UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO, DE CIÊNCIAS EXATAS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Lucas Felix dos Anjos

Equações do 1º grau:
Significando a aprendizagem por intermédio da história da matemática

Blumenau
2021

Lucas Felix dos Anjos

Equações do 1º grau:

Significando a aprendizagem por intermédio da história da matemática

Dissertação submetida ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – Campus Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Eleomar Cardoso Júnior.

Blumenau

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Anjos, Lucas Felix dos
Equações do 1° grau : significando a aprendizagem por intermédio da história da matemática / Lucas Felix dos Anjos ; orientador, Eleomar Cardoso Júnior, 2021.
104 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de Pós Graduação em Matemática, Blumenau, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Equações do 1° grau. 3. História da matemática. 4. Aprendizagem significativa. 5. Álgebra. I. Cardoso Júnior, Eleomar. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Lucas Felix dos Anjos

Equações do 1º grau:

Significando a aprendizagem por intermédio da história da matemática

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. André Vanderlinde da Silva, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina – Campus Blumenau

Prof. Júlio Faria Corrêa, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina – Campus Blumenau

Prof.(a) Vanessa Largo Andrade, Dr.(a)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Toledo

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Marcio de Jesus Soares
Data: 18/08/2021 22:09:47-0300
CPF: 270.670.858-10
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Eleomar Cardoso Junior
Data: 18/08/2021 21:59:25-0300
CPF: 056.666.459-35
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Eleomar Cardoso Júnior
Orientador

Blumenau, 2021.

Este trabalho é dedicado à minha esposa Carol, aos meus filhos, Francisco e Catarina, e aos meus pais, Valéria e Carlos.

AGRADECIMENTOS

A concepção deste trabalho só foi possível devido a uma conjunção de fatores e pessoas, que, direta ou indiretamente, - transcendendo, por vezes, o âmbito acadêmico - atuaram em seu favor.

Dou graças, primeiramente, a Nosso Senhor Jesus Cristo, princípio e fim de todas as coisas, que certamente me conduziu a esta especialização acadêmica e ajudou-me durante todo o percurso, pois sem Seu auxílio nada sou e nada posso. Agradeço, pois "é Deus quem, segundo o seu beneplácito, realiza o querer e o executar". (cf. Fl 2, 13). Sou, ainda, muitíssimo grato à Santíssima Virgem, pois acredito que todas as graças chegaram a mim por Suas mãos.

Agradeço a minha família, amigos e parentes. De modo especial aos meus pais, Carlos e Valéria, que me incentivaram e, mesmo às custas, me possibilitaram uma educação de qualidade, base para tudo que foi construído aqui, e que, acima de tudo, me transmitiram valores e me conduziram à prática da religião; à minha amada esposa Carol, por sua paciência, dedicação e, principalmente, suas orações, que me alcançam e me sustentam diariamente, e aos nossos filhos Francisco e Catarina, que com alegria e docilidade ajudaram a atenuar os percalços encontrados nesse processo; e a todos aqueles (não citados pelo risco de esquecer alguém) que, estando ao meu lado, me confortaram com atos de serviço, carinho e companheirismo.

Ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Santa Catarina, campus Blumenau, do qual destaco os professores Dr. Rafael Aleixo, Dr. Renan Gambale, Dr. Márcio de Jesus Soares, Dr. Felipe Vieira, Dr. Luiz Rafael, Dr. Eleomar Cardoso Júnior, Dr. Claudio Loesch, Dr. Maicon Jośe Benvenutti e Dr. André Vanderlinde, agradeço por contribuir com a minha formação, me oportunizando um novo olhar à matemática, o que tem modificado o meu fazer pedagógico.

Em particular, gostaria de destacar novamente o professor, e orientador deste trabalho, Dr. Eleomar Cardoso Júnior, que mesmo diante de um contexto de pandemia, não se furtou de cumprir o seu trabalho com excelência e dedicação, acolhendo e dirigindo minhas propostas com generosidade, sabedoria, organização e pontualidade, sempre de prontidão a dirimir todas as minhas dúvidas, me dando segurança e incentivo para prosseguir.

Aos membros da banca, que se dedicaram a ler este trabalho e a trazer contribuições valiosas não só para o devido momento, mas que me acompanharão em trabalhos futuros. Em especial, ao professor Dr. André Vanderlinde, já supracitado, que, em suas aulas de geometria espacial, me proporcionou um contato com a filosofia da matemática e, indiretamente, me encorajou a continuar enveredando por estes caminhos.

Finalmente, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES), à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), por oportunizar aos professores em rede nacional acesso à esta especialização em nível de mestrado.

"Nenhuma ciência basta-se a si mesma; nenhuma disciplina considerada isoladamente tem suficiente luz para seus próprios caminhos. Separada, ela se encolhe, murcha, debilita-se e, na primeira oportunidade, extravia-se." (SERTILLANGES, 2019)

RESUMO

A abstração proposta pela álgebra é um dos desafios que são apresentados no processo de ensino-aprendizagem de matemática durante o ensino básico. Diante disso, o presente trabalho objetiva desenvolver uma proposta para o ensino de equações do 1° grau em turmas do 7° ano dos anos finais do ensino fundamental, tendo como estratégia a história da matemática e baseado na teoria cognitivista da aprendizagem significativa. Para tal, um panorama inicial retrata a normativa vigente no Brasil no que diz respeito ao currículo escolar e suas implicações no ensino de álgebra para o ensino fundamental, juntamente, uma análise dos resultados mais recentes dos principais indicadores para a educação no Brasil, o PISA e o SAEB, na área de matemática, fundamentam os objetivos desta dissertação. Na sequência, apresentam-se as contribuições da história da matemática para o uso em sala de aula baseado nos trabalhos de Mendes e Chaquiam. Uma ênfase é dada à história da álgebra, da qual se oferece um resumo que busca explicar, com base nos estudos de Baumgart, a divisão do seu desenvolvimento histórico em três períodos: retórico, sincopado e simbólico. Ainda como fundamentação teórica, aborda-se a teoria da aprendizagem significativa, de David Ausubel, e seus principais aspectos relativos à forma como a aprendizagem acontece segundo a teoria e suas consequências para a abordagem proposta neste trabalho. Por fim, uma proposta de sequência didática é estruturada e apresentada, com materiais de apoio e sugestão de atividades.

Palavras-chave: Equações do 1º grau. História da Matemática. Aprendizagem Significativa. Álgebra.

ABSTRACT

The abstraction proposed by algebra is one of the challenges that are presented in the teaching-learning process of mathematics during basic education. Therefore, this work aims to develop a proposal for teaching linear equations in 7th grade classes of the final years of elementary school, having as a strategy the history of mathematics and based on the cognitive theory of meaningful learning. To this end, an initial overview portrays the current regulations in Brazil with regard to the school curriculum and its implications for the teaching of algebra for elementary school, together with an analysis of the most recent results of the main indicators for education in Brazil, the PISA and SAEB, in the area of mathematics, support the objectives of this dissertation. In the sequence, the contributions of the history of mathematics for use in the classroom based on the works of Mendes and Chaquiam are presented. An emphasis is given to the history of algebra, of which a summary is offered that seeks to explain, based on Baumgart's studies, the division of its historical development into three periods: rhetorical, syncopated and symbolic. Still as a theoretical foundation, the theory of meaningful learning, by David Ausubel, and its main aspects related to the way learning happens according to the theory and its consequences for the approach proposed in this work. Finally, a proposal for a didactic sequence is structured and presented, with support materials and suggested activities.

Keywords: Linear equations. History of Mathematics. Meaningful Learning. Algebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC Base Nacional Comum Curricular

INEP Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

OCDE Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico

PISA Programa Internacional de Avaliação de Estudantes

SAEB Sistema de Avaliação da Educação Básica

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Um dos maiores pontos de inflexão na matemática em nível escolar, principalmente quando se trata de ensino fundamental, está na transição da aritmética para a álgebra, ou, como os alunos gostam de dizer, “quando as letras aparecem na matemática”.

Fazer “contas com letras” não é algo natural para a grande maioria dos alunos e chega a ser uma barreira para o desenvolvimento da própria disciplina de matemática, visto que o pensamento algébrico também é explorado em outras unidades temáticas, como na geometria ou em estatística e probabilidade; e até mesmo em outras disciplinas ligadas às ciências exatas e da natureza, que utilizam a matemática como ferramenta, como física, química ou geografia, por exemplo.

Pesquisas como a de Bezerra (2016), realizada com docentes da área de matemática e de disciplinas relacionadas, que atuam na rede pública com o ensino fundamental e médio, apontam para essa dificuldade latente, que perpassa todos os níveis de ensino e as mais diversas áreas, de articular a linguagem escrita com a linguagem simbólica matemática e de identificar dados em um determinado problema, equacioná-los e interpretar seus resultados.

Um outro estudo, de Santana (2019), realizado com alunos do 8º ano do ensino fundamental de uma escola pública, também indica esta dificuldade em ler e interpretar um problema, e, consequentemente, traduzi-lo adequadamente e de forma lógica para a linguagem simbólica matemática, demonstrando essa deficiência existente na transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico.

Existe, portanto, nesta etapa da vida escolar, uma desconexão entre todo o trabalho realizado em matemática nos anos iniciais e o aprendizado de álgebra que começa a acontecer, de maneira mais formal, a partir do 7º ano do ensino fundamental. O ensino da aritmética, da geometria, de grandezas e medidas ou da estatística, de maneira lúdica, concreta, baseado na resolução de problemas contextualizados às experiências vivenciadas pelos alunos, dá lugar ao formalismo algébrico, aos procedimentos e regras em lidar com os símbolos matemáticos. Desta forma, segundo Schoen (1995 apud BEZERRA, 2016, p.49) ignora-se, portanto, “a necessidade de uma fundamentação verbal e de uma simbolização gradual sugeridas pela construção histórica da álgebra”, lançando “os alunos precipitadamente ao simbolismo algébrico”.

Buscando “contornar” esta barreira e “acelerar” o processo de ensino-aprendizagem, seja pela falta de tempo ou pelo amplo currículo que deve ser cumprido, alguns professores tendem a abordar a álgebra de uma maneira meramente procedimental, com ênfase em aspectos técnicos e operacionais, relacionando de maneira direta a aritmética com a álgebra, negligenciando suas principais diferenças, e deixando de lado a compreensão do pensamento algébrico existente por trás destas técnicas. Neste ponto, destaca-se o pensamento de Coelho e Aguiar (2018) de que, na prática, estes aspectos têm "gerado algumas deficiências que são diagnosticadas em várias pesquisas e nas avaliações governamentais".

Desta álgebra puramente procedimental, decorre também uma falta de motivação por parte dos alunos, por não enxergarem necessidade ou utilidade em todas estas técnicas e regras, bem como no uso de símbolos e letras para resolver problemas. Para muitos estudantes do ensino fundamental a álgebra, em sua forma simbólica, é vista como uma novidade sem precedentes, que não encontra raízes ou aplicações na realidade concreta. Os paralelos estabelecidos entre a álgebra e situações do cotidiano para a criação de problemas, por exemplo, são muito frágeis e dão margem para que os alunos possam crer que todo rigor simbólico e letrista não lhes será útil, desmotivando-os no aprendizado. Esta falta de motivação e dificuldades ocasionadas por ela, bem como as dificuldades apontadas anteriormente, evidenciam-se, na prática escolar, a partir do 7º ano dos anos finais do ensino fundamental, momento em que todo simbolismo e rigor dos procedimentos algébricos é introduzido, e tem reflexo durante o restante do ensino fundamental, bem como no ensino médio, traduzindo-se em erros comuns como os relatados por Freitas (2002) e Soares (2019).

Aqui, vale mencionar que este trabalho não tem a intenção de invalidar ou ignorar o simbolismo algébrico, mas sim de buscar uma forma de introduzi-lo de maneira mais gradual e profícua, correlacionando e significando seu estudo em aspectos históricos e nos conhecimentos prévios de cada aluno, reconhecendo, portanto, a importância dos símbolos e o seu poder de síntese, que facilitam a compreensão e a resolução de certos problemas.

O desenvolvimento deste campo da matemática – a álgebra – ao longo da história nos aponta um caminho feito pela humanidade que possibilita contextualizar e compreender as diferenças, bem como as relações existentes entre o pensamento algébrico e a álgebra moderna, dos símbolos e letras.

Conforme Baumgart (1992), alguns dos primeiros indícios de um pensamento algébrico surgem por volta de 1700 a.C., se desenvolvendo durante séculos sem a necessidade de um único símbolo, de forma puramente retórica, ou seja, expressa por meio de textos e palavras que explicavam procedimentos para encontrar um determinado valor. Foi somente entre os séculos XV e XVI que todo esse pensamento começou a ser codificado no que hoje podemos chamar de linguagem algébrica, ou notação algébrica simbólica.

O presente trabalho se propõe a apresentar uma alternativa para a introdução da álgebra, mais especificamente do estudo de equações do 1º grau no 7º ano do ensino fundamental, com base na história da matemática, buscando significar, estimular e desenvolver o pensamento algébrico, sem a necessidade inicial de utilizar símbolos ou letras para a resolução de problemas, levando os alunos a identificarem suas vantagens e desvantagens, bem como compreenderem a sua necessidade diante de situações mais complexas.

A justificativa para a escolha das equações de 1º grau como tema dentro do escopo que a álgebra oferece, decorre do fato de que a fase antiga (elementar) do desenvolvimento algébrico, conforme aponta Baumgart (1992, p. 3), caracterizou-se restritamente pelo estudo de equações e métodos para solucioná-las. Esse período perdurou de 1700 a.C. a 1700 d.C., aproximadamente, e culminou no simbolismo algébrico. Com o simbolismo algébrico, inicia-se a fase moderna (abstrata), que trouxe um significado mais amplo ao que hoje se entende como o conceito de álgebra.

O estudo fundamentar-se-á inicialmente na teoria da Aprendizagem Significativa, de David Ausubel, presente em Ausubel, Novak e Hanesian (1978) e elucidada por Moreira e Masini (1982), importante para uma melhor compreensão dos movimentos cognitivos necessários para a aquisição de um novo conhecimento, e, consequentemente, apontando uma direção nesta “passagem” da abordagem aritmética para a algébrica.

Juntamente com a Aprendizagem Significativa, os estudos de Mendes e Chaquiam (2016) servirão como embasamento sobre o uso da história nas aulas de matemática, ajudando a introduzir de forma significativa a álgebra, focando “mais na discussão dos significados dos conceitos algébricos” a partir do “entendimento de como as ideias se desenvolveram ao longo dos tempos”, “ao invés de tratar inicialmente das técnicas de resolução de problemas propriamente ditas”, conforme analisam Coelho e Aguiar (2018, p. 184).

Como forma de abarcar toda a teoria, esclarecer e ilustrar o que estará disposto a seguir, ao término deste trabalho será proposta uma sequência didática que, juntamente com outros materiais de apoio elaborados (textos, atividades e apresentação em slides), buscará contribuir para uma reflexão mais concreta e dar base para futuras aplicações. Desde então, porém, vale observar ao leitor que este trabalho carece de relatos de uma aplicação da sequência didática, que permitam fazer ponderações acuradas de efetividades e carências possivelmente encontradas no percurso. Uma justificativa detalhada para tal observação, com possibilidades metodológicas para trabalhos futuros é apresentada nas Considerações Finais.

1.1 ÁLGEBRA NA BNCC

Atualmente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o principal documento norteador para a educação básica no Brasil. Em sua introdução a BNCC se define como

> [...] um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (BRASIL, 2018, p. 7).

A álgebra se inclui nesse “conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais” (BRASIL, 2018, p. 7) e algumas de suas características podem ser encontradas entre as competências gerais elencadas pela própria BNCC.

No ponto 2 das competências gerais descritas na BNCC (BRASIL, 2018, p. 9), por exemplo, é traçado como competência geral o exercício da curiosidade intelectual, recorrendo à abordagem das ciências para a investigação de causas, elaboração e teste de hipóteses, formulação e resolução de problemas. Processo este que pode encontrar na linguagem matemática uma poderosa ferramenta de síntese e resolução, fato corroborado pelo quarto ponto das mesmas competências gerais que trata da utilização de

> [...] diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo (BRASIL, 2018, p. 9).

Nesse sentido, uma novidade expressa pela BNCC é a inclusão da álgebra como unidade temática desde os anos iniciais do ensino fundamental.

É evidente que tal inclusão não se trata já de uma álgebra simbólica, mas sim do pensamento algébrico mais primitivo, que se ocupa com “ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade” (BRASIL, 2018, p. 270), relacionando-se diretamente com a unidade temática de Números. Porém, é de grande valor essa inclusão sistemática que diferencia e explicita a álgebra com relação à aritmética, pois permitir esse contato e estímulo já nos anos iniciais com ideias relacionadas à álgebra

> [...] não só prepara os alunos para a álgebra que virá, mas também aprofunda sua compreensão das propriedades do sistema numérico no qual eles estão aprendendo a calcular e incute hábitos de práticas matemáticas como procurar estruturas e expressar regularidades (KIERAN et al. 2016, p. 22, tradução nossa).

Em resumo, do 1º ao 6º ano do ensino fundamental, as principais ideias encontradas na unidade temática de álgebra estão relacionadas ao estímulo desse pensamento algébrico. No 6º ano, por exemplo, as habilidades EF06MA14 e EF06MA15, abordam, sem utilizar do simbolismo algébrico, ideias envolvendo propriedades da igualdade, demonstrando que uma igualdade não se altera ao realizar quaisquer das quatro operações básicas – adição, subtração, multiplicação e divisão – em ambos os membros; e divisão de certa quantidade em partes desiguais, antevendo o que é denominado "problema de partilha", uma das três classes de problemas abordados em álgebra e identificados por Marchand e Bednarz (1999).

No 7º ano, momento em que o simbolismo algébrico começa a aparecer, a BNCC descreve – divididas em quatro objetos do conhecimento, a saber: (i) linguagem algébrica: variável e incógnita; (ii) equivalência de expressões algébricas: identificação de regularidade de uma sequência numérica; (iii) problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais; (iv) equações polinomiais do 1º grau – seis habilidades para a unidade temática de álgebra, que estão elencadas abaixo:

> (EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.
> (EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.
> (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
> (EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
> (EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
> (EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade. (BRASIL, 2018, p. 307).

Destas, somente a habilidade EF07MA14 trata do pensamento algébrico sem simbolismos, ligado à ideia de identificar padrões e regularidade. As demais habilidades têm relação direta com o uso de símbolos e letras, seja no trabalho com expressões algébricas, onde as letras adquirem ideia de variável para expressar uma regularidade ou uma relação entre grandezas (EF07MA13, EF07MA15, EF07MA16 e EF07MA17); ou na resolução e elaboração de problemas envolvendo equações do 1º grau, em que a letra é identificada como uma incógnita, como enuncia a habilidade EF07MA18.

De maneira geral, a BNCC (BRASIL, 2018) trata da álgebra como uma unidade temática responsável por desenvolver este pensamento algébrico em todas as etapas do ensino básico, seja pela simples identificação de padrões e regularidades, bem como pelo desenvolvimento de uma linguagem própria, através da utilização de letras e símbolos, para expressar esses padrões, generalizar e sintetizar relações entre quantidades, a fim de compreender, representar, analisar e resolver situações e problemas advindos das mais diversas áreas do conhecimento.

1.2 PANORAMA DA APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA NO BRASIL

Almejando ainda introduzir e justificar este trabalho, um breve panorama do ensino de álgebra no Brasil será delineado. Para tanto, utilizar-se-ão dois indicadores: o relatório do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) do ano de 2017 e o relatório do Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (PISA) do ano de 2018.

Vale ressaltar, porém, que os dados e conclusões obtidas aqui descreverão um retrato da realidade vivenciada no ensino no Brasil como um todo, ou seja, é apenas uma parte que pôde ser descrita e quantificada de uma realidade muito mais ampla e diversa.

A escolha destes relatórios é justificada pelo fato de terem a matemática como um dos campos do conhecimento em pesquisa, além de que tais estudos foram feitos com estudantes de faixa etária correspondente ou superior ao final do ensino fundamental no Brasil, mais especificamente, com turmas de 5º e 9º anos do ensino fundamental e 3º ano do ensino médio, no caso do SAEB, das quais serão levados em consideração somente os estudos relacionados ao 9º ano; e com estudantes de 15 anos, no caso do PISA, etapa em que espera-se que os conceitos envolvendo equações do 1º grau estejam consolidados ou, ao menos, tenham sido vistos.

Quanto ao nível de abrangência das pesquisas, isto é, a composição do público-alvo e a forma com que são aplicadas – se censitária ou amostral – o relatório do SAEB 2017 indica que

> [...] participaram de forma censitária o 5º e o 9º anos do ensino fundamental e a 3ª série do ensino médio da rede pública e, de forma amostral, o 5º e o 9º anos do ensino fundamental da rede privada, com a novidade de as escolas da 3ª série do ensino médio aderirem à aplicação, além daquelas já constituintes da amostra (BRASIL, 2019, p. 15).

Conforme aponta a Portaria nº 447, de 24 de maio de 2017, que estabelece as diretrizes de planejamento e execução do SAEB 2017, em seu artigo 3º, a participação de forma censitária do 5º e 9º anos do ensino fundamental ocorreu em “escolas públicas localizadas em zonas urbanas e rurais que possuam 10 (dez) ou mais alunos matriculados em cada uma das etapas" (INEP, 2017, p. 21), e de forma amostral, de maneira similar, em "escolas privadas localizadas em zonas urbanas e rurais que possuam pelo menos 10 (dez) alunos matriculados em cada uma das etapas" (INEP, 2017, p. 21), baseando-se nas "informações autodeclaradas pelas escolas na primeira etapa do Censo Escolar da Educação Básica 2017 referentes à matrícula" (BRASIL, 2019, p. 19) .

Além disso, para delimitar e especificar ainda mais o público-alvo, de modo a esclarecer os resultados que se seguirão, o artigo 5º da mesma Portaria nº 447 estabelece que

> Não fazem parte da população alvo do SAEB 2017 as turmas multisseriadas, de correção de fluxo, de Educação Especial Exclusiva, de Educação de Jovens e Adultos, de Ensino Médio Normal/Magistério bem como as escolas indígenas que não ministrem o ensino em Língua Portuguesa (INEP, 2017).

Diante do exposto, a Tabela 1 apresenta um panorama acerca do número de alunos participantes desta edição do SAEB, estabelecendo também uma comparação entre o número de alunos previstos e o número de alunos presentes.

Tabela 1 - Número de estudantes previstos e presentes no SAEB 2017, por região.

Região	Estudantes Previstos	Estudantes Presentes	% Estudantes Presentes
Centro-Oeste	549.707	431.337	78,46
Nordeste	2.016.432	1.600.653	79,38
Norte	791.424	606.622	76,64
Sudeste	2.723.615	2.123.488	77,96
Sul	957.225	695.965	72,7
Total	7.038.403	5.458.065	77,54

Fonte: Brasil (2019)

É possível verificar, portanto, que 5.458.065 estudantes estiveram presentes nas etapas do SAEB 2017, que corresponde a aproximadamente 77,54% do total de estudantes previstos. Nota-se ainda que a participação por região acompanha a média nacional, o que mostra certa homogeneidade para a avaliação dos resultados.

Já o PISA tem um público-alvo, de acordo com a definição internacional dos estudantes elegíveis, composto por

> Estudantes entre 15 anos e 3 meses (completos) e 16 anos e 2 meses (completos) de idade no início do período de aplicação da avaliação, matriculados em instituições educacionais localizadas no país participante, a partir do 7º ano do Ensino Fundamental. (OCDE, 2017, p. 17)

No caso do PISA, portanto, a idade figura como fator de escolha para o público-alvo, e não a série na qual o estudante se encontra matriculado, como é feito no SAEB. Porém, há um fator limitante indicando que estes estudantes devem estar matriculados a partir do 7º ano do ensino fundamental, incluindo também estudantes matriculados no “8º e 9º anos, bem como estudantes do Ensino Médio” (BRASIL, 2020, p. 36), fato que permite ainda levar este indicador, o PISA 2018, como objeto de estudo e justificativa para este trabalho.

Relativo ao PISA, com base no Censo Escolar 2016, “foi utilizado um plano de amostragem estratificado e conglomerado em dois estágios” (BRASIL, 2020, p. 36). No primeiro estágio foi feita a seleção das escolas participantes “com base na listagem de estabelecimentos de ensino que poderiam atender estudantes do 7º ao 9º ano do Ensino Fundamental e qualquer série do Ensino Médio” (BRASIL, 2020, p. 36). Aqui, segundo aponta o relatório, “determinou-se um quantitativo de 661 escolas para a amostra brasileira” (BRASIL, 2020, p. 38), das quais, no segundo estágio, “foram selecionados 33 estudantes por escola, naquelas em que o número de estudantes era igual a 33 ou mais. Nas escolas com população elegível inferior a 33, foram incluídos todos os estudantes elegíveis” (BRASIL, 2020, p. 38).

Na Tabela 2 é possível estabelecer uma comparação entre as escolas e estudantes de um conjunto universo, baseado no Censo Escolar de 2016, e da amostra estabelecida nos parâmetros relacionados no parágrafo anterior, por região.

Tabela 2 - Universo e amostra inicial de escolas e estudantes por região no PISA 2018

REGIÃO	UNIVERSO		AMOSTRA INICIAL	
	ESCOLAS	ESTUDANTES	ESCOLAS	ESTUDANTES
Norte	4.020	239.565	53	1.599
Nordeste	23.972	826.954	201	5.370
Sul	10.319	405.904	93	2.578
Sudeste	23.080	1.216.732	265	7.860
Centro-Oeste	4.597	216.157	49	1.416
Brasil	**65.988**	**2.905.312**	**661**	**18.823**

Fonte: Brasil (2020)

Ainda de acordo com o próprio relatório PISA 2018 (BRASIL, 2020), da amostra inicial, 41 escolas foram retiradas por motivos de fechamento, recusa em participar, não possuir estudantes elegíveis ou outros motivos, como greve e inadequação da estrutura física, e outras 23 escolas também foram exclusas “por apresentarem uma taxa de participação de seus estudantes inferior a 25%” (BRASIL, 2020, p. 42).

Diante do exposto, chegou-se a uma amostra efetiva para o PISA 2018 descrita na Tabela 3 com um total de 597 escolas e 10.691 estudantes que representaram nacionalmente 2.036.860 alunos.

Tabela 3 - Quantitativo de escolas e estudante por região no PISA 2018

AMOSTRA EFETIVA			
	ESCOLAS	ESTUDANTES PARTICIPANTES	ESTUDANTES PONDERADOS
Norte	51	982	172.016
Nordeste	187	3.313	556.533
Sul	90	1.523	302.669
Sudeste	224	4.060	868.275
Centro-Oeste	45	813	137.367
Brasil	**597**	**10.691**	**2.036.860**

Fonte: Brasil (2020)

Outro fator importante de escolha destas avaliações para estabelecer um panorama sobre o ensino da álgebra no Brasil, é a apresentação de seus resultados em níveis de proficiência, o que permitirá analisar com maior precisão os dados que dizem respeito especificamente às habilidades inerentes à álgebra.

Para o SAEB, estes níveis se definem como “conjunto de números ordenados obtido pela Teoria de Resposta ao Item (TRI) que representa a medida da proficiência em uma determinada área de conhecimento” (BRASIL, 2019, p. 21) e são organizados de forma que

> [...] o intervalo que define cada nível é de 25 pontos (correspondente a meio desvio padrão). Assim, com base no conjunto de itens descritos em cada intervalo, é consolidada a descrição das habilidades desenvolvidas pelos estudantes cuja proficiência está alocada naquele nível. O modelo pressupõe que os participantes posicionados em certo nível, além de, provavelmente, terem desenvolvido as habilidades descritas nele, também desenvolveram habilidades descritas nos níveis anteriores. Isso, porém, não significa que um estudante posicionado em determinado nível não possa ter desenvolvido alguma habilidade do nível subsequente, dado que o modelo da TRI trabalha com probabilidades. (BRASIL, 2019, p. 47).

A seguir, serão apresentados nos Quadros 1 a 4, 9 dos 10 níveis de proficiência, com a descrição das habilidades inerentes a cada um deles na disciplina de matemática para o 9º ano do ensino fundamental. No nível 0 (zero) o SAEB não especifica as habilidades.

Quadro 1 - Níveis 1 ao 4 de proficiência matemática no SAEB para o 9º ano E.F.

