



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Henrique Amador Puel Martins

Censura Topológica na Geometria Lorentziana

Florianópolis
2021

Henrique Amador Puel Martins

Censura Topológica na Geometria Lorentziana

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Ivan Pontual Costa e Silva

Florianópolis

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Puel Martins, Henrique Amador
Censura Topológica na Geometria Lorentziana / Henrique
Amador Puel Martins ; orientador, Ivan Pontual Costa e
Silva, 2021.
118 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada,
Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Geometria
Lorentziana. 3. Relatividade matemática. 4. Censura
topológica. I. Pontual Costa e Silva, Ivan. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós
Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Henrique Amador Puel Martins

Censura Topológica na Geometria Lorentziana

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Ivan Pontual Costa e Silva, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha, Dr.
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Francisco Carlos Caramello Junior, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Ivan Pontual Costa e Silva
Orientador

Florianópolis, 2021.

A Creusa Sueli Aparecida Martins Marcussi e Almir Puel, *in memoriam*

AGRADECIMENTOS

Ao que tange especificamente à realização deste trabalho meus agradecimentos vão ao professor Ivan, que além de ter eximamente me orientado academicamente, também tem cumprido papel de mentor intelectual para mim; à minha namorada Bruna Peixer pelo carinho e companheirismo que tornaram esse árduo período de distanciamento social muito mais suportável; e ainda aos mantenedores de iniciativas como *Library Genesis* e *SCI-HUB* que ajudam a remover barreiras ao acesso da ciência.

De modo geral, como ser humano, agradeço aos cientistas e profissionais da saúde de todo o mundo que vêm se dedicando arduamente e por vezes se sacrificando no combate à pandemia que atravessamos. Em verdade, a esta altura do campeonato o inimigo que enfrentamos não é apenas o vírus, mas também o obscurantismo, a ignorância e o individualismo. Tais vícios, fico feliz de não ter visto vestígio em quem tenho caro e quero bem: primeiramente meus pais Elisia e Vladimir. Também meus camaradas comunistas, meus colegas do Labirinto da Zuera com muitos dos quais compartilhei a jornada acadêmica, e o glorioso Lokomotiv Dekolow, que está forçosamente longe dos gramados, mas sempre atento ao que acontece no Brasil e no mundo, pois sabemos que *a informação não descansa*.

Ainda sobre esta tragédia sanitária e social, espero que tiremos lições não apenas administrativas, mas fundamentalmente enquanto *gênero humano*, que precisa urgentemente reformular as relações de produção e reprodução da vida, visando superar nosso *auto-estranhamento*. Nesse sentido, aproveito para saudar o valente povo chinês, por ocasião do lançamento de seu 14^o Plano Quinquenal, reafirmando sua resolução de resistência anti-colonial e de longa construção de uma forma superior de sociabilidade.

Quanto à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior, fundação do Ministério da Educação, que financiou meu mestrado, não julgo que cabe agradecimento, pois fornecer as condições materiais para o desenvolvimento da ciência não é favor ou benesse, mas *conditio sine qua non* para o desenvolvimento nacional. Por extensão, o grau que me é conferido não é minha conquista, mas signo do compromisso que renovo com o povo trabalhador brasileiro - verdadeiro financiador de meus estudos. A este, agradeço por construir e pôr em movimento todo o mundo que temos à nossa volta, e juro me esforçar para retribuir o que me foi dado - não de forma assistencial ou filantrópica, mas militante na construção de uma pátria brasileira que seja *desenvolvida, livre, soberana e socialista*.

Toda a ciência seria supérflua se a forma de manifestação e a essência das coisas coincidissem imediatamente.
(MARX, 1894)

RESUMO

Este trabalho apresenta e desenvolve alguns resultados referentes ao aparecimento de restrições geométricas, fisicamente motivadas, à topologia, especificamente o grupo fundamental, de espaços-tempo na geometria Lorentziana. O trabalho é dividido em três partes: na primeira, introduzimos uma série de ferramentas matemáticas basilares ao desenvolvimento posterior; em seguida, apresentamos uma versão do chamado Teorema de Gannon–Lee visto como restrição à topologia de hipersuperfícies de Cauchy advinda, entre outros elementos de motivação física, de uma hipótese de *completude geodésica em direções luminosas*. Este teorema também pode ser interpretado como um teorema de singularidade. A parte final é reservada aos resultados conhecidos como *censura topológica* desenvolvidos a partir da década de 1990 que correspondem fisicamente a restrições de um observador em "testar" aspectos topológicos não triviais.

Palavras-chave: Geometria Lorentziana. Relatividade matemática. Censura topológica.

ABSTRACT

This work presents and develops some results referring to the appearance of physically motivated geometrical restrictions to the topology, mainly the fundamental group, of spacetimes in Lorentzian geometry. It is divided in three main parts: in the first one, we introduce a series of basic mathematical tools needed for the subsequent development; following, we present a version of the so called Gannon–Lee Theorem seen as a restriction to the topology of Cauchy hypersurfaces arising, among other physically motivated elements, from a hypothesis of *null geodesic completeness*. This theorem may also be seen as a singularity theorem. The last part is reserved to the results known as *topological censorship* which have been developed since the 1990s and physically correspond to restrictions upon an observer "probing" non trivial topological aspects.

Keywords: Lorentzian geometry. Mathematical relativity. Topological censorship.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama de dependência entre as principais proposições do trabalho.	17
Figura 2 – Cones de luz em um espaço vetorial de Lorentz. Obtida de en.wikipedia.org/wiki/Cone .	
Figura 3 – Representação de um domínio regular em \mathbb{H}^m	29
Figura 4 – Representação de uma vizinhança colarinho.	29
Figura 5 – Grudando duas variedades ao longo de seus respectivos bordos (linhas tracejadas). Figura adaptada de en.wikipedia.org/wiki/Connected_sum .	30
Figura 6 – Representação de uma variação de curva.	42
Figura 7 – Representação do espaço de de Sitter de 2 dimensões. Obtida de www.danieldavis.com/how-to-draw-a-hyperboloid .	46
Figura 8 – Conforme nossa convenção de sinal, ilustrações de superfícies respectivamente com curvatura média maior que zero e menor que 0. Se a superfície é transformada na direção da curvatura média, vemos que seu volume aumenta e diminui, respectivamente. (TREUDE, 2011)	49
Figura 9 – As geodésicas que emanam ortogonalmente da hipérbole em \mathbb{R}^2 convergem em primeira ordem para o ponto p .	50
Figura 10 – Plano de Kruskal, (COLLAS; KLEIN, 2012). As regiões acima e abaixo dos ramos da hipérbole em vermelho não fazem parte do espaço-tempo.	55
Figura 11 – Representação de uma superfície futuro-convergente.	55
Figura 12 – Representação de uma superfície convexa-luminosa	57
Figura 13 – Cone de luz futuro emanando de p . Adaptada de en.wikipedia.org/wiki/Cone .	57
Figura 14 – A diferença entre $I^+(A, \mathcal{U})$ e $I^+(A) \cap \mathcal{U}$	62
Figura 15 – Espaço-tempo de Minkowski enrolado na direção temporal	63
Figura 16 – Ramo de hipérbole dentro do espaço-tempo de Minkowski.	66
Figura 17 – Evolução do buraco de minhoca em Schwarzschild-Kruskal para valores de $T < -1$, $T = -1$, $T = 0$, $T = 1$, $T > 1$, (COLLAS; KLEIN, 2012).	72
Figura 18 – Buraco de minhoca em um instante específico. (MORRIS <i>et al.</i> , 1988)	72
Figura 19 – Esquema da demonstração.	75
Figura 20 – $\text{Geon-}\mathbb{RP}^3$. (Mann, R. B. et al. 2017)	78
Figura 21 – A estrutura conforme do espaço-tempo de Minkowski corresponde à região indicada dentro do cilindro de Einstein. (HAWKING; ELLIS, 2011)	82
Figura 22 – A estrutura conforme de de Sitter no cilindro de Einstein é a região listrada na horizontal. (HAWKING; ELLIS, 2011)	83

Figura 23 – A estrutura conforme de anti-de Sitter no cilindro de Einstein é a região quadriculada. (HAWKING; ELLIS, 2011)	84
Figura 24 – Esquema da demonstração do lema 4.2.1.	87
Figura 25 – Esquema da demonstração da proposição 4.2.2.	88
Figura 26 – Esquema da demonstração da proposição 4.2.4.	90
Figura 27 – Em \mathbb{R}_1^3 , removemos um cilindro aberto. Temos $q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$, mas não há nenhuma geodésica luminosa ligando p até q dentro do espaço-tempo.(SOLIS, 2006)	91
Figura 28 – Situação impossível	93
Figura 29 – Representação gráfica do lema 4.7.1.	105
Figura 30 – Situação que o Princípio da Censura Topológica proíbe. Na figura, um cilindro (bordo e interior) infinito é removido do espaço, tornando-o não simplesmente conexo. Note entretanto que o espaço-tempo representado não é globalmente hiperbólico.	113
Figura 31 – A curva γ explora $\mathcal{D}(\mathcal{I})$	115

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{H}^m	Metade superior do \mathbb{R}^m
V^*	Espaço dual
δ_{ij}	Delta de Dirac
ε_{ij}	Épsilon de Minkowski
$C^\infty(M)$	Funções reais suaves definidas sobre M
$\mathfrak{X}^*(M)$	1-formas diferenciais suaves sobre M
$\mathfrak{X}(M)$	Campos vetoriais suaves sobre M
$\mathcal{I}_S^r(M)$	Campos tensoriais suaves r vezes contravariante e s vezes covariante sobre M
\mathbb{R}_1^m	Espaço-tempo de Minkowski
η_m	Métrica do espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^m
δ_m	Métrica do espaço Euclidiano \mathbb{R}^m
ω_m	Métrica redonda da esfera S^m
\mathbb{H}_0^m	Espaço hiperbólico
g_{dS}	Métrica do espaço de de Sitter S_1^m
S_1^m	Espaço de de Sitter
\mathbb{H}_1^m	Espaço de anti-de Sitter
χ_m	Métrica do cilindro de Einstein
g_{AdS}	Métrica do espaço de anti-de Sitter \mathbb{H}_1^m
g_{SK}	Métrica do espaço de Schwarzschild-Kruskal
I^+	Futuro cronológico
J^+	Futuro causal
D^+	Desenvolvimento de Cauchy futuro
$\tau(p, q)$	Distância Lorentziana entre p e q
\mathbb{B}^m	Bola aberta de raio 1 centrada na origem de \mathbb{R}^m
π_1	Grupo fundamental ou primeiro grupo de homotopia

SUMÁRIO

0	PROLEGÔMENOS	14
I	PRINCÍPIOS	18
1	PRELIMINARES TÉCNICAS	19
1.1	ÁLGEBRA LINEAR	19
1.1.1	Tensores e produto escalar	19
1.1.2	Classificação causal	21
1.1.3	Adjunta e decomposições de transformações lineares	23
1.2	VARIETADES DIFERENCIÁVEIS	25
1.2.1	Campos de tensores	26
1.2.2	Variedades com bordo	28
1.3	GEOMETRIA AFIM	30
1.3.1	Conexões afins	30
1.3.2	Transporte paralelo e geodésicas	32
1.3.3	A aplicação exponencial e vizinhanças convexas	35
1.4	GEOMETRIA SEMI-RIEMANNIANA	38
1.4.1	Variedades semi-Riemannianas	38
1.4.2	O "milagre" da geometria semi-Riemanniana	39
1.4.3	Variações de curvas e campos de Jacobi	41
1.4.4	A geometria de subvariedades	44
2	GEOMETRIA LORENTZIANA GLOBAL	51
2.1	INTRODUÇÃO	51
2.1.1	Orientação temporal	51
2.1.2	Superfícies convergentes e convexas	54
2.1.3	Hipersuperfícies luminosas	57
2.1.4	Equação de Raychaudhuri	60
2.2	CAUSALIDADE NA GEOMETRIA LORENTZIANA	61
2.2.1	Acronalidade e acausalidade	62
2.2.2	Distância Lorentziana	64
2.2.3	Extensão de espaços-tempo com bordo	67
II	O TEOREMA DE GANNON–LEE	70
3	RESTRICÇÕES TOPOLÓGICAS	71
3.1	CONDIÇÕES DE CONVERGÊNCIA	72
3.2	O TEOREMA	73

III	CENSURA TOPOLÓGICA NA GEOMETRIA LORENTZIANA	79
4	CENSURA TOPOLÓGICA	80
4.1	BORDOS CONFORMES	80
4.2	CAUSALIDADE EM ESPAÇOS-TEMPO COM BORDO TEMPORAL .	85
4.3	CAUSALIDADE FORTE	93
4.4	HIPERBOLICIDADE GLOBAL	95
4.5	LIMITES DE CURVAS	97
4.6	ESPAÇOS-TEMPO DE RECOBRIMENTO	100
4.7	HIPERSUPERFÍCIES LUMINOSAS	104
4.8	GEODÉSICAS ENTRE BORDOS TEMPORAIS	107
4.9	OS TEOREMAS DE CENSURA TOPOLÓGICA	111
	REFERÊNCIAS	116

0 PROLEGÔMENOS

Este trabalho tem como objetivo fundamental apresentar e discutir resultados referentes a certas restrições topológicas em variedades de Lorentz temporalmente orientadas, os chamados *espaços-tempos*. Essas restrições surgem ao impor condições geométricas com motivação física, e têm muito interesse na Relatividade Matemática. O trabalho é humilde legatário de uma longa tradição da geometria diferencial, especialmente de sua vertente *geometria Lorentziana* que se desenvolveu a partir do século XX. Nessa apresentação inicial, damos um panorama sobre o assunto sem nos preocupar em introduzir precisamente todos os termos empregados — o que será devidamente feito a partir da parte 1 do trabalho.

Falaremos inicialmente do assim chamado *Teorema de Gannon–Lee*, que remonta à década de 70, mas que foi generalizado para dimensão arbitrária (finita) somente em 2010. Este trata do aparecimento de singularidades a partir da topologia não trivial de hipersuperfícies de Cauchy. Discutiremos também *teoremas de censura topológica* que mostram que, sob condições adequadas, se existir qualquer anormalidade topológica no espaço-tempo, ela deve também se manifestar na sua estrutura no infinito, ou em outras palavras, não há como sondar ativamente tais estruturas usando curvas causais.

Mas antes de chegarmos aos dias atuais, façamos uma breve recapitulação histórica. No desenvolvimento da geometria diferencial, a geometria intrínseca (métrica) e a extrínseca (curvatura) apareciam inicialmente como distintas. O Teorema Egrégio de Gauss demonstra que no fundo as duas abordagens coincidem e que é possível expressar a curvatura em termos da geometria intrínseca. Isso motiva o desenvolvimento da "geometria Riemanniana", que estuda a geometria em variedades abstratas, que a princípio não são subconjuntos de algum \mathbb{R}^n , e portanto não possuem geometria extrínseca. Essa área da matemática ganhou muita notoriedade com a formulação geométrica da gravitação, proposta por Einstein a partir de 1915. As *equações de campo de Einstein* são dadas pelas componentes da seguinte equação tensorial:

$$Ric - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g = T, \quad (1)$$

onde Ric , S , g são respectivamente o *tensor de Ricci*, a *curvatura escalar* e o *tensor métrico*, os quais serão devidamente apresentados nos capítulos seguintes. Na teoria de Einstein, a própria estrutura geométrica de (M, g) descreve o campo gravitacional. O número $\Lambda \in \mathbb{R}$ é a chamada *constante cosmológica*, e é um parâmetro livre na teoria, que deve ser fixado por medições. As medições mais recentes estabelecem para ela um valor muito pequeno e positivo, mas sua contribuição só é importante em descrições cosmológicas, isto é, do universo como um todo: para descrições do campo gravitacional em nível planetário ou do sistema solar, ela pode ser tomada igual a zero.

Para nós, ela é apenas um parâmetro livre da equação. Finalmente, o $(0, 2)$ -tensor T é chamado *tensor momento-energia*, e codifica todas as formas de matéria e energia não-gravitacionais a serem consideradas numa dada situação física. A sua primeira solução não trivial foi obtida logo em 1916 pelo alemão Karl Schwarzschild, para a situação particular em que a *constante cosmológica* Λ e o tensor energia-momento são nulos, ou seja, uma *solução de vácuo*. Fisicamente, a solução de Schwarzschild descreve uma região que contém uma massa M distribuída de forma perfeitamente esférica. Sendo (t, r) coordenadas globais de \mathbb{R}^2 e (θ, ϕ) coordenadas geográficas de \mathbb{S}^2 , ela se escreve em unidades convenientes como

$$g_{(t,r,\theta,\phi)} = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2.$$

Sua solução é definida para duas regiões de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$: a chamada *região interior*, descrita pelos valores $0 < r < 2GM$ da *coordenada radial* r , e a *região exterior*, quando $r > 2GM$. Aqui queremos apenas chamar atenção para a região de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$ em que essa métrica está definida. Fisicamente, a massa M pode ter uma extensão espacial R maior do que $2M$, de modo só interessa $r > R$. Pode ocorrer entretanto que o objeto tenha tal densidade que sua massa M se concentre em uma região de raio R menor do que $2M$, de modo a trazer à tona a região da solução com $r \leq 2M$. Olhando a expressão coordenada da métrica que apresentamos, as únicas restrições que temos são $r = 2M$ e $r = 0$. Entretanto, fazendo uma mudança de variável adequada, é possível ver que a solução pode ser estendida para os pontos correspondentes a $r = 2M$, vide a seção 3.2 de (SUZANA, 2019). Tal região da solução é conhecida como *horizonte de eventos*, pois pode ser mostrado que descreve a fronteira de uma região com a propriedade de que, para qualquer curva causal que penetre nela, esta fica inexoravelmente presa lá. A solução dessa equação geométrica, para $r \leq 2M$ parece portanto descrever um objeto peculiar, desconhecido até então, batizado de *buraco negro*. Quanto à região $r = 0$, é impossível incluí-la na solução, por qualquer mudança de coordenada que seja. De fato, certas funções escalares construídas a partir dos coeficientes de curvatura divergem ao nos aproximarmos dessa região, indicando que a solução é *inextensível* aí. Além disso, pode-se mostrar que as *geodésicas causais*, que formam uma classe importante de geodésicas pois descrevem fisicamente trajetórias de objetos materiais em queda livre e raios de luz, são *incompletas*, indicando a "interrupção súbita" da "vida" desses entes. Diz-se que um espaço-tempo desse tipo — intextensível, mas com geodésicas causais incompletas — possui uma *singularidade*. A singularidade de Schwarzschild é indicada por "pontos com $r = 0$ ", embora, como mencionamos, tais "pontos" não podem pertencer à variedade.

Enquanto a teoria de Einstein demonstrou bastante sucesso em relação às previsões experimentais, as quais correspondem à aplicação da métrica de Schwarzschild na região exterior, a previsão da existência do buraco negro era assunto muito mais

delicado. Uma solução das equações, numa situação tão particular como uma simetria esférica e vácuo perfeitos, não é uma prova inquestionável da existência de um objeto físico correspondente. Seria preciso várias décadas de desenvolvimento da teoria matemática, em boa parte com autonomia em relação ao problema físico, para que o problema da existência de buracos negros como uma previsão da relatividade pudesse ser formulado em termos genéricos.

Tal advento, datando a partir da década de 60 do século passado, foi promovido pelos trabalhos principalmente de Roger Penrose e Stephen Hawking, com os chamados *teoremas de singularidade*. Cabe dizer que, dado que as singularidades não um objeto ou região, mas justamente descrevem uma ruptura na capacidade preditiva da teoria de Einstein, a forma como elas aparecem são através da *incompletude de geodésicas causais*. Ou seja, mostra-se que sob determinadas condições geométricas sobre um espaço-tempo, nem todas as suas geodésicas causais inextensíveis estão definidas para todo valor do parâmetro afim.

Teorema 0.0.1 ((PENROSE, 1965)). *Seja (M, g) espaço-tempo globalmente hiperbólico com hipersuperfícies de Cauchy não-compactas. Se $S \subset M$ é subvariedade de codimensão 2, futuro-convergente, e $Ric(v, v) \geq 0, \forall v \in TM$ tipo-luz, então (M, g) tem ao menos uma geodésica luminosa incompleta.*

Para ilustrar a aplicação desse teorema podemos tomar o próprio espaço-tempo de Schwarzschild interior, pois é globalmente hiperbólico com hipersuperfícies de Cauchy homeomorfas a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Há na região $r < 2GM$ certas superfícies compactas de dimensão 2, topologicamente esferas, que são futuro-convergentes. Como a métrica de Schwarzschild é uma solução de vácuo das equações de Einstein, segue que ela verifica $Ric \equiv 0$, o que satisfaz trivialmente a condição sobre o tensor de Ricci, chamada de *condição de convergência luminosa*. E com efeito, como comentado acima, o espaço-tempo de Schwarzschild de fato não é geodesicamente completo, pois geodésicas causais que entram na região do buraco negro, fatalmente vão para $r = 0$, de onde não podem ser continuadas.

O desenvolvimento detalhado dessas ideias, bem como as devidas demonstrações dos principais teoremas de singularidade, pode ser encontrado no capítulo 6 de (ESPINOZA, 2020). Aqui falamos deles para caracterizar o contexto de quando outro teorema de singularidade surgiu na geometria Lorentziana. Na década de 70, de forma independente os matemáticos C.W. Lee e Dennis Gannon descobriram que é possível obter a incompletude de geodésicas causais do espaço-tempo sem hipóteses de aprisionamento ou compacidade. A contrapositiva de seu resultado mostra que, supondo que a hipersuperfície de Cauchy não é simplesmente conexa e que "no infinito" seu comportamento topológico é trivial — conceitos que serão todos tornados precisos quando tratarmos desse assunto no capítulo 3 — aparecem singularidades

no espaço-tempo.

Apesar desta clara conexão com os teoremas de singularidade de Hawking e Penrose, o resultado de Gannon e Lee no contexto deste trabalho é de interesse fundamentalmente por seu conteúdo topológico: completude geodésica tipo-luz impõe restrições à topologia das hipersuperfícies de Cauchy. É neste sentido que vemos a ligação de Gannon–Lee com os teoremas de censura topológica propriamente ditos. Nestes, não se obtém restrições "absolutas" à topologia do espaço-tempo. No lugar, encontramos a necessidade de que qualquer "irregularidade" topológica do espaço-tempo manifeste-se também em "seu infinito". Daí, a interpretação deste fenômeno em termos de uma detecção ativa: observadores que vêm "de longe" não conseguem explorar a estrutura topológica não trivial e retornar "para longe" para contar a história. Se nosso universo físico satisfaz as hipóteses dos teoremas de censura topológica, ele ainda pode não ser topologicamente trivial por toda parte como o concebemos em nossa experiência diária, mas não será por meio de sondas espaciais que descobriremos isso.

Convenções globais do trabalho:

- Vizinhanças são sempre conjuntos abertos;
- Conforme conveniência, o produto tensorial $dx \otimes dx$ poderá ser omitido, sendo escrito simplesmente como dx^2 ;
- I, J denotam intervalos não vazios genéricos podendo ser abertos, fechados ou semi-abertos;
- Quando não houver menção, as figuras são originais do autor.

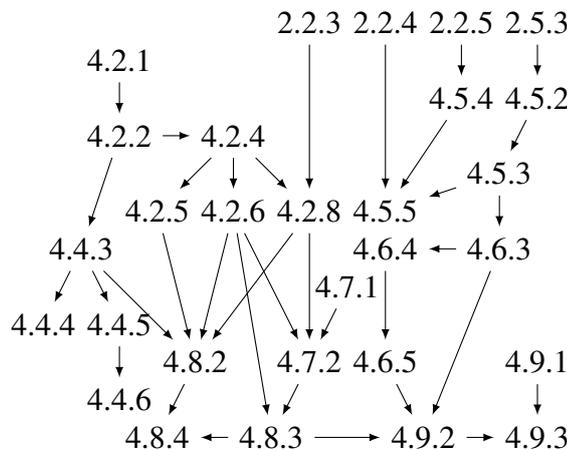


Figura 1 – Diagrama de dependência entre as principais proposições do trabalho.

Parte I

Princípios

1 PRELIMINARES TÉCNICAS

1.1 ÁLGEBRA LINEAR

Apresentamos aqui algumas definições e resultados que são de importância especial para o trabalho, mas pressupõe-se que o leitor tenha uma boa familiaridade com os elementos de Álgebra Linear requeridos aqui. O livro (HOFFMAN; KUNZE, 1976) é uma excelente referência para o assunto, assim como o primeiro capítulo de (COSTA E SILVA, s.d.).

1.1.1 Tensores e produto escalar

Um importante conceito que queremos destacar é o de tensor. Algebricamente, para o escopo desse trabalho, podemos trabalhar com tensores sendo simplesmente aplicações multilineares $T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r \text{ vezes}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R}$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{R} ¹, V^* é seu espaço dual e $r, s \in \mathbb{N}$. Nesse exemplo, T é dito ser um *tensor (de posto) (r, s)*, ou *r-vezes contravariante e s-vezes covariante*.

Observação 1.1.1. *Veja que uma transformação linear $\theta : V \rightarrow \mathbb{R}$ é um tensor (0,1). Um vetor $v \in V$ também pode ser visto como um tensor (1,0) empregando a seguinte "interpretação canônica": $v(\theta) := \theta(v)$. Da mesma forma, um operador linear $T : V \rightarrow V$ pode ser visto como um tensor (1,1) se interpretarmos $T(\theta, v) := \theta(T(v))$.*

Um exemplo distintivo de tensor é o *produto escalar*, definido como um tensor (0,2) *simétrico não-degenerado*, ou seja, $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $b(v, w) = b(w, v)$, para todos $v, w \in V$ e $b(v, w) = 0$, para todo $v \in V \implies w = 0$. Diferentemente do produto interno como usualmente definido, o produto escalar é mais geral na medida em que não há exigência de ser positivo-definido. De fato, é importante lembrar as definições sobre um tensor (0, 2), *i.e.*, uma forma bilinear b . Tal tensor é dito:

- *positivo-definido* quando $b(v, v) > 0, \forall v \neq 0$;
- *positivo-semidefinido* quando $b(v, v) \geq 0, \forall v \in V$;
- *negativo-definido* e *negativo-semidefinido* por analogia;
- *indefinido* quando b não é semidefinido, isto é, $\exists v, w \in V$ tais que $b(v, v) > 0, b(w, w) < 0$.

No que segue fixamos um produto escalar b no espaço vetorial V . Escrevemos $W < V$ para dizer que W é subespaço vetorial de V . Dado $W < V$, podemos restringir b para

¹ A menos que mencionado o contrário, é sempre isso que entendemos quando doravante falarmos em *espaço vetorial* nesse trabalho.

$W \times W$. Dizemos que W é um *subespaço não degenerado* (em relação a b), quando $b|_{W \times W}$ é ainda tensor não-degenerado. Mais ainda, definimos o *índice de b* como

$$\text{ind}(b) := \max\{\dim(W) : W < V \text{ e } b|_{W \times W} \text{ é negativo-definido}\}.$$

Apesar da diferença em relação ao produto interno, o produto escalar mantém muitas de suas principais funcionalidades, como por exemplo o *complemento ortogonal* de um subespaço (ou de modo mais geral pode ser mesmo um subconjunto) $W < V$, dado por $W^\perp = \{v \in V : b(v, x) = 0, \forall x \in W\}$, que facilmente é visto ser um subespaço de V e que satisfaz algumas propriedades:

Proposição 1.1.2. *Se $A, B < V$, então temos que*

1. $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$;
2. $A^{\perp\perp} = A$.

Demonstração. 1. Tome $v \in (A + B)^\perp$. Então $b(v, x + y) = 0$, para todo $x \in A$, e para todo $y \in B$. Tomando em particular $x = 0$, segue que $v \in B^\perp$, e quando $y = 0$ temos que $v \in A^\perp$. Portanto $v \in A^\perp \cap B^\perp$. Por outro lado, se $v \in A^\perp \cap B^\perp$, temos que $b(v, x) = 0 = b(v, y), \forall x \in A, \forall y \in B$ e portanto, somando as equações temos que $b(v, x + y) = 0$, para todo $x \in A$, e para todo $y \in B$, donde $v \in (A + B)^\perp$.

2. Item (ii) da proposição (1.2.4) de (COSTA E SILVA, s.d.).

■

Lema 1.1.3. *$W \subset V$ é subespaço não-degenerado se, e somente se W^\perp é subespaço não-degenerado. No caso afirmativo vale $V = W \oplus W^\perp$.*

Demonstração. É imediato ver que W ser degenerado é o mesmo que dizer que $W \cap W^\perp$ contém um elemento não nulo. Como essa condição é simétrica em $W = W^{\perp\perp}$ e W^\perp , segue que W é não degenerado se e somente se W^\perp é não degenerado.

Para ver a soma, defina $A = W + W^\perp$. Pelo lema anterior temos que $A^\perp = (W + W^\perp)^\perp = W^\perp \cap W$ que é igual a $\{0\}$ pois eles são não degenerados. Portanto $A = V$ e como a interseção é trivial, a soma é direta.

■

Proposição 1.1.4. *Se (V, b) é espaço vetorial munido de produto escalar indefinido e W é subespaço não-degenerado, então vale $\text{ind}(V) = \text{ind}(W) + \text{ind}(W^\perp)$.*

Demonstração. Sejam $A \subset W, B \subset W^\perp$ subespaços cujas dimensões respectivas μ, σ realizem os índices de W e W^\perp , isto é, W tem índice μ e $b|_{A \times A}$ é negativo-definido, e analogamente para W^\perp . Como W é não-degenerado, temos $V = W \oplus W^\perp$, o que implica que a soma de A e B também é direta e produz um subespaço de V no qual a restrição do produto escalar é negativo-definido, dando $\text{ind}(W) + \text{ind}(W^\perp) \leq \text{ind}(V)$.

Para ver que esse subespaço $A \oplus B$ tem dimensão maximal, isto é, sua dimensão é igual a $\text{ind}(V)$, seja $C \subset V$ um subespaço restrito ao qual b é negativo-definido. A aplicação $C \rightarrow W \times W^\perp$ que leva $v \mapsto (u, w)$ onde $u + w = v$ é injetora, e sua imagem é um subespaço negativo-definido em $W \times W^\perp$. Mas nesse espaço produto, temos que $A \times B$ é subespaço negativo-definido maximal, donde $\dim(C) = \dim(\text{Im}(C)) \leq \dim(A \times B) = \dim(A) + \dim(B) = \text{ind}(W) + \text{ind}(W^\perp)$. Portanto, $X = \{\dim C : C \subset V, C \text{ é negativo-definido}\}$ é limitado por $\text{ind}(W) + \text{ind}(W^\perp)$ e então $\text{ind}(V) = \sup X \leq \text{ind}(W) + \text{ind}(W^\perp)$. ■

Definição 1.1.1. Uma base $\{e_1, \dots, e_{\dim V}\}$ de V é dita ser *ortonormal* (em relação a b), se $b(e_j, e_j) = \pm \delta_{jj}$.

Introduzimos também o conveniente símbolo que batizamos *épsilon de Minkowski*, para $0 \leq \nu \leq \dim V$:

$$\varepsilon_{ij}(\nu) := \begin{cases} -1, & \text{se } i = j \leq \nu; \\ +1, & \text{se } \nu < i = j \leq \dim V; \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Sua motivação é evidente: generalizar o delta de Kronecker de modo que se b tem índice ν e $\{e_1, \dots, e_{\dim V}\}$ é base ortonormal de V , então podemos escrever $b(e_j, e_j) = \varepsilon_{jj}(\nu)$. Se não houver risco de confusão escreveremos simplesmente ε_{ij} , com os índices podendo aparecer tanto em cima como embaixo, conforme conveniência.

A afirmação anterior depende do importante fato referente às bases ortonormais que é: *a quantidade de "-1" entre os $b(e_j, e_j)$ é sempre igual ao índice do produto escalar, e portanto é independente da base. Além disso, bases ortonormais sempre existem.* Encontramos a justificativa para esses fatos no teorema 1.1.8 e no corolário 1.2.3 de (COSTA E SILVA, s.d.).

1.1.2 Classificação causal

Um *espaço vetorial de Lorentz* é um espaço vetorial V , de dimensão finita $n \geq 2$, munido de um produto escalar b indefinido com índice igual a 1. Fixando doravante (V, b) como um espaço vetorial de Lorentz, podemos classificar os elementos de V em três tipos, a partir de seu produto escalar. Dizemos que v é:

- *tipo-tempo* (ou *temporal*), se $b(v, v) < 0$;
- *tipo-luz* (ou *luminoso*), se $b(v, v) = 0$ e $v \neq 0$;
- *tipo-espaço* (ou *espacial*), se $b(v, v) > 0$ ou $v = 0$;
- *causal*, se é tipo-tempo ou tipo-luz.

Enquanto essa classificação se aplica também para qualquer produto escalar indefinido, no caso particular de um espaço vetorial de Lorentz podemos definir também uma base *pseudo-ortonormal* se e_1, e_2 são tipo-luz com $b(e_1, e_2) = -1$, todos os demais vetores são tipo-espaço, unitários e ortogonais entre si e a e_1, e_2 . Voltando, também podemos classificar subespaços de V . Veja que pela proposição 1.1.4, o índice dos subespaços não degenerados de um espaço de Lorentz é sempre 0 ou 1, de modo que sua classificação pode ser feita por exaustão, tendo ainda a conveniência de seu complemento ortogonal ter índice complementar. Se $W < V$, dizemos que W é:

- tipo-espaço ou *espacial*, se $b|_{W \times W}$ é positivo-definido;
- tipo-luz ou *luminoso*, se $b|_{W \times W}$ é degenerado (ou seja, se existe $v \in W \setminus \{0\}$ tal que $b(v, w) = 0, \forall w \in W$);
- tipo-tempo ou *temporal*, se $b|_{W \times W}$ é ainda produto escalar de Lorentz.

Essa classificação para vetores e subespaços é o que chamamos de *caráter causal*. Ela é algo aplicável a espaços vetoriais munidos de produtos escalares indefinidos em geral, mas há propriedades específicas para os espaços vetoriais de Lorentz, como ilustram as observações a seguir.

Observação 1.1.5. *Veja que se W é tipo-tempo, ele é necessariamente não degenerado e W^\perp também é não degenerado. Como W tem índice 1, pela proposição 1.1.4, temos que W^\perp é um subespaço de índice 0, portanto positivo-semidefinido. Mas como W e W^\perp são não degenerados, segue que o último é de fato positivo-definido. Portanto, todos os vetores ortogonais a um vetor tipo-tempo são espaciais. A mesma proposição também implica que o complemento ortogonal de um subespaço tipo-espaço é um subespaço tipo-tempo.*

Observação 1.1.6. *Se W é subespaço tipo-luz, existe um $w \in W$ não nulo tal que $b(w, v) = 0$, para todo $v \in W$, o que implica que w é tipo-luz. Se existisse $u \in W$ tipo-tempo, teríamos $W^\perp \subset u^\perp$. Como u é tipo-tempo, u^\perp é subespaço tipo-espaço, e daí W^\perp também seria tipo-espaço, o que por sua vez implicaria que W é tipo-tempo, o que contraria a hipótese. Portanto num subespaço luminoso não existem vetores tipo-tempo.*

Observação 1.1.7. *Mais ainda, dados $u, w \in V$ vetores tipo-luz, é imediato que se $u \parallel w$ então $u \perp w$. Para ver a recíproca, tomemos x vetor luminoso unitário e escrevamos $u = \alpha x + u_0, w = \beta x + v_0$, onde u_0, v_0 são vetores em x^\perp que portanto são tipo-espaço. Veja que $b(x, u) = \alpha b(x, x) + b(x, u_0) = -\alpha$ e analogamente $b(x, w) = -\beta$. Daí, $b(u_0, u_0) = b(u - \alpha x, u - \alpha x) = -2\alpha(-\alpha) - \alpha^2 = \alpha^2$ e analogamente $b(v_0, v_0) = \beta^2$ e $b(u_0, v_0) = \alpha\beta$. Agora, veja que o vetor $\beta u_0 - \alpha v_0$ é tipo-espaço e ao mesmo tempo,*

temos

$$b(\beta u_0 - \alpha v_0, \beta u_0 - \alpha v_0) = \beta^2 \alpha^2 - 2\alpha\beta \alpha\beta + \alpha^2 \beta^2 = 0.$$

Isso significa que $\beta u_0 - \alpha v_0$ deve ser o vetor nulo. Mas então $\beta u - \alpha v = \beta u_0 + \alpha \beta x - \alpha v_0 - \alpha \beta x = \beta u_0 - \alpha v_0 = 0$. Como necessariamente α e β são não nulos, $u = \frac{\alpha}{\beta} v$, como queríamos. Esse resultado implica que se $W < V$ é luminoso, a dimensão de $W \cap W^\perp$ é igual a 1.

Observação 1.1.8. Seja $\{e_1, \dots, e_{\dim V}\}$ uma base ortonormal de V com e_1 tipo-tempo. Considere o conjunto $C := \{v \in V : v \text{ é tipo-luz}\}$. Tomando $v \in C$, escrevemos $v = \sum_{i=1}^{\dim V} a_i e_i$. Temos então que

$$\begin{aligned} 0 = b(v, v) &= b\left(\sum_{i=1}^{\dim V} a_i e_i, \sum_{j=1}^{\dim V} a_j e_j\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{\dim V} a_i a_j b(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{\dim V} a_i a_j \varepsilon_{ij} \\ &\iff a_1^2 = a_2^2 + \dots + a_{\dim V}^2. \end{aligned}$$

Portanto temos que o conjunto dos vetores luminosos é geometricamente um cone (duplo) com vértice no vetor nulo, que lembrando, é um vetor tipo-espaço. Excluindo-se o vértice, os dois cones C_\pm resultantes são chamados **cones de luz** de V .

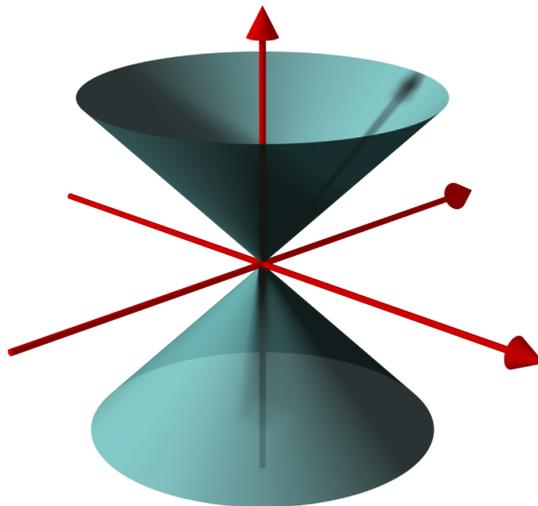


Figura 2 – Cones de luz em um espaço vetorial de Lorentz. Obtida de en.wikipedia.org/wiki/Cone.

1.1.3 Adjunta e decomposições de transformações lineares

É interessante lembrar que se V, W são espaços vetoriais sem um produto escalar e $T : V \rightarrow W$ é linear, já podemos produzir a *transposta* de T , que é a

aplicação $T^t : W^* \rightarrow V^*$, dada por $f \mapsto f \circ T$. Com o advento do produto escalar, o espaço dual passa a ser canonicamente² isomorfo ao próprio espaço, por meio dos chamados *isomorfismos musicais*:

$$\begin{aligned} b : V &\rightarrow V^*, v \mapsto b(_, v) \\ \sharp : V^* &\rightarrow V, \sharp = (b)^{-1}. \end{aligned}$$

Com isso, entre outras utilidades, obtemos a *adjunta* T^* de uma transformação linear T , que além das propriedades algébricas da transposta, possui a conveniência de operar sobre os próprios espaços vetoriais, não mais sobre os duais. De fato, vejamos que se temos $T : V \rightarrow W$, $\sharp : V^* \rightarrow V$, $b : W \rightarrow W^*$ e sendo b, g os respectivos produtos escalares de V e W , definimos $T^* : W \rightarrow V$ por $T^* := \sharp \circ T^t \circ b$. Com isso obtemos a seguinte interessante e consagrada relação, para $v \in V, w \in W$:

$$\begin{aligned} b(T^* w, v) &= b((\sharp \circ T^t \circ b)w, v) \\ &= b((\sharp \circ T^t)g(_, w), v) \\ &= b(\sharp(g(T(_), w)), v) \\ &= (\sharp^{-1} \circ \sharp(g(T(_), w)))(v) \\ &= g(T(_), w)(v) \\ &= g(Tv, w). \end{aligned}$$

Definição 1.1.2. Se $T : V \rightarrow V$ é operador linear, definimos seu *traço* como o número dado por $tr(T) = \sum_{i,j=1}^{dim V} \varepsilon_{ij} b(e_i, Te_j)$, onde $\{e_i\}_{i=1}^{dim V}$ é qualquer base ortonormal de (V, b) .

Observação 1.1.9. Veja que a definição está bem posta pois se $\{\eta_i\}_{i=1}^{dim V}$ é outra base ortonormal, podemos escrever $\eta_i = \sum_k a_{ik} e_k$ e temos que $\varepsilon_{ij} = b(\eta_i, \eta_j) = b(\sum_k a_{ik} e_k, \sum_l a_{jl} e_l) = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \varepsilon_{kl}$. Então,

$$\sum_{i,j=1}^{dim V} \varepsilon_{ij} b(\eta_i, T\eta_j) = \sum_{i,j,k,l=1}^{dim V} \varepsilon_{ij} a_{ik} a_{jl} b(e_k, Te_l) = \sum_{l,k=1}^{dim V} \varepsilon_{kl} b(e_k, Te_l).$$

Definição 1.1.3. Seja (V, b) espaço vetorial com produto escalar e $T : V \rightarrow V$ operador linear. Dizemos que T é:

- *auto-adjunto*, se $T = T^*$;
- *anti-auto-adjunto*, se $T = -T^*$;
- *puro traço*, se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $T = c \cdot Id$;

² É claro que diferentes produtos escalares produzem diferentes isomorfismos desse tipo, mas como aqui estamos considerando (V, b) fixado, faz sentido falar isso.

- livre de traço, se $\text{tr}(T) = 0$.

O interessante dessas definições, é que se $\mathcal{L}(V)$ é o espaço vetorial dos operadores lineares sobre V , então os respectivos subconjuntos de $\mathcal{L}(V)$ contendo os operadores com cada uma das propriedades acima são facilmente vistos serem subespaços. Denotamos

- $\text{Sym}(V) = \{T \in \mathcal{L}(V) : T \text{ é auto-adjunto}\};$
- $\text{ASym}(V) = \{T \in \mathcal{L}(V) : T \text{ é anti-auto-adjunto}\};$
- $\text{PT}(V) = \{T \in \mathcal{L}(V) : T \text{ é puro traço}\};$
- $\text{LT}(V) = \{T \in \mathcal{L}(V) : T \text{ é livre de traço}\}.$

Com isso podemos decompor T como

$$T = \left[\frac{\text{tr}(T)}{n} \text{Id} \right] + \left[\frac{1}{2}(T + T^*) - \frac{\text{tr}(T)}{n} \text{Id} \right] + \left[\frac{1}{2}(T - T^*) \right],$$

de modo que cada termo do lado direito pertence respectivamente a $\text{PT}(V)$, $\text{Sym}(V) \cap \text{LT}(V)$ e $\text{ASym}(V)$, e seus significados geométricos serão apresentados mais adiante. Com isso obtemos uma decomposição em soma direta bastante específica, a *decomposição de Ricci*:

$$\mathcal{L}(V) = \text{PT}(V) \oplus (\text{Sym}(V) \cap \text{LT}(V)) \oplus \text{ASym}(V). \quad (2)$$

Proposição 1.1.10. Se $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é forma bilinear simétrica em V , existe uma única transformação linear auto-adjunta $T_B : V \rightarrow V$ tal que $B(v, w) = b(v, T_B w)$, $\forall v, w \in V$.

