acontecer para criar descrições que possam ser necessárias, principalmente na língua natural.

A construção de frases, descrições, explicações, deve necessitar de certas formas de expansa discursiva, principalmente a natural e formal. Provalvelmente as respostas devem usar a língua materna de forma especializada, e a amplicação do texto deve ser pela operação de acumulação, onde a evolução do discurso depende de acumular novas informação ao conteúdo. Alguns conhecimentos matemáticos que podem ser avaliados com este problema são: Calcular a área de quadriláteros e círculos; Interpretar e resolver situações que envolvam comparações entre resultados por meio de operações matemáticas.

4.1.4 Análise *a priori* do Problema 4

Quadro 5 – Problema 4 aplicado na Turma B

A seguir temos duas situações que envolvem proporções. Leia e responda: a) Se um homem em 10 horas de trabalho consegue erguer 8 metros de um muro. Quantos metros do mesmo tipo de muro 5 homens, trabalhando do mesmo jeito do que os primeiros, irão construir em 10 horas de trabalho? b) Se um homem em 10 horas de trabalho consegue erguer 8 metros de um muro. Quanto tempo vão levar 5 homens, trabalhando do mesmo jeito do que os primeiros, para construir o mesmo muro de 8 metros? c) Comparando os dois problemas, a qual principal diferença entre eles?

Fonte: elaborado pelo autor.

O problema 4 foi aplicado na Turma B e envolve conhecimentos sobre razão e proporção, focando em regra de três simples e composta. O problema dispõe de duas situações muito parecidas, porém, com elementos sutis que mudam o tipo de proporção tratada em cada enunciado. No item (a) temos somente grandezas que são diretamente proporcionais, enquanto no item (b) existe uma grandeza que é inversamente proporcional às outras, implicando em mudanças na operacionalização. Por fim, no item (c), o estudante é confrontado a refletir sobre a diferença entre os enunciados dos dois itens anteriores, a fim de verificarmos se houve a clareza na distinção conceitual matemática que eles possuem.

Tanto no item (a) quanto no item (b), as resoluções provavelmente devem começar com a designação de alguma letra para indicar os tipos de grandezas, e montar o esquema que o problema representa. Os estudantes já tiveram contato com regra de três simples e composta, e apesar do problema poder ser resolvido somente utililizando duas grandezas (visto que a terceira o valor não se alterou), acreditamos será priorizar a estratégia de criar uma regra de três composta. Isso se deve pelo fato que eles irão identificar três grandezas no enunciado, o que deve induzir a trabalhar com as três dentro dos cálculos.

A forma de expansão do tipo formal irá levar as equações necessárias, com uso da operação de substuição, e ainda, a expansão cognitiva deve prevalecer no momento que eles precisam saber quais grandezas são ou não diretamente proporcionais, uma vez que isso implicará em mudanças algébricas na resolução. Já no último item, a expansão do tipo natural deve ser empregada, criando enunciados com a operação de predição da função apofantica e os interligando, de forma coerente e com as justificativas matemáticas corretas. Poderemos verificar o domínio de certos conhecimentos como: Identificar grandezas diretamente ou inversamente proporcionais; Resolver problemas com regra de três simples ou composta.

4.1.5 Análise *a priori* do Problema 5

Quadro 6 – Problema 5 aplicado na Turma B

Juliana foi à feira para comprar frutas. Ela comprou 2 quilos de laranja e 4 quilos de maçã e pagou R$ 28,00 reais. Sabendo que os preços dessas frutas somam R$8,00 responda: a) Quanto custa o quilo de cada fruta? b) Se Juliana comprar 3 quilos de cada fruta, uma nota de 50 reais seria suficiente para pagar a conta? Explique sua resposta.

Fonte: elaborado pelo autor.

O problema 5, que também foi aplicado na Turma B, finaliza o conjunto de problemas desta pesquisa. Ele aborda sistemas lineares com duas incógnitas, desde a construção das equações até a sua resolução. O enunciado possilita os estudantes a criarem um sistema linear 2x2, onde o resultado responde ao item (a) do problema e também é necessário para atender ao item (b).

Sabemos que outras estratégias que não usam diretamente um sistema linear possam ser empregados pelos estudantes, mas como a turma B teve aulas sobre sistema lineares algumas semanas antes, acreditamos que irão recorrer ao uso de sistemas. Se assim for, o primeiro passo será a designação pura de léxicos associativos (letras) para representar as duas variáveis do problema: o preço do quilo da laranja e da maçã. A partir disso, a etapa mais imporante é a estruturação correta das duas equações que irão compor o sistema linear.

Neste problema em específico, algumas formas diferentes da operação de designação de objetos deve ser encontrada. No caso da álgebra, as designações obtém uma grande importância para a manipulação correta da linguagem algébrica (BRANDT; MORETTI, 2018). Entendendo que muitos alunos podem escolher usar o método da substuição, uma designação funcional pode ser necessária, pois será preciso isolarem uma variável em função de outra. As redesignações também são constantemente elaboradas quando existe uma designação inicial e em seguida, ela é transformada em outra.

Nesse momento, podemos pensar que as designações inicias das letras serão compostas agora com léxicos sistemáticos (números) e assim serem redesignados, ou seja, com similaridade semiótica irão retomar as letras anteriores e relacioná-las para apontar uma nova designação. Tendo feito essa etapa corretamente, o próximo passo recorre a forma de expansão discursiva formal, com a operação de substuição, onde o discurso será expandido com novas equações inferidas a partir das equações iniciais do sistema.

Esses processos devem ser suficientes para o item (a), enquanto o item (b) exige uma nova situação que deve ser resolvida com algumas operações envolvendo os léxicos sistemáticos dispostos, e em seguida, elaborarem uma frase que argumente justifique a resposta deste item. Poderemos avaliar aqui as aprendizagens de algumas conhecimentos matemáticos: Estalecer relações algébricas entre variáveis; construir um sistema linear a partir de um problema; resolver situações-problema que envolvem operações básicas.

4.1.6 Síntese das análises *a priori* dos problemas

Por meio desta etapa, foi possível traçarmos algumas previsões e possibilidades que possam ser escolhidas pelos estudantes para responderam aos problemas. Acreditamos que a análise dos discursos à luz das funções discursivas de Duval terá potencial de contribuirmos no diagnóstico das aprendizagens dos estudantes, bem como entender como desenvolvem suas estratégias discursivas de argumentação, explicação, raciocínio e descrição em matemática.

De todas as funções e operações discursivas, a que mais se destacou em nossa análise *a priori* foi a função referencial operando na designação de objetos. Em todos os problemas, o início de um discurso (independente do registro de representação) começou com a designação de algum elemento. Seja a designação pura com léxicos sistemáticos ou associativos, seja uma palavra de categorização, a determinação de existência ou unicidade, ou ainda uma descrição que combine todos os outros, a função referencial designando objetos deve ser a mais utilizada.

A função apofântica também tem papel fundamental, uma vez que ela acontece com a operação de predicação, criando frases completas onde os estudantes podem escrever sentenças explicativas. O ato ilocutório verbal teve presença pois como a comunicação professor-aluno foi realizada de forma assíncrona, as funções da fala não apareceram. E ainda, em todos os problemas a função apofântica nos permite atribuir um valor lógico de verdade ou não, o valor epistêmico que depende das regras internas do funcionamento de cada conteúdo e o valor social que era igual para todos os problemas com objetivo de atender ao professor.

Sobre as expansões discursivas, a forma de expansão formal tem destaque nos problemas que necessitam de cálculos algébricos, sendo eles realizados pela operação de substituição, com similaridades semióticas, já que os mesmos léxicos eram recuperados para dar continuidade aos discursos. A expansão cognitiva também aparece quando algumas palavras ou símbolos adquirem um caráter especializado nas explicações ou descrições. E a expansão natural, faz-se presente nos itens em que alguma justificativa é necessária, visto que provavelmente a língua natural, com similaridade semântica, sendo empregada na construção e ligação de frases que irão compondo a progressão de um discurso explicativo, descritivo ou narrativo.

Fica evidente que a construção de um discurso em matemática não depende da mobilização de uma única função ou operação discursiva. Atuando em conjunto, elas estabelecem conexões e complementações entre si, que tornam um discurso completo, com sentido, coerência e validade. O foco do problema não será a questão de acertar ou não a resposta, mas avaliar a estratégia utilizada para respondê-lo e observar como os discursos são estruturados.

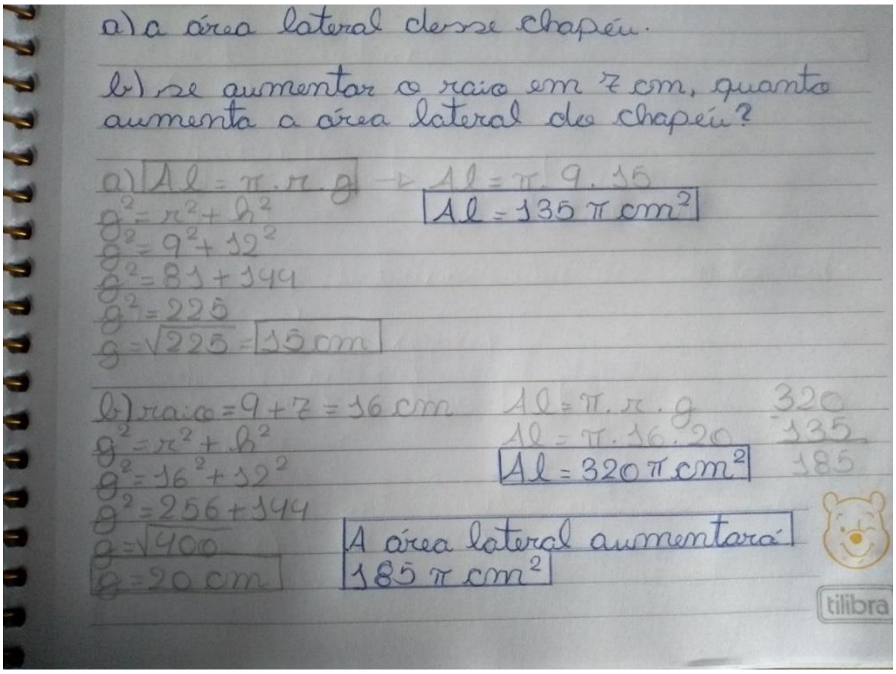
Estas reflexões fundamentadas na teoria de Duval, poderá validar os discursos do ponto de vista da argumentação matemática, diagnosticando elementos discursos que revelam as aprendizagens dos estudantes. Outros tipos de resolução diferentes do que temos previsto devem aparecer e os mesmos serão trazidos para o debate, visto que não buscamos determinar uma forma mais correta de criar um discurso, mas ver em suas diversidades quais são suas contribuições para a aprendizagem matemática.

4.2 A APLICAÇÃO E ANÁLISE DOS PROBLEMAS

4.2.1 Aplicação e análise do Problema 1

Iniciamos aqui o relato sobre a experiência de aplicar e analisar as resoluções dos estudantes ao Problema 1. Apresentaremos imagens com algumas das resoluções dos estudantes, que sirvam como representações gerais do que foi encontrado na análise, contribuindo para o entendimento das estratégias mais utilizadas, seja nos momentos de acerto ou erro do problema. A seguir, apresentamos a resolução do Estudante A3:

Figura 4 – Resolução do Estudante A3 ao Problema 1



Fonte: acervo do autor.

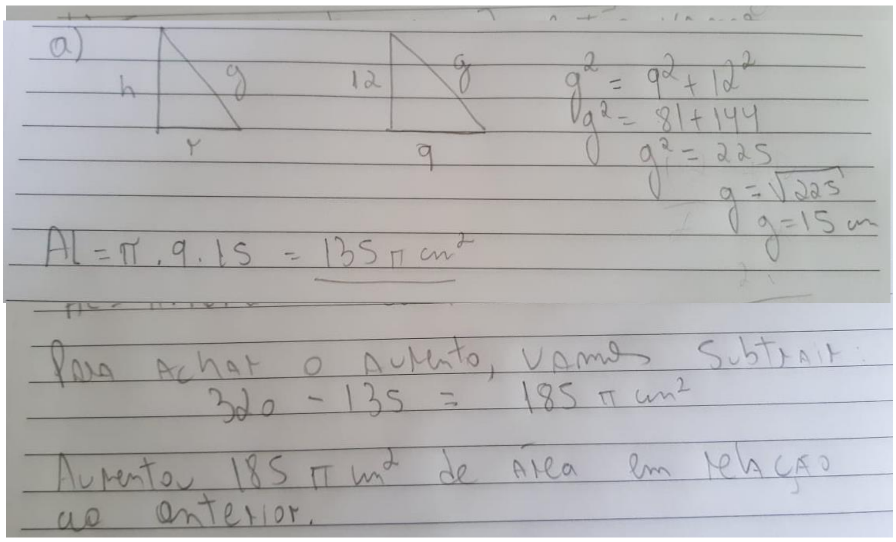
A escolha de iniciar apresentando a resolução do Estudante A3 deve-se ao fato de que sua estratégia também foi empregada de forma similar pela maioria dos estudantes que obtiveram êxito. O estudante iniciou o item (a) apresentando a fórmula da área lateral de um cone, e em seguida, o teorema que relaciona a geratriz (g), altura (h) e o raio da base do cone (r). Ele designou corretamente os valores de cada elemento e com uso da expansão formal, os cálculos com a operação de substuição, até obter a medida da geratriz do cone.

Em seguida, mobilizou novamente a fórmula da área lateral do cone e obteve êxito em calcular seu valor. Os únicos recursos discursivos utilizados até aqui foram léxicos sistemáticos (números) e léxicos associativos (letras), não recorrendo ao emprego da língua natural para construção de frases/enunciados. Mostrou que compreendeu o funcionamento da relação das medidas internas de um cone, bem como a aplicação do Teorema de Pitágoras.

No item (b) o estudante inicia apontando qual será o novo raio e depois repete o processo realizado no item (a) para obter a área lateral atualizada com a nova medida do raio. No momento de mostrar quanto a área lateral aumentou em relação a primeira, o estudante criou uma pequena frase em língua natural, explicitando o valor encontrado e fazendo uso da função apofântica e sua operação de predicação. Podemos atribuir para este discurso o valor lógico de verdade, pois as respostas estão corretas e responderam ao problema. O discurso também tem um valor epistêmico visto que respeitou as fórmulas e regras matemáticas, bem como o valor social, sendo essa a intenção de responder ao problema apresentado pelo professor.

Com o discurso matemático construído pelo estudante A3, podemos observar que ele aprendeu os conceitos matemáticos que este problema envolvia. Esta linha de raciocínio foi reproduzida por grande parte dos estudantes, como já esperado em nossa análise prévia. Mesmo assim, alguns estudantes acrescentaram outros elementos em sua resolução, como mostra a figura 5:

Figura 5 – Resolução do Estudante A10 ao Problema 1



Fonte: acervo do autor.

O Estudante A10 resolveu o item (a) de forma similar ao estudante A3, mas acrescentou uma figura que representasse o triângulo retângulo interno ao cone em questão. O uso do recurso geométrico com a designação correta das medidas reforça que o estudante compreendeu essa relação interna do cone, visto que ele não somente empregou números na fórmula, mas deixou claro que entende o motivo que leva estes números a uma possível aplicação do Teorema de Pitágoras.

O que nos chamou atenção nesta resolução foi a presença maior de frases com fins explicativos no item (b). Por meio da operação de predicação da função apofântica, frases com sentido completo foram construídas para estabelecer uma comunicação com o professor. A expansão natural se fez presente expandindo este discurso com operação de acumulação, onde as frases estão relacionadas oferecendo novas inferências sobre o objeto.

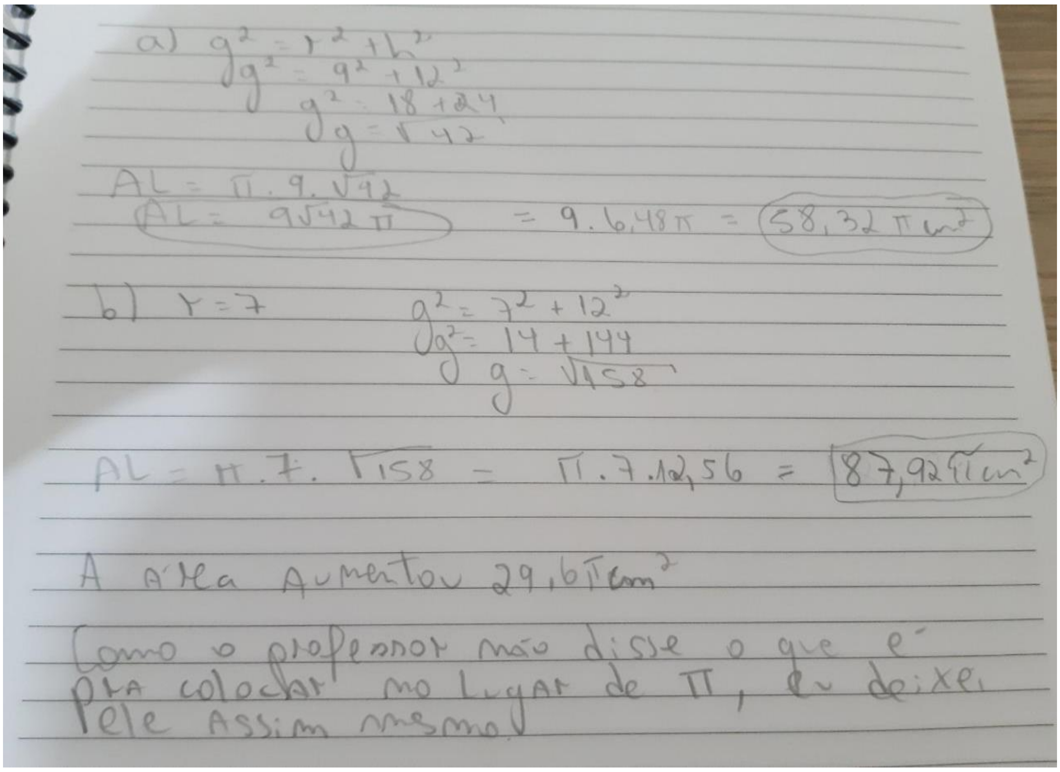
Percebemos que as mesmas aprendizagens desenvolvidas pelo estudante A3 ocorreu com o Estudante A10, porém este escolheu uma argumentação matemática mais detalhada que oferece outros subsídios para o professor verificar sua compreensão do conteúdo. O valor lógico de verdade, bem como o epistêmico e social podem ser atribuídos também, pois o discurso respeita o funcionamento da matemática e atende ao pedido do professor.

