

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E ELETRÔNICA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Luiz Henrique Marcos Netto

**ESTUDO E IMPLEMENTAÇÃO DE SOFTWARE DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS  
DE MOTOR DE INDUÇÃO MONOFÁSICO DE CAPACITOR PERMANENTE**

Florianópolis

2021

Luiz Henrique Marcos Netto

**ESTUDO E IMPLEMENTAÇÃO DE SOFTWARE DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS  
DE MOTOR DE INDUÇÃO MONOFÁSICO DE CAPACITOR PERMANENTE**

Trabalho de Conclusão do Curso de Graduação em Engenharia Elétrica do Centro Tecnológico da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Mauricio Valencia Ferreira da Luz, Dr.

Florianópolis

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Marcos Netto, Luiz Henrique  
Estudo e Implementação de Software de Estimação de  
Parâmetros de Motor de Indução Monofásico de Capacitor  
Permanente / Luiz Henrique Marcos Netto ; orientador,  
Maurício Valencia Ferreira da Luz, 2021.  
119 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -  
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico,  
Graduação em Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

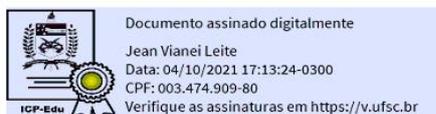
1. Engenharia Elétrica. 2. Motor de indução monofásico.  
3. Otimizador. I. Ferreira da Luz, Maurício Valencia. II.  
Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em  
Engenharia Elétrica. III. Título.

Luiz Henrique Marcos Netto

**Estudo e Implementação de Software de Estimação de Parâmetros de Motor de Indução  
Monofásico de Capacitor Permanente**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de “Bacharel em Engenharia Elétrica” e aceito, em sua forma final, pelo Curso de Graduação em Engenharia Elétrica.

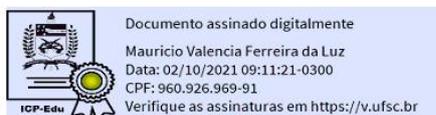
Florianópolis, 01 de outubro de 2021.



---

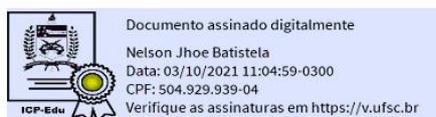
Prof. Jean Viane Leite, Dr.  
Coordenador do Curso de Graduação em Engenharia Elétrica

**Banca Examinadora:**



---

Prof. Mauricio Valencia Ferreira da Luz, Dr.  
Orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina



---

Prof. Nelson Jhoe Batistela, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina

*Ramon Gomes da Silva*

---

Eng. Ramon Gomes da Silva.  
WEG Equipamentos Elétricos S.A.

Este trabalho é dedicado a meus colegas de turma, aos meus professores, meus colegas de trabalho e à minha família.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus professores da UFSC pelos ensinamentos ao longo destes 6 anos de curso. Também agradeço aos estágios na CGT Eletrosul e na WEG Motores que realizei durante 2,5 anos da minha graduação. Agradeço a minha família pelo apoio ao longo da graduação. Agradeço aos meus amigos pelos bons momentos e pela vivência ao longo do curso.



## RESUMO

O presente trabalho aborda a estimação de parâmetros elétricos do motor de indução monofásico com capacitor permanente incluindo as perdas no núcleo, utilizando um otimizador numérico para auxiliar na busca dos parâmetros. Dentre os otimizadores, são usados os métodos da Secante, de Müller, de Nelder-Mead e de Newton truncado como os principais, com apresentação da teoria dos métodos da Secante e de Müller e suas adaptações para este problema. Os valores dos parâmetros a serem estimados incluem resistência e indutância dos enrolamentos principal e auxiliar de três componentes: estator, rotor e perdas no ferro. É apresentada a dedução das equações que estimam os valores dos parâmetros elétricos, porém desprezando as perdas no núcleo. Comparou-se resultados da aplicação da metodologia implementada no algoritmo com aqueles obtidos no artigo de referência, e após isso estimou-se os valores dos parâmetros elétricos de um motor fabricado na WEG Motores, com gráficos de Torque x velocidade e Rendimento x velocidade para cada um de três ensaios, apresentando resultados aceitáveis para o método de Nelder-Mead. O estudo é válido para condição de regime permanente.

**Palavras-chave:** Otimizador. Parâmetros elétricos. Perdas no ferro.

## **ABSTRACT**

The present work deals with the estimation of electrical parameters of a single-phase induction motor with permanent capacitor including the losses in the core, using a numerical optimizer to assist in the search for parameters. Among the optimizers, the Secante, Müller, Nelder-Mead and Truncated Newton methods are used as the main ones, presenting the theory of the Secante and Müller methods and their adaptations for this problem. Parameter values to be estimated include resistance and inductance of the main and auxiliary windings of three components: stator, rotor, and iron losses. The deduction of the equations that estimate the value of the electrical parameters is presented, but disregarding the losses in the core. Results of the application of the methodology implemented in the algorithm were compared with those obtained in the reference article, and after that, the value of the electrical parameters of a motor manufactured at WEG Motores were estimated, with Torque x speed and Yield x speed graphs for each of three tests, showing acceptable results for the Nelder-Mead method. The study is valid for steady state condition.

**Keywords:** Optimizer. Electric parameters. Core-loss.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Ímã magnético girando sob um disco de cobre.....	18
Figura 2.2 – Ímã magnético girando sob um disco de cobre.....	19
Figura 2.3 - Ímã magnético girando sob um disco de cobre, com referencial no ímã. .....	19
Figura 2.4 – Sentido das correntes induzidas no disco de cobre.....	20
Figura 2.5 – Desenho representativo de um solenoide.....	21
Figura 2.6 – Motor de indução monofásico sem o enrolamento auxiliar.....	22
Figura 2.7 – Vetores componentes do campo girante. ....	23
Figura 2.8 – Vetores componentes do campo girante. ....	25
Figura 2.9 – Vetores componentes do campo girante indicados mecanicamente. ....	26
Figura 2.10 – Eixos direto e quadratura da transformada de Park. ....	28
Figura 2.11 - Circuito simplificado de motor monofásico com capacitor permanente. .....	29
Figura 2.12 - Circuito simplificado de motor monofásico com capacitor permanente. .....	37
Figura 2.13 - Enrolamentos utilizados na teoria: principal e auxiliar no estator (à esquerda), enrolamentos principal e auxiliar no rotor girando a uma velocidade angular $w$ (centro), enrolamentos principal e auxiliar do núcleo magnetizante (à direita). ....	41
Figura 3.1 – Aproximação da reta dado no método da secante.....	52
Figura 3.2 – Aproximação da reta no método da secante e da parábola no método de Müller. ....	56
Figura 4.1 – Interface de usuário (Front-End) desenvolvida em Excel.....	62
Gráfico 4.2 – Comparação entre resultados do algoritmo (esquerda) e do autor do artigo (direita). Gráficos de Torque de saída (Nm) x Velocidade (rpm) e de Eficiência (%) x Velocidade (rpm).....	64
Gráfico 4.3 – Comparação entre resultados do algoritmo (esquerda) e do autor do artigo (direita). Gráficos de Torque de saída (Nm) x Velocidade (rpm) e de Eficiência (%) x Velocidade (rpm).....	66
Gráfico 4.4 – Gráficos de Torque de saída (Nm) x Velocidade (rpm) e de Eficiência (%) x Velocidade (rpm) gerados pelo algoritmo (ensaio 1). ....	67
Gráfico 4.5 – Gráficos de Torque de saída (Nm) x Velocidade (rpm) e de Eficiência (%) x Velocidade (rpm) gerados pelo algoritmo (ensaio 2). ....	68

Gráfico 4.6 – Gráficos de Torque de saída (Nm) x Velocidade (rpm) e de Eficiência (%) x Velocidade (rpm) gerados pelo algoritmo (ensaio 3). .....	68
---	----

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Resultados com parâmetros obtidos do Umans (Método da Secante adaptado). .....	63
Tabela 4.2 – Resultados com parâmetros estimados do Umans (Método de Müller adaptado). .....	65
Tabela 4.3 – Resultados dos parâmetros estimados por ensaio (três ensaios). .....	69
Tabela 4.4 – Desempenho estimado do motor, nas condições dos três ensaios.....	69

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

MIM Motor de indução monofásico

MIT Motor de indução trifásico

NM Nelder-Mead Simplex Algorithm

CG Conjugate Gradient Algorithm

BFGS Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno Algorithm

L-BFGS-B Limited-Memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno Algorithm

TNC Truncated Newton Algorithm

COBYLA Constrained Optimization by Linear Approximation Algorithm

SLSQP Sequential Least Squares Programming

## LISTA DE SÍMBOLOS

UNIDADES DE MEDIDA CONFORME S.I., EXCETO:  $\eta$  (%),  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ).

$x(t)$	Valor instantâneo da variável $x$
$\dot{X}$	Fasor da variável $x$
$\dot{\lambda}_{main}$	Fluxo concatenado do enrolamento principal do estator (fasor)
$\dot{\lambda}_{aux}$	Fluxo concatenado do enrolamento auxiliar do estator (fasor)
$\dot{\lambda}_1$	Fluxo concatenado do enrolamento principal do rotor (fasor)
$\dot{\lambda}_2$	Fluxo concatenado do enrolamento auxiliar do rotor (fasor)
$\dot{\lambda}_M$	Fluxo concatenado do enrolamento principal do núcleo magnetizante (fasor)
$\dot{\lambda}_A$	Fluxo concatenado do enrolamento auxiliar do núcleo magnetizante (fasor)
$i_{main}(t)$	Corrente do enrolamento principal do estator (instantânea)
$i_{aux}(t)$	Corrente do enrolamento auxiliar do estator (instantânea)
$i_1(t)$	Corrente do enrolamento principal do rotor (instantânea)
$i_2(t)$	Corrente do enrolamento auxiliar do rotor (instantânea)
$i_M(t)$	Corrente do enrolamento principal do núcleo magnetizante (instantânea)
$i_A(t)$	Corrente do enrolamento auxiliar do núcleo magnetizante (instantânea)
$\dot{I}_{main}$	Corrente do enrolamento principal do estator (fasor)
$\dot{I}_{aux}$	Corrente do enrolamento auxiliar do estator (fasor)
$\dot{I}_1^+$	Corrente do enrolamento principal do rotor devido ao campo progressivo (fasor)
$\dot{I}_2^+$	Corrente do enrolamento auxiliar do rotor devido ao campo progressivo (fasor)
$\dot{I}_1^-$	Corrente do enrolamento principal do rotor devido ao campo retrógrado (fasor)
$\dot{I}_2^-$	Corrente do enrolamento auxiliar do rotor devido ao campo retrógrado (fasor)
$\dot{I}_M$	Corrente do enrolamento principal do núcleo magnetizante (fasor)
$\dot{I}_A$	Corrente do enrolamento auxiliar do núcleo magnetizante (fasor)
$v_{main}(t)$	Tensão do enrolamento principal do estator (instantâneo)
$v_{aux}(t)$	Tensão do enrolamento auxiliar do estator (instantâneo)
$v_1(t)$	Tensão do enrolamento principal do rotor (instantâneo)
$v_2(t)$	Tensão do enrolamento auxiliar do rotor (instantâneo)
$v_M(t)$	Tensão do enrolamento principal do núcleo magnetizante (instantâneo)
$v_A(t)$	Tensão do enrolamento auxiliar do núcleo magnetizante (instantâneo)
$\dot{V}_{main}$	Tensão do enrolamento principal do estator (fasor)

$\dot{V}_{aux}$	Tensão do enrolamento auxiliar do estator (fasor)
$V_o$	Tensão de entrada
$\varphi_{main}$	Defasagem da tensão do enrolamento principal do estator
$\varphi_{aux}$	Defasagem da tensão do enrolamento auxiliar do estator
$\phi_{main}$	Defasagem da corrente do enrolamento principal do rotor
$\phi_{aux}$	Defasagem da corrente do enrolamento auxiliar do rotor
$\phi_1^+$	Defasagem da corrente do enrolamento principal do rotor devido ao campo progressivo
$\phi_1^-$	Defasagem da corrente do enrolamento principal do rotor devido ao campo retrógrado
$\phi_2^+$	Defasagem da corrente do enrolamento auxiliar do rotor devido ao campo progressivo
$\phi_2^-$	Defasagem da corrente do enrolamento auxiliar do rotor devido ao campo retrógrado
$R_{main}$	Resistência do enrolamento principal do estator
$R_{aux}$	Resistência do enrolamento auxiliar do estator
$R_R$	Resistência dos enrolamentos do rotor (mesmo valor para principal e auxiliar)
$R_M$	Resistência do enrolamento principal do núcleo magnetizante
$R_A$	Resistência do enrolamento auxiliar do núcleo magnetizante
$L_{main}$	Indutância própria do enrolamento principal do estator
$L_{aux}$	Indutância própria do enrolamento auxiliar do estator
$L_R$	Indutância própria dos enrolamentos do rotor (mesmo valor para principal e auxiliar)
$L_M$	Indutância própria do enrolamento principal do núcleo magnetizante
$L_A$	Indutância própria do enrolamento auxiliar do núcleo magnetizante
$L_{mainR}$	Magnitude da indutância mútua entre enrolamento principal do estator e rotor
$L_{auxR}$	Magnitude da indutância mútua entre enrolamento auxiliar do estator e rotor
$L_{main,ag}$	Indutância mútua entre enrolamento principal do estator e enrolamento principal do núcleo magnetizante
$L_{aux,ag}$	Indutância mútua entre enrolamento auxiliar do estator e enrolamento auxiliar do núcleo magnetizante
$L_{Mi}$	Indutância de dispersão do enrolamento principal do núcleo magnetizante
$L_{Ai}$	Indutância de dispersão do enrolamento auxiliar do núcleo magnetizante
$Z_{main}$	Impedância conectada em série com o enrolamento principal do estator

$Z_{aux}$	Impedância conectada em série com o enrolamento auxiliar do estator (capacitor)
$\dot{K}^+$	Variável auxiliar utilizada na corrente do rotor (relacionada com o campo progressivo).
$K^-$	Variável auxiliar utilizada na corrente do rotor (relacionada com o campo retrógrado).
$j$	Número imaginário
$I$	Igual a $\pm 1$
$W'$	Energia instantânea a partir da equação da coenergia
$W'_{main}$	Energia instantânea do enrolamento principal do estator, a partir da coenergia
$W'_{aux}$	Energia instantânea do enrolamento auxiliar do estator, a partir da coenergia
$W'_1$	Energia instantânea do enrolamento principal do rotor, a partir da coenergia
$W'_2$	Energia instantânea do enrolamento auxiliar do rotor, a partir da coenergia
$T_{elec}(t)$	Torque induzido (instantâneo)
$T_{elec}$	Torque induzido (médio)
$T_{rot}$	Torque de rotação (médio)
$T_{out}$	Torque de saída (médio)
$\eta$	Rendimento, dado em percentual
$P$	Número de par de polos
$s$	Escorregamento
$\theta$	Ângulo elétrico
$w$	Velocidade angular de rotação dos campos girantes progressivo e retrógrado
$\theta_m$	Ângulo mecânico do rotor
$w_m$	Velocidade angular de rotação do rotor
$\alpha$	Coefficiente térmico do material
$T$	Temperatura, dado em °C
$P_{in}$	Potência de entrada
$P_{out}$	Potência de saída
$P_{main}$	Perdas no enrolamento principal do estator
$P_{aux}$	Perdas no enrolamento auxiliar do estator
$P_{rotor}$	Perdas no rotor
$P_{core}$	Perdas no núcleo
$k_{wmain}$	Fator de enrolamento da principal do estator
$N_{main}$	Número total de espiras da principal do estator

$k_{w_{aux}}$	Fator de enrolamento da auxiliar do estator
$N_{aux}$	Número total de espiras da auxiliar do estator
$\mu_o$	Permeabilidade magnética do ar
$l$	Comprimento do pacote
$R$	Distância radial até a metade do entreferro
$\mu_o$	Permeabilidade magnética do ar
$g$	Entreferro
$N_{bar}$	Número de barras condutoras do rotor
$A_{bar}$	Seção transversal de uma barra condutora do rotor
$\sigma_{bar}$	Condutividade das barras do rotor
$A$	Variável auxiliar
$B$	Variável auxiliar
$C$	Variável auxiliar
$D$	Variável auxiliar
$E$	Variável auxiliar
$F$	Variável auxiliar
$a$	Variável auxiliar
$b$	Variável auxiliar
$c$	Variável auxiliar
$d$	Variável auxiliar
$e$	Variável auxiliar
$f$	Variável auxiliar

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>15</b>
1.1	OBJETIVOS .....	16
<b>1.1.1</b>	<b>Objetivo Geral.....</b>	<b>16</b>
<b>1.1.2</b>	<b>Objetivo Específico .....</b>	<b>17</b>
1.2	Organização do trabalho .....	17
<b>2</b>	<b>DESENVOLVIMENTO.....</b>	<b>18</b>
2.1	Princípio elementar de um motor de indução .....	18
2.2	Princípio de funcionamento de um motor de indução monofásico .....	21
2.3	Transformada de Park.....	27
<b>2.3.1</b>	<b>Transformação das variáveis.....</b>	<b>29</b>
2.4	Teoria eletromagnética do motor monofásico com enrolamento auxiliar .....	29
<b>2.4.1</b>	<b>Fluxo <math>\lambda_1</math> .....</b>	<b>35</b>
<b>2.4.2</b>	<b>Correntes <math>I_1 + e I_1 -</math> .....</b>	<b>35</b>
<b>2.4.3</b>	<b>Fluxo <math>\lambda_2</math> .....</b>	<b>36</b>
<b>2.4.4</b>	<b>Correntes <math>I_2 + e I_2 -</math> .....</b>	<b>36</b>
<b>2.4.5</b>	<b>Fluxo <math>\lambda_{main}</math> .....</b>	<b>37</b>
<b>2.4.6</b>	<b>Fluxo <math>\lambda_{aux}</math>.....</b>	<b>37</b>
<b>2.4.7</b>	<b>Lei de Ohm aplicado ao motor monofásico .....</b>	<b>37</b>
<b>2.4.8</b>	<b>Torque induzido médio .....</b>	<b>38</b>
<b>2.4.9</b>	<b>Equações restantes.....</b>	<b>38</b>
<b>2.4.10</b>	<b>Equações considerando as perdas no ferro .....</b>	<b>41</b>
<b>3</b>	<b>Algoritmo.....</b>	<b>46</b>
3.1	Estimação dos parâmetros iniciais.....	48
3.2	Otimizador .....	49
<b>3.2.1</b>	<b>Método da Secante adaptado.....</b>	<b>51</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Método de Müller adaptado .....</b>	<b>55</b>

3.2.3	Método do Gradiente adaptado.....	59
3.2.4	Otimizadores da biblioteca Scipy .....	59
4	Resultados obtidos .....	61
4.1	INTERFACE DE USUÁRIO (Front-End) .....	61
4.2	Comparação com artigo de referência .....	63
4.2.1	Parâmetros obtidos do Umans.....	63
4.2.2	Parâmetros estimados do Umans .....	65
4.3	Ensaio de motor WEG .....	67
5	Conclusão .....	70
	Apêndice A .....	72
	A.1 Transformada de Park - Componente $Vd$ .....	72
	A.2 Transformada de Park - Componente $Vq$ .....	73
	A.3 Fluxo $\lambda_1$ .....	74
	A.4 Correntes $I_{1+}$ e $I_{1-}$ .....	78
	A.5 Fluxo $\lambda_2$ .....	80
	A.6 Correntes $I_{2+}$ e $I_{2-}$ .....	82
	A.7 Fluxo $\lambda_{main}$ .....	84
	A.8 Fluxo $\lambda_{aux}$ .....	90
	A.9 Lei de Ohm aplicada ao motor monofásico.....	94
	A.10 Torque induzido médio.....	96
	A.11 Perdas no Rotor ( <b>Protor</b> ) .....	107



## 1 INTRODUÇÃO

O motor monofásico é alimentado com tensão monofásica alternada nos seus terminais. A vantagem do motor monofásico é a sua utilização facilitada em áreas residenciais e comerciais, onde a tensão monofásica se encontra disponível.

O motor de indução monofásico, além de apresentar as características do motor monofásico, dispõe de condutores curto-circuitados no rotor, o que gera uma indução de correntes no rotor. Em razão de ter apenas uma fase no enrolamento do estator, o campo magnético produzido pelo enrolamento do estator não gira, na verdade apenas pulsa, mantendo a sua direção e alternando o seu sentido ao longo do tempo. Em razão disso, o seu torque resultante na partida é nulo.

O motor de indução monofásico com enrolamento auxiliar, além de apresentar as características do motor de indução monofásico, contempla um enrolamento auxiliar principalmente para dar partida no motor. O enrolamento auxiliar pode ter diversas disposições, a depender do projeto. Aqui aborda-se a mais simples, a qual é facilmente encontrada na literatura: o enrolamento auxiliar fica disposto a  $90^\circ$  graus mecânicos em relação ao enrolamento principal e é conectado em paralelo com o enrolamento principal, sendo alimentado pela mesma tensão da rede.

A impedância do enrolamento auxiliar é projetada para ter defasagem distinta da impedância do enrolamento principal. Deste modo, as correntes estão defasadas entre si, gerando um campo girante com amplitude variando de maneira elíptica, proporcionando assim dar partida no motor.

Num motor de indução monofásico com fase dividida, o enrolamento principal e o enrolamento auxiliar são conectados em paralelo. Porém, o enrolamento auxiliar tem a impedância mais resistiva do que o enrolamento principal. Assim, cria-se uma defasagem entre as duas correntes, criando-se um campo girante e permitindo o giro do motor.

Num motor de indução monofásico com capacitor de partida, um capacitor é conectado em série com o enrolamento auxiliar, contudo ele é desconectado antes de atingir uma velocidade próxima à nominal. A chave geralmente utilizada para abrir o circuito é chamada centrífuga, que abre a partir de uma determinada velocidade do rotor. Ele é conectado com um dispositivo chamado platinado, que acopla a chave mecânica com os condutores do enrolamento auxiliar, permitindo assim abrir o circuito elétrico.

Quando se quer atingir outras características de projeto, como um melhor rendimento ou uma maior flexibilidade em ligar e desligar o motor, pode-se colocar um capacitor que atue tanto na partida do motor quando na sua operação em regime, não sendo necessária utilização de uma chave para removê-lo. Esse motor é chamado de motor de indução monofásico com capacitor permanente, o qual consegue produzir um campo girante mais uniforme em regime permanente. Além disso, a utilização de um capacitor em série com o enrolamento auxiliar, na condição de carga nominal, ajuda a melhorar o fator de potência e elevar o rendimento do motor. Porém, esse motor apresenta torque de partida baixo em relação ao motor com capacitor de partida, porque a capacitância utilizada geralmente é baixa, caso contrário a corrente no enrolamento auxiliar se torna muito elevada e o projeto fica inviável economicamente.

Então, quando se deseja um torque de partida elevado e um melhor desempenho do motor em regime permanente, pode-se utilizar um capacitor de partida e um capacitor permanente ligados em paralelo. Tal configuração é chamada de motor de indução monofásico com capacitor de dois valores. Quando há a partida, o capacitor de partida e o capacitor permanente são conectados em paralelo no enrolamento auxiliar. Nesta condição, a capacitância equivalente é a soma das duas capacitâncias. Quando se atinge uma velocidade suficientemente alta, o centrífugo é disparado e o capacitor de partida é desconectado, sobrando apenas o capacitor permanente. Utilizar dois capacitores demanda mais matéria-prima e tempo de fabricação. Contudo, pode ser um projeto economicamente viável caso os requisitos necessários sejam restritos.

O presente trabalho trata da estimação de valores de parâmetros elétricos do motor de indução monofásico com capacitor permanente, utilizando um otimizador numérico para auxiliar na busca dos valores, considerando perdas no núcleo do estator.

## 1.1 OBJETIVOS

Na sequência, os objetivos geral e específico são apresentados.

### 1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo é conseguir uma boa estimativa dos valores das resistências e indutâncias de um modelo elétrico equivalente do motor de indução monofásico com capacitor permanente.

### 1.1.2 Objetivo Específico

O objetivo específico é desenvolver um algoritmo computacional que estime os valores dos parâmetros de motores de indução monofásico utilizando os resultados de ensaios. O algoritmo deve funcionar de forma automatizada com auxílio de otimizadores numéricos, com o mínimo de interferência do usuário no seu funcionamento.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O TCC inicia com um resumo dos principais pontos do motor monofásico, o qual pode ser conferido no início do capítulo 2. Primeiro é apresentado a teoria do motor monofásico, depois sucintamente é falado sobre a função do enrolamento auxiliar.

Após isso, é apresentada a teoria da transformada de Park, a qual será necessária para a dedução da teoria do artigo de referência publicado pelo Umans em 1996 (Umans, 1996), que primeiro apresenta a modelagem eletromagnética do motor em regime permanente sem considerar as perdas no ferro, e depois expande a teoria anterior considerando assim as perdas no ferro. A correção das equações do caso sem perdas no ferro e as equações considerando tais perdas estão indicadas resumidamente no capítulo 2. Também foram deduzidas várias equações do caso sem perdas no ferro, para entender melhor a teoria e complementar este documento, as quais se encontram no Apêndice A.

Quanto ao otimizador, foram testados 10 métodos distintos, sendo dois deles aproximações do problema monovariável e oito deles provenientes da biblioteca Scipy do Python. A teoria desses métodos adaptados é apresentada no capítulo 3, assim como uma descrição da função objetivo e das variáveis utilizadas na otimização.

Nos resultados apresentados no capítulo 4, comparou-se os resultados da aplicação da metodologia implementada no algoritmo com aqueles obtidos no artigo de referência, e após isso estimou-se os valores dos parâmetros elétricos de um motor fabricado na WEG Motores. Gerou-se os valores dos parâmetros elétricos e gráficos de Torque *versus* velocidade e Rendimento *versus* velocidade para condições próximas dos ensaios. Também é mostrada a interface de usuário desenvolvida em Excel.

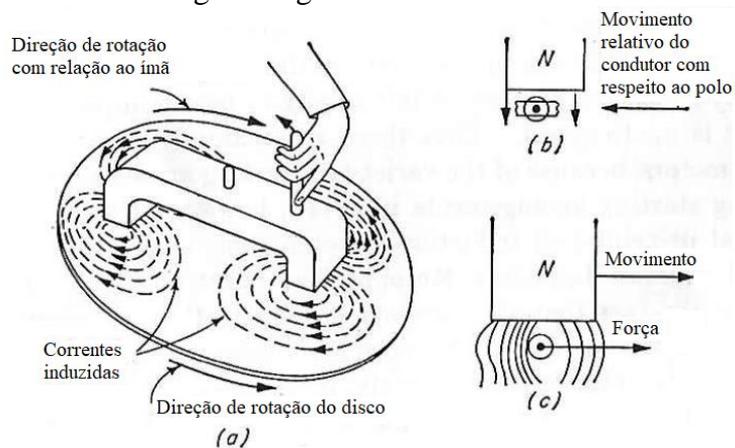
Após o capítulo 4, encerra-se o TCC com a conclusão e as referências.

## 2 DESENVOLVIMENTO

### 2.1 PRINCÍPIO ELEMENTAR DE UM MOTOR DE INDUÇÃO

Pode-se explicar o funcionamento básico de um motor de indução, seja ele monofásico, bifásico ou trifásico, a partir de um ímã girando sob um disco de cobre, conforme mostra a Figura 2.1, a qual foi retirada do livro do autor Cyril G. Veinott (Veinott, 1959), de onde também foi baseada esta explicação.

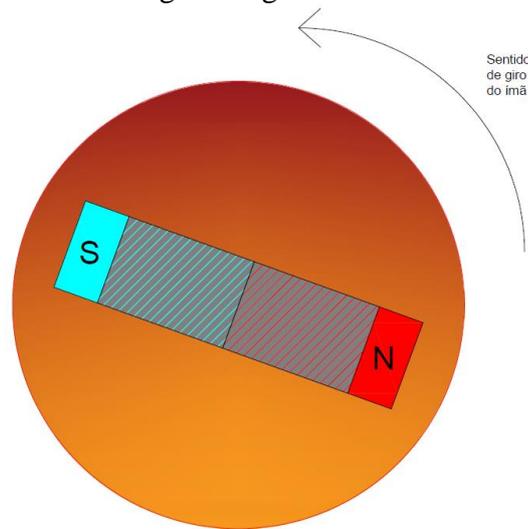
Figura 2.1 – Ímã magnético girando sob um disco de cobre.



Fonte: Veinott (1959), traduzido pelo autor (2021).

O ímã gira no sentido anti-horário, enquanto o disco se encontra inicialmente parado; como é ilustrado pela Figura 2.2. Para esta explicação, será analisada apenas a influência dos ímãs próximos à superfície do disco, os quais são as partes externas indicadas pelas cores preenchidas, enquanto que a área em cinza será desprezada por estar distante do disco.

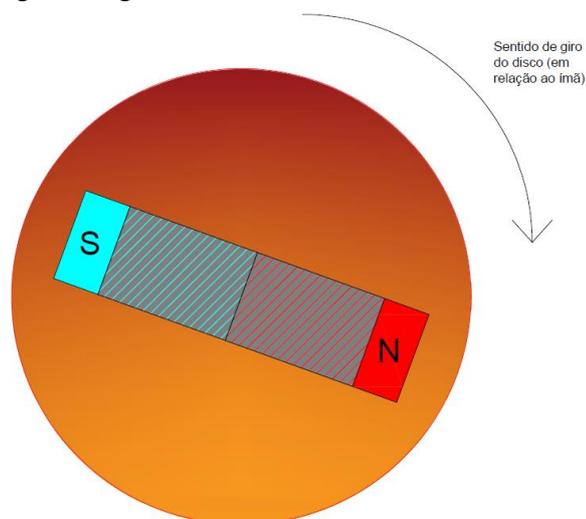
Figura 2.2 – Ímã magnético girando sob um disco de cobre.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Deve-se lembrar que o movimento é relativo ao referencial escolhido. Por exemplo, o ser humano pode estar parado em relação ao chão, mas não em relação ao sol, porque o planeta Terra gira ao redor de si mesmo (rotação) e ao redor do Sol (translação), portanto em relação ao Sol o ser humano não está parado. Seguindo esse raciocínio, pode-se utilizar o ímã como referencial. Deste modo, se o ímã está girando a uma velocidade angular  $w$  com o referencial no disco, então o disco se movimenta numa velocidade angular  $-w$  com o referencial no ímã, indicando uma inversão no sentido indicado na Figura 2.2, como mostra a Figura 2.3.

Figura 2.3 - Ímã magnético girando sob um disco de cobre, com referencial no ímã.



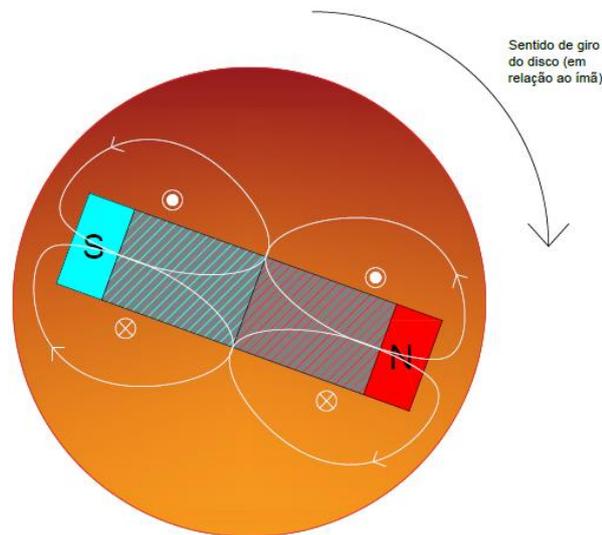
Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

A força magnética ( $\vec{F}_B$ ) é dada pela equação (2.1), que relaciona força, associado ao movimento do disco, indução magnética ( $\vec{B}$ ) e velocidade ( $\vec{v}$ ), associada ao movimento das cargas.

$$\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.1)$$

Uma vez que as cargas se movimentam, elas provocam uma variação de carga com o tempo numa mesma área superficial, ou seja, uma corrente induzida na seção transversal do disco, em que as cargas se movimentam com velocidade  $v$ . Assim, pode-se aplicar a regra de Fleming para determinar o sentido dessas correntes induzidas. Na Figura 2.4, é esquematizado um caminho fechado (completo) dessas correntes. Utilizando a regra da mão direita, obtém-se o sentido dos campos magnéticos gerados pelas correntes induzidas, conforme mostra a Figura 2.4, em que o campo magnético está na direção do leitor quando indicado por  $\odot$  e o campo está se afastando do leitor quando indicado por  $\otimes$ .

