



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO SOCIOECONÔMICO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

Yuri Hakim Lorenzi

**Pensar grande ou pensar pequeno? Uma análise de metas como pontos de referência em um ambiente simulado**

Florianópolis  
2021

Yuri Hakim Lorenzi

**Pensar grande ou pensar pequeno? Uma análise de metas como pontos de referência em um ambiente simulado**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Economia.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Meurer

Florianópolis  
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Lorenzi, Yuri Hakim

Pensar grande ou pensar pequeno? Uma análise de metas  
como pontos de referência em um ambiente simulado / Yuri  
Hakim Lorenzi ; orientador, Roberto Meurer, 2021.

63 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Sócio-Econômico, Programa de Pós-Graduação em  
Economia, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Economia. 2. Sistemas de ratings de habilidade. 3.  
Teoria de prospecto. 4. Simulações. I. Meurer, Roberto. II.  
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós  
Graduação em Economia. III. Título.

Yuri Hakim Lorenzi

**Pensar grande ou pensar pequeno? Uma análise de metas como pontos de referência em um ambiente simulado**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Gustavo de Oliveira Aggio, Dr.  
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP

Prof. Jaylson Jair da Silveira, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Helberte João França Almeida, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Economia.

---

Coordenação do Programa de  
Pós-Graduação

---

Prof. Dr. Roberto Meurer  
Orientador

Florianópolis, 2021.

Aos meus pais e amigos.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a minha linda namorada também chamada Yuri.

Agradeço aos meus pais e minha família.

Agradeço ao Prof. Dr. Roberto Meurer pelos ensinamentos nestes anos de mestrado e em especial pela atenciosa orientação.

Agradeço aos colegas de mestrado e de doutorado do departamento, que muito me ensinaram neste período e que tive o prazer da companhia.

Agradeço aos amigos.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

## RESUMO

O Sistema Elo de *ratings* é um método estatístico que visa estimar habilidades de jogadores. Foi originalmente desenvolvido para o xadrez e se tornou um dos principais métodos de estimação das habilidades de competidores em vários esportes. O Sistema Elo fornece um ambiente propício para simulações, pois resultados de partidas podem ser simulados com base nas habilidades dos competidores e existe um mecanismo objetivo para a atualização dos *ratings*. A presente dissertação se aproveita desse ambiente para estudar o comportamento de agentes com preferências dependentes de um ponto de referência, um comportamento descrito pela teoria de prospecto. Nos modelos desenvolvidos que incorporam essas preferências, o ponto de referência dos indivíduos são metas de *rating* que eles mesmos estipulam. O esforço que o indivíduo escolhe em uma partida depende da distância do *rating* em relação a sua meta. A formação da meta está relacionada à habilidade do indivíduo. Indivíduos realistas escolhem a meta igual à habilidade. Indivíduos otimistas escolhem uma meta maior que a habilidade, e indivíduos pessimistas, uma meta menor que a habilidade. Os resultados de simulações apontaram que um otimismo moderado produziu os maiores *ratings* em média. Esse resultado está em concordância com a evidência empírica de diversas áreas de pesquisa que apontam que as metas que induzem os melhores resultados devem ser levemente desafiadoras.

**Palavras-chave:** Sistemas de *ratings* de habilidade. Teoria de prospecto. Simulações.

## ABSTRACT

The Elo rating System is a statistical method that aims to estimate player ability. It was originally developed for chess and has become one of the main methods of estimating competitor skills in various sports. The Elo System framework provides an environment for simulations, as match results can be simulated based on the skills of the competitors and there is an objective mechanism for updating the ratings. The present dissertation makes use of this environment to study the behavior of agents with reference dependent preferences, as described by prospect theory. In the developed models that incorporate these preferences, the reference point of the individuals are rating goals set by themselves. The effort that the individual chooses in a match depends on the distance of the rating relative to his goal. The choice of the goal is related to the individual's ability. Realistic individuals choose goals equal to their skill. Optimistic individuals choose a goal greater than their skill, and pessimistic individuals, a goal below their skill. The results from simulations showed that moderate optimism produced the highest average ratings. This result is in agreement with the empirical evidence from several research areas that point out that the goals that induce the best results should be slightly challenging.

**Keywords:** Skill Rating Systems. Prospect Theory. Simulations.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Distribuição Gumbel centrada no <i>rating</i> de habilidade $r_a=1500$ (esquerda). Duas distribuições Gumbel sobrepostas, uma centrada no <i>rating</i> de habilidade $r_b=1400$ e a outra centrada em $r_a=1500$ (direita)	15
Figura 2 – Distribuição logística da diferença da performance ( $\Delta r = r_a - r_b$ ) de dois jogadores com distribuição Gumbel (uma centrada em $r_a=1500$ e a outra em $r_b=1400$ ). A área da curva à direita de 0 representa a probabilidade do jogador mais forte ganhar do mais fraco. . . . .	16
Figura 3 – Duas distribuições normais da performance de jogadores, uma centrada no <i>rating</i> $r_b$ de 1400 e outra no <i>rating</i> $r_a$ de 1500. . . . .	17
Figura 4 – Distribuição normal da diferença da performance ( $\Delta r = r_a - r_b$ ) de dois jogadores com distribuição normal (uma com média $r_a=1500$ e a outra com média $r_b=1400$ ). A área da curva à direita de 0 representa a probabilidade do jogador mais forte ganhar do mais fraco. . . . .	17
Figura 5 – Distribuição normal de diferença de performances normais (linha laranja). Distribuição logística da diferença de performances Gumbel (linha azul). . . . .	19
Figura 6 – Função de utilidade $u(x)$ côncava de um agente avesso ao risco . .	28
Figura 7 – Função valor da teoria de prospecto com ponto de referência $x=0$ .	30
Figura 8 – Benefício marginal das metas de 30 e 40 e custo marginal crescente. Aumento da meta aumenta a produção. . . . .	32
Figura 9 – Benefício marginal das metas de 30 e 40 e custo marginal crescente. Redução da meta aumenta a produção. . . . .	33
Figura 10 – Histograma da habilidade da população de jogadores na simulação de esportes individuais. Valores extraídos de uma distribuição $N(1500, 500)$ . . . . .	44
Figura 11 – Histograma dos <i>ratings</i> Elo finais da população de jogadores na simulação de esportes individuais. . . . .	45
Figura 12 – Histograma dos erros da população de jogadores na simulação de esportes individuais. . . . .	46
Figura 13 – Histograma dos <i>ratings</i> Elo finais da população de jogadores na simulação de esportes coletivos. . . . .	47
Figura 14 – Histograma dos erros da população de jogadores na simulação de esportes coletivos. . . . .	47
Figura 15 – Histograma dos <i>ratings</i> Elo finais da população de jogadores na simulação da versão 1 do modelo de esportes coletivos e teoria do prospecto. . . . .	48

Figura 16 – Histograma dos erros da população de jogadores na simulação da versão 1 do modelo de esportes coletivos e teoria do prospecto. . .	49
Figura 17 – Histograma dos erros dos jogadores de tipo realista na simulação da versão 1 do modelo de esportes coletivos e teoria do prospecto. . .	50
Figura 18 – Histograma dos erros dos jogadores de tipo pessimista na simulação de esportes coletivos com indivíduos com função valor. . . . .	51
Figura 19 – Histograma dos erros dos jogadores de tipo otimista na simulação de esportes coletivos com indivíduos com função valor. . . . .	51
Figura 20 – Gráfico da dispersão do erro e viés comportamental e o polinômio de grau 3 com melhor ajuste. Dados de agentes de 100 simulações da segunda versão do modelo de esportes coletivos e teoria de prospecto ( $ECTP_2$ ). . . . .	55

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Porcentagem de vitórias previstas do jogador A contra o jogador B em função do diferencial de <i>ratings</i> ( $\Delta r = r_a - r_b$ ). Previsões das versões logística e normal do Sistema Elo. . . . .	20
Tabela 2 – Indicadores de erro de cada um dos tipos de uma simulação única da versão 1 do modelo de esportes coletivos e teoria de prospecto. EM (erro médio), EAM (erro absoluto médio), EQM (erro quadrático médio). . . . .	52
Tabela 3 – Indicadores de erro das simulações únicas dos modelos. EM (erro médio), EAM (erro absoluto médio), EQM (erro quadrático médio). .	52
Tabela 4 – Erros absolutos médios das classificações ( $EAM_{ranque}$ ) de simulações únicas de cada um dos modelos. . . . .	53
Tabela 5 – Médias dos indicadores de erro de 100 simulações de cada um dos modelos. EM (erro médio), EAM (erro absoluto médio), EQM (erro quadrático médio). . . . .	54
Tabela 6 – Médias dos erros absolutos médios das classificações ( $EAM_{ranque}$ ) de 100 simulações de cada um dos modelos. . . . .	54
Tabela 7 – Indicadores de erro por tipo do agrupamento de todos os indivíduos das 100 simulações da versão 1 do modelo com teoria de prospecto. EM (erro médio), EAM (erro absoluto médio), EQM (erro quadrático médio). . . . .	55

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b>	<b>14</b>
2.1	SISTEMA ELO	14
2.2	DERIVAÇÃO DAS FORMAS NORMAL E LOGÍSTICA DO SISTEMA ELO E FÓRMULA DE AJUSTE	18
2.3	ADAPTAÇÃO DO SISTEMA ELO PARA ESPORTES COLETIVOS	21
2.4	OUTROS SISTEMAS DE <i>RATING</i> E SUA APLICABILIDADE	22
2.5	TEORIA DE AGÊNCIA E SISTEMAS DE <i>RATING</i>	25
2.6	PROBLEMAS DOS SISTEMAS DE <i>RATING</i>	26
2.7	TEORIA DE PROSPECTO	27
<b>2.7.1</b>	<b>Uma breve introdução à teoria de utilidade esperada</b>	<b>27</b>
<b>2.7.2</b>	<b>Função valor da teoria de prospecto</b>	<b>28</b>
<b>2.7.3</b>	<b>Determinação do ponto de referência</b>	<b>30</b>
<b>2.7.4</b>	<b>Impactos do ponto de referência no desempenho</b>	<b>34</b>
2.8	MODELOS SIMULADOS	36
<b>2.8.1</b>	<b>Simulações de sistemas de <i>ratings</i></b>	<b>36</b>
<b>2.8.2</b>	<b>Simulações com agentes com a função valor</b>	<b>37</b>
<b>2.8.3</b>	<b>Simulações com agentes otimistas e pessimistas</b>	<b>37</b>
2.9	CONSIDERAÇÕES SOBRE A REVISÃO DE LITERATURA	38
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>39</b>
3.1	OS TRÊS TIPOS DE MODELOS	39
3.2	SIMULAÇÃO DO SISTEMA ELO PARA ESPORTES INDIVIDUAIS	39
3.3	SIMULAÇÃO DO SISTEMA ELO PARA ESPORTES COLETIVOS	41
3.4	SIMULAÇÃO DO SISTEMA ELO PARA ESPORTES COLETIVOS COM AGENTES COM FUNÇÃO VALOR NA FORMA DA TEORIA DE PROSPECTO	42
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>44</b>
4.1	RESULTADOS DE SIMULAÇÕES ÚNICAS	44
<b>4.1.1</b>	<b>Simulação única do modelo para esportes individuais</b>	<b>44</b>
<b>4.1.2</b>	<b>Simulação única do modelo de esportes coletivos</b>	<b>46</b>
<b>4.1.3</b>	<b>Simulação única da versão 1 do modelos de esportes coletivos com agentes com função valor da teoria de prospecto</b>	<b>48</b>
4.2	RESULTADOS DE MÚLTIPLAS SIMULAÇÕES DO MODELO	53
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>56</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>57</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Desde a antiguidade o talento e seu impacto estão sendo estudados. Conforme apontado por Sornette *et al.* (2019), considerando que só é possível observar resultados, acaba sendo difícil distinguir o papel do mérito e do acaso. No ambiente dos esportes, por existir o constante confronto entre jogadores, foi possível desenvolver métodos estatísticos para estimar a habilidade individual e comparar jogadores. Os chamados *ratings* de habilidade possuem grande utilidade ao avaliar jogadores rapidamente, sem a necessidade de uma análise profunda de seu comportamento individual. A partir dos *ratings* é possível parear jogadores de habilidades próximas, com intuito de proporcionar partidas equilibradas.

Os sistemas de *ratings* de habilidade também fornecem um ambiente ideal para o desenvolvimento de simulações, dado que existe uma única métrica (o *rating*) e um mecanismo objetivo de ganhos e perdas<sup>1</sup>. O presente trabalho se aproveita de tal ambiente para construir simulações baseadas no Sistema Elo, o primeiro e mais relevante sistema de *ratings*. Nas simulações, jogadores com diferentes habilidades se enfrentam em competições e seus *ratings* de habilidade são atualizados. Ao final das simulações é possível comparar se as classificações produzidas pelos *ratings* de habilidade do Sistema Elo se aproximam das reais classificações de habilidades.

Em um dos modelos desenvolvidos, são estudadas as implicações de agentes com comportamento baseado na função valor da teoria de prospecto, desenvolvida por Kahneman e Tversky (1979). A função valor possui três características principais: a primeira é que indivíduos categorizam resultados como ganhos ou perdas de acordo com um ponto de referência; a segunda é a aversão à perda, que determina que o prazer de resultados definidos como ganhos é menor que a dor de resultados categorizados como perdas; a terceira, a sensibilidade decrescente, implica que o impacto marginal de resultados se reduz à medida que os resultados se distanciam do ponto de referência.

Com base nos trabalhos de Heath *et al.* (1999) e Wu *et al.* (2008), os pontos de referência dos indivíduos simulados são metas de *rating* por eles mesmos escolhidas. A função valor implica que as metas possuam um efeito motivador. O nível de esforço (e conseqüentemente o desempenho) está relacionado à distância de um indivíduo de sua meta. Por conta da aversão à perda, indivíduos com *rating* inferior à meta se encontram no território das perdas, e se esforçam mais que indivíduos com *rating* acima da meta (território dos ganhos), para uma mesma distância da meta. Portanto, metas fáceis, e que são facilmente ultrapassadas, fazem com que rapidamente o indivíduo entre no território dos ganhos, onde o esforço é menor. E, por conta da sensibilidade decrescente, indivíduos próximos de sua meta se esforçam mais que

---

<sup>1</sup> O *rating* de habilidade é um número que aumenta caso o jogador vença uma partida e que diminui caso ele perca

indivíduos cuja meta está mais distante. Logo, metas muito difíceis induzem baixos níveis de esforço enquanto estão muito distantes.

O objetivo do modelo no qual os agentes possuem função valor é comparar ao final da simulação os *ratings* dos jogadores com diferentes tipos de escolhas de metas de *rating*. Existem três diferentes tipos de comportamentos para a escolha da meta. Os indivíduos do tipo realista escolhem sua meta igual à sua própria habilidade. Já os indivíduos do tipo otimista escolhem uma meta maior que a habilidade, e os indivíduos do tipo pessimista, uma meta menor que a habilidade. Os resultados finais apontam que, em média, o melhor tipo de comportamento foi o moderadamente otimista, pois produziu os maiores *ratings*, enquanto o pior tipo de comportamento foi o pessimista. O modelo, apesar de muito simples, foi capaz de mostrar que, mesmo em um ambiente puramente meritocrático, um viés comportamental pode implicar na existência de indivíduos com *rating* inferior ao seu potencial e indivíduos com *rating* acima da própria capacidade.

A presente dissertação contribui para a literatura por se tratar do primeiro trabalho que explora em um ambiente simulado os efeitos de metas como pontos de referências sobre o desempenho, e portanto, abre caminho para modelos mais complexos. Os resultados das simulações estão em concordância com diversas áreas da literatura que apontam que as metas que produzem os melhores desempenhos devem ser levemente desafiadoras (HEATH *et al.*, 1999; POPE, D. G.; SCHWEITZER, 2011; GOUX *et al.*, 2014; LOCKWOOD; KUNDA, 1997). Outra contribuição é a indicação de um potencial benefício de políticas públicas com objetivo de alterar metas (pontos de referência, aspirações), porém, tais políticas públicas devem ser cautelosas, pois metas exageradamente fáceis ou difíceis podem ter efeitos prejudiciais.

Além da introdução, esta dissertação divide-se em mais quatro capítulos. No Capítulo 2 é apresentada uma revisão de literatura, que é composta por uma apresentação do Sistema Elo, outros sistemas de *rating*, e sua aplicabilidade. A revisão continua com uma breve introdução da função valor da teoria de prospecto e estudos sobre o ponto de referência. A seguir é apresentada a literatura de simulações de Sistemas de *rating* e de simulações com agentes com viés comportamental. O Capítulo 3 faz a apresentação dos diferentes modelos de simulação desenvolvidos e suas premissas. O Capítulo 4 apresenta os resultados dos modelos e as diferenças encontradas entre eles. O Capítulo 5, por fim, apresenta as considerações finais.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

### 2.1 SISTEMA ELO

Em 1959, Arpad Elo desenvolveu um sistema estatístico de *rating* para o xadrez, que foi adotado pela Federação Internacional de Xadrez (FIDE) em 1970, mas apenas publicado em 1978 (ELO, 1978). O *rating* é um número costumeiramente entre 0 e 3000 que muda ao longo do tempo a partir de resultados de partidas. A principal ideia por trás do sistema Elo é modelar a probabilidade dos resultados possíveis de um jogo como função do *rating* de habilidade de dois jogadores. Quando dois jogadores se enfrentam, o sistema prevê que o jogador com maior *rating* tem maior probabilidade de ganhar a partida. Quanto maior a diferença de *ratings* entre os jogadores, maior a probabilidade do jogador melhor ranqueado ganhar. A partir do resultado de partidas, a estimativa do *rating* dos jogadores é atualizada.

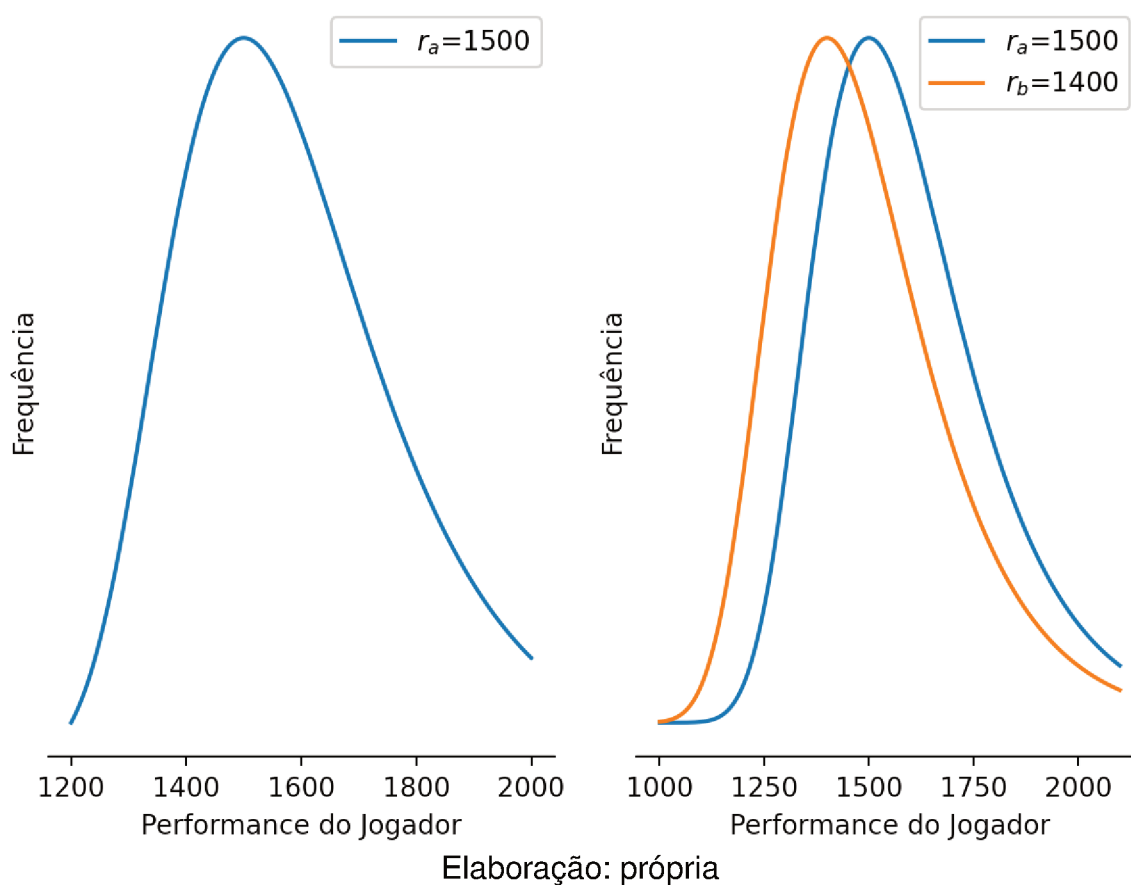
A base do Sistema Elo foi inspirada nos sistemas de comparação pareada, que têm como função indicar um grau de preferência de um objeto sobre outro. Desenvolvidos inicialmente com foco de aplicação na área da psicologia, encontraram uso em diversas áreas do conhecimento, como no marketing, engenharia alimentícia e em estudos esportivos. Davidson e Farquhar (1976) trazem uma bibliografia extensa de trabalhos elaborados a partir dos modelos de comparação pareada. A aplicação em competições é possível porque a escolha de um jogador favorito, em uma disputa um contra um, é um problema análogo à definição de uma relação de preferência entre dois objetos.