Apesar da maioria dos estudantes construíram seus discursos no registro algébrico, alguns optaram em adicionar elementos no registro escrito, progredindo seus raciocínios pela língua materna como fez o estudante A10. A complementação da linguagem formal e natural utilizada por ele reforça que diferentes registros de representações podem contribuir significativamente com a progressão de discursos e argumentações matemáticas.

A expansão cognitiva permeou o discurso quando alguns léxicos foram utilizados de forma especializada, como por exemplo a letra *g* para geratriz ou h para altura. Ela ocorreu de forma conjunta com a designação de objetos, pois ao mesmo tempo que a letra *h* foi usada para representar um determinado elemento do cone, o estudante realizou a expansão cognitiva para que esta letra fosse necessariamente indicar a altura.

Agora veremos um outro tipo de situação em que o estudante não obteve êxito em seu caminho de resolução e como as funções discursivas mostram suas incompreensões:

Figura 6 – Resolução do Estudante A14 ao Problema 1



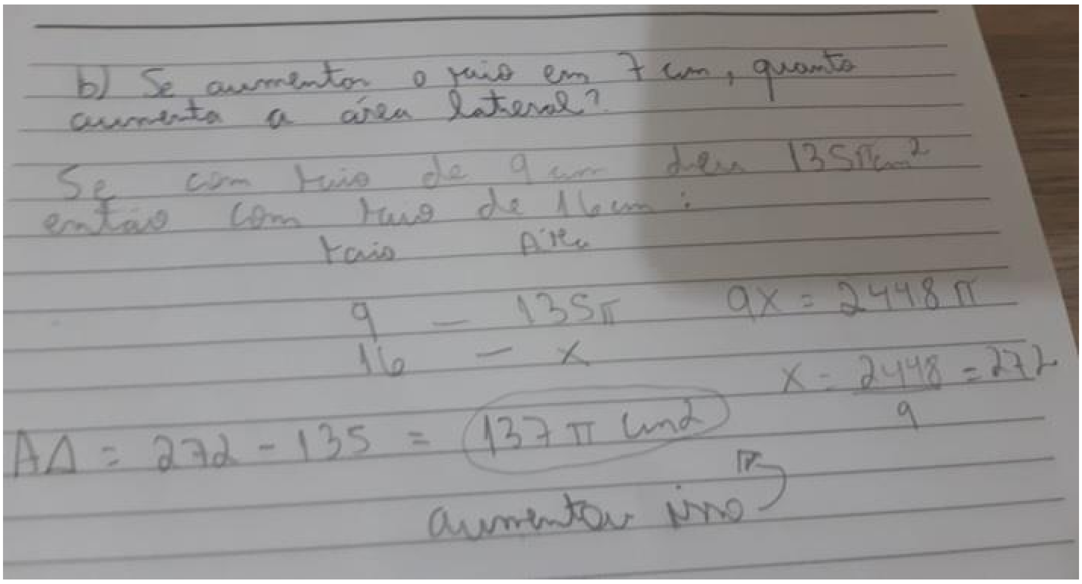
Fonte: acervo do autor.

O estudante A14 iniciou o item (a) sua resolução de forma similar que os outros, aplicando os valores da altura e raio da base para determinar a medida da geratriz, designando corretamente os termos iniciais. Contudo, houve um erro do aluno na operacionalização das potências presentes na fórmula, ele multiplicou a base por 2 ao invés de obter os seus quadrados. Este passo do estudante não admite valor lógico nem epistêmico, pois desrespeita as regras de potenciação e obtém um valor final diferente do esperado. Veja que as designações de números/letras aconteceram corretamente, porém a expansão formal com operação de substituição, com similaridade semiótica, os números não foram tratados corretamente, indicando que o estudante ainda não domina todas as atividades matemática dentro do registro de representação numérico.

No item (b), além do mesmo tipo de erro na potência, ainda temos um erro de natureza interpretativa. O estudante não entendeu que o enunciado solicitava que ele somasse 7 unidades na medida do raio e efetuou os cálculos usando o 7 como valor total do raio da base. Esses dois erros cometidos pelo estudante nos levaram a considerar dois pontos: o estudante não domina as regras básicas da potenciação, ao menos parece não as recordar; o estudante não teve atenção na leitura do problema levando-o a cometer erro de interpretação.

No que diz respeito aos conhecimentos sobre os conceitos de cone para resolver o problema, a forma como o discurso foi construído aponta que ele entendeu as estruturaras internas do cone e que tem condições de obter sua área lateral. Seu erro não envolve incompreensões geométricas, mas sim de natureza aritmética, ponto este que pode ser percebido pelo uso das funções e operações discursivas.

Figura 7 – Resolução do Estudante A21 ao item (b) Problema 1



Fonte: acervo do autor.

O estudante A21 fez em seu item (b) um discurso da qual não esperávamos encontrar, onde ele recorreu a uma regra de três simples como estratégia de resolução. Com o conhecimento de razão e proporção, ele comparou a medida do raio inicial e sua respectiva área com a medida do raio aumentado, buscando obter a área correspondente. Ele usou a função apofântica e criou frases para se comunicar com o professor, explicando a situação que iria levar a formar a regra de três em questão.

Contudo, sabemos que mesmo que ele tenha designado os termos corretamente, este tipo de problema não pode ser resolvido por uma regra de três, pois não se tratam de duas grandezas proporcionais. Essa situação nos revela que é preciso termos cuidado ao ensinar a regra de três aos estudantes para não levarmos a um equívoco de compreensão, ele pense que toda situação com duas grandezas que se relacionam de alguma forma possa ser resolvido por este caminho. Notamos que todo o processo de expansão natural (escrita) e formal (algébrico) foi feito corretamente, porém, não é possível atribuirmos o valor lógico de verdade uma vez que não responde corretamente ao problema.

De forma geral, a análise das questões *a posteriori* chegou muito próximo das expectivas prévias que tínhamos. Algumas imagens foram escolhidas para representar situações mais comuns que notamos nos discursos, e com isso, alguns pontos importantes podem ser destaque sobre este primeiro problema:

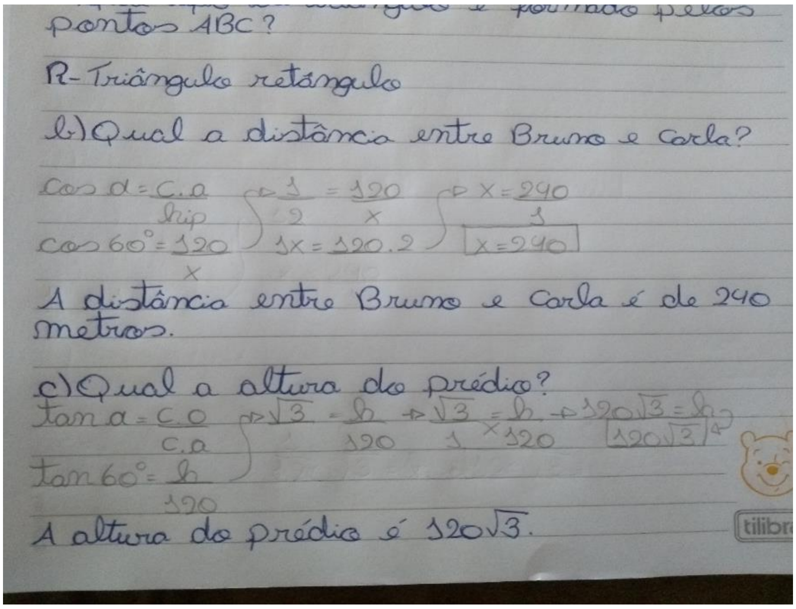
- A função referencial com a designação de objetos prevaleceu em todas as resoluções, algumas foram do tipo pura, outras categorização e determinação.
- A função apofântica também teve papel essencial para construção de frases completas onde o estudante explicou seu passos e comunicou-se com o professor;
- A progressão dos discursos privilegiou a expansão discursiva formal, onde a operação de substituição foi crucial para resolver os algebrismos que as equações e fórmulas exigiam. Em momentos que alguma explicação fosse necessária a expansão discursiva na forma natural também foi empregada, cujos desenvolvimento do discurso ocorreu pela operação de acumulação de informações;
- Dos 25 estudantes que fizeram este problema, 18 obtiveram êxito com estratégias similares aos estudantes A3 e A10, destacados nas figuras 4 e 5;
- Dos 7 estudantes que não chegaram ao resultado correto, 4 deles cometeram erros aritméticos como por exemplo, errar nas potências, erros na obtenção do valor da geratriz ou esquecer de realizar a comparação das áreas do final. Outros 2 estudantes não souberam compreender a pergunta do item (b) e não somaram sete unidades ao raio anterior. E 1 estudante errou devido ao uso da regra de três simples;
- Por se tratar de um problema que exige a aplicação de uma determinada fórmula, os discursos e as estratégias para sua resolução se tornaram limitadas. Mesmo assim, percebemos que pequenas alterações na forma de expandir os discursos podem evidenciar incompreensões sobre os conceitos matemáticos;
- Oito estudantes fizeram o desenho do triângulo retângulo interno ao cone, para designarem os termos e, em seguida, aplicarem o Teorema de Pitágoras. Isso reforça a ideia de que muitos estudantes precisam ter as visualizações das situações matemáticas estudadas;

- Pelo olhar das funções discursivas, percebemos que os erros não são diretamente relacionados aos conceitos sobre o cone, mas erros de outra natureza como os que advém de conceitos anteriores mal consolidadas e erros de atenção/interpretação.

4.2.2 A aplicação e análise do Problema 2

Vamos apresentar a análise do Problema 2 que tratava de conhecimentos de geometria, em particular, das relações trigonométricas de um triângulo retângulo. A seguir, apresentamos um tipo de discurso que foi o mais comum para resolver este problema, empregando as relações de seno, cosseno e tangente para sua resolução:

Figura 8 – Resolução do Estudante A8 ao Problema 2



Fonte: acervo do autor.

Para responder ao item (a) que solicitava que tipo de triângulo o problema continha, o Estudante A8 fez uma designação em língua natural do tipo categorização, atribuindo uma característica do objeto matemático que neste caso era do tipo *retângulo.* No item (b) o estudante recorreu à relação trigonométrcica do cosseno, sendo esta uma expansão discursiva na forma cognitiva, pois o estudante precisou recorrer a um enunciado que evoque a relação trigonométrica em questão.

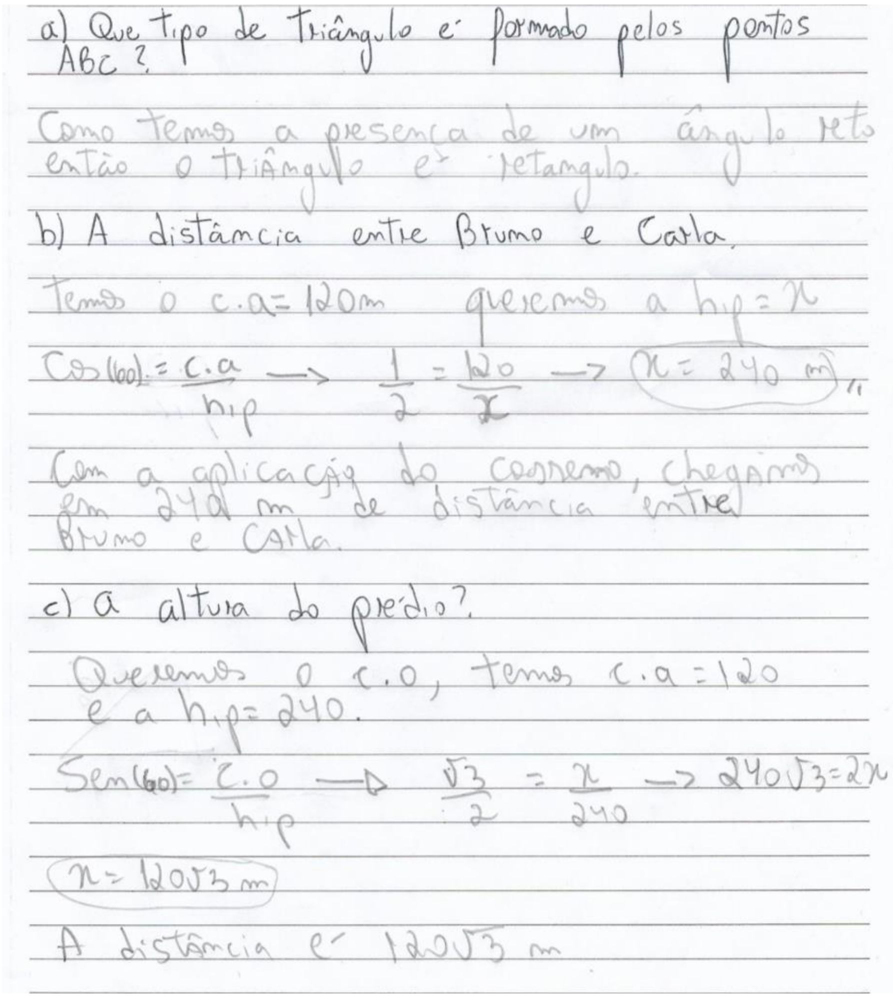
O estudante escolheu usar *cos* para desigar o cosseno, assim como *c.a* para cateto adjecente e *hip* para hipotenusa. Quando ele afirma que cos (60°) = $\frac{120}{x}$, o estudante está indicando uma referência ao objeto, estabelecendo que o valor do cos(60°) como uma razão entre duas medidas do triângulo. Como o estudante fez esse processo corretamente, o professor pode inferir que houve uma expansão cognitiva correta, pois ele precisou formular um enunciado do tipo *a relação trigonométrica que relacionada as medidas da hipotenusa com o cateto adjacente é o cosseno*. Se ele tivesse usado a relação trigonométrica incorreta, poderíamos inferir que não houve a compreensão do objeto matemático trabalhado.

Em seguida, houve as designações dos léxicos associativos (x para representar a hipotenusa) e sistemáticos (120 indicando a medida do cateto adjacente). O discurso seguiu a expansão formal efetuando a operação de substituição, com similaridade semiótica, onde os mesmos elementos estavam recebendo operações de tratamento algébrico. Após os cálculos corretos, o estudante obteve a medida da distância igual a 240 metros e construiu uma frase com a função apofântica, com a operação de predicação onde ele informou ao professor que *a distância entre Bruno e Carla é de 240 metros.*

No item (b) o estudante evocou a relação trigométrica da tangente, novamente indicando a presença de uma expansão discursiva cognitiva, onde um enunciado do tipo a *tangente é a relação que usa o cateto oposto e adjacente* foi necessária para que ele utilizasse essa fórmula. A letra *h* foi designada para representar a altura do prédio e o desenvolvimento do discurso seguiu a mesma linha do item (a), prevelecendo a expansão formal e a operação de predicação para comunicar a resposta ao professor.

Percebemos nesta resolução que o estudante se apropriou corretamente dos conceitos que envolvem as relações trigonométrias em um triângulo retângulo, revelado pelas evocações corretas do cosseno e tangente, bem como o êxito na progressão de seu discurso. Seu discurso admite valor lógico de verdade, bem como epistêmico e social, respeitando as regras matemáticas e atendendo ao professor. Veremos a seguir outro exemplo, onde o estudante também teve êxito em sua resolução, mas mobilizou outras funções discursivas:

Figura 9 – Resolução do Estudante A23 ao Problema 2


a) Que tipo de Triângulo é formado pelos pontos ABC?

Como temos a presença de um ângulo reto então o triângulo é retângulo.

b) A distância entre Bruno e Carla.

Temos o c.a = 120m queremos a hip = x

$\text{Cos}(60) = \frac{c.a}{hip} \longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{120}{x} \longrightarrow x = 240\ m$

Com a aplicação do cosseno, chegamos em 240 m de distância entre Bruno e Carla.

c) a altura do prédio?

Queremos o c.o, temos c.a = 120 e a hip = 240.

$\text{Sen}(60) = \frac{c.o}{hip} \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{240} \longrightarrow 240\sqrt{3} = 2x$

$x = 120\sqrt{3}\ m$

A distância é $120\sqrt{3}$ m

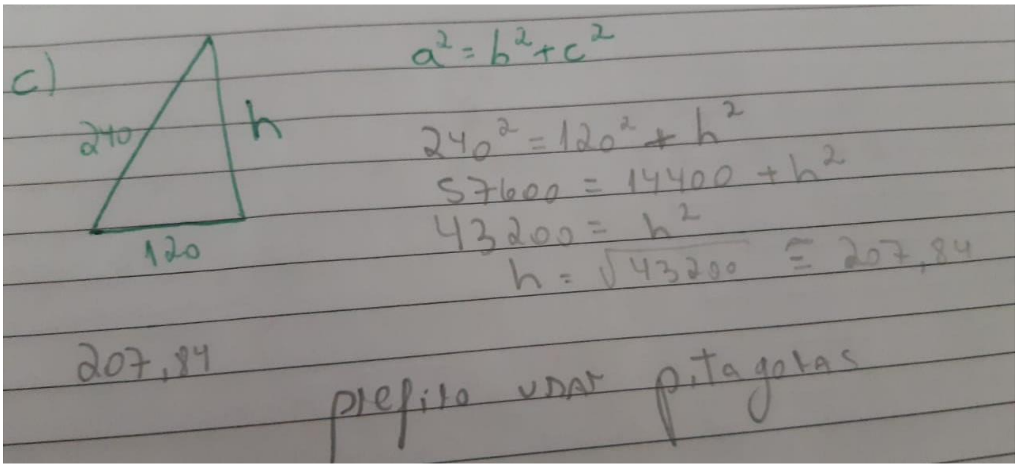
Fonte: acervo do autor.

