

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CAMPUS BLUMENAU  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Jaqueline Uliano

**Teoremas matemáticos: um encontro entre história,  
conceitos e aplicações.**

Blumenau  
2021



Jaqueline Uliano

**Teoremas matemáticos: um encontro entre história,  
conceitos e aplicações.**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática do Campus Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Naiara Vergian de Paulo Costa.

Coorientador: Prof. Dr. Júlio Faria Corrêa.

Blumenau

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Uliano, Jaqueline

Teoremas matemáticos: um encontro entre história,  
conceitos e aplicações. / Jaqueline Uliano ; orientador,  
Naiara Vergian de Paulo Costa, coorientador, Júlio Faria  
Corrêa, 2021.

124 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -  
Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau,  
Graduação em Matemática, Blumenau, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Teorema de Tales. 3. Teorema das  
Bissetrizes. 4. Teorema de Descartes. 5. Teorema das  
Quatro Cores. I. Vergian de Paulo Costa, Naiara . II.  
Faria Corrêa, Júlio . III. Universidade Federal de Santa  
Catarina. Graduação em Matemática. IV. Título.

Jaqueline Uliano

**Teoremas matemáticos: um encontro entre história,  
conceitos e aplicações.**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Licenciado(a) em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática.

Blumenau, [22] de [Setembro] de [2021].

---

Prof. Dr. Júlio Faria Corrêa.  
Coordenador do Curso

**Banca Examinadora:**

---

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Naiara Vergian de Paulo Costa.  
Orientadora  
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

---

Prof. Dr. Júlio Faria Corrêa.  
Coorientador  
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

---

Prof. Dr. André Vanderlinde da Silva.  
Avaliador  
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

---

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Louise Reips.  
Avaliadora  
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

*A todos que não me deixaram desistir.*



## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo discutir os seguintes teoremas: Teorema de Tales, Teorema das Bissetrizes, Teorema de Descartes, e Teorema das Quatro Cores. Os teoremas estudados fazem parte de um conjunto de 21 teoremas abordados no livro “21 Teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo” da autora Maria Helena Souza<sup>[19]</sup>. A abordagem utilizada abrange três campos de conhecimento da matemática: a história relacionada ao tema, formalização e sistematização de conceitos e aplicações. Para a completude do trabalho, foi necessário realizar uma revisão de bibliografias, revisitando conceitos elementares que permitem uma maior compreensão das demonstrações dos teoremas em questão.

**Palavras-chave:** História da matemática. Teorema de Tales. Bissetriz. Teorema de Descartes. Teorema das quatro cores. Aplicações matemáticas.



## ABSTRACT

The purpose of this work is to discuss the following theorems: Thales' Theorem, Angle Bisector Theorem, Descartes' Theorem and Four Color Theorem. The theorems studied are part of a series of 21 theorems addressed in the book named "21 Teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo", by the author Maria Helena Souza <sup>[19]</sup>. The approach adopted in this work covers three knowledge fields in mathematics: the history related to the theme, formalization and systematization of concepts and applications. For the sake of completeness, it was necessary to carry out a review of bibliographies, revisiting elementary concepts which allow a better comprehension of the proofs of the theorems in question.

**Keywords:** History of Mathematics. Thales' Theorem. Bisector. Descartes' Theorem. Four Color Theorem. Mathematical applications.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustração das Definições 2.1 e 2.2. . . . .	23
Figura 2 – Representação de triângulos semelhantes. . . . .	25
Figura 3 – Ilustração da demonstração. . . . .	26
Figura 4 – Ilustração do item (ii) da demonstração. . . . .	27
Figura 5 – Ilustração da Observação 2.5. . . . .	28
Figura 6 – Construção da semirreta com origem em $A$ que passa por $C$ . . . . .	31
Figura 7 – Divisão do segmento $\overline{AB}$ em $n$ partes. . . . .	32
Figura 8 – Construção do triângulo $\triangle ADE$ . . . . .	33
Figura 9 – Paralelismo de $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$ . . . . .	34
Figura 10 – Divisão de $\overline{AB}$ em $n$ partes iguais. . . . .	34
Figura 11 – Retas $r_i$ paralelas a $\overline{BC}$ passando pelos pontos $P_i$ . . . . .	35
Figura 12 – Construção dos paralelogramos $ABUA'$ e $BCVU$ . . . . .	38
Figura 13 – Representação do cálculo da altura de uma pirâmide segundo o relato tradicional. . . . .	39
Figura 14 – Sobreposição dos triângulos $\triangle PQB$ e $\triangle ABC$ . . . . .	41
Figura 15 – Ideia de como Tales calculou a distância navio-costa. . . . .	41
Figura 16 – Ideia de como Tales calculou a distância navio-costa. . . . .	42
Figura 17 – Pantógrafo. Imagem adaptada de [19]. . . . .	42
Figura 18 – Exemplo de pantógrafo. Imagem retirada de [19]. . . . .	43
Figura 19 – Figuras homotéticas. . . . .	44
Figura 20 – TV de 55" com diferentes proporções, imagem disponível em [20]. . . . .	45
Figura 21 – Reprodução de uma circunferência em uma projeção 4 : 3. . . . .	46
Figura 22 – Distorção da circunferência em uma projeção 16 : 9. . . . .	46
Figura 23 – Recorte da circunferência em uma projeção 16 : 9. . . . .	46
Figura 24 – Adaptação de uma imagem 4 : 3 para 16 : 9. . . . .	47

Figura 25 – Ilustração da demonstração contida no livro de Euclides <sup>[6]</sup> . . . . .	52
Figura 26 – Representação da bissetriz do ângulo $\angle AOB$ . . . . .	53
Figura 27 – Representação de uma bissetriz interna de um triângulo. . . . .	54
Figura 28 – Representação de uma bissetriz externa de um triângulo. . . . .	54
Figura 29 – Construção do triângulo $\triangle ACE$ . . . . .	56
Figura 30 – Construção geométrica do Teorema 3.2. . . . .	57
Figura 31 – $\overrightarrow{OP}$ é bissetriz de $\angle AOB$ . . . . .	59
Figura 32 – Construção geométrica da Proposição 3.2. . . . .	60
Figura 33 – Representação do problema do armazém. . . . .	62
Figura 34 – Construção geométrica da Propriedade 3.1. . . . .	63
Figura 35 – Representação da solução do problema do armazém. . . . .	64
Figura 36 – Poema "The Kiss Precise" de Frederick Soddy. Imagem retirada de [22]. . . . .	69
Figura 37 – Circunferências do Exemplo 4.1. . . . .	70
Figura 38 – Construção do triângulo $\triangle ABC$ . . . . .	74
Figura 39 – Circunferências do Exemplo 4.2. . . . .	79
Figura 40 – Construção de triângulos retângulos. . . . .	81
Figura 41 – Renomeando os segmentos. . . . .	82
Figura 42 – Exemplo de empacotamento de círculos em uma região circular do plano. Imagem retirada de [3]. . . . .	86
Figura 43 – Exemplo de empacotamento de círculos retangular e hexagonal. Imagem retirada de [24]. . . . .	87
Figura 44 – Exemplo de empacotamento de círculos utilizando as Circunferências de Soddy. . . . .	88
Figura 45 – Coloração do mapa da América do Sul. . . . .	89
Figura 46 – Carta de Augustus De Morgan para William Rowan Hamilton. Imagem retirada de [25]. . . . .	91

Figura 47 – Representação retangular do toro. Imagem retirada de [15]. . . . .	92
Figura 48 – Converter um mapa em um grafo. . . . .	95
Figura 49 – Representação dos jogos como um grafo. . . . .	96
Figura 50 – Grafo $G$ com $V(G) = 7$ e $A(G) = 7$ . . . . .	97
Figura 51 – Exemplos de caminhos no grafo $G$ . . . . .	98
Figura 52 – $G_1$ é um grafo conexo, $G_2 \cup G_3$ é desconexo. . . . .	99
Figura 53 – Representação de um grafo $G$ do tipo árvore. . . . .	99
Figura 54 – Grafo planar. . . . .	100
Figura 55 – Grafo não planar. . . . .	100
Figura 56 – Exemplos de grafos completos. . . . .	101
Figura 57 – $G_0$ é um grafo planar formado pelas arestas de um dodecaedro, e o grafo $G_1$ é sua representação gráfica no plano. . . . .	102
Figura 58 – Visão do mapa em torno do país $F$ e encolhimento do país $F$ ao vértice $A$ . . . . .	106
Figura 59 – Caso em que um país faz parte de outro. . . . .	107
Figura 60 – Expansão do vértice $A$ . . . . .	108
Figura 61 – Produtos químicos. . . . .	109
Figura 62 – Coloração das regiões dos produtos utilizados. . . . .	110
Figura 63 – Representação do problema das Pontes de Königsberg. Imagem retirada de [18]. . . . .	111
Figura 64 – Utilização de grafos no problema das Pontes de Königsberg. . . . .	111



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>TEOREMA DE TALES</b>	<b>19</b>
2.1	HISTÓRIA DE TALES SEGUNDO O RELATO TRADICIONAL	19
2.2	O QUE SABEMOS SOBRE TALES E SUAS REALIZAÇÕES	21
2.3	ENUNCIADO E DEMONSTRAÇÃO	23
2.4	TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROPORCIONALIDADE	30
2.5	APLICAÇÕES DO TEOREMA DE TALES	38
<b>2.5.1</b>	<b>Medida da altura da pirâmide</b>	<b>39</b>
<b>2.5.2</b>	<b>Medida da distância do navio até a costa</b>	<b>40</b>
<b>2.5.3</b>	<b>O pantógrafo</b>	<b>42</b>
<b>2.5.4</b>	<b>Figuras semelhantes e as distorções provocadas pela TV</b>	<b>44</b>
<b>3</b>	<b>TEOREMA DAS BISSETRIZES</b>	<b>49</b>
3.1	EUCLIDES E O TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA	49
3.2	ENUNCIADO E DEMONSTRAÇÃO	53
<b>3.2.1</b>	<b>A bissetriz como um lugar geométrico</b>	<b>58</b>
3.3	APLICAÇÕES DA NOÇÃO DE BISSETRIZ	59
<b>3.3.1</b>	<b>Bissetrizes e o problema do armazém</b>	<b>61</b>
<b>4</b>	<b>TEOREMA DE DESCARTES</b>	<b>65</b>
4.1	A VIDA DE DESCARTES	65
4.2	DE APOLÔNIO A DESCARTES	66
4.3	DUAS VERSÕES DA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE DESCARTES	68
4.4	EMPACOTAMENTO DE CÍRCULOS	86
<b>5</b>	<b>TEOREMA DAS QUATRO CORES</b>	<b>89</b>

5.1	NO QUE CONSISTE O PROBLEMA DAS QUATRO CORES? . . . . .	89
5.2	QUATRO CORES, DA CONJECTURA AO TEOREMA	90
5.3	NOÇÕES DE GRAFOS . . . . .	94
5.4	TEOREMA DAS CINCO CORES . . . . .	102
5.5	PROBLEMAS ENVOLVENDO GRAFOS E O TEOREMA DAS QUATRO CORES . . . . .	108
<b>5.5.1</b>	<b>Explorando a interdisciplinariedade: Matemática e Química . . . . .</b>	<b>108</b>
5.5.1.1	Apresentando o problema . . . . .	109
<b>5.5.2</b>	<b>Pontes de Königsberg . . . . .</b>	<b>110</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>113</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>115</b>
	<b>APÊNDICE A – TRADUÇÃO DO POEMA KISSING CIRCLE THEOREM . . . . .</b>	<b>121</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O trabalho surgiu como uma ideia de exploração científica do livro “21 teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo” da autora Maria Helena Souza <sup>[19]</sup> e tem como objetivo revisitar noções e teoremas importantes da matemática através de três vertentes: história relacionada ao tema, formalização e sistematização de conceitos e aplicações. Os teoremas são: Teorema de Tales, Teorema das Bissetrizes, Teorema de Descartes e Teorema das Quatro Cores.

A abordagem histórica relacionada ao tema foi essencial neste projeto, uma vez que as disciplinas ao longo da graduação nos mostraram que muitas das histórias que nos são contadas em relação a grandes nomes da Matemática e carregam consigo a ideia de um genialismo que traduzem uma visão de que a ciência é uma produção individual criada em algum momento de muita criatividade. Com o intuito de desconstruir essa ideia, neste trabalho, analisaremos relatos tradicionais <sup>1</sup> e suas possíveis divergências.

A formalização e sistematização de conceitos é essencial para a compreensão de determinados conteúdos. Portanto, conceitos preliminares antes de cada teorema serão abordados com o intuito de delinear uma base para o entendimento dos enunciados e das demonstrações.

Já as aplicações foram escolhidas para compor este trabalho porque fazem parte de uma parcela importante da matemática. Ao longo da graduação estudamos teoremas e demonstrações com diversos níveis de dificuldades e as principais consequências na matemática, mas nem sempre abordamos as aplicações mais palpáveis do dia a dia. Pensando na formação integral do estudante proposto pelo currículo,

---

<sup>1</sup> Por relato tradicional queremos nos referir a um tipo de relato histórico que vê a matemática como produzida a partir da genialidade de poucos indivíduos e com seu desenvolvimento visto de maneira linear-evolutiva, muitas vezes desconsiderando as práticas de cada contexto e tomando como medida um padrão moderno de produção da matemática numa concepção formalista.

e na carreira como professora de Matemática, as aplicações estudadas neste trabalho podem ser facilmente adaptadas e discutidas em nível de ensino básico.

## 2 TEOREMA DE TALES

Os problemas matemáticos e a forma como são interpretados e ensinados em distintas culturas são de extrema importância para a compreensão desses. Neste capítulo serão abordados pontos históricos fundamentais a respeito do Teorema de Tales<sup>1</sup> de maneira a desfazer alguns mitos relacionados ao teorema, mais especificamente, anacronismos sobre a relação entre Tales e a matemática oriental.

As seções 2.1 e 2.2 traçam um paralelo entre o relato tradicional a respeito do Teorema de Tales e as controvérsias sobre as possíveis realizações de Tales a fim de compreender a necessidade da sistematização dos conhecimentos e o processo não linear de criação de problemas ditos concretos. Já a seção 2.3 contém conceitos elementares para o enunciado e demonstração do Teorema de Tales.

Na seção 2.4 está destinada à apresentação de uma outra maneira para a demonstração do Teorema de Tales a partir do Teorema Fundamental da Proporcionalidade. E por fim, na seção 2.5 serão apresentadas quatro aplicações, das quais duas detalham as realizações de Tales apresentadas na seção 2.2.

### 2.1 HISTÓRIA DE TALES SEGUNDO O RELATO TRADICIONAL

Segundo o relato tradicional, a motivação do teorema de Tales se origina principalmente devido ao contexto em que Tales de Mileto (624 - 546 a.E.c) estava inserido, um ambiente em que as características

---

<sup>1</sup> O nome “Teorema de Tales” se fixou em um único resultado matemático no Brasil, enquanto na língua inglesa vários teoremas possuem esse nome. Na enciclopédia Britannica: In particular, he has been credited with proving the following five theorems: (1) a circle is bisected by any diameter; (2) the base angles of an isosceles triangle are equal; (3) the opposite (“vertical”) angles formed by the intersection of two lines are equal; (4) two triangles are congruent (of equal shape and size) if two angles and a side are equal; and (5) any angle inscribed in a semicircle is a right angle ( $90^\circ$ ).

eram fomentadas pela agricultura (Egito e Grécia). A geometria dessa época se apresentava de maneira intuitiva que, em sua maioria, resolvia problemas práticos.

A autora Maria Helena Souza, em seu livro “21 Teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo” <sup>[19]</sup>, nos apresenta uma história tradicional do Teorema de Tales, abordando brevemente a vida de Tales de Mileto e suas mais conhecidas realizações: o cálculo da altura de uma pirâmide e a distância de um navio até a costa.

De acordo com Eves (2004)<sup>[5]</sup>, há duas versões de como Tales realizou o cálculo da altura da pirâmide. O relato mais antigo, de Hierônimos (331 - 440) diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que era igual a altura da pirâmide que a projetava. Outra versão desta realização de Plutarco (século I-II d.C) diz que o cálculo se deu através da observação do comprimento da sombra da pirâmide e o comprimento da sombra de um graveto fincado no chão na extremidade da sombra em que a pirâmide projetava.

Em relação à divergência de relatos, Fontana<sup>[7]</sup> dá preferência a primeira versão por ser mais coerente com o conhecimento da época. Já a segunda versão, afirma que envolve ferramentas matemáticas das quais Tales possivelmente não teria conhecimento, essas serão exploradas na seção 2.5.1.

Em relação ao cálculo da distância de um navio até a costa, relato citado por Proclo (410-485), Tales havia usado congruência de triângulos e um instrumento que possibilitou a medida do ângulo formado por uma pessoa sobre uma superfície de altura conhecida, o barco e a base desta superfície. Ao obter este ângulo, girou o instrumento em  $180^\circ$  e com a ajuda de alguém marcou no chão o ponto em que o instrumento estava apontando. Este relato será discutido na seção 2.5.2.

## 2.2 O QUE SABEMOS SOBRE TALES E SUAS REALIZAÇÕES

Os relatos tradicionais apresentados anteriormente, em especial o da medida da altura da pirâmide, são alvos de críticas por partes de historiadores da matemática devido a pouca ou nenhuma fonte direta que atribuam o acontecimento a Tales. Nesta seção, iremos analisar os relatos seguindo a linha de pensamento de Fontana, (2011)<sup>[7]</sup>. O autor cita três principais motivos para questionar tais relatos: (1) esse relato teria sido criado por autores helenistas, temporalmente distantes de Tales; (2) há divergências entre os relatos que servem de fonte para a narrativa; (3) condições muito próprias para a realização do cálculos.

As primeiras fontes às quais temos acesso sobre o início da filosofia estão inseridas no contexto do helenismo<sup>2</sup>. Os textos deste período, ao descreverem o passado, projetavam a realidade em que viviam sobre a dos jônios<sup>3</sup>, resultando em relatos com empréstimos culturais entre as civilizações (Fontana, 2011)<sup>[7]</sup>. A ideia dos egípcios como provedores do pensamento matemático contribuiu com a propagação desses relatos idealizados. Apesar da concepção de que os gregos teriam se apropriado da herança cultural do antigo Egito, não podemos estabelecer uma continuidade entre esses conhecimentos, o que aponta para a presença de diferentes práticas.

Os mesopotâmios e os egípcios realizavam cálculos com medidas de comprimentos, áreas e volumes e alguns de seus procedimentos aritméticos devem ter sido obtidos por métodos geométricos, envolvendo transformações de áreas. Isso não quer dizer, contudo, que possuísem uma geometria.

(ROQUE, 2012, p.93)<sup>[14]</sup>.

---

<sup>2</sup> Período que está compreendido aproximadamente entre 323 a.E.c até 146 a.E.c

<sup>3</sup> Os jônios, ou iônios, compreendiam quatro etnias que formaram o povo grego a partir do século XII a. E.C. A figura de Tales de Mileto foi importante para os jônios.

Este intercâmbio cultural ocorre principalmente por conta de uma disputa pelas fontes da filosofia que os antecede, criando mitos contextualizados de acordo com a realidade prática, com uma narrativa anacrônica. Segundo Roque, (2012)<sup>[14]</sup>, não há documentação que estabeleça essa transição da matemática mesopotâmia e egípcia para a grega, isso contribui para a construção da ideia da unicidade da matemática. É mais provável que a matemática grega tenha sua origem nos povos que habitavam a região da Grécia anteriormente, os povos nativos da região. Entender os mitos referentes à herança grega advinda dos egípcios é essencial para questionamentos dos relatos tradicionais.

Existem alguns pontos importantes entre os relatos apresentados sobre a medição da altura de uma pirâmide. Possivelmente Tales utilizou conhecimentos elementares, do campo da Astronomia. Entretanto, as condições necessárias para que Tales tenha conseguido medir a altura da pirâmide da forma como foi descrita, eram muito específicas.

A posição em que o Sol deveria estar para projetar a sombra perpendicular ao lado da base é exclusiva de alguns dias do ano, ou seja, a sombra da pirâmide poderia não estar exatamente na posição que permitiria a realização dos cálculos, desse modo, Tales teria que ter passado um ano inteiro observando a pirâmide a fim de realizar tal tarefa, o que é muito improvável que tenha feito. (FONTANA, 2011, p. 31)<sup>[7]</sup>.

Assim, é mais provável que Tales tenha realizado o cálculo de distâncias de navios até a costa, do que calculado a altura de pirâmides. Isso porque as práticas de navegação eram muito importantes na Grécia Antiga o que torna mais fidedigno ao tipo de resultado matemático apresentado por Tales.

## 2.3 ENUNCIADO E DEMONSTRAÇÃO

Ao longo das seções anteriores, podemos analisar brevemente alguns fatos a respeito do Teorema de Tales. E o mais importante, entender que a fundamentação histórica de um teorema ou de um conteúdo nem sempre é consensual.

Nesta seção, iremos estudar alguns conceitos fundamentais para o enunciado e demonstração do teorema que é atribuído a Tales. As definições serão as ferramentas que darão o embasamento necessário para compreender o Teorema de Tales.

**Definição 2.1.** Um feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si.

**Definição 2.2.** Uma reta do plano que concorre com as demais retas de um feixe de retas paralelas é chamada de transversal do feixe.

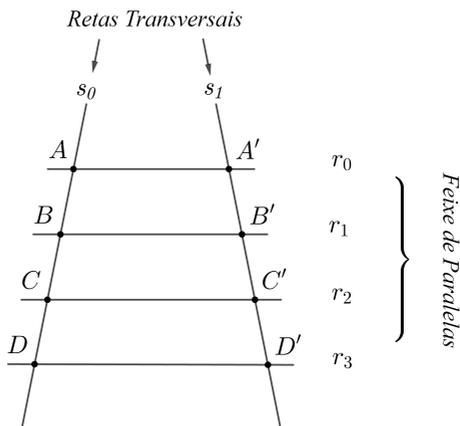


Figura 1 – Ilustração das Definições 2.1 e 2.2.

Note que na Figura 1 os pontos  $A$  e  $A'$ , por exemplo, estão na mesma reta do feixe e em retas transversais distintas. Esses pontos são chamados de *pontos correspondentes*. As extremidades dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$  são pontos correspondentes e, por isso esses segmentos são definidos como *segmentos correspondentes*.

**Observação 2.1.** Usaremos a notação  $\overline{AB}$  para denotar o segmento, e seu comprimento será representado por  $AB$ .

**Definição 2.3.** Dois segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  são comensuráveis se existe um segmento de medida  $x$  e dois números inteiros positivos  $m$  e  $n$  tais que  $AB = m \cdot x$  e  $BC = n \cdot x$ .

**Observação 2.2.** Note que  $x$  é uma medida de um segmento submúltiplo comum de  $AB$  e  $CD$ .

**Definição 2.4.** Dois segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  são incomensuráveis quando nenhum segmento submúltiplo cabe um número inteiro de vezes em  $\overline{AB}$  e em  $\overline{BC}$  simultaneamente.

As definições de segmentos comensuráveis (2.3) e incomensuráveis (2.4) nos apresentam noções que serão essenciais para a demonstração do Teorema de Tales. De modo geral, dizemos que dois segmentos são comensuráveis se a razão entre seus comprimentos pode ser expressa por um número racional. Caso contrário, temos segmentos incomensuráveis.

**Definição 2.5.** Dois triângulos são ditos semelhantes quando os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

**Observação 2.3.** Em alguns casos, representaremos o lado do triângulo como seu respectivo segmento, isto é:

$$a = \overline{BC}, \quad b = \overline{AC} \quad e \quad c = \overline{AB}.$$

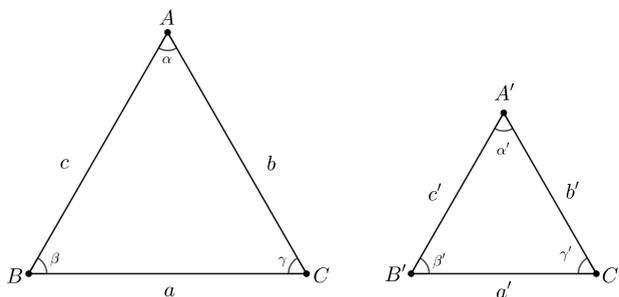


Figura 2 – Representação de triângulos semelhantes.

Utilizando a notação da Figura 2, a Definição 2.5 pode ser entendida como:

$$\angle A \equiv \angle A', \quad \angle B \equiv \angle B', \quad \angle C \equiv \angle C'$$

e

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

A razão das medidas entre os lados correspondentes de triângulos semelhantes é chamada de *razão de semelhança*. Dizemos que  $k$  é a razão de semelhança dos triângulos se:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k.$$

**Observação 2.4.** *Note que se  $k = 1$ , então os triângulos são congruentes.*

O conceito de semelhança de triângulos será recorrente ao longo dos capítulos do trabalho. Essa é uma noção que se faz presente em diversas partes da Geometria Euclidiana. Nesta seção, o entendimento da Definição 2.5 é essencial para a construção do Teorema 2.2.

**Lema 2.1.** *Considere duas retas transversais de um feixe de retas paralelas distintas. Se um segmento de uma delas é dividido em  $p$  partes congruentes entre si e pelos pontos de divisão são conduzidas retas do feixe, então o segmento correspondente da outra transversal:*

- (i) Também é dividido em  $p$  partes;
- (ii) Essas partes são congruentes entre si.

*Demonstração.*

(i) Sejam dois segmentos correspondentes  $\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$  tais que  $\overline{AB}$  é dividido em  $p$  partes por retas do feixe. Suponha, por absurdo, que  $\overline{A'B'}$  seja dividido em um número de partes diferente de  $p$ . Para facilitar a visualização, assuma sem perda de generalidade que  $\overline{A'B'}$  seja dividido em  $p - 1$  ou  $p + 1$  partes. Desse modo, pelo menos duas retas do feixe interceptam-se em um ponto qualquer de  $\overline{A'B'}$  ou de  $\overline{AB}$ , respectivamente. O que é um absurdo pois as retas do feixe são paralelas. Portanto,  $\overline{A'B'}$  também é dividido em  $p$  partes. A Figura (3) ilustra as possibilidades citadas para a divisão do segmento  $\overline{A'B'}$ .

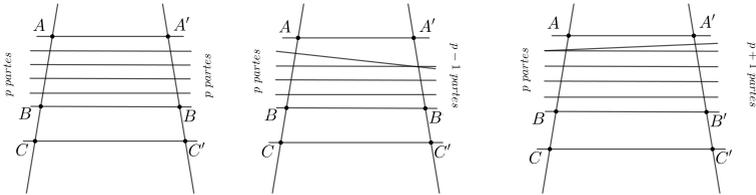


Figura 3 – Ilustração da demonstração.

(ii) Sejam  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  segmentos sobre a reta transversal  $s_0$  (veja a Figura 4) congruentes com medida  $x$ , respectivamente. Note que para cada ponto formado pela intersecção do feixe com a reta  $s_1$ , podemos traçar um segmento paralelo à reta  $s_0$ , obtendo os pontos  $U$  (intersecção com a reta  $r_1$ ) e  $V$  (intersecção com a reta  $r_2$ ) e os triângulos  $\Delta A'UB'$  e  $\Delta B'VC'$ .

Observe que temos um caso de congruência de triângulos do tipo ângulo, lado, ângulo (ALA). Temos que  $A'U = B'V = x$ , pois a partir da construção obtemos os paralelogramos  $ABUA'$  e  $BCVB'$

que por definição, possuem lados opostos congruentes. Já os ângulos  $\angle ABU$ ,  $\angle A'UB'$ ,  $\angle BCV$  e  $\angle B'VC'$  são congruentes, pois são ângulos correspondentes que possuem suas respectivas secantes paralelas. De maneira análoga, os ângulos  $\angle UA'B'$  e  $\angle VB'C'$  são congruentes.

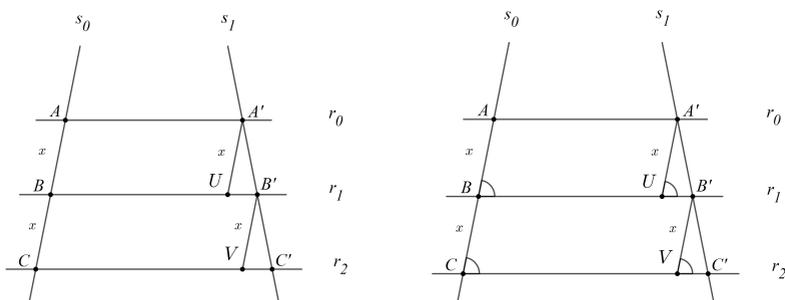


Figura 4 – Ilustração do item (ii) da demonstração.

Com isso, concluímos que os triângulos  $\Delta A'UB'$  e  $\Delta B'VC'$  são congruentes e portanto,  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{B'C'}$  serão congruentes.

□

**Observação 2.5.** *Os segmentos de divisão da reta  $s_0$  não possuem necessariamente a mesma medida dos segmentos de divisão da reta  $s_1$ . Veja o exemplo a seguir.*

**Exemplo 2.1.** Na Figura (5), a transversal  $s_1$  cruza o feixe de retas paralelas perpendicularmente, já  $s_0$  não. A construção dos triângulos  $\Delta A'UB'$  e  $\Delta B'VC'$  foi feita de modo análogo ao da demonstração, note que ambos são triângulos retângulos, nesse caso. Utilizando a argumentação anterior, temos que a hipotenusa do triângulo  $\Delta A'UB'$  dada pelo segmento  $\overline{A'U}$  tem medida  $x$ , desse modo o cateto dado pelo segmento  $\overline{A'B'}$  possui uma medida  $y$  diferente de  $x$ . O mesmo ocorre para o triângulo  $\Delta B'VC'$ .

A demonstração a seguir do Teorema de Tales foi feita com base no livro Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana de Osvaldo Dolce e José Nicolau [4]. Os autores dividem a demonstração em dois casos: o primeiro em que os segmentos são comensuráveis e o segundo em que os segmentos são incomensuráveis.

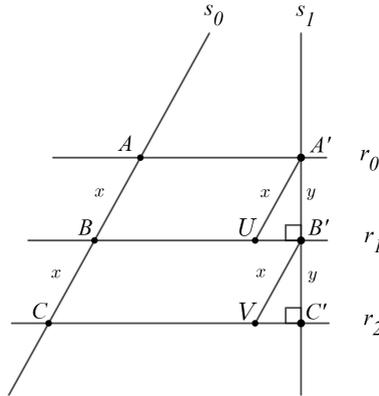


Figura 5 – Ilustração da Observação 2.5.

**Teorema 2.1** (TEOREMA DE TALES). *Dadas duas retas transversais a um feixe de retas paralelas, tais retas determinam segmentos correspondentes com a mesma proporção.*

Podemos interpretar o Teorema de Tales da seguinte maneira: Sejam  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  segmentos de uma transversal  $s_0$ , e  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{B'C'}$  segmentos correspondentes, respectivamente, de uma transversal  $s_1$ . Então  $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ .

*Demonstração.* Sejam  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  segmentos comensuráveis. Desse modo, existe um segmento de medida  $x$  submúltiplo de  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ . Então temos que o comprimento de  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  podem ser escritos como

$AB = m \cdot x$  e  $BC = n \cdot x$ , em que  $m$  e  $n$  são inteiros positivos. Desse modo, a razão entre  $AB$  e  $BC$  é dada por:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}. \quad (1)$$

Conduzindo as retas do feixe pelos pontos formados pela interseção do feixe com a reta  $s_0$  na reta  $s_1$  obtemos os pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  correspondentes a  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente. Pelo Lema 2.1 temos que  $A'B' = m \cdot x'$  e  $B'C' = n \cdot x'$  para alguma medida  $x'$ . Logo,

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{m}{n}. \quad (2)$$

De (1) e (2) temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Agora, considere  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  segmentos incomensuráveis. Por definição, não existe um segmento submúltiplo em comum entre eles. Tome  $y$  um submúltiplo arbitrário de  $\overline{BC}$ , ou seja,  $BC = n \cdot y$ . Observe que quanto menor o submúltiplo de  $y$ , maior o número de vezes que ele cabe em  $\overline{BC}$ , isto é, maior será o  $n$ .

Como  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  são incomensuráveis, se marcarmos  $y$  em  $AB$  para um certo número inteiro  $m$  vezes, de modo que  $m$  seja o maior número possível de vezes que  $y$  cabe em  $AB$ , temos que:

$$m \cdot y < AB < (m + 1) \cdot y.$$

Dividindo por  $BC$ , obtemos:

$$\frac{m}{n} < \frac{AB}{BC} < \frac{m + 1}{n}. \quad (3)$$

Conduzindo as retas do feixe pelos pontos de divisão de  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  e pelo Lema 2.1 temos que  $B'C' = n \cdot y'$  para alguma medida  $y'$  e

$$m \cdot y' < A'B' < (m + 1) \cdot y'.$$

Dividindo por  $B'C'$ , obtemos:

$$\frac{m}{n} < \frac{A'B'}{B'C'} < \frac{m + 1}{n}. \quad (4)$$

Como  $y$  é um submúltiplo de  $\overline{BC}$  que pode variar, se diminuirmos  $y$ , então  $n$  aumenta. Desse modo,  $\frac{m}{n}$  e  $\frac{m+1}{n}$  definem um único número real, pois  $[\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n}] = \frac{1}{n}$  que é um segmento cujo comprimento fica arbitrariamente pequeno a medida que  $n$  cresce.

Usando (3) e (4) concluímos que a razão entre os comprimentos dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  de  $s_0$  é igual a razão entre os respectivos comprimentos dos segmentos correspondentes de  $s_1$ , isto é:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

□

## 2.4 TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROPORCIONALIDADE

Um teorema pode ser demonstrado de diferentes maneiras, utilizando vários resultados auxiliares. Nesta seção, o objetivo é demonstrar o teorema fundamental da proporcionalidade a fim de utilizá-lo como ferramenta para uma nova demonstração do Teorema de Tales.

Destacamos aqui, como referência, como referência as notas de aula de Sadao Massago, intitulada como teorema fundamental da proporcionalidade <sup>[11]</sup> e o livro Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo <sup>[4]</sup>.

**Proposição 2.1.** Dado  $n$  um número inteiro positivo, qualquer segmento  $\overline{AB}$  pode ser dividido em  $n$  partes de mesmo comprimento.

*Demonstração.* Sejam  $\overline{AB}$  um segmento e  $n > 0$  um número inteiro. Considere  $C$  um ponto qualquer fora da reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ . Sobre a semirreta de origem em  $A$  e que passa pelo ponto  $C$ , considere pontos  $P_i$ , em que  $i = 0, 1, \dots, n$  ordenados, de modo que  $A = P_0$  e  $C = P_1$  e o comprimento de cada segmento  $\overline{P_i P_{i+1}}$  coincida com  $AC$ .

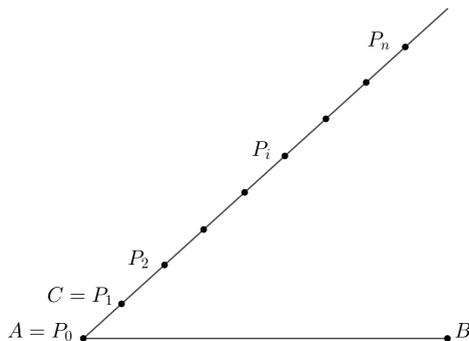


Figura 6 – Construção da semirreta com origem em  $A$  que passa por  $C$ .

Agora considere retas  $r_i$  paralelas a  $\overline{P_n B}$ , passando por cada um dos pontos  $P_i$ , e considere também  $Q_i$  os pontos de interseção dessas retas com  $\overline{AB}$ .

Como os segmentos  $\overline{P_i P_{i+1}}$ , são congruentes, pelo Lema 2.1 temos que os segmentos  $\overline{Q_i Q_{i+1}}$  também são congruentes entre si. Logo, os pontos  $Q_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  dividem o segmento  $\overline{AB}$  em  $n$  partes de mesmo comprimento.

□

O teorema abaixo, enunciado a seguir, garante enunciado a seguir garante que triângulos com ângulos correspondentes congruentes

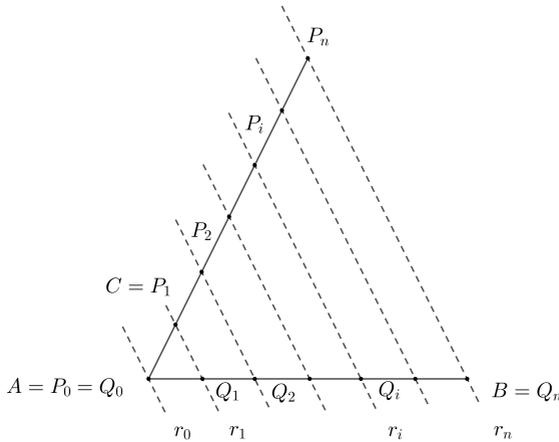


Figura 7 – Divisão do segmento  $\overline{AB}$  em  $n$  partes.

são semelhantes e triângulos com os lados correspondentes proporcionais também são semelhantes.

**Teorema 2.2** (TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROPORCIONALIDADE). *Dois triângulos têm ângulos correspondentes congruentes se, e somente se, têm os lados correspondentes proporcionais.*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Sejam  $ABC$  e  $A'B'C'$  triângulos com os ângulos correspondentes congruentes. Se os triângulos possuírem qualquer par de lados correspondentes congruentes, então serão congruentes pelo caso ângulo, lado, ângulo (ALA) e terão todos os lados congruentes com razão de semelhança 1.

Considere o caso em que os triângulos não possuem lados congruentes. Sem perda de generalidade, suponha que  $A'B' < AB$ . Podemos construir um triângulo  $\triangle ADE$  congruente ao triângulo  $\triangle A'B'C'$  e que esteja sobre o triângulo  $\triangle ABC$ . Tal construção está representada pela Figura 8.

Para isso, tome um ponto  $D$  sobre  $\overline{AB}$  tal que  $AD = A'B'$ , e considere  $E$  um ponto sobre  $\overline{AC}$  tal que  $AE = A'C'$ , desse modo temos a congruência dos triângulos  $\triangle ADE$  e  $\triangle A'B'C'$  pelo caso lado, ângulo, lado (LAL).

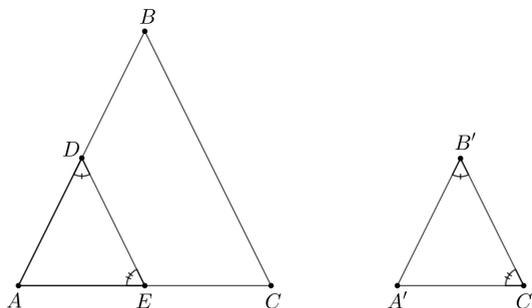


Figura 8 – Construção do triângulo  $\triangle ADE$ .

Note que  $\overline{DE}$  é paralelo a  $\overline{BC}$ <sup>4</sup>, pois os ângulos correspondentes formados pela interseção de  $\overline{AB}$  com  $\overline{DE}$  e  $\overline{BC}$  são congruentes ( $\angle D \cong \angle B$ ).

Se mostrarmos que a razão entre um par de lados correspondentes é igual a razão entre outro par de lados correspondentes, concluímos que a razão entre qualquer um dos lados correspondentes são iguais, por transitividade. Sem perda de generalidade, vamos mostrar que  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ .

Considere os pontos  $A = P_0, P_1, \dots, P_n = B$  de forma que  $P_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) divida  $\overline{AB}$  em  $n$  partes de mesmo comprimento onde  $n > 0$  é um número inteiro arbitrário, podemos fazer isso devido a Proposição 2.1.

Note que o ponto  $D$  está em algum  $\overline{P_i P_{i+1}}$  de modo que

<sup>4</sup> Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça o ângulo exterior igual ao interior e oposto e no mesmo lado, ou os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos, as retas serão paralelas entre si. [6]

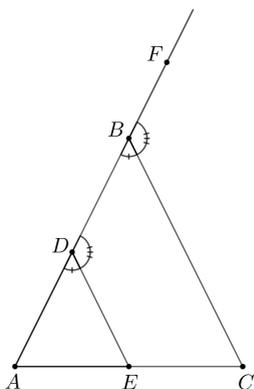


Figura 9 – Paralelismo de  $\overline{DE}$  e  $\overline{BC}$ .

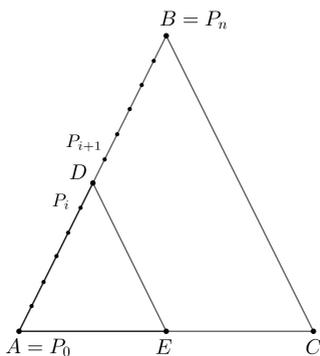


Figura 10 – Divisão de  $\overline{AB}$  em  $n$  partes iguais.

$$AP_i \leq AD < AP_{i+1}. \quad (5)$$

Como  $P_i$  divide  $\overline{AB}$  em  $n$  partes de mesmo comprimento, temos que

$$AP_i = i \frac{AB}{n} \quad \text{e} \quad i \frac{AB}{n} \leq AD < (i+1) \frac{AB}{n}.$$

Dividindo por  $AB$ , temos:

$$\frac{i}{n} \leq \frac{AD}{AB} < \frac{(i+1)}{n} = \frac{i}{n} + \frac{1}{n}.$$

Subtraindo  $\frac{i}{n}$ , temos:

$$0 \leq \frac{AD}{AB} - \frac{i}{n} < \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{AD}{AB} - \frac{i}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

Agora vamos analisar o lado  $\overline{AC}$ . Traçando retas  $r_i$  paralelas a  $\overline{BC}$  passando pelos pontos  $P_i$ , obtemos pontos  $Q_i$ , na interseção das retas  $r_i$  com  $\overline{AC}$ .

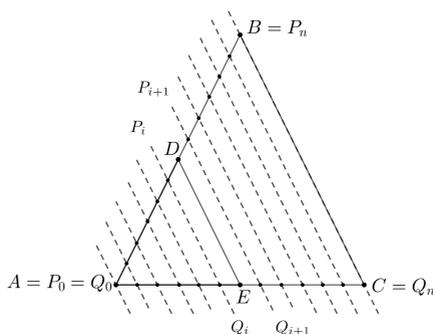


Figura 11 – Retas  $r_i$  paralelas a  $\overline{BC}$  passando pelos pontos  $P_i$ .

Como as retas  $r_i$  são paralelas e determinam segmentos congruentes sobre  $\overline{AB}$ , pelo Lema 2.1,  $r_i$  determina segmentos congruentes sobre  $\overline{AC}$ . Note que da mesma maneira que o ponto  $D$  está entre  $\overline{P_i P_{i+1}}$ , temos que o ponto  $E$  está entre  $\overline{Q_i Q_{i+1}}$ , de modo análogo ao que foi feito em (5), obtemos:

$$\left| \frac{AE}{AC} - \frac{i}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

Se fizermos a diferença entre  $\frac{AD}{AB}$  e  $\frac{AE}{AC}$  temos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{AD}{AB} - \frac{AE}{AC} \right| &= \left| \frac{AD}{AB} - \frac{i}{n} + \frac{i}{n} - \frac{AE}{AC} \right| \\ &\leq \left| \frac{AD}{AB} - \frac{i}{n} \right| + \left| \frac{AE}{AC} - \frac{i}{n} \right| \\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Observe que  $\frac{2}{n}$  é um comprimento que fica arbitrariamente pequeno a medida que  $n$  cresce, conseqüentemente:

$$\left| \frac{AD}{AB} - \frac{AE}{AC} \right| = 0 \quad \implies \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

Concluimos então,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}.$$

Como o  $\triangle ADE$  é congruente a  $\triangle A'B'C'$ , temos que:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

( $\Leftarrow$ ) Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  triângulos com os lados correspondentes proporcionais. Se  $AB = A'B'$  então os triângulos são congruentes pelo caso lado, lado, lado (LLL). Se esses lados não forem congruentes, podemos supor sem perda de generalidade, que  $A'B' < AB$ . Sejam  $D$  um ponto sobre  $\overline{AB}$  de forma que  $AD = A'B'$  e  $E$  um ponto sobre  $\overline{AC}$  de forma que o segmento  $\overline{DE}$  seja paralelo ao segmento  $\overline{BC}$ , ver Figura (8).

Os triângulos  $\triangle ADE$  e  $\triangle ABC$  possuem ângulos correspondentes congruentes, pois compartilham o ângulo  $\angle A$ , os ângulos  $\angle D$  e  $\angle B$  são correspondentes, assim como os ângulos  $\angle E$  e  $\angle C$ . Isso implica que os lados correspondentes são proporcionais pelo que demonstramos anteriormente. Por hipótese, temos que os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$

possuem lados correspondentes proporcionais e, por transitividade de os triângulos  $\triangle ADE$  e  $\triangle A'B'C'$  possuem lados correspondentes proporcionais. Como  $AD = A'B'$ , então os triângulos são congruentes pelo caso lado, lado, lado (LLL).

Logo o triângulo  $\triangle A'B'C'$  tem ângulos correspondentes congruentes com o triângulo  $\triangle ADE$  que possui os ângulos correspondentes congruentes a  $\triangle ABC$ . Pela transitividade, concluímos que os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  possuem ângulos correspondentes congruentes.  $\square$

A demonstração a seguir é uma maneira de interpretar e demonstrar o Teorema de Tales apresentado no Teorema 2.1 utilizando o Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Para tal, consideraremos o mesmo enunciado.

*Demonstração.* Considere um feixe de retas paralelas  $r_i$  com  $i = 0, 1, 2$  e  $s_0$  e  $s_1$  retas transversais a esse feixe. Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  pontos formados pela interseção entre as retas  $r_i$  e a transversal  $s_0$ , e  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  pontos formados pela interseção entre as retas  $r_i$  e a transversal  $s_1$ . Ver Figura (12).

Sejam  $s_2$  uma reta paralela a  $s_0$  que passa pelo ponto  $A'$ , e  $U$  e  $V$  pontos formados pela interseção de  $s_2$  com as retas  $r_1$  e  $r_2$ .

Note que obtemos os seguintes paralelogramos  $ABUA'$  e  $BCVU$  que possuem lados opostos congruentes, ou seja,  $AB = A'U$  e  $BC = UV$ . Então, basta mostrar que a razão entre  $A'U$  e  $UV$  é igual a razão entre  $A'B'$  e  $B'C'$ .

Temos que  $A'UB' \cong UVC'$  e  $A'B'U \cong AC'V$  pois são ângulos correspondentes. Logo, os triângulos  $\triangle A'UB'$  e  $\triangle A'VC'$  possuem ângulos correspondentes congruentes, já que o ângulo  $\angle A'$  é comum a ambos. Pelo Teorema 2.2, esses triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, ou seja:

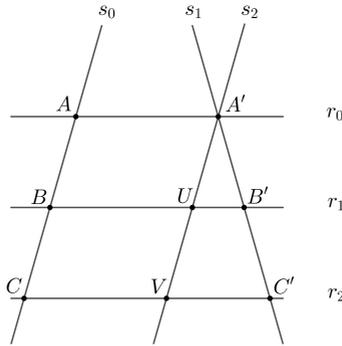


Figura 12 – Construção dos paralelogramos  $ABUA'$  e  $BCVV'$ .

$$\frac{A'U}{A'V} = \frac{A'B'}{A'C'}. \quad (6)$$

Sabemos que  $A'V = A'U + UV$  e  $A'C' = A'B' + B'C'$ , substituindo em (6) temos:

$$\begin{aligned} \frac{A'U}{A'U + UV} &= \frac{A'B'}{A'B' + B'C'} \Leftrightarrow \frac{A'U + UV}{A'U} = \frac{A'B' + B'C'}{A'B'} \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{UV}{A'U} &= 1 + \frac{B'C'}{A'B'} \Leftrightarrow \frac{UV}{A'U} = \frac{B'C'}{A'B'} \Leftrightarrow \frac{A'U}{UV} = \frac{A'B'}{B'C'}. \end{aligned}$$

Concluimos que as retas transversais  $s_i$  com  $i = 0, 1, 2$ , determinam segmentos com a mesma proporção. □

## 2.5 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE TALES

O Teorema de Tales possui propriedades elementares no estudo da Geometria plana e diversas aplicações na matemática do cotidiano.

Ao longo desta seção iremos estudar quatro aplicações: medida da altura da pirâmide, medida da distância do navio até a costa, pantógrafo e figuras semelhantes e as distorções provocadas pela TV. Sendo duas primeira atribuídas ao estudo de Tales.

### 2.5.1 Medida da altura da pirâmide

Existem diversas versões sobre a maneira em que Tales possivelmente calculou a altura de uma pirâmide. Em uma dessas versões, Tales havia determinado a altura de uma pirâmide através de sombras. Para medir a altura da pirâmide, segundo o relato tradicional, Tales havia colocado uma estaca de comprimento conhecido no chão e observado que, em um determinado momento, o comprimento da sombra da estaca coincidia com o comprimento da estaca. Presume-se que Tales possuía o conhecimento de que os raios solares incidem de forma paralela na superfície da Terra.

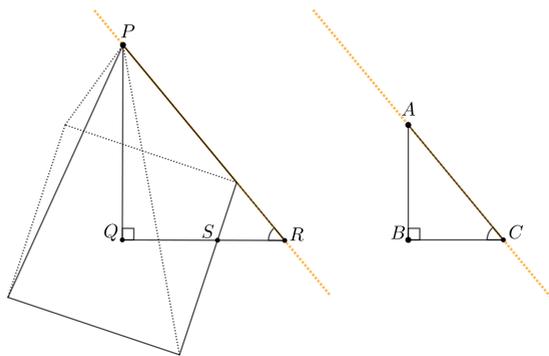


Figura 13 – Representação do cálculo da altura de uma pirâmide segundo o relato tradicional.

Assumindo a Figura 13 como referência, o que o relato nos mostra é que o graveto representado pelo segmento  $\overline{AB}$  tem o mesmo

comprimento que sua sombra representada pelo segmento  $\overline{BC}$ , isto é,  $AB = BC$ . Partindo do princípio de que a altura da pirâmide e o chão são perpendiculares, bem como a estaca e sua sombra ( $\angle Q = 90^\circ = \angle B$ ) e que os ângulos formados pelos raios solares e o chão têm a mesma medida ( $\angle R = \angle C$ ), Tales notou que os triângulos  $\triangle PQR$  e  $\triangle ABC$  tinham as mesmas características, logo concluiu que a altura da pirâmide  $PQ$  seria igual ao comprimento da sombra projetada  $SR$  por ela mais metade do comprimento da base  $QS$ , isto é,  $PQ = QS + SR$ .

Na seção 2.1, esse relato foi analisado em um contexto histórico e, embora foram apresentadas divergências em relação a Tales ter ou não concluído tais resultados, não podemos deixar de entender o motivo da geometria envolvida estar correta.

A conclusão que podemos tirar a partir de tal relato é uma relação entre as sombras projetadas e a altura dos objetos em questão. Fazendo a sobreposição dos triângulos  $\triangle PQB$  e  $\triangle ABC$  na Figura 14, observamos uma semelhança de triângulos. Pela Proposição I.29 do livro Os Elementos de Euclides<sup>[6]</sup>, temos que  $\angle QPR = \angle BAC$ . Como assumimos que  $\angle C = \angle R$  e  $\angle B = \angle Q$ , o critério para a semelhança é ângulo, ângulo, ângulo.

## 2.5.2 Medida da distância do navio até a costa

Uma das realizações de Tales foi a determinação da distância de um navio até a costa. A geometria à qual Tales tinha acesso se apresentava de maneira intuitiva que, em sua maioria, resolvia problemas práticos, como é o caso dessa aplicação.

Alguns elementos são essenciais para essa realização, como um instrumento de medição de ângulos e uma torre, ou algo que faça com que o observador veja o barco, ver Figura 15.

Sobre a torre, utiliza um instrumento de medição de ângulos

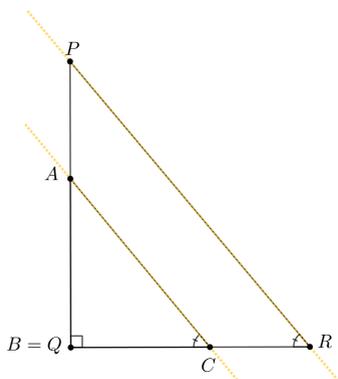


Figura 14 – Sobreposição dos triângulos  $\Delta PQB$  e  $\Delta ABC$ .

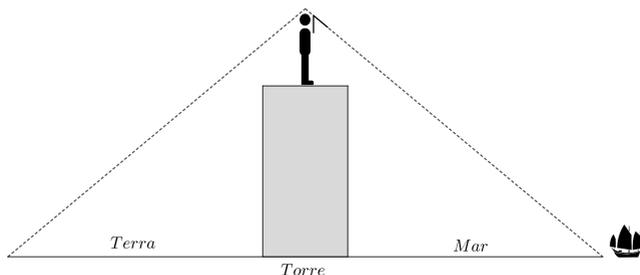


Figura 15 – Ideia de como Tales calculou a distância navio-costa.

formado por duas barras representada pelos segmentos  $\overline{HA}$  e  $\overline{HB}$ , como mostra a Figura 16. A barra  $\overline{HB}$  é mantida na mesma direção do ponto  $T$ , já a barra  $\overline{HA}$  era apontada em direção ao ponto  $N$ . Sem mudar o ângulo  $\angle AHB$ , o observador gira o instrumento em  $180^\circ$ , isto é, gira em torno da barra  $\overline{HB}$  e com o auxílio de outra pessoa marca-se no chão o ponto  $S$  em que a barra  $\overline{HA}$  do instrumento está apontando.

Então os triângulos  $\Delta HST$  e  $\Delta HNT$  são congruentes pelo caso ângulo, lado, ângulo pois temos que  $\angle SHT \cong \angle NHT$ , a altura

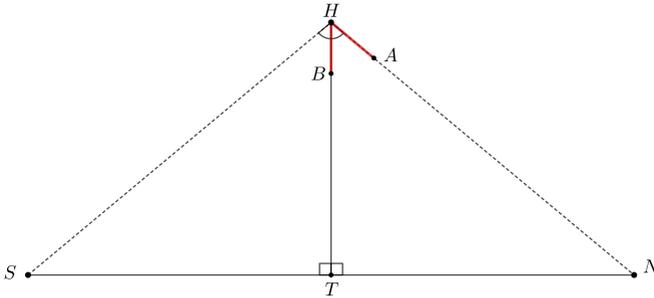


Figura 16 – Ideia de como Tales calculou a distância navio-costa.

da torre é perpendicular a base e  $\overline{HT}$  é um lado comum. Portanto, os segmentos  $\overline{ST}$  e  $\overline{TN}$  são congruentes. Como a distância  $\overline{ST}$  é conhecida, teremos uma aproximação para a distância  $\overline{TN}$ , que é a distância do navio até a torre.

### 2.5.3 O pantógrafo

Com a ideia de manter as proporções corretas ao desenhar figuras ampliadas ou reduzidas, Christoph Scheiner criou um instrumento chamado pantógrafo. Esse instrumento é constituído por quatro barras articuladas entre si, que devem ser paralelas.

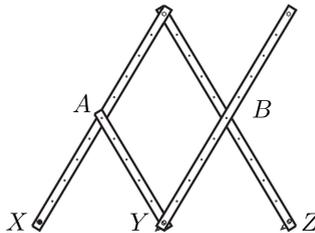


Figura 17 – Pantógrafo. Imagem adaptada de [19].

O pantógrafo é uma ferramenta utilizada para copiar desenhos em diferentes escalas. Sua construção é feita de maneira que  $\overline{AX}$  e  $\overline{BZ}$  possuem o mesmo comprimento e as barras que contém por  $\overline{AX}$  e  $\overline{BY}$  são paralelas.

Possui três pontos que são responsáveis pela reprodução do desenho:  $X$  é um ponto fixo,  $Y$  é a ponta seca responsável por percorrer o contorno do desenho original e  $Z$  a ponta onde o lápis é inserido e vai reproduzindo o desenho. Ver Figura 17.

Podemos considerarmos uma ampliação duas vezes maior que o desenho original, por exemplo,  $Z$  estará a uma distância de  $X$  duas vezes maior que a distância entre  $X$  e  $Y$ . Para aumentar essa razão de ampliação em quatro vezes, precisamos aumentar a distância entre os pontos  $Z$  e  $X$  de modo que  $ZX = 4YX$ .

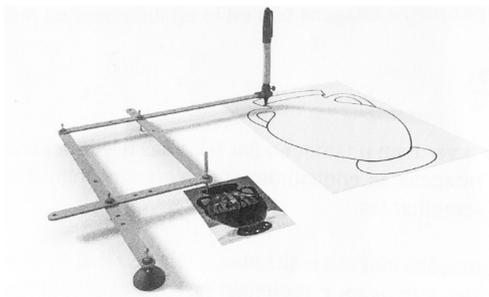


Figura 18 – Exemplo de pantógrafo. Imagem retirada de [19].

A ideia do pantógrafo é baseada em construções geométricas reduzidas ou ampliadas com o princípio de semelhança de figuras planas. Essas transformações que preservam a forma e as proporções são conhecidas como *homotetias*.

**Exemplo 2.2** (FIGURAS HOMOTÉTICAS). Dado um triângulo  $\triangle ABC$ , fixe um ponto  $O$  qualquer fora do triângulo. Considere semirretas com origem em  $O$  e que passam por cada um dos vértices do triângulo

$\Delta ABC$  e marque pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ , de forma que  $OA' = kOA$ ,  $OB' = kOB$  e  $OC' = kOC$ , com a constante  $k > 1$  para ampliar a figura, e  $k < 1$  para reduzir. Chamamos  $k$  de razão de semelhança entre as figuras. Os triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta A'B'C'$  são ditas figuras homotéticas.

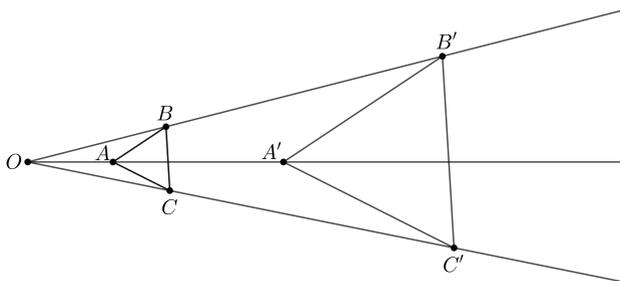


Figura 19 – Figuras homotéticas.

#### 2.5.4 Figuras semelhantes e as distorções provocadas pela TV

Uma forma de olhar para o Teorema Fundamental da Proporcionalidade (Teorema 2.2) utilizando ideias do cotidiano é pensar na proporção entre as telas de televisores, monitores e projetores. As primeiras televisões ou monitores tinham uma proporção padrão como  $4 : 3$ . Com o avanço da tecnologia, a indústria alterou essa razão de forma desproporcional nas telas e agora possuímos telas com proporções de  $16 : 9$  (widescreen),  $21 : 9$  (super widescreen), etc.

Quando estamos assistindo em uma televisão de  $55''$  com proporções de  $21 : 9$ , por exemplo, e outra pessoa está assistindo ao mesmo programa com uma televisão de  $55''$ , mas com uma proporção de  $16 : 9$  as imagens recebidas serão as mesmas, entretanto, podem ocorrer distorções da imagem projetada, resultando em uma imagem

esticada, caso as faixas laterais não sejam utilizadas. Observe a Figura 20.

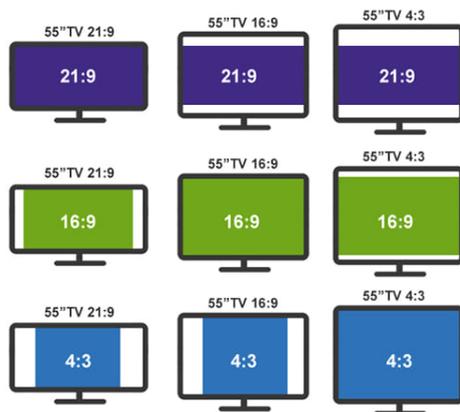


Figura 20 – TV de 55” com diferentes proporções, imagem disponível em [20].

Essas distorções ocorrem, pois as razões não estão estabelecidas em mesma proporção

$$\frac{4}{3} \neq \frac{16}{9} \text{ e } \frac{4}{3} \neq \frac{21}{9}.$$

Então, o conteúdo que é produzido para telas 4 : 3, por exemplo, são vistos em telas 16 : 9 e essas projeções tentam se adaptar ao novo tamanho para poderem ser exibidas. Na Figura 21, temos a reprodução de uma circunferência em uma tela 4 : 3 e na Figura 22, a circunferência sofre um achatamento para ser reproduzida em uma tela de proporção 16 : 9, logo a imagem reproduzida é uma elipse.

Outra distorção que pode vir a ocorrer é o recorte da imagem. A circunferência cuja imagem é produzida para uma tela 4 : 3, quando exibida em uma tela 16 : 9 sofre um recorte, como representado na Figura 23.

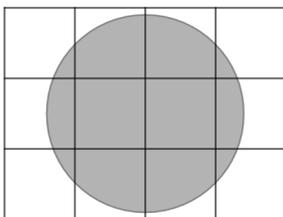


Figura 21 – Reprodução de uma circunferência em uma projeção 4 : 3.

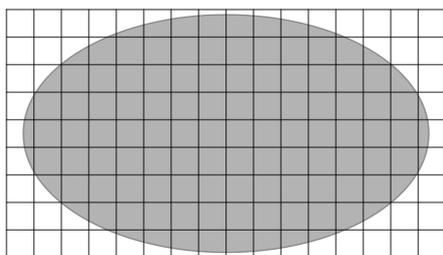


Figura 22 – Distorção da circunferência em uma projeção 16 : 9.

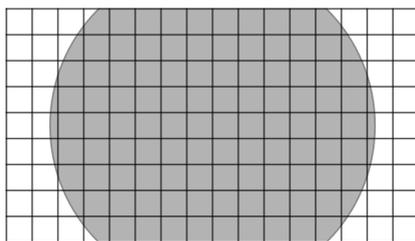


Figura 23 – Recorte da circunferência em uma projeção 16 : 9.

Para que o conteúdo produzido especialmente para telas 4 : 3 não se perdesse, produtoras de imagem de televisão e cinema buscaram soluções para as distorções nas imagens. Uma forma de reaproveitamento desse conteúdo são as faixas pretas nas laterais, desse modo a imagem é projetada na proporção adequada a cada tipo de TV, veja

a Figura 24.

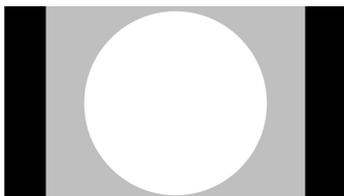


Figura 24 – Adaptação de uma imagem 4 : 3 para 16 : 9.



### 3 TEOREMA DAS BISSETRIZES

Neste capítulo, olharemos para a definição de bissetriz de duas maneiras distintas: como uma semirreta que divide um determinado ângulo em dois ângulos congruentes e como um lugar geométrico de pontos equidistantes. Na seção 3.2.1, demonstraremos a equivalência de ambas as definições. As demonstrações dos teoremas da bissetriz interna e externa utilizarão a ideia da bissetriz como uma semirreta no interior de um ângulo. Na seção 3.3, a noção de bissetriz por equidistância será utilizada.

Assim como nas aplicações apresentadas no Capítulo 2, a demonstração do Teorema das Bissetrizes envolve de forma direta o Teorema de Tales 2.1.

#### 3.1 EUCLIDES E O TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA

Euclides de Alexandria (300 a.E.C), também conhecido como pai da geometria, foi possivelmente o responsável por compilar conhecimentos já existentes em sua época no livro intitulado "Os Elementos". Devido à falta de registros que confirmem essa tese, existe uma certa dificuldade em identificar quais as proposições, teoremas e até mesmo se as demonstrações apresentadas no livro são da autoria de Euclides.

A proposta do livro é expor a matemática elementar de forma rigorosa através de uma ordenação. Composto por 13 livros que se iniciam com conteúdos elementares e progridem a assuntos mais complexos, essa sistematização foi essencialmente importante pois definiu um rigor matemático presente até os dias atuais. No capítulo anterior, analisamos problemas propostos por Tales com caráter prático. Tais problemas advinham do contexto em que estavam inseridos, como consequência da resolução desses problemas e com a necessidade de continuidade dos conteúdos, se torna imprescindível uma sistematiza-

ção.

A riqueza da investigação de problemas geométricos de construção levou a uma concepção mais clara sobre a natureza geral da arte de resolvê-los. Tal clareza, por sua vez, pode ter levado as primeiras demandas de sistematização e ordenação da geometria, expressa nos *Elementos*. (ROQUE, 2012, p.160)<sup>[14]</sup>.

O Teorema da Bissetriz Interna está enunciado e demonstrado no Livro VI, Proposição 3, na obra de Euclides. A demonstração consiste em um texto corrido, em que o teorema é provado como uma única proposição. A ideia da demonstração é bastante similar ao que veremos na Seção 3.2.

O livro utilizado é uma tradução do grego feita por Irineu Bicudo, que busca manter a mesma narrativa utilizada na língua grega, com o intuito de dar uma ideia mais aproximada do estilo utilizado nas demonstrações apresentadas por Euclides.

A seguir, iremos ver na íntegra a tradução do Teorema da Bissetriz Interna (Teorema 3.1), apresentada no livro de Euclides<sup>[6]</sup>.

*Caso o ângulo de um triângulo seja cortado em dois, e a reta que corta o ângulo também corte a base, os segmentos da base terão a mesma razão que os lados restantes do triângulo; e, caso os segmentos da base tenham a mesma razão que os lados restantes do triângulo, a reta, sendo ligada do vértice até o ponto de secção, cortará o ângulo em dois.*

Seja o triângulo  $ABC$ , e fique cortado o ângulo sob  $BAC$  em dois pela reta  $AD$ ; digo que, como  $BD$  está para  $CD$ , assim a  $BA$  para a  $AC$ .

Fique, pois, traçada pelo  $C$  a  $CE$  paralela à  $DA$ , e, tendo sido traçada através a  $BA$ , encontre-a no  $E$ .

E, como a reta  $AC$  encontrou as paralelas  $AD$ ,  $EC$ , portanto, o ângulo sob  $ACE$  é igual ao sob  $CAD$ . Mas o sob  $CAD$  foi suposto igual ao sob  $BAD$ ; portanto, o ângulo sob  $BAD$  é igual ao  $CAD$ . De novo, como a reta  $BAE$  encontrou as paralelas  $AD$ ,  $EC$ , o ângulo exterior, sob  $BAD$  é igual ao ângulo interior, o sob  $AEC$ . E também o sob  $AEC$  foi provado igual ao sob  $BAD$ ; portanto, também o sob  $ACE$  é igual ao sob  $AEC$ ; desse modo, também o lado  $AE$  é igual ao lado  $AC$ .

E, como  $AD$  foi traçada paralela a um dos lados, o  $EC$ , do triângulo  $BCE$ , portanto, proporcionalmente, como  $BD$  está para  $DC$ , assim  $BA$  para a  $AE$ . Mas  $AE$  é igual à  $AC$ ; portanto, como  $BD$  para a  $DC$ , assim a  $BA$  para a  $AC$ . Mas, então, como  $BD$  esteja para a  $DC$ , assim a  $BA$  para a  $AC$ , e fique ligada a  $AD$ ; digo que o ângulo sobre  $BAC$  foi cortado em dois pela reta  $AD$ .

Pois, tendo sido construídas as mesmas coisas, como a  $BD$  está para a  $DC$ , assim a  $BA$  para a  $AC$ , mas também para a  $AE$ ; pois, a  $AD$  foi traçada paralela a um, o  $EC$ , do triângulo  $BCE$ ; portanto, também como a  $BA$  para a  $AC$ , assim a  $BA$  para a  $AE$ . Portanto, a  $AC$  é igual à  $AE$ ; desse modo, também o ângulo sob  $AEC$  é igual ao sob  $ACE$ .

Mas, por outro lado, o sob  $AEC$  [é] igual ao exterior, o sob  $BAD$ , e, por outro lado, o sob  $ACE$  é igual ao alterno, o sob  $CAD$ ; portanto, também o sob  $BAD$  é igual ao sob  $CAD$ . Portanto, o ângulo sob  $BAC$  foi cortado em dois pela reta  $AD$ .

*Portanto, o caso o ângulo de um triângulo seja cortado em dois, e a reta que corta o ângulo corte também a base, os segmentos da base terão a mesma razão que os lados restantes do triângulo; e, caso os segmentos da base tenham a mesma razão que os lados restantes do triângulo, a reta, sendo ligada do vértice até o ponto de secção, cortará o ângulo em dois; o que era preciso provar. (EUCLIDES, 2009, p.234 - 235)<sup>[6]</sup>*

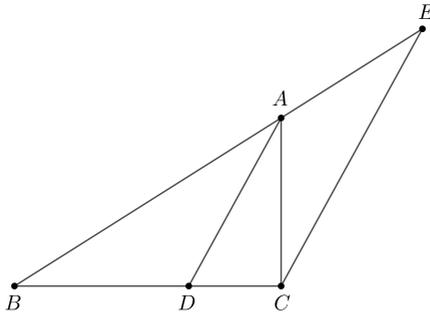


Figura 25 – Ilustração da demonstração contida no livro de Euclides<sup>[6]</sup>.

Observe que as caracterizações de ângulos alternos internos, correspondentes e bissetriz são feitas sem citar tais nomes, todas com uma rica notação matemática e com auxílio de uma descrição detalhada de cada passo.

Observe que durante a demonstração está implícita a utilização do Teorema de Tales (Teorema 2.1). Na obra Os Elementos, o Teorema de Tales está anunciado na Proposição 2, que é a anterior a esta apresentada.

## 3.2 ENUNCIADO E DEMONSTRAÇÃO

Nesta seção serão apresentados o Teorema da Bissetriz Interna e o Teorema da Bissetriz Externa, bem como conceitos fundamentais para a compreensão desses. Aqui, utilizaremos a linguagem moderna da matemática, com definições e conceitos que não foram nomeados na demonstração apresentada na seção anterior. A ideia de manter ambas demonstrações é de que o leitor possa comparar e assimilar as familiaridades entre elas. Iniciaremos a seção destacando a definição do elemento principal dos teoremas, a bissetriz.

**Definição 3.1.** A bissetriz de um ângulo  $\angle AOB$  é a semirreta  $\overrightarrow{OC}$ , com  $C$  no interior de  $\angle AOB$ , tal que  $\angle AOC$  é congruente a  $\angle BOC$ .

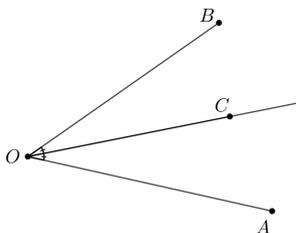


Figura 26 – Representação da bissetriz do ângulo  $\angle AOB$ .

Além da definição de bissetriz de um ângulo, podemos definir bissetriz interna de um triângulo:

**Definição 3.2.** Bissetriz interna de um triângulo é um segmento que liga um vértice do triângulo ao seu lado oposto dividindo o ângulo associado a esse vértice de maneira congruente.

Simbolicamente, dado um triângulo  $\triangle ABC$ , dizemos que o segmento  $\overline{AD}$  é uma bissetriz interna deste triângulo, se  $D$  está entre  $B$  e  $C$  e os ângulos  $\angle BAD$  e  $\angle DAC$  são congruentes.

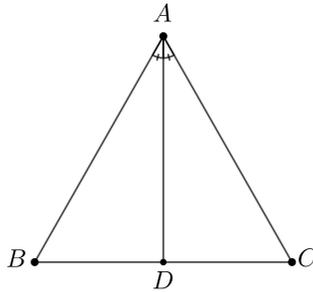


Figura 27 – Representação de uma bissetriz interna de um triângulo.

**Definição 3.3.** A bissetriz externa de um triângulo é uma semirreta que divide um ângulo suplementar a um vértice em dois ângulos congruentes.

Na Figura 28 a semirreta com origem em  $A$  que passa por  $D$  é a bissetriz externa relativa ao vértice  $A$  do triângulo  $\triangle ABC$ .

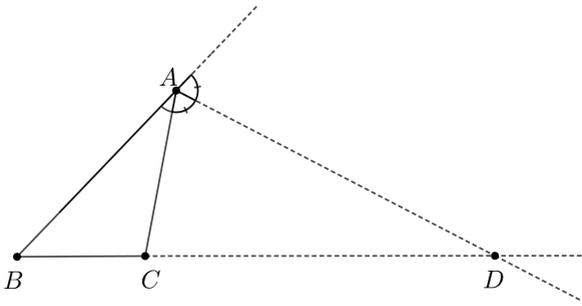


Figura 28 – Representação de uma bissetriz externa de um triângulo.

Os enunciados do Teorema da Bissetriz Interna e da Bissetriz Externa se tornam bastante simples mediante o entendimento do conceito de bissetriz.

**Teorema 3.1** (TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA). *Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.*

Podemos interpretar este teorema da seguinte maneira: Considere o triângulo  $\triangle ABC$  e  $\overline{AD}$  a bissetriz interna no vértice  $A$  desse triângulo, como representado na Figura 27. O Teorema da Bissetriz interna afirma que

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$$

*Demonstração.* Sejam  $r_0$  uma reta paralela a bissetriz  $\overline{AD}$  que passa pelo vértice  $C$ , e  $r_1$  a reta que contém  $\overline{BA}$ . Tome  $E$  o ponto de intersecção da reta  $r_0$  com a reta  $r_1$ . Construimos assim um triângulo  $\triangle ACE$ . Ver Figura 29.

Temos que  $\overline{AD}$  é paralelo a  $\overline{EC}$  e os ângulos  $\angle DAC$  e  $\angle ACE$  são alternos internos, logo são congruentes. Note que, os ângulos  $\angle BAD$  e  $\angle AEC$  são correspondentes, portanto são congruentes. Deste modo, temos que o triângulo  $\triangle AEC$  é isósceles, pois os ângulos  $\angle BAD$  e  $\angle DAC$  são congruentes por hipótese. Logo, os lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{AE}$  são congruentes.

Sejam  $r_2$  e  $r_3$ , respectivamente, semirretas com origem em  $B$  e  $A$  que passam pelos pontos  $C$  e  $E$ . Considere  $r_1$  e  $r_2$  retas transversais a um feixe de retas paralelas dado por  $r_0$  e  $r_3$ , podemos aplicar o Teorema de Tales (Teorema 2.1), então temos que  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE}$ . Multiplicando a igualdade de ambos os lados por  $\frac{DC}{AB}$  temos que  $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AE}$  e como  $AC = AE$ , concluímos que  $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$ .

□

**Observação 3.1.** *Como consequência do Teorema 3.1 temos que a bissetriz interna de um triângulo dividirá o segmento oposto do ângulo*

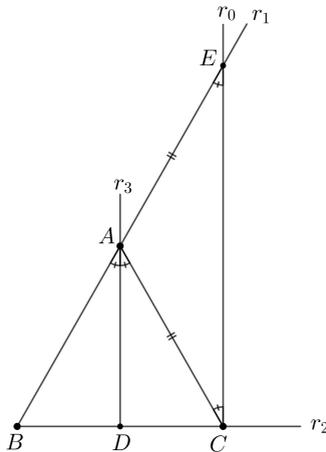


Figura 29 – Construção do triângulo  $\triangle ACE$ .

associado em partes congruentes se, e somente se, o triângulo for isósceles.

**Teorema 3.2** (TEOREMA DA BISSETRIZ EXTERNA). *Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta que contém o lado oposto, então ela divide este lado oposto externamente em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.*

Considere  $\triangle ABC$  um triângulo, e  $\overline{AD}$  a bissetriz externa do ângulo  $\angle A$  tal que intercepte a reta  $r_0$  que contém  $\overline{BC}$ , como representado na Figura 30. Vamos mostrar que  $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$ .

*Demonstração.* Sejam  $r_0$  uma semirreta de origem no vértice  $C$ ,  $r_1$  uma reta paralela a bissetriz  $\overline{AD}$  que passa pelo ponto  $C$  e  $r_2$  uma semirreta de origem no vértice  $A$  que não passa por  $D$ .

Note que  $r_1$  é distinta de  $r_0$ , pois  $r_1$  é paralela a  $\overleftrightarrow{AD}$  e  $\overleftrightarrow{AD}$  não é paralela a  $r_0$ . Desse modo a reta  $r_1$  irá passar por um ponto de  $\overline{AB}$ .

Seja  $E$  o ponto de intersecção entre  $\overline{AB}$  e  $r_1$ , então temos que  $\overline{CE}$  é paralelo a  $\overline{AD}$ .

Considere  $F$  um ponto em  $r_2$ . Note que  $\angle AEC$  e  $\angle FAD$  são correspondentes, já  $\angle ACE$  e  $\angle CAD$  são alternos internos, portanto esses ângulos são congruentes. Por hipótese  $\overline{AD}$  é a bissetriz externa do ângulo  $\angle BAD$ , logo  $\angle FAD$  e  $\angle CAD$  também são congruentes. Por transitividade,  $\angle AEC$  e  $\angle ACE$  são congruentes.

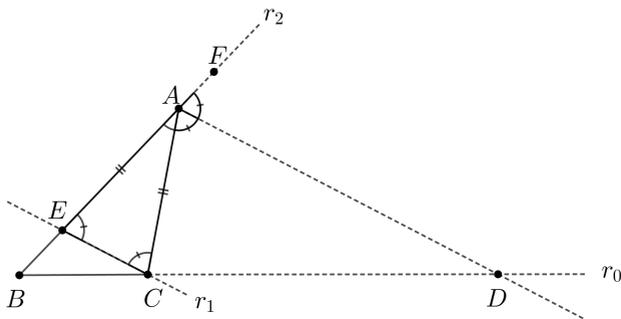


Figura 30 – Construção geométrica do Teorema 3.2.

Com a construção acima, temos um triângulo  $\triangle ACE$  isósceles, então  $\overline{AE}$  é congruente a  $\overline{AC}$ . Considerando  $r_0$  e  $r_2$  retas que contém  $\overline{BC}$  e  $\overline{BA}$ , respectivamente, como transversais de um feixe de paralelas dado por  $r_1$  e a bissetriz  $\overline{AD}$ , podemos aplicar o Teorema de Tales (Teorema 2.1).

Desse modo temos que  $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{AE}$ , como  $AE = AC$  conclui-se que  $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$ .  $\square$

**Observação 3.2.** *Dois casos em que o Teorema da Bissetriz Externa (Teorema 3.2) não se aplica:*

- (i) *Se o triângulo  $\triangle ABC$  é isósceles, de modo que  $\overline{AB}$  é congruente a  $\overline{AC}$  então a bissetriz externa do ângulo  $\angle A$  é paralela a base*

$\overline{BC}$ ;

- (ii) Se o triângulo  $\Delta ABC$  é equilátero, então as bissetrizes dos três ângulos externos do triângulo serão paralelas aos lados opostos.

### 3.2.1 A bissetriz como um lugar geométrico

Um lugar geométrico no plano é um conjunto que satisfaz uma determinada particularidade, isto é, é um conjunto de pontos do plano que satisfaz uma propriedade geométrica de modo que qualquer outro ponto que não pertence a este conjunto não satisfaz a propriedade.

**Definição 3.4.** Um conjunto recebe o nome de lugar geométrico dos pontos que possuem uma propriedade  $P$  quando:

- (i) Todos os seus pontos satisfazem a propriedade  $P$ ;
- (ii) Somente os pontos do conjunto satisfazem a propriedade  $P$ , ou seja, se um ponto  $A$  possui a propriedade  $P$  então pertence ao conjunto.

**Proposição 3.1.** A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos no interior desse ângulo que são equidistantes de seus lados.

A Proposição 3.1 pode ser entendida como:  $\overrightarrow{OP}$  é a bissetriz de um ângulo  $\angle AOB \Leftrightarrow NP = PM$ . Veja a representação geométrica na Figura 31.

*Demonstração.* Considere um ângulo  $\angle AOB$  e  $P$  um ponto de sua bissetriz. Sejam  $M$  e  $N$  pontos em  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , respectivamente, tais que  $\overline{PM}$  seja perpendicular a  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overline{PN}$  seja perpendicular a  $\overrightarrow{OB}$ . Note que os triângulos  $\Delta OPM$  e  $\Delta OPN$  são congruentes, pois possuem o lado  $\overline{OP}$  em comum, os ângulos  $\angle NOP$  e  $\angle MOP$  são congruentes, por hipótese, e os ângulos  $\angle ONP$  e  $\angle OPM$  opostos ao lado  $\overline{OP}$ , são

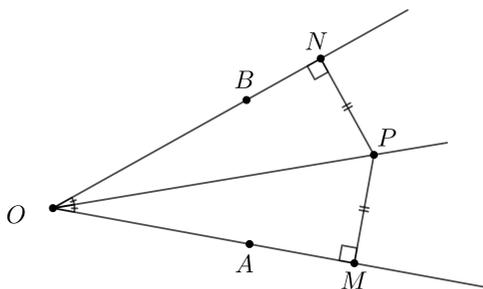


Figura 31 –  $\overrightarrow{OP}$  é bissetriz de  $\angle AOB$ .

ângulos retos e portanto congruentes ( $ALA_0$ ). Portanto  $NP = PM$ , ou seja,  $P$  é equidistante dos lados  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ .

Reciprocamente, seja  $P$  um ponto no interior do ângulo  $\angle AOB$  equidistante dos lados desse ângulo, isto é,  $NP = PM$ , em que  $M$  e  $N$  são tais que  $\overline{PM}$  seja perpendicular a  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overline{PN}$  seja perpendicular a  $\overrightarrow{OB}$ . Temos que os triângulos  $\triangle OPM$  e  $\triangle OPN$  são congruentes, pois possuem a hipotenusa  $\overline{OP}$  em comum e catetos  $\overline{PN}$  e  $\overline{PM}$  congruentes, então, pelo Teorema de Pitágoras, o terceiro lado também será congruente (LLL). Portanto  $\angle POM = \angle PON$  então  $\overline{OP}$  é a bissetriz do ângulo  $\angle AOB$ .  $\square$

### 3.3 APLICAÇÕES DA NOÇÃO DE BISSETRIZ

Nesta seção serão apresentadas duas aplicações relacionadas a bissetriz: uma proposição resultante do Teorema da Bissetriz Interna (Teorema 3.1), e a segunda foi escolhida por ser uma aplicação prática do incentro ser equidistante aos três lados de um triângulo (Definição 3.5).

Um único teorema pode desencadear diversas proposições, o Teorema da Bissetriz Interna (Teorema 3.1) é um desses. Nem sempre

essas proposições serão aplicáveis diretamente ao cotidiano, entretanto, as consequências dentro da Matemática podem ser inúmeras e, muitas vezes, simples e fascinantes.

A propriedade a seguir utiliza a ideia de triângulos isósceles e a demonstração foi feita utilizando o conceito de bissetriz como um segmento que liga um dos vértices desse triângulo ao seu lado oposto e divide o ângulo associado ao vértice de modo congruente. Ver Definição 3.1

**Proposição 3.2.** Se um triângulo tem dois de seus ângulos congruentes, então os lados opostos a esses ângulos são congruentes.

Seja  $\triangle ABC$  um triângulo tal que os ângulos  $\angle B$  e  $\angle C$  sejam congruentes. Então os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  são congruentes. Ver Figura 32.

*Demonstração.* Seja  $\triangle ABC$  um triângulo e  $\overline{AD}$  a bissetriz interna relativa ao vértice  $A$ . Por definição, a bissetriz interna de um triângulo determina dois ângulos congruentes, portanto  $\angle BAD$  e  $\angle CAD$  são congruentes. Por hipótese  $\triangle ABC$  possui dois ângulos congruentes, tome  $\angle B$  e  $\angle C$  como tais. Veja a Figura 32.

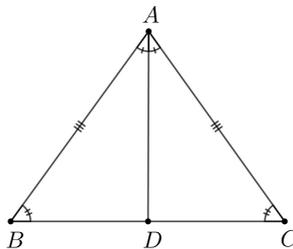


Figura 32 – Construção geométrica da Proposição 3.2.

Então temos que os triângulos  $\triangle ABD$  e  $\triangle ACD$  são congruentes pelo caso lado, ângulo, ângulo oposto ( $LAA_o$ ) uma vez que

$\angle B \cong \angle C$  por hipótese, possuem  $\overline{AD}$  como lado em comum, sendo  $\overline{AD}$  a bissetriz interna relativa ao vértice  $A$  do triângulo  $\triangle ABC$  e portanto divide o ângulo  $\angle A$  em dois ângulos de maneira congruente, isto é,  $\angle ABD \cong \angle ACD$ . Portanto os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  são congruentes.  $\square$

### 3.3.1 Bissetrizes e o problema do armazém

Situações simples do dia a dia podem envolver definições matemáticas, levando a resoluções lógicas que podem ser traduzidas com símbolos e conceitos matemáticos. A situação apresentada a seguir é um desses casos.

Esta aplicação foi retirada de um plano de aula aplicado ao ensino básico e pode ser encontrado em [13]. A ideia é simples e envolve conceitos básicos de geometria plana, mas que geram a possibilidade de explorar o conceito de bissetriz e propriedades do incentro.

A situação é a seguinte: imagine que temos uma fazenda cercada por três estradas. na Figura 33, nossa fazenda está representada na cor laranja. Precisamos construir um galpão para armazenamento de grãos na fazenda. É interessante que este armazém fique localizado em um lugar estratégico que seja equidistante das três estradas.

Os autores<sup>[13]</sup> propõem uma discussão em sala de aula. Uma das perguntas propostas é: De que maneira conseguimos identificar este lugar equidistante das três estradas?

A discussão em sala de aula pode ser feita de forma a introduzir o conceito de bissetriz e incentro. Optando por utilizar a resolução de problemas como metodologia, o professor se torna orientador do processo, permitindo que os alunos explorem elementos de triângulos. Uma possibilidade para essa exploração é a utilização de recursos didáticos como o GeoGebra para a construção geométrica da situação.

Como queremos demonstrar a ideia chave da aplicação que é a

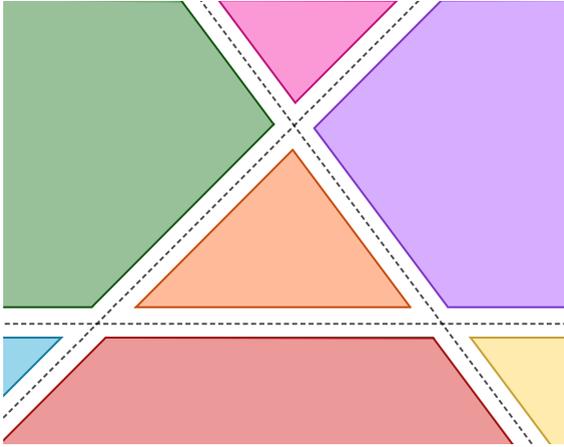


Figura 33 – Representação do problema do armazém.

propriedade do incentro ser equidistante aos três lados de um triângulo torna-se necessária a definição de incentro, como segue:

**Definição 3.5.** O ponto de interseção das três bissetrizes internas de um triângulo é chamado de incentro do triângulo.

A propriedade apresentada a seguir segue da caracterização de bissetriz apresentada na Proposição 3.1.

**Propriedade 3.1.** As bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo se interceptam num único ponto do seu interior, o qual é equidistante dos seus lados.

Utilizando notação podemos reescrever da seguinte forma: sejam  $\triangle ABC$  um triângulo e  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  e  $\overline{CC'}$  suas bissetrizes internas. Então  $\overline{AA'} \cap \overline{BB'} \cap \overline{CC'} = \{I\}$  e  $d(I, \overline{BC}) = d(I, \overline{AC}) = d(I, \overline{AB})$ .

**Observação 3.3.** A notação  $d(I, \overline{BC})$  indica a distância entre  $I$  e  $\overline{BC}$ .

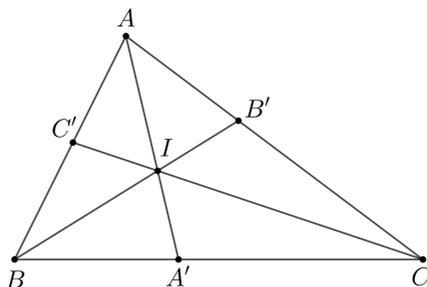


Figura 34 – Construção geométrica da Propriedade 3.1.

*Demonstração.* Sejam  $\triangle ABC$  um triângulo e  $\overline{AA'}$  e  $\overline{BB'}$  as bissetrizes internas relativas aos vértices  $A$  e  $B$ , respectivamente. Temos que os segmentos  $\overline{AA'}$  e  $\overline{BB'}$  são concorrentes e portanto se cruzam no interior de  $\triangle ABC$  num ponto  $I$ . Ver Figura 34.

Sabe-se que  $I$  está sobre  $\overline{AA'}$ , e pela Proposição 3.1, temos que  $I$  é equidistante de  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ . De modo análogo  $I$  é equidistante de  $\overline{BA}$  e  $\overline{BC}$ , pois pertence a  $\overline{BB'}$ . Portanto,  $I$  é equidistante dos três lados de  $\triangle ABC$ .

Considere  $r$  a semirreta com origem em  $C$  que passa por  $I$ . Como  $I$  é equidistante de  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ , então  $r$  é bissetriz do ângulo  $\angle C$ . Portanto, pela Proposição 3.1 temos que  $\overline{AA'} \cap \overline{BB'} \cap \overline{CC'} = \{I\}$ .

□

Desse modo, conseguimos responder à pergunta feita no início da seção: De que maneira identificamos o lugar equidistante das três estradas?

Primeiro olhamos para nossa fazenda como um triângulo  $\triangle ABC$  e traçamos suas bissetrizes internas. O ponto  $I$ , definido como incentro (Definição 3.5), é a interseção das bissetrizes internas. Como demonstrado na Propriedade 3.1, temos que  $I$  é o lugar equidistante dos três

lados do triângulo que, na situação dada, representam três estradas. Portanto, o armazém deve ser construído no incentro do triângulo  $\Delta ABC$ . Veja a Figura 35.

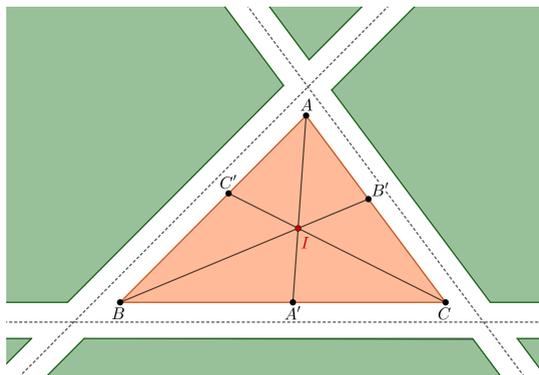


Figura 35 – Representação da solução do problema do armazém.

## 4 TEOREMA DE DESCARTES

O objetivo deste capítulo é apresentar uma breve noção da importância de Descartes para o desenvolvimento da matemática e um teorema que carrega seu nome. O Teorema de Descartes que estudaremos neste trabalho apresenta uma relação entre as curvaturas de circunferências que se tangenciam mutuamente.

Na Seção 4.1, apresentaremos uma linha do tempo de alguns acontecimentos importantes da vida de Descartes. Já na Seção 4.2, será mostrado um breve desenvolvimento de como o problema de Apolônio chegou até Descartes. A Seção 4.3, está destinada a demonstrar duas versões do Teorema de Descartes: uma demonstração utilizando identidades trigonométricas e a outra sendo uma releitura da demonstração encontrada em uma carta enviada de Descartes à princesa Elizabeth.

Por fim, apresentaremos uma introdução ao estudo de empacotamentos de círculos na Seção 4.4, que é um problema relacionado ao Teorema de Descartes.

### 4.1 A VIDA DE DESCARTES

René Descartes (1596 - 1650)<sup>1</sup> nasceu na França em La Haye. Estudou medicina, matemática e direito. A época em que Descartes viveu e desenvolveu suas obras estava baseada em três esferas: a teologia, a filosofia e a ciência. Durante esse período, buscava-se reconstruir os objetos da razão. Segundo Cunha [8], Descartes é conhecido por ter separado o mundo espiritual-racional do mundo físico-material.

Em 1623, Descartes se reencontra com o filósofo, teólogo e matemático Marin Mersenne (1588 - 1648), que serviu de elo entre Descartes e o mundo intelectual da Europa. Em 1626, começa a ser reconhecido por suas proposições matemáticas em álgebra e geome-

---

<sup>1</sup> Biografia baseada em [8].

tria, dando início à geometria analítica e ao sistema de coordenadas cartesianas.

Em 1637, Descartes edita em francês, o *Discurso do Método e Dióptrica, Meteoros e Geometria*, evitando assumir publicamente a autoria. Tal obra é considerada a base da filosofia de Descartes, onde estabeleceu as regras para obtenção do conhecimento universal. Segundo Souza<sup>[19]</sup>, tudo o que era aceito como verdadeiro poderia ser questionado e deveria ter uma sustentação consistente e racional. Já em 1642, o ensino dessa filosofia é proibida por serem contrárias às ideias eclesiásticas.

Em 1643, Descartes conhece Elisabeth de Boêmia com quem se mantém em contato por correspondências. A primeira carta, enviada por Elisabeth, indagava sobre a publicação “*Meditações*” de Descartes. A pergunta inicial feita por ela, segundo Mendo<sup>[9]</sup>, foi: “Por que a alma, que é algo imaterial, determina ações sobre o corpo?”. Nas cartas, discutem problemas antropológicos, geométricos, morais, políticos, etc. Em uma dessas correspondências, demonstra o Teorema de Descartes, que será apresentado na Seção 4.3.

Morre em 11 de fevereiro de 1650 de pneumonia, é enterrado na Suécia. Em 1667, seus restos mortais são transferidos para a França na igreja de Saint-Germain-des-Près.

## 4.2 DE APOLÔNIO A DESCARTES

Apolônio de Perga (262 - 190 a.E.c) foi um matemático que, assim como Euclides, se destacou em sua época. Entretanto, devido à falta de registros ou a perda deles, pouco se sabe de sua vida e suas obras.

Apolônio propôs um problema que tem como objetivo encontrar uma circunferência que seja tangente a três objetos matemáticos dados, sendo que cada um desses objetos pode ser uma circunferência, uma

reta ou um ponto. Ao analisar as possibilidades de objetos, encontrou dez casos<sup>2</sup>, sendo o décimo o caso em que os três objetos dados são circunferências.

As informações referentes a esse problema são dadas por Pappus (300 d.E.c) em um compilado da geometria existente de sua época que engloba comentários, proposições originais e com aprimoramentos de obras perdidas. Embora a obra tenha sido comentada por Pappus, durante o renascimento italiano<sup>3</sup>, o acesso a este trabalho se dava através de fragmentos que se encontravam em citações.

Surge então o interesse de François Viète (1540-1603) em reconstruir a obra de Pappus e resolver tais problemas a partir das ferramentas que possuía. Viète publicou a obra com o título *Apollonius Gallus*, que incluía a solução de alguns casos do problema de Apolônio. Segundo Santos e Trevisan (2004)<sup>[16]</sup>, nesta obra ele considera um número de casos especiais nos quais uma ou todas as circunferências são reduzidas a pontos ou retas, antecipando resultados da teoria dos círculos que seriam sistematizados duzentos anos depois na Geometria Descritiva de Gaspard Monge (1746-1818).

Como um desafio, Viète levou o problema de Apolônio ao matemático Adrianus Romanus (1561-1615), que o resolveu determinando o centro do círculo procurado como ponto comum a duas hipérbolas. Mas Viète desconsiderou a solução apresentada por Romanus, pois dizia que ele havia utilizado curvas impossíveis de serem construídas apenas com régua e compasso. (Uma condição para a reconstrução de obras gregas possivelmente exigia a construção por régua e compasso)

A partir disso, Isaac Newton (1642-1727), que já conhecia as

---

<sup>2</sup> As combinações ponto, ponto, ponto e reta, reta, reta são apresentadas no Livro IV dos Elementos, respectivamente na Proposição 4 que propõe construir uma circunferência que passa por três pontos dados e, a proposição 5, como construir uma circunferência tangente a três retas dadas.

<sup>3</sup> Este período marca a transição entre a Idade Média e a Idade Moderna durante os séculos XIV e XVI.

propriedades da hipérbole, apresentou uma solução. A ideia de Newton utilizava a interseção de uma reta com uma circunferência ao invés de interseção entre duas hipérbolas como apresentado por Romanus e, dessa forma, a construção com régua e compasso era contemplada.

A partir da reconstrução da obra de Apolônio feita por Pappus, e posteriormente, por François Viéte acabaram chegando às mãos de grandes nomes da matemática, desencadeando o surgimento de grandes ideias matemáticas como a Geometria Analítica.

É na perspectiva dos problemas como desencadeadores de descobertas e sistematizações que podemos situar o surgimento da Geometria Analítica, em 1637 a partir do trabalho de Descartes (1596-1650) com as crônicas e com o problema de Pappus. (SANTOS; TREVISAN, 2004, p.3)<sup>[16]</sup>.

Possuindo novas ferramentas em mãos através da Geometria Analítica, certamente o problema de Apolônio ganha uma nova perspectiva de solução.

Descartes estava trabalhando na resolução do problema, chegando a encaminhar uma resolução para princesa Elizabeth (1596-1662) através de uma carta em 1643. Tal resolução será apresentada na Seção 4.3.

### 4.3 DUAS VERSÕES DA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE DESCARTES

Como mencionado anteriormente, o problema proposto por Apolônio tem como objetivo encontrar uma circunferência que seja tangente a três objetos matemáticos dados, sendo um dos casos quando esses objetos são circunferências. Em princípio, as três circunferências dadas não precisam ser mutuamente tangentes.

As possíveis soluções do caso particular do décimo problema de Apolônio em que as circunferências são tangentes, ficaram conhecidas

como “Circunferências de Soddy”. Já o Teorema de Descartes 4.1, que apresentamos nessa seção, fornece uma relação entre as curvaturas (ou os raios) de tais circunferências mutuamente tangentes.

Frederick Soddy (1877 - 1956), publicou na revista Nature em 1936, uma versão do teorema de Descartes, em forma de um poema intitulado *The Kiss Precise*. O teorema de Descartes é enunciado na terceira estrofe, em itálico. Na quarta estrofe, o poema apresenta uma generalização do teorema para esferas (três dimensões). Uma tradução do poema pode ser encontrada no Apêndice A.

### The Kiss Precise

FOR pairs of lips to kiss maybe  
 Involves no trigonometry.  
 'Tis not so when four circles kiss  
 Each one the other three.  
 To bring this off the four must be  
 As three in one or one in three.  
 If one in three, beyond a doubt  
 Each gets three kisses from without.  
 If three in one, then is that one  
 Thrice kissed internally.

Four circles to the kissing come.  
 The smaller are the benter.  
 The bend is just the inverse of  
 The distance from the centre.  
 Though their intrigue left Euclid dumb  
 There's now no need for rule of thumb.

Since zero bend's a dead straight line  
 And concave bends have minus sign,  
*The sum of the squares of all four bends  
 Is half the square of their sum.*

To spy out spherical affairs  
 An oscular surveyor  
 Might find the task laborious,  
 The sphere is much the gayer,  
 And now besides the pair of pairs  
 A fifth sphere in the kissing shares.  
 Yet, signs and zero as before,  
 For each to kiss the other four  
*The square of the sum of all five bends  
 Is thrice the sum of their squares.*

F. SODDY.

© 1936 Nature Publishing Group

Figura 36 – Poema "The Kiss Precise" de Frederick Soddy. Imagem retirada de [22].

O teorema de Descartes nos fornece uma equação quadrática que é satisfeita pelos raios de quatro circunferências  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  mutuamente tangentes, e utiliza a ideia de curvaturas de circunferências. Dada uma circunferência  $C$  de raio  $r$  dizemos que a *curvatura de  $C$*  é

$$k = \pm \frac{1}{r}.$$

Portanto, a curvatura de uma circunferência é definida como o inverso do raio acrescido de um sinal. Para o Teorema de Descartes, que trata de quatro circunferências mutuamente tangentes, estabeleceremos uma convenção para atribuição dos sinais das curvaturas. Para tanto, observe primeiramente que cada circunferência separa o plano que a contém em duas componentes: uma interna e outra externa.

O sinal negativo será atribuído à curvatura de uma dada circunferência do problema de Descartes se as outras três circunferências que a tangenciam encontram-se em sua parte interna. Já o sinal positivo será atribuído à curvatura de uma dada circunferência se as outras três circunferências que a tangenciam encontram-se em sua parte externa. Veja um exemplo:

**Exemplo 4.1.** A circunferência  $C_4$  possui a curvatura positiva, pois  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  a tangenciam externamente. A circunferência  $C_0$  possui a curvatura negativa, uma vez que  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  a tangenciam internamente. Note que,  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  possuem curvatura positiva.

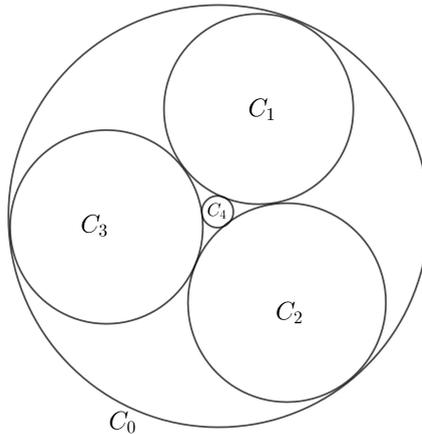


Figura 37 – Circunferências do Exemplo 4.1.

O Teorema de Descartes e as Circunferências de Soddy estão relacionados, mas o Teorema de Descartes não propõe a construção da quarta circunferência que tangencia as três primeiras, mas fornece uma relação entre as curvaturas das 4 circunferências.

O lema a seguir será essencial na demonstração do Teorema de Descartes 4.1.

**Lema 4.1.** *Se  $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ , então*

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma. \quad (7)$$

*Demonstração.* Vamos reescrever (7) de modo equivalente até encontrar uma igualdade evidentemente verdadeira:

$$\begin{aligned} \cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) &= \\ &= 1 + 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) \\ 2(\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma)) &= \\ &= 2(1 + 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma)) \\ 2 \cos^2(\alpha) + 2 \cos^2(\beta) + 2 \cos^2(\gamma) &= \\ &= 2 + 4 \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) \\ 2 \cos^2(\alpha) + 2 \cos^2(\beta) + 2 \cos^2(\gamma) - 3 &= \\ &= 2 + 4 \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) - 3 \\ 2 \cos^2(\alpha) - 1 + 2 \cos^2(\beta) - 1 + 2 \cos^2(\gamma) - 1 &= \\ &= 4 \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) - 1. \end{aligned}$$

Temos que para qualquer ângulo  $\theta$  é válida a relação que envolve o arco duplo:

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 2 \cos^2 \theta - 1.$$

Desse modo,

$$\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + 2(\cos^2 \gamma) - 1 = 4 \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) - 1. \quad (8)$$

Observe que

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) &= 2 \cos\left(\frac{2\alpha + 2\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{2\alpha - 2\beta}{2}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{2(\alpha + \beta)}{2}\right) \cos\left(\frac{2(\alpha - \beta)}{2}\right) \\ &= 2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta).\end{aligned}$$

Logo

$$\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) = 2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta). \quad (9)$$

Note que, por hipótese, temos que  $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ , então  $\alpha + \beta = 2\pi - \gamma$ . Substituindo em (9) obtemos

$$\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) = 2 \cos(2\pi - \gamma) \cos(\alpha - \beta). \quad (10)$$

Como  $\cos(\gamma) = \cos(-\gamma)$  e com  $2\pi$  concluímos uma volta completa na circunferência trigonométrica,  $\cos(\gamma) = \cos(2\pi - \gamma) = \cos(\alpha + \beta)$ . Então, podemos reescrever (10) da seguinte maneira:

$$\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) = 2 \cos(\gamma) \cos(\alpha - \beta). \quad (11)$$

Substituindo (11) em (8) obtemos

$$\begin{aligned}2 \cos(\gamma) \cos(\alpha - \beta) + 2 \cos^2(\gamma) - 1 &= 4 \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) - 1, \\ 2 \cos(\gamma)[\cos(\alpha - \beta) + (\cos \gamma)] - 1 &= 4 \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) - 1, \\ 2 \cos(\gamma)[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] - 1 &= 4 \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) - 1, \\ 2 \cos(\gamma)[2 \cos(\alpha) \cos(\beta)] - 1 &= 4 \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) - 1, \\ 4 \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) - 1, &= 4 \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) - 1.\end{aligned}$$

Portanto a identidade trigonométrica (7) é válida.

□

**Teorema 4.1** (TEOREMA DE DESCARTES). *Considere  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , circunferências mutuamente tangentes, isto é, quaisquer duas das quatro circunferências se tocam em um único ponto. As curvaturas  $k_i$  de  $C_i$  satisfazem:*

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2).$$

*Demonstração.* Sejam  $C_1, C_2$  e  $C_3$  circunferências mutuamente tangentes. Considere  $\triangle ABC$  um triângulo, em que  $A, B$  e  $C$  são centros de  $C_1, C_2$  e  $C_3$  e  $r_1, r_2$  e  $r_3$  seus raios, respectivamente. Veja a Figura 38. A partir desta construção, obtemos os comprimentos dos lados do triângulo  $\triangle ABC$ :

$$AB = r_1 + r_2,$$

$$BC = r_2 + r_3,$$

$$CA = r_3 + r_1.$$

Tome  $C_4$  uma circunferência de raio  $r_4$  e centro  $O$ , de modo que  $C_4$  possua uma curvatura positiva<sup>4</sup> em relação as circunferências  $C_1, C_2$  e  $C_3$ . Desse modo temos

$$AO = r_1 + r_4, \tag{12}$$

$$BO = r_2 + r_4, \tag{13}$$

$$CO = r_3 + r_4. \tag{14}$$

Considere também os ângulos  $\angle BOC = \alpha$ ,  $\angle AOC = \beta$  e  $\angle AOB = \gamma$ .

Utilizando a Lei dos Cossenos (demonstração pode ser encontrada em [1]), temos

---

<sup>4</sup> A demonstração será feita apenas para a circunferência  $C_4$ . No caso de  $C_0$  teríamos uma curvatura negativa as equações (12), (13) e (14) seriam substituídas por  $AO = r_4 - r_1$ ,  $BO = r_4 - r_2$  e  $CO = r_4 - r_3$ .

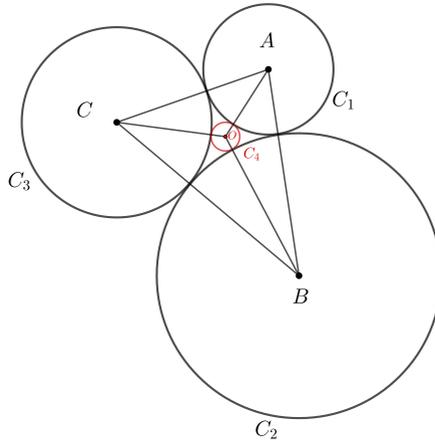


Figura 38 – Construção do triângulo  $\Delta ABC$ .

$$\begin{aligned}
 \cos(\gamma) &= \frac{AO^2 + BO^2 - AB^2}{2 \cdot AO \cdot BO} \\
 &= \frac{(r_4 + r_1)^2 + (r_4 + r_2)^2 - (r_1 + r_2)^2}{2(r_4 + r_1)(r_4 + r_2)} \\
 &= \frac{2r_4^2 + 2r_4(r_1 + r_2) - 2r_1r_2}{2(r_4 + r_1)(r_4 + r_2)} \\
 &= \frac{2[r_4^2 + r_4(r_1 + r_2) - r_1r_2]}{2(r_4 + r_1)(r_4 + r_2)} \\
 &= \frac{(r_4 + r_1)(r_4 + r_2) - 2r_1r_2}{(r_4 + r_1)(r_4 + r_2)} \\
 \Rightarrow \cos(\gamma) &= 1 - \frac{2r_1r_2}{(r_4 + r_1)(r_4 + r_2)}.
 \end{aligned}$$

Podemos escrever os raios das circunferências em termos de suas respectivas curvaturas. Considerando que as curvaturas de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  são positivas, temos:

$$\begin{aligned}
\cos(\gamma) &= 1 - \frac{2 \left( \frac{1}{k_1} \frac{1}{k_2} \right)}{\left( \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_1} \right) \left( \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_2} \right)} \\
&= 1 - \frac{2 \left( \frac{1}{k_1 k_2} \right)}{\left( \frac{k_1 + k_4}{k_4 k_1} \right) \left( \frac{k_2 + k_4}{k_4 k_2} \right)} \\
&= 1 - \frac{2 \left( \frac{1}{k_1 k_2} \right)}{\frac{(k_1 + k_4)(k_2 + k_4)}{k_4^2 k_1 k_2}} \\
&= 1 - 2 \left( \frac{1}{k_1 k_2} \right) \left( \frac{k_4^2 k_1 k_2}{(k_4 + k_1)(k_4 + k_2)} \right) \\
\Rightarrow \cos(\gamma) &= 1 - \frac{2k_4^2}{(k_4 + k_1)(k_4 + k_2)}.
\end{aligned}$$

Agora, para simplificar os cálculos considere

$$\lambda_3 = \frac{2k_4^2}{(k_4 + k_1)(k_4 + k_2)}.$$

Então temos:

$$\cos(\gamma) = 1 - \lambda_3.$$

De modo análogo, analisando os ângulos beta e alfa, podemos obter as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
\cos(\beta) &= 1 - \frac{2k_4^2}{(k_4 + k_1)(k_4 + k_3)}, \\
\cos(\beta) &= 1 - \lambda_2,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= 1 - \frac{2k_4^2}{(k_4 + k_2)(k_4 + k_3)}, \\
\cos(\alpha) &= 1 - \lambda_1.
\end{aligned}$$

Como  $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ , podemos usar a identidade trigonométrica (7). Substituindo os valores de  $\cos(\alpha)$ ,  $\cos(\beta)$  e  $\cos(\gamma)$  em (7), obtemos:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_1)^2 + (1 - \lambda_2)^2 + (1 - \lambda_3)^2 &= 1 + 2(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3), \\ 3 - 2(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 &= 3 - 2(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) + 2(\lambda_1\lambda_2 \\ &\quad + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3) - 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3). \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da equação por  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2\lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2} + 2 = 2 \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} \right).$$

Substituindo os respectivos valores de  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{2k_4^2}{(k_4+k_2)(k_4+k_3)}}{\left(\frac{2k_4^2}{(k_4+k_1)(k_4+k_3)}\right)\left(\frac{2k_4^2}{(k_4+k_1)(k_4+k_2)}\right)} + \\ &\frac{\frac{2k_4^2}{(k_4+k_1)(k_4+k_3)}}{\left(\frac{2k_4^2}{(k_4+k_2)(k_4+k_3)}\right)\left(\frac{2k_4^2}{(k_4+k_1)(k_4+k_2)}\right)} + \\ &\frac{\frac{2k_4^2}{(k_4+k_1)(k_4+k_2)}}{\left(\frac{2k_4^2}{(k_4+k_2)(k_4+k_3)}\right)\left(\frac{2k_4^2}{(k_4+k_1)(k_4+k_3)}\right)} + 2 = \\ &2 \left( \frac{1}{\frac{2k_4^2}{(k_4+k_2)(k_4+k_3)}} + \frac{1}{\frac{2k_4^2}{(k_4+k_1)(k_4+k_3)}} + \frac{1}{\frac{2k_4^2}{(k_4+k_1)(k_4+k_2)}} \right). \end{aligned}$$

Simplificando, temos

$$\begin{aligned} & \frac{(k_1 + k_4)^2}{2k_4^2} + \frac{(k_4 + k_2)^2}{2k_4^2} + \frac{(k_4 + k_3)^2}{2k_4^2} + 2 = \\ & = 2 \left( \frac{(k_4 + k_2)(k_4 + k_3)}{2k_4^2} + \frac{(k_4 + k_1)(k_4 + k_3)}{2k_4^2} + \frac{(k_4 + k_1)(k_4 + k_2)}{2k_4^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{k_4^2 + 2k_1k_4 + k_1^2 + k_4^2 + 2k_4k_2 + k_2^2 + k_4^2 + 2k_4k_3 + k_3^2}{2k_4^2} + 2 = \\ & = 2 \left( \frac{k_4^2 + k_4k_3 + k_4k_2 + k_2k_3 + k_4^2 + k_4k_3}{2k_4^2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{k_4k_1 + k_1k_3 + k_4^2 + k_4k_2 + k_4k_1 + k_1k_2}{2k_4^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{3k_4^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 2k_4(k_1 + k_2 + k_3)}{2k_4^2} + 2 = \\ & = 2 \left( \frac{3k_4^2 + k_4(k_3 + k_2 + k_3 + k_1 + k_2 + k_1) + k_2k_3 + k_1k_3 + k_1k_2}{2k_4^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{4k_4^2 + 3k_4^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 2k_4(k_1 + k_2 + k_3)}{2k_4^2} = \\ & = 2 \left( \frac{3k_4^2 + 2k_4(k_1 + k_2 + k_3) + k_2k_3 + k_1k_3 + k_1k_2}{2k_4^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 7k_4^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 2k_4(k_1 + k_2 + k_3) = \\ & 2(3k_4^2 + 2k_4(k_1 + k_2 + k_3) + k_2k_3 + k_1k_3 + k_1k_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 7k_4^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 2k_4(k_1 + k_2 + k_3) = \\ & = 6k_4^2 + 4k_4(k_1 + k_2 + k_3) + 2(k_2k_3 + k_1k_3 + k_1k_2) \end{aligned}$$

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = 4k_4(k_1 + k_2 + k_3) + 2(k_2k_3 + k_1k_3 + k_1k_2) - 2k_4(k_1 + k_2 + k_3).$$

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = 2k_4(k_1 + k_2 + k_3) + 2(k_2k_3 + k_1k_3 + k_1k_2). \quad (15)$$

Observe que

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 &= k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + 2k_1k_2 + 2k_1k_3 + 2k_2k_3 \\ &\quad + 2k_1k_4 + 2k_2k_4 + 2k_3k_4 \\ &= k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + 2(k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3) \\ &\quad + 2k_4(k_1 + k_2 + k_3). \end{aligned}$$

Desse modo, podemos reescrever (15) como

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 - (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2).$$

Portanto

$$2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2. \quad (16)$$

□

**Observação 4.1.** Note que podemos reescrever a equação (16) da seguinte maneira

$$k = k_1 + k_2 + k_3 \pm 2 \cdot \sqrt{k_1k_2 + k_2k_3 + k_1k_3}.$$

Vejamos um exemplo de aplicação do Teorema de Descartes.

**Exemplo 4.2.** Dadas três circunferências  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  de raios  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 2$  e  $r_3 = 3$ , respectivamente (ver Figura 39). Conseguimos determinar o raio da circunferência  $C_4$ .

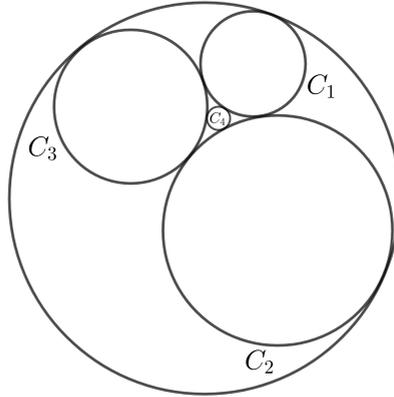


Figura 39 – Circunferências do Exemplo 4.2.

Usando Teorema de Descartes 4.1 temos que

$$k_4 = k_1 + k_2 + k_3 \pm 2 \cdot \sqrt{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3}.$$

Note que, como a circunferência  $C_4$  é tangente externamente as três circunferências maiores, logo sua curvatura é positiva, portanto:

$$\begin{aligned} k_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \\ k_4 &= \frac{4}{3} + 2 \cdot \sqrt{\frac{7}{12}} = \frac{4 + \sqrt{21}}{3}. \end{aligned}$$

Como a curvatura é o inverso do raio acrescido de um sinal, e nesse caso é positivo, concluímos que o raio é:

$$r_4 = \frac{3}{4 + \sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21} - 12}{5}.$$

A segunda versão da demonstração deste teorema é uma releitura da demonstração feita por Descartes através de uma carta de 17 de novembro de 1643<sup>5</sup> enviada a princesa Elizabeth em 1643.

Na carta, Descartes descreve as dificuldades que encontrou ao longo de sua tentativa de resolver o problema. Apesar das frustrações durante as resoluções, apresenta uma demonstração que reduz o problema a situações que já conhecia, considerando retas paralelas, perpendiculares e com o auxílio do teorema que utilizava triângulos retângulos (conhecido atualmente como teorema de Pitágoras).

Considere três circunferências tais que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são seus centros e  $a$ ,  $b$  e  $c$  seus respectivos raios. Suponha que  $D$  seja o centro da quarta circunferência que tangencia as demais, tal que  $x$  seja seu raio. Dessa forma, conseguimos construir um triângulo  $\triangle ABC$  de modo que  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BD}$  e  $\overline{CD}$  são segmentos constituídos por raios. Isto é:

$$\begin{aligned} AD &= a + x, \\ BD &= b + x, \\ CD &= c + x. \end{aligned}$$

O objetivo de Descartes, nesta demonstração, era mostrar que é possível encontrar o valor  $x$  atribuído ao raio da quarta circunferência. Para isso, o caminho adotado considera uma construção com retas paralelas e perpendiculares.

Sejam  $\overline{BE}$  e  $\overline{DF}$  segmentos que interceptam perpendicularmente  $\overline{AC}$ . Note que  $E$  e  $F$  são os pontos de interseção com o segmento  $\overline{AC}$ . Considere também  $\overline{DG}$ , um segmento paralelo a  $\overline{AC}$  e, portanto, perpendicular a  $\overline{BE}$ . Note que  $G$  é o ponto de interseção com o segmento  $\overline{BE}$ . Veja a figura 40.

<sup>5</sup> Carta encontrada em [21] página 73.

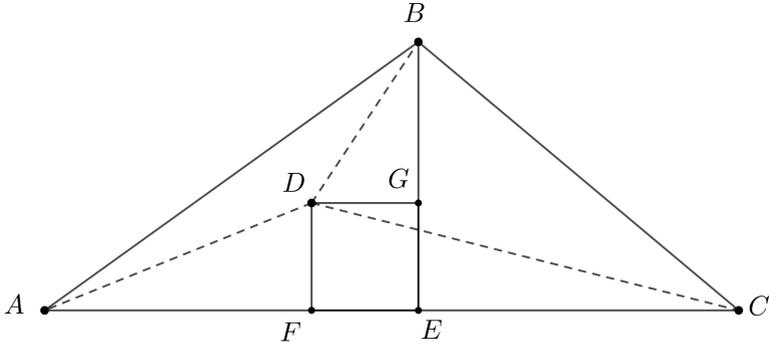


Figura 40 – Construção de triângulos retângulos.

Note que, a partir desta construção, obtemos três triângulos retângulos  $\triangle ADF$ ,  $\triangle BDG$  e  $\triangle CDF$ . Podemos afirmar então

$$\begin{aligned} AD^2 &= DF^2 + AF^2, \\ BD^2 &= DG^2 + BG^2, \\ CD^2 &= DF^2 + FC^2. \end{aligned}$$

Considere, para facilitar os cálculos,

$$\begin{aligned} AE &= d, \\ BE &= e, \\ CE &= f, \\ DF &= GE = y, \\ DG &= FE = z. \end{aligned}$$

Reescrevendo temos (ver Figura 41):

$$\begin{aligned} AF &= d - z, \\ BG &= e - y, \\ CF &= f + z. \end{aligned}$$

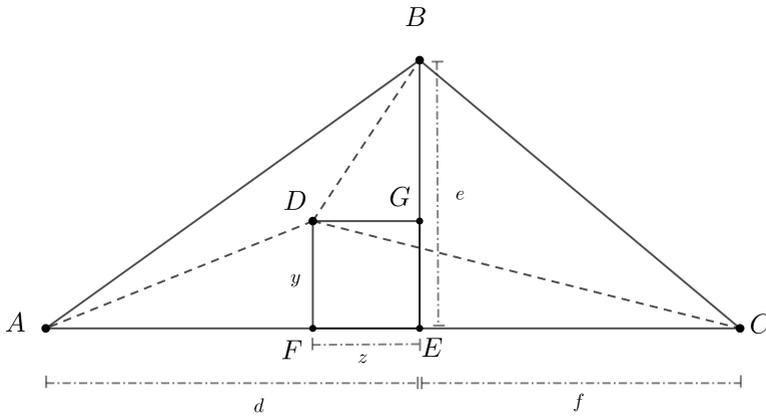


Figura 41 – Renomeando os segmentos.

Utilizando o que já foi construído temos:

$$(a + x)^2 = (d - z)^2 + y^2,$$

$$(b + x)^2 = (e - y)^2 + z^2,$$

$$(c + x)^2 = (f + z)^2 + y^2.$$

Desse modo

$$a^2 + 2ax + x^2 = d^2 - 2dz + z^2 + y^2, \quad (17)$$

$$b^2 + 2bx + x^2 = e^2 - 2ey + y^2 + z^2, \quad (18)$$

$$c^2 + 2cx + x^2 = f^2 + 2fz + z^2 + y^2. \quad (19)$$

Subtraindo (17) de (19)

$$c^2 - a^2 - f^2 + d^2 - 2ax + 2cx = z(2d + 2f).$$

Logo

$$\begin{aligned} z &= \frac{c^2 - a^2 - f^2 + d^2 - 2ax + 2cx}{2d + 2f} \\ &= \frac{d^2 - f^2}{2d + 2f} + \frac{c^2 - a^2 + 2cx - 2ax}{2d + 2f} \\ &= \frac{(d - f)(d + f)}{2(d + f)} + \frac{c^2 - a^2 + 2cx - 2ax}{2d + 2f}. \end{aligned}$$

Então

$$z = \frac{d}{2} - \frac{f}{2} + \frac{c^2 - a^2 + 2cx - 2ax}{2d + 2f}. \quad (20)$$

Da mesma forma, subtraindo (18) de (17)

$$a^2 + 2ax - b^2 - 2bx = d^2 - 2dz - e^2 + 2ey. \quad (21)$$

Substituindo o valor de  $z$  encontrado em (20) na equação (21) obtemos

$$2ey = e^2 + a^2 + 2ax - b^2 - 2bx - df + \frac{c^2d - a^2d + 2cdx - 2adx}{d + f}.$$

Isolando  $y$  e conduzindo algumas manipulações algébricas temos

$$y = \frac{e}{2} - \frac{b^2}{2e} - \frac{bx}{e} - \frac{df}{2e} + \frac{c^2d + a^2f + 2cdx + 2afx}{2ed + 2ef}. \quad (22)$$

Podemos reescrever a equação (22) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{e}{2} - \frac{b^2}{2e} - \frac{df}{2e} - \frac{bx}{e} + \frac{c^2d + a^2f + 2cdx + 2afx}{2ed + 2ef} \\
 &= \frac{e}{2} - \frac{b^2}{2e} - \frac{df}{2e} + \frac{c^2d}{2ed + 2ef} + \frac{a^2f}{2ed + 2ef} + \frac{x(2cd + 2af)}{2ed + 2ef} - \frac{bx}{e} \\
 &= \frac{e}{2} - \frac{b^2}{2e} - \frac{df}{2e} + \frac{c^2d}{2ed + 2ef} + \frac{a^2f}{2ed + 2ef} + x \cdot \left( \frac{2cd + 2af}{2ed + 2ef} - \frac{b}{e} \right).
 \end{aligned}$$

Para simplificar os cálculos, considere:

$$\alpha = \frac{e}{2} - \frac{b^2}{2e} - \frac{df}{2e} + \frac{c^2d}{2ed + 2ef} + \frac{a^2f}{2ed + 2ef},$$

e

$$\beta = \frac{2cd + 2af}{2ed + 2ef} - \frac{b}{e}.$$

Desse modo, temos:

$$y = \alpha + x\beta. \quad (23)$$

De modo análogo, podemos reescrever (20) como:

$$z = \gamma + x\delta, \quad (24)$$

em que

$$\gamma = \frac{d}{2} - \frac{f}{2} + \frac{c^2 - a^2}{2d + 2f},$$

e

$$\delta = \frac{2c - 2a}{2d + 2f}.$$

Agora, substituindo (23) e (24) em (17), obtemos:

$$\begin{aligned}
a^2 + 2ax + x^2 &= \\
&= d^2 - 2d(\gamma + x\delta) + (\gamma + x\delta)^2 + (\alpha + x\beta)^2 \\
&= d^2 - 2d\gamma - 2dx\delta + \gamma^2 + 2\gamma x\delta + x^2\delta^2 + \alpha^2 + 2\alpha x\beta + x^2\beta^2 \\
&= d^2 - 2d\gamma + \gamma^2 + \alpha^2 + x(-2d\delta + 2\gamma\delta + 2\alpha\beta) + x^2(\delta^2 + \beta^2).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
d^2 - 2d\gamma + \gamma^2 + \alpha^2 + x(-2d\delta + 2\gamma\delta + 2\alpha\beta) + x^2(\delta^2 + \beta^2) + \\
- a^2 - 2ax - x^2 = 0 \\
d^2 - 2d\gamma + \gamma^2 + \alpha^2 - a^2 + x(-2d\delta + 2\gamma\delta + 2\alpha\beta - 2a) + \\
+ x^2(\delta^2 + \beta^2 - 1) = 0.
\end{aligned}$$

Observe que temos uma equação do segundo grau em  $x$ . Desse modo, vamos reescrevê-la para simplificar os cálculos novamente. Considere:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= d^2 - 2d\gamma + \gamma^2 + \alpha^2 - a^2, \\
\rho &= -2d\delta + 2\gamma\delta + 2\alpha\beta - 2a \text{ e} \\
\varphi &= \delta^2 + \beta^2 - 1.
\end{aligned}$$

Logo, nossa equação é

$$x^2\varphi + x\rho + \varepsilon = 0.$$

Note que uma solução positiva dessa equação de segundo grau fornece o raio  $x$  procurado. Vale ressaltar que no método apresentado acima, Descartes utiliza reiteradas substituições algébricas, para traduzir o problema geométrico em equações.

#### 4.4 EMPACOTAMENTO DE CÍRCULOS

Empacotamento de círculos é um estudo sobre a organização de círculos, de tamanhos iguais ou não, dentro de uma determinada região do plano, com duas condições: não pode haver sobreposições e os círculos devem se tangenciar mutuamente. Basicamente, quando falamos de empacotamento de círculos estamos arranjando os círculos dentro de uma determinada área com o objetivo de maximizar a região coberta, de modo que não haja sobreposições entre quaisquer dois pares de itens e que cada item seja impedido de ultrapassar a fronteira do objeto.

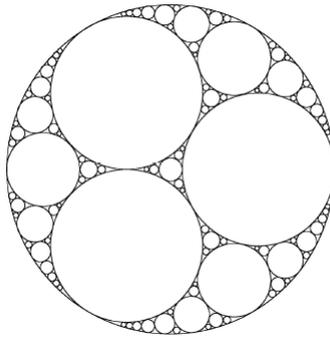


Figura 42 – Exemplo de empacotamento de círculos em uma região circular do plano. Imagem retirada de [3].

Os problemas de empacotamento têm importantes aplicações na indústria. Por exemplo, uma fábrica deseja encontrar as dimensões de uma embalagem de modo que um certo número fixo de itens sejam armazenados. Com isso, há uma redução nos custos relacionados à obtenção dessas embalagens, gerando economia para a empresa (OLIVEIRA, 2018, p. 19)<sup>[12]</sup>.

Os centros dos círculos utilizados em um empacotamento no

plano podem se dispor de diversas formas, em particular, podem se organizar em reticulados do plano com formatos retangulares, hexagonais etc. A cada uma dessas formas associa-se uma densidade  $\eta$  que, grosso modo, mede a proporção da região do plano que é ocupada pelos círculos empacotados. Veja a figura 43.

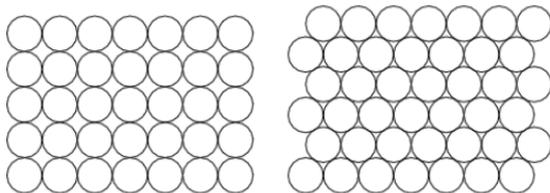


Figura 43 – Exemplo de empacotamento de círculos retangular e hexagonal. Imagem retirada de [24].

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) provou que o empacotamento regular de círculos no plano com maior densidade é a estrutura hexagonal, isto é, quando os centros dos círculos estão dispostos em um reticulado hexagonal no plano. Em 1940, L. Fejes Tóth (1915 - 2005) provou que a rede hexagonal é de fato o mais denso de todos os empacotamentos planos possíveis, sejam regulares ou não. Na natureza, podemos visualizar essa estrutura no favo de mel da abelha.

Observe que podemos fazer o processo de empacotamento de círculos dentro de uma região circular do plano usando as circunferências de Soddy sucessivas vezes. Iniciamos o processo com uma circunferência que delimita a região circular a ser preenchida. É simples encaixar duas circunferências nessa região de modo tangente - basta considerar duas circunferências que se intersectam exatamente no centro da região circular com diâmetros dados pela metade do diâmetro da região. Agora, para construir a quarta circunferência tangente, podemos usar uma das soluções de Soddy. Para continuar o processo, pegue esse novo círculo que foi construído no passo ante-

rior e, junto com outras duas circunferências a sua escolha, aplique novamente o procedimento para conseguir uma quinta circunferência tangente. Seguindo esse procedimento, vamos preenchendo a região circular. Na Figura 44, as circunferências foram numeradas conforme a construção.

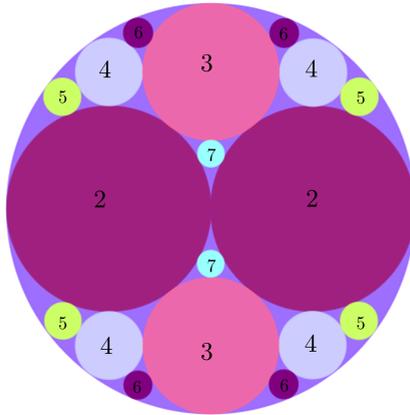


Figura 44 – Exemplo de empacotamento de círculos utilizando as Circunferências de Soddy.

## 5 TEOREMA DAS QUATRO CORES

### 5.1 NO QUE CONSISTE O PROBLEMA DAS QUATRO CORES?

O teorema das quatro cores surge a partir de um problema que possui um enunciado simples: qual o número mínimo de cores necessárias para colorir todos os países em um mapa de modo que dois países que fazem fronteira tenham cores distintas?

Se pintarmos o Brasil de rosa, a Bolívia precisaria ter uma cor diferente; vamos colorir de verde. Como a Argentina faz fronteira com o Brasil e a Bolívia, não pode ser colorida de rosa e de verde, então vamos usar o azul. Com isso, temos que o Paraguai não pode ser rosa, verde e nem azul, então seria necessário mais uma cor. Veja a Figura 45.



Figura 45 – Coloração do mapa da América do Sul.

O teorema das quatro cores afirma que para qualquer divisão do plano em regiões contínuas é possível encontrar uma combinação com no máximo quatro cores para colorir tais regiões satisfazendo a

propriedade de que regiões adjacentes possuem cores distintas.

Apesar de ser um teorema de fácil entendimento, a demonstração levou anos para ser verificada e, depois de apresentada, gerou algumas discussões no campo da matemática, como veremos na próxima seção.

O problema das quatro cores é mais do que apenas uma curiosidade. Apesar de seu caráter recreativo, as várias tentativas de resolvê-lo ao longo dos anos estimularam o desenvolvimento de uma parte muito excitante da matemática com diversas aplicações em problemas importantes do mundo real. Muitos problemas práticos de redes ferroviárias ou redes de comunicação, por exemplo, derivam de problemas de coloração de mapas<sup>1</sup>. (WILSON, 2002, p.3)<sup>[25]</sup>.

## 5.2 QUATRO CORES, DA CONJECTURA AO TEOREMA

Segundo Wilson<sup>[25]</sup>, o problema das quatro cores é inicialmente apresentado em uma carta escrita em Londres em 23 de outubro de 1852, de Augustus De Morgan (1806 - 1871), professor de matemática na University College de Londres, para William Rowan Hamilton (1805 - 1865).

Na carta, De Morgan conta sobre um problema apresentado a ele por um de seus alunos, Frederick Guthrie (1833 - 1886). Ele dizia que se uma figura é dividida em partes distintas e colorida de modo que as que as figuras com qualquer linha em comum tenham cores diferentes, o número de cores necessárias é quatro. Anos depois, Frederick Guthrie afirmou que o problema havia sido proposto por seu irmão Francis Guthrie (1831 - 1899) em uma tentativa de colorir o mapa da Inglaterra de modo que dois estados não possuíssem a mesma cor.

---

<sup>1</sup> Tradução própria.

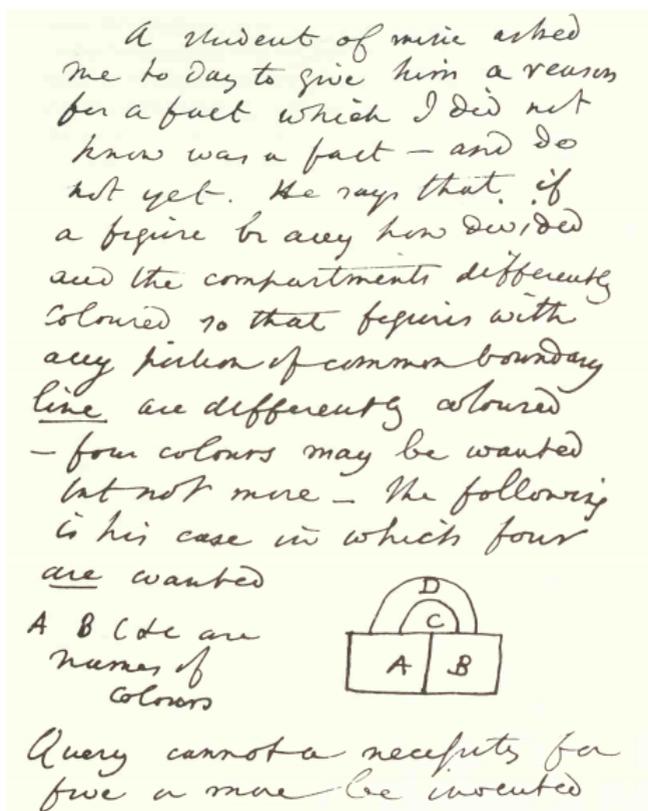


Figura 46 – Carta de Augustus De Morgan para William Rowan Hamilton. Imagem retirada de [25].

Segundo Wilson<sup>[25]</sup>, mais de um século pintando mapas e desenvolvendo a teoria necessária se passaria desde Guthrie para que fosse estabelecido com certeza que quatro cores são suficientes para todos os mapas.

Como consequência do interesse de De Morgan e do pouco progresso na demonstração do problema, o matemático Charles Sanders

Peirce (1839 - 1914) apresentou uma tentativa de solução na Universidade de Harvard. Peirce tentou estender a ideia para outras superfícies, por exemplo, suponha que vivêssemos em um mundo moldado por um donut (toro). Então, precisaríamos de no máximo sete cores para colorir todos os mapas no toro. Na Figura 47, veja um mapa desenhado sobre uma representação retangular do toro que possui sete países mutuamente vizinhos e, que portanto, requer sete cores.

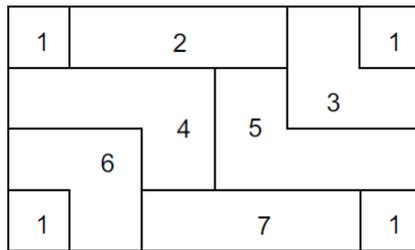


Figura 47 – Representação retangular do toro. Imagem retirada de [15].

Em 1879, Alfred Bray Kempe (1849 - 1922) apresentou uma suposta solução para o problema das quatro cores através de uma teoria sobre cadeias de grafos. Mas, em 1890, Percy John Heawood (1861 - 1955) apresentou uma falha na demonstração de Kempe e, além disso, demonstrou o teorema das cinco cores que diz: todo mapa no plano pode ser colorido com no máximo cinco cores. Muitas ideias apresentadas na solução de Kempe foram importantes em trabalhos posteriores sobre o problema.

Somente em 1976, Keneth Appel e Wolfgang Haken resolveram o problema das quatro cores: é possível colorir qualquer mapa no plano com no máximo quatro cores. Eles definiram diversas configurações que deveriam ser verificadas por computador, usando aproximadamente 1200 horas de computação. O trabalho de Appel e Haken gerou

diversas contestações, pois dependia da utilização de computadores para realizar a análise.

Em 23 de junho de 1976, a seguinte matéria apareceu no *The Times*: Dois matemáticos americanos acabam de anunciar que resolveram uma proposição que tem intrigado matemáticos por mais de 100 anos... A prova, publicada hoje, contém 100 páginas de resumo, 100 páginas de detalhes e mais 700 páginas de backup. Eles dedicaram cerca de 40 horas de pesquisa por semana e 1000 horas de computador. A prova contém 10.000 diagramas, e sua impressão feita no computador alcança mais de um metro de altura do chão<sup>2</sup>. (WILSON, 2002, p.209)<sup>[25]</sup>.

Após 124 anos de espera, o problema das quatro cores estava resolvido. Apesar da demonstração de Appel-Haken ter sido comemorada com entusiasmo, muitos ainda estavam céticos em relação ao método utilizado para demonstração. O fato de ter que analisar essas diversas combinações de figuras através de um computador e não através de uma demonstração que se enquadrava nos moldes tradicionais, foi motivo de diversos debates.

Em agosto de 1976, Haken apresenta a demonstração a diversos matemáticos em uma palestra promovida pela Sociedade Americana de Matemática e a Universidade de Toronto. A apresentação deixou a plateia dividida e muitos questionamentos se a demonstração era válida.

A inquietação surge com um simples questionamento: em tantas páginas de dados, não há a possibilidade de erro? Além dessa preocupação, havia uma esperança que uma prova mais simples poderia ser encontrada.

Ao final, o público se dividiu em dois grupos: aqueles que não estavam convencidos de que uma prova através de um computador estava correta, e aqueles

---

<sup>2</sup> Tradução própria.

que não podiam ser convencidos de que uma prova que continha 700 páginas de cálculos manuais poderia estar correta. Ficou claro que a solução de Appel e Haken para o problema das quatro cores problema havia criado algo novo na matemática. É uma prova? E se sim, como sabemos que é uma prova?<sup>3</sup> (WILSON, 2002, p.216)<sup>[25]</sup>

O trabalho computacional desenvolvido por Appel e Haken, a partir do problema das quatro cores representa um divisor de águas na história da matemática, nos fazendo questionar o que é considerado uma demonstração nos dias atuais.

### 5.3 NOÇÕES DE GRAFOS

Uma das maneiras de olhar o problema das quatro cores é através dos grafos, que basicamente são pontos unidos por segmentos, em que cada ponto indica uma região do mapa, e os segmentos estão dispostos de acordo com as fronteiras de cada região. Dessa forma, vértices adjacentes do grafo associado correspondem a regiões vizinhas do mapa. Ou seja, colorir as regiões desse mapa, corresponde a colorir os vértices de um grafo.

Para deixar mais clara a relação existente entre mapas e grafos, vamos considerar o mapa do Brasil na Figura 48. O Brasil possui 26 estados que correspondem a 26 vértices no grafo. Note que a conexão que há entre os vértices desse grafo são os segmentos (arestas) que correspondem a estados que fazem fronteira.

Vale ressaltar que, neste trabalho, dois países que fazem fronteira em apenas um ponto não são considerados vizinhos.

---

<sup>3</sup> Tradução própria.

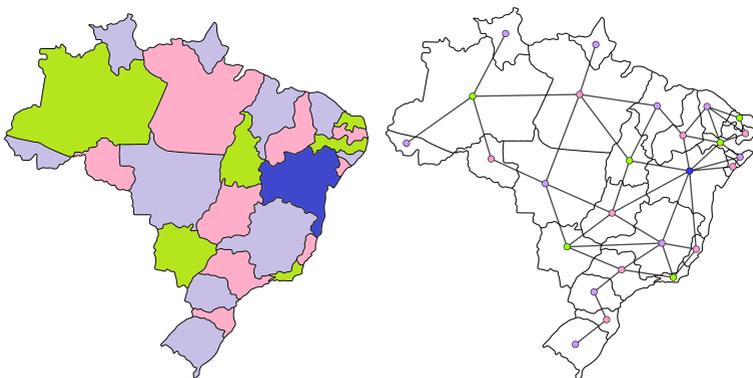


Figura 48 – Converter um mapa em um grafo.

Vejamos mais um exemplo retirado de [15] de uma aplicação de grafos.

**Exemplo 5.1.** Em uma escola foi realizado um torneio de futebol. Participaram as turmas  $6^{\circ}A$ ,  $6^{\circ}B$ ,  $7^{\circ}A$ ,  $7^{\circ}B$ ,  $8^{\circ}A$  e  $8^{\circ}B$ . As partidas foram realizadas conforme a tabela abaixo:

$6^{\circ}A$ jogou com $7^{\circ}A$ e $8^{\circ}B$
$6^{\circ}B$ jogou com $7^{\circ}A$ , $8^{\circ}A$ e $8^{\circ}B$
$7^{\circ}A$ jogou com $6^{\circ}A$ e $6^{\circ}B$
$7^{\circ}B$ jogou com $6^{\circ}A$ , $8^{\circ}A$ e $8^{\circ}B$
$8^{\circ}A$ jogou com $6^{\circ}B$ , $7^{\circ}B$ e $8^{\circ}B$
$8^{\circ}B$ jogou com $6^{\circ}A$ , $6^{\circ}B$ , $7^{\circ}B$ e $8^{\circ}A$

A partir da tabela, podemos fazer um desenho com a representação gráfica, em que as turmas serão representadas por pontos, que chamaremos de vértices, e os jogos por segmentos, que chamaremos de arestas, como mostra a Figura 49.

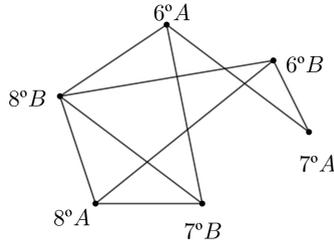


Figura 49 – Representação dos jogos como um grafo.

A representação de um grafo em um computador pode ser feita através de pares (ordenados ou não), em que cada par é formado por dois pontos que estão unidos por um segmento. Mesmo com a teoria de grafos, a única demonstração aceita até o momento do teorema das quatro cores é feita apenas por computadores. Matematicamente, podemos realizar a verificação da confiabilidade do programa utilizado, isto é, verificar se o computador realmente faz o que é necessário para garantir a resposta.

Podemos reescrever o teorema das quatro cores através de grafos: dado um grafo  $G$ , como colorir seus vértices de modo que vértices adjacentes possuam cores diferentes? Qual é o menor número de cores necessárias?

Durante as tentativas de resolução do teorema das quatro cores, Heawood demonstrou o teorema considerando cinco cores, ou seja, cinco cores são suficientes para pintar qualquer mapa plano. Com o intuito de demonstrar tal teorema sob a perspectiva de grafos, iremos estudar algumas definições necessárias.

**Definição 5.1.** Um grafo  $G$  é uma coleção finita e não vazia de pontos, chamados vértices, com pares desses pontos ligados por arcos ou segmentos, chamados arestas. Cada aresta tem dois vértices como extremidades (essas duas extremidades podem coincidir e, nesse caso,

temos um laço). Quando uma aresta liga dois vértices dizemos que os vértices são adjacentes e que a aresta é incidente aos vértices.

**Observação 5.1.** Denotaremos os vértices de um grafo  $G$  com letras minúsculas e a quantidade de vértices por  $V(G)$ . Para as arestas, será utilizada a notação usual de segmento e para a quantidade de arestas será utilizado  $A(G)$ .

**Exemplo 5.2.** Considerando o grafo  $G$  representado na Figura 50 temos que  $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  e  $v_6$  representam os vértices de  $G$ , então  $V(G) = 7$ . São arestas do grafo  $G$  os segmentos  $\overline{v_0v_1}, \overline{v_1v_2}, \overline{v_1v_3}, \overline{v_2v_3}, \overline{v_3v_4}, \overline{v_4v_5}$ , e  $\overline{v_5v_6}$  então temos  $A(G) = 7$ .

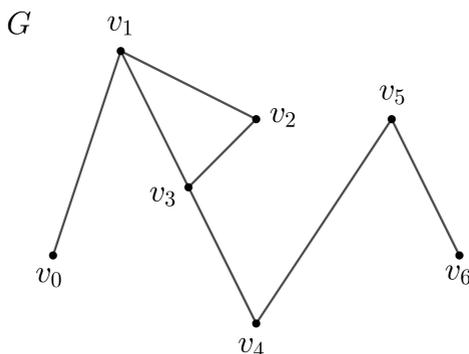


Figura 50 – Grafo  $G$  com  $V(G) = 7$  e  $A(G) = 7$ .

**Definição 5.2.** Dado um grafo  $G$ , dizemos que um caminho de  $G$  é uma sequência finita de arestas da forma  $\overline{v_0v_1}, \overline{v_1v_2}, \dots, \overline{v_{m-1}v_m}$ . Vamos denotar um caminho por  $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$ .

Um caminho  $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$  é fechado se termina no mesmo vértice que inicia, isto é,  $v_0 = v_m$ .

**Exemplo 5.3.** Considerando a Figura 51, podemos partir do vértice  $v_0$  até  $v_1$  por meio do caminho  $v_0 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_1$ . Agora, se partirmos do vértice  $v_0$  através do caminho  $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_3 \rightarrow v_0$  temos um exemplo de caminho fechado.

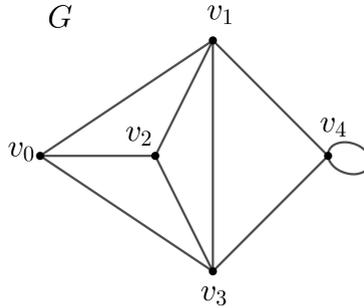


Figura 51 – Exemplos de caminhos no grafo  $G$ .

**Definição 5.3.** Definimos grau de um vértice o número de arestas que têm extremidade naquele vértice. Sendo  $v$  um vértice, denotaremos o grau de  $v$  como  $\rho(v)$ .

**Exemplo 5.4.** Na Figura 52, temos que  $\rho(v_1) = 3$ ,  $\rho(v_0) = \rho(v_3) = \rho(v_5) = 2$ ,  $\rho(v_2) = \rho(v_7) = \rho(v_6) = 1$  e  $\rho(v_4) = 0$ .

**Definição 5.4.** Chamamos de ciclo um caminho fechado de um grafo  $G$  de tal forma que todos os seus vértices têm grau 2.

**Exemplo 5.5.** Na Figura 51, temos um ciclo formado pelo laço  $\overline{v_4v_4}$  e outro formado por  $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_0$ .

**Definição 5.5.** Dizemos que um grafo  $G$  é conexo se não puder ser expresso como a união disjunta de dois grafos, ou seja, se dado qualquer par de vértices  $v_0$  e  $v_1$  de  $G$  há um caminho de  $v_0$  para  $v_1$ . Desse modo, um grafo é conexo se, e somente se, houver um caminho entre cada par de vértices.

**Exemplo 5.6.** Considerando a Figura 52, temos que  $G_1$  é um grafo conexo. Por outro lado, o grafo formado pela união de  $G_2$  e  $G_3$  é desconexo.

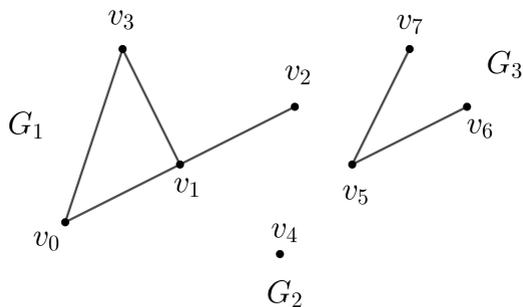


Figura 52 –  $G_1$  é um grafo conexo,  $G_2 \cup G_3$  é desconexo.

Grafos conexos que não possuem ciclos são chamados de *árvores*, veja um exemplo na Figura 53.

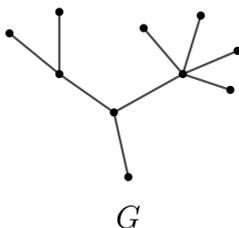


Figura 53 – Representação de um grafo  $G$  do tipo árvore.

**Definição 5.6.** Um grafo  $G$  é dito planar se pode ser representado graficamente no plano de tal forma que não haja interseção de suas arestas.

**Exemplo 5.7.** Na Figura 54, temos que  $G_0$  é grafo planar formado pelas arestas de um cubo. Segue que o grafo  $G_0$  é planar e a sua representação gráfica no plano é dada pelo grafo  $G_1$ .

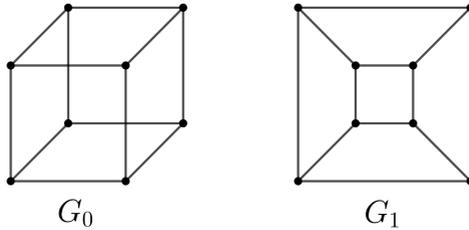


Figura 54 – Grafo planar.

Dizemos que um grafo é planar se for possível refazê-lo em um plano mantendo a mesma estrutura de vértices e arestas, de maneira que suas arestas não se intersectem. Grafos que não satisfazem essas condições são grafos não planares.

Um exemplo de grafo não planar, é um grafo completo de cinco vértices  $K_5$ . A demonstração será feita no Lema 5.2. Veja o grafo  $G$  na Figura 55.

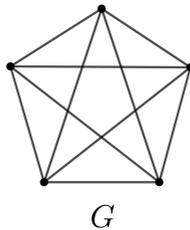


Figura 55 – Grafo não planar.

Definimos um *grafo completo* quando quaisquer dois de seus vértices são ligados por uma e, exatamente uma, aresta. Um grafo

completo com  $n$  vértices é chamado de  $K_n$ .

Na Figura 56, temos três exemplos de grafos completos. Da esquerda para a direita, temos  $K_2$ ,  $K_3$  e  $K_4$ .

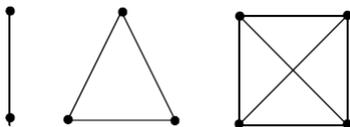


Figura 56 – Exemplos de grafos completos.

Toda representação planar de um grafo  $G$  divide o plano em um número finito de regiões, chamadas *faces*. Essas regiões podem ser limitadas (estão na parte interna de um ciclo) ou ilimitadas. Note que a representação planar do cubo, na Figura 54, divide o plano em 6 faces: 5 limitadas e 1 ilimitada. No caso de grafos do tipo árvores, não temos ciclos e, portanto, há uma única face ilimitada, veja a Figura 53.

O Teorema de Euler, apresentado a seguir, é muito conhecido para poliedros convexos, mas a validade também se aplica para grafos planares conexos. Esse teorema será utilizado na demonstração do Teorema das cinco cores.

**Teorema 5.1** (TEOREMA DE EULER). *Se um grafo planar conexo tem  $v$  vértices,  $a$  arestas e  $f$  faces, então  $v - a + f = 2$ .*

Uma ideia da demonstração pode ser encontrada em [10].

**Observação 5.2.** *Se as arestas de um poliedro formam um grafo planar, então a quantidade de vértices, arestas e faces do poliedro coincide com a quantidade desses elementos em sua representação planar, veja um exemplo do cubo na Figura 54.*

**Exemplo 5.8.** O dodecaedro é um poliedro de 12 faces, 20 vértices e 30 arestas. Veja a Figura 57. Ao projetá-lo em plano, obtemos um mapa de 12 faces, sendo uma delas a face ilimitada. Note que o número de vértices e arestas também não se alteram.

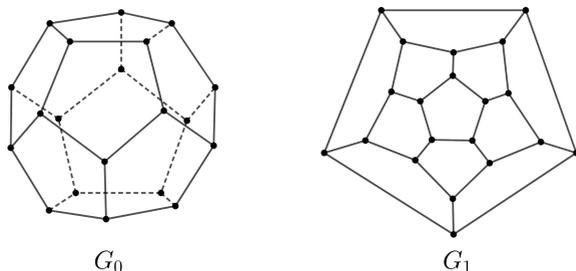


Figura 57 –  $G_0$  é um grafo planar formado pelas arestas de um dodecaedro, e o grafo  $G_1$  é sua representação gráfica no plano.

#### 5.4 TEOREMA DAS CINCO CORES

Como visto na Seção 5.4, em 1890, Percy John Heawood apresentou uma solução do problema de mapas envolvendo cinco cores. A seguir, apresentaremos uma demonstração (não a de Heawood) de que cinco cores são suficientes para colorir qualquer mapa no plano.

Para o desenvolvimento de tal demonstração será necessário utilizar três lemas que serão apresentados abaixo. O Lema 5.1, em termos de países, diz que todo mapa possui pelo menos um país com no máximo cinco vizinhos. O Lema 5.2, está associado a grafos completos de cinco vértices não serem planares. Já o Lema 5.3, diz que para cada cinco países de um mapa, pelo menos dois deles não se tocam.

**Lema 5.1.** *Todo mapa tem pelo menos uma face com no máximo 5 arestas, ou seja, um mapa não pode ter todas as faces com 6 ou mais arestas.*

*Demonstração.* Considere um mapa com  $v$  vértices,  $f$  faces e  $a$  arestas. Em um mapa, cada aresta é compartilhada por exatamente duas faces e, além disso, vamos considerar que todos os vértices possuam grau pelo menos 3. Considerando que cada aresta tem duas extremidades, mesmo se for um ciclo, temos que

$$3v \leq 2a. \quad (25)$$

Pelo Teorema 5.1 e por (25):

$$6 = 3v - 3a + 3f \leq 2a - 3a + 3f = 3f - a \Rightarrow 3f - a \geq 6 \quad (26)$$

Sejam as faces do mapa face 1, face 2, ..., face  $f$  tais que face 1 possui  $a_1$  arestas, face 2 possui  $a_2$  arestas, ..., face  $f$  possui  $a_f$  arestas, respectivamente.

Então temos que a média de arestas por face é dada por

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_f}{f}$$

Temos que na soma, cada aresta é contada duas vezes, logo  $a_1 + a_2 + \dots + a_f = 2a$ , então a média pode ser reescrita como

$$\frac{2a}{f}.$$

Por (26), temos que  $2a \leq 6f - 12$ , portanto

$$\frac{2a}{f} \leq 6 - \frac{12}{f} \Rightarrow \frac{2a}{f} < 6.$$

Como a média de arestas por face é estritamente menor que 6, podemos concluir que alguma face do mapa terá menos que 6 arestas.

□

A seguir, demonstraremos um lema que afirma serem não planares os grafos completos de cinco vértices, ou seja, é impossível desmontar e reconstruir um grafo com essas características em um plano de maneira que suas arestas não se intersectem. A representação de um grafo desse tipo pode ser vista na Figura 55. Esse lema irá auxiliar na demonstração do Lema 5.3.

**Lema 5.2.** *O grafo completo de 5 vértices  $K_5$  não é planar.*

*Demonstração.* Sejam  $f$  as faces,  $a$  arestas e  $v$  os vértices. Em um grafo completo com 5 vértices temos que  $a = 10$ . Suponha que  $K_5$  seja planar. Então a representação planar define um mapa em que podemos encontrar o número de faces pelo Teorema de Euler 5.1, ou seja,

$$\begin{aligned} v - a + f &= 2 \\ 5 - 10 + f &= 2 \\ f &= 7. \end{aligned}$$

Note que em um grafo  $K_5$ , toda aresta é parte de um caminho que possuem no mínimo 3 arestas, veja a Figura 55. Desse modo, cada país possui no mínimo 3 arestas em sua fronteira.

Agora, se considerarmos a média de arestas por face temos:

$$\frac{2a}{f} = \frac{20}{7} < 3.$$

Ou seja, alguma face tem menos que três arestas, o que é uma contradição. Portanto,  $K_5$  não é planar.  $\square$

No início dessa seção, falamos um pouco sobre a relação entre mapas e grafos. Agora já com bagagem a respeito da teoria, chamaremos essa relação de grafo dual de um mapa. Por exemplo, na Figura 48, chamaremos a representação da esquerda de grafo dual do mapa apresentado na direita.

**Lema 5.3.** *Tomando-se cinco países quaisquer em um mapa, ao menos dois deles não serão vizinhos.*

*Demonstração.* Considere 5 países quaisquer de um mapa e o grafo dual desse mapa. Cada um dos países corresponde a um vértice do grafo. A cada dois países vizinhos teremos uma aresta que os conecta.

Suponha que esses cinco países são todos vizinhos. Então os cinco vértices no grafo dual estarão, dois a dois, ligados por aresta em um plano. Logo esses cinco vértices e suas arestas formarão um grafo completo com 5 vértices. Mas, pelo Lema 5.2 um grafo  $K_5$  não é planar, portanto dentre esses cinco vértices há pelo menos dois que não estão conectados por uma aresta. Ou seja, dois dos cinco países não são vizinhos.  $\square$

**Teorema 5.2** (TEOREMA DAS CINCO CORES). *Todo mapa no plano pode ser colorido com cinco ou menos cores.*

*Demonstração.* Iremos mostrar a validade do resultado por indução sobre a quantidade de países, ou seja, as faces do mapa.

O caso em que  $n = 5$  é trivial, pois podemos colorir o mapa utilizando as 5 cores disponíveis. Suponha que todo mapa com  $n$  faces pode ser colorido com até 5 cores.

Agora, considere um mapa com  $n + 1$  países. Pelo Lema 5.1, esse mapa tem um país  $F$  com no máximo 5 arestas. Podemos aplicar a esse país um processo de encolhimento, ou seja, vamos olhar esse país como um vértice  $A$  de um grafo e seus vizinhos como suas arestas. Veja a Figura 58.

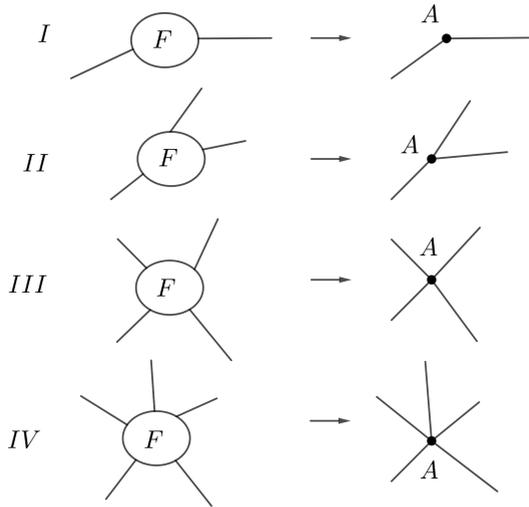


Figura 58 – Visão do mapa em torno do país  $F$  e encolhimento do país  $F$  ao vértice  $A$ .

Dessa forma, o país  $F$  de 2, 3, 4, ou 5 lados desaparece, dando origem a um mapa com  $n$  países. Agora temos  $n$  países, isto é, podemos colorir esse mapa reduzido utilizando no máximo 5 cores de acordo com a hipótese de indução.

Agora vamos resgatar o país  $F$  e atribuir a ele uma das cinco cores disponíveis sem que sua cor coincida com qualquer um de seus vizinhos.

Note que, em *I*, *II* e *III*, o vértice  $A$ , possui 2, 3 ou 4 países que o tem como vértice em suas fronteiras. Nesse caso, podemos utilizar no

máximo 4 cores distintas, para cada um dos países vizinhos, restando a quinta cor para colorir o país  $F$ .

No caso do mapa  $IV$ , temos 5 países que tem o vértice  $A$  em suas fronteiras. Caso um desses países está localizado internamente a outro país precisamos apenas de 4 cores para pintar os territórios que circundam o vértice  $A$ , restando a quinta cor para pintar  $F$ . Veja a Figura 59.

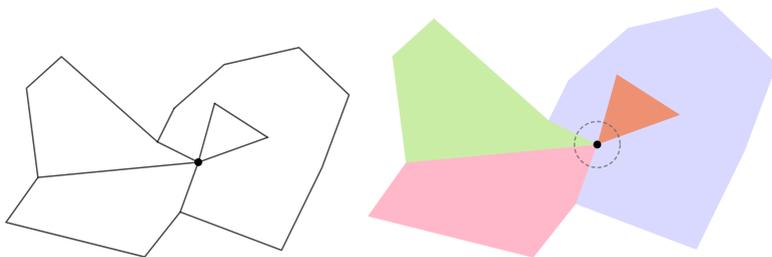


Figura 59 – Caso em que um país faz parte de outro.

No caso em que os países vizinhos que tem o vértice  $A$  em suas fronteiras são 5 países distintos, pelo Lema 5.3 temos que ao menos dois deles não serão vizinhos. Chamaremos esses países de  $G$  e  $H$  (lembre-se que dois países que fazem fronteira em apenas um ponto não são considerados vizinhos).

Podemos alterar o mapa como na Figura 60 realizando uma união desses dois países próximo ao vértice  $A$ . Agora o novo mapa possui  $n - 1$  países, utilizando a hipótese de indução ele pode ser colorido com no máximo 5 cores. O vértice  $A$  possui 5 países ao seu entorno, dois com a mesma cor, então 4 cores foram utilizadas e resta uma para o país  $F$ . Quando voltamos ao mapa original desfazemos a união de  $G$  e  $H$ , podemos colorir o país  $F$  com a cor restante.

Portanto, todo mapa com  $n + 1$  países pode ser colorido com no máximo 5 cores.  $\square$

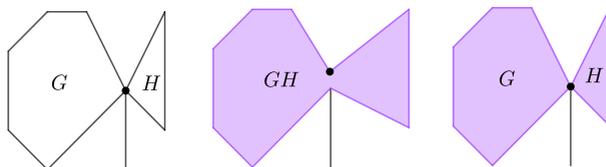


Figura 60 – Expansão do vértice  $A$ .

## 5.5 PROBLEMAS ENVOLVENDO GRAFOS E O TEOREMA DAS QUATRO CORES

Nessa seção, você encontrará duas aplicações, ou problemas, que envolvem o teorema das quatro cores apresentado na Seção 5.1. O primeiro trata-se de uma proposta de aula a ser trabalhada no ensino básico. Já o segundo problema, bastante conhecido, é o das pontes de Königsberg.

### 5.5.1 Explorando a interdisciplinariedade: Matemática e Química

Nessa seção, será apresentada uma proposta de aula. O intuito é que seja uma aula experimental, dinâmica e interdisciplinar. O problema apresentado a seguir envolve as disciplinas de Matemática e Química. A aula tem como objetivo introduzir o teorema das quatro cores com uma abordagem de resolução de problemas envolvendo conceitos estudados em Química. O ideal é que a aula seja elaborada pelos docentes responsáveis pelas disciplinas. Neste trabalho será apresentado o que diz respeito à parte Matemática.

Sugere-se que, em um primeiro momento, os estudantes sejam apresentados ao problema e instruídos a fazer anotações que posteriormente serão discutidas em grupos.

## 5.5.1.1 Apresentando o problema

Considere o grafo exibido na Figura 61, onde cada vértice representa um produto químico necessário em algum processo de produção. As arestas que os conectam representam os produtos que, se combinados, podem explodir. Qual o número mínimo de compartimentos necessários para guardar esses produtos em segurança?

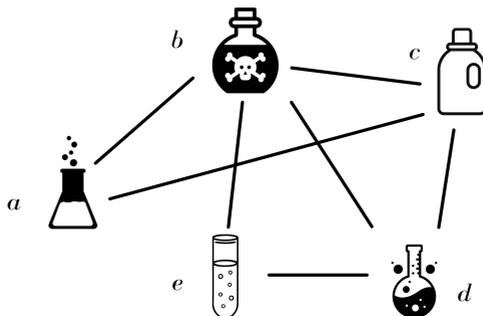


Figura 61 – Produtos químicos.

Espera-se que os estudantes consigam relacionar que os produtos que são ligados por uma aresta não podem ser guardados juntos. Por exemplo, o produto *a* não pode ser guardado com os produtos *b* e *c*, restando os produtos *d* e *e* para serem guardados com *a*, mas esses produtos não podem ser guardados juntos, então *a* só pode ser guardado com um dos dois, necessitando de um novo compartimento.

Algumas perguntas podem ser feitas durante a elaboração da atividade, por exemplo, existe algum produto que não pode ser guardado com nenhum outro? A ordem que eu guardo meus produtos influencia na quantidade mínima de compartimentos necessários? A quantidade de produtos altera essa quantidade mínima?

Ao final da atividade, mostra-se que a quantidade mínima de compartimentos representa a quantidade mínima de cores necessárias

para colorir um mapa. É interessante fazer uma discussão sobre as respostas, introduzindo o Teorema das 4 cores.

Uma forma de apresentar o Teorema é colorindo as regiões que a disposição dos produtos forma, lembrando de respeitar as combinações que podem gerar alguma explosão, veja a Figura 62.

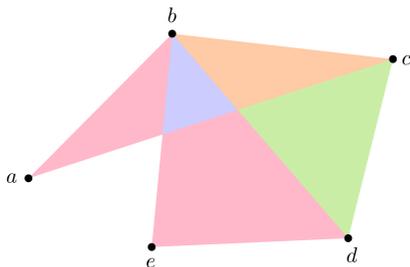


Figura 62 – Coloração das regiões dos produtos utilizados.

Caso a proposta seja aplicada ao ensino fundamental não há necessidade em falar de grafos, basta trabalhar com as cores respeitando a regra estabelecida. Caso seja trabalhada com o ensino médio, é interessante fazer um paralelo com a teoria.

### 5.5.2 Pontes de Königsberg

Resolvido por Leonhard Euler (1707-1789), o problema das 7 pontes de Königsberg fala que na cidade de Königsberg (atualmente é chamada de Kaliningrado), passa o rio Pregel que forma uma ilha e divide a cidade em quatro regiões. A ideia é passar por todas as sete pontes e voltar ao ponto de partida sem passar duas vezes por qualquer uma das pontes.

Euler provou que esse trajeto é impossível utilizando a ideia de grafos. Cada uma das regiões é considerada um vértice, e as pontes são as arestas que os conectam, veja a Figura 64.

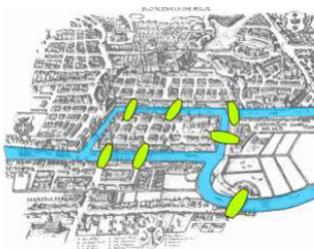


Figura 63 – Representação do problema das Pontes de Königsberg. Imagem retirada de [18].

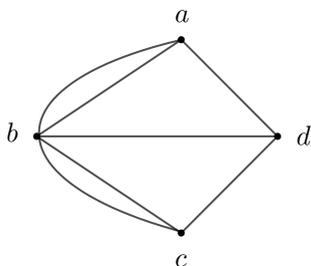


Figura 64 – Utilização de grafos no problema das Pontes de Königsberg.

Basicamente, Euler percebeu que ao atravessar cada vértice, são necessárias duas arestas, uma para chegar ao vértice e uma para sair dele. Desse modo, cada vértice deveria ter grau par, o que não ocorre nesse caso, pois há vértices que possuem o grau ímpar e, portanto, o problema não tem solução.



## 6 CONCLUSÃO

No desenvolvimento de todos os capítulos deste trabalho, dialogamos com três áreas da Matemática: história, conceitos e aplicações. A partir disso, dialogamos sobre a importância, a conexão e a beleza dessas três vertentes.

Por meio das pesquisas realizadas, fui construindo uma percepção de como a matemática vista na graduação pode se relacionar com o ensino básico, ampliando ainda mais minha formação como licencianda em matemática e agregando conhecimentos valiosos que me auxiliarão ao longo de minha trajetória profissional.

O objetivo inicial foi realizado e os quatro teoremas aqui estudados abrem interesse para estudos posteriores. Os resultados obtidos através da revisão bibliográfica ampliam os conceitos abordados por Maria Helena<sup>[19]</sup> e abrem caminhos para continuidade do projeto.



## REFERÊNCIAS

- [1] ANDRADE, Jackson Tavares de. *Trigonometria: Da teoria às aplicações*. N 2019. *Curso de Especialização em Matemática, Instituto Federal da Paraíba, Cajazeiras - Paraíba, 2019. Páginas 33 e 34. Disponível em: <https://repositorio.ifpb.edu.br/bitstream/177683/870/1/TCC.pdf>. Acesso em: 23 nov. 2020.*
- [2] BOGUSLAWSKI, Pawel. *The Königsberg bridge problem*. Disponível em: [https://www.researchgate.net/figure/The-Koenigsberg-bridge-problem-a-seven-bridges-of-Koenigsberg-b-graph-representation\\_fig3\\_265219734](https://www.researchgate.net/figure/The-Koenigsberg-bridge-problem-a-seven-bridges-of-Koenigsberg-b-graph-representation_fig3_265219734). Acesso em: 28 jul. 2021.
- [3] DE COMIT'E, Francesco. *Circle Packing Explorations*. Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille University of Sciences and Technology of Lille France. Disponível em: <https://hal.inria.fr/CRISTAL-MINT/hal-00861402v1>. Acesso em: 23 jun. 2021.
- [4] DOLCE, Osvaldo. POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana*. 9. ed. São Paulo: Atual Editora, 1995.
- [5] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas, São Paulo: Unicamp, 2004. Tradução de Hygino H. Domingues.

- [6] EUCLIDES. *Os elementos*. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.
- [7] FONTANA, Júlio. *Tales de Mileto e a medição da altura da pirâmide*. *Metatheoria: Revista de História e Filosofia da Ciência*, Buenos Aires, v. 2, n. 1, p. 23-36, jun. 2011. Disponível em: <https://www.metatheoria.com.ar/index.php/m/article/view/61>. Acesso em: 22 set. 2020.
- [8] GUINSBURG, J. ROMANO, Roberto. CUNHA, Newton. *Descartes: Obras escolhidas*. São Paulo: Perspectiva, 2010.
- [9] HENRIQUES, Mendo Castro. *A correspondência entre a princesa Isabel da Boêmia e René Descartes e a teoria das emoções*. *Rev. Pistis Prax., Teol. Pastor.* Curitiba, v. 13, ed. espec. p. 86-107, 2021. Disponível em: <http://doi.org/10.7213/2175-1838.13.espec.DS06>. Acesso em: 02 Out. 2021.
- [10] JUNIOR, Divalde Luiz Frois. ALMEIDA, Alexandre Celestino Leite. *O Teorema das Cinco Cores*. Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT Universidade Federal de São João del-Rei - Campus Alto Paraopeba - 2014. Disponível em: <https://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat/Divalde.pdf>. Acesso em: 12 Jul. 2021.
- [11] MASSAGO, Sadao. *Teorema fundamental da proporcionalidade*. 01 mai. 2010, fev. 2014. Notas de aula. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/profs/sadao/download/?file=student/triangulo-proporcionalidade.pdf>. Acesso em: 14 out. 2020.

- [12] OLIVEIRA, Juliana Rodrigues Silva. *Um Estudo Sobre Empacotamentos de Círculos*. Universidade Federal de São Paulo: 2018. Disponível em: <https://repositorio.unifesp.br/handle/11600/52562>. Acesso em: 23 jun. 2021.
- [13] OLIVEIRA, Thais de; Malaguitti, Pedro Luiz Aparecido. *As bissetrizes e o incentro*. São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, 2009. Disponível em: <https://http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=14366>. Acesso em: 13 out. 2020.
- [14] ROQUE, Tatiana. *História da matemática*. Editora Schwarcz - Companhia das Letras, 2012.
- [15] SAMPAIO, João Carlos V. *Quatro Cores e Matemática*. Roteiro de minicurso II Bienal da SBM, 2004. Disponível em: [https://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/Quatrocores\\_2aBienalsbmretocado.pdf](https://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/Quatrocores_2aBienalsbmretocado.pdf). Acesso em: 12 Jul. 2021.
- [16] SANTOS, Sandra Augusta; TREVISAN, André Luis. *O problema de Apolônio: aspectos históricos e computacionais*. IMECC- Unicamp: 2004. Disponível em: [https://www2.ime.unicamp.br/sites/default/files/rel\\_pesq/rp32-04.pdf](https://www2.ime.unicamp.br/sites/default/files/rel_pesq/rp32-04.pdf). Acesso em: 19 fev. 2021.
- [17] SILVA, Jacilene Adailma de Lima. *Teorema das cinco cores: uma aplicação da teoria dos grafos*. Trabalho de Conclusão de Curso - Monografia, Curso de Licenciatura em Matemática, Centro de Educação e Saúde, Universidade Federal de Campina Grande, Cuité - Paraíba - 2018. Disponível em: <http://dspace.sti>.

- ufcg.edu.br:8080/jspui/handle/riufcg/6538. Acesso em: 12 Jul. 2021.
- [18] SILVA, Lenilson dos Reis. *Grafos, coloração, polinômios cromáticos e jogos no processo de ensino aprendizagem da enumeração e da contagem*. Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Universidade de São Paulo - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação. 2018. Disponível em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-24102018-152915/pt-br.php>. Acesso em: 07 Set. 2021.
- [19] SOUZA, Maria Helena. *21 Teoremas Matemáticos que Revolucionaram o Mundo*. São Paulo: Planeta do Brasil, 2018.
- [20] SCHULZ, Vinicius. *O que é o formato 18:9 e qual a sua diferença para 16:9*. Disponível em: <https://www.oficinadanet.com.br/tecnologia/19736-o-que-e-o-formato-189-e-qual-a-sua-diferenca-para-169>. Acesso em: 18 nov. 2020.
- [21] SHAPIRO, Lisa. *The correspondence between princess Elisabeth of Bohemia and René Descartes 1596 - 1650*. The University of Chicago Press, 2007.
- [22] SODDY, Frederick. *The Kiss Precise*. Nature 137, 1021 (1936). Disponível em: <https://doi.org/10.1038/1371021a0>. Acesso em: 23 nov. 2020.
- [23] VENCESLAU, Marilis Bahr Karam. *O Problema de recobrimento mínimo de um corpo em três dimensões por esferas de*

- diferentes raios*. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas de Computação). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015. Disponível em: <https://www.pesc.coppe.ufrj.br/index.php/en/publicacoes-pesquisa/details/20/2544>. Acesso em: 23 ago. 2021.
- [24] WEISSTEIN, ERIC W. *Circle Packing*. MathWorld. Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/CirclePacking.html>. Acesso em: 07 set. 2021.
- [25] WILSON, Robin. *Collors Suffice: How the map problem was solved*. Princeton University Press. 2002.



## APÊNDICE A – TRADUÇÃO DO POEMA *KISSING CIRCLE THEOREM*

O Beijo Preciso, de Frederick Soddy

Para que pares de lábios se beijem, talvez,  
não seja necessário trigonometria.  
Isso não acontece quando quatro círculos se beijam  
Cada um, os outros três.  
Para que isso aconteça, o quarto deve ser  
Como três em um ou um em três.  
Se for um em três, sem dúvida,  
Cada um recebe três beijos de fora.  
Se for três em um, então é esse um  
beijado três vezes por dentro.

Quatro círculos para que o beijo aconteça.  
O menor é o mais curvado.  
A curvatura é o inverso  
Da distância do centro.  
Embora essa trama tenha deixado Euclides sem voz  
Não é necessária uma regra de ouro.  
Como a curvatura tem a linha reta  
E a curvatura de uma côncava tem sinal negativo,  
A soma dos quadrados das quatro curvaturas  
É a metade do quadrado de sua soma.

Para espiar casos esféricos  
Um supervisor oscular  
Pode achar a tarefa difícil  
A esfera é muito mais divertida,

E agora, além do par de pares  
Uma quinta esfera compartilha o beijo.  
Ainda, sinais e zero como antes,  
Para cada uma beijar as outras quatro  
O quadrado da soma das cinco curvaturas  
É três vezes a soma de seus quadrados.