

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**ELOISE CLARA VIEGAS**

**MODELOS DE CRESCIMENTOS POPULACIONAIS E  
COMPETIÇÕES ENTRE ESPÉCIES: UMA  
INTRODUÇÃO AO MODELO DE GILPIN-AYALA.**

Blumenau

2021



Eloise Clara Viegas

MODELOS DE CRESCIMENTOS POPULACIONAIS E  
COMPETIÇÕES ENTRE ESPÉCIES: UMA  
INTRODUÇÃO AO MODELO DE GILPIN-AYALA.

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Licenciado em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Rafael Aleixo de Carvalho

Blumenau

2021

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária da Universidade Federal de Santa Catarina.

Arquivo compilado às 14:20h do dia 6 de outubro de 2021.

Eloise Clara Viegas

Modelos de crescimentos populacionais e competições entre espécies: uma introdução ao modelo de Gilpin-Ayala. : / Eloise Clara Viegas; Orientador, Prof. Dr. Rafael Aleixo de Carvalho; - Blumenau, 14:20, 09 de setembro de 2021.

83 p.

Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Curso de Licenciatura em Matemática.

Inclui referências

1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Modelagem matemática. 3. Modelo de Gilpin-Ayala. 4. Análise qualitativa. 5. Métodos numéricos. I. Prof. Dr. Rafael Aleixo de Carvalho II. Curso de Licenciatura em Matemática III. Modelos de crescimentos populacionais e competições entre espécies: uma introdução ao modelo de Gilpin-Ayala.

Eloise Clara Viegas

**MODELOS DE CRESCIMENTOS POPULACIONAIS E  
COMPETIÇÕES ENTRE ESPÉCIES: UMA  
INTRODUÇÃO AO MODELO DE GILPIN-AYALA.**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Licenciado em Matemática, e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática do Campus Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina.

Blumenau, 09 de setembro de 2021.

---

**Prof. Dr. Júlio Faria Corrêa**

Coordenador do Curso de Licenciatura em  
Matemática

**Banca Examinadora:**

---

**Prof. Dr. Rafael Aleixo de Carvalho**

Orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

---

**Prof. Dr. André Vanderlinde da Silva**

Co-orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

---

**Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Louise Reips**

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

---

**Prof. Dr. Felipe Vieira**

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

*Dedico este trabalho a minha família e a todos que contribuíram de alguma forma.*





## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus.

Aos meus pais, Marli e Vilson, pelo presente da vida e por todo carinho.

Ao meu esposo, Alex, por estar sempre ao meu lado, me dando apoio. Sou grata por todo o sacrifício que ele fez, para que eu pudesse continuar estudando.

Aos meus irmãos, Jair, Jucélia e Kauane, por tornarem essa caminhada muito mais leve. E pelas ligações telefônicas, para garantir que eu estivesse estudando.

Aos meus sobrinhos e afilhados, por serem a luz e alegria em minha vida.

Ao meu cunhado, Marlon, por ter me ajudado em um momento difícil.

A minha sogra, Otília, e minha cunhada, Ana, por me ajudarem a concluir essa etapa.

Em memória do meu padrinho, Paulo, por ter feito parte da minha vida. Mesmo com seu jeito brincalhão, sempre tinha um conselho valioso.

Aos demais familiares que contribuíram de alguma forma.

Ao meu professor e orientador, Rafael Aleixo de Carvalho, por todo conhecimento que me foi passado. Agradeço pela paciência, dedicação e disponibilidade que teve durante toda a orientação.

Ao professor André Vanderline da Silva, por aceitar o convite de contribuir na elaboração do trabalho, como co-orientador. O qual proporcionou excelentes reflexões e sugestões para o refinamento do trabalho.

Aos professores, Louise Reips e Felipe Vieira, por terem aceitado o convite de comporem a banca examinadora.

Ao professor, Eleomar, por ser minha inspiração profissional.

À todos os demais docentes da UFSC Blumenau, por todo tempo e esforço investidos para que tenhamos uma formação de qualidade.

À minha melhor amiga, Carla, por ser a minha pessoa.

Aos meus amigos, Cleison, Bryan, Bruna, Paula, Camila, Tainá e Gabriel, por todas as risadas.

Por fim, agradeço todas as pessoas que contribuíram, de alguma maneira, na minha formação acadêmica.

*“O êxito da vida não se mede pelo caminho que você conquistou, mas  
sim pelas dificuldades que superou no caminho”*

Abraham Lincoln.



## RESUMO

Neste trabalho são apresentados sistemas de equações diferenciais ordinárias, que modelam o crescimento e a competição entre espécies. Para chegarmos a esses modelos, fizemos um estudo dos conceitos básicos de equações diferenciais de primeira ordem. Primeiramente, usamos um problema populacional bem simples para introduzir a ideia de modelagem matemática, que foi aperfeiçoada ao longo do trabalho, para assim, chegarmos a modelos mais próximos da realidade, que é o caso do Modelo de Gilpin-Ayala para crescimento populacional. São feitos estudos de equações autônomas, sistemas de equações diferenciais ordinárias tanto para espécies competindo pelo mesmo recurso natural, quanto para equações predador-presa. Fizemos uma análise qualitativa para melhor compreensão do comportamento das soluções das equações diferenciais, utilizando do plano de fase e os conceitos de estabilidade e instabilidade. Resolvemos de forma computacional os problemas, usando alguns métodos numéricos.

**Palavras-chaves:** Equações diferenciais ordinárias. Modelagem matemática. Modelo de Gilpin-Ayala. Análise qualitativa. Métodos numéricos.



## ABSTRACT

In this work, systems of ordinary differential equations are presented, which model growth and competition between species. To obtain these models, we studied the basic concepts of first order differential equations. Firstly, we used a very simple population-growth problem to introduce the idea of mathematical modeling, which has been refined throughout the work, so that we can arrive at models closer to reality, which is the case of the Gilpin-Ayala model for population growth. Studies of autonomous equations, systems of ordinary differential equations are made both for species competing for the same natural resource and for predator-prey equations. We made some qualitative analysis to better understand the behavior of the solutions of the differential equations, using the phase plane and the concepts of stability and instability. We solve the problems in a computational way, using some numerical methods.

**Keywords:** Ordinary differential equations. Mathematical modeling. Gilpin-Ayala model. Qualitative analysis. Numerical methods.





## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>EQUAÇÕES DIFERENCIAIS . . . . .</b>	<b>19</b>
2.1	CLASSIFICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS . . . . .	21
2.2	SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS . . . . .	21
2.3	SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS. . . . .	28
2.4	EQUAÇÕES LINEARES E NÃO LINEARES. . . . .	29
2.5	MODELAGEM . . . . .	29
<b>3</b>	<b>EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM . . . . .</b>	<b>31</b>
3.1	EQUAÇÕES AUTÔNOMAS E DINÂMICA POPULACIONAL . . . . .	31
<b>4</b>	<b>MÉTODOS NUMÉRICOS . . . . .</b>	<b>39</b>
4.1	MÉTODO DE EULER . . . . .	39
4.2	MÉTODO DE EULER APRIMORADO . . . . .	43
4.3	MÉTODO DE RUNGE-KUTTA . . . . .	47
<b>5</b>	<b>SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS . . . . .</b>	<b>51</b>
5.1	O PLANO DE FASE: SISTEMAS LINEARES . . . . .	51
5.2	SISTEMAS AUTÔNOMOS E ESTABILIDADE . . . . .	60
5.3	SISTEMA DE EQUAÇÕES: ESPÉCIES EM COMPETIÇÃO . . . . .	63
5.4	EQUAÇÕES PREDADOR-PRESA . . . . .	64
<b>6</b>	<b>MODELO DE GILPIN-AYALA PARA CRESCIMENTO POPULACIONAL . . . . .</b>	<b>73</b>
6.1	O MODELO DE DINÂMICA POPULACIONAL DE GILPIN-AYALA . . . . .	73
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>81</b>

<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>83</b>
------------------------------	-----------

# 1 INTRODUÇÃO

O estudo das equações diferenciais teve início com Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz no século XVII. Mesmo Newton não tendo atuado diretamente na área de equações diferenciais, o desenvolvimento dos princípios da mecânica forneceu a base para a aplicação das equações diferenciais. Já Leibniz, no fim do século XVII, descobriu o método de separação de variáveis, que resolve inúmeras equações diferenciais. Ele também introduziu a notação de derivada  $dy/dt$  e o sinal de integral como conhecemos hoje.

O renomado matemático do século XVIII, Leonhard Euler, que foi aluno de Johann Bernoulli, tinha interesse em muitas áreas da matemática e suas aplicações. No ano de 1743, em um de seus artigos, identificou a solução geral das equações lineares homogêneas com coeficientes constantes. Já em meados de 1750, estendeu esse resultado para as equações lineares não homogêneas. Por fim, o conhecido método numérico que ganhou seu nome, foi desenvolvido por volta de 1768.

No século XX, foram criados métodos geométricos que possibilitaram o estudo qualitativo das soluções de equações diferenciais não lineares. Essas técnicas permitem analisar o comportamento das soluções, sem precisar resolver de fato as equações diferenciais, algo útil nos casos em que não é possível determinar a solução explicitamente.

Em torno de 1900, mesmo com o desenvolvimento de métodos de integração, havia um grande empecilho para a implementação numérica, a saber, o fato de que os equipamentos computacionais serem pouco aperfeiçoados. Além disso, outro obstáculo encontrado era o próprio costume de fazer os cálculos manualmente.

Após esse breve relato histórico envolvendo o desenvolvimento de equações diferenciais, o objeto de nosso estudo, cabe descrever o mapeamento deste trabalho segundo suas divisões por capítulos. Neste sentido, abordaremos no Capítulo 2 alguns conceitos fundamentais sobre as equações diferenciais e apresentaremos um exem-

plo que modela a competição entre espécies. Convém ressaltar que, embora, nesse capítulo, sejam expressas soluções analíticas para as equações diferenciais lineares, ao abordarmos as equações diferenciais não lineares será preciso fazer uso de métodos numéricos que mencionaremos nos capítulos posteriores.

No Capítulo 3, veremos a aplicação das equações autônomas no contexto da dinâmica populacional. O processo de modelagem usando esse tipo de equação fornece uma base para estudos posteriores de modelos descritos por sistemas de equações diferenciais. Tais modelos traduzem com mais detalhes o crescimento populacional e competição entre espécies, como é o caso do modelo de Lotka-Volterra e o de Gilpin-Ayala.

No Capítulo 4, trataremos sobre os métodos numéricos usados nas implementações numéricas para resolver os sistemas de equações diferenciais contidas neste trabalho. Os métodos de aproximação numérica aqui abordados são: Euler, Euler aprimorado e Runge-Kutta de quarta ordem.

No Capítulo 5, abordaremos o estudo qualitativo das equações diferenciais. Em sequência, estudaremos os sistemas de equações diferenciais e analisaremos a modelagem de problemas em que as espécies competem pelo mesmo recurso natural. Em particular, para o sistema Predador-Presa apresentaremos um exemplo com implementação numérica usando o software MATLAB.

Por fim, no Capítulo 6 estudaremos o modelo de Gilpin-Ayala, um sistema de equações diferenciais que modela o comportamento da interação entre as espécies. Consideraremos o caso de duas espécies de *Drosophila* (mosca-da-fruta) que competem pela mesma fonte de alimento e resolveremos computacionalmente usando o método de Runge-Kutta.

## 2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Neste capítulo, iniciamos o estudo de conceitos fundamentais e necessários para que sejamos capazes de compreender e interpretar situações em que haja interações entre espécies. Problemas matemáticos dessa natureza podem ser traduzidos como relações, que envolvem algum tipo de taxa, podendo ser de crescimento ou decréscimo, por exemplo, a depender da situação, das observações e de diferentes fatores.

Em linguagem matemática, as equações representam relações e as derivadas representam taxas. As equações que contém derivadas são chamadas de **Equações Diferenciais**. Quando esse tipo de equação é usada para descrever algum fenômeno, por exemplo, o crescimento populacional, chamamos esse processo de **Modelo Matemático**.

A primeira tentativa de fazer um modelo de crescimento populacional humano foi feita em 1798, pelo economista Thomas Malthus. O modelo Malthusiano considera que a taxa de crescimento de uma população em um determinado instante de tempo é proporcional à população total. Isso é o mesmo que, quanto mais pessoas houver em um determinado instante de tempo, mais pessoas teremos com o passar do tempo. Esse modelo se traduz pela equação (2.1).

Pensando em contextos reais, o modelo Malthusiano é indicado apenas para modelar o crescimento de populações pequenas em um curto intervalo de tempo, pois é um modelo que não descreve muito bem o complexo cenário do crescimento populacional. O modelo não leva em conta muitos fatores que interferem no crescimento populacional, e que podem ser significativos em um intervalo maior de tempo. Esses fatores em questão, podem ser, por exemplo, a falta de recursos naturais necessários para que a população continue a crescer, a capacidade de um ambiente suportar a população, o crescimento populacional de algum predador, entre outros.

Vejam, a seguir, um exemplo de modelo matemático, em que a equação diferencial traduz um crescimento populacional.

**Exemplo 2.1.** Ratos do Campo e Corujas. [3, pág. 4]

Para este exemplo, consideramos uma população de ratos do campo como sendo as presas. Particularmente, podemos perceber que, se houver ausência de predadores, no caso, as corujas, a população de ratos crescerá com uma taxa proporcional à população atual. Considerando o tempo  $t$  e a população de ratos  $p(t)$ , o crescimento populacional será expresso pela equação

$$\frac{dp}{dt} = rp, \quad (2.1)$$

em que o fator de proporcionalidade  $r$  é dito **taxa de crescimento**. Supomos que a taxa  $r$  tem valor de 0,5 por mês, e que haja corujas na vizinhança que alimentam-se de 15 ratos do campo por dia. Para incluir essa hipótese no modelo, precisamos acrescentar outro termo à equação (2.1), ficando

$$\frac{dp}{dt} = 0,5p - 450. \quad (2.2)$$

Pelo fato da taxa de crescimento estar sendo medida em meses, o termo associado à ação dos predadores é -450. O sinal de menos se dá por conta do predador interferir negativamente no crescimento da população de presas, ou seja, se refere à taxa predatória mensal. O valor dessa taxa é considerado alto ou não dependendo do número de presas. Por exemplo, quando a população de presas é pequena, o valor dessa taxa é considerada alta, pois pode facilmente levar a população de ratos à extinção.

Por outro lado, se a população de presas for suficientemente grande ao ponto de compensar a ação do predador, essa taxa que representa a quantidade de ratos que as corujas se alimentam mensalmente, será quase insignificante se comparar com o número ilimitado de presas. Abordaremos com mais detalhes esse assunto na Seção 2.2.

## 2.1 CLASSIFICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As equações diferenciais são equações que envolvem as derivadas de uma função que pode depender de uma ou mais variáveis. Quando a equação diferencial contém derivadas de uma, ou mais variáveis dependentes, em relação a uma única variável independente, classificamos como **Equação Diferencial Ordinária**. Por exemplo, são desse tipo as seguintes equações

$$\frac{dy}{dt} + 5y = e^t,$$

$$\frac{dy}{dt} = y^2,$$

em que  $t$  é a variável independente e  $y(t)$  a variável dependente. As equações (2.1) e (2.2) usadas anteriormente, também são exemplos de equações diferenciais ordinárias.

As equações diferenciais ordinárias, também denotadas por **EDOs**, são usadas com muita frequência para descrever fenômenos da natureza tais como o crescimento populacional de espécies de insetos, a disseminação de uma doença em uma dada população, etc.

Uma equação envolvendo funções de várias variáveis independentes e dependente de suas derivadas parciais é dita **Equação Diferencial Parcial**. Por exemplo, são equações do tipo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Neste trabalho, não faremos o estudo de equações diferenciais parciais, pois os modelos matemáticos que serão apresentados aqui envolvem apenas equações diferenciais ordinárias.