Glickman (1995) apresenta uma explicação intuitiva de como a maioria dos modelos de comparação pareada se relacionam ao xadrez. Suponha que para uma partida de xadrez cada um dos dois jogadores traga uma caixa com papéis, onde em cada um dos papéis esteja escrito um número. Cada número representa a performance potencial no jogo. Ao invés de jogar xadrez, cada jogador irá sortear um papel de sua caixa e o jogador que sortear o papel com número mais alto é o vencedor da partida. O jogador que possuir em média números mais altos em sua caixa deve ser o vencedor da partida na maioria das vezes, o que é análogo ao jogo de xadrez onde o melhor jogador não vence sempre.

O tipo de distribuição de probabilidade dos papéis nas caixas dos jogadores define qual o modelo de comparação pareada que está sendo utilizado. A versão logística do Sistema Elo se baseia no modelo Bradley–Terry, desenvolvido por Bradley e Terry (1952). A versão logística pode ser derivada fazendo a hipótese que todo jogador possui uma distribuição de performance (a distribuição dos valores na caixa do jogador) que segue uma distribuição de Gumbel (também conhecida como distribuição de valor extremo do tipo I). O formato da distribuição Gumbel é mostrado na Figura 1. Sob a versão logística todas as distribuições de performance dos jogadores seguem

uma distribuição Gumbel com o mesmo formato (mesmo parâmetro de escala), porém centradas em um diferente valor dependendo da habilidade do jogador. Note que a curva é assimétrica, com decaimento mais devagar à direita. A hipótese de distribuição Gumbel implica que o jogador possui maior chance de sortear um número alto que um número baixo.

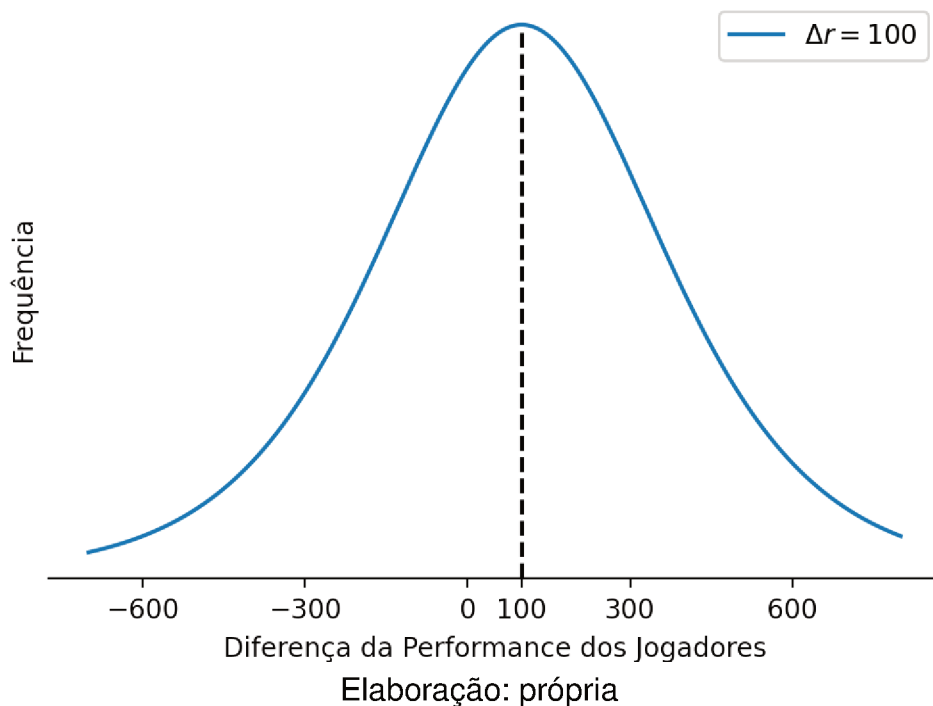
Figura 1 – Distribuição Gumbel centrada no *rating* de habilidade  $r_a=1500$  (esquerda). Duas distribuições Gumbel sobrepostas, uma centrada no *rating* de habilidade  $r_b=1400$  e a outra centrada em  $r_a=1500$  (direita)



Como o interesse é saber a probabilidade que um jogador vai ganhar do outro, é preciso saber a distribuição das diferenças de valores aleatórios selecionados das caixas dos dois jogadores. A proporção de vezes que essa diferença é maior que zero determina a probabilidade de que um jogador vai ganhar do outro. Na versão logística do Sistema Elo, a distribuição da diferença da performance de dois jogadores segue uma distribuição logística (Figura 2). A probabilidade de um jogador ter uma performance superior à do seu oponente é a fração da área sob a curva logística que está à direita do 0. Isso é equivalente ao primeiro jogador sortear de sua distribuição de performance um valor maior que seu adversário.



Figura 2 – Distribuição logística da diferença da performance ( $\Delta r = r_a - r_b$ ) de dois jogadores com distribuição Gumbel (uma centrada em  $r_a=1500$  e a outra em  $r_b=1400$ ). A área da curva à direita de 0 representa a probabilidade do jogador mais forte ganhar do mais fraco.



Apesar do sistema Elo poder ser derivado assumindo que as distribuições de performance dos jogadores são distribuições Gumbel, o sistema originalmente foi derivado a partir da hipótese de que as distribuições de performance dos jogadores são distribuições normais. Assumir a distribuição normal equivale ao modelo de comparação pareada conhecido como Thurstone–Mosteller, que foi baseado nos trabalhos de Thurstone (1927) e Mosteller (1951). A Figura 3 mostra as distribuições de performance normais de dois jogadores com *ratings* de habilidade distintos. Um aspecto interessante de usar a distribuição normal para modelar a distribuição de performance dos jogadores é que a distribuição da diferença de performance de dois jogadores possui o mesmo formato, contudo as diferenças são mais dispersas. Essa distribuição aparece na Figura 4.

Figura 3 – Duas distribuições normais da performance de jogadores, uma centrada no rating  $r_b$  de 1400 e outra no rating  $r_a$  de 1500.

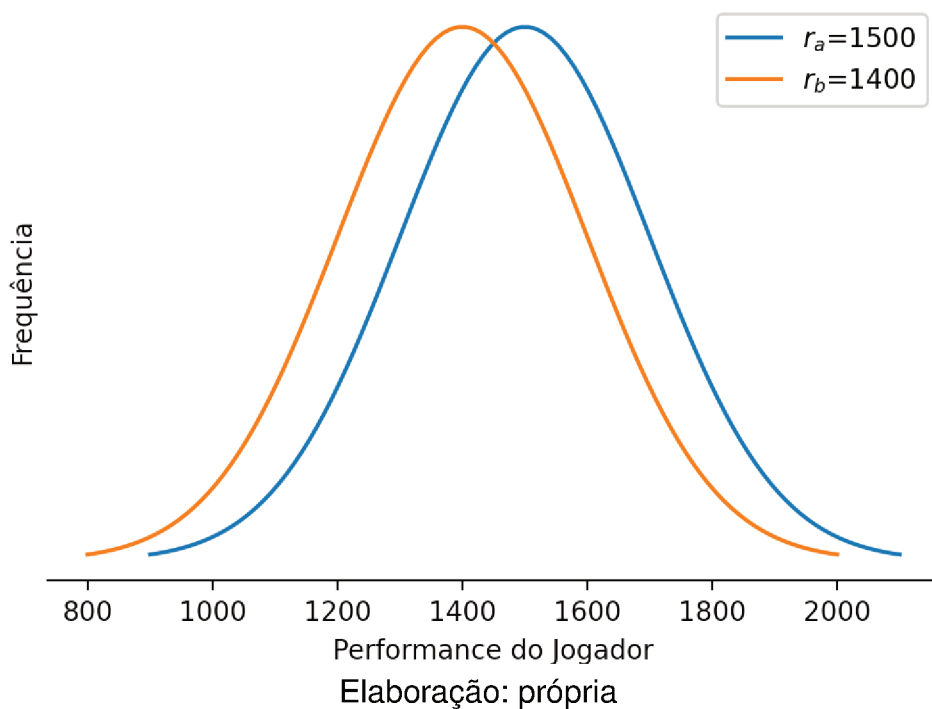
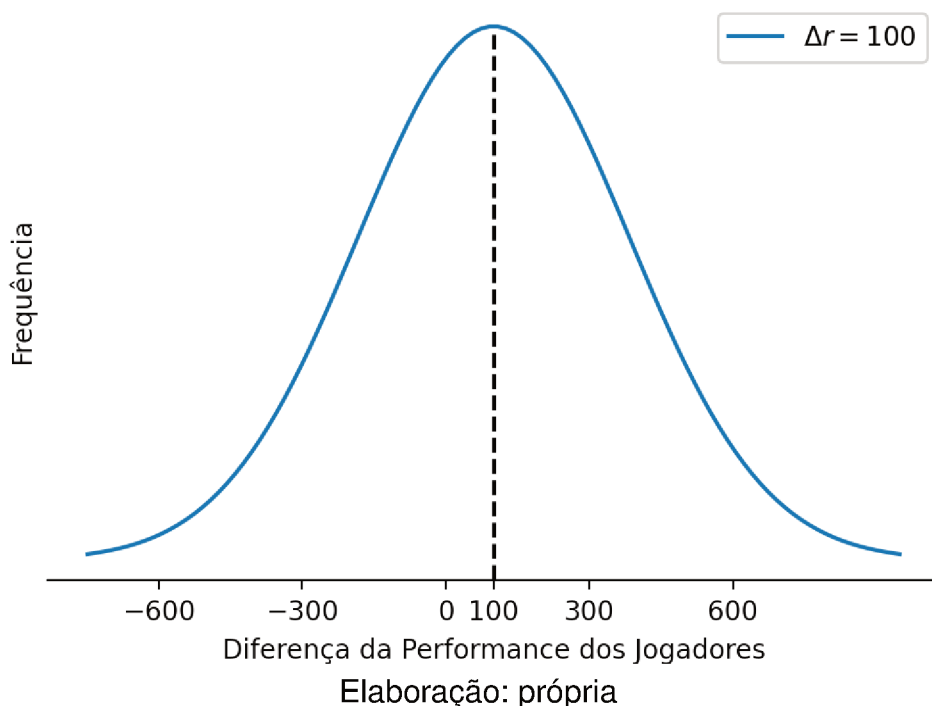


Figura 4 – Distribuição normal da diferença da performance ( $\Delta r = r_a - r_b$ ) de dois jogadores com distribuição normal (uma com média  $r_a=1500$  e a outra com média  $r_b=1400$ ). A área da curva à direita de 0 representa a probabilidade do jogador mais forte ganhar do mais fraco.



## 2.2 DERIVAÇÃO DAS FORMAS NORMAL E LOGÍSTICA DO SISTEMA ELO E FÓRMULA DE AJUSTE

A forma normal do Sistema Elo pode ser derivada supondo que a distribuição de performance dos jogadores é uma distribuição normal  $N(r_i, \sigma_i^2)$  centrada no *rating* de habilidade do indivíduo  $r_i$  e variância  $\sigma_i^2$ . Em seu trabalho, Arpad Elo assumiu  $\sigma^2 = 200^2$  para todos os jogadores. Tomando os jogadores  $A \sim N(r_a, \sigma_a^2)$  e  $B \sim N(r_b, \sigma_b^2)$ , a distribuição da diferença da performance dos dois também é uma distribuição normal, com média igual à diferença dos *ratings* ( $\Delta r = r_a - r_b$ ) e variância  $\sigma_{ab}^2$  igual a:

$$\sigma_{ab}^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 = 200^2 + 200^2 \approx 282,84^2. \quad (1)$$

A probabilidade do jogador A vencer o jogador B ( $P(A>B)$ ), em função da diferença de habilidade entre os dois jogadores ( $\Delta r = r_a - r_b$ ), é dada por:

$$P(Z > 0), \text{ onde } Z \sim N(\Delta r, \sigma_{ab}^2). \quad (2)$$

A forma logística pode ser derivada supondo que a distribuição de performance dos jogadores segue uma distribuição Gumbel com parâmetro de localização  $r_i$ , parâmetro de escala  $\beta$  e cuja função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x-r_i}{\beta} + \exp\left(\frac{x-r_i}{\beta}\right)\right). \quad (3)$$

Se  $A \sim \text{Gumble}(r_a, \beta)$  e  $B \sim \text{Gumble}(r_b, \beta)$  então  $B - A$  segue uma distribuição logística com parâmetro de localização  $r_a - r_b$  e parâmetro de escala  $\beta$ . Portanto, a probabilidade  $\Pr(A>B)$  pode ser computada como a função de distribuição acumulada da variável aleatória logística  $B - A$ , que é dada por:

$$F_{B-A}(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{x-(r_a-r_b)}{\beta}}}. \quad (4)$$

Escolhendo<sup>1</sup>  $\beta = \frac{400}{\ln(10)}$  chegamos na fórmula logística do sistema Elo que é dada por:

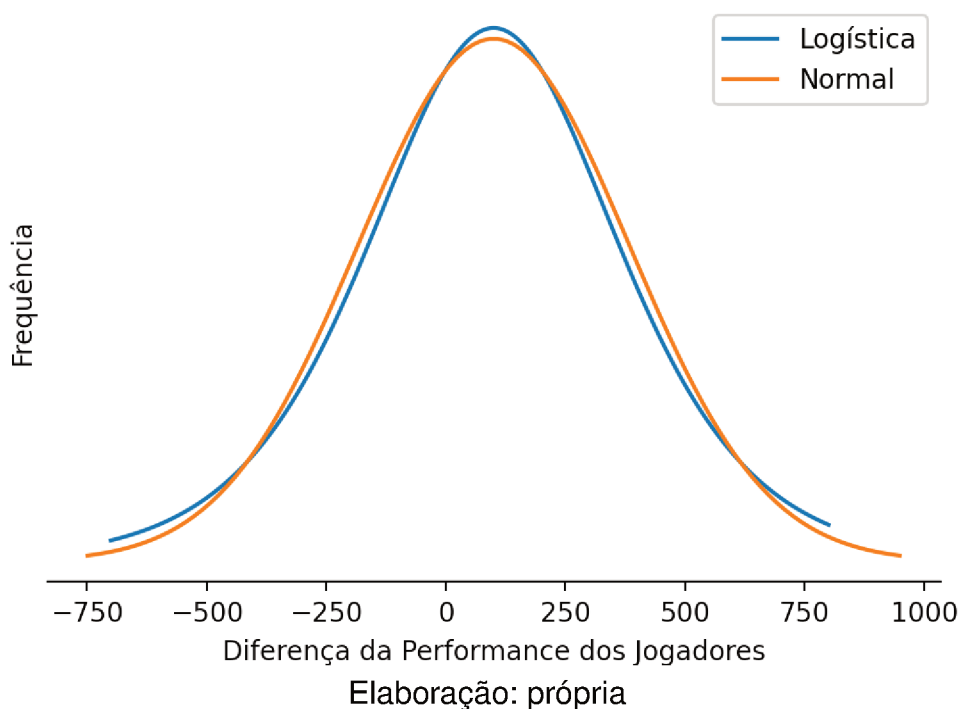
$$F_{B-A}(0) = S_{exp} = \frac{1}{1 + 10^{-(r_a-r_b)/400}}. \quad (5)$$

Os formatos da distribuição logística e da distribuição normal são muito similares. A Figura 5 mostra as duas curvas sobrepostas e seus valores podem ser observados na Tabela 1. Em seu artigo, Stern (1992) mostrou que ao analisar dados de comparação pareada, virtualmente não existe diferença entre assumir a distribuição logística

<sup>1</sup> Essa escolha de reescalonamento é feita para que o modelo se aproxime o máximo possível do modelo com hipótese de distribuição normal.

ou a distribuição normal para a diferença das performances dos jogadores. Empiricamente, a escolha entre os dois modelos é irrelevante. A grande vantagem de escolher a regressão logística é a praticidade de realizar cálculos, fator relevante em uma época onde a informática era pouco acessível. Esse é possivelmente a razão para organizações administrando sistemas de *rating* probabilísticos (ex: FIDE, FIFA) usarem a forma logística do Sistema Elo.

Figura 5 – Distribuição normal de diferença de performances normais (linha laranja). Distribuição logística da diferença de performances Gumbel (linha azul).



Como é impossível saber com precisão quais são os reais *ratings* de habilidade de uma pessoa, os *ratings* do sistema Elo são estimativas, elaboradas com base nos resultados de partidas. Os *ratings* são constantemente corrigidos à medida que novos dados são observados. Cada partida possui um escore  $S$  que é igual a 1 para o vencedor e 0 para o perdedor. Em caso de empate, o escore dos dois jogadores é 0,5. O *rating* de um jogador após uma partida é corrigido pela fórmula de ajuste que é dada por:

$$r_{post} = r_{pre} + K(S - S_{exp}), \quad (6)$$

na qual  $r_{post}$  é o *rating* atualizado após o resultado,  $r_{pre}$  é a estimativa anterior à partida,  $K$  é uma constante positiva que determina a importância de nova informação em relação à informação passada para a nova estimativa,  $S$  é escore do jogador e  $S_{exp}$  é o escore esperado pelo sistema (que na versão logística do Sistema Elo é calculado pela equação 5).

Tabela 1 – Porcentagem de vitórias previstas do jogador A contra o jogador B em função do diferencial de *ratings* ( $\Delta r = r_a - r_b$ ). Previsões das versões logística e normal do Sistema Elo.

$\Delta r$	Versão logística	Versão normal
-100	35,99%	36,18%
-90	37,33%	37,52%
-80	38,69%	38,86%
-70	40,06%	40,23%
-60	41,45%	41,60%
-50	42,85%	42,98%
-40	44,27%	44,38%
-30	45,69%	45,78%
-20	47,12%	47,18%
-10	48,56%	48,59%
0	50,00%	50,00%
10	51,44%	51,41%
20	52,88%	52,82%
30	54,31%	54,22%
40	55,73%	55,62%
50	57,15%	57,02%
60	58,55%	58,40%
70	59,94%	59,77%
80	61,31%	61,14%
90	62,67%	62,48%
100	64,01%	63,82%

Elaboração: própria

Aldous (2017) aponta que, caso a habilidade dos jogadores mude ao longo do tempo, existe um *tradeoff* na escolha do valor de K. Quanto menor K, maior o erro de defasagem, pois o peso de resultados passados será maior e, portanto, a estimativa do *rating* refletirá a habilidade passada, e não a atual. Por outro lado, quanto maior K, maior o ruído causado pela aleatoriedade de partidas recentes. Os valores de K escolhidos pela FIDE não são os mesmos para todos jogadores por conta desse *tradeoff* (FIDE, 2021). Os *ratings* de jogadores com menos de 18 anos são atualizados com um valor de K mais alto<sup>2</sup> (K=40), com intuito de acompanhar melhor a evolução da habilidade, dado que crianças tendem a melhorar rapidamente. A atualização do *rating* das primeiras 30 partidas de um jogador também é feita com um valor mais alto<sup>3</sup> de K (K=40), para permitir que o *rating* se aproxime em menos tempo da sua real habilidade.