O Estudante A23 resolveu o item (a) de forma correta, utilizando a operação de predicação da função apofântica para criar frases completas e coerentes que falassem do objeto matemático em questão e ainda, a operação de categorização e descrição da função referencial. Veja que o objetivo da frase era descrever algo sobre o triângulo, designando termos sobre ele que justificasse ser do tipo retângulo. Aqui mostrou entender que o que classifica um triângulo em retângulo é a presença de um ângulo de 90°, que mesmo não estando presente na figura, pode ser inferido com base na perpendicularidade do chão com o prédio.

Nos itens (b) e (c) ele seguiu a linha parecida com o estudante anterior, designando as relações trigonométricas com os léxicos necessários. Vemos que em ambas alternativas, além de usar a expansão formal com as substituições para desenvolver a parte algébrica, ele também recorreu a língua materna para expandir o discurso com explicações e justificativas de sua estratégia de resolução, com a operação de acumulação. Seus argumentos escritos e simbólicos possuem valor lógico de verdade, o valor epistêmico também é respeitado pois suas explicações possuem coerência matemática e o valor social é atribuído na intenção de responder o problema ao professor.

Devemos perceber que no item (c) ele não seguiu o mesmo raciocínio do estudante anterior e resolveu usar o seno, ao invés da tangente. A estratégia escolhida mostra que o Estudante A23 também compreendeu em quais momentos pode empregar as diferentes relações trigonométricas e indica uma expansão discursiva cognitiva, no momento que ele designou o seno como a razão do cateto oposto com a hipotenusa. Mesmo com recursos diferentes utilizados, ele demostra ter domínio dos conhecimentos esperados e isto pode ser verificado por todas as suas designações e expansões discursivas mobilizadas.

Figura 10 – Resolução do Estudante A2 ao Problema 2

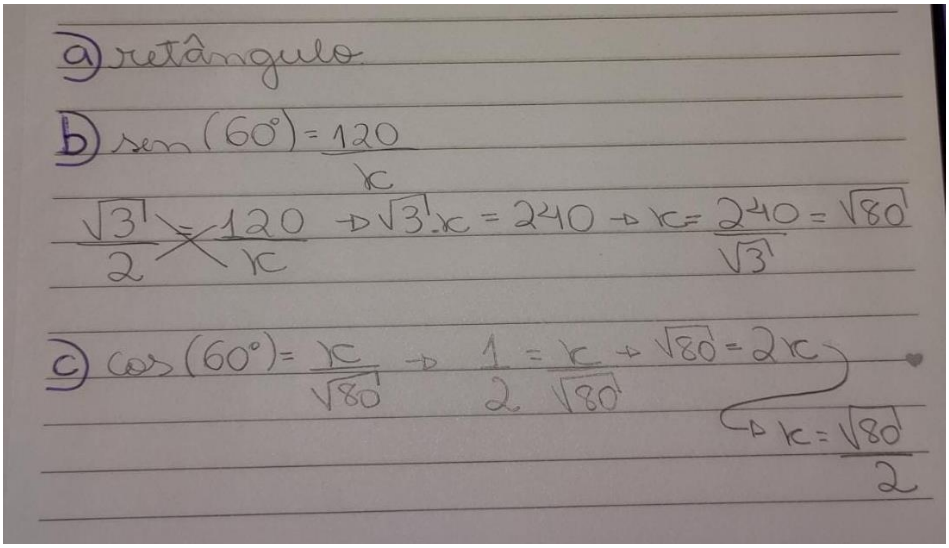


Fonte: acervo do autor.

Na figura 10 vemos um outro caminho adotado pelo Estudante A2 para resolver ao item (c), onde ele decide não usar uma razão trigonométrica para calcular a altura do prédio, optando pelo Teorema de Pitágoras. O desenvolvimento desse discurso ocorreu primeiramente por uma expansão discursiva do tipo cognitiva, pois o estudante precisou considerar um enunciado do tipo: *Se eu tenho um triângulo retângulo e sei a medidade de dois lado, é possível utitlizar o Teorema de pitágoras*. O discurso foi iniciado com a designação dos elementos do teorema que em seguida, foram redesignados pelos números que cada um representava.

A continuidade do discurso foi conduzido por expansões do tipo formal, utilizando os léxicos sistemáticos e associativos para realizar os tratamentos simbólicos e algébricos. Por fim, o estudante obteve êxito em sua resposta e acrescentou uma pequena frase, possível pelo uso da operação de predicação, onde escreveu: *prefiro usar pitágoras.* Com isso, ele comunicou ao professor que não quis usar as razões trigonométricas como fez no item anterior, deixando claro que preferiu outro caminho. E mesmo assim foi possível admitirmos o valor lógico de verdade, assim como o epistêmico que esteve presente pela argumentação matemática correta e o valor social atendido ao professor.

Figura 11 – Resolução do Estudante A1 no Problema 2



Fonte: acervo do autor.

Na figura 11, temos um exemplo de resolução que não obteve êxito e muitas inferências sobre a aprendizagem do Estudante A1 puderam ser encontradas com seu discurso. No item (a) temos uma designação de objetos do tipo categorização, classificando o triângulo de forma correta. No item (b) a resolução inicia com a designação incorreta da relação trigonométrica e podemos perceber que isso ocorreu por uma incompreensão na identificação dos catetos opostos e adjacentes. Vemos que a fórmula do seno em si está correta, mas não poderia ser usada neste momento, pois o número 120 não representa o cateto oposto.

Ainda no item (b) podemos notar outro erro matemático, que ocorreu no final da expansão discursiva realizada, no momento de isolar o léxico associativo x. O Estudante A1 precisava efetuar a operação $\frac{240}{\sqrt{3}}$ e fez da seguinte forma: primeiro dividiu o 240 por 3 e obteve 80, depois adicionou a raíz quadrada que havia no denominador no 80, obtendo como resposta final $\sqrt{80}$. Esse discurso não tem valor lógico de verdade e nem valor epistêmico, pois a operação realizada está incorreta do ponto de vista interno da matemática. Já no item (c), temos outro erro na designação da relação trigonométrica onde o estudante evoca a fórmula do cosseno e apesar dos tratamentos algébricos serem construídos corretamente, eles não possuem valor lógico, pois não responde ao problema.

Percebemos na resolução deste estudante dois tipos diferentes de erros, um de natureza conceitual e outro de natureza operacional (aritmética e algébrica). Os erros de natureza conceitual foram expostos no momento que o estudante evocou a relação trigonométrica errada para o resolver o problema, evidenciando que não houve uma efetiva aprendizagem da identificação dos lados de um triângulo, confundindo os catetos. Os erros de natureza operacional são observados nos tratamentos incorretos na expansão discursiva formal usada no item (b). Este erro não está relacionado diretamente com os conceitos trigonométricos, mas com a dificuldades do estudante em progredir seu discurso com a linguagem algébrica formal.

A partir das análises realizadas do Problema 2, onde algumas foram expostas nesta seção, podemos inferir alguns aspectos relevados pela análise. São eles:

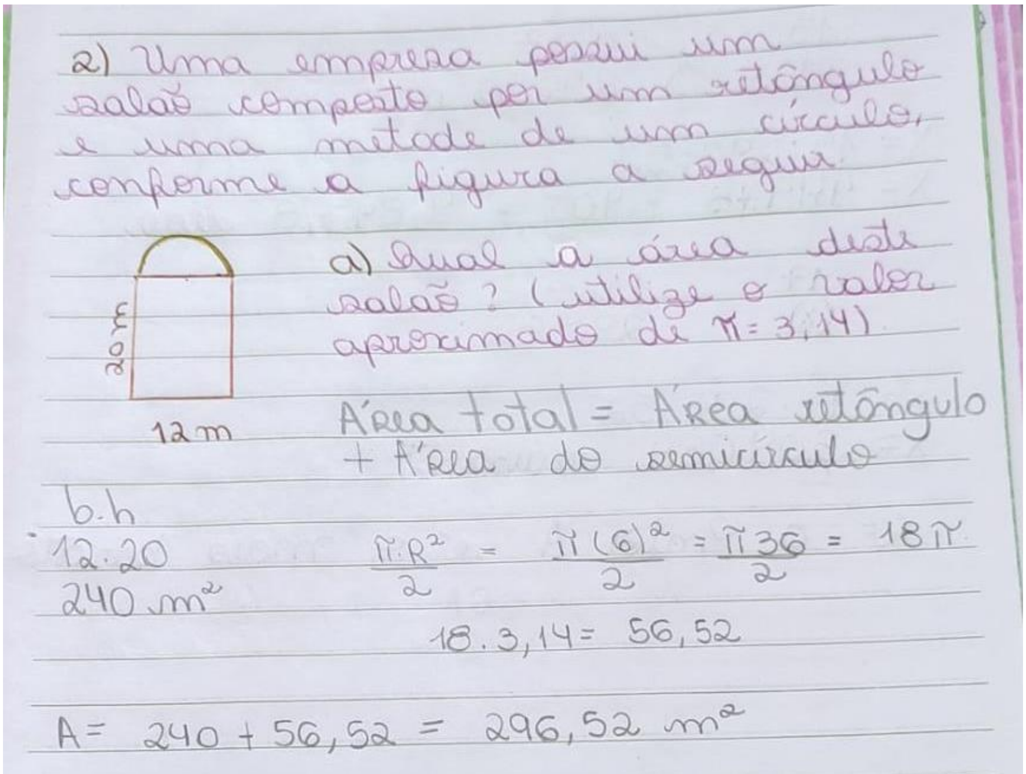
- A designação de objetos teve destaque nas resoluções, permitindo aos estudantes indicarem diferentes léxicos para representar os catetos e a hipotenusa, bem como evocar relações trigonométricas.
- A expansão cognitiva tem importante papel, pois ela esteve presenta nos momentos em que os estudantes recorriam a alguns léxicos com emprego especializado, como nos momentos em que designaram as relações trigonométricas em que as letras tinham papel especializado e específico para determinado conceito matemático.
- A expansão formal e natural foram fundamentais para desenvolver os cálculos algébricos, assim como a expansão natural que permitiu o desenvolvimento de raciocínios e explicações.
- Dos 25 estudantes que fizeram o Problema 2, tivemos 20 acertos e 5 erros. Estes erros ocorreram pelo uso errado da relações trigonométricas e também pela não capacidade de realizar os tratamentos algébricos pertinetes, fazendo com que os discursos não possuíssem valor lógico e epistêmico. Esses erros revelaram que além de incompreensões geométricas, os estudantes possuem lacunas na consolidação dos tratamentos em registros algébricos e simbólicos.
- O olhar prático dado às funções discursivas permitiu que pudéssemos identificar os erros matemáticos conceituais e os operacionais, pois compreeender a natureza de cada

erro contribuiu para o diagnóstico da aprendizagem.

4.2.3 A aplicação e análise do Problema 3

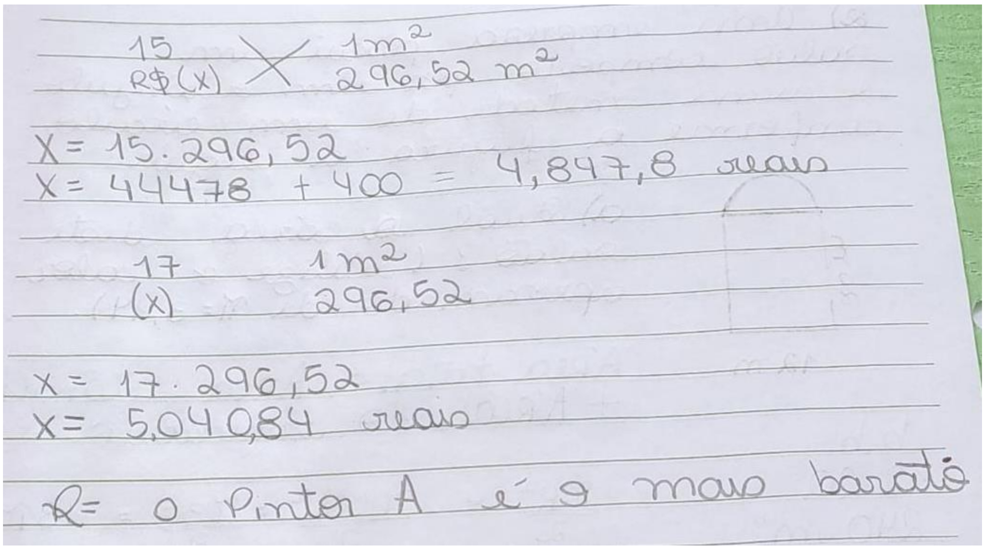
A seguir apresentamos duas figuras contendo as resoluções dos itens (a) e (b) do Problema 3 pelo Estudante A7. Tomamos este caso como primeiro exemplo a ser analisado, pois a estratégia matemática utilizada bem como o tipo de discurso utilizado foi mais predominante nas resoluções da turma.

Figura 12 – Resolução do Estudante A7 ao item (a) do Problema 3



Fonte: acervo do autor.

Figura 13 – Resolução do Estudante A7 ao item (b) do Problema 3



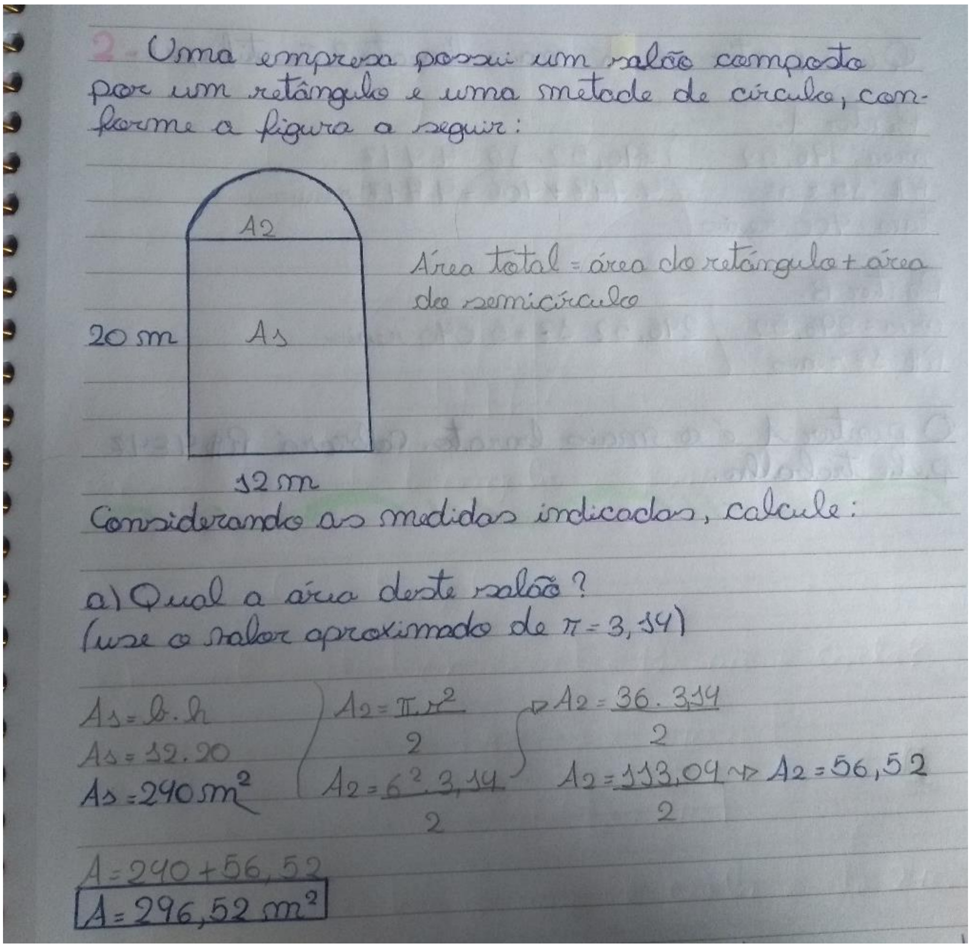
Fonte: acervo do autor.

O Estudante A7 no item (a) construiu seu discurso conforme nossa análise prévia havia previsto. Ele calculou a área total da figura por meio do cálculo da soma das figuras parciais que compõem o todo e, para isso, fez uso da função apofântica e da operação de predicação, onde apresentou, em língua natural, a expressão que representa a área. Em seguida, com uso da designação de objetos da função referencial, atribuiu léxicos associativos como a letra *h* para ser a altura do retângulo e a letra *b* para representar a base, assim como *R* para indicar o raio do semicírculo.

O cálculo da área do retângulo foi feito corretamente, onde os léxicos sistemáticos 12 e 20 foram substituídos e aplicados corretamente obtendo a área. No caso do semi-círculo, o Estudante A7 apresentou a fórmula já como uma fração de denominador 2, relevando que entendeu que por se tratar de um semicírculo será a metade da obtido pela fórmula usual. No final, substituiu o valor de π conforme o enunciado indicadava e obteve a resposta final correta, somando as duas áreas calculadas separadamente. A progressão do discurso no item (a) seguiu a expansão formal com substituições algébricas e podemos atribuir valor lógico de verdade, bem como epistêmico e social.

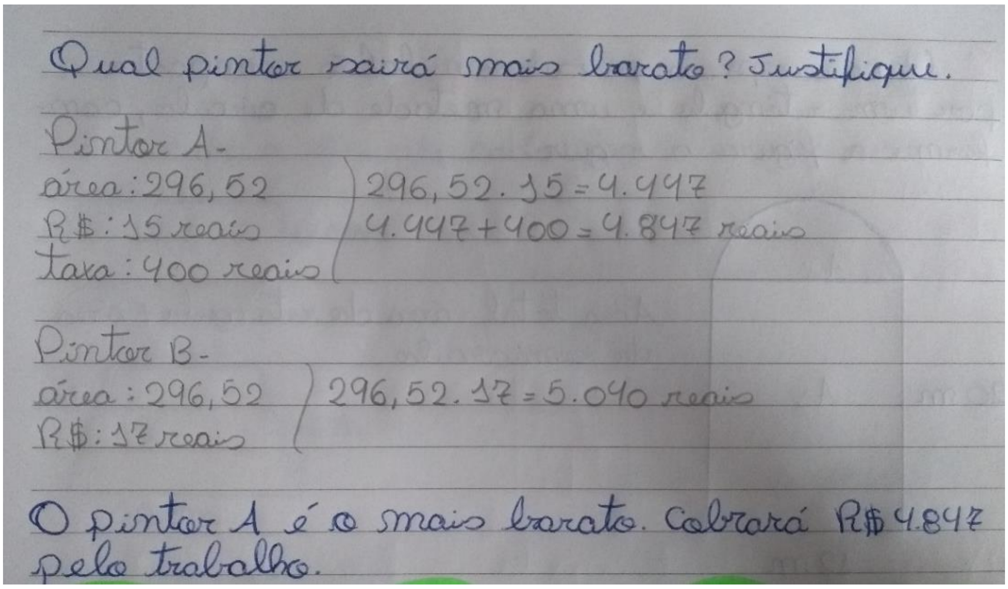
No item (b), o estudante montou regras de três simples para realizar os cálculos necessários para comprar qual dos dois tipos de pintores seriam o mais barato. Designou os três valores conhecidos das duas grandezas envolvidas (valor por metro quadrado e quantidade de metros que foram pintados), desenvolveu a regra de três e isolou o *x*, que foi designado para indicar o valor desconhecido. Assim como no item (a) o discurso seguiu a progressão formal de continuidade, realizando tratamento nos registros simbólico e algébrico. Por fim, observando os valores encontrados indicou que o Pintor A é mais barato, relevando isso por meio de uma frase construída para fins de explicação e feita pela operação de predicação.