## 2.2 SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O esperado para um modelo matemático é que possamos prever informações importantes a respeito de uma situação problema que queremos investigar. Nosso interesse pode ser, por exemplo,

prever se uma população sobreviverá em um ambiente com recursos limitados ou prever o comportamento de uma população depois de um certo tempo. Esses aspectos nos levam a pensar que um modelo matemático, o qual, na maioria das vezes, é construído com a intenção de representar um cenário real ou próximo da realidade, deve fornecer respostas satisfatórias para questões que foram norteadoras no momento da construção do modelo. Mais adiante, com o auxílio de métodos numéricos, serão feitas discussões sobre o que caracteriza uma resposta satisfatória.

O resultado para um modelo matemático nada mais é que resolver a equação diferencial que modela um problema. No entanto, não são todas as equações diferenciais que podem ser resolvidas de forma analítica e muitos dos resultados serão aproximações dos valores reais que serão obtidos, em seções posteriores, por meio de implementações numéricas.

A **solução** de uma equação diferencial de ordem  $n$

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

definida no intervalo  $\alpha < t < \beta$ , é uma função  $\phi$  que depende do tempo  $t$  e as derivadas  $\phi', \phi'', \dots, \phi^{(n)}$  satisfazem

$$\phi^{(n)}(t) = f[t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(n-1)}(t)],$$

para todo  $t$  no intervalo  $\alpha < t < \beta$ . Supomos que as soluções sejam valores reais  $y = \phi(t)$ . Podemos ainda verificar se a função encontrada é de fato uma solução e para isso basta substituir a função na equação diferencial, e analisar se ambos os lados da igualdade é satisfeito para cada  $t$  no intervalo definido.

**Exemplo 2.2.** Para o modelo de crescimento populacional do Exemplo 2.1, dos ratos do campo e as corujas, é possível encontrar soluções quantitativas usando alguns conceitos de cálculo. Considerando a equação diferencial

$$\frac{dp}{dt} = 0,5p - 450.$$

Se  $p \neq 900$ ,

$$\frac{dp/dt}{p - 900} = \frac{1}{2}.$$



Usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{d}{dt} \ln|p - 900| = \frac{1}{2}.$$

Integrando a equação anterior, temos

$$\ln|p - 900| = \frac{t}{2} + c.$$

Aplicando a exponencial em ambos os lados da equação,

$$|p - 900| = e^{(t/2)+c},$$

ou

$$p - 900 = \pm e^c e^{t/2}.$$

Finalmente, chegamos a função que representa todas as soluções

$$p(t) = 900 + ce^{t/2}. \quad (2.3)$$

Como o processo de obtenção da solução envolve integração, teremos uma constante arbitrária, que gera uma infinidade de soluções. No entanto, se nosso interesse for em uma solução em específico, teremos que determinar um valor para a constante  $c$ . Para isso devemos atribuir uma quantidade de elementos para a população em um determinado instante. Supomos o caso em que haja 800 ratos no instante  $t = 0$ . Assim

$$p(0) = 800$$

e, substituindo na equação (2.3), obtemos

$$800 = 900 + c.$$

Logo,  $c = -100$ , resultando em

$$p(t) = 900 - 100e^{t/2}.$$

Os valores atribuídos à população no instante zero (inicial) para determinar a constante  $c$  são conhecidos como **condições iniciais**. Para cada dado inicial, teremos uma solução que depende do tempo. A equação diferencial acompanhada da condição inicial formam o que chamamos de **problema de valor inicial**.

Quando  $y = \phi(t)$  for uma função constante, na qual a variável dependente sempre admitirá o mesmo valor, ou seja, a solução é a mesma para qualquer instante de tempo, dizemos que  $y = \phi(t)$  é uma **solução equilíbrio**. A solução de equilíbrio auxilia na compreensão do comportamento das demais soluções da equação diferencial separando, por exemplo, as soluções crescentes das decrescentes.

**Campos de direções.** São recursos importantes para o estudo das soluções de equações diferenciais da forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (2.4)$$

em que  $f$  é dita **função taxa** dada, nesse caso, por duas variáveis,  $t$  e  $y$ . O campo de direções pode ser construído calculando a função  $f$  em diferentes pontos no plano  $ty$ , como podemos ver na Figura 2.1. Em cada ponto  $(t, y)$ , traça-se um segmento de reta que é tangente ao gráfico de uma solução. A inclinação desse segmento de reta é o valor da primeira derivada  $dy/dt$  calculada no ponto  $(t, y)$ .

Visualmente, o campo de direções indica a aparência das curvas soluções, e pode nos fornecer informações qualitativas das soluções como, por exemplo, se as soluções são crescentes ou decrescentes a partir de um valor, se as soluções tendem ou não para o infinito com o passar do tempo, entre outras informações.

**Exemplo 2.3.** Usando a equação do exemplo dos ratos do campo e as corujas dada por

$$\frac{dp}{dt} = 0,5p - 450,$$

representaremos seu campo de direções.

É possível observar na Figura 2.1 que, para valores suficientemente grandes de  $p$ , a solução será crescente e ilimitada, já quando  $p$  for pequeno, a solução decresce tendendo à extinção. A solução equilíbrio é  $p = 900$  que separa as soluções crescentes das decrescentes e a população de ratos consegue manter essa mesma quantidade de indivíduos para qualquer instante de tempo.

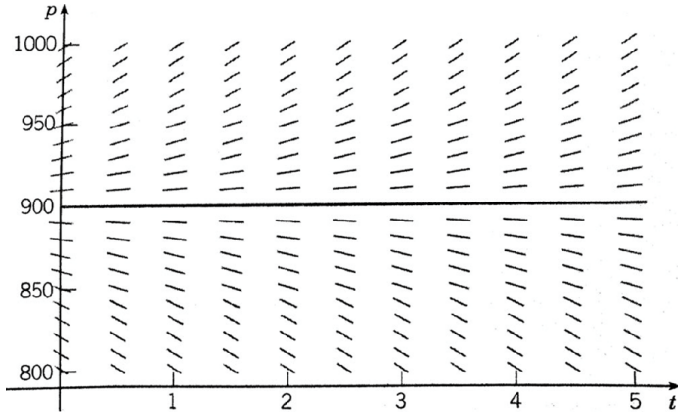


Figura 2.1 – Campo de direção com solução equilíbrio.[3]

A partir desse momento discutiremos, a existência e unicidade para problemas de valor inicial (PVI) da seguinte forma

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad (2.5)$$

ditos de primeira ordem, em que  $y(t_0) = y_0$  é a condição inicial. Enunciaremos um teorema que garante, sob determinadas condições, que o PVI (2.5) tem uma única solução em algum intervalo que contenha o ponto  $t_0$ . Este teorema será útil para garantir que um problema de valor inicial tem solução e que essa solução é única, isso tudo antes mesmo de tentar resolver o PVI.

**Teorema 2.1.** *Considere o problema (2.5) e suponha que as funções  $f$  e  $\partial f/\partial y$  sejam contínuas em um retângulo  $\alpha < t < \beta$ ,  $\gamma < y < \delta$  que contém o ponto  $(t_0, y_0)$ . Então, existe algum intervalo  $t_0 - h < t < t_0 + h$ , contido em  $\alpha < t < \beta$ , em que existe uma única solução para (2.5).*

Não faremos a demonstração desse teorema, pois foge do escopo deste trabalho. A ideia da demonstração pode ser encontrada em [3, pág. 86].

Sobre a unicidade, podemos garantir geometricamente que os gráficos de duas soluções de uma mesma equação diferencial, sujeitas a condições iniciais diferentes, não podem se intersectar. Caso

isso ocorresse, teríamos duas soluções que satisfazem a condição inicial do ponto de interseção, contradizendo o Teorema 2.1.

Exibiremos um exemplo ao qual se aplica o Teorema de Existência e Unicidade e apresentamos a solução e o intervalo de existência.

**Exemplo 2.4.** Resolveremos o problema de valor inicial

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1, \quad (2.6)$$

e determinaremos o intervalo em que a solução existe.

Do Teorema 2.1, temos que este problema tem solução única, pois  $f(t, y) = y^2$  e  $\partial f / \partial y = 2y$  são contínuas em qualquer retângulo em  $\mathbb{R}^2$ . Para obter a solução, podemos separar as variáveis,

$$y^{-2} dy = dt,$$

em, em seguida, integramos, ficando

$$-y^{-1} = t + c.$$

Resolvendo para  $y$ , temos

$$y = -\frac{1}{t + c}.$$

Para que a condição inicial seja satisfeita, devemos escolher  $c = -1$ , de forma que

$$y = \frac{1}{1 - t},$$

é a solução do problema de valor inicial (2.6). Podemos notar que a solução é ilimitada para  $t \rightarrow 1$  e, portanto, o intervalo de existência de solução é  $-\infty < t < 1$ .

As condições enunciadas no Teorema 2.1 são suficientes, mas não necessárias para garantir a existência e unicidade da solução do problema de valor inicial. A existência pode ser estabelecida supondo apenas a continuidade de  $f$ . Vejamos um exemplo em que isso se aplica.

**Exemplo 2.5.** Consideremos o problema de valor inicial

$$y' = y^{\frac{1}{3}}, \quad y(0) = 0, \quad (2.7)$$

para  $t \geq 0$ . Analisando as hipóteses do Teorema 2.1, temos que a função  $f(t, y) = y^{\frac{1}{3}}$  é contínua em qualquer retângulo, mas  $\partial f/\partial y$  não existe em  $y = 0$ , ou seja,  $\partial f/\partial y$  é descontínua em  $y=0$ . Sendo assim, o Teorema de Existência e Unicidade não se aplica a esse problema. Porém, a continuidade de  $f$  é suficiente para garantir a existência de soluções.

Apresentando uma possível solução do problema, conseguimos compreender melhor a situação que envolve apenas a existência de solução. Considere

$$y = \left[\frac{2}{3}(t + c)\right]^{\frac{3}{2}},$$

em que  $c$  é uma constante. Para que a condição inicial seja satisfeita, precisamos que  $c = 0$ , isto é,

$$y = \phi_1(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}, \quad t \geq 0.$$

Perceba que a solução obtida acima satisfaz a equação (2.7). Igualmente, temos que a função

$$y = \phi_2(t) = -\left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}, \quad t \geq 0,$$

também é solução para o problema de valor inicial. E, além disso, a função

$$y = \psi(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

é mais uma solução. Dessa forma, chegamos ao fato de que as funções

$$y = \chi(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_0 \\ \pm \left[\frac{2}{3}(t - t_0)\right]^{\frac{3}{2}}, & t \geq t_0 \end{cases},$$

são contínuas, diferenciáveis (em particular, para o ponto inicial  $t = t_0$ ) e soluções do problema de valor inicial (2.7). A falta de unicidade de solução não contradiz o Teorema de Existência e Unicidade, pois a condição inicial pertence ao eixo  $t$  e ele não é aplicável para esse caso.

Para algumas equações diferenciais podemos obter informações quantitativas, ou seja, a equação diferencial é resolvida de fato, e conseguimos encontrar uma função que descreve as soluções. Porém, não são todas as equações diferenciais para as quais conseguimos chegar a essa função. Algumas equações diferenciais são mais complexas e não há uma metodologia para resolvê-las. Para esses casos, veremos mais adiante formas de obter aproximações para as respectivas soluções.

### 2.3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.

Até o momento, vimos equações que envolvem as derivadas de uma única função desconhecida, ou seja

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$

em que  $f$  é a função com variáveis  $t$  e  $y$ .

Porém, para modelos matemáticos mais sofisticados, precisaremos determinar mais de uma função na construção do modelo e, para isso, necessitamos de mais de uma equação diferencial. Para o caso de sistemas de duas equações diferenciais, em que  $f$  e  $g$  são funções de  $x$ ,  $y$ ,  $t$ , e com  $x$  e  $y$  dependem de  $t$ , pode ser dado por

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t, x, y).$$

Por exemplo, o sistema de equações predador-presa tem a seguinte forma

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \sigma xy,$$

em que  $x(t)$  é a população de presa e  $y(t)$  a de predador. Já  $a$ ,  $\alpha$ ,  $c$  e  $\sigma$  são constantes baseadas em observações e dependem das espécies em estudo. Analisaremos detalhadamente esse sistema mais adiante.

## 2.4 EQUAÇÕES LINEARES E NÃO LINEARES.

A equação diferencial ordinária, da forma

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

é classificada como **linear** se  $F$  for uma função linear das variáveis  $y, y', \dots, y^{(n)}$ . A forma geral da equação diferencial ordinária linear de ordem  $n$  é

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t). \quad (2.8)$$

As equações do modelo para ratos e as corujas vistas anteriormente são exemplos de equações diferenciais ordinárias lineares. As equações que não têm a forma (2.8) são ditas **não lineares**. Por exemplo, uma equação do tipo

$$y''' + e^t y'' + yy' = t^4,$$

devido à expressão  $yy'$ , é não linear.

## 2.5 MODELAGEM

A construção de modelos matemáticos é baseada em traduzir uma situação física, por exemplo, em expressões matemáticas. Devemos, porém, tomar cuidado para enunciar corretamente tais princípios físicos que governam o processo. E não esquecer que as equações são apenas aproximações do processo real. Por exemplo, populações de insetos não crescem indefinidamente, temos que levar em conta algumas limitações como comida ou espaço.

Para tornar o problema tratável matematicamente, algumas vezes é necessário fazer aproximações e examiná-las para que haja a certeza de que o problema ainda tem as características do processo investigado. Um dos aspectos mais importantes é verificar se o comportamento da solução, após um longo período de tempo, é compatível com as observações. E o simples fato da solução matemática aparentar ser razoável não garante que esteja correta e iremos discorrer mais sobre isso ao longo do trabalho.

**Computadores no estudo de equações diferenciais.** Os computadores são uma ótima ferramenta que nos auxiliam no estudo e resolução de equações diferenciais. Podemos construir algoritmos para resolver diferentes tipos de equações diferenciais, principalmente para obter aproximações numéricas das equações que não podem ser resolvidas analiticamente.

Através da simulação numérica, podemos obter soluções em forma de gráfico, tornando a interpretação mais rica. Por exemplo, no sistema de equações predador-presa, abordado anteriormente, a interpretação gráfica é muito útil pois, podemos trabalhar no programa com diferentes quantidades para o predador e para a presa, entre outras variáveis, estudando diferentes cenários e possibilidades. Na Seção 5.3, apresentaremos um problema e usaremos métodos numéricos para obter as soluções. As informações obtidas com os métodos serão representadas graficamente.



### 3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Este capítulo é dedicado para o estudo de uma certa classificação de equações diferenciais que será usada no contexto de dinâmica populacional, nos quais, exibiremos diferentes modelos matemáticos que descrevem o crescimento e a competição entre espécies.

#### 3.1 EQUAÇÕES AUTÔNOMAS E DINÂMICA POPULACIONAL

Equações diferenciais de primeira ordem em que a variável independente não aparece explicitamente são chamadas de **equações autônomas**, e são da forma

$$\frac{dy}{dt} = f(y).$$

Usamos as equações diferenciais autônomas no contexto de dinâmica populacional, um campo de estudo que possibilita explorar o comportamento de diferentes espécies. O crescimento populacional pode ser influenciado por alguns fatores como a competição por recursos naturais, a presença de predadores, fatores econômicos, climáticos, doenças entre outras questões. Esses fatores são levados em conta na modelagem dos problemas e são acrescentados diretamente nas equações diferenciais autônomas, como veremos a partir deste momento.

