UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS BLUMENAU
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Felipe Faust Bernal

A formalização dedekindiana da aritmética

Blumenau
2021

Felipe Faust Bernal

A formalização dedekindiana da aritmética

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática do Campus Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Júlio Faria Corrêa, Dr.

Blumenau
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Bernal, Felipe Faust
A formalização dedekindiana da aritmética / Felipe Faust Bernal ; orientador, Júlio Faria Corrêa, 2021.
78 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Graduação em Matemática, Blumenau, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Richard Dedekind. 3. Fundamentos da aritmética. 4. História da matemática. 5. Teoria dos conjuntos. I. Corrêa, Júlio Faria. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Matemática. III. Título.

Felipe Faust Bernal

A formalização dedekindiana da aritmética

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Licenciado em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática.

Blumenau, 21 de Setembro de 2021.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Julio Faria Correa
Data: 08/10/2021 14:06:13-0300
CPF: 045.818.289-37
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Júlio Faria Corrêa, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Julio Faria Correa
Data: 08/10/2021 14:07:44-0300
CPF: 045.818.289-37
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Júlio Faria Corrêa, Dr.
Orientador
Instituição UFSC

Prof. André Vanderlinde, Dr.
Avaliador
Instituição UFSC

Prof. Felipe Delfini Caetano Fidalgo, Dr.
Avaliador
Instituição UFSC

Dedico este trabalho aos meus pais, Eliseu e Fernanda, que sempre me apoiaram e incentivaram nos estudos.

AGRADECIMENTOS

Antes de qualquer outra coisa, não poderia deixar de agradecer aos meus pais, Eliseu e Fernanda. Durante minha trajetória escolar e universitária eles me motivaram a seguir em frente e a dar o meu melhor. Mesmo que por vezes duvidasse de minha capacidade, eles sempre acreditaram em mim. O constante suporte deles foi essencial para garantir que eu chegasse até aqui.

Agradeço também, é claro, ao meu orientador Júlio Faria Corrêa. Tivemos excelentes conversas sobre a história e a filosofia da Matemática durante as orientações de iniciação científica e de TCC, e pude aprender muito com essas discussões e com suas recomendações de autores e leituras. O conhecimento e o entusiasmo dele ao lidar com esses assuntos me motivaram ainda mais a continuar meus estudos nessa área.

Aos professores André Vanderlinde e Felipe Fidalgo, que aceitaram compor minha banca, bem como ao professor Maicon Benvenutti, membro suplente da mesma, também deixo meus agradecimentos. Os comentários de apoio e as sugestões dadas na qualificação deste trabalho foram-me muito úteis na sua escrita.

Deixo ainda um agradecimento geral aos vários professores da UFSC que me acompanharam durante a graduação. Além das excelentes aulas ministradas por eles, foi marcante a gentileza e prestatividade do corpo docente da universidade. A evidente dedicação dos professores incentivou ainda mais meu interesse pela Matemática, confirmando a certeza de que escolhi o curso ideal para mim.

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo compreender como o matemático alemão Richard Dedekind construiu uma formalização para os números reais e os números naturais na segunda metade do século XIX. Nesse sentido, ele possui um caráter historiográfico, baseado na leitura e análise dos ensaios publicados por Dedekind sobre o tema. Outras obras de história e filosofia da matemática foram também investigadas para esclarecer o contexto histórico e filosófico por trás dessas publicações, a recepção e repercussão delas, e um pouco da biografia desse matemático. Desse modo, constatou-se que Dedekind utilizou-se de conceitos da então emergente teoria dos conjuntos para fundamentar suas definições. Os trabalhos dele se constituíram então em modelos exemplares da prática que surgia na época de utilizar os conjuntos como base para conceitos matemáticos em geral. Para explicitar isso, buscou-se apresentar e discutir os principais pontos, definições e teoremas que aparecem nos ensaios, visando garantir uma visão geral das obras. Com toda essa análise pôde-se concluir que, apesar de seus trabalhos sobre os fundamentos da aritmética não serem tão famosos ou reconhecidos atualmente, as ideias de Dedekind sobre o tema foram muito ingeniosas e influentes nos desenvolvimentos posteriores da matemática.

Palavras-chave: Fundamentos da aritmética. História da matemática. Richard Dedekind. Teoria dos conjuntos.

ABSTRACT

This work aims to understand how the german mathematician Richard Dedekind developed his formalization of the real and natural numbers in the second half of the 19th century. Therefore, it has a historiographical theme, being based on the reading and analysis of the essays published by Dedekind about this subject. Other texts about history and philosophy of mathematics were also studied in order to clarify the philosophical and historical contexts behind these publications, their reception and repercussions, and a little bit about the mathematician's life. Thus, it was found that Dedekind used concepts from the then emerging set theory as a foundation for his definitions. His works were, therefore, exemplary models of the practice that was being developed back then of using sets as basis for mathematical concepts in general. In order to make this explicit, it was sought to present and discuss the primary points, definitions and theorems that appeared in the essays, thereby aiming to give an overview of these works. With these analyses it was concluded that, despite his works on the foundations of arithmetic not being as famous or well recognized nowadays, Dedekind's ideas about the subject were very ingenious and influent in the later development of mathematics.

Keywords: Foundations of arithmetic. History of mathematics. Richard Dedekind. Set theory.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O século XIX é normalmente reconhecido como um período marcante no desenvolvimento formal da Matemática, sendo frequentemente descrito como a idade do rigor, segundo Roque (2012, p. 405). Afinal, foi nessa época que surge a tão importante teoria dos conjuntos e que a Análise começa a adquirir a forma que consideramos até hoje como "correta".

Dentro desse contexto, a redefinição dos números em termos de teoria dos conjuntos tem um valor histórico considerável. Ela não apenas representa um dos primeiros esforços de fundamentação da Matemática em termos conjuntistas, como também teve um papel crucial dentro do projeto de aritmetização da Análise. Assim, o estudo das primeiras publicações sobre o tema pode ser interessante para se verificar como elas abordaram o assunto e também as influências delas nas nossas concepções atuais.

A questão é que vários matemáticos influentes lidaram com essa temática na época. Georg Cantor e Karl Weierstrass, por exemplo, conceberam maneiras próprias de construir os números reais, enquanto Giuseppe Peano e Gottlob Frege publicaram trabalhos fascinantes sobre os números naturais. Porém, uma análise suficientemente detalhada e esclarecedora sobre várias produções se provaria extensa e complicada demais. Logo, dentro do escopo deste trabalho, optou-se por estudar um autor específico.

Nesse sentido, um matemático alemão se destaca em relação a esse tópico, Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916). Conhecido também por suas contribuições na Álgebra, particularmente na teoria de ideais, Dedekind publicou trabalhos muito interessantes nos quais construiu, de maneira inédita, tanto os números reais como os naturais, utilizando a emergente teoria dos conjuntos.

O objetivo geral deste trabalho é compreender as contribuições de Dedekind no que se refere às construções formais dos conjuntos dos números naturais e dos números reais. Os objetivos específicos, por sua vez, são quatro. O primeiro deles é entender um pouco da trajetória biográfica de Dedekind. O segundo é investigar o contexto acadêmico em que ele estava inserido para identificar suas motivações, envolvendo questões tanto matemáticas como filosóficas. O terceiro é explicitar de que forma Dedekind construiu os números reais e naturais. O quarto, por fim, é identificar como as ideias dele foram recebidas e quais foram suas repercussões.

Com esses objetivos em mente, o desenvolvimento do trabalho foi dividido em cinco capítulos[1]. No primeiro é apresentada uma breve biografia de Richard Dedekind. No segundo, exploramos o contexto acadêmico da Matemática alemã da época em que ele viveu, buscando identificar aqueles aspectos que podem ter servido de inspiração ou motivação para seus trabalhos. No terceiro, analisamos o ensaio *Continuidade e números irracionais*[2], no qual Dedekind apresenta sua construção do conjunto dos números reais, indicando como o texto foi estruturado e quais foram as ideias dadas por ele. O mesmo é feito no quarto capítulo, mas em relação ao ensaio *O que é o que deveriam ser os números?*[3], em que ele trata dos números naturais. No quinto capítulo, enfim, discutimos a recepção e as repercussões dessas obras.

Desse modo, este trabalho tem um cunho essencialmente historiográfico. Considerando como é comum na Matemática atual definir os números naturais de forma axiomática e construir os conjuntos numé-

[1] Deve-se entender por “desenvolvimento do trabalho” que não estamos considerando a introdução ou as conclusões nesta contagem.

[2] A obra original em alemão não foi estudada. Em vez disso, foi analisado o livro *Essays on the theory of numbers*, que compila as traduções para o inglês dos dois ensaios de Dedekind sobre os números reais e os números naturais. Aliás, chamamos os dois textos de *ensaios* justamente para manter a concordância com o título do compilado em inglês.

[3] Ver nota anterior.

ricos subsequentes em termos dos naturais, é interessante identificar como essa prática surgiu. Assim, espera-se que a análise das obras de Dedekind evidenciem a criatividade por trás de suas definições, as motivações históricas e a significância delas no desenvolvimento posterior da Matemática.

Agora, como trabalho historiográfico, deve-se justificar uma decisão tomada em relação à forma como os conteúdos matemáticos foram apresentados. Os termos, as notações e os métodos de Dedekind não foram convertidos para as respectivas formas atuais, mantendo-os tais como nos ensaios originais. Essa decisão foi tomada para não deturpar os trabalhos do autor, evitando dar-lhes um caráter mais contemporâneo do que realmente possuem.

Também é importante esclarecer a concepção de rigor aqui tomada como base. Como Roque (2012, p. 406-407) destaca, os matemáticos do século XIX não decidiram de maneira unânime que novos padrões matemáticos deveriam substituir os que estavam em uso. Aliás, os matemáticos do século XVIII sequer percebiam seus métodos como pouco rigorosos ou inadequados. Eles também tinham preocupações quanto aos fundamentos de suas técnicas, mas a própria noção de rigor é histórica e foi se modificando com o tempo.

No caso da virada do século XVIII para o XIX, a noção de rigor se transformou, de acordo com Roque (2012, p. 407), porque as crenças e técnicas dos matemáticos da época não eram mais capazes de resolver os problemas que surgiam na Matemática. Um desses problemas era, justamente, a concepção de números como quantidades, o que em certo tempo passou a bloquear o desenvolvimento da Matemática.

Na leitura dos capítulos a seguir, dever-se-á manter em mente então que expressões como "rigorização" ou "formalização" serão utilizadas de maneira relativa. Não deve-se entender com elas que as concepções anteriores de números não eram consideradas rigorosas ou formais, mas que elas não condizem com os padrões matemáticos atuais. Como será mostrado no decorrer das discussões, os trabalhos de Dedekind possuem certas abordagens já muito semelhantes às utilizadas hoje, e é essa observação histórica que será explicitada.

2 A VIDA DE RICHARD DEDEKIND

Antes de adentrar na análise mais geral do contexto em que Dedekind estava inserido ou de seus trabalhos, vale a pena entender a trajetória profissional dele. Julius Wilhelm Richard Dedekind nasceu em 5 de outubro de 1831 em Brunsvique. Seu pai foi Julius Levin Ulrich Dedekind, jurista, professor e advogado corporativo do Colégio Carolinum, uma instituição pré-universitária. Sua mãe foi Caroline Henriette, filha de um professor do Carolinum e neta de um mestre dos correios imperial. Richard era o mais novo de quatro filhos (JAMES, 2002, p. 196).

Entre os sete e os dezesseis anos, Dedekind frequentou o ginásio em Brunsvique, e na escola seu interesse foi primeiramente direcionado para Física e Química, mas logo decidiu se concentrar na Matemática. Em 1848, ingressou no Carolinum, onde aprendeu os elementos de Geometria Analítica, Álgebra, Mecânica e Cálculo, e em 1850 ingressou na Universidade de Göttingen (JAMES, 2002, p. 196).

No inverno de 1850-1851, Dedekind frequentou as aulas de Carl Friedrich Gauss sobre o método dos mínimos quadrados, e no semestre seguinte assistiu também às aulas de Gauss de geodésia avançada. Em 1852, após apenas quatro semestres, ele completou seu trabalho de doutorado sob orientação de Gauss, com uma dissertação sobre a teoria de integrais eulerianas (JAMES, 2002, p. 198).

No entanto, Dedekind não havia feito o suficiente para se qualificar para trabalhos de pós-graduação na Universidade de Göttingen, então passou mais dois anos preenchendo as lacunas, qualificando-se enfim como *privatdozent*[1] poucas semanas após Riemann. Mesmo após formado, Dedekind continuou com seus estudos, frequentando as

[1] Um *privatdozent*, explica James (2002, p. 99), possuía o direito de dar aulas em universidades, mas sem remuneração. Esses lecionadores podiam, todavia, cobrar taxas dos alunos que atendiam suas aulas.

aulas de Dirichlet em Göttingen em 1855 sobre teoria dos números, teoria potencial, integrais definidas e equações diferenciais parciais. Ele também atendeu, de 1855 a 1857, as aulas de Riemann sobre funções abelianas e elípticas (JAMES, 2002, p. 198-199).

Segundo James (2002), as aulas de Dedekind nessa época são notáveis porque ele provavelmente foi o primeiro professor universitário a dar aulas sobre teoria de Galois, e o conceito de corpo, da álgebra abstrata, teria sido introduzido nesse curso. Apesar da importância histórica, no entanto, poucos alunos teriam frequentado essas aulas.

Em 1858, Dedekind foi indicado para uma cátedra no *Polytechnikum* em Zurique, mas em 1862 mudou-se para uma posição no *Polytechnikum* em Brunsvique, onde permaneceu o resto da vida, ignorando a possibilidade de mudar-se para um posto mais prestigioso[2]. De acordo com James (2002, p. 199, tradução nossa), "O pequeno e familiar mundo em que ele vivia, próximo do irmão e da irmã, satisfazia completamente suas necessidades. A posição dele dava todo o lazer e a liberdade necessárias para a pesquisa científica"[3].