Vale observar que, quanto maior a diferença entre o resultado observado e o

<sup>2</sup> Desde que o *rating* do menor de idade não ultrapasse 2300.

<sup>3</sup> O ajuste do *rating* de jogadores após as 30 partidas iniciais é feito com K=20, caso ele nunca tenha ultrapassado o *rating* de 2400. Para jogadores que já tenham ultrapassado a marca de 2400 de *rating*, usa-se K=10.

esperado, maior o ajuste. Isso significa que, se um jogador com *rating* alto derrotar um com *rating* baixo, ele ganhará poucos pontos com sua vitória. No caso de ele perder essa partida, seu *rating* diminuirá em vários pontos. É importante ressaltar que o parâmetro relevante é a diferença absoluta dos *ratings* dos jogadores, e não a relativa. Por isso, o sistema estima que a probabilidade de vitória de um jogador de *rating* 2100 contra um jogador 2000 é a mesma de um jogador de *rating* 1100 contra um jogador de *rating* 1000, dado que o diferencial de *ratings* é de 100 pontos nas duas situações.

Aldous (2017) aponta pontos positivos do Sistema Elo. Trata-se de um sistema dinâmico, que apenas atualiza o *rating* de um jogador caso esse jogador participe de uma partida. O sistema implicitamente dá mais peso para resultados recentes, sem precisar de uma escolha explícita de quantos dados do passado usar. Consequentemente o sistema fornece uma forma de acompanhar as mudanças de habilidade dos jogadores, sem a necessidade de assumir um modelo de mudança de habilidade ao longo do tempo.

Através de mecanismos de busca, é possível encontrar vários *sites* que afirmam que os *ratings* do sistema Elo convergem para os valores de habilidade real em 30 partidas. Foram encontrados dois trabalhos que dão suporte a essa afirmação. Van Der Maas e Wagenmakers (2005) encontraram que são necessários 25 jogos para se obter uma estimativa confiável do *rating* de um jogador de xadrez. Antal (2013) utilizou uma adaptação do Sistema Elo que produziu estimativas confiáveis em 30 interações de uma simulação.

### 2.3 ADAPTAÇÃO DO SISTEMA ELO PARA ESPORTES COLETIVOS

Como o Sistema Elo foi desenvolvido para esportes individuais, é preciso que ele seja adaptado para a aplicação no contexto de esportes coletivos. Primeiramente é necessária uma hipótese sobre a função de habilidade agregada de uma equipe. O trabalho de Rahman *et al.* (2015) considera duas possibilidades. A primeira é de que a habilidade da equipe é definida apenas pelo valor máximo dos participantes, o que faz sentido em certos contextos. Por exemplo, a qualidade de um artigo científico é determinada pela habilidade do melhor pesquisador. A segunda possibilidade é que a habilidade da equipe é resultante da soma das habilidades individuais. O exemplo usado pelos autores é o de uma equipe de basquete, na qual a soma das médias de pontuações individuais representam a média de pontos da equipe. O sistema de *rating* *TrueSkill* da *Microsoft*, desenvolvido por Herbrich *et al.* (2007), utiliza a hipótese de soma de habilidades. Portanto, o cálculo do *rating* de uma equipe é feito somando os *ratings* individuais de seus jogadores.

A adaptação do Sistema Elo do presente trabalho, se baseia na hipótese que a habilidade de uma equipe é a soma das habilidades individuais. A fórmula do Sistema

Elo adaptado para esportes coletivos é construída a partir dos *ratings* das equipes A e B, onde o *rating* da equipe A ( $R_A$ ) é dado pela soma dos *ratings* de seus  $u$  participantes:

$$R_A = \sum_{i=1}^u r_i, \quad (7)$$

e o cálculo do *rating* da equipe B ( $R_B$ ) é análogo.

A fórmula do escore esperado (Equação 5) também precisa ser adaptada, pois o aumento de participantes de uma partida aumenta a variância dos resultados da partida. A derivação da fórmula do escore esperado adaptado para esportes coletivos parte da hipótese inicial do Sistema Elo que todos os jogadores possuem distribuições de performance normais, centradas no *rating* de habilidade  $r_i$  e variância  $\sigma^2=200^2$ . A probabilidade da equipe A vencer da equipe B é dada pelo diferencial de *rating* das duas equipes ( $\Delta r = R_A - R_B$ ) e pela variância da partida  $\sigma_{AB}^2$ , que é formada pela soma das variâncias de todos os  $2u$  jogadores ( $u$  jogadores em cada equipe):

$$\sigma_{AB}^2 = \sum_{i=1}^{2u} \sigma^2 = 2u\sigma^2. \quad (8)$$

Para as simulações do modelo, o número escolhido foi de  $u=5$  jogadores por equipe, assim como no futsal, basquete e muitos jogos eletrônicos. Portanto a variância da diferença de performances das equipes em uma partida é:

$$\sigma_{AB}^2 = 10\sigma^2 = 10 * 200^2, \quad (9)$$

e a probabilidade da equipe A vencer a equipe B é dada por:

$$P(Z > 0), \text{ onde } Z \sim N(\Delta R, \sigma_{AB}^2). \quad (10)$$

O cálculo do escore esperado com base na Equação 10 é feito com integrais, pois função de distribuição acumulada da distribuição normal não tem uma forma funcional definida. Repetir esse cálculo diversas vezes em uma simulação exige uma capacidade computacional muito grande. Esse cálculo pode ser aproximado por uma função de distribuição acumulada de uma variável aleatória logística. Partindo da Equação 4, escolha do parâmetro de escala  $\beta$  que aproxima os dois modelos é  $\beta = \frac{870}{\ln(10)}$ , e portanto, a fórmula do escore esperado do Sistema Elo adaptado para esportes coletivos é:

$$S_{exp} = \frac{1}{1 + 10^{-(R_A - R_B)/870}}. \quad (11)$$

## 2.4 OUTROS SISTEMAS DE *RATING* E SUA APLICABILIDADE

Muitos outros sistemas de *rating* já foram desenvolvidos para tentar corrigir falhas e aprimorar o Sistema Elo. Um dos mais relevantes foi o Sistema Glicko, desenvolvido por Glickman (1999), e cuja principal contribuição foi incorporar o aspecto

temporal em seu sistema. O autor argumenta que grandes períodos de inatividade de um jogador devem fazer com que o sistema diminua a confiança sobre sua estimativa de seu *rating*. No período que o jogador se ausenta de competições oficiais, é possível que ele tenha perdido a prática, ou que tenha treinado e aumentado suas habilidades. Por esse motivo, o sistema Glicko aumenta o grau de incerteza sobre as estimativas de jogadores inativos, permitindo atualizações mais rápidas do *rating*. Já para jogadores com grande quantidade de jogos no período de tempo mais recente, o sistema tem grande confiança de sua estimativa diminuindo sua variância.

O principal sistema de *rating* utilizado no mundo dos jogos eletrônicos é o sistema *TrueSkill*, desenvolvido pela Microsoft (HERBRICH *et al.*, 2007). Sua principal contribuição é ser uma generalização do Sistema Elo para jogos com maior número de competidores. O sistema *TrueSkill* é aplicável até para competições com múltiplos times, com números distintos de jogadores em cada time, além de incorporar a questão temporal e de incerteza originalmente desenvolvida pelo sistema Glicko.

A aplicabilidade de sistemas de *ratings* também foi possível em outras áreas. Na era da internet e das redes sociais, uma nova demanda se apresentou: a necessidade de formar um time *online* de *experts* de diferentes áreas, para execução de um projeto multidisciplinar. O trabalho de Anagnostopoulos *et al.* (2010) elabora um algoritmo visando resolver esse tipo de problema. Ter conhecimento das habilidades individuais é fundamental para garantir que a carga de trabalho seja bem distribuída e que a tarefa seja cumprida de forma eficiente.

Interpretando uma prova de múltipla escolha como uma disputa entre o aluno e a questão, existem trabalhos como os de Pelánek (2016) e Antal (2013) que adaptaram o sistema Elo para classificar a dificuldade de perguntas de provas. Embora outros sistemas mais complexos de avaliação de dificuldade de exames já tenham sido desenvolvidos, a grande vantagem do Sistema Elo é sua simplicidade, que permite uma fácil implementação. Pieters *et al.* (2012) usam uma interpretação similar para adaptar o Sistema Elo para mensurar a segurança e vulnerabilidade de sistemas de informação. A vulnerabilidade depende tanto da qualidade da defesa, como da habilidade de quem está atacando o sistema. Os autores pontuam que esse problema é análogo ao de alunos resolvendo questões de matemática.

O trabalho de Lehmann e Wohlrabe (2017) utiliza o Sistema Elo para criar um ranking das revistas de economia. A grande vantagem apontada pelos autores do ranking Elo é que ele incorpora a performance de uma revista ao longo do tempo nos rankings mais recentes, o que proporciona um ranqueamento diferente em relação às alternativas convencionais, principalmente para revistas de classificação "intermediária".

Hvattum e Arntzen (2010) usam o Sistema Elo para prever o resultado de partidas de futebol, usando a diferença de *ratings* como uma covariada de um modelo



logit. As previsões desse modelo foram melhores que outros métodos estatísticos, mas foram significativamente piores do que métodos baseados em dados do mercado de apostas. A diferença de *ratings* sozinha foi um preditor altamente significativo, o que é uma justificativa do aumento do uso de *ratings* Elo para medir a força de times.

Alfaro e Shavlovsky (2014) criaram o CrowdGrader, um sistema de avaliação onde alunos comentam e avaliam lições de casa. A nota final do estudante depende tanto da qualidade de sua própria lição de casa, como do seu desempenho como avaliador, criando um incentivo para que os estudantes façam boas avaliações dos trabalhos dos outros estudantes. Inicialmente os alunos deveriam apenas ranquear as lições que eles eram encarregados de avaliar (um problema mais simples que dar notas), fazendo assim possível o uso de sistemas de *rating*. Porém, após reclamações, o CrowdGrader passou a se basear em notas, o que elevou a satisfação dos estudantes.

Neumann *et al.* (2011) utilizam o Sistema Elo para estudar hierarquias de dominância em grupos de animais, um dos tópicos mais importantes da ecologia comportamental. É apontado que todos os métodos de classificação utilizados na ecologia comportamental são baseados em matrizes de interação, que precisam cumprir certos critérios para produzir resultados robustos. Em contraste o Sistema Elo é baseado na sequência em que essas interações ocorrem, nas quais os *ratings* são continuamente atualizados, e por isso possui algumas vantagens importantes. Os resultados obtidos utilizando uma extensa base de dados com observações de animais selvagens mostraram que as classificações produzidas pelos *ratings* Elo foram muito próximas aos dois métodos mais comumente utilizados. No entanto, os autores encontraram evidências que, em algumas circunstâncias, os *ratings* Elo podem ter um poder maior de explicação dos dados, o que pode justificar a reanálise de alguns estudos utilizando a metodologia Elo.

Computação humana é uma área de pesquisa cujo foco é o agrupamento de inteligência humana para resolver problemas computacionais que estão além do escopo dos algoritmos de inteligência artificial existentes (LAW; AHN, 2011). Um tipo de aplicação de computação humana são os chamados "jogos com propósito", no qual jogadores geram dados relevantes enquanto jogam um jogo divertido. Hacker e Von Ahn (2009) criaram um jogo onde dois jogadores, juntados aleatoriamente, são apresentados a um par de imagens e precisam escolher qual imagem o parceiro iria preferir. Por se tratar de um problema análogo a inferir a habilidade de um jogador de xadrez, foi possível criar classificações de "beleza" global utilizando o Sistema Elo e o *Trueskill* com as informações coletadas no jogo.

Avery *et al.* (2013) desenvolvem um sistema de preferências reveladas para faculdades e universidades dos Estados Unidos. O modelo estatístico usado é uma extensão de modelos de *ratings*. A motivação para a criação desse ranking foi a constatação da existência de um equilíbrio ineficiente nos processos de admissão no qual

faculdades adotam um comportamento estratégico para manipular suas taxas de matrícula e de admissão, dois dos principais indicadores usados para medir o grau de interesse dos alunos por uma determinada faculdade. Os autores afirmam que como o ranking produzido pelo seu método é baseado apenas nas escolhas de alunos, ele é muito difícil de ser manipulado.

## 2.5 TEORIA DE AGÊNCIA E SISTEMAS DE *RATING*

A teoria de agência é uma área da economia que poderia se aproveitar de *ratings* de habilidade. Os problemas de agência se dão porque em geral o principal (contratante) não é capaz de observar quanto esforço o agente (contratado) realmente exerce. Uma forma de induzir o esforço é desenhar o contrato de forma que o pagamento do agente seja exclusivamente dependente dos resultados, mas isso faz com que ele seja exposto ao risco. Caso o agente seja avesso ao risco, é necessário pagar um prêmio de risco. Outra forma de induzir o esforço é utilizar medidas de performance, e caso exista um ambiente propício, os *ratings* podem ser uma dessas medidas.

Baker (1992) modela o desenho de um contrato com medidas de performance. Um resultado intuitivo fornecido pelo modelo é que quanto maior a correlação entre o produto marginal das ações do agente na medida de performance e o produto marginal dessas ações no objetivo do principal, melhor a medida de performance. Em um trabalho posterior Baker (2002) faz uma caracterização de medidas de performance com dois parâmetros: risco<sup>4</sup> e distorção<sup>5</sup>. É possível argumentar que, em certas situações, *ratings* podem ser medidas de performance de baixo risco (caso existam um número suficiente grande de confrontos) e que causem pouca distorção (caso o objetivo do principal esteja alinhado com agentes que buscam vencer todos seus confrontos).

A classificação por si só gerada pelo sistema de *ratings* pode servir como instrumento no desenho de contratos de trabalho. Lazear e Rosen (1981) iniciaram estudos de estruturas de pagamento nos quais o pagamento dos funcionários é de acordo com sua posição na ordem de classificação da organização. Nesse caso o tamanho absoluto do diferencial de *ratings* não interfere na diferença entre recebimentos dos indivíduos. A grande vantagem de estruturas de pagamentos baseadas em performance relativa é que, como todos os agentes estão expostos aos mesmos choques aleatórios do ambiente, o impacto desses choques é pequeno na classificação relativa dos agentes<sup>6</sup>. Nalebuff e Stiglitz (1983) apontam que raramente firmas pagam por unidade produzida, e que mais comumente prêmios são baseados na performance relativa. Alguns exemplos são um bônus maior para o vendedor que vender mais, o aluno com

<sup>4</sup> Quanto menor o controle do agente sobre o resultados por conta de fatores exógenos, maior o risco.

<sup>5</sup> Uma medida de performance causa distorção se ela provê incentivos para ações que aumentam a medida de performance, mas pouco aumentam a utilidade do principal.

<sup>6</sup> Em um esquema de pagamento baseado em resultados, efeitos exógenos expõe o agente ao risco, pois o resultado não está totalmente em seu controle

a maior nota receber nota A, o melhor gerente ser promovido. No modelo desenvolvido pelos autores estruturas de pagamento baseado em performance relativa são preferíveis a estruturas de pagamento individualistas caso a incerteza sobre o ambiente seja grande. No limite, à medida que o número de participantes aumenta, a utilidade esperada pode se aproximar do nível de quando existe informação perfeita (*first-best*).

## 2.6 PROBLEMAS DOS SISTEMAS DE *RATING*

A grande maioria dos sistemas de *rating* utilizados nos esportes eletrônicos são adaptações do sistema Elo, que foi desenvolvido para o xadrez, um esporte individual. Quando aplicado para indivíduos participantes de uma equipe o sistema perde eficácia, porque só é observado o resultado da equipe como um todo, e não a contribuição individual de cada jogador.

É preciso também escolher uma função que defina como o *rating* da equipe é construído a partir dos *ratings* individuais para saber qual é favorita no confronto. Em alguns jogos, os times se beneficiam em ter o talento bem distribuído entre os jogadores, enquanto em outros jogos é mais eficiente jogar em função de um jogador muito mais talentoso que seus companheiros. Gelade (2018) encontra em suas estimações que o aumento da heterogeneidade da habilidade dos jogadores estava associado com uma queda de desempenho em times da elite do futebol mundial.

Utilizar métricas da partida para estimar qual foi o papel de cada jogador é uma alternativa adotada pelo sistema TrueSkill2 de Minka *et al.* (2018), desenvolvido pela Microsoft. Não se trata de uma tarefa trivial, e existe o potencial risco de indivíduos maximizarem suas próprias estatísticas em detrimento do interesse do resultado coletivo. O trabalho de Uhlmann e Barnes (2014) aponta que na NBA, o principal campeonato de basquete do mundo, o trabalho em equipe diminui nos *playoffs*, a fase final da competição que determina o campeão e conseqüentemente gera uma maior atenção do público. O autor encontra como provável explicação para esse comportamento individualista que o aumento da pontuação pessoal de um jogador estava associado com um salário maior em seus futuros contratos, enquanto assistências para seus companheiros estavam associadas com um salário menor. Esses resultados são um exemplo de incentivos de times e jogadores desalinhados, mesmo se tratando do alto nível do esporte.

Essa dificuldade de desenhar contratos onde os incentivos individuais não prejudiquem o trabalho em equipe é uma explicação do porquê os contratos de jogadores de futebol do campeonato alemão apenas possuíam cláusulas que premiavam participações em jogos e resultados coletivos (HEUBECK; SCHEUER, 2003). Em contratos que premiam o resultado coletivo existe o problema de que, apesar de os agentes internalizarem todo o custo de seu esforço, eles apenas recebem no máximo  $1/N$  dos benefícios em um time de  $N$  jogadores (KANDEL; LAZEAR, 1992). A escolha desse

tipo de contrato pode ser uma consequência da natureza do futebol, que necessita de grande cooperação entre os jogadores.

Tentar incorporar o número máximo possível de estatísticas das partidas e priorizar o resultado coletivo, pode ser uma forma de mitigar a incompatibilidade de incentivos entre jogadores, ao custo de aumentar a complexidade do modelo e incorporar aspectos que não sejam exclusivamente objetivos. Vale apontar que existem contribuições de jogadores que não são perceptíveis nos dados estatísticos de uma partida. O estudo de Deutscher (2009) aponta que, controlando para outras características individuais, os capitães dos times da NHL, a principal liga de hóquei no gelo do mundo, recebiam um benefício no salário entre 21% e 35% por estar em uma posição de liderança.