**Crescimento Exponencial.** Seja  $y(t)$  o tamanho da população no instante  $t$ . Assumiremos que a taxa de variação de  $y$  é proporcional ao valor atual de  $y$ , isto é,

$$\frac{dy}{dt} = ry, \tag{3.1}$$

em que a constante  $r$  é a **taxa de crescimento**. Resolvendo a equação (3.1) com a condição inicial

$$y(0) = y_0,$$

ficamos com

$$y = y_0 e^{rt}.$$

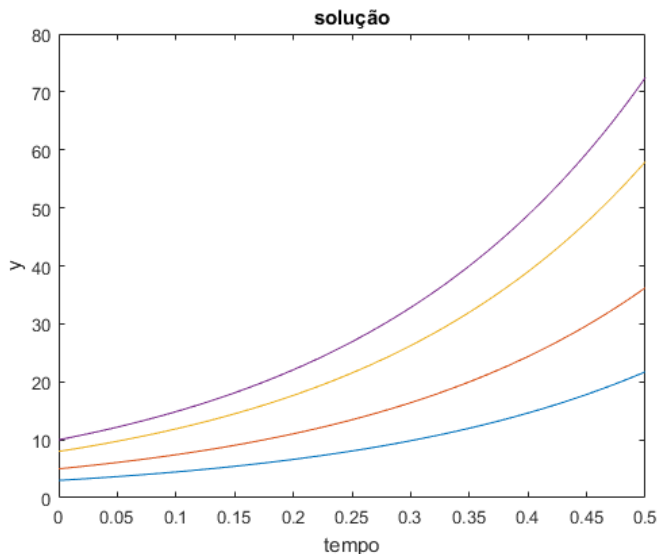


Figura 3.1 – Crescimento exponencial. Fonte: A autora.

O modelo de crescimento exponencial nos garante que quando  $r > 0$ , a população irá crescer exponencialmente, como está representado na Figura 3.1, e para cada condição inicial teremos uma única solução que a satisfaz. No entanto, esse modelo é indicado para problemas em que o período de tempo a ser analisado é curto, pois, em algum momento, aspectos como espaço, alimento ou outros recursos podem reduzir a taxa de crescimento e afetar no crescimento exponencial.

**Crescimento logístico.** Quando analisamos a taxa de crescimento de uma determinada população, devemos levar em conta que essa taxa depende diretamente da população. Nesse caso, podemos substituir a constante  $r$  da equação (3.1) por uma função  $h(y)$ , obtendo

$$\frac{dy}{dt} = h(y)y. \quad (3.2)$$

A função  $h$  que usaremos deve traduzir a taxa de crescimento da população, ou seja,  $h(y) \cong r > 0$ . Para facilitar a busca por essa função, pensemos na situação em que a população em questão é mantida em um ambiente onde a comida é limitada. Nesse caso, o crescimento populacional também será limitado, já que a comida é um recurso necessário para a sobrevivência da espécie. Se um recurso é limitado, a população não pode ter um número de indivíduos em que esse recurso não seja capaz de suportar. Logo, a função deve respeitar os critérios de que, quando  $y$  aumenta,  $h(y)$  diminui e quando  $y$  é suficientemente grande,  $h(y) < 0$ , ou seja, a medida que a população aumenta, a comida diminui e se a população for muito grande, a comida não será suficiente, fazendo com que alguns indivíduos pereçam. Uma função com essas propriedades é  $h(y) = r - ay$ , em que  $a$  é uma constante positiva.

Substituindo a função na equação (3.2), obtemos

$$\frac{dy}{dt} = (r - ay)y,$$

conhecida como **equação logística**, a qual pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K}\right) y, \quad (3.3)$$

em que  $K = r/a$ . A constante  $r$  é dita **taxa de crescimento intrínseca**, ou seja, a taxa de crescimento sem qualquer fator limitante.

A forma mais simples de encontrar soluções para a equação (3.3) é considerar  $\frac{dy}{dt} = 0$ , para todo  $t$ . Disso segue que qualquer solução constante satisfaz a equação algébrica

$$r \left(1 - \frac{y}{K}\right) y = 0.$$

Perceba que as soluções  $y = \phi_1(t) = 0$  e  $y = \phi_2(t) = K$  são **soluções de equilíbrio**. A constante  $K$  representa a **capacidade de sustentação ambiental**, ou o **nível de saturação**, para a espécie em estudo.

As soluções de uma equação logística são conhecidas como **funções logísticas**. Os gráficos dessas funções estão representados na Figura 3.2 em que cada solução é chamada de **curva logística**. Tais

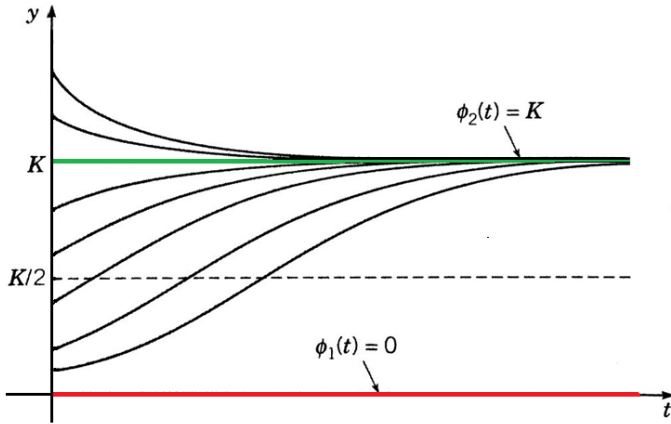


Figura 3.2 – Crescimento logístico. [3]

curvas se mostram bem eficazes em modelos de crescimento populacional, em espaços limitados, como, por exemplo, alguns tipos de bactérias, pulga-d'água (*Daphnia*) e a mosca-da-fruta (*Drosophila*).

Para estimar o número de elementos da população em um determinado instante, precisamos resolver a equação (3.3) com a condição inicial  $y(0) = y_0$ . Se considerarmos que  $y \neq 0$  e  $y \neq K$ , podemos escrever a equação da forma

$$\frac{dy}{\left(1 - \frac{y}{K}\right)y} = r dt.$$

Integrando a equação acima usando a estratégia de frações parciais para o lado esquerdo da igualdade e, aplicando a exponencial em ambos os lados, ficamos com

$$\frac{y}{1 - \left(\frac{y}{K}\right)} = ce^{rt}.$$

Para a condição inicial ser satisfeita, devemos considerar  $c = y_0/[1 - (y_0/K)]$  e, com esse resultado, obtemos

$$y = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}.$$

Considerando o fato de que  $0 < y_0 < K$  e tomando o limite de  $y(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$ , a equação acima fica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{y_0 K}{y_0} = K.$$

Dessa forma, para  $y_0 > 0$ , a solução tende à  $y = \phi_2(t) = K$  quando  $t \rightarrow \infty$ , e é chamada de **solução assintoticamente estável**. Isso significa que independentemente do tamanho da população inicial, desde que seja positivo, a partir de um certo valor de  $t$ , a população estará próxima da capacidade de sustentação ambiental  $K$ .

Já para o caso da solução de equilíbrio  $y = \phi_1(t) = 0$ , a situação é bem diferente. Mesmo para soluções que começam próximas de zero, como vimos, tenderão a  $K$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Em outras palavras, somente para o caso em que o valor inicial é exatamente zero, teremos a garantia de que a solução permaneça próxima de zero. Dizemos então, que essa solução é uma **solução de equilíbrio instável**.

Mostraremos, em seguida, um exemplo que envolve o modelo de crescimento logístico e nos permitirá obter a solução para um dado inicial e analisar o intervalo em que essa solução existe.

### **Exemplo 3.1.** Linguados Gigantes

Aplicamos o modelo logístico ao crescimento da população de linguados gigantes de algumas áreas do Oceano Pacífico. Consideremos  $y$  a biomassa, medido em quilogramas, da população de linguados gigantes. Os valores para os parâmetros da equação logística foram estimados por H. S. Mohring [4] em  $r = 0,71$  por ano e  $K = 80,5 \times 10^6$  kg. Para uma biomassa inicial de  $y_0 = 0,25K$ , qual será a biomassa da população de linguados gigantes depois de dois anos?

Para resolver a esse problema, podemos usar o resultado obtido anteriormente, ou seja,

$$y(t) = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}.$$

Usando as informações do problema, temos

$$y(2) = \frac{(0,25K)K}{0,25K + (K - 0,25K)e^{-0,71 \cdot 2}},$$

e manipulando a equação da seguinte forma

$$\frac{y(2)}{K} = \frac{0,25K}{0,25K + (K - 0,25K)e^{-1,42}} \left(\frac{1}{K}\right),$$

obtemos

$$\frac{y(2)}{K} = \frac{0,25}{0,25 + 0,75e^{-1,42}} \approx 0,5797.$$

Portanto,  $y(2) \approx 46,7 \times 10^6$ kg. Isso significa que a biomassa de linguados será de 46700000 kg após dois anos.

**Um Limiar Crítico.** Consideremos a equação

$$\frac{dy}{dt} = -r \left(1 - \frac{y}{T}\right) y,$$

em que  $T$  e  $r$  são constantes positivas dadas. Essa equação é bem semelhante à equação logística, a não ser pelo sinal de menos e a substituição de  $K$  por  $T$ . Porém, o comportamento das soluções são diferentes.

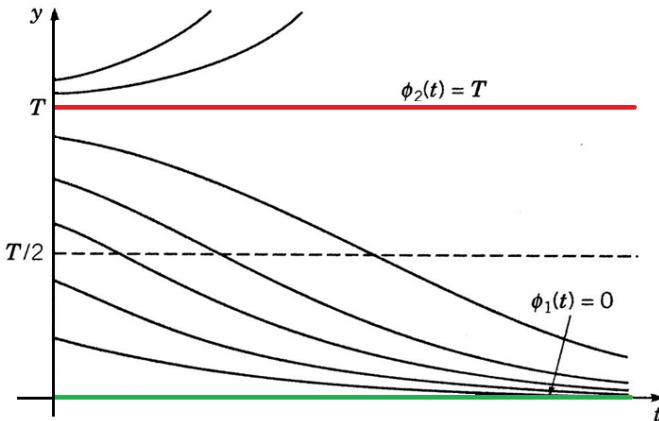


Figura 3.3 – Crescimento com limiar crítico. [3]

Se  $0 < y < T$ , teremos  $\frac{dy}{dt} < 0$  e  $y$  será decrescente em relação a  $t$ . Já para  $y > T$ , teremos  $\frac{dy}{dt} > 0$  e  $y$  será crescente em relação a  $t$ . E, como podemos ver na Figura 3.3,  $\phi_1(t) = 0$  é uma solução de equilíbrio assintoticamente estável. Isso quer dizer que todas as soluções dentro do intervalo  $0 < y < T$  tendem a zero. Vemos também que  $\phi_2(t) = T$  é instável, ou seja, todas as soluções se afastam de  $T$  não importa o quão perto o ponto esteja. Dessa forma, com o aumento de  $t$ , podemos obter um  $y$  que crescerá indefinidamente ou tenderá a zero, dependendo da condição inicial  $y_0$  ser maior ou menor que  $T$ . Portanto,  $T$  é chamado de **limiar** e, abaixo desse valor, não há crescimento.

Quando a população de uma determinada espécie exibe as características de um limiar crítico em seu crescimento, a população não conseguirá se propagar com sucesso se o limiar for maior que a população, fazendo com que a espécie tenda à extinção. E quando o limiar for menor que a população, nesse caso, a população crescerá ilimitadamente.

**Crescimento Logístico com Limiar.** O modelo apresentado anteriormente com limiar pode ser modificado a fim de evitar o crescimento ilimitado quando  $y$  é maior que o limiar  $T$ . Para isso, introduziremos outro fator que fará  $\frac{dy}{dt}$  ser negativo para  $y$  grande. Consideremos, então,

$$\frac{dy}{dt} = -r \left(1 - \frac{y}{T}\right) \left(1 - \frac{y}{K}\right) y,$$

em que  $0 < T < K$  e  $r > 0$ .

Analisando o comportamento das curvas soluções, como  $\frac{dy}{dt} > 0$  para  $T < y < K$ , temos que  $y$  será crescente nesse intervalo. Já nos intervalos em que  $y < T$  e  $y > K$ , temos que  $\frac{dy}{dt} < 0$  e os valores de  $y$  são decrescentes nesses intervalos. Das soluções de equilíbrio, temos que  $\phi_1(t) = 0$  e  $\phi_3(t) = K$  são assintoticamente estáveis, e a solução  $\phi_2(t) = T$  é instável, como podemos ver no gráfico abaixo.

O estudo de dinâmica populacional feito nesse capítulo junto

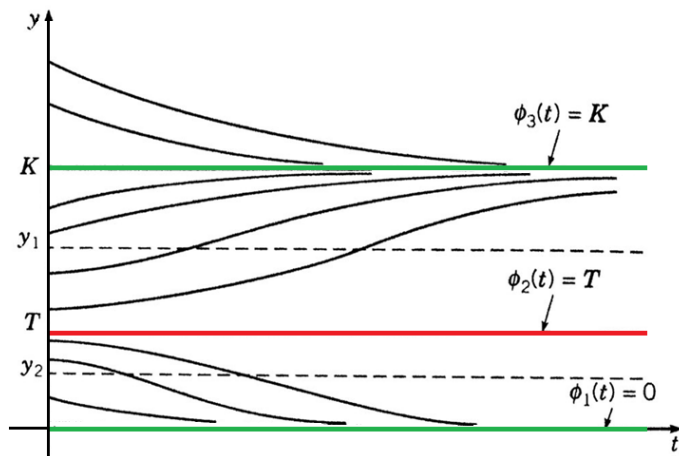


Figura 3.4 – Crescimento Logístico com Limiar. [3]

com o Teorema de Existência e Unicidade nos permite entender os diferentes tipos de crescimento populacional. Além disso, tal estudo oferece ferramentas que possibilitam fazer análises qualitativas das soluções, principalmente por meio das representações gráficas. Tudo isso nos auxiliará em modelos mais complexos, em especial, o Modelo de Gilpin-Ayala que é objetivo final deste trabalho.



## 4 MÉTODOS NUMÉRICOS

Vimos, ao longo desse trabalho, o Teorema 2.1 que garante a existência e unicidade de solução para problemas de valor inicial. Mas, sabemos que em muitos casos não é possível expressar de forma analítica a solução do PVI. Quando isso acontece, devemos procurar soluções que sejam próximas das soluções reais e que descrevam de forma satisfatória o problema original. Com o objetivo de obter essas aproximações, utilizaremos métodos numéricos.

Na literatura encontramos diversos métodos numéricos para a resolução numérica de equações diferenciais ordinárias. Neste capítulo, estudamos apenas os **métodos de passo simples**. Esses métodos consistem em, dado um PVI

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

construir os passos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  que, nesse trabalho, serão igualmente espaçados, ou seja,  $t_{i+1} - t_i = h$ , em que  $i = 0, 1, \dots, n$  e  $h$  é normalmente indicado como tamanho do passo. Os métodos de passo simples usam apenas o ponto anterior para obtermos o próximo.

Começaremos nossos estudos com um dos métodos mais simples, o conhecido Método de Euler ou Método da reta tangente, desenvolvido por Leonhard Euler. Em seguida, veremos o Método de Euler aprimorado e, por fim, apresentaremos o Método de Runge Kutta de quarta ordem.

### 4.1 MÉTODO DE EULER

Uma maneira de apresentar informações sobre o problema é esboçar seu campo de direções. No entanto, essa estratégia não nos fornece informações quantitativas, já que não resolvemos de fato a equação diferencial.

Mesmo que os campos de direções não nos forneçam informações quantitativas, ele nos ajuda a entender o comportamento

das soluções para problemas de valores iniciais. As direções podem ser vistas como aproximações das soluções, e é basicamente nessa ideia do uso de retas tangentes que o Método de Euler consiste.