Figura 14 – Resolução do Estudante A12 ao item (a) do Problema 3



Fonte: acervo do autor.

Figura 15 – Resolução do Estudante A12 ao item (b) do Problema 3

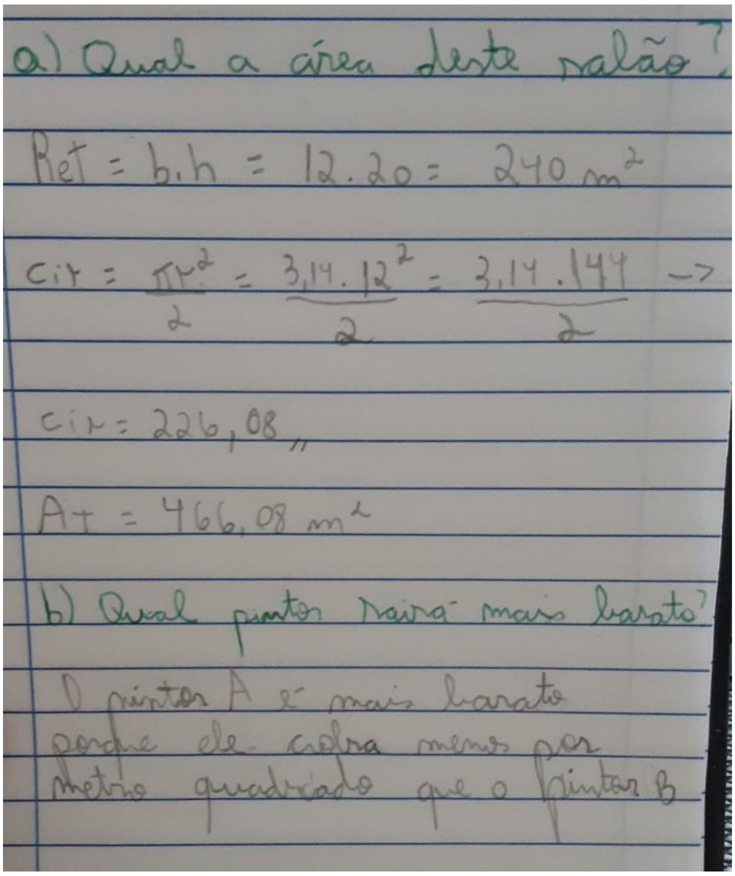


Fonte: acervo do autor.

O Estudante A12 no item (a) iniciou sua resolução com uma designação pura dos léxicos *A1* e *A2* para indicar as duas áreas que devem ser calculadas separadamente para depois obter a área total. Este raciocínio foi exposto em seguida, quando por meio da operação de predicação criou uma frase em língua materna evidenciando que a área total seria a soma das parciais. Os demais procedimentos utilizados foram parecidos com o do Estudante A7, exposto nas Figuras 12 e 13, onde por meio da expansão discursiva formal, desenvolveu seu discurso matemático e obteve os valores finais corretamente.

Já no item (b), o Estudante A12 criou dois pequenos esquemas, um para cada pintor e efetuou os cálculos de cada um. Seu discurso aqui foi permeado por léxicos associativos e sistemáticos, designando os valores para cada uma das informações pertinentes ao Pintor A e em depois, para o Pintor B. Com os cálculos corretos ele constatou que o Pintor A seria o mais barato e criou duas frases para dizer isto, fazendo uso da operação de predicação e da função de expansão discursiva do tipo natural, onde as duas frases foram conectadas coerentemente. Em toda sua resolução podemos atribuir o valor lógico de verdade, assim como o valor epistêmico e o social foram atendidos.

Figura 16 – Resolução do Estudante A19 ao Problema 3



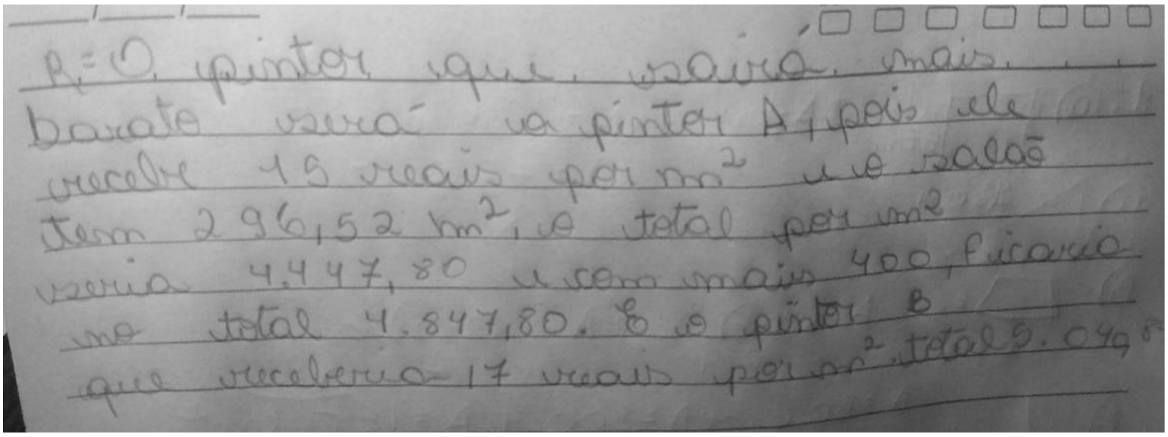
Fonte: acervo do autor.

O Estudante A19 utilizou algumas designações diferentes que os outros estudantes anteriores, usando *ret* para designar o retângulo, *cir* para o semicículo e *At* para área total. Com a mobilização de léxicos sitemáticos e associativos, bem como a expansão discursiva formal, ele efetuou o cálculo da área do retângulo corretamente. Entretanto, a área do semicírculo não foi calculada corretamente, pois o estudante utilizou a medida do diâmetro e não do raio. Percebemos que os tratamentos aritméticos e algébricos têm valor epistêmico e as regras da matemáticas são respeitadas, o estudante sabe como calcular a área de um círculo, mas não teve um olhar atento à figura e seus detalhes.

E no caso do item (b), ele utiliza somente a construção de frases em língua natural e toda a progressão do discurso segue na forma natural de expansão. Contudo, apesar de estar correto indicar que o Pintor A é o mais barato, vemos que o raciocínio explícito pelo texto não foi correto. Ele justifica que o Pintor A é mais barato simplesmente pelo valor do metro quadrado cobrado ser menor que o Pintor B, esquecendo de considerar a taxa de R$ 400,00 envolvida.

Este é um exemplo clássico de como muitas vezes o estudante pode chegar a um resultado correto, mas não ter compreendido alguns conhecimentos matemáticos. Se esta atividade fosse parte de avaliação descritiva onde o professsor apenas olhasse o gabarito final e o Estudante A19 colocasse diretamente a expressão *o Pintor A é mais barato*, seria entendido que ele fez os procedimentos corretos e comprendeu o problema. Com isso, vemos a importância do professor ter um olhar cuidadoso de todo o processo de construção de um raciocínio ou argumentação em matemática. Em consonância com Duval (2011), é no discurso que podemos perceber incompreensões na aprendizagem matemática que são muitas vezes ocultadas por situações que ignoram as produções dos estudantes.

Figura 17 – Resolução do Estudante A10 ao item (b) do Problema 3


R= O pintor que sairá mais
barato será o pintor A, pois ele
recebe 15 reais por m² e o salão
tem 296,52 m², o total por m²
seria 4.447,80 e com mais 400, ficaria
no total 4.847,80. E o pintor B
que receberia 17 reais por m². total 5.04

Fonte: acervo do autor.

Na resolução do item (b) do Estudante A10, vemos a construção de discurso explicativo e descritivo muito semelhante a do estudante anterior, utilizando a expansão na forma natural para ampliar o discurso. Entretanto, este estudante considerou o fato de que o Pintor A cobra a taxa de R$ 400,00 reais e efetuou todos os cálculos corretamente que levaram a resposta correta com uma argumentação matemática válida.

Com as Figuras 16 e 17, foi possível observarmos que a língua natural adiquiriu um caráter especializado quando usada na construção de raciocínios/argumentações matemáticas, sendo utilizada em conjunto com o registro de representação simbólicos. Duval (2011) defende a ideia de que é preciso ver a língua além da função de comunicação e valorizar seu papel enquanto um registro de representação semiótico para o funcionamento cognitivo.

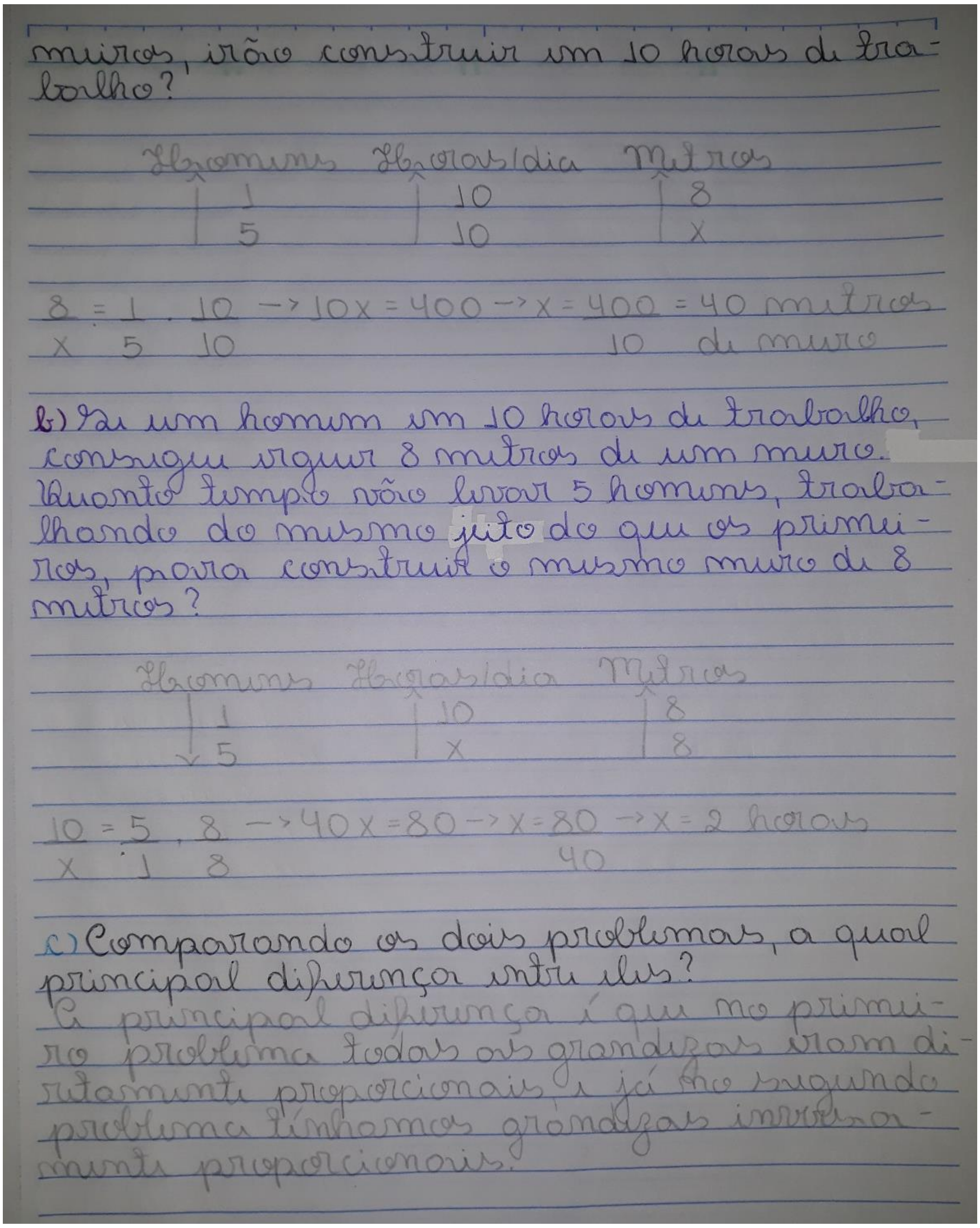
Com base nas análises deste problema, apresentamos alguns apontamentos que nos ajudam a entender as contribuições das funções discursivas:

- Como esperado em nossa análise prévia, a função referencial com a designação de objetos teve destaque nos procedimentos. Ela foi utilizada para designar léxicos associativos que indicassem os lados da figura, o raio do semicírculo, unidades de medida e as fórmulas empregadas. O desenvolvimento dos cálculos privilegiou a expansão discursiva formal.
- Também havíamos previsto um uso maior da língua natural (materna) no item (c) deste problema. Aqui percebemos que a argumentação matemática foi caracterizada pela mescla de processos entre dois registros: língua natural (palavras) e simbólicas (números).
- A mesclagem de representações, assim como nos problemas anteriores, foi importante para que os estudantes pudessem relevar suas aprendizagens, deixando evidente sua compreensão dos conteúdos matemáticos envolvidos.
- Dos 25 estudantes que resolveram o Problema 4, tivemos 17 que acertaram todos os itens, dos que erraram 6 estudantes com erros de natureza aritmética e 2 com erros de natureza conceitual. Isso mostra que neste processo a operacionalização matemática foi mais difícil para os estudantes do que os conceitos envolvidos. Esse diagnóstico foi possível graças ao olhar dado para as funções e operações discursivas neste processo.

4.2.4 A aplicação e análise do Problema 4

O Problema 4 foi aplicado na Turma B, composta por outro grupo de 25 alunos de uma série diferente. Da mesma forma que na apresentação das resoluções dos problemas anteriores, vamos selecionar algumas produções que contém estilos de resolução que representem os resultados deste grupo. A seguir, a Figura 14 apresenta a resolução de um estudante que obteve êxito em sua resposta:

Figura 18 - Resolução do Estudante B1 ao Problema 4.



Fonte: acervo do autor.

O Estudante B1 iniciou sua resolução organizando seu discurso com três colunas onde cada uma delas foi identificada com uso da designação do tipo categorização, com língua natural, onde deu o nome da grandeza que a coluna representava. Em seguida, utilizou os léxicos sistemáticos contidos no problema, relacionando os valores de cada grandeza coerentemente nas posições pertinentes para cada uma delas.

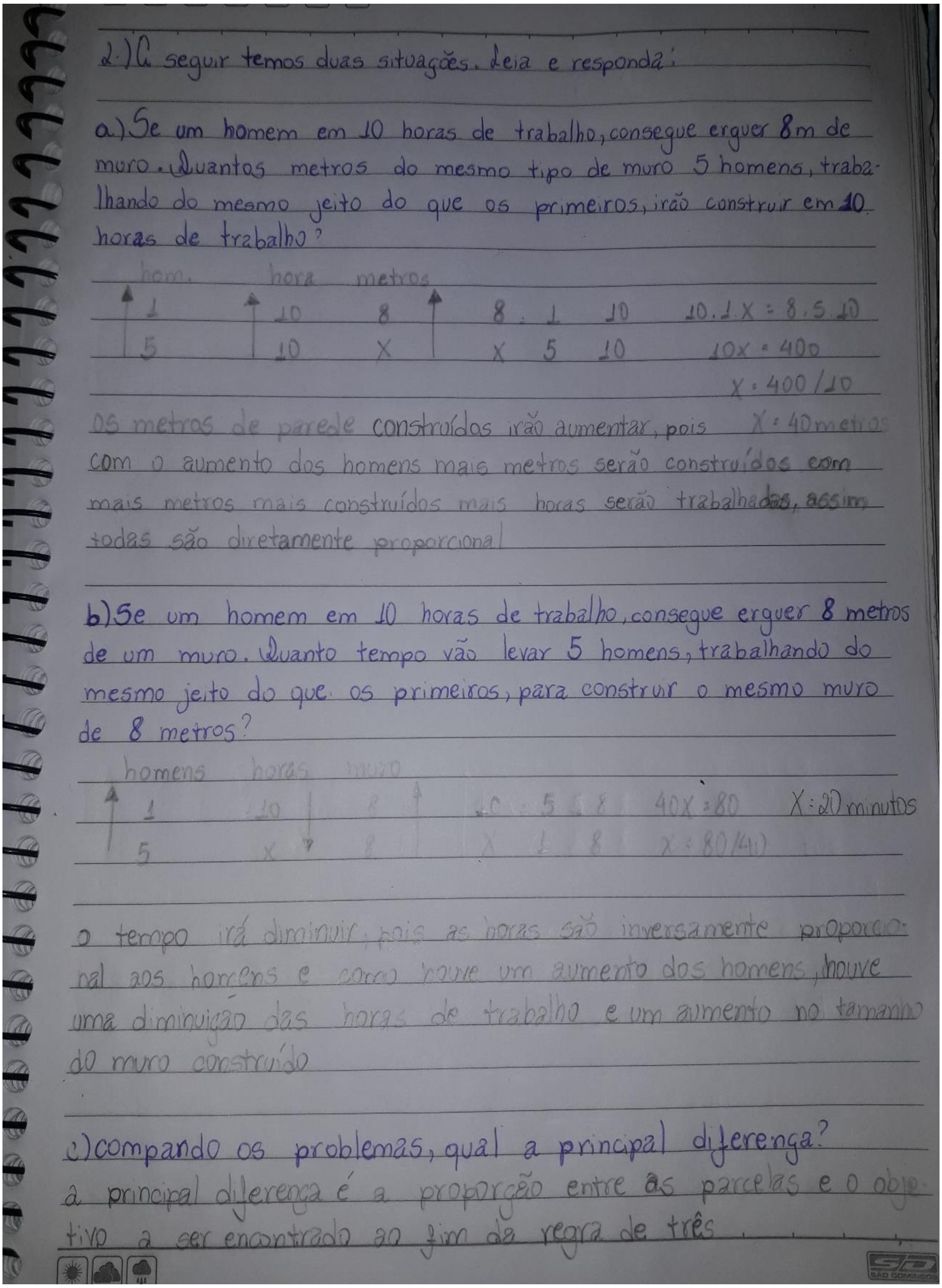
Depois disso, com uso da expansão discursiva do tipo cognitiva, ele utilizou algumas setas para comparar a proporcionalidade de cada grandeza e inferir se eram diretamente ou inversamente proporcionais. Como ele colocou todas as setas na mesma direção, ele quis dizer que as duas primeiras grandezas (quantidade de homens e tempo) eram diretamente proporcionais em relaçao à última grandeza (metros de muro), a qual continha a incógnita do problema. Por meio da expansão discursiva formal, utilizou operações de substituição no registro algébrico e resolveu a equação advinda da proporção estruturada.