Figura 2.4 – Sentido das correntes induzidas no disco de cobre.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Os campos magnéticos produzidos pelas correntes induzidas tendem a se alinhar com os polos magnéticos do ímã, gerando assim uma força de atração entre o campo magnético do ímã e o campo magnético gerado pelas correntes induzidas no disco. Como o campo magnético entra pelo polo sul e sai pelo polo norte, isso faz o disco girar no sentido contrário ao

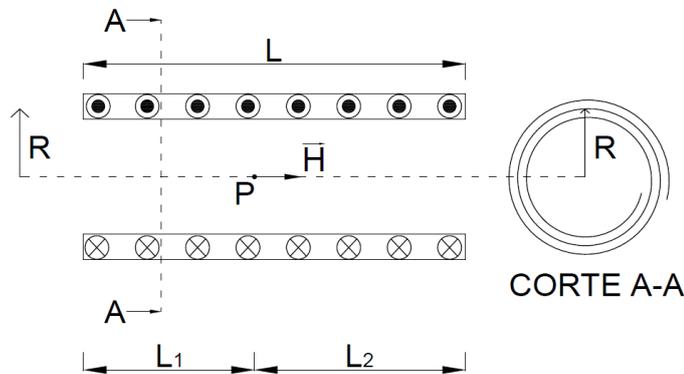
apresentado na Figura 2.4, que na realidade seria o mesmo sentido de rotação do ímã, quando a referência utilizada é o disco parado. O torque gerado pelo alinhamento de campos magnéticos é denominado “torque de alinhamento”, que é um dos princípios de conversão de energia das máquinas elétricas.

## 2.2 PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO DE UM MOTOR DE INDUÇÃO MONOFÁSICO

O comportamento de um motor de indução monofásico pode ser compreendido a partir de duas teorias: a teoria dos campos girantes e a teoria dos campos cruzados. Será apresentada nesta seção a teoria dos campos girantes de forma sucinta, de maneira intuitiva, sem apresentar detalhes matemáticos extensos ou exatidão a um motor monofásico real. Mais detalhes podem ser conferidos nos livros do Veinott (Veinott, 1959) e do Chapman (Chapman, 2012).

Em primeiro lugar, será analisado o campo magnético produzido num solenoide, conforme a Figura 2.5. Esta análise será útil para a dedução do campo girante no motor monofásico.

Figura 2.5 – Desenho representativo de um solenoide.



Fonte: Bastos (2012), adaptada pelo autor (2021).

O campo magnético no interior do solenoide no ponto \$P\$ pode ser determinado pela equação (2.2). O sentido do campo magnético é dado pela regra da mão direita.

$$H = \frac{NI}{2L} \cdot \left[ \frac{L_2}{\sqrt{R^2 + L_2^2}} + \frac{L_1}{\sqrt{R^2 + L_1^2}} \right] \quad (2.2)$$

Em que:

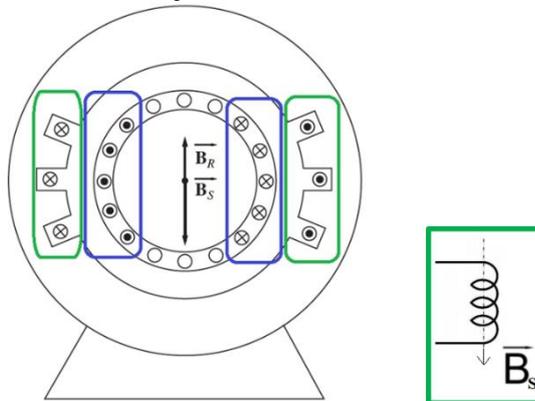
- $R$  é o raio do solenoide;
- $N$  é o número de espiras;
- $I$  é a corrente circulando no condutor;
- $L$  é o comprimento total;
- $L_1$  é a distância desde o início do solenoide até o ponto  $P$ ;
- $L_2$  é a distância desde o ponto  $P$  até o fim do solenoide.

O módulo da indução magnética (ou também chamada de densidade de fluxo magnético) pode ser calculada multiplicando a permeabilidade magnética  $\mu$  pela equação (2.2), chegando assim na equação (2.3). O sentido do vetor indução magnética é o mesmo do campo magnético.

$$B = \mu \cdot \frac{NI}{2L} \cdot \left[ \frac{L_2}{\sqrt{R^2 + L_2^2}} + \frac{L_1}{\sqrt{R^2 + L_1^2}} \right] \quad (2.3)$$

Então, pode-se analisar a Figura 2.6, a qual mostra um motor de indução monofásico sem o enrolamento auxiliar. O enrolamento do estator está destacado em verde, e em azul é apresentado o sentido das correntes induzidas no rotor. A corrente que entra no papel possui o símbolo  $\otimes$  e aquela que sai do plano de leitura em direção ao leitor possui o símbolo  $\odot$ .

Figura 2.6 – Motor de indução monofásico sem o enrolamento auxiliar.



Fonte: Chapman (2012), adaptado pelo autor (2021).

A disposição do enrolamento do estator é mostrado de forma aproximada na Figura 2.6 (em verde), para mostrar a semelhança do seu formato com a solenoide. O objetivo é perceber de forma intuitiva que a indução magnética apresenta, na soma dos seus vetores, o mesmo sentido do solenoide da Figura 2.5. Para olhar a disposição exata desses enrolamentos e a conexão entre eles, é necessário verificar seu esquema de ligação, que está fora do escopo do capítulo.

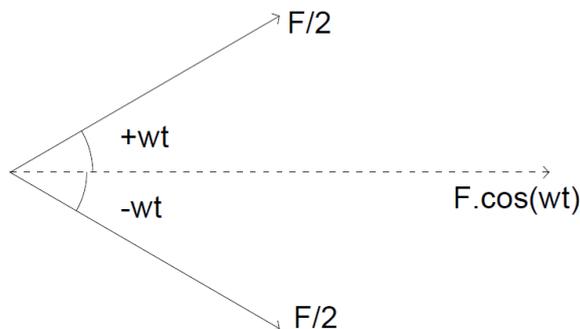
Logo, utilizando a regra da mão direita na Figura 2.6, de forma análoga à análise do solenoide, chega-se no sentido dos campos magnéticos apresentados. Como as correntes do rotor são induzidas pelo estator, a indução magnética apresenta sentido contrário à indução magnética do enrolamento do estator, conforme a lei de Lenz.

A indução magnética do enrolamento do estator pode ser aproximada como sendo igual à indução magnética do solenoide, como apresentado na equação (2.3). Essa indução seria diretamente proporcional à corrente aplicada. Como a corrente no enrolamento do estator é uma função trigonométrica (por exemplo um cosseno), pode-se representar a indução magnética  $B_S$  também como uma função trigonométrica, como mostra a equação (2.4).

$$B_S(t) = B_{max} \cdot \cos(\omega t) \quad (2.4)$$

A partir da análise da equação (2.4) e da Figura 2.6, mostra-se que há a geração de um campo pulsante na mesma direção (longitudinal), apenas alternando seu módulo e sentido ao longo do tempo. De forma equivalente, esse campo pulsante pode ser decomposto em dois campos pulsantes, um girando no sentido anti-horário com velocidade angular  $\omega$  e outro no sentido horário na mesma velocidade angular  $\omega$ , conforme mostra a Figura 2.7.

Figura 2.7 – Vetores componentes do campo girante.



Fonte: Veinott (1959), adaptado pelo autor (2021).

Essa decomposição do campo girante pode ser representado pelas equações (2.5) a (2.8). As suas formas fasoriais estão representadas nas equações (2.9) e (2.10).

$$|\dot{B}_{S,Pro}| = \frac{B_{max}}{2} \quad (2.5)$$

$$|\dot{B}_{S,Ret}| = \frac{B_{max}}{2} \quad (2.6)$$

$$\angle \dot{B}_{S,Pro} = \omega t \quad (2.7)$$

$$\angle \dot{B}_{S,Ret} = -\omega t \quad (2.8)$$

$$\dot{B}_{S,Pro} = \frac{B_{max}}{2} \cdot e^{j\omega t} \quad (2.9)$$

$$\dot{B}_{S,Ret} = \frac{B_{max}}{2} \cdot e^{-j\omega t} \quad (2.10)$$

Tais campos são chamados pela literatura de campo progressivo ( $\dot{B}_{S,Pro}$ ) e campo retrógrado ( $\dot{B}_{S,Ret}$ ), em analogia ao sentido de seus campos. O campo progressivo gira no mesmo sentido de giro do rotor, enquanto que o campo retrógrado gira no sentido contrário ao sentido de rotação do rotor.

A soma de  $\dot{B}_{S,Pro}$  e  $\dot{B}_{S,Ret}$  é indicada na equação (2.11), a qual apresenta resultado igual à equação (2.4).

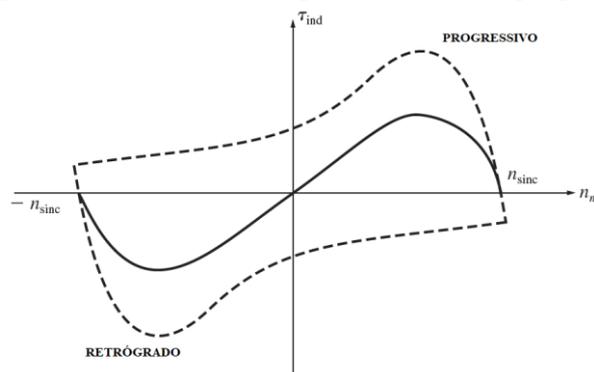
$$\begin{aligned} \dot{B}_{S,Pro} + \dot{B}_{S,Ret} &= \frac{B_{max}}{2} \cdot (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \\ &= \frac{B_{max}}{2} \cdot (\cos(\omega t) + j \cdot \text{sen}(\omega t) + \cos(\omega t) - j \cdot \text{sen}(\omega t)) \quad (2.11) \\ &= \frac{B_{max}}{2} \cdot 2 \cdot \cos(\omega t) = B_{max} \cdot \cos(\omega t) = B_S(t) \end{aligned}$$

Fazendo uma analogia com o campo girante do motor trifásico, sabe-se que o campo girante é uniforme, movendo-se na velocidade angular  $w$  e com módulo constante. Portanto, o motor de indução monofásico sem enrolamento auxiliar poderia ser interpretado como dois motores de indução trifásicos, um girando no sentido horário e outro no sentido anti-horário e ambos acoplados no mesmo eixo. Esta foi a conclusão que Ferraris [Venoitt] apresentou em seu artigo.

Entretanto, apesar da sua brilhante descoberta, este mesmo cientista considerou os motores operando com mesma tensão de entrada, quando na realidade o raciocínio correto é que ambos estejam em série, ou seja, a tensão de entrada é igual à soma da tensão dos dois motores. Então, o motor de indução monofásico pode ser interpretado como dois motores de indução trifásicos, um girando no sentido horário e outro no sentido anti-horário, ligados em série.

O formato da curva de torque *versus* velocidade do motor monofásico é dada pela soma dos torques provocados pelos campos progressivo e retrógrado, conforme mostra a Figura 2.8. Lembrando que o torque dos campos progressivo e retrógrado apresentam sinais contrários, em razão da orientação de cada torque, a qual tende a se alinhar com o movimento de rotação do respectivo campo (porém, fica atrasado devido ao escorregamento).

Figura 2.8 – Vetores componentes do campo girante.



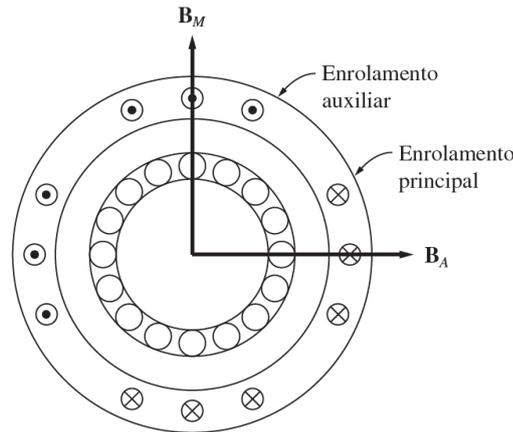
Fonte: Chapman (2012), adaptado pelo autor (2021).

Pela análise da Figura 2.8, percebe-se que o torque é nulo na partida. Em razão disso, é necessário um método de partida para o motor de indução monofásico. O enrolamento auxiliar tem o intuito de ajudar na partida do motor, tornando o torque de partida não nulo.

A adição do enrolamento auxiliar permite tornar o motor monofásico, com apenas um enrolamento e o campo pulsante numa direção só, em um motor com dois enrolamentos,

defasados mecanicamente de  $90^\circ$  e com um campo pulsante em duas direções (longitudinal e transversal). A disposição dos enrolamentos principal e auxiliar é mostrada na Figura 2.9, com o sentido positivo das induções magnéticas  $B_M$  e  $B_A$ , respectivamente.

Figura 2.9 – Vetores componentes do campo girante indicados mecanicamente.



Fonte: Chapman (2012).

Quando o campo no enrolamento principal apresenta igual magnitude do enrolamento auxiliar, porém defasagem entre as induções de  $90^\circ$  graus elétricos, há a formação de um campo girante uniforme, de forma análoga a formação de um campo girante num motor bifásico. Para mostrar isso, será feita a soma realizada na equação (2.12), com auxílio da equação (2.4). Essa equação indica a indução  $\dot{B}_M$  como a referência (defasagem nula) e a indução  $\dot{B}_A$  espessada em  $90^\circ$  graus mecânicos e atrasada da indução  $\dot{B}_M$  em  $90^\circ$  elétricos. O desenvolvimento é mostrado na equação (2.13) e o resultado na equação (2.14).

$$\dot{B}_M + \dot{B}_A = B_{max} \cdot \cos(\omega t) + B_{max} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (2.12)$$

$$\dot{B}_M + \dot{B}_A = B_{max} \cdot \cos(\omega t) + B_{max} \cdot \left(\cos(\omega t) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(\omega t) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \quad (2.13)$$

$$\dot{B}_M + \dot{B}_A = B_{max} \cdot (\cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)) \quad (2.14)$$

Assim, analisando o módulo e o ângulo do vetor resultante a partir das equações (2.15) e (2.16), percebe-se que o módulo é constante e o ângulo varia com a frequência da rede.

$$|\dot{B}_M + \dot{B}_A| = B_{max} \cdot \sqrt{(\cos(wt))^2 + (\sin(wt))^2} = B_{max} \quad (2.15)$$

$$\angle(\dot{B}_M + \dot{B}_A) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\sin(wt)}{\cos(wt)}\right) = \text{tg}^{-1}(\text{tg}(wt)) = wt \quad (2.16)$$

Utilizando a equação (2.17), pode-se chegar numa forma alternativa da equação (2.16), mostrada na equação (2.18).

$$w = \frac{2\pi}{T} \quad (2.17)$$

$$\angle(\dot{B}_M + \dot{B}_A) = 2\pi \cdot \frac{t}{T} \quad (2.18)$$

A partir das equações (2.15) e (2.18), percebe-se que o vetor resultante faz uma volta completa dentro de um período com magnitude constante, de forma análoga ao campo girante uniforme de um motor trifásico.

Deste modo, haveria apenas a componente do campo progressivo. Assim, analisando a Figura 2.8, haveria um aumento do conjugado e uma redução do escorregamento em regime nominal, melhorando o desempenho do motor.

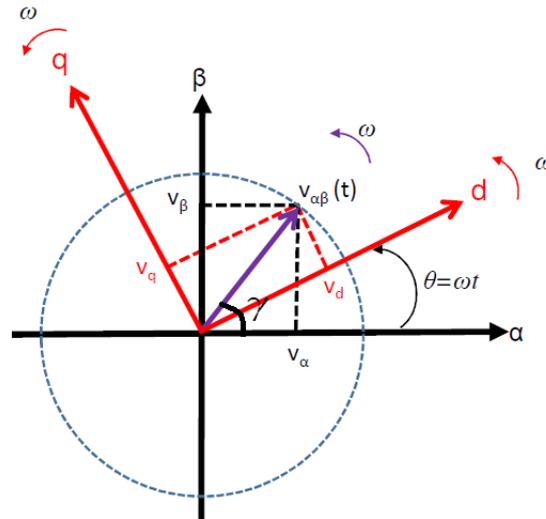
Quando a indução do enrolamento auxiliar não está defasada de  $90^\circ$  mecânicos e elétricos da indução do enrolamento principal, pode haver a formação de um campo girante elíptico, que varie a magnitude da indução resultante com relação ao tempo. Ainda assim, o valor do torque na partida seria maior no campo progressivo do que no campo retrógrado, permitindo a partida do motor, a um custo do conjugado máximo e do desempenho do motor em regime nominal.

### 2.3 TRANSFORMADA DE PARK

A transformada de Park, introduzida por R. H. Park, revolucionou a análise de máquinas elétricas. Ela tem a propriedade de eliminar todas as indutâncias variantes no tempo das equações de tensão decorrentes do movimento do rotor no espaço. Para a teoria, são adicionados dois eixos, chamados de eixo direto e em quadratura, que giram na mesma

velocidade do rotor. Caso o rotor gire no mesmo sentido de rotação dos eixos, então o rotor fica sempre “parado” na referência desses dois eixos. A Figura 2.10 representa essa abordagem.

Figura 2.10 – Eixos direto e quadratura da transformada de Park.



Fonte: Universidade de Brasília (2019), adaptado pelo autor (2021).

É possível realizar a conversão dos eixos direto e quadratura nos eixos estacionários  $\beta$  e  $\alpha$ , as relações de transformação são definidas por senos e cossenos. Podem-se definir a tensão  $V_{\alpha\beta}$  e suas componentes por relação trigonométrica das seguintes formas:

$$V_{\alpha\beta} = |V_{\alpha\beta}| \cdot e^{j\gamma} \quad (2.19)$$

$$V_\alpha = V_{\alpha\beta} \cdot \cos(\gamma) \quad (2.20)$$

$$V_\beta = V_{\alpha\beta} \cdot \sin(\gamma) \quad (2.21)$$

$$V_d = V_{\alpha\beta} \cdot \cos(\gamma - \theta) \quad (2.22)$$

$$V_q = V_{\alpha\beta} \cdot \sin(\gamma - \theta) \quad (2.23)$$

### 2.3.1 Transformação das variáveis

Pode-se escrever a seguinte relação descrita em (2.24). Maiores detalhes podem ser conferidos no desenvolvimento do equacionamento apresentado no Apêndice A.

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

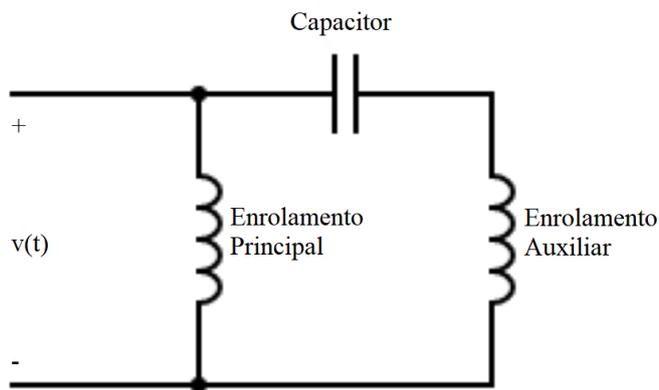
Para encontrar as componentes  $V_\alpha$  e  $V_\beta$  a partir das componentes  $V_d$  e  $V_q$ , apenas é necessário inverter a matriz, ou seja:

$$\begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

## 2.4 TEORIA ELETROMAGNÉTICA DO MOTOR MONOFÁSICO COM ENROLAMENTO AUXILIAR

A partir da definição da transformada de Park, pode-se dar início à análise do circuito elétrico equivalente esquematizado do motor de indução monofásico com capacitor permanente, o qual é apresentado na Figura 2.11.

Figura 2.11 - Circuito simplificado de motor monofásico com capacitor permanente.



Fonte: Umans (1996), adaptado pelo autor (2021).

Primeiramente, a análise será considerada sem as perdas no núcleo, de forma análoga ao artigo de referência do autor Umans. Por mais que esse modelo não esteja presente no

programa numérico implementado neste documento, a ideia seria demonstrar um raciocínio preliminar, e a partir dele estender para a análise considerando as perdas no núcleo.

Serão considerados quatro enrolamentos: dois deles no estator (principal e auxiliar) e dois no rotor, idênticos entre si, criados artificialmente apenas para a resolução numérica. Ou seja, um rotor de gaiola de esquilo seria representado por dois enrolamentos artificiais dispostos em  $90^\circ$  no espaço. Esses enrolamentos são indicados pelos números 1 e 2. Uma análise semelhante também é realizada nos motores trifásicos, com três enrolamentos no estator e três enrolamentos no rotor.

Antes de continuar a explicação, é importante lembrar as definições:

- a. Indutância própria: dada pela razão entre o fluxo concatenado do enrolamento e a corrente sendo percorrida no mesmo enrolamento (gerador do fluxo), com todos os outros enrolamentos com corrente nula;
- b. Indutância mútua: dada pela razão entre o fluxo concatenado do enrolamento e a corrente sendo percorrida num segundo enrolamento (gerador do fluxo), com todos os outros enrolamentos com corrente nula, inclusive do primeiro enrolamento.

A partir disso, são feitas algumas considerações, conforme a seguir.

Os enrolamentos da principal e da auxiliar estão separados por  $90^\circ$  mecânicos entre si. Isso significa que os campos magnéticos são magneticamente desacoplados, ou seja, o campo magnético de um enrolamento não interfere no desempenho do outro. Por exemplo, supondo que o enrolamento auxiliar está desenergizado (chave aberta), não haverá fluxo concatenado neste enrolamento quando o enrolamento principal estiver energizado, em razão da disposição física desses enrolamentos. Então, pela definição da indutância mútua, isso significa que a indutância mútua entre o enrolamento principal e o auxiliar é igual a zero. Do mesmo modo, os enrolamentos 1 e 2 do rotor também são perpendiculares no espaço, e a indutância mútua entre esses enrolamentos é nula;

Para definir a indutância mútua entre os enrolamentos do estator e do rotor, é importante lembrar da transformada de Park, que relaciona os eixos fixos (utilizados nas variáveis do estator) com os eixos girantes (utilizados nas variáveis do rotor). Assim, é possível extrair os valores dessas indutâncias, a partir das relações de transformação mostradas nas equações (2.26) e (2.27), repetida da dedução da transformada de Park.

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Assim, as indutâncias mútuas entre o estator e o rotor podem ser calculadas, dependendo do fluxo a ser analisado. Quando o fluxo concatenado desejado for aqueles dos enrolamentos principal e auxiliar, utiliza-se a equação (2.27) para transformar as indutâncias mútuas entre os enrolamentos do estator e rotor para os eixos fixos  $\alpha$  e  $\beta$ . De forma análoga, quando o fluxo concatenado desejado for aqueles dos enrolamentos 1 e 2 do rotor, utiliza-se a equação (2.26) para transformar as indutâncias mútuas entre os enrolamentos do rotor e estator para os eixos móveis  $d$  e  $q$ .

Em resumo, os fluxos concatenados do estator estão referenciados pelos eixos fixos  $\alpha$  e  $\beta$ . Assim, as indutâncias mútuas devem ter a mesma referência. Do mesmo modo, os fluxos concatenados do rotor estão referenciados pelos eixos móveis  $d$  e  $q$ , e as indutâncias mútuas devem ter a mesma referência desses eixos.

Além disso, também há mais uma consideração a ser levada em conta. Na definição da transformada de Park, foi considerado o sentido positivo do ângulo  $\theta$  no sentido anti-horário. Ou seja, caso o rotor gire neste sentido, o ângulo  $\theta$  será positivo. Como o capacitor é conectado no enrolamento auxiliar (que tem característica indutiva), então a tensão é atrasada no enrolamento auxiliar em relação ao enrolamento principal, considerando a conexão apresentada no início desta seção. Caso o eixo magnético do enrolamento principal anteceda o eixo magnético do enrolamento auxiliar, o movimento do rotor será horário. Caso contrário, o movimento do rotor será anti-horário. A disposição do eixo magnético é definida pela posição espacial dos enrolamentos e do sentido que as bobinas são enroladas, e seu sentido pode ser deduzido pela regra da mão direita.

Para evitar utilizar ângulos negativos nas equações, as equações da transformada de Park serão adaptadas. Deste modo, podemos escrevê-las, de forma alternativa, pelas equações (2.28) e (2.29).

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \mp \text{sen}(\theta) \\ \pm \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \pm \text{sen}(\theta) \\ \mp \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Conseqüentemente, quando o sentido de rotação do rotor é horário (ou seja, o eixo magnético da principal antecede o eixo magnético da auxiliar), é utilizado o sinal superior. Quando o sentido de rotação do rotor é anti-horário, é utilizado o sinal inferior, que seria equivalente à transformada de Park deduzida anteriormente. Em ambos os casos, pode-se utilizar o ângulo positivo desde que respeitada a convenção.

Deste modo, as equações de fluxo são dadas pela equação (2.30).

$$\begin{bmatrix} \lambda_{main} \\ \lambda_{aux} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{main} & 0 & L_{mainR} \cdot \cos(\theta) & \pm L_{mainR} \cdot \text{sen}(\theta) \\ 0 & L_{aux} & \mp L_{auxR} \cdot \text{sen}(\theta) & L_{auxR} \cdot \cos(\theta) \\ L_{mainR} \cdot \cos(\theta) & \mp L_{auxR} \cdot \text{sen}(\theta) & L_R & 0 \\ \pm L_{mainR} \cdot \text{sen}(\theta) & L_{auxR} \cdot \cos(\theta) & 0 & L_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{main} \\ i_{aux} \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Para evitar utilizar o termo  $\pm$  e  $\mp$  nas equações, será criada uma variável auxiliar, com valor descrito na equação (2.31).

$$I = \pm 1 \quad (2.31)$$

Assim, pode-se reescrever a equação (2.30) pela equação (2.32).

$$\begin{bmatrix} \lambda_{main} \\ \lambda_{aux} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{main} & 0 & L_{mainR} \cdot \cos(\theta) & I \cdot L_{mainR} \cdot \text{sen}(\theta) \\ 0 & L_{aux} & -I \cdot L_{auxR} \cdot \text{sen}(\theta) & L_{auxR} \cdot \cos(\theta) \\ L_{mainR} \cdot \cos(\theta) & -I \cdot L_{auxR} \cdot \text{sen}(\theta) & L_R & 0 \\ I \cdot L_{mainR} \cdot \text{sen}(\theta) & L_{auxR} \cdot \cos(\theta) & 0 & L_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{main} \\ i_{aux} \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Num indutor, a tensão induzida é dada pela variação de fluxo em função do tempo, conforme a lei de Faraday. Além disso, existem as perdas Joule devido à passagem de corrente elétrica no condutor de resistividade não-nula. Então, a tensão instantânea no enrolamento principal pode ser determinada por:

$$v_{main} = R_{main} \cdot I_{main} + \frac{d\lambda_{main}}{dt} \quad (2.33)$$

Em que a parcela  $R_{main} \cdot I_{main}$  é devida à resistividade do condutor e a parcela  $\frac{d\lambda_{main}}{dt}$  é devida à indução de tensão pela passagem de corrente nas espiras do indutor. O termo  $\lambda_{main}$  é definido como o número de espiras do indutor multiplicado pelo fluxo concatenado, ou seja:

$$\lambda_{main} = N_{main} \cdot \Phi_{main} \quad (2.34)$$

Da mesma forma, pode-se indicar a tensão e o fluxo concatenado no enrolamento auxiliar pelas equações (2.35) e (2.36).

$$v_{aux} = R_{aux} \cdot I_{aux} + \frac{d\lambda_{aux}}{dt} \quad (2.35)$$

$$\lambda_{aux} = N_{aux} \cdot \Phi_{aux} \quad (2.36)$$

Importante lembrar que o enrolamento auxiliar é conectado em série com o capacitor. Assim, a tensão do enrolamento principal é a soma da tensão no capacitor mais a tensão no enrolamento auxiliar. Em razão da soma fasorial da tensão no capacitor e no enrolamento auxiliar, é possível que essas tensões tenham um valor RMS superior ao valor da tensão RMS do enrolamento principal, como acontece na prática com alguns motores.

Quanto ao circuito rotórico, as barras do rotor são curto-circuitadas pelos anéis nas extremidades do rotor. Em razão disso, é considerado que o circuito rotórico apresenta tensão instantânea nula. Por mais que o circuito rotórico seja formado majoritariamente por resistências em série, será considerada a mesma formulação dos enrolamentos principal e auxiliar, com uma parcela resistiva e outra indutiva, ou seja:

$$v_1 = R_1 \cdot i_1 + \frac{d\lambda_1}{dt} = 0 \quad (2.37)$$

$$v_2 = R_2 \cdot i_2 + \frac{d\lambda_2}{dt} = 0 \quad (2.38)$$

A tensão de entrada seria uma senoidal, neste caso perfeita, conforme mostra a equação (2.39). Essa consideração é próxima da rede elétrica residencial, uma vez que a concessionária evita entregar a energia ao consumidor com alta taxa de distorção harmônica.

$$v_{main} = \sqrt{2} \cdot V_{main} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{main}) \quad (2.39)$$

Da mesma forma, a tensão no enrolamento auxiliar e as correntes nos enrolamentos principal e auxiliar podem ser escritas na forma:

$$v_{aux} = \sqrt{2} \cdot V_{aux} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{aux}) \quad (2.40)$$

$$i_{main} = \sqrt{2} \cdot I_{main} \cdot \cos(\omega t + \phi_{main}) \quad (2.41)$$

$$i_{aux} = \sqrt{2} \cdot I_{aux} \cdot \cos(\omega t + \phi_{aux}) \quad (2.42)$$

De forma equivalente, podem-se escrever as equações em forma de fasor, conforme mostram as equações (2.43) a (2.46). Esse formato será útil na dedução das equações.

$$v_{main} = \sqrt{2} \cdot \Re(\dot{V}_{main} \cdot e^{j\omega t}) = \sqrt{2} \cdot \Re(V_{main} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_{main})}) \quad (2.43)$$

$$v_{aux} = \sqrt{2} \cdot \Re(\dot{V}_{aux} \cdot e^{j\omega t}) = \sqrt{2} \cdot \Re(V_{aux} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_{aux})}) \quad (2.44)$$

$$i_{main} = \sqrt{2} \cdot \Re(\dot{I}_{main} \cdot e^{j\omega t}) = \sqrt{2} \cdot \Re(I_{main} \cdot e^{j(\omega t + \phi_{main})}) \quad (2.45)$$

$$i_{aux} = \sqrt{2} \cdot \Re(\dot{I}_{aux} \cdot e^{j\omega t}) = \sqrt{2} \cdot \Re(I_{aux} \cdot e^{j(\omega t + \phi_{aux})}) \quad (2.46)$$

Para uma máquina com número de par de polos  $P$ , o ângulo elétrico é definido pelo número de par de polos multiplicado pelo ângulo mecânico, ou seja:

$$\theta_{elec} = P \cdot \theta_{mec} = P \cdot \omega_m t = \theta \quad (2.47)$$

Para as equações a seguir, será utilizada a simbologia do ângulo elétrico de forma simplificada, sem a referência ao termo *elec*, ou seja,  $\theta_{elec} = \theta$ , como mostra a equação (2.47).

O escorregamento é definido pela diferença relativa entre a velocidade angular síncrona e a velocidade angular do rotor, conforme indica a equação (2.48).

$$s = \frac{\omega - P\omega_m}{\omega} \quad (2.48)$$

O escorregamento também pode ser definido em termos da velocidade absoluta, como é comum nos livros de engenharia. Entretanto, neste caso ele será definido pela equação (2.48) em razão da similaridade com as equações deduzidas neste documento.

Serão apresentadas as principais equações para o caso sem perdas. Para mais detalhes das deduções, consultar o Apêndice A.

#### 2.4.1 Fluxo $\lambda_1$

O fluxo concatenado da fase 1 do rotor, em sua forma alternativa, é dado na equação (2.49).