Demonstração. Para cada $v \in V$, a aplicação $w \mapsto B(w, v)$ pertence a V^* . Pela existência do isomorfismo musical entre V^* e V fornecido pelo produto escalar b , sabemos que existe um único $z_v \in V$ tal que $b(z_v, w) = B(v, w)$, para todo $w \in V$. Defina portanto $T_B(v) := z_v$, que claramente é linear pois é definida em termos de um isomorfismo. Veja ainda que como B é simétrica, temos $b(v, (T_B)^* w) = b(T_B v, w) = B(v, w) = B(w, v) = b(T_B w, v)$, para todos $v, w \in V$, dando que T_B é auto-adjunta. Se supomos que existe outra transformação linear R com essa mesma propriedade, $b(T_B v, w) = B(v, w) = b(Rv, w) \implies b((T_B - R)v, w) = 0$, para todos $v, w \in V \implies T_B = R$. Logo T_B é única. ■

1.2 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

O ambiente matemático que formaliza a noção física de "continuum espaço-temporal" são as variedades diferenciáveis³, possivelmente com bordo. Estas formam

³ Por *variedades diferenciáveis* aqui nos referimos sempre a variedades reais de dimensão finita de classe C^∞ , com topologia Hausdorff de base enumerável. *Suave* é sinônimo de (de classe) C^∞ .

uma classe muito especial de espaços topológicos que se assemelham localmente ao \mathbb{R}^n , o que nos permite importar noções de diferenciabilidade. Aqui apresentaremos apenas uma seleção restrita de definições e proposições referentes à teoria de variedades diferenciáveis, conforme as nossas finalidades. Assumimos que o leitor está familiarizado com o básico da teoria de variedades diferenciáveis, como suavidade de aplicações, campos vetoriais, seus fluxos locais, 1-formas, variedades com bordo, etc. Para uma introdução detalhada a esses assuntos pode-se consultar o livro (LEE, J. M., 2012). Daqui em diante denotaremos simplesmente por M^m uma variedade diferenciável M de dimensão m , omitindo o "expoente" quando a dimensão estiver fixada. Relembramos algumas definições essenciais:

$$\begin{aligned} C^\infty(M) &= \{f : M \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é suave}\}; \\ TM &= \bigsqcup_{p \in M} T_p M, \text{ é o fibrado tangente}; \\ TM^* &= \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M, \text{ é o fibrado cotangente}. \end{aligned}$$

Para $F : N \rightarrow M$ aplicação suave entre duas variedades,

$\mathfrak{X}(F) = \{V : N \rightarrow TM : V \text{ é suave e } \pi_{TM} \circ V = F\}$ são os *campos vetoriais sobre (ou ao longo de)*

Quando $N = M$ e $F = Id$, $\mathfrak{X}(F)$ reduz-se aos campos vetoriais (suaves) ao longo de M , $\mathfrak{X}(M)$. Outra situação comum é quando N é um intervalo e F é uma curva⁴, normalmente denotada por uma letra grega minúscula: $\mathfrak{X}(\gamma)$ são os campos vetoriais ao longo da curva γ . Temos, por fim, o conjunto das 1-formas diferenciais sobre M :

$$\Omega^1(M) = \mathfrak{X}^*(M) = \{\omega : M \rightarrow TM^* : \omega \text{ é suave e } \pi_{TM^*} \circ \omega = Id\}.$$

1.2.1 Campos de tensores

Como cada ponto p da variedade diferenciável M^m possui uma estrutura linear natural, a saber, seu espaço tangente $T_p M$, podemos construir objetos sobre a variedade tais que em cada ponto eles se manifestem como objetos referentes a espaços-vetoriais. Isto é, iremos importar nossa familiaridade com a álgebra linear para nos ajudar a estudar a geometria das variedades. Do conceito anterior de tensor, produzimos os *campos tensoriais*, que são funções $C^\infty(M)$ -multilineares da forma

$$\mathcal{T} : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \dots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{r \text{ vezes}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{s \text{ vezes}} \rightarrow C^\infty(M)$$

A classificação do posto é análoga à da álgebra linear, e muitas vezes nos referiremos a esses objetos como tensores, por simplicidade. Definimos $\mathcal{I}_s^r(M)$ como o conjunto

⁴ Isto é, uma aplicação entre um intervalo I e M , que a menos de menção explícita, será sempre suposta ser suave.

de todos os campos tensoriais (r, s) sobre M . Esse conjunto possui de forma natural a estrutura de módulo sobre o anel $C^\infty(M)$.

Cabe também dizer que se $F : N \rightarrow M$ é aplicação suave entre duas variedades diferenciáveis e \mathcal{T} é campo tensorial de posto $(0, s)$ sobre M , podemos definir um campo tensorial $F^*\mathcal{T}$ ao longo de N , chamado de *pullback de \mathcal{T} via F* , dado por $F^*\mathcal{T}(X_1, \dots, X_s) := \mathcal{T}(dF \circ X_1, \dots, dF \circ X_s)$.

Uma importante propriedade dos tensores diz respeito ao que chamamos de *localização*. Isso quer dizer que sendo cada tensor uma função de 1-formas e de campos vetoriais, para conhecer o valor do tensor em cada $p \in M$ basta conhecer o valor de seus argumentos somente em p . Explicitamente, por exemplo se $\mathcal{T} \in \mathcal{I}_1^1(M)$, $p \in M$, e $\omega, \bar{\omega} \in \mathfrak{X}^*(M)$ são tais que $\omega(p) = \bar{\omega}(p) : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$, e $X, \bar{X} \in \mathfrak{X}(M)$ são tais que $X(p) = \bar{X}(p) \in T_pM$, então

$$(\mathcal{T}(\omega, X))(p) = (\mathcal{T}(\bar{\omega}, \bar{X}))(p).$$

Essa noção é tornada precisa nas proposições 2.2 e 2.3 de (O'NEILL, 1983).

Com isso, considere A o conjunto das funções que associam de modo suave a cada $p \in M$ um tensor de posto (r, s) sobre T_pM , que via operações definidas pontualmente é facilmente visto ser um espaço vetorial. Mais ainda, se $f \in C^\infty(M)$ e $\chi \in A$, definimos $(f\chi)(p) := f(p)\chi(p)$, mostrando que A tem estrutura de $C^\infty(M)$ -módulo. Para efeitos de simplificar a ilustração do argumento, considere $r = s = 1$. Agora, defina $@ : \mathcal{I}_S^r(M) \rightarrow A$ como a aplicação que pega $\mathcal{T} \in \mathcal{I}_S^r(M)$ e associa à função $(@T) \in A$ que age como:

$$(@T)(p)(\omega, v) := (T(\Omega, V))(p),$$

onde $p \in M$, $\omega \in T_pM^*$, $v \in T_pM$, Ω é 1-forma tal que $\Omega(p) = \omega$ e V é campo vetorial tal que $V(p) = v$. Pode ser visto que tal aplicação é de fato um isomorfismo entre os dois $C^\infty(M)$ -módulos.

Dessa forma, vemos que o nome "campo" se justifica na medida em que os campos tensoriais podem ser vistos como funções que em cada ponto da variedade se manifestam como tensores no respectivo espaço tangente, isto é, para $p \in M$, $\mathcal{T}(p) : (T_pM^*)^r \times (T_pM)^s \rightarrow \mathbb{R}$ é aplicação multilinear. Usaremos uma ou outra interpretação dos campos tensoriais conforme conveniência.

Esses objetos, a princípio de natureza algébrica, virão a ser de máxima relevância geométrica para nossa teoria. Uma vez que as variedades diferenciáveis são ambientes que permitem diversas formas de descrever seus pontos (*i.e.* diferentes sistemas de coordenadas), os campos tensoriais representam justamente objetos geométricos, ou seja, cuja existência e propriedades não estão subordinados a uma descrição coordenada específica, mas são próprios da variedade.

Antes de prosseguirmos, cabe estabelecer algumas convenções de notação. A primeira e mais útil é o *somatório de Einstein*, no qual omitimos o símbolo de somatório

Σ e entendemos que um somatório com índice de somatório de 1 a $m = \dim M$ está implícito sempre que encontrarmos expressões com índices repetidos um em cima e outro embaixo (índice mudo). A razão para essa sutileza posicional é justificada a seguir.

Escrevemos $(x^i)_{i=1}^m$ para nos referir de forma abreviada a uma carta local, ou sistema de coordenadas locais $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^m))$ de M . Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é qualquer campo vetorial suave em M , ele pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base (em cada espaço tangente) advinda dos (x^i) como $X_p = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}(p), \forall p \in M$, onde $X^i = X(x^i)$ e já estamos utilizando aqui a convenção de Einstein de somatório, o que faremos sem comentários doravante. Agora suponha que exista um outro sistema de coordenadas locais $(\mathcal{V}, \psi = (y^1, \dots, y^m))$. Em $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, podemos escrever $\bar{X}^i = X(y^i)$, nos dando $X = \bar{X}^i \frac{\partial}{\partial y^i}$. Calculando esse campo em x^j temos $X^j = \bar{X}^i \frac{\partial x^j}{\partial y^i}$. Por outro lado, em cada espaço tangente de $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ podemos ver como ocorre a mudança de base $\frac{\partial}{\partial x^i} = A_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}$. Calculando os dois membros da equação em y^k e lembrando que $\frac{\partial y^k}{\partial y^j} = \delta_j^k$ temos que $A_i^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$.

Tomemos agora uma 1-forma $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. Em $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ podemos expandí-la nas bases provenientes de cada um dos sistemas de coordenadas locais, obtendo $\omega = \omega_i dx^i = \bar{\omega}_j dy^j$, onde $\omega_i = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)$ e $\bar{\omega}_j = \omega \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)$. Portanto, se aplicamos a essas expressões a mudança de coordenadas obtida entre as bases dos espaços tangentes obtemos $\omega_i = \omega \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \bar{\omega}_j$. Por fim, escrevendo a mudança de bases $dx^i = B_j^i dy^j$, se calcularmos essa expressão em $\frac{\partial}{\partial y^k}$ obteremos $B_j^i \delta_k^j = dx^i \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \implies B_k^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^k}$.

A tabela a seguir organiza o resultado, exibindo os coeficientes que expressam a mudança de coordenadas, na direção $(y^j) \rightarrow (x^i)$ para as bases e componentes dos tensores. Assim, fornece a justificativa de porque adotamos para uns a notação com índices em cima (chamada de contravariante) e para outro embaixo (chamada de covariante):

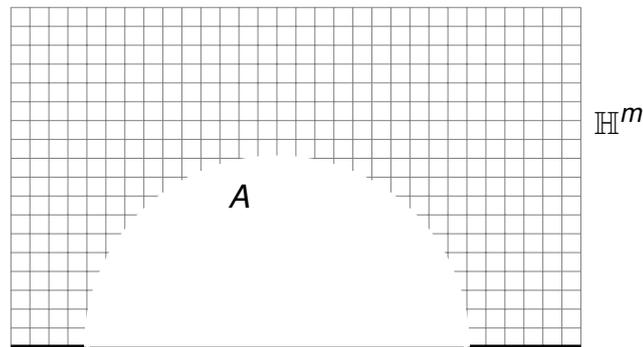
	Vetores	1-formas
Base	$\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$	$\frac{\partial x^i}{\partial y^j}$
Componentes	$\frac{\partial x^i}{\partial y^j}$	$\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$

Seguindo, apresentamos alguns teoremas importantes para as construções ulteriores.

1.2.2 Variedades com bordo

Definição 1.2.1. Seja M uma variedade suave. Um subconjunto $A \subset M$ é dito *domínio regular* se A é um aberto de M cuja fronteira topológica $fr(A)$ é uma subvariedade de codimensão 1 de M , e ainda, tal que $A \cup fr(A)$ seja uma subvariedade com bordo de M propriamente mergulhada de codimensão zero.

Figura 3 – Representação de um domínio regular em \mathbb{H}^m

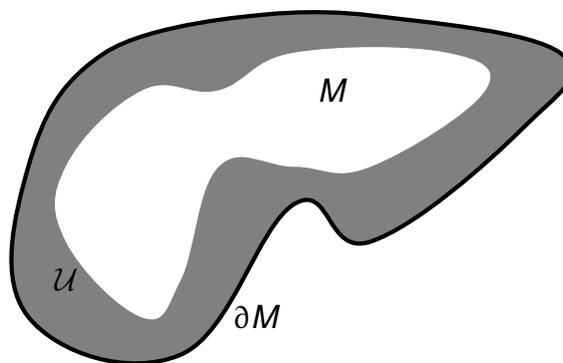


Note que em particular, temos que $A \cup fr(A)$ é fechado em M e seu interior é um aberto de M . Ainda, seu bordo topológico dentro de M coincide com seu bordo como variedade com bordo.

Teorema 1.2.1 (Teorema da Vizinhança Colarinho⁵). *Se M é variedade suave com bordo, então existe um aberto $\mathcal{U} \subset M$ contendo ∂M tal que \mathcal{U} é difeomorfo a $\partial M \times [0, 1)$.*

Demonstração. Teorema 9.25 de (LEE, J. M., 2012). ■

Figura 4 – Representação de uma vizinhança colarinho.

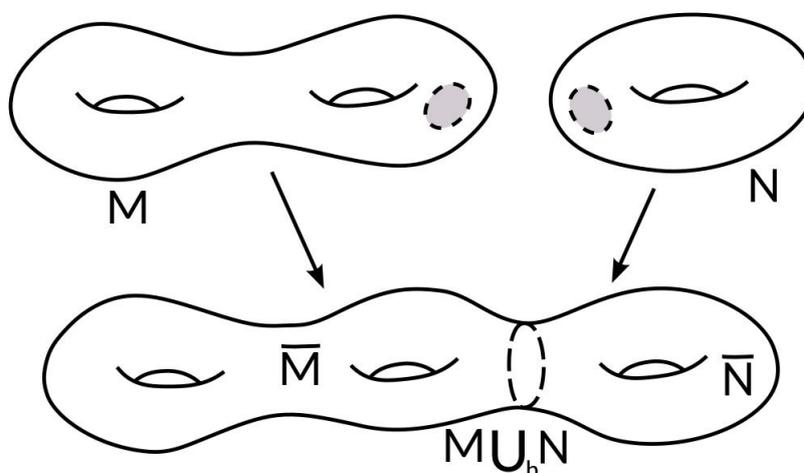


Proposição 1.2.2. *Sejam M, N variedades suaves de mesma dimensão m , com bordos não-vazios, e suponha que exista $h : \partial M \rightarrow \partial N$ difeomorfismo. Denote por $M \cup_h N$ o espaço quociente obtido pela identificação de $x \in \partial M$ com $h(x) \in \partial N$. Então, $M \cup_h N$ é variedade topológica sem bordo, de dimensão m e possui uma estrutura diferenciável tal que existem domínios regulares $\bar{M}, \bar{N} \subset M \cup_h N$ cujos fechos são difeomorfos a M, N respectivamente, satisfazendo $\bar{M} \cup \bar{N} = M \cup_h N$ e $\bar{M} \cap \bar{N} = \partial \bar{M} = \partial \bar{N}$.*

Demonstração. Teorema 9.29 de (LEE, J. M., 2012). A figura 5 ilustra o que acontece. ■

⁵ Tradução livre de *Collar Neighborhood Theorem*.

Figura 5 – Grudando duas variedades ao longo de seus respectivos bordos (linhas tracejadas). Figura adaptada de en.wikipedia.org/wiki/Connected_sum.



1.3 GEOMETRIA AFIM

1.3.1 Conexões afins

As variedade diferenciáveis são ricas generalizações topológicas do \mathbb{R}^m , entretanto o ganho em generalidade que essa teoria propicia vem com a contrapartida de um manuseio matemático mais delicado. Por exemplo, se $p \neq q \in M^m$, sabemos que T_pM e T_qM são espaços vetoriais de dimensão m e portanto são isomorfos. Mas o isomorfismo linear que existe entre eles depende da escolha de bases para cada um, de modo que não parece haver uma maneira natural de comparar vetores em diferentes espaços tangentes.

Concretamente, essa falta de identificação natural de espaços tangentes gera a seguinte dificuldade. Se $\gamma : I \rightarrow M$ é uma curva, sua velocidade/primeira derivada é definida como $\gamma' : I \rightarrow TM$ dada por $\gamma'(t) := d\gamma_t \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \right)$. Portanto a derivada de uma curva em M é uma curva em outra variedade, TM . Se quiséssemos calcular dessa forma a segunda derivada, obteríamos algo em TTM , um resultado insatisfatório tendo em vista a situação no \mathbb{R}^m onde todas as derivadas vivem no mesmo espaço e podem ser combinadas para, por exemplo, fornecer uma equação horária de uma partícula. Mais geralmente, o problema com o qual queremos lidar é em estabelecer uma noção de derivada direcional de um campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ na direção de um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Uma possível solução para isso é apresentada pela *derivada de Lie*, que mede o quanto um campo varia ao longo das linhas de fluxo do outro. Ela é definida como

$$(\mathcal{L}_X Y)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(d\phi_{-t})_{\phi_t(p)} Y_{\phi_t(p)} - Y_p}{t},$$

para cada $p \in M$, onde ϕ é fluxo local de X definido ao redor de p . Esse conceito, que inclusive pode ser aplicado a tensores de outros tipos, é muito útil para várias construções. A proposição (1.58) de (O'NEILL, 1983) nos mostra que a derivada de

Lie pode ser expressa pelo *colchete de Lie*, que é definido como:

$$[X, Y]_p f := X_p(Yf) - Y_p(Xf), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), p \in M, f \in C^\infty(M). \quad (3)$$

Por tudo isso vale sua menção neste trabalho, mas para os fins que estudamos ele possui o revés de não ser localizável, no sentido que para conhecer $(\mathfrak{L}_X Y)(p)$ não basta conhecermos X_p , mas X em toda uma vizinhança de p , uma vez que é definida através do fluxo local de X e disso acaba resultando que não conseguimos empregar a derivada de Lie para identificar espaços tangentes da variedade.

A saída portanto é adicionar uma nova estrutura em M , construída para satisfazer explicitamente essas propriedades requeridas.

Definição 1.3.1. Seja M variedade diferenciável. Uma *conexão afim* em M é uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. ∇ é \mathbb{R} -bilinear;
2. $\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$;
3. $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$,

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$. Um par (M, ∇) é chamado de *variedade afim*.

Exemplo 1.3.2. Se $M = \mathbb{R}^m$, definimos a *conexão plana* ∇^{flat} dada por $\nabla_{\partial_i}^{flat}(X^j \partial_j) := (\partial_i X^j) \partial_j$, onde $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$.

Por construção, a conexão afim nos permite derivar campos de vetores de forma localizada na primeira variável, que é a direção da derivada. Mais ainda, a proposição 2.1.3 de (COSTA E SILVA, s.d.) mostra que se $Y, V \in \mathfrak{X}(M)$ coincidem em um aberto $\mathcal{U} \subset M$, então para qualquer $p \in \mathcal{U}$, tem-se $\nabla_X Y(p) = \nabla_X V(p)$. Isso implica a possibilidade de aplicar essa derivação a campos vetoriais que não necessariamente estão definidos em toda M , como em geral é o caso dos campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x^i}$: se $\mathcal{U} \subset M$ é um aberto, dados $V, X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, então tomamos quaisquer extensões suaves $\tilde{V}, \tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ de V e X , respectivamente, e pomos $\nabla_X V := \nabla_{\tilde{X}} \tilde{V}|_{\mathcal{U}}$, e esta definição independerá da extensão adotada. Usaremos este fato sem maiores comentários no que segue.

A expressão $\nabla_X Y$ também é conhecida como *derivada covariante* de Y em relação a X pela conexão ∇ . Esse nome remete ao fato de que diferentemente do \mathbb{R}^m , a derivada parcial em geral não é algo invariante. De fato, vejamos o que ocorre com uma expressão como $\frac{\partial X^i}{\partial x^j}$, transformada para outro sistema de coordenadas, $(y^i)_{i=1}^m$:

$$\frac{\partial \bar{X}^i}{\partial y^j} = \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^l} X^l \right) = \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \left(\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^k \partial x^l} X^l + \frac{\partial y^i}{\partial x^l} \frac{\partial X^l}{\partial x^k} \right). \quad (4)$$

Veja que a primeira parcela no membro direito acima é diferente do que se espera de uma transformação de componentes tensoriais, isto é, de objetos que são invariantes em relação a mudança de coordenadas.

Por outro lado, isso não ocorre com a derivada covariante. Introduzimos os *símbolos de Christoffel* de ∇ referentes ao sistema de coordenadas $(x^i)_{i=1}^m$ por meio da relação $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^l} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Daí, temos $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \left(X^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial X^k}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^k} + X^k \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial X^k}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^k} + X^k \Gamma_{kl}^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i X^k \right) \frac{\partial}{\partial x^i}$. Agora, vemos que a mudança de coordenadas fica como:

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \frac{\partial}{\partial y^l} &= \overline{\Gamma}_{ji}^k \frac{\partial}{\partial y^k} \\ \nabla_{\frac{\partial x^a}{\partial y^j}} \frac{\partial}{\partial x^a} \left(\frac{\partial x^b}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^b} \right) &= \overline{\Gamma}_{ji}^k \frac{\partial x^c}{\partial y^k} \frac{\partial}{\partial x^c} \\ \frac{\partial x^a}{\partial y^j} \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \frac{\partial x^c}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^c} + \frac{\partial x^b}{\partial y^j} \Gamma_{ba}^c \frac{\partial}{\partial x^c} \right) &= \overline{\Gamma}_{ji}^k \frac{\partial x^c}{\partial y^k} \frac{\partial}{\partial x^c}. \end{aligned}$$

Abstraindo o vetor $\frac{\partial}{\partial x^c}$ e multiplicando (e efetuando a soma implícita) os dois membros por $\frac{\partial y^l}{\partial x^c}$ ficamos com

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}_{ji}^k &= \frac{\partial x^a}{\partial y^j} \frac{\partial x^b}{\partial y^j} \frac{\partial y^l}{\partial x^c} \Gamma_{ba}^c + \frac{\partial x^a}{\partial y^j} \frac{\partial y^l}{\partial x^c} \frac{\partial}{\partial x^a} \frac{\partial x^c}{\partial y^j} \\ &= \frac{\partial x^a}{\partial y^j} \frac{\partial x^b}{\partial y^j} \frac{\partial y^l}{\partial x^c} \Gamma_{ba}^c + \frac{\partial x^a}{\partial y^j} \left(\frac{\partial}{\partial x^b} \delta_j^l - \frac{\partial x^c}{\partial y^j} \frac{\partial^2 y^l}{\partial x^c \partial x^a} \right) \\ \Rightarrow \overline{\Gamma}_{ji}^k &= \frac{\partial x^a}{\partial y^j} \frac{\partial x^b}{\partial y^j} \frac{\partial y^l}{\partial x^c} \Gamma_{ba}^c - \frac{\partial x^a}{\partial y^j} \frac{\partial x^c}{\partial y^j} \frac{\partial^2 y^l}{\partial x^c \partial x^a}. \end{aligned}$$

Portanto vê-se que, como esperado, essa grandeza não se transforma como um tensor, mas o termo adicional que surge aparece de modo a cancelar com o termo excedente em (4), quando os dois se combinam em uma expressão como $\nabla_{\partial_i} X^j \partial_j$, produzindo finalmente uma mudança tensorial, conforme esperado, uma vez que a conexão afim é tensorial em seu primeiro argumento.

1.3.2 Transporte paralelo e geodésicas

Mas e quanto ao primeiro problema da comparação de vetores em diferentes espaços tangentes? Para avançar, fixemos pelo resto desta subseção uma variedade afim (M, ∇) . Precisamos primeiro estabelecer o seguinte:

Definição 1.3.3. Se $F : N \rightarrow M$ é uma aplicação suave entre variedades diferenciáveis, definimos uma *conexão sobre F* como uma aplicação $D : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(F) \rightarrow \mathfrak{X}(F)$, $(X, V) \mapsto D_X V$ satisfazendo:

1. D é \mathbb{R} -bilinear;

2. D é $C^\infty(N)$ -linear no primeiro argumento;
3. $D_X fV = (Xf)V + fD_X V, \forall f \in C^\infty(N), X \in \mathfrak{X}(N), V \in \mathfrak{X}(F),$

Teorema 1.3.1. *Seja $F : N \rightarrow M$ aplicação suave entre a variedade N e a variedade afim (M, ∇) . Então existe uma única conexão D^∇ sobre F tal que $D_X^\nabla (V \circ F)(p) = \nabla_{dF_p X_p} V(F(p))$, para todo $p \in N, X \in \mathfrak{X}(N), V \in \mathfrak{X}(M)$. D^∇ é chamada de **conexão induzida** por ∇ sobre F .*

Demonstração. Teorema 2.4.4 em (COSTA E SILVA, s.d.). ■

Com isso, podemos estudar a conexão $D = D^\nabla$ induzida por ∇ sobre uma curva γ . Dela, definimos a noção de derivada covariante sobre uma curva:

Definição 1.3.4. *Seja $\gamma : I \rightarrow M$ curva suave sobre M e $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$. A derivada covariante de X sobre γ é o campo $\frac{DX}{dt} \in \mathfrak{X}(\gamma)$ dado por $\frac{DX}{dt}(s) = \left(D_{\frac{d}{dt}} X \right) (s)$.*

Das propriedades de conexões sobre aplicações, segue imediatamente que a derivada covariante tem propriedades como:

- $\frac{D}{dt} (aX + Y) = a \frac{DX}{dt} + \frac{DY}{dt}, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\gamma), \forall a \in \mathbb{R};$
- $\frac{D}{dt} (fX) = \frac{df}{dt} X + f \frac{DX}{dt}, \forall X \in \mathfrak{X}(\gamma), \forall f : I \rightarrow \mathbb{R}$ função suave.

Definição 1.3.5. Um campo $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ é dito ser *paralelo* se $\frac{DX}{dt} \equiv 0$.

Dada $\gamma : I \rightarrow M$ suave, os campos paralelos sobre ela são dados por um sistema linear de EDOs. Seja $(\mathcal{U}, (x^1, \dots, x^m))$ carta local que cobre parte de γ . Então:

$$\begin{aligned} \frac{DV}{dt} &= D_{\frac{d}{dt}} V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \circ \gamma = \frac{dV^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \circ \gamma + V^i D_{\frac{d}{dt}} \frac{\partial}{\partial x^i} \circ \gamma \\ &= \frac{dV^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \circ \gamma + V^i \nabla_{\gamma^{j'} \frac{\partial}{\partial x^i} \circ \gamma} \frac{\partial}{\partial x^i} \circ \gamma = \left(\frac{dV^k}{dt} + (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \gamma^{j'} V^i \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \circ \gamma. \end{aligned}$$

Portanto a *equação do transporte paralelo* é

$$\frac{dV^k}{dt} + (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \gamma^{j'} V^i = 0. \quad (5)$$

Se o valor inicial for dado, obtemos um problema de Cauchy, que admitirá solução única⁶. Em termos geométricos o problema de valor inicial nos possibilita encontrar um único campo paralelo V sobre γ tal que $V(a) = v$, para cada $v \in T_{\gamma(a)}M$ dado, com $a \in I$. Conhecendo esse tal V , podemos "transportar" v para outro espaço tangente ao longo de γ , digamos $T_{\gamma(b)}M$, pondo $P_{a,b}^\gamma v := V(b)$. A família $\{P_{a,b}^\gamma : T_{\gamma(a)}M \rightarrow T_{\gamma(b)}M : a, b \in I\}$ é conhecida como *transporte paralelo sobre γ* . Com isso, obtemos uma maneira de comparar vetores sobre diferentes pontos da variedade. Trata-se de

⁶ Ver por exemplo, seção 3.4 de (KREIDER *et al.*, 1972).

um procedimento não canônico na medida em que depende explicitamente da escolha de uma curva. Mas também não é um procedimento arbitrário, pois como veremos muita informação geométrica pode ser obtida a partir disso. De modo geral, essa é a melhor solução possível para o problema posto, mas veremos que localmente temos um jeito de deixar isso ainda mais satisfatório. Para isso, convém introduzir uma classe especial de curvas em uma variedade afim (M, ∇) .

Definição 1.3.6. Seja $\gamma : I \rightarrow M$ curva suave. Se $\gamma' \in \mathfrak{X}(\gamma)$ for um campo paralelo, então γ é dita ser uma *geodésica* da variedade afim (M, ∇) .

Definindo γ'' como o campo $D_{\frac{d}{dt}}\gamma'$, temos então que uma geodésica γ é uma curva tal que $\gamma''(s) = 0$, para todo $s \in I$. A equação da geodésica é obtida tomando o caso particular em que $V^j = \gamma''^j$, na equação 5:

$$\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt} = 0.$$

Note que apesar de bastante parecidas, as duas têm uma diferença fundamental, na medida que as primeiras são equações diferenciais lineares e de primeira ordem e as segundas são não lineares e de segunda ordem. Tais curvas são importantes pois são generalizações das linhas retas no \mathbb{R}^n , na medida em que são curvas sem qualquer aceleração. De fato, munindo o \mathbb{R}^n com a conexão plana do exemplo 1.3.2, cujos símbolos de Christoffel imediatamente vemos ser todos nulos, obtemos as equações $\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} = 0$, cujas soluções são $\gamma^k(t) = a^k t + b^k$, para $k = 1, \dots, n$.

Definição 1.3.7. Seja $\gamma : I \rightarrow M$ curva suave. Se existe difeomorfismo $h : J \rightarrow I$ tal que $\gamma \circ h$ é uma geodésica, então γ é chamada de *pré-geodésica*.

Lema 1.3.2. Uma curva regular $\gamma : I \rightarrow M$ é pré-geodésica se, e somente se existe $f \in C^\infty(I)$ tal que a igualdade $\gamma'' = f\gamma'$ é satisfeita identicamente.

Demonstração. Considere um sistema de coordenadas $(x^i)_{i=1}^n$ e ponha para cada $i = 1, \dots, n$, $\gamma^i = x^i \circ \gamma$. Se vale que $\gamma \circ h$ é geodésica, isso se expressa em coordenadas, para $s \in J$, como:

$$\begin{aligned} 0 &= (\gamma^i \circ h)''(s) + \Gamma_{jk}^i \circ (\gamma \circ h)(s) (\gamma^j \circ h)'(s) (\gamma^k \circ h)'(s) \\ &= \gamma^{i'''} \circ h(s) \cdot h'(s)^2 + \gamma^{i''} \circ h(s) \cdot h''(s) + \Gamma_{jk}^i \circ (\gamma \circ h)(s) \cdot h'(s)^2 \gamma^j \circ h(s) \gamma^k \circ h(s) \\ &= h'(s)^2 \left(\gamma^{i'''} + \Gamma_{jk}^i \circ \gamma \cdot \gamma^{j''} \gamma^{k'} \right) \circ h(s) + (\gamma^{i''} \circ h)(s) \cdot h''(s) \\ &\implies \left(\gamma^{i'''} + \Gamma_{jk}^i \circ \gamma \cdot \gamma^{j''} \gamma^{k'} \right) \circ h(s) = -\frac{h''(s)}{h'(s)^2} \gamma^{i''} \circ h(s) \\ &\implies \gamma^{i'''} + \Gamma_{jk}^i \circ \gamma \cdot \gamma^{j''} \gamma^{k'} = -\frac{h''(h^{-1}(t))}{h'(h^{-1}(t))^2} \gamma^{i''} = \left(\frac{1}{h'} \right)' (h^{-1}(t)) \gamma^{i''}. \end{aligned}$$

Assim, basta definir $f(t) := \left(\frac{1}{h'}\right)'(h^{-1}(t))$, que o resultado segue.

Para a recíproca, dada $f \in C^\infty(I)$ basta escolher como função de reparametrização uma função h tal que $\left(\frac{1}{h'}\right)'(h^{-1}(t)) = f(t)$. Para isso, seja $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ qualquer primitiva de f ; ou seja, $g' = f$. Seja $\zeta : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de e^g . Então $\zeta' = e^g > 0$, e portanto ζ é difeomorfismo sobre sua imagem J . Defina $h : s \in J \mapsto h(s) := \zeta^{-1}(s) \in I$. Então h é difeomorfismo e satisfaz $h'' + (f \circ h)(h')^2 = 0$, como queríamos. Com isso, a conta é análoga à já feita, porém de trás para frente. ■

Corolário 1.3.2.1. *Dada uma geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ não constante e difeomorfismo $h : J \rightarrow I$, $\gamma \circ h$ é geodésica se, e somente se h é reparametrização afim, isto é, é da forma $h(t) = at + b$, com $a \neq 0$.*

Demonstração. Olhando a expressão ao final da demonstração anterior,

$$\left(\gamma^{i'''} + \Gamma_{jk}^i \circ \gamma \cdot \gamma^{j'} \gamma^{k'}\right)(t) = -\frac{h''(h^{-1}(t))}{h'(h^{-1}(t))^2} \gamma^{i''}(t),$$

é imediato que o seu lado direito se anula identicamente se, e somente se $h'' \equiv 0$, o que é o mesmo que dizer que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $h(t) = at + b$. Como h por hipótese é difeomorfismo, obrigatoriamente temos que $a \neq 0$. ■

1.3.3 A aplicação exponencial e vizinhanças convexas

Como as geodésicas são curvas que transportam paralelamente sua própria velocidade, as equações geodésicas acabam sendo um caso particular das equações de transporte paralelo; entretanto, sendo não-lineares o teorema de existência e unicidade que teremos será apenas local.

Proposição 1.3.3. *Seja (M, ∇) variedade afim e seja $v \in TM$ qualquer. Então existe uma única geodésica $\gamma_v : I_v \rightarrow M$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. I_v é intervalo aberto contendo 0 e $\gamma'(0) = v$;
2. se $\alpha : I \rightarrow M$ é geodésica com $0 \in I$ e $\alpha'(0) = v$, então $I \subset I_v$ e $\gamma_v|_I = \alpha$.

γ_v é chamada de geodésica maximal com velocidade inicial v .

Demonstração. Corolário 3.4.4 em (COSTA E SILVA, s.d.). ■

Com isso, podemos definir $\mathcal{D} = \{v \in TM : [0, 1] \subset I_v\}$, que conforme a proposição 5.1.2 de (COSTA E SILVA, s.d.) é um aberto de TM . A partir disso, temos uma forma geometricamente significativa de mapear pontos entre a variedade M e seu fibrado tangente TM . Definimos a *aplicação exponencial*, $\exp : \mathcal{D} \subset TM \rightarrow M$ por $\exp(v) := \gamma_v(1)$. Veja que fixando um ponto $p \in M$, podemos definir a aplicação exponencial somente sobre p , $\exp_p = \exp|_{\mathcal{D} \cap T_p M}$, que dado que \mathcal{D} é aberto, é uma aplicação entre variedades da mesma dimensão.

Proposição 1.3.4. $\exp : \mathcal{D} \rightarrow M$ é uma aplicação suave, e para cada $p \in M$ existem abertos $\tilde{\mathcal{N}} \ni 0_p$ e $\mathcal{N} \ni p$, respectivamente contidos em \mathcal{D} e M tais que $\exp_p|_{\tilde{\mathcal{N}}} : \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}$ é difeomorfismo.

Demonstração. Proposição 5.1.2 e corolário 5.2.2 de (COSTA E SILVA, s.d.). ■

Tome $t \in (0, 1]$, e defina $\sigma(s) = \gamma_v(s.t)$, com $s \in [0, 1/t]$. Note que este último intervalo contém o intervalo $[0, 1]$, logo $\sigma'(0) \in \mathcal{D}$. Mas $\sigma'(0) = t.v$, e portanto $[0, 1] \subset [0, 1/t] \subset I_{t.v}$ e $\sigma(s) = \gamma_{t.v}(s)$. Em particular, $\gamma_v(t) = \sigma(1) = \gamma_{t.v}(1) = \exp_p(t.v)$. Isto prova, em particular, que $t.v \in \mathcal{D}$. Portanto \exp_p mapeia segmentos de retas dentro de \mathcal{D} passando pela origem em T_pM em geodésicas, chamadas de *radiais* passando por $p \in M$. Assim, podemos generalizar a ideia de conjunto estrelado, típico dos espaços vetoriais, como aqueles conjuntos cujos pontos podem ser conectados por retas a um ponto fixo, sem sair do conjunto.

Definição 1.3.8. Seja $p \in M$ e \mathcal{U} vizinhança de p . Dizemos que \mathcal{U} é uma *vizinhança normal* de p se existe $\mathcal{U}' \subset T_pM$ conjunto estrelado em relação a 0_p tal que $\exp_p|_{\mathcal{U}'} : \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}$ é difeomorfismo.

Definição 1.3.9. Seja \mathcal{U} aberto de M . Dizemos que \mathcal{U} é aberto *convexo* se \mathcal{U} é vizinhança normal de p , para todo $p \in \mathcal{U}$.

Proposição 1.3.5. Seja \mathcal{U} aberto convexo de M . Se $p, q \in \mathcal{U}$ então existe uma única geodésica contida em \mathcal{U} , denotada por $\gamma_{p,q} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ tal que $\gamma_{p,q}(0) = p, \gamma_{p,q}(1) = q$.

Demonstração. Suponha ao contrário, que existam duas geodésicas $\gamma, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ tais que $\gamma(0) = p = \beta(0), \gamma(1) = q = \beta(1)$. Teríamos então que $\exp_p(\gamma'(0)) = q = \exp_p(\beta'(0))$, mas \mathcal{U} é em particular vizinhança normal de p , portanto existe aberto estrelado $\tilde{\mathcal{U}} \subset T_pM$ tal que $\exp_p|_{\tilde{\mathcal{U}}} : \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U}$ é difeomorfismo.

Veja que $\tilde{\mathcal{U}} = \tilde{\mathcal{U}} \cap \exp_p^{-1}(\mathcal{U})$ é aberto em $\exp_p^{-1}(\mathcal{U})$. Se $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \tilde{\mathcal{U}}$ é sequência que converge para $v \in \exp_p^{-1}(\mathcal{U})$, então os pontos $r_k = \exp_p(v_k)$ convergem para $r = \exp_p(v) \in \mathcal{U}$. Como \mathcal{U} e $\tilde{\mathcal{U}}$ são difeomorfos, a r corresponde um $v' \in \tilde{\mathcal{U}}$. Mas pela continuidade de $\exp_p|_{\tilde{\mathcal{U}}}$, temos que $v_k \rightarrow v'$. Pela unicidade do limite segue que $v = v' \in \tilde{\mathcal{U}}$ e portanto $\tilde{\mathcal{U}}$ é fechado em $\exp_p^{-1}(\mathcal{U})$. Como $\tilde{\mathcal{U}}$ é estrelado, e em particular conexo, segue que é uma componente conexa de $\exp_p^{-1}(\mathcal{U})$. Com isso, se existe $v \in \exp_p^{-1}(\mathcal{U}) \setminus \tilde{\mathcal{U}}$, então $\exp_p^{-1}(\mathcal{U})$ não é conexo, tampouco conexo por caminhos. Em particular, o segmento que vai de 0_p até v em T_pM não fica inteiramente contido em $\exp_p^{-1}(\mathcal{U})$. Isso significa que a geodésica com velocidade inicial v não fica inteiramente contida em \mathcal{U} . Portanto, pela contrapositiva, como γ e β por hipótese estão contidas em \mathcal{U} , temos que $\gamma'(0), \beta'(0) \in \tilde{\mathcal{U}}$. Mas em particular, $\exp_p|_{\tilde{\mathcal{U}}}$ é injetora, o que é contradição com $\exp_p(\gamma'(0)) = q = \exp_p(\beta'(0))$. ■

Isso significa que embora em uma variedade afim genérica não haja restrição para a quantidade de geodésicas conectando dois pontos arbitrários, quando estes estão restritos a uma vizinhança convexa, teremos apenas uma geodésica contida em tal vizinhança. Esse fato, junto com a introdução das coordenadas normais conforme a proposição a seguir, nos indica que dentro de vizinhanças convexas, a geometria é bastante parecida à que estamos acostumados no \mathbb{R}^m .

Proposição 1.3.6. *Seja (M, ∇) variedade afim. Dado qualquer $p \in M$ e $(v_i)_{i=1}^m$ base de $T_p M$, existe um sistema de coordenadas locais de M ao redor de p , $(\mathcal{N}, (x^1, \dots, x^m))$ tal que:*

1. \mathcal{N} é vizinhança normal de p ;
2. $\frac{\partial}{\partial x^i}(p) = v_i, i = 1, \dots, m$;
3. $\Gamma_{jk}^i(p) = 0, i, j, k = 1, \dots, m$.

Um tal sistema de coordenadas é chamado de **sistema de coordenadas normal** em p .

Demonstração. Teorema 5.2.7 de (COSTA E SILVA, s.d.). ■

Com isso, remetendo ao problema motivador posto, vemos que se p, q pertencem a uma vizinhança convexa, não temos mais problema de não saber escolher que curva para efetuar o transporte paralelo de $T_p M$ para $T_q M$, pois nessa situação há uma única escolha natural, a geodésica $\gamma_{p,q}$.

Proposição 1.3.7. *A topologia de M admite uma base de abertos convexos.*

Demonstração. Proposição 5.7 de (O'NEILL, 1983). ■

Também convém aqui definir brevemente alguns objetos tensoriais derivados da conexão.

Definição 1.3.10. *Seja (M, ∇) variedade afim. O tensor de torção de ∇ é definido como $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$.*

Definição 1.3.11. *Seja (M, ∇) variedade afim. O tensor de curvatura de ∇ é definido como $R : (\mathfrak{X}(M))^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$.*

Que esses objetos sejam de fato tensoriais, não é algo imediato e inclusive um pouco surpreendente, dado que são construídos a partir de um objeto não tensorial. Mas a verificação segue facilmente da aplicação das propriedades algébricas da conexão. O tensor de torção é claramente antissimétrico, assim como o tensor de curvatura em relação aos dois primeiros argumentos.

1.4 GEOMETRIA SEMI-RIEMANNIANA

1.4.1 Variedades semi-Riemannianas

Dada uma variedade diferenciável (com ou sem bordo) M , podemos dotá-la de um campo de tensores que servirá para definir um produto escalar em cada T_pM , criando as condições requeridas tanto para definir uma conexão afim natural, como para prover a estrutura geométrica que necessitaremos neste trabalho.

Definição 1.4.1. Seja $0 \leq \nu \leq m$ um número natural, onde $m = \dim M$. Um *tensor métrico de índice ν* sobre M é um campo de tensores $g \in \mathcal{I}_2^0(M)$ simétrico, tal que para todo $p \in M$, g_p é um produto escalar de índice igual a ν sobre T_pM . Um par (M, g) é chamado de *variedade semi-Riemanniana (de índice ν)*.

Observação 1.4.1. Na literatura é comum por vezes g ser chamado de "métrica semi-Riemanniana" ou "métrica pseudo-Riemanniana". Aqui também iremos por vezes nos referir a ele simplesmente por "métrica", ainda que seja um conceito distinto ao de "métrica" dos espaços métricos. O caso particular em que $\nu = 0$ e portanto o tensor é positivo-definido, é o que nós nos referiremos quando falarmos em métrica Riemanniana. Assim, chamamos de variedade Riemanniana uma variedade diferenciável munida de um tensor métrico positivo-definido. O outro caso de interesse especial é quando $\nu = 1$, quando g é chamada de métrica Lorentziana e (M, g) é uma variedade Lorentziana.

Exemplo 1.4.2. A variedade Lorentziana mais simples e fundamental é o *espaço-tempo de Minkowski* $\mathbb{R}_1^m := (\mathbb{R}^m, \eta_m = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + \dots + dx^{m-1} \otimes dx^{m-1})$ ⁷. Ele é conhecido na física como o "espaço-tempo da relatividade especial". Sua métrica surge diretamente da *invariância de Lorentz*: $-(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + \dots + (\Delta x^{m-1})^2$ é invariante em relação à mudança de referenciais inerciais. Essa por sua vez, pode ser visto como desenvolvimento do postulado Einsteiniano de que a velocidade da luz no vácuo seja invariante em relação a mudanças de referenciais inerciais. O tensor métrico de Minkowski pode ser visto como caso particular da *métrica semi-Euclideana* $\delta_m^\nu(\partial_i, \partial_j) = \varepsilon_{ij}(\nu)$ quando $\nu = 1$. Quando $\nu = 0$, damos a este o nome de *métrica Euclideana* para o \mathbb{R}^m .

Exemplo 1.4.3. Defina $\mathbb{S}^m := \{(x_1, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : x_1^2 + \dots + x_{m+1}^2 = 1\}$. Se δ_{m+1} é a métrica Euclideana do \mathbb{R}^{m+1} e $\iota : \mathbb{S}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ é a inclusão, então $\omega_m := \iota^* \delta_{m+1}$ é métrica Riemanniana sobre \mathbb{S}^m e (\mathbb{S}^m, ω_m) é chamada de *esfera redonda m -dimensional*.

Exemplo 1.4.4. Para definir o *espaço hiperbólico m -dimensional* \mathbb{H}_0^m , partimos do conjunto $\{(x_1, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : -x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m+1}^2 = -1, x_1 > 0\}$. Em seu ambiente

⁷ Rigorosamente, apresentado dessa forma essa variedade ainda não é um espaço-tempo, conceito que será introduzido mais adiante, mas fazendo essa ressalva nos referimos assim de toda forma.

\mathbb{R}^{m+1} colocamos a métrica de Minkowski η_{m+1} . Munindo o conjunto com a métrica obtida pelo pullback via inclusão, obtemos uma estrutura variedade Riemanniana de curvatura constante negativa. Esse hiperboloide fornece um modelo para o espaço hiperbólico, tanto quanto os modelos do semi-espaço superior e da bola de Poincaré, vide (SOCOLOVSKY, 2018).

A partir disso, podemos estender a classificação via caráter causal apresentada para espaços vetoriais para campos vetoriais e curvas.