	9º ano
Nível	**Descrição das habilidades desenvolvidas**
Nível 1 Desempenho maior ou igual a 200 e menor que 225	Os estudantes provavelmente são capazes de: **Números e operações; álgebra e funções** – Reconhecer o maior ou o menor número em uma coleção de números racionais, representados na forma decimal. **Tratamento de informações** – Interpretar dados apresentados em tabela e gráfico de colunas.
Nível 2 Desempenho maior ou igual a 225 e menor que 250	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **Números e operações; álgebra e funções** – Reconhecer a fração que corresponde à relação parte-todo entre uma figura e suas partes hachuradas. Associar um número racional que representa uma quantia monetária, escrito por extenso, à sua representação decimal. Determinar uma fração irredutível, equivalente a uma fração dada, a partir da simplificação por três. **Tratamento de informações** – Interpretar dados apresentados em um gráfico de linhas simples. Associar dados apresentados em gráfico de colunas a uma tabela.
Nível 3 Desempenho maior ou igual a 250 e menor que 275	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **Espaço e forma** – Reconhecer o ângulo de giro que representa a mudança de direção na movimentação de pessoas/objetos; reconhecer a planificação de um sólido simples, dado por um desenho em perspectiva. Localizar um objeto em representação gráfica do tipo planta baixa, utilizando dois critérios: estar mais longe de um referencial e mais perto de outro. **Números e operações; álgebra e funções** – Determinar uma fração irredutível, equivalente a uma fração dada, a partir da simplificação por sete; determinar a soma, a diferença, o produto ou o quociente de números inteiros em situações-problema. Localizar o valor que representa um número inteiro positivo associado a um ponto indicado em uma reta numérica. Resolver problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais, representadas por números inteiros. **Tratamento de informações** – Associar dados apresentados em tabela a gráfico de setores. Analisar dados dispostos em uma tabela simples. Analisar dados apresentados em um gráfico de linhas com mais de uma grandeza representada.
Nível 4 Desempenho maior ou igual a 275 e menor que 300	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **Espaço e forma** – Localizar um ponto em um plano cartesiano, com o apoio de malha quadriculada, a partir de suas coordenadas. Reconhecer as coordenadas de um ponto dado em um plano cartesiano, com o apoio de malha quadriculada. Interpretar a movimentação de um objeto utilizando referencial diferente do seu. **Grandezas e medidas** – Converter unidades de medidas de comprimento, de metros para centímetros, na resolução de situação-problema. Reconhecer que a medida do perímetro de um retângulo, em uma malha quadriculada, dobra ou se reduz à metade quando os lados dobram ou são reduzidos à metade. **Números e operações; álgebra e funções** – Determinar a soma de números racionais em contextos de sistema monetário. Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica de 1º grau envolvendo números naturais, em situação-problema. Localizar números inteiros negativos na reta numérica. Localizar números racionais em sua representação decimal. **Tratamento de informações** – Analisar dados dispostos em uma tabela de dupla entrada.

Fonte: Brasil (2019)

Quadro 2 - Níveis 5 e 6 de proficiência matemática no SAEB para o 9º ano E.F.

	9º ano
Nível	**Descrição das habilidades desenvolvidas**
Nível 5 Desempenho maior ou igual a 300 e menor que 325	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **Espaço e forma** – Reconhecer que o ângulo não se altera em figuras obtidas por ampliação/redução. Localizar dois ou mais pontos em um sistema de coordenadas. **Grandezas e medidas** – Determinar o perímetro de uma região retangular, com o apoio de figura, na resolução de uma situação-problema. Determinar o volume mediante contagem de blocos. **Números e operações; álgebra e funções** – Associar uma fração com denominador dez à sua representação decimal. Associar uma situação-problema à sua linguagem algébrica, por meio de equações do 1° grau ou sistemas lineares. Determinar, em situação-problema, a adição e multiplicação entre números racionais, envolvendo divisão por números inteiros. Determinar a porcentagem envolvendo números inteiros. Resolver problema envolvendo grandezas diretamente proporcionais, representadas por números racionais na forma decimal.
Nível 6 Desempenho maior ou igual a 325 e menor que 350	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **Espaço e forma** – Reconhecer a medida do ângulo determinado entre dois deslocamentos, descritos por meio de orientações dadas por pontos cardeais. Reconhecer as coordenadas de pontos representados no primeiro quadrante de um plano cartesiano. Reconhecer a relação entre as medidas de raio e diâmetro de uma circunferência, com o apoio de figura. Reconhecer a corda de uma circunferência, as faces opostas de um cubo, a partir de uma de suas planificações. Comparar as medidas dos lados de um triângulo com base nas medidas de seus respectivos ângulos opostos. Resolver problema utilizando o Teorema de Pitágoras no cálculo da medida da hipotenusa, dadas as medidas dos catetos. **Grandezas e medidas** – Converter unidades de medida de massa, de quilograma para grama, na resolução de situação-problema. Resolver problema fazendo uso de semelhança de triângulos. **Números e operações; álgebra e funções** – Reconhecer frações equivalentes. Associar um número racional, escrito por extenso, à sua representação decimal, e vice-versa. Estimar o valor da raiz quadrada de um número inteiro aproximando-o de um número racional em sua representação decimal. Resolver problema envolvendo grandezas diretamente proporcionais, com constante de proporcionalidade não inteira. Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica que contenha parênteses, envolvendo números naturais. Determinar um valor monetário obtido por meio de um desconto ou um acréscimo percentual. Determinar o valor de uma expressão numérica, com números irracionais, fazendo uso de uma aproximação racional fornecida. **Tratamento de informações** – Resolver problemas que requerem a comparação de dois gráficos de colunas.

Fonte: Brasil (2019)

Quadro 3 - Nível 7 de proficiência matemática no SAEB para o 9º ano E.F.

	9º ano
Nível	**Descrição das habilidades desenvolvidas**
Nível 7 Desempenho maior ou igual a 350 e menor que 375	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **Espaço e forma** – Reconhecer ângulos agudos, retos ou obtusos de acordo com sua medida em graus. Reconhecer as coordenadas de pontos representados num plano cartesiano localizados em quadrantes que não sejam o primeiro. Determinar a posição final de um objeto, após a realização de rotações em torno de um ponto, de diferentes ângulos, em sentido horário e anti-horário. Resolver problemas envolvendo ângulos, inclusive utilizando a Lei Angular de Tales sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo. Resolver problemas envolvendo as propriedades de ângulos internos e externos de triângulos e quadriláteros, com ou sem justaposição ou sobreposição de figuras. Resolver problema utilizando o Teorema de Pitágoras no cálculo da medida de um dos catetos, dadas as medidas da hipotenusa e de um de seus catetos. **Grandezas e medidas** – Determinar o perímetro de uma região retangular, obtida pela justaposição de dois retângulos, descritos sem o apoio de figuras. Determinar a área de um retângulo em situações-problema. Determinar a área de regiões poligonais desenhadas em malhas quadriculadas. Determinar o volume de um cubo ou de um paralelepípedo retângulo, sem o apoio de figura. Converter unidades de medida de volume, de m3 para litro, em situações-problema. Reconhecer a relação entre as áreas de figuras semelhantes. **Números e operações; álgebra e funções** – Determinar o quociente entre números racionais, representados na forma decimal ou fracionária, em situações-problema. Determinar a soma de números racionais dados na forma fracionária e com denominadores diferentes. Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica de 2º grau, com coeficientes naturais, envolvendo números inteiros. Determinar o valor de uma expressão numérica envolvendo adição, subtração, multiplicação e/ou potenciação entre números inteiros. Determinar o valor de uma expressão numérica com números inteiros positivos e negativos; determinar o valor de uma expressão numérica com números racionais. Comparar números racionais com diferentes números de casas decimais, usando arredondamento. Localizar na reta numérica um número racional, representado na forma de uma fração imprópria. Associar uma fração à sua representação na forma decimal. Associar uma situação-problema à sua linguagem algébrica, por meio de inequações do 1º grau. Associar a representação gráfica de duas retas no plano cartesiano a um sistema de duas equações lineares e vice-versa. Resolver problemas envolvendo equação de 2º grau. **Tratamento de informações** – Determinar a média aritmética de um conjunto de valores. Estimar quantidades em gráficos de setores. Analisar dados dispostos em uma tabela de três ou mais entradas. Interpretar dados fornecidos em gráficos envolvendo regiões do plano cartesiano. Interpretar gráficos de linhas com duas sequências de valores.

Fonte: Brasil (2019)

Quadro 4 - Níveis 8 e 9 de proficiência matemática no SAEB para o 9º ano E.F.

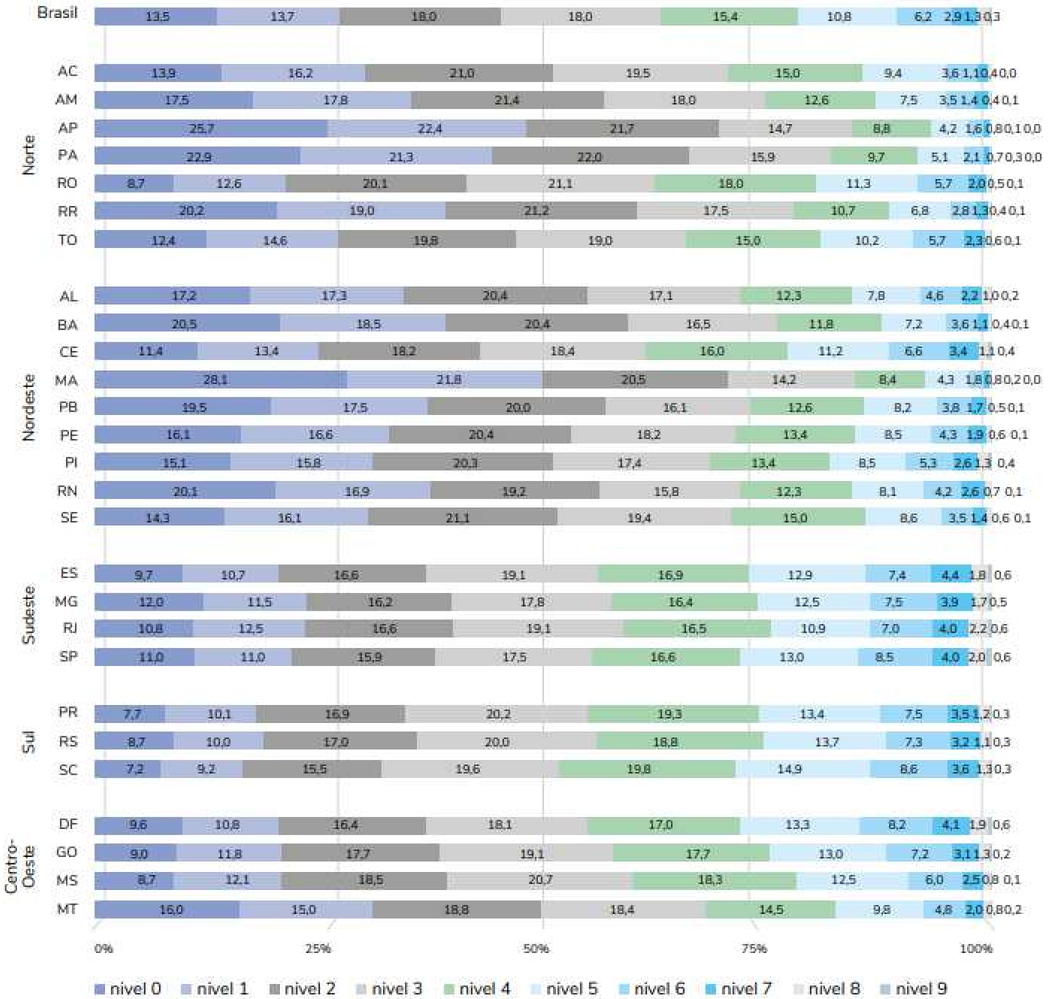
	9º ano
Nível	**Descrição das habilidades desenvolvidas**
Nível 8 Desempenho maior ou igual a 375 e menor que 400	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **Espaço e forma** – Resolver problemas utilizando as propriedades das cevianas (altura, mediana e bissetriz) de um triângulo isósceles, com o apoio de figura. **Grandezas e medidas** – Converter unidades de medida de capacidade, de mililitro para litro, em situações-problema. Reconhecer que a área de um retângulo quadruplica quando seus lados dobram. Determinar a área de figuras simples (triângulo, paralelogramo, trapézio), inclusive utilizando composição/decomposição. **Números e operações; álgebra e funções** – Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica de 1º grau, com coeficientes racionais, representados na forma decimal. Determinar o valor de uma expressão numérica envolvendo adição, subtração e potenciação entre números racionais, representados na forma decimal. Resolver problemas envolvendo grandezas inversamente proporcionais.
Nível 9 Desempenho maior ou igual a 400	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **Espaço e forma** – Resolver problemas utilizando a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono. **Números e operações; álgebra e funções** – Reconhecer a expressão algébrica que expressa uma regularidade existente em uma sequência de números ou de figuras geométricas.

Fonte: Brasil (2019)

Em uma breve leitura das habilidades desenvolvidas em cada nível, observa-se que a álgebra, como linguagem algébrica propriamente dita, é inserida no núcleo “Números e operações; álgebra e funções” a partir do Nível 4, na habilidade relacionada à determinação do valor numérico de uma expressão algébrica. Porém, é no estágio seguinte, o Nível 5, que o objeto do presente estudo, as Equações do 1º grau, aparece, entendendo que o aluno seja capaz de “associar uma situação-problema à sua linguagem algébrica, por meio de equações do 1º grau ou sistemas lineares” (BRASIL, 2019, P. 60).

Com base no que fora apresentado anteriormente, tendo em vista também que cada nível de proficiência abarca as habilidades dos níveis anteriores, pode-se fazer uma análise do gráfico a seguir, no qual é feita uma distribuição percentual dos estudantes do 9º ano do ensino fundamental, por unidade da Federação e Brasil, que se encontram em cada um dos referidos níveis de proficiência.

Figura 1 - Distribuição percentual dos estudantes por níveis de proficiência em matemática do 9º ano do ensino fundamental, por unidade da Federação e Brasil – SAEB 2017



Fonte: Brasil (2019)

Examinando os dados acima em nível nacional, e levando em consideração o Nível 4, onde alguns conceitos relacionados à álgebra são introduzidos, estima-se que 63,2% dos alunos estão abaixo do nível pretendido. Tomando, porém, o Nível 5 como base, onde estão descritas habilidades relacionadas à intepretação de situações-problemas e a sua associação à linguagem algébrica, observa-se que aproximadamente 78,6% dos alunos está abaixo deste nível, ou seja, apenas 21,4% dos alunos do 9º ano do ensino fundamental, conforme o público-alvo delimitado, demonstraram ter adquirido pelo menos as habilidades descritas para o Nível 5.

No Relatório do PISA 2018 (BRASIL, 2020) os resultados são analisados de diferentes maneiras e em diferentes contextos. Para este trabalho, e para a análise que se deseja fazer, os resultados serão expostos com base nos seis níveis de proficiência adotados por este indicador.

Nos Quadros 5 ao 7 apresentar-se-ão esses seis níveis de proficiência, a pontuação mínima requerida para cada nível, o percentual de estudantes que alcançaram determinado nível no Brasil e a respectiva média dos países da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), bem como a descrição das características das tarefas correspondentes a cada nível, associadas às habilidades que os estudantes devem ter alcançado para realizá-las.

Quadro 5 - Níveis 5 e 6 de proficiência matemática no PISA 2018

NÍVEL	ESCORE MÍNIMO	PERCENTUAL DE ESTUDANTES NO NÍVEL	CARACTERÍSTICAS DAS TAREFAS
6	669	OCDE: 2,4% Brasil: 0,1%	No Nível 6, os estudantes são capazes de conceituar, generalizar e utilizar informações com base em suas investigações e na modelagem de problemas complexos, e são capazes de usar seu conhecimento em contextos relativamente não padronizados. Conseguem estabelecer ligações entre diferentes fontes de informação e representações, e transitar entre elas com flexibilidade. Evidenciam um pensamento e um raciocínio matemáticos avançados. São capazes de associar sua percepção e sua compreensão junto com um domínio de operações e relações matemáticas simbólicas e formais para desenvolver novas abordagens e estratégias que lhes permitam lidar com situações novas. Conseguem refletir sobre suas ações e formular e comunicar com precisão suas ações e reflexões relacionadas às constatações, interpretações e argumentações que elaboram; são ainda capazes de explicar por que razão estas são adequadas à situação original.
5	607	OCDE: 8,5% Brasil: 0,8%	No Nível 5, os estudantes são capazes de desenvolver modelos para situações complexas e trabalhar com eles, identificando restrições e especificando hipóteses. Conseguem selecionar, comparar e avaliar estratégias adequadas de resolução de problemas para lidar com problemas complexos relacionados a esses modelos. Conseguem trabalhar estrategicamente, utilizando um vasto e bem desenvolvido conjunto de habilidades de pensamento e de raciocínio, representações conectadas de maneira adequada, caracterizações simbólicas e formais, e percepção relativa a essas situações. Começam a refletir sobre suas ações e são capazes de formular e de comunicar suas interpretações e raciocínios.

Fonte: Brasil (2020)

Quadro 6 - Níveis 3 e 4 de proficiência matemática no PISA 2018

NÍVEL	ESCORE MÍNIMO	PERCENTUAL DE ESTUDANTES NO NÍVEL	CARACTERÍSTICAS DAS TAREFAS
4	545	OCDE: 18,5% Brasil: 3,4%	No Nível 4, os estudantes são capazes de trabalhar de maneira eficaz com modelos explícitos em situações concretas complexas, que podem envolver restrições ou exigir formulação de hipóteses. São capazes de selecionar e de integrar diferentes representações, inclusive representações simbólicas, relacionando-as diretamente a aspectos de situações da vida real. Conseguem utilizar seu conjunto limitado de habilidades e raciocinar com alguma perspicácia em contextos diretos. São capazes de construir e de comunicar explicações e argumentos com base em suas interpretações, argumentos e ações.
3	482	OCDE: 24,4% Brasil: 9,3%	No Nível 3, os estudantes são capazes de executar procedimentos descritos com clareza, inclusive aqueles que exigem decisões sequenciais. Suas interpretações são seguras o suficiente para servirem de base à construção de um modelo simples ou à seleção e aplicação de estratégias simples de resolução de problemas. São capazes de interpretar e de utilizar representações baseadas em diferentes fontes de informação e de raciocinar diretamente com base nelas. Demonstram alguma capacidade para lidar com porcentagens, frações e números decimais, e para trabalhar com relações de proporcionalidade. Suas soluções indicam que eles se envolvem em interpretações e raciocínios básicos.

Fonte: Brasil (2020)

Quadro 7 - Níveis 1 e 2 de proficiência matemática no PISA 2018

NÍVEL	ESCORE MÍNIMO	PERCENTUAL DE ESTUDANTES NO NÍVEL	CARACTERÍSTICAS DAS TAREFAS
2	420	OCDE: 22,2% Brasil: 18,2%	No Nível 2, os estudantes são capazes de interpretar e reconhecer situações em contextos que não exigem mais do que inferências diretas. Conseguem extrair informações relevantes de uma única fonte e utilizar um único modo de representação. Conseguem empregar algoritmos, fórmulas, procedimentos ou convenções básicos para resolver problemas que envolvem números inteiros. São capazes de fazer interpretações literais de resultados.
1	358	OCDE: 14,8% Brasil: 27,1%	No Nível 1, os estudantes são capazes de responder a questões que envolvem contextos familiares, nas quais todas as informações relevantes estão presentes e as questões estão claramente definidas. Conseguem identificar informações e executar procedimentos rotineiros, de acordo com instruções diretas, em situações explícitas. Conseguem realizar ações que são, quase sempre, óbvias e que decorrem diretamente dos estímulos dados.
Abaixo de 1		OCDE: 9,1% Brasil: 41,0%	A OCDE não especifica as habilidades desenvolvidas.

Fonte: Brasil (2020)

Embora a descrição dos níveis não indique de maneira explícita habilidades que exijam simbolismo algébrico, como a determinação do valor numérico de uma expressão algébrica ou a resolução de uma equação do 1º grau, tal qual é feito no SAEB, observa-se que aproximadamente 68% dos estudantes elegíveis para as etapas do PISA 2018 encontram-se no nível 1 ou abaixo, sendo que, segundo o relatório:

> No Nível 1, os estudantes são capazes de responder a questões que envolvem contextos familiares, nas quais todas as informações relevantes estão presentes e as questões estão claramente definidas. Conseguem identificar informações e executar procedimentos rotineiros, de acordo com instruções diretas, em situações explícitas. Conseguem realizar ações que são, quase sempre, óbvias e que decorrem diretamente dos estímulos dados (BRASIL, 2020, p. 114).

Por esta definição, percebe-se que mais da metade dos estudantes brasileiros público-alvo do PISA 2018 são capazes apenas de solucionar problemas simples e familiares, cujas informações e dados necessários à sua resolução são colocados de maneira explícita, e sua execução pode ser feita a partir de algoritmos rotineiros. Portanto, é possível perceber que existe uma dificuldade dos alunos em ler e interpretar problemas mais complexos, verificar informações implícitas na questão, assim como utilizar de maneira correta as ferramentas matemáticas para a sua resolução.

Com relação à álgebra e ao seu simbolismo, é somente a partir do Nível 4 que se encontram habilidades relacionadas à capacidade "de selecionar e de integrar diferentes representações, inclusive representações simbólicas, relacionando-as diretamente a aspectos de situações da vida real" (BRASIL, 2020, p. 113). Porém, apenas 4,3% dos estudantes brasileiros participantes atingiram esse nível ou níveis superiores, o que contrasta com a média de 29,4% da OCDE, e que corrobora com as dificuldades encontradas neste campo da matemática no âmbito nacional.

Evidentemente, estes resultados, tanto do SAEB quanto do PISA, revelam que existem problemas muito maiores e mais complexos concernentes à educação matemática, problemas primários que acabam por refletir também no campo da álgebra e que merecerão sempre atenção por parte dos docentes. Porém, ocupar-se-á este trabalho em dar uma pequena contribuição, discutindo as potencialidades do uso da história da matemática na significação desta disciplina e no estímulo ao pensamento algébrico, tão importante e necessário à resolução de problemas, sejam eles matemáticos ou de qualquer outro campo, que envolvam, de certa maneira, interpretação, lógica, observância de padrões, generalização e síntese.

1.3 OBJETIVOS

Apresentados os dados e informações que justificam a escolha do tema, a fim de buscar estratégias para tornar significativa a aprendizagem de equações do 1º grau, este trabalho objetiva, de maneira geral, desenvolver uma proposta para o ensino do tema em turmas do 7º ano do ensino fundamental, com base na história da matemática e na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel.

Para tanto, como objetivos específicos, será necessário compreender como se deu o desenvolvimento da álgebra ao longo da história e assimilar os principais pontos da teoria da aprendizagem significativa que implicam na construção deste campo da matemática em sala de aula, como forma de (a) proporcionar aos alunos uma compreensão dos movimentos históricos que levaram ao desenvolvimento de uma linguagem algébrica; (b) estimular e desenvolver o pensamento algébrico, sem a necessidade de utilizar símbolos ou letras para a resolução de problemas; e (c) apresentar a linguagem algébrica, verificando as vantagens e desvantagens de seu uso, levando os estudantes a compreenderem a sua necessidade em situações e problemas mais complexos.

De forma mais abrangente, espera-se também que este trabalho possa colaborar com a discussão acerca do ensino de história da matemática na formação de professores e de sua aplicação em sala de aula, demonstrando sua relevância em um ensino que se pretende ser mais contextualizado, interdisciplinar e significativo ao aluno, isto é, que encontre bases para facilitar a compreensão e a abstração tão inerentes à matemática e, principalmente - no contexto deste trabalho - à álgebra.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

São diversas as estratégias, teorias e motivações que podem ser abarcadas quando se trata do ensino e aprendizagem de matemática em sala de aula. Novos métodos e ferramentas surgem a todo momento e requerem do professor formação e especialização, bem como a experiência em sala de aula que ajuda a ponderar quais destes métodos e ferramentas são os mais adequados para a realidade a qual se está inserido.

Para validar e fundamentar este trabalho recorrer-se-á ao uso da história da matemática como recurso de ensino-aprendizagem, elucidado por Mendes e Chaquiam (2016), para contextualizar e significar o ensino de equações do 1º grau; e aos estudos de Moreira e Masini (1982) sobre a teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, que direcionará e dará suporte teórico ao que será construído na abordagem metodológica.

2.1 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

Antes de tratar da história da matemática como um recurso a ser utilizado em sala de aula, vale ressaltar que o conteúdo aqui tratado encontra alicerce na norma vigente para a educação no Brasil: a BNCC.

No ponto 1 das competências específicas da matemática para o ensino fundamental trazidas pela BNCC, por exemplo, objetiva-se que o aluno possa reconhecer que "a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos" (BRASIL, 2018, p. 267). O referido documento afirma o propósito de uma formação e uma educação integral, ou seja, do ser humano como um todo, propondo, para tal, "a superação da fragmentação radicalmente disciplinar do conhecimento, o estímulo à sua aplicação na vida real, a importância do contexto para dar sentido ao que se aprende" (BRASIL, 2018, p. 14).

Buscar-se-á neste trabalho traduzir a interdisciplinaridade trazida pela BNCC por meio do encontro entre a história e a matemática, duas disciplinas que se relacionam estreitamente pelo fato de que, nos movimentos observados ao longo do desenvolvimento das civilizações, podemos depreender que uma sempre serviu/servirá de complemento à outra: a história modificando a matemática, por meio da cultura e necessidades de cada povo, aspectos geográficos, políticos ou de conflitos; e a matemática agindo na história, mediante, por exemplo, a criação de ferramentas que permitiram a evolução de um povo, observada em construções, técnicas agrícolas e de caça, nas grandes navegações e no desenvolvimento do comércio, na criação de novos meios de transporte, no avanço de tecnologias computacionais e, até mesmo, no contexto da matemática em sua forma mais pura, permitindo um avanço transcendental e intelectual da humanidade.

A partir da compreensão de que a história explica a matemática e de que a matemática, por sua vez, explica a história é que poderemos tratar do uso da história da matemática como instrumento didático, em "busca da construção de significados para os objetos matemáticos na sala de aula" (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 16).

Nota-se que a matemática que é ensinada hoje em sala de aula não chegou pronta e acabada, ela foi estruturada, modificada e aprimorada em contato com diversas culturas e povos, sendo desenvolvida possivelmente de maneira independente em várias regiões do mundo e em tempos diferentes, uma vez que os aparatos tecnológicos das épocas passadas, logicamente, não permitiam uma comunicação acelerada e eficaz entre as diversas regiões. É esse caminho, porém, muitas vezes traçado de maneira não-linear, que poderá oferecer aos alunos novas formas de "ver e entender a Matemática, tornando-a mais contextualizada, mais integrada às outras disciplinas, mais agradável, mais criativa, mais humanizada" (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 80).

Todavia, por conta da não-linearidade da história da matemática e de outros aspectos históricos que poderão não ser úteis ao processo de ensino-aprendizagem, há de se concordar com Mendes e Chaquiam (2016) em dizer que é necessário, antes de tudo, que o professor faça um exercício de "transposição didática a ser operacionalizado em sala de aula, associado ao exercício investigatório" (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 21), ou seja, uma "reorganização, mediação ou reestruturação dos saberes historicamente constituídos em saberes [...] ensináveis e aprendíveis que possam compor a cultura escolar com conhecimentos que transcendem os limites da escola" (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 22). Sem tal transposição, ou se feita sem pensar na sala de aula e nos objetivos pretendidos para um determinado estudo, o passado da matemática não será significativo para explicar a matemática atual, podendo levar os estudantes por um caminho mais árduo que o caminho lógico e, consequentemente, menos motivador, assim como aponta Vianna (1988, p. 3-4) ao compilar algumas objeções de diversos autores contra a utilização da história da matemática como recurso didático.

Compreende-se que é preciso que haja uma seleção de elementos históricos que possam contribuir com o desenvolvimento da aprendizagem matemática, a partir de uma história que tenha a "vocação de explicar a organização conceitual das matemáticas produzidas no tempo e no espaço" (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 17). Histórias puramente biográficas, que falem somente da vida dos matemáticos, ou a utilização de lendas e mitologias ligadas aos objetos matemáticos, que não têm alicerce em fontes históricas seguras, assim como aponta Mendes e Chaquiam (2016, p. 20), exigem cautela por parte dos professores para que não produzam um efeito meramente ilustrativo e não-didático com relação ao que se propõe estudar.

Além de significar e contextualizar o ensino, a história da matemática poderá responder, de certa forma, a questionamentos de alunos que buscam entender para que serve um determinado conteúdo. Pela prática escolar, é preciso

> [...] considerar que quando o estudante faz qualquer questionamento sobre os temas matemáticos tratados em sala de aula, ele não está querendo saber das aplicações práticas. Talvez ele próprio pense que sim, que gostaria de conhecer as aplicações práticas, mas na verdade, ele se contentaria com respostas de outra qualidade (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 25).

Diante de perguntas dessa ordem: "para que serve?" ou "onde irei usar na minha vida?", o professor corre o risco de adotar exemplos que não correspondam com a realidade do aluno e, portanto, ao invés de aproximá-lo ao conteúdo, distancia-lo-á pela falta de interesse que isso pode gerar. Assim, entende-se que

> tornar a matemática mais concreta não precisa passar, necessariamente, por aproximá-la de atividades quotidianas como ir à feira, interpretar um gráfico, ou analisar as formas geométricas da natureza. A matemática se modificou também por necessidades que não possuem nenhuma relação com o senso comum ou com os fenômenos naturais. É claro que o trabalho matemático sofre influências de fatores externos (sejam eles sociais, políticos ou outros), mas estes fatores compõem o que chamamos de "campo de problemas", o qual é constituído também por necessidades internas à própria matemática, ou a campos de saberes correlatos (como a física). O ponto de vista histórico permite aproximar professores e alunos do fazer matemático, sem que eles sejam obrigados a tomar como ponto de partida os traços que adquiriram ao ultrapassar os limiares de cientificidade e formalização (ROQUE, 2014, p. 182).