Após se tornar reitor do *Polytechnikum* em 1872 por três anos, Dedekind participou da transformação do mesmo em uma universidade técnica. No primeiro dia de abril de 1894, ele se aposentou oficialmente e teve uma vida quieta, apesar de ainda lecionar de vez em quando. Ele desfrutou de boa saúde até falecer pacificamente em 12 de fevereiro de 1916, aos 84 anos.

Essa biografia apresentada foi curta não apenas por um desejo de brevidade, mas também pela falta de informações mais específicas sobre a vida de Dedekind. Ele não escreveu uma autobiografia e não

[2] Segundo Ferreirós (2007, p. 31), Dedekind quase não recebeu propostas de posições universitárias até 1870 devido à lentidão com a qual ele publicava pesquisas originais.

[3] No original: "The small, familiar world in which he lived in close association with his brother and sister completely satisfied his needs. His position gave him all the leisure and freedom he required for scientific research".

comentou muito sobre si em trabalhos ou cartas. O que se pode notar é que a carreira dele não foi tão estelar como se esperaria de um matemático tão renomado. Apesar disso, Dedekind estudou e trabalhou em um período de grandes mudanças nas práticas e concepções matemáticas, o que moldou significativamente o papel tomado por ele nos fundamentos da Matemática.

3 O CONTEXTO ACADÊMICO DE DEDEKIND

A segunda metade do século XIX foi marcada pelo alto desenvolvimento intelectual da comunidade científica alemã e de suas universidades. Como Ferreirós (2007, p. 4-5) destaca, a invasão napoleônica no início do século deixou clara a necessidade de elevar a situação política, econômica, militar e científica da Alemanha ao patamar da França. Isso porque, em certa medida, os alemães justificaram sua derrota ao alto nível da educação científica usufruída pelos oficiais franceses.

Esse alto nível foi consequência das reformas educacionais realizadas na França após a revolução de 1789, particularmente pela criação da *École Polytechnique* parisiense em 1794 (FERREIRÓS, 2007, p. 5). Foi nessa escola que, pela primeira vez, uma educação superior foi oferecida regularmente aos estudantes, incluindo o Cálculo Diferencial e Integral.

Os estados alemães decidiram tomar reformas semelhantes. Alguns deles, porém, não se limitaram a copiar o modelo francês, criando um modelo próprio. O desejo por reformas educacionais se misturou com o movimento neohumanista que havia surgido na segunda metade do século XVIII. Esse movimento aspirava por uma formação integral dos indivíduos, com uma educação abrangente, harmônica e não guiada por objetivos utilitaristas (FERREIRÓS, 2007, p. 5). Tais ideais foram responsáveis por modificações substanciais na educação universitária, como Ferreirós (2007, p. 5, tradução nossa) indica:

> Professores neohumanistas foram além do papel tradicional de um professor universitário, a saber a transmissão de conhecimentos bem estabelecidos, expandindo-o por meio de críticas e pesquisa. Através da instituição do seminário, grupos seletos de estudantes foram ensinados como realizar pesquisas por si mesmos, e a pesquisa veio a ser vista como

um ingrediente indispensável do ensino.[1]

A reforma educacional germânica é normalmente remontada à fundação da Universidade de Berlin em 1810. Todavia, apenas no final dos anos 1820 é que o ensino de tópicos de pesquisa se iniciou, com cursos e seminários oferecidos por Carl Jacobi na Universidade de Königsberg e, um pouco mais tarde, por Johann Dirichlet em Berlim (FERREIRÓS, 2007, p. 6).

A universidade alemã mais avançada no final do século XVIII, no entanto, foi a de Göttingen. Foi nela que Carl Friedrich Gauss trabalhou no início do século XIX, e em meados de 1900 ela era um centro de pesquisas proeminente sob Felix Klein e David Hilbert. Contudo, a Universidade de Göttingen era bem diferente em torno de 1850, quando Dedekind lá estudou. Nessa época ela ainda era uma universidade tradicional em relação à Matemática, não envolvendo um alto nível de pesquisa. Cursos mais avançados dessa disciplina não eram oferecidos (FERREIRÓS, 2007, p. 24-25).

Apenas após a morte de Gauss em 1855 é que a combinação de ensino e pesquisa chegou a Göttingen. Na época, Dirichlet aceitou o convite para trabalhar na Universidade de Göttingen, abrindo uma nova era para os estudos matemáticos nela. Suas aulas, consideradas brilhantes, iam até os tópicos recentes de pesquisa. A presença de Dirichlet, Riemann e Dedekind em Göttingen, o primeiro como professor e os últimos como alunos, tornaram-na um dos mais importantes centros matemáticos, comparável apenas com Berlim e Paris (FERREIRÓS, 2007, p. 26).

[1] No original: "Neohumanist professors went beyond the traditional role of a university teacher, namely the transmission of well-established knowledge, to its expansion by means of criticism and research. Through the institution of the seminar, selected groups of students were taught how to do research by themselves, and research came to be seen as an indispensable ingredient of teaching".

De fato, Dirichlet foi uma figura particularmente notável e influente do período. Como Ferreirós (2007, p. 9-10) comenta, suas contribuições em teoria dos números, Análise de Fourier, integrais múltiplas, teoria potencial e física matemática foram de fundamental importância. Ele teria influenciado diversos nomes notáveis, como Heine, Eisenstein, Kronecker, Christoffel, Lipschitz, Riemann e Dedekind.

Dedekind, em particular, se considerava um discípulo de Dirichlet. Tanto que, segundo Ferreirós (2007, p. 28), Dedekind escreveu em uma carta para sua família que ele devia mais a Dirichlet do que a qualquer outro homem. Considerando a preocupação de Dirichlet com o rigor matemático, não deve ser surpresa que Dedekind, tão envolvido com a teoria dos números, tenha dedicado tantos esforços na formalização dos números.

Mas, além da influência direta de Dirichlet, é importante ressaltar que Dedekind, como aluno de Göttingen, estava imerso em uma cultura científica bastante particular. Isso porque, segundo Roque (2012, p. 419), os matemáticos alemães da época tinham bastante proximidade com as faculdades de filosofia e com os filósofos. Isso os teria levado a orientações mais teóricas, motivadas por pressupostos filosóficos.

Ferreirós (2007, p. 7) acredita que muitas das características especiais dos cientistas alemães se devem ao contato estabelecido por eles com os filósofos. Mais particularmente, ele aponta que as concepções epistemológicas kantianas eram altamente influentes nos círculos científicos alemães, tornando-se um tipo de senso comum.

Para compreender melhor as implicações disso, façamos um breve desvio para explicar os pontos fundamentais da filosofia kantiana da Matemática. Segundo Kant, as asserções ou juízos podem ser classificados como analíticos ou sintéticos, e a *a priori* ou *a pos-*

teriori. Silva (2007, p. 93) explica que "as verdades analíticas são aquelas em que a ideia denotada pelo sujeito contém a ideia denotada pelo predicado [...]; as sintéticas, aquelas em que as ideias não estão nessa relação". As asserções *a priori*, por sua vez, são aquelas que não necessitam de experiências empíricas para serem comprovadas, contrariamente às asserções *a posteriori*.

Alguns exemplos podem ajudar na compreensão desses conceitos. Uma asserção analítica *a priori* seria, por exemplo, "Todos os triângulos têm três lados", pois a própria definição da palavra "triângulo" nos dá essa informação. Já as proposições analíticas *a posteriori* não existem, pois as definições de asserção analítica e asserção *a posteriori* são incompatíveis. Se a ideia denotada pelo sujeito da asserção contém a ideia denotada pelo predicado, sabemos imediatamente sua veracidade sem precisar de verificações empíricas.

As asserções sintéticas *a posteriori* incluem exemplos como "o ponto de ebulição da água pura no nível do mar é 100ºC" (SILVA, 2007, p. 94). Não temos como saber se essa afirmação é verdadeira apenas analisando o significado das palavras envolvidas. É preciso realizar verificações empíricas através dos sentidos. De modo geral, as diversas proposições científicas, como da física ou da química, são sintéticas *a posteriori*.

A grande questão da filosofia kantiana da Matemática reside, no entanto, nas asserções sintéticas *a priori*. As afirmações matemáticas, como "$5 + 7 = 12$" ou "A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo dá 180º", são para Kant os exemplos por excelência de asserções sintéticas *a posteriori* (SILVA, 2007, p. 97). Na visão desse filósofo, asserções como essas não são verificáveis pelo significado de seus termos[2], mas também não dependem de confirmações empíricas.

[2] A princípio nada na definição de triângulo, por exemplo, informa qualquer coisa sobre a medida dos seus ângulos internos.

Mas se esse é o caso, como podemos prová-las?

A saída de Kant foi definir os conceitos de *intuição sensível*, *sensibilidade empírica* e *intuição pura*. Silva (2007, p. 98) explica que as intuições sensíveis são os dados dos sentidos e que a sensibilidade empírica é a faculdade que permite sermos afetados pelo mundo através dos sentidos. É devido à sensibilidade empírica que as asserções sintéticas *a posteriori* podem existir, já que é por essa sensibilidade que experimentamos o mundo empírico.

As asserções sintéticas *a priori*, por serem sintéticas, também dependem de intuições. Em vez das intuições sensíveis, no entanto, elas dependem das intuições puras do espaço e do tempo. A ideia é que os nossos sentidos sempre nos dão algo no espaço e no tempo, mas não o espaço e o tempo em si. Como Silva (2007, p. 99) elucida, podemos tocar em algum objeto no espaço, mas não o espaço em si; podemos ouvir uma melodia no tempo, mas não o tempo em si. Apesar disso, claramente podemos perceber o tempo e o espaço, e é por isso que Kant os chamou de intuições puras, independentes dos sentidos.

A Matemática seria então, de certo modo, a ciência do espaço e do tempo. As proposições ou afirmações geométricas são verificadas em nossa imaginação[3] através da intuição pura do espaço, enquanto as afirmações aritméticas são comprovadas pela intuição pura do tempo[4]. Essa teoria é bastante abstrata e, a bem da verdade, pode não ser muito convincente em alguns aspectos[5]. De qualquer maneira, Silva

[3] Isso não significa que não seria permitido fazer a verificação geométrica em uma folha de papel, apenas que não seria necessário fazê-lo.

[4] No caso da afirmação “$5 + 7 = 12$”, por exemplo, Silva (2007, p. 102) explica que podemos produzir uma representação intuitiva dos conceitos 5 e 7 como cinco e sete “instantes em sucessão temporal”, respectivamente. Visualmente poderíamos representar esses instantes como pontinhos e perceber que a junção das representações de 5 e 7 formam a representação de 12.

[5] Silva (2007, p. 109) destaca, em particular, que o caráter sintético da Aritmética não é tão crível. A Geometria como ciência do espaço parece bastante razoável, mas o mesmo não pode ser dito sobre a Aritmética como ciência do tempo.

(2007, p. 108) salienta que a filosofia da Matemática de Kant encantou pela elegância e genialidade e serviu como influência para filosofias posteriores da Matemática.

O problema para a filosofia kantiana é que, durante o século XIX, os desenvolvimentos da Matemática a afastaram do intuitivo e aproximaram-na do abstrato. O exemplo mais comum disso é a emergência das geometrias não-euclidianas que, apesar de consistentes, não correspondem à intuição geométrica. Com efeito, a filosofia de Kant admitia a existência de um único espaço, cuja estrutura seria euclidiana e, portanto, incompatível com as novas geometrias (SILVA, 2007, p. 104).

Foi essa passagem do intuitivo ao abstrato que resultou na formação da corrente filosófica denominada logicismo, a qual prega que os conhecimentos matemáticos são meras extensões ou consequências das leis lógicas. A própria Matemática nada mais seria do que lógica pura. Segundo Ferreirós (2007, p. 15), esse movimento foi uma tendência, a princípio alemã, de reação aos pressupostos intuitivos da filosofia kantiana.

Reck (2019, p. 171) comenta que, apesar de Gottlob Frege e Bertrand Russell serem vistos como os mais notáveis representantes do logicismo, Dedekind foi o logicista mais proeminente do final do século XIX, mais ainda que Frege[6]. Logo no prefácio da primeira edição do ensaio *O que são e o que deveriam ser os números?*, Dedekind (1963, p. 31, tradução nossa) faz o seguinte comentário:

> Ao falar da Aritmética (Álgebra, Análise) como parte da lógica eu quero dizer que considero o conceito de número como completamente independente das noções ou intuições de espaço e tempo, que o

[6] De acordo com Reck (2019, p. 175), os trabalhos de Frege sobre a lógica e os fundamentos da Aritmética não foram bem reconhecidos na época, obtendo destaque apenas após Bertrand Russell se apropriar do logicismo fregeano em suas obras.

> considero um resultado imediato das leis do pensamento.[7]

Ficam evidenciadas, nessa explicação, as influências das ideias de Kant sobre as concepções matemáticas da época. Como Reck (2019, p. 172) destaca, Dedekind não apenas apresenta sua visão de que a Aritmética é um resultado das leis do pensamento como uma alternativa ao apelo à intuição, como se refere diretamente aos termos kantianos de intuição espaço-temporal. O matemático alemão esclarece em seguida que, contrário a Kant, ele considera que precisamos de uma compreensão adequada dos números reais para compreender o espaço e o tempo, e não o contrário:

> É apenas através do processo puramente lógico de construção da ciência dos números e subsequente obtenção do domínio numérico contínuo que ficamos adequadamente preparados para investigar as noções de espaço e tempo ao relacioná-los com o domínio numérico criado em nossa mente (DEDEKIND, 1963, p. 31-32, tradução nossa).[8]

Além dessa motivação filosófica pós-kantiana do logicismo, há ainda outro ponto histórico crucial para esse movimento, que foi o desenvolvimento da teoria dos conjuntos. Reck (2019, p. 175) ressalta que o uso da teoria dos conjuntos fez parte da base da reconstrução logicista dos números reais e naturais, estando presente nos projetos logicistas de Dedekind, Frege e Russell. De modo mais geral, Reck (2019, p. 174) aponta que existia na época um movimento de redefinição ou criação de entidades matemáticas através de conjuntos. Os

[7] No original: "In speaking of arithmetic (algebra, analysis) as a part of logic I mean to imply that I consider the number-concept entirely independent of the notions or intuitions of space and time, that I consider it an immediate result from the laws of thought".