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \Re \left[ \left( \frac{\sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot I_{main}}{2} \cdot e^{j\phi_{main}} \pm j \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot L_{auxR} \cdot I_{aux}}{2} \cdot e^{j\phi_{aux}} \right) \cdot e^{j(2-s)\omega t} \right] \\ + \Re \left[ \left( \frac{\sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot I_{main}}{2} \cdot e^{j\phi_{main}} \right. \right. \\ \left. \mp j \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot L_{auxR} \cdot I_{aux}}{2} \cdot e^{j\phi_{aux}} \right) \cdot e^{js\omega t} \left. \right] + L_R \cdot i_1 \end{aligned} \quad (2.49)$$

#### 2.4.2 Correntes $I_1^+$ e $I_1^-$

As correntes  $I_1^+$  e  $I_1^-$ , que correspondem às correntes dos campos progressivo e retrógrado do enrolamento principal do rotor, são calculadas pelas equações (2.50) e (2.51).

$$\dot{I}_1^+ = -j\dot{K}^+ \cdot (L_{mainR} \cdot \dot{I}_{main} \mp j \cdot L_{aux} \cdot \dot{I}_{aux}) \quad (2.50)$$

$$\dot{I}_1^- = -j\dot{K}^- \cdot (L_{mainR} \cdot \dot{I}_{main} \pm j \cdot L_{aux} \cdot \dot{I}_{aux}) \quad (2.51)$$

### 2.4.3 Fluxo $\lambda_2$

O fluxo concatenado da fase 2 do rotor, em sua forma alternativa, é dado na equação (2.52).

$$\begin{aligned} \lambda_2 = \Re \left[ \left( \frac{\sqrt{2} \cdot L_{auxR} \cdot I_{aux}}{2} \cdot e^{j\phi_{aux}} \mp j \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot I_{main}}{2} \cdot e^{j\phi_{main}} \right) \cdot e^{j(2-s)wt} \right] \\ + \Re \left[ \left( \frac{\sqrt{2} \cdot L_{auxR} \cdot I_{aux}}{2} \cdot e^{j\phi_{aux}} \right. \right. \\ \left. \left. \pm j \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot I_{main}}{2} \cdot e^{j\phi_{main}} \right) \cdot e^{jswt} \right] + L_R \cdot i_2 \end{aligned} \quad (2.52)$$

### 2.4.4 Correntes $I_2^+$ e $I_2^-$

As correntes  $I_1^+$  e  $I_1^-$ , que correspondem às correntes dos campos progressivo e retrógrado do enrolamento auxiliar do rotor, são calculadas pelas equações (2.53) e (2.54).

$$I_2^+ = (\pm j) \cdot (-jsw) \cdot \frac{(L_{mainR} \cdot \dot{I}_{main} \mp j \cdot L_{aux} \cdot \dot{I}_{aux})}{2 \cdot (R_R + jswL_R)} \quad (2.53)$$

$$I_2^- = (\mp j) \cdot (-j(2-s)w) \cdot \frac{(L_{mainR} \cdot \dot{I}_{main} \pm j \cdot L_{aux} \cdot \dot{I}_{aux})}{2 \cdot (R_R + j(2-s)wL_R)} \quad (2.54)$$

Ou seja, pode-se escrever  $I_2^+$  e  $I_2^-$  em termos de  $I_1^+$  e  $I_1^-$ , cujas representações estão indicadas nas equações (2.55) e (2.56).

$$I_2^+ = \pm j \cdot I_1^+ \quad (2.55)$$

$$I_2^- = \mp j \cdot I_1^- \quad (2.56)$$

### 2.4.5 Fluxo $\lambda_{main}$

O fluxo concatenado da fase principal do estator, em sua forma alternativa, é apresentado nas equações (2.57) e (2.58).

$$\lambda_{main} = \mathbb{R}[\dot{\lambda}_{main} \cdot e^{j\omega t}] \quad (2.57)$$

$$\dot{\lambda}_{main} = \sqrt{2} \cdot L_{main} \cdot \dot{i}_{main} + \sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot (i_1^+ + i_1^-) \quad (2.58)$$

### 2.4.6 Fluxo $\lambda_{aux}$

O fluxo concatenado da fase auxiliar do estator, em sua forma alternativa, é apresentado nas equações (2.59) e (2.60).

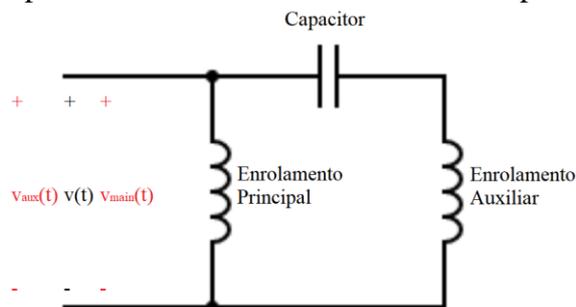
$$\lambda_{aux} = \mathbb{R}[\dot{\lambda}_{aux} \cdot e^{j\omega t}] \quad (2.59)$$

$$\dot{\lambda}_{aux} = j \cdot \sqrt{2} \cdot L_{aux} \cdot \dot{i}_{aux} \pm j \cdot \sqrt{2} \cdot L_{auxR} \cdot (i_1^+ - i_1^-) \quad (2.60)$$

### 2.4.7 Lei de Ohm aplicado ao motor monofásico

Analisando a Figura 2.12, pode-se definir a tensão de entrada como sendo igual a tensão aplicada na conexão com o enrolamento principal e na conexão com o enrolamento auxiliar, uma vez que ambos estão em paralelo. Isso é resumido na equação (2.61).

Figura 2.12 - Circuito simplificado de motor monofásico com capacitor permanente.



Fonte: Umans (1996), adaptado pelo autor (2021).

$$v_{main}(t) = v_{aux}(t) = v(t) = \sqrt{2} \cdot V_o \cdot \cos(\omega t) = \Re[\sqrt{2} \cdot V_o \cdot e^{j\omega t}] \quad (2.61)$$

Nota-se que a tensão  $V_o$  não precisa estar na sua forma fasorial, porque a referência utilizada é a tensão de entrada (defasagem de  $V_o$  é igual a zero), significando que sua magnitude é numericamente igual a sua forma fasorial.

Pode-se escrever a “lei de Ohm” para este circuito a partir da equação (2.62).

$$\begin{bmatrix} R_{main} + \dot{Z}_{main} + j\omega\sqrt{2}(L_{main} - j \cdot L_{mainR}^2 \cdot (\dot{K}^+ + \dot{K}^-) \\ \pm j\sqrt{2}\omega \cdot L_{auxR} \cdot L_{mainR} \cdot (\dot{K}^+ - \dot{K}^-) \\ \mp j\sqrt{2}\omega \cdot L_{auxR} \cdot \dot{I}_{aux} \cdot (\dot{K}^+ - \dot{K}^-) \\ R_{aux} + \dot{Z}_{aux} + j\sqrt{2}\omega(L_{aux} - j \cdot L_{auxR}^2 \cdot (\dot{K}^+ + \dot{K}^-)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_{main} \\ \dot{I}_{aux} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_o \\ V_o \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

#### 2.4.8 Torque induzido médio

O torque induzido médio é dado na equação (2.63).

$$\begin{aligned} T_{elec} = 2P \cdot (\Re[L_{mainR}^2 \dot{I}_{main}^2 \cdot (\dot{K}^+ - \dot{K}^-) \mp j \cdot L_{mainR} L_{auxR} \dot{I}_{main}^* \dot{I}_{aux} \cdot (\dot{K}^+ + \dot{K}^-) \\ + L_{auxR}^2 \dot{I}_{aux}^2 \cdot (\dot{K}^+ - \dot{K}^-) \pm j \cdot L_{mainR} L_{auxR} \dot{I}_{main} \dot{I}_{aux}^* \cdot (\dot{K}^+ + \dot{K}^-)]) \end{aligned} \quad (2.63)$$

#### 2.4.9 Equações restantes

As seguintes equações têm como referência o artigo do autor Umans, e várias delas são facilmente encontradas em livros de máquinas elétricas.

O torque de saída é dado pelo torque induzido menos o torque devido às perdas rotacionais, como mostra a equação (2.64). Será considerado o torque induzido médio para este cálculo, portanto, o torque de saída também é uma média num período.

$$T_{out} = T_{elec} - T_{rot} \quad (2.64)$$

A potência de saída é a velocidade mecânica multiplicada pelo torque de saída, conforme mostra a equação (2.65).

$$P_{out} = w_m \cdot T_{out} \quad (2.65)$$

A potência de entrada pode ser calculada pela parte real do conjugado do fasor da corrente de entrada multiplicada pelo fasor da tensão de entrada. Analisando o circuito da Figura 2.12, a corrente de entrada é a soma da corrente no enrolamento principal e no enrolamento auxiliar, enquanto que a tensão de entrada é igual a  $V_o$ , conforme mostra a equação (2.61). Assim, pode-se escrever a equação (2.66).

$$P_{in} = \Re[VI^*] = \Re[V_o(I_{main} + I_{aux})^*] \quad (2.66)$$

Pode-se separar os termos no conjugado. Logo, a equação (2.66) pode ser reescrita, conforme mostra a equação (2.67).

$$P_{in} = \Re[VI^*] = \Re[V_o I_{main}^* + V_o I_{aux}^*] = \Re[V_o(I_{main}^* + I_{aux}^*)] \quad (2.67)$$

O rendimento é definido pela razão entre a potência de saída e a potência de entrada, como mostra a equação (2.68).

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} \cdot 100\% \quad (2.68)$$

Então, pode-se encontrar as perdas em várias partes do motor, conforme mostram as próximas equações.

A equação (2.69) corresponde às perdas no enrolamento principal.

$$P_{main} = R_{main} \cdot I_{main}^2 \quad (2.69)$$

A equação (2.70) corresponde às perdas no enrolamento auxiliar.

$$P_{aux} = R_{aux} \cdot I_{aux}^2 \quad (2.70)$$

A equação (2.71) corresponde às perdas no rotor, as quais correspondem à soma das perdas dos enrolamentos 1 e 2 devido aos campos progressivo (+) e retrógrado (-). Lembrando que a resistência do rotor nos enrolamentos foi considerada idêntica e igual a  $R_R$ .

$$P_{rotor} = R_R \cdot [rms(i_1)]^2 + R_R \cdot [rms(i_2)]^2 \quad (2.71)$$

Em que  $rms(x)$  representa o valor eficaz (raiz média quadrática) da variável  $x$ . As equações das correntes eficazes dos enrolamentos principal e auxiliar do rotor, na sua versão completa, são dadas nas equações (2.72) e (2.73), respectivamente.

$$rms(i_1) = \sqrt{\begin{aligned} & (I_1^+)^2 \cdot \left( \frac{1}{4s\pi} \cdot (2 \cdot \text{sen}(2\pi s) \cdot \cos(2\pi s + 2\phi_1^+)) + 1 \right) \\ & + I_1^+ \cdot I_1^- \cdot \left( \frac{1}{4(1-s)\pi} \cdot (2 \cdot \text{sen}(2\pi(1-s)) \cdot \cos(2\pi(1-s) + (-\phi_1^+ + \phi_1^-))) \right) \\ & + (I_1^-)^2 \cdot \left( \frac{1}{4(2-s)\pi} \cdot (2 \cdot \text{sen}(2\pi(2-s)) \cdot \cos(2\pi(2-s) + 2\phi_1^-)) + 1 \right) \end{aligned}} \quad (2.72)$$

$$rms(i_2) = \sqrt{\begin{aligned} & (I_2^+)^2 \cdot \left( \frac{1}{4s\pi} \cdot (2 \cdot \text{sen}(2\pi s) \cdot \cos(2\pi s + 2\phi_2^+)) + 1 \right) \\ & + I_2^+ \cdot I_2^- \cdot \left( \frac{1}{4(1-s)\pi} \cdot (2 \cdot \text{sen}(2\pi(1-s)) \cdot \cos(2\pi(1-s) + (-\phi_2^+ + \phi_2^-))) \right) \\ & + (I_2^-)^2 \cdot \left( \frac{1}{4(2-s)\pi} \cdot (2 \cdot \text{sen}(2\pi(2-s)) \cdot \cos(2\pi(2-s) + 2\phi_2^-)) + 1 \right) \end{aligned}} \quad (2.73)$$

Considerando que o escorregamento é muito próximo da velocidade síncrona ( $s = 0$ ), as perdas no rotor podem ser calculadas de forma aproximada pela equação 2.74.

$$P_{rotor} = R_R \cdot (2 \cdot (I_1^+)^2 \cdot \cos^2(\phi_1^+) + (I_1^-)^2) + R_R \cdot (2 \cdot (I_2^+)^2 \cdot \cos^2(\phi_2^+) + (I_2^-)^2) \quad (2.74)$$

Outrossim, as perdas na impedância conectada em série com o enrolamento principal podem ser calculadas pela equação (2.75), e as perdas na impedância conectada em série com o enrolamento auxiliar podem ser calculadas pela equação (2.76).

$$P_{Z_{main}} = I_{main}^2 \cdot \Re[Z_{main}] \quad (2.75)$$

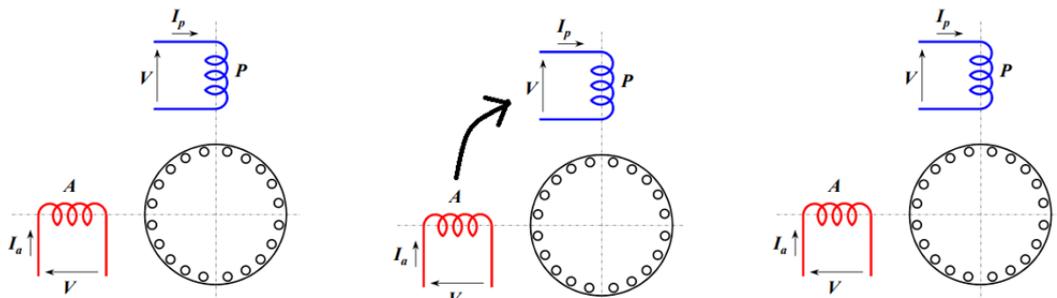
$$P_{Z_{aux}} = I_{aux}^2 \cdot \Re[Z_{aux}] \quad (2.76)$$

#### 2.4.10 Equações considerando as perdas no ferro

As seções anteriores trataram apenas do estudo do motor de indução monofásico com capacitor permanente sem considerar as perdas no ferro. O autor do artigo também disponibilizou as equações considerando as perdas no ferro, os quais são mostradas a seguir. Não será disponibilizada uma dedução detalhada dessas equações, como foi no caso sem perdas, em razão do limite de tempo de execução do TCC.

Para mostrar a equação dos fluxos magnéticos, primeiro é necessário entender os princípios da teoria utilizada. As perdas no ferro são estimadas a partir de um terceiro conjunto de enrolamentos, composto por um enrolamento principal e um enrolamento auxiliar dispostos a 90° mecânicos entre si e estáticos (fixos) em relação ao estator, diferente dos enrolamentos do rotor que giram na velocidade angular  $w$ . Esses enrolamentos serão chamados de “enrolamentos do núcleo magnetizante”, em semelhança ao enrolamento magnetizante nos motores de indução trifásicos. Porém, é importante deixar claro que a teoria tenta estimar as perdas no ferro com precisão, com auxílio de ensaios do motor; ela não tem a intenção de estimar a indutância do núcleo magnetizante. A Figura 2.13 resume os três conjuntos de enrolamentos utilizados nesta teoria.

Figura 2.13 - Enrolamentos utilizados na teoria: principal e auxiliar no estator (à esquerda), enrolamentos principal e auxiliar no rotor girando a uma velocidade angular  $w$  (centro), enrolamentos principal e auxiliar do núcleo magnetizante (à direita).



Fonte: Universidade de São Paulo, adaptado pelo autor (2021).

Na teoria, não são consideradas as perdas no ferro no rotor (perdas por correntes parasitas ou correntes de Foucault), que o autor chama de efeito de difusão magnética ou efeito da barra profunda. Haveriam dois motivos: (i) na maioria dos pontos de interesse, o motor estará operando com escorregamento reduzido, de modo que as correntes induzidas no rotor terão frequências baixas e, em razão disso, as perdas por difusão magnética serão pequenas, (ii) a aplicação do motor monofásico em geral é para cargas pequenas. Portanto, as perdas no ferro são consideradas predominantes no estator.

Em razão desses argumentos, pode-se descrever o enrolamento principal e auxiliar do núcleo magnetizante de forma análoga ao enrolamento principal e auxiliar no estator, porém com indutâncias mútuas adicionais. Essas indutâncias mútuas correspondem às indutâncias entre cada enrolamento. Ou seja, as indutâncias mútuas podem ser resumidas por:

- $L_{main,ag}$  – Indutância mútua entre enrolamento principal do estator e enrolamento principal do núcleo magnetizante;
- $L_{aux,ag}$  – Indutância mútua entre enrolamento auxiliar do estator e enrolamento auxiliar do núcleo magnetizante;
- $L_{mainR}$  – Indutância mútua entre enrolamento principal do rotor e enrolamentos principais do estator e núcleo magnetizante;
- $L_{auxR}$  – Indutância mútua entre enrolamento auxiliar do rotor e enrolamentos auxiliares do estator e núcleo magnetizante.

Nesta teoria, o autor não considera a indutância mútua do rotor de forma separada para cada enrolamento presente no estator. Então, quando o algoritmo tentar encontrar um ponto ótimo, ele pode errar na estimativa das indutâncias mútuas do rotor, em razão dessas indutâncias se referirem aos dois enrolamentos ao invés de cada um individualmente.

Além disso, duas novas indutâncias são incluídas,  $L_M$  e  $L_A$ , que correspondem às indutâncias próprias principal e auxiliar do enrolamento do núcleo magnetizante, respectivamente.

Assim, a equação dos fluxos considerando as perdas no ferro pode ser calculada utilizando a equação (2.77). Percebe-se que ela é semelhante ao caso sem perdas, porém com a adição do enrolamento do núcleo magnetizante e as outras indutâncias mútuas.

$$\begin{bmatrix} \lambda_{main} \\ \lambda_{aux} \\ \lambda_M \\ \lambda_A \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{main} & 0 & L_{main,ag} & 0 & L_{mainR}\cos(\theta) & \pm L_{mainR}\sin(\theta) \\ 0 & L_{aux} & 0 & L_{aux,ag} & \mp L_{auxR}\sin(\theta) & L_{auxR}\cos(\theta) \\ L_{main,ag} & 0 & L_M & 0 & L_{mainR}\cos(\theta) & \pm L_{mainR}\sin(\theta) \\ 0 & L_{aux,ag} & 0 & L_A & \mp L_{auxR}\sin(\theta) & L_{auxR}\cos(\theta) \\ L_{mainR}\cos(\theta) & \mp L_{auxR}\sin(\theta) & L_{mainR}\cos(\theta) & \mp L_{auxR}\sin(\theta) & L_R & 0 \\ \pm L_{mainR}\sin(\theta) & L_{auxR}\cos(\theta) & \pm L_{mainR}\sin(\theta) & L_{auxR}\cos(\theta) & 0 & L_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{main} \\ i_{aux} \\ i_M \\ i_A \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

A indutância do enrolamento principal do núcleo magnetizante ( $L_M$ ) é estimada como uma soma da indutância mútua entre os enrolamentos principais do estator e do núcleo magnetizante ( $L_{main,ag}$ ) com uma parcela  $L_{Mi}$  associada à indutância de dispersão daquele enrolamento. De forma análoga, a indutância da auxiliar  $L_A$  seria a soma da indutância mútua entre os enrolamentos auxiliares do estator e do núcleo magnetizante ( $L_{aux,ag}$ ) com uma parcela  $L_{Ai}$  associada à indutância de dispersão daquele enrolamento. Isso pode ser descrito pelas equações (2.78) e (2.79).

$$L_M = L_{main,ag} + L_{Mi} \quad (2.78)$$

$$L_A = L_{aux,ag} + L_{Ai} \quad (2.79)$$

Para que o modelo seja fisicamente realizável, os coeficientes de acoplamento entre os enrolamentos do núcleo magnetizante e os enrolamentos correspondentes do estator e do rotor devem ser positivos. Em outras palavras, a ideia é que as indutâncias próprias de cada enrolamento tenham peso igual ou mais significativo que as indutâncias mútuas entre outros enrolamentos para a geração do fluxo concatenado. Isso é mostrado pelas inequações (2.80) e (2.81).

$$L_{main}L_M \geq L_{mainR}^2 \quad (2.80)$$

$$L_{aux}L_A \geq L_{auxR}^2 \quad (2.81)$$

É utilizada como aproximação, retirada do artigo do Umas, as indutâncias  $L_{Mi}$  e  $L_{Ai}$ , apresentadas nas equações (2.82) e (2.83). O autor afirma que o valor exato de  $L_{Mi}$  e  $L_{Ai}$  não é crítico, porque as correntes nesses enrolamentos são pequenas e a variação de tensão neles seria baixa.

$$L_{Mi} = 1,05 \cdot \left( \frac{L_{mainR}^2}{L_R} - L_{main,ag} \right) \quad (2.82)$$

$$L_{Ai} = 1,05 \cdot \left( \frac{L_{auxR}^2}{L_R} - L_{aux,ag} \right) \quad (2.83)$$

Além das equações de fluxo descritas no caso sem perdas, duas novas equações devem ser adicionadas, que correspondem às tensões na principal e auxiliar do enrolamento do núcleo magnetizante, respectivamente indicadas em (2.84) e (2.85).

$$v_M = R_M i_M + \frac{d\lambda_M}{dt} = 0 \quad (2.84)$$

$$v_A = R_A i_A + \frac{d\lambda_A}{dt} = 0 \quad (2.85)$$

As correntes e os fluxos do enrolamento do núcleo magnetizante estão indicados nas equações (2.86) a (2.89).

$$i_M = \Re[\sqrt{2} \cdot \dot{I}_M \cdot e^{j\omega t}] \quad (2.86)$$

$$i_A = \Re[\sqrt{2} \cdot \dot{I}_A \cdot e^{j\omega t}] \quad (2.87)$$

$$\lambda_M = \Re[\sqrt{2} \cdot \dot{\lambda}_M \cdot e^{j\omega t}] \quad (2.88)$$

$$\lambda_A = \Re[\sqrt{2} \cdot \dot{\lambda}_A \cdot e^{j\omega t}] \quad (2.89)$$

As correntes, nas suas formas fasoriais, nos enrolamentos 1 (principal) e 2 (auxiliar) do rotor devem considerar também os novos enrolamentos. As equações dessas novas correntes são dadas em (2.90) e (2.91).

$$I_1^+ = \mp j \cdot I_2^+ = -j \cdot \dot{K}^+ \cdot [L_{mainR}(\dot{I}_{main} + \dot{I}_M) \mp j \cdot L_{auxR} \cdot (\dot{I}_{aux} + \dot{I}_A)] \quad (2.90)$$

$$I_1^- = \pm j \cdot I_2^- = -j \cdot \dot{K}^- \cdot [L_{mainR}(\dot{I}_{main} + \dot{I}_M) \pm j \cdot L_{auxR} \cdot (\dot{I}_{aux} + \dot{I}_A)] \quad (2.91)$$

Então, pode-se utilizar o sistema de equações dado em (2.92), e utilizando suas componentes em (2.93) a (2.99).

$$[\dot{V}] = ([R] + [\dot{Z}] + jw[\dot{L}]) \cdot [i] \quad (2.92)$$

$$[\dot{V}] = \begin{bmatrix} V_o \\ -V_o \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{main} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{aux} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_A \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

$$[\dot{Z}] = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{main} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_{aux} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

$$[\dot{L}] = \begin{bmatrix} L_{main} - j \cdot L_{mainR}^2 \cdot \dot{K}_S & -1 \cdot L_{mainR} \cdot L_{auxR} \cdot \dot{K}_D & L_{main,ag} - j \cdot L_{mainR}^2 \cdot \dot{K}_S & -1 \cdot L_{mainR} \cdot L_{auxR} \cdot \dot{K}_D \\ 1 \cdot L_{mainR} \cdot L_{auxR} \cdot \dot{K}_D & L_{aux} - j \cdot L_{auxR}^2 \cdot \dot{K}_S & 1 \cdot L_{mainR} \cdot L_{auxR} \cdot \dot{K}_D & L_{aux,ag} - j \cdot L_{auxR}^2 \cdot \dot{K}_S \\ L_{main,ag} - j \cdot L_{mainR}^2 \cdot \dot{K}_S & -1 \cdot L_{mainR} \cdot L_{auxR} \cdot \dot{K}_D & L_M - j \cdot L_{mainR}^2 \cdot \dot{K}_S & -1 \cdot L_{mainR} \cdot L_{auxR} \cdot \dot{K}_D \\ 1 \cdot L_{mainR} \cdot L_{auxR} \cdot \dot{K}_D & L_{aux,ag} - j \cdot L_{auxR}^2 \cdot \dot{K}_S & 1 \cdot L_{mainR} \cdot L_{auxR} \cdot \dot{K}_D & L_A - j \cdot L_{auxR}^2 \cdot \dot{K}_S \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

$$\dot{K}_S = \dot{K}^+ + \dot{K}^- \quad (2.97)$$

$$\dot{K}_D = \dot{K}^+ - \dot{K}^- \quad (2.98)$$

$$[\dot{V}] = \begin{bmatrix} \dot{I}_{main} \\ \dot{I}_{aux} \\ \dot{I}_M \\ \dot{I}_A \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Então, o torque induzido médio pode ser calculado pela equação 2.100.

$$T_{elec} = \Re \left[ P \cdot \left\{ (\dot{K}^{+*} - \dot{K}^{-*}) \cdot \left( L_{mainR}^2 \cdot |\dot{I}_{main} + \dot{I}_M|^2 + L_{auxR}^2 \cdot |\dot{I}_{aux} + \dot{I}_A|^2 \right) \right. \right. \\ \left. \mp j \cdot L_{mainR} L_{auxR} \dot{I}_{main}^* \dot{I}_{aux} \cdot (\dot{K}^{+*} + \dot{K}^{-*}) \cdot ((\dot{I}_{main} + \dot{I}_M)^* \cdot (\dot{I}_{aux} + \dot{I}_A) \right. \\ \left. \left. - (\dot{I}_{main} + \dot{I}_M) \cdot (\dot{I}_{aux} + \dot{I}_A)^* \right) \right\} \right] \quad (2.100)$$

Em que o símbolo asterisco (\*) representa o conjugado do elemento.

As perdas no ferro podem ser calculadas pela equação 2.101.

$$P_{core} = R_M \cdot I_M^2 + R_A \cdot I_A^2 \quad (2.101)$$

### 3 ALGORITMO

O algoritmo utilizado é análogo ao artigo do Umas, porém com uma automatização da procura dos parâmetros. Basicamente, esse algoritmo dispõe das etapas descritas a seguir.

Primeiro deve-se realizar a correção de temperatura das resistências principal e auxiliar dos enrolamentos do estator. Considerando a temperatura de referência igual a 25°C, a equação para essa correção é dada na equação (3.1). Lembrando que o usuário deve entrar com a resistência à 25°C no programa.

$$R(T) = R(25^\circ C) \cdot (1 + \alpha \cdot (T - 25)) \quad (3.1)$$

Alfa ( $\alpha$ ) é o coeficiente de temperatura, dado em  $^\circ C^{-1}$ . Por mais que este valor varie com a temperatura, será considerado neste programa um valor constante e igual a  $3,85 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ C^{-1}$  para o cobre;

Em seguida estimam-se as resistências dos enrolamentos principal ( $R_M$ ) e auxiliar ( $R_A$ ) do núcleo magnetizante. As equações estão apresentadas nas equações (3.2) e (3.3). É assumido que as perdas no ferro são divididas igualmente na principal e na auxiliar, e que as quedas de tensão devido à resistência e indutância do enrolamento do estator são relativamente pequenas;

$$R_M = \frac{V_{main}^2}{(P_{core}/2)} = 2 \cdot \frac{V_{main}^2}{P_{core}} \quad (3.2)$$

$$R_A = \frac{V_{aux}^2}{(P_{core}/2)} = 2 \cdot \frac{V_{aux}^2}{P_{core}} \quad (3.3)$$

- A partir disso, utilizando as equações da seção 2, um loop será realizado para encontrar as seguintes características:
  - $L_{main,ag}$  – Indutância mútua entre enrolamento principal do estator e enrolamento principal do núcleo magnetizante;
  - $L_{aux,ag}$  – Indutância mútua entre enrolamento auxiliar do estator e enrolamento auxiliar do núcleo magnetizante;
  - $R_R$  – Resistência do rotor;
  - $L_R$  – Indutância própria do rotor;
  - $L_{main}$  – Indutância própria do enrolamento principal do estator;
  - $L_{aux}$  – Indutância própria do enrolamento auxiliar do estator;
  - $L_{mainR}$  – Indutância mútua entre enrolamento principal do rotor e enrolamentos principais do estator e núcleo magnetizante;
  - $I_{main}$  – Módulo da corrente no enrolamento principal do estator;
  - $I_{aux}$  – Módulo da corrente no enrolamento auxiliar do estator;
  - $\phi_{main}$  – Defasagem da corrente no enrolamento principal do estator;
  - $\phi_{aux}$  – Defasagem da corrente no enrolamento auxiliar do estator.

Para encontrar a variável  $L_{auxR}$ , será considerado que a razão  $L_{mainR}/L_{auxR}$  é igual à razão do número de espiras entre a principal e auxiliar, como mostra a equação (3.4).

$$\frac{L_{mainR}}{L_{auxR}} = \frac{k_{wmain} \cdot N_{main}}{k_{waux} \cdot N_{aux}} \quad (3.4)$$

Assim, pode-se isolar a variável  $L_{auxR}$ , chegando na equação (3.5). Assim, essa variável será otimizada a partir de  $L_{mainR}$ .

$$L_{auxR} = \frac{k_{waux} \cdot N_{aux}}{k_{wmain} \cdot N_{main}} \cdot L_{mainR} \quad (3.5)$$

Porém, o cálculo das resistências dos enrolamentos do núcleo magnetizante ( $R_M$  e  $R_A$ ) precisam da corrente da principal e da auxiliar do estator. Então, também serão definidas as correntes da principal e da auxiliar dos enrolamentos do estator como variáveis de otimização, por mais que essas também sejam calculadas no resultado. Desta forma, haverá uma estimativa do valor inicial dessas correntes, calculando assim o  $R_M$  e  $R_A$  e, após isso, sendo calculada as correntes do circuito, incluindo essas correntes, que serão utilizadas para comparar com os resultados de ensaio.

### 3.1 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS INICIAIS

É necessário estimar parâmetros iniciais antes da utilização do algoritmo. Para isso, são utilizadas equações retiradas do artigo de referência. A dedução dessas equações está fora do escopo deste TCC, em razão da duração limitada da disciplina. Destacando que os parâmetros finais otimizados podem divergir consideravelmente dos parâmetros iniciais utilizados.

Para calcular a variável  $L_{main,ag}$ , utiliza-se a equação (3.6).

$$L_{main,ag} = \frac{4 \cdot \mu_o \cdot l \cdot R \cdot (k_{wmain} \cdot N_{main})^2}{\pi \cdot g \cdot P^2} \quad (3.6)$$

Em que:

- $\mu_o$  é a permeabilidade magnética do vácuo, igual a  $4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$  Henry/metro;
- $l$  é o comprimento do pacote do estator, dado em metros;

- $R$  é o raio desde o eixo do rotor até o centro do entreferro, dado em metros;
- $g$  é o tamanho do entreferro, dado em metros.

Para calcular a variável  $L_{aux,ag}$ , utiliza-se a equação (3.7).

$$L_{aux,ag} = \frac{4 \cdot \mu_o \cdot l \cdot R \cdot (k_{waux} \cdot N_{aux})^2}{\pi \cdot g \cdot P^2} \quad (3.7)$$

Para calcular a resistência dos enrolamentos do rotor, utiliza-se a equação (3.8). Mais detalhe da dedução desta equação pode ser encontrado no artigo do Umans (Umans, 1996).

$$R_R = \frac{8 \cdot l}{N_R \cdot A_{bar} \cdot \sigma_{bar}} \quad (3.8)$$

Para calcular a indutância dos enrolamentos do rotor, utiliza-se a equação (3.9). Nessa equação, a indutância de dispersão é considerada nula (considerada apenas a indutância mútua).

$$L_R = \frac{L_{main,ag}}{(k_{wmain} \cdot N_{main})^2} \quad (3.9)$$

Para as indutâncias  $L_{main}$  e  $L_{aux}$ , será considerado apenas a indutância mútua, como indicam as equações (3.10) e (3.11).

$$L_{main} = L_{main,ag} \quad (3.10)$$

$$L_{aux} = L_{aux,ag} \quad (3.11)$$

## 3.2 OTIMIZADOR

Para o otimizador, serão utilizadas quatro opções:

- Método da Secante, adaptado para multivariável;
- Método de Müller, adaptado para multivariável;

- Método do Gradiente, utilizando derivada aproximada;
- Otimizadores da biblioteca Scipy (Python), os quais contemplam oito otimizadores prontos para utilização;

Os métodos serão descritos nos próximos tópicos.

Os dois primeiros métodos foram desenvolvidos com base nas teorias de otimização das aulas da universidade, particularmente da disciplina “Computação Científica II”. Porém, o problema de otimização apresenta pontos iniciais que são iguais, impossibilitando o uso de tais métodos. Assim, é proposto a utilização de passos, que alterem levemente os pontos iniciais, de forma a poder iniciar o algoritmo.