Tendo a história da matemática como metodologia de ensino, e toda a fundamentação trazida por ela, "o professor tem em suas mãos ferramentas para mostrar o porquê de estudar determinados conteúdos, fugindo das repetições mecânicas de algoritmos" (LOPES; FERREIRA, 2013, p. 77).

Observa-se, portanto, que se bem estruturada e pensada para a sala de aula, a história da matemática tem grande potencial de contribuir, entre outros aspectos, para elucidar conteúdos, apontando as raízes e esquematizando sua construção ao longo da história, permitindo que o aluno tenha a seu alcance o empreendimento humano que possibilitou tal avanço matemático através de séculos, proporcionando ainda, de certa maneira, uma reflexão sobre as vantagens e desvantagens da matemática em sua forma atual.

2.1.1 História da Álgebra

Assim como a história da matemática de maneira geral, a história da álgebra percorre também um caminho não-linear, atravessando diferentes tempos, povos e culturas, com formas de pensar que ora avançam em direção ao simbolismo, ora recuam às formas mais primitivas, expressas de maneira textual, chamadas aqui de "forma retórica".

A fim de fazer uma transposição didática adequada, a álgebra será organizada em três estágios, conforme apontado por Baumgart (1992, p. 3). O primeiro estágio, chamado retórico, onde a álgebra se constitui de maneira puramente verbal ou escrita; o segundo estágio, transitório, chamado sincopado, no qual se usavam abreviações de palavras para descrever um problema; e o estágio atual, o simbólico, do qual as palavras são abstraídas, dando lugar aos símbolos matemáticos e letras para sintetizar problemas.

Vale ressaltar, como já apontado anteriormente, que estes três estágios não constituem uma ordem cronológica linear, o que pode ser constatado em Baumgart (1992) e Joseph (2011). Far-se-á, portanto, aqui uma seleção dos fatos mais relevantes para a contextualização e significação do ensino de equações do 1º grau para turmas do 7º ano do ensino fundamental.

2.1.1.1 Álgebra Retórica

Até onde se tem registro, a álgebra – neste período, ainda sob a forma de um "pensamento algébrico", por se diferenciar de toda a estrutura que temos hoje como álgebra propriamente dita – tem origem quase concomitante na Babilônia e no Egito, de forma retórica, ou seja, escrita sem a adoção de possíveis símbolos matemáticos.

Neste primeiro momento, conforme Eves (2011), as tábulas e os papiros, nos quais registros foram encontrados, apresentam problemas e uma descrição procedimental de como cada um deve ser resolvido, sem demonstrações gerais, mas apenas um passo a passo que deve ser aplicado a cada situação específica. Desse fato, o mesmo autor ainda pontua que

> Por mais insatisfatório que o procedimento "faça assim e assim" possa nos parecer, não deveria causar estranheza, pois é em grande medida o procedimento que nós mesmos usamos no ensino de partes da matemática elementar no primeiro e segundo graus. (EVES, 2011, p. 58)

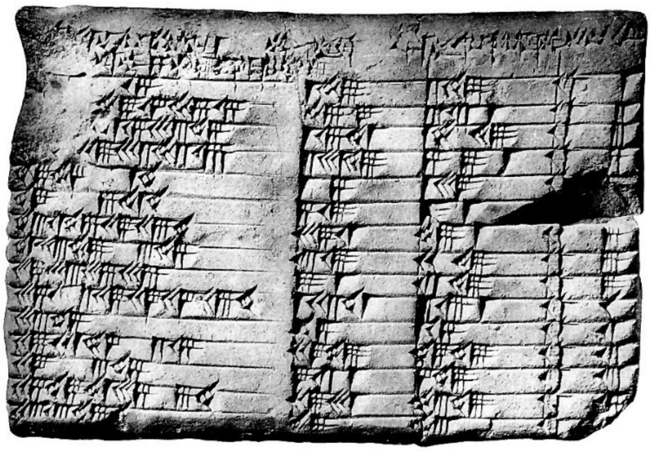
Das motivações encontradas para o desenvolvimento da matemática em regiões do Oriente Antigo, grande parte dos pesquisadores da área concluem que isso ocorreu para possibilitar o progresso de atividades relacionadas à agricultura, à engenharia e ao comércio, na medida em que

> Essas atividades requeriam o cálculo de um calendário utilizável, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos, a criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios e para dividir a terra e a instituição de práticas financeiras e comerciais para o lançamento e a arrecadação de taxas e para propósitos mercantis (EVES, 2011, p. 57)

Porém, alguns pesquisadores trabalham também com a ideia de que a matemática possa ter se desenvolvido por motivações contemplativas da sociedade (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 29), de ordem religiosa, intelectual, filosófica ou, até mesmo, estética, ligada à arte.

Os registros da álgebra babilônica foram encontrados em escrita cuneiforme, em tábulas de argila como a da Figura 2 que, segundo Baumgart (1992), remontam ao tempo do rei Hammurabi, por volta de 1700 a.C.

Figura 2 - Plimpton 322 - Tábula Babilônica



Fonte: The University of British Columbia. Disponível em: http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/322.jpg. Acesso em: 30 dez. 2020.

Eves (2011) registra que já foram desenterrados, desde antes da metade do século XIX, mais de meio milhão de tábulas, das quais 400 foram identificadas como sendo de cunho unicamente matemático, com tabelas e listas de problemas.

Dentre as tabelas estão “tabelas de recíprocos, de cubos, de multiplicação, de raízes quadradas, de raízes cúbicas, tabelas de conversão de unidades de comprimento, peso, superfície, volume" (PEREIRA, 2017, p. 14), dentre outras, que auxiliavam na resolução dos problemas.

No campo da álgebra, as tábulas contendo listas de problemas revelam a resolução de equações quadráticas, a discussão de cúbicas (grau três) e biquadradas (grau quatro) e o registro de problemas envolvendo sistemas de equações, apresentados basicamente de maneira discursiva.

Um exemplo de problema algébrico do período citado foi encontrado nas escavações de Tell Harmal, em 1949. Seu enunciado e sua solução foram descritas por Joseph (2011, p. 153, tradução nossa), baseada na tradução de Taha Baqir (1951), conforme o Quadro 8.

Quadro 8 - Problema Babilônico

Exemplo: Se alguém perguntar a você assim: Se eu adicionar aos dois terços dos meus dois terços cem unidades de cevada, a quantidade original é obtida. Qual é a quantidade original?

Solução sugerida

1. Primeiro multiplique dois terços por dois terços: resultado 0;26,40 (i.e., 4/9).
2. Subtraia 0;26,40 de 1: resultado 0;33,20 (i.e., 5/9).
3. Tome o inverso de 0;33,20: resultado 1;48 (i.e., 1 + 4/5).
4. Multiplique 1;48 por 1,40 (i.e., 100): resultado 3,00 (i.e., 180).
5. 3,0 (i.e. 180) unidades de cevada é a quantidade original.

Este procedimento é idêntico ao que usamos atualmente para solucionar a simples equação (onde x representa a quantidade original desconhecida):

$$\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)x + 100 = x \rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)x + 100 = x \rightarrow \left(\frac{5}{9}\right)x = 100 \rightarrow x = 180.$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

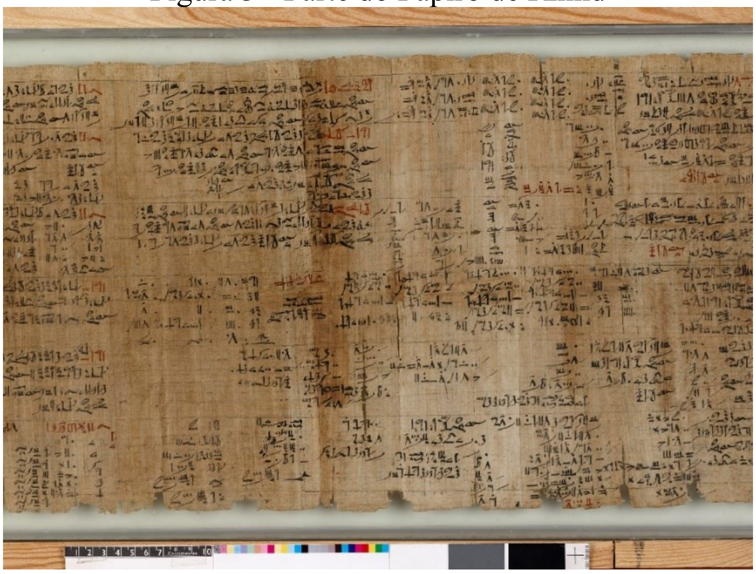
Note que, em cada passo da solução sugerida no Quadro 8, os seus resultados são expressos numericamente no sistema sexagesimal convencionado pelo historiador Otto Neugebauer, conforme vemos em Pereira (2017, p. 14-15), e depois, entre parênteses, apresentado na forma decimal.

Embora nenhuma dessas tábulas apresente soluções gerais aos problemas, isto é, na forma de demonstrações como temos atualmente, "a coerência com que os problemas foram tratados sugere que os babilônicos (ao contrário dos egípcios) tinham algum tipo de abordagem teórica da Matemática” (PEREIRA, 2017, p. 14).

Diante do que fora apresentado anteriormente acerca das motivações destes povos para o desenvolvimento da álgebra, Pereira (2017, p. 14) ainda salienta que os problemas observados das tábulas babilônicas, muitas vezes, “parecem ser exercícios intelectuais, em vez de tratados sobre levantamentos topográficos ou contabilidade, e evidenciam um interesse abstrato em relações numéricas”.

Já no Egito, os registros que demonstram o desenvolvimento do pensamento algébrico são encontrados hoje em papiros como o de Rhind (Figura 3), datados de cerca de 1850 a 1650 a.C.; porém, “faltavam à álgebra egípcia os métodos sofisticados da álgebra babilônica, bem como a variedade de equações resolvidas” (BAUMGART, 1992, p. 6), o que pode ser explicado pelo “desenvolvimento econômico mais avançado da Babilônia” (EVES, 2011, p. 67).

Figura 3 - Parte do Papiro de Rhind



Fonte: The British Museu. Disponível em: https://www.britishmuseum.org/collection/image/766075001. Acesso em: 25 jan. 2021.

Muitos dos problemas encontrados nesses papiros envolvem questões práticas sobre, por exemplo, “o quão substanciosos eram o pão e a cerveja, sobre balanceamento de rações para gado e aves domésticas e sobre armazenamento de grãos” (EVES, 2011, p. 73), os quais a resolução poderia ser feita por meio de uma equação linear, em um método conhecido por muitos como regra da falsa posição.

Neste método, a resolução consiste em adotar um valor inicial qualquer, mas conveniente, como uma solução falsa, que em seguida, é matematicamente corrigida a fim de obter uma solução correta.

Para exemplificar, adotaremos o problema 26 do Papiro de Rhind conforme Chace (1927, p. 68, tradução nossa): "Uma quantidade e seu 1/4 somados tornam-se 15. Qual é essa quantidade?". Assumindo 4 como sendo o valor a ser encontrado, obtemos que 4, somado ao seu 1/4, ou seja, 1, é igual a 5. Como o resultado esperado pelo problema é 15, "tantas quantas vezes o 5 deve ser multiplicado para obter 15, devemos também multiplicar o 4 para obter o número pretendido" (CHACE, 1927, p. 68, tradução nossa). Desta forma, multiplicando 5 por 3 obtemos 15, consequentemente, devemos multiplicar o 4 por 3, obtendo como resultado a quantidade esperada que é 12.

Utilizando a notação simbólica atual, com a letra x para representar a quantidade desconhecida, podemos reescrever o problema na forma:

$$x + x/4 = 15. \tag{1}$$

Segundo Pereira (2017), é interessante notar que existem defensores da ideia de que o papiro de Rhind

> [...] é um documento com intenções pedagógicas, um simples caderno de aluno ou um guia das matemáticas do antigo Egito, pois é o melhor texto de Matemática da época, indicando a direção e as tendências do ensino da matemática no Egito. Uma vez que o papiro egípcio é composto por problemas e pelas suas resoluções, alguns dos quais elementares, supõe-se que eram utilizados no ensino dos escribas. A Matemática era recordada e ensinada através de problemas que eram dados como exemplos para serem imitados. Muitos dos problemas pareciam ter as suas origens na prática dos escribas, contudo, alguns pareciam destinados a dar aos jovens escribas uma oportunidade para mostrarem as suas proezas nos cálculos mais difíceis e complicados [...] (PEREIRA, 2017, p. 6).

Para fins didáticos, a álgebra grega de matemáticos como Euclides, Arquimedes e Apolônio, de um período compreendido entre 500 a 200 a.C, será omitida. Uma vez que, nesse momento histórico, lhes era habitual usar a geometria para resolver problemas matemáticos, sua álgebra também continha motivações geométricas, se valendo de passos para construções onde o resultado procurado era dado por um segmento de reta, por exemplo, e sua respectiva medida de comprimento. Os desafios desta álgebra geométrica, como referencia Baumgart (1992, p. 68-71), porém, não cabem à álgebra do 7º ano, a qual o presente trabalho propõe discutir.

2.1.1.2 Álgebra Sincopada

O nome dado ao estilo adotado nesta fase vem da palavra “síncope”, que significa: “Eliminação de fonemas no interior de uma palavra” (SÍNCOPE, 2020). É, portanto, uma forma de escrita mais sintética, abreviando palavras e expressões matemáticas, quantidades e operações, comumente utilizadas, abrindo caminho para a criação de uma linguagem própria matemática.

Vivendo na Grécia do século III d.C., Diofanto foi um dos primeiros de que se tem conhecimento a desenvolver e utilizar uma álgebra sincopada. Segundo historiadores, “Diofanto deu um novo impulso à álgebra na trilha dos antigos métodos babilônicos” (BAUMGART, 1992).

Dos trabalhos por ele escritos, a obra “Aritmética”, da qual conhece-se atualmente 6 de seus 13 livros, possui maior destaque. Nela, o autor enuncia e resolve problemas que decaem em equações do primeiro e do segundo grau, além de uma cúbica, conforme Eves (2011). São equações determinadas e indeterminadas, de apenas uma, duas ou até três incógnitas, as quais por vezes ele se preocupava em encontrar somente um resultado (EVES, 2011, p. 207).

Diofanto herdou dos babilônicos a adoção de soluções e resoluções particulares para os problemas, desprovido ainda de um método para demonstrações gerais, porém, as suas abreviações simbólicas permitiram-lhe manipular relações algébricas de maneira mais fácil do que poderia ser feito com expressões retóricas (PEREIRA, 2017, p. 35).

Na Figura 4 está reproduzido em grego o primeiro dos problemas encontrados no livro 1 da obra “Aritmética” de Diofanto, editado e traduzido para o latim por Paul Tannery (1893).

Figura 4 - Problema I do livro 1 da obra "Aritmética" de Diofanto

Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ.

Ἔστω δὴ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ ρ̄, ἡ δὲ ὑπεροχὴ Μ̊ μ̄. εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς.

Τετάχθω ὁ ἐλάσσων ϛ ᾱ· ὁ ἄρα μείζων ἔσται ϛ ᾱ Μ̊ μ̄· συναμφότεροι ἄρα γίνονται ϛ β̄ Μ̊ μ̄· δέδονται δὲ Μ̊ ρ̄.

Μ̊ ἄρα ρ̄ ἴσαι εἰσὶν ϛ β̄ Μ̊ μ̄.

καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. ἀφαιρῶ ἀπὸ τῶν ρ̄, Μ̊ μ̄, [καὶ ⟨ἀπὸ⟩ τῶν β̄ ἀριθμῶν καὶ τῶν μ̄ μονάδων ὁμοίως μονάδας μ̄·] λοιποὶ ϛ β̄ ἴσοι Μ̊ ξ̄. ἕκαστος ἄρα γίνεται ϛ, Μ̊ λ̄.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων Μ̊ λ̄, ὁ δὲ μείζων Μ̊ ο̄, καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

Fonte: Alexandria e Tannery (1893, p. 16)

Para este problema foi proposto que um número teria sido partido em dois outros números diferentes, em que a soma destes dois números resultaria 100, e sua diferença seria 40. O objetivo seria deduzir estes dois valores.

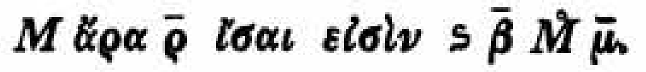
Na resolução dada por Diofanto, em notação algébrica corrente, indicaremos o menor valor como sendo x, e o maior $x + 40$. Portanto, sua soma será $2x + 40$ e, dado pelo enunciado que a soma é igual a 100, teremos:

$$100 = 2x + 40. \tag{2}$$

A resolução segue por subtrair 40 em ambos os membros da equação, obtendo $2x$ igual a 60 e, consequentemente $x = 30$. Estabelece-se, portanto, que os números desejados são 30 e 70.

No que diz respeito à notação utilizada originalmente em grego para a equação (2), a qual pode ser observada na Figura 5, Hettle (2015, p. 143-144) e Baumgart (1992, p. 31-32) apontam que eram utilizadas letras do alfabeto grego com um traço acima para indicar números inteiros, assim $\bar{\rho} = 100$, $\bar{\beta} = 2$, $\bar{\mu} = 40$; e à esquerda de cada representação numérica os símbolos ς (sigma) e Ṁ (Mu) indicavam se o número era o coeficiente de uma incógnita ou uma constante, respectivamente. O primeiro, ς, se tratava da última letra da palavra "*αριθμος*" (arithmos), que pode ser traduzido como "número"; já o segundo, Ṁ, é a letra inicial da palavra "*Μοναδες*" (Monades), que significa "unidades".

Figura 5 - Equação escrita na forma sincopada de Diofanto



Fonte: Alexandria e Tannery (1893, p. 16)

Uma interpretação mais detalhada do simbolismo usado por Diofanto pode ser encontrada em Baumgart (1992), Eves (2011) e Hettle (2015).

Por volta do século VII d.C., começou a se desenvolver na Índia uma nova forma de álgebra sincopada, inicialmente com Brahmagupta e, posteriormente, por volta do século XII d.C., com Bhaskara.

Segundo Sharma (1966, p. 199), Brahmagupta provavelmente foi o primeiro a cunhar o termo *samakarana*, que em uma tradução literal significa "tornar igual", ou simplesmente *sama*, que significa “igual” ou “equação”, para problemas envolvendo valores desconhecidos e uma igualdade entre dois membros (lados).

De maneira geral, conforme Sharma (1966), Baumgart (1992) e Eves (2011), os trabalhos hindus deste período se propunham a resolver equações lineares com uma incógnita, equações quadráticas pelo método de completar quadrados, sistemas de equações lineares e quadráticos com mais de uma incógnita, além de equações indeterminadas. Neste último ponto encontra-se um grande diferencial da álgebra hindu em relação à álgebra grega, pois ao “contrário de Diofanto, que procurava uma qualquer das soluções racionais de uma equação indeterminada, os hindus empenhavam-se em encontrar todas as soluções inteiras possíveis” (EVES, 2011, p. 256).

Para as equações lineares, além do método da falsa posição, que pode ser encontrado em Pereira (2017, p. 60), outro “método usado era um método de inversão, por meio do qual se trabalhava de trás para frente a partir de uma determinada informação” (JOSEPH, 2011, p. 382), isto é, desfazendo operações; uma abordagem que, ainda conforme Joseph (2011, p. 382), foi muito utilizada no desenvolvimento da álgebra islâmica séculos depois.

Quanto à forma sincopada adotada pelos hindus, uma breve descrição é dada por Eves (2011, p. 256):

> [...] Como Diofanto, indicavam a adição por justaposição. A subtração era indicada colocando-se um ponto sobre o subtraendo, a multiplicação escrevendo-se *bha* (primeira sílaba da palavra *bhavita*, “produto”) depois dos fatores, a divisão escrevendo-se o divisor debaixo do dividendo e a raiz quadrada escrevendo-se *ka* (da palavra *karana*, “irracional”) antes da quantidade. Brahmagupta denota a incógnita por *yā* (de *yāvattāvat*, “tanto quanto”). Os inteiros conhecidos eram antecedidos de *rū* (de rūpa, “número puro”). As incógnitas adicionais eram indicadas pelas sílabas iniciais de palavras que expressam diferentes cores. Assim, uma segunda incógnita poderia ser denotada por *kā* (de Kālaka, “preto”) [...]

Assim, a expressão $9x + 7y + 8$ poderia ser escrita como *yā* 9 *bha kā* 7 *bha rū* 8.

Do ponto de vista cultural, os problemas eram escritos na língua sânscrita e em versos, como é possível ver na obra *Brahma-Sphuta Siddhanta* (Doutrina de Brahma Corretamente Estabelecida) de Brahmagupta em Sharma (1966), em que grande parte do trabalho se ocupa a falar sobre astronomia. Essa escrita de forma poética, segundo Pereira (2017, p. 60), devia-se ao fato de os textos escolares serem escritos em versos, além de que os problemas também eram utilizados para entretenimento social.

Para ilustrar a forma poética, observa-se a estrofe 56 de Bhaskaracarya (2001 apud PEREIRA, 2017, p. 60):

> Durante os jogos amorosos de um casal o colar do pescoço da esposa partiu-se. Um terço das pérolas caíram no chão, um quinto foram para debaixo da cama. A esposa

> apanhou um sexto e o seu amado um décimo. Seis pérolas ficaram no fio original. Descobre o número de pérolas no colar.

Na linguagem simbólica atual, com o x representando o número total de pérolas no colar, obtém-se a seguinte equação:

$$1/3\,x + 1/5\,x + 1/6\,x + 1/10\,x + 6 = x. \qquad (3)$$

Ou ainda, reescrevendo-a:

$$x - (1/3\,x + 1/5\,x + 1/6\,x + 1/10\,x) = 6. \qquad (4)$$

Pelo método da falsa posição, tomando a forma assumida na equação (4), pode-se supor que o número total de pérolas é 1. Deste modo, vê-se que

$$1 - (1/3 + 1/5 + 1/6 + 1/10) = 1/5. \qquad (5)$$

Como o resultado pretendido é 6, conforme ainda a equação (4), e sabendo que 1/5 multiplicado por 30 é igual a 6, o valor inicial falso é ajustado multiplicando-o também por 30, obtendo, portanto, como resultado um total de 30 pérolas.

Embora se tenha com Diofanto e Brahmagupta – e outros matemáticos hindus – um avanço expressivo do ponto de vista simbólico, dado pela maior facilidade em solucionar problemas que recaem em equações por meio das suas respectivas formas sincopadas, uma análise histórica permite perceber que, por motivos temporais, linguísticos, políticos e geográficos, seus sistemas de notação não influenciaram os sistemas simbólicos que viriam a se desenvolver na Europa nos séculos seguintes. Eves (2011, p. 256) cita, por exemplo, que o "trabalho hindu sobre equações indeterminadas chegou à Europa Ocidental tarde demais para que pudesse exercer alguma influência benéfica".

Uma das explicações para essa ruptura com a álgebra sincopada está na retomada do estilo retórico na matemática árabe entre os séculos VIII d.C. e IX d.C.

Com a ascensão do islamismo e a conquista da Índia, Pérsia, Mesopotâmia, norte da África e Espanha pelos árabes, como explica Baumgart (1992, p. 11), foram obtidos e traduzidos para o árabe escritos científicos de gregos e hindus.

No campo da álgebra, Al-Khowarizmi é tido como o principal expoente neste tempo. Em seu livro chamado *al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala*, traduzido como “Compêndio sobre cálculo por restauração e balanceamento”, ou simplesmente “Livro da restauração e do balanceamento”, ele apresenta uma sistematização da álgebra e da resolução de equações de primeiro e segundo graus.

Conforme Pereira (2017, p. 69), os termos *al-jabr* e *wa-l-muqābala*, encontrados no título do livro de Al-Khowarizmi e traduzidos como “restauração” e “balanceamento”, respectivamente, devem-se a duas operações fundamentais que remontam os algoritmos usados atualmente na resolução de equações. A primeira expressão, *al-jabr*, se refere à adição de termos iguais aos que aparecem com sinal negativo em ambos os membros de uma equação; por exemplo, por *al-jabr* podemos transformar a equação (6) em (7) pela adição de 4 unidades em cada membro.

$$2x - 4 = x + 8. \tag{6}$$

$$2x = x + 12. \tag{7}$$

A segunda expressão, *wa-l-muqābala*, dá-se pela subtração de termos positivos em ambos os membros de uma equação; tomando ainda o exemplo anterior da equação (7), pode-se subtrair x de cada membro da equação obtendo apenas $x = 12$.

Vale notar ainda que “foi da deturpação do termo *al-jabr*, presente no título do referido compêndio, e da extensão do nome à resolução das equações que, no século XIV, surgiu a palavra ‘álgebra’” (PEREIRA, 2017, P. 68).

Segundo Eves (2011, p. 263), porém,

> A álgebra de Al-Khowârizmî mostra pouca originalidade. Explicam-se as quatro operações elementares e resolvem-se equações lineares e quadráticas, estas últimas aritmética e geometricamente. O trabalho contém algumas questões envolvendo mensuração geométrica e alguns problemas de herança.

Uma crítica apontada aos trabalhos de Al-Khowarizmi, como podemos ver em Baumgart (1992, p. 11), está na rejeição da “erudição grega” e de outros resultados já alcançados anteriormente, exemplificado pelo rompimento com a álgebra sincopada e a adoção de um estilo puramente retórico, o que permite considerar que seu trabalho não esteve à altura dos babilônicos e dos hindus.

Embora haja críticas devido aos trabalhos de Al-Khowarizmi não apresentarem alguma grande contribuição própria, é devido a este árabe que a álgebra toma forma de um corpo de conteúdos a serem estudados, com finalidade em si mesma. Pereira (2017, p. 72) atribui a Al-Khowarizmi, por exemplo, a consolidação do conceito de equação e de suas classificações; o tratamento das equações como entes matemáticos, e não somente como produto de um outro problema, como visto na álgebra babilônica; a aparição de formas canônicas e do conceito de incógnita, chamada por ele de raiz, como algo que se pretende determinar; e o cálculo algébrico, ou seja, o uso de operações aritméticas entre monômios semelhantes compostos por incógnitas.

É possível interpretar, portanto, que o grande objetivo de Al-Khowarizmi não era o mesmo de povos anteriores, que buscaram sintetizar a álgebra, mas sim de explicá-la ao seu povo e em seu tempo, fato observado e comprovado pelo conteúdo de seus livros, que chegam a conter, por exemplo, "uma análise das relações de propriedade, a distribuição da herança de acordo com a lei islâmica e as regras para redigir testamentos" (JOSEPH, 2011, p. 458).

Outra grande contribuição está na conservação e tradução de escritos gregos e hindus, fato este que permitiu a chegada de toda matemática feita até então à Europa por intermédio de Leonardo de Pisa, o qual será mencionado a seguir.

2.1.1.3 Álgebra Simbólica

Muito do desenvolvimento da álgebra na Europa se deve à obra *Liber Abbaci* ou "Livro do Cálculo", escrita em 1202 por Leonardo de Pisa, também conhecido pelo nome Fibonacci, uma forma encurtada para "*filio Bonacci*" (filho de Bonacci), em referência à sua família (VAN DER WAERDEN, 1985, p. 33).

Filho de pai mercador e comerciante, Fibonacci desde muito cedo demonstrou interesse pela matemática, principalmente pela área da aritmética, ligada à profissão exercida por seu pai, o que, segundo Eves (2011, p. 292) "se canalizou, posteriormente, para extensas viagens ao Egito, à Sicília, à Grécia e à Síria, onde entrou em contato direto com os procedimentos matemáticos orientais e árabes". Sobre este fato, Baumgart (1992, p. 11) assinala: "Que felicidade para a matemática que o caixeiro-viajante Fibonacci tivesse esses interesses intelectuais!".

Dentre outras coisas, segundo van der Waerden (1985, p. 35), o *Liber Abbaci* tratou de divulgar o uso dos algarismos indo-arábicos, demonstrando regras sobre as operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão, inclusive envolvendo cálculos com frações; apresentava também resultados úteis aos comerciantes, com problemas relacionados a transações comerciais, como o cálculo do preço de produtos (margem de lucro), juros, troca de dinheiro, conversão de pesos e medidas; e, em seus capítulos finais, dispôs de problemas ligados ao campo da geometria e da álgebra.

Este último assunto, a álgebra, na obra de Fibonacci não recebeu influências do estilo sincopado encontrado em Diofanto e Brahmagupta, mas de Al-Khowarizmi, com seu estilo retórico. Porém, é de grande valor que sua história esteja brevemente relatada neste prelúdio da álgebra simbólica, pois foi a partir de seus estudos que este campo da matemática encontrou bases para se estabelecer como tal.