[8] No original: "It is only through the purely logical process of building up the science of numbers and by thus acquiring the continuous number-domain that we are prepared accurately to investigate our notions of space and time by bringing them into relation with this number-domain created in our mind".

exemplos dados pelo autor de tais construções incluem os ideais da teoria algebraica dos números, de Dedekind, os números transfinitos de Cantor e os pontos no infinito da geometria projetiva.

Temos enfim as motivações históricas e filosóficas de Dedekind por trás da formalização da aritmética dos naturais e dos reais. É importante ressaltar, no entanto, que ele possuía preocupações pragmáticas sobre esse tema também, pensando por um ponto de vista mais matemático. Considerando a influência de Dirichlet sobre Dedekind, e a importância que ele dava às questões de rigor, isso não deve ser uma grande surpresa.

Assim, a primeira fonte de insatisfação encontrada por esse matemático em relação aos números está associada aos desenvolvimentos da Análise Matemática. Aliás, Ferreirós (2007, p. 117-118, tradução nossa) destaca que "é bem sabido que a necessidade de um tratamento adequado para os números reais foi sentido primeiramente em conexão com a rigorização da Análise"[9].

Segundo Reck (2019, p. 173), esse processo de rigorização é normalmente visto como motivado pela eliminação dos infinitesimais no Cálculo Diferencial, repensando a noção de limite em termos de épsilons e deltas, o que requer considerações precisas sobre os números racionais e reais. Entretanto, o projeto de aritmetização da Análise pode ser considerado como parte da demonstração de que a Ánalise é independente das noções de espaço e tempo, o que se encaixa bem com as concepções filosóficas apresentadas por Dedekind.

Em qualquer caso, a questão é que surgiu no século XIX um certo sentimento de insatisfação com os fundamentos da Análise. Um passo importante para a solução do problema foi tomado por Cauchy através das noções de limite e funções contínuas, mas isso não

[9] No original: "It is well known that the need for a sound treatment of the real numbers was first felt in connection with the rigorization of analysis".

bastava. Certos teoremas, como o teorema do valor intermediário[10], ainda possuíam demonstrações baseadas em argumentos geométricos intuitivos.

Esse problema foi destacado por Dedekind (1963, p. 1-2, tradução nossa) na introdução do ensaio *Continuidade e números irracionais*:

> É dito com frequência que o Cálculo Diferencial lida com magnitudes continuas, mas uma explicação sobre essa continuidade não é dada em lugar algum; até as mais rigorosas exposições do Cálculo Diferencial não baseiam suas demonstrações na continuidade, mas, com mais ou menos consciência sobre o fato, apelam a noções geométricas ou noções sugeridas pela Geometria, ou dependem de teoremas que nunca são estabelecidos de forma puramente aritmética.[11]

Para corrigir o problema era necessário estabelecer uma teoria satisfatória dos números reais. Isso porque a definição tradicional de números reais era baseada na noção de magnitudes, de forma que um número era a razão ou proporção entre duas magnitudes homogêneas[12].

Essa definição baseada em magnitudes, no entanto, tinha vários problemas. Ela não dava conta nem dos números negativos e nem dos números complexos. Além disso, ela não justificava a continuidade

[10] Esse teorema diz o seguinte: seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, ou seja, $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

[11] No original: "The statement is so frequently made that the differential calculus deals with continuous magnitude, and yet an explanation of this continuity is nowhere given; even the most rigorous expositions of the differential calculus do not base their proofs upon continuity but, with more or less consciousness of the fact, they either appeal to geometric notions or those suggested by geometry, or depend upon theorems which are never established in a purely arithmetic manner".

[12] Ferreirós (2007, p. 119) explica que essa definição foi proposta por Stevin no final do século XVI e apoiada por homens como Newton e Cauchy.

ou completude dos números reais, a característica fundamental que os diferencia dos racionais. Entretanto, um ponto interessante sobre essa questão é que a necessidade de explicitar a continuidade dos reais não fora ignorada por algum desleixo por parte dos matemáticos, mas simplesmente porque eles não a enxergavam como necessária. Nas palavras de Roque (2012, p. 465):

> Até esse momento, a continuidade dos reais não era justificada porque não era demandada explicitamente, ou seja, tratava-se de uma pressuposição implícita dos matemáticos. A elaboração de uma teoria aritmética da reta, associada a um contínuo numérico, se iniciará somente no século XIX, com Dedekind. Isso não quer dizer que os matemáticos anteriores tivessem falhado ou fossem negligentes em relação ao rigor. Simplesmente a continuidade era um dado e não um problema.

Apesar disso, podemos perceber claramente pelo comentário de Dedekind apresentado anteriormente que ele não estava satisfeito com esse aceite implícito da continuidade. Veremos no capítulo a seguir a forma encontrada pelo matemático alemão para defini-la de maneira apropriada, e como essa definição serve para diferenciar o conjunto dos números reais do conjunto dos números racionais.

4 OS NÚMEROS REAIS

Dedekind expôs suas ideias sobre os números reais no ensaio *Continuidade e números irracionais*[1], publicado em 1872. No prefácio da obra ele explica que tomou atenção dos tópicos abordados no ensaio em 1858, quando teve que ensinar os elementos de Cálculo Diferencial como professor na Escola Politécnica de Zurique. Ao fazê-lo, sentiu a falta de uma fundamentação realmente científica para a Aritmética (DEDEKIND, 1963, p. 1).

Com efeito, ele destaca que ao discutir algumas noções e demonstrar certos teoremas de Cálculo ou Análise Infinitesimal ele se utilizava de recursos e intuições geométricas, algo que não o satisfazia, apesar de reconhecer a utilidade didática desses recursos. Sua insatisfação com essa situação era tão grande que ele se fixou no objetivo de encontrar uma fundamentação puramente aritmética e perfeitamente rigorosa para os princípios da Análise (DEDEKIND, 1963, p. 1-2).

Alias, é curioso destacar que, segundo Dedekind (1963, p. 2), ele já havia descoberto a "essência" da continuidade e dos números reais ainda em novembro de 1858, cerca de 14 anos antes de publicar o ensaio sobre o tema. Ele chegou a comunicar suas ideias para um amigo, alguns pupilos e também para um clube de professores. Porém, ele ficou indeciso sobre a publicação delas por considerar que a apresentação não seria simples e a teoria em si era "pouca promissora"[2].

Apesar dessa indecisão, o trabalho foi enfim publicado, ainda que de uma maneira peculiar para um ensaio matemático. A apresentação das ideias do autor são feitas de maneira discursiva, meio dialogada, como veremos logo a seguir. Assim, além de apresentar

---

1 *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, no original em alemão.

2 Interessante considerar o que exatamente Dedekind quis dizer com "pouca promissora". Possivelmente ele acreditava que "descobrir a essência" da continuidade ou definir o conjunto dos números reais não era algo considerado necessário pelo coletivo de matemáticos da época.

suas novas concepções, Dedekind se preocupou em justificar de onde vieram as inspirações dele.

No capítulo 1 do ensaio, Dedekind apresenta algumas propriedades do *sistema*[3] dos números racionais, denotado por ele pela letra R. Ele comenta, por exemplo, que esse sistema possui a característica de um *corpo de números*. Isso basicamente significa que as quatro operações aritméticas fundamentais, ou seja, adição, subtração, multiplicação e divisão, podem ser realizadas com quaisquer dois elementos de R, excetuando-se, é claro, a divisão por zero.

No entanto, essas propriedades operatórias não são o foco do autor pois, para os objetivos de seu trabalho, importa analisar as relações de ordem do sistema R. Ele explica que se dois números racionais a e b são distintos, então ou a é menor que b, o que se denota por $a < b$, ou a é maior que b, o que se denota por $a > b$. Dedekind (1963, p. 6) lista a seguir três leis fundamentais obedecidas por essas relações, apesar de não demonstrá-las:

I. Se $a > b$ e $b > c$ então $a > c$. Quando a e c são números distintos e b é maior que um e menor que o outro, dizemos que b está entre a e c.

II. Se a e c são números distintos então existem infinitos números entre a e c.

III. Se a é um número definido qualquer, então todos os números do sistema R caem em uma das duas classes A_1 e A_2, cada uma contendo infinitos indivíduos. A primeira classe A_1 consiste de todos os números a_1 menores que a, e a segunda classe A_2 consiste de todos os números a_2 maiores que a. O número a em si pode ser colocado na primeira ou na segunda classe, sendo respectivamente o maior elemento de A_1 ou o menor elemento

[3] Sistema é o termo utilizado por Dedekind para se referir aos conjuntos.

de A_2. Em qualquer caso, a separação de R em A_1, A_2 é tal que todo elemento de A_1 é menor que todo elemento de A_2.

No segundo capítulo, Dedekind mostra como essas mesmas propriedades podem ser observadas na reta real L. Atribuindo as noções de esquerda e direita para as duas direções da reta, podemos dizer que dados dois pontos p e q da reta, distintos entre si, ou p está à esquerda de q ou p está à direita de q. Ele ressalta então que essas relações de posição entre pontos obedecem às três leis a seguir, também sem demonstrá-las:

I. Se p está à direita de q e q está à direita de r, então p está à direita de r, e dizemos que q está entre p e r.

II. Se p e q são pontos distintos então existem infinitos pontos entre p e q.

III. Se p é um ponto qualquer da reta L, então todos os pontos de L caem em uma das duas classes P_1 e P_2, cada uma contendo infinitos pontos. A primeira classe P_1 consiste de todos os pontos p_1 à esquerda de p, e a segunda classe P_2 consiste de todos os pontos p_2 à direita de p. O ponto p em si pode ser colocado na primeira ou na segunda classe. Em qualquer caso, a separação de L em L_1, L_2 é tal que todo ponto de P_1 está a esquerda de todo ponto de P_2.

Dedekind (1963, p. 7-8) explica que a clara analogia entre o sistema R dos racionais e a reta L passa a ser uma correspondência verdadeira quando definimos em L uma origem o e uma unidade de comprimento para a medida de segmentos. Feito isso, qualquer número racional a pode ser associado a um ponto p da reta, que estará à direita da origem se a for positivo e à esquerda da origem se a for negativo. No caso em que $a = 0$, é claro, o ponto p será a origem o. Além disso, dados dois números racionais a e b aos quais correspondem, respectivamente, os pontos p e q, temos que se $a > b$ então p estará à direita de q.

O problema, ressalva Dedekind (1963, p. 8) no capítulo 3, é que na reta L existem infinitos pontos que não correspondem a nenhum número racional, o que já era sabido pelos gregos antigos. Devido a isso, Dedekind (1963, p. 9, grifos do autor, tradução nossa) expõe o problema a ser resolvido:

> Se agora, como desejamos, tentemos seguir aritmeticamente todos os fenômenos da linha reta, o domínio dos números racionais é insuficiente e torna-se absolutamente necessário que o instrumento R construído pela criação dos números racionais seja essencialmente melhorado pela criação de novos números tais que o domínio dos números ganhe a mesma completude, ou como podemos dizer de uma vez, a mesma *continuidade*, da linha reta[4].

Com isso em mente, Dedekind (1963, p. 10) argumenta que os números irracionais devem ser definidos a partir dos números racionais, da mesma forma como os números negativos e fracionários podem ser definidos a partir dos inteiros positivos. O ponto chave para tal, percebeu ele, está no fato de que o sistema R dos racionais possui quebras ou buracos, enquanto a linha reta é completa ou contínua. Para definir os números reais era necessário descobrir no que consiste essa continuidade.

Após muito pensar sobre esse problema, Dedekind finalmente encontrou a solução desejada. Como já comentado, todo ponto p da linha reta L a divide em duas classes P_1 e P_2 tais que todo ponto p_1

[4] No original: "If now, as is our desire, we try to follow up arithmetically all phenomena in the straight line, the domain of rational numbers is insufficient and it becomes absolutely necessary that the instrument R constructed by the creation of the rational numbers be essentially improved by the creation of new numbers such that the domain of numbers shall gain the same completeness, or as we may say at once, the same *continuity*, as the straight line".

da primeira está à esquerda de todo ponto p_2 da segunda. A essência da continuidade estaria no caminho contrário:

> Se todos os pontos da linha reta caem em duas classes tais que todos os pontos da primeira classe estão à esquerda de todos os pontos da segunda classe, então existe um único ponto que produz essa divisão de todos os pontos em duas classes, separando a linha reta em duas porções (DEDEKIND, 1963, p. 11, tradução nossa).[5]

Esse princípio foi assumido por ele como um axioma que atribui à linha sua continuidade, afirmando que nem ele, nem nenhuma outra pessoa, seria capaz de demonstrá-lo como um teorema (DEDEKIND, 1963, p. 11-12).

Capturada a essência da continuidade, Dedekind pôde enfim definir o sistema dos números reais no capítulo 4. Dada uma separação do sistema R em duas classes A_1 e A_2 tais que todo número a_1 de A_1 é menor que todo número a_2 de A_2, dizemos que essa separação é um *corte*, o que denotamos por (A_1, A_2). Como já visto, qualquer número racional a produz um corte, separando R nas classes A_1 e A_2 dos números menores e maiores que a, respectivamente[6].

