

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E SISTEMAS
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO ELÉTRICA

Aliexsiei Marcelus Ramos Filho

**PROPOSTA DE MODELO PARA DEFINIÇÃO DE PONTO DE PEDIDO EM
SITUAÇÕES DE SAZONALIDADE**

Florianópolis

2021

Aliexsiei Marcelus Ramos Filho

**PROPOSTA DE MODELO PARA DEFINIÇÃO DE PONTO DE PEDIDO EM
SITUAÇÕES DE SAZONALIDADE**

Trabalho Conclusão do Curso de apresentado ao Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para obtenção do Título em Engenharia, área Elétrica, habilitação Produção Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Fernando Mayerle

Florianópolis

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Ramos Filho, Aliexsiei Marcelus

PROPOSTA DE MODELO PARA DEFINIÇÃO DE PONTO DE PEDIDO EM
SITUAÇÕES DE SAZONALIDADE / Aliexsiei Marcelus Ramos Filho
; orientador, Sérgio Fernando Mayerle, 2021.

51 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico,
Graduação em Engenharia de Produção Elétrica, Florianópolis,
2021.

Inclui referências.

1. Engenharia de Produção Elétrica. 2. Estoque de
Segurança. 3. Ponto de Pedido. 4. Nível de Serviço. 5.
Pesquisa Operacional. I. Mayerle, Sérgio Fernando. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em
Engenharia de Produção Elétrica. III. Título.

Aliksiei Marcelus Ramos Filho

**PROPOSTA DE MODELO PARA DEFINIÇÃO DE PONTO DE PEDIDO EM
SITUAÇÕES DE SAZONALIDADE**

Este Trabalho Conclusão de Curso foi julgado adequado e aprovado, em sua forma final, pelo curso de Engenharia de Produção Elétrica, da Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis, 16 de Setembro de 2021.

Prof^a. Mônica Maria Mendes Luna, Dr^a.
Coordenadora do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Sérgio Fernando Mayerle, Dr.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Eduardo Ferreira da Silva, Dr.
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Lynceo Falavigna Braghirolli, Dr.
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina

Este trabalho é dedicado à minha bisavó e madrinha Edna
Ramos de Lima

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Alieksiei e Jenny, meus avós Benedito e Emília e minha bisavó Edna por alimentarem minha curiosidade e desejo de conhecimento, incentivando e proporcionando a possibilidade de focar nos estudos, e a todos meus familiares e amigos que contribuíram de alguma forma para esta jornada.

Agradeço ao meu orientador, Sérgio Fernando Mayerle, por todo o apoio e paciência durante a orientação.

E agradeço a todos os professores do Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas e do Departamento de Engenharia Elétrica pelo seu esforço para capacitar os futuros profissionais da área.

“Não deve inferir que possa extrair e aplicar passos processuais sem entender por quê e como eles funcionam.” (BROWN, 1959, p.12, tradução nossa)

RESUMO

O presente trabalho propõe um modelo numérico alternativo para a definição de ponto de pedido, considerando um tempo de reposição arbitrariamente distribuído e sazonalidade na demanda. O modelo proposto e um modelo clássico, apresentado originalmente por R.G. Brown, são aplicados em sequências de valores gerados na ferramenta Microsoft Excel através de simulação e então comparados, levantando os benefícios de cada um. O novo modelo obteve resultado satisfatório nas simulações, com melhor nível de serviço e faltas menores que a mesma reposição feita a partir do modelo de Brown, ao custo de um aumento do estoque médio durante reposições.

Palavras-chave: Ponto de Pedido; Estoque de Segurança; Nível de Serviço; Pesquisa Operacional; Controle de Estoque.

ABSTRACT

This work proposes an alternative numerical model for the definition of a given order point, considering a restocking time arbitrarily distributed and seasonal demand. The proposed and a classical model, first shown by R. G. Brown, are applied in a sequence of values generated through Microsoft Excel and compared, noting each one's benefits. The new model found success in the simulations, with a higher service level and lower shortages than the same reorder made through Brown's model, at the cost of an increase in average stock during reorders.

Keywords: Order Point; Safety Stock; Service Level; Operational Research; Stock Control.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação do Nível de Serviço.....	25
Figura 2 – Comparação entre Distribuição Real e Normal do <i>Lead Time</i>	28
Figura 3 – Exemplo de Descontinuidade do Ponto de Pedido	35
Figura 4 – Demanda Média para os 30 períodos do ciclo	42
Figura 5 – Dados Utilizados para Determinação do Ponto de Pedido	43
Figura 6 – Dados Utilizados para Determinação do Ponto de Pedido, Alta Variância	46

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Construção dos Vetores de Demanda por <i>Lead Time</i>	32
Tabela 2: Construção da Matriz de Demanda	32
Tabela 3: Probabilidade de Ocorrência do <i>Lead Time</i>	37
Tabela 4: Distribuições de demanda por período no ciclo	38
Tabela 5: Valores calculados referentes ao modelo de Brown.....	38
Tabela 6: Valores de demanda calculados referentes ao modelo proposto	39
Tabela 7: Ponto de Pedido e Nível de Serviço para cada LT e C do Modelo Proposto	39
Tabela 8: Comparação de Ponto de Pedido e Nível de Serviço Entre os Modelos	40
Tabela 9: Nível de Serviço Observado na Simulação do Caso 1	41
Tabela 10: Estoque Médio e Faltas na Simulação do Caso 1	41
Tabela 11: Comparação entre Ponto de Pedido e Nível de Serviço Entre os Dois Modelos no Caso 2	43
Tabela 12: Resultados da Simulação do Caso 2	44
Tabela 13: Resultados da Simulação do Caso 2 nos Períodos de Alta Demanda	44
Tabela 14: Resultados da Simulação do Caso 2 nos Períodos de Baixa Demanda	45
Tabela 15: Comparação entre Ponto de Pedido e Nível de Serviço entre os Dois Modelos no Caso 3	46
Tabela 16: Resultados da Simulação do Caso 3	47

LISTA DE SÍMBOLOS

σ : Desvio padrão

μ : Média

LT: *Lead time* ou tempo de reposição

PP: Ponto de pedido

PP(C): Ponto de pedido para o período C no ciclo de sazonalidade

NS: Nível de serviço

k: Quantidade de desvios padrões acima da média em uma observação, também conhecido como “escore Z”

NS(PP, LT): Nível de serviço em função do ponto de pedido e do *lead time*

NS(PP, LT, C): Nível de serviço em função do ponto de pedido, *lead time* e período no ciclo de sazonalidade onde é realizada a ordem de reposição

P(LT=t): Probabilidade do LT assumir o valor t

P(X<c): Probabilidade da variável aleatória X ser menor que o valor de c

V[n]: Enésimo elemento do vetor V

D: Variável aleatória que representa a demanda média para um período

D(LT): Conjunto de observações usado para determinar a variável aleatória que representa a demanda dado um *lead time* LT

D(LT, C): Conjunto de observações usado para determinar a variável aleatória que representa a demanda dado um *lead time* LT no período C do ciclo de sazonalidade

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	17
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA.....	17
1.2 OBJETIVOS.....	18
1.3 LIMITAÇÕES.....	19
1.4 CARACTERIZAÇÃO METODOLÓGICA.....	19
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	20
2.1 PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS.....	20
2.2 DEFINIÇÕES SOBRE ESTOQUES E PROCESSOS PRODUTIVOS.....	22
2.3 DETERMINAÇÃO DO ESTOQUE DE SEGURANÇA.....	24
3. DESENVOLVIMENTO.....	29
3.1 O MODELO BÁSICO.....	29
3.2 TEMPO ESTOCÁSTICO.....	29
3.3 DEMANDAS COM SAZONALIDADE.....	30
3.4 DEMANDAS DEPENDENTES.....	31
3.5 PASSO A PASSO.....	33
3.6 DESCONTINUIDADES NAS FRONTEIRAS.....	34
3.7 TEMPO DE REPOSIÇÃO DEPENDENTE DO CICLO SAZONAL.....	35
4. TESTES NUMÉRICOS.....	37
4.1 CASO 1 -DISTRIBUIÇÕES CONHECIDAS INDEPENDENTES.....	37
4.1.1 Simulação.....	40
4.2 CASO 2 - DISTRIBUIÇÕES COM GRANDE CICLO SAZONAL.....	41
4.2.1 Simulação.....	44
4.3 CASO 3 - DISTRIBUIÇÕES COM ALTA VARIÂNCIA.....	45

4.3.1 Simulação	47
4.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS DA SIMULAÇÃO.....	47
5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	49
6 REFERÊNCIAS	51

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA

Um dos grandes objetivos que a aplicação de modelos econômicos na indústria busca definir é quanto deve-se produzir frente à demanda. Para isto são definidos lotes eficientes de produção, equilibrando o custo dos *setups* com o custo de armazenamento dos produtos. Em uma situação ideal, com demanda e tempos de reposição fixos, um plano eficiente não terá nenhum item no estoque quando recebe o próximo lote. Para não ocorrer faltas, deve ser considerado o consumo do material durante o tempo de reposição, e iniciar-se a produção do insumo em questão em tempo de não faltar produto. Em situações mais complexas, onde demanda ou tempo de reposição são estocásticos, considerações adicionais devem ser levadas em conta.

Os modelos de reposição de estoques podem ser categorizados como revisão contínua ou periódica: o primeiro adequando os estoques ao tempo de reposição e o segundo definindo um nível de estoque que, ao ser atingido, emite-se uma ordem de reposição. Este nível de estoque no qual a reposição precisa ser disparada é também conhecido como ponto de pedido. Neste trabalho busca-se explorar possíveis origens da necessidade deste estoque, de modo a poder determinar o seu valor.

O ponto de pedido é composto por duas componentes: uma intuitiva, relacionada ao valor médio da demanda e do tempo de reposição, similar ao caso ideal apresentado anteriormente, e outra relacionada às incertezas em relação a estas médias, conhecida como estoque de segurança.

A definição do ponto de pedido é parcialmente estratégica, sendo definido a partir de um nível de serviço, ou probabilidade de não ocorrer falta do produto. Considerando que esta variável segue a distribuição normal, determina-se quantos desvios padrões além da média são necessários para atingir este nível. O primeiro modelo proposto por Brown (1959, p. 112) considera o tempo de reposição constante e a demanda normalmente distribuída, não sendo considerados desvios do tempo.