Dos primeiros achados envolvendo o pensamento algébrico até o *Liber Abbaci* se passaram por volta de 29 ou 30 séculos, porém, somente cinco séculos separam o *Liber Abbaci* – que retorna à álgebra retórica – da constituição da notação algébrica tal e qual temos atualmente. Baumgart (1992, p. 12) elenca três fatores que contribuíram para o rápido desenvolvimento da álgebra na Europa a partir do início do século XII, são eles:

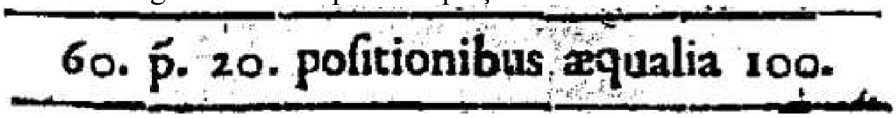
> 1. facilidade de manipular trabalhos numéricos através do sistema de numeração indo-arábico, muito superior aos sistemas (tais como o romano) que requeriam o uso do ábaco;
> 2. invenção da imprensa com tipos móveis (c. 1450), que acelerou a padronização do simbolismo mediante a melhoria das comunicações, baseada em ampla distribuição;
> 3. ressurgimento da economia, sustentando a atividade intelectual; e a retomada do comércio e viagens, facilitando o intercâmbio de ideias tanto quanto de bens.

Por volta de 1500 a notação algébrica, buscando elementos da aritmética, começava a se constituir. Diversos autores surgiram e alguns símbolos se popularizaram entre eles. Dentre as referências do período, notabilizou-se o frade italiano Luca Pacioli. Em sua publicação *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita* (Summa de aritmética, geometria, proporção e proporcionalidade), de 1494 (com uma segunda edição póstuma de 1523), Pacioli usa os símbolos $\bar{p}$ e $\widetilde{m}$, que têm origem das palavras *piú* e *meno* em italiano, para representar "mais" (adição) e "menos" (subtração), respectivamente. As quantidades desconhecidas aqui são chamadas de "coisa" (*cosa* em espanhol), o que levou à adoção do símbolo *co.* para o que hoje habitualmente representamos como x. Além disso, pode-se pontuar também o uso de *ce.* (*censo*) para representar o quadrado de um valor desconhecido (x^2) e *cu.* (*cubo*) para x^3 (CAJORI, 1993, p. 106-107).

Com um trabalho mais expressivo no campo da álgebra, outro italiano chamado Girolamo Cardano (Hieronymo Cardan), adotou uma notação similar à de Luca Pacioli. Em sua publicação *Ars Magna* (A grande arte, 1545), porém, conforme Cajori (1993, p. 117), não utilizou *co.* para x, *ce.* para x^2 e *cu.* para x^3; ao invés disso adotou a palavra *positionibus* para valores desconhecidos (posteriormente abreviando para *pos.*), *quad.* no caso em que estes valores estão elevados ao quadrado e *cub.* para valores desconhecidos ao cubo.

A fim de exemplificar a notação adotada por Cardano, a Figura 6, a seguir, ilustra um trecho do capítulo 3 da *Ars Magna* republicada em 1663.

Figura 6 - Exemplo de equação na obra de Cardano


60. p̃. 20. poſitionibus æqualia 100.

Fonte: Cardano (1663, p. 227)

Em notação atual, é possível reescrever a equação vista na Figura 6 como:

$$60 + 20x = 100. \tag{8}$$

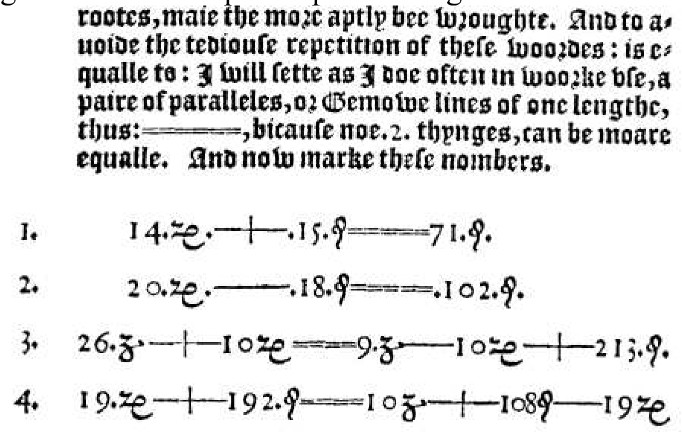
Desde o final do século XV até a metade do século XVI, outros matemáticos ascenderam na Europa propondo novos símbolos e formas de representar operações e equações. A seguir, serão citados três destes e suas contribuições. Outros nomes podem ser encontrados em Cajori (1993).

Contemporâneo a Luca Pacioli, na Alemanha, Iohann Widman concebeu a obra *Behende und hüpsche Rechnung auff allen Kauffmanschafft* (Cálculo ágil e bonito em todas as profissões, 1489) que é tida como "a primeira aritmética impressa a conter os sinais de mais (+) e menos (-)" (CAJORI, 1993, p. 128, tradução nossa).

Na Áustria, Heinrich Schreiber (Grammateus) publicou, sobre aritmética e álgebra, a obra intitulada *Ayn new Kunstlich Buech* (Um novo livro de habilidades, 1518), na qual "a incógnita x e suas potências x^2, x^3, ..., são chamadas, respectivamente, *pri* (*prima*), $2a.$ ou *se.* (*seconda*), $3a.$ ou *ter.* (*terza*) [...]; *N.* para número absoluto" (CAJORI, 1993, p. 132, tradução nossa).

Uma proposta de sinal de igual (=), similar ao que usamos atualmente, apareceu pela primeira vez em Robert Recorde (1557). Nos primeiros parágrafos do seu capítulo sobre equações, o autor propõe: "[...] para esquecer a tediosa repetição destas palavras: é igual a: vou definir um par de paralelas, ou linhas iguais de um mesmo comprimento, assim: =====, porque não existem duas coisas que podem ser mais iguais" (RECORDE, 1557, p. 238, tradução nossa), ao que se segue de exemplos para o seu uso, conforme a Figura 7.

Figura 7 - Símbolo para representar igualdade em Recorde



rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to auoide the tediouse repetition of these woordes : is equalle to : I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus:=======, bicause noe. 2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

Fonte: Recorde (1557, p. 238)

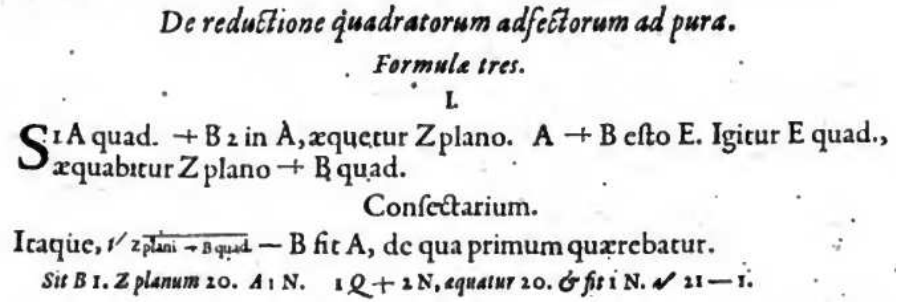
A notação de Recorde para uma igualdade foi adotada por diversos matemáticos, mas, segundo Cajori (1993, p. 298), foi em 1631 que recebeu o maior reconhecimento, quando seu símbolo foi adotado por três grandes autores na Inglaterra: William Oughtred, Richard Norwood e Thomas Harriot.

Citado por Eves (2011, p. 308) como “o maior matemático francês do século XVI” e por Baumgart (1992, p. 14) como “o divisor de águas do pensamento algébrico”, por sair das simples manipulações de equações para resolução de problemas e começar a propor um estudo de propriedades mais teóricas da álgebra, François Viète, em seu trabalho intitulado *Isagoge in artem analyticen* (Introdução às artes analíticas), também deixou sua grande contribuição para o simbolismo algébrico, introduzindo “a prática de se usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes” (EVES, 2011, p. 309). Nas equações numéricas, porém, segundo Cajori (1993, p. 185-186), não representava números desconhecidos por vogais, representando-os, e suas respectivas potências, por *N* (*numerus*) para incógnitas de expoente 1, *Q* (*quadratus*) para expoente 2, *C* (*cubus*) para expoente 3, e suas combinações, por propriedades das potências, para os demais expoentes; os coeficientes eram dispostos à esquerda de cada letra. Desta forma, para exemplificar, pode-se considerar a representação de Viète para a equação (9) como sendo *3Q – 7N + 20, aequetur 16.*

$$3x^2 - 7x + 20 = 16. \tag{9}$$

Na Figura 8, há um trecho retirado de *Opera Mathematica* (Trabalhos matemáticos), coleção das obras matemáticas de Viète, publicada postumamente em 1646 pelo matemático neerlandês Frans van Shooten, no qual, sem usar fórmulas, é destacado um método para encontrar uma das raízes de uma equação do segundo grau.

Figura 8 - Método de Viète para encontrar uma das raízes de uma equação do 2º grau



De reductione quadratorum adfectorum ad pura.

Formulæ tres.

I.

Si A quad. + B 2 in A, æquetur Z plano. A + B esto E. Igitur E quad., æquabitur Z plano + B quad.

Consectarium.

Itaque, √ Z plani + B quad. — B fit A, de qua primum quærebatur.

Sit B 1. Z planum 20. A 1 N. 1Q + 2N, *æquatur* 20. *& fit* 1 N. √ 21 — 1.

Fonte: Viète (1646, p. 129)

Pode-se observar aqui o cunho teórico adotado por Viète ao apresentar métodos de resolução para equações do segundo, terceiro e quarto graus. Abaixo dos métodos, para cada caso particular de equação, encontram-se exemplos que os satisfazem. Nestes exemplos, como o caracterizado na Figura 9, é possível encontrar a simbologia adotada e visualizada no parágrafo anterior para as equações numéricas.

Figura 9 - Exemplo de equação na obra de Viète

1Q + 2N, *æquatur* 20. *& fit* 1 N. √ 21 — 1.

Fonte: Viète (1646, p. 129)

Na Figura 9, encontramos a equação *1Q + 2N, aequetur 20*, que em notação usual pode ser interpretada como:

$$x^2 + 2x = 20. \qquad (10)$$

E segue da resposta *fit i N. √21 – 1*, ou seja, $x = \sqrt{21} - 1$.

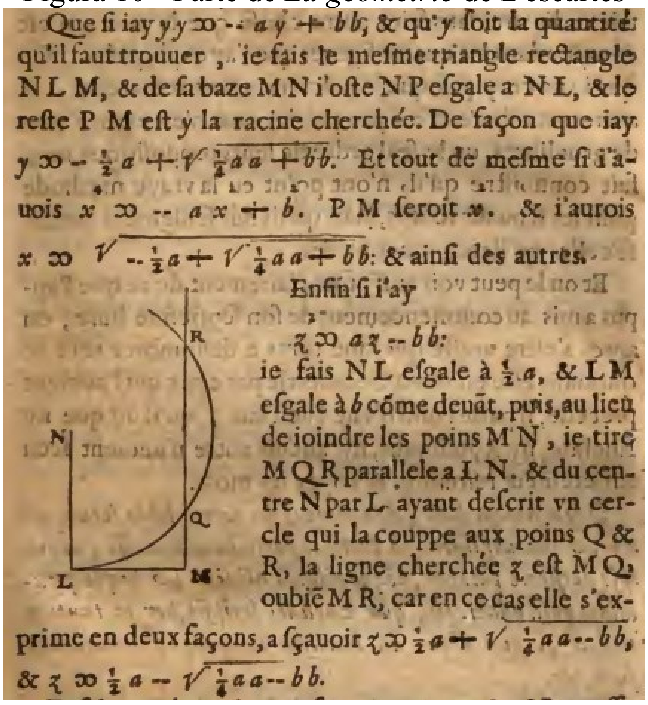
Note que Viète não considerou o sinal de igual (=) em sua obra; em seu lugar usava a inscrição em latim *aequetur* para indicar relações de igualdade.

Após Viète, muitos outros matemáticos contribuíram com a notação algébrica até que se chegasse à forma atual. Tomas Harriot, por exemplo, matemático inglês já citado por usar o símbolo de igualdade de Robert Recorde, “utilizava letras minúsculas ao invés das letras maiúsculas de Viète” para representar incógnitas e variáveis e “um ponto entre o coeficiente numérico e outros fatores de um termo" (CAJORI, 1993, p. 199-200, tradução nossa). Porém, é com René Descartes que as principais mudanças são consolidadas.

Cajori (1993, p. 205-208) elenca quatro características que podem ser observadas na notação algébrica adotada em *La géométrie* (A geometria) de Descartes, que faz parte da obra *Discours de la Méthode* (Discurso sobre o método) publicada em 1637. A primeira delas está no uso de letras minúsculas para representar valores desconhecidos, assim como Thomas Harriot denotou. O segundo ponto diz respeito à escrita dos expoentes inteiros positivos das incógnitas, usando algarismos indo-arábicos e em posição relativa à base assim como observa-se atualmente (na Figura 10, porém, observa-se a preferência de Descartes em escrever *aa* ao invés de a^2). A terceira característica apontada por Cajori (1993, p. 206-208) está na adoção do símbolo $\propto$ para a igualdade, sendo assim diferente do proposto por Recorde (1557). Por fim, como quarto ponto, uma mudança no sinal usado para a raiz quadrada, em que Descartes passa a adotar um traço logo acima, assim como usado atualmente, para dar o entendimento de que tudo o que está abaixo do traço faz parte do radicando.

Todas as modificações citadas podem ser verificadas na Figura 10, que mostra parte de uma das páginas da primeira edição de *La géométrie*. É possível observar também aquilo que fora pontuado por Eves (2011, p. 309), a mesma "convenção atual de se usar as últimas letras do alfabeto para indicar as incógnitas e as primeiras para as constantes".

Figura 10 - Parte de *La géométrie* de Descartes



Que si iay $yy \propto -ay + bb$, & qu'y soit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le mesme triangle rectangle NLM, & de sa baze MN i'oste NP esgale a NL, & le reste PM est y la racine cherchée. De façon que iay $y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Et tout de mesme si i'auois $x^4 \propto -ax^2 + b$. PM seroit x^2. & i'aurois $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$: & ainsi des autres.

Enfin si i'ay $z^2 \propto az - bb$: ie fais NL esgale à $\frac{1}{2}a$, & LM esgale à b cōme deuāt, puis, au lieu de ioindre les poins MN, ie tire MQR parallele a LN. & du centre N par L ayant descrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée z est MQ, oubiē MR, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, a sçauoir $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Fonte: Descartes (1637, p. 303)

Como bem sinaliza Baumgart (1992, p. 3), nota-se que, ainda hoje, “não há total uniformidade no uso de símbolos”. Dentre outros exemplos para essa afirmação, o mesmo autor cita o uso do ponto pelos americanos para separar a parte inteira da parte decimal de um número, enquanto europeus, e mesmo no Brasil, utiliza-se a vírgula para esta finalidade. Porém, são pormenores, que advêm de escolhas de determinados autores e sua respectiva valorização em cada região.

Neste último estágio do desenvolvimento da notação algébrica evidencia-se a importância da adoção de uma simbologia única e facilitadora, que permita avanços e descobertas matemáticas que possam transitar livremente entre tempos e nações.

Diversas simbologias foram propostas e modificadas, e a própria história, por meio de seus atores, foi sendo capaz de selecionar as melhores formas de dispor algebricamente pensamentos e resolver problemas, culminando no surgimento de uma linguagem sólida e concisa, capaz de permear todo o conhecimento matemático.

Compreender, porém, como ocorreu o surgimento desta simbologia, insere-nos numa realidade contínua e histórica, que nos possibilita, por meio de uma interpretação dos fatos, buscar melhores interpretações à nossa forma de pensar e ensinar matemática.

2.1.1.4 Contribuições para o ensino-aprendizagem

Diante do exposto e das potencialidades que se verifica ao compreender a história da álgebra para o seu ensino-aprendizagem em sala de aula, é importante pontuar e evidenciar algumas contribuições.

De início, precisa-se compreender que a matemática em si não é uma língua, mas constitui de uma linguagem que, criada e desenvolvida ao longo de séculos de história humana, é capaz de traduzir e sintetizar de forma prática os saberes das mais diversas áreas ligadas a esse campo do conhecimento.

Assim como pontua Hogben (1970 apud MOURA; SOUSA, 2005, p. 16-17), é possível interpretar que aprender matemática atualmente, em certos aspectos, pode se inserir em um contexto semelhante ao de aprender uma nova língua, com simbologia, ordem e semântica próprias, o que para muitos pode não ser uma tarefa fácil. Por conseguinte, aprender a história do desenvolvimento desta linguagem pode colaborar para uma transição mais suave e efetiva a partir da língua materna. Tal ponto é corroborado por Vailati e Pacheco (2011, p. 12) ao dizerem que o ato de se situar na evolução do pensamento algébrico por meio de sua história “pode conduzir o aluno à produção de novos significados para a linguagem algébrica, e com isso, amenizar dificuldades relativas à abstração e à generalização”.

Um aspecto importante que se manifesta na própria história da álgebra e que pode dar suporte para a transição do entendimento entre a língua materna e a linguagem matemática, é a sua divisão em três fases (retórica, sincopada e simbólica). Seja em um problema matemático, no qual este fato é mais evidenciado, ou na resolução de uma simples equação, em todos os casos é importante que se saiba transitar entre um modelo retórico e outro simbólico, ora para interpretar situações, ora para comunicar seus resultados.

Uma outra contribuição reside na significação da álgebra (ou do estudo de equações do 1º grau) que pode encontrar bases nos eventos históricos que motivaram o seu desenvolvimento. Assim como verifica Roque (2014), “diferentes problemas, em épocas distintas, explicam e mostram a necessidade do desenvolvimento de práticas matemáticas diferentes da nossa” (ROQUE, 2014, p. 182), fator que pode colaborar na motivação para o aprendizado, inserindo cada discente como sujeito e autor da história que nos foi contada e que também é protagonizada por todos.

Por fim, é importante entender que, embora o conhecimento histórico possa servir de embasamento para toda a teoria que abarca o estudo de uma ciência, “não quer dizer que o mesmo percurso deva ser percorrido, do ponto de vista didático, em sala de aula” (COELHO; AGUIAR, 2018, p. 182). Como já dito, uma boa transposição didática é salutar para que esse ensino a partir da história não fuja de suas aspirações iniciais. Existe um grande perigo na supressão ou no acréscimo de demasiadas ideias que possam prejudicar a formação e o desenvolvimento do raciocínio do aluno, configurando, assim, uma barreira ainda maior ao conhecimento.

2.2 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Uma das justificativas para a utilização da história da matemática como recurso para o ensino de álgebra está na significação do conteúdo que essa abordagem pode propiciar.

Pretende-se, portanto, na presente seção, situar o leitor sobre esta “significação”, buscando compreender sua necessidade, os meios para que ela ocorra, como ela acontece e como pode ser compreendida no âmbito da álgebra; para tanto, será tomada como base a teoria da Aprendizagem Significativa, de David Ausubel.

2.2.1 Teoria Cognitivista

De início, é importante dizer que a Aprendizagem Significativa se encontra no campo das teorias cognitivistas de aprendizagem, e busca, portanto, explicar a forma com que o ser humano assimila e compreende os significados e os organiza em sua estrutura cognitiva a fim de reconhecer o mundo que o cerca. Desta forma, entende-se que quando um novo significado consegue se integrar à estrutura cognitiva de um indivíduo, ou seja, a um conjunto de ideias preestabelecidas, assimiladas e organizadas, a aprendizagem acontece de forma significativa (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1978, p. 167).

Para Ausubel, Novak e Hanesian (1978, p. 58, tradução nossa) essa estrutura cognitiva "tende a ser hierarquicamente organizada no que diz respeito ao nível de abstração, generalidade e inclusão de ideias", assim, encontra-se no ponto mais alto da hierarquia as ideias mais gerais, ou seja, mais inclusivas, que servirão, na maioria dos casos, como ponto de ancoragem para ideias menos inclusivas, mais específicas acerca de um determinado assunto.

Existe, portanto, para Ausubel, Novak e Hanesian (1978, p. 167), o pressuposto de que a capacidade de aquisição de um novo significado – seja ele uma ideia, um conteúdo ou uma informação – é influenciado diretamente por conceitos de um mesmo campo que já estejam consolidados na estrutura cognitiva, ou seja, um novo conteúdo será mais facilmente assimilado (retido) "na medida em que conceitos relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva" (MOREIRA; MASINI, 1982, p. 4). Essa influência direta advém do fato de Ausubel entender que uma nova informação, para que a aprendizagem ocorra de maneira significativa, deve conseguir se ligar de forma não-arbitrária e não-literal aos conceitos preexistentes na estrutura cognitiva, em um processo ao qual denomina de "subsunção".

2.2.2 Aprendizagem por subsunção

As vantagens do aprendizado por subsunção, segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1978, p. 58, tradução nossa), encontram uma provável explicação no fato de que, uma vez que os conceitos preexistentes, também chamados por Ausubel de conceitos subsunçores ou ideias subsunçoras, estão bem estabelecidos

> 1. Eles têm máxima relevância, direta e específica, para a aprendizagem subsequente.
> 2. Eles possuem poder explicativo suficiente para tornar potencialmente significativos os detalhes factuais arbitrários.

> 3. Eles possuem estabilidade inerente suficiente para fornecer o tipo mais firme de ancoragem para significados mais específicos recém-aprendidos.
> 4. Eles organizam novos fatos relacionados em torno de um tema comum, integrando assim os elementos componentes do novo conhecimento, tanto entre si quanto com o conhecimento existente.

Quando a aprendizagem de um novo conteúdo acontece assim, por subsunção, dir-se-á que a aprendizagem é significativa. Por exemplo, se o aluno é capaz de pensar algebricamente, isto é, tem domínio das operações matemáticas e as conhece de modo a compreender que entre elas existem operações inversas, conseguindo articulá-las para encontrar valores desconhecidos, então a aprendizagem de equações poderá encontrar aí um subsunçor capaz de significá-la.

Por outro lado, quando uma nova informação não encontra bases sólidas na estrutura cognitiva, relacionando-se com ela de forma arbitrária e literal, estamos diante daquilo que é entendido por "aprendizagem mecânica". Nos casos mecânicos, para retenção de uma nova informação são necessários outros conteúdos similares e mecanicamente ensinados imediatamente antes ou depois do que se pretende tratar (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1978, p. 144-146). Na matemática, isto se exemplifica quando são ensinados procedimentos, regras e fórmulas sem que haja uma contextualização ou uma preocupação de que o aluno compreenda os caminhos cognitivos que levam àqueles resultados. Retomando ainda as equações, se o seu ensino não se propuser a estabelecer relações com aquilo que o aluno já sabe, ele passará a ser o ensino da manipulação mecânica de letras e números, o que, sem prática e um estudo dedicado, tenderá a cair no esquecimento e/ou no acometimento de erros constantes, muitas vezes naquilo que se julga ser o mais elementar.

Sobre a aprendizagem mecânica, Moreira e Masini (1982, p. 9-10) acrescentam que, embora difira substancialmente da aprendizagem significativa, elas não são antagônicas, e coexistem no processo de aprendizagem. Os autores atribuem, por exemplo, à aprendizagem mecânica, a ideia de construção de um novo subsunçor relativo ao aprendizado de uma informação relacionada a uma área de conhecimento completamente nova e que não encontra precedentes na estrutura cognitiva.

Como apontado anteriormente, dentro da hierarquia da estrutura cognitiva, na maioria dos casos, são os novos conceitos mais específicos que se ligam aos conceitos mais gerais preexistentes, em um processo chamado por Ausubel de "subsunção". Porém, Ausubel, Novak e Hanesian (1978, p. 58-60) apontam para a existência de outras formas de relações que podem ser estabelecidas nesta mesma estrutura além da forma de subsunção descrita acima, à qual eles denominam por “subsunção subordinada” e que é por eles dividida em dois subtipos descritos a seguir.

Quando um novo conceito estabelece relação direta com um conceito subsunçor, isto é, exemplificando-o, dando suporte ou ilustrando-o, os autores se dirigem a este tipo de subsunção como uma “subsunção derivativa”. Enquanto isso, o outro tipo de subsunção, denominado na obra de Ausubel como “correlativa”, acontece quando um novo significado é tido como uma “extensão, elaboração, modificação ou qualificação de uma proposição previamente aprendida” (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1978, p. 58-59), em uma relação em que esse novo significado não está implícito no subsunçor e também não pode ser explicado por ele, mas hierarquicamente o subsunçor ainda se mantém como uma ideia mais geral do que o novo significado, isto é, o novo significado está subordinado ao subsunçor.

2.2.3 Aprendizagens Superordenada e Combinatória

As outras duas relações que um novo aprendizado pode estabelecer com a estrutura cognitiva são denominadas “superordenada” e “combinatória”. Estas relações ocorrem de modo não-subordinado, diferindo-se assim das formas de subsunção derivativa e correlativa.

A relação superordenada ocorre, segundo Moreira e Masini (1982, p. 20), quando um conceito mais geral e inclusivo assimila ideias mais específicas preexistentes na estrutura cognitiva. Para exemplificar, Ausubel, Novak e Hanesian (1978, p. 59) citam o fato de que uma criança, após desenvolver por observação os conceitos de cenouras, ervilhas, feijões, beterrabas e espinafre, por exemplo, pode mais tarde desenvolver o conceito de vegetais, que assimilará de forma superordenada os conceitos anteriores.

Finalmente, a aprendizagem pode acontecer de forma “combinatória” quando novas proposições se relacionam com conceitos que fazem parte da estrutura cognitiva, mas não de modo a subordiná-los ou superordená-los, consistindo de combinações entre conceitos subsunçores que são relacionados de forma não-arbitrária entre si, estabelecendo, como consequência, conceitos potencialmente significativos. Porém, por não estarem ancorados aos mesmos subsunçores, são tidos como mais difíceis de aprender e lembrar (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1978, p. 59). Quando começa-se a explorar o campo da álgebra, por exemplo, nos anos finais do ensino fundamental, costuma-se evocar elementos da língua portuguesa, que auxiliarão na resolução de problemas, e da aritmética, com as operações básicas, mas que não subordinam ou superordenam a álgebra, apenas oferecem fundamentos que ajudarão na fixação deste novo conhecimento à estrutura cognitiva.

2.2.4 Pressupostos para uma aprendizagem significativa

Independente da forma como os novos conteúdos se relacionarão com a estrutura cognitiva, Ausubel, Novak e Hanesian (1978, p. 41) dissertam sobre dois pressupostos para que a aprendizagem aconteça de forma significativa: disposição do aluno e material potencialmente significativo.

Sobre a disposição do aluno, as considerações são feitas no sentido de alertar que, caso o estudante não esteja disponível para receber um novo conteúdo de maneira significativa, há o risco de que os conteúdos sejam apenas memorizados arbitrariamente e literalmente, resultando em uma aprendizagem mecânica e, por vezes, sem sentido. Essa falta de disposição é tomada pela referência tanto como por uma possível ausência de conceitos subsunçores adequados disponíveis na estrutura cognitiva do aluno, como por uma série de outros fatores psicológicos que emergem do meio educacional, por exemplo, o fato de respostas literais serem mais aceitas por certos professores do que uma boa resposta que o próprio aluno venha a elaborar; ou ainda uma ansiedade elevada causada por erros constantes em um determinado assunto ou disciplina que fazem com que o discente não acredite no seu próprio potencial para aprender significativamente (fenômeno reconhecido pelos autores como familiar à disciplina de matemática); e, por fim, para criar uma impressão ao professor de que o conteúdo foi realmente aprendido e, consequentemente, impedindo a sua compreensão mesmo que de maneira lenta e gradual; nesses casos, o aluno opta por memorizar alguns conceitos sem significado para ele, desde que tal procedimento lhe garanta a aprovação (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1978, p. 41-44).

Do segundo ponto, um material potencialmente significativo, Ausubel, Novak e Hanesian (1978, p. 44-45) citam dois critérios à sua elaboração. O primeiro critério diz respeito à não-arbitrariedade do material, o qual deve dispor de uma base que permita relacioná-lo de maneira propositiva a ideias correspondentes e relevantes já preestabelecidas ao aprendiz. Por outro lado, o material potencialmente significativo também deve ser capaz de se relacionar de maneira substantiva (não-literal) com a estrutura cognitiva do aprendiz, ou seja, ele não deve depender exclusivamente de determinados signos, pois, “o mesmo conceito ou proposição poderia ser expresso em linguagem sinônima e transmitiria precisamente o mesmo significado”

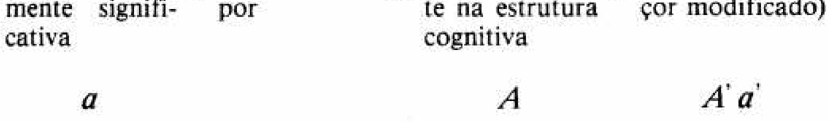
(AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1978, p. 44, tradução nossa). De tal forma o aprendiz deve ser capaz de não apenas reproduzir uma frase, por exemplo, mas de dar o seu próprio contorno ao novo conteúdo, sintetizando-o, contextualizando-o e exemplificando-o, bem como ser capaz de relacionar um mesmo assunto expresso de maneiras diferentes. Para exemplificar, a referência cita a afirmação: "A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso", a qual, para a maioria dos estudantes de geometria, deverá ter o mesmo significado que: "A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180 graus".

2.2.5 Princípio da Assimilação

Os processos decorrentes da subsunção subordinada, ou seja, da interação de novos conceitos com conceitos preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz, são descritos por Ausubel por meio de um princípio o qual denomina de “assimilação”. É por intermédio deste princípio que é possível compreender como acontece a aquisição, retenção e organização dos novos conhecimentos a partir da teoria de Ausubel.