Definição 1.4.5. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. X é dito ser *tipo-tempo* [resp. *tipo-luz*; *tipo-espaço*; *causal*] se para qualquer $p \in M$, X_p for um vetor tipo-tempo [resp. tipo-luz; tipo-espaço; causal] em T_pM .

Definição 1.4.6. Uma curva suave $\gamma : I \rightarrow M$ é dita ser *tipo-tempo* [resp. *tipo-luz*; *tipo-espaço*; *causal*] se para qualquer $t \in I$, $\gamma'(t)$ for um vetor tipo-tempo [resp. tipo-luz; tipo-espaço; causal].

Uma importante propriedade das variedades semi-Riemannianas, que será empregada ao longo do trabalho é a possibilidade de mudar o tipo de um dado tensor, preservando sua informação geométrica. Vejamos, no espírito da proposição (3.10) de (O'NEILL, 1983), se $X \in \mathfrak{X}(M)$, denotamos por $X^\flat \in \mathfrak{X}^*(M)$ sua 1-forma metricamente equivalente, e da mesma forma $\omega^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$ denota o campo vetorial metricamente equivalente a uma 1-forma $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. Com isso podemos fazer a mudança de tipo dos tensores. Ilustrativamente, se $\mathcal{T} \in \mathcal{I}_1^2(M)$, temos um $\mathcal{T}' \in \mathcal{I}_2^1(M)$ dado por $\mathcal{T}'(\omega, X, Y) := \mathcal{T}(\omega, X^\flat, Y)$. Também no sentido inverso, se $\mathcal{T} \in \mathcal{I}_2^0(M)$, temos um $\mathcal{T}' \in \mathcal{I}_1^1(M)$ dado por $\mathcal{T}'(\omega, X) := \mathcal{T}(\omega^\sharp, X)$.

1.4.2 O "milagre" da geometria semi-Riemanniana

Até aqui desenvolvemos nas variedades diferenciáveis generalizações satisfatórias das propriedades geométricas do \mathbb{R}^m . Mas o fizemos andando numa via bifurcada, com a estrutura afim de um lado e a estrutura métrica de outro. Entretanto, milagrosamente ocorre que no fundo esses dois desenvolvimentos estão profundamente conectados. De fato, o teorema a seguir estabelece que uma variedade M ao ser dotada de uma métrica semi-Riemanniana g adquire automaticamente uma conexão afim com propriedades especiais.

Teorema 1.4.2 (Teorema Fundamental da Geometria Semi-Riemanniana). *Seja (M, g) variedade semi-Riemanniana. Então existe uma única conexão ∇ sobre M que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ (Livre de torção);

2. $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ (Compatibilidade com a métrica).

Essa única conexão é conhecida como **conexão de Levi-Civita** de (M, g) e é univocamente caracterizada pela **fórmula de Koszul**:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]). \quad (6)$$

Demonstração. Teorema (3.11) de (O'NEILL, 1983). ■

Fixando um sistema de coordenadas $(x^i)_{i=1}^m$, e escolhendo X, Y, Z respectivamente como os campos coordenados $\partial_j, \partial_j, \partial_k$ obtemos uma expressão local para a fórmula de Koszul, que na literatura de física é inclusive mais conhecida que a forma invariante apresentada acima. Veja que como g é tensor não degenerado a matriz cujas entradas são dadas por g_{ij} é inversível e portanto podemos denotar por g^{ij} a entrada (i, j) de sua matriz inversa.

$$\begin{aligned} 2g(\Gamma_{ij}^l \partial_l, \partial_k) &= \partial_i g(\partial_j, \partial_k) + \partial_j g(\partial_k, \partial_i) - \partial_k g(\partial_i, \partial_j) \\ \implies 2\Gamma_{ij}^l g_{lk} &= \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \\ \implies 2\Gamma_{ij}^l g_{lk} g^{km} &= g^{km} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}) \\ \implies \Gamma_{ij}^m &= \frac{1}{2} g^{km} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}). \end{aligned}$$

A partir daqui iremos sempre trabalhar implicitamente com uma variedade semi-Riemanniana (M, g) dispondo de uma estrutura afim dada pela conexão de Levi-Civita ∇ produzida por g , com suas correspondentes noções de transporte paralelo e geodésicas. A primeira consequência dessa fusão é a possibilidade de definirmos o *tensor de Riemann*, um objeto totalmente covariante obtido a partir da mudança de tipo do tensor de curvatura. $\tilde{R}(X, Y, Z, W) := g(R(Z, W)Y, X)$.

Podemos ainda realizar uma contração sobre R para definir o *tensor de Ricci*, que funciona como uma espécie de média da curvatura. $Ric : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ dado por

$$Ric(X, Y) = dx^i \left(R \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, X \right) Y \right).^8$$

onde $(x^i)_{i=1}^m$ é qualquer sistema de coordenadas de M . Pode ser facilmente verificada que a definição não depende do sistema escolhido.

Definimos ainda, em cada $T_p M$, o *operador força de maré* relativo a um $v \in T_p M$ por $R_v : T_p M \rightarrow T_p M, R_v(x) = R_p(x, v)v$. Esse nome e notação também serão usados para se referir ao objeto correspondente operando sobre campos vetoriais.

⁸ Note que apesar de estarmos apresentando esse tensor somente agora, ele depende somente da estrutura afim de (M, g) , sendo exemplo do que chamamos de contração não-métrica.

Além destes, fazendo mais uma contração no tensor de Ricci, definimos também a *curvatura escalar*: $S \in C^\infty(M)$, $S = g^{ij} Ric(\partial_i, \partial_j)$.

Algo bastante conveniente que a adoção de uma métrica nos proporciona é a possibilidade de expressar localmente os campos vetoriais em bases ortonormais. Um *referencial local ortonormal* é uma família $(E_i)_{i=1}^m$ de campos definidos num aberto $\mathcal{U} \subset M$ tais que $g(E_i, E_j) = \varepsilon_{ij}(ind(g))$. Enquanto a existência de um referencial ortonormal global depende de condições geométricas globais da variedade, localmente temos sempre a garantia de sua existência, como nos mostra a proposição 3.0.1 de (COSTA E SILVA, s.d.).

A estrutura métrica permite ainda a introdução de alguns operadores diferenciais, conhecidos já para os espaços Euclidianos, mas impossíveis de serem importados para as variedades somente a partir de suas estruturas diferenciáveis. Sejam $f \in C^\infty(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\mathcal{T} \in \mathcal{I}_1^1(M)$. Definimos:

- o *gradiente* de f é o campo vetorial $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ (ou $grad(f)$) metricamente equivalente a df . Explicitamente, $g(\nabla f, X) := df(X) = Xf$;
- o *diferencial covariante* de X é o tensor $\nabla X \in \mathcal{I}_1^1(M)$ dado por $\nabla X(Y) = \nabla_Y X$;
- o *traço* de \mathcal{T} é a função $tr(\mathcal{T}) := \mathcal{T}(\partial_i, dx^i) = g^{ij} g(\mathcal{T}(\partial_i), \partial_j)$.⁹
- o *divergente* de X é a função escalar $div X \in C^\infty(M)$ dada por $tr(\nabla X)$. Explicitamente, $tr(\nabla X) = g^{ij} g(\nabla X(\partial_i), \partial_j) = g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} X, \partial_j)$;
- a *Hessiana* de f é o tensor $Hf \in \mathcal{I}_2^0(M)$ dado por $Hf(X, Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y)$.

Tendo estabelecido o básico dos objetos e conceitos fundamentais da geometria semi-Riemanniana, sairemos da exposição linear para apresentar alguns resultados particulares dessa teoria que serão necessários para o desenvolvimento ulterior do trabalho.

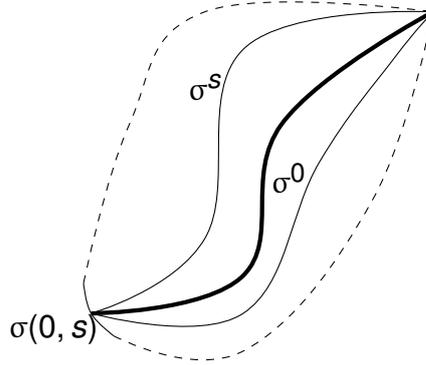
1.4.3 Variações de curvas e campos de Jacobi

Outro desenvolvimento da teoria que é interessante apresentar devido a sua utilidade se refere às *aplicações de dois parâmetros* (vistos como variações de curvas) e os campos de Jacobi. Suponha que seja dado $\sigma : I \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$, uma aplicação suave de dois parâmetros, isto é, $I \times (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R}^2$. Para cada $s \in (-\delta, \delta)$, denotamos $\sigma^s : I \rightarrow M$; $\sigma^s(t) = \sigma(t, s)$, de modo que interpretamos a aplicação σ como uma família a 1 parâmetro de curvas em M , ou uma *variação* de curvas.

Nessa situação, a curva σ^0 é chamada de *curva fiducial* e as demais σ^s de *curvas longitudinais*. Se t e s são respectivamente as coordenadas globais de I e

⁹ Remetemos aqui à observação 1.1.1 que, *mutatis mutandis*, se aplica também aos campos tensoriais.

Figura 6 – Representação de uma variação de curva.



$(-\delta, \delta)$, denotamos $\sigma_t := d\sigma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ e a derivada covariante de um campo X sobre σ como $X_t = \frac{DX}{dt} = \nabla_{\sigma_t} X$, e analogamente em relação a s . Introduzimos ainda o *campo de variação* de σ , que é o $V \in \mathfrak{X}(\sigma^0)$ dado por $V(t) = \sigma_s(t, 0)$. O principal caso de interesse para nós é quando a curva fiducial e as demais curvas longitudinais são geodésicas de M , situação na qual chamamos σ de *variação geodésica*. A proposição 4.4 de (O'NEILL, 1983) nos mostra que $\sigma_{ts} - \sigma_{st} = T(\sigma_s, \sigma_t)$ e $X_{st} - X_{ts} = R(\sigma_t, \sigma_s)X$. Com isso, e lembrando que a conexão de Levi-Civita é livre de torção, vejamos que campos de variação sobre uma geodésica γ satisfazem uma equação diferencial específica:

$$\begin{aligned} V''(t) &= \frac{D}{dt} \frac{DV}{dt}(t) = \sigma_{stt}(t, 0) = \sigma_{tst}(t, 0) \\ &= \underbrace{\sigma_{tts}(t, 0)}_{=0, \text{ pois é variação geodésica}} + R_{\sigma(t,0)}(\sigma_t(t, 0), \sigma_s(t, 0))\sigma_t(t, 0) \\ &= -(R(\sigma_s, \sigma_t)\sigma_t)(t, 0) \implies 0 = V''(t) + (R(\sigma_s, \sigma_t)\sigma_t)(t, 0) \\ &= V''(t) + R_{\gamma(t)}(V(t), \gamma'(t))\gamma'(t) \implies V'' + R_{\gamma'}(V) = 0, \end{aligned}$$

onde $R_{\gamma'}$ é o operador de força de maré com respeito a γ' . Essa equação é conhecida como *equação de Jacobi*, e um campo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ que a satisfaz identicamente é chamado de *campo de Jacobi*.

Assim, por um lado temos que todo campo de variação de uma variação geodésica é um campo de Jacobi. Por outro, um importante fato sobre a equação de Jacobi é que esta, expressa em coordenadas locais, se traduz em um sistema de EDOs lineares de segunda ordem; por isso, dados $v, w \in T_{\gamma(a)}M$ não ambos nulos, existe um único campo de Jacobi não nulo V sobre γ tal que $V(a) = v$ e $V'(a) = w$. Com isso, o lema (6.2.9) de (COSTA E SILVA, s.d.) mostra que dado um campo de Jacobi V sobre γ conseguimos construir uma variação geodésica sobre γ cujo campo de variação é o próprio V . Além disso, a linearidade da equação de Jacobi mostra que o conjunto desses campos sobre uma dada curva γ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{X}(\gamma)$.

Na seção (6.1) de (COSTA E SILVA, s.d.) vemos um desenvolvimento heurístico do conceito de campos de Jacobi, e vemos que eles podem expressar uma noção

de separação entre geodésicas vizinhas em primeira ordem. Assim, com seu advento podemos estudar, *grosso modo*, a convergência/divergência de família de geodésicas como efeito da curvatura; isto provê um significado geométrico à curvatura, que havia sido introduzida de forma meramente algébrica. Essa interpretação heurística será importante no que segue.

Definição 1.4.7. Seja (M, g) variedade semi-Riemanniana, $\gamma : I \rightarrow M$ geodésica, e $a \neq b \in I$. Dizemos que $\gamma(b)$ é *ponto conjugado* em relação a $\gamma(a)$ ao longo de γ se existe $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ campo de Jacobi não nulo, tal que $J(a) = 0$ e $J(b) = 0$.

Quanto à referida convergência, seu sentido preciso é dado pela seguinte proposição, que também fornece uma expressão desse fenômeno em termos da aplicação exponencial.

Proposição 1.4.3. *Seja (M, g) variedade semi-Riemanniana e $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ geodésica não constante. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. $p = \alpha(0)$ e $q = \alpha(1)$ são pontos conjugados ao longo de α ;
2. existe variação geodésica $\sigma : [0, 1] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ com campo de variação não nulo V tal que $\sigma(0, s) = p, \forall s \in (-\delta, \delta)$ e $V(1) = 0_q$;
3. $\alpha'(0)$ é ponto crítico de \exp_p .

Demonstração. (2 \implies 1)– Se existe tal variação, sabemos que V é campo de Jacobi não nulo sobre α que se anula nas extremidades, e portanto p e q são conjugados sobre α .

(1 \implies 3)– Seja J campo de Jacobi não nulo sobre α que se anula nos extremos. Chamemos $\alpha'(0) = x$ e $J'(0) = w$, que é não-nulo pois caso contrário, sendo solução da equação de Jacobi, J seria nulo. Sob a luz do lema (6.2.9) de (O'NEILL, 1983), podemos considerar a variação $\sigma : [0, 1] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ dada por $\sigma(t, s) = \exp_p(t(x + sw))$, onde $\delta > 0$ pode ser escolhido de modo que σ seja variação geodésica sobre α , com campo de variação dado por J . Assim, veja que $\sigma_s(t, s) = d\sigma_{(t,s)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = (d\exp_p)_{t(x+sw)}(tw)_{t(x+sw)}$.¹⁰ De modo que $\sigma_s(1, 0) = (d\exp_p)_x(w_x)$. Por outro lado, $\sigma_s(1, 0) = J(1) = 0$. Logo $0_x \neq w_x \in \ker(d\exp_p)_x$, o que significa que é uma aplicação singular e portanto $x = \alpha'(0)$ é ponto crítico de \exp_p .

(3 \implies 2)– Se $w_x \in T_x T_p M$ é vetor não nulo que anula $(d\exp_p)_x$, basta fazer a mesma construção do item anterior para obter uma variação geodésica e seu correspondente campo de Jacobi sobre α que satisfazem o desejado. ■

¹⁰ Cada $T_p M$ pode ser visto como uma variedade, e se $u, v \in T_p M$, escrevemos u_v para nos referir ao elemento de $T_v T_p M$ canonicamente correspondente a u .

1.4.4 A geometria de subvariedades

Se (M^m, g) é variedade semi-Riemanniana, e $N^n \subset M$ é subvariedade mergulhada, podemos estudar como a estrutura geométrica de (M, g) passa para $(N, g|_N)$.¹¹ Mais geralmente, costuma-se estudar como imersões $F : N \rightarrow M$ entre duas variedades quaisquer carregam essa estrutura, com o nosso caso correspondendo à situação particular em que F é a inclusão. Lembramos aqui que uma tal F permite importar objetos covariantes de M , em particular sua métrica, para N por meio do *pullback*: $(F^*g)_p(v, w) = g_{F(p)}(dF_p v_p, dF_p w_p)$, para todo $p \in N$, e para todos $v, w \in T_p N$.

Definição 1.4.8. Seja (M, g) variedade semi-Riemanniana, N variedade diferenciável e $F : N \rightarrow M$ imersão. Dizemos que F é uma *imersão semi-Riemanniana* se (N, F^*g) é uma variedade semi-Riemanniana. Se esse é o caso, chamamos F^*g de *métrica induzida*.

A proposição seguinte permite caracterizar as imersões semi-Riemannianas.

Proposição 1.4.4. *Seja $F : N \rightarrow M$ imersão suave sobre (M, g) , variedade semi-Riemanniana de índice ν . Então F é uma imersão semi-Riemanniana se, e somente se existe um inteiro $0 \leq \mu \leq \nu$ tal que para todo $p \in N$, $dF_p(T_p N)$ é um subespaço não-degenerado de $(T_{F(p)}M, g_{F(p)})$ com índice μ . No caso afirmativo, (N, F^*g) é uma variedade semi-Riemanniana de índice μ .*

Demonstração. (\implies) Se F é imersão semi-Riemanniana, então (N^n, F^*g) é variedade semi-Riemanniana, de índice digamos μ . Tomando qualquer $p \in N$, escolhamos uma base ortonormal $(e_i)_{i=1}^n$ de $T_p N$. Como dF_p é transformação linear injetora, $(dF_p(e_i))_{i=1}^n$ é base do subespaço $dF_p(T_p N) \subset T_{F(p)}M$. Mais ainda, veja que $g_{F(p)}(dF_p(e_i), dF_p(e_j)) = (F^*g)_p(e_i, e_j) = \varepsilon_{ij}$, de modo que essa base é ortonormal, e portanto o subespaço é não-degenerado de índice μ (que claramente não ultrapassa ν).

(\impliedby) Agora suponha que existe o número $0 \leq \mu \leq \nu$ conforme o enunciado. Fixando $p \in N$ qualquer, temos que $dF_p(T_p N)$ é subespaço não degenerado $T_{F(p)}M$ com índice μ , o que significa que ele admite uma base da forma $(dF_p e_i)_{i=1}^n$ que é ortonormal em relação a $g_{F(p)}$ e onde $(e_i)_{i=1}^n$ é uma base de $T_p N$. Sendo assim, temos que $(F^*g)_p(e_i, e_j) = g_{F(p)}(dF_p e_i, dF_p e_j) = \varepsilon_{ij}$. Isso mostra que $(T_p N, (F^*g)_p)$ é espaço vetorial com produto escalar e como p é arbitrário, segue que F é imersão semi-Riemanniana. ■

Como corolário disso, temos que quando (M, g) é Riemanniana, (N, F^*g) só pode ser também Riemanniana. Quando (M, g) é Lorentziana, o índice de (N, F^*g) é

¹¹ Isso significa g restrita a vetores tangentes a N .

necessariamente 0 ou 1, isto é, (N, F^*g) pode ser Riemanniana ou também Lorentziana, além do caso em que é degenerada. Mais precisamente, pode ocorrer inclusive o caso em que é degenerada apenas em alguns pontos. Por exemplo, considere a inclusão do parabolóide $t = x^2 + y^2$ dentro de \mathbb{R}_1^3 . O pullback da métrica do ambiente se expressa (em coordenadas globais (x, y) no parabolóide) como $(1-4x^2)dx \otimes dx + (1-4y^2)dy \otimes dy - 4xy(dx \otimes dy + dy \otimes dx)$. Dessa forma, esse campo tensorial quando calculado respectivamente nos pontos $(0, 0, 0)$, $(1/4, 0, 1/2)$ e $(1, 0, 1)$ do parabolóide, resulta nos tensores $dx \otimes dx + dy \otimes dy$ (índice 0), $dx \otimes dx$ (degenerado) e $dx \otimes dx - 3dy \otimes dy$ (índice 1).

Particularizando para o caso de subvariedades mergulhadas de (M, g) Lorentziana, com F sendo a inclusão, dizemos que $\iota : N \rightarrow M$ (e também a própria subvariedade N) é:

- *tipo-tempo* se $(N, g|_N)$ é Lorentziana;
- *tipo-espaço* se $(N, g|_N)$ é Riemanniana.

Exemplo 1.4.9. Dado $R > 0$, considere o conjunto $\mathbb{S}_1^m(R) := \{(x^0, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^{m+1} : -(x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots, (x^m)^2 = R^2\}$. Como ele é claramente imagem inversa de valor regular, sabemos que trata-se de uma subvariedade mergulhada de \mathbb{R}^{m+1} . Quando este último está munido da métrica de Minkowski η , \mathbb{S}_1^m adquirirá uma métrica Lorentziana induzida g_{dS} . Pondo $\mathbb{S}_1^m := \mathbb{S}_1^m(1)$, chamamos (\mathbb{S}_1^m, g_{dS}) de *espaço de de Sitter*. Pode ser mostrado, vide a proposição (4.29) de (O'NEILL, 1983) que o espaço de de Sitter tem curvatura escalar¹² constante positiva. Tirando o caso em que $m = 2$, \mathbb{S}_2^m é sempre simplesmente conexa.

Exemplo 1.4.10. Analogamente podemos construir o *espaço de anti-de Sitter*. Começamos considerando o conjunto $\mathbb{H}_1^m(R) := \{(x^0, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^{m+1} : -(x^0)^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots, (x^m)^2 = -R^2\}$. Novamente pela proposição 4.29 de (O'NEILL, 1983), temos que essa é uma variedade com curvatura escalar constante negativa. Pela proposição 4.25 do mesmo livro, temos que $\mathbb{H}_1^m(R) \approx \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{S}^1$, de modo que ele não é simplesmente conexo. Por isso, o espaço de anti-de Sitter é definido como o recobrimento universal de $\mathbb{H}_1^m := \mathbb{H}_1^m(1)$ e mais adiante veremos como esse tipo de aplicação consegue transportar a estrutura métrica.

Tendo visto algumas consequências ao nível do tensor métrico da passagem de M para uma de suas subvariedades, agora inquirimos sobre a passagem da estrutura afim de (M, g) para suas subvariedades semi-Riemannianas. Veja que quando $(N, g|_N)$

¹² Na verdade quando se fala em curvatura constante em variedades de dimensão maior que 2, a discussão é feita em termos do conceito de curvatura seccional, que neste trabalho não foi apresentado. Para os efeitos aqui desejados, podemos descrever a curvatura apenas em termos da curvatura escalar, como indica o exercício (3.5) de (O'NEILL, 1983).

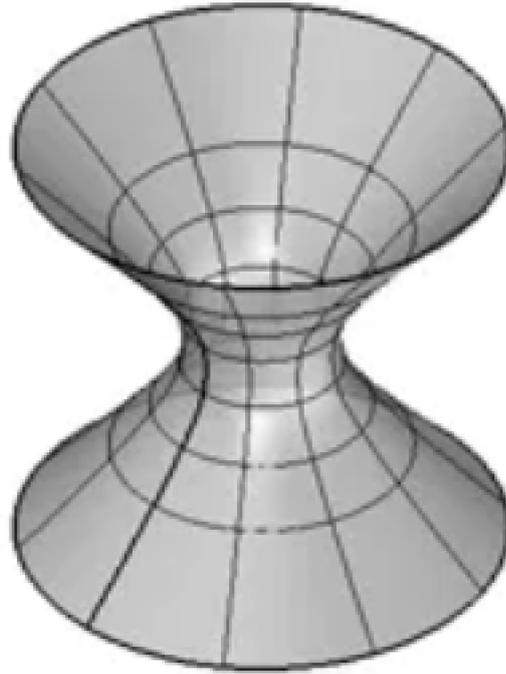


Figura 7 – Representação do espaço de de Sitter de 2 dimensões. Obtida de www.danieldavis.com/how-to-draw-a-hyperboloid.

é subvariedade semi-Riemanniana, em cada $p \in N$ temos a decomposição em soma direta $T_pM = T_pN \oplus T_pN^\perp$.

De modo geral, doravante consideramos $F : N \rightarrow M$ imersão suave entre duas variedades semi-Riemannianas, (M, g_M) e (N, g_N) . A situação até então considerada corresponde ao caso particular em que F é a inclusão. Um resultado decisivo para o que iremos fazer é a

Proposição 1.4.5 (Decomposição ortogonal). *Dado $V \in \mathfrak{X}(F)$, existem únicos $X_V \in \mathfrak{X}(N)$ e $V^\perp \in \mathfrak{X}^\perp(F) = \{Y \in \mathfrak{X}(F) : Y_p \perp dF_p(T_pM), \forall p \in N\}$ tais que*

$$V = dF \circ X_V + V^\perp.$$

Demonstração. Proposição 4.1.6 de (COSTA E SILVA, s.d.). ■

Com isso, sendo D a conexão induzida por ∇^M sobre F , é possível decompô-la em uma parte tangente e outra normal. Disso surge o principal objeto desta seção, o *tensor de segunda forma fundamental*, ou simplesmente *tensor de forma*:

$$\begin{aligned} II : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto -(D_X(dF \circ Y) - dF \circ \nabla_X^N Y), \end{aligned}$$

onde o sinal negativo, por ora *ad hoc*, se mostrará conveniente logo mais.

Veja que se dados $Y \in \mathfrak{X}(F)$ e $X \in \mathfrak{X}(N)$ existem $Y', X' \in \mathfrak{X}(M)$ tais que $Y' \circ F = Y$ e $X' \circ F = dF \circ X$, então para cada $p \in N$ temos

$$\begin{aligned} (\nabla_{X'}^M Y') \circ F(p) &= (\nabla_{X'(F(p))}^M Y') \circ F(p) = (\nabla_{dF_p X_p}^M Y') \circ F(p) \\ &= (D_X Y' \circ F)(p) = (D_X Y)(p). \end{aligned}$$

Assim, quando N é subvariedade mergulhada de M e F é a inclusão, vemos que $D_X Y$ é expresso simplesmente por $\nabla_{X'}^M Y'|_N$, onde X', Y' são respectivas extensões para M , que segundo o lema 4.1.5 de (COSTA E SILVA, s.d.) sempre existem localmente. Destarte, por simplicidade atribuímos significado à expressão $\nabla_X^M Y$ como sendo igual a $(\nabla_{X'}^M Y')|_N$, para quaisquer X', Y' que estendam localmente X e Y . Portanto no caso que lidaremos em geral o tensor de forma se escreve como $II(X, Y) = -(\nabla_X^M Y - \nabla_X^N Y)$.

O tensor de forma, é de fato um (campo de) tensor (1,2), pois se $f, h \in C^\infty(N)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$, então:

$$II(hX, fY) = -(\nabla_{hX}^M fY - \nabla_{hX}^N fY) = -(h(Xf)Y + hf\nabla_X^M Y - h(Xf)Y - hf\nabla_X^N Y) = hfII(X, Y),$$

e a linearidade na soma é imediata. Ele também é simétrico:

$$II(X, Y) = -(\nabla_X^M Y - \nabla_X^N Y) = -(\nabla_Y^M X + [X, Y] - \nabla_Y^N X - [X, Y]) = -(\nabla_Y^M X - \nabla_Y^N X) = II(Y, X).$$

Definição 1.4.11. Dizemos que a subvariedade semi-Riemanniana N é *totalmente geodésica* quando seu tensor de forma se anula identicamente.

Fixando campos vetoriais normais à subvariedade, podemos expressar o conteúdo geométrico do tensor de forma em outros tensores. Por conveniência ao emprego que faremos, usaremos apenas campos unitários. Para tanto, seja um campo vetorial suave $U \in \mathfrak{X}^\perp(N)$ satisfazendo $|g(U, U)| \equiv 1$. Em particular, quando N é hipersuperfície, a escolha de U é canônica a menos de sinal. Definimos então o tensor (1,1) $S_U : \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ chamado de *operador de Weingarten* e também o tensor (0,2) $K_U : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N) \rightarrow C^\infty(N)$, chamado de *segunda forma fundamental*, dados por:

$$\begin{aligned} K_U(X, Y) &:= g(II(X, Y), U) \\ &=: g(S_U(X), Y) = \\ &= g(-(\nabla_X^M Y - \nabla_X^N Y), U) \\ &\quad \underbrace{\nabla_X^N Y \perp U}_{\equiv} g(-\nabla_X^M Y, U) \\ &= -X \underbrace{g(Y, U)}_{Y \perp U} + g(Y, \nabla_X^M U) \\ &\implies S_U(X) = \nabla_X^M U. \end{aligned}$$

Veja que S_U está bem definido, e conseqüentemente também K_U pois o tensor métrico é não degenerado. Como tanto o operador de Weingarten como a segunda forma fundamental são tensores de ordem 2, seus respectivos traços são escalares, e de fato são iguais, pois ambos tensores carregam a mesma informação geométrica, isto é, são o mesmo objeto a menos de se levantar/abaixar um índice. Um fato importante é que o operador de Weingarten é auto-adjunto:

$$g(S_U(X), Y) = g(II(X, Y), U) = g(II(Y, X), U) = g(S_U(Y), X).$$

A curvatura média de N é definida como a contração dos argumentos covariantes do tensor de forma, dividido pela dimensão de N (daí "média"), isto é, é um campo vetorial normal sobre N expresso por:

$$H = \frac{\epsilon^{ij}}{n} II(E_j, E_i),$$

onde $(E_i)_{i=1}^n$ é referencial ortonormal de TN e temos uma soma implícita em $i, j = 1, \dots, n$. Como o campo H é em todo ponto ortogonal a N , podemos expandí-lo localmente em um referencial ortonormal $(U_j)_{j=1}^{m-n}$ de NN (fibrado normal de N), de maneira que:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^{m-n} \eta^i U_i \text{ para algum conjunto de funções escalares } (\eta^i)_{i=1}^{m-n} \\ g(H, U_j) &= \sum_{i=1}^{m-n} \eta^i \underbrace{g(U_i, U_j)}_{=\epsilon_{ij}} \\ \epsilon_{ij} \eta^i &= g(H, U_j) = \frac{\epsilon^{ik}}{n} g(II(E_i, E_k), U_j) = \frac{\epsilon^{ik}}{n} g(S_{U_j}(E_i), E_k) = \frac{1}{n} \text{tr}_N(S_{U_j}).^{13} \end{aligned}$$

Portanto os coeficientes da expansão são dados por $\eta^i = \frac{\epsilon^{ij}}{n} \text{tr}_N(S_{U_j})$. Ainda, expressando η^i em termos da conexão obteremos mais significado geométrico:

$$\begin{aligned} \eta^i &= \frac{\epsilon^{ij} \epsilon^{kl}}{n} g(II(E_l, E_k), U_j) = \frac{\epsilon^{ij} \epsilon^{kl}}{n} g(-\nabla_{E_k}^M E_l, U_j) \\ &= \frac{\epsilon^{ij} \epsilon^{kl}}{n} \left(\underbrace{-E_k g(E_l, U_j)}_{=0} + g(E_l, \nabla_{E_k}^M U_j) \right) = \frac{\epsilon^{ij}}{n} \text{div}_N(U_j).^{14} \end{aligned}$$

Dessa forma, tais coeficientes podem ser visto como uma medida do quanto a subvariedade "se abre" ou "se fecha" na direção de cada campo normal. Mais precisamente, essa interpretação é garantida pela seguinte proposição. Esse resultado é apresentado aqui meramente por completude, e para fins heurísticos. De fato, apela para o conceito de forma volume de uma variedade semi-Riemanniana orientável, que não

¹³ Isso denota um "traço parcial", isto é, um traço tomado apenas com respeito ao espaço tangente de N .

¹⁴ Analogamente ao traço, isso denota um "divergente parcial".

discutiremos aqui, mas que pode ser estudado no capítulo 10 de (O'NEILL, 1983). Apresentamos aqui um esboço de sua demonstração para aqueles leitores familiares com os conceitos envolvidos.



Figura 8 – Conforme nossa convenção de sinal, ilustrações de superfícies respectivamente com curvatura média maior que zero e menor que 0. Se a superfície é transformada na direção da curvatura média, vemos que seu volume aumenta e diminui, respectivamente.(TREUDE, 2011)

Proposição 1.4.6. *Suponha que (M, g) seja orientável, e portanto possua uma forma volume dM . Seja N^n subvariedade semi-Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}^\perp(N)$ com suporte compacto. X pode ser estendido para uma vizinhança de N , na qual seu fluxo ϕ esteja definido. Se $f(t)$ é o n -volume de $\phi_t(N)$, então $f'(0) = n \int_N g(H, X)dN$.*

Demonstração. Se $F : M \rightarrow M$ é função suave então a jacobiana de F é a função $J^F \in C^\infty(M)$ definida por $F^*dM = J^F dM$. Seja $J(t)$ a jacobiana do t -ésimo estágio do fluxo local de X . Note que

$$J'(0)dM = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(t)dM - J(0)dM}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^*dM - 1dM}{t} = \mathfrak{L}_X dM$$

Por outro lado, a derivada de Lie na direção de X pode ser expressa pela "fórmula mágica de Cartan" $(d\iota_X + \iota_X d) = \mathfrak{L}_X$, onde $\iota_X : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ é o produto interior com X . Como dM é de grau máximo e portanto fechada, temos $\mathfrak{L}_X dM = d(\iota_X dM)$. Mais ainda, com algum trabalho algébrico podemos mostrar que essa expressão surpreendentemente é igual a $(\text{div}X)dM$.

$$f(t) = \text{vol}(\phi_t(N)) = \int_{\phi_t N} dN = \int_N \phi_t^* dN = \int_N J(t)dN$$

De modo que

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(t) - \text{vol}(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\int_N J(t)dN - \int_N dN \right) \\ &= \int_N \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(t) - 1}{t} dN = \int_N J'(0)dN = \int_N (\text{div}_N X)dN \end{aligned}$$

E comparando isso com as contas precedentes, conclui-se que $f'(0) = n \int_N g(H, X)dN$. ■

Definição 1.4.12. Se N é subvariedade semi-Riemanniana de M , $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é geodésica normal a N , isto é, $\gamma(a) \in N$ e $\gamma'(a) \perp T_{\gamma(a)}N$, então dizemos que $\gamma(b)$ é *ponto focal* de N ao longo de γ se existe campo de Jacobi não nulo $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ com $J(b) = 0$, $J(a) \in T_{\gamma(a)}N$ e $\left(\frac{DJ}{dt}(a)\right)^\top = S_{\gamma'(a)}J(a)$.

A ideia de pontos focais é análoga à de pontos conjugados, onde a geodésica emana normalmente a uma subvariedade semi-Riemanniana, ao invés de um ponto. A existência de pontos focais para uma subvariedade N está ligada a um comportamento convergente (em primeira ordem) das geodésicas que emanam ortogonalmente de N . A proposição 10.30 de (O'NEILL, 1983) fornece um correspondente para pontos focais da nossa proposição 1.4.3. Quanto a isso, é importante introduzir aqui também a *exponencial normal* de N : $\exp_N := \exp|_{NN \cap \mathcal{D}}$. Veja que se N tem dimensão n , o fibrado normal NN tem espaço base de dimensão n e fibra de dimensão $m - n$ e portanto é uma subvariedade de TM de dimensão m , igual a M . Com o advento da exponencial normal podemos introduzir também o conceito de vizinhança normal em torno de N . Dizemos que um aberto $N \subset \mathcal{U} \subset M$ é *normal* se ele é imagem difeomórfica de um aberto $\tilde{\mathcal{U}} \subset NN \cap \mathcal{D}$ que contém a seção nula de NN , pela exponencial normal. Mais detalhes sobre essa aplicação podem ser vistos no capítulo 7 de (O'NEILL, 1983).

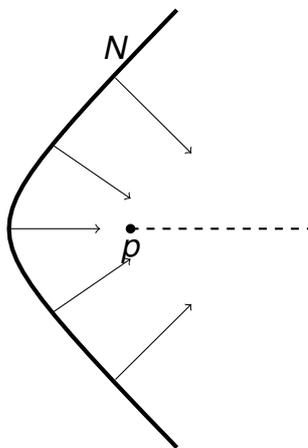


Figura 9 – As geodésicas que emanam ortogonalmente da hipérbole em \mathbb{R}^2 convergem em primeira ordem para o ponto p .

2 GEOMETRIA LORENTZIANA GLOBAL

2.1 INTRODUÇÃO

2.1.1 Orientação temporal

Para toda essa seção, fixemos (M, g) variedade Lorentziana conexa. Como visto na observação (1.1.5), em cada T_pM , o complemento ortogonal de vetores temporais é sempre um subespaço tipo-espaço, de modo que se $v, w \in T_pM$ são vetores tipo-tempo, temos a dicotomia $g_p(v, w) > 0$ ou $g_p(v, w) < 0$. Assim, definindo

$$C_v := \{w \in T_pM : w \text{ é tipo-tempo e } g_p(v, w) < 0\},$$

temos que $v \in C_v$ e para $a, b > 0$ e $w, u \in C_v$, temos $g_p(v, aw + bu) = ag_p(v, w) + bg_p(v, u) < 0 \implies aw + bu \in C_v$. Isso significa que o conjunto C_v , além de ser geometricamente um cone como vimos na observação 1.1.8, de modo mais geral tem a propriedade a que damos o nome de *cone convexo*, e nos referimos a este conjunto como o *cone temporal* de v . Fica claro portanto que em cada T_pM , existem dois cones temporais disjuntos e opostos pela origem, C_v e C_{-v} .

Considere agora uma função τ sobre M que para cada $p \in M$ associa um cone temporal em T_pM . Dizemos que τ é *contínua* se para cada $p \in M$ existem vizinhança $p \in \mathcal{U}$ e campo vetorial tipo-tempo e contínuo X sobre \mathcal{U} tal que $X_p \in \tau(p)$. Uma tal função τ , quando é contínua, é chamada de *orientação temporal* para (M, g) . Se for possível fazer uma escolha contínua de um cone temporal em cada T_pM , chamando-o de *cone futuro* (e por extensão, chamando seu oposto de *cone passado*), dizemos que (M, g) é uma variedade Lorentziana *temporalmente orientável*. Um critério para determinar a orientabilidade temporal é dado pela seguinte proposição.

Proposição 2.1.1. *Uma variedade Lorentziana é temporalmente orientável se, e somente se, existe um campo vetorial suave $X \in \mathfrak{X}(M)$ tipo-tempo.*

Demonstração. (\implies) Se um tal X existe, designando para cada $p \in M$ o cone C_{X_p} claramente fornece uma orientação temporal para (M, g) .

(\impliedby) Veja que localmente, com o emprego de coordenadas é possível construir campos vetoriais tipo-tempo suaves em cada domínio de carta. De fato, seja $(\mathcal{U}, (x^1, \dots, x^m))$ carta local. Como (M, g) é Lorentziana, para qualquer $p \in M$ existe ao menos um vetor $v_p \in T_pM$ que é tipo-tempo. Escreva $v_p = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$. Sejam $(A^i)_{i=1}^m \in C^\infty(M)$ funções suaves tais que $A^i(p) = a^i$, para todo i . Como $(g_{ij}A^iA^j)(p) < 0$ e essa é uma função contínua, existe um aberto $p \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ onde o campo definido por $A^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ é tipo-tempo. Com isso, podemos cobrir M com uma coleção $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$, da qual, para cada aberto existe um campo tipo-tempo suave $X^\alpha \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}_\alpha)$ de modo que $X_p^\alpha \in \tau(p)$ para todo $p \in \mathcal{U}_\alpha$. Mais ainda, como τ é contínua temos que para $p \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$, então

X_p^α e X_p^β estão no mesmo cone temporal em T_pM , a saber, em $\tau(p)$. Tomando $(f_\alpha)_\alpha$ uma partição suave da unidade subordinada a esta cobertura, definimos $X = \sum_\alpha f_\alpha X^\alpha$. Fixando $p \in M$ arbitrário, temos

$$g_p(X_p, X_p) = g_p \left(\sum_\alpha f_\alpha(p) X_p^\alpha, \sum_\beta f_\beta(p) X_p^\beta \right) = \sum_{\alpha, \beta} f_\alpha(p) f_\beta(p) g_p \left(X_p^\alpha, X_p^\beta \right) < 0$$

pois cada f_α é não-negativa, e os campos estão no mesmo cone, e portanto X é tipo-tempo. Ainda, como $\tau(p)$ é cone convexo, segue que $\sum_\alpha f_\alpha(p) X_p^\alpha \in \tau(p)$ sempre que $X_p^\alpha \in \tau(p)$. Temos portanto que X é campo vetorial suave e tipo-tempo, compatível com a orientação temporal dada. ■

Se (M, g) é variedade Lorentziana temporalmente orientável, um argumento tipo aberto-fechado mostra que existem 2 orientações temporais para cada componente conexa de M . Quando fixamos uma das possíveis orientações temporais para a variedade Lorentziana, ela se torna uma variedade Lorentziana *temporalmente orientada*. Como corolário dessa proposição, temos que somente as variedades que possuem um campo vetorial não-nulo em todos os pontos podem se tornar uma variedade Lorentziana temporalmente orientada. Como toda variedade M (com base enumerável) admite uma métrica Riemanniana, digamos h , se M possui um campo não nulo X , obtemos uma métrica Lorentziana para M , definindo $V := X/\sqrt{h(X, X)}$ e pondo

$$g := h - 2V^\flat \otimes V^\flat$$

para a qual o campo V é tipo-tempo e portanto (M, g, V) é temporalmente orientada. Assim, concluímos que *uma variedade diferenciável M de dimensão ≥ 2 admite uma métrica de Lorentz se e somente se admite um campo vetorial não-nulo em todo ponto*. Em particular, se M é compacta e sem bordo isso ocorre se e somente se sua característica de Euler é zero¹. Em particular, esferas admitem tais métricas somente se têm dimensão ímpar.

Essa discussão pode ser sintetizada pela proposição 5.37 de (O'NEILL, 1983) que diz que para qualquer variedade diferenciável M , são equivalentes as afirmações:

- existe uma métrica Lorentziana em M ;
- existe uma métrica Lorentziana temporalmente orientável em M ;
- existe um campo vetorial de M que não se anula em nenhum ponto;
- ou M não é compacta, ou se é, $\chi(M) = 0$.

¹ Vide o Teorema de Poincaré-Hopf no capítulo 6 de (MILNOR, 1965).

Veja que a orientabilidade usual da variedade não aparece como fator nesse resultado, nos mostrando que orientabilidade e orientabilidade temporal são dois conceitos independentes. Dessa forma, é possível termos variedades Lorentzianas que sejam qualquer uma das 4 combinações válidas logicamente entre orientável, não orientável, temporalmente orientável e não temporalmente orientável.

Definição 2.1.1. Uma variedade Lorentziana [resp. com bordo] conexa e temporalmente orientada é chamada de *espaço-tempo* [resp. com bordo].

Definição 2.1.2. Seja (M, g, τ) espaço-tempo. Daqui em diante por conveniência omitiremos a menção explícita à orientação temporal e nos referiremos simplesmente como um espaço-tempo (M, g) . Dizemos que $v \in T_p M$ causal é um vetor *futuro-dirigido* se $v \in \tau(p)$. Dizemos que é *passado-dirigido* se $-v \in \tau(p)$. Um campo vetorial X sobre M é dito futuro-dirigido se para todo $p \in M$, $X_p \in \tau(p)$, e analogamente para o passado. Se $\gamma : I \rightarrow M$ é curva causal suave por partes dizemos que γ é uma curva futuro-dirigida se γ' é futuro-dirigido, e analogamente para o passado.

Observação 2.1.2. É importante registrar uma propriedade dos espaços-tempo que chamamos de dualidade temporal. Ela se refere ao fato de que futuro e passado são meras convenções, não havendo nada intrínseco à estrutura geométrica do espaço-tempo que nos induza a fazer a escolha de futuro e passado de uma forma específica. Assim, muitos resultados iremos provar apenas falando sobre o futuro, e o resultado correspondente para o passado é consequência de aplicar o demonstrado para o espaço tempo $(M, g, -\tau)$, cujo futuro é o passado de (M, g, τ) .

Exemplo 2.1.3. O espaço-tempo de Minkowski $(\mathbb{R}_1^m, \delta_1)$ apresentado no exemplo 1.4.2 agora passa a ser de fato um espaço-tempo. Veja que o campo vetorial $\frac{\partial}{\partial x^0}$ é suave, está definido em toda parte e temos $\eta_m \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^0} \right) \equiv -1$. Logo, ele fornece uma orientação temporal para \mathbb{R}_1^m . Mais ainda, como o espaço de de Sitter está mergulhado em Minkowski de dimensão apropriada, podemos induzir uma orientação temporal definindo: X campo vetorial tipo-tempo é futuro-dirigido se, e somente se $\eta_m \left(d\iota X, \frac{\partial}{\partial x^0} \right) < 0$ em todo ponto de \mathbb{S}_1^n .

Exemplo 2.1.4. Se (M, g) e (N, h) são duas variedades semi-Riemannianas, e $f \in C^\infty(M)$ é positiva em todo ponto, podemos definir o *produto torcido* delas como $M \times_f N = (M \times N, g \times h)$ onde a métrica é dada por $g \times h = \pi^* g + (f \circ \pi)^2 \sigma^* h$, sendo π e σ as projeções de $M \times N$ respectivamente para M e N . Quando (M, g) é Lorentziana e (N, h) é Riemanniana seu produto torcido é sempre Lorentziano, para qualquer $f > 0$. Se (M, g) é espaço-tempo, consideremos $X \in \mathfrak{X}(M)$ tipo-tempo. Seja $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M \times_f N)$

tal que $d\pi(\tilde{X}) = X$ e $d\sigma(\tilde{X}) = 0$. Temos então que

$$\begin{aligned} (g \times h)(\tilde{X}, \tilde{X}) &= (\pi^*g + (f \circ \pi)^2 \sigma^*h)(\tilde{X}, \tilde{X}) \\ &= (g \circ \pi)(d\pi\tilde{X}, d\pi\tilde{X}) + (f \circ \pi)^2(h \circ \sigma)(d\sigma\tilde{X}, d\sigma\tilde{X}) = g(X, X) + 0 < 0. \end{aligned}$$

Portanto \tilde{X} é tipo-tempo, e se $M \times N$ for conexo, temos que o produto torcido $M \times_f N$ também é um espaço-tempo.

Exemplo 2.1.5. O *cilindro de Einstein* é a variedade $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{m-1}$ munida da métrica $\chi_m = -dt^2 + \omega_{m-1}$. Ela é exemplo de produto torcido com $f \equiv 1$. O espaço de anti-de Sitter \mathbb{H}_1^n tem métrica g_{AdS} dada pela restrição da métrica ambiente $-dt^2 - du^2 + dr^2 + r^2\omega_{m-2}$ para o conjunto dos pontos em que $-t^2 - u^2 + r^2 = -1$. Escrevendo $u = \sinh(\beta)\cosh(\alpha)$; $r = \sinh(\beta)\cosh(\alpha)$, temos que a equação definidora é agora $t^2 = 1 + \sinh^2(\beta) = \cosh^2(\beta)$ e a métrica ambiente $-dt^2 - \cosh^2(\beta)d\beta^2 + \sinh^2(\beta)d\alpha^2 + \sinh^2(\beta)\sinh^2(\alpha)\omega_{(m-2)}$. Substituindo $dt^2 = \sinh^2(\beta)d\beta^2$ obtemos

$$g_{AdS} = -d\beta^2 + \sinh^2(\beta) \left(d\alpha^2 + \sinh^2(\alpha)\omega_{m-2} \right),$$

que é produto torcido de $(\mathbb{R}, -d\beta^2)$ com o hiperboloide $\{(x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathbb{R}^{m-1} : -x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m-1}^2 = 1\}$ munido de sua métrica induzida do \mathbb{R}^{m-1} .

Exemplo 2.1.6. O *espaço-tempo de Schwarzschild-Kruskal* (\mathbb{SK}, g_{SK}) é construído como $\mathbb{SK} = \mathbb{S}^2 \times A$, onde $A = \{(X, T) \in \mathbb{R}^2 : T^2 - X^2 < 1\}$ e nessas coordenadas a métrica g_{SK} assume a expressão

$$\frac{32m^3}{r} e^{-\frac{r}{2m}} \left(-dT \otimes dT + dX \otimes dX + r^2 \left(d\theta \otimes d\theta + \sin^2(\theta)d\phi \otimes d\phi \right) \right), \quad (7)$$

onde r é definido implicitamente pela equação $X^2 - T^2 = \left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{-\frac{r}{2m}}$, $r > 0$. O campo vetorial $\frac{\partial}{\partial T}$ é tipo-tempo em toda parte, e portanto define uma orientação temporal, tornando essa variedade Lorentziana conexa em um espaço-tempo. A figura 10 representa o espaço-tempo, onde cada ponto do diagrama possui um fator \mathbb{S}^2 não exibido.

2.1.2 Superfícies convergentes e convexas

Antes de começar uma caracterização das propriedades causais dos espaços-tempo, voltamos brevemente a discutir a geometria de subvariedades agora que dispomos propriamente de uma estrutura causal para (M, g) . Fixe doravante uma subvariedade espacial de codimensão 2, $N \subset M$.

Definição 2.1.7. N é dita ser *futuro-convergente*, [resp. *passado-convergente*] se seu campo vetorial de curvatura média é temporal e passado [resp. futuro] dirigido.

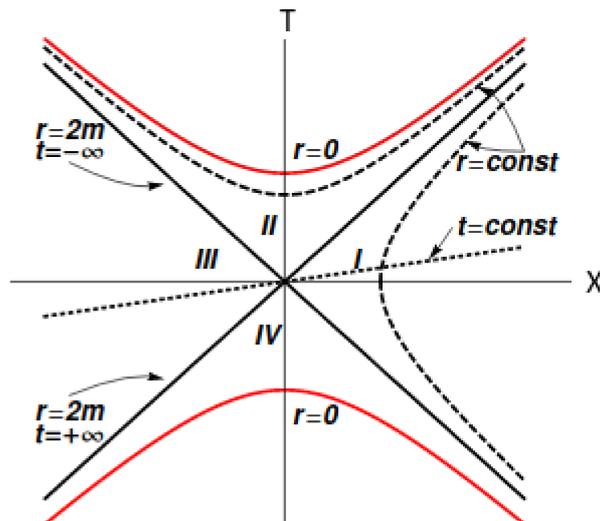
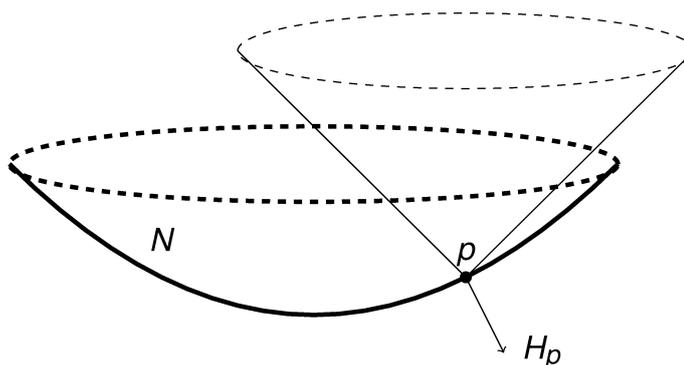


Figura 10 – Plano de Kruskal, (COLLAS; KLEIN, 2012). As regiões acima e abaixo dos ramos da hipérbole em vermelho não fazem parte do espaço-tempo.

Figura 11 – Representação de uma superfície futuro-convergente.



Um caso bastante particular que é de interesse é quando N tem codimensão exatamente 2 e possui fibrado normal trivial, de modo que existem dois campos normais linearmente independentes. Nesse cenário, como cada espaço normal é um espaço vetorial Lorentziano, é fácil obter uma base de vetores luminosos.

É comum que subvariedades de codimensão 2 apareçam dentro de subvariedades de codimensão 1, como por exemplo o bordo da variedade ou uma hipersuperfície espacial. Nesse tipo de situação faz sentido falar em vetores apontando "para dentro" e "para fora" de N , ainda que esses termos não possuam sempre um significado geométrico que necessariamente corresponda ao que estamos acostumados. De fato, se $N \subset \partial M$, um vetor sobre N aponta para dentro de M quando é velocidade inicial de uma curva que cai no interior de M . Quando $N \subset \Sigma^{m-1}$ espacial, e se $\Sigma \setminus N$ possui duas componentes conexas, Σ_+, Σ_- ², dizemos que um vetor de $T\Sigma$ aponta para dentro

² Quando somente uma dessas regiões é compacta, é comum considerá-la como o interior de N e nesse caso atribuir a notação Σ_- , mas como isso não é universal, em geral a distinção é puramente convencional.

de N quando ele aponta para dentro da subvariedade com bordo $N \cup \Sigma_-$.

Pelo exercício (8.4) de (LEE, J. M., 2012) temos que existe um campo X sobre N que aponta para dentro em todos os pontos. Com isso, podemos clasificar em para dentro/para fora também vetores $v \notin T\Sigma$: para dentro se $g(X, v) > 0$, para fora se $g(X, v) < 0$.

Observação 2.1.3. *Com efeito, podemos considerar U_+ , U_- campos vetoriais luminosos, futuro-dirigidos, linearmente independentes, normais a N e satisfazendo $g(U_+, U_-) = -1$, com U_- apontando para dentro de N e U_+ apontando para fora. Definimos $\theta_+ := \text{tr}_N(S_{U_+})$ e $\theta_- := \text{tr}_N(S_{U_-})$, que são chamados de expansões luminosas de N .*

Veja que nesa situação o vetor de curvatura média se escreve com uma sutil diferença:

$$H = -\frac{\theta_+ U_- + \theta_- U_+}{m-2}.$$

Com isso, veja que $g(H, H) = \frac{-2}{(m-2)^2} \theta_+ \theta_-$ de modo que

- H luminoso \iff ou $\theta_+ = 0$ ou $\theta_- = 0$ (ou exclusivo);
- H temporal \iff θ_+ e θ_- são não nulos e têm o mesmo sinal.

Vendo também que $g(H, U_+) = \frac{\theta_+}{m-2}$ e $g(H, U_-) = \frac{\theta_-}{m-2}$, quando a subvariedade é passado/futuro convergente, conclui-se que

- H futuro-dirigido $\iff \theta_+, \theta_- \leq 0$;
- H passado-dirigido $\iff \theta_+, \theta_- \geq 0$.

Ainda, outra configuração de interesse, excludente em relação às anteriores, que a subvariedade N pode aparecer é conforme a seguinte definição. Ela formaliza a ideia de uma superfície cujos cones de luz que dela emanam não são forçados pela curvatura a convergir "para dentro" ou "para fora", conforme ilustrado pela figura 12.

Definição 2.1.8. N é dita ser *convexa-luminosa* se S_{U_+} é positiva-definida e S_{U_-} é negativa-definida³. Se $\theta_- < 0$ e $\theta_+ \geq 0$, N é dita ser *fracamente convexa-luminosa*.

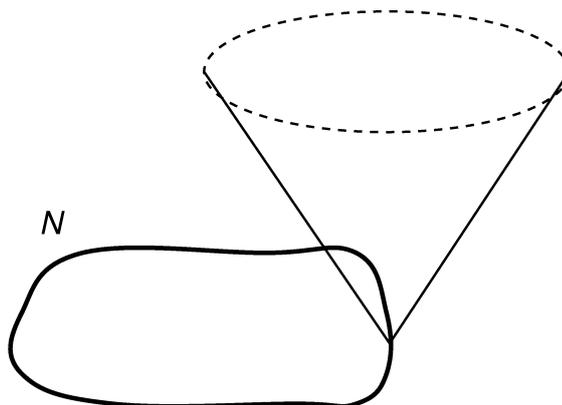
Exemplo 2.1.9. Considere o espaço-tempo de Minkowski em três dimensões \mathbb{R}_1^3 , com coordenadas globais (t, x, y) . Considere a superfície $N = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : t = 0, x^2 + y^2 = 1\}$. Para ela os campos luminosos futuro-dirigidos e normais são dados por $U_{\pm} = \partial_t \pm x\partial_x \pm y\partial_y$. Assim, dado um vetor tangente a N , $V = A\partial_x + B\partial_y$, temos:

$$S_{U_{\pm}}(V) = \nabla_{(A\partial_x + B\partial_y)} (\partial_t \pm x\partial_x \pm y\partial_y) = \pm A\partial_x \pm B\partial_y,$$

pois em Minkowski a conexão é a plana. Portanto vê-se que $S_{U_+} = Id$ enquanto $S_{U_-} = -Id$, donde N é convexa-luminosa.

³ As definições de positivo/negativo-definido para esses objetos se referem a suas formas quadráticas metricamente equivalentes serem positiva/negativa-definidas.

Figura 12 – Representação de uma superfície convexa-luminosa



2.1.3 Hipersuperfícies luminosas

Considere o espaço-tempo de Minkowski \mathbb{R}_1^3 , e o ponto $p = (0, 0, 0)$. Se olharmos para o conjunto $C = (J^+(p) \setminus I^+(p)) \setminus \{p\}$, que nada mais é que a imagem do cone de luz futuro em T_pM pela aplicação exponencial, vemos que ele é dado pelos pontos (t, x, y) que satisfazem $0 = -t^2 + x^2 + y^2, t > 0$, quando adotamos a orientação temporal dada pelo campo $\frac{\partial}{\partial t}$.

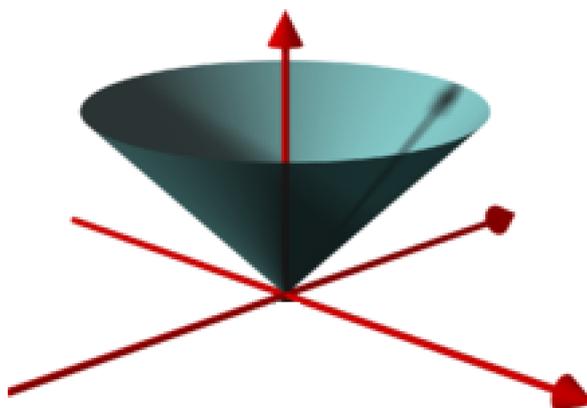


Figura 13 – Cone de luz futuro emanando de p . Adaptada de en.wikipedia.org/wiki/Cone.

Vejamos de que forma o tensor métrico do ambiente se manifesta sobre este

cone:

$$\begin{aligned}
t^2 = x^2 + y^2 &\implies tdt = xdx + ydy \implies dt = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
\implies dt^2 &= \frac{x^2 dx^2 + xy(dx \otimes dy + dy \otimes dx) + y^2 dy^2}{x^2 + y^2} \\
\implies g_{(\sqrt{x^2+y^2}, x, y)} &= \left(1 - \frac{x^2}{x^2 + y^2}\right) dx^2 - \frac{xy}{x^2 + y^2} (dx \otimes dy + dy \otimes dx) + \\
+ \left(1 - \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right) dy^2 &= \frac{(ydx - xdy) \otimes (ydx - xdy)}{x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

Calculando esse tensor sobre por exemplo $(1, 1, 0)$ temos que ele se reduz a dy^2 . Tomando $v = (1, 1, 0) \in T_{(1,1,0)}C$, vemos que se w é qualquer outro vetor em $T_{(1,1,0)}C$, temos $dy \otimes dy(v, w) = 0$. Portanto o tensor induzido pela métrica ambiente não é uma métrica, mas um tensor degenerado. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 2.1.10. Seja N subvariedade mergulhada na variedade semi-Riemanniana (M, g) . Dizemos que N é uma *subvariedade luminosa* de M quando temos que $g|_N$ é um tensor degenerado, isto é, em cada $p \in N$ existe $0 \neq K_p \in T_p N$ tal que $g_p(K_p, X) = 0$, para qualquer $X \in T_p N$.

Exemplo 2.1.11. Em Minkowski de três dimensões \mathbb{R}_1^3 , podemos considerar o cone de luz futuro emanando da origem, dado pelo conjunto $\{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : t > 0, t^2 = x^2 + y^2\}$. Colocando em coordenadas cilíndricas a equação fica $t^2 = r^2 \iff t = \pm r \implies dt = \pm dr \implies dt^2 = dr^2$. Portanto a métrica ambiente (na região onde as coordenadas estão definidas) $-dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2$ fica somente $r^2 d\theta^2$ sobre o cone de luz, que é um tensor degenerado. Outro exemplo são planos de inclinação específica: $\Pi_\alpha = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : \cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y - t = 0\}$. Sobre esses pontos temos $dt = \cos(\alpha)dx + \sin(\alpha)dy$, de modo que a métrica induzida fica:

$$\begin{aligned}
dx \otimes dx(-\cos^2(\alpha) + 1) + dy \otimes dy(-\sin^2(\alpha) + 1) - (dx \otimes dy + dy \otimes dx)(\sin(\alpha)\cos(\alpha)) \\
= (\sin(\alpha)dx - \cos(\alpha)dy) \otimes (\sin(\alpha)dx - \cos(\alpha)dy),
\end{aligned}$$

que é um tensor degenerado pois ele se anula sobre qualquer vetor não nulo da forma $(\beta, \cos(\alpha), \sin(\alpha))$.

Exemplo 2.1.12. O espaço-tempo de Schwarzschild-Kruskal do exemplo 2.1.6 também fornece uma situação com subvariedades luminosas distintas: $\Lambda_\pm = \{(T, X, \theta, \phi) \in \mathbb{SK} : T^2 = X^2, \pm T \geq 0\}$ são os *horizontes de eventos*. Sobre eles, temos que $dT = \pm dX \implies dT \otimes dT = dX \otimes dX$, o que implica que a métrica induzida se degenera.

Veja que a atribuição de um $K_p \in T_p N$ para cada $p \in N$ pode ser feita de forma suave⁴, e doravante assumimos a existência de $K \in \mathfrak{X}(N)$ que pode ser escolhido futuro-dirigido, claramente é tipo-luz e em cada ponto temos $K_p^\perp = T_p N$. Uma importante propriedade das subvariedades luminosas de codimensão 1, isto é, *hipersuperfícies luminosas* é dada pela seguinte proposição.

Proposição 2.1.4. *Seja N hipersuperfície suave luminosa e $K \in \mathfrak{X}(N)$ tipo-luz. Então as curvas integrais de K são pré-geodésicas luminosas.*

Demonstração. Como queremos concluir que as curvas integrais de K são essencialmente geodésicas, mas com a liberdade de parametrização. Conforme o lema 1.3.2 a equação correspondente que buscamos é a derivada covariante (pela conexão induzida por $\iota : N \hookrightarrow M$ sobre ∇) de K em relação a K sendo proporcional a K . Como K é campo sobre N , para expressar isso precisamos tomar uma extensão local de K para TM , isto é, para cada aberto \mathcal{U} de M com $\mathcal{U} \cap N \neq \emptyset$, consideramos um campo $K' \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ tal que $K'|_N = K' \circ \iota = K$. Sendo D a conexão induzida, a equação fica $f(p)K_p = (D_K(K' \circ \iota))(p) = (\nabla_{d\iota_p K_p}^M K')(\iota(p)) = \nabla_{K_p}^M K'$ para alguma $f \in C^\infty(N)$ e para todo $p \in N$. Pela definição de K , isso se reduz a mostrar que em cada $p \in N$, $(\nabla_K K)(p) \perp T_p N$. Para tanto, tome $V' \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ tal que $V'|_N \in \mathfrak{X}(N \cap \mathcal{U})$. Então, calculamos

$$\begin{aligned} g_p(\nabla_{K_p} K', V_p) &= K_p g(K', V') - g_p(K_p, \nabla_{K_p} V') \\ &= K_p g(K', V') - g_p(K_p, \nabla_{V_p} K' + [K', V']_p) \\ &= K_p g(K', V') - g_p(K_p, [K', V']_p) - \frac{1}{2} V_p g(K', K'). \end{aligned}$$

Veja que $g(K', K')$ e $g(K', V')$ são nulas sobre N , em particular constantes, de modo que suas respectivas derivadas em relação a $V_p, K_p \in T_p N$ são iguais a zero. Quanto ao termo do meio, como K', V' são extensões de K, V é fácil verificar que $[K', V']|_N = [K, V]$, de modo que $[K', V']_p$ é ortogonal a K_p e portanto temos $g_p(\nabla_{K_p} K', V_p) \equiv 0$ e daí que $\nabla_{K_p} K' = f(p)K_p$, para qualquer $p \in N$. ■

Isso quer dizer que, parametrizando adequadamente, através de cada ponto de uma hipersuperfície luminosa passa uma geodésica luminosa contida na hipersuperfície. Portanto dizemos que hipersuperfícies luminosas são *geradas* por geodésicas tipo-luz.

Note que se X_p é qualquer vetor de $T_p N$, temos $g_p(X_p + \lambda K_p, X_p + \lambda K_p) = g_p(X_p, X_p)$ de modo que em essência, a direção do gerador não contribui para a geometria da hipersuperfície. Isso motiva a construção de um quociente, para desprezar

⁴ Dado $p \in N$, seja $C_p := (T_p N \cap (T_p N)^\perp)$. Sabemos que $\dim C_p = 1$. Fixando uma métrica Riemanniana auxiliar de fundo h , existe um único vetor K_p que é h -unitário e futuro-dirigido em relação a g que gera C_p . Fazendo isso para cada ponto, obtemos K . A suavidade é pode ser facilmente checada usando coordenadas adaptadas a N . Sob as hipóteses de K ser luminoso e futuro-dirigido, esse K é único a menos de multiplicação por uma função suave positiva $f : N \rightarrow (0, +\infty)$.

a direção luminosa e obter um espaço-vetorial na qual o tensor métrico induzido não é mais degenerado e portanto as construções de interesse voltam a ser viáveis ali. Defina portanto $\sim \subset T_p N \times T_p N$ dada por $x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : x - y = \lambda K_p$. Como de costume, denote $\bar{x} := \{y \in T_p N : x \sim y\}$ e $\overline{T_p N} := \{\bar{x} : x \in T_p N\}$, sendo este um espaço vetorial isomorfo a um subespaço de codimensão 2 dentro de $T_p M$. As considerações anteriores mostram que o tensor métrico de M induz um produto escalar positivo-definido em $\overline{T_p N}$. Um desenvolvimento mais detalhado dessa construção pode ser visto no exercício 1.3.5 de (COSTA E SILVA, s.d.).

2.1.4 Equação de Raychaudhuri

Voltando ao operador de Weingarten, vejamos que ele possui mais propriedades. Fixando $U \in \mathfrak{X}^\perp(N)$, considere $S_U : \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$. Se R_U é o operador de força de maré e $X \in \mathfrak{X}(N)$, temos:

$$\begin{aligned} (S'_U + S_U^2 + R_U)(X) &= \nabla_U(S_U(X)) - S_U(\nabla_U X) + S_U(S_U(X)) + R(X, U)U \\ &= \cancel{\nabla_U \nabla_X U} - \nabla_{\nabla_U X} U + \nabla_{\nabla_X U} U + \nabla_X \nabla_U U - \cancel{\nabla_U \nabla_X U} - \nabla_{[X, U]} U \\ &= \nabla_{\nabla_X U} U - \nabla_{\nabla_U X} U - \nabla_{[X, U]} U + \nabla_X \nabla_U U \\ &= \nabla_X \nabla_U U. \end{aligned}$$

Se o campo U é tal que $\nabla_U U = 0$, ou seja, curvas integrais são geodésicas, abstraindo o campo X chegamos que S_U satisfaz a seguinte equação diferencial para campos tensoriais (1,1):

$$S'_U + S_U^2 + R_U = 0 \quad (8)$$

conhecida como a *equação de Riccati*⁵. Por outro lado, lembrando da decomposição de Ricci (2), podemos também decompor um operador C^∞ -linear $T : \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ como S_U separando em componentes auto-adjunto e anti-auto-adjunto livres de traço e uma componente carregando todo o efeito de seu traço. Mais claramente:

$$T = \left[\frac{\text{tr}(T)}{n} \text{Id} \right] + \left[\frac{1}{2}(T + T^*) - \frac{\text{tr}(T)}{n} \text{Id} \right] + \left[\frac{1}{2}(T - T^*) \right]. \quad (9)$$

E assim, definimos para cada operador T as seguintes quantidades:

- a *expansão* de T , dada por $\theta_T := \text{tr}(T)$;
- o *tensor de cisalhamento* de T , dado por $\hat{\sigma}_T := \frac{1}{2}(T + T^*) - \frac{\theta_T}{n} \text{Id}$;
- o *tensor de giro*⁶ de T dado por $\hat{\omega}_T := \frac{1}{2}(T - T^*)$.

⁵ Na verdade, equação de Riccati é toda uma classe de EDOs, e essa apresentada é um exemplo. O leitor interessado pode consultar os exercícios 3.28-37 do livro (KREIDER *et al.*, 1972).

⁶ Tradução livre de *twist tensor*, cuja tradução mais adequada seria tensor de torção. Mas isso poderia gerar confusão com o objeto homônimo já apresentado.

Agora podemos aplicar essa decomposição em S_U e usando a equação de Riccati obter equações de evolução para cada uma das quantidades acima. A equação para a expansão $\theta_U := \theta_{S_U}$ é a mais célebre e também mais útil para nossos propósitos. Inclusive, veja que essa *expansão* é essencialmente a mesma que as expansões da curvatura média obtidas na seção anterior, de modo que em muitos casos é comum se referir como "expansão da subvariedade". De toda forma, aplicando a decomposição (9) em (8) e tomando o traço, chegaremos a:

$$\theta'_U + \theta_U^2 + Ric(U, U) + \sigma_U^2 - \omega_U^2 = 0 \quad (10)$$

onde σ_U^2, ω_U^2 são os traços do quadrado dos respectivos operadores. A equação 10 é conhecida como a *equação de Raychaudhuri*. Ela é do tipo Riccati, ainda que escalar, e é válida não apenas para o tensor de forma, como para qualquer endomorfismo que satisfaz a equação de Riccati 8. No caso de S_U , que é auto-adjunto, seu tensor de giro é identicamente nulo, de modo que em particular vale a desigualdade:

$$\theta'_U \leq -Ric(U, U). \quad (11)$$

2.2 CAUSALIDADE NA GEOMETRIA LORENTZIANA

Definimos relações em M , chamadas de *precedência cronológica* e *precedência causal*, respectivamente da seguinte forma:

$$p \ll q \iff$$

$$\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow M \text{ temporal, futuro dirigida e suave por partes tal que } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q.$$

$$p < q \iff$$

$$\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow M \text{ causal, futuro dirigida e suave por partes tal que } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q.$$

Escrevemos $p \leq q$ se $p < q$ ou $p = q$. Se \mathcal{U} contém p, q , podemos escrever $p \ll_{\mathcal{U}} q$ e $p <_{\mathcal{U}} q$ para dizer que existe uma curva com as propriedades descritas acima, mas adicionalmente estando contida em \mathcal{U} .

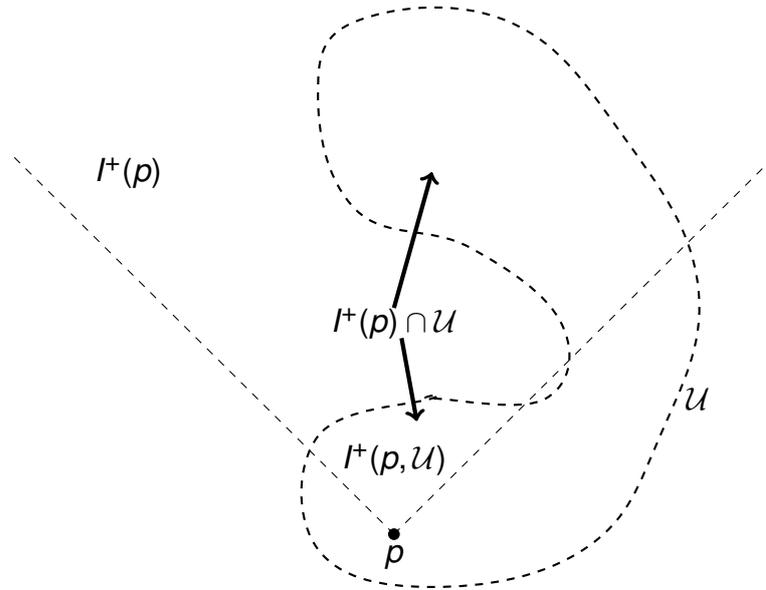
Definição 2.2.1. Para $p \in M$, definimos os conjuntos *futuro cronológico* de p e *futuro causal* de p respectivamente como os conjuntos:

$$I^+(p) = \{q \in M : p \ll q\}, \quad J^+(p) = \{q \in M : p \leq q\}.$$

Os conjuntos $J^-(p)$ *passado causal* e $I^-(p)$ *passado cronológico* são definidos de forma análoga. Um importante fato que começa a nos mostrar a conexão entre a topologia e a estrutura causal dos espaços-tempo sem bordo, é que os conjuntos I^{\pm} são sempre abertos, vide lema 14.3 de (O'NEILL, 1983). Verificaremos mais adiante que isto segue sendo válido para certos espaços-tempo com bordo. Podemos definir também o futuro e passado para conjuntos. Por exemplo, dado $A \subset M$ não vazio,

$J^+(A) := \{q \in M : \exists p \in A : q \in J^+(p)\}$. As demais combinações são definidas analogamente. Também definimos $I^+(A, \mathcal{U}) := \{q \in M : \exists p \in A, p \ll_{\mathcal{U}} q\}$ e analogamente para o passado e para o futuro causal. É evidente que vale $I^+(A, \mathcal{U}) \subset I^+(A) \cap \mathcal{U}$. A figura 14 ilustra como a inclusão contrária em geral é falsa.

Figura 14 – A diferença entre $I^+(A, \mathcal{U})$ e $I^+(A) \cap \mathcal{U}$



Definição 2.2.2. Dado $A \subset M$, definimos o *desenvolvimento de Cauchy futuro* de A como o conjunto $D^+(A) := \{p \in M : \text{toda curva causal passado-inextensível e passado-dirigida começando em } p \text{ tem interseção com } A\}$. Definimos $D^-(A)$ de maneira análoga e $D(A) = D^+(A) \cup D^-(A)$ é o *desenvolvimento de Cauchy* de A .

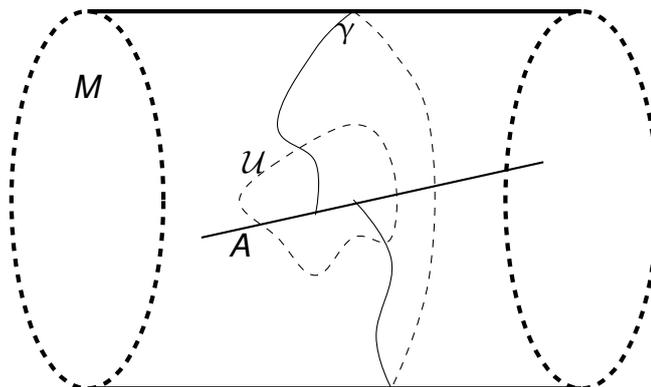
Se mais de um espaço-tempo estiver em questão, escreveremos $D(A, M)$ para especificar em relação a qual o desenvolvimento está sendo considerado. Veja que, definido dessa forma, $D^+(A)$ é a parte de $J^+(A)$ cuja informação causal provém necessariamente de A .

2.2.1 Acronalidade e acausalidade

Definição 2.2.3. Seja (M, g) espaço-tempo. Um subconjunto $A \subset M$ é dito ser *acronal* [resp. *acausal*] se $I^+(A) \cap A = \emptyset$ [resp. $J^+(A) \cap A = \emptyset$].

Podemos falar também em acronalidade/acausalidade de modo local, significando que para cada $p \in A$, existe uma vizinhança $p \in \mathcal{U}$ tal que $A \cap \mathcal{U}$ é acronal em \mathcal{U} visto como um espaço-tempo em si mesmo, com a métrica e orientação induzidas. A figura seguinte ilustra porque é importante especificar que seja acronal em \mathcal{U} . Na situação ilustrada $A \cap \mathcal{U}$ é acronal em \mathcal{U} mas não em M .

Figura 15 – Espaço-tempo de Minkowski enrolado na direção temporal



Lema 2.2.1. *Em um espaço-tempo sem bordo (M, g) , se α, β são duas geodésicas luminosas que se encontram em q e $p \leq q$ sobre α e $r \geq q$ sobre β , então $p \ll r$.*

Demonstração. A justaposição de $\alpha|_p^q$ com $\beta|_q^r$ evidentemente não é uma geodésica, então pela proposição 10.46 de (O'NEILL, 1983) ela pode ser deformada com extremidades fixadas para uma curva temporal. ■

Proposição 2.2.2. *Seja (M, g) espaço-tempo. Se S é subvariedade espacial de M de codimensão 1 e $p \in S$, então existe vizinhança \mathcal{U} de p em M tal que $S \cap \mathcal{U}$ é conjunto acronal em \mathcal{U} . Isto é, toda hipersuperfície espacial é localmente acronal.*

Demonstração. Fixe $p \in S$ e considere uma carta $(\mathcal{V}, (x^1, \dots, x^n))$ contendo p , adaptada a S , tal que $S \cap \mathcal{V}$ seja conexa. Como a carta é adaptada temos por exemplo que $x^1(q) = 0$, para todo $q \in S$ e portanto $\text{grad}(x^1) = \nabla x^1 \neq 0$ é tipo-tempo sobre S . Como o conjunto dos vetores tipo-tempo é claramente aberto em TM , podemos tomar um aberto $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ no qual os conjuntos de nível $x^1 = k$ são todos ainda subvariedades espaciais, pois são ortogonais a vetores temporais. Com isso, suponha que existisse segmento de curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ tipo-tempo, futuro-dirigida, contida em \mathcal{U} ligando dois pontos distintos de S . Então temos $x^1 \circ \gamma(0) = x^1 \circ \gamma(1) = 0$. Pelo teorema de Rolle, existe $c \in (0, 1)$ tal que $0 = (x^1 \circ \gamma)'(c) = g_{\gamma(c)}(\nabla x^1(\gamma(c)), \gamma'(c))$. Mas isso quer dizer que $\gamma'(c)$ está no complemento ortogonal de $\nabla x^1(\gamma(c))$ que é um subespaço tipo-espaço de $T_{\gamma(c)}M$, o que entra em contradição com γ ter sido tomada temporal. ■

Observação 2.2.3. *Pelo lema 14.42 de (O'NEILL, 1983), acronalidade em hipersuperfícies espaciais implica em acausalidade, de forma que a proposição anterior nos dá que hipersuperfícies espaciais são sempre localmente acausais.*

Definição 2.2.4. *Seja $\Sigma \subset M$. Dizemos que Σ é hipersuperfície de Cauchy se para qualquer curva tipo-tempo inextensível γ de (M, g) a interseção entre Σ e γ é sempre um único ponto.*

Definição 2.2.5. Dizemos que um espaço-tempo (M, g) é *globalmente hiperbólico* se existe uma hipersuperfície de Cauchy $\Sigma \subset M$.

Em (BERNAL; SÁNCHEZ, 2005) os autores mostram que em um espaço-tempo globalmente hiperbólico sempre existe uma hipersuperfície de Cauchy suave espacial e conexa. O lema 14.29 de (O'NEILL, 1983) mostra que de fato as hipersuperfícies de Cauchy são hipersuperfícies C^0 sem bordo e acausais.

2.2.2 Distância Lorentziana

Variedades Lorentzianas, diferentemente de suas contrapartes Riemannianas, não possuem um modo natural de serem tornadas espaços métricos. O que elas possuem entretanto, é uma função análoga à distância, a chamada *distância Lorentziana*, definida a seguir. Primeiro, precisamos dar às curvas causais de (M, g) uma noção de comprimento. De modo geral, qualquer curva terá um comprimento designado, mas devido a interpretação física de linhas-mundo de observadores, as curvas causais são as de maior interesse.

Definição 2.2.6. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ curva suave por partes. Definimos seu *comprimento de arco Lorentziano* por $L(\alpha) := \int_a^b \sqrt{|g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))|} dt$.

Veja que curvas luminosas possuem comprimento igual a zero - o que também pode ocorrer com curvas que não têm caráter causal constante. Curvas temporais e curvas espaciais têm comprimento sempre maior que zero. A próxima proposição apresenta uma importante propriedade de L .

Proposição 2.2.4. Seja $(\gamma_k : [a_k, b_k] \rightarrow M)_{k \in \mathbb{N}}$ sequência de curvas causais futuro-dirigidas (resp. passado dirigidas), parametrizadas por comprimento de arco relativo a uma métrica Riemanniana completa⁷ auxiliar h . Se $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para uma curva causal futuro-dirigida (resp. passado dirigida) $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, então $L(\gamma) \geq \limsup L(\gamma_k)$. Isto é, L é semi-contínua superiormente.

Demonstração. Proposição 3.2.14 de (TREUDE, 2011). ■

Lema 2.2.5. Seja (M, g) espaço-tempo globalmente hiperbólico. Sejam A, B, K subconjuntos compactos de M tais que $A \cap B = \emptyset$ e $A, B \subset K$. Defina $\mathcal{C}_K(A, B)$ como o conjunto de todas as curvas causais futuro-dirigidas contidas em K , partindo de A e chegando em B . Então, se $\mathcal{C}_K(A, B)$ é não vazio temos que a grandeza $d[K](A, B) := \sup_{\alpha \in \mathcal{C}_K(A, B)} L(\alpha)$ é finita e existe uma curva $\alpha_0 \in \mathcal{C}_K(A, B)$ (dependendo de K, A, B) tal que $d[K](A, B) = L(\alpha_0)$.

⁷ Uma tal métrica sempre existe, conforme mostrado em (NOMIZU; OZEKI, 1961).

Demonstração. Sejam $(\alpha_k : [0, +\infty)_{k \in \mathbb{N}}$ seqüência de curvas C^0 causais⁸, futuro-inextensíveis e parametrizadas por h -comprimento de arco, onde h é uma métrica Riemanniana completa auxiliar e $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset [0, +\infty)$, satisfazendo as seguintes condições para cada k :

1. $\alpha_k|_{[0, t_k]} \in \mathcal{C}_K(A, B)$;
2. $L(\alpha_k|_{[0, t_k]}) > \begin{cases} d[K](A, B) - 1/k, & \text{se } d[K](A, B) < +\infty, \\ k, & \text{se } d[K](A, B) = +\infty. \end{cases}$

Pela compacidade de A e pelo Lema da Curva Limite⁹, a menos de passagem à subsequência, podemos assumir a existência de uma curva causal C^0 futuro-inextensível $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow M$ tal que $\alpha_k(0) \rightarrow \alpha(0) \in A$ e $\alpha_k|_C \rightarrow \alpha|_C$ h -uniformemente em todo compacto $C \subset [0, +\infty)$.

Vejam agora que a seqüência $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada. De fato, se ela não o fosse, podemos supor que $t_k \rightarrow +\infty$. Assim, para qualquer $t \in [0, +\infty)$, eventualmente teremos $t_k > t$, de modo que $\alpha_k|_{[0, t]} \subset K$ e portanto $\alpha|_{[0, t]} \subset K$. Como isto vale para qualquer $t > 0$, concluiríamos que $\alpha[0, +\infty) \subset K$. Mas segundo a proposição 3.13 de (BEEM *et al.*, 1996), não pode haver curvas causais futuro-inextensíveis contidas em um compacto, quando o espaço-tempo é globalmente hiperbólico. Portanto, concluímos que $t_k \rightarrow a$ e com isso, $\alpha[0, a] \subset K$ e $\alpha(a) \in B$. Como B é disjunto de A , segue que $a \neq 0$ e portanto $\alpha|_{[0, a]} \in \mathcal{C}_K(A, B)$.

Dado qualquer $\varepsilon > 0$, eventualmente temos $t_k < a + \varepsilon$. Como o comprimento de arco Lorentziano é não decrescente a medida que se percorre a curva, temos $L(\alpha_k|_{[0, t_k]}) \leq L(\alpha_k|_{[0, a+\varepsilon]})$. Pela semi-continuidade superior do comprimento de arco Lorentziano, temos $\limsup L(\alpha_k|_{[0, a+\varepsilon]}) \leq L(\alpha|_{[0, a+\varepsilon]})$, dando que $\limsup L(\alpha_k|_{[0, t_k]}) \leq L(\alpha|_{[0, a+\varepsilon]})$. Portanto, pela escolha das α_k , não pode ocorrer de termos $d[K](A, B) = +\infty$. Temos então

$$L(\alpha_k|_{[0, a+\varepsilon]}) \geq L(\alpha_k|_{[0, t_k]}) > d[K](A, B) - \frac{1}{k}$$

$$\stackrel{k \rightarrow +\infty}{\Longleftarrow} d[K](A, B) \leq L(\alpha|_{[0, a+\varepsilon]}).$$

Como por outro lado, pela definição temos que $L(\alpha|_{[0, a]}) \leq d[K](A, B)$, tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, concluímos que $L(\alpha|_{[0, a]}) = d[K](A, B)$. ■

Definição 2.2.7. Seja (M, g) variedade Lorentziana (com ou sem bordo). A *distância Lorentziana* $\tau : M \times M \rightarrow [0, +\infty]$ é definida por:

$$\tau(p, q) = \begin{cases} \sup_{\alpha} \{L_g(\alpha)\}, & \text{se } p \leq q; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

⁸ Na seção 4.5 mostraremos como estender a classificação causal para curvas que são contínuas e possivelmente não são nem suave por partes.

⁹ Este lema será apresentado e melhor discutido na seção 4.5.

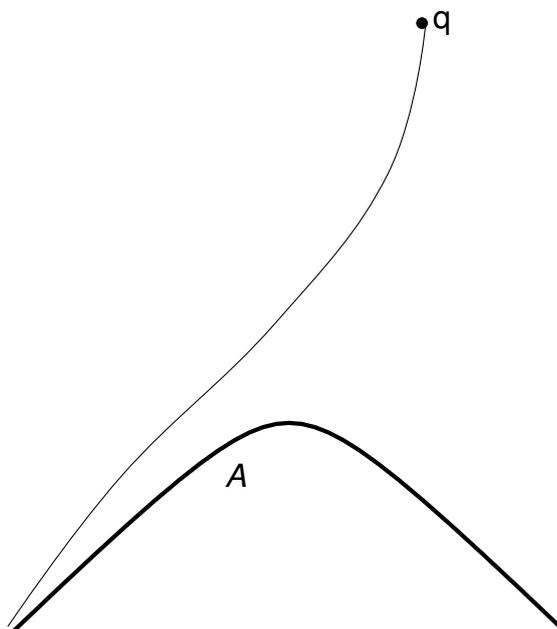
onde o supremo é tomado sobre todas as curvas causais futuro-dirigidas conectando p e q .

A despeito do nome, é importante notar essa função tem pouco a ver com o que estamos acostumados a pensar sobre distância. A expressão $\tau(p, q)$ também pode por vezes ser referida como *separação temporal entre p e q* . A distância Lorentziana em geral não é simétrica, pode ser igual a zero para pontos distintos e pode assumir valor infinito inclusive quando aplicada entre o mesmo ponto. A partir dessa definição, podemos obter outras formas derivadas desse objeto, como a distância Lorentziana entre ponto e conjunto: se $A \subset M$ então $\tau_A^+ : M \rightarrow [0, +\infty]$ é definida como $\tau_A^+(q) = \tau(A, q)$ e é dada por:

$$\begin{cases} \sup\{\tau(p, q) : p \in A\} & \text{se } q \in J^+(A); \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Ela pode ser interpretada fisicamente como o maior tempo que se leva para sair de qualquer ponto de A e chegar em q . Novamente, pode ocorrer do resultado ser infinito como demonstra a figura 16.

Figura 16 – Ramo de hipérbole dentro do espaço-tempo de Minkowski.



Proposição 2.2.6. *A distância Lorentziana $\tau : M \times M \rightarrow [0, +\infty]$ é semi-contínua inferiormente.*

Demonstração. Proposição 3.11 de (SOLIS, 2006). ■

O exemplo 14.18 de (O'NEILL, 1983) mostra que em geral a distância Lorentziana não é semi-contínua superiormente, mas mais adiante obteremos uma condição sobre (M, g) que garante a continuidade de τ .

2.2.3 Extensão de espaços-tempo com bordo

Com a proposição (1.2.2), obtemos uma forma de estender um espaço-tempo com bordo para uma variedade sem bordo é escolher $N = \partial M \times [0, 1)$, cujo bordo é $\partial M \times \{0\}$, que é trivialmente difeomorfo ao bordo de M . Portanto podemos definir $M' := M \cup_h (\partial M \times [0, 1))$, sendo h o difeomorfismo trivial mencionado, obtendo assim uma variedade suave sem bordo que possui uma cópia de M como fechado. O objetivo da próxima proposição é também estender a estrutura métrica e causal do espaço-tempo com bordo original a uma variedade sem bordo de mesma dimensão que a contenha.

Teorema 2.2.7. *Se (M, g) é espaço-tempo com bordo, então existe espaço-tempo sem bordo (\bar{M}, \bar{g}) tal que M é domínio regular em \bar{M} , $\bar{g}|_M = g$, e tal que a restrição da orientação temporal de (\bar{M}, \bar{g}) a (M, g) coincide com a orientação temporal de (M, g) .*

Demonstração. Começamos vendo que como (M, g) é espaço-tempo, existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tipo-tempo, futuro-dirigido em todo lugar. Definindo M' como na consideração acima, usamos o lema 8.6 de (LEE, J. M., 2012) para estender X para um $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M')$. Como o conjunto onde \tilde{X} eventualmente se anula é fechado de M' disjunto de M , podemos supor que ele é não nulo em todo M' , sem perda de generalidade.

Agora, para estender a métrica e fazer que \tilde{X} produza um orientação temporal em M' , tomamos uma família de cartas de M' por abertos conexos $\{\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)\}$, $\alpha \in \Lambda$, tal que a união dos \mathcal{U}_α contém M e ainda cada aberto, ou está contido no interior de M , ou sua interseção com ∂M é não vazia e satisfaz:

- $\mathcal{U}_\alpha \cap M = \{p \in \mathcal{U}_\alpha; x_\alpha^n(p) \geq 0\}$;
- $\mathcal{U}_\alpha \cap \partial M = \{p \in \mathcal{U}_\alpha; x_\alpha^n(p) = 0\}$.

Nesse caso, $(\mathcal{U}_\alpha \cap M, \varphi|_{\mathcal{U}_\alpha \cap M})$ é carta de bordo para M . Para cada $\alpha \in \Lambda$ tal que $\mathcal{U}_\alpha \cap \partial M \neq \emptyset$, escreva em $\mathcal{U}_\alpha \cap M$:

$$g_{ij}^\alpha = g \left(\tilde{X}|_{\mathcal{U}_\alpha} = \tilde{X}_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}; \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \Big|_{\mathcal{U}_\alpha \cap M}, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} \Big|_{\mathcal{U}_\alpha \cap M} \right).$$

Note que para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\Psi_{ij}^\alpha := g_{ij}^\alpha \circ (\varphi_\alpha|_{\mathcal{U}_\alpha \cap M})^{-1}$ é suave em $\mathbb{H}^n \cap \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)$. Portanto existe aberto conexo $\tilde{\mathcal{V}}_\alpha \subset \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)$ de \mathbb{R}^n com $\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \cap \mathbb{H}^n \subset \tilde{\mathcal{V}}_\alpha$ e $\tilde{\Psi}_{ij}^\alpha \in C^\infty(\tilde{\mathcal{V}}_\alpha)$ estendendo Ψ_{ij}^α . Ponha $\tilde{\mathcal{U}}_\alpha := \varphi_\alpha^{-1}(\tilde{\mathcal{V}}_\alpha)$, $\tilde{g}_{ij}^\alpha := \tilde{\Psi}_{ij}^\alpha \circ \varphi_\alpha|_{\tilde{\mathcal{U}}_\alpha}$. Diminuindo $\tilde{\mathcal{V}}_\alpha$ se necessário, e logo $\tilde{\mathcal{U}}_\alpha$, podemos assumir que o tensor $(0, 2)$

$$\tilde{g}^\alpha = \tilde{g}_{ij}^\alpha dx_\alpha^i \otimes dx_\alpha^j$$

é métrica de Lorentz em $\tilde{\mathcal{U}}_\alpha$. Mais ainda, podemos assumir, novamente diminuindo $\tilde{\mathcal{U}}_\alpha$ se necessário, que $\tilde{g}_\alpha(\tilde{X}, \tilde{X}) < 0$. Dessa forma, defina uma nova cobertura aberta de M por

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathcal{U}}_\alpha, \text{ se } \mathcal{U}_\alpha \cap \partial M \neq \emptyset; \\ \tilde{\mathcal{U}}_\alpha := \mathcal{U}_\alpha \text{ se } \mathcal{U}_\alpha \cap \partial M = \emptyset \text{ e, nesse caso, ponha } \tilde{g}^\alpha = g^\alpha \end{array} \right\}.$$

Assim, note que $\bar{M} := \bigcup_\alpha \tilde{\mathcal{U}}_\alpha$ é uma subvariedade conexa sem bordo aberta de M' , que contém M ; portanto podemos daqui para frente trabalhar apenas com \bar{M} . Defina agora as métricas Riemannianas h^α em \mathcal{U}_α dadas por:

$$\frac{2\tilde{g}^\alpha(\tilde{X}|_{\tilde{\mathcal{U}}_\alpha}, \cdot)\tilde{g}^\alpha(\tilde{X}|_{\tilde{\mathcal{U}}_\alpha}, \cdot)}{|\tilde{g}^\alpha(\tilde{X}|_{\tilde{\mathcal{U}}_\alpha}, \tilde{X}|_{\tilde{\mathcal{U}}_\alpha})|} + \tilde{g}^\alpha.$$

Para ver que as métricas são de fato positivas-definidas, note que calculada em qualquer vetor ortogonal (em relação a \tilde{g}^α) a \tilde{X} , h^α fica igual a \tilde{g}^α segundo a qual estes são tipo-espaço. Quando h^α é calculado no próprio \tilde{X} , é fácil ver que o resultado é também maior que zero (verificaremos isso logo a seguir). Seja $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ partição suave da unidade subordinada à cobertura aberta $\{\tilde{\mathcal{U}}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de \bar{M} . Defina portanto $h = \sum_\alpha f_\alpha h_\alpha$, que será métrica Riemanniana em \bar{M} . Seja agora V o campo na direção de \tilde{X} , unitário em relação à métrica h . Defina finalmente $\bar{g} = -2V^b \otimes V^b + h$, que vemos imediatamente ser uma métrica Lorentziana definida em toda variedade M' e com respeito à qual V é temporal e unitário. Adotemos a orientação temporal em (\bar{M}, \bar{g}) para a qual V é futuro-dirigido. Devemos por fim verificar que essa nova métrica coincide com g em M . Primeiro fixe $p \in M$ e notemos que:

$$\begin{aligned} h_p(X_p, X_p) &= \sum_\alpha f_\alpha(p) h_{\alpha p}(X_p, X_p) = \sum_\alpha f_\alpha(p) \left[2g'_{\alpha p} \left(X_p, \frac{X_p}{\sqrt{|g'_{\alpha p}(X_p, X_p)}} \right)^2 + g'_{\alpha p}(X_p, X_p) \right] \\ &= \sum_\alpha f_\alpha(p) \left[\frac{2g'_{\alpha p}(X_p, X_p)^2}{|g'_{\alpha p}(X_p, X_p)|} + g'_{\alpha p}(X_p, X_p) \right] = \\ &= \sum_\alpha f_\alpha(p) [-2g'_{\alpha p}(X_p, X_p) + g'_{\alpha p}(X_p, X_p)] = \\ &= -\sum_\alpha f_\alpha(p) g'_{\alpha p}(X_p, X_p) = -g_p(X_p, X_p) \sum_\alpha f_\alpha(p) = -g_p(X_p, X_p). \end{aligned}$$

Finalmente, tome $p \in M$ e $y \in T_pM$ e escreva $y = AX_p + y^\perp$. Daí, temos:

$$\begin{aligned}
 \bar{g}(y, y) &= -2h\left(AX_p, \frac{X_p}{\sqrt{h(X_p, X_p)}}\right)^2 + h(y, y) = \\
 &= -\frac{2A^2h(X_p, X_p)^2}{h(X_p, X_p)} + \sum_{\alpha} f_{\alpha} \left[2g'_{\alpha}\left(AX_p, \frac{X_p}{\sqrt{|g'_{\alpha}(X_p, X_p)|}}\right)^2 + g'_{\alpha}(y, y) \right] \\
 &= -2A^2h(X_p, X_p) + \left[\frac{2A^2g(X_p, X_p)^2}{|g(X_p, X_p)|} + g(y, y) \right] \sum_{\alpha} f_{\alpha} \\
 &= g(y, y) + 2A^2(-h(X_p, X_p) - g(X_p, X_p)) = g(y, y).
 \end{aligned}$$

■

Parte II

O Teorema de Gannon–Lee

3 RESTRIÇÕES TOPOLÓGICAS

Como as equações de campo de Einstein (1) são justamente equações diferenciais, elas têm um caráter eminentemente local, de modo que *a priori* não impõem qualquer restrição à topologia do espaço-tempo. Portanto é perfeitamente natural se perguntar se qualquer topologia pode aparecer como solução das equações de Einstein. Conforme o teorema 10.2.2 de (WALD, 1984) resposta é sim, no seguinte sentido: se (Σ^{m-1}, h) é variedade Riemanniana e K é campo tensorial (0,2) simétrico sobre Σ , então sob determinadas hipóteses sobre h e K , temos a existência de um único espaço-tempo globalmente hiperbólico (M^m, g) tal que:

- $\Sigma \subset M$, e é hipersuperfície de Cauchy suave em (M, g) ;
- h e K são respectivamente a métrica induzida e segunda forma fundamental de Σ ;
- (M, g) é solução de vácuo das equações de Einstein;
- (M, g) é maximal em relação a essas propriedades.

Em contraste, em nossa experiência cotidiana ou mesmo na investigação cósmica, eventuais irregularidades topológicas não são conspícuas¹. Uma tal irregularidade topológica bastante conhecida na cultura popular são os chamados *buracos de minhoca* que nada mais são do que "alças" conectando regiões distantes do espaço-tempo, vide a figura 18. No artigo (MORRIS *et al.*, 1988) sobre o assunto, os autores discutem quais restrições as leis da física impõem à existência e estabilidade de tais estruturas. Mostra-se que a mera existência de uma topologia tipo buraco de minhoca não requer nenhum espaço-tempo excessivamente exótico. De fato, a extensão maximal do espaço-tempo de Schwarzschild, Schwarzschild-Kruskal fornece um exemplo disso. Este espaço-tempo contém duas cópias isométricas do espaço-tempo de Schwarzschild, um composto pelas regiões I e II, outro pelas regiões III e IV, conforme a figura 10. A topologia desse espaço-tempo é um produto $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$; na figura representamos apenas o fator \mathbb{R}^2 , mas cada ponto deve ser pensado como correspondendo a uma esfera \mathbb{S}^2 .

Remetendo ao exemplo 2.1.6, é fácil ver que cada hipersuperfície correspondente a um valor fixado para T é uma subvariedade tipo-espaço. Para valores de $T < -1$, a hipersuperfície é desconexa, tendo uma parte na região IV e outra na região I. Quando $T = -1$, a hipersuperfície se torna conexa, conectando as duas regiões distantes, até que em $T = 1$ ocorre a separação novamente. O processo é melhor ilustrado na figura 17.

¹ "Irregularidade" é um termo vago, mas no contexto que nos interessará aqui, é simplesmente forma de se referir a uma topologia com primeiro grupo de homotopia não trivial.



Figura 17 – Evolução do buraco de minhoca em Schwarzschild-Kruskal para valores de $T < -1$, $T = -1$, $T = 0$, $T = 1$, $T > 1$, (COLLAS; KLEIN, 2012).

Entretanto, a dificuldade surge quando se pergunta sobre a possibilidade de curvas causais atravessarem essa abertura. No caso apresentado aqui, isso não é possível, pois como se mostra, as curvas causais que atravessam o horizonte de eventos não conseguem evitar a singularidade.

De modo geral, em (MORRIS *et al.*, 1988) os autores discutem que a existência de uma estrutura com estabilidade suficiente para permitir a travessia de duas vias por curvas causais seria necessário a violação da chamada *condição fraca de energia*. Se isso seria possível ou não, é uma pergunta que os autores encaminham para a investigação quântica da gravidade. Entretanto, veremos adiante que a própria estrutura geométrica do espaço-tempo já coloca limitações severas sobre essa possibilidade.

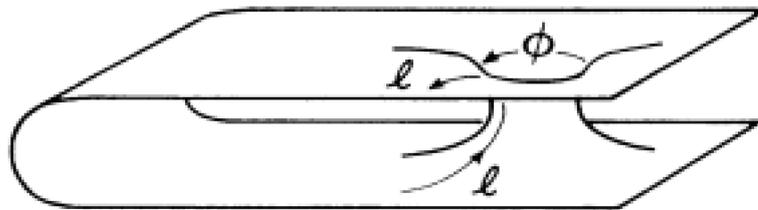


Figura 18 – Buraco de minhoca em um instante específico.(MORRIS *et al.*, 1988)

3.1 CONDIÇÕES DE CONVERGÊNCIA

Antes de chegarmos ao teorema propriamente, cabe introduzir algumas condições sobre a curvatura da variedade. A motivação destas vem da razoabilidade física do conteúdo energético do sistema, traduzidas em termos geométricos via equações de Einstein. Por exemplo, a matéria usual que compõe pequena (mas é a que temos mais contato) parte do universo tem densidade volumétrica de energia positiva. Isso se formaliza através da *condição de energia luminosa*: $T(v, v) > 0$ para todo v tipoluz, onde T é o tensor de energia-momento do sistema em questão. Com alguma

manipulação algébrica, podemos reescrever as equações (1) como

$$\text{Ric} - \frac{2\Lambda}{n-2}g = T - \frac{\text{tr}(T)}{n-2}g,$$

onde n é a dimensão da variedade. Com isso vemos que, sob a vigência das equações de Einstein, a condição de energia luminosa é equivalente a exigir que $\text{Ric}(v, v) > 0$ para todo v tipo-luz. Esta e outras condições sobre o tensor de Ricci, independente do significado físico serão importantes ferramentas para obter resultados de interesse geométrico.

Definição 3.1.1. Dizemos que a variedade Lorentziana (M, g) satisfaz a

- *condição de convergência temporal*, se $\text{Ric}(v, v) \geq 0, \forall v$ tipo-tempo;
- *condição de convergência luminosa*, se $\text{Ric}(v, v) \geq 0, \forall v$ tipo-luz.

Observação 3.1.1. *Veja que por continuidade a primeira implica a segunda.*

3.2 O TEOREMA

Como muito da geometria Lorentziana foi desenvolvido a partir da teoria geral da relatividade, (GANNON, 1975) e (LEE, C. W., 1976) demonstraram esse resultado para espaços-tempo de dimensão 4, tendo só mais recentemente o resultado sido generalizado para dimensões maiores, vide (COSTA E SILVA, 2010). Em seu artigo de 2010, o autor lida com hipóteses bastante gerais, buscando ser o menos restritivo possível. Aqui, reproduzimos suas ideias para a situação em que trabalhamos no restante do trabalho e que dá conta de todas as hipóteses necessárias - quando o espaço-tempo é globalmente hiperbólico. Pelo resto desta parte do trabalho, *sempre suporemos que o espaço-tempo de interesse é sem bordo e com dimensão $n \geq 3$.*

Antes, cabe mencionar que se Σ é hipersuperfície conexa, dizemos que uma subvariedade compacta e conexa $S \subset \Sigma$ *separa* Σ se $\Sigma \setminus S$ não é conexo. Quando isso ocorre, podemos escrever $\Sigma \setminus S = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$, onde a partição significa respectivamente a parte de Σ que está fora e a que está dentro de S , lembrando que de modo geral essa denominação é uma questão de convenção, vide a seção 2.1.2.

Definição 3.2.1. Seja (M^n, g) espaço-tempo globalmente hiperbólico e $\Sigma \subset M$ hipersuperfície espacial, suave, conexa e de Cauchy². Dizemos que Σ é *assintoticamente regular*, se existe subvariedade suave, compacta e conexa $S^{n-2} \subset \Sigma$ tal que

1. S *separa* Σ e $S \cup \Sigma_+$ não é compacto;

² Note que sob as hipóteses vigentes sobre (M, g) , sempre é possível encontrar uma hipersuperfície de Cauchy com tais propriedades.

2. o homomorfismo $h_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(S \cup \Sigma_+)$, induzido pela inclusão $h : S \rightarrow S \cup \Sigma_+$, é sobrejetor;
3. θ_- , como na observação (2.1.3), é menor que 0 em todos os pontos de S .

Chamamos S de uma *superfície limitante* em Σ .

Veja que a segunda condição sobre S é a formalização da ideia de que todas eventuais "anormalidades" topológicas (ou mais precisamente, no grupo fundamental) de Σ ficam concentradas dentro de uma região compacta e não espalhadas por toda hipersuperfície. De fato, como o homomorfismo é sobrejetor, qualquer laço em Σ , pode ser continuamente deformado para outro em S , significando que fora de S não há nenhum obstáculo. A situação mais comum nas situações de interesse físico - a que foi adotada por Gannon e Lee - é que simplesmente essa região de Σ seja difeomorfa a $S \times \mathbb{R}$.

Lema 3.2.1. *Seja (M^n, g) , $n \geq 3$ espaço-tempo tipo-luz geodesicamente completo³ satisfazendo a condição de convergência luminosa. Suponha que (M, g) seja globalmente hiperbólico, com $\Sigma \subset M$ hipersuperfície de Cauchy assintoticamente regular. Então, se $S \subset \Sigma$ é superfície limitante, temos que $S \cup \Sigma_-$ é compacto.*

Demonstração. Para demonstrar o resultado mostraremos que $S \cup \Sigma_-$ é imagem de um compacto T via uma função contínua ρ .

Defina $T = \partial I^+(\Sigma_+) \setminus \Sigma_+$ e fixe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tipo-tempo, futuro-dirigido. Como (M, g) é globalmente hiperbólico, todas as curvas integrais de X eventualmente intersectam (uma única vez) Σ . Com isso, para cada $p \in M$ defina $\rho(p)$ como o ponto sobre Σ da curva integral de X que passa por p . Veja que $\rho|_\Sigma = Id_\Sigma$, e um argumento simples usando de seqüências mostra que ρ é aplicação aberta.

Como S é compacta, existe um $k_0 < 0$ tal que $\theta_-(p) \leq k_0$, para todo $p \in S$. Ponha $b = -\frac{1}{k_0}$ e defina $B = \{tK_-(p) \in NS : p \in S, 0 \leq t \leq b\}$, onde NS é o fibrado normal de S em M . Veja que B é compacto pois é a imagem do compacto $S \times [0, b]$ pela função contínua $(t, p) \mapsto tK_-(p)$. Como por hipótese M é tipo-luz geodesicamente completo, temos que B está contido no domínio da exponencial normal exp_S e portanto $exp_S(B) \subset M$ também é compacto.

Vejam que $T \subset E^+(S) := J^+(S) \setminus I^+(S)$. Como (M, g) é globalmente hiperbólico, S compacto implica que $J^+(S)$ é fechado, de modo que $E^+(S) = \partial J^+(S) = \partial I^+(S)$. Tome $p \in T$. Se $p \in \partial_\Sigma \Sigma_+ = S \subset E^+(S)$ o resultado está pronto. Então suponha que $p \notin \partial_\Sigma \Sigma_+$. Dessa forma, como $T \cap \Sigma_+ = \emptyset$ existe uma vizinhança $p \in \mathcal{U} \subset M$ que não intersecta $S \cup \Sigma_+$. Tome quaisquer $p_\pm \in I^\pm(p) \cap \mathcal{U}$. Como $\partial I^+(S)$ é acronal, temos que $p_- \notin I^+(\Sigma_+)$, ao passo que $p_+ \in I^+(\Sigma_+)$, devido a "transitividade forte" da relação cronológica. Em particular, temos que $I^+(p_+) \cap \Sigma$ é não vazio e intersecta Σ_+ .

³ Isso quer dizer que toda geodésica tipo-luz inextensível está definida sobre \mathbb{R} inteiro.

Sabemos que $p \in I^+(\Sigma)$ e se necessário, podemos diminuir \mathcal{U} de modo que $\mathcal{U} \subset I^+(\Sigma)$. Como $p_- \in I^+(\Sigma)$ e não está em $I^+(\Sigma_+)$, segue que $p_- \in I^+(\Sigma_-)$. Como $p_- \ll p \ll p_+$, segue que $\Gamma(p_+) \cap \Sigma$ deve intersectar Σ_- . Agora, se $q, q' \in \Gamma(p_+) \cap \Sigma$, como $\Gamma(p_+)$ é conexo por caminhos, existe curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Gamma(p_+) \cap J^+(\Sigma)$ ligando q e q' , de modo que $\rho \circ \alpha$ é uma curva conectando os mesmos dois pontos, mas inteiramente contida em $\Gamma(p_+) \cap \Sigma$, dando que $\Gamma(p_+) \cap \Sigma$ também é conexo por caminhos, em particular é conexo. Pelo teorema da alfândega, como $\Gamma(p_+) \cap \Sigma$ é conexo, e tem interseção tanto com Σ_+ como com Σ_- , temos que $\Gamma(p_+) \cap S \neq \emptyset$. Mas então, temos que $p_+ \in I^+(S)$, e portanto que \mathcal{U} tem interseção com $I^+(S)$ quanto com seu complementar, e assim, $p \in \partial I^+(S)$.

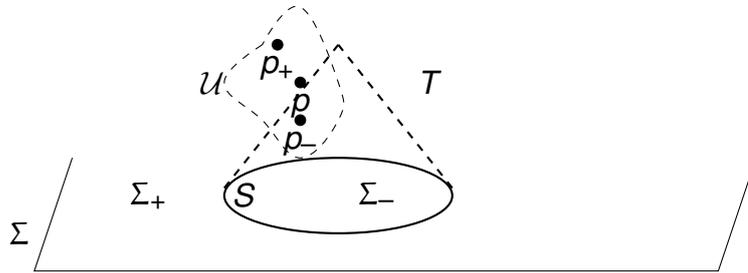


Figura 19 – Esquema da demonstração.

Vejam agora que T é compacto. Dado $p \in T$, ou $p \in \partial_\Sigma \Sigma_+ = S \subset \text{exp}_S(B)$, ou então pela argumentação anterior, p estando em $E^+(S)$, existe um gerador geodésico luminoso futuro-dirigido $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ com imagem em $\partial I^+(\Sigma_+)$, $\gamma(0) = q \in S$, $\gamma(1) = p$ e sem pontos focais antes de p . Como $\gamma'(0)$ é vetor luminoso futuro-dirigido, devemos ter que $\gamma'(0) = sK_\pm(q)$, para algum $s > 0$. Se $\gamma'(0)$ estivesse na direção de $K_+(q)$, teríamos algum $0 < \delta < 1$ tal que $\gamma(\delta) \in I^+(\Sigma_+)$, o que implicaria que $p \in I^+(\Sigma_+)$, o que já vimos ser contradição. Portanto temos que $\gamma'(0) = sK_-(q)$. Assim, pela ausência de pontos focais antes de p e valendo a condição de convergência luminosa, nos valendo da proposição 10.43 de (O'NEILL, 1983), temos que

$$\begin{aligned} -1 &\geq \frac{1}{-s\theta_-(q)} \geq \frac{1}{sk_0} = -\frac{b}{s} \\ \implies s &\leq b, \end{aligned}$$

e portanto que $\gamma'(0) \in B$. Assim, $p = \gamma(1) = \text{exp}_S(\gamma'(0))$, concluindo que $T \subset \text{exp}_S(B)$. Como T é fechado e $\text{exp}_S(B)$ é compacto, segue que T é compacto.

Por fim, vejamos que $\rho(T) = \Sigma_- \cup S$. Suponhamos que ocorresse $\rho(T) \neq \Sigma_- \cup S$. Claramente, como inclusive ilustra a figura 19, temos $\rho(T) \subset \Sigma_- \cup S$, donde $\Sigma_- \cup S \setminus \rho(T) \neq \emptyset$. Por outro lado, $S \subset T$, o que implica $S = \rho(S) \subset \rho(T)$ e com isso, $\Sigma_- \cup S \setminus \rho(T) \subset \Sigma_-$, concluindo que $\partial_\Sigma \rho(T) \cap \Sigma_- \neq \emptyset$. Tomemos então um $p \in \partial_\Sigma \rho(T) \cap \Sigma_-$. Como $\rho(T)$ é compacto (portanto fechado, portanto contém seu bordo), podemos escrever $p = \rho(q)$ para algum $q \in T$. Se $q \in S$, então $q = \rho(q) = p \in \Sigma_-$, o que é contraditório,

portanto podemos assumir que $q \in \partial I^+(\Sigma_+ \cup S) \setminus (\Sigma_+ \cup S)$. Como este conjunto é uma hipersuperfície topológica, podemos tomar uma vizinhança $q \in \mathcal{V} \subset M$, com $\mathcal{V} \cap \Sigma = \emptyset$, $\mathcal{V} \cap T$ aberto em $\partial I^+(\Sigma_- \cup S) \setminus (\Sigma_- \cup S)$ e $\rho(\mathcal{V}) \subset \Sigma_-$.

Seja agora $\Psi : \mathcal{W} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ um fluxo local de X ao redor de q , com $Im(\Psi) \subset \mathcal{V}$. Defina $\Psi_0 := \Psi|_{(\mathcal{W} \cap T) \times (-\epsilon, \epsilon)}$, que é claramente injetora, dado que T é acronal. Portanto, pela invariância de domínio, $Im(\Psi_0)$ é aberto em M e Ψ_0 é um homeomorfismo sobre $Im(\Psi_0)$. Veja agora que, como $q \in \mathcal{U}_0 \cap T$, tem-se $p \in \rho(\mathcal{U}_0 \cap T)$ que, pela forma que ρ é construído, é igual a $\rho(Im(\Psi_0))$. Este conjunto por sua vez é aberto em Σ pois ρ é aplicação aberta, o que significa que p está no interior de $\rho(T)$ na topologia de Σ . Mas isso viola a suposição que p era um ponto no bordo de $\rho(T)$, e portanto a suposição inicial deve ser falsa e fica estabelecido a afirmação inicial e o resultado como um todo. ■

Teorema 3.2.2 (Teorema de Gannon–Lee). *Seja (M^n, g) , $n \geq 3$ espaço-tempo tipo-luz geodesicamente completo satisfazendo a condição de convergência luminosa. Suponha que (M, g) seja globalmente hiperbólico, com $\Sigma \subset M$ hipersuperfície de Cauchy assintoticamente regular. Então, se $S \subset \Sigma$ é superfície limitante, o homomorfismo $\iota_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(\Sigma)$ induzido pela inclusão é sobrejetor.*

Demonstração. Seja $\pi : \bar{M} \rightarrow M$ recobrimento suave e conexo de M tal que $\pi_*(\pi_1(\bar{M})) = j_*(\pi_1(S))$ (existe, devido ao lema 10.1 de (MASSEY, 1991)), onde $j : S \hookrightarrow M$ é a inclusão. Já sabemos como transformar \bar{M} num espaço-tempo a partir das estruturas em M , de forma que sejam localmente isométricos. Como (M, g) é globalmente hiperbólico sabemos, conforme (GEROCH, 1970), que M é homeomorfo a $\Sigma \times \mathbb{R}$, de modo que concluímos que $\pi_1(M) \cong \pi_1(\Sigma)$. Com isso, temos que $\bar{\Sigma} := \pi^{-1}(\Sigma)$ é conexo⁴. Assim, $\pi|_{\bar{\Sigma}}$ também é recobrimento conexo de Σ . Se pudermos mostrar que $\pi|_{\bar{\Sigma}}$ é um difeomorfismo, o resultado segue. De fato, se for esse o caso, denotemos $\bar{m} : \bar{\Sigma} \hookrightarrow \bar{M}$; $\iota : S \hookrightarrow \Sigma$ as respectivas inclusões e tomemos $y \in \pi_1(\Sigma)$. Temos então $m_*(y) = (\pi \circ \bar{m} \circ \pi|_{\bar{\Sigma}}^{-1})_*(y) \in \pi_*(\pi_1(\bar{M})) = j_*(\pi_1(S))$, pela escolha de π . Portanto existe $x \in \pi_1(S)$ tal que $m_*(y) = j_*(x) = (m \circ \iota)_*(x) = m_*(\iota_*(x))$ e então temos $y = \iota_*(x)$, dando que ι_* é sobrejetor.

Agora devemos verificar que $\pi|_{\bar{\Sigma}}$ de fato é difeomorfismo. Começamos fixando uma deformação local de S , $F : S \times (-1, 1) \rightarrow \Sigma$, de modo que $F(p, s)$ fique em Σ^- para $s < 0$; em Σ^+ para $s > 0$ e seja igual a p para $s = 0$. Defina $V = F(S \times (-1, 0) \cup S \cup \Sigma^+)$. Definido dessa forma, V pode ser claramente retraído sobre $S \cup \Sigma^+$, dando que $\pi_1(V)$ e $\pi_1(S \cup \Sigma^+)$ são isomorfos. Mostraremos que para cada componente \bar{V} de $\pi_{\bar{\Sigma}}^{-1}(V)$,

⁴ Isso segue pois se x é uma classe de curvas em $\bar{\Sigma}$, $\pi|_{\bar{\Sigma}}(x) \in \pi_1(\Sigma)$. Como os grupos fundamentais de Σ e M são isomorfos, em particular podemos fazer o levantamento da inclusão $m : \Sigma \hookrightarrow M$ e obter um elemento de $\pi_1(\bar{M})$. Fazendo a mesma coisa na outra direção obtemos que $\pi_1(\bar{M})$ e $\pi_1(\bar{\Sigma})$ também são isomorfos. Como por hipótese \bar{M} é conexo, segue que $\bar{\Sigma}$ também é conexo.

a restrição $\pi_{\bar{V}} : \bar{V} \rightarrow V$ é um difeomorfismo. Como se trata de uma aplicação de recobrimento suave, já sabemos que é um difeomorfismo local, restando verificar que é injetora. Para esse fim, tomamos $p', q' \in \bar{V}$ tais que $\pi_V(p') = \pi_V(q') = p \in V$ e consideramos um caminho $\alpha : [0, 1] \rightarrow \bar{V}$ ligando p' e q' . Dessa forma, $\pi \circ \alpha$ é um laço em V , cujo grupo fundamental é isomorfo ao de $S \cup \Sigma^+$. Este por sua vez, pela hipótese de Σ ser assintoticamente regular, corresponde a um subgrupo de $\pi_1(S)$ e ainda, pela escolha de π , temos que existe um laço β em \bar{M} homotópico a pontos fixos com α , dando que $p' = q'$, como queríamos. Finalmente, supomos que π_Σ não fosse um difeomorfismo. Então, como $S \subset V$, cada componente conexa de $\pi_\Sigma^{-1}(S)$ é uma cópia difeomorfa de S que separa $\bar{\Sigma}$, e deve existir pelo menos duas dessas componentes. Sejam S_1, S_2 quaisquer duas dessas cópias de S respectivamente contidas nas componentes V_1, V_2 de $\pi_\Sigma(V)$, que por sua vez são cópias disjuntas de V contidas em $\bar{\Sigma}$. Veja que em cada componente de $\pi_\Sigma(V)$, e em particular em V_1 e V_2 , temos uma cópia difeomorfa de $S \cup \Sigma^+$, as quais denotamos respectivamente por $C_i \subset V_i, i = 1, 2$. Como $\bar{\Sigma}$ é conexa e é separada por S_1, S_2 deve estar contida em $S \cup \bar{\Sigma} \setminus C_1$, pois caso contrário V_1 teria interseção com V_2 . Entretanto, pelo lema 3.2.1, com as hipóteses que vigoram sobre $\bar{\Sigma}, S_1$ e (\bar{M}, \bar{g}) , temos que $S \cup \bar{\Sigma} \setminus C_1$ deve ser compacto. Mas C_2 , como todas as cópias de $S \cup \Sigma^+$, é um fechado não-compacto, então não poderia estar contido em um compacto. Portanto a suposição de que π_Σ não é difeomorfismo é falsa, e o resultado segue. ■

Veja que uma consequência particular imediata do teorema é que *se S é simplesmente conexa, então Σ também o é*. Mais ainda, o significado geométrico desse resultado fica mais claro quando o colocamos em uma espécie de contra-positiva: Se temos um espaço-tempo globalmente hiperbólico que satisfaz a condição de convergência luminosa, que possui hipersuperfície de Cauchy assintoticamente regular que não é simplesmente conexa mas que admite uma superfície limitante que é simplesmente conexa, então existe pelo menos uma geodésica luminosa inextensível que não é completa.

A interpretação física tradicional desse tipo de singularidade é de que buracos de minhoca são *instáveis* na presença de certas condições fisicamente naturais sobre o conteúdo de matéria-energia do universo. A singularidade significaria um "colapso" dessas estruturas similar ao discutido para a solução de Schwarzschild. É mostrado em (MORRIS *et al.*, 1988) que a necessidade de "materiais exóticos" de um tipo atualmente desconhecido pelos físicos seria em princípio necessário para estabilizar essas estruturas.

Para ilustrar a aplicação do teorema, consideremos o quociente do espaço-tempo de Schwarzschild–Kruskal pelo subgrupo do grupo de isometrias gerado pela isometria $(T, X, p) \mapsto (T, -X, -p)$, onde (T, X) são as coordenadas no plano de Kruskal e $p \in \mathbb{S}^2$. Veja que tomando o quociente, os pontos com $X = 0$ passam a carregar um

fator \mathbb{RP}^2 , ao invés de \mathbb{S}^2 .

As hipersuperfícies de Cauchy de Schwarzschild–Kruskal são homeomorfas a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$, e por isso simplesmente conexas. Após o quociente, essas hipersuperfícies sofrem identificações: o quociente "quebra" o fator \mathbb{R} ao meio e então consideramos $(0, +\infty) \times \mathbb{S}^2 \sim \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \sim \mathbb{S}^3 \setminus \{N, S\}$; portanto, quocientando este conjunto por $p \mapsto -p$ obtemos $\mathbb{RP}^3 \setminus \{[N]\}$. O espaço-tempo quociente é ainda globalmente hiperbólico, mas suas hipersuperfícies de Cauchy são agora homeomorfas à soma conexa (a operação definida na proposição 1.2.2) $\mathbb{RP}^3 \# \mathbb{R}^3$.

Esse espaço-tempo, que tem o espaço-tempo de Schwarzschild–Kruskal como seu recobrimento universal, é conhecido como $geon\text{-}\mathbb{RP}^3$.

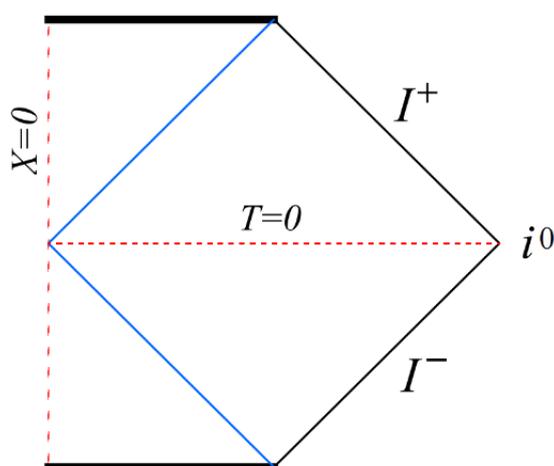


Figura 20 – $geon\text{-}\mathbb{RP}^3$. (Mann, R. B. et al. 2017)

Como o $geon\text{-}\mathbb{RP}^3$ obtém-se via um quociente por uma isometria de Schwarzschild–Kruskal, é localmente isométrico a este; por isso trata-se ainda de uma solução de vácuo das equações de Einstein. Em particular, satisfaz a condição de convergência luminosa. Admite também hipersuperfícies de Cauchy suaves, que como vimos já não são simplesmente conexas, mas são no entanto assintoticamente regulares, com superfícies limitantes difeomorfas a \mathbb{S}^2 . Portanto, segue do teorema de Gannon–Lee que o espaço-tempo precisa ter ao menos uma geodésica tipo-luz incompleta. Estas são claramente identificadas olhando para geodésicas luminosas que adentram na região de buraco negro (cf. Figura 20), que irão prematuramente terminar na singularidade.

Parte III

Censura Topológica na Geometria Lorentziana

4 CENSURA TOPOLÓGICA

O Teorema de Gannon-Lee visto na parte anterior aponta, na interpretação física, para uma *instabilidade* e eventual *colapso gravitacional* de certas estruturas topológicas no universo. O colapso gravitacional de objetos massivos na natureza leva, até onde sabemos, à formação de *horizontes de eventos*, que nos impede de observar as possíveis singularidades resultantes. Que esse é o caso para colapsos gravitacionais genéricos de objetos massivos e compactos como estrelas é objeto de uma conjectura de R. Penrose, a chamada *conjectura de censura cósmica*. Como veremos, é possível enunciar e provar um teorema que fornece correspondentes matematicamente precisos dessa ideia para estruturas topológicas *à la* Gannon-Lee: essas estruturas estariam "escondidas" por um horizonte de evento. Esses são os chamados *teoremas de censura topológica*. O desenvolvimento dessa área de pesquisa é devido a trabalhos como (FRIEDMAN *et al.*, 1995), (CHRUSCIEL; WALD, 1994), (BROWDY; GALLOWAY, 1995), (GALLOWAY, 1996), (JACOBSON; VENKATARAMANI, 1995). A monografia (SOLIS, 2006) serviu de fio condutor para boa parte deste capítulo.

4.1 BORDOS CONFORMES

Começamos aqui apresentando uma construção de bastante utilidade no estudo da estrutura causal dos espaços-tempo. Trata-se de uma operação não canônica no sentido em que depende da introdução de elementos extrínsecos ao espaço-tempo em questão. Ainda assim, veremos que ela permite um bom trato de propriedades antes inacessíveis.

Definição 4.1.1. Um espaço-tempo sem bordo (\tilde{M}, \tilde{g}) é dito admitir um *bordo (ou infinito) conforme* \mathcal{I} se existe um espaço-tempo com bordo (M, g) tal que:

1. $\tilde{M} = \text{int}(M)$ e $\mathcal{I} = \partial M$, de modo que $M = \tilde{M} \cup \mathcal{I}$;
2. $\exists \Omega \in C^\infty(M)$ tal que
 - $g = \Omega^2 \tilde{g}$ em \tilde{M} ;
 - $\Omega > 0$ em \tilde{M} ;
 - $\Omega = 0$ e $d\Omega \neq 0$ em cada ponto de \mathcal{I} , ou seja, Ω é uma *função definidora* do bordo de M .

\mathcal{I} é chamado de *bordo conforme* de \tilde{M} em M .

As métricas g e \tilde{g} são, como chamamos, *conformalmente relacionadas*. Muitas propriedades geométricas não são preservadas sob transformações conformes, mas a nível de estrutura causal isso não é um problema, pois vetores (e portanto

curvas, campos vetoriais) têm seu caráter causal preservado. No caso específico de geodésicas luminosas pode ser verificado que vale inclusive algo mais forte: elas são transformadas em pré-geodésicas luminosas, isto é, continuam sendo geodésicas luminosas a menos de reparametrização. Vejamos agora uma série de exemplos de bordos conformes.

Exemplo 4.1.2. Considere o espaço-tempo de Minkowski, \mathbb{R}_1^m com métrica expressa em coordenadas esféricas (numa região maximal onde elas estejam definidas), dada por:

$$\eta_m = -dt^2 + dr^2 + r^2 \omega_{m-2}.$$

Ponha $t + r = \operatorname{tg}(u)$; $t - r = \operatorname{tg}(v)$, $u, v \in (-\pi/2, \pi/2)$, de modo que

$$\begin{aligned} dt &= \frac{1}{2}(\sec^2(u)du + \sec^2(v)dv); \\ dr &= \frac{1}{2}(\sec^2(u)du - \sec^2(v)dv); \\ r^2 &= \frac{1}{4}(\operatorname{tg}(u) + \operatorname{tg}(v))^2 = \frac{1}{4}\sec^2(u)\sec^2(v)\operatorname{sen}^2(u - v). \end{aligned}$$

Com isso reescrevemos a métrica como

$$\eta_m = \frac{\sec^2(u)\sec^2(v)}{2} \left(-du \otimes dv - dv \otimes du + \frac{\operatorname{sen}^2(u - v)}{2} \omega_{m-2} \right).$$

Pondo $x = u + v$; $y = u - v$, ficamos com

$$\begin{aligned} \eta_m &= \frac{\sec^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\sec^2\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2} \left(\frac{-dx^2 + dy^2}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(y)\omega_{m-2} \right) \\ &= \frac{\sec^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\sec^2\left(\frac{x-y}{2}\right)}{4} (-dx^2 + dy^2 + \operatorname{sen}^2(y)\omega_{m-2}) \\ &= \frac{\sec^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\sec^2\left(\frac{x-y}{2}\right)}{4} (-dx^2 + \omega_{m-1}). \end{aligned}$$

Obtemos portanto um mergulho conforme entre o espaço-tempo de Minkowski e uma porção própria do *cilindro de Einstein* $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{m-1}, \chi_m = -dt^2 + d\omega_{m-1}^2)$, onde ω_{m-1} é a métrica da esfera redonda de $m - 1$ dimensões. Em termos da definição apresentada, temos $\Omega = 4\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)$, que se anula quando $x \pm y = \pm\pi$, e sobre esses pontos $dx^2 = dy^2$. Vemos, desse modo que a métrica degenera-se e portanto temos que a estrutura do infinito conforme de Minkowski dentro do cilindro de Einstein é de hipersuperfícies luminosas, vide a figura 21.

Exemplo 4.1.3. Vimos no exemplo 1.4.9 que o espaço-tempo de de Sitter \mathbb{S}_1^m é o hiperbolóide $\{(x_0, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} : -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_m^2 = 1\}$, contido no espaço-tempo de Minkowski em $m + 1$ dimensões. Vamos estudar o bordo conforme de de Sitter mostrando que este pode ser conformemente mergulhado no cilindro de Einstein.

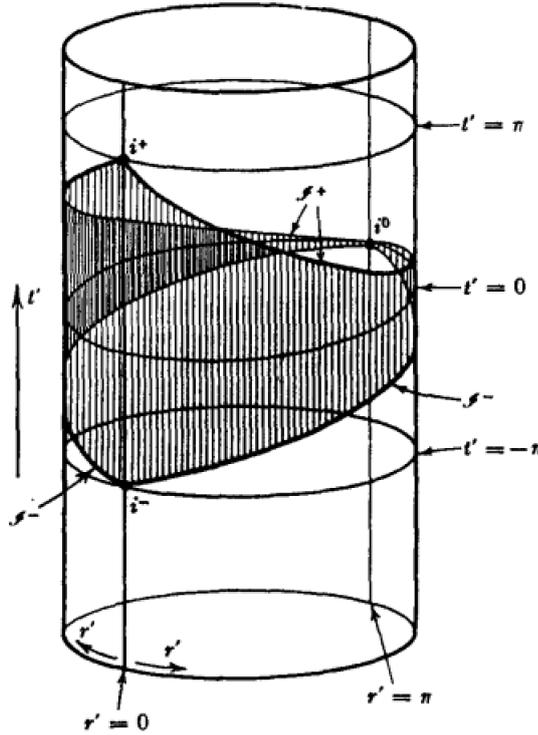


Figura 21 – A estrutura conforme do espaço-tempo de Minkowski corresponde à região indicada dentro do cilindro de Einstein. (HAWKING; ELLIS, 2011)

Para isso, começamos obtendo uma nova expressão para a métrica de de Sitter g_{dS} . Reescrevendo em coordenadas cilíndricas, temos que de Sitter é o conjunto dos pontos que satisfazem $r^2 = 1 + x_0^2$, e portanto $rdr = x_0 dx_0 \implies r^2 dr = x_0^2 dx_0^2 \implies (1 + x_0^2) dr^2 = x_0^2 dx_0^2$. Então

$$\begin{aligned} \eta_{m+1} &= -dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = -dx_0^2 + dr^2 + r^2 \omega_{m-1} \\ \implies g_{dS} &= -dx_0^2 + \frac{x_0^2}{1 + x_0^2} dx_0^2 + (1 + x_0^2) d\omega_{m-1}^2 = -\frac{dx_0^2}{1 + x_0^2} + (1 + x_0^2) \omega_{m-1}. \end{aligned}$$

Agora, fazendo a mudança $x_0 = \sinh(u)$, reescrevemos a métrica como

$$g_{dS} = -du^2 + \cosh^2(u) \omega_{n-1}.$$

Fazendo ainda $e^u = \operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$, com $|t| < \pi/2$, ficamos com

$$\cosh(u) = 1/\cos(t); du = dt/\cos(t).$$

Trabalhando com isso obtemos

$$g_{dS} = \frac{-dt^2 + \omega_{m-1}}{\cos^2(t)} = \frac{\chi_m}{\cos^2 t}.$$

Portanto, o espaço-tempo de de Sitter S_1^m pode ser mergulhado conformemente em $(-\pi/2, \pi/2) \times S^{m-1}$. Veja que as fatias $t = \pm\pi/2$ são hipersuperfícies tipo-espaço

do cilindro de Einstein e formam o bordo conforme para \mathbb{S}_1^m , vide a figura 22. De fato, na terminologia da definição 4.1.1, $\Omega = \cos(t)$, donde $\cos(\pi/2) = \cos(-\pi/2) = 0$ e $d(\cos(t)) = -\text{sen}(t)dt$ que em $t = \pm\pi/2$ é igual a $\pm 1 \neq 0$.

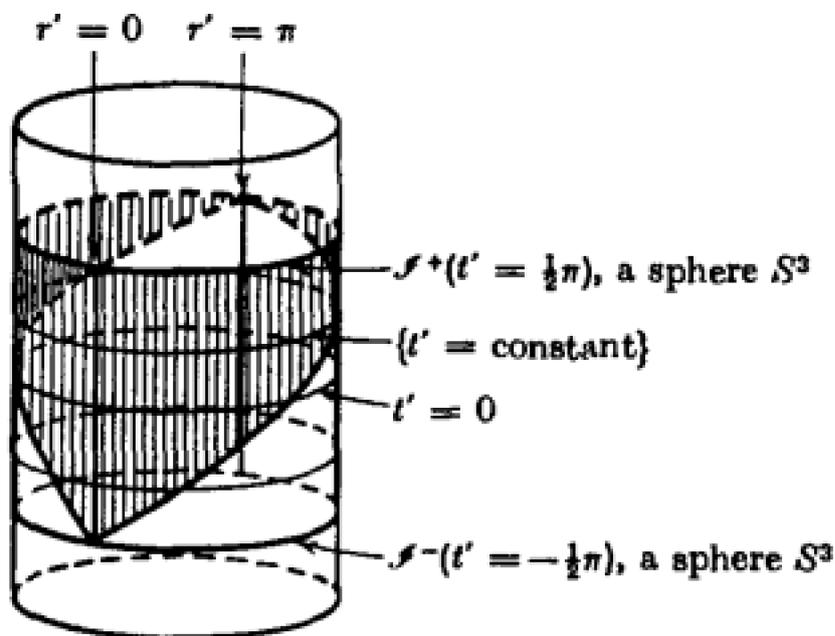


Figura 22 – A estrutura conforme de de Sitter no cilindro de Einstein é a região listrada na horizontal. (HAWKING; ELLIS, 2011)

Exemplo 4.1.4. O espaço-tempo anti-de Sitter \mathbb{H}_1^m foi definido no exemplo 1.4.10 como o recobrimento universal de uma das folhas do hiperbolóide $\{(t, x_0, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{R}_2^{m+1} : -t^2 - x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{m-1}^2 = -1\}$.

Defina a aplicação suave $F : \mathbb{R} \times \mathbb{B}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}_2^{m+1}$ por

$$F(t, y) = \left(\frac{1 + \|y\|^2}{1 - \|y\|^2} \cos(t), \frac{1 + \|y\|^2}{1 - \|y\|^2} \text{sen}(t), \frac{2y}{1 - \|y\|^2} \right),$$

onde $\|y\|$ é a norma Euclideana de \mathbb{R}^{m-1} . Veja que

$$-\left(\frac{1 + \|y\|^2}{1 - \|y\|^2} \cos(t) \right)^2 - \left(\frac{1 + \|y\|^2}{1 - \|y\|^2} \text{sen}(t) \right)^2 + \left\| \frac{2y}{1 - \|y\|^2} \right\|^2 = \frac{-(1 + \|y\|^2)^2 + 4\|y\|^2}{(1 - \|y\|^2)^2} = -1,$$

dando que $\text{Im}(F)$ está contida no hiperbolóide em questão. Mais ainda, pode ser mostrado que F é aplicação de recobrimento suave. Como seu domínio é simplesmente conexo, ela é de fato seu recobrimento universal e portanto, se η_2 é a métrica de \mathbb{R}_2^{m+1} , então $(\mathbb{R} \times \mathbb{B}^{m-1}, F^*\eta_2)$ é o espaço-tempo de anti-de Sitter \mathbb{H}_1^m . Desenvolvendo o

pullback, obtemos

$$g_{AdS} = F^* \eta_2 = - \left(\frac{1 + \|y\|^2}{1 - \|y\|^2} \right)^2 dt \otimes dt + \frac{4}{(1 - \|y\|^2)^2} \delta_{m-1}|_{\mathbb{B}^{m-1}}$$

$$= \left(\frac{1 + \|y\|^2}{1 - \|y\|^2} \right)^2 \left(-dt \otimes dt + \frac{4}{(1 + \|y\|^2)^2} \delta_{m-1}|_{\mathbb{B}^{m-1}} \right).$$

Mas $\frac{4}{(1 + \|y\|^2)^2} \delta_{m-1}|_{\mathbb{B}^{m-1}}$ é a métrica que \mathbb{B}^{m-1} obtém de um hemisfério de \mathbb{S}^{m-1} através da projeção estereográfica. Definindo $\Omega(t, y) = \frac{1 - \|y\|^2}{1 + \|y\|^2}$, temos $d\Omega = \frac{-4y_j dy^j}{(1 + \|y\|^2)^2}$, dando que Ω se anula sobre os pontos $\|y\| = 1$ e $d\Omega \neq 0$ sobre esses pontos. Concluimos portanto que a menos de uma isometria, anti-de Sitter pode ser visto como conforme a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_+^{m-1}$ dentro do cilindro de Einstein. Sua métrica satisfaz a relação $\Omega^2 g_{AdS} = -dt \otimes dt + \omega_{m-1}$. Mais ainda, $\nabla \Omega = \frac{-4y^j}{(1 + \|y\|^2)^2} \frac{\partial}{\partial y^j}$ é um campo tipo-espaço, dando em particular que o bordo da região, onde $\Omega \equiv 0$, é uma subvariedade tipo-tempo.

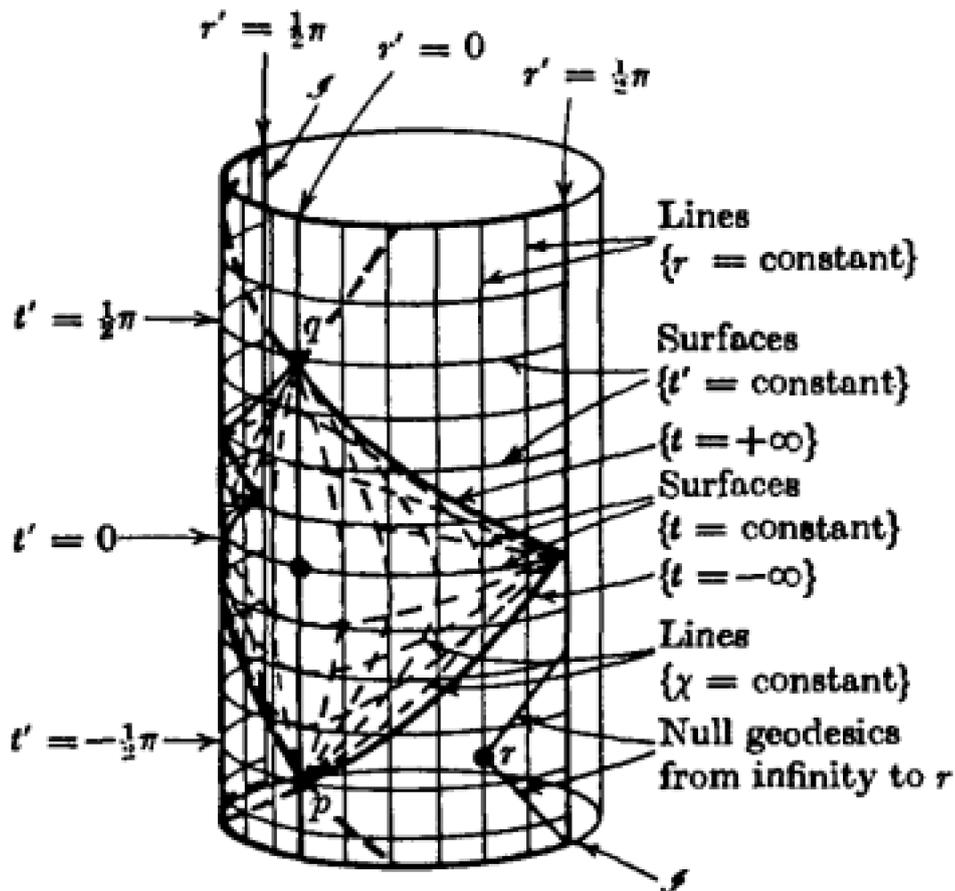


Figura 23 – A estrutura conforme de anti-de Sitter no cilindro de Einstein é a região quadriculada. (HAWKING; ELLIS, 2011)

Esses exemplos motivam as seguintes definições.

Definição 4.1.5. Um espaço-tempo (\tilde{M}, \tilde{g}) com bordo conforme \mathcal{I} é dito ser

- *assintoticamente de Sitter*, se \mathcal{I} é tipo-espaço;
- *assintoticamente anti-de Sitter*, se \mathcal{I} é tipo-tempo.

Veja que quando o \mathcal{I} é tipo-espaço, se $p \in \mathcal{I}$ e $v \in T_p M$ é tipo-tempo, temos $v \in (T_p \mathcal{I})^\perp$. Isso quer dizer que $\nabla \Omega$, sendo perpendicular a \mathcal{I} , é campo vetorial tipo-tempo, e com isso decompor $\mathcal{I} = \mathcal{I}^+ \cup \mathcal{I}^-$, onde $\mathcal{I}^+ = \{p \in \mathcal{I} : \nabla \Omega(p) \text{ é futuro-dirigido}\}$, e analogamente para \mathcal{I}^- .

Note também que quando \mathcal{I} é tipo-tempo, estamos sob os auspícios, para o espaço-tempo "estendido" com bordo (M, g) , da teoria causal já desenvolvida para bordos temporais.

Foi no contexto de bordos conformes, especificamente espaços-tempo assintoticamente planos (conceito não apresentado aqui) que conhecemos o primeiro teorema de censura topológica, em (FRIEDMAN *et al.*, 1995). Entretanto, o resultado que desenvolveremos neste trabalho radica de uma versão posterior do teorema, devido a (GALLOWAY, 1996), dentre outros já citados. Nesse artigo, o autor desenvolve o que ele chama de "infinito finito"¹, se referindo diretamente a um espaço-tempo com bordo ao invés deste aparecer como auxiliar a um espaço-tempo sem bordo admitindo infinito conforme. Assim, o bordo do espaço-tempo, sob determinadas condições, poderá ser interpretado como sendo sua "estrutura no infinito".

4.2 CAUSALIDADE EM ESPAÇOS-TEMPO COM BORDO TEMPORAL

Definição 4.2.1. Seja (M, g) um espaço-tempo com $\dim(M) \geq 3$. Se M é uma variedade com bordo ∂M não-vazio e tal que o tensor induzido por g em ∂M , isto é, $\iota^* g$, onde $\iota : \partial M \hookrightarrow M$ é a inclusão, é ainda uma métrica Lorentziana, então (M, g) é dito ser um *espaço-tempo com bordo temporal*.

Segue da definição que se (M, g) é um espaço-tempo com bordo temporal, então $(\partial M, g|_{\partial M})$ é variedade Lorentziana sem bordo. Podemos ainda induzir uma orientação temporal de M para ∂M fazendo o seguinte: para cada $p \in \partial M$ dizemos que um $v \in T_p \partial M$ é futuro-dirigido em $(\partial M, g|_{\partial M})$ se e somente se o é como vetor de $T_p M$. Dessa forma, cada componente conexa do bordo se torna por conta própria um espaço-tempo (sem bordo). Para todos os resultados a seguir empregaremos a extensão construída no teorema 2.3. Fixemos, portanto, um espaço-tempo sem bordo (\bar{M}^n, \bar{g}) que estende (M^n, g) . Explicitaremos em cada caso hipóteses adicionais necessárias para que as definições e resultados abaixo sejam independentes dessa extensão.

Lema 4.2.1. *Seja (M, g) espaço-tempo com bordo temporal. Então para qualquer $p \in M$ temos que $I^+(p) \cap \partial M$ é aberto em ∂M .*

¹ Tradução livre de *finite infinity*

Demonstração. Tome $x \in I^+(p) \cap \partial M$ e considere uma curva temporal suave por partes $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ futuro-dirigida com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = x$. Suponhamos, inicialmente, que existe um $t_0 \in [0, 1)$ tal que $\alpha[t_0, 1] \subset \partial M$. Neste caso $x \in I^+(y, \partial M)$, onde $y = \alpha(t_0)$. Assim, o resultado é imediato, pois como ∂M é um espaço-tempo sem bordo, já sabemos que $I^+(y, \partial M)$ é aberto em ∂M , contém x e está claramente contido em $I^+(p)$. Nosso objetivo é portanto deformar a curva no caso geral para uma nesta conformação.

Para tanto, seja $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ tal que para todo $q \in \partial M$, $V_q \notin T_q \partial M$ e V_q aponta para dentro de M^2 . Considere o campo $W := V \circ \alpha$ sobre α . Note que pela escolha de V existe um aberto \mathcal{O} de \overline{M} contendo x e $\delta > 0$ tais que $s \cdot V_q \in \text{dom}(\exp^{\overline{M}})$ se $(s, q) \in (-\delta, \delta) \times \mathcal{O}$ e $\exp^{\overline{M}}(s \cdot V_q) \in \text{int}(M)$ para todos $q \in \mathcal{O} \cap M$ e $s \in (0, \delta)$. Por continuidade, podemos também escolher $0 < \varepsilon < 1$ tal que $\alpha[1 - \varepsilon, 1] \subset \mathcal{O}$. Escreva $x_0 = \alpha(1 - \varepsilon)$. Em vista do parágrafo anterior, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $x_0 \in \text{int}(M)$.

Seja agora $f : [1 - \varepsilon, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f é suave, $0 < f \leq 1$ no interior do intervalo e se anula nos extremos, e considere $\mathbf{x} : [1 - \varepsilon, 1] \times (-\delta, \delta) \rightarrow \overline{M}$ a variação dada por $\mathbf{x}(t, s) = \exp^{\overline{M}}_{\alpha(t)}(s \cdot f(t) \cdot W(t))$. Por construção, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno as curvas longitudinais $u \rightarrow \mathbf{x}(u, v)$ com $0 < v < \delta$ ficam em M , encontrando ∂M somente em x , e são tipo-tempo. Assim, qualquer uma dessas curvas longitudinais serve de caminho alternativo para chegar em x ficando sempre dentro de M . Escolhamos qualquer uma destas curvas, e a renomeemos como α .

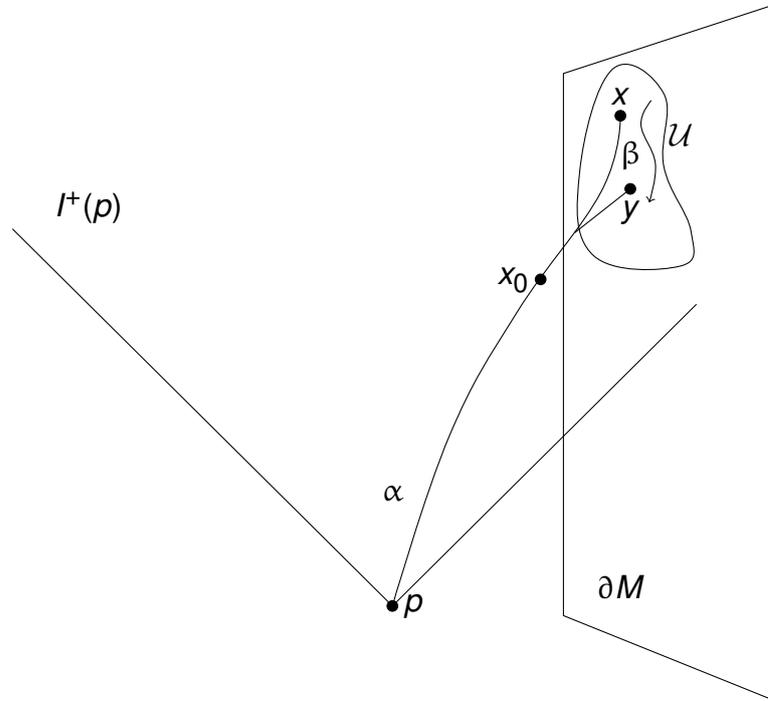
Com isso, podemos agora efetivamente deformar a porção final de α para o caso desejado. Começamos tomando \mathcal{U} uma vizinhança pré-compacta de x em \overline{M} que não contenha x_0 e uma curva suave tipo-tempo passado-dirigida $\beta : [0, T] \rightarrow \mathcal{U} \cap \partial M$ tal que β é um mergulho próprio. O campo vetorial β' pode ser estendido para todo ∂M , uma vez que nunca se anula (cf. exercício 3.12 de (O'NEILL, 1983)). Empregando o lema 8.6 de (LEE, J. M., 2012), estendemos este campo novamente, agora para todo \overline{M} , dado que ali, ∂M é subvariedade fechada e portanto propriamente mergulhada de \overline{M} . Podemos fazer essa extensão X de modo que $\text{supp}(X) \subset \mathcal{U}$ multiplicando por uma função bump com suporte em \mathcal{U} se necessário. Como tal X tem suporte compacto, X é completo (cf. teorema 9.16 de (LEE, J. M., 2012)), isto é, cada curva integral sua está definida em \mathbb{R} .

Da forma que X foi construído, suas linhas integrais começando em ∂M lá ficam, e portanto linhas integrais começando em $\text{int}(M)$ não vão ao bordo. Mais ainda, se $\varphi : \mathbb{R} \times \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ é o fluxo de X , temos que $\varphi(t, x_0) = x_0$, para todo t , dado que $x_0 \notin \mathcal{U}$. Daí, como o tensor métrico é contínuo, existe um $0 < t_0 < T$ tal que as curvas $s \in [1 - \varepsilon, 1] \mapsto \varphi(t, \alpha(s))$ são tipo-tempo para qualquer $t \in [0, t_0]$. Portanto, basta pôr

² Para termos a existência de um tal campo vetorial, tomemos uma família de cartas cobrindo o bordo de M e uma partição suave da unidade subordinado a ela. Em cada aberto, escolha o campo vetorial dado pela derivada parcial na última coordenada e então some todos usando a partição.

$y = \varphi(t_0, x)$, de modo que $y \in \partial M$ e teremos $y \in I^+(x_0) \implies y \in I^+(p) \cap \Gamma(x, \partial M)$ e então retomamos o caso inicial. ■

Figura 24 – Esquema da demonstração do lema 4.2.1.



Vimos que futuros/passados cronológicos são sempre abertos em espaços-tempo sem bordo. A próxima proposição mostra que esse resultado segue válido se o espaço-tempo tem bordo temporal.

Proposição 4.2.2. *Para todo $p \in M$, $I^+(p)$ é aberto em M .*

Demonstração. Fixado $p \in M$, tomemos $x \in I^+(p)$ e fixe uma curva temporal futuro-dirigida $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = x$. Em primeiro lugar, ainda que $x \in \text{int}(M)$, pode ocorrer que a curva temporal α que liga p a x passe por ∂M , não sendo imediata a aplicação do resultado correspondente para espaços-tempo sem bordo. Mas neste caso basta tomarmos um aberto \mathcal{U} de $\text{int}(M)$ que contém x e escolher um $t_0 \in [0, 1]$ tal que $\alpha[t_0, 1] \subset \mathcal{U}$. Daí, $I^+(\alpha(t_0), \mathcal{U})$ é aberto de M que contém x e está contido em $I^+(p)$.

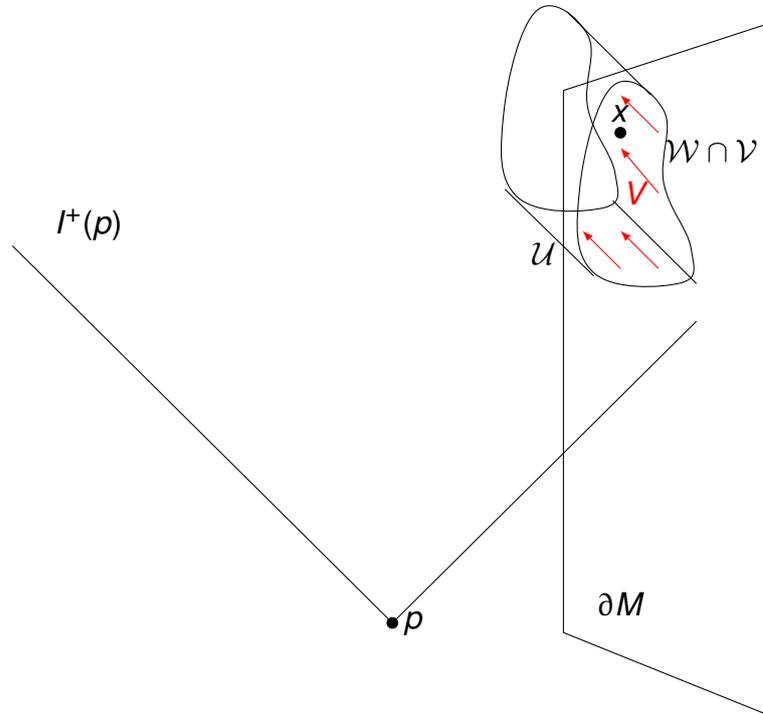
Suponha agora que x pertence ao bordo de M . Pelo lema 4.2.1, existe aberto $\mathcal{V} \subset \partial M \cap I^+(p)$. Sendo um aberto de ∂M , \mathcal{V} tem medida nula em M e portanto não é aberto em M . Fazemos essa consideração para indicar o que iremos fazer: "expandir" \mathcal{V} em M , tomando cuidado para mantê-lo dentro de $I^+(p)$. Para tanto, tome $v \in T_x \bar{M}$, vetor tipo-tempo, futuro-dirigido, apontando para dentro, e estenda-o para um campo $V \in \mathfrak{X}(\bar{M})$. Como V é contínuo, podemos encontrar uma vizinhança \mathcal{W} de x em ∂M e um $T > 0$ tais que as curvas integrais de V partindo de \mathcal{W} e até o parâmetro T são ainda tipo-tempo e futuro-dirigidas, já que estas são condições abertas tanto em

\bar{M} como em ∂M . Queremos ainda que sobre \mathcal{W} , V aponte para dentro, de modo que suas curvas integrais começando ali caiam inicialmente dentro do interior de M . Como trata-se de uma condição aberta, podemos tomar \mathcal{W} pequeno o suficiente para tanto.

Finalmente, se $\varphi : \mathcal{D} \subset \bar{M} \times \mathbb{R} \rightarrow \bar{M}$ é o fluxo de V , coloque $\mathcal{U} = \varphi(\mathcal{W} \cap \mathcal{V} \times [0, T])$. Pelas considerações anteriores $\mathcal{U} \subset I^+(p)$. Como $\mathcal{W} \cap \mathcal{V} \subset \mathcal{V} \subset I^+(p)$, segue que $\mathcal{U} \subset I^+(p)$. Resta ver que \mathcal{U} é realmente um aberto de M .

De fato, φ é um fluxo na variedade sem bordo \bar{M} , com \mathcal{D} aberto em $\bar{M} \times \mathbb{R}$. Como ∂M dentro de \bar{M} é uma subvariedade regular e V é não nulo na região considerada, por continuidade ele também não o é em alguma vizinhança na topologia de \bar{M} . Assim, com o teorema da função inversa aplicado a $\varphi|_{\mathcal{D} \cap (\partial M \times \mathbb{R})}$ garantimos que existe um aberto conexo $\mathcal{O} \subset \partial M$ e um número $\varepsilon > 0$ tais que $\mathcal{O} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathcal{D}$ e $\psi|_{\mathcal{O} \times (-\varepsilon, \varepsilon)}$ é difeomorfismo sobre sua imagem. Com isso, em particular obtemos que $\varphi(\mathcal{O} \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ é aberto de \bar{M} , e então a interseção com M é aberto em M . Como x está tanto em $\mathcal{W} \cap \mathcal{V}$ como em \mathcal{O} , sua interseção é aberta e não vazia, garantindo um aberto no domínio do fluxo cuja imagem simultaneamente é aberta, cai dentro de M , e no futuro de p . ■

Figura 25 – Esquema da demonstração da proposição 4.2.2.



Observação 4.2.3. Dessa proposição segue facilmente que a relação cronológica é sempre aberta, pois se $p \ll q$, seja γ segmento de curva suave por partes temporal futuro-dirigida ligando p a q . Tome p', q' sobre γ com $p' \ll q'$. Temos então que $p \in \Gamma(p'), q \in I^+(q')$ e ambos os conjuntos são abertos, devido a dualidade temporal. Se $q'' \in I^+(q'), p'' \in \Gamma(p')$ é imediato que $p'' \ll q''$.

Proposição 4.2.4. *Se $p, q, r \in M$ são tais que $p \ll q$ e $q \leq r$, então temos $p \ll r$.*

Demonstração. A princípio temos que notar que existem vários casos para essa proposição conforme os pontos estejam no interior ou no bordo de M . Como a proposição anterior estabeleceu que em qualquer caso $I^+(p)$ é aberto, não precisamos nos preocupar com p , sobrando portanto quatro casos: a) $q, r \in \text{int}(M)$; b) $q \in \text{int}(M), r \in \partial M$; c) $q \in \partial M, r \in \text{int}(M)$; d) $q, r \in \partial M$. Vejamos como a análise detalhada desses casos os reduzirá apenas ao caso b), que exigirá uma técnica mais elaborada.

Fixe curva causal futuro-dirigida $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ com $\alpha(0) = q$ e $\alpha(1) = r$. Suponha inicialmente que $r \in \text{int}(M)$. Ponha $J := \{s \in [0, 1] : \alpha[s, 1] \subset \text{int}(M)\}$ de modo que $1 \in J$ e portanto existe $t_0 := \inf(J)$. Se $t_0 = 0$, como $I^+(p)$ é aberto em M , por continuidade temos a existência de um $\varepsilon \in (0, 1)$ tal que $\alpha(\varepsilon) \in I^+(p)$. Mas nesse caso temos que $\alpha[\varepsilon, 1] \subset \text{int}(M)$. Tome $\mathcal{U} \subset \text{int}(M) \cap I^+(p)$ contendo $\alpha(\varepsilon)$ e seja $p' \in \Gamma(\alpha(\varepsilon), \mathcal{U})$. Então temos $p' \ll_{\text{int}(M)} \alpha(\varepsilon) \leq_{\text{int}(M)} r \implies p' \ll_{\text{int}(M)} r$, donde $r \in I^+(p)$ pois $r' \in I^+(p)$, e terminamos. Portanto assumamos agora que $t_0 > 0$. Nesse caso, como $\text{int}(M)$ é aberto temos necessariamente que $r' := \alpha(t_0) \in \partial M$. Como t_0 não pode ser igual a 1, temos a existência de $\varepsilon > 0$ tal que $t_0 + \varepsilon < 1$ e $\alpha(t_0 + \varepsilon) \in I^+(p)$, se soubermos provar que $r' \in I^+(p)$. Procedendo de forma análoga à situação anterior concluiremos que $r \in I^+(p)$. Portanto cabe agora lidarmos com o caso em que $r \in \partial M$. Nesse caso, vejamos a situação em que $q \in \partial M$. Seja $s_0 := \sup\{s \in [0, 1] : \alpha[0, s] \subset \partial M\}$, então $q \leq_{\partial M} \alpha(s_0)$. Como $I^+(p)$ é aberto, existe $p' \in I^+(p) \cap \Gamma(q, \partial M)$ e logo $p' \ll_{\partial M} q \leq_{\partial M} \alpha(s_0) \implies p' \ll_{\partial M} \alpha(s_0)$ e então $\alpha(s_0) \in I^+(p)$. Se $s_0 = 1$ já temos o que queremos, então suponha $s_0 < 1$. Por continuidade e pela definição de s_0 existe $0 < \delta < 1$ tal que $\alpha(s_0 + \delta) \in \text{int}(M) \cap I^+(p)$. Temos portanto $p \ll q' \leq r$. Assim, novamente, se soubermos resolver o caso b), estamos feitos.

Finalmente para o caso b), a ideia será tomar a curva causal β (que aqui já podemos supor encontrar ∂M somente em r) e variá-la para obter uma curva temporal contida em $\text{int}(M)$. Para tanto, começamos tomando um $w \in T_r \overline{M}$ tipo-tempo, passado e apontando para dentro de M e defina $W \in \mathfrak{X}(\beta)$ como o campo paralelo tal que $W(1) = w$. Ponha agora $V(t) = (2 - t)W(t)$, de modo que $V(1) = w$ e $V'(t) = -W(t)$. Assim, $g(V', \beta') = -g(W, \beta') < 0$ para valores de t suficientemente próximos de 1, dado que em r os vetores β' e w estão em cones opostos.

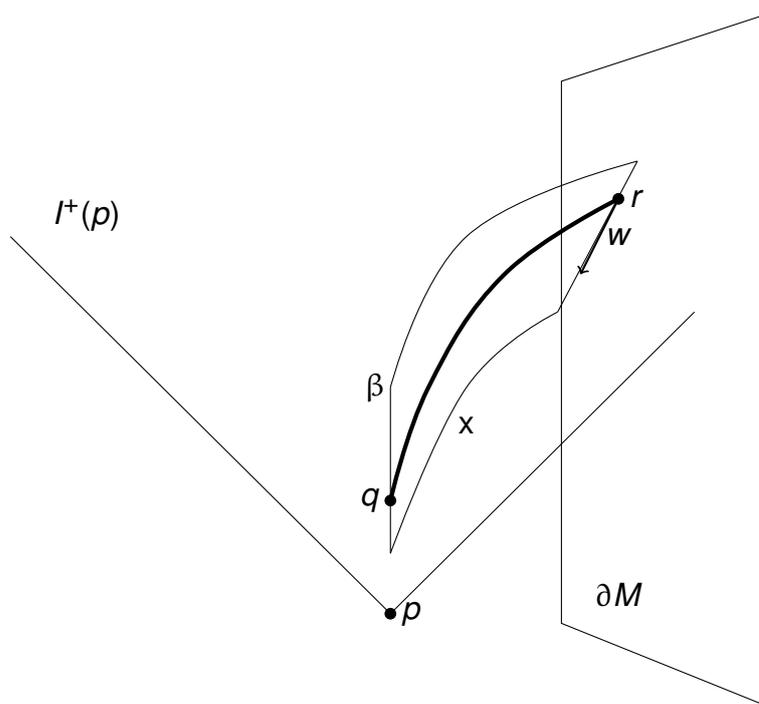
Com isso, se considerarmos x a variação de β com campo V , o teorema 10.45 de (O'NEILL, 1983) nos garante que para parâmetros suficientemente pequenos, digamos, menores que ε , as curvas longitudinais são tipo-tempo. Assim, temos que $x(1, s) \in I^+(x(0, s))$ para todo $s \in (0, \varepsilon]$.

A curva transversal final, $x(1, s)$, tem velocidade apontando para dentro em $s = 0$, então se em algum momento ela atravessasse ∂M , poderíamos diminuir ε para trabalhar com ela inteiramente contida em M . Como w aponta para o passado, pelo mesmo

motivo podemos supor que $\mathbf{x}(1, s)$ é passado-dirigida, de modo que $r \in I^+(\mathbf{x}(1, s)) \subset I^+(\mathbf{x}(0, s))$ para todo $s \in (0, \varepsilon]$.

Como $q \in I^+(p)$, que é aberto, $\exists \delta \in (0, \varepsilon)$ tal que $\mathbf{x}(0, \delta) \in I^+(p)$, e portanto temos que $r \in I^+(p)$. ■

Figura 26 – Esquema da demonstração da proposição 4.2.4.



Note que se tivermos $p \leq q$ e $q \ll r$, invertendo a orientação temporal ficamos com $r \ll q$ e $q \leq p$, que é a situação demonstrada acima que conclui, para a orientação original que $p \ll r$.

Proposição 4.2.5. Para qualquer $S \subset M$, temos $J^+(S) \subset \overline{I^+(S)}$, ou seja, $I^+(S)$ é denso em $J^+(S)$, ou equivalentemente, $\overline{J^+(S)} = \overline{I^+(S)}$.

Demonstração. Tome $x \in J^+(S)$. Considere então $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ curva tipo-tempo futuro-dirigida começando em x . Tome $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sequência decrescente e convergente para 0, contida no domínio de γ , de modo que se colocamos $x_k := \gamma(t_k) \in I^+(x)$, temos $x_k \rightarrow x$. Escolhendo $p \in S$ tal que $x \in J^+(p)$, pela proposição anterior temos que cada $x_k \in I^+(p)$, e portanto $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset I^+(S)$ e assim, x é ponto limite de $I^+(S)$, ou seja, está no fecho deste. ■

Proposição 4.2.6. Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ curva causal futuro-dirigida de p a q tal que $\gamma(0, 1) \subset \text{int}(M)$. Então, ou $q \in I^+(p)$, ou γ é pré-geodésica tipo-luz.

Demonstração. Suponha que $q \notin I^+(p)$. Tome sequências $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ contidas em $(0, 1)$ tais que $t_k < s_k$, $t_k \searrow 0$ e $s_k \nearrow 1$ e ainda, ponha $p_k = \gamma(t_k)$, $q_k = \gamma(s_k)$. Pela

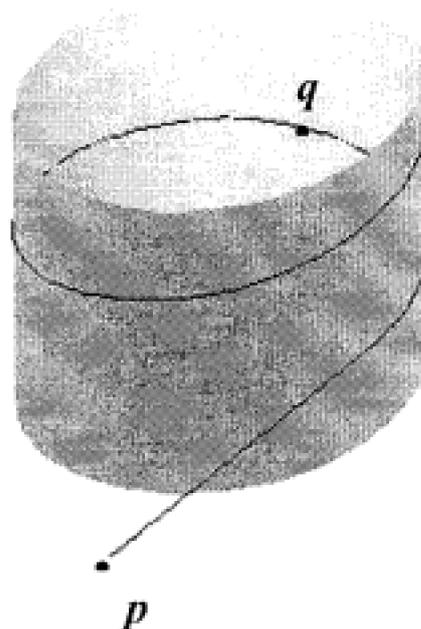


Figura 27 – Em \mathbb{R}_1^3 , removemos um cilindro aberto. Temos $q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$, mas não há nenhuma geodésica luminosa ligando p até q dentro do espaço-tempo. (SOLIS, 2006)

proposição da transitividade, concluímos que $q_k \in J^+(p_k) \setminus I^+(p_k)$. Por hipótese, todos esses segmentos (de p_k a q_k) de γ ficam no interior de M , que é um espaço-tempo sem bordo, e portanto para ele, sabemos que $\gamma|_{[t_k, s_k]}$ é pré-geodésica luminosa, o que implica que $\gamma|_{(0,1)}$ também o é. Se olharmos em \overline{M} , γ se estende continuamente para seus pontos terminais, e como \overline{M} é espaço-tempo sem bordo, sabemos então que γ inteira é pré-geodésica, logo γ é geodésica luminosa em M também. ■

Observação 4.2.7. Note que a hipótese adicional $\gamma(0, 1) \subset \text{int}(M)$ é necessária pois em geral uma geodésica do bordo não é geodésica de M (isso ocorre quando o bordo, visto como subvariedade semi-Riemanniana, é totalmente geodésico). Assim, se um pedaço da curva ficasse em ∂M , a construção feita na demonstração não funcionaria, pois resultaria em uma geodésica luminosa quebrada, parte em $\text{int}(M)$, parte em ∂M . Mais ainda, a figura 27 fornece um contra-exemplo.

Proposição 4.2.8. Seja S hipersuperfície espacial de ∂M e $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ curva causal futuro-dirigida ligando $p \in \text{int}(M)$ até $q \in S$, que intersecta ∂M apenas em q . Então ou existe curva temporal de p a S ou γ é pré-geodésica luminosa que encontra S ortogonalmente.

Demonstração. Iremos supor que γ não é pré-geodésica luminosa normal a S . A negação disso é que, ou bem γ é normal mas não pré-geodésica luminosa, ou é pré-geodésica luminosa mas não normal. No primeiro caso, a proposição anterior nos dá

que $q \in I^+(p)$, em particular há curva temporal entre p e S . Então vamos trabalhar em cima do caso em que temos uma pré-geodésica tipo-luz que não encontra S ortogonalmente.

Como S é subvariedade espacial de um espaço-tempo sem bordo, sabemos que ela é localmente acausal em ∂M , conforme 2.2.3. Assim, seja \mathcal{U}' uma vizinhança conexa de q em ∂M tal que $\mathcal{U}' \cap S$ seja acausal em ∂M , e ponha $\mathcal{U} = D(\mathcal{U}' \cap S, \mathcal{U}')$, para obtermos uma vizinhança globalmente hiperbólica de p em ∂M visto como espaço-tempo sem bordo, e de modo que $\mathcal{U}' \cap S \equiv \mathcal{U} \cap S$ seja hipersuperfície de Cauchy de \mathcal{U} .

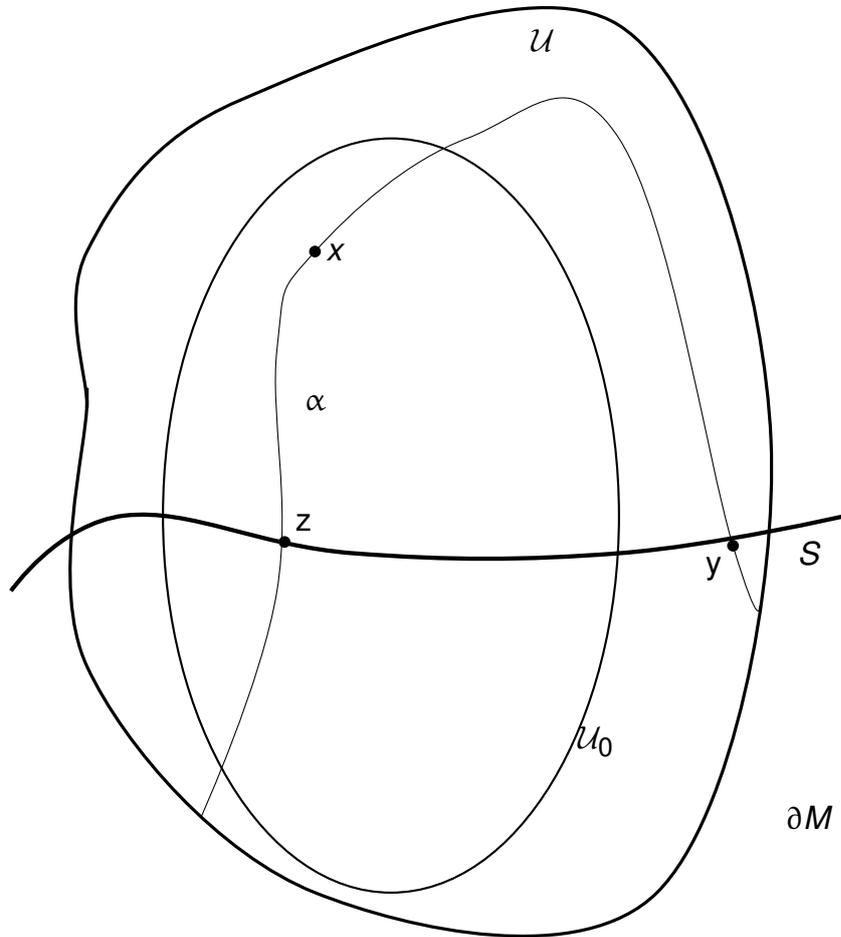
Como ∂M é subvariedade Lorentziana de \overline{M} , podemos usar sua aplicação exponencial normal para estender $S \cap \mathcal{U}$ para uma hipersuperfície S_0 em \overline{M} . Para ver que S_0 é tipo-espaço, perceba que o complemento ortogonal em TM (com o qual se produz a aplicação exponencial normal) dos espaços tangentes de ∂M é tipo-espaço, assim como os espaços tangentes de S , portanto suas somas diretas também terão uma métrica induzida positiva-definida. Com isso, podemos repetir a construção anterior com o desenvolvimento de Cauchy para obter uma vizinhança globalmente hiperbólica \mathcal{U}_0 de q , agora em \overline{M} , tendo $S_0 \cap \mathcal{U}_0$ como hipersuperfície de Cauchy. Diminuindo a vizinhança conforme o necessário, podemos assumir que $\mathcal{U}_0 \cap \partial M \subset \mathcal{U}$.

Agora, vejamos que $J^+(S_0 \cap \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_0) \cap \partial M$ está contido em $I^+(S \cap \mathcal{U}, \partial M) \cup S$. Para tanto, comecemos tomando $x \in J^+(S_0 \cap \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_0) \cap \partial M$, suponha que $x \notin S$, e seja $\alpha : I \rightarrow \mathcal{U}$ curva tipo-tempo futuro-dirigida inextensível em \mathcal{U} passando por x . Como $x \in \mathcal{U} \setminus S$ e \mathcal{U} é globalmente hiperbólico, α deve encontrar $S \cap \mathcal{U}$, exatamente em um ponto, que chamaremos de y . Supondo que ocorresse y no futuro de x ao longo de α , pela acausalidade de $S_0 \cap \mathcal{U}_0$ em \mathcal{U}_0 , teríamos que α deixa \mathcal{U}_0 ao passado de y . Portanto α encontraria $S_0 \cap \mathcal{U}_0$ ao passado de x , digamos num ponto $z \in S \cap \mathcal{U}$, de modo que evidentemente $y \neq z$. Dessa forma, teríamos $\alpha|_z^y$ como curva temporal futuro-dirigida em \mathcal{U} unindo dois pontos de $S \cap \mathcal{U}$ em \mathcal{U} , o que violaria a causalidade. A figura 28 ilustra o ocorrido. Portanto, y de fato está no passado de x ao longo de α e assim, $x \in I^+(y, \mathcal{U}) \implies x \in I^+(S \cap \mathcal{U}, \partial M)$ pois $\mathcal{U} \subset \partial M$ e $y \in S \cap \mathcal{U}$. Por dualidade temporal tem-se $J^-(S_0 \cap \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_0) \cap \partial M \subset I^-(S \cap \mathcal{U}, \partial M) \cup S$.

Agora, seja $p' \in \gamma \cap \mathcal{U}_0, p' \neq q$ tal que $\gamma|_{p'}^q \subset \mathcal{U}_0$. Assim, se aplicarmos a proposição 10.50 de (O'NEILL, 1983) para $\gamma|_{p'}^q$ e $S \cap \mathcal{U}_0$, temos garantida a existência de uma curva tipo-tempo futuro dirigida σ em \mathcal{U}_0 ligando p' a um $q' \in S \cap \mathcal{U}_0$. Como $S \cap \mathcal{U}_0$ é fechado em \mathcal{U}_0 , podemos assumir que σ intersecta S somente em q' . Se σ fica em M , nada resta a fazer. Basta verificar o que ocorrerá caso σ não permaneça em M , o que é uma possibilidade, uma vez que a proposição utilizada é válida *a priori* apenas para espaços-tempo sem bordo, portanto \overline{M} em nosso caso.

Se σ não está inteiramente contida em M , ela tem que encontrar ∂M em um r estritamente ao passado de q' . Veja que $r \notin J^+(S_0 \cap \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_0)$ uma vez que $q' \in$

Figura 28 – Situação impossível



$S \cap \mathcal{U}_0 \subset S_0 \cap \mathcal{U}_0$, que é acausal em \mathcal{U}_0 , ou seja devemos ter que $r \in \mathcal{J}^-(S_0 \cap \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_0) \subset \Gamma(S \cap \mathcal{U}, \partial M) \cup S$ e então por transitividade segue novamente que $p \in \Gamma(S, M)$. ■

4.3 CAUSALIDADE FORTE

Definição 4.3.1. Seja (M, g) espaço-tempo com bordo. Dizemos que $p \in M$ *satisfaz a condição causal* [resp. *cronológica*] se não existe nenhuma curva causal [resp. temporal] fechada baseada em p . Dizemos que (M, g) é *causal* [resp. *cronológico*] se todos os pontos de M satisfazem a condição causal [resp. cronológica].

Definição 4.3.2. Um conjunto $B \subset M$ é dito ser *causalmente convexo* se para qualquer par de pontos $p, q \in B$, $x \in \mathcal{J}^+(p) \cap \mathcal{J}^-(q) \implies x \in B$. Isto é, todo segmento de curva causal com extremidades em B fica inteiramente contido em B .

Definição 4.3.3. Dizemos que a propriedade de *causalidade forte* vale em $p \in (M, g)$ se para qualquer vizinhança \mathcal{U} de p , existe aberto causalmente convexo \mathcal{V} com $p \in$

$\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Quando tal propriedade é válida em todos os pontos de M , dizemos que o espaço-tempo (M, g) é *fortemente causal*.

Note que essa definição equivale a dizer que a topologia de um espaço-tempo fortemente causal admite uma base de abertos causalmente convexos. Veja que se a causalidade forte vale em p , p também satisfaz a condição causal. De fato, não fosse esse o caso, existiria curva causal fechada γ baseada em p . Tomando \mathcal{U} qualquer vizinhança de p que não contenha γ , obtemos uma vizinhança causalmente convexa $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ que também não contém γ , o que não pode ocorrer. Entretanto, a recíproca nem sempre é verdadeira, como ilustra o exemplo 14.12 de (O'NEILL, 1983).

Ainda, note que essa definição pode ser aplicada para espaços-tempo com ou sem bordo. No caso de um espaço-tempo com bordo temporal, se ele for fortemente causal, seu bordo também o será. De fato, seja $p \in \partial M$ e vizinhança \mathcal{U} de p em ∂M . Então $\mathcal{U} = \mathcal{U}' \cap \partial M$ para algum aberto \mathcal{U}' de M . Obtemos então uma vizinhança causalmente convexa \mathcal{V}' de p , na topologia de M . Então, $\mathcal{V} = \mathcal{V}' \cap \partial M$ é uma vizinhança de p em ∂M . Entretanto, em relação às curvas causais de M , \mathcal{V} pode não ser causalmente convexo, pois não temos hipóteses sobre a convexidade causal de ∂M visto como subconjunto de M . De toda forma, restringindo-se às curvas causais de ∂M , é imediato ver que \mathcal{V} é uma vizinhança causalmente convexa ao redor de p , contida em \mathcal{U} . Assim, a propriedade de causalidade forte migra de um espaço-tempo com bordo temporal para seu bordo.

Observação 4.3.1. *Doravante os conjuntos da forma $I^+(p) \cap \Gamma(q)$ serão referidos como diamantes cronológicos e seus contrapartes causais como diamantes causais. Quando não houver ambiguidade em relação ao ambiente que as curvas são tomadas, poderemos escrever simplificadaamente $I(p, q) := I^+(p) \cap \Gamma(q)$. Por fim, note que diamantes cronológicos são sempre causalmente convexos, pois se $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ é segmento de curva causal futuro-dirigida com $\alpha(0), \alpha(1) \in I(p, q)$, para cada $t \in (0, 1)$ temos $p \ll \alpha(0) \leq \alpha(t) \leq \alpha(1) \ll q$. Por transitividade temos $\alpha(t) \in I(p, q)$, para todo $t \in (0, 1)$.*

Proposição 4.3.2. *A coleção dos conjuntos da forma $I^+(p) \cap \Gamma(q)$, $p, q \in M$ forma base para uma topologia de M chamada topologia de Alexandrov. (M, g) é fortemente causal se, e somente se a topologia de Alexandrov coincide com a topologia de M .*

Demonstração. Para ver que a coleção é admissível como base, sejam $p, p', q, q' \in M$ tais que $A = (I^+(p) \cap \Gamma(q)) \cap (I^+(p') \cap \Gamma(q')) \neq \emptyset$. Tome $r, s \in A$ com $s \in I^+(r, A)$. Se $t \in I^+(r) \cap \Gamma(s)$, temos $p, p' \ll r \ll t \ll s \ll q, q'$ de modo que $t \in A$, e portanto $I^+(r) \cap \Gamma(s) \subset A$.

Quanto à equivalência das afirmações, veja que da forma que a causalidade forte foi definida, \Leftarrow é trivial pois se as topologias coincidem, em particular a Topologia de Alexandrov é mais fina. Para provar \Rightarrow , note que em geral os diamantes

cronológicos são sempre abertos, de modo que a topologia de Alexandrov está contida na topologia original de M . Para ver a outra inclusão, tomemos um aberto \mathcal{U} qualquer e queremos encontrar um diamante cronológico contido nele. Como o espaço-tempo é suposto fortemente causal, existe aberto causalmente convexo $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Tome $x, y \in \mathcal{V}$ com $y \in I^+(x)$ e seja $p \in I^+(x) \cap \Gamma(y)$. Se α é segmento de curva temporal futuro-dirigida ligando x e y , passando por p , temos que $\alpha \subset \mathcal{U}$, donde $p \in \mathcal{U}$ e portanto $I^+(x) \cap \Gamma(y) \subset \mathcal{U}$. ■

Proposição 4.3.3. *O conjunto dos pontos de M onde vale a causalidade forte é aberto.*

Demonstração. Seja $p \in M$ tal que nele vale a causalidade forte e considere uma vizinhança sua \mathcal{U} arbitrária. Temos portanto a existência de uma vizinhança causalmente convexa $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Vejamos que a causalidade forte vale em \mathcal{V} . Tome $q \in \mathcal{V}$ e tome uma vizinhança arbitrária $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. Como a topologia de M coincide com a topologia de Alexandrov, existem $x, y \in \mathcal{W}$ tais que $q \in I(x, y) \subset \mathcal{W}$. Como diamantes cronológicos são causalmente convexos, vale a causalidade forte em q e portanto em qualquer ponto do aberto \mathcal{V} . ■

4.4 HIPERBOLICIDADE GLOBAL

Definição 4.4.1. Dizemos que (M, g) é *globalmente hiperbólico* se ele é um espaço-tempo (com ou sem bordo) fortemente causal e ainda se para quaisquer $p, q \in M$, $J^+(p) \cap J^-(q)$ é compacto.

Observação 4.4.1. *Como apresentado na definição 2.2.5, em espaços-tempo sem bordo, a hiperbolicidade global é definida em termos da existência de hipersuperfícies de Cauchy. Mas (GEROCH, 1970) mostra que para espaços-tempo sem bordo isso é equivalente a abordagem acima, a partir da compacidade dos diamantes causais.*

Proposição 4.4.2. *Se (M, g) é globalmente hiperbólico com bordo temporal, então $(\partial M, g|_{\partial M})$ é também um espaço-tempo globalmente hiperbólico.*

Demonstração. Como a causalidade forte migra para ∂M , basta verificar a compacidade dos diamantes causais; mas devido à proposição 4.29 de (BEEM *et al.*, 1996), basta mostrar que para quaisquer $p, q \in \partial M$, $J^+(p, \partial M) \cap J^-(q, \partial M)$ tem fecho em ∂M compacto.

Veja que $J^+(p, \partial M) \subset J^+(p) \cap \partial M$ e analogamente para o passado de q , então temos que $J^+(p, \partial M) \cap J^-(q, \partial M) \subset J^+(p) \cap J^-(q) \cap \partial M$. Por hipótese, $J^+(p) \cap J^-(q)$ é compacto, logo $J^+(p) \cap J^-(q) \cap \partial M$ é compacto, pois é um fechado contido num compacto. Então,

$$\overline{J^+(p, \partial M) \cap J^-(q, \partial M)}^{\partial M} \subset J^+(p) \cap J^-(q) \cap \partial M$$

e assim, este primeiro conjunto é compacto, pois é fechado contido num compacto. ■

Proposição 4.4.3. *Se (M, g) é globalmente hiperbólico, $J^+(p)$ é fechado para todo $p \in M$.*

Demonstração. Tome $x \in \overline{J^+(p)}$ e $q \in I^+(x)$. Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ curva temporal futuro-dirigida de x até q e $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sequência sobre γ com $x_k \ll x_{k+1}$ e $x_k \rightarrow x$. Como a relação cronológica é aberta e x está no fecho de $J^+(p)$ e no passado cronológico de todos os x_k , temos que $\Gamma(x_k) \cap J^+(p) \neq \emptyset$, para todo $k \in \mathbb{N}$, estabelecendo que $x_k \in I^+(p)$, para todo k .

Temos então que $x_k \in I^+(p) \cap \Gamma(q) \subset J^+(p) \cap \mathcal{J}^-(q)$ e portanto que $x \in \overline{J^+(p) \cap \mathcal{J}^-(q)}$. Como M é globalmente hiperbólico, $J^+(p) \cap \mathcal{J}^-(q)$ é compacto, e portanto fechado em M . Então $x \in J^+(p) \cap \mathcal{J}^-(q) \subset J^+(p)$, logo $J^+(p) = \overline{J^+(p)}$. ■

Proposição 4.4.4. *Se (M, g) é globalmente hiperbólico, então a relação $p \leq q$ é fechada em $M \times M$.*

Demonstração. Considere sequências $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}, (q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ com $p_k \rightarrow p, q_k \rightarrow q$ e $q_k \in J^+(p_k)$, para todo k . Vejamos que $q \in J^+(p)$: Supondo o contrário, como $J^+(p)$ é fechado, teríamos a existência de uma vizinhança \mathcal{U} de q inteiramente contida no complementar de $J^+(p)$. Tome então $a \in \mathcal{U}$ tal que $a \in I^+(q)$. Como $\Gamma(a)$ é aberto e contém q , também contém os q_k exceto uma quantidade finita. Como esses pontos estão ligados causalmente aos p_k correspondentes, segue que $p_k \in \mathcal{J}^-(a)$, para todo $k > N$, para algum $N \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{J}^-(a)$ é fechado, segue que $p \in \mathcal{J}^-(a)$. Então temos $a \in J^+(p)$ — contradição. ■

Proposição 4.4.5. *Se (M, g) é globalmente hiperbólico, então $A \subset M$ compacto $\implies J^+(A)$ fechado.*

Demonstração. Tome $x \in \overline{J^+(A)}$ e considere uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset I^+(x)$ com $x_{k+1} \ll x_k$ de modo que $\mathcal{J}^-(x_{k+1}) \subset \mathcal{J}^-(x_k)$ e $x_k \rightarrow x$. Como $\mathcal{J}^-(x_k)$ é fechado e A é compacto, $A \cap \mathcal{J}^-(x_k)$ é compacto. Como x está no passado cronológico de cada x_k que é aberto e no fecho de $J^+(A)$, para cada x_k podemos encontrar ponto y_k em $J^+(A)$ e ainda em $\Gamma(x_k)$, estabelecendo por transitividade que cada $x_k \in J^+(A)$. Assim, $(\mathcal{J}^-(x_k) \cap A)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência encaixante de conjuntos compactos não-vazios. Portanto existe um $p \in A$ na interseção de todos eles. Segue em particular que $x_k \in J^+(p)$, para todo k , então $x \in \overline{J^+(p)}$. Mas como vimos que $J^+(p)$ é fechado, temos $x \in J^+(p) \subset J^+(A)$. Logo $\overline{J^+(A)} = J^+(A)$. ■

Proposição 4.4.6. *Se (M, g) é globalmente hiperbólico, então $J^+(A) \cap \mathcal{J}^-(B)$ é compacto para qualquer par de subconjuntos compactos $A, B \subset M$.*

Demonstração. Para cada $a \in A$, seja $a' \in M$ um ponto no passado cronológico de a . Então $A \subset \bigcup I^+(a')$. Como A é compacto e cada $I^+(a')$ é aberto, podemos extrair uma subcobertura finita de modo que $A \subset \bigcup_{i=1}^k I^+(a'_i)$. Procedendo de forma análoga e

dual com B , encontramos uma quantidade finita de pontos b'_j tais que $B \subset \bigcup_{j=1}^m \Gamma(b'_j)$. Destarte, $J^+(A) \cap J^-(B) \subset \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^m J^+(a'_i) \cap J^-(b'_j)$. Cada $J^+(a'_i) \cap J^-(b'_j)$ é compacto, e pela proposição anterior $J^+(A) \cap J^-(B)$ é fechado. Fechado contido num compacto é compacto. ■

4.5 LIMITES DE CURVAS

Em muitas construções nessa área é necessário tomar limites uniformes (com respeito a alguma métrica Riemanniana) de curvas, que como sabemos, em geral carrega a continuidade mas não a diferenciabilidade das curvas para o limite. Faz-se necessário portanto estender a classificação causal para curvas que sejam somente contínuas.

Definição 4.5.1. Uma curva *contínua* $\gamma : I \rightarrow M$ em um espaço-tempo (M, g) com bordo temporal e fortemente causal é dita ser uma *curva C^0 tipo-tempo (ou temporal) futuro-dirigida* se para qualquer $r \in I$ existe uma vizinhança convexa \mathcal{U} de \bar{M} ao redor de $\gamma(r)$ e $\varepsilon > 0$ tais que para quaisquer $t, s \in (r - \varepsilon, r + \varepsilon) \cap I$ com $t < r < s$ temos $\gamma(s) \in I^+(\gamma(t), \mathcal{U} \cap M)$.

Observação 4.5.1. Observe que, sob a condição de causalidade forte para M , esta definição está bem posta, no sentido de não depender de qual extensão sem bordo \bar{M} estamos empregando. De fato, se \bar{M} e \tilde{M} são extensões sem bordo de M , suponha que γ é C^0 tipo-tempo futuro-dirigida no sentido de \bar{M} . Então existe uma \bar{M} -vizinhança convexa $\bar{\mathcal{U}}$ de $\gamma(r)$ e $\varepsilon > 0$ que satisfazem a definição acima. Tomemos então da topologia de \tilde{M} uma vizinhança convexa $\tilde{\mathcal{V}}$ de $\gamma(r)$. Veja que $\mathcal{A} = M \cap \tilde{\mathcal{V}} \cap \bar{\mathcal{U}}$ é aberto de M pois é interseção dos abertos $M \cap \tilde{\mathcal{V}}$ e $M \cap \bar{\mathcal{U}}$. Como (M, g) é fortemente causal, existe vizinhança causalmente convexa \mathcal{W} de $\gamma(r)$ contida em \mathcal{A} . Por continuidade de γ , podemos encontrar $\delta \leq \varepsilon$ tal que $\gamma(r - \delta, r + \delta) \subset \mathcal{W}$. Como \mathcal{W} é causalmente convexo, conterá todo pedaço de curva causal em M que ligue $\gamma(t)$ a $\gamma(s)$ onde $r - \delta < t < r < s < r + \delta$. Assim, para parâmetros nessas condições vale $\gamma(s) \in I^+(\gamma(t), \tilde{\mathcal{V}} \cap M)$, mostrando que γ é C^0 tipo-tempo futuro-dirigida também no sentido de \tilde{M} .

Veja que essa não se trata de uma nova definição mais ampla de curvas temporais, mas uma extensão do conceito para uma classe maior de curvas, uma vez que ela remete ao I^+ , que continua sendo definido a partir das curvas temporais suaves por parte. Isto é, $p \ll q$ se e somente se existe uma curva C^0 tipo-tempo e futuro-dirigida em M de p a q .

É de se notar da definição 4.5.1 que toda curva temporal [resp. causal] suave por partes e futuro-dirigida é imediatamente uma curva C^0 temporal [resp. causal] e futuro-dirigida. Por outro lado, se existe uma curva C^0 temporal [resp. causal] causal e futuro-dirigida conectando dois pontos $p, q \in M$, a definição 4.5.1 nos permite construir

uma curva temporal [resp. causal] suave por partes justapondo segmentos de tais curvas. Portanto as definições de precedência temporal/causal em M entre p e q (e portanto $I^\pm(A)$ ou $J^\pm(A)$ para $A \subset M$) não se alteram se apenas requeremos que exista uma curva C^0 temporal/causal entre eles.

Em um espaço-tempo sem bordo, podemos estender a noção de comprimento para curvas causais contínuas observando que qualquer curva causal suave pode ser aproximada na topologia C^0 das curvas por uma geodésica causal quebrada e portanto seu comprimento pode ser visto como o limite dos comprimentos dessas geodésicas quebradas, vide o capítulo 4 de (LICHTENFELZ, 2009). No caso de um espaço-tempo (M, g) com bordo temporal, podemos definir comprimento Lorentziano de curvas causais contínuas da seguinte maneira. Se $\gamma : I \rightarrow M$ é curva causal contínua futuro-dirigida de p a q , considere uma coleção de pontos $\mathcal{P} = \{x_i\}, 0 \leq i \leq k$ sobre γ tal que $x_0 = p, x_k = q$. Olhando M dentro da extensão \overline{M} , podemos encontrar uma família de vizinhanças convexas $(\mathcal{U}_i)_i$ cobrindo a curva de modo que para cada i , existe segmento geodésico $\gamma_i \subset \mathcal{U}_i$ ligando x_i até x_{i+1} . Denote a concatenação dos γ_i por $\gamma_{\mathcal{P}}$. As proposições 5.30 e 5.31 e (O'NEILL, 1983) mostram que no âmbito da geometria Lorentziana, desigualdades clássicas como a de Cauchy-Schwarz e a triangular valem de forma invertida. Por isso, se \mathcal{P}' é um refinamento de \mathcal{P} teremos $L(\gamma_{\mathcal{P}'}) \leq L(\gamma_{\mathcal{P}})$. Assim, definimos o comprimento de γ por:

$$L(\gamma) = \inf_{\mathcal{P}} L(\gamma_{\mathcal{P}}),$$

que fica bem definido pela construção em (LICHTENFELZ, 2009) vendo γ como curva causal contínua no espaço-tempo sem bordo $(\overline{M}, \overline{g})$.

O próximo resultado estende um resultado fundamental da geometria de espaços-tempos sem bordo (vide proposição 3.31 de (BEEM *et al.*, 1996)) para um espaço-tempo M com bordo temporal, desde que este seja globalmente hiperbólico.

Teorema 4.5.2 (Teorema da Curva Limite para espaços-tempo com bordo). *Seja (M, g) espaço-tempo com bordo temporal globalmente hiperbólico e fixe h métrica Riemanniana completa em \overline{M} , e denote a distância dessa métrica por d . Suponha que $(\gamma_k : [0, +\infty) \rightarrow M)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de curvas causais contínuas, futuro-dirigidas e futuro-inextensíveis, parametrizadas por comprimento de arco em relação a h . Se p é ponto limite de $(\gamma_k(0))_{k \in \mathbb{N}}$ então existe $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$ contínua, causal, futuro-dirigida e futuro-inextensível e uma subsequência (γ_{k_i}) tal que*

1. $\gamma(0) = p$;
2. $\gamma_{k_i}|_K \rightarrow \gamma|_K$ d -uniformemente em todo K compacto de $[0, +\infty)$.

Demonstração. Vendo essa sequência de curvas dentro da extensão \overline{M} , que é pelo menos fortemente causal, podemos aplicar o Teorema da Curva Limite para espaços-tempo sem bordo, e obter uma curva $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow \overline{M}$ contínua, causal, futuro-dirigida

e inextensível em \overline{M} passando por p e satisfazendo as condições (1) e (2). É necessário verificar que ela está contida em M e continua sendo causal, futuro-dirigida e inextensível em relação a M . Pela condição (2), como cada ponto $\gamma(t)$ é o limite de uma sequência de pontos de $\gamma_k(t) \in M$, que é fechado em \overline{M} , segue que toda γ está contida em M , e com isso ela é inextensível também em M . Quanto à causalidade, veja que a transposição não é imediata, pois tratam-se de duas definições diferentes.

Fixe $t_0 \in [0, +\infty)$. Como γ é causal futuro-dirigida em \overline{M} , existe um aberto convexo $\overline{U} \ni \gamma(t_0)$ e um número $\varepsilon > 0$ de modo que para quaisquer $t, s \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, +\infty)$ com $t < s$ temos $\gamma(t) <_{\overline{U}} \gamma(s)$. Ora, como $M \cap \overline{U}$ é vizinhança de $\gamma(t_0)$ em M , e M é fortemente causal, podemos fixar uma vizinhança causalmente convexa $\mathcal{V}(t_0) \in \mathcal{V} \subset \overline{U} \cap M$ de $\gamma(t_0)$ em M . Pela continuidade de γ em M , podemos escolher $0 < \delta \leq \varepsilon$ de modo que $\gamma((t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0, +\infty)) \subset \mathcal{V}$.

Agora, fixe $t, s \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0, +\infty)$ com $t < s$. Como $\gamma[t, s] \subset \overline{U}$, devido à convergência uniforme em compactos $\gamma_k|_{[t,s]} \rightarrow \gamma|_{[t,s]}$ em \overline{M} (cf. (2)), eventualmente $\gamma_k[t, s] \subset \overline{U}$. Por outro lado, $\gamma_k(t) <_M \gamma_k(s)$, e como M é globalmente hiperbólico, temos $\gamma(t) \leq_M \gamma(s)$ (cf. Prop. 2.5.3). Certamente $\gamma(t) \neq \gamma(s)$, pois do contrário teríamos uma curva causal fechada em \mathcal{M} , que é fortemente causal, uma contradição. Logo $\gamma(t) <_M \gamma(s)$. Entretanto, qualquer curva causal suave por partes e futuro-dirigida de $\gamma(t)$ a $\gamma(s)$ tem que ficar em \mathcal{V} , e portanto em $\overline{U} \cap M$. Isso prova que γ é C^0 causal e futuro-dirigida, como desejado. ■

Proposição 4.5.3. *Seja (M, g) espaço-tempo com bordo temporal globalmente hiperbólico. Sejam $(p_k), (q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sequências convergindo respectivamente para $p \neq q \in M$. Se para todo k temos que $q_k \in J^+(p_k)$ e $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de curvas causais futuro-dirigidas de p_k a q_k , então $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ possui uma curva limite γ causal, futuro-dirigida de p até q .*

Demonstração. Proposição 3.24 de (SOLIS, 2006). ■

Proposição 4.5.4. *Seja (M, g) espaço-tempo com bordo temporal globalmente hiperbólico e $S \subset \partial M$ subvariedade compacta e $p \in M$ tais que $p \in J^+(S)$. Então existe uma curva causal γ de S até p com $\tau(S, p) = L(\gamma)$.*

Demonstração. Sob a luz do lema 2.2.5, identificamos os compactos $A = S, B = \{p\}, K = J^+(S) \cap J^-(p)$. Com isso, obtemos uma curva causal γ que satisfaz $L(\gamma) = d[J^+(S) \cap J^-(p)](S, \{p\})$. Mas pela definição de $d[K](A, B)$, vemos que nessa situação ele corresponde exatamente a $\tau(S, p)$, nos dando o resultado. ■

Em particular, veja que isso mostra que em um espaço-tempo globalmente hiperbólico, τ sempre assume valores finitos entre pontos.

Proposição 4.5.5. *Seja (M, g) um espaço-tempo com bordo temporal. Se (M, g) é globalmente hiperbólico, então τ é contínua em M .*

Demonstração. Começamos notando que a proposição 4.5.4 pode ser adaptada para S sendo apenas um ponto em M . Já vimos que τ é semi-contínua inferiormente, então basta verificar a semi-continuidade superior. Suponhamos que não fosse semi-contínua superiormente. Então existem $p, q \in M$ e sequências $(p_k), (q_k)$ em M convergindo respectivamente a p e q e existe $\varepsilon > 0$ tal que $\tau(p_k, q_k) \geq \tau(p, q) + \varepsilon$, para todo k . Assim, $\tau(p_k, q_k) > 0$ e portanto $q_k \in J^+(p_k)$. Aplicando a proposição 4.5.4 sucessivamente, temos a existência de curvas causais e futuro-dirigidas $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ onde cada uma liga p_k até q_k e satisfaz $L(\gamma_k) = \tau(p_k, q_k)$. Pela proposição 4.5.3 e pela semi-continuidade superior de L , vide a proposição 2.2.4, temos a existência de uma curva causal futuro-dirigida γ de p até q satisfazendo $L(\gamma) \geq \limsup L(\gamma_k)$. Com isso, obtemos $L(\gamma) \geq \limsup L(\gamma_k) = \limsup \tau(p_k, q_k) \geq \tau(p, q) + \varepsilon$, que é evidentemente uma contradição com a definição de τ . ■

4.6 ESPAÇOS-TEMPO DE RECOBRIMENTO

Os resultados principais desse trabalho serão formulados em termos de homotopia de curvas, o que torna de interesse o emprego de espaços e aplicações de recobrimento, pois estes ajudam em seu estudo. Nessa sessão iremos portanto estudar como as estruturas que estamos lidando se compatibilizam com aplicações de recobrimento. Assumimos que o leitor tenha uma familiaridade básica com o assunto, mas de toda forma remetemos como referência o apêndice de (O'NEILL, 1983) e o capítulo 4 de (LEE, J. M., 2012).

Definição 4.6.1. *Sejam M, \hat{M} variedades diferenciáveis e $\pi : \hat{M} \rightarrow M$ aplicação suave e sobrejetora. π é dita *aplicação de recobrimento* se para todo $p \in M$ existe vizinhança $p \in \mathcal{U}$ tal que para cada componente conexa \mathcal{V} de $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ temos que $\pi|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ é difeomorfismo. \hat{M} é chamado de *espaço de recobrimento* e uma tal vizinhança \mathcal{U} é dita ser *coberta uniformemente*.*

Proposição 4.6.1. *Seja $\pi : \hat{M} \rightarrow M$ uma aplicação de recobrimento suave, $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ curva contínua e $q \in \hat{M}$ tal que $\pi(q) = \alpha(0)$. Então existe um único levantamento³ suave $\hat{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \hat{M}$ de α por π tal que $\hat{\alpha}(0) = q$.*

Demonstração. Lema 3.1 de (MASSEY, 1991). ■

Observação 4.6.2. *É importante dizer que mesmo se \hat{M} for apenas um espaço topológico e π um aplicação de recobrimento "topológica", isto é, apenas contínua e com homeomorfismos no lugar dos difeomorfismos, podemos usar essa aplicação para*

³ Isto é, uma aplicação $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \hat{M}$ tal que $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.

induzir uma única estrutura diferenciável em \hat{M} que torna π aplicação de recobrimento suave. Este é o conteúdo da proposição 4.40 de (LEE, J. M., 2012).

Lema 4.6.3. *Seja (M, g) espaço-tempo com bordo temporal globalmente hiperbólico e $\pi : \hat{M} \rightarrow M$ aplicação de recobrimento suave. Seja $(\gamma_k : [0, t_k] \rightarrow \hat{M})_{k \in \mathbb{N}}$ sequência de aplicações contínuas satisfazendo as seguintes propriedades:*

- $(\gamma_k(0)) \rightarrow x \in \hat{M}$;
- $\alpha_k := \pi \circ \gamma_k$ são curvas causais contínuas futuro-dirigidas;
- $(\alpha_k(t_k)) \rightarrow q \in M, q \neq \pi(x)$

Então uma subsequência $(\gamma_{m(t_m)})$ converge para $y \in \pi^{-1}(q)$.

Demonstração. Seja \mathcal{U} vizinhança uniformemente coberta de $\pi(x)$ e seja $\hat{\mathcal{U}}$ a componente de $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ que contém x . Como $\pi|_{\hat{\mathcal{U}}} : \hat{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U}$ é difeomorfismo e $\gamma_k(0) \rightarrow x$, temos $\alpha_k(0) \rightarrow \pi(x)$, portanto pela proposição 4.5.3, existe uma curva causal $\alpha : [0, b] \rightarrow M$, limite uniforme da sequência $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ligando $\pi(x)$ a q . Seja γ o levantamento de α em \hat{M} , com ponto-base x .

Para cada $s \in [0, b]$, seja \mathcal{U}_s vizinhança uniformemente coberta de $\alpha(s)$. Como (M, g) é fortemente causal, podemos achar uma família de vizinhanças causalmente convexas satisfazendo $\alpha(s) \in \mathcal{V}_s \subset \mathcal{U}_s$. Como a imagem de α é compacta, podemos selecionar $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_l$ que ainda formam uma cobertura para α . Ainda, podemos escolher esse finitos \mathcal{V}_i de modo que só se intersectam quando seus índices são vizinhos e $\pi(x) \in \mathcal{V}_1, q \in \mathcal{V}_l$. Agora, para cada $1 \leq i \leq l-1$ seja a_i ponto de α em $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_{i+1}$ e $a_0 = \pi(x), a_l = q$. Como (M, g) em particular é causal, α não contém laços fechados, de modo que $\pi^{-1}(a_i) \cap \gamma$ possui apenas um ponto, que chamaremos de b_i . Seja $\hat{\mathcal{U}}_i$ a componente de $\pi^{-1}(\mathcal{U}_i)$ que contém b_{i-1} .

Veja que $b_0 = x$ e então como $\gamma_k(0)$ converge para x , $\hat{\mathcal{U}}_0$ contém os $\gamma_k(0)$ para k suficientemente grande. Como $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ é aberto e α é limite uniforme das α_k , existe uma subsequência $(a_{1,k}) \subset \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ com $a_{1,k} \in \alpha_k$ que converge para a_1 . Como (M, g) é fortemente causal, não admite curvas causais que "quase fecham", de modo que podemos assumir que $a_{1,k} \in J^+(\alpha_k(0))$.⁴ Assim, como os \mathcal{V}_i são causalmente convexas, o segmento de α_k entre $\alpha_k(0)$ e $a_{1,k}$ fica inteiramente contido em $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{U}_1$. Como $\pi|_{\hat{\mathcal{U}}_1}$ é homeomorfismo e γ_k é o levantamento de α_k com o ponto-base $\gamma_k(0)$, concluímos que para k suficientemente grande os $b_{1,k} := \pi^{-1}(a_{1,k}) \cap \gamma_k$ ficam contidos em $\hat{\mathcal{U}}_1$ e convergem para b_1 .

⁴ Nesse primeiro passo a justificativa dessa afirmação não depende da causalidade forte, dado que simplesmente $a_{1,k} \in \alpha_k$, mas nos passos seguintes que repetirão o procedimento para pontos que não estão no começo da curva, isso é necessário.

Repetindo esse processo agora partindo dos $b_{1,k}$, obtemos pontos $b_{2,k}$ sobre γ_k , contidos em \hat{U}_2 que convergem para b_2 . Prosseguindo da mesma forma uma quantidade finita de vezes, chegamos à extremidade das γ_k e obtemos uma subsequência dos $\gamma_k(t_k)$ que converge para $b_l = \pi^{-1}(q)$. ■

Proposição 4.6.4. *Seja (M, g) espaço-tempo e $\pi : \hat{M} \rightarrow M$ uma aplicação de recobrimento suave. Então existe uma única métrica de Lorentz \hat{g} e orientação temporal em \hat{M} que torna cada componente conexa de (\hat{M}, \hat{g}) um espaço-tempo, e π uma isometria local. Se (M, g) é globalmente hiperbólico com bordo temporal, então (\hat{M}, \hat{g}) também é. Nesse caso, temos ainda que $\pi|_{\partial\hat{M}} : \partial\hat{M} \rightarrow \partial M$ é também aplicação de recobrimento.*

Demonstração. Como π é suave e sua restrição a vizinhanças adequadas produz difeomorfismos locais em torno de todos os pontos, é uma aplicação de posto maximal e portanto π^*g torna \hat{M} uma variedade Lorentziana na qual π é isometria local. Dizendo que $v \in T_p\hat{M}$ é futuro-dirigido quando $d\pi_p(v) \in T_pM$ é futuro-dirigido, induzimos a orientação temporal de M em \hat{M} .

Veja que podemos assumir que \hat{M} é conexo, pois se não for, basta considerar uma de suas componentes conexas, que a restrição de π para ela ainda será uma aplicação de recobrimento: de fato, considere Y componente conexa de \hat{M} . Tome $p \in M$ e uma vizinhança conexa $U \ni p$. Temos $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha} U_{\alpha}$, onde cada U_{α} é conexo, e portanto cada U_{α} ou é disjunto ou está inteiramente contido em Y . Removendo de $\pi^{-1}(U)$ todos os U_{α} fora de Y , obtemos a imagem inversa de U por $\pi|_Y$, que a princípio pode ser vazia. Entretanto, $\pi(Y) \subset M$ e como M é conexo, um argumento tipo aberto-fechado mostra que $\pi|_Y$ é sobrejetiva, e portanto ainda uma aplicação de recobrimento.

Tomando $q \in \pi(\partial\hat{M})$, podemos escrever $q = \pi(x)$, para algum $x \in \partial\hat{M}$. Então, tomando uma carta de bordo para x em \hat{M} da forma $\Psi \circ \pi$ temos $0 = (x^n \circ \pi)(x) = x^n(\pi(x)) = x^n(q) \implies q \in \partial M$ e portanto $\pi(\partial\hat{M}) \subset \partial M$. Daí, $\partial\hat{M} \subset \pi^{-1}(\pi(\partial\hat{M})) \subset \pi^{-1}(\partial M)$. Tomemos agora $x \in \pi^{-1}(\partial M)$. A princípio, não sabemos sobre x estar no bordo, mas como \hat{M} é variedade com bordo, ao redor de cada ponto, em particular x , podemos considerar uma carta de bordo $\Phi = (y^1, \dots, y^n)$. Como sabemos, Φ é da forma $\Psi \circ \pi$, para $\Psi = (x^1, \dots, x^n)$ carta de bordo de M . Então temos $y^n(x) = x^n \circ \pi(x) = x^n(\pi(x)) = 0$, donde $x \in \partial\hat{M}$ e portanto $\pi^{-1}(\partial M) = \partial\hat{M}$. Com isso, segue que $\pi|_{\partial\hat{M}} : \partial\hat{M} \rightarrow \partial M$ também é aplicação de recobrimento.

Como π é isometria local, e mapeia $\partial\hat{M}$ em ∂M , estas hipersuperfícies têm o mesmo caráter causal, e sendo ∂M temporal, $\partial\hat{M}$ também o será.

Suponhamos agora que (M, g) é globalmente hiperbólico. Para ver que (\hat{M}, π^*g) é fortemente causal, tome $x \in \hat{M}$ e \hat{U} uma vizinhança de x . Seja $p = \pi(x)$ e escolha uma vizinhança \mathcal{V} de p de modo que $\mathcal{V} \subset \pi(\hat{U})$ e que seja coberta uniformemente por π . Caso necessário, podemos reduzir \mathcal{V} de modo a garantir que a componente $\hat{\mathcal{V}}$ de $\pi^{-1}(\mathcal{V})$ que contém x fica contida em \hat{U} . Como (M, g) é fortemente causal, existe

uma vizinhança causalmente convexa \mathcal{W} de p contida em \mathcal{V} . Assim, $\pi^{-1}(\mathcal{W}) \cap \hat{\mathcal{V}}$ é vizinhança causalmente convexa de x contida em $\hat{\mathcal{U}}$, pois se γ é curva causal em \hat{M} com extremidades y, z contidas em $\pi^{-1}(\mathcal{W}) \cap \hat{\mathcal{V}}$ temos $\pi(y), \pi(z) \in \mathcal{W}$ e $\pi \circ \gamma$ curva causal em M , pois π é isometria local. Segue que $\pi \circ \gamma$ está contida em \mathcal{W} e portanto $\gamma \subset \pi^{-1}(\mathcal{W}) \cap \hat{\mathcal{V}}$.

Para ver que os diamantes causais são compactos, tomemos uma sequência $(\hat{a}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset J^+(\hat{p}, \hat{M}) \cap J^-(\hat{q}, \hat{M})$ e sejam $\hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k$ curvas causais futuro-dirigidas ligando \hat{p} a \hat{a}_k e \hat{a}_k a \hat{q} , respectivamente. Olhando a imagem de todos esses objetos através de π em M , denotando-as sem o chapéu, temos a sequência $a_k := \pi \circ \hat{a}_k$ contida no compacto $J^+(p) \cap J^-(q)$. Daí, temos a existência de uma subsequência (a_m) que converge para um $x \in J^+(p) \cap J^-(q)$. Olhando para a subsequência correspondente em \hat{a}_k podemos aplicar nela o lema 4.6.3 para obter ainda outra subsequência \hat{a}_l que converge para algum $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$ tal que $\hat{x} \in J^+(\hat{p}, \hat{M})$. Aplicando a versão dual do lema para as $\hat{\beta}_l$ ao contrário, cujos pontos finais são de novo os (a_l) , obtemos uma subsequência que converge para um $\hat{y} \in J^-(\hat{q}, \hat{M})$. Como $(a_l)_{l \in \mathbb{N}}$ já é uma sequência convergente temos que $\hat{x} = \hat{y}$ e portanto encontramos uma subsequência convergente dentro de $J^+(\hat{p}, \hat{M}) \cap J^-(\hat{q}, \hat{M})$ para a sequência $(\hat{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}$. ■

Proposição 4.6.5. *Seja (M, g) espaço-tempo globalmente hiperbólico com bordo temporal. Se ∂M é conexo, então existe aplicação suave de recobrimento $\pi : \hat{M} \rightarrow M$ com (\hat{M}, \hat{g}) globalmente hiperbólico com bordo temporal tal que:*

- *Existe uma componente conexa S de $\pi^{-1}(\partial M) = \partial \hat{M}$ tal que $\pi|_S$ é isometria sobre ∂M ;*
- *O homomorfismo de grupos de homotopia baseados em um $x \in S$ qualquer induzido pela inclusão $\iota_* : \pi_1(S, x) \rightarrow \pi_1(\hat{M}, x)$ é sobrejetor.*

Demonstração. Como toda curva contida em ∂M em particular é também uma curva em M temos que $\pi_1(\partial M)$ pode ser visto como subgrupo de $\pi_1(M)$. Com isso, o lema 10.1 de (MASSEY, 1991) nos garante a existência de uma aplicação de recobrimento $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ com a propriedade que $\pi_*(\pi_1(\tilde{M})) = \pi_1(\partial M)$. Pela discussão feita na demonstração da proposição 4.6.4, sabemos que $\pi|_{\partial \tilde{M}} : \partial \tilde{M} \rightarrow \partial M$ é aplicação de recobrimento, então sendo S qualquer componente conexa de $\pi^{-1}(\partial M)$, podemos considerar a aplicação $\pi|_S : S \rightarrow \partial M$, que é isometria local sobrejetora. Agora, suponha que existam $p, q \in S$ com $\pi(p) = \pi(q) = x$. Considere uma curva α em S ligando p a q , de modo que $\pi|_S \circ \alpha$ é um laço fechado em ∂M baseado em x . Olhando sua classe de homotopia $[\pi|_S \circ \alpha]$ dentro de $\pi_1(\partial M)$, pela construção de π temos que existe um laço fechado β em \tilde{M} baseado em p de modo que $\pi \circ \alpha = \pi \circ \beta$ a menos de uma homotopia com extremidades fixas em M . Como o levantamento passando por p é único, segue que $\beta = \alpha$ e portanto a outra extremidade de α é igual ao ponto base de β , isto é, $p = q$. Assim $\pi|_S$ é injetora e portanto é isometria entre S e ∂M , como queríamos.

Para ver a sobrejetividade do homomorfismo induzido entre os grupos fundamentais, primeiramente note que o seguinte diagrama comutativo entre π e as inclusões produz um diagrama comutativo entre os respectivos homomorfismos induzidos:

$$\begin{array}{ccccc}
 S & \xrightarrow{\iota} & \tilde{M} & \xrightarrow{\pi_1(S)} & \pi_1(\tilde{M}) \\
 \downarrow \pi|_S & \circlearrowleft & \downarrow \pi & \implies & \downarrow \pi_* \\
 \partial M & \xrightarrow{j} & M & \xrightarrow{\pi_1(\partial M)} & \pi_1(M) \\
 & & & \downarrow j_* & \\
 & & & & \pi_1(M)
 \end{array}$$

Com isso, tome $[\alpha]$ qualquer em $\pi_1(\tilde{M})$. Então por construção de π existe $[\beta] \in \pi_1(\partial M)$ tal que $j_*([\beta]) = \pi_*([\alpha])$. Como $\pi|_S$ é em particular um difeomorfismo, o homomorfismo induzido é de fato um isomorfismo, de modo que podemos escrever $[\beta] = \pi|_{S*}([\gamma])$ para alguma $[\gamma]$ em $\pi_1(S)$. Temos portanto $(j \circ \pi|_S)_*([\gamma]) = \pi_*([\alpha])$. Pela comutatividade do diagrama obtemos $(\pi \circ \iota)_*([\gamma]) = \pi_*(\iota_*([\gamma])) = \pi_*([\alpha])$. Entretanto, é um fato geral que π_* é injetivo, donde $\iota_*([\gamma]) = [\alpha]$, como queríamos. ■

Observação 4.6.6. Como corolário, veja que se temos uma curva γ em \hat{M} entre $p, q \in S$, podemos conectá-la com uma curva qualquer β contida em S ligando q até p , para obter um laço fechado em \hat{M} baseado em p . Como o homomorfismo induzido $\iota_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(\hat{M})$ é sobrejetor, à classe de $\gamma * \beta$ em $\pi_1(\hat{M}, p)$ corresponde a classe de uma curva α em $\pi_1(S, p)$. Conectando α com β^{-1} obtemos uma curva contida em S , ligando p até q , facilmente vista ser homotópica a extremidades fixas a γ .

4.7 HIPERSUPERFÍCIES LUMINOSAS

Veja que se definimos $\mathfrak{N}(S) = \{v \in NS : g(v, v) = 0\} \subset T\bar{M}$, temos um fibrado (não vetorial, mas no qual a fibra é um cone) sobre S . Assim, seus abertos provém de abertos de S . Portanto, junto com as propriedades da aplicação exponencial normal, dado $v \in \mathfrak{N}(S)$ com $\pi(v) = p$, podemos sempre encontrar uma vizinhança \mathcal{U} de p em S e um campo vetorial $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ normal e luminoso que estende v e $T > 0$ tais que $\exp_S(tV), t \in [0, T]$ define uma superfície suave luminosa. Os próximos lemas mostram como fazer o mesmo de forma que não dependa de cada ponto tomado em S .

Lema 4.7.1. Seja (M, g) espaço-tempo com bordo temporal fortemente causal e seja $\gamma : [0, a) \rightarrow M$ uma geodésica luminosa futuro-dirigida ortogonal a uma subvariedade

espaçial $S \subset \partial M$ tal que $\gamma \cap \partial M = \{\gamma(0)\}$. Então, para cada $0 < T < a$ existe uma vizinhança \mathcal{U} de $\gamma(0)$ em S e um campo vetorial X luminoso, futuro-dirigido e normal a S sobre \mathcal{U} tal que $X_{\gamma(0)} = \gamma'(0)$ e todas as geodésicas com velocidade inicial X_q permanecem em uma vizinhança de $\gamma|_0^T$ e intersectam ∂M somente em $q \in \mathcal{U}$.

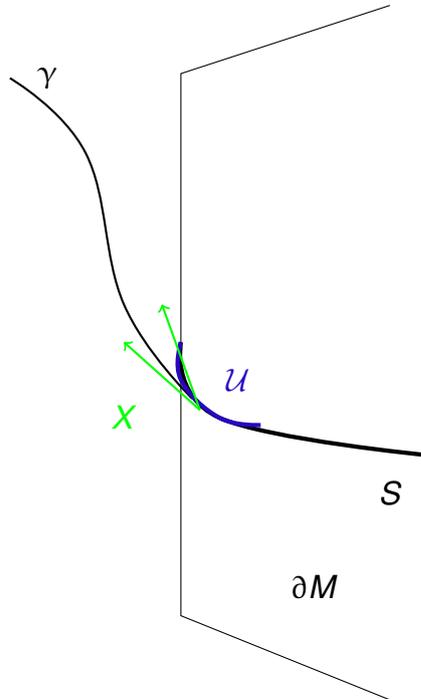


Figura 29 – Representação gráfica do lema 4.7.1.

Demonstração. Considere $\exp_S : NS \subset \overline{TM} \rightarrow \overline{M}$, a aplicação exponencial normal de S em \overline{M} . Pela possibilidade de trivializar localmente $\mathfrak{N}(S)$, temos que existe uma vizinhança \mathcal{V} de p em S e um campo vetorial luminoso futuro-dirigido $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{V})$ que estende $\gamma'(0)$ e tal que $\gamma_q(t) := \exp_S(tX_q)$ está definido para todo $q \in \mathcal{V}$ e $t \leq T$. Como geodésicas dependem de modo suave das condições iniciais, os segmentos $\gamma_q|_0^T$ ficam em uma vizinhança de $\gamma|_0^T$. Entretanto, como a construção foi feita em \overline{M} , temos que mostrar que \mathcal{V} pode ser escolhido de modo que todas as geodésicas γ_q ficam em M e encontram ∂M somente em q .

Suponha que isso não aconteça. Então, existiria uma sequência $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que converge para $\gamma(0)$ e tal que as geodésicas $\gamma_k := \gamma_{p_k}$ encontram ∂M no parâmetro $t_k \in (0, T]$. Pela compacidade de $[0, T]$, passando para subsequência se necessário, temos que $t_k \rightarrow T_0 \in [0, T]$. Como $p_k \rightarrow \gamma(0)$, temos, pela continuidade de X e da aplicação exponencial normal, que $\gamma_k(t_k) \rightarrow \gamma(T_0)$, que fica em ∂M , pois este é fechado. Portanto, $T_0 = 0$, pois por hipótese γ encontra ∂M somente em $\gamma(0)$.

Seja \mathcal{N} vizinhança normal de S em \overline{M} , $\mathcal{U} \subset \mathcal{N} \cap M$ vizinhança causalmente convexa de $\gamma(0)$ em M e consideremos uma vizinhança \mathcal{V} de $\gamma(0)$ em ∂M tal que $D(\mathcal{V}, \partial M)$ seja globalmente hiperbólico com superfície de Cauchy $S \cap \mathcal{V}$. Ainda, seja \mathcal{W}

uma vizinhança de $\gamma(0)$ em \overline{M} com $\mathcal{W} \cap M \subset \mathcal{U}$ e $\mathcal{W} \cap \partial M \subset \mathcal{V}$ e tal que $S \cap \mathcal{W}$ seja acausal em \mathcal{U} .

Como ambas $(\gamma_k(t_k))_{k \in \mathbb{N}}$, $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergem para $\gamma(0)$, temos que a partir de algum $N \in \mathbb{N}$, x_k e p_k ficam sempre dentro de $\mathcal{W} \cap M$. γ_N não pode intersectar ∂M ao passado de $S \cap \mathcal{V}$ por causa da acausalidade de $S \cap \mathcal{W}$ em \mathcal{W} , de modo que devemos ter $x_N \in I^+(S \cap \mathcal{V}, \mathcal{V})$. Portanto, $\tau_{\overline{M}}(S, x_N) > 0$, o que significa que γ_N não realiza a distância Lorentziana em \mathcal{N} entre x_N e S . Mas como \mathcal{N} é vizinhança normal em um espaço-tempo fortemente causal, o segmento inicial de γ_N em seu interior sempre realiza a distância Lorentziana. Então o que está acontecendo é que $\gamma_N|_0^{t_N}$ não fica inteiramente contida em \mathcal{N} , e portanto sai de \mathcal{U} e retorna, uma contradição com a hipótese de (M, g) ser fortemente causal. ■

Lema 4.7.2. *Seja (M, g) espaço-tempo com bordo temporal globalmente hiperbólico e seja $\gamma : [0, a) \rightarrow M$ uma geodésica luminosa futuro-dirigida que intersecta ∂M somente em $\gamma(0)$. Seja ∂_0 a componente de ∂M que contém $\gamma(0)$ e seja S hipersuperfície de Cauchy de ∂_0 passando por $\gamma(0)$.⁵ Ainda, suponha que $\gamma(t) \in J^+(S) \setminus I^+(S)$, para todo $t \in [0, a)$. Então para cada $T \in (0, a)$ existe uma hipersuperfície suave luminosa $N_T \subset M$ tal que $\gamma|_0^T$ é um de seus geradores luminosos e $S \cap N_T$ é tipo-espaço.*

Demonstração. Devido às proposições 4.2.6, 4.2.8 e à proposição 3.10 de (SOLIS, 2006) já sabemos que γ é geodésica luminosa que encontra S ortogonalmente e que não há pontos focais em $\gamma|_0^T$. Conforme o lema 4.7.1, consideramos uma vizinhança $\mathcal{V}(0) \in \mathcal{V} \subset S$ que pode ser tomada pré-compacta e um campo vetorial luminoso X sobre \mathcal{V} e normal a S que satisfazem a conclusão do lema.

Para cada $t \in [0, T]$, como $\gamma(t)$ não é ponto focal de S ao longo de γ , $d \exp_S$ é não singular em $t\gamma'(0)$, então pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança $\tilde{\mathcal{U}}_t$ de $t\gamma'(0)$ no cone normal luminoso $\mathfrak{N}(S) \subset NS$, tal que $\exp_S|_{\tilde{\mathcal{U}}_t}$ mapeia $\tilde{\mathcal{U}}_t$ difeomorficamente sobre $\mathcal{U}_t \subset \overline{M}$.

A coleção $(\mathcal{U}_t)_{t \in [0, T]}$ é uma cobertura para $\gamma[0, T]$, enquanto que $(\tilde{\mathcal{U}}_t)_{t \in [0, T]}$ cobre $[0, T]X_{\gamma(0)}$. Como a aplicação $\mathcal{V} \times [0, T] \rightarrow NS$ dada por $(q, t) \mapsto tX_q$ é contínua, temos a existência de uma vizinhança $\mathcal{W}(0) \in \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ tal que $[0, T]X_q \subset \bigcup_{t \in [0, T]} \tilde{\mathcal{U}}_t$, para todo $q \in \mathcal{W}$.

Agora consideramos a aplicação $\Psi : \mathcal{W} \times [0, T] \rightarrow M$ definida como $\Psi(q, t) = \exp_S(tX_q)$, de modo que para cada $q \in \mathcal{U}$, $t \mapsto \Psi(q, t)$ é a geodésica luminosa normal a S com velocidade inicial X_q . Veja que o contra-domínio de Ψ a priori deve ser \overline{M} pois só definimos a aplicação exponencial em variedades sem bordo, mas como o resultado que buscamos é uma hipersuperfície luminosa, se obtivermos uma em \overline{M} , sua interseção com M ainda é uma, de modo que não há perda de generalidade em supor que o contra-domínio é M .

⁵ Lembre que, como visto na proposição 4.4.2, cada componente conexa do bordo é globalmente hiperbólica sem bordo.

Devemos agora mostrar que Ψ é um mergulho, pois dessa forma teremos que sua imagem é uma subvariedade mergulhada de M . Para tanto, comecemos vendo que $(q, t) \mapsto tX_q \in NS$ é claramente um mergulho, e por isso temos que verificar apenas o comportamento da exponencial normal de S . Como esta é difeomorfismo local (lembrando que por construção não há pontos focais na região), precisamos verificar sua injetividade. Afirmamos que \mathcal{W} pode ser encolhida para garantir a injetividade. De fato, se isso não fosse possível, teríamos duas sequências distintas $(q_k, t_k) \neq (p_k, s_k)$ com q_k, p_k ambas convergindo para $\gamma(0)$ tais que $\Psi(q_k, t_k) = \Psi(p_k, s_k)$. Como $s_k, t_k \in [0, T]$, a menos de passagem para subsequência, podemos assumir que ambas convergem respectivamente para $s, t \in [0, T]$. Se $t = s$, teríamos $t\gamma'(0)$ e $s\gamma'(0)$ em $\tilde{\mathcal{U}}_t$, e eventualmente $s_k X_{p_k}, t_k X_{q_k} \in \tilde{\mathcal{U}}_t$, onde \exp_S é injetora, dando que as sequências seriam iguais, o que contradiz a forma que foram tomadas. Temos portanto que s e t são diferentes, digamos, $s \leq t$. Pela continuidade de \exp_S , como $\Psi(q_k, t_k) = \Psi(p_k, s_k)$, temos $\gamma(t) = \exp_S(t\gamma'(0)) = \exp_S(s\gamma'(0)) = \gamma(s)$. Portanto, $\gamma|_{[s,t]}$ é um laço fechado causal, o que viola a causalidade de (M, g) . Assim, existe \mathcal{W} que torna Ψ injetora e portanto um difeomorfismo. Ponha $N_T := \Psi(\mathcal{W} \times [0, T])$ e temos o que queríamos. ■

Observação 4.7.3. Note que o parâmetro afim nos geradores luminosos de N pode ser alterado de modo que as fatias $\Psi(A \times \{s\})$ sejam todas difeomorfas a $A \subset S$.

4.8 GEODÉSICAS ENTRE BORDOS TEMPORAIS

Doravante, tratamos de espaços-tempo assintoticamente anti-de Sitter. Como a estrutura causal é um invariante conforme, para investigar os teoremas de censura topológica é suficiente simplesmente analisar sua extensão com bordo temporal (M, g) . Daqui em diante, portanto, (M, g) sempre denotará um espaço-tempo com bordo temporal.

Definição 4.8.1. Seja $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ função contínua. Se t é crescente ao longo de qualquer curva causal futuro-dirigida, t é chamada de *função tempo*. Se t é suave e seu gradiente em todo ponto é tipo-tempo passado-dirigido, t é chamada de *função temporal*. Ainda, se t é função tempo, denote por Σ_{t_0} o conjunto de nível $\{p \in M : t(p) = t_0\}$.

Observação 4.8.1. É fácil ver que ser função temporal implica ser função tempo. De fato, se t é função temporal e γ é curva suave por partes causal futuro-dirigida em M , $t \circ \gamma$ é aplicação suave por partes da reta na reta e temos $(t \circ \gamma)'(s) = dt_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) = g_{\gamma(s)}(\nabla t(\gamma(s)), \gamma'(s)) > 0$, para todo s pois os vetores estão em cones temporais opostos.

Para espaços-tempo sem bordo, a hiperbolicidade global garante a existência de funções temporais, vide o teorema 1.2 de (BERNAL; SÁNCHEZ, 2005). No nosso caso,

estaremos interessados em funções temporais para o bordo de espaços-tempo globalmente hiperbólicos com bordos temporais, que como visto, são também globalmente hiperbólicos em cada componente conexa.

Um problema que compõe o estudo da censura topológica é a "comunicação causal" entre diferentes componentes do bordo. Mais especificamente, se ∂_α e ∂_β são componentes distintas de ∂M , e S hipersuperfície de Cauchy de ∂_α com $J^+(S) \cap \partial_\beta \neq \emptyset$, queremos encontrar uma geodésica luminosa ligando S a ∂_β chegando "no tempo mais cedo possível", em relação a uma função temporal t fixada. Em termos técnicos:

Definição 4.8.2. Sejam $\partial_\alpha, \partial_\beta, S$ como acima e $t : \partial_\beta \rightarrow \mathbb{R}$ função temporal de ∂_β . Suponha que cada componente de ∂M possui fatias espaciais compactas. Uma geodésica luminosa $\gamma : I \rightarrow M$ futuro-dirigida é dita ser *geodésica de menor tempo de S para ∂_β* , se $\gamma \subset J^+(S)$, começa em S e termina em Σ_{t_0} , onde $t_0 = \inf\{s \in \mathbb{R} : J^+(S) \cap \Sigma_s \neq \emptyset\}$.

O nome dado deve ser tomado como uma expressão atômica, sem querer atribuir significado próprio a "de menor tempo", pois a definição busca aludir a um tempo medido dentro do espaço-tempo ∂_β , e não, como pode parecer, a um tempo medido ao longo da geodésica. Além disso, para ver que essa noção está bem definida, devemos verificar que o conjunto em questão é limitado inferiormente. Suponha que não fosse. Então existiriam sequências $t_k \searrow -\infty$ e $q_k \in \Sigma_{t_k}$ com $q_k \in J^+(S)$. Podemos usar as curvas integrais de ∇t para projetar pontos de ∂_β sobre um dado conjunto de nível. Com efeito, fixe $T \geq t_1$ e seja $p_k \in \Sigma_T$ essa projeção de q_k . Como Σ_T é compacta, a menos de passagem para subsequência temos que $p_k \rightarrow p$. Seja $\gamma_k : [0, T-t_k] \rightarrow \partial_\beta$ o segmento de curva integral de ∇t entre p_k e q_k . Por um argumento via lema da curva limite, obtemos uma curva limite $\gamma : [0, a] \rightarrow \partial_\beta$. Como $t_k \rightarrow -\infty$, devemos ter $a = +\infty$, o que significa que γ é inextensível.

Seja $s \in [0, +\infty)$ e considere $N \in \mathbb{N}$ tal que γ_k está definida em s para todo $k \geq N$. Note que $\gamma_k(s) \in J^+(S), \forall k \geq N$ e como $J^+(S)$ é fechado, temos que $\gamma(s) = \lim_s \gamma_k(s) \in J^+(S)$ e portanto $\gamma \subset J^+(S)$. Por outro lado $\gamma(0) = p$ então $\gamma \subset J^-(p)$, dando que $\gamma \subset J^+(S) \cap J^-(p) \cap \partial_\beta$, que é compacto, e sendo γ inextensível, temos contradição com a causalidade forte de ∂_β . Logo o conjunto é limitado inferiormente e possui ínfimo sempre que não for vazio, isto é, quando existir pelo menos uma curva causal futuro-dirigida de S até ∂_β .

Finalmente, também podemos ver que de fato há uma curva causal de S chegando em Σ_{t_0} . Para tanto, considere uma sequência $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \{s \in \mathbb{R} : J^+(S) \cap \Sigma_s \neq \emptyset\}$ convergindo para t_0 e uma sequência $y_k \in J^+(S) \cap \Sigma_{t_k}$. Seja x_k a projeção de y_k sobre Σ_{t_0} pela função t . Como Σ_{t_0} é compacto, passando para subsequência se necessário, obtemos para os x_k um limite $x \in \Sigma_{t_0}$, dando também que $y_k \rightarrow x$. Como o futuro causal é um conjunto fechado, segue que $x \in J^+(S)$, e portanto existe uma curva causal saindo de S e chegando "no menor tempo" em ∂_β . Os próximos resultado buscarão

estudar uma condição suficiente para que exista a tal "geodésica de menor tempo entre S e ∂_β ".

Lema 4.8.2. *Suponha que $t_0 \neq -\infty$ e seja γ curva causal futuro-dirigida de S até ∂_β que intersecta ∂M apenas em suas extremidades. Então γ é segmento de geodésica luminosa contido em $\partial I^+(S)$ que encontra ambos Σ_{t_0} e S ortogonalmente.*

Demonstração. Seja $q \in \Sigma_{t_0}$ a extremidade futura de γ . Note que $q \notin I^+(S)$, pois como a relação cronológica é aberta em M , e q estivesse no futuro cronológico de S , poderíamos encontrar $s < t_0$ tal que $I^+(S) \cap \Sigma_s \neq \emptyset$. Mais ainda, como temos a propriedade transitiva, nenhum par de pontos de γ pode estar cronologicamente relacionado. Portanto $\gamma \subset J^+(S) \setminus I^+(S)$. Por 4.2.5, $\overline{I^+(S)} = \overline{J^+(S)}$, e junto com 4.4.3 concluimos que $\overline{I^+(S)} = J^+(S)$. Então temos $\partial I^+(S) = \overline{I^+(S)} \setminus I^+(S) = J^+(S) \setminus I^+(S)$ e portanto segue que $\gamma \subset \partial I^+(S)$. Como γ encontra o bordo somente nas extremidades, podemos aplicar 4.2.6 e 4.2.8 para concluir que γ de fato é geodésica luminosa que encontra Σ_{t_0} e S ortogonalmente. ■

Lema 4.8.3. *Seja (M, g) espaço-tempo com bordo temporal globalmente hiperbólico e satisfazendo a condição de convergência luminosa. Sejam ∂_α e ∂_β duas componentes conexas distintas de ∂M e $S_\alpha \subset \partial_\alpha$, $S_\beta \subset \partial_\beta$ hipersuperfícies de Cauchy fracamente convexas luminosas com $J^+(S_\alpha) \cap S_\beta \neq \emptyset$. Se $I^+(S_\alpha) \cap S_\beta = \emptyset$ então toda curva causal futuro-dirigida ligando S_α e S_β deve intersectar ∂M em algum ponto além de suas extremidades.*

Demonstração. Procedamos pela contrapositiva: suponha que exista uma curva causal futuro-dirigida $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ de S_α a S_β que intersecta ∂M somente em suas extremidades. Pelas proposições 4.2.6 e 3.10 de (SOLIS, 2006), γ deve ser geodésica luminosa, ortogonal tanto a S_α como a S_β e sem pontos focais a S_α em $[0, 1)$.

Pela observação 4.7.3, para o vetor $-\gamma'(1)$ que é ortogonal a S_β e aponta para dentro de M , existe uma vizinhança \mathcal{U}_β de $\gamma(1)$ em S_β , $\varepsilon > 0$ e superfície suave $N_\beta = \Psi(\mathcal{U}_\beta \times (1 - 2\varepsilon, 1])$ tais que $\gamma|_{1-2\varepsilon}^1$ é um de seus geradores, onde Ψ é que nem na proposição 4.7.2. Podemos ainda assumir que as fatias $\mathcal{U}_{\beta,s} := \Psi(\mathcal{U}_\beta \times \{s\})$ são todas difeomorfas a \mathcal{U}_β .

Por outro lado, pela proposição 4.7.2 temos uma superfície N_α emanando de uma vizinhança \mathcal{U}_α de $\gamma(0)$ em S_α , da forma $N_\alpha := \Psi(\mathcal{U}_\alpha \times [0, 1 - \varepsilon/2))$, tendo $\gamma|_0^{1-\varepsilon/2}$ como um de seus geradores, e onde Ψ é como na proposição 4.7.2. Novamente, assumamos que os $\mathcal{U}_{\alpha,s} := \Psi(\mathcal{U}_\alpha \times \{s\})$ são todos difeomorfos a \mathcal{U}_α . Veja que N_α e N_β se encontram pelo menos em todo o segmento $\gamma|_{1-2\varepsilon}^{1-\varepsilon/2}$ e em particular no ponto $r := \gamma(1 - \varepsilon)$.

Como S_β é convexa-luminosa e $\gamma'(1)$ é futuro-dirigido apontando para fora de M , temos que $\theta_\beta(1) \geq 0$, onde θ_β é a expansão luminosa de $\mathcal{U}_{\beta,s}$ ao longo de γ .

Assim, pela equação de Raychaudhuri e pela condição de convergência luminosa temos $\theta'_\beta \leq -Ric(\gamma', \gamma') \leq 0$, o que quer dizer que θ_β não é crescente, que por sua vez implica que $\theta_\beta(1 - \varepsilon) \geq 0$. De forma análoga, dado que S_α também é convexa-luminosa e $\gamma'(0)$ é futuro-dirigido apontando para dentro de M , temos $\theta_\alpha(0) < 0$ e portanto $\theta_\alpha(1 - \varepsilon) < 0$.

Como N_β está contida em $\partial\Gamma(S_\beta)$, N_β é localmente acronal, vide o teorema 3.9 de (BEEM *et al.*, 1996). Consideremos portanto uma vizinhança \mathcal{V} de r tal que N_β é fechada e acronal em \mathcal{V} , de modo que existe vizinhança $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ de r tal que toda curva tipo-tempo de $\Gamma(r, \mathcal{W})$ para $I^+(r, \mathcal{W})$ necessariamente intersecta N_β . Seja $a \in I^+(r, \mathcal{W})$ e $b \in \Gamma(r, \mathcal{W})$ e ponha $\mathcal{U} := \Gamma(a, \mathcal{W}) \cap I^+(b, \mathcal{W})$.

Tome $x \in N_\alpha \cap \mathcal{U}$. Então existe uma curva tipo-tempo futuro-dirigida σ de b até a , passando por x . Por construção, σ deve encontrar N_β em algum ponto $y \in N_\beta \cap \mathcal{W}$. Se $y \in I^+(x, \mathcal{W})$, então concatenando $\sigma|_y^x$ com o gerador luminoso de N_β que passa por y e com o gerador luminoso de N_α que passa por x , obtemos uma curva causal de S_α para S_β que não é uma geodésica luminosa e encontra ∂M somente em suas extremidades, o que implicaria, em violação de nossas hipóteses iniciais, que $I^+(S_\alpha) \cap S_\beta \neq \emptyset$. Portanto devemos ter y no passado de x ao longo de σ , dando $x \in J^+(N_\beta \cap \mathcal{U}, \mathcal{U})$. Logo, $N_\alpha \cap \mathcal{U} \subset J^+(N_\beta \cap \mathcal{U}, \mathcal{U})$.

Portanto, pelo princípio do máximo para hipersuperfícies luminosas suaves, vide (GALLOWAY, 2000) temos que $\theta_\alpha(r) = 0 = \theta_\beta(r)$, contradizendo que $\theta_\alpha(r) < 0$. ■

Finalmente estamos em condição de reunir as várias hipóteses sobre o espaço-tempo com bordo em um teorema que fornece a existência de uma "geodésica de menor tempo".

Teorema 4.8.4. *Seja (M, g) espaço-tempo com bordo-temporal globalmente hiperbólico e assuma que ∂M possui apenas duas componentes conexas ∂_1 e ∂_2 . Suponha que as hipersuperfícies de Cauchy de cada componente sejam compactas e acausais em M . Se S é hipersuperfície de Cauchy de ∂_1 com $J^+(S) \cap \partial_2 \neq \emptyset$ então existe uma geodésica de menor tempo η entre S e ∂_2 e ela é normal tanto a S quanto a Σ_{t_0} .*

Demonstração. Como $J^+(S) \cap \Sigma_{t_0} \neq \emptyset$, considere η uma curva causal futuro-dirigida de $p \in S$ até $q \in \Sigma_{t_0}$. Pelos lemas precedentes, basta mostrarmos que η encontra ∂M somente em suas extremidades que seguirá que ela é uma geodésica de menor tempo entre S e ∂_2 . Para tanto, seja $p' \in \partial_1$ o último ponto de η em ∂_1 . Se $p' \neq p$, como S é acausal em M , devemos ter $p' \in J^+(p) \setminus S$. Mais ainda, como S é hipersuperfície de Cauchy, todo ponto que não está sobre ela, está necessariamente em seu futuro ou em seu passado cronológico. Portanto $p' \in I^+(S, \partial_1)$, o que implica que $q \in I^+(S)$, que sendo aberto, levará a uma contradição com a definição de t_0 . Portanto $p = p'$.

Seja agora $q' \in \Sigma_T$ o primeiro ponto que η encontra ∂_2 . Pela definição de t_0 , é evidente que $T \geq t_0$. Se $q \neq q'$, temos que a porção de η entre os dois, contida em ∂_2 ,

é futuro-dirigida em ∂_2 . Mas então uma função temporal em ∂_2 aumentaria indo de q' para q , o que é contradição. Logo $q = q'$. ■

4.9 OS TEOREMAS DE CENSURA TOPOLÓGICA

Proposição 4.9.1. *Sejam S, M variedade suaves, com ou sem bordo, $\iota : S \hookrightarrow M$ um mergulho e $\pi : \hat{M} \rightarrow M$ o recobrimento universal de M . Se $\pi^{-1}(S)$ é conexa então o homomorfismo de grupos induzido $\iota_* : \pi_1(S, p) \rightarrow \pi_1(M, p)$ é sobrejetor.*

Demonstração. Começemos tomando uma classe qualquer $[\gamma] \in \pi_1(M)$, onde γ é laço baseado em $p \in S$. Escolha $\hat{p} \in \pi^{-1}(p)$ e seja $\hat{\gamma}$ o levantamento de γ passando por \hat{p} . Como γ é um laço, $\hat{\gamma}$ termina em um ponto \hat{q} que também é mapeado sobre p via π . Como \hat{p}, \hat{q} estão em $\pi^{-1}(S)$, que por hipótese é conexa e portanto conexa por caminhos, existe curva $\hat{\beta} \subset \pi^{-1}(S)$ ligando \hat{p}, \hat{q} . Como \hat{M} é simplesmente conexo $\hat{\gamma}$ e $\hat{\beta}$ são homotópicas a extremidades fixas. Assim, $\beta := \pi \circ \hat{\beta}$ é um laço sobre p contido em S que é homotópico a γ , e portanto $\iota_*[\beta] = [\gamma]$. ■

Definição 4.9.1. *Seja (M, g) espaço-tempo com bordo temporal e $A \subset \partial M$. O domínio de comunicação externa de A é dado por $\mathcal{D}(A) := I^+(A) \cap I^-(A)$.*

Para A não vazio, $\mathcal{D}(A)$ representa o conjunto de pontos de M que podem ser acessados cronologicamente a partir de A e que conseguem acessar cronologicamente A de volta. Observe que se (M, g) é espaço-tempo com bordo temporal conexo $\partial M = \mathcal{I}$, então por \mathcal{I} ser um espaço-tempo, segue que $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}(\mathcal{I})$, de modo que $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ é também espaço-tempo com bordo temporal, cujo bordo é \mathcal{I} .

Teorema 4.9.2 (Teorema da Censura Topológica). *Seja (M, g) espaço-tempo com bordo temporal \mathcal{I} conexo e suponha que $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ seja globalmente hiperbólico. Suponha ainda que as hipersuperfícies de Cauchy de \mathcal{I} sejam compactas, fracamente convexas-luminosas e acausais em $\mathcal{D}(\mathcal{I})$. Então o **Princípio da Censura Topológica** vale em $\mathcal{D}(\mathcal{I})$, isto é, toda curva causal em $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ é homotópica-com extremidades fixas a uma curva causal contida em \mathcal{I}*

Demonstração. Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{I})$ uma curva causal futuro-dirigida de $p \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ até $q \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Queremos mostrar que γ é homotópica (com extremidades fixas) a uma curva $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{I}$. Como $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ é suposto globalmente hiperbólico, pela proposição 4.6.5 existe uma aplicação de recobrimento $\pi : \hat{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{I})$ onde $(\hat{\mathcal{D}}, \hat{g})$ é um espaço-tempo com bordo temporal globalmente hiperbólico que contém uma cópia isométrica de \mathcal{I} , que denotaremos por $\hat{\mathcal{I}}$. Tome $\hat{p} \in \hat{\mathcal{I}}$ tal que $\pi(\hat{p}) = p$ e faça o levantamento de γ para uma curva $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathcal{D}}$, começando em \hat{p} e então ponha $\hat{q} := \hat{\gamma}(1) \in \partial \hat{\mathcal{D}}$.

Se $\hat{\gamma}(1) \in \hat{\mathcal{I}}$ por consequência da proposição 4.6.5 segue que $\hat{\gamma}$ é homotópica (com extremidades fixas) a uma curva $\hat{\gamma}_0 : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathcal{I}}$, o que terminaria a prova, pois

$\gamma_0 = \pi \circ \hat{\gamma}_0$ seria a curva desejada. Suponha portanto que $\hat{\gamma}(1) \in \partial \hat{\mathcal{D}} \setminus \hat{\mathcal{I}}$. Seja $T : \hat{\mathcal{I}} \rightarrow \mathbb{R}$ função temporal tal que $p \in S := T^{-1}(0)$ e defina $\hat{S} := \pi^{-1}(S) \cap \hat{\mathcal{I}}$ e $B := J^+(\hat{S}, \hat{\mathcal{D}}) \cap (\partial \hat{\mathcal{D}} \setminus \hat{\mathcal{I}})$. Veja que $\hat{q} \in B$ e portanto $(T \circ \pi)(B) \neq \emptyset$. Como S é acausal em M , temos que 0 limita inferiormente $(T \circ \pi)(B)$ e portanto podemos definir $t_0 := \inf\{(T \circ \pi)(B)\}$.

Assim, podemos tomar uma sequência $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset (T \circ \pi)(B)$ que converge para t_0 . Sejam então, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\hat{q}_k \in \partial \hat{\mathcal{D}} \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tal que $t_k = (T \circ \pi)(\hat{q}_k)$, $p_k \in \hat{S}$ e $\hat{\gamma}_k$ curva causal futuro-dirigida em $\hat{\mathcal{D}}$ ligando \hat{p}_k até \hat{q}_k . Denote os objetos correspondentes em $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ pelos mesmos símbolos, omitindo os acentos.

Como por hipótese S é compacta e $\pi|_{\hat{\mathcal{I}}}$ é homeomorfismo, temos que \hat{S} também é compacta e portanto a menos de passagem para subsequência, \hat{p}_k converge para um $\hat{p}_0 \in \hat{S}$. Por outro lado, podemos projetar q_k sobre $T^{-1}(t_0)$ via T para obter q'_k . Como $T^{-1}(t_0)$ é compacto, a menos de passagem para subsequência, temos que q'_k converge para algum $q_0 \in T^{-1}(t_0)$ e portanto os q_k também convergem para q_0 . Podemos ver que $q_0 \neq p_0$, pois se os pontos coincidisse, poderíamos tomar uma vizinhança \mathcal{U} uniformemente recoberta por π e $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ uma vizinhança causalmente convexa de $p_0 = q_0$. Como ambas $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}, (q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergiriam para p_0 , teríamos $p_N, q_N \in \mathcal{V}$ para N suficientemente grande, e portanto $\gamma_N \subset \mathcal{V}$ e $\hat{\gamma}_N \subset \hat{\mathcal{U}}$, onde $\hat{\mathcal{U}}$ é a única componente de $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ que contém \hat{p}_0 . Daí chegaríamos a contradição de que $\hat{q}_N \in \hat{\mathcal{I}}$.

Dessa forma, todas as hipóteses do lema 4.6.3 são satisfeitas e portanto temos garantida a existência de uma curva $\hat{\gamma}_0$ causal futuro-dirigida de \hat{p}_0 até \hat{q}_0 , e com isso $T \circ \pi(\hat{q}_0) = t_0$. Logo, $t_0 \in (T \circ \pi)(B)$. Agora, denotemos por ∂_0 a componente de $\partial \hat{\mathcal{D}}$ contendo \hat{q}_0 e seja Σ_0 uma hipersuperfície de Cauchy de ∂_0 passando por \hat{q}_0 . Se existisse um ponto \hat{x} sobre $\hat{\gamma}_0$ em $\partial \hat{\mathcal{D}} \setminus \hat{\mathcal{I}}$ que fosse distinto de \hat{q}_0 , pondo $t_1 := T \circ \pi(\hat{x})$, temos evidentemente $t_1 \geq t_0$ e portanto o segmento de γ_0 entre x e q_0 seria uma curva causal futuro-dirigida ligando $T^{-1}(t_1)$ e $T^{-1}(t_0)$, o que entra em contradição com a acausalidade dessas superfícies.

Portanto $\hat{\gamma}_0$ encontra $\partial \hat{\mathcal{D}} \setminus \hat{\mathcal{I}}$ somente em \hat{q}_0 . Como π é isometria local, tanto \hat{S} como Σ_0 são convexas-luminosas. Pela contrapositiva do lema 4.8.3 concluímos que $I^+(\hat{S}) \cap \Sigma_0 \neq \emptyset$, mas como $I^+(\hat{S})$ é aberto, teríamos $I^+(\hat{S}) \cap \Gamma(\Sigma_0, \partial_0) \neq \emptyset$, o que entraria em contradição com a definição de t_0 . Portanto não há a possibilidade de $\hat{\gamma}(1)$ não pertencer a $\hat{\mathcal{I}}$, sobrando apenas o caso que já provamos. ■

Em termos físicos, podemos interpretar esse teorema como a impossibilidade de um observador (curva causal) vindo de "longe" (bordo) passar por alguma região de topologia não trivial. Ou seja, ainda que no espaço-tempo exista alguma região com topologia não trivial, essa fica inacessível para uma inquirição ativa de um observador. Por outro lado, do ponto de vista matemático, para a topologia não existe caráter causal de curvas, de modo que é do nosso interesse ver se o resultado anterior também vale quando não nos restringimos a curvas causais. Este é o conteúdo do próximo teorema.

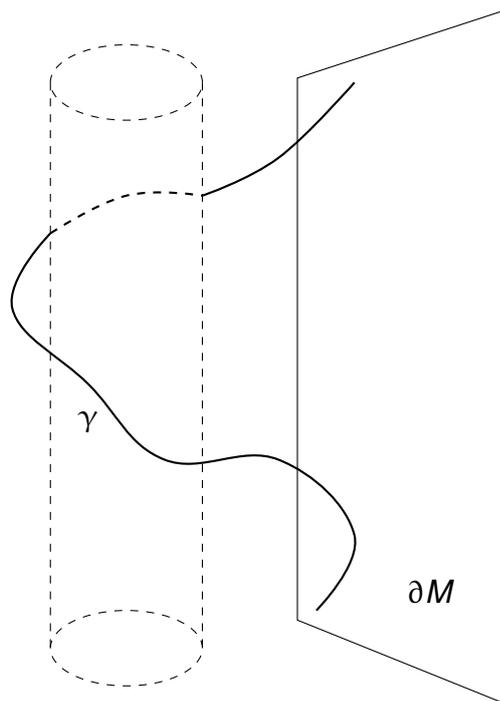


Figura 30 – Situação que o Princípio da Censura Topológica proíbe. Na figura, um cilindro (bordo e interior) infinito é removido do espaço, tornando-o não simplesmente conexo. Note entretanto que o espaço-tempo representado não é globalmente hiperbólico.

Teorema 4.9.3 (Forma forte do Teorema de Censura Topológica). *Seja (M, g) espaço-tempo com bordo temporal \mathcal{I} conexo e suponha que $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ seja globalmente hiperbólico. Suponha ainda que as hipersuperfícies de Cauchy de \mathcal{I} sejam compactas, fracamente convexas-luminosas e acausais em $\mathcal{D}(\mathcal{I})$. Então toda curva em $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ com extremidades em \mathcal{I} é homotópica com extremidades fixas a uma curva contida em \mathcal{I}*

Demonstração. Vamos começar verificando que $\hat{\mathcal{I}} = \pi^{-1}(\mathcal{I})$ é conexo, onde $\pi : \hat{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{I})$ é o recobrimento universal. Assim, seja $\{I_\alpha : \alpha \in A\}$ a coleção das componentes conexas de $\hat{\mathcal{I}}$ e ponhamos $D_\alpha := I^+(I_\alpha, \hat{\mathcal{D}}) \cap I^-(I_\alpha, \hat{\mathcal{D}})$. Tomando $x \in \hat{\mathcal{D}}$ temos que $\pi(x) \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ e portanto existe uma curva causal futuro-dirigida $\gamma : I \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{I})$ passando por $\pi(x)$ e com extremidades em \mathcal{I} . Pelo teorema anterior existe uma homotopia $H : I \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{I})$ relativa a ∂I que leva γ até uma curva causal $\beta : I \rightarrow \mathcal{I}$. Fazendo o levantamento de γ por x obtemos uma curva causal $\hat{\gamma}$ em $\hat{\mathcal{D}}$, com extremidades em $\hat{\mathcal{I}}$. Escolhendo uma das extremidades, podemos fazer o levantamento de β para obter uma curva $\hat{\beta}$ em $\hat{\mathcal{I}}$, que a princípio não sabemos se de fato termina na outra extremidade de $\hat{\gamma}$. Entretanto, podemos fazer o levantamento também para a homotopia H , obtendo uma aplicação $\hat{H} : I \times [0, 1] \rightarrow \hat{\mathcal{D}}$ tal que $\pi \circ \hat{H} = H$, de modo que é facilmente vista ser uma homotopia (a extremidades fixas) entre $\hat{\gamma}$ e $\hat{\beta}$. Portanto a curva causal $\hat{\gamma}$ sai e retorna para a mesma componente de $\hat{\mathcal{I}}$, digamos I_{α_0} , de modo que $x \in D_{\alpha_0}$. Logo, $\{D_\alpha : \alpha \in A\}$

é uma cobertura aberta para \hat{D} . Como já sabemos que $I^+(I_\alpha, \hat{D}) \cap I^-(I_\delta, \hat{D}) = \emptyset$ quando $\alpha \neq \delta$ segue que todos os D_α são disjuntos, mas como \hat{D} é conexo, temos que ele está contido apenas em um dos D_α . Isso significa que o conjunto de índices A é unitário, e portanto \hat{I} é conexo.

Com isso, estão dispostas todas as hipóteses do lema (4.9.1), que nos garante que qualquer laço em $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ baseado em \mathcal{I} é deformável a um laço contido em \mathcal{I} . Para obter exatamente o enunciado do teorema, tomemos $\mu : [a, b] \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{I})$ curva com extremidades em \mathcal{I} . Considere uma curva ν em \mathcal{I} indo de $\mu(b)$ até $\mu(a)$. Aplicando o referido lema para a concatenação de μ com ν obtemos um laço baseado em $\mu(a)$, contido em \mathcal{I} . Concatenando-o com ν reparametrizada no sentido contrário, obtemos uma curva contida em \mathcal{I} , homotópica a μ , com as extremidades $\mu(a)$ e $\mu(b)$ fixas. ■

Para exemplificar a aplicação destes teoremas, revisitamos com uma modificação o geon- \mathbb{RP}^3 que já sabemos ser globalmente hiperbólico e satisfazer a condição de convergência luminosa. Fixamos $a > 2m$ e removemos do espaço-tempo a região $r > a$, de modo a obtermos um bordo \mathcal{I} em $r = a$ que é folheado por esferas \mathbb{S}^2 , que funcionam como suas hipersuperfícies de Cauchy. Vejamos como a métrica (7) induz uma métrica em \mathcal{I} . Primeiramente veja que fixar r em $a > 2m$ corresponde a termos $X^2 - T^2 = k^2$, para algum k . Temos portanto

$$XdX - TdT = 0 \implies dX = \frac{T}{\sqrt{k^2 + T^2}} dT \implies dX^2 = \frac{T^2}{k^2 + T^2} dT^2.$$

Substituindo isso em (7), obtemos o seguinte (exibindo só a parte relevante da expressão):

$$-dT^2 + dX^2 = \left(-1 + \frac{T^2}{k^2 + T^2} \right) dT^2 = - \left(\frac{k^2}{k^2 + T^2} \right) dT^2,$$

donde concluímos que é uma métrica Lorentziana e portanto \mathcal{I} é bordo temporal.

Para ver que as esferas são convexas-luminosas, vamos calcular o operador de forma S associado a elas, dados os campos luminosos normais $U_\pm = \partial_t \pm (1 - 2m/a)\partial_r$. Considere V , um vetor genérico no fibrado tangente de \mathbb{S}^2 . Escrevemos $V = \alpha\partial_\theta + \beta\partial_\phi$. Com isso, calculamos

$$\begin{aligned} S_{U_\pm}(V) &= \nabla_V U_\pm = \nabla_{(\alpha\partial_\theta + \beta\partial_\phi)} (\partial_t \pm (1 - 2m/a)\partial_r) \\ &= \alpha\nabla_{\partial_\theta} \partial_t \pm \alpha(1 - 2m/a)\nabla_{\partial_\theta} \partial_r + \beta\nabla_{\partial_\phi} \partial_t \pm \beta(1 - 2m/a)\nabla_{\partial_\phi} \partial_r, \end{aligned}$$

e utilizando as fórmulas da proposição 3.5 de (SUZANA, 2019) temos que isso se reduz a

$$\pm\alpha(1 - 2m/a)\frac{1}{a}\partial_\theta \pm \beta(1 - 2m/a)\frac{1}{a}\partial_\phi = \pm\frac{1 - 2m/a}{a} (\alpha\partial_\theta + \beta\partial_\phi).$$

Portanto concluímos que

$$g(S_{U_\pm}(V), V) = \pm\frac{1 - 2m/a}{a} (\alpha^2 a^2 + \beta^2 a^2 \text{sen}^2(\theta)) = \pm(a - 2m) (\alpha^2 + \beta^2 \text{sen}^2(\theta)),$$

dado que $g(\partial_\theta, \partial_\theta) = a^2$, $g(\partial_\theta, \partial_\phi) = 0$, $g(\partial_\phi, \partial_\phi) = a^2 \text{sen}(\theta)$. Portanto, S_{U_+} é positivo-definido e S_{U_-} é negativo-definido, como queríamos. Assim, o espaço-tempo construído satisfaz todas as hipóteses dos teoremas apresentados. A figura 31 ilustra a censura topológica ocorrendo neste espaço-tempo.

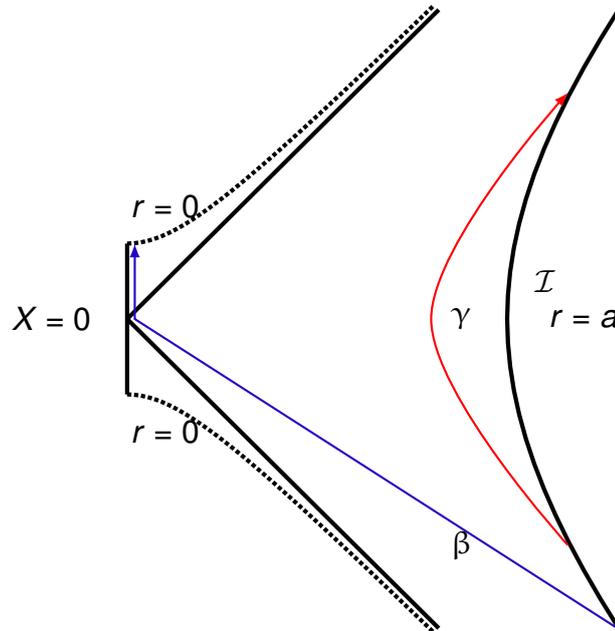


Figura 31 – A curva γ explora $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ e consegue retornar a \mathcal{I} , enquanto a curva β vai explorar a topologia exótica em $X = 0$ e fica presa no buraco negro.

Além deste, o leitor interessado pode encontrar exemplos mais sofisticados em (BRILL *et al.*, 1997) e (GALLOWAY *et al.*, 1999).

REFERÊNCIAS

BEEM, J. K.; EHRLICH, P.; EASLEY, K. **Global Lorentzian Geometry**. 2. ed. [S.l.]: CRC Press, 1996. (Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics). ISBN 9780824793241.

BERNAL, A. N.; SÁNCHEZ, M. Smoothness of Time Functions and the Metric Splitting of Globally Hyperbolic Spacetimes. **Communications in Mathematical Physics**, v. 257, n. 1, p. 43–50, mai. 2005. DOI: 10.1007/s00220-005-1346-1. arXiv: gr-qc/0401112 [gr-qc].

BRILL, D. R.; LOUKO, J.; PELDÁN, P. Thermodynamics of(3+1)-dimensional black holes with toroidal or higher genus horizons. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 56, n. 6, p. 3600–3610, set. 1997. ISSN 1089-4918. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.56.3600>.

BROWDY, S. F.; GALLOWAY, G. J. Topological censorship and the topology of black holes. **Journal of Mathematical Physics**, v. 36, n. 9, p. 4952–4961, 1995. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.530930>.

CHRUSCIEL, P. T.; WALD, R. M. On the topology of stationary black holes. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 11, n. 12, p. 1147–1152, dez. 1994. ISSN 1361-6382. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/11/12/001>.

COLLAS, P.; KLEIN, D. Embeddings and time evolution of the Schwarzschild wormhole. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers (AAPT), v. 80, n. 3, p. 203–210, mar. 2012. ISSN 1943-2909. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1119/1.3672848>.

COSTA E SILVA, I. P. **Lecture notes on semi-riemannian geometry**. [S.l.: s.n.].

COSTA E SILVA, I. P. On the Gannon–Lee singularity theorem in higher dimensions. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 27, n. 15, p. 155016, jun. 2010. ISSN 1361-6382. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/27/15/155016>.

ESPINOZA, V. L. **Linhas e raios geodésicos causais em espaços-tempos com aplicações à relatividade**. 2020. F. 182. Monografia (Dissertação de Mestrado) – Florianópolis.

FRIEDMAN, J. L.; SCHLEICH, K.; WITT, D. M. Topological Censorship. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 75, n. 9, p. 1872–1872, ago. 1995. ISSN 1079-7114. Disponível em:
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.1872>.

GALLOWAY, G. J. A ‘finite infinity’ version of topological censorship. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 13, n. 6, p. 1471–1478, jun. 1996. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0264-9381/13/6/015>.

GALLOWAY, G. J. Maximum Principles for Null Hypersurfaces and Null Splitting Theorems. **Annales Henri Poincaré**, Springer Science e Business Media LLC, v. 1, n. 3, p. 543–567, jul. 2000. ISSN 1424-0637. Disponível em:
<http://dx.doi.org/10.1007/s000230050006>.

GALLOWAY, G. J.; SCHLEICH, K.; WITT, D. M.; WOOLGAR, E. Topological censorship and higher genus black holes. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 60, n. 10, out. 1999. ISSN 1089-4918. Disponível em:
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.60.104039>.

GANNON, D. Singularities in nonsimply connected space–times. **Journal of Mathematical Physics**, v. 16, n. 12, p. 2364–2367, 1975. Disponível em:
<https://doi.org/10.1063/1.522498>.

GEROCH, R. Domain of Dependence. **Journal of Mathematical Physics**, v. 11, n. 2, p. 437–449, 1970. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.1665157>.

HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. **The Large Scale Structure of Space-Time**. [S./]: Cambridge University Press, fev. 2011. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 978-0-521-20016-5. DOI: 10.1017/CB09780511524646.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Álgebra Linear**. 1. ed. Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos editora S.A., 1976. P. 356.

JACOBSON, T.; VENKATARAMANI, S. Topology of event horizons and topological censorship. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 12, n. 4, p. 1055–1061, abr. 1995. ISSN 1361-6382. Disponível em:
<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/12/4/012>.

KREIDER, D.; KULLER, R.; OSTBERG, D.; PERKINS, F. **Introdução à Análise Linear**. 1. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1972. v. 1.

LEE, C. W. A restriction on the topology of Cauchy surfaces in general relativity. **Communications in Mathematical Physics**, Springer, v. 51, n. 2, p. 157–162, 1976. DOI: [cmp/1103900349](https://doi.org/10.1007/BF01201349).

LEE, John M. **Introduction to Smooth Manifolds**. 2. ed. New York: Springer, 2012. v. 218, p. 708. (Graduate Texts in Mathematics).

LICHTENFELZ, L. **Os teoremas de singularidade na geometria Lorentziana**. 2009. F. 142. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Florianópolis.

MASSEY, W.S. **A basic course in algebraic topology**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1991. (Graduate Texts in Mathematics).

MILNOR, J.W. **Topology from the differentiable viewpoint**. Charlottesville: The University Press of Virginia, 1965.

MORRIS, M. S.; THORNE, K. S.; YURTSEVER, U. Wormholes, Time Machines and the Weak Energy Condition. **Physical Review Letters**, v. 61, n. 13, p. 1446–1449, 1988.

NOMIZU, K.; OZEKI, H. The existence of complete Riemannian metrics. **Proceedings of the American Mathematical Society**, JSTOR, v. 12, n. 6, p. 889–891, 1961.

O'NEILL, Barrett. **Semi-Riemannian Geometry: With Applications to Relativity**. 1. ed. San Diego: Academic Press, 1983. v. 108. (Pure and Applied Mathematics).

PENROSE, Roger. Gravitational Collapse and Space-Time Singularities. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 14, p. 57–59, 3 jan. 1965. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.14.57>.

SOCOLOVSKY, M. Schwarzschild Black Hole in Anti-De Sitter Space. **Advances in Applied Clifford Algebras**, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00006-018-0822-6>.

SOLIS, D. A. **Global properties of asymptotically de Sitter and anti-de Sitter spacetimes**. 2006. F. 139. Monografia (PhD Dissertation) – Miami.

SUZANA, L. H. **A geometria do espaço-tempo de Schwarzschild**. 2019. F. 149. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Florianópolis.

TREUDE, J. H. **Ricci curvature comparision in Riemannian and Lorentzian Geometry**. 2011. F. 175. Monografia (Diplomarbeit) – Reutlingen.

WALD, R. M. **General relativity**. First Edition. [S./]: University of Chicago Press, 1984. ISBN 9780226870335.