Supor constante o período de reposição limita a aplicabilidade deste modelo, podendo levar a resultados equivocados quando usado em situações em que esta premissa não é verdadeira. Considerando isto, alguns anos depois, Brown (1962, p. 367) publicou um

modelo mais completo, onde tanto a demanda quanto o tempo são estocásticos e normalmente distribuídos.

Estes dois modelos funcionam bem quando suas premissas são atendidas, mas muitas vezes as variáveis estocásticas não são normais, e ao supor que elas são, incumbe-se um erro estatístico ao resultado. O estudo das distribuições normais é um contexto muito rico na estatística e pode ser uma decisão consciente aceitar este erro para utilizar-se de uma gama de modelos robustos e bem desenvolvidos. Porém quando são ignoradas as premissas o resultado final sofre perda de qualidade.

Além da normalidade das distribuições de demanda e *lead time*, a aplicação direta do modelo de Brown agrupa todas as variações como aleatórias. Existem diversas situações onde parte destas variações são explicadas por tendência ou sazonalidade, levando a uma previsão mais precisa que requer menos estoque de segurança, e conseqüentemente com menores custos de manutenção de estoque.

Os custos de manutenção de estoque não agregam valor ao produto final além do nível de serviço proporcionado. Os casos onde os estoques são superdimensionados geram necessidades de espaço e capital imobilizado maiores que o estritamente necessário. Na busca do aumento da eficiência nas empresas, é importante reduzir estes custos mantendo o nível de serviço no patamar planejado. Caso os estoques estejam subdimensionados, se perde o controle do nível de serviço desejado, deixando a confiabilidade da empresa aquém do esperado.

1.2 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo geral definir um modelo numérico para a definição do estoque de segurança adequado a situações onde a demanda e/ou o tempo de reposição apresentam sazonalidades e distribuições diferentes da normal.

Este objetivo geral será alcançado a partir dos seguintes objetivos específicos:

1. descrever os conceitos fundamentais de gestão de estoques;
2. definir métricas adequadas para comparar modelos de definição de estoque de segurança;
3. comparar o modelo proposto com a fórmula de Brown por meio de simulação para três casos específicos que cobrem as situações descritas no objetivo geral.

1.3 LIMITAÇÕES

O problema trabalhado é bastante específico, envolvendo situações de dimensionamento do estoque de segurança levando em consideração a variabilidade da demanda e do tempo de reposição. Contudo, o tempo de reposição (*lead time*) está sendo neste trabalho em definido em intervalos de tempo discretos e não contínuos.

Também não faz parte deste trabalho a realização de considerações a respeito do modelo de previsão a ser adotado que caracterize as tendências e o ciclo de sazonalidade.

O modelo também aborda apenas a definição do ponto de pedido, sem levar em consideração outros fatores importantes, como onde instalar os estoques ao longo da cadeia de suprimentos ou de como dimensionar o lote de compras.

Por fim, por tratar-se de um modelo numérico discretizado, o resultado obtido depende do refinamento desta discretização. O erro provindo desta discretização pode ser reduzido (mas não totalmente removido) com maior granularidade.

1.4 CARACTERIZAÇÃO METODOLÓGICA

De acordo com Miguel (2012, p. 185), a resolução de um problema sob a ótica da Pesquisa Operacional faz uso de uma abordagem de modelagem e simulação e envolve cinco etapas:

- **Definição do problema:** quando são definidos o escopo, limitações, objetivos e o modelo conceitual do problema. Neste estudo compreende da introdução até o início do capítulo 3.
- **Construção do modelo:** as informações da fase anterior convergem aqui para criação de um modelo matemático, geralmente baseado em outros modelos vistos na literatura de Pesquisa Operacional. Esta fase ocorre entre as seções 3.1 e 3.7.
- **Solução do modelo:** nesta fase usa-se o modelo definido anteriormente a fim de encontrar a resposta desejada. É comum verificar seu desempenho comparando com as soluções de outros métodos da literatura. Compreende as seções 4.1 a 4.3.
- **Validação do modelo:** verifica-se se o modelo representa o problema corretamente, aplicando-o em simulações ou dados históricos. Neste trabalho, serão validados através de simulação, apresentadas em nas seções 4.1 a 4.3.
- **Implementação da Solução:** Aqui a preocupação é em como implementar a solução na prática, traduzindo os resultados do modelo em conclusões ou decisões. Este será tratado na seção 4.4

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo busca apresentar o embasamento teórico para o desenvolvimento do modelo. Serão abordados em três pontos: revisão de propriedades estatísticas, definições sobre estoques e processo produtivo e determinação do estoque de segurança.

Para os dois primeiros buscou-se informações em livros-texto usados como referência na área, enquanto que para o ultimo, mais próximo do tema trabalhado, teve como ponto de partida o trabalho de revisão de Gonçalves, Sameiro e Cortez (2020), onde categorizaram 126 artigos sobre o assunto.

2.1 PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS

Mood, Graybill e Boes (1974) definem o espaço de probabilidade através de três fatores: o conjunto de todos os resultados possíveis (Ω), o subconjunto de resultados que são de interesse (α) e uma função de probabilidade $P(\cdot)$, determinando a probabilidade de um elemento do conjunto também fazer parte do subconjunto.

Este elemento, enquanto não especificado, se trata de uma variável aleatória, podendo ser definida como X , que pode ser descrita em termos de uma função de distribuição cumulativa $F_X(\cdot)$. Esta função, por sua vez, representa a probabilidade, entre zero e um, da variável aleatória ser igual ou menor que o argumento da função. Modelando um problema através do uso destas funções, e com algumas suposições, é possível circunvir a descrição do espaço de probabilidade. Para algumas das distribuições conhecidas, basta apenas conhecer a média μ_x e o desvio padrão σ_x , cujas definições são melhor elaboradas a seguir.

A partir da definição de distribuição cumulativa vem o conceito de função densidade de probabilidade $f_X(\cdot)$ que pode ser discreta, caso a variável aleatória assuma apenas valores contáveis, ou contínua, caso possa assumir qualquer valor em um intervalo. Caso seja discreta, a função de densidade retorna a probabilidade da variável aleatória tomar o valor do argumento da função. Caso contínua, podem existir múltiplas funções de densidade, sendo necessário apenas que:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du \quad (1)$$

seja verdadeiro para qualquer valor de x . Na prática, geralmente se usa $f_X(\cdot)$ contínua.

Com a função de densidade é possível calcular os momentos da distribuição. Os dois primeiros momentos, denominados média e variância, são os mais usados para caracterizar as

variáveis aleatórias. A média, ou o valor esperado para uma variável discreta é definida a partir da equação:

$$\mu_X = E(X) = \sum_j x_j f_X(x_j) \quad (2.a)$$

para variáveis discretas. Para variáveis contínuas, é usado uma integral por todo o domínio dos números reais no lugar do somatório, como segue:

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} u f_X(u) du \quad (2.b)$$

Seguem algumas propriedades da média que serão usadas no desenvolvimento do trabalho.

Propriedade 1: A média de uma variável aleatória multiplicada por uma constante é a média multiplicada pela mesma constante, isto é:

$$E(cX) = cE(X) \quad (3)$$

Propriedade 2: A média da soma de duas variáveis aleatórias é a soma das médias das duas variáveis aleatórias.

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad (4)$$

Propriedade 3: O valor esperado de uma função de uma variável aleatória é dado pela seguinte equação:

$$E(g(X)) = \sum_j g(x_j) f_X(x_j) \quad (5a)$$

e, para o caso de uma variável aleatória contínua:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) f_X(u) du \quad (5b)$$

Enquanto a média da distribuição representa seu centro de massa, a variância é um indicador de sua dispersão, que é definida pela equação:

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \sum_j (x_j - \mu_X)^2 f_X(x_j) \quad (6a)$$

e, caso seja uma variável contínua, tem-se:

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - \mu_X)^2 f_X(u) du \quad (6b)$$

É usual fazer menção ao desvio padrão, calculado como a raiz quadrada positiva da variância, ao invés da própria variância, pois terá a mesma unidade de medida que a variável aleatória.

Para a distribuição normal, basta apenas conhecer a média μ e desvio padrão σ , para determinar-se a função densidade de probabilidade (MOOD, GRAYBILL e BOES, 1974, p.108):

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (7)$$

Loève (1977, p.12) também descreve a igualdade de Bienaymé, outra propriedade importante das variâncias quando não estão correlacionadas. Mantendo as notações anteriores, tem-se a seguinte propriedade:

Propriedade 4: a variância da soma de variáveis aleatórias é igual a soma das variâncias destas mesmas variáveis aleatórias:

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) \quad (8)$$

Propriedade 5: Supondo X e Y variáveis aleatórias independentes, pode-se definir sua soma como:

$$X(\mu_X, \sigma_X^2) + Y(\mu_Y, \sigma_Y^2) = Z(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2) \quad (9)$$

A propriedade 5 é bastante útil para o desenvolvimento dos modelos que serão apresentados na sequência.

2.2 DEFINIÇÕES SOBRE ESTOQUES E PROCESSOS PRODUTIVOS

Slack, Chambers e Johnston (2006, p. 278) definem estoque como “a acumulação de materiais, clientes ou informações à medida que fluem através de processos ou redes.” Acrescentam que “não importa o que está sendo armazenado como estoque, ou onde ele está posicionado na operação; ele existirá porque existe uma diferença de ritmo ou de taxa entre fornecimento e demanda”.

Slack, Chambers e Johnston (2006, p.281) dividem os estoques em quatro tipos:

- Estoque Isolador, ou Estoque de Segurança, serve para compensar as perdas inerentes ao fornecimento e à demanda.
- Estoque de Ciclo, necessário quando um ou mais estágios na operação não podem fornecer todos os itens que produzem ao mesmo tempo. Por exemplo, uma máquina para tingir tecidos não consegue tingir múltiplas peças com cores diferentes ao mesmo tempo, portanto deve ser feito um lote maior de cada cor, gerando este estoque.
- Estoque de Antecipação, bastante importante para produtos com sazonalidade, é produzido durante períodos com baixa demanda e estocado para suprir períodos de alta demanda.
- Estoques no Canal, ou de Distribuição, existe pois o material não pode ser transportado instantaneamente. Se uma fábrica despacha seus produtos apenas no final do expediente, seu estoque de produtos acabados que será despachado é de distribuição.

Ballou (2001, p.274) adiciona um quinto tipo de estoque a ser considerado, o estoque obsoleto, referente aos produtos que se deterioram ou acabam perdidos/roubados durante o armazenamento.