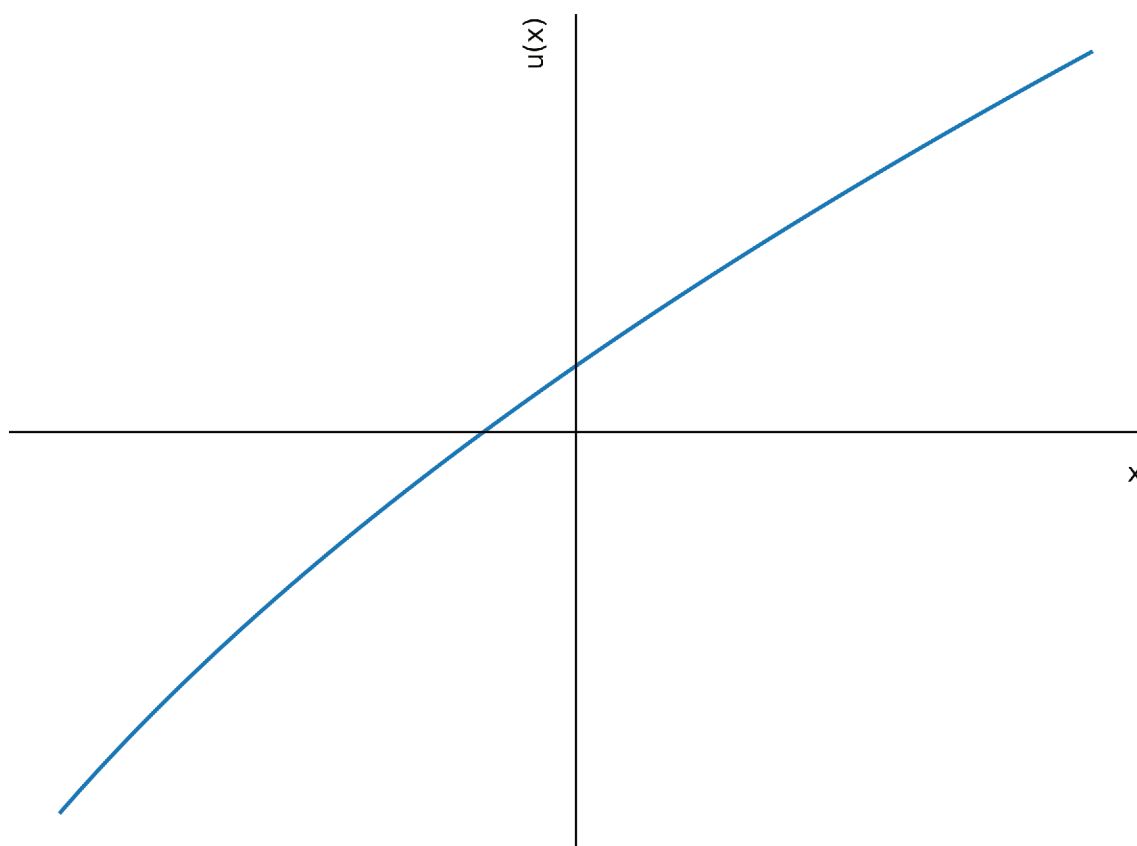
## 2.7 TEORIA DE PROSPECTO

A teoria de utilidade esperada dominava as análises de decisões sob risco, apesar de, em muitos casos, as preferências de indivíduos violarem os axiomas da teoria (KAHNEMAN; TVERSKY, 1979). Isso levou Daniel Kahneman e Amos Tversky a desenvolverem uma teoria alternativa para decisões sob risco, a teoria de prospecto.

### 2.7.1 Uma breve introdução à teoria de utilidade esperada

A teoria do valor esperado é uma teoria de decisão sob risco, na qual para cada opção possível de um indivíduo, existe um conjunto de resultados com probabilidades associadas à cada um dos resultados. O princípio da teoria é que indivíduos tentam maximizar sua utilidade esperada dentro de um conjunto de opções arriscadas. Para cada opção, as utilidades de cada um dos resultados são ponderadas por suas probabilidades, e os indivíduos escolhem a opção com maior soma ponderada.

A atitude de um agente em relação ao risco é convencionalmente definida em termos da utilidade marginal, ou o formato da curva de utilidade. Usualmente é assumido que a utilidade marginal da renda e bens é decrescente, o que implica em uma curva de utilidade côncava (Figura 6). Se a curva de utilidade do agente é côncava, ele é um agente avesso ao risco. Agentes avessos ao risco preferem um valor certo a uma loteria de mesmo valor esperado. Agentes amantes do risco possuem função de utilidade convexa (utilidade marginal crescente) e agentes neutros ao risco possuem função utilidade linear (utilidade marginal constante). Agentes amantes do risco preferem uma loteria em comparação a um valor certo de mesmo valor esperado, enquanto os agentes neutros ao risco são indiferentes às duas opções.

Figura 6 – Função de utilidade  $u(x)$  côncava de um agente avesso ao risco

Elaboração: própria

### 2.7.2 Função valor da teoria de prospecto

Embora o foco principal da teoria de prospecto seja a análise de decisões sob risco, essa análise será omitida, pois está fora do escopo do presente trabalho. O aspecto relevante para as simulações desenvolvidas é a função valor, que é a função utilidade dos agentes em um dos modelos desenvolvidos. A função valor possui três características principais. A primeira é que o valor dado pelo indivíduo a um bem não está relacionado ao seu valor absoluto, como na teoria de utilidade esperada, e sim a um valor relativo ao seu ponto de referência. Valores acima do ponto de referência são vistos como ganhos e valores abaixo como perdas. Por convenção, e sem perda de generalidade, o ponto de referência corresponde a  $x = 0$  e o valor da função no ponto de referência é 0.

$$v(0) = 0 \tag{12}$$

A segunda característica, aversão à perda, determina que resultados definidos como perdas são mais dolorosos do que ganhos de mesmo tamanho são prazerosos. Por exemplo: a dor de perder 10 reais é maior que o prazer de ganhar 10 reais,  $v(10) <$

$|v(-10)|$ .

$$v(x) < |v(-x)|; \quad \text{para } x > 0 \quad (13)$$

E a terceira característica é que resultados terão um impacto marginal menor quanto mais distantes eles estiverem do ponto de referência. Por exemplo, o prazer de mudar sua renda de 110 reais para 120 reais é menor que o prazer de mudar sua renda de 10 reais para 20 reais. E a dor de mudar de -110 reais para -120 reais é menor que de -10 reais para -20 reais. Essa redução de sensibilidade que dá o formato de S da função valor, como apresentado na Figura 7. Ela é côncava acima do ponto de referência e convexa abaixo dele.

$$v'(x) > 0; \quad (14)$$

$$v''(x) < 0, \quad \text{para } x > 0; \quad (15)$$

$$v''(x) > 0, \quad \text{para } x < 0. \quad (16)$$

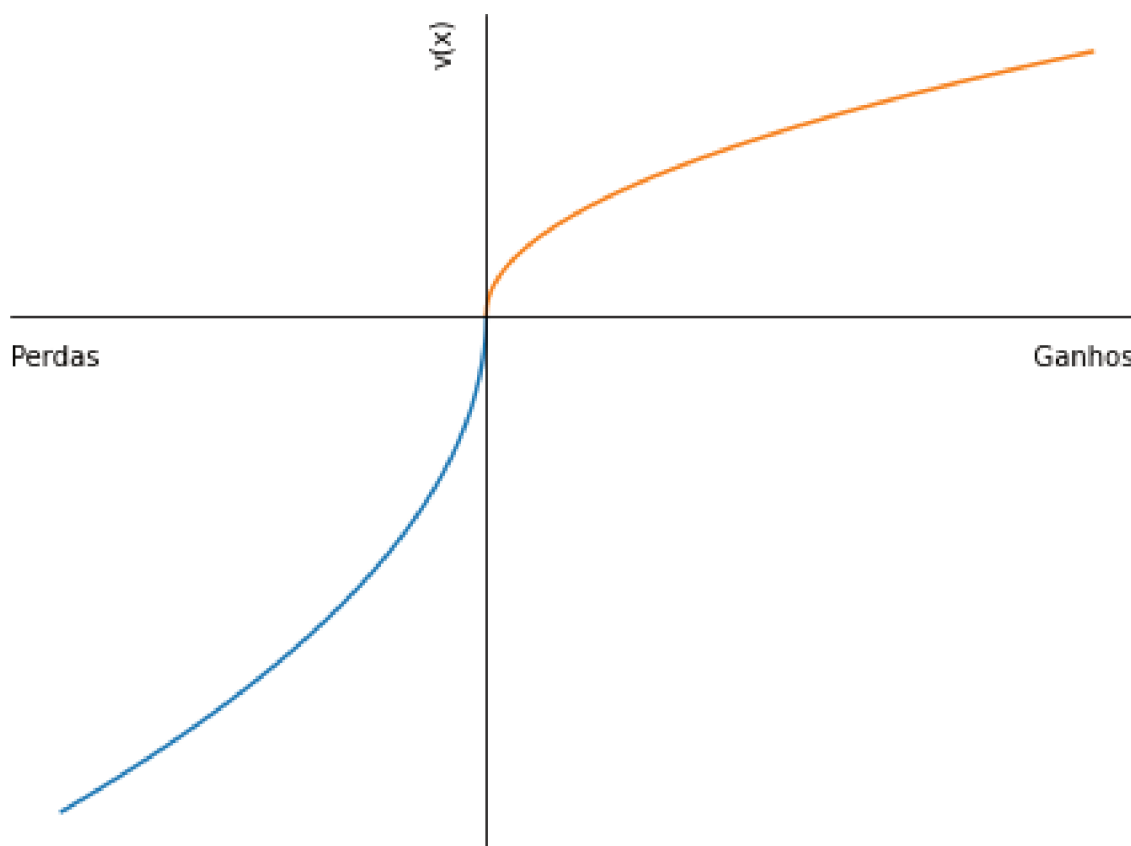
Tversky e Kahneman (1992) usam o seguinte formato para a função valor:

$$v(x) = \begin{cases} x^\alpha, & \text{se } x \geq 0 \\ -\lambda x^\beta, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (17)$$

onde  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  e  $\lambda > 1$ . A partir de dados experimentais os autores estimam os valores dos parâmetros e encontram  $\alpha = \beta = 0,88$  e  $\lambda = 2,25$ .

Em razão de seu formato, a função valor apresenta uma propriedade importante. Indivíduos que se encontram acima de seu ponto de referência (domínio dos ganhos) serão avessos ao risco e, indivíduos abaixo desse ponto (domínio das perdas) serão amantes do risco. Em contraste com a teoria de utilidade esperada é possível que o mesmo indivíduo tenha diferentes atitudes em relação ao risco, dependendo de em qual domínio ele se encontra. Esse comportamento híbrido em relação ao risco, é uma das explicações apontadas por Shefrin e Statman (1985) do porquê indivíduos tendem a segurar ações que perderam valor por mais tempo (relativo ao preço da compra) do que ações que ganharam valor.

Existe uma vasta literatura apontando que os indivíduos de fato se comportam de acordo com a teoria de prospecto, em contraste ao que a teoria econômica clássica prevê (CAMERER, 2000; BARBERIS, 2013).

Figura 7 – Função valor da teoria de prospecto com ponto de referência  $x=0$ 

Elaboração: própria

### 2.7.3 Determinação do ponto de referência

Uma tarefa que não é simples é determinar qual é o ponto de referência de cada indivíduo, por isso muitos trabalhos simplesmente o definem como o *status quo*. Kőszegi e Rabin (2006) desenvolveram um modelo teórico no qual o ponto de referência é determinado pela expectativa racional do agente. Devin G Pope e Schweitzer (2011) se aproveitam da clara existência de pontos de referência no jogo de golfe<sup>7</sup> para estudar o comportamento de golfistas profissionais no principal circuito do esporte, o PGA Tour. Isolando outros fatores, tacadas no domínio das perdas eram mais precisas que tacadas no domínio dos ganhos, indicando um possível maior grau de concentração dos jogadores. Esse é um comportamento avesso à perda, em concordância com a teoria de prospecto. Nenhuma das explicações alternativas para esse comportamento enviesado foi compatível com os resultados encontrados.

Heath *et al.* (1999) incorporaram a teoria de prospecto nos estudos sobre metas.

<sup>7</sup> Em um campeonato, golfistas tentam minimizar o número de tacadas que eles fazem ao longo de 72 buracos. Cada buraco possui o chamado par (número típico de tacadas que um jogador profissional precisa para completar um buraco). Golfistas deveriam se importar apenas com número de tacadas total, mas são influenciados pelo ponto de referência, que é o par.

Com base em respostas obtidas via questionários e um simples modelo<sup>8</sup> onde a meta estabelecida por um indivíduo é seu ponto de referência, os autores foram capazes de explicar centenas de estudos empíricos da literatura de metas como instrumento de motivação.

A hipótese central do modelo é que indivíduos escolhem produzir unidades adicionais de  $x$  enquanto o benefício marginal  $v'(x)$  for maior que o custo marginal  $c'(x)$ . Isso implica que os indivíduos são míopes, pois eles apenas comparam os custos e benefícios de uma unidade adicional. O modelo faz algumas previsões sobre os efeitos da meta sobre performance individual e níveis de esforço. Em função da aversão à perdas um indivíduo que está  $x$  unidades abaixo de sua meta terá a percepção de estar no campo das perdas, e conseqüentemente seu esforço para melhorar seu desempenho será maior do que de um indivíduo  $x$  unidades acima da sua meta<sup>9</sup>.

Já a sensibilidade decrescente implica, que quanto mais longe um indivíduo estiver da sua meta menos esforço ele irá exercer. Os níveis de esforço mais altos ocorrem quando o indivíduo está próximo da sua meta. Logo, indivíduos muito aquém de sua meta podem ter dificuldades para se motivar a começar uma tarefa com uma meta difícil demais.

O modelo também faz previsões sobre impactos de mudança da meta. No caso no qual o indivíduo estabelece uma meta fácil, ele irá rapidamente exceder a meta e entrar no domínio dos ganhos, onde o benefício marginal se reduz rapidamente por conta da sensibilidade decrescente. Por isso um aumento da meta faria com que o indivíduo passasse mais tempo no domínio das perdas, onde os benefícios marginais são mais altos (em função da aversão à perda) e crescentes (em virtude da convexidade). A Figura 8 ilustra o benefício marginal de um indivíduo quando sua meta é de 30 ( $v'_{30}$ ) e de quando sua meta é de 40 ( $v'_{40}$ ). A produção do indivíduo supera a meta nos dois casos, mas a meta mais alta gera uma produção maior.

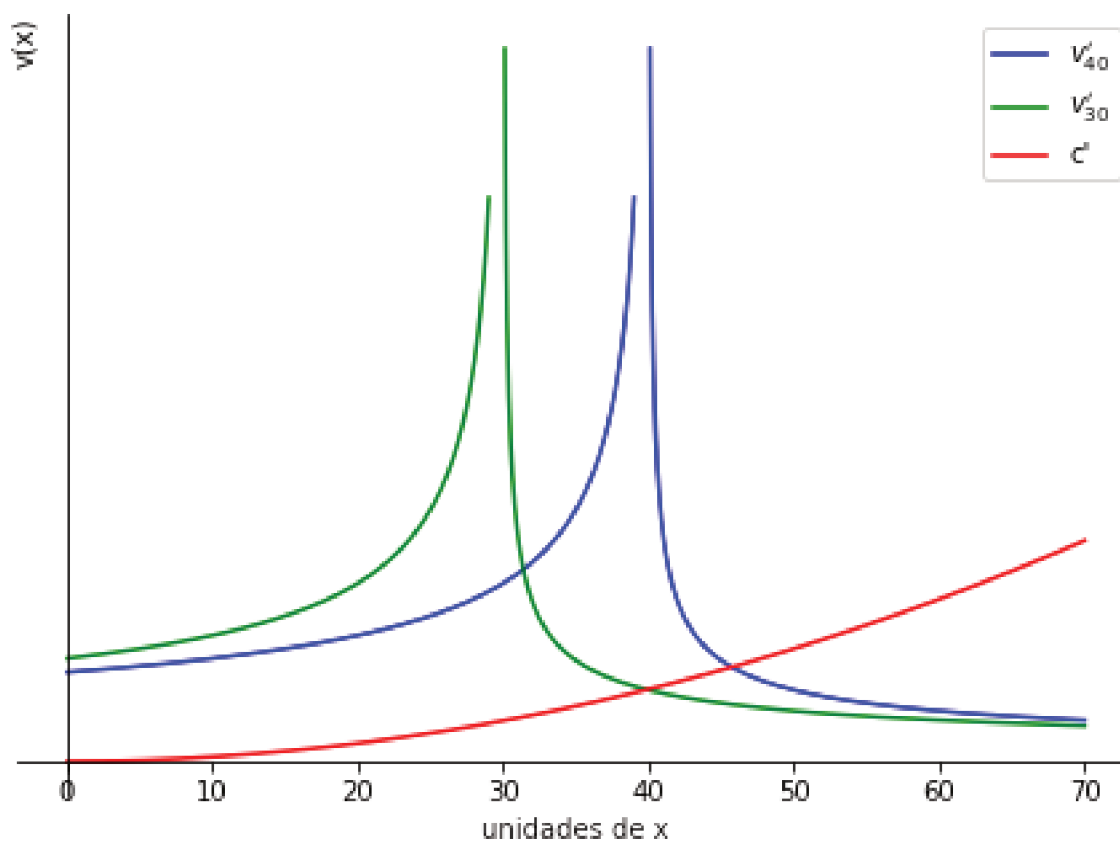
O modelo prevê que uma pequena redução de uma meta não alcançada deve melhorar o desempenho. A Figura 9 ilustra as mesmas curvas de benefício marginal, porém o custo marginal é mais elevado. Nessa situação, a produção é menor que a meta nos dois casos, mas a meta menor gera uma produção maior. Essa previsão difere de conclusões de estudos de metas como instrumento de motivação, que afirmavam que metas mais difíceis melhoravam o desempenho. A explicação encontrada pelos autores é que os estudos de metas apenas analisavam resultados coletivos, e não individuais. Logo o aumento do desempenho coletivo ao estabelecer uma meta mais difícil poderia ser explicado por uma melhora de desempenho dos indivíduos altamente produtivos (que já ultrapassavam a meta inicial) que mais que compensava a redução de desempenho dos menos produtivos.

<sup>8</sup> Para a versão formal do modelo de metas como ponto de referência veja Wu *et al.* (2008).

<sup>9</sup> Ao estimar o coeficiente de aversão ao risco os autores encontram que indivíduos se aproximando de sua meta se esforçam o dobro do que quando eles ultrapassam a meta.



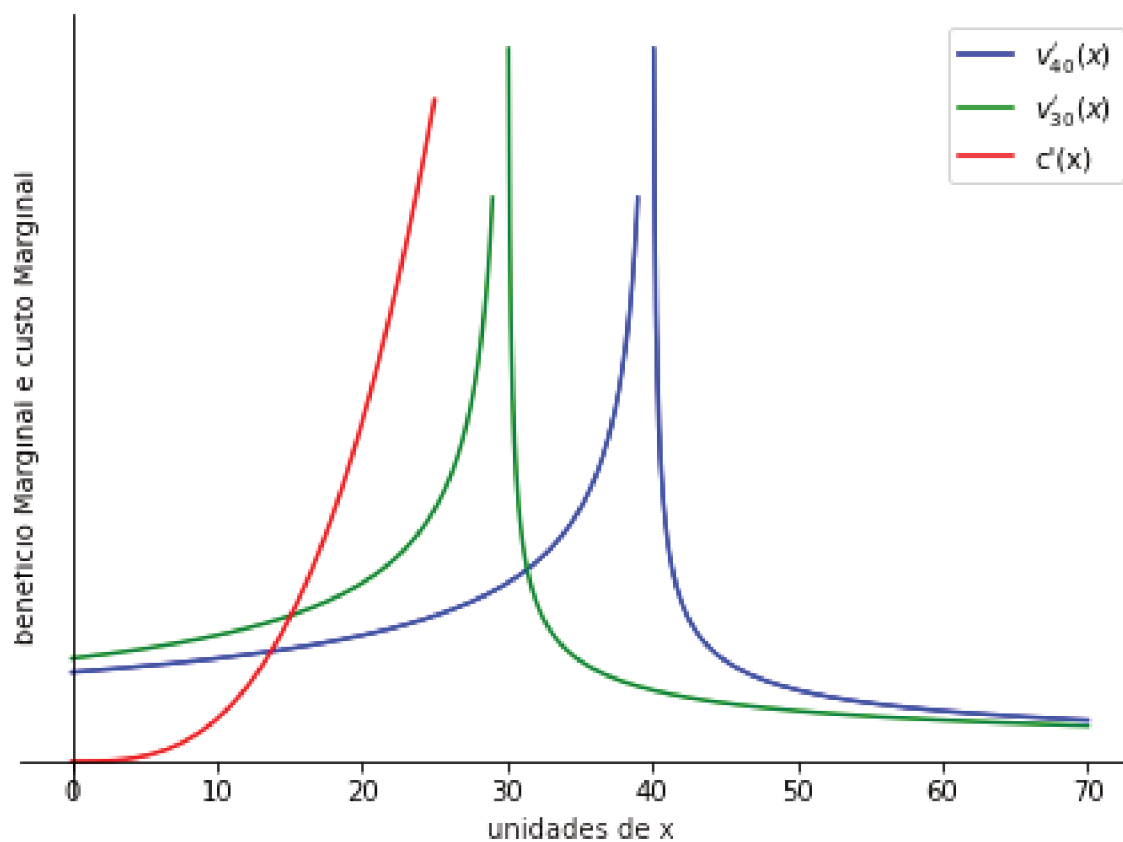
Figura 8 – Benefício marginal das metas de 30 e 40 e custo marginal crescente. Aumento da meta aumenta a produção.