Foram analisados otimizadores adaptados para multivariável, como os métodos de Newton, Quase-Newton e do Gradiente, entretanto houve problema na inversão da Jacobiana, em razão de alguns dos parâmetros iniciais estimados dependerem apenas das variáveis de projeto (não se modificarem a partir da mudança dos dados de ensaio), logo algumas linhas da jacobiana ficavam proporcionais entre si, resultando em derivada nula e impossibilitando a inversão da matriz. Da mesma forma, a utilização de passos nos pontos iniciais também tornava as linhas da Jacobiana proporcionais entre si. Em razão disso, foi apenas testado o método do Gradiente, com a utilização de passos e da estimativa da derivada.

Ademais, foi utilizada a biblioteca Scipy em Python, a qual traz otimizadores prontos e validados. Para aprender sobre o funcionamento dos otimizadores e melhorar a explicação do TCC, foi optado por implantar os métodos da Secante, de Müller e do Gradiente manualmente e verificar os seus resultados. Após isso, foram testados os otimizadores Nelder-Mead e BFGS para comparar com os resultados do artigo do Umans (Umans, 1996). Por fim, foram testados oito otimizadores da biblioteca Scipy para estimar os parâmetros elétricos do motor WEG, utilizando três ensaios distintos.

Foram evitados otimizadores que necessitassem de derivada analítica, uma vez que o algoritmo utiliza inversão de matriz com números complexos nos seus elementos, aumentando assim o grau de complexidade matemática.

Outrossim, existem os métodos de parada do otimizador, aplicável a todos os casos utilizados. São utilizados parâmetros para esta parada, respectivamente *max\_iter* e *tol*. O parâmetro *max\_iter* representa o número máximo de iterações do algoritmo, enquanto o

parâmetro  $tol$  representa a tolerância da função objetivo. Ou seja, podemos indicar abaixo a regra de parada do otimizador.

- Se  $|f(p_n)| > tol$  e  $n \leq max\_iter$ , continuar o método;
- Se  $|f(p_n)| \leq tol$  ou  $n > max\_iter$ , parar o método e imprimir resultado.

### 3.2.1 Método da Secante adaptado

No método de Newton, é utilizado o gradiente para otimizar a função. Pode-se definir o gradiente de uma função monovariável  $f(x)$  pela equação (3.12).

$$g(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \quad (3.12)$$

Basicamente, o gradiente de uma função indica a direção do seu valor máximo. Se o gradiente for positivo, isso indica que a função está aumentando o seu valor à medida que  $x$  aumenta, como se percebe pela equação (3.12). Por outro lado, se o gradiente for negativo, isso indica que a função está reduzindo o seu valor à medida que  $x$  aumenta.

No caso particular dos problemas de otimização, geralmente o ponto ótimo de otimização é quando  $f(x) = 0$ . Ou seja, quando o resultado da função chega a zero, chegamos ao ponto ótimo desejado. Mais adiante, será mostrada a relação disso com as variáveis a serem otimizadas.

Para atingir esse resultado, temos duas possibilidades de  $f(x)$  ao longo da execução do otimizador:

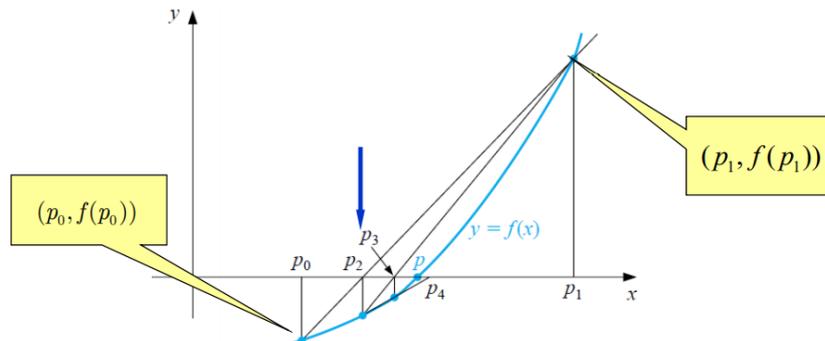
- $f(x) > 0$ : Deve-se reduzir o valor de  $f(x)$ , para que se aproxime mais do zero. O gradiente utilizado nas próximas iterações deve ser negativo;
- $f(x) < 0$ : Deve-se aumentar o valor de  $f(x)$ , para que se aproxime mais do zero. O gradiente utilizado nas próximas iterações deve ser positivo;

Portanto, deve-se utilizar uma “lógica” para atender a esse requisito.

O otimizador da Método da Secante utiliza a derivada aproximada, dada na equação (3.13). Isso significa que será utilizado a inclinação da reta entre dois pontos para o cálculo da derivada, conforme mostra a Figura 3.1.

$$g(p_1) \cong \frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0} \quad (3.13)$$

Figura 3.1 – Aproximação da reta dado no método da secante.



Fonte: Finardi (2016).

Como o cálculo dessa derivada precisa de dois pontos, o método da secante necessita de dois pontos iniciais. A partir deles, os pontos gerados reutilizam os pontos anteriores para o cálculo do gradiente, não necessitando da inserção de dados pelo usuário a cada iteração.

A partir da Figura 3.1, pode-se utilizar a equação da reta que une os pontos  $(p_1, f(p_1))$  e  $(p_0, f(p_0))$ , no formato apresentado na equação (3.14).

$$y = a \cdot x + b \quad (3.14)$$

Utilizando as condições iniciais:

- Para  $x = p_1, y = f(p_1)$ ;
- Para  $x = p_0, y = f(p_0)$ .

Chega-se na equação (3.15).

$$y = \left( \frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0} \right) \cdot (x - p_1) + f(p_1) \quad (3.15)$$

Conforme comentado anteriormente, o objetivo é que a função chegue a zero. Ou seja, podemos substituir  $(x, y) = (p_2, 0)$  para encontrar o próximo ponto, conforme mostra a equação (3.16).

$$0 = \left( \frac{f(p_1) - f(p_o)}{p_1 - p_o} \right) \cdot (p_2 - p_1) + f(p_1) \quad (3.16)$$

Isolando a variável  $p_2$ , chega-se na equação (3.17).

$$p_2 = p_1 - f(p_1) \cdot \left( \frac{p_1 - p_o}{f(p_1) - f(p_o)} \right) \quad (3.17)$$

Pode-se generalizar a equação (3.17), considerando as iterações do método, chegando assim na equação (3.18).

$$p_{n+1} = p_n - f(p_n) \cdot \left( \frac{p_n - p_{n-1}}{f(p_n) - f(p_{n-1})} \right), n = 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

Como curiosidade, pode-se utilizar a equação (3.13) para chegar ao formato da função utilizando o gradiente aproximado, como mostra a equação (3.19).

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{g(p_n)}, n = 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

Assim, a equação (3.18) será utilizada no algoritmo do método da secante para determinação do ponto ótimo. Porém, para deixar o formato mais apropriado ao programa, primeiro deve-se definir a função objetivo  $f(x)$  a ser utilizada.

O resultado desejado é que os valores calculados pelo algoritmo fiquem próximos dos dados de ensaio, a partir do ajuste das variáveis. Neste sentido, uma função objetivo que atende este requisito está apresentada na equação (3.20). Ela faz a diferença entre o resultado do algoritmo e o valor de ensaio (referência). Assim, o método da secante tentará fazer com que  $f(x) \rightarrow 0$ , o que significa que os valores do algoritmo ficarão o mais próximo possível dos valores de ensaio, automatizando a procura das variáveis ótimas.

$$f(x) = (F[\textit{algoritmo}] - \textit{Referência}) \quad (3.20)$$

Porém, pode-se perceber que as equações (3.18), (3.19) e (3.20) se aplicam apenas a problemas monovariáveis. Assim, para o algoritmo do programa, foi utilizada uma adaptação deste método. A equação (3.20) será adaptada, utilizando a função “global” definida pela equação (3.21), que faz uma média dos valores relativos.

$$f(p_n) = \sum_{i=1}^4 |f_i(p_n)| \quad (3.21)$$

Esses valores relativos são apresentados nas equações (3.22) a (3.25).

$$f_1(p_n) = \frac{T_{out} - T_{out,ref}}{T_{out,ref}} \quad (3.22)$$

$$f_2(p_n) = \frac{\eta - \eta_{ref}}{\eta_{ref}} \quad (3.23)$$

$$f_3(p_n) = \frac{I_{main} - I_{main,ref}}{I_{main,ref}} \quad (3.24)$$

$$f_4(p_n) = \frac{I_{aux} - I_{aux,ref}}{I_{aux,ref}} \quad (3.25)$$

Portanto, a função objetivo tenta manter o mesmo peso entre as variáveis durante a otimização. Caso as funções  $f_i(p_n)$  utilizadas fossem absolutas ao invés de relativas, algumas variáveis poderiam ganhar preferência na otimização quando não fosse alcançado todos os requisitos, o que desequilibraria o resultado. Além disso, a equação (3.21) utiliza o valor absoluto das funções  $f_i(p_n)$ , para evitar cancelamento entre as funções.

Quanto à atualização das variáveis, será utilizada a equação (3.18) em cada uma das variáveis. Ou seja, pode-se adaptar essa função a partir da equação (3.26), em que  $j$  corresponde a cada uma das variáveis a serem otimizadas.

$$p_{j,(n+1)} = p_{j,n} - f(p_n) \cdot \left( \frac{p_{j,n} - p_{j,(n-1)}}{f(p_n) - f(p_{(n-1)})} \right), n = 1, 2, \dots \quad (3.26)$$

Tais variáveis estão escritas na equação (3.27). Cada elemento desta matriz corresponde a um índice  $j$ . Dois exemplos são dados nas equações (3.28) e (3.29), o restante segue o mesmo raciocínio. A cada nova iteração, as variáveis são atualizadas, ficando cada vez mais próximo dos resultados de ensaio.

$$p_n = [R_R \quad L_R \quad L_{main,ag} \quad L_{aux,ag} \quad L_{main} \quad L_{aux} \quad L_{auxR}]^T \quad (3.27)$$

$$p_{1,n} = p[1] = R_R \quad (3.28)$$

$$p_{2,n} = p[2] = L_R \quad (3.29)$$

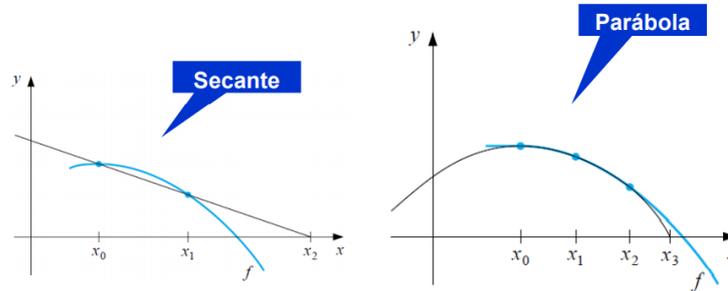
Além disso, pode-se definir uma nova variável do método, chamada “taxa de aprendizado”. Essa variável determina um peso entre as iterações, convergindo mais rápido ou lentamente ao resultado desejado. Quanto maior a taxa de aprendizado, mais rapidamente ela converge ao ponto ótimo, porém pode também apresentar *overshoot* (fazer zig-zag em torno do ponto ótimo) se tiver uma taxa de aprendizado elevada. A taxa de aprendizado ( $\alpha$ ) é apresentada na equação (3.30).

$$p_{j,(n+1)} = p_{j,n} - \alpha \cdot f(p_n) \cdot \left( \frac{p_{j,n} - p_{j,(n-1)}}{f(p_n) - f(p_{(n-1)})} \right), n = 1, 2, \dots \quad (3.30)$$

### 3.2.2 Método de Müller adaptado

O método de Müller é uma extensão do método da Secante, em que a aproximação por uma reta é substituída por uma parábola, como mostra a Figura 3.2.

Figura 3.2 – Aproximação da reta no método da secante e da parábola no método de Müller.



Fonte: Finardi (2016).

A parábola pode ser definida pela função dada na equação (3.31).

$$P(x) = a(x - p_2)^2 + b(x - p_2) + c \quad (3.31)$$

Utilizando três pontos distintos  $p_0$ ,  $p_1$  e  $p_2$  e substituindo-os na equação (3.31), têm-se as equações mostradas em (3.32), (3.33) e (3.34).

$$f(p_0) = a(p_0 - p_2)^2 + b(p_0 - p_2) + c \quad (3.32)$$

$$f(p_1) = a(p_1 - p_2)^2 + b(p_1 - p_2) + c \quad (3.33)$$

$$f(p_2) = a(p_2 - p_2)^2 + b(p_2 - p_2) + c \quad (3.34)$$

A partir dessas equações, é possível definir as variáveis  $a$ ,  $b$  e  $c$ , dadas pelas equações (3.35), (3.36) e (3.37).

$$c = f(p_2) \quad (3.35)$$

$$b = \frac{(p_0 - p_2)^2 \cdot [f(p_1) - f(p_2)] - (p_1 - p_2)^2 \cdot [f(p_0) - f(p_2)]}{(p_0 - p_2) \cdot (p_1 - p_2) \cdot (p_0 - p_1)} \quad (3.36)$$

$$a = \frac{(p_1 - p_2) \cdot [f(p_0) - f(p_2)] - (p_0 - p_2) \cdot [f(p_1) - f(p_2)]}{(p_0 - p_2) \cdot (p_1 - p_2) \cdot (p_0 - p_1)} \quad (3.37)$$

Para descobrir qual a variável da próxima iteração ( $p_3$ ), basta descobrir o valor de  $P(x) = 0$  dado na equação (3.31), de forma análoga ao método da secante. As raízes de uma equação de segundo grau podem ser descobertas pela “fórmula de Bhaskara”, a qual é dada pela equação (3.38).

$$p_3 - p_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \quad (3.38)$$

Porém, para evitar erros de arredondamento, será feita uma correção da equação (3.38), como mostra a equação (3.39). O desenvolvimento é mostrado na equação (3.40) e o resultado final na equação (3.41).

$$p_3 - p_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \cdot \frac{(-b \mp \sqrt{b^2 - 4.a.c})}{(-b \mp \sqrt{b^2 - 4.a.c})} \quad (3.39)$$

$$p_3 - p_2 = \frac{b^2 - b^2 + 4.a.c}{2.a.(-b \mp \sqrt{b^2 - 4.a.c})} = \frac{4.a.c}{2.a.(-b \mp \sqrt{b^2 - 4.a.c})} \quad (3.40)$$

$$p_3 - p_2 = \frac{2.c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4.a.c}} = \frac{-2.c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}} \quad (3.41)$$

Para evitar subtração de números de magnitudes próximas no denominador, será escolhida a raiz com mesmo sinal da variável  $b$ . Isso poderia ser representado pela função  $sign(b)$ , que é definida pela equação (3.42).

$$\begin{aligned} sign(b) &= 1, se b > 0 \\ sign(b) &= 0, se b = 0 \\ sign(b) &= -1, se b < 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Porém, podem acontecer casos em que  $b = 0$ , por mais que esses casos sejam raros. Assim, será utilizada a função  $copysign(x_1, x_2)$ , em analogia à função da biblioteca *numpy* existente, e sua definição é mostrada na equação (3.43).

$$\begin{aligned} \text{copysign}(x_1, x_2) &= x_1, \text{ se } x_2 \geq 0 \\ \text{copysign}(x_1, x_2) &= -x_1, \text{ se } x_2 < 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Utilizando  $(x_1, x_2) = (1, b)$ , chega-se à função desejada para o sinal de  $b$ , conforme mostra a equação (3.44).

$$\begin{aligned} \text{copysign}(1, b) &= 1, \text{ se } b \geq 0 \\ \text{copysign}(1, b) &= -1, \text{ se } b < 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Portanto, pode-se escrever a função resultante, como mostra a equação (3.45).

$$p_3 - p_2 = \frac{-2 \cdot c}{b + \text{copysign}(1, b) \cdot \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}} \quad (3.45)$$

Porém, novamente, este método declara funções monovariáveis. A função objetivo a ser utilizada é a equação (3.21), idêntica ao método da secante. Os parâmetros  $a$  e  $b$  devem ser modificados, com auxílio da equação (3.27). Assim, as novas equações são mostradas em (3.46) e (3.47), e devem ser aplicadas para cada valor da matriz  $p$ , ou seja, de  $j = 1$  até  $j = 7$ .

$$b_j = \frac{(p_{j,0} - p_{j,2})^2 \cdot [f(p_1) - f(p_2)] - (p_{j,1} - p_{j,2})^2 \cdot [f(p_0) - f(p_2)]}{(p_{j,0} - p_{j,2}) \cdot (p_{j,1} - p_{j,2}) \cdot (p_{j,0} - p_{j,1})} \quad (3.46)$$

$$a_j = \frac{(p_{j,1} - p_{j,2}) \cdot [f(p_0) - f(p_2)] - (p_{j,0} - p_{j,2}) \cdot [f(p_1) - f(p_2)]}{(p_{j,0} - p_{j,2}) \cdot (p_{j,1} - p_{j,2}) \cdot (p_{j,0} - p_{j,1})} \quad (3.47)$$

Logo, a nova “fórmula de Bhaskara” adaptada ao método de Müller é mostrada na equação (3.48).

$$p_{j,3} - p_{j,2} = \frac{-2 \cdot c}{b_j + \text{copysign}(1, b_j) \cdot \sqrt{b_j^2 - 4 \cdot a_j \cdot c}} \quad (3.48)$$

Como o método de Müller utiliza três pontos, ele tecnicamente é mais confiável para o algoritmo, uma vez que esses três pontos representam três pontos de ensaio do motor, logo isso reduz a possibilidade de pontos ruins de ensaios serem influentes no resultado.

### 3.2.3 Método do Gradiente adaptado

O método do Gradiente adaptado apresenta formato similar ao método da Secante mostrado anteriormente. Pode-se utilizar a derivada aproximada indicada na equação (3.13) para calcular o vetor mostrado em (3.49), chegando-se assim na equação (3.50).

$$\nabla g(x) = \left[ \frac{df(x)}{dx_1} \quad \frac{df(x)}{dx_2} \quad \dots \quad \frac{df(x)}{dx_i} \quad \dots \quad \frac{df(x)}{dx_n} \right]^T, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.49)$$

$$\nabla g(p) = \left[ \frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0} \quad \frac{f(p_2) - f(p_1)}{p_2 - p_1} \quad \dots \quad \frac{f(p_i) - f(p_{i-1})}{p_i - p_{i-1}} \quad \dots \quad \frac{f(p_n) - f(p_{n-1})}{p_n - p_{n-1}} \right]^T \quad (3.50)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

Logo, utiliza-se a equação (3.51) para calcular o resultado das próximas iterações. É utilizada a taxa de aprendizado  $\alpha$  de forma similar ao método da Secante.

$$p_{j,2} = p_{j,1} - \alpha \cdot \nabla g(p_{j,1}) \quad (3.51)$$

### 3.2.4 Otimizadores da biblioteca Scipy

Foram utilizadas otimizadores da biblioteca Scipy. Os otimizadores testados foram:

- Nelder-Mead Simplex Algorithm;
- Powell Algorithm;
- Conjugate Gradient Algorithm;
- Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno Algorithm;
- Limited-Memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno Algorithm;
- Truncated Newton Algorithm;
- Constrained Optimization by Linear Approximation Algorithm;
- Sequential Least Squares Programming.

A escolha foi baseada na facilidade de implementação no algoritmo e evitando funções que necessitassem de “regiões de confiança” (zonas que delimitassem a resposta) para o seu funcionamento. Alguns desses algoritmos estimam a Jacobiana numericamente para a sua execução.

## 4 RESULTADOS OBTIDOS

A seguir são mostrados os resultados adquiridos, acoplando a teoria apresentada pelo Stephen D. Umans e os otimizadores utilizados. A seção é dividida em três partes: (i) interface de usuário em Excel, (ii) validação do programa com resultados obtidos do artigo e (iii) estimação de parâmetros com motor WEG ensaiado em laboratório.

### 4.1 INTERFACE DE USUÁRIO (FRONT-END)

Foi desenvolvido uma interface de usuário em Excel, em que é possível obter os resultados do algoritmo em Python. Os parâmetros de entrada são os dados de projeto do motor (Motor Project) e os dados de ensaio (Measured outputs). Os parâmetros iniciais (Initial parameter estimates) são dados de entrada do algoritmo, que podem ser ajustados conforme a necessidade do usuário, mas eles podem ser calculados automaticamente utilizando a teoria do Umans (Umans, 1996) a partir do botão “Compute initial parameter estimates”.

O resultado do algoritmo é apresentado nas abas chamadas “Output data”, que corresponde ao lado direito da Figura 4.1, incluindo os gráficos de Torque x velocidade e Rendimento x velocidade. Além disso, também são apresentados os gráficos de “Módulo da corrente no enrolamento principal x velocidade” e “Módulo da corrente no enrolamento auxiliar x velocidade”. A escala dos gráficos pode ser alterada conforme necessidade.

O método pode ser escolhido a partir de uma caixa de listagem; no caso da Figura 4.1 o método escolhido é o Nelder-Mead. Além disso, o programa foi adaptado considerando os otimizadores do Scipy. Como esses otimizadores precisam de apenas um ponto inicial, então pode-se escolher o ensaio desejado para otimização. Por exemplo, escolhendo a opção 1, a otimização será feita com base no primeiro ensaio, enquanto que as opções 2 e 3 correspondem ao segundo e terceiro ensaios, respectivamente. Se o usuário quiser fazer uma otimização com os três ensaios simultaneamente, ele pode utilizar a opção “123”, a qual utiliza o primeiro ensaio como parâmetro inicial, mas tenta otimizar utilizando os três ensaios do motor, cada um com mesmo peso na otimização.

Figura 4.1 – Interface de usuário (Front-End) desenvolvida em Excel



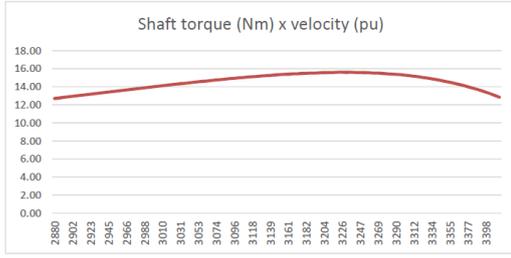
**Parameter estimation of capacitor-run single-phase induction motor**  
UFSC - Electric and Electronic Engineer    Version A

**Output data - Shaft torque x velocity**

Velocity    Minimum  pu    Maximum  pu



Source: <https://www.weg.net/catalog/weg/BR/pt/Motores-EI%C3%A9tricos/Mono%C3%A1sico/Usos-Gerais/Motor-de-Chapa-Aberto-%28IP21%29/Motor-0-5-cv-4P-C48C-1F-110-127-220-254-V-60-Hz-IC01---ODP---Com-p%C3%A9s/p/13027719>



---

**Input data - Motor project**

Air  Ambient

$\mu R$   Relative magnetic permeability

Nmain  Number of main winding turns

kwmain  Main-winding winding factor

Naux  Number of auxiliary winding turns

kwaux  Auxiliary-winding winding factor

cp  mm Steel plates length

R  mm Radius to the center of the air-gap

g  mm Air-gap length

P  Number of pole pairs

Abar  mm<sup>2</sup> Rotor-bar cross-sectional area

NR  Number of rotor bars

$\sigma$  bar  S Rotor-bar conductivity

$\alpha$   °C<sup>-1</sup> Temperature coefficient of conductor material

$\Delta T_{main}$   °C Estimate rise temperature of main-winding

$\Delta T_{aux}$   °C Estimate rise temperature of auxiliary-winding

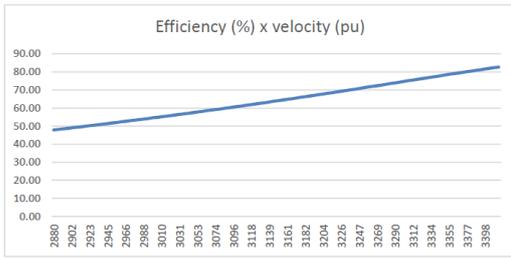
Rmain   $\Omega$  Main-winding resistance

Raux   $\Omega$  Auxiliary-winding resistance

Zmain  +j   $\Omega$  Main-winding external impedance

Zaux  +j   $\Omega$  Auxiliary-winding external impedance

**Output data - Efficiency x velocity**



---

**Input data - Measured outputs**

$V_o$   V     V     V    Applied voltage

f  Hz     Hz     Hz    Applied frequency

s             Slip

$\tau$   Nm     Nm     Nm    Shaft torque

$\eta$   %     %     %    Efficiency

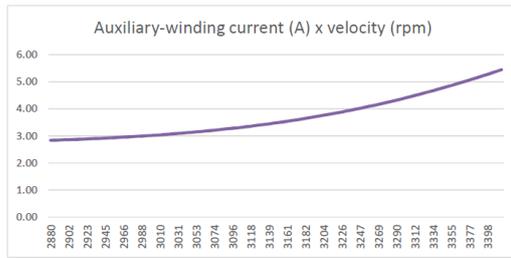
I<sub>in</sub>  A     A     A    Input current (absolute)

$\phi$  I<sub>in</sub>  °     °     °    Input current (angle)

Prot  W     W     W    Rotational losses

Pcore  W     W     W    Core losses

**Output data - Auxiliary-winding current x velocity**



---

**Input data - Inicial parameter estimates**

Compute inicial parameter estimates

R<sub>M</sub>   $\Omega$       $\Omega$       $\Omega$

R<sub>A</sub>   $\Omega$       $\Omega$       $\Omega$

R<sub>R</sub>   $\Omega$       $\Omega$       $\Omega$

L<sub>R</sub>  H     H     H

L<sub>mainag</sub>  H     H     H

L<sub>auxag</sub>  H     H     H

L<sub>main</sub>  H     H     H

L<sub>aux</sub>  H     H     H

L<sub>mainR</sub>  H     H     H

L<sub>auxR</sub>  H     H     H

L<sub>M</sub>  H     H     H

L<sub>A</sub>  H     H     H

**Output data - Parameter estimates**

Compute parameter estimates    Nelder-Mead Simplex Algorithm

Without core losses    1

R<sub>M</sub>   $\Omega$     Main-axis core-loss winding resistance

R<sub>A</sub>   $\Omega$     Auxiliary-axis core-loss winding resistance

R<sub>R</sub>   $\Omega$     Rotor winding resistance

L<sub>R</sub>  H    Rotor phase-1 and phase-2 winding self inductance

L<sub>mainag</sub>  H    Air-gap component of the main-winding inductance

L<sub>auxag</sub>  H    Air-gap component of the auxiliary-winding inductance

L<sub>main</sub>  H    Main-winding self inductance

L<sub>aux</sub>  H    Auxiliary-winding self inductance

L<sub>mainR</sub>  H    Main-winding-to-rotor mutual inductance

L<sub>auxR</sub>  H    Auxiliary-winding-to-rotor mutual inductance

L<sub>M</sub>  H    Main-axis core loss winding leakage inductance

L<sub>A</sub>  H    Auxiliary-axis core loss winding leakage inductance

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

## 4.2 COMPARAÇÃO COM ARTIGO DE REFERÊNCIA

Em primeiro lugar, foi realizada uma comparação com os resultados do artigo. Este foi o primeiro passo antes mesmo de iniciar este TCC. A ideia é que, com a comparação realizada, seria possível então de fazer um TCC utilizando como referência este artigo, senão seria necessário outro artigo de referência (ou ainda outro tema).

A partir da comparação, percebeu-se erros na formulação do caso com perdas apresentado pelo Umans, os quais foram corrigidos na seção das equações. Atenção especial ao vetor tensão  $V$ , que apresenta tensão positiva tanto no enrolamento principal quanto no auxiliar, diferentemente do que é apresentado no artigo de referência.

### 4.2.1 Parâmetros obtidos do Umans

Primeiro foi testado o programa com os resultados do autor, utilizando-os como parâmetros iniciais do algoritmo. Assim, o valor não deveria divergir muito, uma vez que seria otimizado em cima do ponto ótimo. A Tabela 4.1 mostra essa comparação utilizando o Método da Secante. Estão destacados em amarelo as variáveis que são otimizadas; as variáveis em branco são geradas por consequência.

Tabela 4.1 – Resultados com parâmetros obtidos do Umans (Método da Secante adaptado).

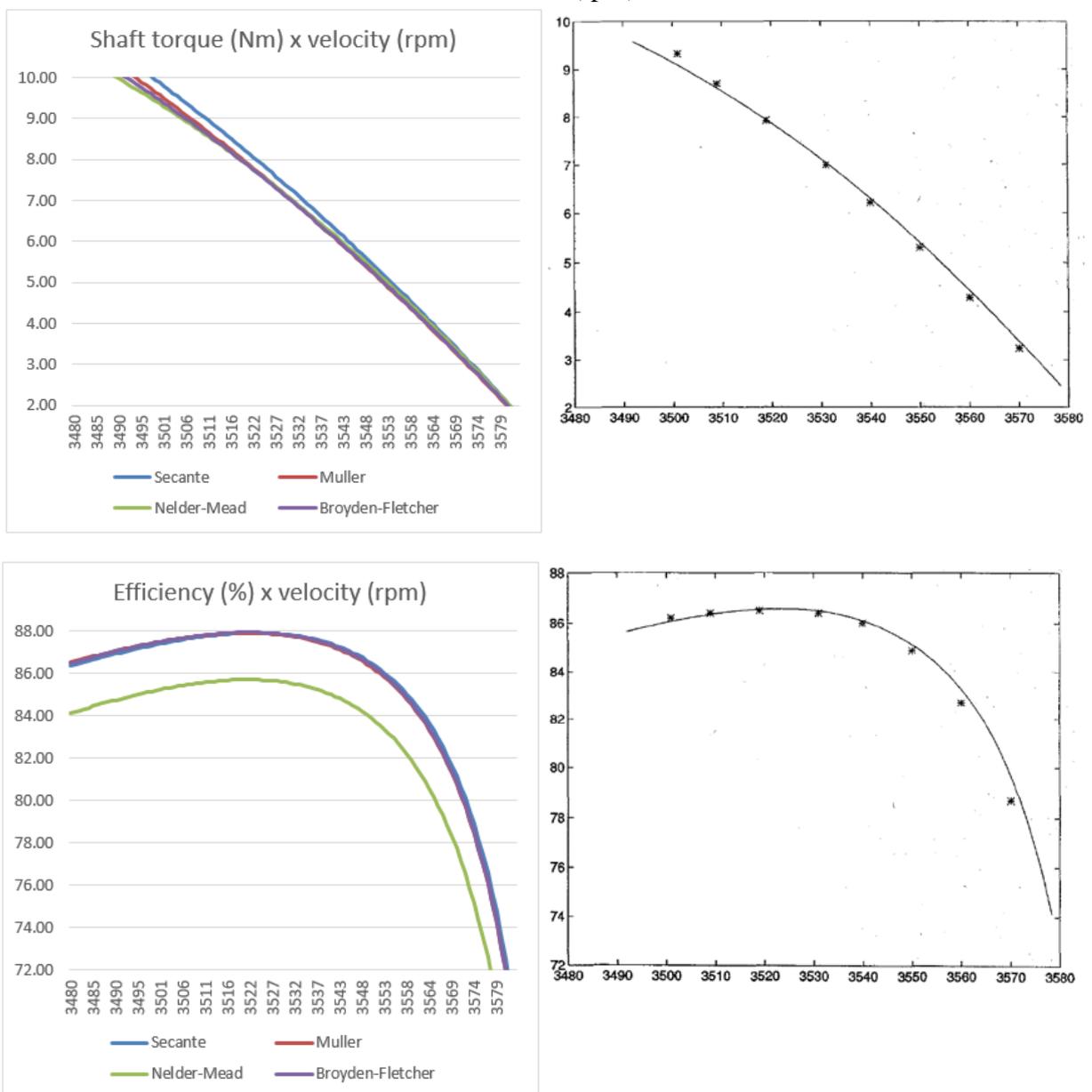
Parâmetro	Inicial	Obtido	Referência (Umans)	Unidade
RM	570	998	570	$\Omega$
RA	1300	7279	1300	$\Omega$
RR	3.76E-05	3.61E-05	3.76E-05	$\Omega$
LR	4.70E-06	4.51E-06	4.70E-06	H
Lmainag	0.0695	0.0667	0.0695	H
Lauxag	0.166	0.159	0.166	H
Lmain	0.0806	0.0774	0.0806	H
Laux	0.196	0.188	0.196	H
LmainR	5.88E-04	5.65E-04	5.88E-04	H
LauxR	9.09E-04	8.72E-04	9.09E-04	H
LMi	0.00429	0.00416	0.00429	H
LAi	0.0102	0.0099	0.0102	H

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Da tabela 4.1, percebe-se que, com exceção das resistências da principal ( $R_M$ ) e auxiliar ( $R_A$ ) do enrolamento do núcleo magnetizante, foram encontrados valores semelhantes ao resultado obtido pelo Umans (Umans, 1996).

O Gráfico 4.2 mostra uma comparação dos gráficos obtidos pelo algoritmo e os resultados do artigo, porém considerando também os outros otimizadores.