Slack, Chambers e Johnston (2006, p.283) explicitam os três principais tipos de decisões referente a estoques: quanto pedir, quando pedir e como controlar o sistema. Quanto pedir, ou decisão de volume, define o tamanho do pedido quando é colocado o pedido de reabastecimento. Quando pedir, ou decisão de momento, define em que momento ou em qual nível de estoque deve ser feito o pedido. Como controlar o sistema refere aos métodos adotados para suportar as outras duas decisões.

Estas decisões devem estar alinhadas com o objetivo do gerenciamento de estoques, “equilibrar a disponibilidade dos produtos, ou serviço ao consumidor, por um lado, com os custos de abastecimento que, por outro lado, são necessários para um determinado grau dessa disponibilidade” (BALLOU, 2001, p.277).

Para a definição de quanto pedir, existem inúmeros modelos para determinação de lotes de compra, geralmente minimizando os custos totais, compostos por custos de aquisição, manutenção e falta de estoque. Porém, estes modelos vão além do escopo deste texto, que trata principalmente da decisão de momento. Contudo, quando relevante pode ser suposto que o lote econômico de compra já foi calculado.

Já a decisão sobre tempo é o assunto central em questão. Segundo Slack, Chambers e Johnston,

Quando assumimos que os pedidos chegavam instantaneamente e que a demanda era constante e previsível, a decisão de quando colocar um pedido de reabastecimento era evidente. Um pedido seria colocado logo que o nível de estoque atingisse zero. (...) Se os pedidos de reabastecimento não chegam instantaneamente, mas há um lapso entre o pedido sendo colocado e chegando no estoque, podemos calcular o momento de pedido de reabastecimento. (2006, p. 292).

Nesta situação o ponto de pedido pode ser calculado a partir da equação (BALLOU, 2001, p. 285):

$$PP = d \cdot LT \tag{10}$$

onde:

d: demanda por período;

LT: *lead time* ou tempo de reposição, em número de períodos;

PP: ponto de pedido em unidades armazenadas.

Neste caso, tanto a demanda quanto o *lead time* são determinísticos. Porém, na prática, estas variáveis são estocásticas e delas surge a necessidade de estoques de segurança, absorvendo a variação para evitar faltas. O ponto de pedido passa a ser determinado a partir da fórmula (10), com os valores médios da demanda e *lead time*, acrescido de um termo adicional, denominado de estoque de segurança.

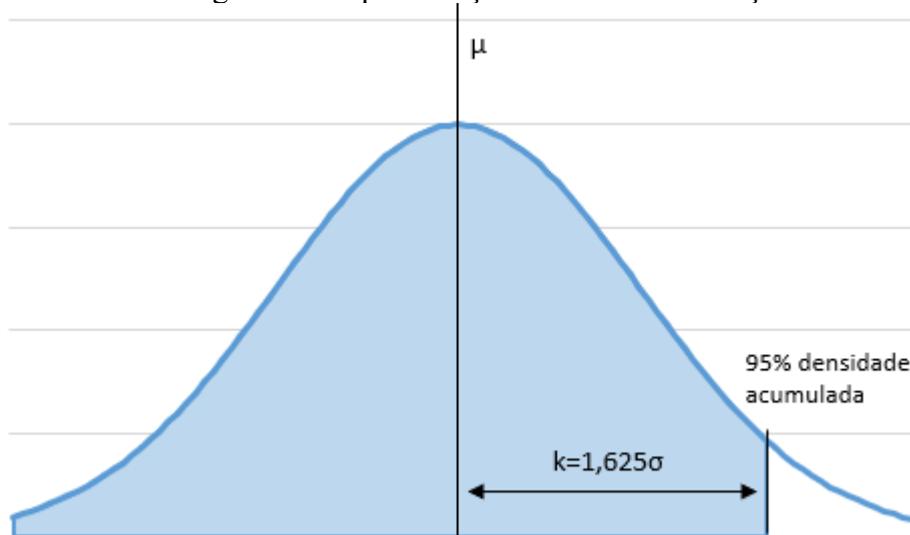
Esta abordagem é frequentemente chamada de revisão contínua, pois é necessário rever continuamente o nível de estoque de cada item para verificar a necessidade de um pedido. A vantagem desta abordagem é que, ainda que os períodos sejam irregulares, o lote de compras é sempre o mesmo e pode ser estabelecido a partir de modelos de lote econômico. Entretanto verificar continuamente os níveis de estoque requer bastante atenção.

Uma alternativa mais simples é a chamada revisão periódica, que sacrifica o uso de um lote de compras fixo, e, portanto, possivelmente ótimo, para ter um intervalo regular entre reposições. O nível de estoque pode ser checado, por exemplo, ao final de cada expediente, facilitando o controle, em particular quando se trata de múltiplos produtos.

2.3 DETERMINAÇÃO DO ESTOQUE DE SEGURANÇA

A definição do nível de serviço é um fator importante na estratégia da empresa. Segundo Ballou (2006, p.278), é representado como um valor entre 0 e 1, advindo da probabilidade de atender um pedido com um produto do estoque. O valor k usado nas equações a seguir vêm de quantos desvios-padrões são necessários para representar o nível de serviço como percentagem da área abaixo da curva nas distribuições normais, como apresentado na Figura 1, para um nível de serviço de 95%.

Figura 1 – Representação do Nível de Serviço



Fonte: Autoria Própria

A partir disto podem ser definidos os estoques de segurança. Na literatura são encontrados vários modelos para defini-los. Um dos mais antigos depende apenas do nível de serviço desejado e do desvio padrão da demanda durante o período de reposição. O seguinte modelo foi proposto por Brown (1959, p. 112):

$$E_s = k \cdot \sigma_d \quad (11)$$

onde:

E_s : estoque de segurança, em unidades;

k : valor referente ao nível de serviço (obtido da distribuição normal);

σ_d : desvio padrão da demanda durante o período de reposição, em unidades.

Para o desvio padrão, a qualificação de “durante o período de reposição” requer cautela no seu cálculo, caso os dados a que se tenha acesso tenham periodicidade diferente. Como apresentado anteriormente, não se deve somar, e por conseguinte multiplicar por constantes, desvios padrões. Ballou (2006, p. 288) reforça a seguinte equação:

$$\sigma_d = \sigma_{1p} \cdot \sqrt{LT} \quad (12)$$

onde:

σ_{1p} : desvio padrão de um período, em unidades;

LT: tempo de reposição (*lead time*) em número de períodos.

Um ponto fraco desta expressão é considerar constante o período de reposição, tal que o valor determinado é inadequado para o nível de serviço projetado caso exista a possibilidade de atraso na entrega. Brown (1962, p. 367), propôs uma segunda expressão mais completa para o cálculo do estoque de segurança, dada por:

$$E_s = k \cdot \sqrt{\mu_r \sigma_d^2 + \mu_d^2 \sigma_r^2} \quad (13)$$

onde:

E_s : estoque de segurança em unidades;

k : valor referente ao nível de serviço;

σ_d : desvio padrão da demanda durante um período, em unidades;

σ_r : desvio padrão do tempo de reposição, em períodos;

μ_d : demanda média durante um período, em unidades;

μ_r : tempo de reposição médio, em períodos.

Ao admitir que o tempo de reposição não é necessariamente fixo, o modelo torna-se mais robusto, mas também depende de mais hipóteses, especificamente quanto ao tempo de reposição ser adequadamente representado por uma curva normal e não possuir dependência com a demanda (CAMPOS, 2008).

Embora este modelo seja usado até os dias de hoje, muitas pesquisas foram feitas buscando melhores resultados. Neste sentido são propostos fatores de segurança adicionais para casos com maiores incertezas, onde a produção do insumo também é estocástica (HUNG, CHANG, 1999), ou quando há probabilidade de falhas no processo (CHAKRABORTY, GIRI, 2012) ou, ainda, com registros históricos imprecisos (KUMAR, EVERS, 2015).

Outros autores buscam novos modelos para determinar este valor. Alguns partem de problemas mais complexos, como múltiplos vendedores, produtos e compradores (TALEIZADEH, NIAKI, BARZINPOUR, 2011) ou preparo para desastres naturais (OZGUVEN, OZBAY, 2012); outros usando métodos da pesquisa operacional, como por exemplo o *Branch and Bound* (LOULY, DOLGUI, 2009), ou ferramentas computacionais, como redes neurais (KOURENTZES, BARROW, CRONE, 2014). Por fim, alguns trabalhos relacionados diretamente com o assunto deste texto, propõem modelos que aliviam as restrições implícitas na formula de Brown, como a não correlação entre demanda e tempo de

reposição e a normalidade destes valores (EPPEN, MARTIN, 1988; FOTOPOULOS, WANG, RAO, 1988).

Eppen e Martin (1988) demonstram um exemplo bastante ilustrativo sobre como não considerar as premissas de normalidade no modelo de Brown pode induzir a um resultado equivocado: primeiro Eppen e Martin supõem um *lead time* determinístico e de quatro períodos, e uma demanda distribuída normalmente com média 100 unidades e desvio padrão 10 unidades. Aplicando (3) e (12), tem-se um consumo médio de 400 unidades e desvio padrão de 20 unidades ao longo do *lead time*. Para um nível de serviço de 95%, k toma o valor de 1,625. O ponto de pedido seria de:

$$PP = 100 \cdot 4 + 1,625 \cdot 10 \cdot \sqrt{4} \cong 433$$

Na sequência consideram inv uma segunda situação, desta vez com o *lead time* estocástico com a probabilidade de $\frac{1}{2}$ de levar quatro períodos, e $\frac{1}{2}$ de levar dois períodos. Esta distribuição, para o *lead time*, possui média e variância calculadas por:

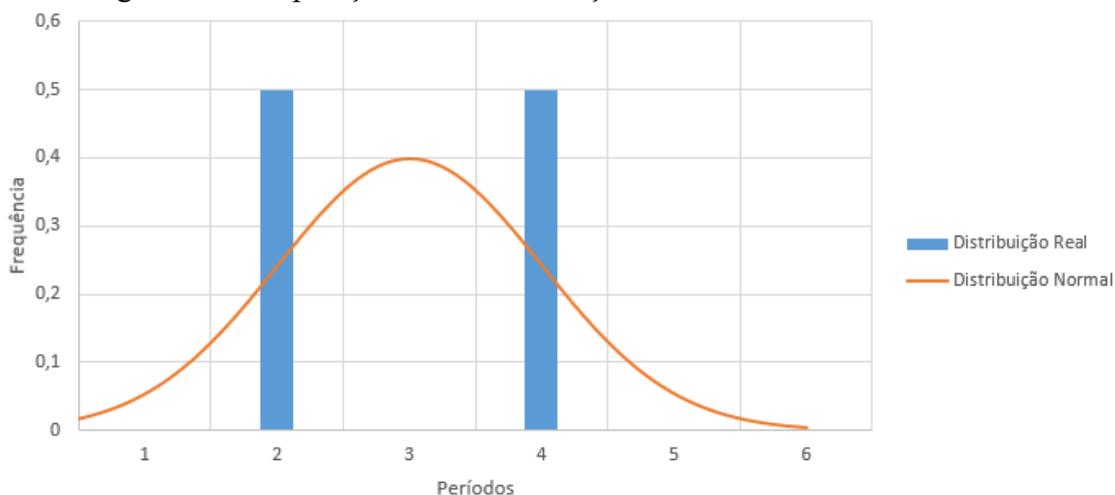
$$\mu_r = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 3$$

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{2} \cdot (2 - 3)^2 + \frac{1}{2} \cdot (4 - 3)^2 = 1$$

Aplicando estes valores na determinação do ponto de pedido, dada pelas fórmulas (10) e (13), tem-se:

$$PP = 3 \cdot 100 + 1,625 \cdot \sqrt{3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 100^2} \cong 465$$

É notável a incongruência: na primeira situação, um ponto de pedido de 433 unidades é suficiente para manter o nível de serviço desejado para um tempo de reposição de quatro períodos, enquanto na segunda situação este tempo é sempre menor ou igual a quatro, porém o resultado da fórmula indica a necessidade de um ponto de pedido mais elevado. Isto se deve à não normalidade do *lead time*, como observado na Figura 2.

Figura 2 – Comparação entre Distribuição Real e Normal do *Lead Time*

Fonte: Adaptado de Eppen e Martin (1988)

Eppen e Martin (1988) estudam dois casos, o primeiro quando não há autocorrelação na demanda, mas permite qualquer distribuição de demanda para um *lead time* determinístico e ajustes para também considerar *lead times* estocásticos, e o segundo considerando a autocorrelação. Eles também propõem um método para o cálculo do nível de serviço com tempo de reposição incerto. Após definir um ponto de pedido, calcula-se o nível de serviço para cada tempo de reposição possível e faz-se a soma ponderada pela probabilidade de ocorrência de cada tempo de reposição.

Sendo $NS(PP,t)$ o nível de serviço para um tempo t e ponto de pedido PP , e ainda, sendo $P(LT=t)$ a probabilidade do *lead time* LT assumir o valor de t períodos, tem-se:

$$NS(PP) = \sum_t P(LT = t) \cdot NS(PP, t) \quad (14)$$

Por fim, observa-se também no trabalho de Fotopoulos, Wang e Rao (1988), o tratamento da autocorrelação nas previsões através de médias móveis ou processos autorregressivos, o que permite aceitar qualquer tipo de distribuição de demanda e qualquer distribuição discreta para o tempo de reposição. O modelo proposto por estes autores é bastante universal, porém garante apenas o limite superior para o estoque de segurança. O estoque necessário para o nível de serviço definido pode ser menor que o valor encontrado, o que acarretaria em maiores custos de manutenção de estoque que os mínimos necessários. Entretanto, através da análise deste modelo é possível determinar que o erro relacionado à autocorrelação é mais significativo que o erro advindo da suposição incorreta da distribuição.

3. DESENVOLVIMENTO

Miguel (2012, p. 170) define modelo como uma representação de uma situação ou da realidade, construído para auxiliar o tratamento sistemático do que representa. Em particular, os modelos quantitativos abstraem a situação em uma linguagem matemática e computacional, possibilitando o uso de técnicas analíticas e experimentais para calcular valores numéricos do sistema. Um modelo deve ser suficientemente detalhado para representar a situação real, mas suficientemente simples para ser tratado através de métodos conhecidos.

No modelo quantitativo constam dois tipos de variáveis: as de controle, que representam os valores de entrada, e as de desempenho, advindas de relações causais e quantitativas definidas entre as variáveis de controle.

3.1 O MODELO BÁSICO

Uma abordagem alternativa para a definição do ponto de pedido (variável de desempenho) dado o nível de serviço (variável de controle) é o caminho inverso. A partir do ponto de pedido (variável de controle) define-se o nível de serviço (variável de desempenho). Com um modelo baseado nesta abordagem pode-se, através de métodos numéricos, testar possíveis valores para o ponto de pedido até obter-se o nível de serviço desejado. Para o caso de tempo de reposição estocástico isto pode ser feito através da função de distribuição cumulativa da demanda. Se conhecida a função densidade da demanda, o nível de serviço pode ser calculado através da equação (1), para qualquer que seja a função. Uma vantagem deste método é não se restringir à distribuição normal. Qualquer que seja a distribuição da demanda, é possível definir o nível de serviço associado a um determinado ponto de pedido.

3.2 TEMPO ESTOCÁSTICO

O modelo básico pode ser expandido para contemplar tempos de reposição estocásticos aplicando-o separadamente para cada possível data de entrega, como proposto por Eppen e Martin (1988). Aqui é feita a suposição de datas de entrega discretas e, após avaliar o nível de serviço para cada possível dia para um mesmo ponto de pedido, pondera-se

estes valores pela função densidade do tempo de reposição, de modo a obter-se o nível de serviço geral, como proposto por Eppen e Martin (1988):

$$NS(PP) = \sum_t P(LT = t) \cdot NS(PP, t) \quad (15)$$

onde:

NS(PP): nível de serviço geral para um determinado ponto de pedido;

$P(LT = t)$: probabilidade da reposição ocorrer em t períodos;

NS(PP, t): nível de serviço para um determinado ponto de pedido caso a reposição ocorra em t períodos.

É importante ressaltar que neste processo o tempo de reposição pode ter qualquer distribuição arbitrária desde que discreta ou discretizada, caso seja contínua. Também é importante notar que para o cálculo de $NS(PP, t)$ deve ser usada a função densidade de probabilidade da demanda para o período de reposição t .

3.3 DEMANDAS COM SAZONALIDADE

Outra situação realista é a demanda não ser adequadamente representada por apenas uma variável aleatória. Como exemplo, considere o caso de uma empresa que possui demandas diferentes em cada dia da semana. Presumir que a demanda é representada por uma só variável aleatória simplifica a resolução do modelo, mas pode acarretar em erros consideráveis, em particular quando a variação devido à sazonalidade é expressiva em relação à variação aleatória. Assim, o ponto de pedido toma valores diferentes dependendo de onde a empresa se encontra no seu ciclo sazonal, visto que as demandas dos períodos seguintes, quando somadas, não são adequadamente representadas pelo produto do tempo de reposição (uma constante), e a demanda diária (variável aleatória).

Ao identificar o ciclo de sazonalidade, para cada período do ciclo pode ser definido uma variável de demanda aleatória através da soma de dados históricos. É elaborada uma matriz onde cada elemento corresponde a uma variável aleatória $D(LT, C)$, onde LT é o intervalo entre o pedido e a reposição (valor discreto) e C o instante do ciclo sazonal, com atenção às equações (4) e (8), para fins de cálculo da média e desvio padrão para cada elemento da matriz, denotado por $D(LT, C)$.

Nesta etapa é necessário escolher o tipo de distribuição que mais se adequa para obter a função densidade a partir dos valores calculados. De acordo com Brown, “a distribuição normal é uma descrição boa o suficiente das características dos erros de previsão” (1959, p. 85, tradução nossa). Para outras distribuições de erro nas previsões é necessário adotar algum método mais elaborado. Porém este procedimento requer que não exista correlação entre os erros de previsão da demanda, confirme a premissa básica da igualdade de Bienaymé. Uma abordagem alternativa é considerada na próxima seção.

Aplicando o modelo básico para cada valor de C na matriz $D(LT, C)$ e seguindo o modelo de tempo estocástico, tem-se o nível de serviço para qualquer valor de ponto de pedido em função do instante no ciclo sazonal, ou seja, o ponto de pedido pode variar com a sazonalidade.

3.4 DEMANDAS DEPENDENTES

A abordagem proposta até aqui, ao somar variáveis aleatórias, presume que estas sejam independentes. Em outras palavras, a demanda de um certo dia não depende da demanda de dias anteriores. Contudo, em alguns casos, como acontece por exemplo em vendas promocionais, consumidores recorrentes podem adiantar suas compras pelo menor valor e, conseqüentemente, a demanda será menor nos períodos seguintes. Utilizando-se de princípios estatísticos explícitos, somar variáveis dependentes exige um conhecimento profundo sobre a relação entre elas, o que é uma grande barreira para a aplicação prática destes métodos.

A fim de minimizar o efeito da correlação entre as variáveis é possível se utilizar do conceito da média móvel. De acordo com Ballou (2006, p. 246), no cálculo da média móvel “o número de pontos de dados é escolhido de forma a eliminar os efeitos de sazonalidade e irregularidade”. Para a situação descrita no item anterior, a matriz das demandas pode ser determinada com este artifício; ao invés de definir uma variável aleatória para cada período do ciclo e somá-las no horizonte desejado, a partir dos dados históricos se constrói novos vetores $D(LT)$ de demandas observadas, um para cada possível *lead time* LT , onde os elementos destes vetores correspondem à soma das demandas observadas dos próximos LT períodos, como mostra a Tabela 1:

Tabela 1: Construção dos Vetores de Demanda por *Lead Time*

D(LT=1)	d1	d2	d3	...
D(LT=2)	d1+d2	d2+d3	d3+d4	...
D(LT=3)	d1+d2+d3	d2+d3+d4	d3+d4+d5	...

Fonte: Autoria Própria

Na Tabela 1 as demandas que ocorrem ao longo do tempo de reposição são consideradas invariáveis com a data de realização do pedido. Para o caso em que a demanda está sujeita a sazonalidades, estes vetores associados a cada LT precisam levar em conta a posição que se encontra ao longo do ciclo no momento da realização do pedido. Assim, estes cálculos precisam ser adaptados para considerar a demanda que ocorre ao longo do período de reposição para cada instante no ciclo de sazonalidade.

Para tanto, as observações são divididas em vetores menores, com as demandas referentes a apenas um instante no ciclo, dando origem a uma matriz de vetores $D(LT, C)$. A título de exemplo, considere os dados apresentados na Tabela 2, composto por um ciclo de sazonalidade sazonal de dois períodos ($C=0$ ou $C=1$). Para um tempo de reposição $LT=1$, observa-se as demandas $d1, d2, d3...$ que se aplicam em períodos consecutivos. Contudo, há de se observar que para fins de cálculo da demanda para um tempo de reposição $LT=1$, no primeiro período do ciclo, apenas os valores do conjunto $\{d1, d3, d5...\}$ devem ser considerados para fins de determinação da distribuição de demanda no *lead time*, considerando que o pedido de reposição será feito no momento $C=0$ do ciclo de sazonalidade (como mostra $D(LT=1, C=0)$). Já para a reposição feita no momento $C=1$, apenas os valores do conjunto $\{d2, d4, d6...\}$ apresentariam interesse para fins de determinação da demanda neste *lead time*.

Tabela 2: Construção da Matriz de Demanda

	Primeiro ciclo		Segundo ciclo		...
	C=0	C=1	C=0	C=1	
D(LT=1)	d1	d2	d3	d4	...
D(LT=1, C=0)	d1	d3	d5	d7	...
D(LT=1, C=1)	d2	d4	d6	d8	...

Fonte: Autoria Própria

Com estes conjuntos de valores de demanda observada, calcula-se a média e desvio padrão, de modo a obter-se os parâmetros da distribuição normal de demanda em função do *lead time* e do momento de realização da ordem de reposição. Este procedimento minimiza o efeito da covariância, de forma similar à média móvel.

3.5 PASSO A PASSO PARA DETERMINAÇÃO DO PONTO DE PEDIDO

Estabelecidos estes ajustes, convém explicitar o algoritmo que, ao receber dados históricos, emite os valores de ponto de pedido desejados.

Seja $D_1[d]$ a demanda observada na data d ; seja t uma possível realização do *lead time* LT , e $P(LT=t)$ a probabilidade desta realização. Considere, ainda, um ciclo de sazonalidade dividido em períodos denotados por $C=0...Cf-1$.

Inicia-se definindo um vetor $D(LT=t)$, onde cada elemento deste vetor é a soma das demandas observadas ao longo de t períodos, como apresentado na Tabela 1, calculadas por:

$$D(LT = t)[n] = \sum_{u=n}^{n+t-1} D_1 [u] \quad (16)$$

Para o caso da Tabela 2, os valores da matriz $D(LT,C)$ são calculados levando em consideração o ciclo de sazonalidade. Para um ciclo de Cf períodos, C pode tomar qualquer valor entre 0 e $Cf-1$, e os elementos do vetor de observações para uma dada posição da matriz $D(LT, C)$ são calculados por:

$$D(LT = t, C)[n] = D(LT = t)[1 + C + Cf \cdot (n - 1)] \quad (17)$$

Assim, para cada vetor $D(LT=t, C)$ são definidos a média e desvio padrão que corresponde às diversas observações de demanda realizadas durante o período de reposição $LT=t$, no instante C do ciclo de sazonalidade, por meio das equações (2) e (6).

Conhecida a distribuição dos erros, já é possível calcular o nível de serviço esperado para cada cenário dado um ponto de pedido arbitrado PP , através da função de distribuição cumulativa equivalente.

Supondo que estas demandas seguem uma distribuição normal, tem-se o nível de serviço em função do *lead time*, para um determinado PP :

$$NS(PP, LT, C) = P(D(LT, C) < PP) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{PP} e^{-\frac{(y-\mu(D(LT,C)))^2}{2\sigma(D(LT,C))^2}} dy \quad (18)$$

Adotando um valor de PP para um dado momento no ciclo C, visto que no momento em que é emitida a ordem de reposição o *lead time* ainda é incerto, tem-se o nível de serviço $NS(PP, LT=t, C)$ para um possível *lead time* t. Conhecendo a probabilidade de $LT=t$, denotado por $P(LT=t)$, calcula-se o nível de serviço geral, em função apenas do momento de ciclo, contemplando a probabilidade de ocorrência de cada cenário:

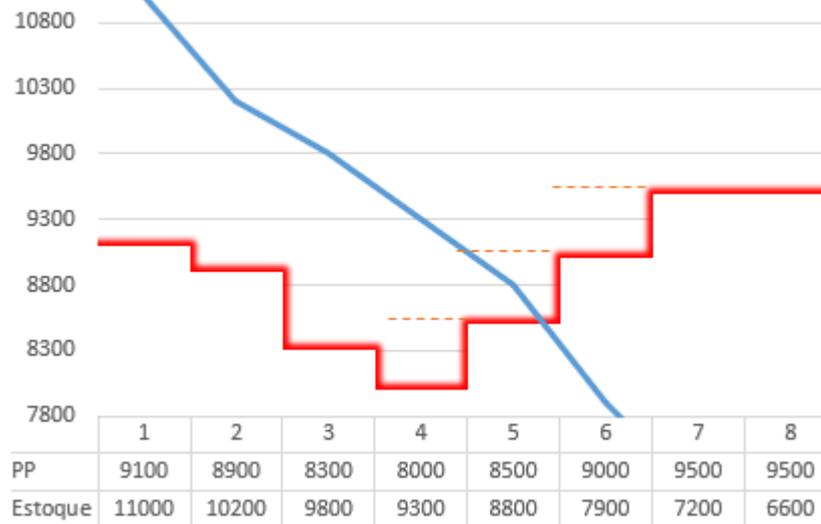
$$NS(PP, C) = \sum_t P(LT = t) \cdot NS(PP, LT = t, C) \quad (19)$$

onde t assume todos os possíveis valores de LT. Através de modelos de otimização é possível encontrar o ponto de pedido que atende um nível de serviço desejado. Na situação onde há sazonalidade, estes pontos de pedido serão diferentes para cada período no ciclo caso a tolerância às faltas seja constante.

3.6 DESCONTINUIDADES NAS FRONTEIRAS

Adotando-se um ponto de pedido diferente para cada período dentro do ciclo, surge um novo problema, advindo da descontinuidade nas fronteiras. É possível que em um determinado período o ponto de pedido seja inferior ao período seguinte, e caso o estoque seja maior que o ponto de pedido atual, mas menor que o ponto de pedido para o período seguinte, a ordem de reposição no próximo período será emitida já abaixo do ponto de pedido projetado, como no exemplo da Figura 3, a seguir.

Figura 3 – Exemplo de Descontinuidade do Ponto de Pedido



Fonte: Autoria Própria

Nesta figura, no período 5, a sistemática não acusa a necessidade de uma ordem de reposição, pois o estoque (8800) está acima do ponto de pedido do período (8500). Porém este estoque está abaixo do ponto de pedido do próximo período (9000). Assim, no período seguinte, ao emitir a ordem de reposição, o estoque (7900) já estará muito abaixo do ponto de pedido, tendendo a um nível de serviço aquém do projetado.

Prezando pela segurança, um possível ajuste é usar o maior valor de ponto de pedido calculado entre o período atual e o seguinte. Isto acarreta em um nível de serviço acima do projetado, mas limita a possibilidade de *stockouts* inesperados.

3.7 TEMPO DE REPOSIÇÃO DEPENDENTE DO CICLO SAZONAL

É possível que a distribuição de probabilidade dos tempos de reposição também ocorra em ciclos, como por exemplo, no caso de um fornecedor que não realiza entregas nos domingos. É possível ajustar o modelo para esta situação desde que se possa determinar um $P(LT=t, C)$, para cada período C no ciclo. Usando este valor na equação (19) calcula-se o ponto de pedido considerando este efeito. Uma dificuldade notável desta abordagem é a quantidade de amostras necessária para maior confiabilidade das probabilidades. Em um ciclo semanal, para uma granularidade de ao menos dez amostras por período no ciclo, são necessárias 70 reposições. Mesmo que ocorra uma reposição por semana, seria necessário

mais de um ano de dados históricos para o número de amostras desejado, dificultando a adoção de um modelo nesta linha.

4. TESTES NUMÉRICOS

Após a construção do modelo o próximo passo, segundo Miguel (2012, p.185), é sua solução. Comumente isto é feito comparando resultados com modelos já estabelecidos, e tomando nota de onde diferem estes resultados. No caso deste trabalho, convém realizar a comparação com o modelo de Brown, amplamente usado na prática. Embora o modelo de Brown não apresente explicitamente tratamento para situações com sazonalidade, pode-se aplica-lo considerando um histórico de demandas observado ao longo do tempo, de modo a calcular um ponto de pedido fixo a ser aplicado independente do momento no ciclo de sazonalidade em que é realizado o pedido. Para os testes numéricos deste capítulo foram utilizados o *software* Microsoft Excel, e a rotina de otimização GRG Não Linear disponibilizada pela ferramenta *solver*. Na sequência serão apresentados três casos distintos a fim de ilustrar a aplicação do método proposto comparando os resultados obtidos com o modelo clássico de Brown.

4.1 CASO 1 - DISTRIBUIÇÕES CONHECIDAS INDEPENDENTES

Considere as distribuições de probabilidades conhecidas e independentes, descritas como segue: (a) o ciclo de sazonalidade é composto de sete períodos; (b) o *lead time* segue a distribuição discreta na Tabela 3; (c) as variáveis aleatórias referentes à demanda para cada instante no ciclo são apresentadas na Tabela 4.

Tabela 3: Probabilidade de Ocorrência do *Lead Time*

<i>Lead Time</i>	Probabilidade
3	40%
4	40%
5	20%

Fonte: Autoria Própria

Tabela 4: Distribuições de demanda por período no ciclo

Instante	Demanda Média (unid.)	Desvio Padrão (unid.)
0	3400	800
1	2900	700
2	2200	600
3	2400	500
4	2200	400
5	1700	300
6	1200	250

Fonte: Autoria Própria

Para esta situação busca-se atender um nível de serviço de 80% tanto para o método de Brown quanto para o modelo proposto. Pelo método de Brown (equações (10) e (13)) , considera-se uma demanda aleatória cuja média é dada pela média das demandas apresentadas na Tabela 4, e a variância dada pela média das variâncias desta mesma tabela. Para o tempo de reposição basta calcular média e desvio padrão diretamente pelas equações (2) e (6), pois a distribuição é conhecida. O valor de k para o nível de serviço de 80% foi obtido pela função INV.NORMP.N do MS Excel, obtendo-se os valores da Tabela 5.

Tabela 5: Valores calculados referentes ao modelo de Brown

Modelo de Brown	
$\mu(D)$ (unid.)	2285,714
$\mu(LT)$ (períodos)	3,8
$\sigma(D)$ (unid.)	541,4926
$\sigma(LT)$ (períodos)	0,788811
$k(0,80)$	0,841621
PP(unid.)	10444,08

Fonte: Autoria Própria

No modelo proposto as variáveis aleatórias de demanda durante a reposição devem ser associadas para cada período no ciclo e cada possível tempo de reposição, como descrito na seção 3.3. Estes valores são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6: Valores de demanda calculados referentes ao modelo proposto

Modelo Proposto	Média(LT, C)			Desvio(LT, C)		
	LT = 3	LT = 4	LT = 5	LT = 3	LT = 4	LT = 5
C=0	8.500	10.900	13.100	1.221	1.319	1.378
C=1	7.500	9.700	11.400	1.049	1.122	1.162
C=2	6.800	8.500	9.700	877	927	960
C=3	6.300	7.500	10.900	707	750	1.097
C=4	5.100	8.500	11.400	559	976	1.201
C=5	6.300	9.200	11.400	890	1.132	1.282
C=6	7.500	9.700	12.100	1.092	1.246	1.343

Fonte: Autoria Própria

Definidos estes valores, é possível determinar o nível de serviço para cada valor da matriz dado um ponto de pedido arbitrário. É importante que o ponto de pedido varie apenas com o período no ciclo, pois o *lead time* é incerto no momento da ordem de reposição. Seguindo a lógica apresentada na seção 3.5, o valor de “k” pode ser explicitado pela expressão $k(PP, LT, C) = \frac{PP - \mu(LT, C)}{\sigma(LT, C)}$, e assumindo a distribuição da demanda como sendo normal, obtém-se o nível serviço parcial para esta combinação de LT e C, pela aplicação da função DIST.NORMP.N disponível no MS Excel. Multiplicando estes níveis de serviço parciais pelas correspondentes probabilidades de cada tempo de reposição e somando estas parcelas, encontra-se o nível de serviço geral para cada período do ciclo de sazonalidade, dado um ponto de pedido. Com o uso do *solver*, determina-se o ponto de pedido associado ao nível de serviço desejado (80%), conforme apresentado na seção 3.2. Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 7, juntamente com o nível de serviço para cada tempo de reposição e período do ciclo, bem como o nível de serviço geral para cada período do ciclo.

Tabela 7: Ponto de Pedido e Nível de Serviço para cada LT e C do Modelo Proposto

C	PP	NS(LT=3, C)	NS(LT=4, C)	NS(LT=5, C)	NS(C)
0	12316,13	1,00	0,86	0,28	0,80
1	10835,05	1,00	0,84	0,31	0,80
2	9355,43	1,00	0,82	0,36	0,80
3	9018,15	1,00	0,98	0,04	0,80
4	10005,81	1,00	0,94	0,12	0,80
5	10516,07	1,00	0,88	0,25	0,80
6	11160,33	1,00	0,88	0,24	0,80
P(LT=t)		40%	40%	20%	

Fonte: Autoria Própria

Nota-se que em alguns períodos o ponto de pedido é maior que o determinado pelo modelo de Brown, e menor em outros. Para fins de comparação, convém aplicar o modelo

desenvolvido com o valor do ponto de pedido determinado pelo modelo de Brown, e comparar as duas abordagens, como na Tabela 8.

Tabela 8: Comparação de Ponto de Pedido e Nível de Serviço Entre os Modelos

Período no Ciclo	Modelo Proposto		Modelo de Brown	
	Ponto de Pedido	Nível de Serviço	Ponto de Pedido	Nível de Serviço
0	12316,13	0,80	10444,08	0,53
1	10835,05	0,80	10444,08	0,74
2	9355,43	0,80	10444,08	0,95
3	9018,15	0,80	10444,08	0,87
4	10005,81	0,80	10444,08	0,83
5	10516,07	0,80	10444,08	0,79
6	11160,33	0,80	10444,08	0,71
Média	10458,14	0,80	10444,08	0,77

Fonte: Autoria Própria

Nota-se que nos períodos onde o ponto de pedido do modelo de Brown ficou abaixo do modelo proposto, o nível de serviço também ficou abaixo do planejado e vice-versa. É interessante ressaltar que os valores médios ficaram bem próximos.

4.1.1 Simulação

Os valores calculados são suficientes para realizar uma simulação e verificar se os resultados condizem com o esperado, e também comparar os resultados dos dois modelos.

Através da geração de números aleatórios do software MS Excel foram gerados 3000 valores de demanda seguindo as distribuições apresentadas para este caso. Também foi gerado para cada período um valor aleatório T referente ao tempo de reposição, seguindo as proporções propostas. Para cada período, se o estoque disponível observado na simulação, acrescido do estoque em trânsito for inferior ao ponto de pedido, é emitido uma ordem de reposição com seu *lead time* dado pelo valor T. Após T períodos a ordem de reposição entra para o estoque disponível e verifica-se se houve falta durante este período de reposição. Os resultados obtidos encontram-se resumidos na Tabela 9:

Tabela 9: Nível de Serviço Observado na Simulação do Caso 1

	Reposições	<i>Stockouts</i>	Nível de Serviço
Modelo Proposto	273	24	0,91
Modelo de Brown	273	41	0,85

Fonte: Autoria Própria

Nos dois modelos o nível de serviço foi superior ao projetado, com o modelo proposto ainda maior, em parte pelo ajuste de descontinuidades descrito na seção 3.6. Porém o nível de serviço é apenas um indicador de performance dentre muitos, e pode não ilustrar alguns ganhos do modelo alternativo. Outros fatores importantes são o estoque médio, fortemente relacionado ao custo de manutenção de estoques, e a magnitude das faltas, pois o nível de serviço considera qualquer falta igual, sejam poucas ou muitas unidades faltantes. A fim de minimizar o efeito da escolha do lote de compras, na simulação calculou-se o estoque médio somente durante o período de reposição. Também calculou-se as faltas totais e as faltas médias por *stockout*, apresentados na Tabela 10.

Tabela 10: Estoque Médio e Faltas na Simulação do Caso 1

	Estoque Médio (unid.)	Faltas	
		Total (unid.)	Média (unid.)
Modelo proposto	6530,3	-19191,5	-799,6
Modelo de Brown	6182,3	-42294,3	-1031,6
Diferença	348,0	23102,7	231,9

Fonte: Autoria Própria

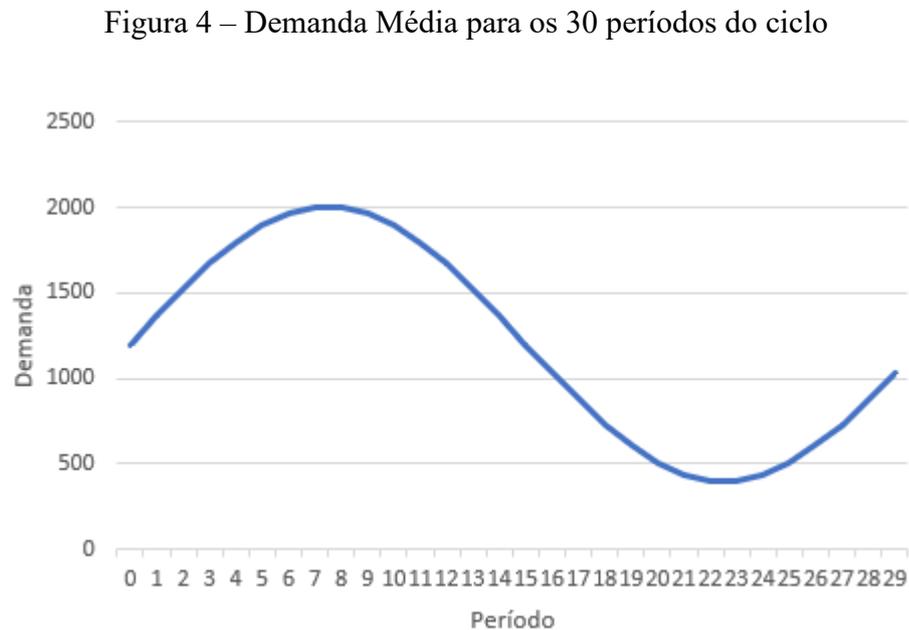
Como pode ser observado, o modelo proposto admite um estoque médio maior que o modelo de Brown, porém ocorrem menos faltas, e quando estas ocorrem são menores. Esta diferença justifica a adoção do modelo alternativo em situações onde o ganho é superior às dificuldades de implementação.

4.2 CASO 2 - DISTRIBUIÇÕES COM GRANDE CICLO SAZONAL

Quando o *lead time* é significativamente menor que o ciclo de sazonalidade, a diferença entre as duas abordagens se torna mais evidente. Neste caso 2, é considerada uma

situação hipotética ilustrativa, em que é possível observar as duas imprecisões que podem ocorrer usando o modelo de Brown quando o efeito de sazonalidade é mais significativo: durante períodos de alta demanda, o ponto de pedido fica menor que o necessário, enquanto durante períodos de baixa demanda o ponto de pedido fica acima do necessário.

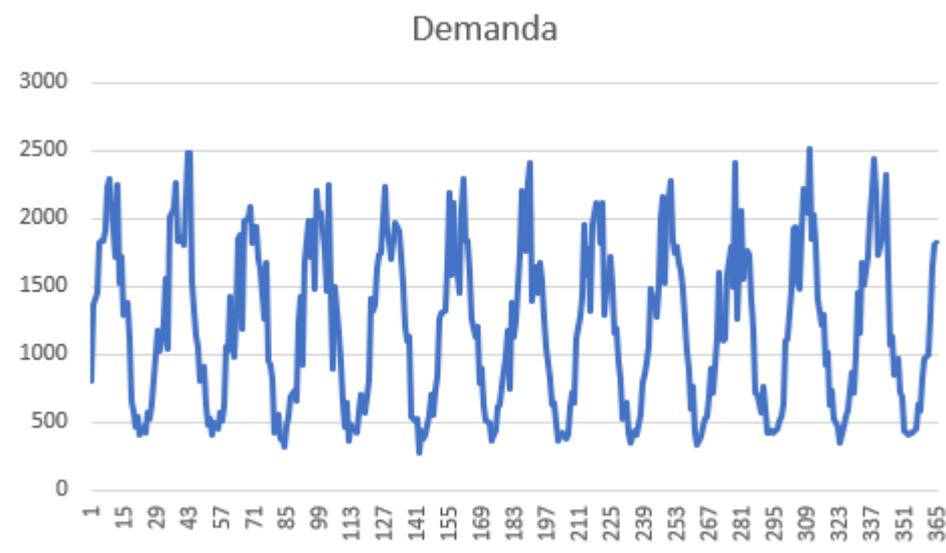
Considerando que a demanda média ao longo do ciclo de sazonalidade de 30 períodos comporta-se como uma senoide, com amplitude variando entre 400 e 2000 unidades, e ainda que para cada período o desvio padrão é 15% da média (por exemplo, no período 0 a demanda possui média de 1200 e desvio padrão de 180 unidades), tem-se as demandas médias ilustradas na Figura 4:



Fonte: Autoria Própria

Para a simulação deste cenário foram gerados valores de demanda para 10000 períodos. Contudo, para determinar as matrizes $D(LT, C)$, aplicadas no modelo proposto, foram usados apenas os primeiros 365 períodos. Devido à baixa variância, estes dados ainda possuem um formato que remete à senoide, como apresentado na Figura 5:

Figura 5 – Dados Utilizados para Determinação do Ponto de Pedido



Fonte: Autoria Própria

Adotando o mesmo ponto de pedido para todos os períodos, conforme preconizado pelo modelo de Brown, presume-se que durante o período de alta demanda (a primeira metade do ciclo), ocorrerá mais faltas que o planejado, enquanto que no período de baixa demanda os estoques ficarão acima do esperado. Por este motivo convém comparar os dois modelos frente a três situações distintas: períodos de alta demanda, períodos de baixa demanda e geral.

Neste experimento supôs-se que as distribuições não são conhecidas. Tomando os primeiros 365 períodos como dados históricos, constrói-se as matrizes definidas no passo a passo do capítulo 3.5. Aplicando os dois modelos neste conjunto de dados, obteve-se os valores da Tabela 11.

Tabela 11: Comparação entre Ponto de Pedido e Nível de Serviço Entre os Dois Modelos no Caso 2

	Modelo Proposto		Modelo de Brown	
	Ponto de Pedido (un.)	Nível de Serviço	Ponto de Pedido (un.)	Nível de Serviço
Máximo	9009,64	0,80	5819,46	1,00
Média (Alta)	7565,97	0,80	5819,46	0,42
Mínimo	1939,46	0,80	5819,46	0,15
Média (Baixa)	3243,07	0,80	5819,46	0,98
Média(Geral)	5404,52	0,80	5819,46	0,70

Fonte: Autoria Própria

Como esperado, nos períodos de alta demanda o ponto de pedido constante, proposto por Brown, foi insuficiente para manter a confiabilidade desejada. Por outro lado, nos períodos de baixa demanda o nível de serviço mostrou-se muito acima do esperado, implicando um ponto de pedido maior do que o necessário. Observa-se também, que o modelo proposto apresenta um ponto de pedido médio significativamente inferior ao modelo de Brown.

4.2.1 Simulação

Utilizando os pontos de pedido calculados e o restante dos valores de demanda gerados, foi usado o mesmo procedimento da simulação apresentada no capítulo 4.1, porém com o lote de compras reduzido para 15000 unidades, acarretando em mais amostras de reposições. O resumo dos resultados está apresentado na tabela 12.

Tabela 12: Resultados da Simulação do Caso 2

	Reposições	<i>Stockouts</i>	Nível de Serviço	Estoque Médio(un.)	Faltas Total(un.)	Faltas Média(un.)
Modelo Proposto	799	62	0,92	3975,5	-33463,7	-539,7
Modelo de Brown	799	320	0,60	3453,0	-409564,6	-1279,9

Fonte: Autoria Própria

Como pode ser observado nesta tabela, para o modelo proposto neste trabalho o nível de serviço foi melhor que o projetado, porém sem comprometer as outras métricas importantes. O modelo proposto mantém um nível de estoque mais elevado durante as reposições, porém a quantidade de *stockouts* foi significativamente menor, e quando ocorreram faltas, também foram menores. Filtrando as observações apenas para os períodos de alta demanda tem-se os valores da tabela 13:

Tabela 13: Resultados da Simulação do Caso 2 nos Períodos de Alta Demanda

	Reposições	<i>Stockouts</i>	Nível de Serviço	Estoque Médio(un.)	Faltas Total(un.)	Faltas Média(un.)
Modelo Proposto	561	43	0,92	4531,5	-28776,4	-685,2
Modelo de Brown	475	288	0,39	2492,5	-364507,2	-1350,0

Fonte: Autoria Própria

Como esperado, nesta situação estão a maioria das faltas do modelo de Brown, que além de mais frequentes também foram em média maiores que as faltas do modelo proposto. Já nos períodos de baixa demanda, observa-se os valores da tabela 14:

Tabela 14: Resultados da Simulação do Caso 2 nos Períodos de Baixa Demanda

	Reposições	<i>Stockouts</i>	Nível de Serviço	Estoque Médio(un.)	Faltas Total(un.)	Faltas Média(un.)
Modelo Proposto	238	19	0,92	2406,9	-4510,8	-237,4
Modelo de Brown	324	32	0,90	3888,3	-11436,2	-714,8

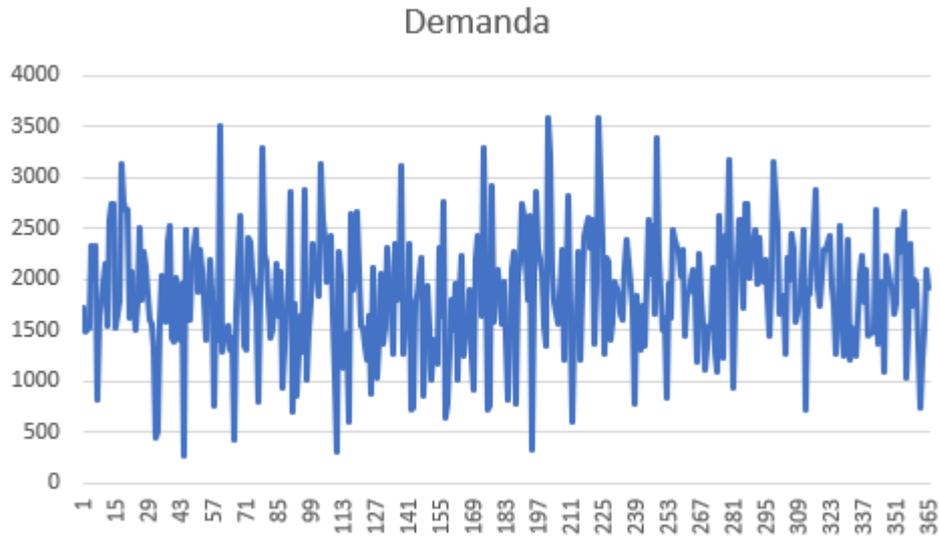
Fonte: Autoria Própria

Como pode ser observado, nesta situação o modelo de Brown obteve um nível de serviço similar ao modelo proposto, porém seu estoque médio foi significativamente maior e, quando houveram faltas, estas também foram maiores.

4.3 CASO 3 - DISTRIBUIÇÕES COM ALTA VARIÂNCIA PARA A DEMANDA

No exemplo anterior a distribuição escolhida era relativamente estável, com a tendência senoidal ainda visível nos valores gerados. Como a fórmula de Brown não discrimina entre a origem da variação, seja esta sazonal ou aleatória, é interessante verificar se a vantagem comparativa observada no exemplo anterior se mantém para casos com maior variância. Neste cenário foi adotado um desvio padrão de 30% da média, no lugar dos 15% adotados no caso 2. Os dados dos 365 primeiros períodos são apresentados na Figura 6.

Figura 6 – Dados Utilizados para Determinação do Ponto de Pedido, Alta Variância



Fonte: Autoria Própria

Ainda é perceptível a existência de alguma periodicidade, mas não está tão evidente quanto no caso anterior. Os níveis de serviço e pontos de pedido calculados para este conjunto de dados são apresentados na tabela 15.

Tabela 15: Comparação entre Ponto de Pedido e Nível de Serviço entre os Dois Modelos no Caso 3

	Modelo Proposto		Modelo de Brown	
	Ponto de Pedido(un.)	Nível de Serviço	Ponto de Pedido(un.)	Nível de Serviço
Máximo	9564,83	0,80	8591,79	0,96
Média (Alta)	8616,52	0,80	8591,79	0,78
Mínimo	6886,55	0,80	8591,79	0,67
Média (Baixa)	8587,98	0,80	8591,79	0,80
Média (Geral)	8602,25	0,80	8591,79	0,79

Fonte: Autoria Própria

Neste cenário a diferença entre os valores médios de ponto de pedido e nível de serviço entre os modelos é menor, se aproximado ao que foi observado no caso 1.

4.3.1 Simulação

Aplicando estes valores para o ponto de pedido nas demandas para os períodos gerados, tem-se os resultados apresentados na tabela 16, já divididos em caso geral, períodos de alta demanda e períodos de baixa demanda.

Tabela 16: Resultados da Simulação do Caso 3

	Reposições	<i>Stockouts</i>	Nível de Serviço	Estoque Médio(un.)	Faltas Total(un.)	Faltas Média(un.)
Caso Geral						
Modelo Proposto	816	54	0,93	5847,9	-54940,1	-1017,4
Modelo de Brown	816	60	0,93	5695,0	-63787,1	-1063,1
Em alta						
Modelo Proposto	500	51	0,90	5411,1	-51719,4	-1055,5
Modelo de Brown	480	53	0,89	5274,6	-56587,8	-1154,9
Em baixa						
Modelo Proposto	316	3	0,99	6838,6	-1442,6	-480,9
Modelo de Brown	336	7	0,98	6439,6	-4651,9	-664,6

Fonte: Autoria Própria

Neste caso os ganhos do modelo proposto são similares ao primeiro cenário. O nível de serviço observado nos dois modelos foi similar em todas as situações, e no modelo proposto o estoque médio foi maior. O maior ganho observado ainda é na quantidade de *stockouts* e na magnitude das faltas, onde o modelo proposto teve melhores resultados nos três cenários apresentados na tabela.