Ausubel, Novak e Hanesian (1978, p. 125) ilustram o processo de assimilação, conforme a Figura 11, valendo-se de dois conceitos hipotéticos que se relacionam na estrutura cognitiva. O primeiro conceito, chamado de *a*, é a nova ideia, o novo significado a ser aprendido. Enquanto o segundo conceito, *A*, é uma ideia preestabelecida, correspondente e relevante com relação ao novo significado *a*. Ausubel compreende que, “quando uma nova ideia *a* é significativamente aprendida e ligada à ideia relevante estabelecida *A*, ambas as ideias são modificadas e *a* é assimilada na ideia estabelecida *A*” (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1978, p. 125, tradução nossa). A interação entre estes dois conceitos, portanto, modifica-os, dando origem aos conceitos *a’* e *A’*, que podem permanecer dissociados por um período variável, mas que depois se integram em um novo conceito subsunçor melhorado e mais complexo.

Figura 11 - Processo de assimilação de conceitos



Fonte: Moreira e Masini (1982, p. 16)

Contudo, como ressalta Moreira e Masini (1982, p. 17), “a importância do processo de assimilação não está somente na aquisição e retenção de significados, mas também no fato de que implica um mecanismo de esquecimento subjacente dessas ideias”. Ao passo que uma nova informação é assimilada na estrutura cognitiva e integrada a ideias mais gerais, inclusivas e bem estabelecidas, inicia-se um processo ao qual Ausubel denomina “assimilação obliteradora” ou “esquecimento significativo” (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1978, p. 128), no qual a própria estrutura cognitiva, como forma de se organizar, gradualmente torna as novas informações menos dissociáveis de seus subsunçores, até o momento em que a integração entre ambos é tida de tal forma que a nova informação já não pode ser reproduzida por si só, modificando o subsunçor em um conceito ou proposição mais específico e detalhado (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1978, p. 129-131).

2.2.6 Facilitadores para uma aprendizagem significativa

À medida que novos conhecimentos são retidos e organizados por meio da assimilação, dois princípios, descritos por Ausubel, Novak e Hanesian (1978, p. 124-125), atuam como facilitadores da aprendizagem significativa e, portanto, da aquisição de novos significados, são eles: “diferenciação progressiva” e “reconciliação integrativa”.

A “diferenciação progressiva” é o processo responsável por introduzir detalhes, especificar e diferenciar as ideias mais gerais previamente assimiladas com base em novos conceitos ou proposições menos inclusivos e mais específicos. Para tanto, Ausubel observa que a programação de um determinado assunto a ser ensinado deve levar em consideração a apresentação das ideias mais gerais e inclusivas antes dos conceitos mais específicos, para que os mais gerais, aos poucos, sejam diferenciados em termos de detalhes e especificidades pelos conceitos mais específicos, obedecendo àquilo que o mesmo autor diz ser uma sequência natural que a consciência humana segue ao ser exposta a um novo campo do conhecimento (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1978, p. 189-190).

Em adicional, Ausubel, Novak e Hanesian (1978, p. 191, tradução nossa) fazem uma observação importante acerca do ensino de matemática e ciências. Embora sejam evidentes os benefícios de um ensino regido a fim de promover uma diferenciação progressiva dos conteúdos, organizando-os de seus aspectos mais gerais aos mais específicos, o ensino destas duas disciplinas

> [...] ainda depende fortemente da aprendizagem mecânica de fórmulas e etapas procedimentais, do reconhecimento mecânico de "problemas de tipo" estereotipados

> e da manipulação mecânica de símbolos. Na ausência de ideias claras e estáveis que possam servir como pontos de ancoragem e focos de organização para incorporação de novo material logicamente significativo, os alunos ficam presos em um pântano de confusão e não têm outra escolha a não ser memorizar tarefas para usar em provas.

Fato este que, dentro do campo da matemática inclusive, culmina em uma sequência de memorizações sem sentido durante toda a vida escolar, visto que, à medida que alguns conteúdos são mecanicamente explorados pelos alunos, pelos motivos já elucidados, novos conceitos que dependeriam destes como subsunçores não os encontram disponíveis na estrutura cognitiva a fim de promover uma aprendizagem significativa, gerando novas memorizações sem sentido.

O segundo facilitador para uma aprendizagem significativa é o princípio da "reconciliação integrativa", cujo objetivo principal está em reconciliar inconsistências reais ou aparentes entre um novo conhecimento e conhecimentos já adquiridos, seja da mesma área ou não, relacionando ambos e apontando suas principais semelhanças e diferenças (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1978, p. 192).

A fim de apresentar um contraexemplo que possa validar a concepção do segundo princípio, Ausubel, Novak e Hanesian (1978, p. 192) traçam algumas consequências indesejáveis de uma abordagem que não leva a "reconciliação integrativa" em consideração. Aqui, os autores citam como exemplo os materiais didáticos desenvolvidos de forma fragmentada entre capítulos e subcapítulos que não dialogam entre si.

Uma primeira consequência diz respeito à grande quantidade de termos que podem ser criados em cada assunto abordado para se referir a ideias equivalentes, o que, segundo os autores, pode gerar uma certa confusão ao aprendiz, encorajando-o à aprendizagem mecânica. Um segundo ponto trata de uma possível barreira que pode ser criada entre tópicos semelhantes ou que possuem alguma relação, impedindo o aluno de enxergar todo o conteúdo de uma maneira mais ampla. Numa terceira consequência é questionada a relevância de materiais elaborados nos referidos moldes, dado que as ideias previamente aprendidas são como base para a incorporação de uma informação subsequente. Por fim, os autores compreendem que, uma vez que as diferenças entre conceitos aparentemente semelhantes não são explicitadas, estes tendem a ser retidos como idênticos, propiciando a não aquisição de um novo conceito em detrimento do seu semelhante que já se encontra estável na estrutura cognitiva (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1978, p. 192-193).

Diante do exposto, Ausubel, Novak e Hanesian (1978, p. 124-125) argumentam que a reconciliação integrativa é uma forma de diferenciação progressiva, porém elas se diferem ao passo que a segunda está mais presente na aprendizagem decorrente da subordinação entre conceitos ou proposições, enquanto a primeira diz respeito às aprendizagens superordenada e combinatória, em que os conceitos não se encontram dispostos hierarquicamente.

De modo a concluir, é importante mencionar que, embora faça parte de um corpo cognitivista, a teoria de Ausubel aborda também outros aspectos tais como social, emocional e psicológico da formação humana, merecendo, portanto, um estudo aprofundado em toda sua extensão. O leitor interessado pode encontrar um maior detalhamento nas referências Ausubel, Novak e Hanesian (1978) e Moreira e Masini (1982).

2.2.7 Contribuições para o ensino de álgebra

Como supracitado na Introdução deste trabalho, no ensino de álgebra tende-se a lançar "os alunos precipitadamente ao simbolismo algébrico" (SCHOEN, 1995 apud BEZERRA, 2016, p.49) na suposição de que os próprios alunos, por si só, possam fazer as associações e distinções necessárias à sua compreensão.

Logo, baseado na teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, interpreta-se que a álgebra tende a "cair" no campo da aprendizagem mecânica, pois, não encontra na estrutura cognitiva do aluno conceitos estáveis (subsunçores) sob os quais possa se ancorar, impossibilitando ou dificultando a sua assimilação, bastando ao discente memorizar procedimentos e fórmulas que o permitam, ao menos, em um curto espaço de tempo, realizar uma avaliação. Com sorte, o aluno poderá encontrar em sua estrutura cognitiva subsunçores não-arbitrários de outras áreas do conhecimento, que o permita fazer associações de forma combinatória.

Verifica-se, porém, nestes casos (aprendizagem mecânica e aprendizagem combinatória), que o novo conceito tende a ser mais facilmente esquecido e depende de constância, frequência e reforço por parte do aluno para que a aprendizagem ocorra (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1978, p. 146). É como alerta Sertillanges (2019, p. 157): "Uma sucessão de palavras, de nomes, de ideias ou de elementos sem relação entre si é muito difícil de guardar; esses elementos isolados não se articulam; cada um está como que errante e escapa rapidamente".

Assim sendo, a teoria de Ausubel oferece uma base de conceitos e princípios ao professor, para que o docente encontre meios pelos quais o estudo de álgebra, mais especificamente das equações do 1º grau, possa se efetivar significativamente ao aluno, possibilitando uma melhor assimilação e retenção. Estes meios poderão ser traduzidos tanto à prática em sala de aula quanto ao material didático, mas devem sempre levar em consideração que "o fator mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe" (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1978, p. 163, tradução nossa).

Em conjunto à história da matemática, parafraseando Sertillanges (2019, p. 157), objetiva-se melhorar a assimilação e retenção da álgebra estando atento às ligações entre conceitos já estabelecidos; à razão de ser da própria álgebra e seus porquês; à genealogia do seu desenvolvimento, sucessões e dependências.

Cabe acrescentar, conforme evidências apontadas em pesquisas e referenciadas por Ausubel, Novak e Hanesian (1978, p. 147-150), a superioridade de uma aprendizagem significativa em relação às metodologias estritamente mecânicas no que diz respeito à facilidade de aprender e relembrar conteúdos; à eficácia de assimilação e retenção de novos conceitos e proposições; e ao tempo de duração de uma nova ideia na estrutura cognitiva do aprendiz - que pode ser correlacionado ao fato desta nova ideia estar ou não arbitrariamente alocada na mesma estrutura.

3 PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Tomando a teoria da Aprendizagem Significativa e a História da Álgebra como sustentação, neste capítulo será apresentada uma proposta de sequência didática que objetiva introduzir significativamente conceitos relacionados ao estudo de equações do 1º grau para uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental e, posteriormente, da álgebra como campo de estudo propriamente dito.

Por ser uma introdução ao conteúdo e levando-se em consideração a rotina do professor em sala de aula e todas as situações atreladas ao contexto escolar, esta sequência pretende ser breve, com duração de 5 aulas (45 minutos por aula), podendo ser adequada às mais diversas realidades. Entretanto, é sabido que somente uma base firme e estável, ou seja, um corpo de conceitos estruturados e disponíveis na estrutura cognitiva de cada aluno, será capaz de permitir uma assimilação efetiva e natural dos conteúdos subsequentes que se pretende ensinar. Portanto, é salutar que a apresentação ao tema seja desenvolvida com todo cuidado e atenção devidos.

A presente sequência didática contemplará as três etapas do desenvolvimento da álgebra propostas em Baumgart (1992): retórica, sincopada e simbólica; de modo que o aluno possa encontrar na linguagem oral e escrita da álgebra retórica, as explicações para os símbolos algébricos estabelecidos ao longo da história. Pretende-se também fazer com que o aluno identifique o contexto no qual o pensamento algébrico se originou, suas implicações na atualidade e a importância do seu desenvolvimento.

3.1 AULA 01 – MOTIVAÇÃO E SONDAGEM

Para a primeira aula, o professor deverá dispor de três a cinco problemas ou situações diferentes que envolvam aritmética e o pensamento algébrico, ou seja, problemas que possam ser resolvidos utilizando propriedades operacionais estudadas anteriormente a fim de encontrar um valor desconhecido.

Estes problemas podem ou não estar relacionados a um contexto mais elaborado. Deve-se observar, porém, se tal contexto, de fato, aproxima o aluno ou o distancia do conteúdo, se é demasiadamente artificial ou se pode encontrar bases na realidade (não necessariamente atrelado ao cotidiano dos alunos).

Sugere-se que, caso haja uma preferência em abordar problemas contextualizados, estes sejam de temáticas inerentes aos povos que historicamente ajudaram a construir o pensamento algébrico, englobando assim, problemas de ordem filosófica, religiosa, agrícola, comercial ou relacionados às construções, de modo que possam ser integrados e explicados nas aulas subsequentes, mas que também sejam de fácil acesso e compreensão por parte dos alunos.

Abaixo, no Quadro 9, são mostrados três exemplos de problemas possíveis extraídos do Apêndice A, onde estão dispostas algumas outras sugestões.

Quadro 9 - Exemplos de problemas do Apêndice A

Problema 1: "O peso de duas pedras iguais mais 17 quilogramas de areia totalizam 225 quilogramas. Deseja-se saber o peso de uma única pedra."
Problema 2: "Se alguém te diz que o triplo de uma quantidade subtraído 123 unidades resulta em 261, que quantidade é essa?"
Problema 3: "Metade do tempo para o crescimento do trigo adicionado a 118 dias equivale a 200 dias. Quanto tempo o trigo demora para crescer?"

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Problemas como os apresentados acima são considerados por Marchand e Bednarz (1999) problemas de estrutura algébrica e diferem-se dos problemas de estrutura aritmética pelo fato de que, no segundo caso, parte-se de um valor conhecido e realiza-se operações aritméticas a fim de obter o resultado esperado. Já no caso dos problemas de estrutura algébrica, pretende-se chegar a um valor desconhecido através de relações operacionais e de igualdades entre elementos do próprio problema.

Nesta primeira aula, opta-se por problemas que envolvam somente uma incógnita, cujas transformações geradas a partir de um valor desconhecido levem a um valor determinado. Porém, a depender da turma, é possível adaptar não só a linguagem dos problemas, mas também a quantidade de relações e operações envolvidas.

Ao início da aula, cada estudante receberá um dos problemas (presentes no Anexo A), devendo solucioná-lo e, em um espaço abaixo do enunciado, descrever por extenso o desenvolvimento de sua resolução, isto é, o raciocínio e operações utilizadas.

Após a resolução dos problemas, no quadro, com a ajuda dos alunos, é proposta uma discussão acerca dos resultados e métodos empregados em cada caso. É esperado que grande parte dos alunos opte por seguir um caminho inverso daquele que é apontado no problema, ou seja, "desfazendo" algumas operações por meio das suas respectivas operações inversas, o que possibilitará posteriormente estabelecer uma ligação entre essa forma de resolução e uma forma algébrica, baseada nas operações de "restauração" e "balanceamento" propostas por Al-Khowarizmi.

Aqui, cabe ao professor mediar a conversa de maneira a estabelecer um paralelo entre os problemas em suas diversas formas de escrita, buscando compreender que todos os problemas apresentados se estruturam de modo a apresentar operações matemáticas, um valor desconhecido e uma relação de igualdade.

Ao término da aula, propõe-se, como forma de motivação, apresentar o problema 26 do Papiro de Rhind conforme Chace (1927, p. 68, tradução nossa): "Uma quantidade e seu 1/4 somados tornam-se 15. Qual é essa quantidade?", ou uma adaptação deste mesmo problema, que não envolva o conceito de fração, por exemplo. Esta situação será retomada e solucionada na Aula 02 de forma retórica.

Um dos objetivos desta primeira aula é, portanto, fazer uma sondagem aos alunos, permitindo que eles estabeleçam um primeiro contato com problemas envolvendo o pensamento algébrico e que façam relações com outras situações e problemas aritméticos abordados anteriormente.

Cabe ressaltar que a presente proposta foi idealizada e concebida em um contexto de pandemia causada pela COVID-19, porém, fora deste contexto, recomenda-se que, após a resolução dos problemas, os alunos sejam reunidos em grupos com até 5 integrantes para socializarem sobre a resolução dos problemas apresentados, possibilitando o contato com formas diferentes de pensar, a compreensão de possíveis erros e acertos e a validação dos resultados.

Esta primeira aula pode também ser adaptada a alunos que possuem alguma deficiência intelectual, recorrendo a problemas mais simples e a materiais manipulativos. Pode-se utilizar, por exemplo, no contexto do "Problema 1" apresentado no Quadro 9, tampinhas de garrafa, bolinhas de papel ou mesmo pequenas pedrinhas para representar as pedras do problema, e um saquinho contendo areia. Como o peso total é de 225 quilos, conduz-se o discente a retirar o peso da areia e, consequentemente, dividir o restante por dois para estabelecer o peso de cada pedra em separado.

3.2 AULA 02 – ÁLGEBRA RETÓRICA (EGÍPCIA E BABILÔNICA)

Na segunda aula, os problemas resolvidos e discutidos anteriormente serão relacionados à história da álgebra, momento em que os alunos poderão verificar que situações semelhantes, em que se deseja encontrar valores desconhecidos, são vivenciadas há anos pela humanidade e, em parte, são responsáveis pelo seu desenvolvimento.

O Apêndice B oferece ao professor subsídios para a elaboração de material complementar sobre a história do período retórico da álgebra - seja com auxílio de recursos como apresentação em *power point* e projetor, ou mesmo por meio de resumo impresso - contextualizando-o no tempo, local e cultura dos povos babilônicos e egípcios, justificando suas motivações para pensar e resolver os problemas que lhes foram atribuídos. Ilustrações de tábulas babilônicas e papiros egípcios podem contribuir para aproximar ainda mais os alunos dos fatos históricos.

Neste ponto, faz-se um paralelo entre os problemas solucionados pelos alunos na Aula 01, por intermédio da descrição dos passos para a sua resolução, e o modo retórico como babilônicos e egípcios procuravam solucionar e demonstrar problemas semelhantes, isto é, escritos em linguagem corrente, detalhados também passo a passo.

Para melhorar a compreensão e justificar que nem sempre, por meio da simples leitura de um problema, consegue-se deduzir com facilidade quais as operações necessárias à sua resolução, retoma-se o problema 26 do Papiro de Rhind, ou sua adaptação, que fora proposto na Aula 01.

O professor pode então escrever ou projetar no quadro o passo a passo descrito no Quadro 10 para que os alunos resolvam o referido problema 26:

Quadro 10 - Solução do problema 26 do papiro de Rhind

Problema: Uma quantidade e seu 1/4 somados tornam-se 15. Qual é essa quantidade?

Solução sugerida:

1. Some um inteiro com 1/4;
2. Tome o inverso do resultado obtido no primeiro passo;
3. Multiplique esse inverso por 15;
4. O resultado obtido será a quantidade procurada.

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Após a resolução, um novo problema é apresentado aos alunos, – indica-se aqui o problema babilônico encontrado nas escavações de Tell Hermal: “Se alguém perguntar a você assim: ‘Se eu adicionar aos dois terços dos meus dois terços cem unidades de cevada, a quantidade original é obtida, qual é a quantidade original?’” – do qual pretende-se questionar se a mesma estrutura apresentada anteriormente, para solução do problema do papiro de Rhind, é capaz de resolver esta nova situação. Este questionamento implicará na reflexão de que, até então, entre os povos egípcios e babilônicos, cada problema era tratado e resolvido de forma única (cada problema tinha o seu passo a passo para ser solucionado), o que não unificava e nem facilitava o trabalho e, consequentemente, o surgimento de um novo problema traria consigo novos desafios. Aqui justifica-se, portanto, a necessidade de novas formas de escrita e representação dos problemas, que possam abstrair suas especificidades e torná-los semelhantes a fim de facilitar a compreensão e resolução.

3.3 AULA 03 – ÁLGEBRA SINCOPADA (GREGA E HINDU)

Na álgebra grega de Diofanto e na álgebra hindu de Brahmagupta, vemos um esforço de unificar a forma de resolução de problemas em que o objetivo é descobrir um valor desconhecido. Tal unificação veio por meio de uma escrita simplificada de cada problema, em uma estrutura similar que conteria ao menos uma incógnita e uma relação de igualdade, e que, posteriormente, serviria para simplificar também a resolução desses problemas.

Assim como na Aula 02, para esta aula o Apêndice C traz uma síntese histórica da álgebra sincopada, transposta didaticamente para a sala de aula, que pode ser utilizada da própria maneira como está constituída ou como referência para a elaboração de outro material.

No Apêndice C indica-se, por exemplo, explorar o problema 1 encontrado no livro 1 da obra “Aritmética” de Diofanto, explicando a maneira como ele propunha a sua escrita na forma sincopada. Para facilitar a compreensão, pode-se pensar em utilizar uma síncope de palavras da própria língua portuguesa que expressem as operações e relações entre os termos de um problema.

Após a contextualização do período em que se potencializa a álgebra sincopada, utilizando-se novamente do problema 26 do papiro de Rhind, deduz-se a forma como Diofanto e Brahmagupta o representariam. Pode-se usar novamente a síncope baseada na língua portuguesa, conforme ilustra o Quadro 11.

Quadro 11 - Forma sincopada do problema 26 do papiro de Rhind

Problema: Uma quantidade e seu 1/4 somados tornam-se 15. Qual é essa quantidade?

Forma sincopada: Podemos adotar a abreviação “num” para as incógnitas, “ad” para adição, “sub” para subtração, “mult” para multiplicação, “div” para divisão e “igual” para a igualdade.

Dessa forma, o problema acima poderia ser escrito como:

num ad num div 4 igual 15 ou *num ad 1/4 mult num igual 15*

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Diante da convenção adotada para a síncope do problema 26 do papiro de Rhind, os alunos podem retomar os problemas da Aula 01 e escrevê-los também de forma sincopada.

Após breve discussão sobre os resultados obtidos por meio da representação dos problemas da Aula 01 em sua forma sincopada, o professor pode então, como motivação para a aula seguinte, apresentar a epigrama 126 do livro XIV da Antologia Grega que descreve a trajetória da vida de Diofanto:

> Este túmulo guarda Diofanto. Ó maravilha imensa!
> O túmulo com astúcia conta a duração da sua vida.
> A sexta parte da sua vida, o deus permitiu-lhe ser criança;
> um doze avos da vida depois, a primeira barba cresceu;
> uma sétima parte depois, acendeu nele o fogo do himeneu,
> que ao quinto ano de casado lhe concedeu um filho.
> Ah, infeliz filho tão amado! Ao atingir metade da idade
> com que morreria seu pai, queimou-se o seu corpo frio.
> Ao cabo de quatro anos a enganar a sua dor com o estudo
> dos números, encontrou enfim o cabo dos seus dias. (JESUS, 2017, p. 110-111)

Com base nos dados contidos na epigrama conduz-se os alunos na possibilidade de determinar com quantos anos Diofanto morreu.

Pode-se ainda apresentar a versão adaptada proposta por Eves (2011, p. 225):

> “Diofanto passou 1/6 de sua vida como criança, 1/12 como adolescente e mais 1/7 na condição de solteiro. Cinco anos depois de se casar nasceu-lhe um filho que morreu 4 anos antes de seu pai, com metade da idade (final) de seu pai”. Com quantos anos Diofanto morreu?

A extensão do problema permitirá verificar as vantagens da forma sincopada, que, além de simplificar sua escrita, torna mais fácil a assimilação por outros povos e em outros tempos, pois a estes não seria mais necessário aprender toda a língua na qual o problema foi escrito, mas somente as formas sincopadas de cada termo, relações e operações.

Por fim, propõe-se como tarefa que os alunos, adotando a forma convencionada no Quadro 11, façam a representação do problema proposto acima por Eves em sua forma sincopada, como demonstra o Quadro 12. Novamente, deve-se ter cuidado em conduzir os alunos a entender o que queremos encontrar e qual a relação de igualdade existente.

Quadro 12 - Forma sincopada da epigrama 126 da Antologia Grega

Epigrama 126 do livro XIV da Antologia Grega (Diofanto) na forma sincopada: *num div 6 ad num div 12 ad num div 7 ad 5 ad num div 2 ad 4 igual num*

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

É possível que os alunos tenham dificuldade com a forma sincopada e a rejeitem, pois já estão acostumados com o uso de alguns símbolos matemáticos no seu cotidiano, porém, o objetivo principal destes últimos exercícios está na condução da Aula 04, onde ficará claro que é possível simplificar mais inteligentemente a resolução de um problema, usando símbolos desvinculados de uma determinada língua, que possam, portanto, ser compreendidos em qualquer tempo e lugar.

3.4 AULA 04 – ÁLGEBRA SIMBÓLICA (EUROPEIA)

Ao chegar na Europa, por diversos fatores geográficos, culturais e econômicos, a álgebra encontra um caminho fértil para o seu desenvolvimento, o que faz surgir em toda a região formas diversas de síntese e representação simbólica de problemas.

O Apêndice D traz um suporte necessário ao professor para que se possa abordar de maneira clara e concisa o início do período simbólico da álgebra. Deve-se ter atenção aqui em justificar aos alunos que o desafio desse período foi criar uma linguagem própria e unificada para a matemática, que possibilitasse o seu avanço em qualquer lugar do mundo, independente de cultura ou língua local. Além disso, a linguagem simbólica possibilitou uma maior abstração do problema e, consequentemente, o surgimento de métodos de resolução que não dependiam do contexto observado em cada caso.

As operações matemáticas se converteram em símbolos, o valor desconhecido virou uma letra (incógnita) e a relação de igualdade ficou representada pelo sinal de igual (=), dando origem ao que hoje chamamos de equação.

Retomando o problema 26 do papiro de Rhind, a epigrama 126 da Antologia Grega ou outro problema similar aos resolvidos na Aula 01, sugere-se relatar, em diálogo com os alunos, a passagem da forma sincopada para a simbólica, o que pode ser conferido no Quadro 13. Posteriormente, os estudantes podem, então, representar de forma simbólica os problemas tratados na Aula 01.

Quadro 13 - Forma simbólica do problema 26 do papiro de Rhind e da epigrama 126 da Antologia Grega

Problema 26 do papiro de Rhind na forma simbólica:

$$x + \frac{x}{4} = 15$$

Epigrama 126 do livro XIV da Antologia Grega (Diofanto) na forma simbólica:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Após a representação simbólica dos problemas da Aula 01 e da Aula 03, propõe-se conferir os resultados, explicando que, ao substituir a incógnita pelo valor encontrado na Aula 01, deve-se obter uma igualdade verdadeira, o que demonstrará que a solução está de fato correta. Pode-se contrapor também com resultados incorretos, que acarretarão em desigualdades ao serem substituídos nas equações.

Por fim, indica-se como tarefa, que os alunos reescrevam em forma simbólica algumas frases que estão em forma retórica, assim como traduzam equações na forma simbólica para a forma retórica, transitando entre estas que são as formas mais usuais. Alguns exemplos para essas abordagens são oferecidos nos exercícios 4 e 5 do Apêndice E, que compõem a avaliação final proposta na Aula 05.

Para dar continuidade a este trabalho, é importante que, após um enfoque mais aprofundado dos métodos de resolução de equações do 1º grau, seja dada aos alunos a oportunidade de solucionar a epigrama 126 e descobrir por quantos anos Diofanto viveu.

Cabe registrar que no Apêndice F há uma relação de trinta e quatro slides que poderão auxiliar no desenvolvimento das quatro primeiras aulas detalhadas na presente proposta de sequência didática. Nesses slides estão sintetizados os principais conceitos, ideias e exemplos abordados. Ademais, a disposição dos assuntos em relação ao tempo poderá sofrer ajustes a depender das dificuldades apontadas ao longo do trabalho em classe.

3.5 AULA 05 – AVALIAÇÃO FINAL

A proposta para a última aula é de uma avaliação (uma sugestão é trazida no Apêndice E) que possa aferir de algum modo a percepção dos alunos acerca do que fora estudado. Servirá também para enxergar as eventuais lacunas que ficaram, possibilitando ao professor uma readequação do seu fazer pedagógico a fim de preenchê-las.

Esta avaliação poderá ser composta por perguntas abertas, que permitirão ao professor observar a compreensão geral de temas sensíveis relacionados ao pensamento algébrico, à resolução de equações do 1º grau e aos períodos históricos estudados; e de perguntas fechadas, com respostas objetivas, que servirão para avaliar pontos pertinentes ao raciocínio indispensável à resolução de problemas e à sua respectiva representação simbólica.

Não será, porém, uma avaliação de cunho quantitativo. Seu enfoque principal, como conclusão da introdução ao estudo da álgebra, será observar se os alunos compreenderam os movimentos históricos que conduziram a humanidade na criação de uma linguagem matemática; se são capazes de perceber as vantagens e desvantagens de cada forma de solução de problemas; se conseguem estabelecer um paralelo entre as formas retórica e simbólica da álgebra; e se, desse paralelo, conseguem ler e interpretar uma equação em sua forma simbólica, inferindo os passos necessários para se chegar ao valor da incógnita mesmo que de forma não algébrica.

Após a avaliação, o trabalho se segue apresentando aos alunos formas algébricas (simbólicas) de resolução de uma equação do 1º grau, porém, independente do algoritmo utilizado, é importante que se estabeleça sempre um paralelo entre a forma retórica e a forma simbólica, isto é, evidenciando as semelhanças entre as duas formas de resolução. O Quadro 14 a seguir ilustra esse paralelo nos três primeiros problemas que constam no Apêndice A.