Gráfico 4.2 – Comparação entre resultados do algoritmo (esquerda) e do autor do artigo (direita). Gráficos de Torque de saída (Nm) x Velocidade (rpm) e de Eficiência (%) x Velocidade (rpm).



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), à esquerda, e Umans (1996), à direita.

Como pode-se perceber, os gráficos são bem parecidos em formato, porém com diferenças em alguns valores. Em especial, o método do Nelder-Mead da biblioteca Scipy foi o único que conseguiu valores próximos de eficiência do autor.

Foi também testado o método do gradiente adaptado, porém este acabou divergindo consideravelmente. Em razão disso, ele não foi utilizado para os próximos testes.

#### 4.2.2 Parâmetros estimados do Umans

Então, o próximo passo foi utilizar as equações do artigo para calcular os parâmetros iniciais, e então fazer a mesma análise. A Tabela 4.2 mostra a comparação utilizando o Método de Müller, porém com as equações de parâmetros iniciais e os resultados do Umans (Umans, 1996).

Tabela 4.2 – Resultados com parâmetros estimados do Umans (Método de Müller adaptado).

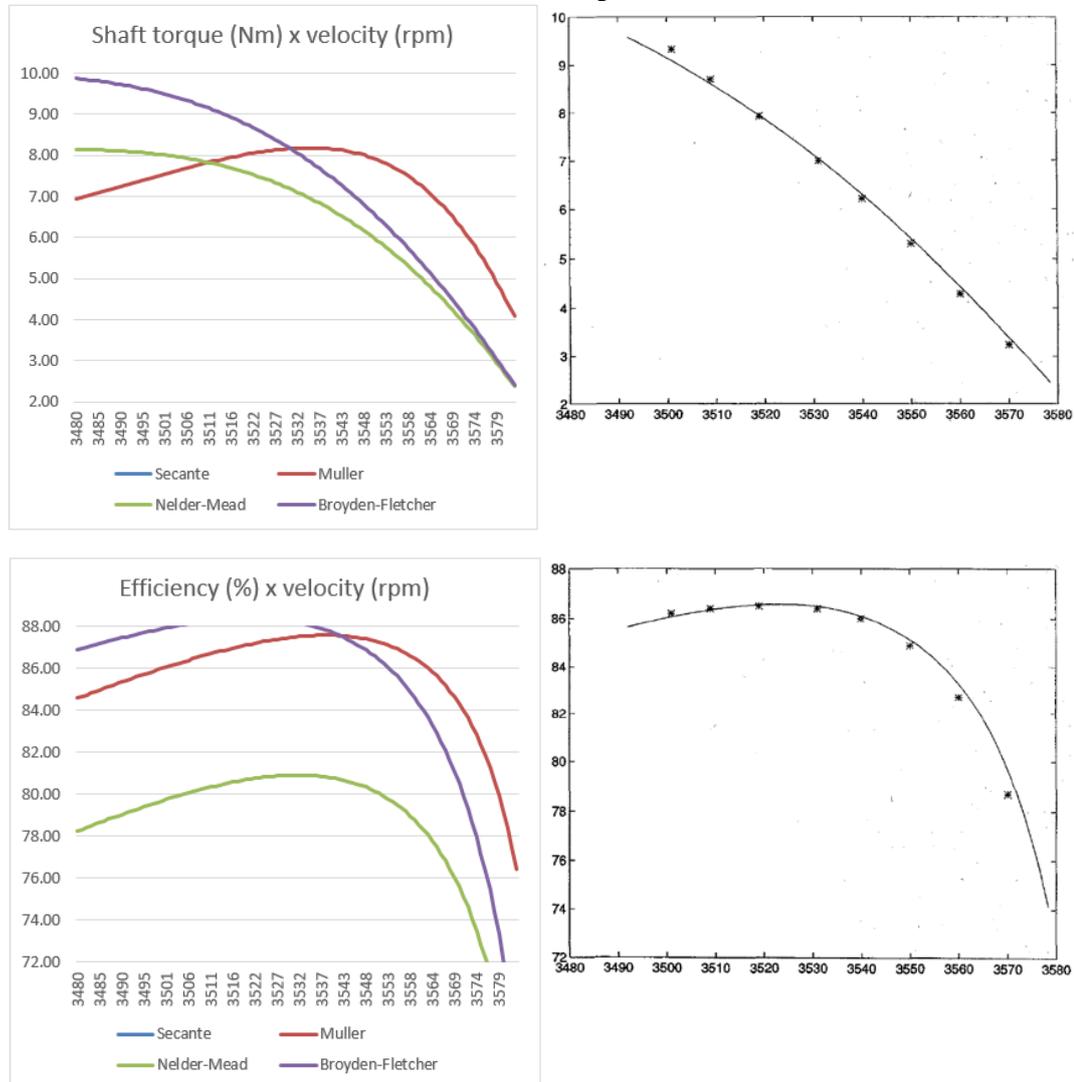
Parâmetro	Inicial	Obtido	Referência (Umans)	Unidade
RM	998	998	570	$\Omega$
RA	4136	3935	1300	$\Omega$
RR	4.95E-05	9.66E-06	3.76E-05	$\Omega$
LR	6.30E-06	1.16E-06	4.70E-06	H
Lmainag	0.1758	0.0624	0.0695	H
Lauxag	0.42	0.165	0.166	H
Lmain	0.1758	0.0624	0.0806	H
Laux	0.42	0.165	0.196	H
LmainR	1.49E-03	3.36E-04	5.88E-04	H
LauxR	2.30E-03	5.19E-04	9.09E-04	H
LMi	0.18458	0.03677	0.00429	H
LAi	0.4407	0.0708	0.0102	H

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Da tabela 4.2, percebe-se que houve uma divergência maior entre os resultados, porém, ainda assim, vários parâmetros não se distanciaram tanto do resultado do Umans (Umans, 1996). Novamente, as resistências no enrolamento do núcleo magnetizante foram distintas dos dados de referência.

O Gráfico 4.3 mostra uma comparação dos gráficos obtidos pelo algoritmo e os resultados do artigo, considerando este cálculo dos parâmetros iniciais.

Gráfico 4.3 – Comparação entre resultados do algoritmo (esquerda) e do autor do artigo (direita). Gráficos de Torque de saída (Nm) x Velocidade (rpm) e de Eficiência (%) x Velocidade (rpm).



Fonte: Elaborado pelo autor (2021), à esquerda, e Umans (1996), à direita.

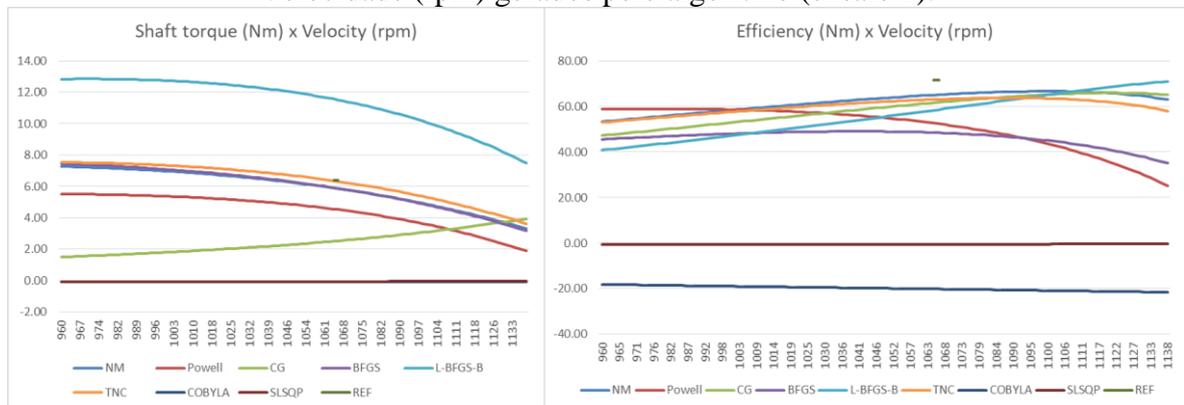
Pelos gráficos mostrados no Gráfico 4.3, percebe-se que há maior distinção entre os resultados do autor em comparação com o Gráfico 4.2. Neste caso, alguns métodos apresentam melhor resultado que outros, dependendo do parâmetro. Por exemplo, o torque de saída pareceu melhor no método Broyden-Fletcher, entretanto a eficiência se mostrou melhor no método de Müller adaptado. Quanto ao método da secante, o algoritmo acabou divergindo, em razão disso ele não é mostrado no gráfico.

### 4.3 ENSAIO DE MOTOR WEG

Foi realizado ensaio com motor da WEG e estimado os seus parâmetros elétricos. Para isso, foi utilizado um motor de 6 polos que apresenta três ensaios distintos, os quais não apresentam as mesmas condições, porém ficam próximas da operação nominal. Foi feita uma otimização de modo a obter parâmetros elétricos que atendam os três ensaios da melhor forma possível. No caso específico, não se tinham informações das correntes absolutas na principal e na auxiliar, então foram utilizadas a corrente de entrada e sua defasagem em substituição a esses parâmetros de referência. É claro que cada condição do motor terá parâmetros distintos, mas a ideia geral é que os parâmetros não variam muito caso os ensaios estejam em condições próximas.

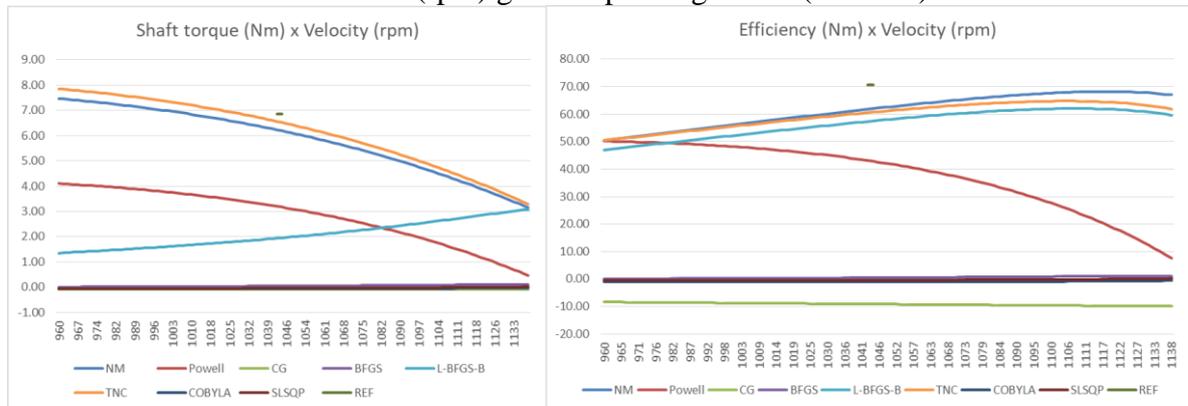
Desta forma, será mostrada a otimização com cada ensaio individualmente, utilizando todos os oito métodos do Scipy citados, que precisam apenas de um ensaio. Os gráficos a seguir (Gráfico 4.4, Gráfico 4.5 e Gráfico 4.6) mostram uma comparação dos resultados obtidos pelo algoritmo em diferentes condições de ensaios, porém realizados em pontos próximos de operação. O curto traço verde indica o resultado do ensaio.

Gráfico 4.4 – Gráficos de Torque de saída (Nm) x Velocidade (rpm) e de Eficiência (%) x Velocidade (rpm) gerados pelo algoritmo (ensaio 1).



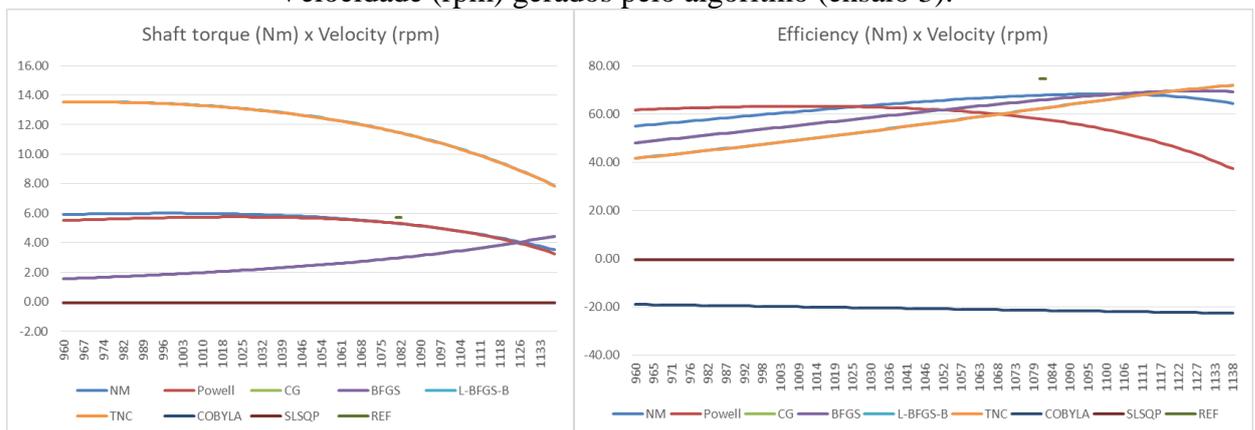
Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Gráfico 4.5 – Gráficos de Torque de saída (Nm) x Velocidade (rpm) e de Eficiência (%) x Velocidade (rpm) gerados pelo algoritmo (ensaio 2).



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Gráfico 4.6 – Gráficos de Torque de saída (Nm) x Velocidade (rpm) e de Eficiência (%) x Velocidade (rpm) gerados pelo algoritmo (ensaio 3).



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Percebe-se que há diferença significativa entre os resultados obtidos. Vários otimizadores não conseguiram um resultado satisfatório, contudo dois otimizadores se destacaram positivamente, os quais são o Nelder-Mead (NM) e o Truncated Newton (TC). Destes dois, o Nelder-Mead foi o que apresentou melhor resultado no geral.

Com base nisso, a Tabela 4.3 mostra os parâmetros estimados iniciais e dos dois melhores otimizadores para este motor.

Tabela 4.3 – Resultados dos parâmetros estimados por ensaio (três ensaios).

Tabela 4.3 - Resultados com parâmetros obtidos de ensaio (três ensaios)										
Parâmetro	Inicial			Nelder-Mead			Truncated Newton			Unidade
	Ensaio 1	Ensaio 2	Ensaio 3	Ensaio 1	Ensaio 2	Ensaio 3	Ensaio 1	Ensaio 2	Ensaio 3	
RM	555	608	606	555	608	606	555	608	606	Ω
RA	9923	15595	6616	6265	13559	3520	5360	9557	2798	Ω
RR	3.01E-05	3.01E-05	3.01E-05	3.59E-05	3.89E-05	3.75E-05	9.25E-05	7.29E-05	3.01E-05	Ω
LR	9.53E-07	9.53E-07	9.53E-07	8.05E-07	1.23E-06	7.36E-07	1.78E-06	1.88E-06	1.91E-06	H
Lmainag	0.0660	0.0660	0.0660	0.0631	0.0693	0.0511	0.0659	0.0660	0.0660	H
Lauxag	0.028	0.028	0.028	0.031	0.020	0.036	0.028	0.028	0.028	H
Lmain	0.0660	0.0660	0.0660	0.0781	0.0822	0.0833	0.0659	0.0659	0.0660	H
Laux	0.028	0.028	0.028	0.025	0.014	0.027	0.028	0.028	0.028	H
LmainR	3.55E-04	3.55E-04	3.55E-04	2.66E-04	3.18E-04	2.78E-04	3.72E-04	3.56E-04	3.55E-04	H
LauxR	2.33E-04	2.33E-04	2.33E-04	1.74E-04	2.09E-04	1.82E-04	2.44E-04	2.33E-04	2.33E-04	H
LMi	0.06925	0.06925	0.06925	0.02585	0.01380	0.05651	0.01214	0.00155	0.00000	H
LAi	0.0298	0.0298	0.0298	0.0068	0.0166	0.0097	0.0052	0.0007	0.0000	H

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Com base na Tabela 4.3, pode-se perceber que há diferença entre os valores estimados, porém, para a maioria dos casos, os valores iniciais são bem próximos dos valores estimados pelos algoritmos. Percebe-se uma diferença maior na resistência do enrolamento auxiliar e nas variáveis  $L_{Mi}$  e  $L_{Ai}$ .

Consequentemente, podem-se estimar o desempenho do motor e separar as suas perdas, conforme apresenta a Tabela 4.4. Neste caso, o ensaio 3 do otimizador Truncated-Newton acabou divergindo consideravelmente do ponto de ensaio.

Tabela 4.4 – Desempenho estimado do motor, nas condições dos três ensaios.

Tabela 4.4 - Resultados estimados								
Estimativa	Descrição	Nelder-Mead			Truncated-Newton			Unidade
		Ensaio 1	Ensaio 2	Ensaio 3	Ensaio 1	Ensaio 2	Ensaio 3	
$\tau$	Torque de saída	5.8	6.4	5.3	6.3	6.7	11.2	N.m
$\eta$	Rendimento	67.9	63.2	70.5	65.1	61.6	64.9	%
fp	Fator de potência (entrada)	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	atrasado
I <sub>main</sub>	Corrente na principal (módulo)	7.9	9.8	6.7	8.9	10.5	16.1	A
$\phi$ I <sub>main</sub>	Corrente na principal (ângulo)	-33.1	-26.5	-36.2	-32.9	-28.2	-18.6	°
I <sub>aux</sub>	Corrente na auxiliar (módulo)	3.2	2.5	3.4	3.6	3.0	3.1	A
$\phi$ I <sub>aux</sub>	Corrente na auxiliar (ângulo)	59.0	60.9	57.9	59.3	60.7	61.2	°
P <sub>in</sub>	Potência de entrada	962.7	1104.0	850.5	1082.2	1189.0	1966.0	W
P <sub>out</sub>	Potência de saída	653.6	697.3	599.5	704.3	732.7	1276.5	W
P <sub>main</sub>	Perdas na principal (estator)	87.5	134.4	63.1	111.1	155.0	362.9	W
P <sub>aux</sub>	Perdas na auxiliar (estator)	27.8	17.0	31.8	34.5	25.0	25.5	W
Protor	Perdas no rotor	147.7	204.1	116.1	175.6	218.8	240.2	W
Pferro	Perdas no ferro	14.8	12.1	14.2	21.3	16.1	16.5	W

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

## 5 CONCLUSÃO

Em razão dos argumentos apresentados, percebe-se que o algoritmo apresentado pelo Umans em seu artigo (Umans, 1966) consegue convergir para o motor da WEG apresentado com a escolha adequada do otimizador. Logo, é possível ter uma estimativa dos parâmetros elétricos desse motor em regime nominal e separar as suas perdas, assim melhorando o seu projeto.

A dedução das equações para o caso sem perdas mostrou-se positiva na compreensão da teoria e no aprendizado do estudante. Notou-se diferenças entre as equações mostradas pelo autor e as deduzidas neste trabalho, mas ainda assim são muito próximas. Infelizmente, não foi possível deduzir as equações considerando as perdas no ferro, considerando o tempo de entrega do TCC.

Os otimizadores da biblioteca Scipy facilitam a implementação dessas ferramentas para problemas de otimização. Entretanto, apenas os métodos de Nelder-Mead e Truncated Newton se mostraram viáveis para o problema em questão. Apesar de não ter sido o foco deste TCC, sugere-se a utilização explícita da Jacobiana (quando viável a sua obtenção) nos otimizadores que a usarem.

Seguem algumas sugestões de trabalhos futuros:

- Terminar a dedução das equações, considerando as perdas no ferro;
- Utilizar o algoritmo sem considerar as perdas no ferro, e realizar uma comparação com o caso com perdas;
- Propor alternativas aos otimizadores apresentados;
- Derivar ou estimar a jacobiana da função. Deve ser verificado se a inversão da Jacobiana é necessária, necessitando então de uma matriz quadrada;
- Testar o algoritmo com um conjunto de motores, ao invés de um motor só;
- Testar outros parâmetros de referência, como fator de potência, defasagens das correntes dos enrolamentos principal e auxiliar, módulo da tensão no capacitor, etc;
- Ampliar a análise para um conjunto de “n” ensaios, realizados próximos da operação nominal, e fazer uma média dos parâmetros estimados, de forma a reduzir a influência de um ensaio que pode apresentar erros nos resultados;
- Utilizar outros parâmetros iniciais, com ajuda de referências bibliográficas. No caso especial da resistência do rotor, considerar também o anel de curto, ao invés de apenas as barras do rotor.

## REFERÊNCIAS

UMANS, Stephen D. Steady-State, Lumped-Parameter Model for Capacitor-Run, Single-Phase Induction Motors. **IEEE Transactions on Industry Applications**, v. 32, n. 1, jan./fev. 1996. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/485829>. Acesso em: 15 ago. 2021.

UMANS, Stephen D. Corrections to "Steady-State, Lumped-Parameter Model for Capacitor-Run, Single-Phase Induction Motors". **IEEE Transactions on Industry Applications**, v. 32, n. 6, nov./dec. 1996. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/556636>. Acesso em: 15 ago. 2021.

VEINOTT, Cyril George. Elementary Principles of the Induction Motor. *In*: VEINOTT, Cyril George. **Theory and design of small induction motors**. 1st ed. Universidade de Michigan: McGraw-Hill, 1959.

CHAPMAN, Stephen J. Motores monofásicos e para aplicações especiais. *In*: CHAPMAN, Stephen J. **Fundamentos de Máquinas Elétricas**. Tradução: Anatólio Laschuk. 5. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2012. p. 570-572, 579.

BASTOS, João Pedro Assumpção. Capítulo 4 - Magnetostática. *In*: BASTOS, João Pedro Assumpção. **Eletromagnetismo para Engenharia: Estática e Quase Estática**. 3. ed. Florianópolis: Ed. da UFSC, 2012. p. 188-192.

Universidade de Brasília – Transformadas de Clarke e Park. Brasília, DF: Universidade de Brasília, 2019. Disponível em: <http://www2.ene.unb.br/lelio/ep/Transformacoes.pdf>. Acesso em: 15 ago. 2021.

Universidade de São Paulo – Máquinas Assíncronas Monofásicas. São Paulo: Universidade de São Paulo. Disponível em: [https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4154490/mod\\_resource/content/1/PEA-3404\\_Notas%20de%20aula%20Parte%207\\_Maquinas%20Ass%C3%ADncronas%20-%20Motores%20Monof%C3%A1sicos.ppt](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4154490/mod_resource/content/1/PEA-3404_Notas%20de%20aula%20Parte%207_Maquinas%20Ass%C3%ADncronas%20-%20Motores%20Monof%C3%A1sicos.ppt). Acesso em: 15 ago. 2021.

FINARDI, Erlon Cristian – Resolução de Equações Não-Lineares. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2016. Disponível em: [https://moodle.ufsc.br/pluginfile.php/1887860/mod\\_resource/content/1/02%20-%20Resolu%C3%A7%C3%A3o%20de%20Equa%C3%B5es%20N%C3%A3o%20Lineares.pdf](https://moodle.ufsc.br/pluginfile.php/1887860/mod_resource/content/1/02%20-%20Resolu%C3%A7%C3%A3o%20de%20Equa%C3%B5es%20N%C3%A3o%20Lineares.pdf). Acesso em: 15 ago. 2021.

FINARDI, Erlon Cristian – Solução de Sistemas de Equações Não-Lineares. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2016. Disponível em: [https://moodle.ufsc.br/pluginfile.php/1946241/mod\\_resource/content/1/09%20-%20Resolu%C3%A7%C3%A3o%20de%20Sistemas%20de%20Equa%C3%A7%C3%B5es%20N%C3%A3o%20Lineares.pdf](https://moodle.ufsc.br/pluginfile.php/1946241/mod_resource/content/1/09%20-%20Resolu%C3%A7%C3%A3o%20de%20Sistemas%20de%20Equa%C3%A7%C3%B5es%20N%C3%A3o%20Lineares.pdf). Acesso em: 15 ago. 2021.

## Apêndice A

### A.1 Transformada de Park - Componente $V_d$

Lembrando das equações (A.1) e (A.2).

$$V_\alpha = V_{\alpha\beta} \cdot \cos(\gamma) \quad (\text{A.1})$$

$$V_d = V_{\alpha\beta} \cdot \cos(\gamma - \theta) \quad (\text{A.2})$$

Substituindo a equação (A.2) na (A.1), chega-se na equação (A.3).

$$V_\alpha = V_d \cdot \frac{\cos(\gamma)}{\cos(\gamma - \theta)} \quad (\text{A.3})$$

O cosseno da diferença entre os ângulos  $\gamma$  e  $\theta$  é definido como:

$$\cos(\gamma - \theta) = \cos(\gamma) \cdot \cos(\theta) + \text{sen}(\gamma) \cdot \text{sen}(\theta) \quad (\text{A.4})$$

Substituindo a equação (A.4) na (A.3), obtêm-se a equação (A.5).

$$V_\alpha = V_d \cdot \frac{\cos(\gamma)}{\cos(\gamma) \cdot \cos(\theta) + \text{sen}(\gamma) \cdot \text{sen}(\theta)} \quad (\text{A.5})$$

Multiplicando o numerador e o denominador por  $1/\cos(\gamma)$  na equação (A.5), chega-se na equação (A.6).

$$V_\alpha = V_d \cdot \frac{1}{\cos(\theta) + \frac{\text{sen}(\gamma)}{\cos(\gamma)} \cdot \text{sen}(\theta)} \quad (\text{A.6})$$

A relação  $\text{sen}(\gamma)/\cos(\gamma)$  pode ser obtida pela razão das componentes  $V_\beta$  e  $V_\alpha$ , como apresentado na equação (A.7).

$$\frac{V_\beta}{V_\alpha} = \frac{V_{\alpha\beta} \cdot \text{sen}(\gamma)}{V_{\alpha\beta} \cdot \text{cos}(\gamma)} = \frac{\text{sen}(\gamma)}{\text{cos}(\gamma)} \quad (\text{A.7})$$

Assim, substituindo (A.7) em (A.6) e manipulando algebricamente, tem-se a equação (A.8).

$$V_d = V_\alpha \cdot \text{cos}(\theta) + V_\beta \cdot \text{sen}(\theta) \quad (\text{A.8})$$

## A.2 Transformada de Park - Componente $V_q$

Lembrando das equações (A.9) e (A.10).

$$V_\beta = V_{\alpha\beta} \cdot \text{sen}(\gamma) \quad (\text{A.9})$$

$$V_q = V_{\alpha\beta} \cdot \text{sen}(\gamma - \theta) \quad (\text{A.10})$$

Pode-se definir a equação de  $V_\beta$  em termos de  $V_q$  substituindo a equação (A.10) em (A.9), ou seja:

$$V_\beta = V_q \cdot \frac{\text{sen}(\gamma)}{\text{sen}(\gamma - \theta)} \quad (\text{A.11})$$

O cosseno da diferença entre os ângulos  $\gamma$  e  $\theta$  é definido pela equação (A.12).

$$\text{cos}(\gamma - \theta) = \text{cos}(\gamma) \cdot \text{cos}(\theta) + \text{sen}(\gamma) \cdot \text{sen}(\theta) \quad (\text{A.12})$$

Substituindo a equação (A.12) na (A.11), tem-se a equação (A.13).

$$V_\beta = V_q \cdot \frac{\text{sen}(\gamma)}{\text{sen}(\gamma) \cdot \text{cos}(\theta) - \text{sen}(\theta) \cdot \text{cos}(\gamma)} \quad (\text{A.13})$$

Multiplicando o numerador e o denominador por  $1/\text{sen}(\gamma)$  na equação (A.13), chega-se na equação (A.14).

$$V_\beta = V_q \cdot \frac{1}{\cos(\theta) - \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\theta)} \quad (\text{A.14})$$

A relação  $\cos(\gamma)/\sin(\gamma)$  pode ser obtida pela razão das componentes  $V_\alpha$  e  $V_\beta$ , como mostra a equação (A.15).

$$\frac{V_\alpha}{V_\beta} = \frac{V_{\alpha\beta} \cdot \cos(\gamma)}{V_{\alpha\beta} \cdot \sin(\gamma)} = \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)} \quad (\text{A.15})$$

Assim, substituindo (A.15) em (A.14) e manipulando algebricamente, tem-se a equação (A.16).

$$V_q = -V_\alpha \cdot \sin(\theta) + V_\beta \cdot \cos(\theta) \quad (\text{A.16})$$

### A.3 Fluxo $\lambda_1$

A dedução a ser realizada é o fluxo concatenado da fase 1 do rotor, em sua forma alternativa.

Lembrando da equação do fluxo concatenado a partir da equação (A.17), das equações das correntes na principal e na auxiliar a partir das equações (A.18) e (A.19), respectivamente, do ângulo elétrico definido na equação (A.20) e da variável auxiliar definida em (A.21).

$$\lambda_1 = L_{mainR} \cdot \cos(\theta) \cdot i_{main} - I \cdot L_{auxR} \cdot \sin(\theta) \cdot i_{aux} + L_R \cdot i_1 \quad (\text{A.17})$$

$$i_{main} = \sqrt{2} \cdot \mathbb{R}(i_{main} \cdot e^{j\omega t}) = \sqrt{2} \cdot \mathbb{R}(I_{main} \cdot e^{j(\omega t + \phi_{main})}) \quad (\text{A.18})$$

$$i_{aux} = \sqrt{2} \cdot \mathbb{R}(i_{aux} \cdot e^{j\omega t}) = \sqrt{2} \cdot \mathbb{R}(I_{aux} \cdot e^{j(\omega t + \phi_{aux})}) \quad (\text{A.19})$$

$$\theta_{elec} = P \cdot \theta_{mec} = P \cdot \omega_m t = \theta \quad (\text{A.20})$$

$$I = \pm 1 \quad (\text{A.21})$$

Utilizando as equações (A.18) e (A.19) na equação (A.17), chega-se na equação (A.22).

$$\begin{aligned} \lambda_1 = & L_{mainR} \cdot \cos(\theta) \cdot \sqrt{2} \cdot I_{main} \cdot \cos(\omega t + \phi_{main}) \\ & - I \cdot L_{auxR} \cdot \sin(\theta) \cdot \sqrt{2} \cdot I_{aux} \cdot \cos(\omega t + \phi_{aux}) + L_R \cdot i_1 \end{aligned} \quad (A.22)$$

Para auxiliar no cálculo, serão definidas variáveis auxiliares, descritas nas equações (A.23) a (A.26). Esta representação é importante, por que no cálculo do fluxo concatenado no enrolamento 2 do rotor será utilizada uma analogia deste caso, apenas alterando essas variáveis.

$$a = \sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot I_{main} \quad (A.23)$$

$$b = \phi_{main} \quad (A.24)$$

$$c = -\sqrt{2} \cdot I \cdot L_{auxR} \cdot I_{aux} \quad (A.25)$$

$$d = \phi_{aux} \quad (A.26)$$

Utilizando as equações (A.20), (A.23), (A.24), (A.25), (A.26) na equação (A.22), chega-se na equação (A.27).

$$\lambda_1 = a \cdot \cos(P\omega_m t) \cdot \cos(\omega t + b) + c \cdot \sin(P\omega_m t) \cdot \cos(\omega t + d) + L_R \cdot i_1 \quad (A.27)$$

Podemos transformar a equação (A.27) na forma fasorial, a partir das equações (A.28) e (A.29).