4.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

Nos três cenários simulados observou-se algumas vantagens no modelo proposto em relação ao modelo de Brown. Em particular, a magnitude das faltas e os *stockouts* são menores em todos os casos vistos. Os ganhos são mais aparentes em casos de sazonalidade mais bem definida e com baixa variância, e diminuem consideravelmente em situações de alta incerteza. Os ganhos também são dependentes da relação entre o tempo de reposição e o ciclo de sazonalidade, sendo favoráveis ao modelo proposto quanto menor for esta relação.

Por outro lado, o estoque médio no período de reposição tende a ser maior para o modelo proposto, porém e adapta ao ciclo sazonal, sendo menor em períodos de baixa demanda e maior nos períodos de alta, comportamento oposto ao modelo de Brown.

Nos casos simulados foi feita a suposição de que as variações aleatórias da demanda seguem a distribuição normal. Este fato ainda que possa não se verificar na prática, por parte da distribuição de uma demanda qualquer, na medida em que são descontados os valores da tendência e sazonalidade no modelo de previsão, os valores residuais tendem para uma medida de erro normalizada. Assim, a suposição de normalidade pode ser adotada, desde que os valores de tendência e sazonalidade na previsão sejam adequadamente levados em consideração e incorporados na determinação da primeira parcela do ponto de pedido (parte determinística), estimado pela expressão (10). Em relação à parcela aleatória (estoque de segurança), duas componentes de variância são consideradas conforme se observa no radicando da expressão (13), porém somente a primeira parcela é levada em conta no caso do modelo proposto, visto que o nível de serviço é calculado de modo independente para cada possível valor do *lead time*, para em seguida ponderar estes valores de nível de serviço pelas probabilidades de cada *lead time* ocorrer. Assim, neste cálculo, cada operação é feita com base em um valor de *lead time* determinístico, o que faz com que a segunda parcela do radicando se anule, validando desta forma a premissa de normalidade.

Finalmente, observa-se que o nível de serviço aferido pelas simulações mostrou-se acima do valor projetado. Esta diferença no método proposto pode ser ao menos parcialmente explicada pelo ajuste devido à descontinuidade (seção 3.6), porém carece de maiores estudos.

5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

O objetivo deste trabalho, propor um modelo para a definição dos estoques de segurança que se adapte às distribuições da demanda e do tempo de reposição com sazonalidade e tendência, foi atingido, pois durante as simulações o modelo mostrou-se robusto e dotado de vantagens comparativas frente ao método proposto por Brown. O desenvolvimento do modelo, começou com a proposta central de obter o nível de serviço em função do ponto de pedido ao invés do caminho inverso, comumente utilizado na literatura. A partir disso se desenvolveu os ajustes necessários para cada adaptação desejada, permitindo sua aplicação nos diversos cenários de interesse.

O primeiro dos objetivos específicos, descrever as noções fundamentais de controle de estoque, ocorre durante a apresentação da revisão teórica no capítulo 2. Foram encontrados estudos específicos sobre ponto de pedido que, junto aos livros-texto formaram a base para a busca de possíveis meios de implantar as adaptações desejadas.

As métricas adequadas para comparar os modelos para definição de estoque de segurança são apresentadas na seção 4.1, onde foram citados três indicadores: nível de serviço, faltas médias e estoque médio durante o período de reposição. Nota-se que o nível de serviço é uma medida complementar ao valor do *stockout*, isto é, um nível de serviço de 90%, por exemplo, representa uma probabilidade de 10% de ocorrer *stockout* durante o período de reposição.

Os próximos objetivos específicos, desenvolvimento da simulação e geração de distribuições, ocorrem durante o capítulo 4. Foi usado o *software* Microsoft Excel para gerar grandes quantidades de dados aleatórios que apresentassem características de sazonalidade em sua média, e com variações aleatórias em torno deste valor médio. Desenvolveu-se uma planilha que, recebendo estes valores aleatórios, define os valores de ponto de pedido e nível de serviço a partir dos dois métodos, com o uso do *solver* quando convém, e os apresenta de maneira resumida.

O último objetivo específico, testar e comparar os modelos, ocorre também no capítulo 4. Para cada cenário de interesse foram calculados os valores de ponto de pedido, tanto para o modelo de Brown quanto para o modelo proposto, considerando uma série sintética contendo 365 pontos de demanda. Os pontos de pedido determinados foram testados por meio de simulação de 3000 períodos no caso 1, e 10000 períodos nos casos 2 e 3. Os três cenários apresentados foram escolhidos para verificar sensibilidades específicas, porém antes

da aplicação prática deste modelo convém realizar uma nova simulação, com distribuições mais próximas ao cenário de aplicação, principalmente por tratar-se de um modelo pouco estudado. Os resultados obtidos com a simulação foram comparados em face das métricas sugeridas, de onde pode-se concluir que o método proposto apresenta vantagens sobre o método de Brown, especialmente no que diz respeito à garantia do nível de serviço (redução do *stockout*) e redução das faltas, apresentando pouca sensibilidade quanto à variação dos estoques médios durante o período de reposição.

Durante a elaboração do trabalho foram identificadas algumas limitações, as quais podem ensejar a realização de trabalhos futuros. Entre as limitações apontadas, o tratamento discretizado do *lead time* pode dar margem à realização dos experimentos com outros graus de granularidade em relação a esta discretização, de modo a analisar a sensibilidade do modelo.

Outra limitação apresentada refere-se à não consideração de dados reais. Fica como sugestão, para trabalhos futuros, a aplicação do método proposto em séries históricas de demandas e *lead time* de modo a levar-se em consideração, através de algum método de previsão (séries temporais, por exemplo) a determinação das sazonalidades e das tendências que dados reais podem apresentar, e desta forma validando o modelo na prática.

Ainda no sentido de trazer a aplicação do método proposto para mais próximo da realidade, sugere-se desenvolver modelos específicos para determinação do tamanho do lote de reposição, tanto para situações de compra quanto para situações de produção, nos casos onde se identificam sazonalidades e tendências e utilizar estes modelos para a definição do tamanho do lote de reposição durante a etapa de simulação.

A comparação neste trabalho, com o modelo de Brown, é conveniente por se tratar do método mais comum para a definição de pontos de pedido. Contudo ressalta-se a importância de se conhecer as premissas do modelo antes de sua utilização, sob o risco de resultados inesperados quando estas premissas não são atendidas, como observado no caso 2. Para trabalhos futuros sugere-se também comparar o modelo proposto com outros métodos disponíveis na literatura.

6 REFERÊNCIAS

BALLOU, Ronald H. **Gerenciamento da Cadeia de Suprimentos: Planejamento, Organização e Logística Empresarial**. 5ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2006diferenç.

BOUTE, R. N., DISNEY, S. M., LAMBRECHT, M. R., *et al.* "Coordinating lead times and safety stocks under autocorrelated demand", **European Journal of Operational Research**, v. 232, n. 1, p. 52–63, 2014. DOI: 10.1016/j.ejor.2013.06.036. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2013.06.036>

BROWN, R. G. **Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series**. N.J, Prentice Hall, 1962

BROWN, R. G. **Statistical Forecasting for Inventory Control**. N.Y, McGraw-Hill Book Company, 1959

CAMPOS, J. F. **Revisão do cálculo da variabilidade da demanda durante o tempo de ressuprimento**. Florianópolis, UFSC, 2008

CHAKRABORTY, T., GIRI, B. C. "Joint determination of optimal safety stocks and production policy for an imperfect production system", **Applied Mathematical Modelling**, v. 36, n. 2, p. 712–722, 2012. DOI: 10.1016/j.apm.2011.07.012. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2011.07.012>

EPPEN, G. D., MARTIN, R. K. "Determining Safety Stock in the Presence of Stochastic Lead Time and Demand", **Management Science**, v. 34, n. 11, p. 1380–1390, 1988. DOI: 10.1287/mnsc.34.11.1380

FOTOPOULOS, S., WANG, M. C., RAO, S. S. "Safety stock determination with correlated demands and arbitrary lead times", **European Journal of Operational Research**, v. 35, n. 2, p. 172–181, 1988. DOI: 10.1016/0377-2217(88)90026-4.

GONÇALVES, J. N. C., SAMEIRO CARVALHO, M., CORTEZ, P. "Operations research models and methods for safety stock determination: A review", **Operations Research Perspectives**, v. 7, n. April, p. 100164, 2020. DOI: 10.1016/j.orp.2020.100164. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.orp.2020.100164>.

HUNG, Y. F., CHANG, C. Bin. "Determining safety stocks for production planning in uncertain manufacturing", **International Journal of Production Economics**, v. 58, n. 2, p. 199–208, 1999. DOI: 10.1016/S0925-5273(98)00124-8.

KOURENTZES, N., BARROW, D. K., CRONE, S. F. "Neural network ensemble operators for time series forecasting", **Expert Systems with Applications**, v. 41, n. 9, p. 4235–4244, 2014. DOI: 10.1016/j.eswa.2013.12.011. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2013.12.011>

KUMAR, A., EVERS, P. T. "Setting safety stock based on imprecise records", **International Journal of Production Economics**, v. 169, p. 68–75, 2015. DOI: 10.1016/j.ijpe.2015.07.018. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijpe.2015.07.018>. LOULY

LOÈVE, Michel. **Probability Theory, Graduate Texts in Mathematics**, Volume 45, 4th edition, Springer-Verlag, 1977

M. A. O., DOLGUI, A. "Calculating safety stocks for assembly systems with random component procurement lead times: A branch and bound algorithm", **European Journal of Operational Research**, v. 199, n. 3, p. 723–731, 2009. DOI: 10.1016/j.ejor.2007.11.066. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2007.11.066>

MIGUEL, Paulo Augusto Cauchick (Coord.). **Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012. 260 p. ISBN 9788535248913.

MOOD, A. M., GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. **Introduction to the theory of statistics**. McGraw-Hill, Inc., N. Y., 1974

OZGUVEN, E., OZBAY, K. "Case study-based evaluation of stochastic multicommodity emergency inventory management model", **Transportation Research Record**, n. 2283, p. 12–24, 2012. DOI: 10.3141/2283-02.

SLACK, Nigel; CHAMBERS, Stuart; JOHNSTON, Robert. **Administração da produção**. 1. ed. São Paulo: Atlas, 2006

TALEIZADEH, A. A., NIAKI, S. T. A., BARZINPOUR, F. "Multiple-buyer multiple-vendor multi-product multi-constraint supply chain problem with stochastic demand and variable lead-time: A harmony search algorithm", **Applied Mathematics and Computation**, v. 217, n. 22, p. 9234–9253, 2011. DOI: 10.1016/j.amc.2011.04.001. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2011.04.001>