Entretanto, existem infinitos cortes não produzidos por números racionais, o que Dedekind (1963, p. 13) expõe através do exemplo a seguir. Tomando um inteiro positivo D qualquer que não é o quadrado de nenhum inteiro, podemos construir o corte (A_1, A_2) de R tal que todo racional positivo cujo quadrado é maior que D pertence a A_2 e todos os outros racionais pertencem a A_1. Esse corte, como Dedekind

5 No original: “If all points of the straight line fall into two classes such that every point of the first class lies to the left of every point of the second class, then there exists one and only one point which produces this division of all points into two classes, this severing of the straight line into two portions”.

6 Na verdade a define dois cortes, a princípio, distintos, pois a pode ser colocado como o maior elemento de A_1 ou como o menor elemento de A_2. No entanto, esses dois cortes são essencialmente idênticos, como Dedekind argumenta em um capítulo posterior.

demonstra, não é definido por nenhum número racional. Com efeito, o número que o define seria $\sqrt{D}$, que não é racional pois D é um inteiro não-quadrado.

Assim, Dedekind (1963, p. 15) determina que quando temos um corte (A_1, A_2) que não é produzido por nenhum número racional, criamos um novo número, irracional, que consideramos definido por esse corte. Daí, a todo corte corresponde um número racional ou irracional definido, e dois números quaisquer são considerados distintos quando correspondem a cortes essencialmente diferentes.

A próxima etapa para o matemático alemão foi esclarecer o que ele entendia por cortes essencialmente diferentes através da formalização da noção de igualdade entre cortes. Dados dois cortes (A_1, A_2) e (B_1, B_2), podemos determinar se eles são iguais analisando apenas as classes A_1 e B_1. Afinal, a classe A_1 determina sozinha o corte (A_1, A_2), já que A_2 é o complemento de A_1. Dedekind (1963, p. 16-17) enuncia então os cinco possíveis casos a seguir para as classes A_1 e B_1:

1. Se A_1 e B_1 são idênticos, ou seja, $A_1 = B_1$, então os cortes (A_1, A_2) e (B_1, B_2) são iguais;

2. Se A_1 possui um único elemento a não contido em B_1, então os cortes (A_1, A_2) e (B_1, B_2) são essencialmente iguais, pois são ambos definidos pelo número a;

3. Se A_1 possui pelo menos dois elementos não contidos em B_1, então os cortes (A_1, A_2) e (B_1, B_2) são diferentes. Dizemos nesse caso que $\alpha := (A_1, A_2)$ é maior que $\beta := (B_1, B_2)$, ou seja, $\alpha > \beta$;

4. Se B_1 possui um único elemento b não contido em A_1, então os cortes (A_1, A_2) e (B_1, B_2) são essencialmente iguais, pois são ambos definidos pelo número b;

5. Se B_1 possui pelo menos dois elementos não contidos em A_1, então os cortes (A_1, A_2) e (B_1, B_2) são diferentes. Dizemos nesse caso que $\alpha := (A_1, A_2)$ é menor que $\beta := (B_1, B_2)$, ou seja, $\alpha < \beta$.

Com essas considerações em mãos temos uma ordenação clara para os números reais. A partir disso, Dedekind (1963, p. 19) aponta que o sistema $\mathfrak{R}$ dos números reais forma o que ele chama de *domínio bem-arranjado de única dimensão*. Isso significa que ele obedece às seguintes leis, cujas demonstrações, omitidas pelo autor, seguem das definições anteriores:

I. Se $\alpha > \beta$ e $\beta > \gamma$ então $\alpha > \gamma$. Quando α e γ são números distintos e β é maior que um e menor que o outro, dizemos que β está entre α e γ.

II. Se α e γ são números distintos então existem infinitos números entre α e γ.

III. Se α é um número definido qualquer, então todos os números do sistema $\mathfrak{R}$ caem em uma das duas classes $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{A}_2$, cada uma contendo infinitos indivíduos. A primeira classe $\mathfrak{A}_1$ consiste de todos os números α_1 menores que α, e a segunda classe $\mathfrak{A}_2$ consiste de todos os números α_2 maiores que α. O número α em si pode ser colocado na primeira ou na segunda classe, sendo respectivamente o maior elemento de $\mathfrak{A}_1$ ou o menor elemento de $\mathfrak{A}_2$. Em qualquer caso, a separação de $\mathfrak{R}$ em $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ é tal que todo elemento de $\mathfrak{A}_1$ é menor que todo elemento de $\mathfrak{A}_2$.

Até aqui não há nada de novo, visto que essas propriedades já eram válidas no sistema R dos racionais. A questão é que $\mathfrak{R}$ possui também uma quarta propriedade, chamada por Dedekind de continuidade, cujos enunciado e prova são apresentados a seguir.

IV. Se o sistema $\mathfrak{R}$ dos números reais for separado em duas classes $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ tais que todo número α_1 da classe $\mathfrak{A}_1$ é menor que todo número α_2 da classe $\mathfrak{A}_2$ então existe um único número α que produz essa separação.

Demonstração. Separando o sistema $\mathfrak{R}$ nas classes $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{A}_2$ obtemos também o corte (A_1, A_2) do sistema R, definido de tal forma que A_1 contém todos os números racionais pertencentes a $\mathfrak{A}_1$ e A_2 contém todos os números racionais pertencentes a $\mathfrak{A}_2$. Seja α o número real que define esse corte (A_1, A_2). Assim, dado um número real β distinto de α, existem infinitos números racionais c entre α e β[7]. Temos então duas possibilidades:

i. Se $\beta < \alpha$ então $c < \alpha$, do que segue que c pertence a A_1 e consequentemente também à classe $\mathfrak{A}_1$. Daí, como $\beta < c$, também β pertence a $\mathfrak{A}_1$, já que todo número em $\mathfrak{A}_2$ é maior que todo número c em $\mathfrak{A}_1$.

ii. Se $\beta > \alpha$ então $c > \alpha$, do que segue que c pertence a A_2 e consequentemente também à classe $\mathfrak{A}_2$. Daí, como $\beta > c$, também β pertence a $\mathfrak{A}_2$, já que todo número em $\mathfrak{A}_1$ é menor que todo número c em $\mathfrak{A}_2$.

Portanto, todo número β distinto de α pertence à classe $\mathfrak{A}_1$, se $\beta < \alpha$, ou à classe $\mathfrak{A}_2$, se $\beta > \alpha$. Logo, α é ou o maior número em $\mathfrak{A}_1$, ou o maior número em $\mathfrak{A}_2$, de modo que α é o número único que produz a separação de $\mathfrak{R}$ nas classes $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{A}_2$, como queríamos demonstrar.[8] ■

[7] Dedekind já havia demonstrado anteriormente no ensaio que entre reais distintos existem infinitos racionais, utilizando a definição das relações de ordem dos números reais e as propriedades das relações de ordem dos racionais.

[8] Na tradução para o inglês do ensaio há um erro no parágrafo final da demonstração. Nele é dito que α é o número único que produz a separação de R em $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{A}_2$. O correto é $\mathfrak{R}$ em vez de R. Esse erro não aparece no original em alemão.

Esse é o ponto chave da continuidade de $\mathfrak{R}$ que o distingue de R. Como já visto, um corte (A_1, A_2) de R pode não ser gerado por elemento algum de R. Por outro lado, de acordo com a propriedade IV acima, um corte $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ de $\mathfrak{R}$ é sempre gerado por algum elemento de $\mathfrak{R}$.

Desvendada dessa forma a essência da continuidade do sistema $\mathfrak{R}$, Dedekind prossegue no capítulo 6 com a definição das operações desse sistema. Entretanto, o autor discute apenas o caso da adição, destacando que as demais operações da Aritmética elementar, como diferenças, produtos, quocientes, potências, raízes e logaritmos poderiam ser também definidas. Contudo, como essas definições não são tão triviais, seria interessante se Dedekind tivesse apresentado, pelo menos, a definição de multiplicação entre cortes, visto que essa operação é tão fundamental quanto a adição[9].

Enfim, vejamos como Dedekind define a soma de dois números reais α e β, os quais produzem os cortes (A_1, A_2) e (B_1, B_2) de R. Para tal, precisamos determinar quem é o corte (C_1, C_2) produzido pelo número $\gamma = \alpha + \beta$. Assim, dado um racional c qualquer, o colocamos em C_1 se existirem números a_1 em A_1 e b_1 em B_1 tais que $c_1 \leqq a_1 + b_1$[10], e o colocamos em C_2 caso contrário. É claro que a separação de R em C_1 e C_2 forma um corte. Afinal, todo elemento de C_1 é menor que todo elemento de C_2, de modo que a definição $\alpha + \beta := \gamma$, em que γ é determinado pelo corte (C_1, C_2), é válida (DEDEKIND, 1963, p. 21-22).

No sétimo e último capítulo do ensaio, Dedekind mostra como sua definição dos números reais pode ser utilizada para apresentar demonstrações mais rigorosas e sem apelos geométricos para teoremas

[9] Ao leitor interessado em ver como a multiplicação entre cortes pode ser definida, recomenda-se a leitura do apêndice 6 da obra *Um curso de Cálculo, volume 1*, de Hamilton Guidorizzi, indicado nas referências deste trabalho.

[10] O símbolo $\leqq$ é utilizado por Dedekind com o mesmo significado do símbolo $\leq$.

da Análise Infinitesimal. Para isso ele explica primeiramente o significado de convergência de magnitudes variáveis. Dizemos que uma magnitude variável x que passa por sucessivos valores numéricos se aproxima de um valor limitante α quando, no decorrer do processo, o valor absoluto da diferença $x - \alpha$ eventualmente se torna menor do que qualquer valor dado distinto de zero (DEDEKIND, 1963, p. 24).

Pode-se perceber que esse conceito é análogo ao de sequências convergentes de números reais. Afinal, dizemos que uma sequência (x_n) de números reais converge para um valor a se para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $|x_n - a| < \varepsilon$. Logo, conforme aumentamos o valor de n, a magnitude variável x_n varia de tal modo que $|x_n - a|$ eventualmente se torna menor do que qualquer valor ε dado.

Passado esse conceito, o autor mostra como demonstrar dois teoremas de Análise utilizando sua definição de números reais via cortes. O primeiro deles diz que se uma magnitude x cresce continuamente mas não além de qualquer limite ele se aproxima de um valor limitante, enquanto o segundo diz que toda magnitude variável que se aproxima de um valor limitante eventualmente varia por menos do que qualquer magnitude positiva.

Para simplificar o entendimento desses enunciados, façamos uma tradução para a terminologia atual. O primeiro teorema diz que toda sequência monótona crescente e limitada superiormente de números reais é convergente. Já o segundo diz que toda sequência convergente de números reais é uma sequência de Cauchy. Ou seja, se (x_n) é uma sequência convergente de números reais, dado $\varepsilon > 0$ qualquer existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > n_0$ então $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Dedekind prova os dois teoremas, mas será apresentada aqui apenas a demonstração do primeiro, o que será suficiente para compreender como o autor pretende empregar a noção de corte em demonstrações de Análise.

Teorema 1. *Se uma magnitude x cresce continuamente, mas não além de todos os limites, ela se aproxima de um valor limitante.*

Demonstração. Seja x uma magnitude variável que cresce continuamente mas não além de todos os limites. Disso segue que existe um e, consequentemente, infinitos números α_2 tais que x permanece continuamente menor que α_2. Designemos por $\mathfrak{A}_2$ o sistema de todos esses números α_2 e por $\mathfrak{A}_1$ o sistema de todos os outros números α_1. Assim, dado um número α_1 qualquer de $\mathfrak{A}_1$, eventualmente teremos que $x \geqq \alpha_1$.

Daí, todo número α_1 é menor que todo número α_2 e, portanto, deve existir um número α que seja o maior elemento de $\mathfrak{A}_1$ ou o menor elemento de $\mathfrak{A}_2$. Como x cresce continuamente o primeiro caso não é possível, do que segue que α é o menor número de $\mathfrak{A}_2$. Logo, qualquer número α_1 tomado será tal que $\alpha_1 < x < a$, ou seja, x se aproxima do valor limitante a. ■

O ensaio de Dedekind sobre os números reais se encerra com essas demonstrações, considerando que "esses exemplos devem ser suficientes para esclarecer a conexão entre o princípio da continuidade e a Análise Infinitesimal"[11] (DEDEKIND, 1963, p. 27, tradução nossa). Com isso, o matemático alemão conseguiu trazer uma definição bastante inovadora para o conjunto dos números reais que é conhecida e estudada até hoje.

Não que a construção de certos tipos de números a partir de números mais simples já não tivesse sido realizada. Como bem lembra Corry (2015, p. 216), Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) havia apresentado, ainda em 1837, a possibilidade de definirmos um número

[11] No original: "These examples may suffice to bring out the connection between the principle of continuity and infinitesimal analysis".

complexo $a + bi$ como um par ordenado de números reais[12]. Além disso, ele também indicou como definir a soma e o produto de números complexos através desses pares, baseando-se nas propriedades já conhecidas dos números reais.

Essas mesmas ideias foram apresentadas novamente por Hamilton em 1853 na introdução do livro *Lectures on quaternions*, o qual Dedekind teria lido em 1857, segundo Ferreirós (2007, p. 220). Aliás, também segundo Ferreirós (2007, p. 221), Dedekind escreveu manuscritos sobre os números inteiros e racionais definindo-os como pares ordenados, aparentemente sob influência da abordagem de Hamilton sobre os complexos[13].

A grande sacada de Dedekind foi perceber então que essa mesma abordagem infelizmente não funcionaria para os números reais. Faltava algo nela capaz de englobar a continuidade ou completude dos reais, o que ele conseguiu formular através dos cortes. Esse feito demonstra bem a criatividade do matemático alemão, considerando quão mais engenhosa a construção dos reais via cortes é do que a construção dos complexos via pares ordenados.