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad (A.28)$$

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad (A.29)$$

Assim, chega-se na equação (A.30).

$$\lambda_1 = a. \left( \frac{e^{jPw_m t} + e^{-jPw_m t}}{2} \right) \cdot \left( \frac{e^{j(wt+b)} + e^{-j(wt+b)}}{2} \right) + c. \left( \frac{e^{jPw_m t} - e^{-jPw_m t}}{2j} \right) \cdot \left( \frac{e^{j(wt+d)} + e^{-j(wt+d)}}{2} \right) + L_R \cdot \dot{i}_1 \quad (\text{A.30})$$

Pode-se expandir a equação (A.30), chegando-se na equação (A.31).

$$\lambda_1 = \frac{a}{4} \cdot (e^{j((Pw_m+w)t+b)} + e^{j((Pw_m-w)t-b)} + e^{j((-Pw_m+w)t+b)} + e^{j((-Pw_m-w)t-b)}) - j \cdot \frac{c}{4} \cdot (e^{j((Pw_m+w)t+d)} + e^{j((Pw_m-w)t-d)} - e^{j((-Pw_m+w)t+d)} - e^{j((-Pw_m-w)t-d)}) + L_R \cdot \dot{i}_1 \quad (\text{A.31})$$

Pode-se fazer outra substituição de variáveis, facilitando a visualização do resultado. Essa substituição é mostrada nas equações (A.32) e (A.33).

$$X = Pw_m + w \quad (\text{A.32})$$

$$Y = -Pw_m + w \quad (\text{A.33})$$

Assim, somando e subtraindo pela velocidade angular  $w$  na equação (A.32), e, além disso, multiplicando e dividindo pela velocidade angular  $w$  nas equações (A.32) e (A.33), pode-se chegar nas equações (A.34) e (A.35).

$$X = (Pw_m + w + w - w) \cdot \frac{w}{w} = \left( \frac{2w}{w} - \frac{(w - Pw_m)}{w} \right) \cdot w = (2 - s)w \quad (\text{A.34})$$

$$Y = (-Pw_m + w) \cdot \frac{w}{w} = \left( \frac{w - Pw_m}{w} \right) \cdot w = sw \quad (\text{A.35})$$

Assim, substituindo as equações (A.34) e (A.35) na equação (A.31) e reorganizando os termos, chega-se na equação (A.36).

$$\begin{aligned} \lambda_1 = & \frac{a}{2} \cdot \left( \frac{e^{j(Xt+b)} + e^{-j(Xt+b)}}{2} + \frac{e^{j(Yt+b)} + e^{-j(Yt+b)}}{2} \right) \\ & - j \cdot \frac{c}{2} \cdot \left( j \left( \frac{e^{j(Xt+d)} - e^{-j(Xt+d)}}{2j} \right) + j \left( \frac{e^{j(Yt+d)} + e^{-j(Yt+d)}}{2j} \right) \right) \\ & + L_R \cdot i_1 \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Utilizando as equações (A.28) e (A.29) em (A.36), chega-se na equação (A.37).

$$\begin{aligned} \lambda_1 = & \frac{a}{2} \cdot \cos(Xt + b) + \frac{c}{2} \cdot \text{sen}(Xt + d) + \frac{a}{2} \cdot \cos(Yt + b) - \frac{c}{2} \cdot \text{sen}(Yt + d) \\ & + L_R \cdot i_1 \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Lembrando das relações de seno e cosseno apresentadas em (A.38), (A.39) e (A.40).

$$e^{jx} = \cos(x) + j\text{sen}(x) \quad (\text{A.38})$$

$$\cos(x) = \mathbb{R}(e^{jx}) \quad (\text{A.39})$$

$$\text{sen}(x) = \mathbb{R}(-j \cdot e^{jx}) \quad (\text{A.40})$$

Além disso, é possível juntar as suas partes reais numa só, como mostram as equações (A.41), (A.42) e (A.43).

$$\cos(x) + \text{sen}(y) = \mathbb{R}(e^{jx}) + \mathbb{R}(-j \cdot e^{jy}) \quad (\text{A.41})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(e^{jx} - j \cdot e^{jy}) &= \mathbb{R}(\cos(x) + j\text{sen}(x) - j\cos(y) + \text{sen}(y)) \\ &= \cos(x) + \text{sen}(x) \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

$$\mathbb{R}(e^{jx} - j \cdot e^{jy}) = \mathbb{R}(e^{jx}) + \mathbb{R}(-j \cdot e^{jy}) \quad (\text{A.43})$$

Logo, usando as equações (A.38), (A.41) e (A.43), pode-se escrever de forma alternativa a equação (A.37), chegando-se na equação (A.44).

$$\lambda_1 = \Re \left[ \left( \frac{a}{2} \cdot e^{jb} - j \cdot \frac{c}{2} \cdot e^{jd} \right) \cdot e^{j(2-s)wt} \right] + \Re \left[ \left( \frac{a}{2} \cdot e^{jb} + j \cdot \frac{c}{2} \cdot e^{jd} \right) \cdot e^{jswt} \right] + L_R \cdot i_1 \quad (\text{A.44})$$

Substituindo as variáveis  $I$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  a partir das equações (A.21), (A.23), (A.24), (A.25) e (A.26), chega-se na equação (A.45).

$$\lambda_1 = \Re \left[ \left( \frac{\sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot I_{main}}{2} \cdot e^{j\phi_{main}} \pm j \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot L_{auxR} \cdot I_{aux}}{2} \cdot e^{j\phi_{aux}} \right) \cdot e^{j(2-s)wt} \right] + \Re \left[ \left( \frac{\sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot I_{main}}{2} \cdot e^{j\phi_{main}} \mp j \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot L_{auxR} \cdot I_{aux}}{2} \cdot e^{j\phi_{aux}} \right) \cdot e^{jswt} \right] + L_R \cdot i_1 \quad (\text{A.45})$$

#### A.4 Correntes $I_1^+$ e $I_1^-$

Lembrando das equação da tensão no enrolamento principal do rotor apresentada em (A.46).

$$v_1 = R_1 \cdot i_1 + \frac{d\lambda_1}{dt} = 0 \quad (\text{A.46})$$

Derivando a equação (A.45) com relação ao tempo, chega-se na equação (A.47).

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \Re \left[ \left( j \cdot \frac{a}{2} \cdot e^{jb} + \frac{c}{2} \cdot e^{jd} \right) \cdot (2-s)w \cdot e^{j(2-s)wt} \right] + \Re \left[ \left( j \cdot \frac{a}{2} \cdot e^{jb} - \frac{c}{2} \cdot e^{jd} \right) \cdot sw \cdot e^{jswt} \right] + L_R \cdot \frac{di_1}{dt} \quad (\text{A.47})$$

Substituindo a equação (A.47) na (A.46), chega-se na equação (A.48).

$$R_R \cdot i_1 + \frac{d\lambda_1}{dt} = R_R \cdot i_1 + \Re \left[ \left( j \cdot \frac{a}{2} \cdot e^{jb} + \frac{c}{2} \cdot e^{jd} \right) \cdot (2-s)w \cdot e^{j(2-s)wt} \right] + \Re \left[ \left( j \cdot \frac{a}{2} \cdot e^{jb} - \frac{c}{2} \cdot e^{jd} \right) \cdot sw \cdot e^{jswt} \right] + L_R \cdot \frac{di_1}{dt} = 0 \quad (\text{A.48})$$

Para esta análise, será definida uma forma de onda da corrente  $i_1$ , de forma idêntica a utilizada pelo autor Stephen Umans. Assim, pode-se definir a corrente  $i_1$  como a soma de duas correntes, uma progressiva e outra retrógrada, sendo igual à equação (A.49), ou na forma fasorial pela equação (A.50).

$$i_1 = \sqrt{2} \cdot I_1^+ \cdot \cos(swt + \phi_1^+) + \sqrt{2} \cdot I_1^- \cdot \cos((2-s)wt + \phi_1^-) \quad (\text{A.49})$$

$$\begin{aligned} i_1 &= \Re[\sqrt{2} \cdot I_1^+ \cdot e^{j(swt + \phi_1^+)}] + \Re[\sqrt{2} \cdot I_1^- \cdot e^{j((2-s)wt + \phi_1^-)}] \\ &= \Re[\sqrt{2} \cdot I_1^+ \cdot e^{jswt}] + \Re[\sqrt{2} \cdot I_1^- \cdot e^{j(2-s)wt}] \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Deste modo, substituindo a equação (A.50) na equação (A.48), chega-se na equação (A.51).

$$\begin{aligned} &R_R \cdot (\Re[\sqrt{2} \cdot I_1^+ \cdot e^{jswt}] + \Re[\sqrt{2} \cdot I_1^- \cdot e^{j(2-s)wt}]) \\ &+ L_R \cdot (\Re[\sqrt{2} \cdot I_1^+ \cdot jsw \cdot e^{jswt}] + \Re[\sqrt{2} \cdot I_1^- \cdot j(2-s)w \cdot e^{j(2-s)wt}]) \\ &+ \Re\left[\left(j \cdot \frac{a}{2} \cdot e^{jb} + \frac{c}{2} \cdot e^{jd}\right) \cdot (2-s)w \cdot e^{j(2-s)wt}\right] \\ &+ \Re\left[\left(j \cdot \frac{a}{2} \cdot e^{jb} - \frac{c}{2} \cdot e^{jd}\right) \cdot sw \cdot e^{jswt}\right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Pode-se separar os termos das componentes  $swt$  e  $(2-s)wt$ , assim temos a separação das equações (A.52) e (A.53).

$$R_R \cdot \sqrt{2} \cdot I_1^+ + L_R \cdot \sqrt{2} \cdot I_1^+ \cdot jsw + \left(j \cdot \frac{a}{2} \cdot e^{jb} - \frac{c}{2} \cdot e^{jd}\right) \cdot sw = 0 \quad (\text{A.52})$$

$$R_R \cdot \sqrt{2} \cdot I_1^- + L_R \cdot \sqrt{2} \cdot I_1^- \cdot j(2-s)w + \left(j \cdot \frac{a}{2} \cdot e^{jb} + \frac{c}{2} \cdot e^{jd}\right) \cdot (2-s)w = 0 \quad (\text{A.53})$$

Isolando  $I_1^+$  e  $I_1^-$ , chegam-se nas equações (A.54) e (A.55).

$$I_1^+ = \frac{-\left(j \cdot \frac{a}{2} \cdot e^{jb} - \frac{c}{2} \cdot e^{jd}\right) \cdot sw}{R_R \cdot \sqrt{2} + L_R \cdot \sqrt{2} \cdot jsw} \quad (\text{A.54})$$

$$I_1^- = \frac{-\left(j\frac{a}{2} \cdot e^{jb} + \frac{c}{2} \cdot e^{jd}\right) \cdot (2-s)w}{R_R \cdot \sqrt{2} + L_R \cdot \sqrt{2} \cdot j(2-s)w} \quad (\text{A.55})$$

Substituindo as variáveis  $I$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  a partir das equações (A.21), (A.23), (A.24), (A.25) e (A.26) e manipulando algebricamente, chegam-se nas equações (A.56) e (A.57).

$$I_1^+ = -jsw \cdot \frac{(L_{mainR} \cdot \dot{I}_{main} - j \cdot I \cdot L_{aux} \cdot \dot{I}_{aux})}{2 \cdot (R_R + jswL_R)} \quad (\text{A.56})$$

$$I_1^- = -j(2-s)w \cdot \frac{(L_{mainR} \cdot \dot{I}_{main} + j \cdot I \cdot L_{aux} \cdot \dot{I}_{aux})}{2 \cdot (R_R + j(2-s)wL_R)} \quad (\text{A.57})$$

Podem-se definir variáveis auxiliares  $\dot{K}^+$  e  $\dot{K}^-$ , descritas nas equações (A.58) e (A.59).

$$\dot{K}^+ = \frac{sw}{2 \cdot (R_R + jswL_R)} \quad (\text{A.58})$$

$$\dot{K}^- = \frac{(2-s)w}{2 \cdot (R_R + j(2-s)wL_R)} \quad (\text{A.59})$$

Assim, as formas alternativas de  $I_1^+$  e  $I_1^-$  são apresentadas nas equações (A.60) e (A.61).

$$I_1^+ = -j\dot{K}^+ \cdot (L_{mainR} \cdot \dot{I}_{main} - j \cdot I \cdot L_{aux} \cdot \dot{I}_{aux}) \quad (\text{A.60})$$

$$I_1^- = -j\dot{K}^- \cdot (L_{mainR} \cdot \dot{I}_{main} + j \cdot I \cdot L_{aux} \cdot \dot{I}_{aux}) \quad (\text{A.61})$$

## A.5 Fluxo $\lambda_2$

A próxima dedução a ser realizada é o fluxo concatenado da fase 2 do rotor, em sua forma alternativa.

Lembrando da equação do fluxo concatenado a partir da equação (A.62) e da tensão no enrolamento auxiliar do rotor apresentado em (A.63).

$$\lambda_2 = I \cdot L_{mainR} \cdot \text{sen}(\theta) \cdot i_{main} + L_{auxR} \cdot \text{cos}(\theta) \cdot i_{aux} + L_R \cdot i_2 \quad (\text{A.62})$$

$$v_2 = R_2 \cdot i_2 + \frac{d\lambda_2}{dt} = 0 \quad (\text{A.63})$$

Utilizando as equações (A.18) e (A.19) na equação (A.62), chega-se na equação (A.64).

$$\begin{aligned} \lambda_2 = & I \cdot L_{mainR} \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \sqrt{2} \cdot I_{main} \cdot \text{cos}(wt + \phi_{main}) \\ & + L_{auxR} \cdot \text{cos}(\theta) \cdot \sqrt{2} \cdot I_{aux} \cdot \text{cos}(wt + \phi_{aux}) + L_R \cdot i_2 \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

Assim, pode-se definir as variáveis auxiliares a partir das equações (A.65) a (A.68), de forma análoga ao cálculo do fluxo concatenado no primeiro enrolamento do rotor.

$$a = \sqrt{2} \cdot L_{auxR} \cdot I_{aux} \quad (\text{A.65})$$

$$b = \phi_{aux} \quad (\text{A.66})$$

$$c = \sqrt{2} \cdot I \cdot L_{mainR} \cdot I_{main} \quad (\text{A.67})$$

$$d = \phi_{main} \quad (\text{A.68})$$

Utilizando as equações (A.20), (A.65), (A.66), (A.67), (A.68) na equação (A.64), chega-se na equação (A.69).

$$\lambda_2 = a \cdot \text{cos}(Pw_m t) \cdot \text{cos}(wt + b) + c \cdot \text{sen}(Pw_m t) \cdot \text{cos}(wt + d) + L_R \cdot i_2 \quad (\text{A.69})$$

Ou seja, chega-se no mesmo resultado da equação (A.27), com exceção do último termo, em que  $L_R \cdot i_1$  é trocado por  $L_R \cdot i_2$ . Logo, pode-se utilizar a mesma dedução daquela seção, apenas adaptando o último termo. Isso é mostrado na equação (A.70).

$$\lambda_2 = \Re \left[ \left( \frac{a}{2} \cdot e^{jb} - j \cdot \frac{c}{2} \cdot e^{jd} \right) \cdot e^{j(2-s)wt} \right] + \Re \left[ \left( \frac{a}{2} \cdot e^{jb} + j \cdot \frac{c}{2} \cdot e^{jd} \right) \cdot e^{jswt} \right] + L_R \cdot i_2 \quad (\text{A.70})$$

Substituindo as variáveis  $I$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  a partir das equações (A.21), (A.65), (A.66), (A.67) e (A.68), chega-se na equação (A.71).

$$\lambda_2 = \Re \left[ \left( \frac{\sqrt{2} \cdot L_{auxR} \cdot I_{aux}}{2} \cdot e^{j\phi_{aux}} \mp j \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot I_{main}}{2} \cdot e^{j\phi_{main}} \right) \cdot e^{j(2-s)wt} \right] + \Re \left[ \left( \frac{\sqrt{2} \cdot L_{auxR} \cdot I_{aux}}{2} \cdot e^{j\phi_{aux}} \pm j \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot I_{main}}{2} \cdot e^{j\phi_{main}} \right) \cdot e^{jswt} \right] + L_R \cdot i_2 \quad (\text{A.71})$$

## A.6 Correntes $I_2^+$ e $I_2^-$

Derivando a equação (A.71) com relação ao tempo, chega-se na equação (A.72).

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \Re \left[ \left( j \cdot \frac{a}{2} \cdot e^{jb} + \frac{c}{2} \cdot e^{jd} \right) \cdot (2-s)w \cdot e^{j(2-s)wt} \right] + \Re \left[ \left( j \cdot \frac{a}{2} \cdot e^{jb} - \frac{c}{2} \cdot e^{jd} \right) \cdot sw \cdot e^{jswt} \right] + L_R \cdot \frac{di_2}{dt} \quad (\text{A.72})$$

Substituindo a equação (A.72) na (A.63), chega-se na equação (A.73).

$$R_R \cdot i_2 + \frac{d\lambda_2}{dt} = R_R \cdot i_2 + \Re \left[ \left( j \cdot \frac{a}{2} \cdot e^{jb} + \frac{c}{2} \cdot e^{jd} \right) \cdot (2-s)w \cdot e^{j(2-s)wt} \right] + \Re \left[ \left( j \cdot \frac{a}{2} \cdot e^{jb} - \frac{c}{2} \cdot e^{jd} \right) \cdot sw \cdot e^{jswt} \right] + L_R \cdot \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (\text{A.73})$$

Para esta análise, será definida uma forma de onda da corrente  $i_2$ , de forma idêntica a utilizada pelo autor Stephen Umas. Assim, pode-se definir a corrente  $i_2$  como a soma de duas correntes, uma progressiva e outra retrógrada, sendo igual à equação (A.74), ou na forma fasorial pela equação (A.75).

$$i_2 = \sqrt{2} \cdot I_2^+ \cdot \cos(swt + \phi_2^+) + \sqrt{2} \cdot I_2^- \cdot \cos((2-s)wt + \phi_2^-) \quad (\text{A.74})$$

$$\begin{aligned} i_2 &= \Re[\sqrt{2} \cdot I_2^+ \cdot e^{j(swt + \phi_2^+)}] + \Re[\sqrt{2} \cdot I_2^- \cdot e^{j((2-s)wt + \phi_2^-)}] \\ &= \Re[\sqrt{2} \cdot \dot{I}_2^+ \cdot e^{jswt}] + \Re[\sqrt{2} \cdot \dot{I}_2^- \cdot e^{j(2-s)wt}] \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

Pode-se utilizar as equações (A.54) e (A.55) como referência, uma vez que trocam-se apenas os termos  $I_1^+$ ,  $I_1^-$  por  $I_2^+$ ,  $I_2^-$ . Assim, chega-se nas equações (A.76) e (A.77).

$$\dot{I}_2^+ = \frac{-\left(j \frac{a}{2} \cdot e^{jb} - \frac{c}{2} \cdot e^{jd}\right) \cdot sw}{R_R \cdot \sqrt{2} + L_R \cdot \sqrt{2} \cdot jsw} \quad (\text{A.76})$$

$$\dot{I}_2^- = \frac{-\left(j \frac{a}{2} \cdot e^{jb} + \frac{c}{2} \cdot e^{jd}\right) \cdot (2-s)w}{R_R \cdot \sqrt{2} + L_R \cdot \sqrt{2} \cdot j(2-s)w} \quad (\text{A.77})$$

Substituindo as variáveis  $I$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  a partir das equações (A.21), (A.65), (A.66), (A.67) e (A.68) e manipulando algebricamente, chega-se nas equações (A.78) e (A.79).

$$\dot{I}_2^+ = (Ij) \cdot (-jsw) \cdot \frac{(L_{mainR} \cdot \dot{I}_{main} - j \cdot I \cdot L_{aux} \cdot \dot{I}_{aux})}{2 \cdot (R_R + jswL_R)} \quad (\text{A.78})$$

$$\dot{I}_2^- = (-Ij) \cdot (-j(2-s)w) \cdot \frac{(L_{mainR} \cdot \dot{I}_{main} + j \cdot I \cdot L_{aux} \cdot \dot{I}_{aux})}{2 \cdot (R_R + j(2-s)wL_R)} \quad (\text{A.79})$$

Ou seja, pode-se escrever  $\dot{I}_2^+$  e  $\dot{I}_2^-$  em termos de  $\dot{I}_1^+$  e  $\dot{I}_1^-$ , cujas representações estão indicadas nas equações (A.80) e (A.81).

$$\dot{I}_2^+ = (Ij) \cdot \dot{I}_1^+ \quad (\text{A.80})$$

$$\dot{I}_2^- = (-Ij) \cdot \dot{I}_1^- \quad (\text{A.81})$$

### A.7 Fluxo $\lambda_{main}$

A próxima dedução a ser realizada é o fluxo concatenado da fase principal do estator, em sua forma alternativa.

Lembrando da equação do fluxo concatenado a partir da equação (A.82).

$$\lambda_{main} = L_{main} \cdot i_{main} + L_{mainR} \cdot \cos(\theta) \cdot i_1 + I \cdot L_{mainR} \cdot \sin(\theta) \cdot i_2 \quad (A.82)$$

Utilizando as equações (A.49) e (A.74) na equação (A.82), chega-se na equação (A.83).

$$\begin{aligned} \lambda_{main} = & L_{main} \cdot i_{main} + L_{mainR} \cdot \cos(\theta) \cdot [\sqrt{2} \cdot I_1^+ \cdot \cos(swt + \phi_1^+) \\ & + \sqrt{2} \cdot I_1^- \cdot \cos((2-s) \cdot wt + \phi_1^-)] \\ & + I \cdot L_{mainR} \cdot \sin(\theta) \cdot [\sqrt{2} \cdot I_2^+ \cdot \cos(swt + \phi_2^+) \\ & + \sqrt{2} \cdot I_2^- \cdot \cos((2-s) \cdot wt + \phi_2^-)] \end{aligned} \quad (A.83)$$

Pode-se separar a equação (A.83) em partes, para facilitar a dedução, como mostram as equações (A.84), (A.85) e (A.86)

$$\lambda_{main} = L_{main} \cdot i_{main} + \lambda_{main,P1} + \lambda_{main,P2} \quad (A.84)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{main,P1} = & L_{mainR} \cdot \cos(\theta) \cdot \sqrt{2} \cdot I_1^+ \cdot \cos(swt + \phi_1^+) \\ & + I \cdot L_{mainR} \cdot \sin(\theta) \cdot \sqrt{2} \cdot I_2^+ \cdot \cos(swt + \phi_2^+) \end{aligned} \quad (A.85)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{main,P2} = & L_{mainR} \cdot \cos(\theta) \cdot \sqrt{2} \cdot I_1^- \cdot \cos((2-s) \cdot wt + \phi_1^-) \\ & + I \cdot L_{mainR} \cdot \sin(\theta) \cdot \sqrt{2} \cdot I_2^- \cdot \cos((2-s) \cdot wt + \phi_2^-) \end{aligned} \quad (A.86)$$

Podem-se definir variáveis auxiliares para o termo  $\lambda_{main,P1}$ , como mostrado nas equações (A.87) a (A.90).

$$a = \sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot I_1^+ \quad (A.87)$$

$$b = \phi_1^+ \quad (A.88)$$

$$c = I \cdot L_{mainR} \cdot \sqrt{2} \cdot I_2^+ \quad (A.89)$$

$$d = \phi_2^+ \quad (\text{A.90})$$

Assim, substituindo as equações (A.87), (A.88), (A.89) e (A.90) na equação (A.85), chega-se na equação (A.91).

$$\lambda_{main,P1} = a \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(swt + b) + c \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(swt + d) \quad (\text{A.91})$$

Fazendo uma analogia da equação (A.27) com a equação (A.91), é possível reaproveitar a dedução matemática feita no fluxo concatenado  $\lambda_1$ , porém com as seguintes mudanças:

- Substituição do termo  $wt$  por  $swt$ ;
- Remoção do termo  $L_R \cdot i_1$ .

Assim, utilizando esta analogia na equação (A.44), chega-se na equação (A.92).

$$\lambda_{main,P1} = \Re \left[ \left( \frac{a}{2} \cdot e^{jb} - j \cdot \frac{c}{2} \cdot e^{jd} \right) \cdot e^{j(2-s)swt} \right] + \Re \left[ \left( \frac{a}{2} \cdot e^{jb} + j \cdot \frac{c}{2} \cdot e^{jd} \right) \cdot e^{js^2wt} \right] \quad (\text{A.92})$$

Portanto, a equação resultante é indicada em (A.93).

$$\begin{aligned} \lambda_{main,P1} = \Re \left[ \left( \frac{\sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot I_1^+}{2} \cdot e^{j\phi_1^+} \mp j \cdot \frac{L_{mainR} \cdot \sqrt{2} \cdot I_2^+}{2} \cdot e^{j\phi_2^+} \right) \cdot e^{j(2-s)swt} \right] \\ + \Re \left[ \left( \frac{\sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot I_1^+}{2} \cdot e^{j\phi_1^+} \pm j \cdot \frac{L_{mainR} \cdot \sqrt{2} \cdot I_2^+}{2} \cdot e^{j\phi_2^+} \right) \cdot e^{js^2wt} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

Além disso, podem-se definir variáveis auxiliares para o termo  $\lambda_{main,P2}$ , como mostrado nas equações (A.94) a (A.97).

$$a = \sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot I_1^- \quad (\text{A.94})$$

$$b = \phi_1^- \quad (\text{A.95})$$

$$c = I \cdot L_{mainR} \cdot \sqrt{2} \cdot I_2^- \quad (\text{A.96})$$

$$d = \phi_2^- \quad (\text{A.97})$$

Então, chega-se num formato similar da equação (A.92), apenas mudando os termos do campo progressivo para o campo retrógrado. Fazendo uma analogia entre os dois casos, chega-se na equação (A.98).

$$\begin{aligned}
\lambda_{main,P2} = \Re \left[ \left( \frac{\sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot I_1^-}{2} \cdot e^{j\phi_1^-} \mp j \cdot \frac{L_{mainR} \cdot \sqrt{2} \cdot I_2^-}{2} \cdot e^{j\phi_2^-} \right) \cdot e^{j(2-s)^2 wt} \right] \\
+ \Re \left[ \left( \frac{\sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot I_1^-}{2} \cdot e^{j\phi_1^-} \right. \right. \\
\left. \left. \pm j \cdot \frac{L_{mainR} \cdot \sqrt{2} \cdot I_2^-}{2} \cdot e^{j\phi_2^-} \right) \cdot e^{js(2-s)wt} \right]
\end{aligned} \tag{A.98}$$

Assim, utilizando as equações (A.39), (A.40), (A.84), (A.93) e (A.98), chega-se no resultado do fluxo concatenado no enrolamento principal, mostrado na equação (A.99).

$$\begin{aligned}
\lambda_{main} = L_{mainR} \cdot i_{main} \\
+ \frac{\sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot I_1^+}{2} \cdot (\cos(s^2 wt + \phi_1^+) + \cos(s(2-s)wt + \phi_1^+)) \\
+ \frac{\sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot I_1^-}{2} \cdot (\cos((2-s)^2 wt + \phi_1^-) + \cos(s(2-s)wt + \phi_1^-)) \\
\pm \frac{L_{mainR} \cdot \sqrt{2} \cdot I_2^+}{2} \cdot (-\sin(s^2 wt + \phi_2^+) + \sin(s(2-s)wt + \phi_2^+)) \\
\pm \frac{L_{mainR} \cdot \sqrt{2} \cdot I_2^-}{2} \cdot (\sin((2-s)^2 wt + \phi_2^-) - \sin(s(2-s)wt + \phi_2^-))
\end{aligned} \tag{A.99}$$

Porém, se for comparar com os resultados do Umas, não se chega no mesmo resultado. Então, pode-se mostrar uma forma alternativa de dimensionamento, que compatibilize com o resultado do autor, mas sem perda de significado das equações anteriormente deduzidas.

Para isso, vale transformar as expressões de seno e cosseno definidas nas equações (A.100) e (A.101).

$$\cos(A) \cdot \cos(B) \tag{A.100}$$

$$\cos(A) \cdot \sin(B) \tag{A.101}$$

Para a expressão (A.100), pode-se transformar as variáveis na forma fasorial, conforme mostra a equação (A.102). A partir da manipulação matemática mostrada nas equações (A.103) e (A.104), chega-se na equação resultante mostrada em (A.105).

$$\cos(A) \cdot \cos(B) = \left( \frac{e^{jA} + e^{-jA}}{2} \right) \cdot \left( \frac{e^{jB} + e^{-jB}}{2} \right) \quad (\text{A.102})$$

$$\cos(A) \cdot \cos(B) = \left( \frac{e^{j(A+B)} + e^{-j(-A+B)} + e^{j(-A+B)} + e^{-j(A+B)}}{4} \right) \quad (\text{A.103})$$

$$\cos(A) \cdot \cos(B) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{e^{j(A+B)} + e^{-j(A+B)}}{2} \right) + \left( \frac{e^{j(-A+B)} + e^{-j(-A+B)}}{2} \right) \right] \quad (\text{A.104})$$

$$\cos(A) \cdot \cos(B) = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(-A+B)] \quad (\text{A.105})$$

Para a expressão (A.101), pode-se transformar as variáveis na forma fasorial, conforme mostra a equação (A.106). A partir da manipulação matemática mostrada nas equações (A.107) e (A.108), chega-se na equação resultante mostrada em (A.109).

$$\cos(A) \cdot \text{sen}(B) = \left( \frac{e^{jA} + e^{-jA}}{2} \right) \cdot \left( \frac{e^{jB} - e^{-jB}}{2j} \right) \quad (\text{A.106})$$

$$\cos(A) \cdot \text{sen}(B) = \left( \frac{e^{j(A+B)} - e^{-j(-A+B)} + e^{j(-A+B)} - e^{-j(A+B)}}{4j} \right) \quad (\text{A.107})$$

$$\cos(A) \cdot \text{sen}(B) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{e^{j(A+B)} - e^{-j(A+B)}}{2j} \right) + \left( \frac{e^{j(-A+B)} - e^{-j(-A+B)}}{2j} \right) \right] \quad (\text{A.108})$$

$$\cos(A) \cdot \text{sen}(B) = \frac{1}{2} [\text{sen}(A+B) + \text{sen}(-A+B)] \quad (\text{A.109})$$

Logo, analisando as equações (A.85) e (A.86), pode-se substituir as variáveis  $A$  e  $B$  nos seguintes casos (com auxílio da equação (A.20)):

- $A = swt + \phi_1^+$ ;  $B = Pw_mt$ ;
- $A = (2-s)wt + \phi_1^-$ ;  $B = Pw_mt$ ;
- $A = swt + \phi_2^+$ ;  $B = Pw_mt$ ;

- $A = (2 - s)wt + \phi_2^-$ ;  $B = Pw_mt$ ;

Então, será calculado apenas os dois primeiros casos, e feita uma analogia com os últimos dois, uma vez que muda apenas a defasagem da variável  $A$ . Assim, o primeiro caso é mostrado nas equações (A.110) e (A.111), enquanto que o segundo caso é mostrado nas equações (A.112) e (A.113).

$$A + B = swt + \phi_1^+ + Pw_mt = \frac{w - Pw_m}{w} \cdot wt + \phi_1^+ + Pw_mt = wt + \phi_1^+ \quad (\text{A.110})$$

$$\begin{aligned} -A + B &= -(swt + \phi_1^+) + Pw_mt = -\frac{w + Pw_m}{w} \cdot wt - \phi_1^+ + Pw_mt \\ &= -2 \cdot \frac{w + Pw_m}{w} wt + wt - \phi_1^+ = (1 - 2s)wt - \phi_1^+ \end{aligned} \quad (\text{A.111})$$

$$\begin{aligned} A + B &= (2 - s)wt + \phi_1^- + Pw_mt = \left(\frac{2w}{w} - \frac{w - Pw_m}{w}\right) \cdot wt + \phi_1^- + Pw_mt \\ &= -2 \cdot \frac{w - Pw_m}{w} wt + 3wt + \phi_1^- = (3 - 2s)wt + \phi_1^- \end{aligned} \quad (\text{A.112})$$

$$\begin{aligned} -A + B &= -\left((2 - s)wt + \phi_1^-\right) + Pw_mt = -\left(\frac{2w}{w} - \frac{w - Pw_m}{w}\right) \cdot wt - \phi_1^- + Pw_mt \\ &= \frac{-w - Pw_m}{w} wt - \phi_1^- + Pw_mt = -wt - \phi_1^- \end{aligned} \quad (\text{A.113})$$

Além disso, pode-se utilizar as propriedades do seno e cosseno definidas pelas equações (A.114) e (A.115). Assim, o fluxo concatenado do enrolamento principal pode ser calculado pela equação (A.116), com auxílio das equações (A.105), (A.109), (A.110), (A.111), (A.112), (A.113), (A.114) e (A.115), da substituição das variáveis auxiliares de  $\lambda_{main,P1}$  com as equações (A.87) a (A.90) e da substituição das variáveis auxiliares de  $\lambda_{main,P2}$  com as equações (A.94) a (A.97).

$$\cos(A) = \cos(-A) \quad (\text{A.114})$$

$$\text{sen}(A) = -\text{sen}(-A) \quad (\text{A.115})$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{main} = & L_{main} \cdot i_{main} + \frac{\sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot I_1^+}{2} \cdot (\cos(\omega t + \phi_1^+) + \cos((2s-1)\omega t + \phi_1^+)) \\
& + \frac{\sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot I_1^-}{2} \cdot (\cos((3-2s)\omega t + \phi_1^-) + \cos(\omega t + \phi_1^-)) \\
& \pm \frac{L_{mainR} \cdot \sqrt{2} \cdot I_2^+}{2} \cdot (\sin(\omega t + \phi_2^+) - \sin((2s-1)\omega t + \phi_2^+)) \\
& \pm \frac{L_{mainR} \cdot \sqrt{2} \cdot I_2^-}{2} \cdot (\sin((3-2s)\omega t + \phi_2^-) - \sin(\omega t + \phi_2^-))
\end{aligned} \tag{A.116}$$

Pode-se simplificar ainda mais a equação (A.116), substituindo as variáveis  $I_2^+$  e  $I_2^-$  pelas variáveis  $I_1^+$  e  $I_1^-$  a partir das equações (A.80) e (A.81). Ademais, serão utilizadas variáveis auxiliares, indicadas pelas equações (A.117) a (A.123).

$$A = \sqrt{2} \cdot L_{main} \cdot I_{main} \tag{A.117}$$

$$B = L_{mainR} / \sqrt{2} \tag{A.118}$$

$$a = \phi_{main} \tag{A.119}$$

$$b = \phi_1^+ \tag{A.120}$$

$$c = \phi_1^- \tag{A.121}$$

$$d = \phi_2^+ \tag{A.122}$$

$$e = \phi_2^- \tag{A.123}$$

Além disso, utilizando as equações de seno e cosseno dadas nas equações (A.39) e (A.40), chega-se na equação (A.124).

$$\begin{aligned}
\lambda_{main} = & \Re \left[ A \cdot e^{j(\omega t + a)} + B \cdot I_1^+ \cdot (e^{j(\omega t + b)} + e^{j((2s-1)\omega t + b)}) \right. \\
& + B \cdot I_1^- \cdot (e^{j((3-2s)\omega t + c)} + e^{j(\omega t + c)}) \\
& + B \cdot j I_1^+ \cdot (-j e^{j(\omega t + b)} + j e^{j((2s-1)\omega t + b)}) \\
& \left. + B \cdot (-j I_1^-) \cdot (-j \cdot e^{j((3-2s)\omega t + c)} + j e^{j(\omega t + c)}) \right]
\end{aligned} \tag{A.124}$$

Reagrupando os termos da equação (A.124), chega-se na equação (A.125).

$$\lambda_{main} = \mathbb{R} \left[ A \cdot e^{j(wt+a)} + B \cdot I_1^+ \cdot \left( (1+1) \cdot e^{j(wt+b)} + (1-1) \cdot e^{j((2s-1)wt+b)} \right) + B \cdot I_1^- \cdot \left( (1-1) \cdot e^{j((3-2s)wt+c)} + (1+1) \cdot e^{j(wt+c)} \right) \right] \quad (\text{A.125})$$

Pela equação (A.125), percebe-se que há o cancelamento dos termos  $(2s-1)$  e  $(3-2s)$ . Simplificando esses termos, chega-se na equação (A.126).

$$\lambda_{main} = \mathbb{R} \left[ A \cdot e^{j(wt+a)} + 2 \cdot B \cdot (I_1^+ \cdot e^{j(wt+b)} + I_1^- \cdot e^{j(wt+c)}) \right] \quad (\text{A.126})$$

Utilizando as equações (A.117) a (A.121), obtêm-se a equação (A.127).

$$\lambda_{main} = \mathbb{R} \left[ \sqrt{2} \cdot L_{main} \cdot I_{main} \cdot e^{j(wt+\phi_{main})} + \sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot (I_1^+ \cdot e^{j(wt+\phi_1^+)} + I_1^- \cdot e^{j(wt+\phi_1^-)}) \right] \quad (\text{A.127})$$

Transformando as correntes nas suas formas vetoriais a partir das equações (A.18) e (A.50), obtêm-se a equação (A.128).

$$\lambda_{main} = \mathbb{R} \left[ (\sqrt{2} \cdot L_{main} \cdot \dot{I}_{main} + \sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot (\dot{I}_1^+ + \dot{I}_1^-)) \cdot e^{j\omega t} \right] \quad (\text{A.128})$$

Assim, a equação (A.128) pode ser reescrita, gerando as equações (A.129) e (A.130), em formato similar ao fluxo deduzido no artigo de referência.

$$\lambda_{main} = \mathbb{R} \left[ \dot{\lambda}_{main} \cdot e^{j\omega t} \right] \quad (\text{A.129})$$

$$\dot{\lambda}_{main} = \sqrt{2} \cdot L_{main} \cdot \dot{I}_{main} + \sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot (\dot{I}_1^+ + \dot{I}_1^-) \quad (\text{A.130})$$

## A.8 Fluxo $\lambda_{aux}$

A próxima dedução a ser realizada é o fluxo concatenado da fase auxiliar do estator, em sua forma alternativa.