Quadro 14 - Solução retórica e solução algébrica (simbólica) de problemas

<table>
<tr><td colspan="2">Problema 1: “O peso de duas pedras iguais mais 17 quilogramas de areia totalizam 225 quilogramas. Deseja-se saber o peso de uma única pedra.”</td></tr>
<tr><td>Solução retórica:
1º - Retire 17 de 225
2º - Divida o resultado obtido por 2
3º - Cada pedra pesa 104 kg.</td><td>Solução algébrica: $2x + 17 = 225$
$2x + 17 - 17 = 225 - 17$
$2x/2 = 208/2$
$x = 104$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema 2: “Se alguém te diz que o triplo de uma quantidade subtraído 123 unidades resulta em 261, que quantidade é essa?”</td></tr>
<tr><td>Solução retórica:
1º - Adicione 123 em 261
2º - Divida o resultado obtido por 3
3º - A quantidade é 128.</td><td>Solução algébrica: $3x - 123 = 261$
$3x = 261 + 123$
$x = 384/3$
$x = 128$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema 3: “Metade do tempo para o crescimento do trigo adicionado a 118 dias equivale a 200 dias. Quanto tempo o trigo demora para crescer?”</td></tr>
<tr><td>Solução retórica:
1º - Subtraia 118 de 200
2º - Multiplique o resultado obtido por 2
3º - O trigo demora 164 dias para crescer.</td><td>Solução algébrica: $x/2 + 118 = 200$
$x/2 = 200 - 118$
$x = 2.82$
$x = 164$</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma breve análise dos relatórios de duas das mais importantes provas que medem o desempenho dos estudantes brasileiros, PISA e SAEB, leva-nos a concluir que existe uma grande defasagem no ensino-aprendizagem de matemática no Brasil. Disto, é sabido e amplamente divulgado que grande parte dos nossos alunos deixa a escola sem um conhecimento satisfatório da disciplina.

Não é possível, porém, apontar um único fator, ou um fator preponderante, que tenha maior influência no baixo desempenho dos alunos. Existe aí uma conjunção de fatores, que por vezes extrapolam os muros da escola, como problemas de ordem familiar, emocional ou afetiva. Contudo, levando em consideração alguma experiência em sala de aula, relatos de outros docentes, bem como dos próprios alunos, embora não seja possível precisar estes fatores, uma das situações na qual podemos intervir de alguma forma é a visível existência de uma barreira que separa os anos iniciais dos anos finais do Ensino Fundamental.

Nessa esteira, o campo da álgebra se insere a partir do 7º ano do Ensino Fundamental em sua forma mais abstrata como uma grande novidade a ser superada já no seu início, caso contrário, corre-se o risco de ampliar consideravelmente essa barreira, de tal forma que o desafio de transpô-la acabe por frustrar professores e alunos, arrastando-se pelo restante da vida escolar e estigmatizando ainda mais a disciplina de matemática.

Surge, portanto, diante do panorama apresentado, a necessidade de rever algumas práticas e abordagens metodológicas encampadas em sala de aula no estudo dessa unidade temática, a fim de favorecer uma aprendizagem significativa, que permita ao aluno estabelecer relações entre um conhecimento prévio e o novo conhecimento. Dessa necessidade, buscou-se com esse trabalho apresentar a história da álgebra como uma alternativa de introdução ao seu estudo, de modo mais específico, na abordagem das equações do 1º grau.

A forma como a álgebra se desenvolveu no seu princípio, de acordo com as descobertas mais antigas, dá ao professor em sala de aula a possibilidade de reconstruir junto dos alunos os passos dados pela humanidade, saindo de um raciocínio algébrico incipiente, ainda atrelado à aritmética e que, portanto, é próximo aos alunos; passando por uma simplificação na escrita de problemas por meio de síncopes; até chegar ao simbolismo algébrico atual, com seus sinais, números, letras e um elevado índice de abstração.

Explorar os movimentos históricos do desenvolvimento matemático da álgebra, os desafios e as motivações humanas que o desencadeou, permite que o aluno compreenda não só o seu surgimento – na criação dos símbolos ou na convenção de notações -, mas valorize e reconheça a importância deste campo do conhecimento no progresso da própria humanidade.

A história da matemática tem, portanto, uma utilidade muito prática, que deve ser sempre levada em consideração na formação de professores, não necessariamente para o seu uso em sala de aula, pois nem sempre a história de um conhecimento matemático precisará ser explicitada aos alunos - visto que o seu desenvolvimento não-linear, em meio a dificuldades e intempéries vivenciadas em cada tempo, local e cultura, pode não contribuir didaticamente para a realidade escolar -, mas é de grande valia que um professor de matemática a conheça, pois a gênese e o desenvolvimento de determinados entes matemáticos têm a capacidade de explicar nuances por vezes imperceptíveis aos professores, e que podem ser motivo de dúvidas e incompreensões por parte dos alunos.

Ainda como forma de fundamentar este trabalho, a teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel contribuiu substancialmente e tem muito a acrescentar no campo da matemática como um todo. Sua teoria fundamenta que é necessário aos professores buscar compreender com humildade a forma com que um aluno chega à sala de aula, levando em consideração todo o conhecimento já acumulado para construção de novos conhecimentos e admitindo que existem definições aparentemente triviais aos docentes, mas que aos estudantes podem não parecer tão claras, fazendo com que estes não encontrem pontos de ancoragem em sua estrutura cognitiva para esse novo conhecimento, o que tornará os processos de ensino e aprendizagem mais mecânicos e os conteúdos estudados menos relevantes e interessantes aos alunos.

É importante considerar que este trabalho não tem um fim em si mesmo, ou seja, não pretende sanar todas as dificuldades que o espaço escolar pode apresentar, nem resolver todas as dúvidas que se seguirão da unidade temática da álgebra. Como apontado ao final da metodologia proposta, por exemplo, para dar sequência ao estudo das equações será necessário que o professor explique aos alunos alguns métodos para resolução de equações, porém, esses métodos estarão amparados e em consonância com a história já apresentada. A maior contribuição deste trabalho, portanto, será em formar no imaginário dos alunos um ambiente favorável ao aprendizado de álgebra, que desvende aparentes mistérios, transponha a sua abstração e construa pontes na estrutura cognitiva capazes de facilitar o entendimento de certos algoritmos e manipulações algébricas.

Acerca do imaginário, para exemplificá-lo e demonstrar sua importância na formação humana como um todo e, em especial, para o campo da matemática, pode-se refletir sobre as dificuldades enfrentadas por um imaginário que não seja bem formado, sem experiências e vivências reais, que ambientem e instalem o aluno na realidade que o cerca e que signifiquem todo conhecimento aprendido. Essa realidade tão atual, das experiências virtuais e imateriais, da falta de leitura e do grande consumo de multimídia, que coloca as crianças e adolescentes de hoje em um ambiente imediatista, de respostas prontas e soluções fáceis, dificulta a leitura, interpretação e abstração adequada de situações e problemas que lhes são apresentados.

Na certeza de sua importância, é necessário, por fim, justificar a falta de relatos da aplicação da sequência didática proposta. Por ocasião da pandemia causada pela COVID-19 e de todas as incertezas e dúvidas quanto ao retorno e formato das aulas, o que poderia impactar na obtenção de resultados relevantes, capazes de descrever fidedignamente o trabalho realizado; bem como do tempo necessário aos trâmites para que se pudesse fazer toda a coleta e divulgação dos resultados da aplicação, que não se adequaria ao cronograma e desenvolvimento da disciplina na escola onde o autor atua; optou-se, portanto, por deixar a aplicação para trabalhos futuros.

Dessa aplicação, se pretenderá fazer uma coleta e análise de dados dentro de uma abordagem qualitativa ou, como propõe Erickson (1986, p. 119), interpretativa, possivelmente mais adequada ao estudo proposto face às abordagens puramente quantitativas, visto que, por ocorrer em um ambiente não controlado como a sala de aula e ter como alvo um número restrito de turmas e alunos (podendo reduzir-se até mesmo a uma única turma), a aplicação estará voltada mais para uma situação específica, de um evento particular (aula) com atores particulares (alunos), que ocorrerá naturalmente, isto é, sem um intervenções experimentais (ERICKSON, 1986, p. 121). Portanto, não convém uma análise de erros e acertos que possam ser traduzidos de forma estatística em gráficos, tabelas e apontamentos objetivos, mas sim inferências e ponderações compiladas em um relatório e baseadas em observações, acompanhadas de registros dos principais acontecimentos, dentre os quais podem ser incluídos alguns apontamentos pertinentes dos alunos feitos oralmente (dúvidas, comentários, ressalvas, imprecisões etc.) e resultados obtidos nas atividades escritas, permitindo conhecer mais profundamente o ambiente em questão e, apenas em partes, possibilitando uma generalização das análises feitas. Os resultados obtidos poderão ser divulgados em um artigo e/ou apresentados em eventos que destacam Metodologias e Tendências no Ensino de Matemática.

REFERÊNCIAS

ALEXANDRIA, Diofanto de; TANNERY, Paul. **Diophanti Alexandrini Opera Omnia**: cum graecis commentariis. Leipzig: B.G. Teubner, 1893. 481 p.

AUSUBEL, David Paul; NOVAK, Joseph Donald; HANESIAN, Helen. **Educational psychology**: a cognitive view. 2d ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1978.

BAUMGART, John K.. **História da álgebra**. São Paulo: Atual, 1992. 112 p. (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula; v. 4). Tradução de: Hygino H. Domingues.

BEZERRA, Aquiles Rocha Lira. **Ensino de álgebra**: uso da linguagem e do pensamento algébrico como ferramenta de aprendizagem na educação básica. 2016. 61 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fundação Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2016.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C.. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012. Tradução de: Helena Castro.

BRASIL. INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Relatório Brasil no PISA 2018**. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2020. 185 p. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/documents/186968/484421/RELAT%C3%93RIO+BRASIL+NO+PISA+2018/3e89677c-221c-4fa4-91ee-08a48818604c?version=1.0. Acesso em: 18 dez. 2020.

BRASIL. INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Relatório SAEB 2017**. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2019. 162 p. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/documents/186968/484421/Relat%C3%B3rio+Saeb+2017/e683ba93-d9ac-4c2c-8f36-10493e99f9b7?version=1.0. Acesso em: 18 dez. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 26 dez. 2020.

CAJORI, Florian. **A history of mathematical notations**: two volumes bound as one. New York: Dover Publications, 1993.

CARDANO, Girolamo. **Hieronymi Cardani mediolanensis opera omnia, t. 4, quo continentur arithmetica, geometrica, musica**. Lugduni: Ioannis Antonii Huguetan & Marci Antonii Ravaud, 1663.

CHACE, Arnold Buffum. **The Rhind Mathematical Papyrus**: photographic facsimile, hieroglyphic transcription, transliteration, literal translation, free translation, mathematical commentary, and bibliography. Oberlin: Mathematical Association Of America, 1927. 210 p.

COELHO, Flávio Ulhoa; AGUIAR, Marcia. **A história da álgebra e o pensamento algébrico**: correlações com o ensino. Estudos Avançados, São Paulo, v. 32, n. 94, p. 171-187, dez. 2018. FapUNIFESP (SciELO). http://dx.doi.org/10.1590/s0103-40142018.3294.0013. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-40142018000300171&lng=pt&nrm=iso. Acesso em: 15 dez. 2020.

DESCARTES, René. **Discours de la methode pour bien conduire sa raison, & chercher la vérité dans les sciences**. Leiden: Ian Maire, 1637.

ERICKSON, Frederick. Qualitative methods in research on teaching. In: WITTROCK, M. C.; AMERICAN EDUCATIONAL RESEARCH ASSOCIATION (org.). **Handbook of research on teaching**. 3rd ed. New York: Macmillan, 1986, p. 119–161.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. 848 p. Tradução de: Hygino H. Domingues.

FREITAS, Marcos Agostinho de. **Equação do 1º grau**: métodos de resolução e análise de erros no ensino médio. 2002. 144 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2002.

HETTLE, Cyrus. The Symbolic and Mathematical Influence of Diophantus's Arithmetica. **Journal of Humanistic Mathematics**, Claremont, v. 5, n. 1, p. 139–166, jan. 2015. Disponível em: https://scholarship.claremont.edu/jhm/vol5/iss1/8. Acesso em: 06 ago. 2021.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (Brasil). Maria Inês Fini. Portaria nº 447, de 24 de maio de 2017. Estabelece diretrizes para o planejamento e a operacionalização do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) no ano de 2017. **Diário Oficial da União**: Seção 1, Brasília, DF: Imprensa Nacional, ano 154, n. 99, p. 21-22, 25 maio 2017. Disponível em: https://pesquisa.in.gov.br/imprensa/jsp/visualiza/index.jsp?data=25/05/2017&jornal=1&pagina=1&totalArquivos=304. Acesso em: 27 dez. 2020.

JESUS, Carlos A. Martins de (org.). **Antologia Grega**: epigramas vários (livros iv, xiii, xiv, xv). [S.L.]: Imprensa da Universidade de Coimbra, 2017. (Autores Gregos e Latinos). Disponível em: https://digitalis-dsp.uc.pt/bitstream/10316.2/43284/1/Antologia%20Grega.%20Epigramas%20varios.pdf. Acesso em: 26 jan. 2021.

JOSEPH, George Gheverghese. **The crest of the peacock**: non-European roots of mathematics. 3rd ed. Princeton: Princeton University Press, 2011.

KIERAN, Carolyn; PANG, JeongSuk; SCHIFTER, Deborah; et al. **Early Algebra**: Research into its Nature, its Learning, its Teaching. Cham: Springer International Publishing, 2016. (ICME-13 Topical Surveys). Disponível em: http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-32258-2. Acesso em: 27 dez. 2020.

LOPES, Lidiane Schimitz; FERREIRA, André Luis Andrejew. Um olhar sobre a história nas aulas de matemática - DOI 10.5752/P.2316-9451.2013v2n1p75. **Abakós**, v. 2, n. 1, p. 75-88, 30 nov. 2013.

MARCHAND, Patricia; BEDNARZ, Nadine. L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. **Bulletin Amq**, Québec, v. 39, n. 4, p. 30-42, dez. 1999. Trimestral. Disponível em: https://www.amq.math.ca/ancien/archives/1999/4/1999-4-part0.pdf. Acesso em: 27 dez. 2020.

MENDES, Iran Abreu; CHAQUIAM, Miguel. **História nas aulas de Matemática**: fundamentos e sugestões. Belém: Sbhmat, 2016. 124 p.

MOREIRA, Marco Antônio; MASINI, Elcie F. Salzano. **Aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982. 112 p.

MOURA, Anna Regina Lanner de; SOUSA, Maria do Carmo de. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 13, n. 2, p. 11–46, 2009. DOI: 10.20396/zet.v13i24.8646987. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646987. Acesso em: 2 jan. 2021.

ORGANIZAÇÃO PARA COOPERAÇÃO E DESENVOLVIMENTO ECONÔMICO (OCDE). **Main survey school sampling preparation manual**: overview. Paris: OCDE, 2017. Disponível em: https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/MAIN-SURVEY-SCHOOL-SAMPLING-PREPARATION-MANUAL.pdf. Acesso em: 18 jan. 2021.

PEREIRA, Arminda Manuela Queimado. **Equações Algébricas**: alguns episódios históricos. 2017. 86 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Matemática Para Professores, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2017.

RECORDE, Robert. **The whetstone of witte, whiche is the seconde parte of Arithmetike: containyng thextraction of Rootes: The Coßike practise, with the rule of Equation: and the woorkes of Surde Nombers**. Londres: John Kingston, 1557.

ROQUE, Tatiana. Desmascarando a equação. A história no ensino de que matemática? **Revista Brasileira de História da Ciência**, Rio de Janeiro, v. 7, n. 2, p. 167-168, jul. 2014. Semestral.

SANTANA, Agnaldo Silva. **Iniciação do estudo da álgebra no ensino fundamental por meio da resolução de problemas**. 2019. 70 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2019.

SERTILLANGES, Antonin-Dalmace. **A vida intelectual**: seu espírito, suas condições, seus métodos. Campinas, Sp: Kírion, 2019. 217 p. Tradução de: Roberto Mallet.

SHARMA, Ram Swarup (ed.). **Brahma-Sphuta-Siddhanta**: with vasana, virjnana and hindi commentaries. Nova Délhi: Indian Institute Of Astronomical And Sanskrit Research, 1966. (V. 1).

SÍNCOPE. In: DICIONÁRIO Caldas Aulete. [S.l.]: Lexikon Editora Digital, 2020. Disponível em: http://www.aulete.com.br/s%C3%ADncope. Acesso em: 31 dez. 2020.

SOARES, José Flavio de Castro. **Erros comuns dos estudantes em álgebra**. 2019. 83 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2019.

VAILATI, Janete de Souza; PACHECO, Edilson Roberto. **Usando a história da matemática no ensino da álgebra**. Curitiba: Secretaria do Estado de educação, 2011. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/702-4.pdf. Acesso em: 6 jan. 2021.

VIANNA, Carlos Roberto. Usos Didáticos Para a História da Matemática. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, I., 1998, Recife. **Anais [...]**. (org.) Fernando Raul Neto. Recife: SBHMat, 1998. p. 65-79.

VIÈTE, François. **Francisci Vieta Opera Mathematica, in unum volumen congesta, ac recognita.** Leiden: Ex officina Bonaventurae & Abrahami Elzevirorum, 1646.

VAN DER WAERDEN, Bartel Leenert. **A History of Algebra**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1985. Disponível em: http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-51599-6. Acesso em: 3 jan. 2021.

APÊNDICE A – Problemas de estrutura algébrica

Problema 1: “O peso de duas pedras iguais mais 17 quilogramas de areia totalizam 225 quilogramas. Deseja-se saber o peso de uma única pedra.”;

Problema 2: “Se alguém te diz que o triplo de uma quantidade subtraído 123 unidades resulta em 261, que quantidade é essa?”;

Problema 3: “Metade do tempo para o crescimento do trigo adicionado a 118 dias equivale a 200 dias. Quanto tempo o trigo demora para crescer?”;

Problema 4: “Para a criação de gado basta-me um terreno retangular cuja uma volta ao seu redor meça 110 metros e que seu lado maior exceda em 5 metros o seu lado menor. Dá-me a medida do lado menor.”;

Problema 5: “Em uma balança de dois pratos foram colocadas duas sacas de farinha e 3 pesos de 2 kg atingindo o peso de 40 kg de carne seca. Qual é o peso de cada saca de farinha?”;

Problema 6: “De uma criação de bois, após um grande período de estiagem, sobrou apenas a quinta parte da quantidade inicial, da qual o dono da criação ainda vendeu 7 bois. Sabendo que após a venda sobraram 20 cabeças de gado, qual era a quantidade inicial de bois?”;

Problema 7: “Um astrônomo observando dois astros que orbitavam Marte calculou que o tempo necessário para um deles dar uma volta completa no planeta era doze vezes maior do que o tempo necessário ao segundo, e que a soma dos dois períodos era de aproximadamente 143 horas. Determine quanto tempo cada astro demora para completar uma volta ao redor de Marte.”

APÊNDICE B – História da Álgebra: Álgebra Retórica

Ao final da Idade da Pedra, durante o período Neolítico, também chamado de Idade da Pedra Polida, por volta de 3000 a.C., diante de mudanças climáticas que aconteciam na época, fazendo avançar desertos na África, no Oriente Médio e na Ásia Central, o homem se viu na necessidade de ocupar regiões ao redor de rios e lagos e ali permanecer.

Povos nômades que antes viviam de região em região, caçando e colhendo o que era possível, começaram a levar uma vida sedentária, acumulando-se em pequenos povoados. A alta densidade populacional dessas aldeias e vilas, aliada à produção de instrumentos agrícolas e de caça mais eficientes - forjados em bronze e, posteriormente, em ferro - fez emergir uma agricultura intensiva, com técnicas de cultivo que permitiram alimentar a população sem a necessidade de ir em busca de alimento.

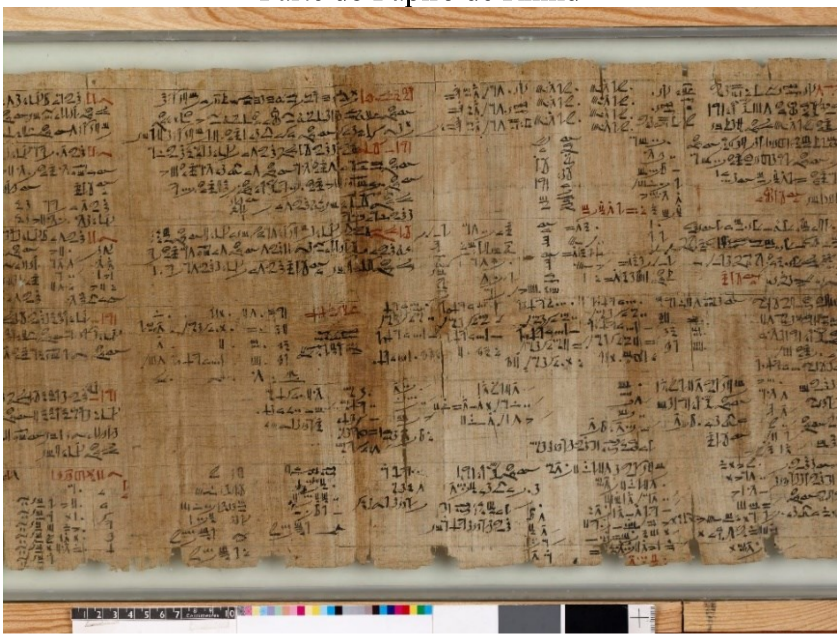
Surgiram, então, novas sociedades ditas sedentárias, baseadas na economia agrícola, e que se concentravam nos vales dos rios Nilo, Amarelo, Indo e Tigre e Eufrates. Duas das civilizações que surgiram durante esse período foram a egípcia e a babilônica.

As necessidades de plantio, construção e comunicação que vieram desse novo estilo de vida motivaram a criação de formas de escrita; técnicas de trabalho com metais; construção de cidades; desenvolvimento empírico, ou seja, a partir da prática, da matemática básica da agrimensura, da engenharia e do comércio. O sedentarismo proporcionou também a ascensão de classes superiores, isto é, como não havia a necessidade de que todos os homens se dedicassem a trabalhos manuais, por conta dos avanços tecnológicos, alguns homens tinham tempo para lazer, e se dedicavam a conhecer os mistérios da natureza e das ciências.

A principal fonte que se tem registro atualmente sobre o desenvolvimento da matemática no Egito antigo é o Papiro de Rhind (ou Ahmes, como homenagem ao escriba que o copiou por volta de 1650 a.C.). Redigido na escrita hierática, este papiro traz problemas matemáticos envolvendo questões práticas sobre, por exemplo, "o quão substanciosos eram o pão e a cerveja, sobre balanceamento de rações para gado e aves domésticas e sobre armazenamento de grãos" (EVES, 2011, p. 73), os quais a resolução corresponde a encontrar valores desconhecidos.

Para exemplificar, o problema 26 do Papiro de Rhind conforme Chace (1927, p. 68, tradução nossa) questiona: "Uma quantidade e seu 1/4 somados tornam-se 15. Qual é essa quantidade?". Uma forma de resolução era proposta e descrita passo a passo, como uma receita de bolo, a qual chamaremos de "forma retórica".

Parte do Papiro de Rhind



Fonte: The British Museu. Disponível em: https://www.britishmuseum.org/collection/image/766075001. Acesso em: 25 jan. 2021.

Segundo alguns historiadores, porém, a matemática babilônica era mais sofisticada que a egípcia, possuía melhores métodos e uma variedade maior de problemas resolvidos, provavelmente por sua civilização ser economicamente mais avançada.

Os registros da álgebra babilônica foram encontrados em escrita cuneiforme, em tábulas de argila que remontam ao tempo do rei Hammurabi, por volta de 1700 a.C.

Sobre a escrita cuneiforme, Boyer e Merzbach (2012, p. 40) indicam que

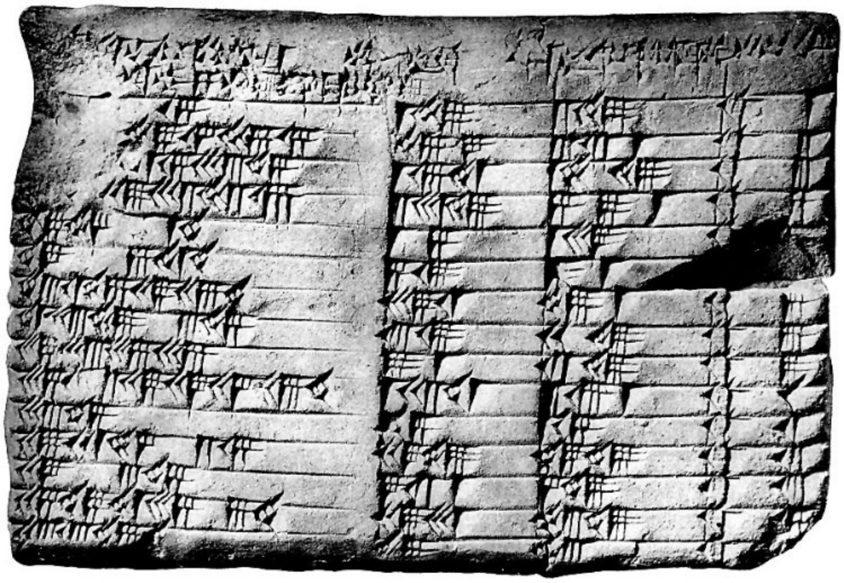
> Leis, registros de impostos, estórias, lições de escola, cartas pessoais — tais coisas e muitas outras eram entalhadas em tábuas de barro mole com um estilete, e as tábuas eram então cozidas ao sol ou em fornos. Tais documentos escritos, felizmente, eram muito menos vulneráveis aos estragos do tempo que os papiros egípcios; por isso se dispõe hoje de muito mais documentação sobre a matemática da Mesopotâmia que sobre a do Egito.

Eves (2011) registra que já foram desenterrados, desde antes da metade do século XIX, mais de meio milhão de tábulas, das quais 400 foram identificadas como sendo de cunho unicamente matemático, com tabelas e listas de problemas.

Dentre as tabelas estão "tabelas de recíprocos, de cubos, de multiplicação, de raízes quadradas, de raízes cúbicas, tabelas de conversão de unidades de comprimento, peso, superfície, volume" (PEREIRA, 2017, p. 14), dentre outras, que auxiliavam na resolução dos problemas.

Um exemplo de problema matemático desse período, que foi encontrado nas escavações de Tell Harmal em 1949, dizia o seguinte: “Se alguém perguntar a você assim: Se eu adicionar aos dois terços dos meus dois terços cem unidades de cevada, a quantidade original é obtida. Qual é a quantidade original?”

Tábula Babilônica “Plimpton 322”



Fonte: The University of British Columbia. Disponível em: http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/322.jpg. Acesso em: 30 dez. 2020.

Referências:

BAUMGART, John K.. **História da álgebra**. São Paulo: Atual, 1992. 112 p. (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula; v. 4). Tradução de: Hygino H. Domingues.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C.. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012. Tradução de: Helena Castro.

CHACE, Arnold Buffum. **The Rhind Mathematical Papyrus**: photographic facsimile, hieroglyphic transcription, transliteration, literal translation, free translation, mathematical commentary, and bibliography. Oberlin: Mathematical Association Of America, 1927. 210 p.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. 848 p. Tradução de: Hygino H. Domingues.

PEREIRA, Arminda Manuela Queimado. **Equações Algébricas**: alguns episódios históricos. 2017. 86 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Matemática Para Professores, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2017.

APÊNDICE C – História da Álgebra: Álgebra Sincopada

Dois matemáticos, em tempos diferentes e em lugares diferentes se esforçaram para achar uma forma mais simplificada de representar problemas onde se deseja encontrar um valor desconhecido: Diofanto de Alexandria e Brahmagupta. Eles atuaram no desenvolvimento do que denominamos atualmente por forma "sincopada".

A palavra "sincopada" vem do termo "síncope", que significa: "Eliminação de fonemas no interior de uma palavra" (SÍNCOPE, 2020). Ou seja, era uma forma de escrever os problemas de maneira mais simples, abreviando palavras e expressões matemáticas, quantidades e operações.

Até onde se tem conhecimento, um dos primeiros a propor essa simplificação na escrita dos problemas foi o matemático grego Diofanto de Alexandria. Pouco se sabe sobre ele, e uma das únicas informações encontradas é uma epigrama que descreve a sua trajetória de vida, do nascimento à morte, gravada em seu túmulo:

> Este túmulo guarda Diofanto. Ó maravilha imensa!
> O túmulo com astúcia conta a duração da sua vida.
> A sexta parte da sua vida, o deus permitiu-lhe ser criança;
> um doze avos da vida depois, a primeira barba cresceu;
> uma sétima parte depois, acendeu nele o fogo do himeneu,
> que ao quinto ano de casado lhe concedeu um filho.
> Ah, infeliz filho tão amado! Ao atingir metade da idade
> com que morreria seu pai, queimou-se o seu corpo frio.
> Ao cabo de quatro anos a enganar a sua dor com o estudo
> dos números, encontrou enfim o cabo dos seus dias. (JESUS, 2017, p. 110-111)

Estima-se que ele viveu no século III d.C., tendo estudado e trabalhado na mesma universidade onde outro grande matemático grego, Euclides, ensinara: a Universidade de Alexandria, situada na cidade de Alexandria, ao norte do Egito, berço da maioria dos intelectuais da época.

Durante esse período, a Grécia e o Egito faziam parte do Império Romano, que, embora tivesse domínio sobre estas regiões, tinha um profundo apreço pela cultura grega, a qual continuou a se desenvolver, se integrando à própria cultura romana e dando origem ao que hoje é conhecido por cultura Greco-Romana.