A fórmula do Método de Euler pode ser deduzida usando a expansão em Séries de Taylor de primeira ordem da função solução  $y(t)$  na vizinhança do ponto  $t_n$ . Uma vez que a Série de Taylor<sup>1</sup> é dada por

$$y(t_n + h) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2!}y''(t_n) + \dots,$$

truncando a série na primeira derivada, obtemos a expressão geral para a reta tangente

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)(t_{n+1} - t_n),$$

em que  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Considerando  $h$  o tamanho do passo, se for constante, então  $t_{n+1} = t_n + h$ , para cada  $n$ , ficando

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n). \quad (4.1)$$

Dizemos que esta é uma equação **explícita** para  $y_{n+1}$ , pois seus termos do lado direito da igualdade dependem apenas de  $y_n$ .

O Método de Euler (4.1), por conta de ser um truncamento da Série de Taylor, o qual desconsidera as demais parcelas da série, faz com que a fórmula forneça soluções aproximadas. Isso nos permite analisar a possibilidade de construir métodos mais precisos usando uma quantidade maior de parcelas da série. No entanto, para algumas equações diferenciais, o Método de Euler já é suficiente e pode ser usado dependendo da tolerância do erro.

Na prática, muitas das vezes, não sabemos a solução exata do PVI e, por esse motivo, fazemos o uso de um método numérico, o

<sup>1</sup> A Série de Taylor é um tipo específico de série de potência, da função analítica  $f(t)$  em uma vizinhança do ponto  $t_0$ , que pode ser escrita como,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n$$

a qual converge para  $f$ , num intervalo  $|t - t_0| < R$ .

que nos leva a necessidade de determinar uma expressão matemática para os erros cometidos com as aproximações numéricas.

**Erros em Aproximações Numéricas** Existem erros ao se resolver um problema de valor inicial numericamente. Um deles é  $E_n$ , dado por

$$E_n = \phi(t_n) - y_n,$$

conhecido como **erro de truncamento global**.

Se considerarmos que  $y_n = \phi(t_n)$ , o erro que teremos em cada passo será devido ao método numérico escolhido. Esse erro é conhecido como **erro de truncamento local**  $\epsilon_n$ , ou ainda, **erro de discretização** por conta dos métodos numéricos resolverem as equações ponto a ponto.

Outra fonte de erro é por meio dos próprios cálculos em que são usados um número finito de dígitos. Isso acontece, por exemplo, com as calculadoras e computadores, é conhecido como **erro de arredondamento**  $R_n$  e é dado

$$R_n = y_n - Y_n,$$

sendo  $Y_n$  o valor *computado de fato* por meio do método numérico. Uma forma de minimizar os efeitos do erro de arredondamento é tentar fazer menos cálculos.

O erro total é limitado pela soma dos valores absolutos dos erros de truncamento e arredondamento, e é expresso da forma

$$|\phi(t_n) - Y_n| = |\phi(t_n) - y_n + y_n - Y_n|,$$

que, usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} |\phi(t_n) - Y_n| &\leq |\phi(t_n) - y_n| + |y_n - Y_n| \\ &\leq |E_n| + |R_n|. \end{aligned}$$

**Erros de truncamento do Método de Euler.** As soluções geradas por aproximações numéricas não são iguais à solução  $\phi$ , pois o Método de Euler resulta apenas em aproximações lineares à solução. Essa

diferença que ocorre em cada ponto é dito Erro de Truncamento Local ou Erro de Discretização.

A fórmula do erro de truncamento local para o Método de Euler pode ser obtida usando a expansão<sup>2</sup> da Série de Taylor para  $y(t_n + h)$ , em torno do ponto  $t_n$ , dada por:

$$\begin{aligned} y(t_n + h) &= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2!}y''(t_n) + \dots \\ &+ \frac{h^k}{k!}y^{(k)}(t_n) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi_n), \end{aligned} \tag{4.2}$$

com  $t_n < \xi_n < t_n + h$ . Considerando  $t_n + h = t_{n+1}$  e  $k = 1$ , ficamos

$$y(t_{n+1}) = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2!}y''(\xi_n).$$

Esta equação sem o último termo é o Método de Euler. Portanto, o erro de truncamento local em  $y_{n+1}$  é

$$\epsilon = y''(\xi_n) \frac{h^2}{2!},$$

em que  $t_n < \xi_n < t_{n+1}$ . Porém, mesmo tendo a expressão do erro de truncamento local, em geral, não é possível calcular  $y''(\xi)$ . Por esse motivo, costuma-se estabelecer *cotas* ou *estimativas* de um erro ou tolerância aceitável. Normalmente, considera-se a derivada constante e  $h$  suficientemente pequeno como sendo o parâmetro do erro local.

Pode-se dizer, de forma geral, que o erro de truncamento local é da ordem  $O(h^{k+1})$ . E, em particular, para o Método de Euler, o erro de truncamento local é  $O(h^2)$ . Com isso, podemos esperar que quanto menor for o valor de  $h$ , ou seja, quanto menor o passo, menor será o erro de truncamento local.

Já o erro de **truncamento global** tem uma ordem a menos do erro de truncamento local, ou seja, o erro global para o Método de Euler é  $O(h)$  e isso equivale à ordem de precisão do método. É também conhecido como erro total por se tratar do acúmulo de erros que são cometidos em cada passo. Então, quanto mais passos forem usados, ou seja, quanto menor for o valor de  $h$ , maior pode ser o erro

<sup>2</sup> Fórmula de Taylor de ordem  $k$ , com resto de Lagrange.

total. Daí se tem a necessidade de estudar métodos numéricos em que é possível se ter uma boa aproximação, sem precisar aumentar a quantidade de passos.

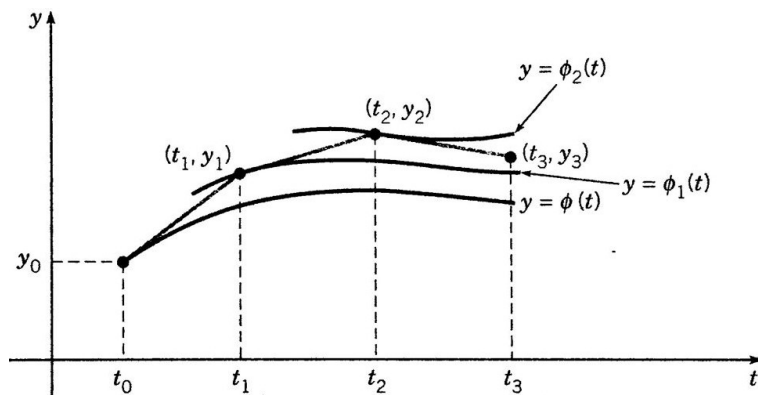


Figura 4.1 – Método de Euler. [3]

O Método de Euler consiste em usar a fórmula (4.1) repetidamente de modo a obter uma sucessão de aproximações. Vejamos, na Figura 4.1, que em cada passo, constrói-se uma reta tangente à solução, e para obter um passo posterior é usado o passo anterior. Esse processo nos leva a pensar que quanto mais perto um ponto está do outro, ou seja, quanto mais passos forem usados, em um determinado intervalo de tempo, mais próximas as retas tangentes ficam da solução exata. Os passos ficam mais próximos uns dos outros e, com isso, as retas tangentes se aproximam mais do comportamento da solução exata. No entanto, pode se tornar inviável usar muitos passos, pois o programa ficará muito caro computacionalmente. E a qualidade da aproximação depois de muitos passos dependerá fortemente do comportamento do conjunto de soluções.

## 4.2 MÉTODO DE EULER APRIMORADO

Discutimos, na seção dedicada ao Método de Euler, a questão do tamanho do passo contribuir na aproximação numérica, porém, tínhamos o problema de tornar a implementação computacional muito demorada, por conta do número excessivo de cálculos, e isso

podendo também gerar um acúmulo maior de erro. Então, a partir deste momento, estudaremos o Método de Euler aprimorado, que demonstra ser mais eficiente, por convergir mais rápido para a solução desejada, sem a necessidade de diminuir o tamanho do passo.

Do mesmo modo que foi feito no Método de Euler para a dedução da fórmula, utilizamos o truncamento da Série de Taylor. No caso do Método de Euler aprimorado, a série é truncada com uma parcela a mais, sendo:

$$y(t_{n+1}) = y_n + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2!}y''(t_n).$$

Conseqüentemente, adicionando essa parcela, obteremos uma aproximação melhor do que no caso anterior e, de forma implícita,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})}{2}h.$$

Note que temos a incógnita  $y_{n+1}$  à direita do sinal de igualdade, tornando muitas vezes difícil de resolver dependendo do tipo da função. Podemos, então, usar a fórmula do Método de Euler para obter a equação explícita que é mais fácil de trabalhar. Assim,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{f(t_n, y_n) + f[t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n)]}{2}h \\ &\Rightarrow y_n + \frac{f_n + f(t_n + h, y_n + hf_n)}{2}h, \end{aligned}$$

com  $t_{n+1} = t_n + h$  e  $f(t_n, y_n) = f_n$ . Se uma função  $f(t, y)$  depende apenas de  $t$  e não de  $y$ , a fórmula do Método de Euler aprimorado ficará

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n) + f(t_n + h)].$$

A fórmula de Euler aprimorado é um método numérico que necessita de duas etapas: primeiramente é calculado  $y_n + hf_n$  da fórmula de Euler e, em seguida, é calculado  $y_{n+1}$ , fazendo uso do primeiro resultado. Com a Figura 4.2, podemos observar geometricamente o Método de Euler aprimorado e analisar a aproximação.

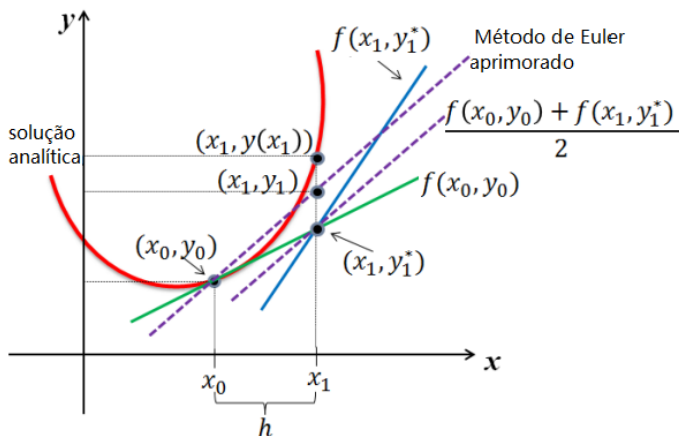


Figura 4.2 – Método de Euler aprimorado. [5]

**Erro de truncamento do Método de Euler aprimorado.** Como já discutimos anteriormente, o erro de truncamento local é da ordem  $O(h^{k+1})$ . Para a dedução da fórmula do erro de truncamento local, usamos a equação (4.2), fazendo  $k = 2$ , e obtendo:

$$y(t_{n+1}) = y_n + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2!}y''(t_n) + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(\xi_n),$$

com  $t_n < \xi_n < t_{n+1}$ . Resolvendo

$$y(t_{n+1}) = y_n + \frac{1}{2}h[f(t_n, y_n)] + \frac{1}{2}h[f(t_n + h, y_n + f(t_n, y_n))] + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(\xi_n),$$

como  $t_n + h = t_{n+1}$ , obtemos:

$$y(t_{n+1}) = y_n + h \left[ \frac{f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + f(t_n, y_n))}{2} \right] + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(\xi_n),$$

chegando à fórmula do Método de Euler aprimorado somado à parcela que representa o erro de truncamento local que é

$$\epsilon = y^{(3)}(\xi_n) \frac{h^3}{3!} = O(h^3).$$

Já o erro de **truncamento global** cometido com o uso de métodos numéricos é da ordem  $h^k$ . Logo, o erro global para o Método

de Euler aprimorado é  $h^2$ . Por conta disso, o método é dito de segunda ordem e é mais preciso, quando comparado, com o Método de Euler, visto anteriormente. No entanto, essa precisão gera um custo computacional maior, já que é necessário calcular  $f(t, y)$  duas vezes para conseguirmos ir de  $t_n$  a  $t_{n+1}$ . Porém, em geral, esse maior custo computacional por iteração é diluído, já que o Método de Euler aprimorado converge em menos iterações.

**Exemplo 4.1.** Usando os Métodos de Euler e de Euler aprimorado para o problema de valor inicial

$$y' = 1 - t + 4y, \quad y(0) = 1,$$

é possível fazer uma comparação dos resultados obtidos, usando diferentes valores de  $h$ , e compará-los com a solução exata. Vejamos na tabela a seguir:

Tabela 4.1 – Comparação entre os Métodos de Euler e Euler aprimorado.

t	Euler		Euler aprimorado		Exata
	h=0,01	h=0,001	h=0,025	h=0,01	
0	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
0,1	1,5952901	1,6076289	1,6079462	1,6088585	1,6090418
0,2	2,4644587	2,5011159	2,5020618	2,5047827	2,5053299
0,3	3,7390345	3,8207130	3,8228282	3,8289146	3,8301388
0,4	5,6137120	5,7754845	5,7796888	5,7917911	5,7942260
0,5	8,3766865	8,6770692	8,6849039	8,7074637	8,7120041
1,0	60,037126	64,382558	64,497931	64,830722	64,897803
1,5	426,40818	473,55979	474,83402	478,51588	479,25919
2,0	3029,3279	3484,1608	3496,6702	3532,8789	3540,2001

Fonte: [3, pág. 355]

As aproximações obtidas com o Método de Euler aprimorado são mais próximas da solução exata se comparadas com as do Método de Euler, mesmo para diferentes tamanhos dos passos, como podemos ver na Tabela 4.1. Por exemplo, os resultados com  $h = 0,025$  para o Método de Euler aprimorado são bem mais próximos da solução exata, que os resultados com  $h = 0,01$  para o



Método de Euler. E para o incremento  $h = 0,001$ , o qual é menor que  $h = 0,025$ , o Método de Euler aprimorado ainda tem resultados mais próximos da solução exata, se comparado com as aproximações obtidas pelo Método de Euler.

Essa comparação ilustra com mais clareza que o Método de Euler aprimorado é mais eficiente que o Método de Euler pois gera resultados mais precisos e com menos esforço computacional. Esse ganho se deve ao fato de que não necessita de uma quantidade tão grande de pontos em um intervalo, ou seja, não precisa de um valor tão pequeno de  $h$  para obter uma boa aproximação.

### 4.3 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

O Método de Runge-Kutta teve sua primeira aparição em 1895, no artigo de Carl David Runge, no qual o autor discorre sobre soluções numéricas de equações diferenciais. Em 1901, M. Wilhelm Kutta estendeu o método para sistemas de equações diferenciais.

O Método de Runge-Kutta de quarta ordem é um dos métodos mais usados para resolver problemas de valor inicial, por ser um dos métodos mais precisos e que obtém uma aproximação, muitas das vezes, melhor que os métodos estudados anteriormente.