Lembrando da equação do fluxo concatenado a partir da equação (A.131).

$$\lambda_{aux} = L_{aux} \cdot i_{aux} - I \cdot L_{auxR} \cdot \text{sen}(\theta) \cdot i_1 + L_{auxR} \cdot \text{cos}(\theta) \cdot i_2 \quad (\text{A.131})$$

Utilizando as equações (A.49) e (A.74) na equação (A.131), chega-se na equação (A.132).

$$\begin{aligned} \lambda_{aux} = & L_{aux} \cdot i_{aux} - I \cdot L_{auxR} \cdot \text{sen}(\theta) \cdot [\sqrt{2} \cdot I_1^+ \cdot \text{cos}(swt + \phi_1^+) \\ & + \sqrt{2} \cdot I_1^- \cdot \text{cos}((2-s) \cdot wt + \phi_1^-)] \\ & + L_{auxR} \cdot \text{cos}(\theta) \cdot [\sqrt{2} \cdot I_2^+ \cdot \text{cos}(swt + \phi_2^+) \\ & + \sqrt{2} \cdot I_2^- \cdot \text{cos}((2-s) \cdot wt + \phi_2^-)] \end{aligned} \quad (\text{A.132})$$

Pode-se separar a equação (A.132) em partes, para facilitar a dedução, como mostram as equações (A.133), (A.134) e (A.135). Além disso, as equações (A.134) e (A.135) mostram o ângulo elétrico em sua forma alternativa, a partir da equação (A.20).

$$\lambda_{aux} = L_{aux} \cdot i_{aux} + \lambda_{aux,P1} + \lambda_{aux,P2} \quad (\text{A.133})$$

$$\begin{aligned} \lambda_{aux,P1} = & -I \cdot L_{auxR} \cdot \text{sen}(P \cdot w_m t) \cdot \sqrt{2} \cdot I_1^+ \cdot \text{cos}(swt + \phi_1^+) \\ & + L_{auxR} \cdot \text{cos}(P \cdot w_m t) \cdot \sqrt{2} \cdot I_2^+ \cdot \text{cos}(swt + \phi_2^+) \end{aligned} \quad (\text{A.134})$$

$$\begin{aligned} \lambda_{aux,P2} = & -I \cdot L_{auxR} \cdot \text{sen}(P \cdot w_m t) \cdot \sqrt{2} \cdot I_1^- \cdot \text{cos}((2-s) \cdot wt + \phi_1^-) \\ & + L_{auxR} \cdot \text{cos}(P \cdot w_m t) \cdot \sqrt{2} \cdot I_2^- \cdot \text{cos}((2-s) \cdot wt + \phi_2^-) \end{aligned} \quad (\text{A.135})$$

Utilizando as equações (A.105), (A.109), (A.110), (A.111), (A.112), (A.113), (A.114) e (A.115), as variáveis  $\lambda_{aux,P1}$  e  $\lambda_{aux,P2}$  podem ser reescritas de forma análoga ao enrolamento principal, como mostram as equações (A.136) e (A.137). Assim, a partir das equações (A.133), (A.136) e (A.137), o fluxo concatenado do enrolamento auxiliar pode ser calculado pela equação (A.138).

$$\begin{aligned} \lambda_{aux,P1} = & \mp \frac{\sqrt{2} \cdot L_{auxR} \cdot I_1^+}{2} \cdot \left( \text{sen}(wt + \phi_1^+) - \text{sen}((2s-1)wt + \phi_1^+) \right) \\ & + \frac{\sqrt{2} \cdot L_{auxR} \cdot I_2^+}{2} \cdot \left( \text{cos}(wt + \phi_2^+) + \text{cos}((2s-1)wt + \phi_2^+) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.136})$$

$$\lambda_{aux,P2} = \mp \frac{\sqrt{2} \cdot L_{auxR} \cdot I_1^-}{2} \cdot (\text{sen}((3-2s)wt + \phi_1^-) - \text{sen}(wt + \phi_1^-)) + \frac{\sqrt{2} \cdot L_{auxR} \cdot I_2^-}{2} \cdot (\text{cos}((3-2s)wt + \phi_2^-) + \text{cos}(wt + \phi_2^-)) \quad (\text{A.137})$$

$$\lambda_{aux} = L_{aux} \cdot i_{aux} \mp \frac{\sqrt{2} \cdot L_{auxR} \cdot I_1^+}{2} \cdot (\text{sen}(wt + \phi_1^+) - \text{sen}((2s-1)wt + \phi_1^+)) \mp \frac{\sqrt{2} \cdot L_{auxR} \cdot I_1^-}{2} \cdot (\text{sen}((3-2s)wt + \phi_1^-) - \text{sen}(wt + \phi_1^-)) + \frac{\sqrt{2} \cdot L_{auxR} \cdot I_2^+}{2} \cdot (\text{cos}(wt + \phi_2^+) + \text{cos}((2s-1)wt + \phi_2^+)) + \frac{\sqrt{2} \cdot L_{auxR} \cdot I_2^-}{2} \cdot (\text{cos}((3-2s)wt + \phi_2^-) + \text{cos}(wt + \phi_2^-)) \quad (\text{A.138})$$

Pode-se simplificar ainda mais a equação (A.138), substituindo as variáveis  $I_2^+$  e  $I_2^-$  pelas variáveis  $I_1^+$  e  $I_1^-$  a partir das equações (A.80) e (A.81). Ademais, serão utilizadas variáveis auxiliares, indicadas pelas equações (A.139) a (A.145).

$$A = \sqrt{2} \cdot L_{aux} \cdot I_{aux} \quad (\text{A.139})$$

$$B = L_{auxR} / \sqrt{2} \quad (\text{A.140})$$

$$a = \phi_{aux} \quad (\text{A.141})$$

$$b = \phi_1^+ \quad (\text{A.142})$$

$$c = \phi_1^- \quad (\text{A.143})$$

$$d = \phi_2^+ \quad (\text{A.144})$$

$$e = \phi_2^- \quad (\text{A.145})$$

Além disso, utilizando as equações de seno e cosseno dadas nas equações (A.39) e (A.40), chega-se na equação (A.146).

$$\begin{aligned}
\lambda_{aux} = \mathbb{R} & \left[ A. e^{j(wt+a)} - I. B. I_1^+ . (-j e^{j(wt+b)} + j e^{j((2s-1)wt+b)}) \right. \\
& - I. B. I_1^- . (-j. e^{j((3-2s)wt+c)} + j e^{j(wt+c)}) \\
& + I. B. j I_1^+ . (e^{j(wt+b)} + e^{j((2s-1)wt+b)}) \\
& \left. + I. B. (-j I_1^-) . (e^{j((3-2s)wt+c)} + e^{j(wt+c)}) \right]
\end{aligned} \tag{A.146}$$

Reagrupando os termos da equação (A.146), chega-se na equação (A.147).

$$\begin{aligned}
\lambda_{aux} = \mathbb{R} & \left[ A. e^{j(wt+a)} + I. B. I_1^+ . \left( (j + j). e^{j(wt+b)} + (j - j). e^{j((2s-1)wt+b)} \right) \right. \\
& \left. - I. B. I_1^- . \left( (j - j). e^{j((3-2s)wt+c)} + (j + j). e^{j(wt+c)} \right) \right]
\end{aligned} \tag{A.147}$$

Pela equação (A.147), percebe-se que há o cancelamento dos termos  $(2s - 1)$  e  $(3 - 2s)$ . Simplificando esses termos, chega-se na equação (A.148).

$$\lambda_{aux} = \mathbb{R} \left[ A. e^{j(wt+a)} + I. j. 2. B. (I_1^+ . e^{j(wt+b)} - I_1^- . e^{j(wt+c)}) \right] \tag{A.148}$$

Utilizando as equações (A.139) a (A.143), obtêm-se a equação (A.149).

$$\begin{aligned}
\lambda_{aux} = \mathbb{R} & \left[ \sqrt{2}. L_{aux}. I_{aux}. e^{j(wt+\phi_{aux})} + I. j. \sqrt{2}. L_{auxR}. (I_1^+ . e^{j(wt+\phi_1^+)} \right. \\
& \left. - I_1^- . e^{j(wt+\phi_1^-)}) \right]
\end{aligned} \tag{A.149}$$

Transformando as correntes nas suas formas vetoriais a partir das equações (A.19) e (A.50), e utilizando a equação (A.21) para substituir o termo I, obtêm-se a equação (A.150).

$$\lambda_{aux} = \mathbb{R} \left[ (\sqrt{2}. L_{aux}. \dot{I}_{aux} \pm j. \sqrt{2}. L_{auxR}. (\dot{I}_1^+ - \dot{I}_1^-)) . e^{j\omega t} \right] \tag{A.150}$$

Assim, a equação (A.150) pode ser reescrita, gerando as equações (A.151) e (A.152), em formato similar ao fluxo deduzido no artigo de referência.

$$\lambda_{aux} = \mathbb{R} \left[ \dot{\lambda}_{aux}. e^{j\omega t} \right] \tag{A.151}$$

$$\dot{\lambda}_{aux} = j \cdot \sqrt{2} \cdot L_{aux} \cdot \dot{I}_{aux} \pm j \cdot \sqrt{2} \cdot L_{auxR} \cdot (\dot{I}_1^+ - \dot{I}_1^-) \quad (\text{A.152})$$

### A.9 Lei de Ohm aplicada ao motor monofásico

Lembrando da equação da tensão do enrolamento principal dada na equação (A.153).

$$v_{main} = R_{main} \cdot I_{main} + \frac{d\lambda_{main}}{dt} \quad (\text{A.153})$$

$$v_{aux} = R_{aux} \cdot I_{aux} + \frac{d\lambda_{aux}}{dt} \quad (\text{A.154})$$

A tensão de entrada é igual à tensão aplicada na conexão com o enrolamento principal e na conexão com o enrolamento auxiliar, uma vez que ambos estão em paralelo. Isso é indicado na equação (A.155).

$$v(t) = \sqrt{2} \cdot V_o \cdot \cos(\omega t) = \Re[\sqrt{2} \cdot V_o \cdot e^{j\omega t}] \quad (\text{A.155})$$

Nota-se que a tensão  $V_o$  não precisa estar na sua forma fasorial, porque a referência utilizada é a tensão de entrada (defasagem de  $V_o$  é igual a zero), significando que sua magnitude é numericamente igual a sua forma fasorial. A tensão no enrolamento principal pode ser definido no seu formato fasorial, conforme mostra a equação (A.156).

$$\dot{V}_{main} = V_o - \dot{Z}_{main} \cdot \dot{I}_{main} \quad (\text{A.156})$$

Pode-se aplicar a transformada de Fourier em ambos os lados da equação (A.153), chegando-se na equação (A.157).

$$\dot{V}_{main} = R_{main} \cdot \dot{I}_{main} + j\omega \dot{\lambda}_{main} \quad (\text{A.157})$$

Substituindo a equação (A.130) na equação (A.157), tem-se a equação (A.158).

$$\dot{V}_{main} = R_{main} \cdot \dot{I}_{main} + j\omega[\sqrt{2} \cdot L_{main} \cdot \dot{I}_{main} + \sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot (\dot{I}_1^+ + \dot{I}_1^-)] \quad (\text{A.158})$$

Substituindo a equação (A.158) na equação (A.156) e isolando a variável  $V_o$ , chega-se na equação (A.159).

$$V_o = (R_{main} + \dot{Z}_{main}) \cdot \dot{I}_{main} + j\omega[\sqrt{2} \cdot L_{main} \cdot \dot{I}_{main} + \sqrt{2} \cdot L_{mainR} \cdot (\dot{I}_1^+ + \dot{I}_1^-)] \quad (A.159)$$

Utilizando as equações (A.21), (A.60) e (A.61), chega-se na equação (A.160).

$$\dot{I}_1^+ + \dot{I}_1^- = -j \cdot L_{mainR} \cdot \dot{I}_{main} \cdot (\dot{K}^+ + \dot{K}^-) \mp L_{auxR} \cdot \dot{I}_{aux} \cdot (\dot{K}^+ - \dot{K}^-) \quad (A.160)$$

Assim, substituindo a equação (A.160) na equação (A.159), obtêm-se a equação (A.161).

$$\begin{aligned} V_o = & (R_{main} + \dot{Z}_{main}) \cdot \dot{I}_{main} \\ & + j\sqrt{2}\omega[L_{main} \cdot \dot{I}_{main} - j \cdot L_{mainR}^2 \cdot \dot{I}_{main} \cdot (\dot{K}^+ + \dot{K}^-) \\ & \mp L_{auxR} \cdot \dot{I}_{aux} \cdot (\dot{K}^+ - \dot{K}^-)] \end{aligned} \quad (A.161)$$

Da mesma forma, a tensão na auxiliar pode ser definida por sua forma fasorial, conforme mostra a equação (A.162).

$$\dot{V}_{aux} = V_o - \dot{Z}_{aux} \cdot \dot{I}_{aux} \quad (A.162)$$

Pode-se aplicar a transformada de Fourier em ambos os lados da equação (A.154), chegando-se na equação (A.163).

$$\dot{V}_{aux} = R_{aux} \cdot \dot{I}_{aux} + j\omega\dot{\lambda}_{aux} \quad (A.163)$$

Substituindo a equação (A.152) na equação (A.163), tem-se a equação (A.164).

$$\dot{V}_{aux} = R_{aux} \cdot \dot{I}_{aux} + j\omega[\sqrt{2} \cdot L_{aux} \cdot \dot{I}_{aux} \pm j \cdot \sqrt{2} \cdot L_{auxR} \cdot (\dot{I}_1^+ - \dot{I}_1^-)] \quad (A.164)$$

Substituindo a equação (A.164) na equação (A.162) e isolando a variável  $V_o$ , chega-se na equação (A.165).

$$V_o = (R_{aux} + \dot{Z}_{aux}) \cdot \dot{I}_{aux} + j\omega[\sqrt{2} \cdot L_{aux} \cdot \dot{I}_{aux} \pm j \cdot \sqrt{2} \cdot L_{auxR} \cdot (\dot{I}_1^+ - \dot{I}_1^-)] \quad (\text{A.165})$$

Utilizando as equações (A.21), (A.60) e (A.61), chega-se na equação (A.166).

$$\dot{I}_1^+ - \dot{I}_1^- = -j \cdot L_{mainR} \cdot \dot{I}_{main} \cdot (\dot{K}^+ - \dot{K}^-) \mp L_{auxR} \cdot \dot{I}_{aux} \cdot (\dot{K}^+ + \dot{K}^-) \quad (\text{A.166})$$

Assim, substituindo a equação (A.166) na equação (A.165), obtêm-se a equação (A.167).

$$\begin{aligned} V_o = & (R_{aux} + \dot{Z}_{aux}) \cdot \dot{I}_{aux} \\ & + j\sqrt{2}\omega[L_{aux} \cdot \dot{I}_{aux} \pm L_{auxR} \cdot L_{mainR} \cdot \dot{I}_{main} \cdot (\dot{K}^+ - \dot{K}^-) \\ & - j \cdot L_{auxR}^2 \cdot \dot{I}_{aux} \cdot (\dot{K}^+ + \dot{K}^-)] \end{aligned} \quad (\text{A.167})$$

Portanto, pode-se escrever a “lei de Ohm” para este circuito a partir da equação (A.168).

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{c} R_{main} + \dot{Z}_{main} + j\omega\sqrt{2}(L_{main} - j \cdot L_{mainR}^2 \cdot (\dot{K}^+ + \dot{K}^-)) \\ \pm j\sqrt{2}\omega \cdot L_{auxR} \cdot L_{mainR} \cdot (\dot{K}^+ - \dot{K}^-) \\ \mp j\sqrt{2}\omega \cdot L_{auxR} \cdot \dot{I}_{aux} \cdot (\dot{K}^+ - \dot{K}^-) \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_{main} \\ \dot{I}_{aux} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_o \\ V_o \end{bmatrix} \\ R_{aux} + \dot{Z}_{aux} + j\sqrt{2}\omega(L_{aux} - j \cdot L_{auxR}^2 \cdot (\dot{K}^+ + \dot{K}^-)) \end{aligned} \quad (\text{A.168})$$

## A.10 Torque induzido médio

Para calcular o torque induzido médio, será primeiro deduzida a equação da energia instantânea a partir da equação da coenergia, dada na equação (A.169).

$$W'(t) = \int_0^i \lambda \cdot di' \quad (\text{A.169})$$

Assim, pode-se dividir tal equação em quatro partes, correspondente a cada um dos enrolamentos. Essas partes estão descritas nas equações (A.170) a (A.174).

$$W'(t) = W'_{main}(t) + W'_{aux}(t) + W'_1(t) + W'_2(t) \quad (A.170)$$

$$W'_{main}(t) = \int_0^{i_{main}} \lambda_{main} \cdot di_{main} \quad (A.171)$$

$$W'_{aux}(t) = \int_0^{i_{aux}} \lambda_{aux} \cdot di_{aux} \quad (A.172)$$

$$W'_1(t) = \int_0^{i_1} \lambda_1 \cdot di_1 \quad (A.173)$$

$$W'_2(t) = \int_0^{i_2} \lambda_2 \cdot di_2 \quad (A.174)$$

Utilizando as equações (A.20), (A.27), (A.62), (A.82) e (A.131), obtêm-se os valores de  $W'_{main}$ ,  $W'_{aux}$ ,  $W'_1$ ,  $W'_2$  indicados nas equações (A.175) a (A.178). A soma resultante  $W'$  é indicada na equação (A.179).

$$W'_{main}(t) = \frac{1}{2} \cdot L_{main} i_{main}^2 + L_{mainR} i_{main} i_1 \cos(\theta) + I \cdot L_{mainR} i_{main} i_2 \sin(\theta) \quad (A.175)$$

$$W'_{aux}(t) = \frac{1}{2} \cdot L_{aux} i_{aux}^2 - I \cdot L_{auxR} i_{aux} i_1 \sin(\theta) + L_{auxR} i_{aux} i_2 \cos(\theta) \quad (A.176)$$

$$W'_1(t) = \frac{1}{2} \cdot L_R i_1^2 + L_{mainR} i_{main} i_1 \cos(\theta) - I \cdot L_{auxR} i_{aux} i_1 \sin(\theta) \quad (A.177)$$

$$W'_2(t) = \frac{1}{2} \cdot L_R i_2^2 + I \cdot L_{mainR} i_{main} i_2 \sin(\theta) + L_{auxR} i_{aux} i_2 \cos(\theta) \quad (A.178)$$

$$\begin{aligned}
W'(t) = & \frac{1}{2} \cdot L_{main} i_{main} + \frac{1}{2} \cdot L_{aux} i_{aux}^2 + \frac{1}{2} \cdot L_R i_1^2 + \frac{1}{2} \cdot L_R i_2^2 \\
& + 2 \cdot L_{mainR} i_{main} (i_1 \cos(\theta) + I \cdot i_2 \sin(\theta)) \\
& + 2 \cdot L_{auxR} i_{aux} (-I \cdot i_1 \sin(\theta) + i_2 \cos(\theta))
\end{aligned} \tag{A.179}$$

Assim, pode-se deduzir o torque induzido utilizando a equação (A.180), de referência do artigo do Umas. Utilizando a regra da cadeia, é deduzido o último termo desta equação.

$$T_{elec}(t) = \frac{\partial W'}{\partial \theta_m} = \frac{\partial W'}{\partial \theta} \cdot \frac{d\theta}{d\theta_m} \tag{A.180}$$

Utilizando a equação do ângulo elétrico dada em (A.20), os termos do torque induzido podem ser definidos pelas equações (A.181) e (A.182).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W'}{\partial \theta} = & 2 \cdot L_{mainR} i_{main} (-i_1 \sin(\theta) + I \cdot i_2 \cos(\theta)) + 2 \cdot L_{auxR} i_{aux} (-I \cdot i_1 \cos(\theta) \\
& - i_2 \sin(\theta))
\end{aligned} \tag{A.181}$$

$$\frac{d\theta}{d\theta_m} = \frac{d(Pw_m t)}{d(w_m t)} = P \tag{A.182}$$

Assim, utilizando as equações (A.180), (A.181) e (A.182), o torque induzido é mostrado na equação (A.183).

$$\begin{aligned}
T_{elec}(t) = & 2P \cdot [L_{mainR} i_{main} (-i_1 \sin(\theta) + I \cdot i_2 \cos(\theta)) \\
& + L_{auxR} i_{aux} (-I \cdot i_1 \cos(\theta) - i_2 \sin(\theta))]
\end{aligned} \tag{A.183}$$

Para facilitar a dedução, o torque induzido será dividido em duas partes, apresentadas nas equações (A.184) a (A.186). Os nomes dos torques foram escolhidos em analogia aos termos dos enrolamentos principal e auxiliar presentes em cada equação.

$$T_{elec}(t) = 2P \cdot (T_{main} + T_{aux}) \tag{A.184}$$

$$T_{main} = L_{mainR} i_{main} (-i_1 \sin(\theta) + I \cdot i_2 \cos(\theta)) \tag{A.185}$$

$$T_{aux} = L_{auxR} i_{aux} (-I_1 \cos(\theta) - i_2 \sin(\theta)) \quad (\text{A.186})$$

Assim, usando as equações (A.18), (A.49) e (A.74), o torque  $T_{main}$  é dado pela equação (A.187).

$$\begin{aligned} T_{main} = & L_{mainR} \sqrt{2} \cdot I_{main} \cos(\omega t + \phi_{main}) \cdot [(-\sin(\theta)) \cdot \sqrt{2} \cdot I_1^+ \cdot \cos(\omega t + \phi_1^+) \\ & + (-\sin(\theta)) \cdot \sqrt{2} \cdot I_1^- \cdot \cos((2-s)\omega t + \phi_1^-) \\ & + (I \cos(\theta)) \cdot \sqrt{2} \cdot I_2^+ \cdot \cos(\omega t + \phi_2^+) \\ & + (I \cos(\theta)) \cdot \sqrt{2} \cdot I_2^- \cdot \cos((2-s)\omega t + \phi_2^-)] \end{aligned} \quad (\text{A.187})$$

Podem-se atribuir variáveis auxiliares para o problema, dadas nas equações (A.188) a (A.197).

$$a = L_{mainR} \sqrt{2} \cdot I_{main} \quad (\text{A.188})$$

$$b = \phi_{main} \quad (\text{A.189})$$

$$c^+ = -\sqrt{2} \cdot I_1^+ \quad (\text{A.190})$$

$$c^- = -\sqrt{2} \cdot I_1^- \quad (\text{A.191})$$

$$d^+ = \phi_1^+ \quad (\text{A.192})$$

$$d^- = \phi_1^- \quad (\text{A.193})$$

$$e^+ = I \cdot \sqrt{2} \cdot I_2^+ \quad (\text{A.194})$$

$$e^- = I \cdot \sqrt{2} \cdot I_2^- \quad (\text{A.195})$$

$$f^+ = \phi_2^+ \quad (\text{A.196})$$

$$f^- = \phi_2^- \quad (\text{A.197})$$

Com auxílio da equação (A.20) e das equações auxiliares apresentadas em (A.188) a (A.197), obtêm-se o torque  $T_{main}$  a partir da equação (A.198).

$$\begin{aligned}
T_{main} = a \cos(wt + b) \cdot [ & c^+ \cdot \text{sen}(Pw_m t) \cdot \cos(swt + d^+) \\
& + c^- \cdot \text{sen}(Pw_m t) \cdot \cos((2 - s)wt + d^-) \\
& + e^+ \cdot \cos(Pw_m t) \cdot \cos(swt + f^+) \\
& + e^- \cdot \cos(Pw_m t) \cdot \cos((2 - s)wt + f^-) ]
\end{aligned} \tag{A.198}$$

Utilizando as equações (A.105), (A.109), (A.110), (A.111), (A.112) e (A.113) (substituindo a defasagem  $\phi_1^+$  pelos ângulos  $d^+$ ,  $f^+$  e a defasagem  $\phi_1^-$  pelos ângulos  $d^-$ ,  $f^-$ , de forma análoga à dedução do  $\lambda_{main}$ ), encontra-se a equação (A.199).

$$\begin{aligned}
T_{main} = a \cos(wt + b) \cdot \left[ & \frac{c^+}{2} \cdot (\text{sen}(wt + d^+) - \text{sen}((2s - 1)wt + d^+)) \right. \\
& + \frac{c^-}{2} \cdot (\text{sen}((3 - 2s)wt + d^-) - \text{sen}(wt + d^-)) \\
& + \frac{e^+}{2} \cdot (\cos(wt + f^+) + \cos((2s - 1)wt + f^+)) \\
& \left. + \frac{e^-}{2} \cdot (\cos((3 - 2s)wt + f^-) + \cos(wt + f^-)) \right]
\end{aligned} \tag{A.199}$$

Assim, das relações de seno e cosseno das equações (A.105) e (A.109), é necessário deduzir novas formas de  $A + B$  e  $-A + B$  para substituir na equação (A.199). Assim, seis novos casos são formados para os ângulos  $d^+$  e  $d^-$ , mostrados nas equações (A.200) a (A.205). Para os ângulos  $f^+$  e  $f^-$ , apenas é necessário substituí-los por  $d^+$  e  $d^-$ , respectivamente, para encontrar as mesmas deduções.

$$A + B = wt + b + wt + \psi = 2wt + (b + \psi), \quad \psi = d^+ \text{ ou } \psi = d^- \tag{A.200}$$

$$-A + B = -(wt + b) + wt + \psi = (-b + \psi), \quad \psi = d^+ \text{ ou } \psi = d^- \tag{A.201}$$

$$A + B = wt + b + (2s - 1)wt + d^+ = 2s wt + (b + \psi) \tag{A.202}$$

$$-A + B = -(wt + b) + (2s - 1)wt + d^+ = 2(s - 1)wt + (-b + d^+) \tag{A.203}$$

$$A + B = wt + b + (3 - 2s)wt + d^- = (3 - s)wt + (b + d^-) \tag{A.204}$$

$$-A + B = -(wt + b) + (3 - 2s)wt + d^- = 3(1 - s)wt + (b + d^-) \quad (\text{A.205})$$

Assim, substituindo as equações (A.200) a (A.205) nas equações (A.105), (A.109) e, por último, na equação (A.199), encontra-se o torque  $T_{main}$  dado pela equação (A.206).

$$\begin{aligned} T_{main} = \frac{a}{4} \cdot & \left[ c^+ \cdot (\text{sen}(2wt + (b + d^+)) + \text{sen}(-b + d^+) - \text{sen}(2swt + (b + d^+)) \right. \\ & - \text{sen}(2(s - 1)wt + (-b + d^+)) \\ & + c^- \cdot (\text{sen}((3 - s)wt + (b + d^-)) + \text{sen}(3(1 - s)wt + (-b + d^-)) \\ & - \text{sen}(2wt + (b + d^-)) - \text{sen}(-b + d^-)) + e^+ \cdot (\text{cos}(2wt + (b + f^+)) \\ & + \text{cos}(-b + f^+) + \text{cos}(2swt + (b + f^+)) + \text{cos}(2(s - 1)wt + (-b + f^+)) \\ & + e^- \cdot (\text{cos}((3 - s)wt + (b + f^-)) + \text{cos}(3(1 - s)wt + (-b + f^-)) \\ & \left. + \text{cos}(2wt + (b + f^-)) + \text{cos}(-b + f^-) \right] \quad (\text{A.206}) \end{aligned}$$

Com auxílio das equações (A.39) e (A.40), tem-se a equação (A.207).

$$\begin{aligned} T_{main} = \frac{a}{4} \cdot \mathbb{R} & \left[ c^+ \cdot (-je^{j(2wt+(b+d^+))} - je^{j(-b+d^+)} + je^{j(2swt+(b+d^+))} + je^{j(2(s-1)wt+(-b+d^+)}) \right. \\ & + c^- \cdot (-je^{j((3-s)wt+(b+d^-))} - je^{j(3(1-s)wt+(-b+d^-))} + je^{j(2wt+(b+d^-))} + je^{j(-b+d^-)}) \\ & + e^+ \cdot (e^{j(2wt+(b+f^+))} + e^{j(-b+f^+)} + e^{j(2swt+(b+f^+))} + e^{j(2(s-1)wt+(-b+f^+)}) \\ & \left. + e^- \cdot (e^{j((3-s)wt+(b+f^-))} + e^{j(3(1-s)wt+(-b+f^-))} + e^{j(2wt+(b+f^-))} + e^{j(-b+f^-)}) \right] \quad (\text{A.207}) \end{aligned}$$

Utilizando as equações (A.190) a (A.197) e agrupando os termos com auxílio das equações (A.50) e (A.75), chega-se na equação (A.208).