É possível perceber pela progressão do discurso seguinte, que ele compreendeu como equalizar um problema que envolve uma regra de três. Devemos observar que apesar do problema dispor em seu enunciado três grandezas, uma delas não precisaria ser utilizada nos cálculos visto que tem seu valor inalterado. Acreditamos que o Estudante B1, assim como os demais que fizeram desta forma utilizaram esta estratégia, pois foi desta maneira que estudaram o conteúdo de regra de três composta em aulas anteriores.

O mesmo procedimento no item (b), repetindo o mesmo tipo de discurso que no item (a). Contudo, vemos que neste caso houve a presença de uma seta apontada na direção contrária, onde por expansão cognitiva ele percebeu que a grandeza (homens) era inversamente proporcional a grandeza que tinha a incógnita (tempo). O decorrer da resolução segue os mesmos caminhos de resolução letra (a), privilegiando os tratamentos algébricos com uso da expansão formal.

No item (c) percebemos a valorização da língua materna para fins de explicação. Ela usa a forma natural de expansão discursiva para descrever a justificativa que faz as duas situações serem diferentes. Por meio de sua escrita, foi possível realizarmos as inferências dos itens anteriores, no que se refere ao entendimento das proporcionalidades. Todo seu discurso realizado nos três itens mantendo valor lógico de verdade e valor epistêmico interno da matemática, lembrando também da presença de um valor social com intenção de responder o problema ao professor.

Figura 19 - Resolução do Estudante B6 ao Problema 3



2.) A seguir temos duas situações. Leia e responda:

a) Se um homem em 10 horas de trabalho, consegue erguer 8m de muro. Quantos metros do mesmo tipo de muro 5 homens, trabalhando do mesmo jeito do que os primeiros, irão construir em 10 horas de trabalho?

hom.	hora	metros
1	10	8
5	10	X

$\frac{8}{X} = \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{10}$

$10 \cdot 1 X = 8 \cdot 5 \cdot 10$

$10X = 400$

$X = 400/10$

$X = 40$ metros

Os metros de parede construídos irão aumentar, pois com o aumento dos homens mais metros serão construídos com mais metros mais construídos mais horas serão trabalhadas, assim todas são diretamente proporcional

b) Se um homem em 10 horas de trabalho, consegue erguer 8 metros de um muro. Quanto tempo vão levar 5 homens, trabalhando do mesmo jeito do que os primeiros, para construir o mesmo muro de 8 metros?

homens	horas	muro
1	10	8
5	X	8

$\frac{10}{X} = \frac{5}{1} \cdot \frac{8}{8}$

$40X = 80$

$X = 80/40$

$X = 20$ minutos

O tempo irá diminuir, pois as horas são inversamente proporcional aos homens e como houve um aumento dos homens, houve uma diminuição das horas de trabalho e um aumento no tamanho do muro construído

c) Comparando os problemas, qual a principal diferença?

A principal diferença é a proporção entre as parcelas e o objetivo a ser encontrado ao fim da regra de três.

Fonte: acervo do autor.

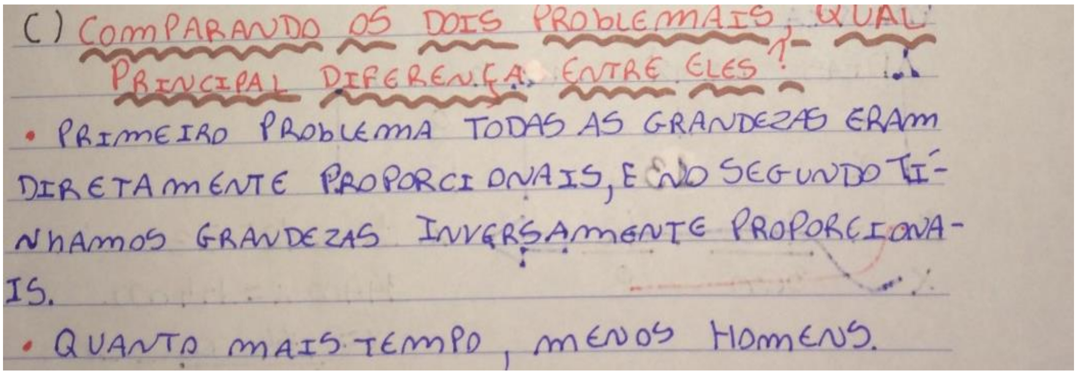
A resolução do Estudante B6, o início de seu discurso aconteceu de forma similiar ao Estudante B1, fazendo uso da operação de designação de objetos para construir três colunas que organizam os dados de cada grandeza envolvida. Novamente, o uso de setas para indicar se a relação de proporcionalidade das grandezas é diretamente ou inversamente proporcional, e em seguida, o emprego correto da forma de expansão discursiva formal com as substituições algébricas pertinente mantendo valor epistêmico.

Um ponto diferenciado deste estudante é o uso da função apofântica para criar frases que falassem sobre o problema e as interligasse coerentemente com a expansão discursiva natural. Não havia a necessidade de escrever no item (a), mas ele optou em complementar sua resposta com o registro de representação escrito, explicando para o professor o que o levou a entender que as grandezas eram diretamente proporcionais. Esse processo de escrita é importante, pois revelou para o professor a expansão cognitiva que ele fez na busca de analisar a proporcionalidade das grandezas.

No item (b) ele repete o mesmo processo inicial e também recorre a argumentos escritos em língua natural para deixar claro ao professor sua compreensão. Observamos que ele comete um engano no final dos cálculos do item (b), onde ele dividiu o 80 por 40 e colocou a resposta: 20 minutos. Este erro provavelmente ocorreu por uma falta de atenção na divisão dos números, quando ele pode ter entendido que 20 horas seria um valor absurdo, então optou em colocar como minutos. Apesar deste erro, fica evidente em seu discurso que o conteúdo da regra de três e proporcionalidade foi entendido, pois seu erro não é de natureza conceitual.

No item (c), ele respondeu que a diferença das duas situações seria *a proporção entre as parcelas e o objetivo a ser encontrado.* Neste item, queríamos que o estudante reforçasse que entendeu a diferença entre ser diretamente ou inversamente proporcional, que seria a principal diferença das situações. Contudo, como nos itens (a) e (b) ele já expôs seu entendimento, no item (c) acabou respondendo com outras informações, que também estão corretas. De forma geral, este estudante demonstrou que entendeu o conteúdo, embora haja presença de pequenos erros relacionado à falta de atenção.

Figura 20 – Resolução do Estudante B25 ao item (c) do Problema 4

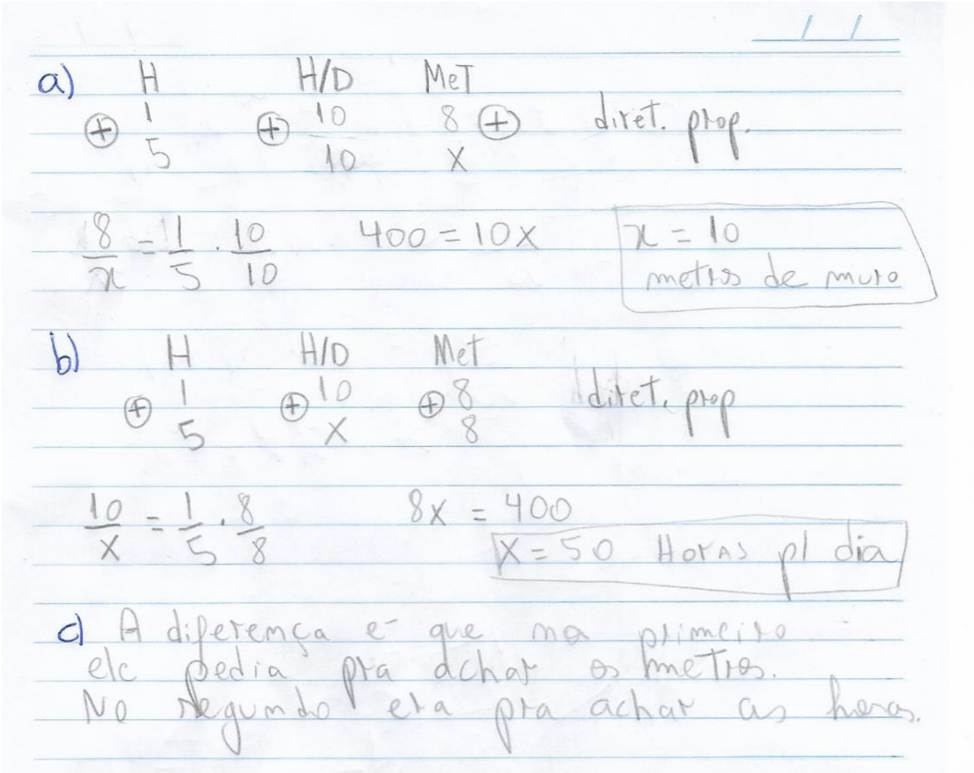

(C) COMPARANDO OS DOIS PROBLEMAIS, QUAL
PRINCIPAL DIFERENÇA ENTRE ELES?
• PRIMEIRO PROBLEMA TODAS AS GRANDEZAS ERAM
DIRETAMENTE PROPORCIONAIS, E NO SEGUNDO TI-
NHAMOS GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONA-
IS.
• QUANTO MAIS TEMPO, MENOS HOMENS.

Fonte: acervo do autor.

Na Figura 16, temos a resposta do Estudante B25 ao item (c) do Problema 3, que contém um tipo de resposta que foi muito recorrente entre os estudantes. Ele escreveu a justificativa que leva as duas situações apresentadas a serem diferentes e ainda, mostrou o porquê a segunda situação não seria diretamente proporcional como a primeira: Quanto mais homens, menos tempo. Ele quis dizer que conforme a quantidade de homens trabalhando aumenta, o tempo de serviço diminui, o que configura esta relação entre grandezas como inversamente proporcionais.

Nas respostas do item (c), a língua natural foi suficiente para explicar uma situação matemática que com as operações de predicação e expansão discursiva natural por acumulação, a progressão do discurso manteve coerente e teve valor lógico de verdade, epistêmico e social com a intenção de atender ao professor. O que queremos destacar com estas análises é que o registro de representação da língua natural, pode se configurar como um aliado nas produções dos estudantes e não visto como algo dispensável ou limitado para a matemática, como geralmente é considerado.

Figura 21 – Resolução do Estudante B20 ao item Problema 4



Fonte: acervo do autor.

O Estudante B20, no item (a) utilizou os mesmos recursos discursivos que os demais estudantes, porém, não utilizou as setas para indicar se as grandezas crescem ou decrescem juntas, no sentido de identificar o tipo de proporcionalidade. Ele usou o símbolo da adição (+) inserido em um pequeno círculo para dizer que as grandezas crescem juntas, e portanto, são diretamente proporcionais. No item (a), este raciocínio foi correto e com isso ele operacionalizou algebricamente com a expansão discursiva formal, e obtendo êxito em sua resposta.

Já no item (b), ele não foi capaz de identificar que havia grandezas inversamente proporcionais, designando novamente o mesmo símbolo de adição para cada grandeza. Este erro conceitual levou a outro erro matemático, que aconteceu na maneira como as equações foram organizadas. Uma das razões deveria ter a posição de elementos invertidos, mas com o erro conceitual cometido, os tratamentos algébricos feitos pela expansão discursiva formal foram inválidos no ponto de vista lógico e epistêmico.

No item (c) o estudante respondeu que a diferença nas duas situações apresentadas seria o que estava sendo perguntado pelo enunciado. Desta vez sua construção discursiva em língua natural revelou que o que já era esperado após errar o item (b), comprovando que ele não compreendeu como comparar a proporcionalidade entre grandezas, em particular, as inversamente proporcionais.

Apesar de seu discurso ter valor social, ele não tem valor lógico de verdade, salvo o item (a), e também não podemos atribuir um valor epistêmico, pois ele não seguiu as regras internas da matemática quando se refere ao trabalho com razão e proporção. Podemos concluir da análise desta resolução que o Estudante B20 não desenvolveu o aprendizado esperado no conteúdo referido. A seguir, apresentamos uma síntese da análise dos discursos do todos os estudantes da Turma B ao resolverem o Problema 4:

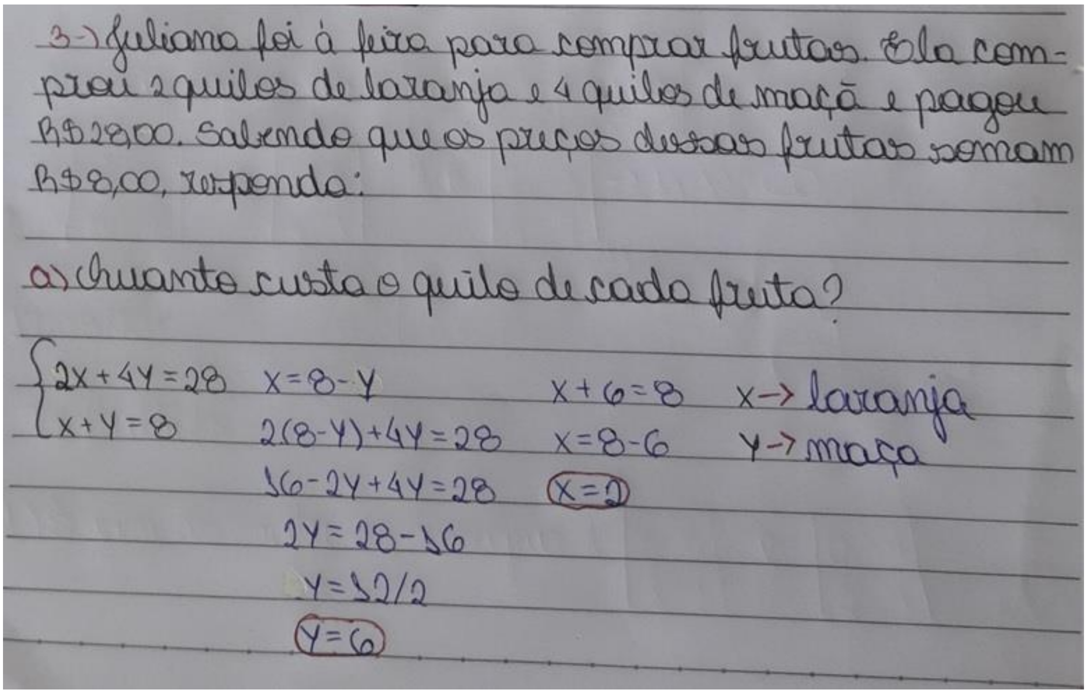
- A expansão discursiva em sua forma natural teve destaque no item (c), já previsto em nossa análise a priori, onde as frases construídas pela operação de predicação da apofântica foram organizadas de forma a dar contunidade no discurso, pela operação de acumulação. A língua natural foi empregada tanto para fins de explicação e raciocínio, quanto para substituir cálculos matemáticos que poderiam usar o registro de representação simbólico.
- Neste problema também identificamos o uso de símbolos que não são próprios da linguagem matemática, mas que podem ser empregados para acrescentar informações aos discursos, como foi o caso da seta orientada para cima ou para baixo. O uso das setas era suficiente para indicar as grandezas que crescem ou descrescem juntas, em outras palavras, explicitar se as grandezas eram diretamente ou inversamente proporcionais.
- A designação de objetos mais uma vez foi a operação crucial para estruturar o discurso, atribuindo léxicos sistemáticos e associativos para designar os objetos. Em geral, os cálculos foram construídos por meio da continuidade do discurso permitida pela expansão formal e a operação de substituição.
- Apenas 4 estudantes cometeram erros neste problema e todos foram no item (b), onde haviam grandezas inversamente proporcionais. E assim como no caso do Estudante B20 os erros foram de natureza conceitual e não aritmética ou algébrica. Isso significa que os estudantes são capazes de realizar os tratamentos nos registros simbólicos e algébricos, mas nem todos conseguem identificar a proporcionalidade entre grandezas.