Para deduzir a fórmula do Método de Runge-Kutta, usaremos a expansão de Série de Taylor de quarta ordem dada por

$$y(t_n + h) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2!}y''(t_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(t_n) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(t_n).$$

O Método de Runge-Kutta de quarta ordem baseia-se em encontrar as constantes  $c_1, c_2, c_3$  e  $c_4$  em

$$y_{n+1} = y_n + h(c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3 + c_4k_4), \quad (4.3)$$

de modo que

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 h k_1), \\ k_3 &= f(t_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 h k_2 + \beta_3 h k_1), \\ k_4 &= f(t_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_4 h k_2 + \beta_5 h k_1 + \beta_6 h k_3). \end{aligned}$$

Podemos igualar a Série de Taylor de quarta ordem com a equação (4.3), que resultará em um sistema não linear com 11 equações e 13 incógnitas:  $c_1, c_2, c_3, c_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$  e  $\beta_6$ . Note que o sistema possui uma infinidade de possíveis soluções e uma delas é a seguinte:

$$\begin{aligned}c_1 &= c_4 = 1/6, \\c_2 &= c_3 = 1/3, \\ \alpha_3 &= \beta_6 = 1, \\ \beta_2 &= \beta_4 = \beta_5 = 0, \\ \alpha_1 &= \alpha_2 = \beta_1 = \beta_3 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Com essa solução, obtemos a fórmula do famoso Método de Runge-Kutta de quarta ordem, o qual envolve uma média ponderada de valores de  $f(t, y)$  em diferentes pontos no intervalo  $t_n \leq x \leq t_{n+1}$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (4.4)$$

em que

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, y_n), \\k_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right), \\k_3 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right), \\k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3).\end{aligned} \quad (4.5)$$

O método considera um número maior de parcelas da Série de Taylor, que aproxima valores de derivadas de ordens superiores, diferenciando-se dos Métodos de Euler que consideram apenas os valores das primeiras derivadas. Vejamos um exemplo em que é possível comparar os métodos numéricos e analisar qual é a melhor aproximação obtida.

**Exemplo 4.2.** Consideremos a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 5y, \quad (4.6)$$

a qual é resolvida computacionalmente com o auxílio do software

MATLAB. A implementação dos métodos numéricos vistos anteriormente junto com o Método de Runge-Kutta de quarta ordem, geram aproximações numéricas das soluções da equação diferencial (4.6), no intervalo considerado de 0 a 1, com passo igual a 0,1.

Perceba que escolhemos esse problema porque a solução analítica é conhecida e, portanto, torna-se fácil comparar os resultados obtidos pelos métodos em questão. No entanto, o uso de métodos numéricos para resolução de equações diferenciais é útil em casos que a solução exata não é conhecida.

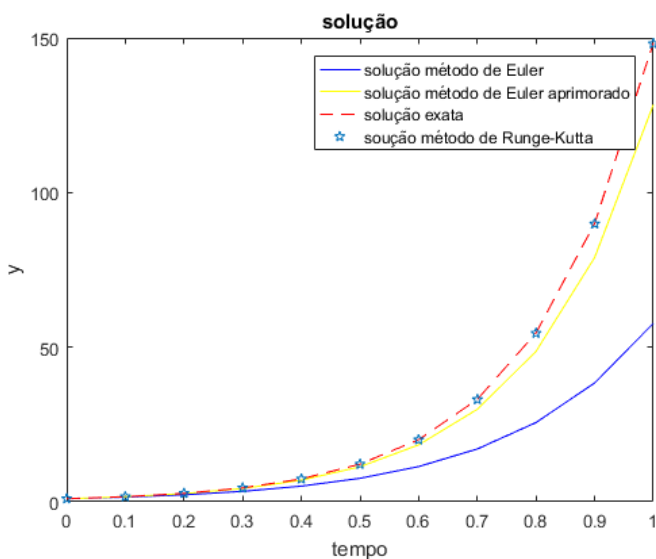


Figura 4.3 – Implementação numérica. Fonte: A autora.

Da Figura 4.3, vemos que o Método de Runge-Kutta é o que melhor aproxima a solução, e conforme as discussões feitas nesse capítulo, já esperávamos tal resultado, visto que tem um grau de precisão maior que o restante dos métodos. A segunda melhor aproximação é fornecida pelo Método de Euler aprimorado, que fica bem próximo da solução exata e que só se distancia dela com o passar do tempo. Por fim, o Método de Euler que tem uma aproximação inferior aos demais métodos, pois o acúmulo de erro é maior, fazem

do com que a representação da solução aproximada tenha o mesmo comportamento crescente da solução exata, mas se afasta dela com muito mais rapidez.

A ordem dos erros de truncamento locais para os Métodos de Euler e Euler aprimorado são, respectivamente,  $h^2$  e  $h^3$ . Para o Método de Runge-Kutta de quarta ordem, o erro de truncamento local é  $h^5$ , tendo a grandeza de precisão maior que os outros métodos discutidos. Assim como fizemos na dedução do erro de truncamento local para os métodos numéricos apresentados até o momento, usaremos a expansão de Série de Taylor de quarta ordem com resto dada por

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2!}y''(t_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(t_n) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(t_n) + \frac{h^5}{5!}y^{(5)}(\xi_n),$$

com  $t_n < \xi_n < t_{n+1}$ . Já vimos também que essa expansão da Série de Taylor sem o último termo é o Método de Kunge-Kutta de quarta ordem, chegamos ao erro de truncamento local

$$\epsilon = y^{(5)}(\xi_n)\frac{h^5}{5!} = O(h^5).$$

Os métodos estudados neste trabalho são diretos, com passo fixo e simples, ou seja, para calcular o ponto seguinte é necessário apenas o ponto anterior. No entanto, já foram desenvolvidos Métodos de Runge-Kutta iterativos, que modificam o tamanho do passo, à medida que os cálculos são realizados, com o objetivo de manter o erro de truncamento local próximo ou abaixo da tolerância do problema. Porém, não trataremos desses casos, visto que fogem ao escopo do trabalho.

## 5 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Neste capítulo, primeiramente faremos análises qualitativas para as soluções de sistemas de equações diferenciais, num caráter mais geométrico. Após, discutiremos também aspectos sobre estabilidade. Apresentaremos, ainda, sistemas de equações diferenciais que modelam de forma simples o crescimento e a competição entre espécies.

### 5.1 O PLANO DE FASE: SISTEMAS LINEARES

Para o estudo qualitativo, analisamos o comportamento das soluções sem necessariamente resolver as equações diferenciais. Para isso, consideramos um sistema linear homogêneo com coeficiente constante da seguinte forma

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (5.1)$$

sendo  $A$  uma matriz constante de ordem 2 e  $x$  um vetor. Vimos anteriormente, na equação (3.1), que uma constante multiplicada por uma variável resulta em soluções que envolvem a função exponencial  $e^{rt}$ . Para o caso da equação (5.1), a constante será substituída pela matriz  $A$ , fazendo com que as soluções sejam vetores, portanto, multiplicamos a solução por um vetor  $\xi$  constante e não-nulo. Logo, buscamos soluções da forma

$$x = \xi e^{rt},$$

em que queremos descobrir  $r$  e o vetor  $\xi$ . Substituindo  $x$  na equação (5.1), obtemos

$$r\xi e^{rt} = A\xi e^{rt},$$

e, fazendo o respectivo cancelamento, visto que  $e^{rt}$  é não-nulo, obtemos

$$(A - rI)\xi = 0, \quad (5.2)$$

sendo  $r$  um autovalor de  $A$ , multiplicado pela matriz identidade  $I$  de ordem 2 e  $\xi$  um autovetor associado a  $r$ . Os autovalores são as raízes de

$$\det(A - rI) = 0,$$

e os autovetores são determinados pela equação (5.2), a menos de uma constante multiplicativa.

As soluções do sistema de equações diferenciais (5.1), tendo calculado os autovalores  $r_1, r_2$  e os autovetores  $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ , são da forma

$$x^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{r_1 t}, \quad x^{(2)}(t) = \xi^{(2)} e^{r_2 t}.$$

Essas soluções formam um conjunto fundamental. Para mostrar isso, calculamos seu Wronskiano:

$$\begin{aligned} W[x^{(1)}, x^{(2)}](t) &= \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} e^{r_1 t} & \xi_1^{(2)} e^{r_2 t} \\ \xi_2^{(1)} e^{r_1 t} & \xi_2^{(2)} e^{r_2 t} \end{vmatrix} \\ &= e^{(r_1 + r_2)t} \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} \\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

O Wronskiano  $W[x^{(1)}, x^{(2)}]$  nunca se anula. Primeiramente, pelo fato da função exponencial nunca ser zero. Em segundo, os autovetores  $\xi^{(1)}$  e  $\xi^{(2)}$  são linearmente independentes; logo,  $x^{(1)}$  e  $x^{(2)}$  formam um conjunto fundamental de soluções e a solução geral da equação (5.1) é

$$x = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{r_2 t} \quad (5.3)$$

em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias.

De forma semelhante pode ser feito para sistemas de ordem  $n \times n$ . No entanto, para esse trabalho, fazemos uso apenas de sistemas  $2 \times 2$ .

Em relação às soluções de equilíbrio, chamadas também de pontos críticos, as quais correspondem às soluções constantes, são pontos em que  $Ax = 0$ . Se  $A$  for inversível, ou seja, se  $\det A \neq 0$ , teremos  $x = 0$  sendo o único ponto crítico do sistema.

As soluções para a equação (5.1) podem ser representadas por meio de curvas no plano  $x_1x_2$ . Tal plano é conhecido como **plano de fase** e o conjunto das trajetórias é dito **retrato de fase**. A Figura (5.1) é um exemplo de plano de fase, em que as trajetórias formam o retrato de fase. Não discutiremos nesse exemplo o comportamento dessas trajetórias. Isso será feito a seguir com o estudo qualitativo das soluções.

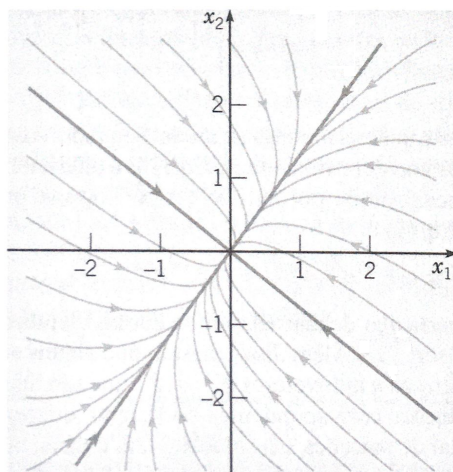


Figura 5.1 – Plano de fase [3]

A partir deste momento, estudaremos de forma qualitativa o padrão geométrico das soluções para sistemas lineares homogêneos. Para facilitar o estudo, dividiremos em casos:

### Caso 1: Autovalores Reais e Distintos de mesmo sinal

Como já foi discutido, a solução geral do sistema de equações diferenciais (5.1) é da forma

$$x = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{r_2 t},$$

em que  $r_1$  e  $r_2$  podem ser positivos ou negativos. Em particular, será feito o estudo para os autovalores negativos da forma  $r_1 < r_2 < 0$ , pois, quando os autovalores são positivos será análogo.

Da equação (5.3), podemos observar que  $x \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , independentemente dos valores de  $c_1$  e  $c_2$ , isto é, todas as soluções se aproximam do ponto crítico. Quando a solução parte de um ponto inicial na reta que contém a origem na direção de  $\xi^{(1)}$ , temos  $c_2 = 0$ , a solução permanece nessa reta em todo  $t$  e tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Da mesma forma, para o ponto inicial pertencente à reta na direção de  $\xi^{(2)}$ , a solução tende a zero.

Podemos escrever a equação (5.3) na forma

$$x = e^{r_2 t} [c_1 \xi^{(1)} e^{(r_1 - r_2)t} + c_2 \xi^{(2)}],$$

em que  $r_1 - r_2 < 0$  e  $c_2 \neq 0$ , para assim fazermos algumas observações. Por exemplo, o termo  $c_1 \xi^{(1)} e^{(r_1 - r_2)t}$  é insignificante se comparado ao  $c_2 \xi^{(2)}$  para valores de  $t$  suficientemente grandes. Com isso, temos que todas as soluções tendem ao ponto crítico tangente à reta de direção  $\xi^{(2)}$ , com exceção as que começam precisamente na reta de direção  $\xi^{(1)}$ .

Ao longo das discussões já podemos observar que os sistemas de equações em que os autovalores são reais e distintos de mesmo sinal, em particular, para autovalores negativos, todas as trajetórias estão tendendo ao ponto crítico e, nesse caso, ele é dito **nó** ou **nó atrator**. Representado na Figura 5.2, em que o primeiro gráfico é o plano de fase e ao lado o gráfico de  $x_1$  em função de  $t$ .

Para o caso em que  $t \rightarrow -\infty$  com  $r_1 < r_2 < 0$ , se  $c_1 \neq 0$ , o termo dominante é  $e^{r_1 t}$ . Logo, para valores de  $t$  negativamente grandes, as trajetórias são praticamente paralelas ao autovetor  $\xi^{(1)}$ , com exceção das trajetórias que estendem-se através da reta  $\xi^{(2)}$ .

Por fim, quando  $0 < r_2 < r_1$ , as trajetórias terão o mesmo padrão, exceto pelo fato de que se afastam do ponto crítico, isto é,  $x_1$  e  $x_2$  crescem exponencialmente em função de  $t$ . Nesse caso, o ponto crítico é chamado de nó ou fonte.



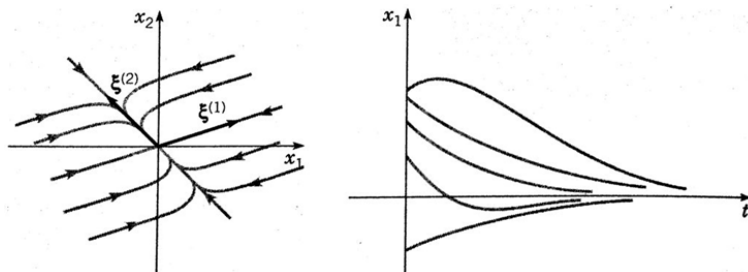


Figura 5.2 – Nó atrator. (Plano de fase). ( $x_1$  em função de  $t$ ).[3]

### Caso 2: Autovalores Reais com Sinais Opostos.

A solução geral da equação (5.1) é da forma

$$x = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{r_2 t}, \quad (5.4)$$

com  $r_1 > 0$  e  $r_2 < 0$ .

Assim como no caso anterior, quando a solução parte de um ponto inicial da reta que contém a origem na direção  $\xi^{(1)}$ , teremos  $c_2 = 0$ . Conseqüentemente, a solução continua nessa reta para todo  $t$  e  $\|x\| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ , uma vez que  $r_1 > 0$ . Por outro lado, quando a solução parte de um ponto inicial da reta na direção  $\xi^{(2)}$ , teremos  $c_1 = 0$  e  $\|x\| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . O fato de numa direção a solução tender a zero e em outra tender ao infinito, dizemos que a origem é um **ponto de sela**, como representado na Figura 5.3.

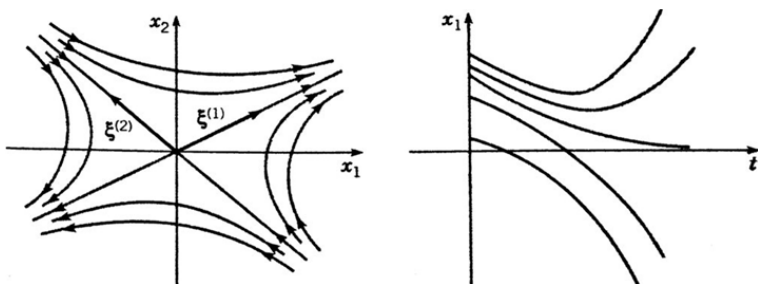


Figura 5.3 – Ponto de sela. (Plano de fase). ( $x_1$  em função de  $t$ ).[3]

De modo geral, na equação (5.4), a parcela com a exponen-

cial positiva, acaba sendo o termo dominante para  $t$  suficientemente grande, com soluções tendendo ao infinito. Já as soluções que aproximam-se do ponto crítico na origem são apenas as que começam exatamente na reta  $\xi^{(2)}$ . Para algumas condições iniciais, a exponencial positiva não faz parte da solução, assim  $x_1 \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Para todas as demais condições iniciais, a exponencial positiva acaba dominando, tornando  $x_1$  ilimitado, o mesmo para  $x_2$  que tem o comportamento semelhante.