$$\begin{aligned} T_{main} = \frac{a}{4} \cdot \mathbb{R} & \left[ (-\sqrt{2}I_1^+) \cdot (-je^{j(2wt+b)} - je^{-jb} + je^{j(2swt+b)} + je^{j(2(s-1)wt-b)}) \right. \\ & + (-\sqrt{2}I_1^-) \cdot (-je^{j((3-s)wt+b)} - je^{j(3(1-s)wt-b)} + je^{j(2wt+b)} + je^{-jb}) \\ & + (I \cdot \sqrt{2}I_2^+) \cdot (e^{j(2wt+b)} + e^{-jb} + e^{j(2swt+b)} + e^{j(2(s-1)wt-b)}) \\ & \left. + (I \cdot \sqrt{2}I_2^-) \cdot (e^{j((3-s)wt+b)} + e^{j(3(1-s)wt-b)} + e^{j(2wt+b)} + e^{-jb}) \right] \quad (\text{A.208}) \end{aligned}$$

Usando as equações (A.80) e (A.81) em (A.208), obtêm-se a equação (A.209).

$$\begin{aligned}
T_{main} = \frac{a}{4} \cdot \mathbb{R} [ & (-\sqrt{2}I_1^+) \cdot (-je^{j(2wt+b)} - je^{-jb} + je^{j(2swt+b)} + je^{j(2(s-1)wt-b)}) \\
& + (-\sqrt{2}I_1^-) \cdot (-je^{j(3-s)wt+b} - je^{j(3(1-s)wt-b)} + je^{j(2wt+b)} + je^{-jb}) \\
& + (-\sqrt{2}I_1^+) \cdot (-je^{j(2wt+b)} - je^{-jb} - je^{j(2swt+b)} - je^{j(2(s-1)wt-b)}) \\
& + (-\sqrt{2}I_1^-) \cdot (je^{j(3-s)wt+b} + je^{j(3(1-s)wt-b)} + je^{j(2wt+b)} + je^{-jb}) ]
\end{aligned} \tag{A.209}$$

Simplificando os termos da equação (A.209), chega-se na equação (A.210).

$$T_{main} = \frac{a}{4} \cdot \mathbb{R} [(2\sqrt{2}) \cdot (I_1^+ - I_1^-) \cdot (je^{j(2wt+b)} + je^{-jb})] \tag{A.210}$$

Utilizando as equações (A.60) e (A.61) na equação (A.210), obtêm-se a equação (A.211).

$$\begin{aligned}
T_{main} = \frac{a}{4} \cdot \mathbb{R} [ & (2\sqrt{2}) \cdot (-j\dot{K}^+ \cdot (L_{mainR} \cdot \dot{I}_{main} - j \cdot I \cdot L_{aux} \cdot \dot{I}_{aux}) \\
& - (-j\dot{K}^- \cdot (L_{mainR} \cdot \dot{I}_{main} + j \cdot I \cdot L_{aux} \cdot \dot{I}_{aux}))) \cdot (je^{j(2wt+b)} + je^{-jb}) ]
\end{aligned} \tag{A.211}$$

Reagrupando os termos e usando as equações (A.188) e (A.189), obtêm-se a equação (A.212).

$$\begin{aligned}
T_{main} = L_{mainR} I_{main} \cdot \mathbb{R} [ & L_{mainR} \dot{I}_{main} \cdot (\dot{K}^+ - \dot{K}^-) \cdot (e^{j(2wt+\phi_{main})} + e^{-j\phi_{main}}) \\
& - I \cdot L_{auxR} \dot{I}_{aux} \cdot (\dot{K}^+ + \dot{K}^-) \cdot (je^{j(2wt+\phi_{main})} + je^{-j\phi_{main}}) ]
\end{aligned} \tag{A.212}$$

De forma alternativa, que será útil para a dedução do torque médio, a equação (A.212) pode ser escrita em formato equivalente a partir da equação (A.213).

$$\begin{aligned}
T_{main} = \mathbb{R} [ & L_{mainR}^2 I_{main}^2 \cdot (\dot{K}^+ - \dot{K}^-) \cdot (e^{j \cdot 2(wt+\phi_{main})} + 1) \\
& - (I \cdot j) \cdot L_{mainR} L_{auxR} \dot{I}_{main}^* \dot{I}_{aux} \cdot (\dot{K}^+ + \dot{K}^-) \cdot (e^{j2(wt+\phi_{main})} + 1) ]
\end{aligned} \tag{A.213}$$

Então, será feita a dedução do torque  $T_{aux}$ . Usando as equações (A.19), (A.49) e (A.74), o torque  $T_{aux}$  é dado pela equação (A.214).

$$\begin{aligned}
T_{aux} = & L_{auxR} \sqrt{2} \cdot I_{aux} \cos(\omega t + \phi_{aux}) \cdot [(-I \cdot \cos(\theta)) \cdot \sqrt{2} \cdot I_1^+ \cdot \cos(\omega t + \phi_1^+) \\
& + (-I \cdot \cos(\theta)) \cdot \sqrt{2} \cdot I_1^- \cdot \cos((2-s)\omega t + \phi_1^-) \\
& + (-\sin(\theta)) \cdot \sqrt{2} \cdot I_2^+ \cdot \cos(\omega t + \phi_2^+) \\
& + (-\sin(\theta)) \cdot \sqrt{2} \cdot I_2^- \cdot \cos((2-s)\omega t + \phi_2^-)]
\end{aligned} \tag{A.214}$$

Podem-se atribuir variáveis auxiliares para o problema, dadas nas equações (A.215) a (A.224).

$$a = L_{auxR} \sqrt{2} \cdot I_{aux} \tag{A.215}$$

$$b = \phi_{aux} \tag{A.216}$$

$$c^+ = -\sqrt{2} \cdot I_2^+ \tag{A.217}$$

$$c^- = -\sqrt{2} \cdot I_2^- \tag{A.218}$$

$$d^+ = \phi_2^+ \tag{A.219}$$

$$d^- = \phi_2^- \tag{A.220}$$

$$e^+ = -I \cdot \sqrt{2} \cdot I_1^+ \tag{A.221}$$

$$e^- = -I \cdot \sqrt{2} \cdot I_1^- \tag{A.222}$$

$$f^+ = \phi_1^+ \tag{A.223}$$

$$f^- = \phi_1^- \tag{A.224}$$

Com auxílio da equação (A.20) e das equações auxiliares apresentadas em (A.215) a (A.224), obtêm-se o torque  $T_{aux}$  a partir da equação (A.225).

$$\begin{aligned}
T_{aux} = & a \cos(\omega t + b) \cdot [c^+ \cdot \sin(P\omega_m t) \cdot \cos(\omega t + d^+) \\
& + c^- \cdot \sin(P\omega_m t) \cdot \cos((2-s)\omega t + d^-) \\
& + e^+ \cdot \cos(P\omega_m t) \cdot \cos(\omega t + f^+) \\
& + e^- \cdot \cos(P\omega_m t) \cdot \cos((2-s)\omega t + f^-)]
\end{aligned} \tag{A.225}$$

Comparando a equação (A.198) com a (A.225), percebe-se que o lado direito das duas equações é idêntico. Logo, pode-se utilizar diretamente a equação (A.207) para continuar a análise.

Então, utilizando as equações (A.215) a (A.224) e agrupando os termos com auxílio das equações (A.50) e (A.75), chega-se na equação (A.226).

$$\begin{aligned}
T_{aux} = \frac{a}{4} \cdot \Re [ & (-\sqrt{2}I_2^+) \cdot (-je^{j(2wt+b)} - je^{-jb} + je^{j(2swt+b)} + je^{j(2(s-1)wt-b)}) \\
& + (-\sqrt{2}I_2^-) \cdot (-je^{j((3-s)wt+b)} - je^{j(3(1-s)wt-b)} + je^{j(2wt+b)} + je^{-jb}) \\
& + (-I \cdot \sqrt{2}I_1^+) \cdot (e^{j(2wt+b)} + e^{-jb} + e^{j(2swt+b)} + e^{j(2(s-1)wt-b)}) \\
& + (-I \cdot \sqrt{2}I_1^-) \cdot (e^{j((3-s)wt+b)} + e^{j(3(1-s)wt-b)} + e^{j(2wt+b)} + e^{-jb}) ]
\end{aligned} \tag{A.226}$$

Usando as equações (A.80) e (A.81) em (A.226), obtêm-se a equação (A.227).

$$\begin{aligned}
T_{aux} = \frac{a}{4} \cdot \Re [ & (-I \cdot \sqrt{2}I_1^+) \cdot (e^{j(2wt+b)} + e^{-jb} - e^{j(2swt+b)} - e^{j(2(s-1)wt-b)}) \\
& + (-I \cdot \sqrt{2}I_1^-) \cdot (-e^{j((3-s)wt+b)} - e^{j(3(1-s)wt-b)} + e^{j(2wt+b)} + e^{-jb}) \\
& + (-I \cdot \sqrt{2}I_1^+) \cdot (e^{j(2wt+b)} + e^{-jb} + e^{j(2swt+b)} + e^{j(2(s-1)wt-b)}) \\
& + (-I \cdot \sqrt{2}I_1^-) \cdot (e^{j((3-s)wt+b)} + e^{j(3(1-s)wt-b)} + e^{j(2wt+b)} + e^{-jb}) ]
\end{aligned} \tag{A.227}$$

Simplificando os termos da equação (A.227), chega-se na equação (A.228).

$$T_{aux} = \frac{a}{4} \cdot \Re [ (-I \cdot 2\sqrt{2}) \cdot (I_1^+ + I_1^-) \cdot (e^{j(2wt+b)} + e^{-jb}) ] \tag{A.228}$$

Utilizando as equações (A.60) e (A.61) na equação (A.228), obtêm-se a equação (A.229).

$$\begin{aligned}
T_{aux} = \frac{a}{4} \cdot \Re [ & (-I \cdot 2\sqrt{2}) \cdot (-j\dot{K}^+ \cdot (L_{mainR} \cdot \dot{I}_{main} - j \cdot I \cdot L_{aux} \cdot \dot{I}_{aux}) \\
& + (-j\dot{K}^- \cdot (L_{mainR} \cdot \dot{I}_{main} + j \cdot I \cdot L_{aux} \cdot \dot{I}_{aux}))) \cdot (e^{j(2wt+b)} + e^{-jb}) ]
\end{aligned} \tag{A.229}$$

Reagrupando os termos e usando as equações (A.215) e (A.216), obtêm-se a equação (A.230).

$$\begin{aligned}
T_{aux} = L_{auxR} I_{aux} \cdot \Re [ & (I \cdot j) \cdot L_{mainR} \dot{I}_{main} \cdot (\dot{K}^+ + \dot{K}^-) \cdot (e^{j(2wt+\phi_{aux})} + e^{-j\phi_{aux}}) \\
& + L_{auxR} \dot{I}_{aux} \cdot (\dot{K}^+ - \dot{K}^-) \cdot (e^{j(2wt+\phi_{aux})} + e^{-j\phi_{aux}}) ]
\end{aligned} \tag{A.230}$$

De forma alternativa, que será útil para a dedução do torque médio, a equação (A.230) pode ser escrita em formato equivalente a partir da equação (A.231).

$$T_{aux} = \mathbb{R} \left[ L_{auxR}^2 I_{aux}^2 \cdot (\dot{K}^+ - \dot{K}^-) \cdot (e^{j \cdot 2(wt + \phi_{aux})} + 1) \right. \\ \left. + (1 \cdot j) \cdot L_{mainR} L_{auxR} \dot{I}_{main} \dot{I}_{aux}^* \cdot (\dot{K}^+ + \dot{K}^-) \cdot (e^{j \cdot 2(wt + \phi_{aux})} + 1) \right] \quad (\text{A.231})$$

Portanto, pode-se unir o torque  $T_{main}$  com o torque  $T_{aux}$ . Utilizando as equações (A.184), (A.213) e (A.231), chega-se na equação (A.232).

$$T_{elec}(t) = 2P \cdot \left( \mathbb{R} \left[ L_{mainR}^2 I_{main}^2 \cdot (\dot{K}^+ - \dot{K}^-) \cdot (e^{j \cdot 2(wt + \phi_{main})} + 1) \right. \right. \\ \left. \left. - (1 \cdot j) \cdot L_{mainR} L_{auxR} \dot{I}_{main}^* \dot{I}_{aux} \cdot (\dot{K}^+ + \dot{K}^-) \cdot (e^{j \cdot 2(wt + \phi_{main})} + 1) \right] \right. \\ \left. + \mathbb{R} \left[ L_{auxR}^2 I_{aux}^2 \cdot (\dot{K}^+ - \dot{K}^-) \cdot (e^{j \cdot 2(wt + \phi_{aux})} + 1) \right. \right. \\ \left. \left. + (1 \cdot j) \cdot L_{mainR} L_{auxR} \dot{I}_{main} \dot{I}_{aux}^* \cdot (\dot{K}^+ + \dot{K}^-) \cdot (e^{j \cdot 2(wt + \phi_{aux})} + 1) \right] \right) \quad (\text{A.232})$$

É possível juntar as suas partes reais numa só, como mostram as equações (A.233) a (A.235), as quais seriam uma expansão das equações (A.41) a (A.43).

$$\cos(x_1) + \cos(x_2) + \text{sen}(y_1) + \text{sen}(y_2) \\ = \mathbb{R}(e^{jx_1}) + \mathbb{R}(e^{jx_2}) + \mathbb{R}(-j \cdot e^{jy_1}) + \mathbb{R}(-j \cdot e^{jy_2}) \quad (\text{A.233})$$

$$\mathbb{R}(e^{jx_1} + e^{jx_2} - j \cdot e^{jy_1} - j \cdot e^{jy_2}) \\ = \mathbb{R}(\cos(x_1) + j\text{sen}(x_1) + \cos(x_2) + j\text{sen}(x_2) - j\cos(y_1) \\ + \text{sen}(y_1) - j\cos(y_2) + \text{sen}(y_2)) \\ = \cos(x_1) + \cos(x_2) + \text{sen}(y_1) + \text{sen}(y_2) \quad (\text{A.234})$$

$$\mathbb{R}(e^{jx_1} + e^{jx_2} - j \cdot e^{jy_1} - j \cdot e^{jy_2}) \\ = \mathbb{R}(e^{jx_1}) + \mathbb{R}(e^{jx_2}) + \mathbb{R}(-j \cdot e^{jy_1}) + \mathbb{R}(-j \cdot e^{jy_2}) \quad (\text{A.235})$$

Então, utilizando as propriedades das equações (A.43) e (A.235), chega-se na equação (A.236), que define o torque induzido em função do tempo.

$$\begin{aligned}
T_{elec}(t) = & 2P \cdot \left( \Re \left[ L_{mainR}^2 I_{main}^2 \cdot (\dot{K}^+ - \dot{K}^-) \cdot (e^{j.2(wt+\phi_{main})} + 1) \right. \right. \\
& - (I \cdot j) \cdot L_{mainR} L_{auxR} \dot{I}_{main}^* \dot{I}_{aux} \cdot (\dot{K}^+ + \dot{K}^-) \cdot (e^{j.2(wt+\phi_{main})} + 1) \\
& + L_{auxR}^2 I_{aux}^2 \cdot (\dot{K}^+ - \dot{K}^-) \cdot (e^{j.2(wt+\phi_{aux})} + 1) \\
& \left. \left. + (I \cdot j) \cdot L_{mainR} L_{auxR} \dot{I}_{main} \dot{I}_{aux}^* \cdot (\dot{K}^+ + \dot{K}^-) \cdot (e^{j.2(wt+\phi_{aux})} + 1) \right] \right)
\end{aligned} \tag{A.236}$$

Para calcular o torque induzido médio, será calculada a média da variável auxiliar apresentada na equação (A.237). Assim, será apenas necessário substituir os parâmetros dessa variável pelos parâmetros apresentados na equação (A.236). Lembrando que as variáveis  $P$ ,  $I$ ,  $\dot{K}^+$ ,  $\dot{K}^-$ ,  $\dot{I}_{main}$ ,  $\dot{I}_{aux}$ ,  $L_{mainR}$ ,  $L_{auxR}$  são independentes com relação ao tempo, como mostram suas respectivas equações neste trabalho.

$$A = e^{j.2(wt+\varphi)} + 1 \tag{A.237}$$

As equações (A.238) a (A.240) mostram a dedução desse problema, até chegar no valor médio apresentado na última equação. A média considera um período completo da frequência da rede.

$$Média(A) = \frac{1}{T} \int_0^T (e^{j.2(wt+\varphi)} + 1) \cdot dt \tag{A.238}$$

$$Média(A) = \frac{1}{T} \left[ \frac{e^{j.2(wt+\varphi)}}{2w} + 1 \right]_0^T \tag{A.239}$$

$$Média(A) = \frac{1}{T} \left[ \frac{e^{j.2(wT+\varphi)} - e^{j.2(w0+\varphi)}}{2w} + T - 0 \right] \tag{A.240}$$

Lembrando da definição da frequência angular a partir da equação (A.241).

$$w = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{A.241}$$

Substituindo a equação (A.241) na equação (A.240) e removendo os termos nulos, tem-se a equação (A.242).

$$Média(A) = \frac{1}{T} \left[ \frac{e^{j \cdot 2(2\pi + \varphi)} - e^{j \cdot 2\varphi}}{2w} + T \right] = \frac{1}{T} \left[ \frac{e^{j \cdot (4\pi + 2\varphi)} - e^{j \cdot 2\varphi}}{2w} + T \right] \quad (\text{A.242})$$

Além disso, pode-se utilizar a equação (A.243) para auxiliar no problema.

$$e^{j \cdot (4\pi + 2\varphi)} = e^{j4\pi} \cdot e^{j2\varphi} = (\cos(4\pi) + j \cdot \text{sen}(4\pi)) \cdot e^{j2\varphi} = 1 \cdot e^{j2\varphi} = e^{j2\varphi} \quad (\text{A.243})$$

Substituindo a equação (A.243) na equação (A.242), obtêm-se o resultado da média da variável auxiliar a partir da equação (A.244).

$$Média(A) = \frac{1}{T} \left[ \frac{e^{j2\varphi} - e^{j2\varphi}}{2w} + T \right] = \frac{1}{T} \cdot T = 1 \quad (\text{A.244})$$

Portanto, utilizando a equação (A.235) e aplicando o resultado da equação (A.244) na equação (A.236), chega-se no torque induzido médio dado na equação (A.245).

$$T_{elec} = 2P \cdot \left( \Re \left[ L_{mainR}^2 I_{main}^2 \cdot (\dot{K}^+ - \dot{K}^-) - (I \cdot j) \cdot L_{mainR} L_{auxR} \dot{I}_{main}^* \dot{I}_{aux} \cdot (\dot{K}^+ + \dot{K}^-) \right. \right. \\ \left. \left. + L_{auxR}^2 I_{aux}^2 \cdot (\dot{K}^+ - \dot{K}^-) + (I \cdot j) \cdot L_{mainR} L_{auxR} \dot{I}_{main} \dot{I}_{aux}^* \cdot (\dot{K}^+ + \dot{K}^-) \right] \right) \quad (\text{A.245})$$

### A.11 Perdas no Rotor ( $P_{rotor}$ )

A equação (A.246) corresponde às perdas no rotor, as quais correspondem à soma das perdas dos enrolamentos 1 e 2 devido aos campos progressivo (+) e retrógrado (-). Lembrando que a resistência do rotor nos enrolamentos foi considerada idêntica e igual a  $R_R$ .

$$P_{rotor} = R_R \cdot [\text{rms}(i_1)]^2 + R_R \cdot [\text{rms}(i_2)]^2 \quad (\text{A.246})$$

Em que  $rms(x)$  representa o valor eficaz (raiz média quadrática) da variável  $x$ . Assim, com auxílio da equação (A.49), o equacionamento do valor médio quadrático de  $i_1$  é apresentado nas equações (A.247) e o resultado apresentado na equação (A.248).

$$rms(i_1) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (\sqrt{2} \cdot I_1^+ \cdot \cos(swt + \phi_1^+) + \sqrt{2} \cdot I_1^- \cdot \cos((2-s)wt + \phi_1^-))^2 \cdot dt} \quad (\text{A.247})$$

$$rms(i_1) = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^T \left( (I_1^+)^2 \cdot \cos^2(swt + \phi_1^+) + I_1^+ \cdot I_1^- \cdot \cos(swt + \phi_1^+) \cdot \cos((2-s)wt + \phi_1^-) + (I_1^-)^2 \cdot \cos^2((2-s)wt + \phi_1^-) \right) \cdot dt} \quad (\text{A.248})$$

Indicando a propriedade descrita na equação (A.249), que pode ser deduzida a partir da equação (A.105).

$$\cos^2(A) = \frac{1 + \cos(2A)}{2} \quad (\text{A.249})$$

Além disso, pode-se utilizar a equação (A.105) para auxiliar na resolução da equação (A.248). Assim, são definidas as variáveis auxiliares descritas nas equações (A.250) e (A.251) a serem utilizadas na equação (A.248).

$$A + B = swt + \phi_1^+ + (2-s) \cdot wt + \phi_1^- = 2wt + (\phi_1^+ + \phi_1^-) \quad (\text{A.250})$$

$$-A + B = -(swt + \phi_1^+) + (2-s) \cdot wt + \phi_1^- = 2(1-s)wt + (-\phi_1^+ + \phi_1^-) \quad (\text{A.251})$$

Então, utilizando as equações (A.105), (A.249), (A.250) e (A.251) na equação (A.248), chega-se na equação (A.252).

$$rms(i_1) = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^T \left( (I_1^+)^2 \cdot (\cos(2(swt + \phi_1^+)) + 1) + I_1^+ \cdot I_1^- \cdot (\cos(2wt + \phi_1^+ + \phi_1^-) + \cos(2(1-s)wt + (-\phi_1^+ + \phi_1^-))) + (I_1^-)^2 \cdot (\cos(2((2-s)wt + \phi_1^-)) + 1) \right) \cdot dt} \quad (\text{A.252})$$

Realizando a integração da equação (A.252), chega-se na equação (A.253).

$$\begin{aligned}
& rms(i_1) \\
& = \sqrt{\left[ \frac{(I_1^+)^2}{T} \cdot \left( \frac{1}{2sw} \cdot \text{sen}(2(swt + \phi_1^+)) + t \right) + \frac{I_1^+ \cdot I_1^-}{T} \cdot \left( \frac{1}{2w} \cdot \text{sen}(2wt + \phi_1^+ + \phi_1^-) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{1}{2(1-s)w} \cdot \text{sen}(2(1-s)wt + (-\phi_1^+ + \phi_1^-)) \right) + \frac{(I_1^-)^2}{T} \cdot \left( \frac{1}{2(2-s)w} \cdot \text{sen}(2((2-s)wt + \phi_1^-)) + t \right) \right]_0^T} \quad (\text{A.253})
\end{aligned}$$

Abrindo os termos da equação (A.253), chega-se na equação (A.254).

$$\begin{aligned}
& rms(i_1) \\
& = \sqrt{\left[ \frac{(I_1^+)^2}{T} \cdot \left( \frac{1}{2sw} \cdot (\text{sen}(2(swt + \phi_1^+)) - \text{sen}(2\phi_1^+)) + T \right) + \frac{I_1^+ \cdot I_1^-}{T} \cdot \left( \frac{1}{2w} \cdot (\text{sen}(2wT + \phi_1^+ + \phi_1^-) - \right. \right. \\
& \left. \left. \text{sen}(\phi_1^+ + \phi_1^-)) + \frac{1}{2(1-s)w} \cdot (\text{sen}(2(1-s)wT + (-\phi_1^+ + \phi_1^-)) - \text{sen}(-\phi_1^+ + \phi_1^-)) \right) + \right. \\
& \left. \frac{(I_1^-)^2}{T} \cdot \left( \frac{1}{2(2-s)w} \cdot (\text{sen}(2((2-s)wt + \phi_1^-)) - \text{sen}(2\phi_1^-)) + T \right) \right]_0^T} \quad (\text{A.254})
\end{aligned}$$

Utilizando a equação (A.241) na equação (A.254), chega-se na equação (A.255).

$$\begin{aligned}
& rms(i_1) = \sqrt{\left[ \frac{(I_1^+)^2}{4s\pi} \cdot (\text{sen}(2(2\pi s + \phi_1^+)) - \text{sen}(2\phi_1^+)) + 1 + I_1^+ \cdot I_1^- \cdot \left( \frac{1}{4\pi} \cdot (\text{sen}(4\pi + \phi_1^+ + \phi_1^-) - \right. \right. \\
& \left. \left. \text{sen}(\phi_1^+ + \phi_1^-)) + \frac{1}{4(1-s)\pi} \cdot (\text{sen}(4(1-s)\pi + (-\phi_1^+ + \phi_1^-)) - \text{sen}(-\phi_1^+ + \phi_1^-)) \right) + \right. \\
& \left. \frac{(I_1^-)^2}{4(2-s)\pi} \cdot (\text{sen}(2(2(2-s)\pi t + \phi_1^-)) - \text{sen}(2\phi_1^-)) + 1 \right]_0^T} \quad (\text{A.255})
\end{aligned}$$

Então, será deduzido um formato alternativo da função descrita na equação (A.256), que será útil para apresentar uma versão melhorada da equação (A.255).

$$EQ = \text{sen}(2\pi C + D) - \text{sen}(D) \quad (\text{A.256})$$

O primeiro termo da equação (A.256) pode ser expandido utilizando a equação (A.257).

$$\text{sen}(2\pi C + D) = \text{sen}(2\pi C) \cdot \cos(D) + \cos(2\pi C) \cdot \text{sen}(D) \quad (\text{A.257})$$

Assim, aplicando a equação (A.257) em (A.256), tem-se a equação (A.258).

$$EQ = \text{sen}(2\pi C) \cdot \cos(D) + (\cos(2\pi C) - 1) \cdot \text{sen}(D) \quad (\text{A.258})$$

Além disso, pode ser utilizada a propriedade descrita na equação (A.259).

$$\text{sen}^2(A) = \frac{1 - \cos(2A)}{2} \quad (\text{A.259})$$

Alterando os termos de posição, pode-se reescrever a equação (A.259), gerando a equação (A.260), para então substituir essa equação na (A.258), sendo mostrado o resultado na equação (A.261).

$$-2 \cdot \text{sen}^2(A) = \cos(2A) - 1 \quad (\text{A.260})$$

$$EQ = \text{sen}(2\pi C) \cdot \cos(D) - 2 \cdot \text{sen}^2(2\pi C) \cdot \text{sen}(D) \quad (\text{A.261})$$

Ademais, pode-se utilizar a propriedade indicada na equação (A.262) na equação (A.261), cujo resultado é apresentado na equação (A.263).

$$\text{sen}(2A) = 2 \cdot \text{sen}(A) \cdot \cos(A) \quad (\text{A.262})$$

$$EQ = 2 \cdot \text{sen}(\pi C) \cdot \cos(\pi C) \cdot \cos(D) - 2 \cdot \text{sen}^2(2\pi C) \cdot \text{sen}(D) \quad (\text{A.263})$$

Agrupando os termos da equação (A.263), chega-se na equação (A.264).

$$EQ = 2 \cdot \text{sen}(\pi C) \cdot (\cos(\pi C) \cdot \cos(D) - \text{sen}(2\pi C) \cdot \text{sen}(D)) \quad (\text{A.264})$$

Utilizando a propriedade da equação (A.265) na equação (A.264), chega-se na equação (A.266).

$$\cos(A + B) = \cos(A) \cdot \cos(B) - \text{sen}(A) \cdot \text{sen}(B) \quad (\text{A.265})$$

$$EQ = \text{sen}(2\pi C) \cdot \cos(D) + (\cos(2\pi C) - 1) \cdot \text{sen}(D) = 2 \cdot \text{sen}(\pi C) \cdot \cos(\pi C + D) \quad (\text{A.266})$$

Assim, utilizando a equação (A.266) na equação (A.255), chega-se na equação (A.267).

$$\begin{aligned}
 & rms(i_1) \\
 &= \sqrt{ \left( I_1^+ \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{4s\pi} \cdot (2 \cdot \text{sen}(2\pi s) \cdot \cos(2\pi s + 2\phi_1^+)) + 1 \right) + I_1^+ \cdot I_1^- \cdot \left( \frac{1}{4\pi} \cdot (2 \cdot \text{sen}(2\pi) \cdot \cos(2\pi + \phi_1^+ + \phi_1^-)) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{4(1-s)\pi} \cdot (2 \cdot \text{sen}(2\pi(1-s)) \cdot \cos(2\pi(1-s) + (-\phi_1^+ + \phi_1^-))) \right) + \\
 & \quad \left. + (I_1^-)^2 \cdot \left( \frac{1}{4(2-s)\pi} \cdot (2 \cdot \text{sen}(2\pi(2-s)) \cdot \cos(2\pi(2-s) + 2\phi_1^-)) + 1 \right) \right) \quad (A.267)
 \end{aligned}$$

Simplificando a equação (A.267), chega-se na equação (A.268), que representa a equação da corrente eficaz do enrolamento principal do rotor, na sua versão completa.

$$\begin{aligned}
 & rms(i_1) \\
 &= \sqrt{ \left( I_1^+ \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{4s\pi} \cdot (2 \cdot \text{sen}(2\pi s) \cdot \cos(2\pi s + 2\phi_1^+)) + 1 \right) \\
 & \quad + I_1^+ \cdot I_1^- \cdot \left( \frac{1}{4(1-s)\pi} \cdot (2 \cdot \text{sen}(2\pi(1-s)) \cdot \cos(2\pi(1-s) + (-\phi_1^+ + \phi_1^-))) \right) \quad (A.268) \\
 & \quad \left. + (I_1^-)^2 \cdot \left( \frac{1}{4(2-s)\pi} \cdot (2 \cdot \text{sen}(2\pi(2-s)) \cdot \cos(2\pi(2-s) + 2\phi_1^-)) + 1 \right) \right)
 \end{aligned}$$

Contudo, considerando que esta teoria é válida para regime permanente, sabe-se que o a velocidade nominal trabalha próxima da velocidade síncrona, em que o escorregamento é zero. Portanto, pode-se considerar o escorregamento nulo ( $s = 0$ ) como uma aproximação válida.

Para auxiliar na simplificação da equação (A.268), será deduzido o limite da equação (A.269).

$$EQ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} \quad (A.269)$$

Utilizando a representação da série de Taylor da função seno, dada na equação (A.270), pode-se calcular o limite da equação (A.269), conforme apresentado na equação (A.271). O valor da equação (A.271) apresenta valor unitário quando  $n = 0$  e valor nulo quando  $n \neq 0$ , portanto seu resultado é igual a 1.

$$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (\text{A.270})$$

$$EQ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = 1 \quad (\text{A.271})$$

Assim, aplicando o limite de  $s \rightarrow 0$  (escorregamento tendendo a zero) na equação (A.268) e utilizando a equação (A.271), chega-se na equação (A.272).

$$rms(i_1) = \sqrt{(I_1^+)^2 \cdot ((\cos(2\phi_1^+)) + 1) + (I_1^-)^2} \quad (\text{A.272})$$

Aplicando a equação (A.249) na equação (A.272), chega-se na equação (A.273), que é o formato aproximado da corrente  $rms$  no enrolamento principal do rotor.

$$rms(i_1) = \sqrt{2 \cdot (I_1^+)^2 \cdot \cos^2(\phi_1^+) + (I_1^-)^2} \quad (\text{A.273})$$

Da mesma forma, as equações da corrente eficaz no enrolamento auxiliar do rotor são análogas às equações (A.268) e (A.273), uma vez que as formas de corrente apresentadas em (A.50) e (A.74) são análogas. Com base nisso, as equações da corrente eficaz no enrolamento auxiliar do rotor são apresentadas nas equações (A.274), na sua forma completa, e na equação (A.275), na sua forma aproximada.

$$rms(i_2) = \sqrt{(I_2^+)^2 \cdot \left( \frac{1}{4s\pi} \cdot (2 \cdot \text{sen}(2\pi s) \cdot \cos(2\pi s + 2\phi_2^+)) + 1 \right) + I_2^+ \cdot I_2^- \cdot \left( \frac{1}{4(1-s)\pi} \cdot (2 \cdot \text{sen}(2\pi(1-s)) \cdot \cos(2\pi(1-s) + (-\phi_2^+ + \phi_2^-))) \right) + (I_2^-)^2 \cdot \left( \frac{1}{4(2-s)\pi} \cdot (2 \cdot \text{sen}(2\pi(2-s)) \cdot \cos(2\pi(2-s) + 2\phi_2^-)) + 1 \right)} \quad (\text{A.274})$$

$$rms(i_2) = \sqrt{2 \cdot (I_2^+)^2 \cdot \cos^2(\phi_2^+) + (I_2^-)^2} \quad (\text{A.275})$$

Assim, utilizando as equações (A.246), (A.273) e (A.275), as perdas no rotor podem ser calculadas de forma aproximada pela equação (A.276).

$$P_{rotor} = R_R \cdot (2 \cdot (I_1^+)^2 \cdot \cos^2(\phi_1^+) + (I_1^-)^2) + R_R \cdot (2 \cdot (I_2^+)^2 \cdot \cos^2(\phi_2^+) + (I_2^-)^2) \quad (\text{A.276})$$