- De forma geral, os discursos ficaram dentro das expectivas da análise a priori e diversidade de registros utilizados foi fundamental. O registro simbólico e algébrico foram fundamentais para construir as equações e obter o valor das incógnitas, enquanto a língua natural possibilitou a argumentação necessária para explicar, descrever e expor os raciocíonios dos estudantes

4.2.5 A aplicação e análise do Problema 5

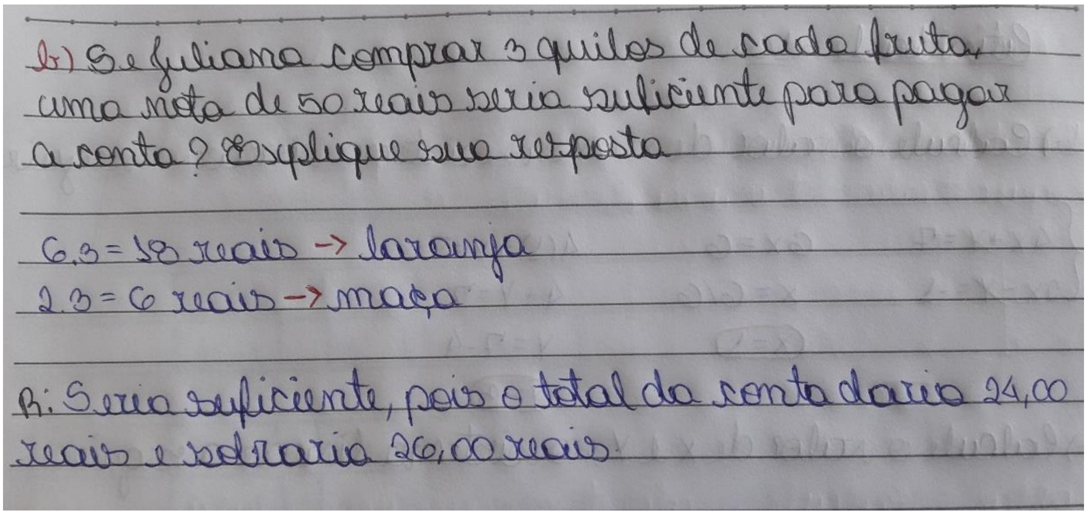
O Problema 5 foi o último aplicado em nossa pesquisa e foi realizado pela Turma B. Tivemos alguns tipos de resoluções que usaram diferentes técnicas de solução de sistemas lineares como método da soma, substituição ou Regra de Cramer, que já havíamos previsto na análise prévia. E ainda, houve discursos que extrapolaram as expectivas com outros tipos de forma de resolução. A seguir, apresentamos a resolução do Estudante B4 ao Problema 5:

Figura 22 – Resolução do Estudante B15 ao item (a) Problema 5



Fonte: acervo do autor.

Figura 23 – Resolução do Estudante B15 ao item (b) Problema 5


b) Se Juliana comprar 3 quilos de cada fruta, uma nota de 50 reais seria suficiente para pagar a conta? Explique sua resposta

6.3 = 18 reais → laranja
2.3 = 6 reais → maça

R: Seria suficiente, pois o total da conta daria 24,00 reais e sobraria 26,00 reais.

Fonte: acervo do autor.

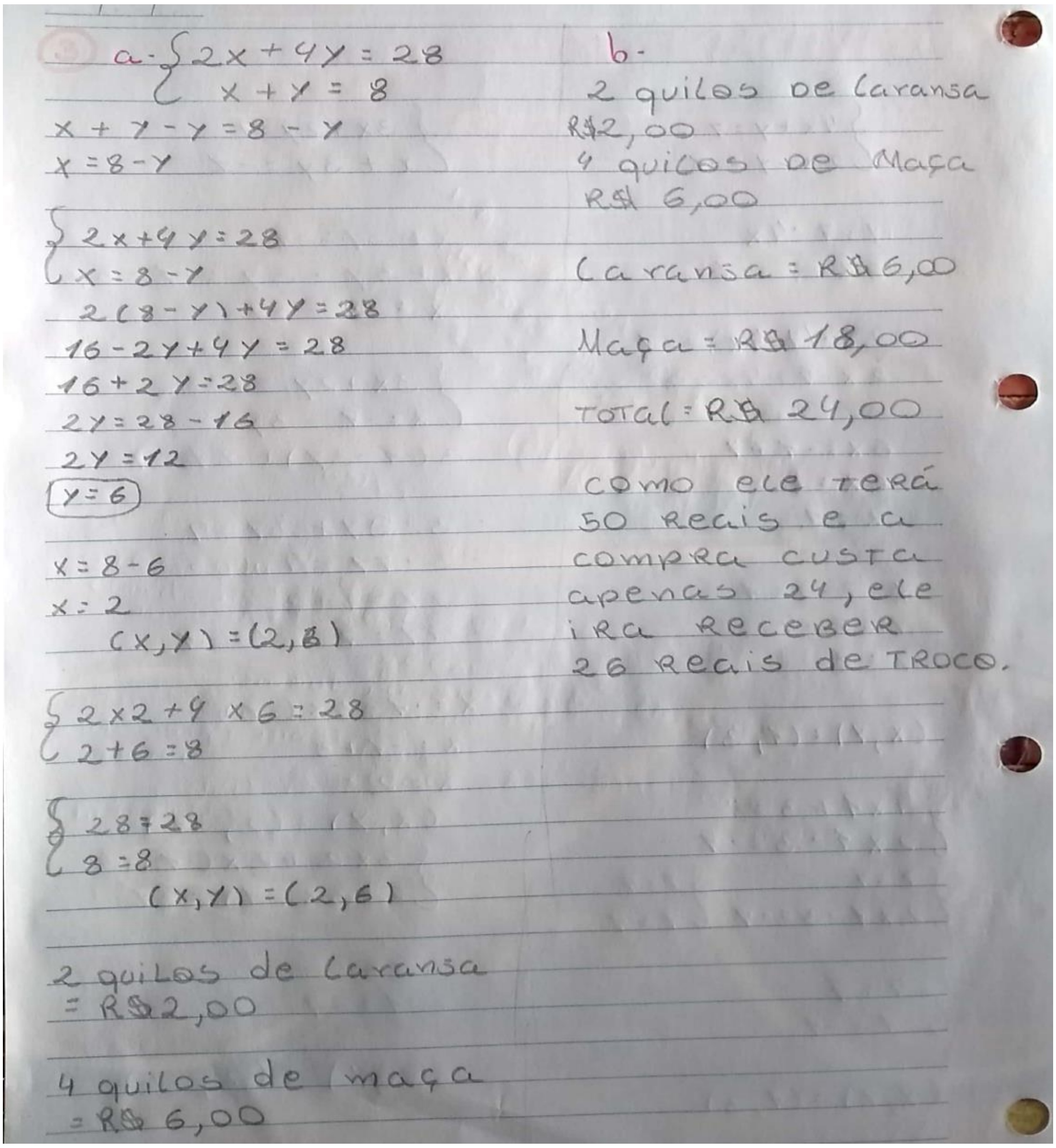
Na resolução do item (a), a partir do enunciado em língua natural, o Estudante B15 iniciou com a função referencial com a operação de designação pura e atribuiu léxicos associativos para representar o preço da laranja e da maçã, explicitados por uma categorização em língua natural a correspondência de cada uma das letras. Com isso, ele pode construir duas equações que representassem algebricamente as situações dispostas no enunciado, mantendo similaridade semântica ao problema, ou seja, mantendo referendo ao enunciado. Esse processo constituiu uma conversão entre o registro natural e o algébrico, que foi feita corretamente, sendo esse um procedimento necessário para solucionar este tipo de problema.

Com o sistema linear apresentado, o estudante recorreu ao método de substituição como estratégia de resolução. Partindo da segunda equação do sistema, o elemento x foi redesignado em função do y (designação funcional) obtendo $x = 8 - y$. Feito isso tomou a primeira equação 2x + 4y = 28 e substituiu o valor de x chegando em 2(8-y) + 4y = 28. Esse passo caracteriza o que podemos chamar de dupla designação, ou seja, o x que antes havia sido designado agora é substituído por uma nova designação. Com este procedimento conduzido pela expansão discursiva formal, foi possível isolar o y e o estudante obteve a resposta y = 6. Com este valor ele aplicou na segunda equação e obteve o valor de x = 2.

No item (b) para verificar se cinquenta reais seriam suficientes para pagar a conta o estudante, ele efetuou a multiplicação dos valores obtidos no item (a) para calcular o valor que seria gasto com a maçã e com a laranja. Vemos que cada cálculo é bem orientado em relação a qual elemento que está sendo calculado, usando uma flecha e a língua natural para deixar isso claro. Por fim, vemos a função apofântica entrar em ação com a operação de predicação para elaborar frases explicativas, que são conectadas coerentemente pela função de expansão discursiva natural.

Pelo diagnóstico das resoluções deste estudante podemos inferir que ele desenvolveu as aprendizagens dos conhecimentos referentes à resolução de um sistema linear, conseguindo efetuar as operações algébricas de forma coerente e mantendo valor epistêmico. O valor lógico de verdade também pode ser atribuído e o valor social, atendendo à solicitação do professor.

Figura 24 – Resolução do Estudante B9 Problema 5


a- $\begin{cases} 2x+4y=28 \\ x+y=8 \end{cases}$

$x+y-y=8-y$

$x=8-y$

$\begin{cases} 2x+4y=28 \\ x=8-y \end{cases}$

$2(8-y)+4y=28$

$16-2y+4y=28$

$16+2y=28$

$2y=28-16$

$2y=12$

$\boxed{y=6}$

$x=8-6$

$x=2$

$(x,y)=(2,6)$

$\begin{cases} 2\times 2+4\times 6=28 \\ 2+6=8 \end{cases}$

$\begin{cases} 28=28 \\ 8=8 \end{cases}$

$(x,y)=(2,6)$

2 quilos de Laransa = R\$2,00

4 quilos de maça = R\$ 6,00

b-

2 quilos de Laransa R\$2,00

4 quilos de Maça R\$ 6,00

Laransa = R\$ 6,00

Maça = R\$ 18,00

TOTAL = R\$ 24,00

como ele terá 50 Reais e a compra custa apenas 24, ele irá receber 26 Reais de troco.

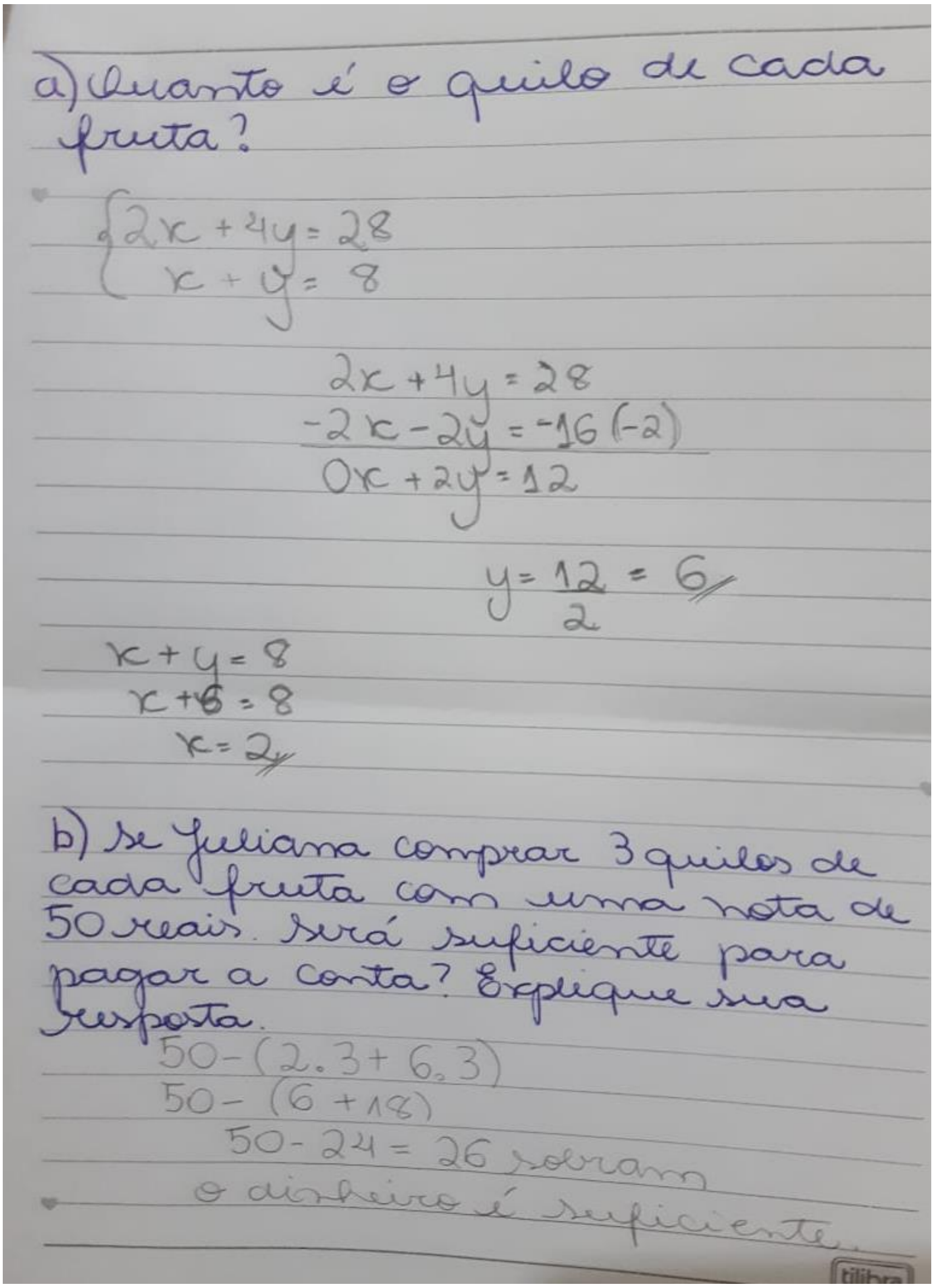
Fonte: acervo do autor.

O Estudante B9 iniciou sua resolução de maneira similar ao Estudante B15 apresentado anteriormente, porém, alguns passos foram estruturados de formas diferentes e novas informações foram incorporadas. Ele também designou as letras x e y para representar as incógnitas dos problemas, mas não explicitou isso com uso da língua natural, apenas aplicou estes termos na construção das equações do sistema. Optou pelo método da substituição e para isso, isolou o x da segunda equação da seguinte maneira: dispondo da equação $x + y = 8$, em seguida, subtraiu $-y$ de ambos os lados da igualdade e obteve $x + y - y = 8 - y$, chegando em $x = 8 - y$. Com este procedimento ele revelou que entende os processos algébricos que envolvem a igualdade de expressões, etapa que em geral, fica oculta nos discursos.

Com o x designado em função de y, ele efetuou a etapa de substituir a expressão de x dentro da primeira equação. Por meio de expansões discursivas do tipo formal, conseguiu realizar os tratamentos algébricos e obter o valor y = 6. Retomou a segunda equação e colocando o número 6 no lugar do y, isolou a outra incógnita e obteve x = 2. Depois disso, vemos que o estudante colocou um par ordenado como resposta (x,y) = (2,6), indicando uma expansão cognitiva que o levou a entender que a solução de um sistema linear é um ponto no plano cartesiano que representa a intersecção das retas formadas pelas equações. Apesar de não estar explicito em seu discurso, entendemos que seria este um raciocínio que ele pode ter tido para evocar a notação de par ordenado.

Depois desta etapa ele adicionou também uma prova real dos valores obtidos para x e y. Estes valores são substituídos para conferir se atende ambas as equações, revelando novamente uma maior compreensão do estudante em relação ao funcionamento de um sistema linear. No item (b) ele usou o registro escrito e simbólico para construir frases com a operação de predicação, indicando o preço de cada uma das frutas, bem como o valor gasto para comprá-las. Por fim, expandiu o discurso a formal natural com fins explicativos que atendessem as justificativas solicitadas no item (b). A resolução do Estudante B9 também possui valor lógico de verdade, assim como epistêmico e social, respeitando as regras matemáticas e atendendo ao professor.

Figura 25 – Resolução do Estudante B22 Problema 5



Fonte: acervo do autor.

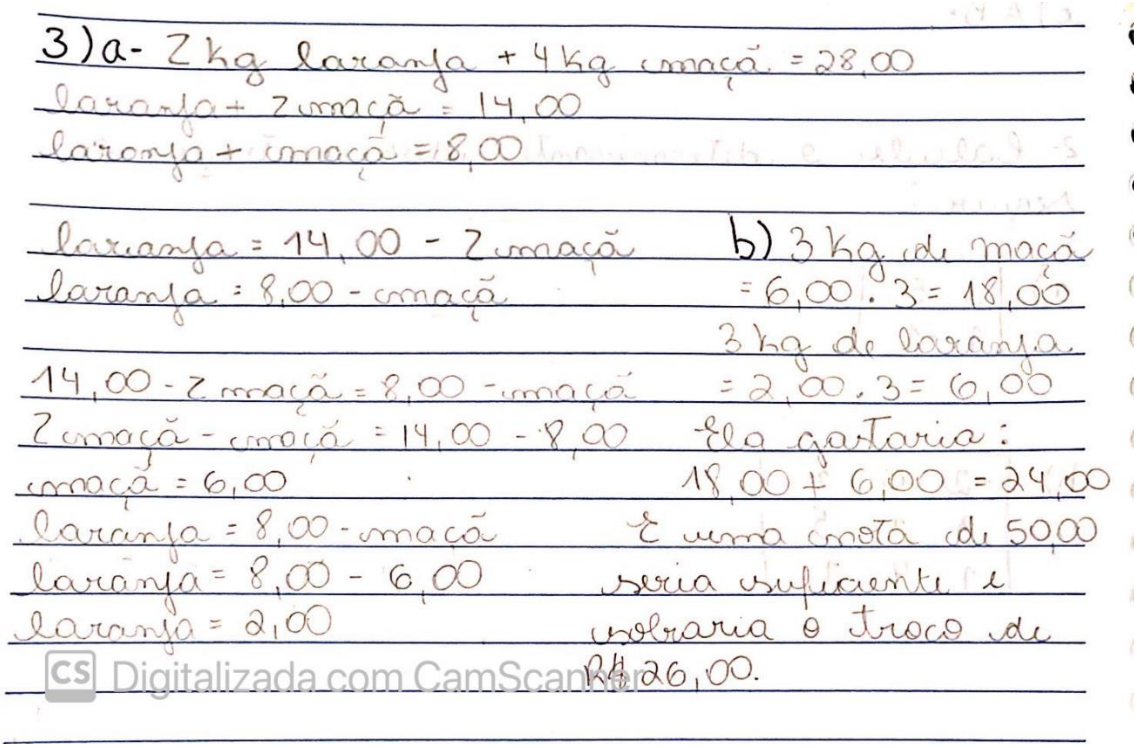
Um outro tipo de estratégia utilizada para solucionar o Problema 5 trata-se do método da soma, empregada pelo Estudante B22 conforme a Figura 25. O início da resolução também foi na construção das duas equações algébricas advindas do problema em língua natural, onde a designação pura aconteceu para atribuir os léxicos x e y para as incógnitas. Feito isso, podemos observar que o estudante reescreveu as equações uma sobre a outra e efetuou o que chamamos de método da soma.

A segunda equação foi multiplicada por (-2) que foi explicitado ao lado da equação indicando a operação que havia sido feita. A escolha deste número inteiro foi estratégica pois, com isso, o estudante somou as duas equações e conseguiu cancelar uma das incógnitas, que neste caso foi a letra x. Com o cancelamento do x ele ficou com a expressão $2y = 12$, que com o isolamento do y o valor y = 6 é obtido. Para finalizar o item (a), ele utilizou a segunda equação para obter o valor da outra incógnita e assim resolveu corretamente este primeiro item do problema. Todo este procedimento foi conduzido pelas designações de léxicos associativos (letras) e sistemáticos (números) que foram progredindo o discurso com a expansão discursiva do tipo formal, acontecendo por substituição com similaridade semiótica, onde os léxicos eram recuperados e transformados em outras informações com tratamentos algébricos.

No item (b) o estudante resolveu de forma similar aos demais, mas houve mudanças na estrutura das operações, onde ele não fez como a maioria que calculou $3.2 = 6 \; + 3.6 = 18$, chegando em R$ 24,00 reais de gasto. Ele recorreu ao número 50 e fez as subtrações dentro de um parêntese da seguinte forma: $50 – (3.2 + 3.6)$ e obteve a resposta correta. A forma que ele usou para realizar a subtração demonstra o entendimento das propriedades básicas das operações nos inteiros e a utilização correta dos parênteses nos cálculos, algo que nenhum outro estudante utilizou.

A frase final do item (b) atende à justificativa que era solicitada e com uso da função apofântica e da operação de predicação ela pode ser elaborada. Podemos atribuir valor lógico de verdade em todo seu discurso, assim como o valor epistêmico pela argumentação matemática coerente e o valor social, atendendo ao professor. Ao olharmos para esta resolução é possível diagnosticar algumas aprendizagens que o estudante desenvolveu no campo algébrico, pois foi conseguiu efetuar as designações e construir as relações algébricas a partir do problema. Caso olhássemos apenas para o resultado final, estas análises da aprendizagem seriam desvalorizadas e ocultadas no processo.

Figura 26 – Resolução do Estudante B14 ao Problema 5



3)a- 2kg laranja + 4kg maçã = 28,00
laranja + 2maçã = 14,00
laranja + maçã = 8,00

laranja = 14,00 - 2maçã
laranja = 8,00 - maçã

14,00 - 2maçã = 8,00 - maçã
2maçã - maçã = 14,00 - 8,00
maçã = 6,00
laranja = 8,00 - maçã
laranja = 8,00 - 6,00
laranja = 2,00

b) 3kg de maçã
= 6,00 . 3 = 18,00
3kg de laranja
= 2,00 . 3 = 6,00
Ela gastaria:
18,00 + 6,00 = 24,00
E uma nota de 50,00
seria suficiente e
sobraria o troco de
R$ 26,00.

Fonte: acervo do autor.

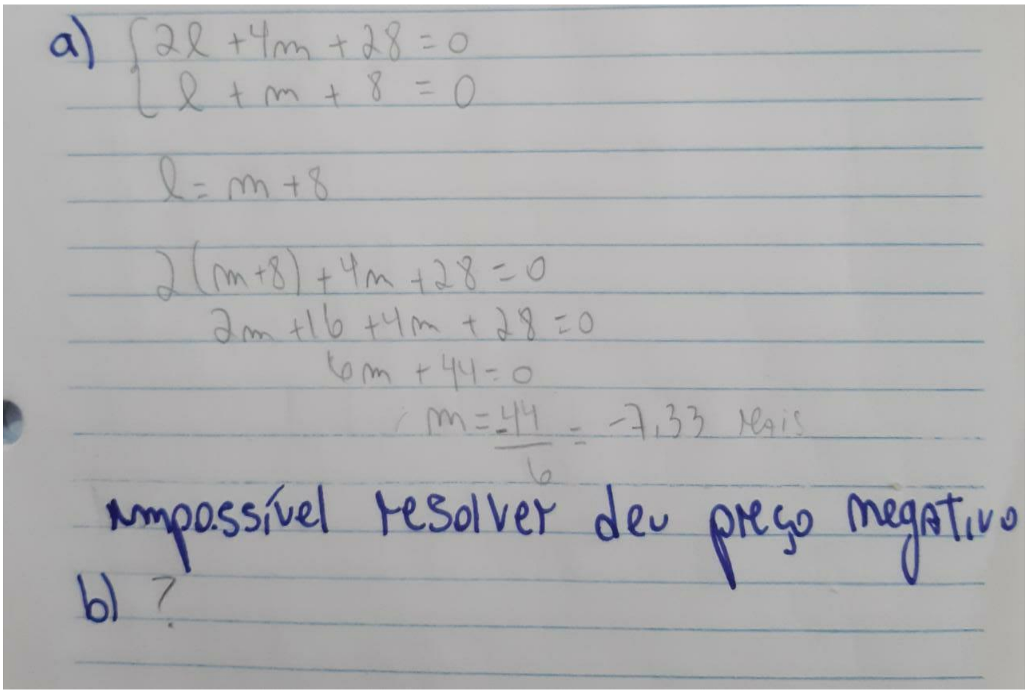
O Estudante B14 escolheu um caminho de resolução diferente de todos os outros, mas com importantes elementos para refletirmos. O que nos chama a atenção em sua resposta é o fato de não realizar as designações algébricas usualmente empregadas neste tipo de problema, bem como a forma que seu discurso é expandido. Primeiramente, ele não quis utilizar um determinado léxico sistemático (x ou y) para designar as incógnitas do problema, mas designou as próprias palavras que tais incógnitas estariam relacionadas: laranja e maçã.

Na elaboração da primeira equação do sistema ele usa *2kg de laranja + 4kg de maça = 28,00* no lugar de $2x + 4y = 28{,}00$. Em seguida, ele apresenta uma segunda equação inicial que pode ser construída diretamente pela simplificação da primeira, dividindo os coeficientes por 2 e chegando em *laranja + 2kg de maçã = 14,00* (ocultando o termo 1kg que seria da laranja). Feito esta segunda equação, ele cria a terceira na forma *laranja + maça = 8,00* (ficando implícito que tem seria 1kg) ao invés de $x + y = 8{,}00$. Apesar de diferente este estilo de designar e organizar uma equação não fere nenhuma regra matemática e apresenta um modo menos usual, mas ainda logicamente correto de fazê-lo.

A partir da segunda equação, ele conseguiu realizar uma designação funcional da *laranja* em função da *maçã*, apresentada na expressão *laranja = 8,00 – maçã.* Vemos que o procedimento é similar ao que os estudantes anteriores utilizaram no método da substituição, porém, outros signos estão sendo operacionalizados no lugar das letras. Tendo a incógnita laranja isolada, a mesma foi substituída na segunda equação (resultado da simplificação da primeira). Com este procedimento o estudante conseguiu obter maçã = 6,00, ou seja, o quilo da maçã é R$ 6,00 reais. Após este resultado a terceira equação foi evocada para obter o valor do quilo da laranja, respondendo assim ao item (a). Todo o discurso aqui seguiu a expansão discursiva formal, que apesar de não usar a linguagem algébrica diretamente, foram operacionais dessa natureza que conduziram as substituições realizadas.

No item (b) a construção de frases que misturavam a língua natural e simbólica foram utilizadas para descrever a situação e justificar os valores finais. O estudante obteve a resposta correta em ambos os itens e todo seu caminho argumentativo é válido do ponto de vista matemático, e ainda, elaborada de uma forma que é possível inferirmos a aprendizagem deste estudante sobre os conceitos que o problema envolve.

Figura 27 – Resolução do Estudante B24 Problema 5



Fonte: acervo do autor.

No caso do Estudante B24, sua resolução começou com a construção do sistema linear onde os léxicos l e *m* foram designados pela operação de designação pura para indicar o preço da laranja e da maçã, respectivamente. Entretanto, a formulação da equação não foi feita corretamente e não tem similaridade semântica com o enunciado, pois o número 28 deveria estar do outro lado da igualdade. Como o estudante não foi capaz de estabelecer as relações algébricas que o problema dispunha, a continuidade de seu discurso perdeu o valor lógico de verdade e também o epistêmico, pois não respeitou as regras internas da matemática.

Ele obteve uma redesignação o elemento l, mas que não é o correto e assim, a expansão discursiva que conduziu o progresso do discurso não teve como resposta o valor esperado. O próprio estudante B24 concluiu que o preço obtido não teria lógica com a situação, pois não existe preço negativo. Mas ao invés de repensar em sua resolução, ele constatou que o problema teria algum erro de formulação e, por isso, a resposta não apresentou coerência. Esse pensamento foi manifestado pelo aluno pela construção de uma frase para comunicar-se ao professor, com uso da função apofântica e sua operação de predicação.

O que podemos diagnosticar deste estudante é que sua aprendizagem algébrica não está consolidada, visto a incapacidade de converter o enunciado em língua natural para o registro algébrico. Neste caso, o erro é de natureza conceitual e não aritmética, que não tem relação com erros de tratamento algébrico ou aritmético, mas no entendimento de como construir uma relação de similaridade entre dois registros de representação. Olhando apenas a resposta final não seria possível inferirmos muitos elementos sobre o aprendizado do estudante, mas o olhar atencioso ao caminho de argumentação escrita do estudante nos oferece estas informações.

A seguir, sintetizamos alguns resultados e apontamentos da análise das resoluções do Problema 5:

- O Problema 5 envolveu o trabalho em diferentes registros: língua natural (enunciado), linguagem algébrica (construção do sistema) e simbólica (números utilizados). Em geral, os estudantes conseguiram efetuar as conversões e tratamentos pertinentes para solução do problema, conforme previsto em nossa análise *a priori.*
- Novamente, a função referencial agindo pela operação de designação de objetos foi essencial para ser possível construir um discurso matemático. A designação foi utilizada por todos, uma vez que usavam léxicos associativos (x, y, l, m) para representarem as incógnitas (designação pura) e às vezes escreverem do lado da letra

uma palavra caracterizando qual incógnita estava relacionada (categorização).

- Conforme imaginado na análise *a priori*, a redesignação e a designação funcional se destacaram nos tratamentos algébricos para resolver o sistema, conduzidos principalmente pela expansão discursiva do tipo formal e a operação de substituição com similaridade semiótica. A elaboração correta de tais designações algébricas revela a capacidade dos estudantes em estabelecerem relações entre variáveis, habilidade necessária para aprendizado da álgebra.
- Alguns estudantes criaram frases com sentido completo com uso da função apofântica e deram continuidade aos discursos em língua natural pela expansão discursiva natural e a operação de acumulação. Especialmente para item (b) vemos a versatilidade da língua natural para construir discursos de argumentação matemática onde ela teve papel fundamental como um registro de representação semiótica.
- Dos 25 estudantes que realizaram o problema tivemos 18 que acertaram os dois itens. 3 estudantes erraram processos de tratamento algébrico e outros 2 erraram na estruturação do sistema demonstrando incompreensão do conteúdo. E ainda, tivemos 2 estudantes cujos discursos não foram possíveis de analisar pois não possuíam lógica e as respostas estavam incompletas sem ser possível inferir algo sobre elas.
- Assim como nos demais problemas anteriores, a função apofântica também permitiu que atribuíssemos os valores lógico, epistêmico e social. O valor social era o mesmo para todos, pois seria a intenção de responder ao professor, enquanto o lógico e epistêmico variou conforme o êxito das respostas e o respeito as estruturas internas de cada conceito matemático.

4.2.6 Análise geral das resoluções dos estudantes

Por meio da aplicação e análise dos cinco problemas resolvidos pelos estudantes que participaram da presente pesquisa, alcançamos resultados importantes que atendem nossos objetivos. De forma geral, as expectativas das análises *a priori* foram atendidas, comprovando que as funções e operações discursivas desempenham um papel fundamental para que seja possível a construção de um discurso matemático. Também tivemos algumas exceções que fugiram de nossas previsões onde outras formas de argumentação matemática foram apresentadas, mas também com a presença de tais funções e operações.

Dentre todas as funções discursivas, a destaque que havíamos imaginado que encontraríamos era a função referencial. Ela permite a designação de objetos que foi uma operação realizada em praticamente todas as respostas, visto que para iniciar uma escrita em matemática precisamos designar elementos que serão tratados posteriormente. A designação pura que atribuiu letras ou palavras para os objetos esteve presente constantemente, seja para usar x como incógnita de uma proporção ou y como valor a ser descoberto em um sistema linear, ou ainda *hip* para indicar a hipotenusa. A categorização simples que foi usada muitas vezes para dar características e classificar objetos como no caso de indicar que um triângulo era *retângulo*.

A designação do tipo determinação, que apesar de não ter sido muito comentada, apareceu nos enunciados escritos em língua natural onde os estudantes adicionaram elementos como "o", "os", "as", "a" para compor suas frases e indicar a existência e unicidade. A descrição que unia as demais formas de designação também foi empregada em momentos que era preciso descrever com detalhes certos objetos. Na Figura 9, onde o Estudante A23 criou uma frase que disse: *Como temos a presença de um ângulo reto então o triângulo é retângulo.* Esta frase foi composta por designação pura, categorização e determinação, compondo elementos para descrever com mais detalhes o objeto matemático.

Além disso, a redesignação e a designação funcional foram utilizadas principalmente nos sistemas lineares onde a álgebra foi destaque. Sobre a relação destas operações de designação com o aprendizado da álgebra, Duval (2011b) já dizia que é preciso levar os estudantes a usarem letras para estabelecer relações algébricas. Ainda lembra que não são as letras que são importantes, mas as operações discursivas de designação de objetos feita por meio delas em língua natural ou formal. (DUVAL, 2011b). Por meio do diagnóstico dos problemas, principalmente do Problema 5, vemos que esta ideia defendida por Duval foi reafirmada nesta pesquisa. As letras empregadas pelos estudantes em si não têm valor significativo para o aprendizado se não operado de forma a levar a tais designações, que por sua vez, eram cruciais para resolver os problemas.

A função apofântica que pode ser operada pela predicação ou ato ilocutório, foi muito utilizada para a construção de enunciados completos com valores lógico, epistêmico e social. Apesar dela não ter usada para falas orais, visto que os discursos recebidos foram escritos, a predicação permitiu aos estudantes elaborarem tais enunciados/frases que comunicassem ao professor algo sobre os objetos matemáticos em questão. O Estudante B9 na Figura 24, por exemplo, disse: *como ele terá 50 reais e a compra custa apenas 24, ele irá receber 26 reais de* *troco*. Ele usou a língua natural sob um emprego que vai além de uma função metadiscursiva de comunicação, mas sim como um registro de representação que pode explicar processos matemáticos, conduzido pela operação de predicação.

No que tange às expansões discursivas, que opera pelas operações de substituição e acumulação, podemos dizer que a expansão formal foi a mais utilizada para iniciar as resoluções. Percebemos que os estudantes após lerem os enunciados em língua natural, buscaram na linguagem formal da matemática os recursos para começar a solucionar o problema e usando a operação de substituição, com similaridade semiótica (recuperando os mesmos léxicos anteriores).

A expansão discursiva na forma natural foi mais usada nos momentos em que foram necessários criar justificativas, explicações, narrações ou descrições nos problemas. A expansão natural, que opera no modo de acumulação de informações, permitiu aos estudantes articularem as frases e manterem um sentido coeso e coerente nos discursos. Esse processo aconteceu por similaridade semântica, ou seja, por meio do registro em língua natural ele representava os fenômenos que estavam em outros registros anteriormente (simbólico e algébrico) e mantinha a referência. Já a expansão cognitiva, foi muito utilizada nos momentos em que um léxico era utilizado de forma especializada como, por exemplo, quando a letra *h* não era uma simples letra ou incógnita qualquer, mas representava a altura do prédio no Problema 3. Este tipo de expansão seguiu por similaridade semiótica, pois recuperava os mesmos léxicos anteriores para dar continuidade ao discurso.

Conseguimos entender algumas tendências nas estratégias de resolução dos estudantes, que em sua maioria seguiu os passos: ler o enunciado e a partir dele destacar os elementos importantes produzindo algumas designações iniciais; determinar qual fórmula ou recurso matemático seria usado; aplicar os elementos designados na fórmula ou estratégia escolhido e realizar as expansões discursivas para obter a resposta; usar a língua natural para justificar o que foi feito ou explicar passos da resolução.

Os conhecimentos matemáticos listados nas análises *a priori* puderam ser observados nas resoluções com uso do olhar prático dado às funções discursivas. Observamos que alguns erros foram de natureza aritmética ou algébrica e não necessariamente do conteúdo. Outros erros são de natureza conceitual e podem ser identificados pela maneira como as funções e operações discursivas foram empregadas. Quando um estudante evoca uma relação trigonométrica diferente da que seria necessária, podemos inferir que não compreendeu os conceitos relativos da trigonometria do triângulo retângulo, por exemplo.

O tipo de análise que as funções discursivas nos permitiram fazer revela elementos da aprendizagem dos objetos matemáticos envolvidos em cada problema, indicando quais pontos ainda precisam ser reforçados pelo professor. Entendemos que falar sobre aprendizagem é algo complexo e muitas vezes subjetivo, porém, consideramos que esta análise à luz da teoria de Duval oferece caminhos para compreendê-la e potencializá-la.

Como o foco de nossa pesquisa estava no discurso, não demos ênfase para outros pontos como por exemplo, as apreensões e olhares na geometria (DUVAL, 2011) ou ainda, as questões de congruência semântica (HILLESHEIM; MORETII, 2013). Todavia, a experiência de problemas com conhecimentos matemáticos diferentes também contribui para termos maior variedade do uso das funções discursivas

Apesar das funções metadiscursivas não serem nosso objeto de interesse, elas também estiveram presentes nos momentos de tratamentos (mudança das representações) e das intenções comunicativas criadas pelos estudantes com uso da língua natural (estabelecendo diálogo com o professo). E no caso da objetivação, podemos esperar que para aqueles que conduziram suas resoluções corretamente, tiveram momentos de objetivação do conteúdo, ou seja, os conceitos foram internalizados e o estudante aprendeu.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a presente pesquisa buscamos aprofundar os estudos sobre o papel da linguagem na análise da aprendizagem matemática, mais especificamente, investigar as contribuições das funções e operações discursivas. A pesquisa de caráter qualitativo teve o apoio metodológico dos elementos da Engenharia Didática e produziu um material analítico para discussão por meio da aplicação de problemas com estudantes do ensino médio. Os problemas continham conteúdos matemáticos diferentes, cujas resoluções tornaram-se os discursos que utilizamos para realizar nossas análises à luz do referencial teórico escolhido.

Um dos grandes desafios da execução desta pesquisa foi poder conduzi-la em meio a uma pandemia mundial, que muito afetou a funcionalidade da escola enquanto espaço físico e social. Para sermos capazes de superar as dificuldades de fazer uma pesquisa de forma não presencial, foi preciso nos reinventarmos, utilizando canais para postagens de vídeos, PDF's, formulários e outros recursos da plataforma Google Classroom que foi utilizada como mediação. Graças a estes dispositivos tecnológicos, conseguimos criar um canal de comunicação com os estudantes e fazê-los participar da presente pesquisa.

Consideramos que este estudo teve dois lados: um teórico e outro prático. O lado teórico é constituído pelo aprofundamento da teoria de Duval, a discussão de outras pesquisas sobre as funções discursivas, as conexões preliminares sobre sua importância para aprendizagem matemática e o estudo de nosso referencial metodológico. O lado prático contempla a intervenção realizada com estudantes do ensino médio, que já eram alunos do pesquisador e resolveram os problemas propostos. A sinergia teórico-prática é considerada o principal fator para o êxito da execução da pesquisa e a produção de resultados para o campo.

A utilização da Engenharia Didática como metodologia garantiu uma estrutura de pesquisa organizada, onde cada etapa continha seus objetivos e assim, nos deu maior segurança para o andamento do estudo. A análise prévia foi fundamental para levantar trabalhos sobre a teoria de Duval e as funções do discurso, enquanto a análise *a priori* permitiu fazermos previsões que facilitar a execução da análise *a posteriori*, uma vez que tínhamos clareza do que buscaríamos observar.

Nossa problemática e objetivo geral voltavam-se a investigar as contribuições das funções discursivas na aprendizagem matemática, em particular, na resolução de problemas. Uma consideração importante para destacar, que já era defendido por Duval (2004) e também esperado em nossa análise *a priori,* está em dizer que nenhuma função discursiva é usada de forma isolada. Em todas as resoluções, mais de uma função estava presente para compor o discurso, acentuando as expectativas iniciais que tínhamos.

Dentre todas as funções discursivas, o destaque está para função referencial cujo principal objetivo é designar objetos, dar-lhes um nome, um atributo, uma identificação que o represente por meio de uma palavra, letra, símbolo ou signo. Em todos os problemas, as resoluções começavam ou dependiam de uma designação ou redesignação. No caso da álgebra, a questão da designação foi ainda mais importante, principalmente pelos diferentes tipos de designação. A aprendizagem dos conteúdos algébricos repousa na capacidade de efetuarmos estes desdobramentos da operação de designação (DUVAL, 2015). A mesma relevância percebeu-se também na geometria, pois sem designar léxicos para indicar elementos como a altura, geratriz de um cone ou o cosseno de um ângulo, seriam limitadas as alternativas de resolução. Os estudantes que não conseguiram realizar essas operações discursivas revelaram que seu aprendizado algébrico está incompleto.

No caso da função apofântica, sua contribuição nos discursos ocorreu principalmente pela possibilidade de criar enunciados completos, que permitiram aos estudantes se comunicarem com o professor (de forma escrita), criando frases com sentido completo para compor os discursos. E ainda, é a apofantica que possibilitou atribuirmos o valor lógico (verdade ou falso), social (que foi atender ao professor) e epistêmico (ver se o estudante seguiu as regras matemáticas) de cada resolução dos problemas. Dependendo da maneira que o estudante criou estas frases e explicações, foi possível identificarmos aspectos da aprendizagem que precisavam ser consolidados.

Não menos relevante, a função de expansão discursiva, empregada pelas operações de substituição e acumulação de informação, ofereceu a possibilidade de expandir os discursos, interligando enunciados para formar uma explicação, descrição ou raciocínio coeso. Quando aplicada com a língua materna, a forma de expansão era do tipo natural pela operação de acumulação e foi muito recorrente nas partes dos problemas que solicitavam alguma justificativa. Um exemplo é o caso do Estudante A19, que na Figura 16, disse que *o pintor A é mais barato pois cobra menos por metro quadrado*. Por meio dessa frase, podemos inferir que não houve total clareza do problema, pois nem todas as situações foram levadas em conta pelo estudante no momento de sua argumentação.

Nos momentos em que a progressão do discurso dependia de desenvolver cálculos algébricos e simbólicos, a expansão discursiva formal foi empregada com a operação de substituição. Os estudantes precisaram efetuar tratamentos dos elementos já designados, mantendo similaridade semiótica, efetuando os procedimentos algébricos válidos que chegassem à outra expressão necessária para o problema.

A expansão cognitiva também se fez presente quando os léxicos eram utilizados de forma especializada, em geral, em conjunto com outros tipos de expansão. É necessário que em matemática escolhamos, por exemplo, a letra h para indicar uma altura ou B para ser a base maior de um trapézio. Apesar de não ter sido muito citada, a expansão lexical aconteceu quando os léxicos eram recuperados para serem reutilizados durante o discurso, isto sempre aconteceu dentro de outras formas de expansão, como a natural ou formal.

Esta pesquisa se propôs a atingir alguns objetivos específicos, foram eles: (i) Aprofundar os estudos sobre as funções discursivas de Duval; (ii) Organizar e aplicar alguns problemas matemáticos para serem resolvidos por estudantes de ensino médio; (iii) Identificar as funções discursivas que são mais utilizadas na resolução dos problemas; (iv) Refletir acerca das dificuldades encontradas no uso das funções discursivas; (v) Analisar como esses discursos contribuem para diagnosticar a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos na resolução dos problemas. Com as análises que avançamos, chegamos a algumas considerações:

(i) Conseguimos aprofundar os estudos sobre as funções discursivas de Duval, construindo uma pesquisa que não somente as utilizasse, mas buscasse compreendê-las com profundidade e de forma prática.

(ii) Organizamos e aplicamos cinco problemas de matemática que foram resolvidos por estudantes de ensino médio, servindo como base de dados empírica que foi fundamental para obtenção dos resultados.

(iii) Identificamos as funções discursivas mais utilizadas na resolução de problemas, no qual a função referencial com a designação de objetos teve destaque. A operação de predicação da função apofântica e a expansão discursiva nas formas de natural e formal, também estiveram presentes na maioria dos discursos com notoriedade.

(iv) Dentre as dificuldades observadas no uso destas funções vemos que a maioria dos erros dos estudantes aconteceu dentro da expansão discursiva formal. Uma possível justificativa para isso está no fato que a operação de substituição, conduzida pela expansão formal, exige do sujeito uma clareza das regras internas da matemática.

Para dar continuidade ao discurso por meio desta expansão o estudante precisa saber efetuar procedimentos e operações semióticas coerentes dentro dos registros, em destaque o registro algébrico. Também destacamos que com o olhar das funções discursivas pudemos identificar erros de natureza puramente aritmética e os erros de natureza conceitual, que podem revelar lacunas na aprendizagem.

(v) Foi por meio da observação das funções discursivas que conseguimos analisar a compreensão de alguns conceitos matemáticos que os problemas envolviam. Um exemplo, é dizer que para inferirmos se um estudante entendeu como resolver um sistema linear, foi preciso verificar se ele conseguiu designar as variáveis dos problemas e realizar as expansões pertinentes para resolvê-lo. Se o estudante não foi capaz disso, podemos considerar que sua aprendizagem algébrica está limitada e que ele não compreendeu como resolver um sistema. Mesmo que ele use outros recursos não algébricos para resolução, entendemos que a aprendizagem matemática de um sistema linear irá exigir em algum momento tal linguagem, portanto, seria um equívoco pensarmos que ela pode ser desconsiderada. Também sabemos que o uso correto das funções discursivas não implica em todos os casos que o estudante compreendeu o conceito, pois temos outras variáveis envolvidas no fenômeno complexo que é a aprendizagem. Contudo, defendemos que a recíproca é verdadeira, a aprendizagem matemática requer o conhecimento de tais funções.

A partir de todos os apontamentos anteriores, conseguimos atingir consequentemente nosso objetivo geral que estava diretamente conectado a nossa problemática: Como as funções discursivas podem contribuir na análise da aprendizagem matemática, em particular, na resolução de problemas? A resposta para essa pergunta volta-se para uma síntese de todo o exposto até aqui, no qual podemos reafirmar que o processo de aprendizagem matemática perpasse por tais funções e operações discursivas.

As funções discursivas contribuem primeiramente, como uma forma do sujeito conseguir exteriorizar o que entende da própria matemática. São instrumentos que podem conduzir a manifestação sobre o que ele compreendeu de determinado objeto, em particular nesta pesquisa, para a resolução de um problema. Diretamente relacionado a isto, elas admitem papel fundamental de permitir com que o professor possa analisar o que o estudante ainda não entendeu, visto que a manipulação incorreta das funções pode estar voltada a incompreensões da própria matemática.

Muitas considerações sobre a aprendizagem de objetos matemáticos podem ser inferidas a partir do olhar que as funções discursivas oferecem, inclusive, sobre a natureza do erro do estudante. Neste sentido, o discurso construído para resolver um problema pode ser validado tanto do ponto de vista matemático quanto cognitivo, contribuindo para uma perspectiva mais cuidadosa da análise do professor nas construções escritas nas aulas de matemática.

A língua natural extrapolou a esfera da função metadiscursiva da comunicação como geralmente é limitada. Concordamos com Duval e Moretti (2018, p. 99) quando dizem que "a utilização da língua natural nas atividades matemáticas é radicalmente diferente daquela que é feita por fora da matemática e em todos os outros domínios do conhecimento". A matemática é construída de forma majoritariamente escrita e não oral, onde a língua age como um registro de representação semiótica para o funcionamento do pensamento. Por meio de nossas análises foi possível observarmos que não podemos separar aprendizagem matemática do domínio da língua natural, formal e especializada. É na sinergia e no complemento do uso dos diferentes recursos discursivos que se encontra um ponto chave para a aprendizagem matemática.

Nossa pesquisa buscou colocar a atividade matemática no centro da análise a partir do ponto de vista cognitivo e semiótico, trazendo à tona a perspectiva de que a linguagem na matemática age como um registro de representação semiótica para o funcionamento do pensamento. A possibilidade de conhecer como os estudantes argumentam e desenvolvem seus discursos, nos oferece um olhar diferenciado para analisar o processo de ensino e aprendizagem matemática.

Esta pesquisa também nos ajuda a pensar sobre os processos avaliativos das aulas de matemática, pois se permanecermos valorizando apenas a resposta final de um problema, estamos desconsiderando toda uma produção matemática que também tem valor cognitivo. Analisar o processo de construção de uma resposta é necessário para compreender com mais profundidade quais aprendizados e incompreensões os estudantes estão admitindo. O discurso foi, neste estudo, uma fonte de informação primordial do aprendizado matemático, que deve ser valorizado em nossas práticas.

Entendemos que a problemática estudada não se finaliza com esta pesquisa, pois outros questionamentos sobre o tema não foram possíveis ser explorados nesta pesquisa e permanecem, alguns deles: É possível prepararmos aulas de matemática com objetivo de ensinar os estudantes a utilizarem tais funções discursivas? Em qual etapa da escolarização elas surgem e de que maneira? Quais as relações entre as funções discursivas com o letramento matemático? Estes são algumas situações que podem ser investigadas para enriquecer ainda mais o campo da educação matemática. Sabemos que nenhuma perspectiva ou teoria isolada dará conta de resolver todos os problemas que enfrentamos, mas a busca pela solução por meio de estudos e referenciais adequados é um passo importante que devemos dar para melhorar o ensino e aprendizagem da matemática.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ANDRÉ, Marli. O que é um estudo de caso qualitativo em Educação? **Educação e Contemporaneidade** (FAEEBA), v. 22, n. 40, jul/dez 2013, p. 95-104.

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das matemáticas.** Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa/Portugal: Instituto Piaget, 1996.

BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu; BASSOI, Tânia Stella. Estudo das funções do discurso na resolução de problemas matemáticos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 2, p. 479-503, 2014.

BRANDT, Celia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu. Aprendizagem da álgebra segundoRaymond Duval. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, Cascavel, v. 2, n. 1, p. 1-26, maio 2018.

COLOMBO, Janecler A. Amorin; FLORES, Claudia R; MORETTI, Thadeu Moretti. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. **Zetetiké**, Campinas, v. 16, n. 29, jan./jun. 2008.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação**: reflexões sobre educação e matemática. São Paulo: Summus, 1986.

DIONIZIO, Fátima A. Queiroz. **Conhecimentos docentes**: uma análise dos discursos de professores que ensinam matemática. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação, UEPG, Ponta Grossa, 2013.

DIONIZIO, Fátima A. Queiroz; BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu. Emprego das Funções Discursivas da Linguagem na Compreensão de Erros de Alunos em uma Atividade que Envolve Noções de Trigonometria**. Perspectivas da Educação Matemática,** Campo Grande, v. 7, p. 513-553, 2014.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educacion y Pedagogia, Grupo de Educacion Matematica, 2004.

__________. Registros de representações semióticos e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (Orgs.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p. 11- 33.

__________. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

__________. Registros de representações semióticos e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 266-297, 2012.

DUVAL, R.; CAMPOS, T. M. M.; BARROS, L. G. X.; DIAS, M. A. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** introduzir a álgebra no ensino: qual o objetivo e como fazer isso. São Paulo: PROEM, 2015.

GRANGER, Gilles-Gaston. **Filosofia do Estilo.** Tradução de Escarlett Zebbertto Marton. São Paulo: Perspectiva/Edusp, 1974.

HILLESHEIM, S.; MORETTI, M. Alguns aspectos da noção da congruência semântica presentes no ensino dos números inteiros relativos. **Revista Espaço Pedagógico**, v. 20, n. 1, 4 out. 2013.

HUANCA, R. R. H. **A Resolução de Problemas no processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática na e além da sala de aula**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. *et al.* **Educação Matemática**: Uma Introdução. São Paulo: EDUC, 1999, p. 197-208.

NACARATO, A. M. A escrita nas aulas de matemática: diversidade de registros e suas potencialidades. **Leitura: Teoria & Prática**, Campinas, v. 31, n. 61, p. 63-79, nov. 2013.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: **Educação Matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004, p. 213-231.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PASA, Bárbara Cristina. **A noção de infinitésimo no esboço de curvas no ensino médio:** por uma abordagem de interpretação global de propriedades figurais**.** Doutorado (Tese). PPGECT, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017.

PEREIRA, M. **O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas no 3° ciclo do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, UNESP, Rio Claro, 2004.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTES, H. M. S.; BRANDT, C.F.; NUNES, A.L.R. O estado da arte da teoria dos registros de representação semiótica na educação matemática. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, v. 19, n. 1, 2017.

POWELL, A; BAIRRAL, M. **A escrita e o pensamento matemático:** Interações e potencialidades. Campinas: Papirus, 2006.

SILVA, Sérgio F. **Ensino e aprendizagem das superfícies quádricas no ensino superior:** uma análise baseada na teoria dos registros de representações semióticas com o uso do GeoGebra. Tese (Doutorado). PPGECT, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2018.

VERGANI, T. **Matemática & linguagem(s):** olhares interactivos e transculturais. Lisboa: Pandora Edições, 2002.

TOZETTO, Annaly Schewtschik. L**etramento para a docência em matemática nos anos iniciais.** Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-graduação em Educação, UEPG, Ponta Grossa, 2010.

APÊNDICE A –Termo de Consentimento

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas Centro de Ciências da Educação
Centro de Ciências Biológicas
Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica

Termo de Consentimento para participação de pesquisa

Eu, Eduardo Sabel, professor de seu filho(a) estou desenvolvendo um Trabalho de Dissertação de Mestrado para o Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina, sob orientação do Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti. Esse trabalho tem como tema estudar as funções discursivas de Duval na resolução de problemas.

Para realizar minha pesquisa, necessito de uma material empírico que seja produzido por estudantes de Ensino Médio. Este material são algumas atividades matemáticas resolvidas pelos estudantes, e por meio delas irei fazer uma análise do conteúdo identificando elementos que me permitam atingir os objetivos desta pesquisa.

Como já atuo como professor de seu filho(a), penso em utilizar os problemas matemático que são feitos na em minha disciplina e assim aproveitar esse material para minha pesquisa. Será o próprio material das aulas que será utilizado, sem que haja necessidade de produzir alguma específico. A pesquisa será totalmente anônima, ou seja, nenhum nome do estudante será revelado, nenhum tipo de imagem ou vídeo, nem mesmo a série a qual ele pertence. Será analisado somente as resoluções das atividades e os alunos receberão códigos como A20, B15, C5, ficando assim garantida a total anonimidade e sigilo da participação de seu filho. Por isso, este termo serve como um aceite para que eu possa utilizar do material que vem sendo produzido na minha disciplina com seu filho(a).

Nenhum aluno será prejudicado caso não participar desta pesquisa, pois a mesma não irá alterar ou influenciar no andamento das aulas. Qualquer dúvida estou à disposição pelo e-mail: 687337@profe.sed.sc.gov.br ou eduardosabel0311@outlook.com. Desde já agradeço a atenção.

Para quem aceitar participar da pesquisa, enviar foto no Google Sala de Aula com a seguinte frase **preenchida e assinada no caderno:**

Eu, (Nome do responsável) li o termo de consentimento e aceito que meu filho(a) (Nome do Estudante) participe da pesquisa realizada pelo Professor Eduardo Sabel.
Assinatura do responsável: ....

Florianópolis, 19 de Agosto de 2020.