Porém, a construção dos atuais conjuntos numéricos não poderia ser considerada concluída ainda. Dedekind apresentou uma nova definição para os números reais e, como comentado, já havia concebido formas de definir os racionais e inteiros via pares ordenados em alguns manuscritos, seguindo a proposta de Hamilton para os complexos. Mas o que dizer sobre os números naturais? O que seriam esses objetos?

Apesar de ser usual definirmos o conjunto dos números naturais

[12] Essas ideias foram apresentadas por Hamilton no artigo *Theory of conjugate functions, or algebraic couples*, publicado em 1837 na revista *Transactions of the Royal Irish Academy*.

[13] Ferreirós (2007, p. 219) explica que nesses manuscritos Dedekind também demonstrou alguns dos principais teoremas sobre esses números. Ele afirma ainda que há evidências de que esses manuscritos foram escritos antes de 1872, podendo talvez ser do final dos anos 1850.

via Axiomas de Peano, essa definição ainda não existia na época. Apenas em 1889 é que Giuseppe Peano publicaria a obra *Os principios da Aritmética apresentados por um novo método*[14], no qual apresentou seus famosos axiomas.

Faltava então à Aritmética uma definição ou construção apropriada para os números naturais, a partir da qual todos os demais conjuntos numéricos seguiriam. Obviamente ciente desse fato, Dedekind tomou para si o objetivo de capturar também a essência dos números mais fundamentais de que dispomos. Vejamos qual foi a solução dada por ele para esse problema, publicada somente dezesseis anos após o ensaio sobre a continuidade.

[14] Em latim, *Arithmetices principia, nova methodo exposita.*

5 OS NÚMEROS NATURAIS

Segundo Dedekind (1963, p. 31, tradução nossa), "na ciência nada capaz de prova deve ser aceito sem prova"[1]. É com essa afirmação que ele inicia o prefácio do ensaio *O que são e o que deveriam ser os números?*[2], que foi publicado em 1888 e que será o foco desse capítulo. A preocupação do autor com os fundamentos da Matemática fica assim evidenciado, esclarecendo a mentalidade e os objetivos dele.

Logo de início, é preciso destacar que esse ensaio possui um caráter muito mais técnico que o anterior. Enquanto no outro trabalho Dedekind apresentou suas ideias de maneira discursiva, neste segundo ele foi bastante sintético, apresentando um perfil mais próximo do que se esperaria de um tratado matemático. Assim, a obra se constitui quase que totalmente de definições e enunciados e demonstrações de proposições, com raros comentários em um ou outro ponto.

Além disso, esse trabalho é consideravelmente mais extenso e denso do que o sobre os números reais. A obra começa os primeiros capítulos apresentando definições e proposições sobre *sistemas*[3], as diversas operações sobre eles, transformações ou funções de sistemas, sistemas finitos e infinitos e também o conceito de *cadeia*, crucial para o resto do ensaio. Apenas após a apresentação desses conceitos básicos é que Dedekind finalmente chega aos números naturais, bem como relações de ordem e as operações aritméticas.

Assim, o primeiro capítulo do ensaio é dedicado às definições básicas sobre teoria de sistemas ou conjuntos. Ele define que se *coisas*[4] distintas $a, b, c, \ldots$ podem ser associadas ou agrupadas em nossa mente, elas formam um sistema S. Nesse caso chamamos $a, b, c, \ldots$ de

---

[1] No original: "In science nothing capable of proof ought to be accepted without proof".
[2] *Was sind und was sollen die Zahlen?*, no original em alemão.
[3] Lembrando que *sistema* é como o autor se referia aos conjuntos.
[4] Por *coisas* Dedekind compreende qualquer objeto de nosso pensamento.

elementos de S, e dizemos que eles estão contidos em S ou, inversamente, que S consiste desses elementos.

Ademais, um sistema é definido completamente por seus elementos, de modo que dois sistemas S e T são iguais se, e somente se, possuírem os mesmos elementos. Vale ressaltar também que Dedekind exclui o sistema vazio[5] de seu trabalho, apesar de admitir sua utilidade em outros contextos.

Em seguida, Dedekind apresenta mais alguns conceitos importantes. Por exemplo, dizemos que um sistema A é parte de um sistema S se todo elemento de A é elemento de S, o que Dedekind representava por A 3 S. Além disso, A é dita parte própria de S se A 3 S mas $A \neq S$. É claro então que o símbolo 3 é equivalente ao atual $\subseteq$ ou $\subset$, utilizado para representar subconjuntos. Ademais, se T for parte de A, B, C, ..., diz-se que T é parte comum desses sistemas.

As duas principais operações entre conjuntos são também definidas pelo autor. Dados sistemas $A, B, C, \ldots$ o sistema *composto* de $A, B, C, \ldots$, denotado por $\mathfrak{M}(A, B, C, \ldots)$, é o sistema cujos elementos são todos os elementos pertencentes a algum dos $A, B, C, \ldots$. Por sua vez, a *comunidade* dos sistemas $A, B, C, \ldots$ é o sistema $\mathfrak{G}(A, B, C, \ldots)$ composto de todos os elementos comuns de $A, B, C, \ldots$. Logo, o sistema composto é a união de sistemas e a comunidade de sistemas é a interseção deles.

Antes de passar para o capítulo seguinte é interessante destacar que Dedekind não define uma relação de pertinência. Quando precisa dizer que $a \in A$, por exemplo, ele escreve que a 3 A. Isso porque o autor não diferencia os sistemas unitários de seus elementos, de modo que a 3 A significa $\{a\}$ 3 A, o que equivale a dizer que a é elemento de A. De modo geral Dedekind evita a ambiguidade dessa notação utilizando letras maiúsculas para nomes de sistemas e letras

[5] Ou seja, o sistema sem elementos.

minúsculas para os nomes de seus elementos.

No capítulo 2, Dedekind passa a tratar de transformações de sistemas, o que entenderíamos hoje por funções. Ele explica que uma transformação ϕ de um sistema S é uma lei que determina para cada elemento s de S uma coisa chamada transformada de s e denotada por $\phi(s)$. É curioso observar então que, na concepção de Dedekind, não seria necessário informar o contradomínio de uma transformação, apenas o domínio.

É também explicado nesse capítulo que dada uma transformação ϕ de um sistema S e uma parte A de S, podemos considerar a restrição[6] de ϕ ao sistema $A \mathrel{3} S$, denotada também por ϕ[7]. Ademais, o sistema $\phi(S)$ de todas as transformadas $\phi(s)$, hoje conhecida como imagem de ϕ, era chamada de *transformada* de S por Dedekind. Do ponto de vista notacional, ele na maioria das vezes utiliza a notação s' e S' para representar $\phi(s)$ e $\phi(S)$, respectivamente, deixando o nome da transformação implícita.

Outro ponto importante do capítulo é a definição de composição de transformações. Dedekind (1963, p. 52) define que se ϕ é uma transformação de um sistema S e ψ é uma transformação da transformada $S' = \phi(S)$, sempre resulta disso uma transformação θ de S, *composta* de ϕ e ψ, tal que para todo elemento s de S corresponde a transformada

$$\theta(s) = \psi(s') = \psi(\phi(s)).$$

Essa transformação é denotada então por $\psi.\phi$ ou $\psi\phi$.

No capítulo 3 o foco passa para transformações *similares* ou *distintas*, que são as atuais funções injetivas. Assim, uma transformação ϕ de um sistema S é similar se, dados quaisquer elementos a e b

---

6 Apesar de Dedekind não utilizar o termo restrição.

7 Atualmente seria utilizada uma notação diferenciada para tal restrição, como $\phi|_A$, mas Dedekind não faz isso.

de S distintos entre si, $\phi(a) \neq \phi(b)$. Nesse contexto são apresentadas também as transformações inversas: dada uma transformação ϕ de S, sua inversa é a transformação $\overline{\phi}$ de $\phi(S)$ tal que $\overline{\phi}(s') = s$, de modo que a composta $\overline{\phi}\phi$ é a transformação identidade. Além disso, dois sistemas S e T são ditos similares se existir uma função similar ϕ de S tal que $\phi(S) = T$[8].

No capítulo 4, Dedekind começa a trabalhar com transformações de sistemas em si mesmos. Ele explica que se ϕ é uma transformação de um sistema S, e $\phi(S)$ é parte de um sistema Z, então ϕ é dita uma transformação de S em Z. No caso em que $\phi(S)\ 3\ S$, dizemos que ϕ é uma transformação de S em si mesmo.

É neste capítulo que aparece pela primeira vez um dos conceitos mais importantes apresentados por Dedekind no ensaio, definido abaixo.

Definição 1. Dados um sistema S, uma transformação ϕ de S em si mesmo e uma parte K de S, diz-se que K é uma *cadeia* se

$$K'\ 3\ K,$$

ou seja, se $\phi(K) = K'$ for parte de K.

Deve-se reparar que o conceito de cadeia depende da transformação considerada, de modo que $K\ 3\ S$ pode ser uma cadeia em relação a uma transformação ϕ de S em S, mas não ser em relação a uma outra transformação ψ de S em S. A partir desse conceito é definido outro igualmente importante.

Definição 2. Dada uma parte A de um sistema S, sobre o qual definimos uma transformação similar ϕ, chamamos de *cadeia do sistema* A,

8 Em termos atuais, dois conjuntos são similares se existe uma função bijetiva entre eles.

denotado por A_0, a comunidade de todas as cadeias de S que contêm a parte A.

Em outras palavras, A_0 é a menor cadeia de S que contém A. Como a noção de cadeia depende da transformação considerada, o mesmo ocorre com as cadeias de um sistema. Assim, Dedekind esclarece que em vez de A_0 poderia-se escrever $\phi_0(A)$ para explicitar que a transformação considerada é ϕ.

Ainda nesse capítulo não se pode deixar de comentar o seguinte teorema, cuja demonstração será omitida[9]:

Teorema 2 (Teorema da Indução Completa)**.** *Para mostrar que uma cadeia A_0 é parte de um algum sistema Σ – seja ele parte de S[10] ou não – é suficiente mostrar*

ρ. *que $A \; 3 \; \Sigma$, e*

σ. *que a transformada de todo elemento comum de A_0 e Σ é também elemento de Σ.*

Esse teorema pode parecer confuso a princípio, principalmente por não coincidir com o que se conhece hoje como indução completa. Devido à sua importância nos capítulos seguintes, vale a pena esclarecê-lo. Dedekind (1963, p. 61) explica no ensaio que esse teorema poderia ser apresentado na forma equivalente a seguir, cujo significado é mais evidente.

Teorema 3 (Teorema da Indução Completa - Forma Alternativa)**.** *Para mostrar que todos os elementos de uma cadeia A_0 possuem uma certa propriedade $\mathfrak{E}$, é suficiente mostrar:*

[9] A demonstração não é complicada, mas envolve diversas proposições sobre cadeias provadas anteriormente por Dedekind mas não apresentadas neste trabalho.

[10] Esse sistema S é tal que $A \; 3 \; S$.

ρ. *que todos os elementos de A possuem a propriedade $\mathfrak{E}$, e*

σ. *que a transformada n' de todo elemento n de A_0 que possui a propriedade $\mathfrak{E}$ também possui essa propriedade.*

Desse modo, se tomarmos Σ como sendo o sistema de todas as coisas que possuem a propriedade $\mathfrak{E}$, deve ficar clara a conexão entre essa forma de apresentação do teorema com a dada anteriormente. Mais adiante veremos que, construído o sistema N dos números naturais, esse teorema poderá ser utilizado para demonstrar várias proposições sobre esse sistema.

A definição de sistemas infinitos aparece no capítulo 5. Assim, um sistema S é dito infinito se for similar a uma parte própria sua. Caso contrário, é dito finito. Traduzindo para termos atuais, um conjunto é infinito se existir uma bijeção entre ele e um subconjunto próprio seu.

O resultado central do capítulo é certamente o apresentado abaixo, em que Dedekind "prova" que sistemas infinitos existem. Como a demonstração é bastante curiosa e relativamente simples, vale a pena apresentá-la.

Teorema 4. *Existem sistemas infinitos.*

Demonstração. O próprio plano dos meus pensamentos, ou seja, a totalidade S de todas as coisas que podem ser objetos do meu pensamento, é infinito. Pois se s é um elemento de S, então o pensamento s', que s pode ser objeto de meu pensamento[11], também é elemento de S. Se considerarmos s' a transformada $\phi(s)$ do elemento s então a transformação ϕ de S, assim determinada, é tal que $S' = \phi(S)$ é parte de S; e certamente S' é uma parte própria de S, pois existem elementos em S (por exemplo, meu próprio ego) que são diferentes de

[11] Ou seja, $s' =$ "s é um objeto do meu pensamento".

tais pensamentos s' e portanto não estão contidos em S'. Finalmente, é claro que se a, b são elementos diferentes de S, suas transformadas a' e b' são também diferentes, e portanto a transformação ϕ é uma transformação similar. Portanto S é infinita, como se queria demonstrar. ■

Como Ferreirós (2007, p. 233) destaca, essa "demonstração" foi bastante criticada, sendo considerada indigna do nome de teorema por possuir um teor mais psicológico do que matemático. Como essa demonstração assumia a existência de um sistema universal, o que leva a paradoxos, ela teve de ser abandonada. Por isso que nas teorias axiomáticas de conjuntos atuais a existência de conjuntos infinitos é dada via axiomas. A invalidade do resultado é um duro golpe, pois ele é bastante importante no contexto geral do ensaio, como veremos mais adiante.

No capítulo 6, enfim, Dedekind fornece sua definição para o sistema dos números naturais. Para tal, ele define primeiramente um tipo peculiar de sistema.

Definição 3. Um sistema N é dito *simplesmente infinito* se existem uma transformação ϕ de N em si mesmo e um elemento 1 de N que satisfazem as seguintes condições:

α. $N' \; 3 \; N$.

β. $N = 1_0$.

γ. O elemento 1 não está contido em N'.

δ. A transformação ϕ é similar.

Dizemos nesse caso que o elemento 1 é o *elemento-base* de N, e que o sistema N é *colocado em ordem* pela transformação ϕ. Além disso, segue de α, γ e δ que todo sistema simplesmente infinito é, de fato, infinito, pois é similar a uma parte própria sua.

Dedekind define o sistema dos números naturais utilizando os sistemas simplesmente infinitos. De acordo com ele, se ao considerarmos um sistema simplesmente infinito N descartarmos as características especiais de seus elementos, e levarmos em conta apenas como eles estão relacionados entre si pela transformação ϕ, podemos chamar os elementos de N de números naturais ou ordinais, o elemento-base 1 de número-base e o sistema N de série numérica.

Para esclarecer por que é válido considerar um sistema simplesmente infinito N qualquer, abstraído de quaisquer características próprias, como sendo o sistema ou conjunto dos números naturais, é preciso compreender o significado das condições α, β, γ e δ dadas acima. Veremos a seguir que essas condições fornecem uma caracterização do conjunto dos números naturais equivalente à dada pelos Axiomas de Peano.

Com efeito, consideremos que o sistema simplesmente infinito N seja o sistema dos números naturais, que o elemento-base 1 seja o número um e que a função ϕ seja a função sucessor. Fazendo isso fica evidente o significado das condições α, γ e δ. A condição α diz, em termos atuais, que $\phi(N) \subset N$, ou seja, que o sucessor de todo número natural é um número natural; a condição γ diz que o número 1 não é sucessor de número algum e a condição δ diz que números distintos têm sucessores distintos.

O ponto de dificuldade é a interpretação da condição β, segundo a qual $N = 1_0$, ou seja, N é a cadeia do número 1[12]. Para entendê-la relembremos a definição de cadeia de um sistema. Se $A \ni S$, então A_0

[12] Na verdade N é a cadeia do sistema que tem como elemento apenas o número 1. Ou seja, utilizando a terminologia para conjuntos que conhecemos, o correto seria escrever que $N = \{1\}_0$. No entanto, como já comentado, Dedekind não diferencia os conjuntos unitários de seus elementos.

é a menor cadeia de S que contém o sistema A. Portanto, a condição β está afirmando que N é a menor cadeia que contém o sistema 1, o que significa que N é o menor sistema X tal que 1 é elemento de X e $\phi(X)$ é parte de X. Junto com as condições α, γ e δ, isso nos garante que $N = \{1, \phi(1), \phi(\phi(1)), \ldots\}$ ou, denotando $2 \coloneqq \phi(1)$, $3 \coloneqq \phi(\phi(1))$ e assim por diante, $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Desse modo, a condição β é o que garante que os elementos de N sejam *apenas* o número 1 e seus sucessores. Sem essa condição, o sistema N poderia possuir, além do 1 e seus sucessores, os elementos a, b e c tais que $b = \phi(a)$, $c = \phi(b)$ e $a = \phi(c)$, por exemplo[13], o que não estaria de acordo com o que entendemos por conjunto dos números naturais. Portanto, a condição $N = 1_0$ tem, na definição dedekindiana dos números naturais, o mesmo papel que o Princípio de Indução dos Axiomas de Peano.

Todavia, é claro que todas essas considerações de nada servem se sistemas simplesmente infinitos não existirem. Ciente desse fato, Dedekind (1963, p. 68) prova o resultado abaixo, o que resolve o problema.

Teorema 5. *Em todo sistema infinito S um sistema simplesmente infinito N está contido como parte.*

Demonstração. Pelo teorema 4 existe uma transformação similar ϕ de S tal que $\phi(S)$ ou S' é parte própria de S; portanto existe um elemento 1 em S que não está contido em S'. A cadeia $N = 1_0 = \phi_0(1)$, que corresponde a essa transformação ϕ do sistema S em si mesmo, é um sistema simplesmente infinito colocado em ordem por ϕ; pois as condições características α, β, γ e δ na definição 3 são obviamente cumpridas. ∎

[13] De fato, observe que a inclusão desses elementos em N não contradiria as condições α, γ e δ.

O leitor pode ficar insatisfeito com o fato de Dedekind não ter demonstrado de fato que $N \ 3 \ S$ é um sistema simplesmente infinito na proposição acima, afirmando apenas que isso é óbvio. Essa omissão de detalhes é algo característico do ensaio que aparece por diversas vezes na obra. De qualquer modo, esse resultado, junto com a "prova" de que existem sistemas infinitos, garante a existência de sistemas simplesmente infinitos e, consequentemente, do sistema dos números naturais.

Feito isso, Dedekind formula também o princípio de demonstração por indução para o sistema dos números naturais, dado abaixo.

Teorema 6 (Teorema da Indução Completa (inferência de n para n'))**.** *Para mostrar que um teorema vale para todos os números n de uma cadeia m_0 é suficiente mostrar,*

ρ. *que ele vale para $n = m$, e*

σ. *que da validade do teorema para um número n da cadeia m_0 sempre segue sua validade para o sucessor n'.*

Esse resultado segue diretamente do teorema 3, sendo apenas uma forma mais particular do mesmo. Com efeito, o teorema 3 é aplicável a cadeias quaisquer, enquanto essa nova versão é aplicável especificamente às cadeias numéricas $N = 1_0 = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $2_0 = \{2, 3, 4, \ldots\}$, $3_0 = \{3, 4, 5, \ldots\}$ e assim por diante.

Tendo definido quem é o sistema N dos números naturais e apresentado um método versátil para demonstrar proposições sobre ele, Dedekind basicamente dedica o restante do ensaio definindo as relações e operações mais comuns desse sistema e demonstrando alguns de seus resultados mais importantes.

No capítulo 7, por exemplo, o foco é nas relações de ordem. Assim, diz-se que um número n é maior que um número m, o que representamos por $n > m$ ou $m < n$, se n_0 3 m'_0. Pode-se perceber que essa definição faz sentido utilizando um exemplo: temos que $7 > 5$ pois

$$7_0 = \{7, 8, 9, \ldots\} \; 3 \; \{6, 7, 8, 9, \ldots\} = 6_0 = 5'_0.$$ [14]

A partir disso é possível definir também a relação de maior ou igual, para a qual Dedekind utiliza o símbolo $\geqq$. Assim, dizemos que n é maior ou igual a m, o que denotamos por $n \geqq m$, se $n = m$ ou $n > m$. Dedekind define também nesse capítulo o sistema Z_n de todos os números que não são maiores que n, de modo que m 3 Z_n[15] é equivalente a $m \leqq n$, a $m < n'$ ou a n_0 3 m_0.

No capítulo 8 o tema são partes finitas e infinitas da série numérica N. O autor demonstra que todo sistema Z_n de N é finito, e que se m e n são números distintos, então Z_n e Z_m são também distintos. Mais importante do que isso, ele prova que se uma parte E de N possui um maior elemento, então E é finito, e que se E não possui um maior elemento, então E é simplesmente infinito.

O capítulo 9 é particularmente interessante, pois nele Dedekind (1963, p. 85-86) demonstra o que chama de teorema da definição por indução:

Teorema 7 (Definição por indução)**.** *Dadas uma transformação arbitrária θ de um sistema Ω em si mesmo, e também um certo elemento ω em Ω, existe uma única transformação ψ da série numérica N que satisfaz as condições*

I. $\psi(N)$ 3 Ω.

II. $\psi(1) = \omega$.

---

[14] Vale ressaltar que $(5')_0 = (5_0)'$, de modo que não há ambiguidade em escrever apenas $5'_0$. O resultado mais geral $(A_0)' = (A')_0$ é demonstrado por Dedekind no capítulo 2 do ensaio.

[15] Lembrando que Dedekind não diferencia entre conjuntos unitários e seus elementos, de forma que m 3 Z_n não significa $m \subseteq Z_n$, mas sim $\{m\} \subseteq Z_n$.

III. $\psi(n') = \theta\psi(n)$, *em que n representa qualquer número.*

O sentido desse teorema pode parecer nebuloso, mas ele serve para justificar a validade das definições recursivas que Dedekind dá para as operações elementares dos números naturais mais adiante. A aplicação do autor para esse teorema ficará mais clara, portanto, quando adentrarmos em tais operações.

No capítulo 10, Dedekind prova que todos os sistemas simplesmente infinitos são similares à série numérica N, e que todo sistema similar a N ou qualquer outro sistema simplesmente infinito é, também, simplesmente infinito. Daí, todo teorema envolvendo os números naturais em que desconsideramos as características especiais dos elementos de N, ou seja, aquelas que não envolvem apenas a transformação ϕ e suas propriedades, é válido para um sistema simplesmente infinito qualquer.

Com isso Dedekind pretende justificar a validade de sua definição de N como sistema dos números naturais. Se todos os sistemas simplesmente infinitos são similares, e qualquer teorema aritmético válido para um vale para os demais, pode-se tomar um sistema simplesmente infinito N qualquer, desconsiderar as suas características e propriedades não relacionadas à transformação ϕ, e chamá-lo de sistema dos números naturais.

Passando para o capítulo 11, chegamos enfim às operações aritméticas elementares, começando com a adição. Como já explicado, Dedekind define essa operação, bem como as demais, utilizando o teorema da definição por indução[16]. Dado um número natural m qualquer, o autor explica como definir a transformação ψ de N em N tal que $\psi(n) = m + n$. Ou seja, em vez de uma operação binária ψ tal que $\psi(m, n) = m + n$, Dedekind define infinitas transformações ψ_m tais que $\psi_m(n) = m + n$, uma para cada natural m.

[16] Indicado como teorema 7 neste trabalho.

No final das contas essa decisão não afeta em nada as demonstrações dos teoremas aritméticos apresentados por ele. Ao demonstrar que $m + n = n + m$, ou seja, que a adição é comutativa, Dedekind considera m fixo e prova por indução em n que o teorema é válido. A princípio isso demonstraria apenas a validade do teorema para a função ψ_m, mas como m é arbitrário, a demonstração é válida para quaisquer m, n em N, e o mesmo procedimento é seguido para as demais proposições.

Enfim, para utilizar o teorema 7 para definir a transformação ψ tal que $\psi(n) = m + n$, a qual chamaremos de adição de m por n, precisamos determinar quem são o sistema Ω, o elemento ω de Ω e a transformação θ de Ω em Ω que aparecem no teorema. Nesse caso, teremos que $\Omega = N$, $\omega = m'$ e $\theta(n) = \phi(n) = n'$. Daí, a transformação única ψ obtida pelo teorema da definição por indução será tal que

I. $\psi(N)$ 3 N.

II. $\psi(1) = m'$.

III. $\psi(n') = \theta\psi(n) = \psi(n)'$.

Alternativamente, utilizando a notação usual de adição, podemos reescrever as propriedades II e III da seguinte forma:

II. $m + 1 = m'$.

III. $m + n' = (m + n)'$.

Vejamos a seguir um exemplo de propriedade aritmética da adição demonstrada por Dedekind neste capítulo. Vários outros resultados fundamentais são apresentados, como comutatividade e associatividade, todos seguindo a mesma lógica de demonstração por indução.

Teorema 8. $m' + n = m + n'$.

Demonstração. A prova é feita por indução completa (teorema 6). Temos que

ρ. o teorema é verdade para $n = 1$, pois pela propriedade II da adição,
$$m' + 1 = (m')' = (m + 1)',$$
e pela propriedade III, $(m + 1)' = m + 1'$.

σ. Se o teorema é verdade para um número n, e denotamos o próximo número n' por p, então $m' + n = m + p$, logo também $(m'+n)' = (m+p)'$, de modo que, pela propriedade III, $m'+p = m + p'$; portanto o teorema é verdade também para o número seguinte p, como queríamos demonstrar.

■

O procedimento utilizado para definir as demais operações aritméticas é o mesmo, e no capítulo 12 Dedekind define a multiplicação de números naturais. Assim, dado um natural m qualquer, podemos definir a transformação $\psi(n) = m \cdot n$, que representa o produto de m por n, tomando $\Omega = N$, $\omega = m$ e $\theta(n) = m + n = n + m$[17]. Daí, a transformação única ψ obtida pelo teorema da definição por indução será tal que

I. $\psi(N)$ 3 N.

II. $\psi(1) = m$.

III. $\psi(n') = \theta\psi(n) = \psi(n) + m$.

Alternativamente, utilizando a notação usual de multiplicação, podemos reescrever as propriedades II e III da seguinte forma:

[17] É lícito escrever que $m + n = n + m$ nessa definição pois Dedekind já havia demonstrado no capítulo anterior que a adição de números naturais é comutativa.

II. $m \cdot 1 = m$.

III. $m \cdot n' = m \cdot n + m$.

Já no capítulo 13 é dada a definição do que Dedekind chama de involução de números naturais, que nada mais é que a operação de potenciação. Dado um natural a qualquer, podemos definir a transformação $\psi(n) = a^n$, que representa a n-ésima potência de a, tomando $\Omega = N$, $\omega = a$ e $\theta(n) = a \cdot n = n \cdot a$[18]. Daí, a transformação única ψ obtida pelo teorema da definição por indução será tal que

I. $\psi(N)\ 3\ N$.

II. $\psi(1) = a$.

III. $\psi(n') = \theta\psi(n) = a \cdot \psi(n)$.

Alternativamente, utilizando a notação usual de potenciação, podemos reescrever as propriedades II e III da seguinte forma:

II. $a^1 = a$.

III. $a^{n'} = a \cdot a^n$.

O décimo quarto e último capítulo da obra, por fim, trata do número de elementos de um sistema finito. Neste capítulo é demonstrado, dentre outras coisas, que um sistema Σ é finito se, e somente se, for similar a algum dos sistemas Z_n. A partir disso, Dedekind define que se um sistema finito Σ é similar a Z_n então n é o número de elementos de Σ. Ademais, quando um número é utilizado para representar a quantidade de elementos de um sistema, chamamos-no de número cardinal.

[18] É lícito escrever que $a \cdot n = n \cdot a$ nessa definição pois Dedekind já havia demonstrado no capítulo anterior que a multiplicação de números naturais é comutativa.

A título de curiosidade, segue uma lista com alguns dos resultados demonstrados por Dedekind neste capítulo.

i. Todos os sistemas similares a um sistema finito têm o mesmo número de elementos;

ii. Se T é uma parte própria de um sistema finito Σ, então o número de elementos de T é menor que o número de elementos de Σ;

iii. Se A consiste de n elementos e B de m elementos, então o número de elementos da comunidade $\mathfrak{M}(A, B)$ é menor ou igual a $m+n$. Se A e B não têm elementos em comum então $\mathfrak{M}(A, B)$ possui exatamente $m + n$ elementos;

iv. A comunidade de uma quantidade finita de sistemas finitos é, também, finita.

Concluímos então a análise do ensaio *O que são e o que deveriam ser os números?*. Como pôde-se perceber, a obra em questão é consideravelmente densa, apesar de não ser tão longa. De fato, o trabalho passa por diversos tópicos e apresenta resultados fundamentais interessantíssimos sobre teoria de conjuntos, funções, números naturais, relações de ordem, operações aritméticas e também cardinalidade.

Entretanto, é marcante o fato de a obra não ser muito conhecida, apesar de ter sido publicada antes do livro de Peano sobre o assunto. Considerando a qualidade do ensaio e a variedade de conceitos e proposições interessantes, poder-se-ia esperar que ele tivesse obtido um maior reconhecimento, tal como os cortes de Dedekind. Vários fatores podem ter sido responsáveis por essa falta de reconhecimento, alguns dos quais veremos a seguir.

6 A RECEPÇÃO DOS TRABALHOS DE DEDEKIND

A relevância das ideias de Dedekind em relação aos números reais não pode ser negada, visto que os cortes de Dedekind são estudados até hoje. Guidorizzi (2016), por exemplo, constrói o corpo ordenado dos números reais utilizando esses cortes em seu livro sobre Cálculo Diferencial e Integral. Nesse sentido, os conceitos do ensaio *Continuidade e números irracionais* foram recebidos pelo menos bem o suficiente para resistirem ao teste do tempo e ainda serem reconhecidos como formas válidas de se definir o conjunto $\mathbb{R}$.

Mas além do próprio conceito de cortes, esse ensaio teve um papel histórico mais amplo na época em que foi publicado. Como Ferreirós (2007, p. 119) destaca, Cantor, Dedekind e Weierstrass construíram o conjunto dos números reais de maneiras distintas, e as ideias deles sobre o assunto foram publicadas todas no mesmo ano, em 1872. Mas além da coincidência da data, existe uma semelhança crucial entre os trabalhos dos três, pois todos eles tomaram os números racionais como dados e os utilizaram para definir os reais.

Considerando que a Geometria euclidiana era desenvolvida de modo axiomático desde os *Elementos* de Euclides, poder-se-ia pensar que os matemáticos da época fariam o mesmo com a aritmética. No entanto, não o fizeram, e há razões para isso. O primeiro motivo para isso, delineado por Ferreirós (2007, p. 119), é que o método axiomático não fazia parte do paradigma matemático do século XIX, pelo menos não no sentido de um modelo que fosse seguido nas pesquisas e nos trabalhos publicados.

Mesmo que o método axiomático fosse normalmente seguido na época, havia ainda outro problema. Segundo Ferreirós (2007, p. 120), a necessidade dos fundamentos da análise de um axioma da continuidade ou completude só foi evidenciado após as publicações de

Cantor e Dedekind em 1872. Apesar de ambos estarem convencidos de que a Geometria euclidiana precisava desse axioma, eles não achavam isso necessário no caso da Aritmética.

Uma explicação para essa diferença de percepção pode ter um caráter filosófico. Ferreirós (2007, p. 120) aponta que não eram apenas Dedekind e Frege que acreditavam que a Aritmética era lógica pura, pois existem indícios de que Weierstrass também compartilhava dessa visão, bem como Cantor no início da carreira. Considerando a clássica concepção de axiomas como proposições verdadeiras impossíveis de se provar, eles acreditavam que a Aritmética não se vale de axiomas. Tudo sobre ela poderia ser provada através de noções lógicas.

Outra questão indicada por Ferreirós (2007, p. 120) é que existia uma necessidade psicológica de se justificar que os objetos com os quais lidamos são números. Se apenas fossem tomados certos axiomas a partir dos quais as propriedades e teoremas numéricos pudessem ser derivados, os objetos analisados poderiam ser chamados de pontos ou qualquer outra coisa. Logo, deveria haver alguma coisa conectando todos os sistemas numéricos, de modo que os matemáticos do século XIX procuraram por alguma genealogia[1] comum.

Apesar de tudo isso, Ferreirós (2007, p. 122) acredita que havia uma justificativa conceitual mais urgente responsável pelo uso de construções em vez de axiomatizações. O ponto é que o final do século XIX foi marcado por pequenos desenvolvimentos que prepararam o terreno para a emergência do método axiomático. O próprio surgimento da teoria dos conjuntos nesse período foi fundamental para servir como ferramenta para a análise dos modelos axiomáticos. Tanto que, na concepção de Ferreirós (2007, p. 123), as construções de Dedekind,

[1] O uso do termo genealogia possui um significado histórico. De acordo com Ferreirós (2007, p. 119), Hilbert dizia que essas definições por métodos construtivos utilizavam uma "abordagem genética", em oposição às definições por axiomas, com "abordagem axiomática".

Cantor e Weiestrass foram exemplos pioneiros do uso da teoria dos conjuntos na construção de modelos matemáticos.

Em conclusão, Ferreirós (2007, p. 123) argumenta que um sistema axiomático dos números reais não teria sido aceito como solução para os problemas dos matemáticos da época de Dedekind, pois seria visto como um mero truque formal e arbitrário. Os modelos de $\mathbb{R}$ construídos a partir de $\mathbb{Q}$ tiveram um papel histórico chave no preparo da mentalidade axiomática moderna que surgiria um pouco mais tarde, sobretudo com os trabalhos de Hilbert. Logo, os cortes de Dedekind são significativos não apenas por terem se mantido relevantes com o passar do tempo, mas também por terem constituído um passo importante em direção à mentalidade matemática atual.

Mas se as contribuições de Dedekind sobre os números reais são ainda bem reconhecidas, o mesmo não pode ser dito sobre a construção dedekindiana do conjunto dos números naturais. Esse conjunto é normalmente definido de maneira axiomática via axiomas de Peano, e muitos talvez nem saibam que Dedekind apresentou uma forma alternativa de defini-los na mesma época. Considerando o renome de Dedekind como matemático, é interessante investigar por que essa parte de seu trabalho sobre os fundamentos da Matemática parece ter sido esquecido.

Para início de conversa, Ferreirós (2007) enfatiza que a forma como Dedekind expôs suas ideias foi provavelmente inconveniente. Em vez de chamar atenção para os conteúdos conjuntistas de seu ensaio, ele o intitulou *O que são e o que deveriam ser os números?*. Um título desses, aparentemente de caráter fundamental, dificilmente atrairia a atenção de matemáticos profissionais.

Pior ainda do que o título do ensaio é a forma de apresentação dos conteúdos do mesmo. Dedekind (1963, p. 33) afirma no prefácio do ensaio que ele poderia ser entendido por qualquer pessoa que tivesse senso comum, e que não seriam necessários quaisquer conhecimentos técnicos de Filosofia ou Matemática. Isso não poderia estar mais longe da verdade, mas o autor não se preocupou em explicar suas colocações com comentários. Não foi sem motivo que, como indica Ferreirós (2007, p. 248, tradução nossa), "poucos leitores foram capazes de entender o escopo e as possibilidades de sua teoria – ela não foi bem compreendida sequer por Cantor e Bernstein!"[2].

O que poderia salvar a obra, argumenta Ferreirós (2007), era o renome de Dedekind. Como um dos maiores especialistas em teoria dos números da época, é claro que um trabalho sobre os naturais escrito por ele mereceria atenção. O problema era a grande complexidade dedicada no ensaio a um tema aparentemente simples. Essa situação foi reconhecida por Dedekind (1963, p. 33, tradução nossa) no prefácio do ensaio:

> Mas eu me sinto consciente que muitos leitores dificilmente reconhecerão nas formas sombrias que eu apresento os números que durante todas as suas vidas os acompanharam como amigos fieis e familiares; eles se assustarão com a longa série de inferências simples correspondentes ao nosso entendimento passo-a-passo, pela dissecação das cadeias de raciocínio das quais dependem as leis dos números, e ficarão impacientes ao serem compelidos a seguir provas para verdades que para sua suposta consciência interna parecem evidentes e claras.[3]

Enfim, como comentado, o ensaio *O que são e o que deveriam*

[2] No original: "Few readers were able to grasp properly the scope and possibilities of his theory – it was not well understood even by Cantor and Bernstein!".

[3] No original: "But I feel conscious that many a reader will scarcely recognise in the shadowy forms which I bring before him his numbers which all his life long have accompanied him as faithful and familiar friends; he will be frightened by the long series of simple inferences corresponding to our step-by-step understanding, by the matter-of-fact dissection of the chains of reasoning on which the laws of numbers depend, and will become impatient at being compelled to follow out proofs for truths which to his supposed inner consciousness seem at once evident and certain".

ser os números? certamente teria se beneficiado de alguns comentários explicativos que deixassem mais claro de onde conceitos tão abstratos como *cadeias* e *sistemas simplesmente infinitos* vieram. Afinal, não é como se Dedekind fosse incapaz de fornecer tais explicações. Em uma carta enviada para o matemático Hans Keferstein em 1890, ele expôs de forma bastante esclarecedora qual foi a linha de raciocínio que seguiu para definir o sistema dos números naturais.

Nessa carta, Dedekind (1967, p. 100) observou primeiramente que o sistema N dos números naturais tem certas características. Ele é composto de elementos chamados de números, a cada um dos quais corresponde um outro número chamado de sucessor. Além disso, a transformação que associa um número ao seu sucessor possui algumas propriedades. Dois números distintos possuem sucessores distintos, e existe um único número especial, denotado por 1, que não é sucessor de ninguém. Com essas observações já se pode dizer que N é um sistema infinito.

O problema, destaca Dedekind (1967, p. 100), é que só isso não basta. Como explicado no capítulo anterior deste trabalho, essas propriedades listadas não garantem um aspecto fundamental do sistema N: o fato de que, começando com o número 1 e aplicando a transformação sucessor sobre ele uma quantidade finita de vezes, podemos chegar em qualquer número. Foi ao tentar reformular essa propriedade de maneira matemática, sem recurso a expressões linguísticas ambíguas, que Dedekind chegou ao conceito de *cadeia* que, como já visto, resolve o problema.

Com isso o sistema N dos números naturais estaria definido, mas Dedekind (1967, p. 101) lembra que ainda haviam algumas coisas a se considerar. De nada adianta definir N como um sistema simplesmente infinito arbitrário se sistemas desse tipo não existirem. Daí a necessidade da proposição que "prova" a existência de sistemas infinitos e da proposição que prova que todo sistema infinito contém um sistema simplesmente infinito.

Por fim, faltava para Dedekind estabelecer um método de demonstração que provasse a validade de proposições para todos os números naturais e uma forma de definir as diversas operações aritméticas sobre eles. A primeira necessidade foi atingida pelo método de prova por indução[4], enquanto a segunda foi atingida pelo teorema da definição por indução[5]. Feito tudo isso, estaria concluída a construção dos números naturais de Dedekind.

Visto que essas explicações foram todas detalhadas na carta em pouco menos de duas páginas, não parece haver boas razões para Dedekind não tê-las colocado em algum ponto do livro para deixá-lo mais claro. Se não no corpo do texto, pelo menos no prefácio ou posfácio. De qualquer modo, apesar das deficiências, o ensaio de Dedekind ainda assim foi lido por diversos matemáticos e lógicos influentes, e suas opiniões sobre ele foram variadas.

Considerando a visão logicista de Dedekind, segundo a qual a Aritmética nada mais é que uma extensão da lógica, é interessante verificar a recepção de seu trabalho pelos lógicos da época. Como Ferreirós (2007, p. 250) indica, até 1900 os maiores estudiosos do tema eram Gottlob Frege, Giuseppe Peano, Charles Sanders Peirce e Ersnt Schröder, de modo que vale a pena comentar as opiniões deles.

A reação mais negativa certamente foi a de Peirce, que considerou, erroneamente, que já havia demonstrado anteriormente todos os resultados mostrados por Dedekind, chegando a acusá-lo de plágio na definição do infinito (FERREIRÓS, 2007, p. 250).

Peano (1967, p. 86, tradução nossa) foi mais positivo, fazendo o seguinte comentário no prefácio de sua obra sobre os números natu-

[4] Indicado neste trabalho como teoremas 2, 3 e 6.
[5] Indicado neste trabalho como teorema 7.

rais: "o trabalho recente de Dedekind (1888) foi também muito útil para mim; nele, questões referentes aos fundamentos dos números são examinados minuciosamente"[6].

O lógico que melhor recebeu as ideias de Dedekind, no entanto, foi Schröder. Na sua opinião, as contribuições revolucionárias do ensaio de Dedekind haviam preenchido uma grande lacuna encontrada em todos os livros de Aritmética e Álgebra escritos até aquele momento (FERREIRÓS, 2007, p. 251).

Mas considerando o destaque de Gottlob Frege como logicista, sua reação merece mais atenção. No prefácio do primeiro volume das *Leis básicas da Aritmética*, sua obra sobre os números naturais publicado em 1893, Frege (2016, p. VII) diz que o ensaio *O que é o que deveriam ser os números?* é o trabalho mais completo que ele havia visto recentemente sobre os fundamentos da Aritmética. Ele também admite que o ensaio de Dedekind atinge, em muito menos espaço, leis da Aritmética bem mais avançadas do que as trabalhadas em seu livro.

Entretanto, o tom positivo de Frege acaba por aí. Logo em seguida ele destaca que Dedekind só conseguiu ir mais além do que ele, e de maneira mais concisa, porque demonstrou de fato poucas coisas. Frege (2016, p. VIII) criticou o outro por frequentemente afirmar apenas que uma demonstração segue de tais e tais proposições em vez de prová-las passo-a-passo, bem como por não explicitar uma lista das leis, lógicas ou de qualquer outro tipo, tomadas como básicas.

Aliás, como logicista, Frege mostra-se crítico à abordagem dada por Dedekind em relação ao suposto caráter lógico da Aritmética:

> O Sr. Dedekind também é da opinião que a teoria dos números é parte da lógica; mas o ensaio dele

[6] No original: "The recent work of Dedekind (1888) was also most useful to me; in it, questions pertaining to the foundations of numbers are acutely examined".

> quase não contribui para a confirmação dessa opinião pois seu uso das expressões "sistema", "uma coisa pertence a uma coisa" não são costumeiras na lógica e nem redutíveis a algo reconhecível como lógico (FREGE, 2016, p. VIII, tradução nossa).[7]

Mais adiante, na introdução da obra, Frege elenca algumas outras críticas ao trabalho de Dedekind. Mais especificamente, Frege (2016, p. 2-3) aponta três pontos fracos na teoria do outro: a falta de uma distinção clara entre a relação de inclusão e pertinência[8], a confusão entre sistemas unitários e seus únicos elementos[9], e a exclusão do sistema vazio[10].

Enfim, o que se pode perceber pelos comentários de Frege é que ele não estava satisfeito com a parte "lógica" do ensaio de Dedekind, bem como com a forma concisa de suas demonstrações. Apesar disso, Frege (2016, p. VIII) ressalta que suas críticas ao outro não são reclamações, pois ele percebe que os procedimentos de Dedekind podem ter sido bem adequados aos propósitos dele. Os comentários de Frege servem apenas para esclarecer suas próprias intenções por contraste, já que ele estava mais preocupado em demonstrar o caráter lógico da Aritmética do que em apresentar construções úteis aos matemáticos.

---

[7] No original: "Mr Dedekind too is of the opinion that the theory of numbers is a part of logic; but his essay barely contributes to the confirmation of this opinion since his use of the expressions "system", "a thing belongs to a thing" are neither customary in logic nor reducible to something acknowledged as logical".

[8] "In fact, what Dedekind actually means when he calls a system part of a system (p. 2) is the subordination of a concept under a concept, or the falling of an object under a concept, cases that he, like Schröder, fails to distinguish owing to a common error in their views"(FREGE, 2016, p. 2).

[9] "[...] a concept under which only one object falls must not be confused with it"(FREGE, 2016, p. 3).

[10] "Thus, on his [Schröder's] view, an empty class should not really occur any more than an empty system should on Dedekind's view; yet the demand arising from the nature of the subject matter makes itself felt on both authors in different ways"(FREGE, 2016, p. 2).

Passando agora para o lado dos matemáticos, é interessante analisar as reações de David Hilbert e Ernst Zermelo, dois grandes nomes da fundamentação formal da Matemática no século XX. O primeiro é conhecido, dentre outras coisas, pela formalização axiomática da Geometria no clássico *Grundlagen der Geometrie* e pelo programa de Hilbert, que almejava demonstrar a consistência da aritmética dos números reais. Já o segundo é conhecido pela axiomatização da teoria dos conjuntos[11].

Hilbert foi diretamente influenciado por Dedekind, adotando em *Grundlagen der Geometrie* os termos "sistema", para conjuntos, e "coisas", para objetos em geral. De fato, Ferreirós (2007) indica que Hilbert tinha grande respeito pelo trabalho fundacional de Dedekind, considerando sua construção dos naturais extremamente sagaz e chamando seu ensaio de um marco da época. Porém, devido aos paradoxos característicos das teorias não-axiomáticas de conjuntos, ele teve que reconhecer que as ideias cativantes de Dedekind o levaram a um beco sem saída.

Mesmo assim, Ferreirós (2007, p. 255) destaca que nos anos 1920 Hilbert tinha o hábito de considerar os trabalhos de Dedekind, Cantor e Frege como as origens da Matemática moderna e das pesquisas sobre os fundamentos da Matemática. Ele também aponta que há razões para se acreditar que durante as décadas de 1900 e 1910 Hilbert associava a abordagem conjuntista com Dedekind. Apenas mais tarde é que ele passaria a associar a teoria dos conjuntos com Cantor, o que teria influenciado fortemente as percepções futuras sobre essa abordagem.

As influências de Dedekind nos trabalhos de Zermelo, contudo, foram ainda mais substanciais. Em um artigo de 1908 ele mostrou

[11] Uma das mais populares axiomatizações atuais da teoria dos conjuntos é a de Zermelo-Fraenkel, assim conhecida em homenagem a Ernst Zermelo e Abraham Fraenkel.

como toda a teoria dos conjuntos desenvolvida, em suas palavras, por Cantor e Dedekind, poderia ser reduzida a algumas definições e sete axiomas. Além disso, Ferreirós (2007) comenta que o ensaio de Dedekind pode ter sugerido alguns desses axiomas. Em um deles não há dúvidas, pois Zermelo chamou de "Axioma de Dedekind" o que hoje conhecemos como Axioma do Infinito[12]. Ademais, a teoria de cadeias foi utilizada por ele em algumas demonstrações apresentadas em seus artigos.

O que se pode perceber com todos esses comentários e críticas é que o ensaio *O que são e o que deveriam ser os números?* foi mais influente e bem respeitado na época em que foi publicado do que se esperaria, dado o pouco reconhecimento atual da obra. Excetuando-se as posições mais negativas de Peirce e as questões mais pontuais indicadas por Frege, as ideias de Dedekind foram recebidas com respeito por grandes matemáticos e lógicos do período.

Portanto, por mais que a forma específica utilizada por Dedekind para construir os naturais não tenha se mantido relevante até hoje, o trabalho dele não foi em vão. Afinal, ele serviu como um excelente exemplo histórico de como a teoria dos conjuntos podia ser utilizada para definir outros conceitos matemáticos. Aliás, ter servido como fonte de inspiração para a teoria axiomática de conjuntos de Zermelo é um feito considerável, visto o papel crucial que ela possui na área de fundamentos da Matemática atualmente. Não é sem motivo que Corry (2015, p. 224) considera as contribuições de Dedekind cruciais para a consolidação da concepção moderna dos números.

[12] Como pode-se imaginar, esse axioma basicamente postula a existência de um conjunto infinito.

7 CONCLUSÃO

Richard Dedekind foi sem dúvida um matemático brilhante. Por mais que sua carreira profissional não tenha sido marcante, visto que não chegou a lecionar em universidades influentes, a qualidade e valor de suas publicações foram significativos. Apesar de não serem muito conhecidos, os ensaios *Continuidade e números irracionais* e *O que são e o que deveriam ser os números?* foram importantes marcos históricos na passagem da Matemática do início do século XIX para aquela que se estuda hoje.

No decorrer do desenvolvimento deste trabalho foi possível compreender que os ensaios de Dedekind sobre os números reais e naturais foram um fruto do período e do país em que viveu. As reformas das universidades alemãs, que passaram a ter maior foco nas pesquisas. A percepção da necessidade de reestruturação das bases da Análise. A aproximação dos matemáticos alemães com as discussões de cunho filosófico. Todos esses fatores da época levaram ao questionamento da concepção vigente de número e às preocupações de Dedekind sobre os fundamentos da Aritmética.

De fato, não foi por coincidência que outros matemáticos, predominantemente alemães, também discutiram sobre esses tópicos nesse período, como Weierstrass, Cantor, Peano e Frege. É uma pena para Dedekind que, comparado com esses outros autores, ele não tenha se destacado tanto com o passar do tempo. No que se refere ao desenvolvimento da teoria dos conjuntos, Cantor é mais bem reconhecido. Em relação aos números naturais, Peano é o maior nome. Como representante do logicismo, Dedekind perde em relevância para Frege no século XIX e Russell no século XX. Apesar disso, a análise dos ensaios de Dedekind mostraram os valores conceitual e histórico deles.

Assim, foi possível observar que Dedekind concebeu a definição dos números reais via cortes, uma abordagem ainda aceita como válida e utilizada, através de uma comparação intuitiva entre o conjunto dos números racionais e a linha reta. Ademais, a motivação dele por trás da definição foi também esclarecida, visto que ele deixou claro em seu ensaio as preocupações com o Cálculo Diferencial e Integral. Com isso, a conhecida relação entre a aritmetização da análise com a reestruturação dos números foi evidenciada.

Em relação aos números naturais, notou-se que a construção dedekindiana capturou a essência desse conjunto numérico de maneira semelhante aos axiomas de Peano. Mais do que isso, observou-se que Dedekind foi longe em seu trabalho, não apenas definindo as operações aritméticas e relações de ordem dos números naturais como também demonstrando várias propriedades importantes delas. Além disso, pôde-se analisar diversos aspectos interessantes da teoria dos conjuntos do autor, como o conceito de cadeia e seu papel dentro da mesma.

Por outro lado, foi possível perceber também as deficiências desses trabalhos. No ensaio *Continuidade e números irracionais*, Dedekind poderia ter sido mais detalhista, definindo mais operações entre cortes e demonstrando mais proposições sobre eles. Já no ensaio *O que é e o que deveriam ser os números?*, o problema foi a falta de comentários explicativos para melhor contextualizar a obra e esclarecer o propósito de certas definições. As ideias do autor foram, sem dúvida, altamente criativas. Faltou a elas, todavia, uma apresentação mais cuidadosa.

De qualquer forma, o que esse trabalho pôde esclarecer é que as contribuições de Dedekind para os fundamentos da Aritmética e, consequentemente, para a Matemática em geral, foram bastante substanciais. Ele foi um pioneiro da aplicação da emergente teoria dos conjuntos na construção de objetos matemáticos e seus ensaios foram inéditos em termos de metodologia. Nesse sentido, o estudo das duas obras foi proveitoso para se compreender a origem das atuais construções dos conjuntos numéricos, bem como a prática em si de construção de conceitos matemáticos.

Desse modo, o trabalho tem seu valor dentro da área de História da Matemática. Mas além disso, ele também apresentou informações e discussões valiosas para professores em formação. Afinal, é importante que futuros docentes ou pesquisadores compreendam o caráter histórico da Matemática. Os conceitos dessa área do conhecimento não surgem do nada. Novas teorias e abordagens matemáticas passam a ser estudadas por várias razões, como por deficiências percebidas nas práticas ou concepções anteriores ou mesmo por questões filosóficas, como pôde-se perceber com as motivações de Dedekind.

É claro, porém, que algumas questões curiosas permaneceram em aberto. Se Dedekind não apresentou no ensaio *Continuidade e números irracionais* uma definição para a operação de multiplicação entre cortes, por exemplo, quem a desenvolveu? Como as construções dos números reais de Weierstrass e de Cantor, bem como as construções dos números naturais de Frege e de Peano, se comparam com as de Dedekind? Como, e quando, surgiram as posteriores definições axiomáticas do conjunto dos números reais?

Esses questionamentos, bem como outros que surgiram durante a escrita do trabalho, não puderam ser abordados, tanto por limitações de tempo como por desconhecimento de fontes adequadas para respondê-los. Apesar disso, essas perguntas indicam o potencial de ampliação e continuação da pesquisa realizada. Os trabalhos de Dedekind sobre os conjuntos numéricos fazem parte de um contexto rico em desenvolvimentos inéditos no que se refere aos fundamentos da Matemática, e são várias as possibilidades de investigações históricas que ainda podem ser realizadas sobre o tópico.

REFERÊNCIAS

CORRY, Leo. **A Brief History of Numbers**. 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 2015.

DEDEKIND, Richard. **Essays on the Theory of Numbers**. Tradução: Wooster Woodruff Beman. Nova Iorque: Dover Publications, 1963.

DEDEKIND, Richard. Letter to Keferstein. *In*: HEIJENOORT, Jean van (Ed.). **From Frege to Gödel**: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931. Cambridge: Harvard University Press, 1967.

FERREIRÓS, José. **Labyrinth of Thought**: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics. 2. ed. Boston: Birkäuser, 2007.

FREGE, Gottlob. **Basic Laws of Arithmetic**: Derived using concept-script. Tradução: Philip A. Ebert & Marcus Rossberg. Oxford: Oxford University Press, 2016.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. v. 1.

JAMES, Ioan Mackenzie. **Remarkable Mathematicians**: From Euler to von Neumann. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

PEANO, Giuseppe. The principles of arithmetic, presented by a new method. *In*: HEIJENOORT, Jean van (Ed.). **From Frege to Gödel**: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931. Cambridge: Harvard University Press, 1967.

RECK, Erich. The Logic in Dedekind's Logicism. *In*: LAPOINTE, Sandra (Ed.). **Logic from Kant to Russel**: laying the foundations for analytic philosophy. Nova Iorque: Routledge, 2019. cap. 8, p. 171–186.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SILVA, Jairo José da. **Filosofias da matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 2007.