Na obra "Aritmética" de Diofanto, encontramos em seu livro 1 um problema em que é proposto que um número teria sido partido em dois outros números diferentes, em que a soma destes dois números resultaria em 100, e sua diferença seria 40. O objetivo era encontrar estes dois valores.

Problema I do livro 1 da obra "Aritmética" de Diofanto

Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ.

Ἔστω δὴ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ ρ̄, ἡ δὲ ὑπεροχὴ Μ̊ μ̄. εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς.

Τετάχθω ὁ ἐλάσσων ϛ ᾱ· ὁ ἄρα μείζων ἔσται ϛ ᾱ Μ̊ μ̄· συναμφότεροι ἄρα γίνονται ϛ β̄ Μ̊ μ̄· δέδονται δὲ Μ̊ ρ̄.

Μ ἄρα ρ̄ ἴσαι εἰσὶν ϛ β̄ Μ̊ μ̄.

καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. ἀφαιρῶ ἀπὸ τῶν ρ̄, Μ̊ μ̄, [καὶ ⟨ἀπὸ⟩ τῶν β̄ ἀριθμῶν καὶ τῶν μ̄ μονάδων ὁμοίως μονάδας μ̄·] λοιποὶ ϛ β̄ ἴσοι Μ̊ ξ̄. ἕκαστος ἄρα γίνεται ϛ, Μ̊ λ̄.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων Μ̊ λ̄, ὁ δὲ μείζων Μ̊ ō, καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

Fonte: Alexandria e Tannery (1893, p. 16)

Para compreender como funcionava esse método sincopado proposto por Diofanto, vamos pensar em algumas abreviações na língua portuguesa que podemos utilizar para representar as operações que aparecem no problema. Podemos adotar a abreviação “num” para o número desconhecido, “ad” para adição, “sub” para subtração, “mult” para multiplicação, “div” para divisão e “igual” para a igualdade.

O problema, portanto, pede que encontremos dois números cuja soma entre eles é 100 e a diferença é 40. Essa última informação, de que a diferença entre eles é 40, nos permite concluir que um é 40 unidades maior que o outro, ou seja, se chamarmos o número menor de “num” – pois é um dos valores que queremos encontrar – poderemos chamar o outro valor de “num ad 40”, isto é, o número anterior somado com 40. Como a soma entre eles é 100, concluímos de forma sincopada que “num ad num ad 40 igual 100”.

É algo parecido com isso que Diofanto traz em seu livro no recorte mostrado abaixo:

Equação escrita na forma sincopada de Diofanto

Μ ἄρα ρ̄ ἴσαι εἰσὶν ϛ β̄ Μ̊ μ̄.

Fonte: Alexandria e Tannery (1893, p. 16)

Você consegue descobrir qual é esse número que somado com ele mesmo e somado com 40 resulta em 100?

Por volta do século VII d.C., começou a se desenvolver na Índia uma nova forma de álgebra sincopada, com o matemático Brahmagupta.

Ao que se parece, segundo Baumgart (1992, p. 10), os hindus conheciam muito da matemática babilônica e grega, o que facilitou o desenvolvimento de seus próprios métodos de resolução e estrutura da matemática.

Brahmagupta deu um nome para este tipo de problema onde se tem uma igualdade e se deseja descobrir um valor, chamando-o de *samakarana*, que em uma tradução literal significa “tornar igual”, ou simplesmente *sama*, que significa “igual” ou “equação”.

Os problemas eram escritos na língua sânscrita e em versos, como em um poema, como podemos ver na obra *Brahma-Sphuta Siddhanta* (Doutrina de Brahma Corretamente Estabelecida) de Brahmagupta, e grande parte deles se ocupavam em falar sobre astronomia.

Referências:

ALEXANDRIA, Diofanto de; TANNERY, Paul. **Diophanti Alexandrini Opera Omnia**: cum graecis commentariis. Leipzig: B.G. Teubner, 1893. 481 p.

BAUMGART, John K.. **História da álgebra**. São Paulo: Atual, 1992. 112 p. (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula; v. 4). Tradução de: Hygino H. Domingues.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. 848 p. Tradução de: Hygino H. Domingues.

JESUS, Carlos A. Martins de (org.). **Antologia Grega**: epigramas vários (livros iv, xiii, xiv, xv). [S.L.]: Imprensa da Universidade de Coimbra, 2017. (Autores Gregos e Latinos). Disponível em: https://digitalis-dsp.uc.pt/bitstream/10316.2/43284/1/Antologia%20Grega.%20Epigramas%20varios.pdf. Acesso em: 26 jan. 2021.

SHARMA, Ram Swarup (ed.). **Brahma-Sphuta-Siddhanta**: with vasana, virjnana and hindi commentaries. Nova Délhi: Indian Institute Of Astronomical And Sanskrit Research, 1966. (V. 1).

SÍNCOPE. In: DICIONÁRIO Caldas Aulete. [S.l.]: Lexikon Editora Digital, 2020. Disponível em: http://www.aulete.com.br/s%C3%ADncope. Acesso em: 31 dez. 2020.

APÊNDICE D – História da Álgebra: Álgebra Simbólica

No começo do século XI, onde se inicia o período denominado por Baixa Idade Média, todo esse conhecimento babilônico, egípcio, hindu, grego, árabe, começou a adentrar a Europa por meio de traduções feitas para o latim.

Durante esse período, alavancada pelo aumento populacional, a economia ressurge na Europa. Viagens comerciais começam a ser feitas com mais frequência, proporcionando também uma troca de conhecimentos entre diferentes povos.

Um desses viajantes foi Leonardo de Pisa, também conhecido pelo nome Fibonacci, uma forma encurtada para "*filio Bonacci*" (filho de Bonacci), em referência à sua família.

Filho de pai mercador e comerciante, Fibonacci desde muito cedo demonstrou interesse pela matemática. Por conta disso, em suas viagens, entrando em contato com outras culturas, buscava sempre conhecer os procedimentos matemáticos de cada região.

Dessas viagens e trocas de conhecimento, Fibonacci escreveu a obra *Liber Abbaci* ou "Livro do Cálculo", na qual, segundo van der Waerden (1985, p. 35), tratou de divulgar o uso dos algarismos indo-arábicos, demonstrando regras sobre as operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão, inclusive envolvendo cálculos com frações; apresentava também resultados úteis aos comerciantes, com problemas relacionados a transações comerciais, como o cálculo do preço de produtos (margem de lucro), juros, troca de dinheiro, conversão de pesos e medidas; e, em seus capítulos finais, dispôs de problemas ligados ao campo da geometria e da álgebra.

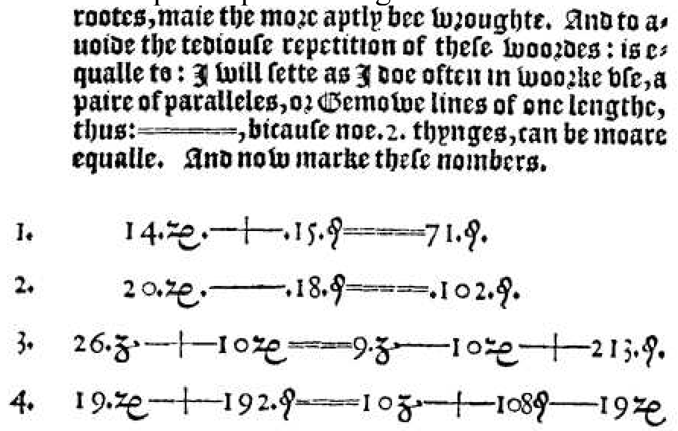
Após Fibonacci, muitos outros matemáticos surgiram na Europa, e um de seus esforços mais importantes estava voltado por desenvolver um simbolismo que pudesse unificar toda a matemática, como se fosse uma linguagem própria, que pudesse ser interpretada e entendida em qualquer lugar do mundo e em qualquer tempo, possibilitando seus avanços e descobertas.

Essa linguagem simbólica possibilitaria também uma simplificação maior dos problemas e, consequentemente, o surgimento de métodos de resolução mais rápidos e eficazes, que não dependessem do contexto de cada situação.

Entre estes autores encontramos, na Alemanha, Iohann Widman, que concebeu a obra *Behende und hüpsche Rechnung auff allen Kauffmanschafft* (Cálculo ágil e bonito em todas as profissões, 1489), tida como "a primeira aritmética impressa a conter os sinais de mais (+) e menos (-)" (CAJORI, 1993, p. 128, tradução nossa).

Uma proposta de sinal de igual (=), similar ao que usamos atualmente, apareceu pela primeira vez na obra de Robert Recorde. Nos primeiros parágrafos do capítulo de um de seus livros sobre equações, o autor propõe: "[...] para esquecer a tediosa repetição destas palavras: é igual a: vou definir um par de paralelas, ou linhas iguais de um mesmo comprimento, assim: =====, porque não existem duas coisas que podem ser mais iguais" (RECORDE, 1557, p. 238, tradução nossa), ao que se segue de exemplos para o seu uso, conforme a figura abaixo:

Símbolo para representar igualdade em Recorde


rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to a-uoide the tediouse repetition of these woordes : is e-qualle to : I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =====, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

1. 14.ze.—+—.15.ꝭ=====71.ꝭ.
2. 20.ze.——.18.ꝭ=====.102.ꝭ.
3. 26.ʒ.—+—10ze=====9.ʒ——10ze—+—213.ꝭ.
4. 19.ze—+—192.ꝭ=====10ʒ—+—108ꝭ——19ze

Fonte: Recorde (1557, p. 238)

Citado por Eves (2011, p. 308) como "o maior matemático francês do século XVI" e por Baumgart (1992, p. 14) como "o divisor de águas do pensamento algébrico", François Viète, em seu trabalho intitulado *Isagoge in artem analyticen* (Introdução às artes analíticas), também deixou sua grande contribuição para o simbolismo matemático. Nas equações, que traduziam matematicamente os problemas que envolviam a descoberta de um valor, Viète representava esse número desconhecido pela letra *N* (*numerus*), e quando um outro número estivesse multiplicando esta quantidade desconhecida, ele o escrevia à esquerda de *N*, sem utilizar um símbolo para multiplicação. Desta forma, para exemplificar, o problema: "Qual é o número cujo seu dobro somado com 6 resulta em 40?", seria representado por Viète da seguinte maneira: 2N + 6 igual a 40 (veja que Viète ainda não assimilava o símbolo de igual criado por Recorde).

Após Viète, muitos outros matemáticos contribuíram com a criação de símbolos até que se chegasse à forma atual, porém, é em René Descartes que as principais mudanças são observadas no que hoje chamamos de **álgebra**.

Definição de álgebra

Ramo da matemática que constitui uma extensão da aritmética, e utiliza letras (variáveis e incógnitas) e outros símbolos (sinais) para representar números, operações e valores, de modo a estudar combinações de operações aritméticas e soluções gerais para problemas numéricos diversos.

Fonte: Dicionário Online Caldas Aulete. Disponível em: https://www.aulete.com.br/%C3%A1lgebra. Acesso em: 10 maio 2021. Adaptado pelo autor (2021).

Uma das principais mudanças adotadas por René Descartes, que pode ser observada em *La géométrie* (A geometria) - parte da obra *Discours de la Méthode* (Discurso sobre o método) publicada em 1637 -, está no uso de letras minúsculas para representar valores desconhecidos. Mais especificamente, ele utilizava as últimas letras do alfabeto para representar as incógnitas de um problema, ou seja, os valores desconhecidos. Ainda hoje, a letra x (xis minúsculo) é a mais utilizada para simbolizar um número ou quantidade desconhecida, e é daí também que vem uma das explicações para a expressão: "o x da questão", utilizada para indicar o ponto central de uma ideia, ou seja, algo que se encontrou ou que se deseja encontrar.

Retomando de forma resumida o problema I do livro 1 da obra "Aritmética" de Diofanto, tratado no Apêndice C, no qual devemos determinar quais são os números cuja soma é 100 e a diferença é 40, podemos representá-lo na linguagem matemática atual da seguinte maneira:

Chamando o número menor de x, e sabendo que o outro número é 40 unidades maior, poderemos chamar este segundo de $x + 40$. Uma vez que a soma entre eles é 100, podemos escrever a equação:

$$x + x + 40 = 100.$$

Veja que $x + x$, ou seja, um número somado com ele mesmo, pode ser representado em forma de multiplicação como sendo o dobro do número, ou seja, duas vezes o x, que será representado por $2x$. Assim, podemos reescrever a equação como sendo:

$$2x + 40 = 100.$$

Ou seja, devemos determinar qual é o número cujo dobro somado a 40 é igual a 100. Esse número será o menor que estamos procurando. Para encontrar o segundo número e solucionar o problema, basta somarmos 40 ao primeiro número, visto que aquele é 40 unidades maior que este.

Como curiosidade, de Fibonacci até os dias atuais, diversas simbologias foram propostas e modificadas, e a própria história, por meio de seus atores, foi sendo capaz de selecionar as melhores formas de dispor algebricamente pensamentos e resolver problemas. Veja na tabela abaixo como alguns matemáticos dos séculos XVI e XVII representariam a equação

$$2x + 40 = 100:$$

Representação da equação *2x + 40 = 100* por matemáticos dos séculos XVI e XVII

Matemático (Ano)	**Representação**
Cardano (1545)	*2 rebus* $\bar{p}$ *40 aequalis 100*
Viète (1591)	*2N + 40 aequatur 100*
Harriot (1631)	*2 . a + 40 ==== 100*
Descartes (1637)	$2x + 40 \propto 100$
Wallis (1693)	*2x + 40 = 100*

Fonte: Elaborado pelo autor (2021) baseado em Baumgart (1992, p. 12 – 13)

Referências:

BAUMGART, John K.. **História da álgebra**. São Paulo: Atual, 1992. 112 p. (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula; v. 4). Tradução de: Hygino H. Domingues.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C.. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012. Tradução de: Helena Castro.

CAJORI, Florian. **A history of mathematical notations**: two volumes bound as one. New York: Dover Publications, 1993.

DESCARTES, René. **Discours de la methode pour bien conduire sa raison, & chercher la vérité dans les sciences**. Leiden: Ian Maire, 1637.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. 848 p. Tradução de: Hygino H. Domingues.

RECORDE, Robert. **The whetstone of witte, whiche is the seconde parte of Arithmetike: containyng thextraction of Rootes: The Coßike practise, with the rule of Equation: and the woorkes of Surde Nombers**. Londres: John Kingston, 1557.

VIÈTE, François. **Francisci Vieta Opera Mathematica, in unum volumen congesta, ac recognita.** Leiden: Ex officina Bonaventurae & Abrahami Elzevirorum, 1646.

APÊNDICE E – Atividade avaliativa

1) O que é uma equação? Quais são as características principais de um problema que nos permitem usar equações para a sua resolução?

2) Os povos babilônicos e egípcios costumavam resolver os problemas por escrito, de maneira retórica, quais eram as vantagens e desvantagens desse tipo de representação e resolução?

3) O simbolismo matemático despontou na Europa durante os séculos XVI e XVII. Quais foram os motivos que levaram os matemáticos deste tempo a criar essa linguagem simbólica para a representação de problemas? Quais foram as vantagens e desvantagens deste método?

4) Descubra o valor desconhecido em cada situação abaixo e, em seguida, tente reescrevê-las usando somente linguagem algébrica (simbólica).

a) O triplo de um número somado a doze resulta em trinta e três.

b) Uma quantidade multiplicada por cinco e subtraído quinze é igual a quarenta

c) A metade de um valor acrescida de dezesseis equivale a vinte e nove.

5) Reescreva as equações, que estão em linguagem algébrica (simbólica), de forma retórica, ou seja, usando linguagem usual. Em seguida, encontre o valor desconhecido.

a) $2x + 40 = 100$ **b)** $4x - 24 = 80$ **c)** $x : 3 + 12 = 9$

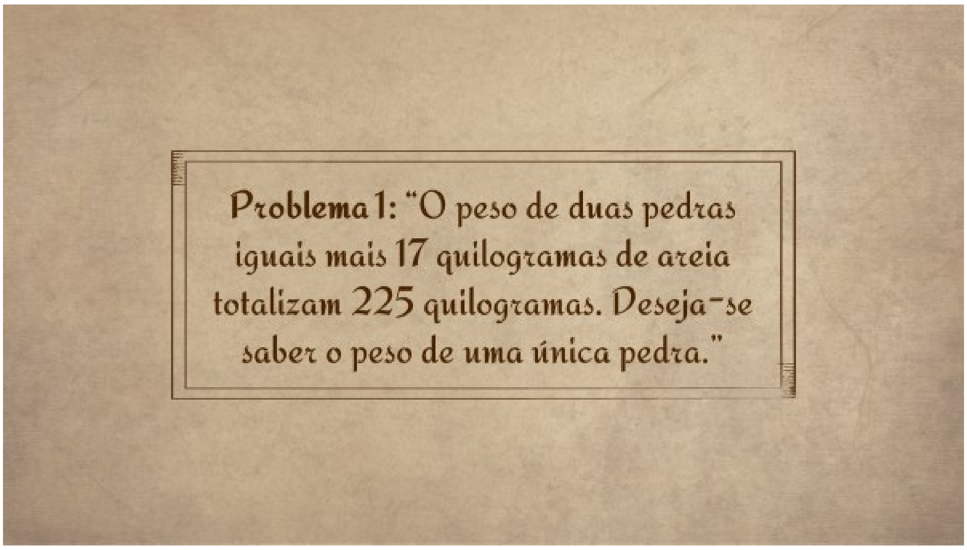
6) Leia com atenção os problemas a seguir e para cada um deles determine o que se quer descobrir e qual é a relação de igualdade existente. Por fim, busque escrevê-los de forma simbólica, ou seja, em forma de equação.

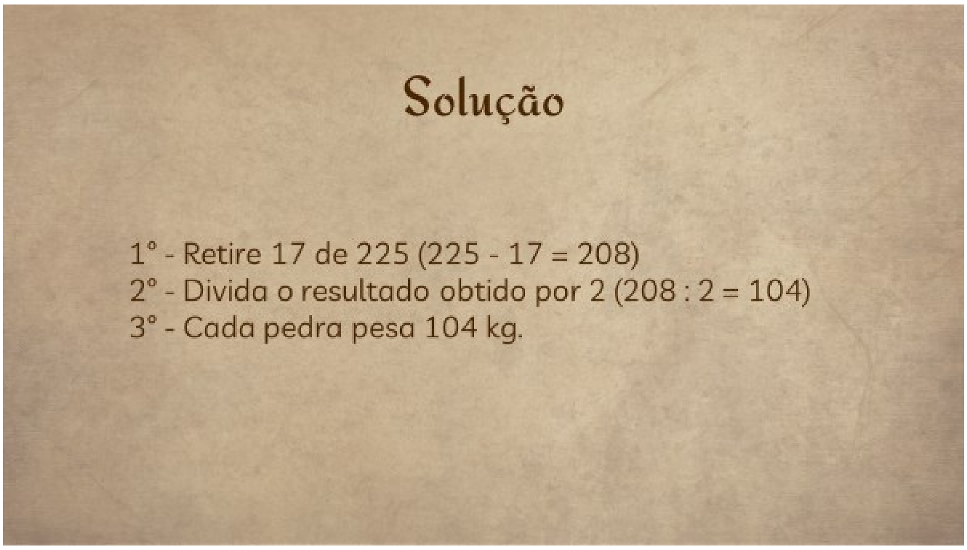
a) Em uma balança de dois pratos foram colocadas duas sacas de farinha e 3 pesos de 2 kg atingindo o peso de 40 kg de carne seca. Qual é o peso de cada saca de farinha?

b) De uma criação de bois, após um grande período de estiagem, sobrou apenas a quinta parte da quantidade inicial, da qual o dono da criação ainda vendeu 7 bois. Sabendo que após a venda sobraram 20 cabeças de gado, qual era a quantidade inicial de bois?

c) Para a criação de gado basta-me um terreno retangular cuja uma volta ao seu redor meça 110 metros e que seu lado maior exceda em 5 metros o seu lado menor. Dá-me a medida do lado menor.

APÊNDICE F – Apresentação de Slides



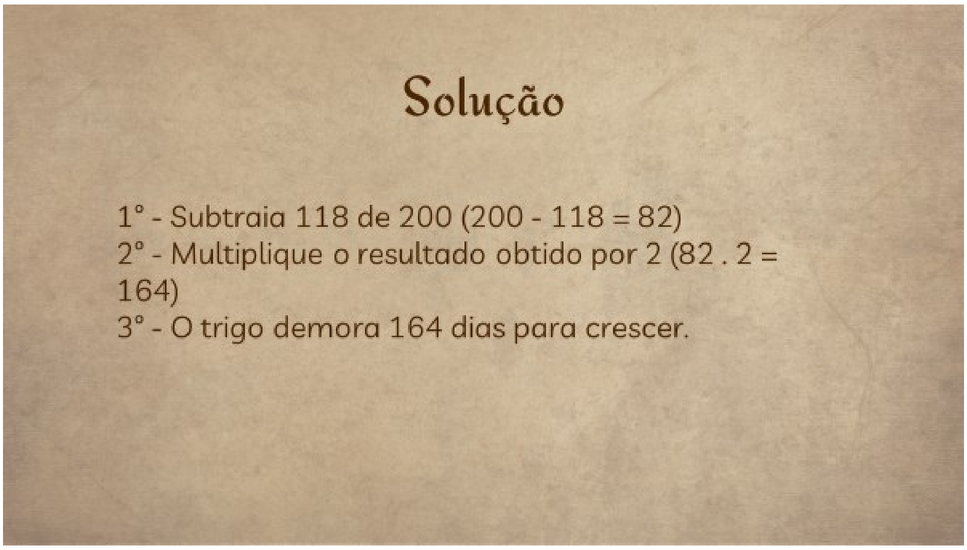


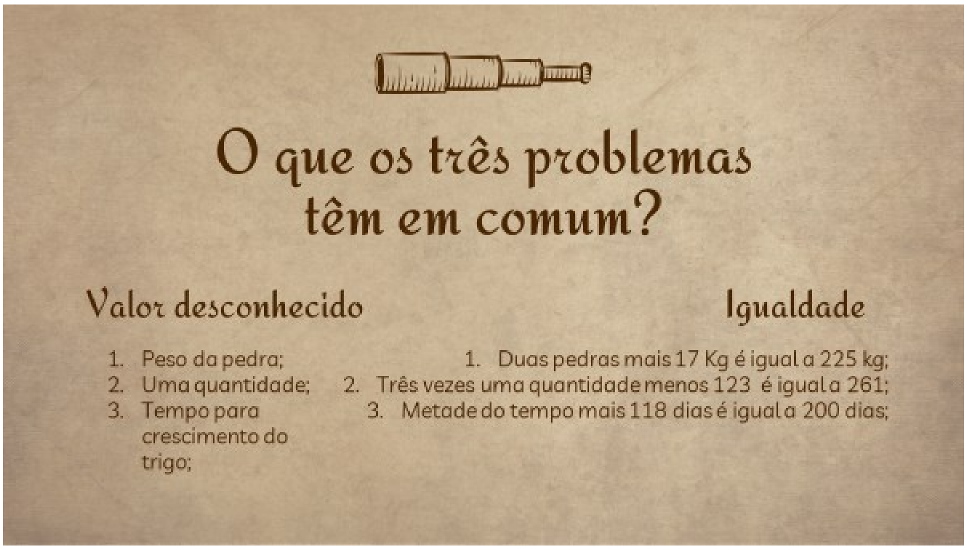
Problema 2: "Se alguém te diz que o triplo de uma quantidade subtraído 123 unidades resulta em 261, que quantidade é essa?"

Solução

1° - Adicione 123 em 261 (123 + 261 = 384)
2° - Divida o resultado obtido por 3 (384 : 3 = 128)
3° - A quantidade é 128.

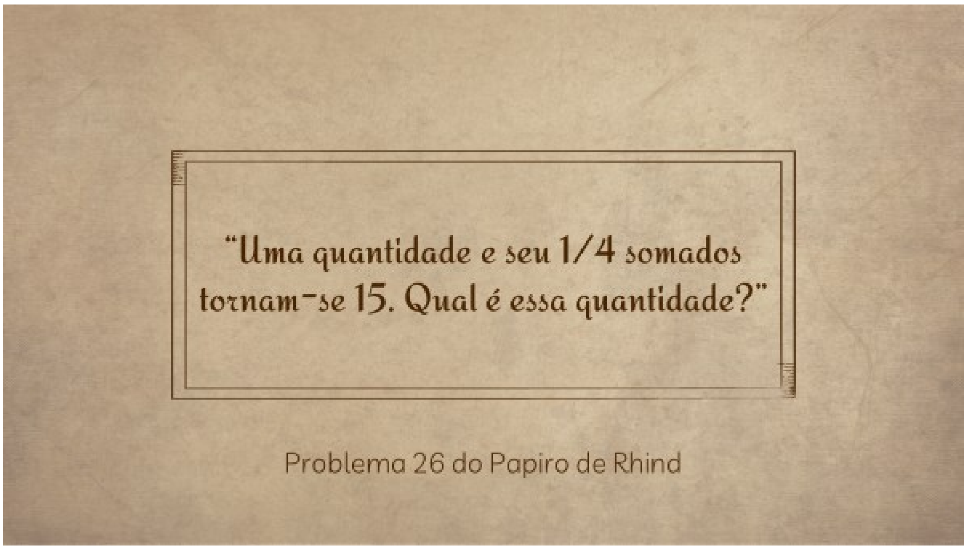
Problema 3: "Metade do tempo para o crescimento do trigo adicionado a 118 dias equivale a 200 dias. Quanto tempo o trigo demora para crescer?"

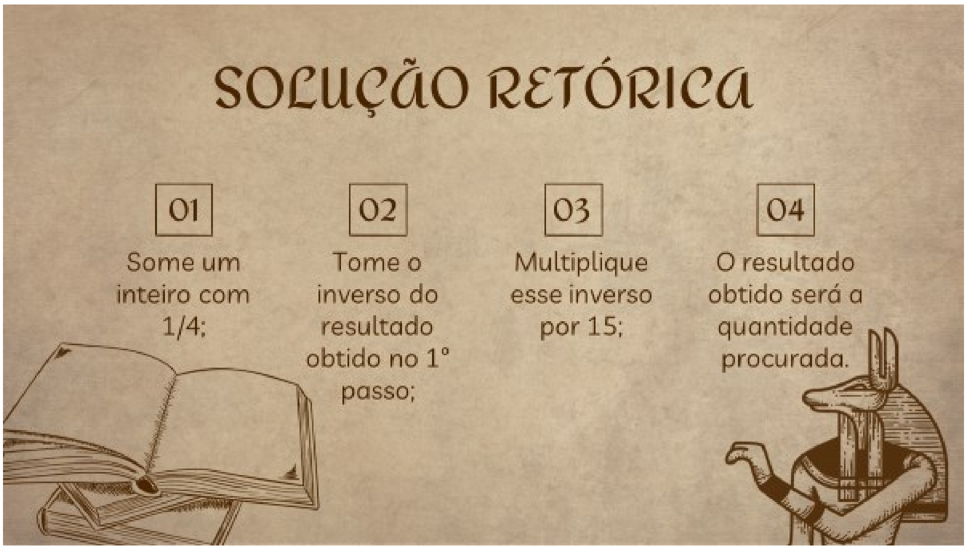

Solução
1° - Subtraia 118 de 200 (200 - 118 = 82)
2° - Multiplique o resultado obtido por 2 (82 . 2 = 164)
3° - O trigo demora 164 dias para crescer.