**Caso 3: Autovalores Iguais** Suponhamos  $r_1 = r_2 = r$ , considerando o caso que os autovalores são negativos; pois para os positivos, as trajetórias são semelhantes, somente em sentido contrário. Discutimos dois possíveis subcasos:

**a) Dois autovetores independentes.** A solução geral da equação (5.1), fica

$$x = c_1 \xi^{(1)} e^{rt} + c_2 \xi^{(2)} e^{rt},$$

em que  $\xi^{(1)}$  e  $\xi^{(2)}$  são autovetores independentes. Temos que toda a trajetória está contida em uma reta que contém a origem. Esse comportamento se dá pelo fato dos autovalores serem iguais, fazendo com que os termos da solução geral estejam tendendo a zero com mesma velocidade. E nesse caso, o ponto crítico é dito **nó próprio** ou **ponto estrela** e está representado na Figura 5.4.

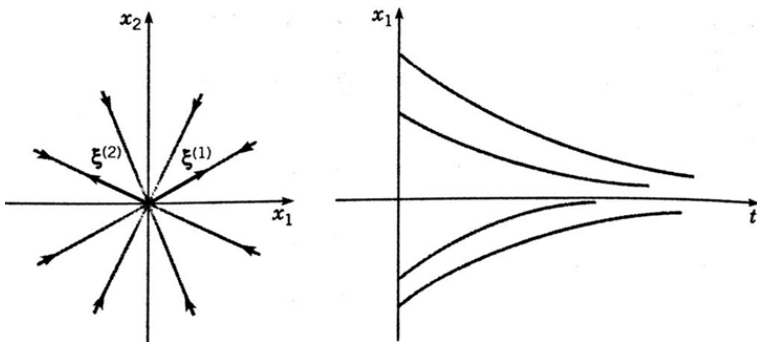


Figura 5.4 – Nó próprio, dois autovetores independentes. (Plano de fase). ( $x_1$  em função de  $t$ ).[3]

**b) Um autovetor independente.** A solução geral da equação (5.1), para esse caso é:

$$x = c_1 \xi e^{rt} + c_2 (\xi t e^{rt} + \eta e^{rt}), \quad (5.5)$$

em que  $\xi$  é o autovetor e  $\eta$  é o autovetor generalizado ambos relacionados ao autovalor repetido. Na situação em que  $t$  é suficientemente grande, o termo  $c_2 \xi e^{rt}$  é dominante na equação (5.5), ou seja, se  $t \rightarrow \infty$  as trajetórias são tangentes à reta na direção do autovetor e tendem a zero. Isso é válido mesmo se  $c_2 = 0$ , pois a solução de  $x = c_1 \xi e^{rt}$  pertence a essa reta. Do mesmo modo, para os valores negativamente grandes de  $t$ , o termo  $c_2 \xi e^{rt}$  será dominante, ou seja, a inclinação de cada trajetória tende à zero de forma assintótica a uma reta paralela a  $\xi$ .

Com relação às trajetórias, a orientação depende das posições de  $\xi$  e  $\eta$ . E para localizá-la, podemos reescrever a solução na forma:

$$x = [(c_1 \xi + c_2 \eta) + c_2 \xi t] e^{rt} = y e^{rt}. \quad (5.6)$$

É possível notar que  $y$  indica a direção e o sentido de  $x$ , já  $e^{rt}$  influencia no tamanho de  $x$ . Quando os valores de  $c_1$  e  $c_2$  são fixos a expressão para  $y$  acaba sendo a equação vetorial da reta que é paralela a  $\xi$  e que contém o ponto  $c_1 \xi + c_2 \eta$ .

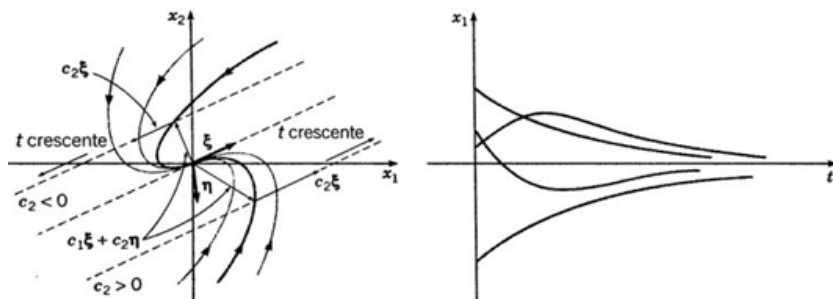


Figura 5.5 – Nó impróprio, um autovetor independente.[3]

Se os autovalores forem  $r_1 = r_2 > 0$ , as trajetórias são percorridas no sentido para fora, e sua orientação é invertida, fazendo

com que as soluções tendam ao infinito.

No caso em que um autovalor duplo contém um único autovetor independente, chamamos o ponto crítico de **nó impróprio** ou **degenerado**. Representado na Figura 5.5, em que o primeiro gráfico é o plano de fase, com  $r_1 = r_2 < 0$ , e o segundo gráfico é  $x_1$  em função de  $t$ .

#### Caso 4: Autovalores Complexos com parte real não nula.

Supomos que os autovalores são da forma  $\lambda \pm i\mu$ , em que  $\lambda$  e  $\mu$  são reais, com  $\lambda \neq 0$  e  $\mu > 0$ . Escrevemos a solução geral usando o sistema,

$$x' = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} x, \quad (5.7)$$

ou ainda, da forma escalar,

$$x'_1 = \lambda x_1 + \mu x_2, \quad x'_2 = -\mu x_1 + \lambda x_2. \quad (5.8)$$

Fazendo o uso de coordenadas polares  $r, \theta$  dadas como

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \tan \theta = x_2/x_1.$$

Diferenciando, obtemos

$$rr' = x_1x'_1 + x_2x'_2, \quad (\sec^2\theta)\theta' = (x_1x'_2 - x_2x'_1)/x_1^2.$$

Usando a equação (5.8) nos resultados acima, ficamos com

$$r' = \lambda r,$$

e, assim

$$r = ce^{\lambda t},$$

em que  $c$  é uma constante. Da mesma forma, para o outro resultado, considerando  $\sec^2\theta = r^2/x_1^2$ , ficamos com

$$\theta' = -\mu,$$

e, assim

$$\theta = -\mu t + \theta_0,$$

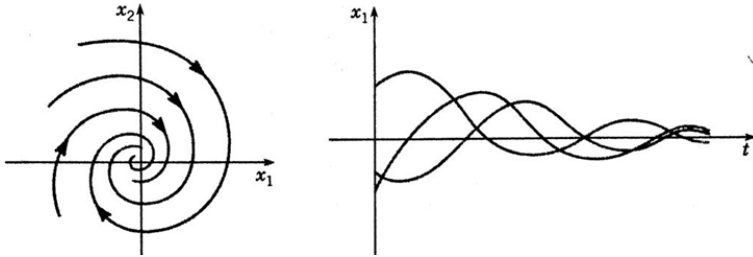


Figura 5.6 – Ponto espiral.  $\lambda < 0$ . [3]

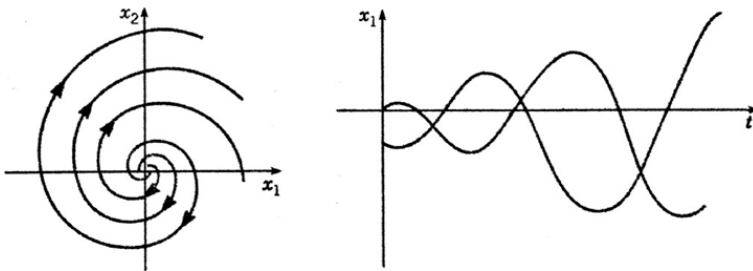


Figura 5.7 – Ponto espiral.  $\lambda > 0$ . [3]

em que  $\theta_0$  representa o valor de  $\theta$  para  $t = 0$ .

Dessa última equação, podemos analisar, se  $\mu > 0$ , então  $\theta$  diminui quando  $t$  aumentar e o movimento da trajetória ocorre em sentido horário. Da equação  $r = ce^{\lambda t}$ , podemos analisar que, quando  $t \rightarrow \infty$ , teremos  $r \rightarrow 0$ , para  $\lambda < 0$ , representada - veja a Figura 5.6 - e  $r \rightarrow \infty$ , para  $\lambda > 0$  - veja a Figura 5.7 - . Concluímos então, que as trajetórias são espirais, e dependendo do sinal de  $\lambda$ , tendem à origem ou se afastam dela. Esses pontos críticos são ditos **pontos espirais**.

### Caso 5: Autovalores Imaginários Puros.

Para esse caso,  $\lambda = 0$  e os autovalores serão  $\pm i\mu$ , e o sistema será

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} x, \quad (5.9)$$

ou, da forma escalar

$$x_1' = \mu x_2, \quad x_2' = -\mu x_1.$$

Assim como no caso anterior, faremos o uso de coordenadas polares, ficando com

$$r' = 0, \quad \theta' = -\mu,$$

e, assim,

$$r = c, \quad \theta = -\mu t + \theta_0,$$

sendo  $c$  e  $\theta_0$  constantes. Concluimos, então que as trajetórias são círculos centrados na origem ou elipses. O sentido percorrido é horário, para  $\lambda > 0$  e trigonométrico, para  $\lambda < 0$ . No intervalo de tempo com comprimento  $2\pi/\mu$ , o círculo é completo em torno da origem e todas as soluções são periódicas. O ponto crítico é dito **centro** e está representado na Figura 5.8.

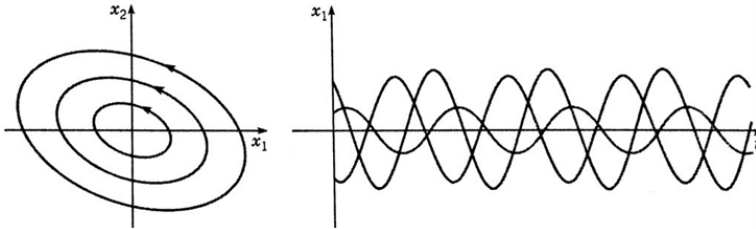


Figura 5.8 – Centro.  $r_1 = i\mu$ ,  $r_2 = -i\mu$ . [3]

## 5.2 SISTEMAS AUTÔNOMOS E ESTABILIDADE

Esta seção está dedicada ao estudo de equações de primeira ordem e sistemas de duas equações lineares homogêneas de primeira ordem com coeficientes constantes. No entanto, os resultados apresentados são independentes da ordem do sistema. Também faremos estudos qualitativos das equações diferenciais e discussões sobre conceitos de estabilidade.

**Sistemas Autônomos.** Consideremos sistemas de duas equações dife-

renciais da forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y).\end{aligned}$$

Supomos que  $F$  e  $G$  são funções contínuas com derivadas parciais contínuas em algum domínio do plano  $xy$ . No caso de  $(x_0, y_0)$  ser um ponto no domínio, temos que um único par de soluções  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  que satisfazem as condições iniciais

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0.$$

Podemos escrever o problema de valor inicial na forma vetorial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0,$$

em que  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = F(x, y)\mathbf{i} + G(x, y)\mathbf{j}$  e  $\mathbf{x}^0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$ . A solução  $\mathbf{x} = \phi(t)$  na forma vetorial é  $\phi(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j}$ . A interpretação da solução é a curva formada pelo movimento do ponto no plano, gerando o conhecido plano de fase.

O sistema visto inicialmente tem um campo de direções que é independente do tempo e, conseqüentemente, existe apenas uma trajetória que passa pelo ponto  $(x_0, y_0)$  no plano de fase.

As funções  $F$  e  $G$  dependem apenas das variáveis dependentes  $x$  e  $y$ , não dependendo da variável independente  $t$ , tornando assim o sistema **autônomo**. Por exemplo, o sistema

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x},$$

em que  $A$  é uma matriz constante de ordem 2, é um sistema autônomo bidimensional. Perceba que, se algum dos elementos da matriz for uma função da variável independente  $t$ , o sistema deixa de ser autônomo.

**Estabilidade.** Consideremos sistemas autônomos da forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{5.10}$$

e  $\|\mathbf{x}\|$  para denotar o tamanho do vetor  $\mathbf{x}$ .

Os pontos em que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , se existirem, são chamados de **pontos críticos** do sistema autônomo e correspondem às soluções de equilíbrio. Segundo Boyce e DiPrima [3], um ponto crítico  $\mathbf{x}^0$  do sistema (5.10) é dito **estável** se, dado qualquer  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$ , tal que toda solução  $\mathbf{x} = \phi(t)$ , que satisfaz, em  $t = 0$ ,

$$\|\phi(0) - \mathbf{x}^0\| < \delta,$$

existe para todo  $t$  positivo e satisfaz

$$\|\phi(t) - \mathbf{x}^0\| < \epsilon.$$

para todo  $t \geq 0$ . E um ponto crítico  $\mathbf{x}^0$  é dito **assintoticamente estável** se é estável e se existe um  $\delta_0$ , com  $0 < \delta_0 < \delta$ , tal que, a solução  $\mathbf{x} = \phi(t)$  satisfaz

$$\|\phi(t) - \mathbf{x}^0\| < \delta_0,$$

então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \mathbf{x}^0.$$

No entanto, somente a condição limite não implica em estabilidade assintótica, pois é possível ter o caso em que, quando  $t \rightarrow \infty$ , todas as trajetórias tendam a  $\mathbf{x}^0$ , mesmo esse não sendo um ponto crítico estável.

Em um sistema autônomo de dimensão dois com ao menos um ponto crítico assintoticamente estável, podemos determinar as trajetórias que aproximam-se desse ponto no plano de fase. Para isso, consideremos  $P$  um ponto no plano  $xy$  e uma trajetória passando por esse ponto, que tende ao ponto crítico quando  $t \rightarrow \infty$ . Nesse caso, dizemos que a trajetória é atraída pelo ponto crítico.

**Atratores e Repulsores.** Basicamente, existem três comportamentos para as soluções. Quando no retrato de fase as setas apontam na direção do ponto crítico, como ilustrado na Figura 5.2, o ponto é dito **assintoticamente estável**, ou seja, os pontos são atraídos para o ponto crítico, fenômeno conhecido como **atrator**.

O segundo tipo de comportamento é quando as setas apontam na direção oposta do ponto crítico, dito **instável**. Não importa



o quão perto um ponto esteja do ponto crítico ele se afasta cada vez mais dele com o passar do tempo e isso pode ser verificado na Figura 5.7. Esse fenômeno em questão é chamado de **repulsor**.

Já no último comportamento, algumas setas apontam na direção do ponto crítico e outras no sentido contrário, como foi ilustrado na Figura 5.3. O ponto crítico não é atrator nem repulsor e sim um **ponto de sela**, ou seja, um ponto pode ser atraído para o ponto crítico de um lado e repelido pelo outro, fazendo com que o ponto crítico seja denominado **semiestável**.

### 5.3 SISTEMA DE EQUAÇÕES: ESPÉCIES EM COMPETIÇÃO

Nesta seção, estudaremos sistemas de equações diferenciais em que há interação entre duas espécies, uma extensão do que já foi visto em seções anteriores. As equações que são usadas para descrever o problema são bastante simples, se comparadas ao complexo cenário da natureza, mas será muito útil para compreender os princípios ecológicos envolvidos na construção do modelo e auxilia no estudo de casos mais complexos.

Supomos que existem duas espécies em que nenhuma delas é presa da outra, mas que competem por um mesmo tipo de alimento limitado em algum ambiente fechado. Denotaremos por  $x$  e  $y$  as duas populações em um instante  $t$ . Para a situação em que houver a ausência da população de uma das espécies, podemos usar a equação logística para descrever esse cenário, ficando

$$\frac{dx}{dt} = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x),$$

$$\frac{dy}{dt} = y(\epsilon_2 - \sigma_2 y),$$

sendo  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  as taxas de crescimento das populações, já  $\epsilon_1/\sigma_1$  e  $\epsilon_2/\sigma_2$  representam a capacidade de sustentação ambiental, ou seja, os níveis de saturação. Porém, se as duas espécies estiverem presentes no mesmo ambiente, uma afeta o suprimento de comida da outra, fazendo com que reduza as taxas de crescimento das espécies e os níveis de saturação.

Para expressar o caso em que as espécies interferem na taxa de crescimento uma da outra, devemos ajustar o nosso modelo acrescentando uma parcela que representa essa interferência, então

$$\frac{dx}{dt} = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y),$$

$$\frac{dy}{dt} = y(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x),$$

em que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são as medidas dos graus de interferência que uma espécie exerce sobre a outra. Os valores assumidos para as constantes  $\epsilon_1, \epsilon_2, \sigma_1, \sigma_2, \alpha_1$  e  $\alpha_2$  são positivos, dependem das espécies que serão usadas e podem ser extraídos por meio de observações.

O modelo analisado nessa seção é muito útil para a compreensão do sistema que modela o comportamento de espécies de *Drosophilas*, que é o objetivo final deste trabalho.

#### 5.4 EQUAÇÕES PREDADOR-PRESA

Nessa seção, discutiremos características sobre o modelo em que duas espécies interagem entre si e uma das espécies é o predador que se alimenta da outra que é a presa. No entanto, o modelo é uma mera interpretação superficial, pois a interação de apenas duas espécies não descreve o cenário complexo na natureza. Mas esse tipo de modelo nos ajuda a compreender o básico, para assim trabalharmos com modelos mais próximos da realidade.

As populações são denotadas por  $x$  (presa) e  $y$  (predador). A interação entre  $x$  e  $y$  é modelada por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy = x(a - \alpha y), \\ \frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy = y(-c + \gamma x), \end{cases}$$

em que  $a$  é a taxa de crescimento populacional da presa,  $c$  é a taxa de mortalidade populacional do predador,  $\alpha$  e  $\gamma$  são as interações entre as espécies; sendo  $a, c, \alpha, \gamma$  constantes positivas.

Podemos analisar que, na ausência de predadores, ou seja, quando  $y = 0$ , a população de presas cresce com taxa proporcional à população atual. Já na ausência de presas, quando  $x = 0$ , os predadores são extintos por falta de alimento.

No exemplo a seguir, faremos a implementação de um sistema de equações diferenciais usando diferentes métodos numéricos. Esse processo nos permite fazer uma melhor análise e comparações das aproximações numéricas e pode auxiliar na decisão do método mais adequado para o problema.

**Exemplo 5.1.** Considere o sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 0,5xy, \\ \frac{dy}{dt} = -0,75y + 0,25xy, \end{cases} \quad (5.11)$$

em que a primeira equação indica o comportamento da população de presas, representada pela variável  $x$ , já a segunda equação indica o comportamento dos predadores, representada pela variável  $y$ , e a interação entre as espécies é indicado pelo termo  $xy$ .

Para o estudo do comportamento das trajetórias, começamos calculando os pontos críticos do sistema, que são soluções das equações

$$x(1 - 0,5y) = 0, \quad y(-0,75 + 0,25x) = 0,$$

as quais correspondem aos pontos  $(0, 0)$  e  $(3, 2)$ . É possível examinar o comportamento local das soluções próximas a cada ponto crítico, de modo a considerar um sistema localmente linear que aproxima o sistema não linear (5.11), usando

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

em que  $u_1 = x - x_0$  e  $u_2 = y - y_0$ . A matriz

$$J = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

é chamada de **matriz Jacobiana**. Como as funções  $F$  e  $G$  são dadas por

$$F(x, y) = x(1 - 0,5y), \quad G(x, y) = y(-0,75 + 0,25x),$$

a matriz  $J$  fica

$$J = \begin{pmatrix} 1 - 0,5y & -0,5x \\ 0,25y & -0,75 + 0,25x \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Vamos estudar o comportamento local das soluções próximas de cada um dos pontos críticos. Examinando o ponto crítico  $(0, 0)$ , o sistema linear fica

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Os autovalores e os autovetores da equação (5.15) são

$$r_1 = 1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r_2 = -0,75, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que podemos escrever a solução geral, da forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0,75t}. \quad (5.16)$$

Nesse caso, a origem representa um ponto de sela, tanto para o sistema (5.15) linear quanto para o (5.11) não linear.

Para examinar o outro ponto crítico, usamos a matriz jacobiana avaliada no ponto  $(3, 2)$  e obtemos

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1,5 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

em que  $u = x - 3$  e  $v = y - 2$ . Os autovalores e os autovetores são

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}i}{2}, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i/\sqrt{3} \end{pmatrix};$$

$$r_2 = -\frac{\sqrt{3}i}{2}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i/\sqrt{3} \end{pmatrix};$$

Os autovalores são imaginários e, portanto, o ponto crítico  $(3, 2)$  é estável. E para entender melhor o comportamento das soluções é feito o retrato de fase, que será apresentado ainda neste exemplo.

Para melhor interpretação dos resultados, apresentamos a implementação do sistema (5.11) usando os métodos numéricos estudados neste trabalho. Vejamos, na Figura 5.9, o comportamento da interação entre as espécies. Esse caso representa uma situação hipotética e não sabemos de fato que espécie representa esse sistema. Mas podemos pensar que  $x$  é a população de ratos do campo e  $y$  é a população de corujas.

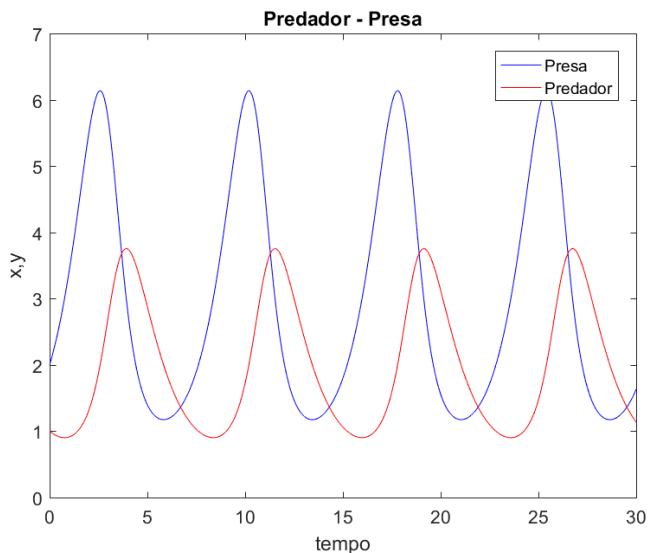


Figura 5.9 – Comportamento das populações de predadores e presas em relação ao tempo. Fonte: A autora.

Para entender o comportamento das soluções, é suficiente considerar as populações de presas e predadores inicialmente peque-

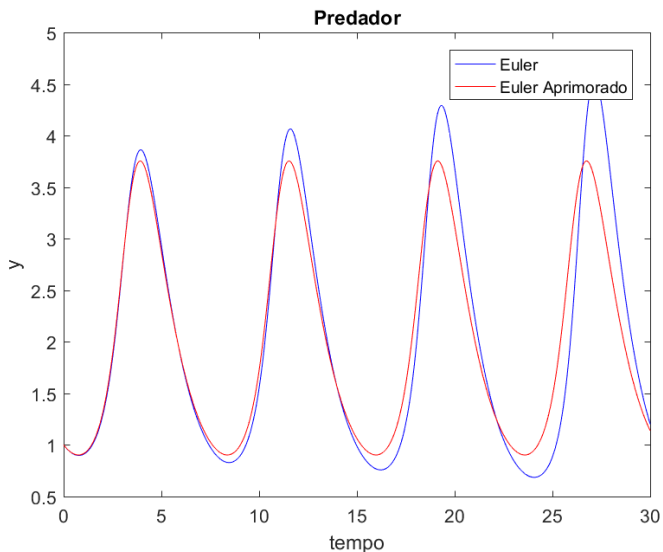


Figura 5.10 – Representação da população de predador em relação a  $t$ . Fonte: A autora.

nas, só não podendo ser zero, pois nesse caso, não teríamos indivíduos de pelo menos uma das espécies, deixando de haver interações entre elas.

Com os autovalores encontrados no início da discussão desse exemplo, o esperado para as trajetórias é que tenham comportamento periódico e que, com o passar do tempo, haja um crescimento e um decrescimento em ambas as populações. Em relação à presa, seu número de indivíduos inicialmente é maior se comparado com seu predador, que junto a taxa de crescimento permite ter um aumento no número de seus indivíduos. Em contrapartida, com a abundância de comida, a população de predadores também cresce, o que com o tempo afeta a população de presas que diminui, até o momento que começa a faltar alimento para os predadores fazendo sua população diminuir e com isso, a população de presas pode voltar a crescer e todo esse ciclo volta se repetir, o qual é bem visível no retrato de fase, ilustrado na Figura 5.13.

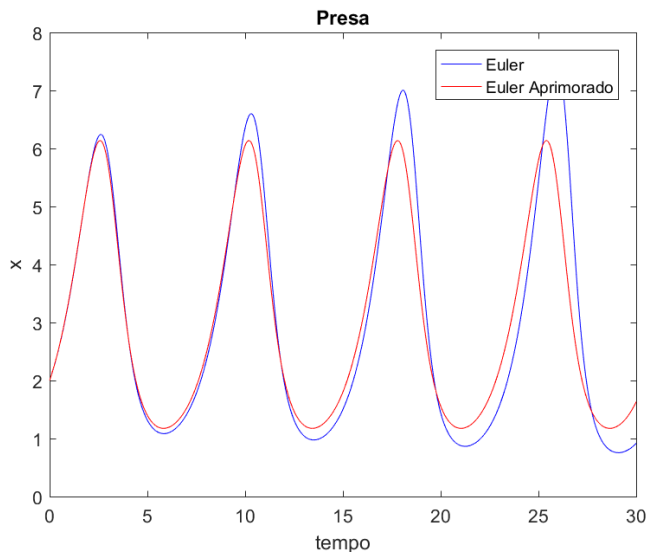


Figura 5.11 – Representação da população de presa em relação ao tempo. Fonte: A autora.

Por meio de gráficos e retratos de fase, podemos comparar as aproximações dos métodos numéricos, como é o caso do Método de Euler aprimorado que aproxima melhor a solução do que o Método de Euler, pois o comportamento das espécies em relação ao tempo deve ter periódico, por conta dos autovalores do sistema serem imaginários puros. Esse resultado que se espera é obtido por meio do Método de Euler aprimorado, pois o Método de Euler com o passar do tempo tem uma variação maior no número dos indivíduos de cada espécie, deixando de ser periódico. Essas comparações ficam bem evidentes nas simulações numéricas, representadas nas Figuras 5.10 e 5.11, para o comportamento dos predadores e das presas, respectivamente.

Para o Método de Runge-Kutta de quarta ordem, a solução é semelhante à do Método de Euler aprimorado, como podemos ver na Figura 5.12. Então, na prática, não há a necessidade de usá-lo, sendo que um Método de Euler aprimorado é mais simples e gera resultados que são esperados para o problema em questão. Talvez o melhor

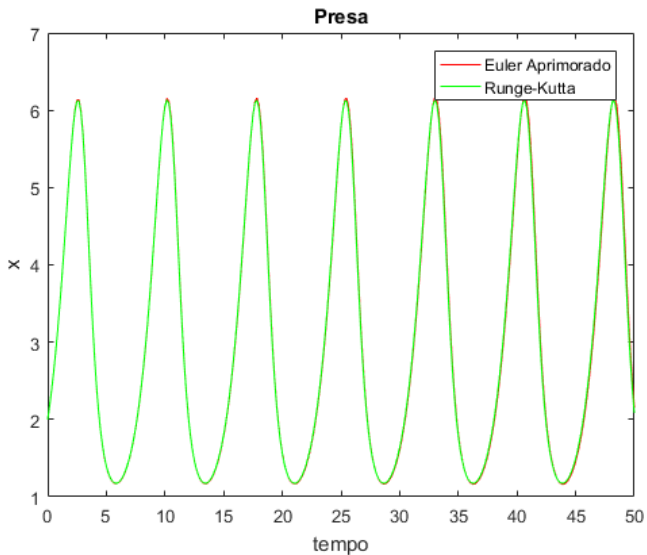


Figura 5.12 – Comparação do método de Euler aprimorado e Runge-Kutta. Fonte: A autora.

exemplo de como a escolha dos métodos numéricos é importante ocorre na Figura 5.13, pois é onde podemos ver um ciclo se fechando por conta do comportamento periódico.

Como já foi visto nas outras figuras, o resultado é oscilatório, ou seja, há o crescimento de uma população e decréscimo da outra, mas, após um certo período de tempo, o movimento se inverte. Assim, esperamos um retrato de fase que seja uma curva fechada. Observe que o Método de Euler aprimorado dá o resultado esperado, enquanto o de Euler não.



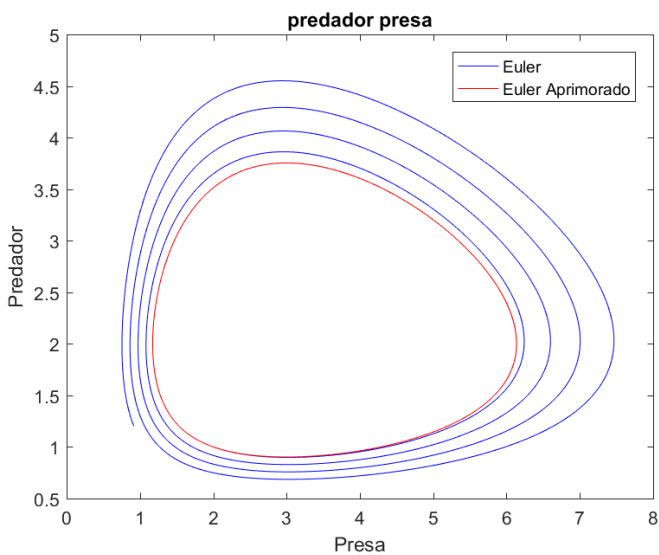


Figura 5.13 – Retrato de fase, interação entre predador e presa. Fonte: A autora.



## 6 MODELO DE GILPIN-AYALA PARA CRESCIMENTO POPULACIONAL

### 6.1 O MODELO DE DINÂMICA POPULACIONAL DE GILPIN-AYALA

O estudo de dinâmica populacional tem seu início na década de 1920 com os trabalhos independentes de Alfred. J. Lotka (1880-1949) e Vito Volterra (1860-1940). Responsáveis pelo primeiro modelo matemático criado para descrever a interação entre duas espécies, mais especificamente predador e presa. A partir dele são criados outros modelos que descrevem o comportamento de diferentes espécies.

O consagrado modelo de dinâmica populacional de Lotka-Volterra é dado por

$$\frac{dN_i}{dt} = r_i N_i \left( 1 - \frac{N_i}{K_i} - \alpha_{ij} \frac{N_j}{K_i} \right), \quad (6.1)$$

para  $i, j = 1, \dots, n$  e  $i \neq j$ . As variáveis  $N_i$  representam a densidade populacional da  $i$ -ésima espécie;  $r_i$  é a taxa de crescimento populacional da  $i$ -ésima espécie quando a densidade de todas as populações é baixa;  $K_i$  é a capacidade de carregamento da  $i$ -ésima espécie na ausência de competidores;  $\alpha_{ij}$  é a redução linear (em termos de  $K_i$ ) da taxa de crescimento da  $i$ -ésima espécie por seu competidor, a  $j$ -ésima espécie.

O modelo de Lotka-Volterra é uma aproximação de primeira ordem de um caso não linear, ou seja, é uma linearização de um modelo não linear. Cabe ressaltar que o Lotka afirmava que o modelo real da interação das espécies deveria ser não linear. Como consequência, a validade do modelo de Lotka-Volterra ocorre ao redor do ponto de equilíbrio.

O que Gilpin e Ayala buscavam em seu artigo era a resposta para a seguinte pergunta: será que uma pequena mudança no modelo pode gerar resultados significativamente mais acurados? A resposta

é sim. Pois, a depender do problema que está sendo investigado há fatores importantes, como: o ambiente, a presença de outras espécies, as próprias características físicas dos indivíduos, entre outras questões, que quando levadas em consideração podem gerar melhores resultados. O modelo original pode ser insuficiente, dependendo do que queremos analisar, sendo necessário fazer modificações, como é o caso que será discutido a partir desse momento.

Gilpin e Ayala propõem o estudo da dinâmica da *Drosophila* já que é bastante estudada e há uma extensa literatura sobre o assunto. O objetivo é determinar se seu modelo pode ser utilizado para explicar a dinâmica global da interação entre espécies. Eles demonstram que, para o estudo de sete espécies de *Drosophila*, o modelo linear de Lotka-Volterra é inadequado. A solução proposta por Gilpin e Ayala foi a introdução de termos não lineares para explicar a dinâmica populacional. Gilpin e Ayala propõem, na verdade, dois modelos que produzem melhores resultados que o de Lotka-Volterra, a saber,

$$\frac{dN_i}{dt} = r_i N_i \left[ 1 - \left( \frac{N_i}{K_i} \right)^{\theta_i} - \alpha_{ij} \frac{N_j}{K_i} \right], \quad (6.2)$$

e

$$\frac{dN_i}{dt} = r_i N_i \left( 1 - \frac{N_i}{K_i} - \frac{N_i^2}{K_i} - \alpha_{ij} \frac{N_j}{K_i} \right). \quad (6.3)$$

Estamos interessados no estudo do primeiro modelo, que a partir de agora chamaremos de modelo de Gilpin-Ayala. Observe que para  $\theta_i = 1$ , o modelo em questão se transforma no de Lotka-Volterra. Os parâmetros  $\theta_i < 1$  são para as espécies de invertebrados e  $\theta_i > 1$  para os vertebrados.

É possível fazer uma análise do crescimento e competição para populações de duas espécies de *Drosophila*: a *willistoni* e a *pseudoobscura*. As espécies de *Drosophilas* são conhecidas como mosca-da-fruta e existem mais de 1500 diferentes espécies. E a duração total do ciclo vida desse inseto é, em média, 12 dias.

Os responsáveis pelo modelo de Gilpin-Ayala analisaram o comportamento e as características das espécies para obter os

parâmetros descritos na equação (6.2), e que são usados também neste trabalho. Para a espécie de *Drosophila willistoni*, temos que  $r = 1,496$  com uma margem de erro de 0,167,  $K = 1332$  com uma margem de erro de 128,  $\alpha = 0,713$  com uma margem de erro de 0,077 e  $\theta = 0,35$  com uma margem de erro de 0,04. Da mesma forma, para a espécie de *Drosophila pseudoobscura*, temos que  $r = 4,513$  com uma margem de erro de 0,259,  $K = 791$  com uma margem de erro de 43,  $\alpha = 0,0869$  com uma margem de erro de 0,0062 e  $\theta = 0,12$  com uma margem de erro de 0,02 [7]. Substituindo esses valores no modelo de Gilpin-Ayala, obtemos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1,496x \left[ 1 - \left( \frac{x}{1332} \right)^{0,35} - 0,713 \frac{y}{1332} \right], \\ \frac{dy}{dt} = 4,513y \left[ 1 - \left( \frac{y}{791} \right)^{0,12} - 0,0869 \frac{x}{791} \right], \end{cases} \quad (6.4)$$

sujeito às condições iniciais,

$$x(1) = 2, \quad y(1) = 1,$$

com  $x$  e  $y$  representando as espécies *Drosophila willistoni* e *Drosophila pseudoobscura*, respectivamente.

Por meio das comparações feitas em seções anteriores, sobre aproximação numérica, vimos que o Método de Runge-Kutta de quarta ordem tem o grau de precisão maior que os Métodos de Euler e Euler aprimorado. Com isso, usaremos o Método de Runge-Kutta para as implementações numéricas.

Da Figura 6.1, podemos analisar que a espécie *pseudoobscura* tem um crescimento mais acentuado que a *willistoni* e um dos motivos para isso é a respectiva taxa de crescimento ser maior. No entanto, o fato das duas espécies competirem pela mesma fonte de alimento, e a *pseudoobscura* ter uma capacidade de carregamento menor, acaba resultando em uma diminuição em sua população.

Já a espécie *willistoni* tem uma capacidade de carregamento maior, permitindo que a população consiga manter seu crescimento até atingir um certo equilíbrio entre as espécies. Esse equilíbrio sig-

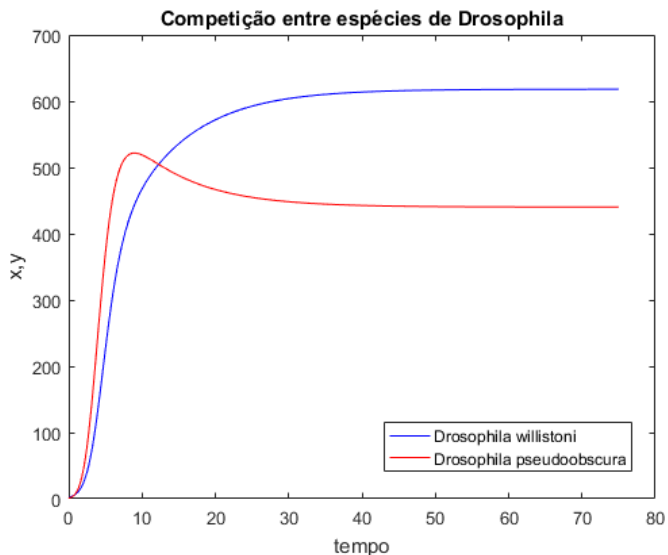


Figura 6.1 – Comportamento do crescimento populacional. Fonte: A autora.

nifica que, ao passar do tempo, os recursos naturais são suficientes para manter as duas espécies.

Com o intuito de entender melhor o comportamento das equações diferenciais, apresentaremos alguns testes em que trocamos os valores das constantes.

**Teste 1:** Usando os mesmos valores, já mencionados, para as constantes, trocando apenas os valores da taxa de crescimento, fazendo com que a espécie da *Drosophila willistoni* tenha uma taxa maior que a *pseudoobscura*, ficamos com

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4,513x \left[ 1 - \left( \frac{x}{1332} \right)^{0,35} - 0,713 \frac{y}{1332} \right], \\ \frac{dy}{dt} = 1,496y \left[ 1 - \left( \frac{y}{791} \right)^{0,12} - 0,0869 \frac{x}{791} \right]. \end{cases}$$

Todos os parâmetros da equação são responsáveis pelo com-

portamento das espécies, como podemos ver na Figura 6.2, em que o crescimento da willistoni é maior que a pseudoobscura. No entanto, como o ambiente não suporta muitos indivíduos, acaba gerando um decréscimo até o momento em que ambas as trajetórias atingem um certo equilíbrio, e as espécies conseguem se manter nesse ambiente de forma mais harmoniosa, pois a competição entre elas não irá afetar na quantidade de indivíduos.

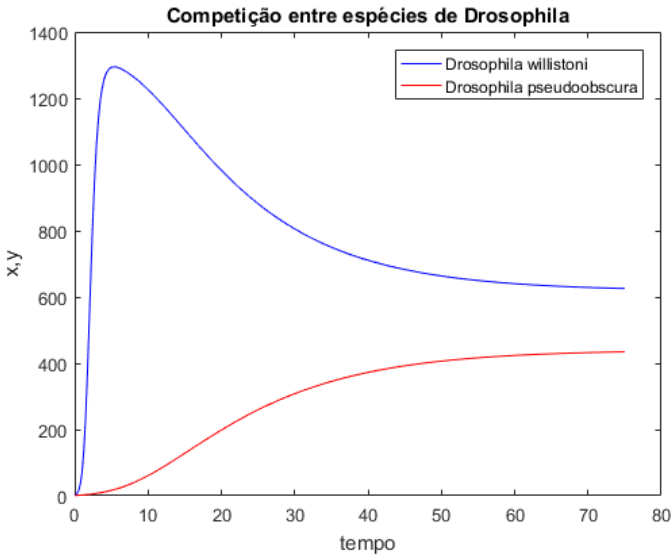


Figura 6.2 – Crescimento populacional. Fonte: A autora.

**Teste 2:** Trocaremos aqui apenas os valores de  $K$  entre as espécies, os quais representam a capacidade de carregamento, em outras palavras, o quanto as espécies conseguem se manter em um ambiente controlado. Nesse caso, o sistema fica da forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1,496x \left[ 1 - \left( \frac{x}{791} \right)^{0,35} - 0,713 \frac{y}{791} \right], \\ \frac{dy}{dt} = 4,513y \left[ 1 - \left( \frac{y}{1332} \right)^{0,12} - 0,0869 \frac{x}{1332} \right]. \end{cases}$$

A população de *Drosophila* da espécie *willistoni*, representada pela primeira equação diferencial do sistema, já possuía uma

taxa de crescimento menor que a pseudoobscura e, acabou recebendo também uma menor capacidade de carregamento, fazendo com que, a população não consiga se manter nesse ambiente, resultando na extinção de sua espécie. Esse cenário é ilustrado na Figura 6.3.

Já o comportamento da espécie pseudoobscura é crescente até atingir a capacidade ambiental máxima, sem a interferência de um competidor de maneira significativa, pois, depois de um certo período, a espécie willistoni deixa de existir.

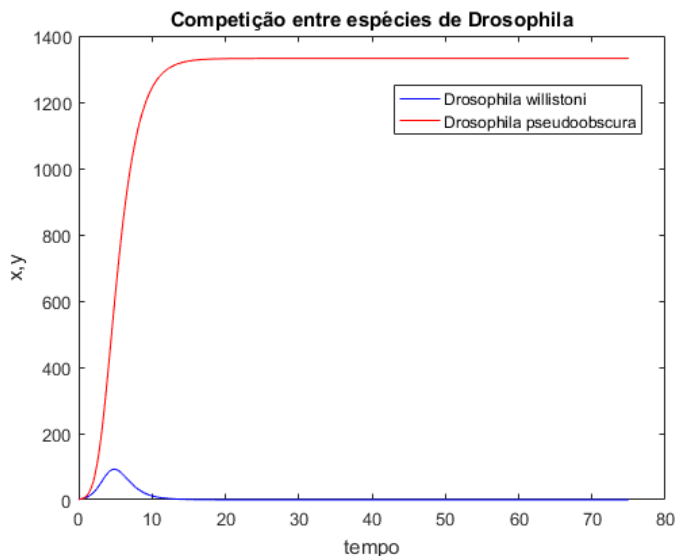


Figura 6.3 – Crescimento populacional. Fonte: A autora.

**Teste 3:** Trocaremos apenas os valores de  $\alpha$ , para observar o que acontece com o comportamento das espécies em competição, de modo que o sistema fica:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1,496x \left[ 1 - \left( \frac{x}{1332} \right)^{0,35} - 0,0869 \frac{y}{1332} \right], \\ \frac{dy}{dt} = 4,513y \left[ 1 - \left( \frac{y}{791} \right)^{0,12} - 0,713 \frac{x}{791} \right]. \end{cases}$$

Temos que a constante  $\alpha$  é responsável pela redução line-



ar da taxa de crescimento, devido à ação de um competidor, ou seja, quanto maior for o valor da ação que uma espécie exerce sobre a outra, mais afeta no crescimento populacional. Como é o caso da espécie pseudoobscura, que ao substituir o valor de 0,0869 para 0,713, resulta numa redução linear bem crítica, levando a população à extinção, como podemos ver na Figura 6.4. Esse cenário se dá principalmente pela baixa capacidade ambiental que a pseudoobscura tem, e mesmo com uma taxa de crescimento maior que a espécie willistoni não é suficiente para manter a população.

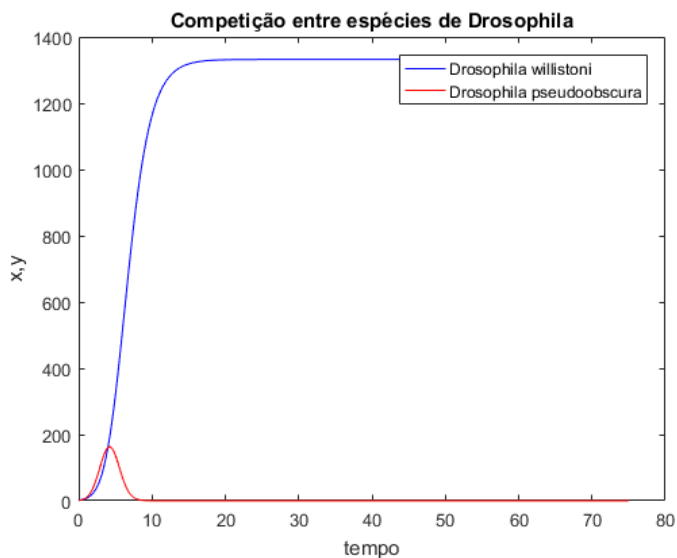


Figura 6.4 – Crescimento populacional. Fonte: A autora.



## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foram vistos conceitos fundamentais para o estudo de equações diferenciais ordinárias e necessários para a construção de modelos matemáticos mais simples. Essas ferramentas foram úteis para que chegássemos ao modelo de Gilpin-Ayala.

Para as implementações gráficas, foi crucial a compreensão de alguns métodos numéricos que geraram soluções aproximadas de determinados problemas e, principalmente, para os modelos de crescimento e competição entre espécies. O fato de conseguir traduzir um problema para uma equação matemática e, em seguida, representar em um gráfico é muito importante e ilustrativo na área da biomatemática.

As análises qualitativas foram fundamentais para entendermos o comportamento das soluções. Junta-se a isso, as avaliações geométricas que fizemos para identificar o que acontece se forem feitas modificações ao modelo. Podemos concluir que, por meio do estudo de sistemas de equações diferenciais, é possível construir modelos cada vez mais eficazes e com aplicações em diferentes áreas do conhecimento.



## REFERÊNCIAS

- [1] BARBOSA, Peterson Taylor C. *Estudo de Caso do Modelo de Competição de Gilpin-Ayala com Análise de Liapunov da Estabilidade de Sistemas de Duas Espécies*. Dep. de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP, 2003.
- [2] BARROSO, Leônidas C. ; BARROSO, Magali Maria de A.; CAMPOS, Frederico Ferreira; CARVALHO, Mácio Luiz Bunte; MAIA Miriam Lourenço. *Cálculo numérico (com aplicações)* 2<sup>a</sup>ed. São Paulo: Harbra Ltda, 1987.
- [3] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. *Equação diferenciais elementares e problemas de valores de contorno* 9<sup>a</sup>ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.
- [4] CLARK, Colin W. *Mathematical Bioeconomics* 2<sup>a</sup>ed. New York: Wiley-Interscience, 1990, p. 53.
- [5] EVANGELISTA, Thaline G. *Sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares: uma abordagem numérica*. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal do Pará. Castanhal, 2018.
- [6] FIGUEIREDO, Djairo Guedes; NEVES, A Freiria. *Equações Diferenciais Aplicadas*, Coleção Projeto Euclides IMPA, 1997.
- [7] GILPIN, Michael E.; AYALA, Francisco J. *Global Models of Growth and Competition*. Proc. Nat. Acad. Sei., USA, 1973.
- [8] GUIDORIZZI, Hamilton. *Um curso de cálculo vol.4* 5<sup>a</sup>ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- [9] ZILL, Dennis G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem* tradução da 9<sup>a</sup>ed. norte-americana.