Fonte: Wu *et al.* (2008)

Elaboração: própria

Figura 9 – Benefício marginal das metas de 30 e 40 e custo marginal crescente. Redução da meta aumenta a produção.



Fonte: Wu *et al.* (2008)

Elaboração: própria

#### 2.7.4 Impactos do ponto de referência no desempenho

A função valor da teoria de prospecto implica que o nível de esforço individual (e conseqüentemente o desempenho) está relacionado ao ponto de referência. A seguir são citados estudos teóricos e empíricos que exploram as características dessa relação.

O estudo de Hossain e List (2012) explora o efeito da manipulação de estruturas de incentivos em um experimento com funcionários de uma fábrica chinesa. No experimento são comparados dois tipos de tratamentos, um baseado em uma recompensa e o outro baseado em uma punição. No tratamento com recompensa, os trabalhadores eram informados previamente que, caso sua produção média por hora ultrapassasse um certo limite estabelecido, eles seriam premiados com um bônus financeiro. No tratamento com punição, os trabalhadores eram informados que receberiam um bônus no próximo pagamento, mas caso sua produção média por hora ficasse abaixo do limite estabelecido<sup>10</sup>, o bônus seria revogado. A teoria econômica tradicional prevê que contratos economicamente equivalentes, como os do experimento, produzem os mesmos resultados, pois os incentivos produzidos independem da estrutura dos incentivos. Os resultados obtidos, apresentaram uma produtividade superior do tratamento com punição em relação ao tratamento com recompensa, indicando um comportamento de aversão à perda, dado que a dor da punição gerou um incentivo maior que o prazer da recompensa.

Armantier e Boly (2015) desenvolvem um modelo fundamentado na teoria de prospecto que permite a comparação de contratos economicamente equivalentes baseados em recompensas e punições. No modelo, o ponto de referência do trabalhador é o salário base. Para garantir a equivalência econômica, um contrato com punição precisa ter o salário base mais alto que o contrato com recompensa. Os autores realizaram um experimento que produziu resultados que confirmaram a principal intuição do modelo. Os voluntários que tiveram o melhor desempenho foram os do tratamento que combinava bônus e punições.

Abeler *et al.* (2011) conduziram um experimento onde as expectativas racionais dos voluntários são manipuladas e é verificado se a manipulação influencia na quantidade de esforço exercido. O experimento é desenhado de forma que a previsão do modelo fundamentado na teoria econômica tradicional é que a mudança de expectativa não afeta o nível de esforço. Os resultados do experimento indicaram que com o aumento de expectativas induziram maiores níveis de esforço, como previsto por modelos com preferências baseadas em expectativas e um ponto de referência (como por exemplo Kőszegi e Rabin (2006)).

Berger e Devin Pope (2011) estudam o efeito de estar atrás na pontuação em jogos de basquete. Embora times perdendo deveriam ter uma maior probabilidade de

<sup>10</sup> O limite era o mesmo nos dois tratamentos.

perder, os autores encontram evidências que o aumento de motivação por estar levemente atrás, pode aumentar a probabilidade de vitória. A análise de jogos profissionais de basquete apontaram que estar levemente atrás provoca um aumento descontínuo da chance de vitória. Times que estavam 1 ponto atrás no intervalo tinham uma maior chance de vitória que times que estavam 1 ponto a frente.

Os impactos da mudança do ponto de referência são objetos de análise de outras áreas da literatura. Dalton *et al.* (2016) desenvolvem um modelo estático e determinístico onde a aspiração de um indivíduo é seu ponto de referência. Os indivíduos ricos e pobres possuem as mesmas preferências e um mesmo viés comportamental ao determinar suas aspirações. A pobreza no modelo intensifica os efeitos do viés comportamental e provoca o que os autores chamam de falha de aspiração. A falha de aspiração implica na armadilha de pobreza comportamental, que é o caso onde o indivíduo escolhe o menor nível de esforço e não consegue sair da pobreza. A falha de aspiração é uma consequência da pobreza, e não uma causa. São especificadas as condições nas quais o aumento das aspirações sozinho pode ser suficiente para estabelecer um novo equilíbrio individual, no qual o indivíduo exerce um nível de esforço maior e sai da armadilha de pobreza.

Genicot e Ray (2017) desenvolvem uma teoria na qual aspirações são determinadas socialmente e um modelo onde existe uma interação entre aspirações, crescimento e desigualdade. No modelo, aspirações moderadamente acima do padrão de vida individual encorajam investimentos, porém aspirações ainda mais altas podem levar à frustração.

Gershenson *et al.* (2018) analisaram dados de pares aleatórios de estudantes e professores em um experimento no Tennessee. Os autores encontraram que estudantes negros que foram alocados em turmas com professores negros no período do jardim de infância ao terceiro ano do fundamental tinham uma maior chance de se formar no ensino médio e de ingressar no ensino superior do que seus pares, da mesma escola e mesma coorte, que não foram alocados com um professor negro. No modelo teórico desenvolvido pelos autores para explicar os resultados, a presença de um professor da mesma etnia faz com que o aluno atualize suas crenças dos retornos do esforço de uma função de produção, induzindo a níveis de esforço maiores. Uma possível interpretação desses resultados é que a melhora dos desempenhos dos alunos foi consequência de um aumento do ponto de referência (aspiração, meta).

Na literatura também é possível encontrar estudos onde a redução do ponto de referência levou a melhores resultados. Um exemplo na psicologia social, LeBoeuf e Estes (2004) encontraram que os indivíduos que listaram similaridades entre eles e Einstein antes de uma prova de curiosidades acertaram menos questões em comparação aos indivíduos que não fizeram a listagem. O pior desempenho pode ser explicado como uma elevação do ponto de referência a um patamar muito distante. Goux *et al.*

(2014) fazem um experimento aleatório controlado onde as aspirações de estudantes de baixo desempenho no fim do ensino fundamental são reduzidas para níveis mais realistas. O ajuste das aspirações reduziu a repetência e evasão escolar.

## 2.8 MODELOS SIMULADOS

Os modelos desenvolvidos no presente trabalho são simulações do Sistema Elo. No ambiente criado, os agentes são jogadores que se enfrentam constantemente e os *ratings* são atualizados a partir de novos resultados. Parte do objeto de análise são os efeitos da incorporação de um comportamento de acordo com a teoria de prospecto e a existência de agentes otimistas e pessimistas. A seguir são apresentados exemplos da literatura dos tópicos mencionados.

### 2.8.1 Simulações de sistemas de *ratings*

Aldous (2017) realiza simulações de três modelos baseados no Sistema Elo, cada um com uma forma diferente da habilidade de um time variar ao longo do tempo. Chetrite *et al.* (2017) analisam o modelo Bradley–Terry em um ambiente aleatório no qual jogadores de diferentes habilidades se enfrentam uma vez. Os autores provam que, sob condições de momento e convexidade, a probabilidade assintótica (com número de jogadores tendendo ao infinito) do melhor jogador ter o maior número de vitórias é igual a 1.

Dois trabalhos baseados em adaptações do sistema Elo para avaliação de alunos e dificuldades de questões também utilizam simulações. Antal (2013) desenvolve um modelo que combina a Teoria de resposta ao item com o Sistema Elo. O autor compara o modelo desenvolvido com o original, em um ambiente com dados simulados. São gerados 1000 examinados e 200 questões com diferentes dificuldades. Os resultados finais apontam que embora a versão do modelo baseada no Sistema Elo demore mais para obter estimativas confiáveis, essa versão do modelo tem como vantagem poder estimar as habilidades dos examinados. O estudo de Pelánek (2016) gera um ambiente simulado no qual as habilidades dos alunos e as dificuldades de questões são normalmente distribuídas. O Sistema Elo produziu estimativas muito próximas das estimativas do método de máxima verossimilhança conjunta, que é um procedimento cuja demanda computacional é muito maior (e inviável para atualização *online* dos parâmetros).

Leitner *et al.* (2010) usam os *ratings* Elo e informações do mercado de apostas para calcular as probabilidades de título das seleções do campeonato europeu de futebol de 2008 (UEFA EURO 2008). Os autores utilizam simulações para estimar as probabilidades, pois argumentam que essa aproximação é muito mais simples que calcular analiticamente as probabilidades condicionais de todas possíveis ramificações

do torneio. O modelo baseado em informações do mercado de aposta foi superior ao modelo baseado em *ratings* Elo.

Kovalchik (2020) argumenta que como a fórmula de ajuste do Sistema Elo é baseada numa visão binária do resultado (vitória ou derrota), existe uma perda de informação, dado que vitórias por placares elásticos são diferentes de vitórias pela margem mínima. Para corrigir esse problema, o autor desenvolve uma extensão do Sistema Elo que incorpora a margem de vitória. Por conta da ausência de uma teoria de probabilidades do Sistema Elo, os diferentes modelos que incorporam margem de vitória desenvolvidos pelo autor são testados em simulações.

### 2.8.2 Simulações com agentes com a função valor

Modelos baseados em agentes são um ótimo ambiente para testar teorias da economia comportamental. Os modelos baseados em agentes possuem especial importância para o estudo de mercados financeiros, pois existem alguns fatos estilizados<sup>11</sup> que não são explicados por modelos financeiros tradicionais. Pesquisadores estão trabalhando para desenvolver modelos mais sofisticados que sejam compatíveis com tais fatos estilizados.

Os trabalhos de Pruna *et al.* (2018) e Pruna *et al.* (2020) incorporam aspectos da teoria de prospecto no modelo de precificação de ativos financeiros FW, desenvolvido por Franke e Westerhoff (2012). O modelo FW é um dos modelos que melhor reproduz o comportamento de *traders* (BARDE, 2015). Pruna *et al.* (2020) incorporam a aversão à perda no modelo FW. Em comparação com modelo base, as séries de tempo de simulações do modelo com aversão à perda se aproximaram mais de séries de tempo com dados financeiros do mundo real e replicaram um grande conjunto de fatos estilizados. Em Pruna *et al.* (2018) o efeito disposição é incorporado no modelo FW. O efeito disposição faz com que os agentes classifiquem os resultados de estratégias de investimentos como perdas ou ganhos. Parte dos agentes possui um viés para a retenção de posições com perdas, com intuito de evitar o arrependimento de estar errado.

A teoria de prospecto também está presente no modelo baseado em agentes de Shimokawa *et al.* (2007), no qual *traders* desinformados são modelados como agentes avessos à perda, cujo ponto de referência é uma média móvel dos preços.

### 2.8.3 Simulações com agentes otimistas e pessimistas

Por fim, são apresentados exemplos da literatura de modelos baseados em agentes nos quais o otimismo e pessimismo são características individuais dos agentes. Johnson *et al.* (2011) desenvolvem um modelo baseado em agentes cujo contexto é

<sup>11</sup> Propriedades estatísticas comumente observadas nas distribuições de retorno de ativos financeiros são chamadas de fatos estilizados financeiros.

uma guerra. Cada agente representa um Estado, cuja percepção da própria força pode estar acima do seu verdadeiro valor (excesso de confiança), abaixo do verdadeiro valor (falta de confiança) ou não viesada. Os resultados das simulações apresentaram vitórias consistentes dos Estados excessivamente confiantes.

Westerhoff (2005) modela o ciclo de negócios Keynesiano, onde os agentes heterogêneos são pessimistas ou otimistas. Os otimistas consomem uma maior parte da renda que os pessimistas. O sentimento de um agente muda de acordo com interações sociais, pois ele é influenciado por opiniões de terceiros. Se a maioria dos agentes é otimista, o consumo é alto e bolhas são formadas, caso contrário, o consumo é baixo e a economia entra em recessão.

## 2.9 CONSIDERAÇÕES SOBRE A REVISÃO DE LITERATURA

A revisão de literatura teve como papel contextualizar o modelo de simulação da presente dissertação, que é baseado no Sistema Elo e possui agentes com comportamento fundamentado na função valor da teoria de prospecto. A revisão se inicia com a apresentação do Sistema Elo e outros sistemas de *ratings*, e uma discussão de potenciais aplicações em contratos de trabalho. Um aspecto fundamental do Sistema Elo é o ambiente para simulações que ele fornece. Resultados de partidas podem ser facilmente modelados em função da habilidade dos jogadores e existe uma fórmula explícita para a atualização dos *ratings*.

Em sequência a função valor da teoria de prospecto foi apresentada. Suas duas principais características são a aversão à perda e sensibilidade decrescente. Entre os estudos que relacionaram o ponto de referência com desempenho, é possível encontrar exemplos de melhora de desempenho com aumento do ponto de referência e exemplos de melhora de desempenho com a redução do ponto de referência. Isso indica que é preciso cuidado ao elaborar políticas públicas com objetivo de alterar o ponto de referência.

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 OS TRÊS TIPOS DE MODELOS

A presente dissertação tem como metodologia uma simulação do Sistema Elo, na qual os *ratings* Elo dos jogadores se atualizam à medida que eles jogam partidas entre si. Foram desenvolvidos três modelos diferentes: simulação do Sistema Elo para esportes individuais (modelo EI), simulação do Sistema Elo para esportes coletivos (modelo EC) e simulação do Sistema Elo para esportes coletivos com agentes com função valor na forma da teoria de prospecto de Kahneman e Tversky (1979) (modelo ECTP).

#### 3.2 SIMULAÇÃO DO SISTEMA ELO PARA ESPORTES INDIVIDUAIS

A simulação para esportes individuais (EI) tem como papel servir de comparação com os outros modelos mais complexos.

O modelo possui  $N$  jogadores, com habilidade  $H_i$  gerada aleatoriamente de uma distribuição normal  $N(m_H, \sigma_H^2)$ . Cada jogador possui um desvio padrão  $\sigma_i$  sorteado de uma distribuição uniforme com intervalo  $[1, 400]$ . Todos os jogadores iniciam a simulação com o mesmo *rating* Elo  $r_i$  igual à média da distribuição de habilidades ( $r_i = m_H$ ).

Depois de gerados os indivíduos, são simuladas rodadas de partidas entre eles. Para que não exista uma grande discrepância entre os *rating* dos participantes de uma partida, os jogadores são divididos em 5 divisões. A primeira divisão é formada pelos  $n/5$  jogadores com maior *rating*, a segunda divisão é formada pelos  $n/5$  *ratings* subsequentes e assim por diante. Cada rodada consiste de 5 jogos, um de cada divisão. Para cada partida são sorteados aleatoriamente dois jogadores da divisão correspondente, o jogador A e o jogador B. O resultado da partida é definido pela performance de cada um dos jogadores, onde a performance do jogador  $i$  na partida  $j$  é extraída da distribuição:

$$P_{ij} \sim N(H_i, \sigma_i^2). \quad (18)$$

O jogador que obtiver a maior performance na partida é declarado o vencedor e tem o score  $S$  igual a 1, enquanto o outro jogador é declarado o perdedor e tem o score de 0.

A performance do jogador é aleatória, o que representa a possibilidade de o jogador ter boas e más atuações em relação à sua habilidade  $H_i$ , que é a média da sua distribuição de performance. Jogadores com desvio padrão  $\sigma_i$  alto representam indivíduos de altos e baixos enquanto um valor de  $\sigma_i$  baixo representa indivíduos mais consistentes.



A partir do resultado da partida simulada os *ratings* dos dois jogadores são atualizados conforme a fórmula de ajuste do Sistema Elo:

$$r_{post} = r_{pre} + K(S - S_{exp}). \quad (6)$$

O escore esperado ( $S_{exp}$ ) é calculado a partir da Equação 5, que equivale à versão logística do Sistema Elo.

Assim como é feito pela FIDE, jogadores que estão fazendo suas primeiras partidas tem um valor da constante K mais alto para que o *rating* possa se aproximar de seu real valor de forma mais rápida (FIDE, 2021). As partidas iniciais com essas características são chamadas de partidas de colocação. No modelo as 30 primeiras partidas de um jogador possuem  $K=100$  e suas partidas subsequentes possuem  $K=20$ .

Ao fim de cada rodada, é feito o ordenamento dos jogadores pelo *rating* e, caso necessário, ocorrem mudanças nos participantes de cada divisão. Após todas as partidas simuladas é possível fazer uma comparação entre o *rating* Elo final e a habilidade de cada jogador. É esperado que a ordenação dos jogadores pelo *rating* seja muito próxima da ordenação por habilidade.

A forma escolhida para medir o erro do modelo é pela diferença entre o *rating* final dos jogadores e sua habilidade.

$$erro_i = H_i - r_i \quad (19)$$

A seguir são listadas as métricas escolhidas para medir o erro do modelo. A mais simples das métricas é o erro médio (EM), que é calculado como:

$$EM = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N erro_i. \quad (20)$$

Outra métrica de erro é o erro absoluto médio (EAM), que é calculado como:

$$EAM = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |erro_i|. \quad (21)$$

Por fim, o erro quadrado médio (EQM), que é calculado como:

$$EQM = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N erro_i^2. \quad (22)$$

Para testar a hipótese que a distribuição dos erros é normal é utilizado o teste Jarque-Bera (JARQUE; BERA, 1980). Para comparar as classificações geradas pelo Sistema Elo com a real classificação das habilidades, é utilizado o mesmo indicador

do trabalho de Goffe *et al.* (2018), o erro absoluto médio do ranques  $EAM_{ranque}$ , que é calculado como:

$$EAM_{ranque} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\text{ranque}(Elo_i) - \text{ranque}(habilidade_i)|, \quad (23)$$

no qual  $\text{ranque}(Elo_i)$  é a classificação do indivíduo ao ordenar todos jogadores pelo rating Elo  $r_i$  e  $\text{ranque}(habilidade_i)$  é a classificação do indivíduo ao ordenar os jogadores pela habilidade  $H_i$ .

### 3.3 SIMULAÇÃO DO SISTEMA ELO PARA ESPORTES COLETIVOS

O modelo de esportes coletivos (modelo EC) possui as mesmas premissas do modelo de esportes individuais (modelo EI), com a única diferença de que as partidas não são entre indivíduos, e sim entre times.

Para cada partida simulada são sorteados aleatoriamente jogadores para que se formem dois times, o time A e o time B, cada um com  $u$  jogadores. É importantes ressaltar que os participantes de um time não são fixos, ou seja, a cada sorteio novos times diferentes são formados. As performances individuais dos jogadores na partida são geradas como no modelo EI. Já o resultado da partida é determinado pela performance do time, que nada mais é a soma das performances individuais de seus jogadores. A performance do time A na partida  $j$  é definida como:

$$P_j^A = \sum_{i=1}^u P_{ij}. \quad (24)$$

O resultado é análogo para o time B.

O time vencedor é aquele que tiver a performance mais alta. O escore  $S^A$  na partida  $j$  dos  $u$  membros do time A é dado por:

$$S^A = \begin{cases} 0, & \text{se } P_j^A < P_j^B, \\ 1, & \text{se } P_j^A > P_j^B. \end{cases} \quad (25)$$

O cálculo do escore dos membros do time B é análogo.

Com base nos escores da partida os *ratings* dos jogadores participantes são atualizados pela fórmula de ajuste (Equação 6). O escore esperado ( $S_{exp}$ ) é calculado a partir da Equação 11, que é a versão logística do Sistema Elo adaptado para esportes coletivos. Ao fim das  $N$  partidas simuladas são analisados os indicadores de erro.

### 3.4 SIMULAÇÃO DO SISTEMA ELO PARA ESPORTES COLETIVOS COM AGENTES COM FUNÇÃO VALOR NA FORMA DA TEORIA DE PROSPECTO

A estrutura do modelo de esportes coletivos e teoria de prospecto (modelo ECTP) é a mesma do modelo de esportes coletivos (modelo EC), com algumas adições. Com propósito de aumentar a complexidade do modelo e fazê-lo se aproximar da realidade, o terceiro modelo tem adicionada a hipótese de que os agentes possuem um função valor como descrita na teoria de prospecto de Kahneman e Tversky (1979). Baseado no modelo de Wu *et al.* (2008) o ponto de referência dos agentes é uma meta que o próprio agente estabelece. O nível de esforço em uma dada partida depende da distância entre o *rating* e a meta. Ter um *rating* menor que a meta é visto como uma perda, enquanto ter um *rating* maior que a meta é visto como um ganho. Em função da aversão à perda, a dor das perdas são maiores que o prazer dos ganhos.

Com intuito de analisar diferentes tipos de formações de metas, o modelo possui duas diferentes versões. Na versão número 1 do modelo de esportes coletivos com teoria de prospecto (modelo  $ECTP_1$ ), existem três formas diferentes de estabelecer a meta, cada uma relacionada à um tipo de agente. Os agentes do tipo realistas escolhem sua meta  $G_i$  exatamente igual à sua habilidade  $H_i$ . Os agentes do tipo otimista escolhem sua meta  $G_i$  100 pontos de *rating* maior do que sua habilidade  $H_i$ . E por fim, os agentes do tipo pessimista escolhem sua meta  $G_i$  100 pontos de *rating* menor do que sua habilidade  $H_i$ . A meta  $G_i$  de cada um dos tipos é dada por:

$$G_i = \begin{cases} H_i, & \text{para os realistas;} \\ H_i + 100, & \text{para os otimistas;} \\ H_i - 100, & \text{para os pessimistas.} \end{cases} \quad (26)$$

É possível notar que os desvios da meta em relação à habilidade são valores absolutos (100 pontos), e não relativos. É feita essa escolha, pois, ao calcular o escore esperado, o erro da estimativa de probabilidade causado por superestimar (ou subestimar) o *rating* de um jogador em 100 pontos é constante para todos os *ratings*.

Na versão número 2 do modelo (modelo  $ECTP_2$ ) existe uma gama de comportamentos possíveis. A meta de cada agente é definida pela seguinte equação:

$$G_i = H_i + VC_i, \text{ onde } VC_i \sim N(0, 100^2), \quad (27)$$

na qual  $VC_i$  é o viés comportamental do agente  $i$ . Vale destacar que por conta da média 0, não existe uma tendência para uma presença maior de agentes com comportamento considerado otimista (meta maior que a habilidade) ou pessimista (meta menor que a habilidade).

Foi desenvolvida uma equação de esforço que simplifica um problema mais complexo, que é a maximização da função valor. O esforço  $e_i$  do jogador  $i$  em uma

dada partida é modelado de forma que seu valor está no intervalo [0,1]. O nível de esforço afeta a performance do jogador. Quanto mais próximo o jogador estiver de sua meta, mais ele irá se esforçar, com o máximo de esforço sendo igual a 1 quando o *rating* do jogador for exatamente sua meta. Considerando que perdas têm impacto maior que ganhos:

$$e(-(r_j - G_j)) > e(r_j - G_j), \text{ para } r_j > G_j \quad (28)$$

ou seja, para uma mesma distância, estar abaixo da meta induz um esforço maior que estar acima da meta. A equação de esforço é dada por:

$$e_j(r_j) = \begin{cases} 1,02^{\frac{r_j - G_j}{100}}, & \text{se } r_j \leq G_j, \\ 1,1^{-\frac{-(r_j - G_j)}{100}}, & \text{se } r_j > G_j. \end{cases} \quad (29)$$

A equação de esforço determina a redução de esforço pela distância da meta. Para cada 100 pontos de *rating* abaixo da meta, o esforço se reduz em aproximadamente 2 por cento. Para cada 100 pontos de *rating* acima da meta, o esforço se reduz em aproximadamente 9 por cento.

O modo como a introdução do esforço do jogador  $e_j$  afeta o modelo é pela equação de performance da equipe, que passa a ser:

$$P_j^A = \sum_{i=1}^u e_i P_{ij}. \quad (30)$$

Nesse modelo, a performance do jogador pode ser interpretada como uma performance potencial, que atinge seu valor máximo quando  $e=1$  (*rating* igual à meta). Uma condição adicional do modelo é que durante as partidas iniciais de colocação os jogadores escolhem o nível máximo de esforço  $e=1$ , dado que o valor da constante  $K$  é mais alto e, conseqüentemente, os resultados têm um impacto maior no *rating*. Sem essa condição, os jogadores com metas distantes do *rating* inicial escolheriam um nível de esforço baixo desde a primeira partida e os jogadores de maior habilidade nunca seriam capazes de atingir seu potencial.

Como no modelo EC, são simuladas partidas entre times formados aleatoriamente<sup>1</sup>, com a diferença que é utilizada a fórmula de performance em equipe modificada.

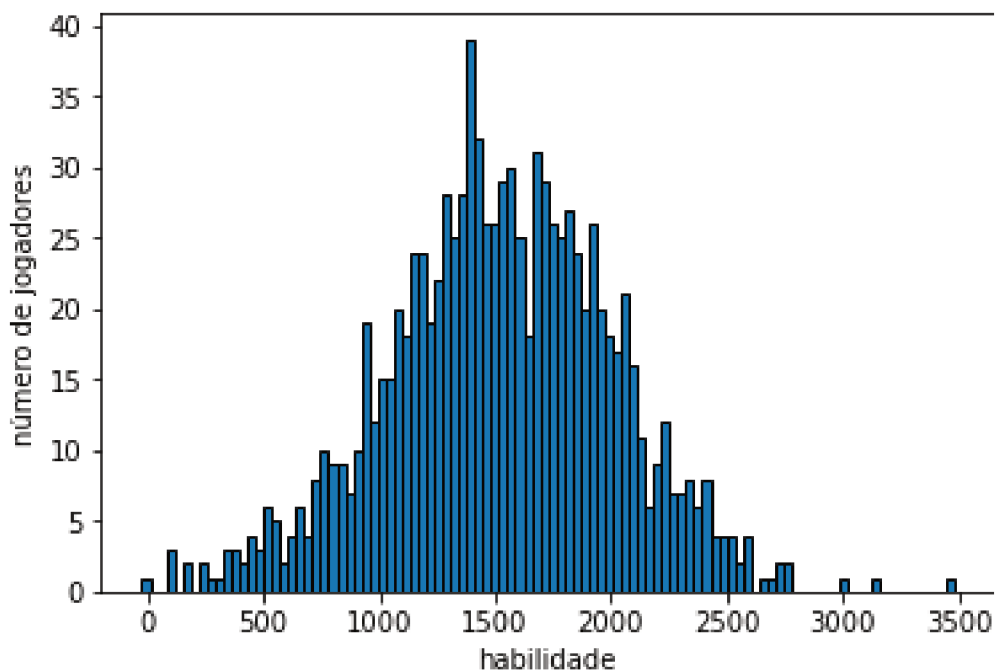
<sup>1</sup> Assim como no modelo EC os times não são fixos. Para cada partida é feito um novo sorteio.

## 4 RESULTADOS

### 4.1 RESULTADOS DE SIMULAÇÕES ÚNICAS

Nessa sessão são apresentados os resultados de simulações únicas de cada um dos modelos. Os parâmetros comuns de todas as simulações são  $N=1000$  jogadores, com habilidade  $H_i$  fixa vinda de uma distribuição normal com média  $m_H = 1500$  e desvio padrão  $\sigma_H = 500$ . A distribuição das habilidades dos jogadores pode ser vista na Figura 10 e ela é a mesma para as três simulações apresentadas. O desvio padrão  $\sigma_i$  de cada indivíduo é extraída de uma distribuição uniforme no intervalo  $[1,400]$ .

Figura 10 – Histograma da habilidade da população de jogadores na simulação de esportes individuais. Valores extraídos de uma distribuição  $N(1500, 500)$ .



Elaboração: própria

Na simulação do modelo de esportes individuais (modelo EI) são simuladas 100.000 rodadas com 5 partidas cada. Nas simulações de esportes coletivos (modelos EC e ECTP) são simuladas 20.000 rodadas com 5 partidas. Este diferencial existe para que em todos os modelos os jogadores participem em média de 1000 partidas<sup>1</sup>.

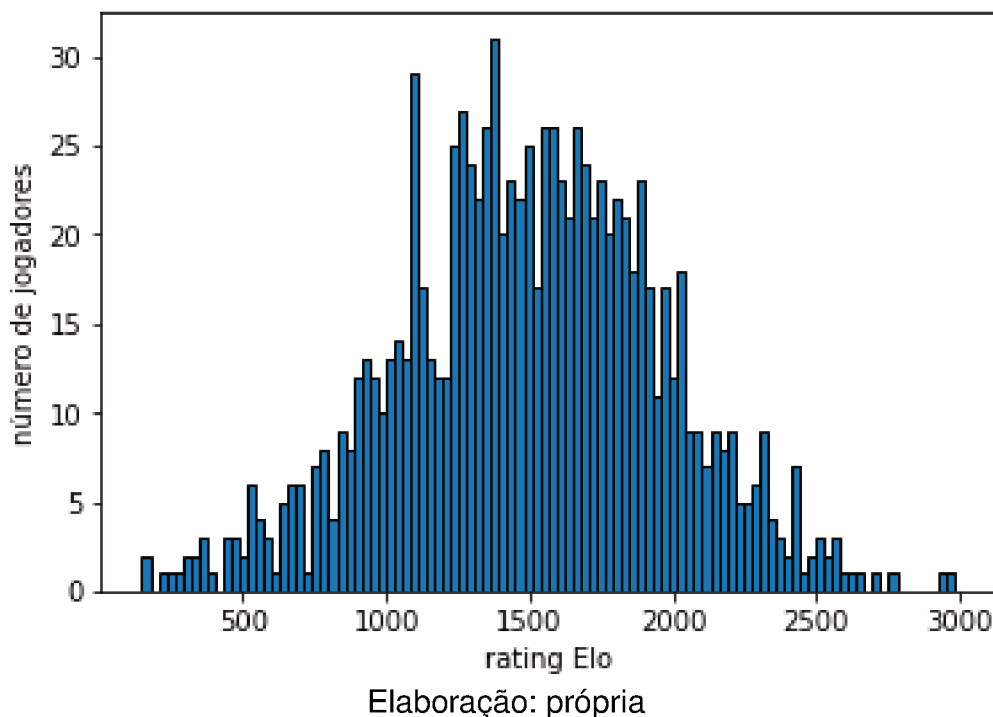
#### 4.1.1 Simulação única do modelo para esportes individuais

Aqui são apresentados os resultados da simulação do modelo EI (esportes individuais). A distribuição das habilidades dos jogadores é apresentada na Figura

<sup>1</sup> O número de partidas de um jogador em uma simulação depende do número de vezes que ele é sorteado para participar de partidas. Logo, ao final de uma simulação, o número total de partidas é diferente entre os jogadores.

10. A distribuição dos *ratings* ao final da simulação (Figura 11) se aproxima muito da distribuição das habilidades, indicando que os *ratings* do Sistema Elo são boas estimativas da habilidade dos jogadores. O coeficiente que compara as classificações produzidas pelo Sistema Elo com as reais classificações de habilidade foi  $EAM_{ranque} = 21,479$ .

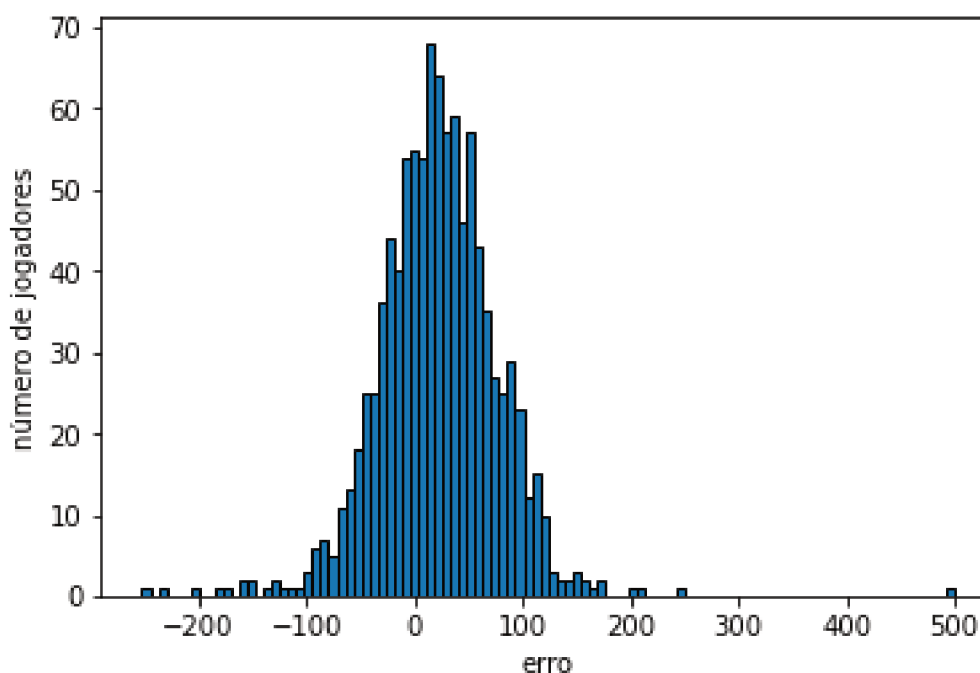
Figura 11 – Histograma dos *ratings* Elo finais da população de jogadores na simulação de esportes individuais.



A distribuição dos erros ao final da simulação (Figura 12) visualmente se assemelha a uma distribuição normal com média próxima a zero, porém a hipótese de normalidade é rejeitada pelo teste Jarque-Bera ( $t=1852,677$  e  $p=0,000$ ). O coeficiente de assimetria da distribuição dos erros é de 0,316 e o coeficiente de curtose é 9,638. Os valores dos coeficientes de erro da simulação<sup>2</sup> foram  $EM = 20,37$ ,  $EAM = 44,80$  e  $EQM = 3547,65$ .

<sup>2</sup> EM é o erro médio. EAM é o erro absoluto médio. EQM é o erro quadrático médio.

Figura 12 – Histograma dos erros da população de jogadores na simulação de esportes individuais.



Elaboração: própria

#### 4.1.2 Simulação única do modelo de esportes coletivos

Aqui são apresentados os resultados da simulação do modelo EC (esportes coletivos).

Observando apenas a distribuição dos *ratings* (Figura 13) é difícil analisar se houve uma mudança em relação ao modelo anterior (modelo EI). O coeficiente que compara as classificações produzidas pelo Sistema Elo com as reais classificações de habilidade foi  $EAM_{ranque} = 35,397$ , indicando uma menor precisão em comparação ao modelo EI. As diferenças estão mais aparentes na distribuição dos erros ao final da simulação (Figura 14). A dispersão dos erros é significativamente maior em comparação ao modelo anterior. Isso ocorre porque em um esporte coletivo o impacto de um indivíduo no resultado final é menor. Conseqüentemente acontece uma “inflação” do *rating* de jogadores pouco habilidosos e uma “deflação” dos muito habilidosos. A hipótese de distribuição normal dos erros foi rejeitada pelo teste Jarque-Bera ( $t=12,316$  e  $p=0,002$ ). O coeficiente de assimetria da distribuição dos erros é de  $-0,265$  e o coeficiente de curtose é de  $3,112$ .

Os valores dos indicadores de erro foram  $EM = 18,91$ ,  $EAM = 88,60$  e  $EQM = 12211,48$  uma mudança significativa em relação à simulação do modelo de esportes individuais.

Figura 13 – Histograma dos *ratings* Elo finais da população de jogadores na simulação de esportes coletivos.

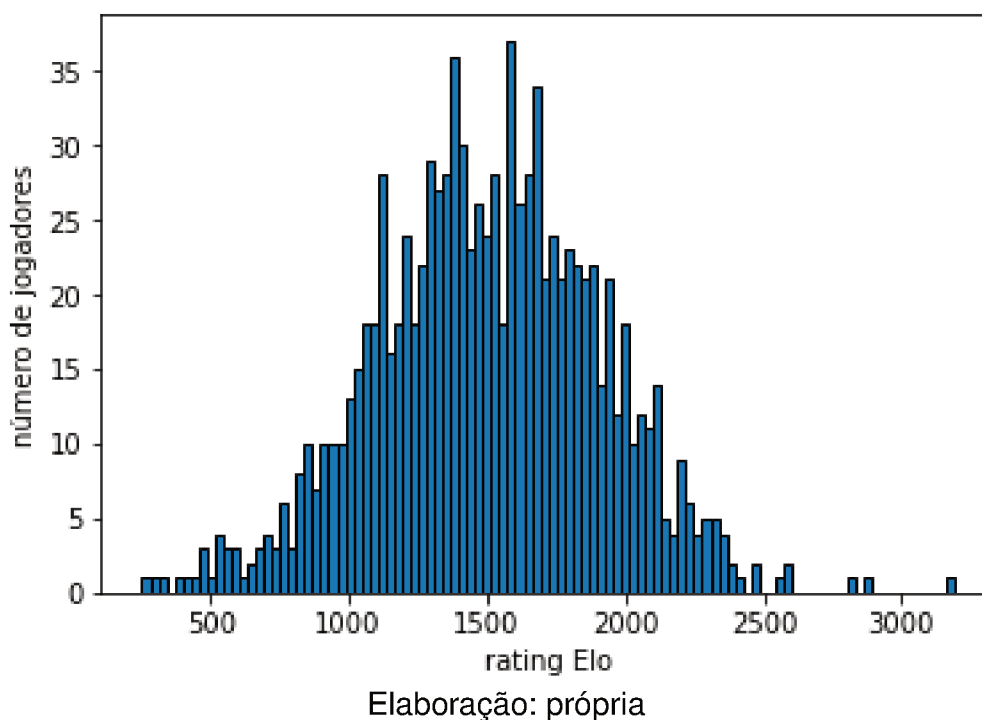
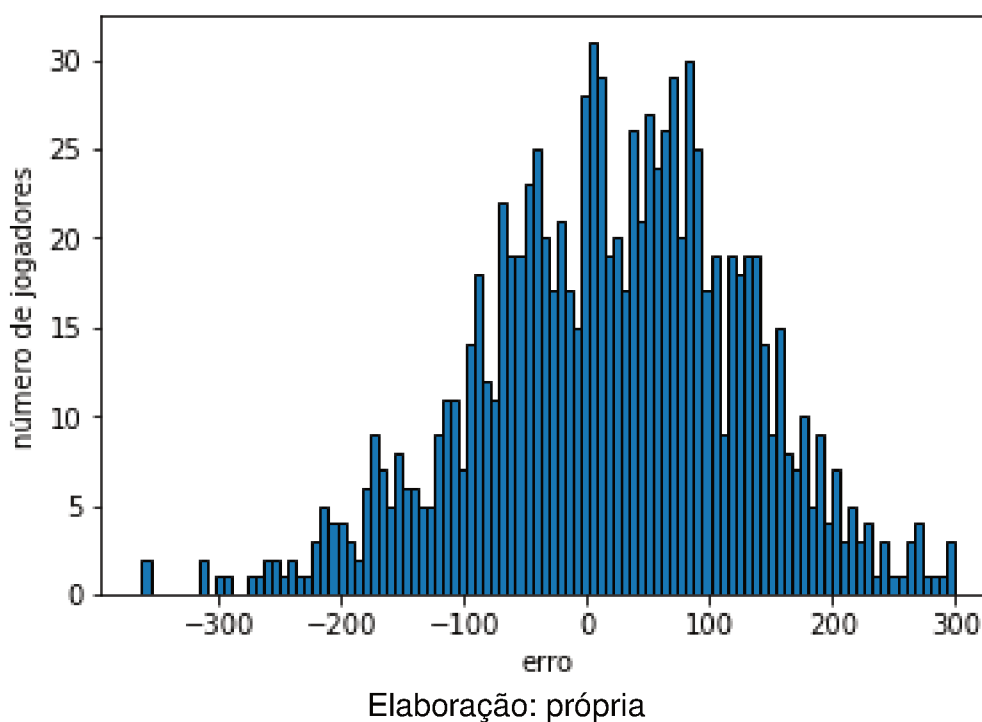


Figura 14 – Histograma dos erros da população de jogadores na simulação de esportes coletivos.



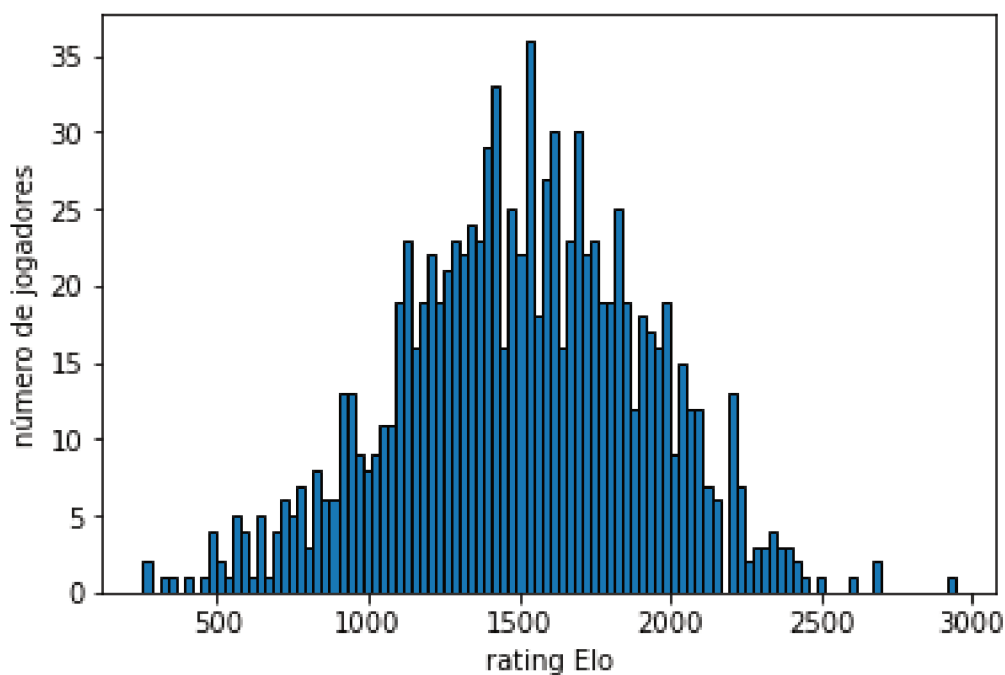


### 4.1.3 Simulação única da versão 1 do modelos de esportes coletivos com agentes com função valor da teoria de prospecto

Aqui são apresentados os resultados da simulação da versão 1 do modelo de esportes coletivos e teoria de prospecto (modelo  $ECTP_1$ ). As equipes são formadas por 5 jogadores, assim como na simulação para esportes coletivos. Dos 1000 jogadores do modelo, 500 são do tipo realista, 250 do tipo otimista e 250 do tipo pessimista.

A distribuição dos *ratings* ao final da simulação pode ser vista na Figura 15. Visualmente é difícil notar mudanças entre as distribuições de *rating* dos três modelos. O coeficiente que compara as classificações produzidas pelo Sistema Elo com as reais classificações de habilidade foi  $EAM_{ranque} = 33,862$ , marginalmente inferior ao modelo EC (esportes coletivos).

Figura 15 – Histograma dos *ratings* Elo finais da população de jogadores na simulação da versão 1 do modelo de esportes coletivos e teoria do prospecto.



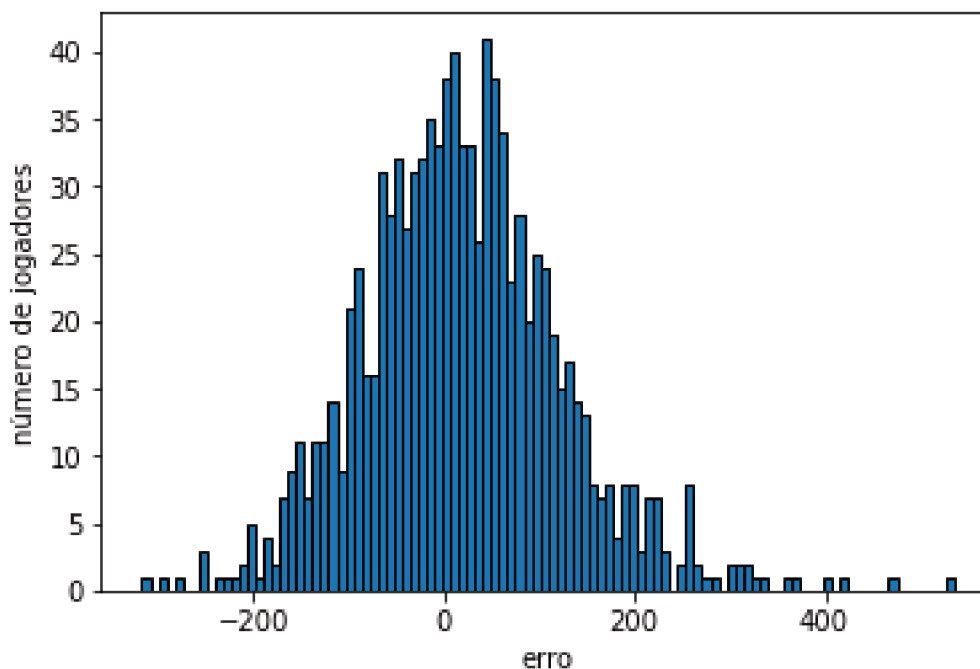
Elaboração: própria

A distribuição dos erros ao final da simulação pode ser observada na Figura 16. É possível observar que existem mais erros positivos<sup>3</sup> entre os maiores valores de erro. Isso ocorre porque ficar muito acima da meta não é sustentável, pois induz baixo nível de esforço. A hipótese de distribuição normal dos erros foi rejeitada pelo teste Jarque-Bera ( $t=104,185$  e  $p=0,000$ ). O coeficiente de assimetria da distribuição dos erros é de 0,461 e o coeficiente de curtose é de 4,284. Os valores dos indicadores

<sup>3</sup> Um erro positivo significa ter um *rating* menor que a habilidade. Um erro negativo representa um *rating* acima da habilidade.

de erro da simulação foram  $EM=18,91$ ,  $EAM = 81,73$  e  $EQM = 11522,62$ . Não houve mudança significativa em relação ao modelo sem esforço.

Figura 16 – Histograma dos erros da população de jogadores na simulação da versão 1 do modelo de esportes coletivos e teoria do prospecto.



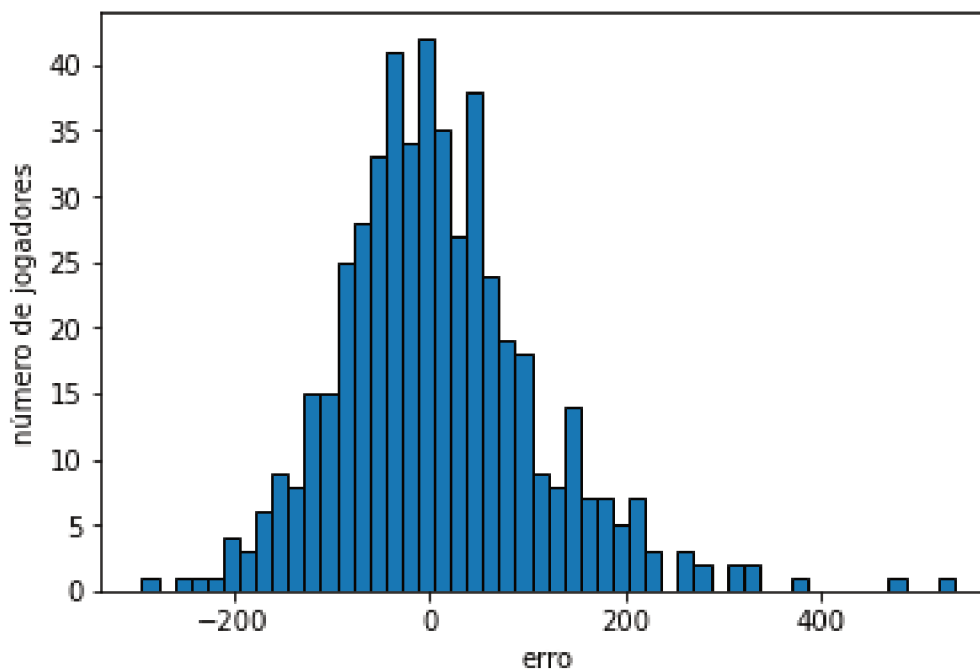
Elaboração: própria

Para comparar as diferenças entre os tipos de agentes são apresentadas as distribuições dos erros de cada um deles. Os erros dos agentes de tipo realistas são apresentados na Figura 17. A distribuição se assemelha muito ao resultado geral. Os valores dos indicadores de erro foram  $EM = 7,88$ ,  $EAM = 77,60$  e  $EQM = 10904,40$ . A hipótese de distribuição normal dos erros foi rejeitada pelo teste Jarque-Bera ( $t=152,592$  e  $p=0,000$ ). O coeficiente de assimetria da distribuição dos erros é de  $0,800$  e o coeficiente de curtose é de  $5,182$ .

Os erros dos agentes de tipo pessimistas são apresentados na Figura 18. Os valores dos indicadores de erro foram  $EM = 40,39$ ,  $EAM = 68,70$  e  $EQM = 7520,46$ . O erro médio positivo indica a maior prevalência de jogadores com *rating* menor que sua habilidade. Isso ocorre porque o pessimista atinge mais facilmente sua meta, e o grau de esforço de estar acima da meta é menor. A hipótese de distribuição normal dos erros não foi rejeitada pelo teste Jarque-Bera ( $t=4,651$  e  $p=0,097$ ). O coeficiente de assimetria da distribuição dos erros é de  $-0,075$  e o coeficiente de curtose é de  $3,650$ .

Os erros dos agentes de tipo otimistas são apresentados na Figura 19. Os valores dos indicadores de erro foram  $EM = 19,49$ ,  $EAM = 102,99$  e  $EQM = 16761,20$ . O erro absoluto médio é o maior em comparação com os dois outros tipos, indicando a maior dispersão de erros. Considerando a simetria do gráfico, é possível interpretar que

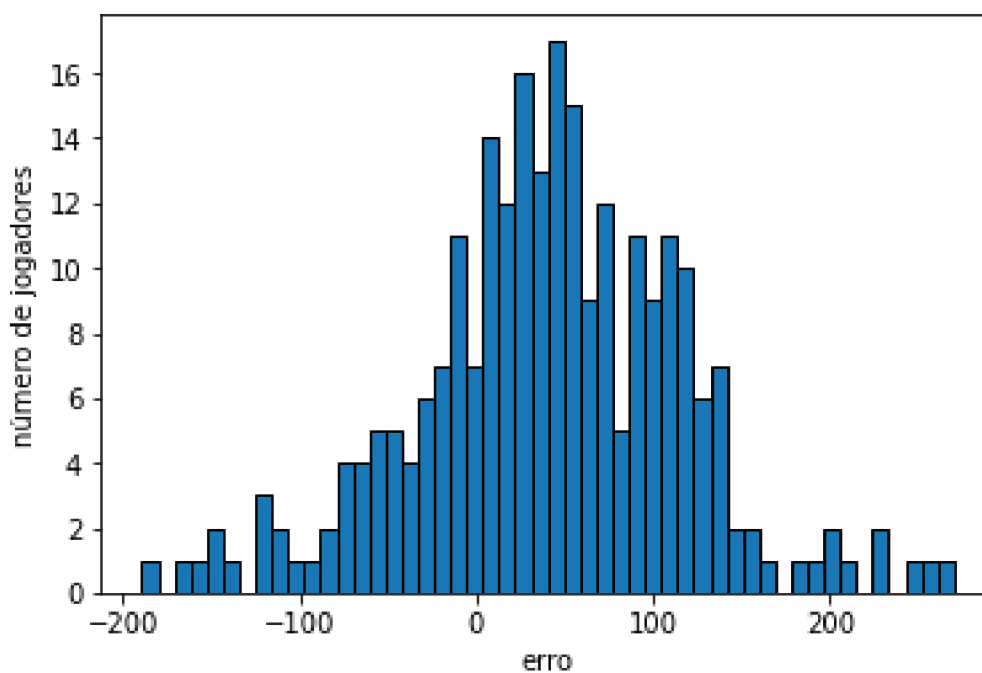
Figura 17 – Histograma dos erros dos jogadores de tipo realista na simulação da versão 1 do modelo de esportes coletivos e teoria do prospecto.



Elaboração: própria

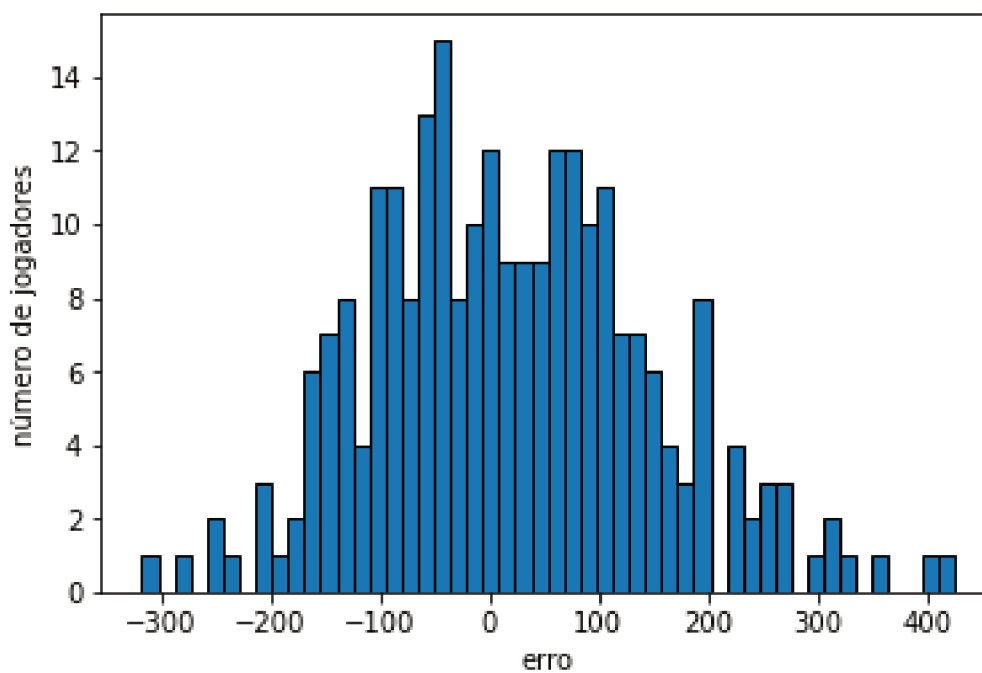
o comportamento otimista em alguns casos permitiu a sustentação de um *rating* maior que a habilidade, pois a meta maior que a habilidade induziu altos níveis de esforço. Em outros casos a meta alta levou à uma decepção de estar abaixo da habilidade ainda maior. Os erros mais negativos de fato foram agentes otimistas. A hipótese de distribuição normal dos erros não foi rejeitada pelo teste Jarque-Bera ( $t=4,898$  e  $p=0,086$ ). O coeficiente de assimetria da distribuição dos erros é de 0,336 e o coeficiente de curtose é de 3,129.

Figura 18 – Histograma dos erros dos jogadores de tipo pessimista na simulação de esportes coletivos com indivíduos com função valor.



Elaboração: própria

Figura 19 – Histograma dos erros dos jogadores de tipo otimista na simulação de esportes coletivos com indivíduos com função valor.



Elaboração: própria

A Tabela 2 apresenta os valores dos indicadores de erro da simulação de cada um dos grupos. A Tabela 3 compila os indicadores das simulações únicas. A Tabela 4 apresenta os indicadores de erro da classificação das simulações únicas.

Tabela 2 – Indicadores de erro de cada um dos tipos de uma simulação única da versão 1 do modelo de esportes coletivos e teoria de prospecto. EM (erro médio), EAM (erro absoluto médio), EQM (erro quadrático médio).

	EM	EAM	EQM
Realista	7.88 (104.13)	77.6 (69.87)	10904.41 (22865.08)
Otimista	19.49 (127.99)	102.99 (78.45)	16761.2 (25524.62)
Pessimista	40.4 (76.74)	68.71 (52.92)	7520.46 (11172.82)
Geral	18.91 (105.66)	81.73 (69.59)	11522.62 (21599.69)

Desvios padrão em parênteses.

Elaboração: própria

Tabela 3 – Indicadores de erro das simulações únicas dos modelos. EM (erro médio), EAM (erro absoluto médio), EQM (erro quadrático médio).

	EM	EAM	EQM
esportes individuais	20.37 (56.00)	44.80 (39.27)	3547.65 (9725.26)
esportes coletivos	18.91 (108.93)	88.59 (66.08)	12211.48 (16972.63)
esportes coletivos e metas	0.31611 (105.72)	81.72 (69.63)	11522.61 (21610.50)

Desvios padrão em parênteses.

Elaboração: própria

Tabela 4 – Erros absolutos médios das classificações ( $EAM_{\text{ranque}}$ ) de simulações únicas de cada um dos modelos.

	$EAM_{\text{ranque}}$
esportes individuais	21.479 (19.262)
esportes coletivos	35.397 (32.887)
esportes coletivos com metas	33.862 (31.630)

Desvios padrão em parênteses.  
Elaboração: própria

#### 4.2 RESULTADOS DE MÚLTIPLAS SIMULAÇÕES DO MODELO

Nesta sessão são apresentados os resultados de 100 simulações de cada um dos modelos. Os valores médios dos coeficientes de erro de 100 simulações dos três modelos podem ser vistos na Tabela 5. Como é possível observar os menores valores de EAM e EQM são das simulações do modelo de esportes individuais, dado que cada jogador depende apenas de si mesmo para vencer suas partidas. Ao comparar as duas simulações de esportes coletivos, a presença de comportamento avesso à perda do modelo ECTP levou a EAM e EQM menores. Essa melhora do modelo se dá pois, ao estar acima da meta, existe o efeito de relaxamento por estar no terreno dos ganhos, que induz menor esforço e atrai o jogador para a meta. O efeito de redução dos erros por conta do relaxamento mais que compensa o efeito de aumento do erro causado pelo desânimo de agentes muito abaixo de sua meta. Isso ocorre pois a redução de esforço com distanciamento de meta é mais veloz no terreno dos ganhos que no terreno das perdas.

A Tabela 6 apresenta médias do indicador de erro da classificação das 100 simulações de cada um dos modelos. Como esperado, a classificação dos jogadores pelo rating do modelo EI é a que mais se aproxima da real classificação de habilidades. O resultado surpreendente foi a melhor eficiência do Sistema Elo nas simulações do modelo  $ECTP_1$  em comparação ao modelo EC. A melhor explicação encontrada para tal resultado é a maior prevalência de indivíduos realistas, cuja meta ( $G_i = H_i$ ) possui um efeito atrator para que o rating seja, de fato, igual à habilidade.

A Tabela 7 apresenta as médias por tipo de agente dos indicadores de erro de 100 simulações do modelo de esportes coletivos com teoria de prospecto. Foi realizado um teste T de diferença de médias e as médias dos três comportamentos são diferentes entre si a 1 por cento de significância. Comparando os tipos de comportamento, os

Tabela 5 – Médias dos indicadores de erro de 100 simulações de cada um dos modelos. EM (erro médio), EAM (erro absoluto médio), EQM (erro quadrático médio).

	EM	EAM	EQM
esportes individuais	0.250 (15.388)	46.197 (4.426)	3619.614 (681.426)
esportes coletivos	0.316 (15.385)	90.407 (6.342)	12860.918 (1708.776)
esportes coletivos com metas	0.316 (15.385)	84.537 (6.039)	12289.627 (1749.153)

Desvios padrão em parênteses.

Elaboração: própria

Tabela 6 – Médias dos erros absolutos médios das classificações ( $EAM_{\text{rank}}$ ) de 100 simulações de cada um dos modelos.

	$EAM_{\text{rank}}$
esportes individuais	20.95 (18.85)
esportes coletivos	33.97 (30.63)
esportes coletivos com metas	32.04 (28.44)

Desvios padrão em parênteses.

Elaboração: própria

menores erros médios são dos agentes otimistas. Isso significa que o comportamento otimista, em média, induziu uma melhor performance. Porém o desvio padrão do comportamento otimista também é o mais alto, o que significa que a melhora de performance média estava associada a um risco.

A seguir é apresentado o resultado da versão 2 do modelo com teoria de prospecto. A Figura 20 apresenta um gráfico de dispersão dos erros e do viés comportamental de indivíduos de 100 simulações. A linha vermelha no gráfico representa o polinômio de grau 3 que melhor explica a dispersão dos pontos. É possível observar a relação não linear entre o viés comportamental e o erro. O polinômio tem seu valor mínimo quando o viés é de 81,98, e o valor do erro nesse ponto é de -16,45. Esse resultado indica que, em média, a meta que produz os maiores *ratings* em comparação com a habilidade é a meta de 81,98 (uma meta moderadamente otimista).

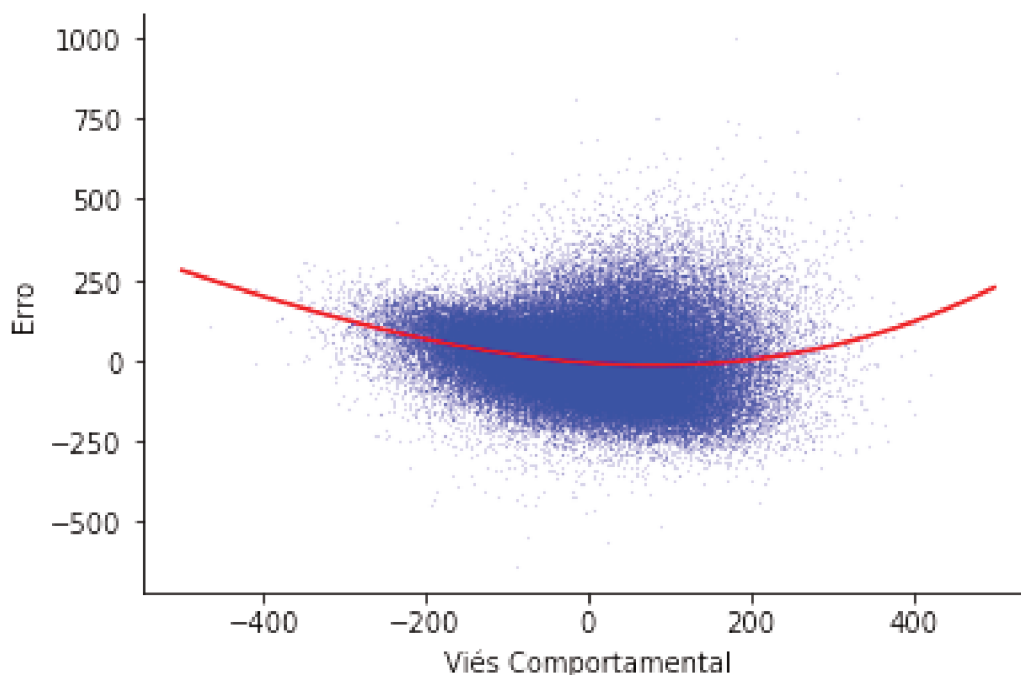
Tabela 7 – Indicadores de erro por tipo do agrupamento de todos os indivíduos das 100 simulações da versão 1 do modelo com teoria de prospecto. EM (erro médio), EAM (erro absoluto médio), EQM (erro quadrático médio).

	EM	EAM	EQM
realista	-5.998 (15.200)	80.135 (6.438)	11226.856 (1812.356)
otimista	-8.590 (21.643)	109.932 (8.746)	18789.952 (2951.402)
pessimista	21.851 (12.429)	67.944 (6.133)	7914.844 (1561.619)

Desvios padrão em parênteses.

Elaboração: própria

Figura 20 – Gráfico da dispersão do erro e viés comportamental e o polinômio de grau 3 com melhor ajuste. Dados de agentes de 100 simulações da segunda versão do modelo de esportes coletivos e teoria de prospecto ( $ECTP_2$ ).



Elaboração: própria



## 5 CONCLUSÃO

Com o desenvolvimento da teoria de prospecto, pesquisadores começaram a investigar os efeitos do ponto de referência sobre a performance e o esforço. Ao interpretar metas, expectativas ou aspirações como o ponto de referência, foi possível desenvolver modelos e até mesmo obter resultados empíricos que corroboram com a teoria de que indivíduos de fato dividem o espaço de possibilidades em ganhos e perdas, e que seu comportamento muda dependendo da região que o indivíduo se encontra. Na literatura, da mesma forma que é possível encontrar exemplos nos quais o aumento do ponto de referência induziu um melhor desempenho, também é possível encontrar exemplos de melhora de desempenho com a redução do ponto de referência.

A presente dissertação buscou analisar os efeitos do comportamento dependente de um ponto de referência. A análise partiu de modelos simulados baseados no Sistema Elo, o mais popular e simples Sistema de *ratings*. O modelo que incorporou a teoria de prospecto foi capaz de replicar os resultados de metas como ponto de referência. Metas pessimistas estavam relacionadas com a piora de performance, considerando que são facilmente alcançadas. Já metas otimistas melhoraram a performance quando eram factíveis, e pioraram a performance quando ficaram fora do alcance.

O trabalho abre caminho para modelos mais complexos. Possíveis hipóteses mais realistas são: pontos de referência determinados por interações sociais, políticas públicas representadas como alterações exógenas do ponto de referência e habilidades que mudem ao longo do tempo. Modelos baseados em agentes com intuito de relacionar pobreza e aspirações individuais podem ser desenvolvidos a partir dessas hipóteses.

## REFERÊNCIAS

- ABELER, Johannes; FALK, Armin; GOETTE, Lorenz; HUFFMAN, David. Reference points and effort provision. **American Economic Review**, v. 101, n. 2, p. 470–92, 2011.
- ALDOUS, David. Elo ratings and the sports model: A neglected topic in applied probability? **Statistical science**, v. 32, n. 4, p. 616–629, 2017.
- ALFARO, Luca de; SHAVLOVSKY, Michael. CrowdGrader: A Tool for Crowdsourcing the Evaluation of Homework Assignments. *In*: PROCEEDINGS OF THE 45TH ACM TECHNICAL SYMPOSIUM ON COMPUTER SCIENCE EDUCATION. (SIGCSE '14), p. 415–420.
- ANAGNOSTOPOULOS, Aris; BECCHETTI, Luca; CASTILLO, Carlos; GIONIS, Aristides; LEONARDI, Stefano. Power in unity: forming teams in large-scale community systems. *In*: PROCEEDINGS of the 19th ACM international conference on Information and knowledge management. [S.l.: s.n.], 2010. P. 599–608.
- ANTAL, MARGIT. On the use of elo rating for adaptive assessment. **Studia Universitatis Babes-Bolyai, Informatica**, v. 58, n. 1, p. 29–41, 2013.
- ARMANTIER, Olivier; BOLY, Amadou. Framing of incentives and effort provision. **International Economic Review**, v. 56, n. 3, p. 917–938, 2015.
- AVERY, Christopher N; GLICKMAN, Mark E; HOXBY, Caroline M; METRICK, Andrew. A revealed preference ranking of us colleges and universities. **The Quarterly Journal of Economics**, v. 128, n. 1, p. 425–467, 2013.
- BAKER, George. Distortion and risk in optimal incentive contracts. **Journal of human resources**, v. 37, n. 4, p. 728–751, 2002.
- BAKER, George. Incentive contracts and performance measurement. **Journal of political Economy**, v. 100, n. 3, p. 598–614, 1992.
- BARBERIS, Nicholas C. Thirty years of prospect theory in economics: A review and assessment. **Journal of Economic Perspectives**, v. 27, n. 1, p. 173–96, 2013.

BARDE, Sylvain. **Direct calibration and comparison of agent-based herding models of financial markets**. [S.l.], 2015.

BERGER, Jonah; POPE, Devin. Can losing lead to winning? **Management Science**, v. 57, n. 5, p. 817–827, 2011.

BRADLEY, Ralph Allan; TERRY, Milton E. Rank analysis of incomplete block designs: I. The method of paired comparisons. **Biometrika**, v. 39, n. 3/4, p. 324–345, 1952.

CAMERER, Colin F. Prospect Theory in the Wild: Evidence from the Field. *In*: **Choices, Values, and Frames**. Edição: Daniel Kahneman e Amos Tversky. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000. P. 288–300.

CHETRITE, Raphael; DIEL, Roland; LERASLE, Matthieu *et al.* The number of potential winners in Bradley–Terry model in random environment. **Annals of Applied Probability**, v. 27, n. 3, p. 1372–1394, 2017.

DALTON, Patricio S; GHOSAL, Sayantan; MANI, Anandi. Poverty and aspirations failure. **The Economic Journal**, v. 126, n. 590, p. 165–188, 2016.

DAVIDSON, Roger R; FARQUHAR, Peter H. A bibliography on the method of paired comparisons. **Biometrics**, p. 241–252, 1976.

DEUTSCHER, Christian. The payoff to leadership in teams. **Journal of Sports Economics**, v. 10, n. 4, p. 429–438, 2009.

ELO, Arpad E. **The rating of chessplayers, past and present**. New York: Arco Pub., 1978.

FIDE. **Ratings Change Calculator**. 2021. Disponível em: [https://ratings.fide.com/calculator\\_rtd.phtml](https://ratings.fide.com/calculator_rtd.phtml). Acesso em: 12 fev. 2021.

FRANKE, Reiner; WESTERHOFF, Frank. Structural stochastic volatility in asset pricing dynamics: Estimation and model contest. **Journal of Economic Dynamics and Control**, v. 36, n. 8, p. 1193–1211, 2012.

GELADE, Garry A. The influence of team Composition on attacking and defending in Football. **Journal of Sports Economics**, v. 19, n. 8, p. 1174–1190, 2018.

GENICOT, Garance; RAY, Debraj. Aspirations and inequality. **Econometrica**, v. 85, n. 2, p. 489–519, 2017.

GERSHENSON, Seth; HART, Cassandra MD; HYMAN, Joshua; LINDSAY, Constance; PAPAGEORGE, Nicholas W. **The long-run impacts of same-race teachers**. [S.l.], 2018.

GLICKMAN, Mark E. A comprehensive guide to chess ratings. **American Chess Journal**, v. 3, n. 1, p. 59–102, 1995.

GLICKMAN, Mark E. Parameter estimation in large dynamic paired comparison experiments. **Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)**, v. 48, n. 3, p. 377–394, 1999.

GOFFE, Adeelia; FISCHER, Julia; SENNHENN-REULEN, Holger. Bayesian inference and simulation approaches improve the assessment of Elo-ratings in the analysis of social behaviour. **Methods in Ecology and Evolution**, v. 9, n. 10, p. 2131–2144, 2018.

GOUX, Dominique; GURGAND, Marc; MAURIN, Eric. Adjusting your dreams? The effect of school and peers on dropout behaviour. IZA discussion paper 7948, 2014.

HACKER, Severin; VON AHN, Luis. Matchin: eliciting user preferences with an online game. *In: PROCEEDINGS OF THE SIGCHI CONFERENCE ON HUMAN FACTORS IN COMPUTING SYSTEMS*, p. 1207–1216.

HEATH, Chip; LARRICK, Richard P; WU, George. Goals as reference points. **Cognitive psychology**, v. 38, n. 1, p. 79–109, 1999.

HERBRICH, Ralf; MINKA, Tom; GRAEPEL, Thore. TrueSkill<sup>TM</sup>: a Bayesian skill rating system. *In: ADVANCES IN NEURAL INFORMATION PROCESSING SYSTEMS*, 19, p. 569–576.

HEUBECK, Tina; SCHEUER, Jochen. Incentive Contracts in Team Sports-Theory and Practice. **German Working Papers in Law and Economics**, v. 2002, n. 1, p. 17, 2003.

- HOSSAIN, Tanjim; LIST, John A. The behavioralist visits the factory: Increasing productivity using simple framing manipulations. **Management Science**, v. 58, n. 12, p. 2151–2167, 2012.
- HVATTUM, Lars Magnus; ARNTZEN, Halvard. Using ELO ratings for match result prediction in association football. **International Journal of forecasting**, v. 26, n. 3, p. 460–470, 2010.
- JARQUE, Carlos M; BERA, Anil K. Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. **Economics letters**, v. 6, n. 3, p. 255–259, 1980.
- JOHNSON, Dominic DP; WEIDMANN, Nils B; CEDERMAN, Lars-Erik. Fortune favours the bold: an agent-based model reveals adaptive advantages of overconfidence in war. **PloS one**, v. 6, n. 6, e20851, 2011.
- KAHNEMAN, Daniel; TVERSKY, Amos. Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. **Econometrica**, v. 47, n. 2, p. 263–292, 1979.
- KANDEL, Eugene; LAZEAR, Edward P. Peer pressure and partnerships. **Journal of political Economy**, v. 100, n. 4, p. 801–817, 1992.
- KŐSZEGI, Botond; RABIN, Matthew. A model of reference-dependent preferences. **The Quarterly Journal of Economics**, v. 121, n. 4, p. 1133–1165, 2006.
- KOVALCHIK, Stephanie. Extension of the Elo rating system to margin of victory. **International Journal of Forecasting**, v. 36, n. 4, p. 1329–1341, 2020.
- LAW, Edith; AHN, Luis von. Human computation. **Synthesis lectures on artificial intelligence and machine learning**, Morgan & Claypool Publishers, v. 5, n. 3, p. 1–121, 2011.
- LAZEAR, Edward P; ROSEN, Sherwin. Rank-order tournaments as optimum labor contracts. **Journal of political Economy**, v. 89, n. 5, p. 841–864, 1981.
- LEBOEUF, Robyn A; ESTES, Zachary. “Fortunately, I’m no Einstein”: Comparison relevance as a determinant of behavioral assimilation and contrast. **Social Cognition**, v. 22, n. 6, p. 607–636, 2004.

LEHMANN, Robert; WOHLRABE, Klaus. An Elo ranking for economics journals. **Economics Bulletin**, v. 37, n. 4, p. 2282–2291, 2017.

LEITNER, Christoph; ZEILEIS, Achim; HORNIK, Kurt. Forecasting sports tournaments by ratings of (prob) abilities: A comparison for the EURO 2008. **International Journal of Forecasting**, v. 26, n. 3, p. 471–481, 2010.

LOCKWOOD, Penelope; KUNDA, Ziva. Superstars and me: Predicting the impact of role models on the self. **Journal of personality and social psychology**, v. 73, n. 1, p. 91, 1997.

MINKA, Tom; CLEVEN, Ryan; ZAYKOV, Yordan. **Trueskill 2: An improved bayesian skill rating system**. [S.l.], 2018.

MOSTELLER, Frederick. Remarks on the method of paired comparisons: I. The least squares solution assuming equal standard deviations and equal correlations. **Psychometrika**, v. 16, n. 1, p. 3–9, 1951.

NALEBUFF, Barry J; STIGLITZ, Joseph E. Prizes and incentives: towards a general theory of compensation and competition. **The Bell Journal of Economics**, p. 21–43, 1983.

NEUMANN, Christof; DUBOSCQ, Julie; DUBUC, Constance; GINTING, Andri; IRWAN, Ade Maulana; AGIL, Muhammad; WIDDIG, Anja; ENGELHARDT, Antje. Assessing dominance hierarchies: validation and advantages of progressive evaluation with Elo-rating. **Animal Behaviour**, v. 82, n. 4, p. 911–921, 2011.

PELÁNEK, Radek. Applications of the Elo rating system in adaptive educational systems. **Computers & Education**, v. 98, p. 169–179, 2016.

PIETERS, Wolter; VAN DER VEN, Sanne Hg; PROBST, Christian W. A move in the security measurement stalemate: Elo-style ratings to quantify vulnerability. *In*: PROCEEDINGS OF THE 2012 NEW SECURITY PARADIGMS WORKSHOP, p. 1–14.

POPE, Devin G; SCHWEITZER, Maurice E. Is Tiger Woods loss averse? Persistent bias in the face of experience, competition, and high stakes. **American Economic Review**, v. 101, n. 1, p. 129–57, 2011.

PRUNA, Radu T; POLUKAROV, Maria; JENNINGS, Nicholas R. Avoiding regret in an agent-based asset pricing model. **Finance Research Letters**, v. 24, p. 273–277, 2018.

PRUNA, Radu T; POLUKAROV, Maria; JENNINGS, Nicholas R. Loss aversion in an agent-based asset pricing model. **Quantitative Finance**, v. 20, n. 2, p. 275–290, 2020.

RAHMAN, Habibur; THIRUMURUGANATHAN, Saravanan; ROY, Senjuti Basu; AMER-YAHIA, Sihem; DAS, Gautam. Worker skill estimation in team-based tasks. **Proceedings of the VLDB Endowment**, v. 8, n. 11, p. 1142–1153, 2015.

SHEFRIN, Hersh; STATMAN, Meir. The disposition to sell winners too early and ride losers too long: Theory and evidence. **The Journal of finance**, v. 40, n. 3, p. 777–790, 1985.

SHIMOKAWA, Tetsuya; SUZUKI, Kyoko; MISAWA, Tadanobu. An agent-based approach to financial stylized facts. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 379, n. 1, p. 207–225, 2007.

SORNETTE, Didier; WHEATLEY, Spencer; CAUWELS, Peter. The Fair Reward Problem: The Illusion of Success and How to Solve It. **Advances in Complex Systems**, v. 22, n. 03, p. 1950005, 2019.

STERN, Hal. Are all linear paired comparison models empirically equivalent? **Mathematical Social Sciences**, v. 23, n. 1, p. 103–117, 1992.

THURSTONE, Louis L. A law of comparative judgment. **Psychological review**, v. 34, n. 4, p. 273, 1927.

TVERSKY, Amos; KAHNEMAN, Daniel. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. **Journal of Risk and uncertainty**, v. 5, n. 4, p. 297–323, 1992.

UHLMANN, Eric Luis; BARNES, Christopher M. Selfish play increases during high-stakes NBA games and is rewarded with more lucrative contracts. **PloS one**, v. 9, n. 4, e95745, 2014.

VAN DER MAAS, Han LJ; WAGENMAKERS, Eric-Jan. A psychometric analysis of chess expertise. **The American journal of psychology**, p. 29–60, 2005.

WESTERHOFF, Frank. Consumer behavior and fluctuations in economic activity. **Advances in Complex Systems**, v. 8, n. 02, p. 209–215, 2005.

WU, George; HEATH, Chip; LARRICK, Richard. A prospect theory model of goal behavior, 2008. Não publicado. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.554.7677&rep=rep1&type=pdf>.