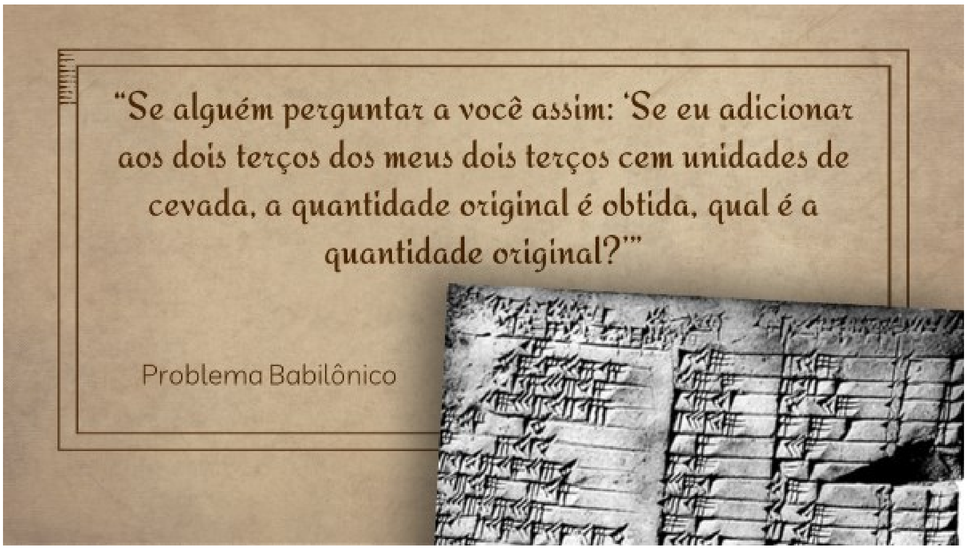

O que os três problemas têm em comum?
Valor desconhecido
1. Peso da pedra;
2. Uma quantidade;
3. Tempo para crescimento do trigo;
Igualdade
1. Duas pedras mais 17 Kg é igual a 225 kg;
2. Três vezes uma quantidade menos 123 é igual a 261;
3. Metade do tempo mais 118 dias é igual a 200 dias;

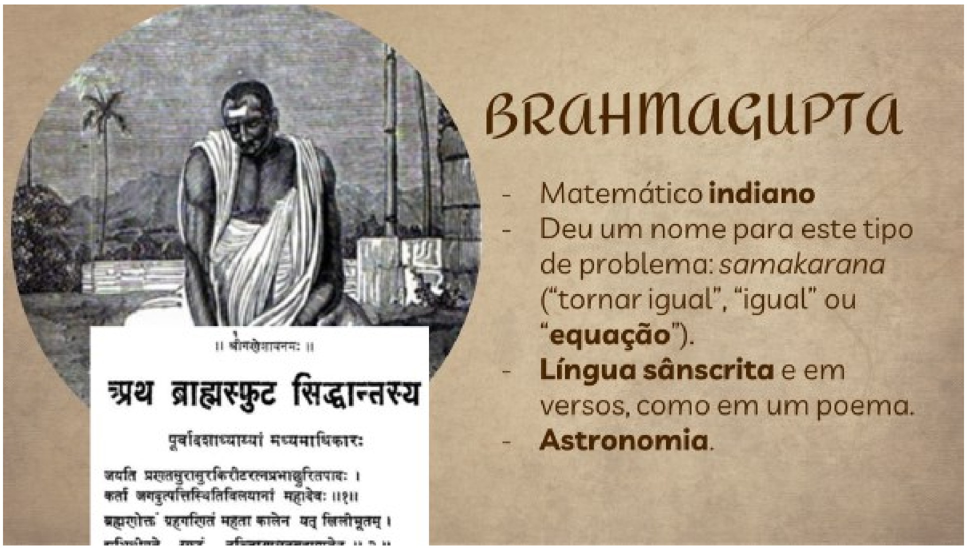

MATEMÁTICA EGÍPCIA
- Povo Egípcio
- Nômade x Sedentário;
- Desenvolvimento de novas técnicas e tecnologias;
- Surgimento de uma "classe intelectual".

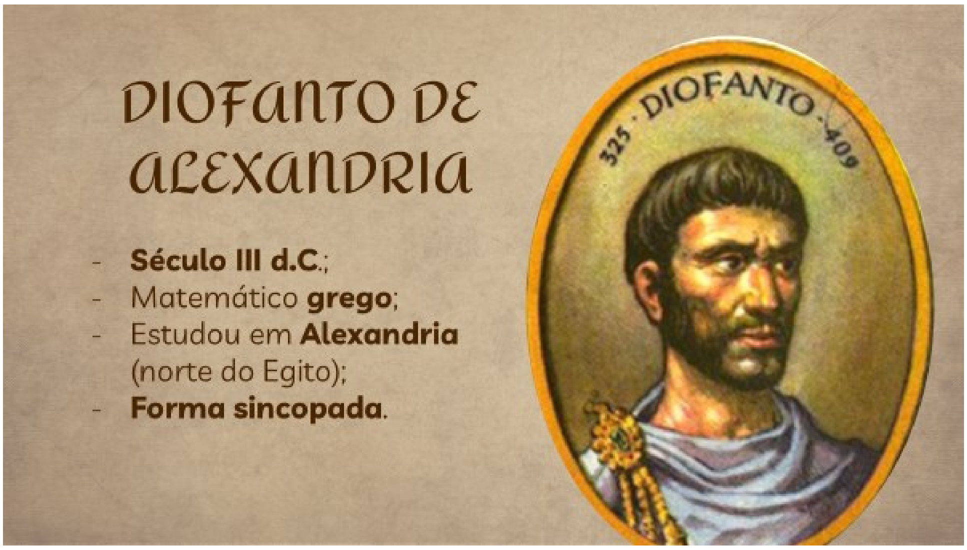

PAPIRO DE RHIND
- Documento **egípcio**;
- Por volta de **1650 a.C.**;
- **Solução** de 85 problemas matemáticos;
- **Forma retórica**.


"Uma quantidade e seu 1/4 somados tornam-se 15. Qual é essa quantidade?"
Problema 26 do Papiro de Rhind

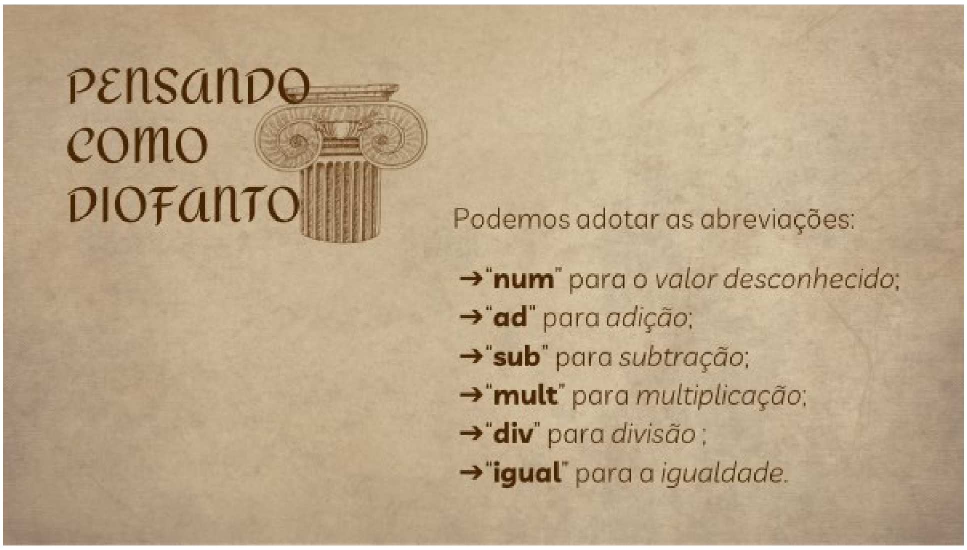

SOLUÇÃO RETÓRICA
01
Some um inteiro com 1/4;
02
Tome o inverso do resultado obtido no 1° passo;
03
Multiplique esse inverso por 15;
04
O resultado obtido será a quantidade procurada.

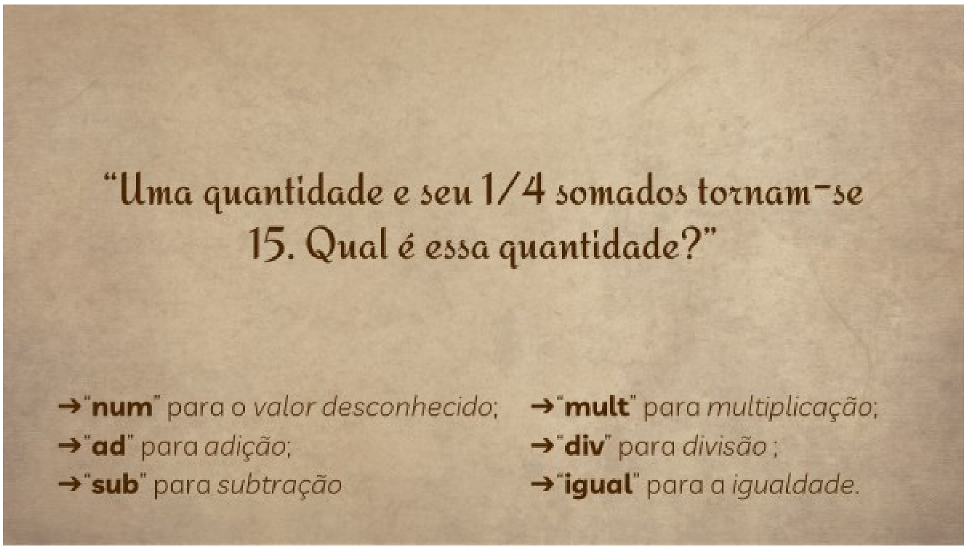

"Se alguém perguntar a você assim: 'Se eu adicionar aos dois terços dos meus dois terços cem unidades de cevada, a quantidade original é obtida, qual é a quantidade original?'"
Problema Babilônico

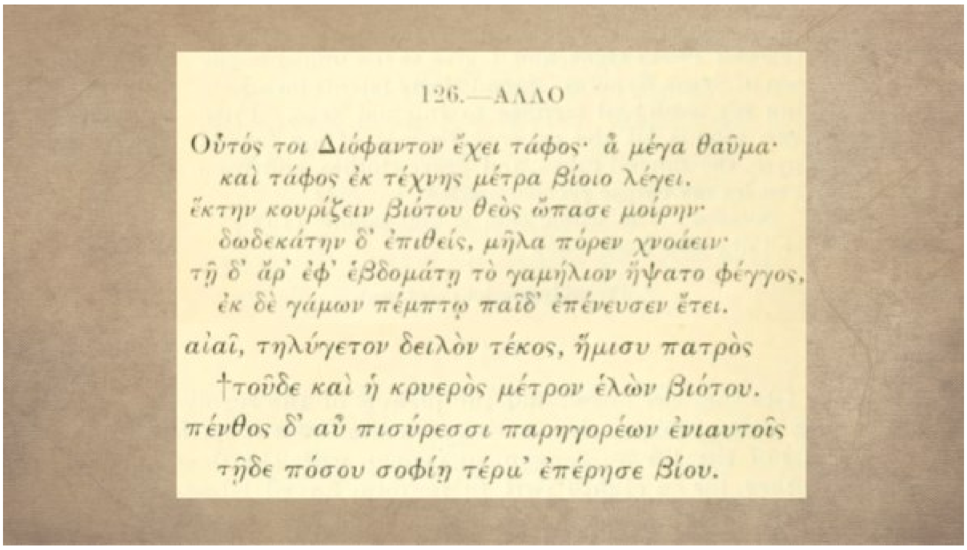

BRAHMAGUPTA
- Matemático **indiano**
- Deu um nome para este tipo de problema: *samakarana* ("tornar igual", "igual" ou "**equação**").
- **Língua sânscrita** e em versos, como em um poema.
- **Astronomia**.
अथ ब्राह्मस्फुट सिद्धान्तस्य


DIOFANTO DE ALEXANDRIA
- **Século III d.C.**;
- Matemático **grego**;
- Estudou em **Alexandria** (norte do Egito);
- **Forma sincopada**.
325 · DIOFANTO · 409


FORMA SINCOPADA
- Síncope: "Eliminação de fonemas no interior de uma palavra";
Escrever os problemas de maneira mais simples, abreviando palavras e expressões matemáticas, quantidades e operações.

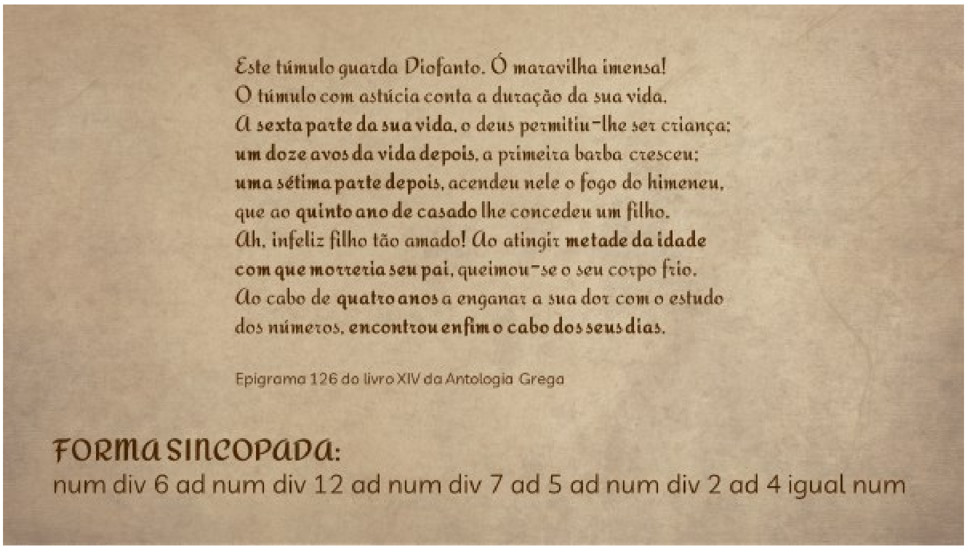

PENSANDO COMO DIOFANTO
Podemos adotar as abreviações:
➔"num" para o valor desconhecido;
➔"ad" para adição;
➔"sub" para subtração;
➔"mult" para multiplicação;
➔"div" para divisão ;
➔"igual" para a igualdade.

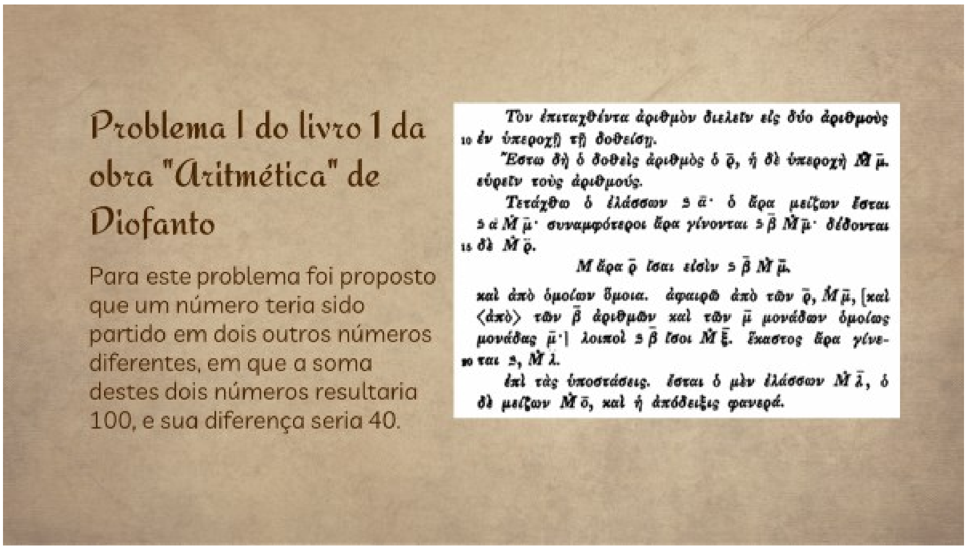

"Uma quantidade e seu 1/4 somados tornam-se 15. Qual é essa quantidade?"
➔"num" para o valor desconhecido;
➔"ad" para adição;
➔"sub" para subtração
➔"mult" para multiplicação;
➔"div" para divisão ;
➔"igual" para a igualdade.

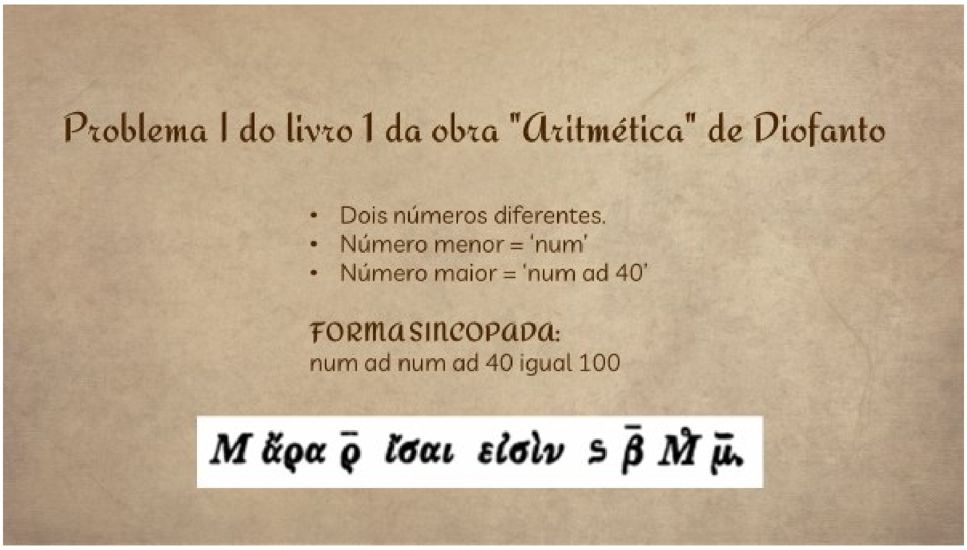


126.—ΑΛΛΟ

Οὗτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος· ἆ μέγα θαῦμα·
καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει.
ἕκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην·
δωδεκάτην δ' ἐπιθείς, μῆλα πόρεν χνοάειν·
τῇ δ' ἄρ' ἐφ' ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
ἐκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ' ἐπένευσεν ἔτει.
αἰαῖ, τηλύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρὸς
†τοῦδε καὶ ἡ κρυερὸς μέτρον ἑλὼν βιότου.
πένθος δ' αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς
τῆδε πόσου σοφίῃ τέρμ' ἐπέρησε βίου.



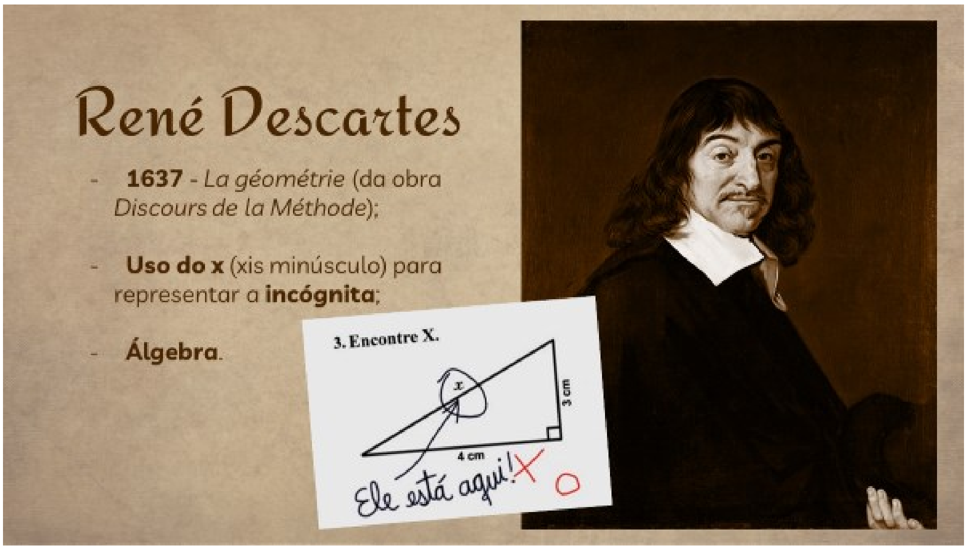

Problema I do livro 1 da obra "Aritmética" de Diofanto
Para este problema foi proposto que um número teria sido partido em dois outros números diferentes, em que a soma destes dois números resultaria 100, e sua diferença seria 40.
Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ.
Ἔστω δὴ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ ρ̄, ἡ δὲ ὑπεροχὴ Μ̊ μ̄. εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς.
Τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς ᾱ· ὁ ἄρα μείζων ἔσται ς ᾱ Μ̊ μ̄· συναμφότεροι ἄρα γίνονται ς β̄ Μ̊ μ̄· δέδονται δὲ Μ̊ ρ̄.
Μ ἄρα ρ̄ ἴσαι εἰσὶν ς β̄ Μ̊ μ̄.
καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. ἀφαιρῶ ἀπὸ τῶν ρ̄, Μ̊ μ̄, [καὶ ⟨ἀπὸ⟩ τῶν β̄ ἀριθμῶν καὶ τῶν μ̄ μονάδων ὁμοίως μονάδας μ̄·] λοιποὶ ς β̄ ἴσοι Μ̊ ξ̄. ἕκαστος ἄρα γίνεται ς, Μ̊ λ̄.
ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων Μ̊ λ̄, ὁ δὲ μείζων Μ̊ ο̄, καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

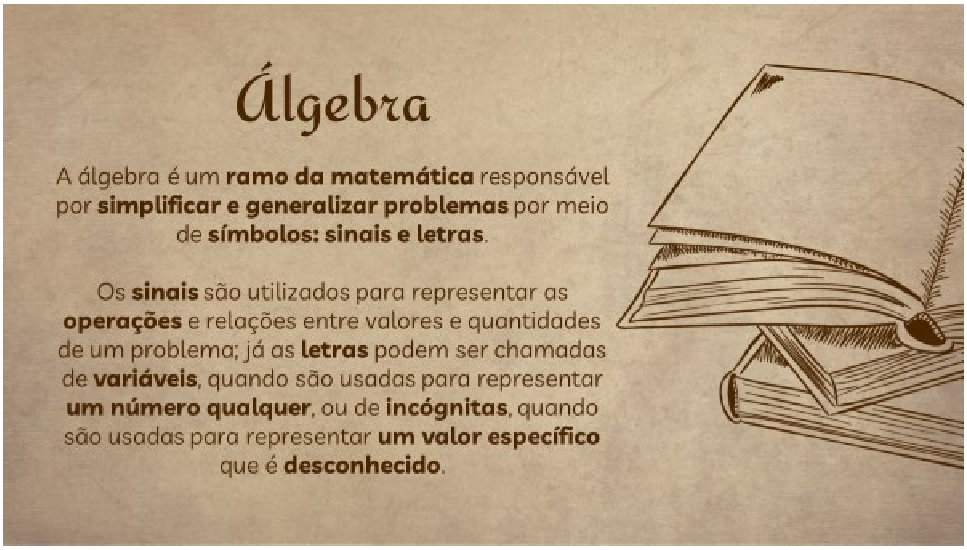

Problema I do livro 1 da obra "Aritmética" de Diofanto
• Dois números diferentes.
• Número menor = 'num'
• Número maior = 'num ad 40'
FORMA SINCOPADA:
num ad num ad 40 igual 100
Μ ἄρα ρ̄ ἴσαι εἰσὶν ς β̄ Μ̊ μ̄.

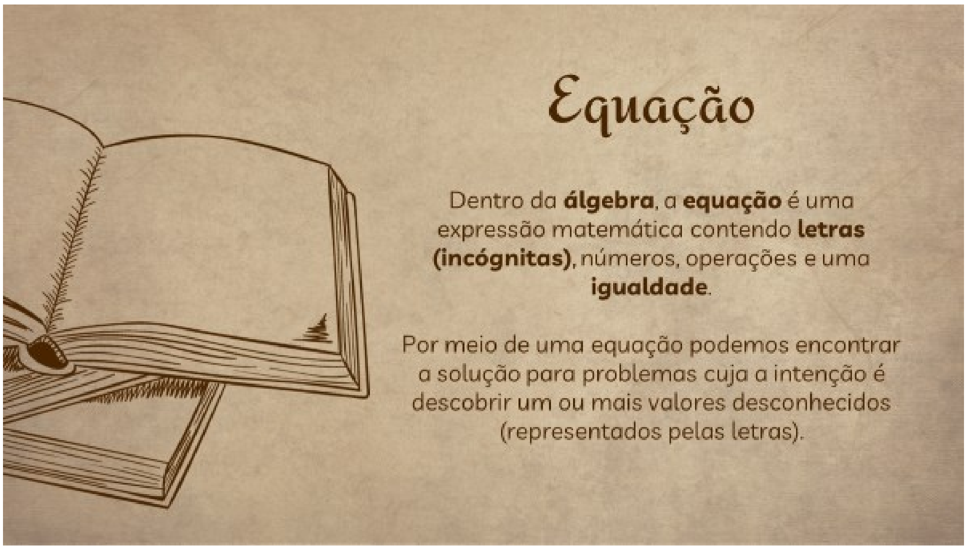

COMO SIMPLIFICAR MAIS?
Uma forma própria da matemática, unificada, independente de cultura ou língua local.

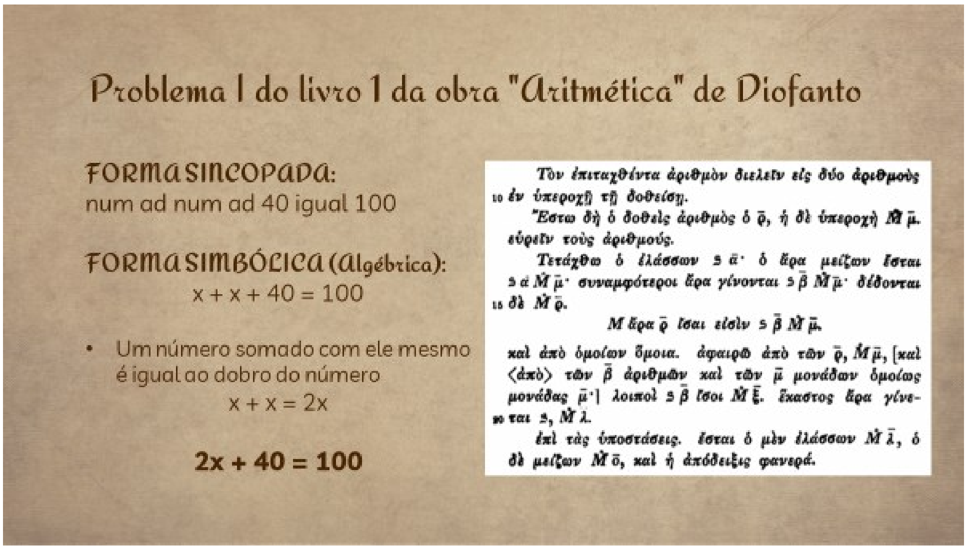

MATEMÁTICA EUROPEIA
- Século XI d.C. (Idade média);
- Navegações (comércio);
- Troca de informações e conhecimento entre povos;
- Conhecimento babilônico, egípcio, hindu, grego, árabe;
- Tradução para o latim;
- Desenvolvimento de símbolos.


1202
ALGARISMOS INDO-ARÁBICOS
Leonardo de Pisa (Fibonacci) na obra Liber Abaci.
Aparecem pela primeira vez nos escritos de Iohann Widman.
SINAIS + E −
1489
1557
IGUALDADE =
"[...] para esquecer a tediosa repetição destas palavras: é igual a: vou definir um par de paralelas, ou linhas iguais de um mesmo comprimento, assim: =====, porque não existem duas coisas que podem ser mais iguais"
- Robert Recorde
François Viète usou uma única letra N para representar o valor que precisa ser descoberto.
INCÓGNITA
1591


René Descartes
- 1637 - La géométrie (da obra Discours de la Méthode);
- Uso do x (xis minúsculo) para representar a incógnita;
- Álgebra.
3. Encontre X.
x
3 cm
4 cm
Ele está aqui!


Álgebra
A álgebra é um **ramo da matemática** responsável por **simplificar e generalizar problemas** por meio de **símbolos: sinais e letras**.
Os **sinais** são utilizados para representar as **operações** e relações entre valores e quantidades de um problema; já as **letras** podem ser chamadas de **variáveis**, quando são usadas para representar **um número qualquer**, ou de **incógnitas**, quando são usadas para representar **um valor específico** que é **desconhecido**.


Equação
Dentro da **álgebra**, a **equação** é uma expressão matemática contendo **letras (incógnitas)**, números, operações e uma **igualdade**.
Por meio de uma equação podemos encontrar a solução para problemas cuja a intenção é descobrir um ou mais valores desconhecidos (representados pelas letras).


Problema I do livro 1 da obra "Aritmética" de Diofanto
FORMA SINCOPADA:
num ad num ad 40 igual 100
FORMA SIMBÓLICA (Algébrica):
x + x + 40 = 100
• Um número somado com ele mesmo é igual ao dobro do número
x + x = 2x
2x + 40 = 100
Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ.
Ἔστω δὴ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ ρ̄, ἡ δὲ ὑπεροχὴ Μ̊ μ̄. εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς.
Τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς ᾱ· ὁ ἄρα μείζων ἔσται ς ᾱ Μ̊ μ̄· συναμφότεροι ἄρα γίνονται ς β̄ Μ̊ μ̄· δέδονται δὲ Μ̊ ρ̄.
Μ̊ ἄρα ρ̄ ἴσαι εἰσὶν ς β̄ Μ̊ μ̄.
καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. ἀφαιρῶ ἀπὸ τῶν ρ̄, Μ̊ μ̄, [καὶ ⟨ἀπὸ⟩ τῶν β̄ ἀριθμῶν καὶ τῶν μ̄ μονάδων ὁμοίως μονάδας μ̄·] λοιποὶ ς β̄ ἴσοι Μ̊ ξ̄. ἕκαστος ἄρα γίνεται ς, Μ̊ λ̄.
ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων Μ̊ λ̄, ὁ δὲ μείζων Μ̊ ō, καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

Representação da equação **2x + 40 = 100** por matemáticos dos séculos XVI e XVII:

Matemático (Ano)	**Representação**
Cardano (1545)	2 rebus $\bar{p}$ 40 aequalis 100
Viète (1591)	2N + 40 aequatur 100
Harriot (1631)	2 . a + 40 ==== 100
Descartes (1637)	2x + 40 $\propto$ 100
Wallis (1693)	2x + 40 = 100

Problema 1: "O peso de duas pedras iguais mais 17 quilogramas de areia totalizam 225 quilogramas. Deseja-se saber o peso de uma única pedra."

Equação:

Problema 2: "Se alguém te diz que o triplo de uma quantidade subtraído 123 unidades resulta em 261, que quantidade é essa?"

Equação:

Problema 3: "Metade do tempo para o crescimento do trigo adicionado a 118 dias equivale a 200 dias. Quanto tempo o trigo demora para crescer?"

Equação: