UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT

Giliar Ferreira Pacheco

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: HISTÓRIA, PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Florianópolis

2021

Giliar Ferreira Pacheco

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: HISTÓRIA, PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Dissertação submetido ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.
Orientadora: Profª. Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves

Florianópolis

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pacheco, Giliar Ferreira
Sequência de Fibonacci: história, propriedades e aplicações / Giliar Ferreira Pacheco ; orientadora, Maria Inez Cardoso Gonçalves, 2021.
90 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Sequência de Fibonacci. 3. Leonardo de Pisa. I. Gonçalves, Maria Inez Cardoso. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Giliar Ferreira Pacheco

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: HISTÓRIA, PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria
PROFMAT-UFSC

Prof. Dr. Vinícius Viana Luiz Albani
PROFMAT-UFSC

Profª. Drª. Luciane Ines Assman Schuh
UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Maria Inez Cardoso Goncalves
Data: 23/09/2021 20:14:56-0300
CPF: 908.897.119-68
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Profª. Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Coordenadora do Programa

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Maria Inez Cardoso Goncalves
Data: 23/09/2021 20:15:24-0300
CPF: 908.897.119-68
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Profª. Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Orientadora

Florianópolis, 22 de julho 2021.

Este trabalho é dedicado à minha mãe, minha esposa e minha filha.

AGRADECIMENTOS

Minha gratidão à Deus pelo dom da minha vida e pela vida dos que eu encontrei durante esse curso.

Agradeço à minha mãe Gerci Ferreira Pacheco por insistir para que eu estudasse na juventude, mesmo sem ela ter tido essa oportunidade! Agradeço ao meu pai Maurílio Fernandes Pacheco (*in memoriam*), pela vida que viveu ao nosso lado.

Agradeço a minha amada esposa Carine da Silveira Pacheco pela cumplicidade, compreensão, presença, por acreditar, torcer, vibrar com cada conquista e ainda, nesse período, dar a luz à nossa amada filha Beatriz da Silveira Pacheco. Você me faz melhor!

Agradeço à minha orientadora, pelo incentivo, dedicação, paciência e cuidado. Certamente você iluminou o meu trabalho e me permitiu chegar até aqui!

Agradeço ao meu sogro Licínio da Silveira e minha sogra Maria Madalena de Souza por acreditar que era possível e por cuidar tantos dias da minha preciosa filha para que eu pudesse escrever esse trabalho.

Agradeço aos professores que tive durante esse curso, pelos ensinamentos e pelos exemplos.

Agradeço à Capes pelo apoio financeiro concedido na forma de bolsa de estudos.

Se, por acaso, algo menos ou mais adequado ou necessário eu omitir, sua indulgência para mim é implorada, pois não há ninguém que seja isento de falhas, e em todas as coisas completamento circunspecto.

(Leonardo de Pisa, 1202)

RESUMO

Nesta dissertação será abordada a sequência de Fibonacci, a qual surgiu através da solução de um problema proposto pelo matemático Leonardo de Pisa. O interesse na sequência de Fibonacci deve-se ao fato de possuir aplicações em diversas áreas da matemática, bem como em áreas inusitadas como arte, arquitetura e também por estar presente em vários padrões na natureza. Inicialmente é feito um resumo da história de Leonardo de Pisa, destacando a sua importância para o desenvolvimento da matemática ocidental na idade média. A seguir, é discutido o surgimento da sequência, sua definição, e uma série de propriedades e relações existentes entre os números da sequência, os chamados números de Fibonacci. Ainda, são apresentadas algumas relações da sequência com outros campos da matemática, a curiosa observação da presença de seus números em padrões observados na natureza, e sua aplicação na codificação de dados. Ao final é deixada uma sugestão de atividades que envolvem a sequência de Fibonacci, as quais podem ser trabalhadas no Ensino Fundamental – Anos Finais para desenvolver algumas das habilidades presentes na Base Nacional Comum Curricular.

Palavras-chave: Sequência. Leonardo de Pisa. Números de Fibonacci.

ABSTRACT

This dissertation will address the Fibonacci sequence, which emerged through the solution of a problem proposed by the mathematician Leonardo de Pisa. The interest in the Fibonacci sequence is due to the fact that it has applications in several areas of mathematics, as well as in unusual areas such as art, architecture, and also because it is present in various patterns in nature. Initially, a summary of the history of Leonardo de Pisa is made, highlighting its importance for the development of Western mathematics in the Middle Ages. Next, the emergence of the sequence, its definition, and a series of properties and relationships between the numbers in the sequence, the so-called Fibonacci numbers, are discussed. Also, some relationships between the sequence and other fields of mathematics, the curious observation of the presence of its numbers in patterns observed in nature, and its application in data encoding are presented. In the end, a suggestion of activities involving the Fibonacci sequence is left, which can be worked on in Elementary School – Final Years to develop some of the skills present in the Common National Curriculum Base.
Keywords: Sequence. Leonardo of Pisa. Fibonacci numbers.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática desenvolvida ao longo dos anos apresenta importantes contribuições para a formação dos cidadãos. Entre elas, o aperfeiçoamento de habilidades como raciocinar, comunicar, representar e argumentar matematicamente. Conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), fundamentamos essas habilidades ao compreender ideias e objetos presentes em sistemas abstratos criados pela matemática que servem para organizar e inter-relacionar "fenômenos do espaço, do movimento, das formas, e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico"(BRASIL, 2018)(p.265). Entre os objetos de conhecimento, encontrados nos sistemas matemáticos, presentes na BNCC ao longo do ensino fundamental, temos as sequências recursivas.

A maneira de definir uma sequência numérica é dita recursiva quando a definição dos seus termos é dada por uma fórmula de recorrência, ou seja, quando seus termos podem ser obtidos por cálculo(s) que envolve(m) seu(s) antecessor(es) imediato(s). Para ficar perfeitamente determinada seus termos iniciais devem ser informados(MORGADO; CARVALHO, 2015).

Uma das sequências mais antigas, e também uma das mais conhecidas, é a *Sequência de Fibonacci*, a qual é o foco deste trabalho. A definição recursiva dessa sequência é muito conhecida. Ela pode ser encontrada em (ZAHN, 2011)(p.7), (MORGADO; CARVALHO, 2015)(p.68) ou (VOROBIEV, 2002)(p.3), por exemplo.

A sequência de Fibonacci foi introduzida na matemática ocidental pelo matemático italiano Leonardo de Pisa, também conhecido por Leonardo Fibonacci, como um dos problemas propostos no seu livro "Liber Abaci", publicado em 1202, (DEVLIN, 2011). O problema proposto por Leonardo foi o seguinte, (ZAHN, 2011)(p.5):

"Em um cercado fechado um homem coloca um par de filhotes de coelhos. Em um ano quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par se, considerarmos que, todo mês um par gera um novo par que é fértil a partir do segundo mês de seu nascimento."

Iniciaremos o trabalho apresentando um pouco da história de Leonardo Fibonacci e discutindo em detalhes como a solução do problema acima leva ao surgimento da sequência de Fibonacci dada por:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144....$$

Ainda no Capítulo 2, apresentamos além da definição recursiva da sequência, uma fórmula a qual possibilita a obtenção direta de qualquer termo da sequência, sem a necessidade do conhecimento prévio dos termos anteriores, a saber a Fórmula de Binet. Ainda nesse capítulo relacionamos algumas propriedades dos números que formam essa sequência, conhecidos como *números de Fibonacci*.

No Capítulo 3, mostramos a relação entre os números de Fibonacci e a razão áurea. Registramos também como obter as potências de expoente natural do número de ouro a partir dos números de Fibonacci.O número de ouro é representado pela letra grega ϕ. Destacamos a presença dos números Fibonacci no famoso triângulo de Pascal. Ainda nesse capítulo, está a curiosa forma de obtermos triplas Pitagóricas de números inteiros. Ao utilizarmos dois números consecutivos de Fibonacci para obtermos uma tripla Pitagórica, um dos lados desse triângulo será um número de Fibonacci.

No capítulo 4, apresentamos situações onde os números de Fibonacci curiosamente surgem na natureza, como no números de pétalas de algumas flores, o números de espirais que aparecem no girassol e também em uma pinha. Ainda, a forma da concha do Nautilus, o qual se aproxima com a espiral que podemos obter a partir de retângulos formados pela composição de quadrados cujas medidas dos lados são números de Fibonacci.

Para ilustrar a utilização dos números de Fibonacci com outras áreas trazemos no Capítulo 5 a aplicação dos números de Fibonacci na codificação de dados. No método apresentado, os números de Fibonacci são utilizados para criar uma texto cifrado. A combinação do uso desses números com o estabelecimento de uma chave secreta torna muito difícil para alguém não autorizado decodificar uma mensagem e assim ter acesso ao conteúdo do mesma.

Depois de apresentados diversos aspectos dos números da sequência de Fibonacci, o Capítulo 6 propõe uma apostila com 8 atividades para auxiliar os professores de Matemática do Ensino Fundamental - Anos Finais a utilizar essa sequência para desenvolver algumas das habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para essa etapa da Educação Básica.

2 FIBONACCI, UMA SEQUÊNCIA E MUITAS RELAÇÕES ENTRE SEUS NÚMEROS.

Neste capítulo será apresentado de maneira sucinta a história do matemático Leonardo de Pisa e da famosa sequência numérica que recebe seu nome. Seu trabalho colaborou para a difusão do sistema de numeração Indu-Arábico pela Europa Ocidental, além de reunir muito do conhecimento matemático produzido até aquele momento. Segundo Donald E. Knuth, (KNUTH, 1997) e Parmanand Singh, (SINGH, 1985), antes de Leonardo escrever seu trabalho e utilizar a sequência de números de Fibonacci, ela já havia sido discutida por estudiosos indianos, como Gopala (antes de 1135) e Hemachandra (1135), os quais se interessavam por padrões rítmicos formados por notas ou sílabas.

A sequência de Fibonacci aqui será resgatada a partir do problema sobre os coelhos. Ao apresentar a solução do problema apresentaremos uma definição recursiva para a sequência. Trazemos também a fórmula de Binet, a qual permite encontrarmos os termos da sequência a partir da posição ocupada pelo mesmo. Depois, alguns resultados decorrentes de relações entre os seus termos serão apresentados.

2.1 LEONARDO FIBONACCI

Leonardo Fibonacci, também conhecido por Leonardo Pisano, nasceu por volta do ano 1170 provavelmente na cidade de Pisa, na Itália (DEVLIN, 2011). Fibonacci[1], como normalmente é conhecido, era filho de Guilielmo Bonacci, um próspero mercador que trabalhava em Pisa.

Quando Leonardo era adolescente, Guilielmo assumiu o cargo de diretor da alfândega em Bugia, uma colônia comercial de Pisa localizada na costa norte da África, (BRADLEY, 2006; DEVLIN, 2011). Alguns anos depois, Fibonacci juntou-se ao pai na Bugia, onde estudou para tornar-se um mercador, sendo educado tanto por instrutores muçulmanos na Bugia, como por professores nas cidades mediterrâneas, para as quais ele viajou com o pai. Segundo (BRADLEY, 2006), durante o período que Leonardo permaneceu com seu pai na África, eles viajaram por cidades comerciais na Grécia, Turquia, Síria, Egito, França e Sicília, com o objetivo de treinar Leonardo para tornar-se um mercador, aprendendo a negociar contratos, precificar mercadorias, realizar conversões de uma moeda para a outra. Com isso, Fibonacci acabou por se familiarizar com o sistema de numeração usado pelos mercadores árabes, o sistema numérico indu-arábico, e percebeu

[1] Acreditasse que o sobrenome Fibonacci seja uma abreviação de “Filius Bonacci” (filho de Bonacci) (referência Boyer)

as suas vantagens em relação ao sistema romano, que ainda era muito usado na Europa. Os cálculos com o sistema romano eram muito demorados, pois eram feitos em um ábaco e depois registrados em algarismos romanos (BRADLEY, 2006; DEVLIN, 2011; EVES, 2011).

Ao retornar de suas viagens ele escreveu *Liber Abbaci*(1202), *Practica Geometriae* (1220), *Liber Quadratorum* (1225) e *Flos* (1225). Entre suas obras destaca-se *Liber Abbaci*. Na tradução da obra para o Inglês, (SIGLER, 2003)(p.5) diz que Liber abacci "é um impressionante trabalho sobre aritmética, álgebra e aplicações matemáticas"(Tradução do autor). Em seu livro, The Birdh Of Mathematics, Michael J. Bradley diz que "*Liber Abbaci* foi uma das obras matemáticas mais influentes escrita durante a idade média"(BRADLEY, 2006) (p. 121) (Tradução do autor).

Durante aproximadamente três séculos o conteúdo do livro *Liber Abbaci* foi base para o currículo de escolas da Toscana (SIGLER, 2003)(p.5). Ao descrever a obra (BRADLEY, 2006) nos diz que ele mostra como realizar cálculos com sistema de numeração hindu-arábico, ensina a resolver problemas associados a transações comerciais e ainda técnicas de aritmética, álgebra, geometria e teoria de números. Diante da contribuição dos autores consultados é possível conjecturar que Liber Abacci contribuiu significativamente para a adoção pelo ocidente do sistema de numeração hindu-arábico. No capítulo 12 de *Liber Abacci*, segundo (ZAHN, 2011), está o problema sobre os coelhos. Este problema será nosso ponto de partida para chegarmos a sequência de números que leva o seu nome, a *sequência de Fibonacci*.

2.2 ORIGEM DA SEQUÊNCIA

As importantes contribuições eternizadas em seus livros ajudaram Leonardo Fibonacci a registrar seu nome na memória daqueles que, depois dele, se dedicaram a ciência. Entretanto, não podemos negar que o problema dos coelhos, apresentado no livro *Liber Abbaci*, definitivamente divulgou seu nome. Ainda, o conectou à muitos estudos que envolvem à sequência de números que ficou conhecida por Sequência de Fibonacci, na qual seus elementos são chamados números de Fibonacci. Segundo (DEVLIN, 2011) (p.110), o matemático Francês Edouard Lucas, em 1870, nomeou de **números de Fibonacci** aos números que formam a importante sequência obtida do padrão observado na solução do famoso problema dos coelhos.

A versão do problema dos coelhos publicado em Liber Abacci difere um pouco da versão apresentada a seguir nesse estudo. Porém o padrão obtido na solução dada por Leonardo para a sua versão do problema é o mesmo. Em seu livro, Michael L. Bradley (BRADLEY, 2006)(p.123) fala da inclusão de um novo elemento 1 (um) no começo da sequência, apresentada por Leonardo, por matemáticos que estudaram-na nos séculos posteriores a ele. A justificativa para tal inclusão é a possibilidade de poder utilizar uma fórmula que permite determinar diretamente o elemento da n-ésima posição da sequência.

Uma versão atual do problema dos coelhos, segundo(ZAHN, 2011)(p.5), propõe a seguinte situação: "Em um cercado fechado um homem coloca um par de filhotes de coelhos. Em um ano quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par se, considerarmos que, todo mês um par gera um novo par que é fértil a partir do segundo mês de seu nascimento?"Veja abaixo uma forma de organizar a solução do problema:

- No primeiro mês temos um par de coelhos que é filhote e por isso não é fértil ainda, logo temos um par de coelhos;
- No segundo mês o par de coelhos inicial é adulto, portanto é fértil, continuamos com o mesmo par;
- No terceiro mês o par de coelhos adulto gera um novo par, logo temos 2 pares;
- No quarto mês o casal inicial gera um novo par de coelhos e o casal nascido no mês anterior fica adulto esse mês, portanto fértil. Assim temos o casal inicial, o casal nascido no mês anterior e o casal nascido nesse mês. Logo temos três pares;
- No quinto mês o casal inicial gera um novo par e o casal nascido no terceiro mês também gera um novo par. Portanto temos os dois casais que geraram dois novos pares e o casal nascido no mês anterior que também fica adulto. Logo, temos 5 casais;
- No sexto mês o casal inicial gera um novo par, o casal gerado no terceiro mês gera um novo par, o casal gerado no quarto mês, agora adulto, também gera um novo casal, e os dois casais nascidos no mês anterior ficam férteis. Portanto temos 8 casais;
- No sétimo mês o primeiro casal gera um novo casal, o casal nascido no terceiro mês gera outro casal, o casal nascido no quarto mês gera outro, os dois casais nascidos no quinto mês geram um par cada e temos ainda os três casais nascidos no mês anterior que ficam adultos.

Ao continuarmos esta análise até o décimo segundo mês o número de pares de coelhos é ordenadamente como segue abaixo:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.$$

No décimo segundo mês o número de pares de coelhos seria 144. Perceba que depois do segundo termo dessa sequência qualquer dos números pode ser obtido pela soma dos dois anteriores,

$$\begin{aligned}
1 & \\
1 & \\
2 &= 1+1 \\
3 &= 1+2 \\
5 &= 3+2 \\
8 &= 5+3 \\
13 &= 8+5 \\
21 &= 13+8 \\
34 &= 21+13 \\
55 &= 34+21 \\
89 &= 55+34 \\
144 &= 89+55.
\end{aligned}$$

Imagine que nenhum dos coelhos morra e que o espaço cercado fosse suficiente, ao seguirmos com esse raciocínio podemos aumentar esta lista infinitamente. Assim teríamos a seguinte sequência:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ ....$$

Essa é a sequência inspirada no padrão observado nos números encontrados na solução do problema dos coelhos contido no Liber Abacci de Leonardo e que posteriormente ficou conhecida como *Sequência de Fibonacci*. Chamaremos de números de Fibonacci, os números que aparecem nessa sequência.

A sequência de Fibonacci também pode ser definida da seguinte forma:

Definição 1. Seja f_n o n-ésimo termo da *Sequência de Fibonacci*. Então f_n satisfaz:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ \forall\ n \geq 3,\ \ n\ \in\ \mathbb{N},$$

onde $f_1 = 1,\ f_2 = 1.$

A definição acima é clara ao indicar uma forma para obter os números dessa sequência. Entretanto, para saber o número que ocupa uma determinada posição da mesma é necessário saber os números das duas posições imediatamente anteriores. Essa maneira de definir um padrão é chamada de **recorrência**. As sequências definidas por recorrência são chamadas de **sequências recursivas**. Assim para saber o número que ocupa a décima terceira posição, precisamos conhecer os números contidos na décima primeira, e na décima segunda, posição, isto é, $f_{13} = f_{12} + f_{11}$. Para compreender melhor o que é uma definição por recorrência e o que é uma sequência definida recursivamente, o leitor pode consultar (MORGADO; CARVALHO, 2015) (p.68), bem como, a dissertação Mrás(Dissertação PROFMAT)(2016, p.17).

No início desta seção, ao mencionar a inclusão de um novo elemento 1 (um) no início da sequência, falamos da fórmula para determinar um número de Fibonacci f_n qualquer. Tal fórmula é conhecida como **fórmula de Binet**. Ela foi publicada em 1843 pelo matemático francês Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856). No entanto, segundo (POSAMENTIER; LEHMANN, 2007), ao longo dos anos foi descoberto que outros matemáticos já conheciam a fórmula de Binet, como: Abraham de Moivre (1667-1754), Nicoulaus Bernoulli I (1687-1759), Daniel Bernoulli (1700-1782) e Leonard Euler (1707-1783). A vantagem da fórmula de Binet está no fato de permitir que cada um dos termos da sequência seja obtido diretamente, sem o conhecimento prévio dos dois termos anteriores.

Teorema 2.2.1. (Fórmula de Binet) O n-ésimo termo da sequência de Fibonacci, f_n, é dado por:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n, n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

É possível encontrar na literatura diferentes demonstrações para a fórmula (2.1). Por exemplo na dissertação de (MRáS, 2016) são apresentadas duas demonstrações: a primeira usando a teoria de sequências definidas recursivamente e a segunda usando teoria de matrizes.

A seguir, baseado em (HONSBERGER, 1985, p. 108), apresentaremos uma demonstração simples para a Fórmula de Binet. Para tanto, iniciaremos estabelecendo o seguinte lema, o qual é fundamental para a demonstração da fórmula. No que segue, f_n e f_{n-1} são termos da sequência de Fibonacci.

Lema 2.2.2. *Se $x^2 - x - 1 = 0$, então*

$$x^n = xf_n + f_{n-1},\ n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Vamos usar indução sobre n. Seja x, tal que $x^2 - x - 1 = 0$. Então

$$xf_2 + f_1 = x \cdot 1 + 1 = x + 1 = x^2.$$

Ou seja, a afirmação é satisfeita para $n = 2$.

Suponha que para algum $n \geq 2$,

$$x^n = xf_n + f_{n-1}. \tag{2.2}$$

Multiplicando a equação (2.2) por x, vamos obter

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x^2 f_n + x f_{n-1} \\ &= (x+1) f_n + x f_{n-1} \\ &= x f_n + f_n + x f_{n-1} \\ &= x(f_n + f_{n-1}) + f_n \\ &= x f_{n+1} + f_n. \end{aligned}$$

Logo a proposição vale para $n+1$ e, portanto, via indução, vale para todo todo $n \geq 2$. $\square$

A seguir, usaremos o Lema 2.2.2, para demonstrar a Fórmula de Binet.

Demonstração. (**Teorema 2.2.1**)

(i) Para $n = 1$ temos que

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 = f_1.$$

(ii) Suponha agora que $n \geq 2$ e observe que os números $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\tau = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ são raízes da equação do segundo grau $x^2 - x - 1 = 0$. Logo, pelo Lema 2.2.2 ϕ e τ satisfazem

$$\phi^n = \phi f_n + f_{n-1} \quad \text{e} \quad \tau^n = \tau f_n + f_{n-1}.$$

Assim,

$$\phi^n - \tau^n = \phi f_n - \tau f_n,$$

ou seja,

$$f_n = \frac{\phi^n - \tau^n}{\phi - \tau}.$$

Como, $\phi - \tau = \sqrt{5}$, temos então que

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, n \geq 2.$$

De (i) e (ii) segue a Fórmula de Binet,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, n \geq 1.$$

$\square$

Segundo a fórmula de Binet, o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci, f_n é dado por:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Observação 1. *O número* $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *é chamado de* ***razão Áurea*** *ou* ***número de ouro*** *e será tratado com mais detalhes no Capítulo 3.*

Um olhar cuidadoso e atento para os elementos dessa sequência pode permitir descobrir muitas propriedades matemáticas entre eles. Na próxima seção apresentamos algumas dessas propriedades, bem como as suas respectivas demonstrações. Além das propriedades obtidas entre os números da sequência, seus números também se relacionam com outros resultados matemáticos. Para exemplificar listaremos alguns destes resultados no Capítulo 3, e para os quais indicaremos referências para o leitor obter as devidas demonstrações.

2.3 PROPRIEDADES DOS NÚMEROS DE FIBONACCI

As propriedades dos *números de Fibonacci* apresentadas abaixo serão organizadas em proposições que estão demonstradas. Essas proposições são decorrentes da Definição 1.

A primeira propriedade que veremos nos garante que a soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci é o termo que se encontra na posição $n+2$ subtraído de 1.

Proposição 2.3.1. Seja f_n um número da *sequência de Fibonacci*, então, para todo $n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1.$$

Demonstração. Veja que a afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois:

$$f_1 = 1 = f_{1+2} - 1 = f_3 - 1 = 2 - 1.$$

Vamos supor que a afirmação seja verdadeira para um determinado n, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1.$$

Agora, note que, para $n+1$ temos:

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n + f_{n+1} = f_{n+2} - 1 + f_{n+1} = f_{n+3} - 1.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i = f_{n+1+2} - 1.$$

O que prova, usando indução, a proposição. □

Na próxima propriedade percebemos um padrão na soma dos n primeiros termos de ordem ímpar da sequência de Fibonacci. Ela é igual ao termo da posição $2n$.

Proposição 2.3.2. Seja f_n um número da *sequência de Fibonacci*, então, para todo $n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n}.$$

Demonstração. Veja que a afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois temos:

$$1 = f_1 = f_{2-1} = f_{2\cdot 1-1} = f_{2\cdot 1} = f_2.$$

Vamos supor que a afirmação seja verdadeira para um determinado n, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}.$$

Agora, note que, para $n+1$ temos:

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_{2i-1} = f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} + f_{2n+1} = f_{2n} + f_{2n+1} = f_{2n+2}.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_{2i-1} = f_{2(n+1)}.$$

Logo, por indução matemática, a proposição é verdadeira. □

A proposição anterior gera a expectativa no leitor sobre a soma dos n primeiros termos de ordem par da sequência de Fibonacci. Pois bem, nesse caso o resultado é uma unidade menor do que o termo da posição $2n+1$.

Proposição 2.3.3. Seja f_n um número da *sequência de Fibonacci*, então, para todo $n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1.$$

Demonstração. Veja que a afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois temos:

$$1 = f_2 = f_{2\cdot 1} = f_{2\cdot 1+1} - 1 = f_3 - 1 = 2 - 1.$$

Vamos supor que a afirmação seja verdadeira para um n determinado, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1.$$

Agora, note que, para $n + 1$ temos:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} f_{2i} &= f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2n} + f_{2(n+1)} = f_{2n+1} - 1 + f_{2n+2} = f_{2n+3} - 1\\ &= f_{2(n+1)+1} - 1.\end{aligned}$$

Assim, por indução matemática provamos a proposição. □

Os dois últimos resultados levam o leitor atento a perceber o seguinte: Ao Somarmos o valor da soma dos n primeiros termos pares com o valor da soma dos n primeiros termos ímpares encontramos o número da posição $2n + 2$ subtraído de 1. Veja:

$$f_{2n} + f_{2n+1} - 1 = f_{2n+2} - 1.$$

Vamos olhar agora para a soma dos quadrados dos n primeiros termos dessa sequência. Essa soma é igual ao produto do termo da posição n pelo seu sucesso na sequência, por exemplo:

$$\sum_{i=1}^{7} f_i^2 = f_7 \cdot f_8 = 13 \cdot 21 = 273.$$

Proposição 2.3.4. Seja f_n um número da *sequência de Fibonacci*, então, para todo $n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}.$$

Demonstração. Veja que a afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois temos:

$$1 = 1^2 = f_1^2 = f_1 \cdot f_{1+1} = f_1 \cdot f_2 = 1 \cdot 1.$$

Vamos supor que a afirmação seja verdadeira para um n determinado, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \cdots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}.$$

Agora, note que, para $n+1$ temos:

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \cdots + f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_n \cdot f_{n+1} + f_{n+1}^2$$
$$= f_{n+1} \cdot (f_n + f_{n+1}) = f_{n+1} \cdot f_{n+2},$$

portanto a proposição é verdadeira para $n+1$, e assim, por indução, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}, \ \forall \ n \geq 1.$$

□

A próxima proposição traz a relação entre termos de diferentes posições na sequência de Fibonacci. Ela nos mostra que o termo da posição $m+n$ pode ser obtido por meio da soma do produto do antecessor do termo de posição m pelo termo de posição n e o produto do termo de posição m pelo sucessor do termo de posição n. Para m devemos ter um número maior do que 1 e para n um número maior ou igual a 1.

Proposição 2.3.5. Seja f_n um número da *sequência de Fibonacci*, então, para todo $n \geq 1$, para todo $m > 1$, com $n, \ m \ \in \mathbb{N}$ temos

$$f_{m+n} = f_{m-1} f_n + f_m f_{n+1}.$$

Demonstração. Vamos provar essa propriedade por indução em m. Veja que dado $n = n_0 \ \in$ N a afirmação é verdadeira para $m = 2$, pois temos:

$$f_{2+n} = f_{n+2} = f_n + f_{n+1} = 1 \cdot f_n + 1 \cdot f_{n+1} = f_1 f_n + f_2 f_{n+1}.$$

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para todo k tal que $2 \leq \ k \leq m$, ou seja:

$$f_{m+n} = f_{m-1} f_n + f_m f_{n+1}.$$

Agora, note que, pela definição da sequência de Fibonacci, para $m+1$ temos:

$$f_{m+1+n} = f_{(m+n)+1} = f_{(m+n)-1} + f_{m+n} = f_{m-1+n} + f_{m+n}.$$

Pela hipótese de indução temos que:

$$\begin{aligned} f_{m+1+n} &= f_{m-2} f_n + f_{m-1} f_{n+1} + f_{m-1} f_n + f_m f_{n+1} \\ &= (f_{m-2} + f_{m-1}) f_n + (f_{m-1} + f_m) f_{n+1} \\ &= f_m f_n + f_{m+1} f_{n+1}. \end{aligned}$$

Logo, por indução matemática em m, a proposição é verdadeira. □

A análise das proposições anteriores pode suscitar a seguinte dúvida: poderemos encontrar um padrão ao somarmos todos os n primeiros termos cuja posição na sequência de Fibonacci seja um número que deixa resto 2 na divisão por 4? A resposta para esse questionamento é sim, e o padrão obtido será igual ao quadrado do termo que está na posição representada pelo dobro do número de termos dessa soma. A proposição abaixo traduz essa situação.

Proposição 2.3.6. Seja f_n um número da *sequência de Fibonacci*, então, para todo $n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{4i-2} = f_{2n}^2.$$

Demonstração. Veja que a afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois temos:

$$f_{4\cdot 1-2} = f_2 = 1 = 1^2 = f_2^2 = f_{2\cdot 1}^2.$$

Vamos supor que a afirmação seja verdadeira para um n determinado, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{4i-2} = f_2 + f_6 + f_{10} + \cdots + f_{4n-2} = f_{2n}^2.$$

Agora, note que, para $n+1$ temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} f_{4i-2} &= f_2 + f_6 + f_{10} + \cdots + f_{4n-2} + f_{4n+2} \\
&= f_{2n}^2 + f_{4n+2} = f_{2n}^2 + f_{2n+1+2n+1} \\
&= f_{2n}^2 + f_{2n} \cdot f_{2n+1} + f_{2n+1} \cdot f_{2n+2} \\
&= f_{2n} \cdot (f_{2n} + f_{2n+1}) + f_{2n+1} \cdot f_{2n+2} \\
&= f_{2n} \cdot f_{2n+2} + f_{2n+1} \cdot f_{2n+2} \\
&= (f_{2n} + f_{2n+1}) \cdot f_{2n+2} \\
&= f_{2n+2} \cdot f_{2n+2} \\
&= f_{2n+2}^2.
\end{aligned}$$

Logo a proposição vale para $n+1$ e, portanto, via indução, vale $\forall n \geq 1$. □

O resultado anterior é interessante, mas ele desperta o interesse pela soma dos n primeiros termos cuja posição deixa resto 1 na divisão por 4, ou seja, a soma:

$$f_1 + f_5 + \cdots + f_{4n-3}.$$

O resultado dessa soma é igual ao produto do termo cuja posição é o dobro do número de termos da referida soma pelo seu antecessor.

Proposição 2.3.7. Seja f_n um número da *sequência de Fibonacci*, então, para todo $n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{4i-3} = f_{2n-1} \cdot f_{2n}.$$

Demonstração. Veja que a afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois temos:

$$f_{4\cdot 1-3} = f_1 = 1 = 1 \cdot 1 = f_1 \cdot f_2 = f_{2\cdot 1-1} \cdot f_{2\cdot 1}.$$

Vamos supor que a afirmação seja verdadeira para um n determinado, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{4i-3} = f_1 + f_5 + f_9 + \cdots + f_{4n-3} = f_{2n-1} \cdot f_{2n}.$$

Agora, note que, para $n + 1$ temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} f_{4i-3} &= f_1 + f_5 + f_9 + \cdots + f_{4n-3} + f_{4n+1} \\
&= f_{2n-1} \cdot f_{2n} + f_{4n+1} \\
&= f_{2n-1} \cdot f_{2n} + f_{2n+1+2n} \\
&= f_{2n-1} \cdot f_{2n} + f_{2n} \cdot f_{2n} + f_{2n+1} \cdot f_{2n+1} \\
&= (f_{2n-1} + f_{2n}) \cdot f_{2n} + f_{2n+1} \cdot f_{2n+1} \\
&= f_{2n+1} \cdot f_{2n} + f_{2n+1} \cdot f_{2n+1} \\
&= f_{2n+1} \cdot (f_{2n} + f_{2n+1}) \\
&= f_{2n+1} \cdot f_{2n+2} \\
&= f_{2(n+1)-1} \cdot f_{2(n+1)}.
\end{aligned}$$

Logo, por indução, a proposição está demonstrada. □

Assim como as duas proposições anteriores é possível obter um padrão para as seguintes somas $f_4 + f_8 + \cdots + f_{4n}$, e $f_3 + f_7 + \cdots + f_{4n-1}$. Esses resultados ficarão para o leitor procurar o padrão e, portanto, exercitar sua capacidade de buscar padrões nessa sequência.

Ao voltarmos nossa atenção para três números consecutivos na sequência de Fibonacci poderemos perceber que o quadrado do termo do meio difere uma unidade do produto dos outros dois termos. Ainda, se o termo do meio ocupar uma posição par na sequência então seu quadrado será uma unidade menor do que o produto dos outros dois. Caso o termo do meio ocupe uma posição ímpar então seu quadrado é uma unidade maior do que o produto dos outros dois termos. Essa proposição é conhecida como **Identidade de Cassini** ou **Fórmula de Cassini** .

Proposição 2.3.8. Seja f_n um número da *sequência de Fibonacci*, então,

$$f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n, \text{ para todo } \ n > 1, \ n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Veja que a afirmação é verdadeira para n=2 pois temos:

$$f_{2-1} \cdot f_{2+1} - f_2^2 = f_1 \cdot f_3 - f_2^2 = f_3 \cdot f_1 - f_2^2 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1 = (-1)^2.$$

Suponha que a afirmação seja verdadeira para $n > 1$, ou seja:

$$f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

Nesse caso a afirmação vale para $n+1$, pois ao multiplicarmos os membros da equação acima por -1, teremos:

$$f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}(-1)^{n+1} = f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1} = f_n^2 - (f_{n+1} - f_n)f_{n+1} = f_n^2 + f_nf_{n+1} - f_{n+1}^2 \\ = f_n(f_n + f_{n+1}) - f_{n+1}^2 = f_nf_{n+2} - f_{n+1}^2.\end{aligned}$$

Podemos concluir, portanto que a afirmação é verdadeira para $n+1$ e assim, por indução, a proposição está demonstrada. □

É pertinente observar que, se definirmos na sequência de Fibonacci $f_0 = 0$ a proposição acima vale para todo $n \geq 1$.

Uma relação pode ser obtida ao subtrairmos do quadrado de um termo o produto dos termos localizados três unidades antes pelo termo localizado três unidades depois da posição do termo que foi elevado ao quadrado. Assim para fazer sentido essa proposição vale quando o termo elevado ao quadrado ocupa alguma posição após o terceiro termo da sequência.

Proposição 2.3.9. Seja f_n um número da *sequência de Fibonacci*, então,

$$f_n^2 - f_{n+3}f_{n-3} = 4(-1)^{n+1}, \text{ para todo } n \in N, \text{ satisfazendo } \ n \geq 4.$$

Demonstração. Veja que a afirmação é verdadeira para n=4 pois temos:

$$f_4^2 - f_{4+3} \cdot f_{4-3} = 3^2 - 13 \cdot 1 = 9 - 13 = 4 \cdot (-1)^5.$$

Suponha que a afirmação seja verdadeira para um $n \geq 4$ qualquer, ou seja:

$$f_n^2 - f_{n+3}f_{n-3} = 4(-1)^{n+1}.$$

Nesse caso a afirmação vale para $n+1$, pois ao multiplicarmos os membros da equação acima por (-1), teremos:

$$f_{n+3}f_{n-3} - f_n^2 = 4(-1)^{n+2} \tag{2.3}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
f_{n+3}f_{n-3} - f_n^2 &= (f_{n+4} - f_{n+2}) \cdot (f_{n-1} - f_{n-2}) - f_n^2 \\
&= f_{n+4} \cdot f_{n-1} - f_{n+4} \cdot f_{n-2} - f_{n+2} \cdot f_{n-1} + f_{n+2} \cdot f_{n-2} - f_n^2 \\
&= (f_{n+3} + f_{n+2}) \cdot f_{n-1} - f_{n+4} \cdot f_{n-2} - f_{n+2} \cdot f_{n-1} \\
&\qquad\qquad + f_{n+2} \cdot (f_n - f_{n-1}) - f_n^2 \\
&= f_{n+3} \cdot f_{n-1} + f_{n+2} \cdot f_{n-1} - f_{n+4} \cdot f_{n-2} - f_{n+2} \cdot f_{n-1} \\
&\qquad\qquad + f_{n+2} \cdot f_n - f_{n+2} \cdot f_{n-1} - f_n^2 \\
&= (f_{n+2} + f_{n+1}) \cdot f_{n-1} + f_{n+2} \cdot f_{n-1} - f_{n+4} \cdot f_{n-2} - f_{n+2} \cdot f_{n-1} \\
&\qquad\qquad + f_{n+2} \cdot f_n - f_{n+2} \cdot f_{n-1} - f_n^2 \\
&= f_{n+2} \cdot f_{n-1} + f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_{n+4} \cdot f_{n-2} + f_{n+2} \cdot f_n \\
&\qquad\qquad - f_{n+2} \cdot f_{n-1} - f_n^2 \\
&= f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_{n+4} \cdot f_{n-2} + f_n \cdot (f_{n+2} - f_n) \\
&= f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_{n+4} \cdot f_{n-2} + f_n \cdot f_{n+1} \\
&= f_{n+1} \cdot (f_{n-1} + f_n) - f_{n+4} \cdot f_{n-2} \\
&= f_{n+1} \cdot f_{n+1} - f_{n+4} \cdot f_{n-2} \\
&= f_{n+1}^2 - f_{n+4} \cdot f_{n-2}.
\end{aligned}$$

E assim temos,

$$f_{n+3}f_{n-3} - f_n^2 = f_{n+1}^2 - f_{n+4} \cdot f_{n-2} = f_{n+1}^2 - f_{(n+1)+3} \cdot f_{(n+1)-3}. \tag{2.4}$$

Das equações (2.3) e (2.4), temos:

$$f_{n+1}^2 - f_{(n+1)+3} \cdot f_{(n+1)-3} = 4(-1)^{(n+1)+1}.$$

Portanto, por indução matemática, a afirmação é verdadeira. □

Proposição 2.3.10. Seja f_n um termo da *sequência de Fibonacci*, então,

$$(f_n f_{n+3})^2 + (2f_{n+1}f_{n+2})^2 = (f_{2n+3})^2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Seja f_n a *sequência de Fibonacci* e $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{aligned}
(f_{2n+3})^2 &= [f_{n+1+n+2}]^2 \\
&\overset{(2.3.5)}{=} [f_n f_{n+2} + f_{n+1} f_{n+3}]^2 \\
&\overset{(1)}{=} [f_n f_{n+2} + (f_{n-1} + f_n) f_{n+3}]^2 \\
&= [f_n f_{n+2} + f_{n-1} f_{n+3} + f_n f_{n+3}]^2 \\
&= [f_n f_{n+2} + f_{n-1}(f_{n+1} + f_{n+2}) + f_n f_{n+3}]^2 \\
&= [f_n f_{n+2} + f_{n-1} f_{n+1} + f_{n-1} f_{n+2} + f_n f_{n+3}]^2 \\
&= [f_{n+2}(f_n + f_{n-1}) + f_{n-1} f_{n+1} + f_n f_{n+3}]^2 \\
&= [f_{n+2} f_{n+1} + f_{n-1} f_{n+1} + f_n f_{n+3}]^2 \\
&= [f_{n+1}(f_{n+2} + f_{n-1}) + f_n f_{n+3}]^2 \\
&= [f_{n+1}(f_{n+1} + f_n + f_{n-1}) + f_n f_{n+3}]^2 \\
&= [f_{n+1}(f_{n+1} + f_{n+1}) + f_n f_{n+3}]^2 \\
&= [f_{n+1}(2f_{n+1}) + f_n f_{n+3}]^2 \\
&= [2f_{n+1}^2 + f_n f_{n+3}]^2 \\
&= (2f_{n+1}^2)^2 + 2^2 f_{n+1}^2 f_n f_{n+3} + (f_n f_{n+3})^2 \\
&= 2^2 f_{n+1}^2 (f_{n+1}^2 + f_n f_{n+3}) + (f_n f_{n+3})^2 \\
&= 2^2 f_{n+1}^2 [f_{n+1}^2 + f_n(f_{n+1} + f_{n+2})] + (f_n f_{n+3})^2 \\
&= 2^2 f_{n+1}^2 [f_{n+1}^2 + f_n f_{n+1} + f_n f_{n+2})] + (f_n f_{n+3})^2 \\
&= 2^2 f_{n+1}^2 [f_{n+1}(f_{n+1} + f_n) + f_n f_{n+2})] + (f_n f_{n+3})^2 \\
&= 2^2 f_{n+1}^2 [f_{n+1} f_{n+2} + f_n f_{n+2})] + (f_n f_{n+3})^2 \\
&= 2^2 f_{n+1}^2 [(f_{n+1} + f_n) f_{n+2}] + (f_n f_{n+3})^2 \\
&= 2^2 f_{n+1}^2 [f_{n+2} f_{n+2}] + (f_n f_{n+3})^2 \\
&= 2^2 f_{n+1}^2 f_{n+2}^2 + (f_n f_{n+3})^2 \\
&= (f_n f_{n+3})^2 + (2f_{n+1} f_{n+2})^2. \\
(f_n f_{n+3})^2 + (2f_{n+1} f_{n+2})^2 &= (f_{2n+3})^2.
\end{aligned}$$

□

A próxima proposição nos afirma que a diferença entre o quadrado dos dois termos adjacentes a um termo de valor par é divisível por 4. Esse fato pode ser constatado, por exemplo, ao calcularmos a diferença entre os quadrados dos termos adjacentes ao número 8 na sequência. Acompanhe,

$$13^2 - 5^2 = 144,$$

e

$$144 = 4 \cdot 36.$$

Vejamos como a proposição garante essa propriedade para todos os casos onde temos termos adjacentes a um termo par na sequência de Fibonacci.

Proposição 2.3.11. Seja f_n um número da *sequência de Fibonacci*. Dado $n \in \mathbb{N}$, se $2 \mid f_n$, então, $4 \mid (f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2)$. Ou seja, dado $n \in \mathbb{N}$, se f_n é divisível por 2, então, $(f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2)$ é divisível por 4.

Demonstração. Sejam n e $k \in \mathbb{N}$, tal que $f_n = 2 \cdot k$. Então,

$$\begin{aligned}(f_{n+1})^2 - (f_{n-1})^2 &= (f_n + f_{n-1})^2 - (f_{n-1})^2 \\ &= f_n^2 + 2f_nf_{n-1} + f_{n-1}^2 - f_{n-1}^2 \\ &= f_n^2 + 2f_nf_{n-1}.\end{aligned}$$

Por hipótese $f_n = 2 \cdot k$, logo

$$\begin{aligned}(f_{n+1})^2 - (f_{n-1})^2 &= (2 \cdot k)^2 + 2(2 \cdot k)f_{n-1} \\ &= 4 \cdot k^2 + 4 \cdot k \cdot f_{n-1} \\ &= 4 \cdot (k^2 + k \cdot f_{n-1}).\end{aligned}$$

Portanto, $4 \mid (f_{n+1})^2 - (f_{n-1})^2$. □

A proposição (2.3.12) a seguir auxiliará a demonstração da proposição (2.3.13) seguinte. Ela foi demonstrada por absurdo por (ZAHN, 2011) na página 7. Abaixo é apresentada uma prova para a mesma.

Proposição 2.3.12. Seja f_n um número da *sequência de Fibonacci*. O máximo divisor comum (mdc) de dois termos consecutivos da *sequência de Fibonacci* é 1.

Demonstração. Suponha que exista $d > 1$ tal que $d|f_{n_0}$ e $d|f_{n_0+1}$ para um certo $n_0 \in \mathbb{N}$.

Assim,

$$d|f_{n_0} \text{ e } d|f_{n_0+1} \Rightarrow d|(f_{n_0} + f_{n_0+1}).$$

Como,

$$d|f_{n_0},\ d|f_{n_0+1} \text{ e } f_{n_0+1} = f_{n_0} + f_{n_0-1} \Rightarrow d|f_{n_0-1}.$$

Considerando a linha anterior,

$$d|f_{n_0-1},\ d|f_{n_0} \text{ e } f_{n_0} = f_{n_0-1} + f_{n_0-2} \ \Rightarrow \ d|f_{n_0-2}.$$

Seguindo essa lógica chegaremos a $d|f_2$ e $d|f_1$, mas, isso contradiz a hipótese $d > 1$. Logo, $\forall n \in \mathbb{N}$ o mdc de dois termos consecutivos da *sequência de Fibonacci* é 1. □

Para encerrar nossa lista de proposições que relacionam os números da sequência de Fibonacci, trazemos o curioso resultado válido para dois termos de posições diferentes de um ou dois onde, se o número da posição de um termo é divisor do número da posição de outro termo, então, o primeiro termo também é divisor do segundo. De forma recíproca, se um número de Fibonacci é divisor de outro número de Fibonacci então, o número da posição do primeiro divide o número da posição do segundo, termo.

Proposição 2.3.13. Seja f_n um número da *sequência de Fibonacci.* Dados m e $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq m > 2$ temos $f_m|f_n$ se, e somente se, $m|n$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$

Considere, m e $n \in \mathbb{N}$, tais que $2 < m \leq n$ e $f_m|f_n$.

Se $f_m = f_n$ temos $m = n$ e nesse caso, $m|n$.

Se $f_m < f_n$ então, $m < n$. Portanto, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + k_1$. Assim podemos escrever:

$$f_m|f_n \Rightarrow \ f_m|f_{m+k_1}.$$

A afirmação acima e a Proposição 2.3.5 nos permitem escrever

$$f_m|(f_{m-1}f_{k_1} + f_m f_{k_1+1}) \ \Rightarrow \ f_m|f_{m-1}f_{k_1}, \text{ pois, sabemos que } f_m|f_m f_{k_1+1}.$$

Pela proposição 2.3.12 temos $\text{mdc}(f_m, f_{m-1}) = 1$, e assim,

$$f_m|f_{m-1}f_{k_1} \Rightarrow f_m|f_{k_1} \Rightarrow m \ \leq k_1.$$

Agora, se $m = k_1$ temos $m|n = m + k_1 = m + m = 2m$.

No caso de $m < k_1$, reiniciamos o processo procurando k_2 tal que $k_1 = m + k_2$. Podemos fazer esse processo p vezes até obtermos um k_p, tal que $m = k_p$. Como resultado teremos $n = (p+1) \cdot m$ e portanto $m|n$.

$(\Leftarrow)$

Reciprocamente, considere, m e $n \in \mathbb{N}$, tal que $2 < m \leq n$ e $m|n$. Nesse caso, $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tal que, $n = mk$. Vamos mostrar que $f_m|f_{mk}$ por indução em k.

Para $k = 1$ temos,

$$f_m | f_{mk} = f_{m \cdot 1}.$$

Suponha que $f_m | f_{mk}$.

Para $k + 1$ teremos,

$$f_{m(k+1)} = f_{mk+m} = f_{mk-1} f_m + f_{mk} f_{m+1}.$$

Veja que

$$f_m | f_{mk-1} f_m + f_{mk} f_{m+1} \;\Rightarrow\; f_m | f_{m(k+1)}.$$

Portanto, por indução matemática temos $f_m | f_{mk}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. □

Além das propriedades apresentadas acima outras podem ser obtidas. O que torna essa sequência especial é, além de apresentar o padrão que ocorre na evolução da quantidade de coelhos do problema proposto por Fibonacci, seus números relacionarem-se com muitos outros resultados da matemática. No próximo capítulo trazemos algumas dessas relações entre números presentes nela e outros resultados matemáticos. Assim poderemos ilustrar o alcance desta importante sequência de números. Acreditamos que isso poderá inspirar o leitor curioso a buscar novas relações envolvendo esse padrão.

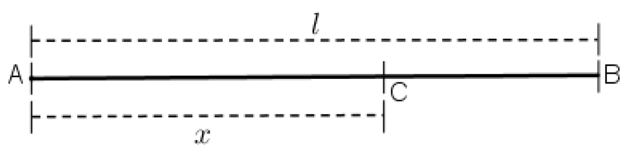
3 NÚMEROS DE FIBONACCI E RESULTADOS DA MATEMÁTICA

As relações obtidas a partir dos números de Fibonacci extrapolam os resultados que os relacionam entre si, como os mostrados no capítulo anterior. Para ilustrar essa afirmação vejamos algumas relações encontradas entre resultados matemáticos e os números de Fibonacci.

A relação mais conhecida ocorre com a razão áurea, a qual pode ser definida da seguinte maneira: Considere um segmento de reta AB, como na Figura 1, e um ponto C entre A e B. Dizemos que o ponto C divide o segmento AB na razão áurea quando a razão entre o comprimento do segmento AB pelo comprimento do segmento AC for igual a razão do comprimento do AC pelo comprimento do segmento CB, ou seja

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}.$$

Figura 1: Segmento $\overline{AB}$ dividido por C.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir da figura 1 podemos escrever:

$$\frac{l}{x} = \frac{x}{l-x}. \tag{3.1}$$

Portanto,

$$x^2 = l^2 - xl \Rightarrow x^2 + xl - l^2 = 0.$$

Perceba que, l é positivo e, na figura 1, x também é positivo. Logo, a solução positiva da equação do segundo grau acima, na variável x, é a medida de $\overline{AC}$ na figura 1. Assim, a medida x que gera a razão áurea a partir de um segmento de comprimento l é:

$$x = l\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Substituindo a medida x no primeiro membro da expressão (3.1), encontramos:

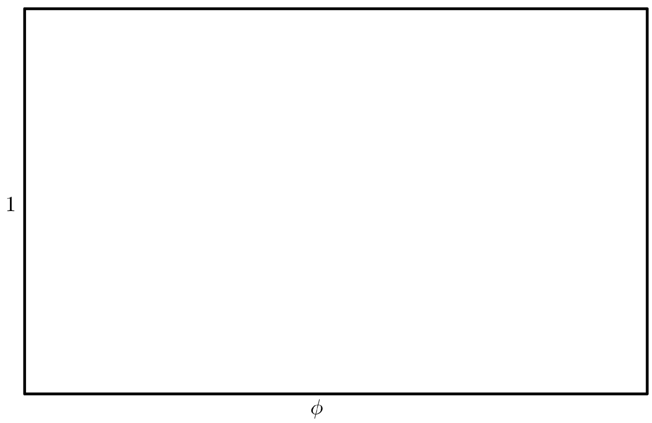
$$\frac{l}{x} = \frac{l}{l\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} \Rightarrow \frac{l}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}. \tag{3.2}$$

O valor de $\dfrac{l}{x}$ encontrado em (3.2) é a razão áurea e frequentemente é chamado de **número de ouro**, o qual é representado pela letra grega ϕ. Assim, temos:

$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,6180339887498948204586834365 6...^1.$$

Um retângulo cuja razão entre a medida do seu comprimento e a medida de sua largura é igual a ϕ é chamado de *retângulo áureo.* Considere um retângulo com largura de medida 1 e comprimento de medida ϕ, como nos mostra a Figura 2.

Figura 2: Retângulo áureo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 2, temos um retângulo áureo, uma vez que a razão entre a medida do seu comprimento e a medida de sua largura é:

$$\frac{\phi}{1} = \phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,61803398874989482045868343656....$$

Note que, é possível dividir o retângulo áureo em duas partes de forma que a primeira seja um quadrado de lado igual a largura do retângulo áureo e, a segunda, um retângulo de largura igual a diferença entre o comprimento e a largura do retângulo inicial e comprimento igual a largura do retângulo inicial. Agora, podemos verificar que razão entre o comprimento e a largura da parte retangular da divisão proposta para o retângulo

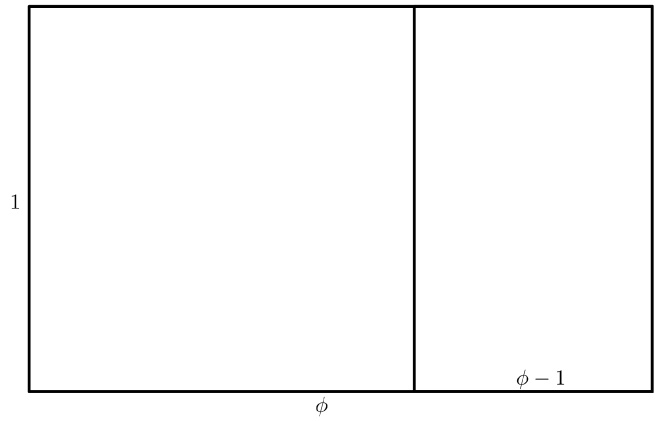
[1]Aproximação de ϕ apresentada por (ZAHN, 2011)(p.24).

áureo é:

$$\frac{1}{\phi - 1} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} - 1} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}} = 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi. \tag{3.3}$$

O resultado obtido em (3.3) mostra que novo retângulo também é áureo! A Figura 3 a seguir mostra como fica a divisão descrita acima, para o retângulo áureo da Figura 2.

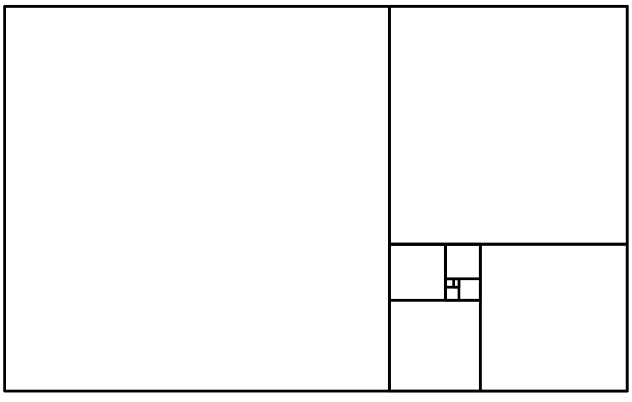
Figura 3: Retângulo áureo dividido em um quadrado e um novo retângulo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao continuarmos esse processo, obteremos outros retângulos áureos dentro do novo retângulo áureo obtido. A Figura 4 a seguir mostra uma continuação desse processo com mais algumas divisões.

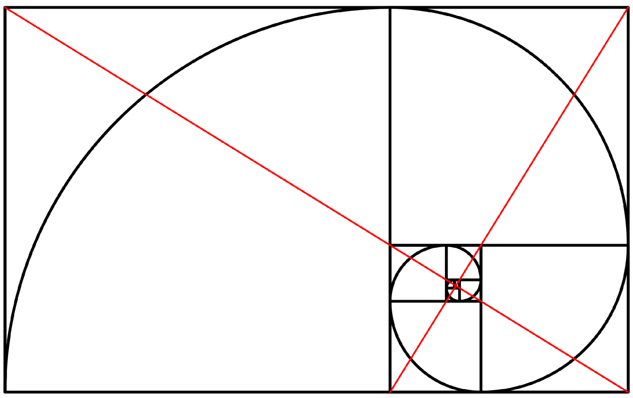
Figura 4: Sequência de retângulos áureos, partindo do retângulo áureo da Figura 2.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir da Figura 4 vamos construir uma espiral. Imagine continuarmos o processo de obtermos retângulos áureos dentro do retângulo áureo infinitamente, de forma a dar continuidade ao processo ilustrado na Figura 4. Depois, imagine traçar arcos de um quarto de circunferência, cada um com centro no vértice de um quadrado da composição e raio igual ao lado do respectivo quadrado. Ainda, garantir que as extremidades do arco em cada quadrado coincida com a extremidade dos arcos do quadrado de lado de medida imediatamente inferior e imediatamento superior, quando houver, garantindo a continuidade da linha do menor até o maior quadrado. Em sua obra, Maurício (ZAHN, 2011)(p.32) indica o ponto inicial da espiral, que segundo ele mostra, pode ser obtido a partir do encontro de duas diagonais específicas da figura. Veja a Figura 5 a seguir, ela ilustra a espiral descrita acima e ainda destaca para o leitor as diagonais que nos indicam sua origem.

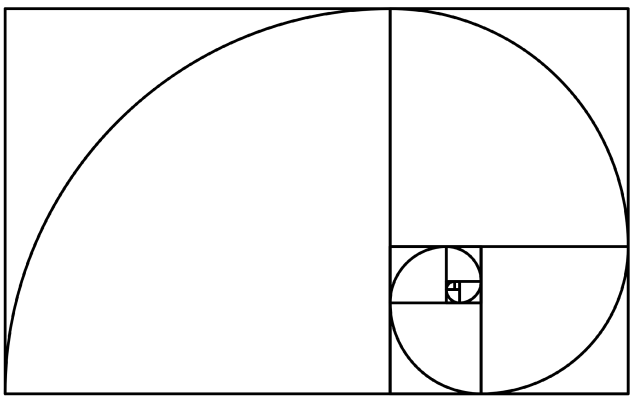
Figura 5: Espiral de Ouro com indicação de sua origem por meio de duas diagonais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 6 temos a espiral nos retângulos áureos sem as diagonais. Maurício Zahn (p.32), (ZAHN, 2011), diz que essa espiral é conhecida como *espiral de ouro*.

Figura 6: Espiral de Ouro.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A pergunta que surge é: onde podemos perceber a relação entre os números de Fibonacci e a razão áurea? Uma forma de relacionarmos eles é a partir da razão entre a medida do comprimento e da largura de retângulos cujas dimensões são números consecutivos da sequência de Fibonacci. Para obter tais retângulos faremos uma composição de quadrados com medidas de lados iguais à números de Fibonacci. A medida do lado de cada quadrado da composição estará indicada dentro do mesmo. Chamaremos de retângulo de Fibonacci os retângulos obtidos como descrito acima.

Vamos agora observar alguns retângulos de Fibonacci e para cada um sua respectiva razão entre a medida de seu comprimento e de sua largura. Veja:

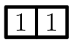
Figura 7: Retângulo de Fibonacci 1×1

Fonte: Elaborado pelo autor.

A razão entre o comprimento e a largura do retângulo de Fibonacci da Figura 7 é:

$$\frac{1}{1} = 1.$$

Figura 8: Retângulo de Fibonacci 2×1

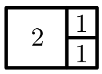


Fonte: Elaborado pelo autor.

A razão entre o comprimento e a largura do retângulo de Fibonacci da Figura 8 é:

$$\frac{2}{1} = 2.$$

Figura 9: Retângulo de Fibonacci 3×2.

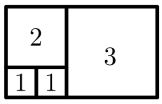


Fonte: Elaborado pelo autor.

A razão entre o comprimento e a largura do retângulo de Fibonacci da Figura 9 é:

$$\frac{3}{2} = 1,5.$$

Figura 10: Retângulo de Fibonacci 5×3

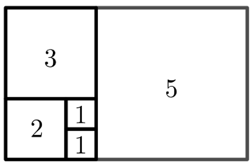


Fonte: Elaborado pelo autor.

A razão entre o comprimento e a largura do retângulo de Fibonacci da Figura 10 é:

$$\frac{5}{3} = 1,666....$$

Figura 11: Retângulo de Fibonacci 8×5

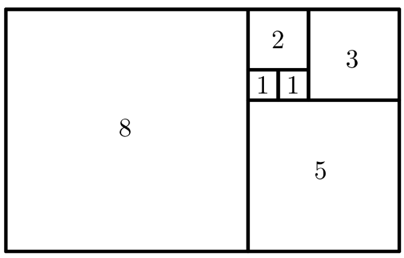


Fonte: Elaborado pelo autor.

A razão entre o comprimento e a largura do retângulo de Fibonacci da Figura 11 é:

$$\frac{8}{5} = 1,6.$$

Figura 12: Retângulo de Fibonacci 13×8.



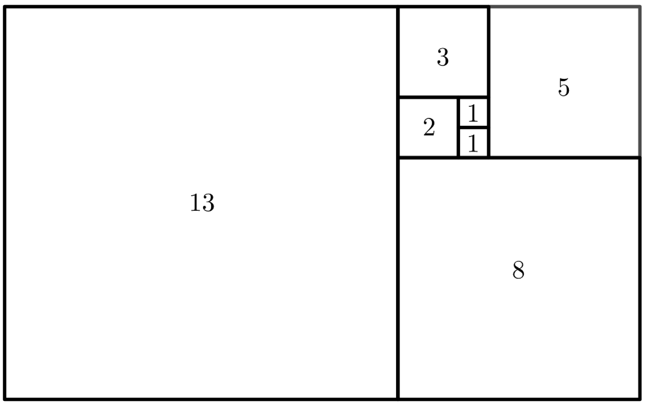
Fonte: Elaborado pelo autor.

A razão entre o comprimento e a largura do retângulo de Fibonacci da Figura 12 é:

$$\frac{13}{8} = 1,625.$$

A escala usada ainda nos permite desenhar, seguindo o padrão, mais duas figuras. Acompanhe:

Figura 13: Retângulo de Fibonacci 21×13.

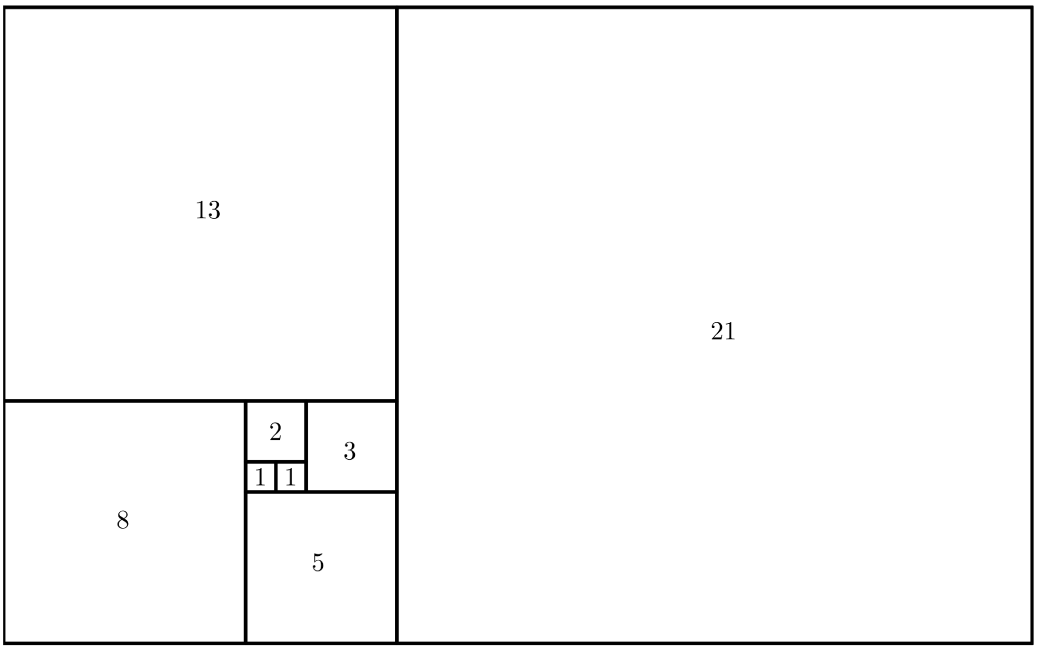


Fonte: Elaborado pelo autor.

A razão entre o comprimento e a largura do retângulo de Fibonacci da Figura 13 é:

$$\frac{21}{13} = 1,\overline{615384}.$$

Figura 14: Retângulo de Fibonacci 34×21.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A razão entre o comprimento e a largura do retângulo de Fibonacci da Figura 14 é:

$$\frac{34}{21} = 1,\overline{619047}.$$

Ao observar a razão entre o comprimento e a largura dos retângulos de Fibonacci é fácil perceber seu valor se aproximar da razão áurea, ou seja, do número de ouro, ϕ. As páginas desse trabalho não permitem a construção dos próximos 6 retângulos de Fibonacci, seguindo o padrão acima. Porém as razões entre as medidas do comprimento e da largura dos próximos 6 retângulos de Fibonacci são:

$$\begin{aligned}
\frac{55}{34} &= 1,6\overline{1764705882352941}.\\
\frac{89}{55} &= 1,6\overline{18}.\\
\frac{144}{89} &= 1,\overline{6179775280898876404494382022471910112359550 5}.\\
\frac{233}{144} &= 1,6180\overline{5}.\\
\frac{377}{233} &= 1,\overline{6180257510729613733905579399141630901287553648068669527896995708 15}.\\
&\quad \overline{4506437768240343347639484978540772532188841201716738197424892703 86}.\\
&\quad \overline{2660944206008583690987124463519313304721030042918454935622317596 56}.\\
&\quad \overline{652360515021459227467811158798 2832}.\\
\frac{610}{377} &= 1,\overline{6180371352785145888594164456233421750663129973474801061007957559 68}.\\
&\quad \overline{169761273209549071}.\\
\vdots \quad & \quad \vdots
\end{aligned}$$

A forma decimal da última razão escrita acima possui as cinco primeiras ordens da parte decimal do número igual as cinco primeiras ordens da parte decimal do número,ϕ. A medida que tomamos dois números consecutivos da sequência de Fibonacci, digamos f_n e f_{n+1}, cada vez maiores, a razão entre eles se aproxima ainda mais de ϕ. Assim, o limite da razão entre f_{n+1} e f_n, quando n tende ao infinito é ϕ. Ou seja:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi. \tag{3.4}$$

Para apresentar o cálculo do limite acima, considere a fórmula de *Binet* escrita da seguinte forma:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^n\right]. \tag{3.5}$$

Logo, ao usarmos 3.5 na expressão 3.4, teremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\phi^{n+1} - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^n\right]} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\phi\left[\phi^n - \frac{1}{\phi}\left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n+1}\right]}{\left[\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^n\right]} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\phi\left[1 - \frac{1}{\phi^{n+1}}\left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n+1}\right]}{\left[1 - \frac{1}{\phi^n}\left(-\frac{1}{\phi}\right)^n\right]} \\
&= \phi \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left[1 - \cancelto{0}{\frac{1}{\phi^{n+1}}}\cancelto{0}{\left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n+1}}\right]}{\left[1 - \cancelto{0}{\frac{1}{\phi^n}}\cancelto{0}{\left(-\frac{1}{\phi}\right)^n}\right]} \\
&= \phi \cdot \frac{[1-0]}{[1-0]} = \phi.
\end{aligned}$$

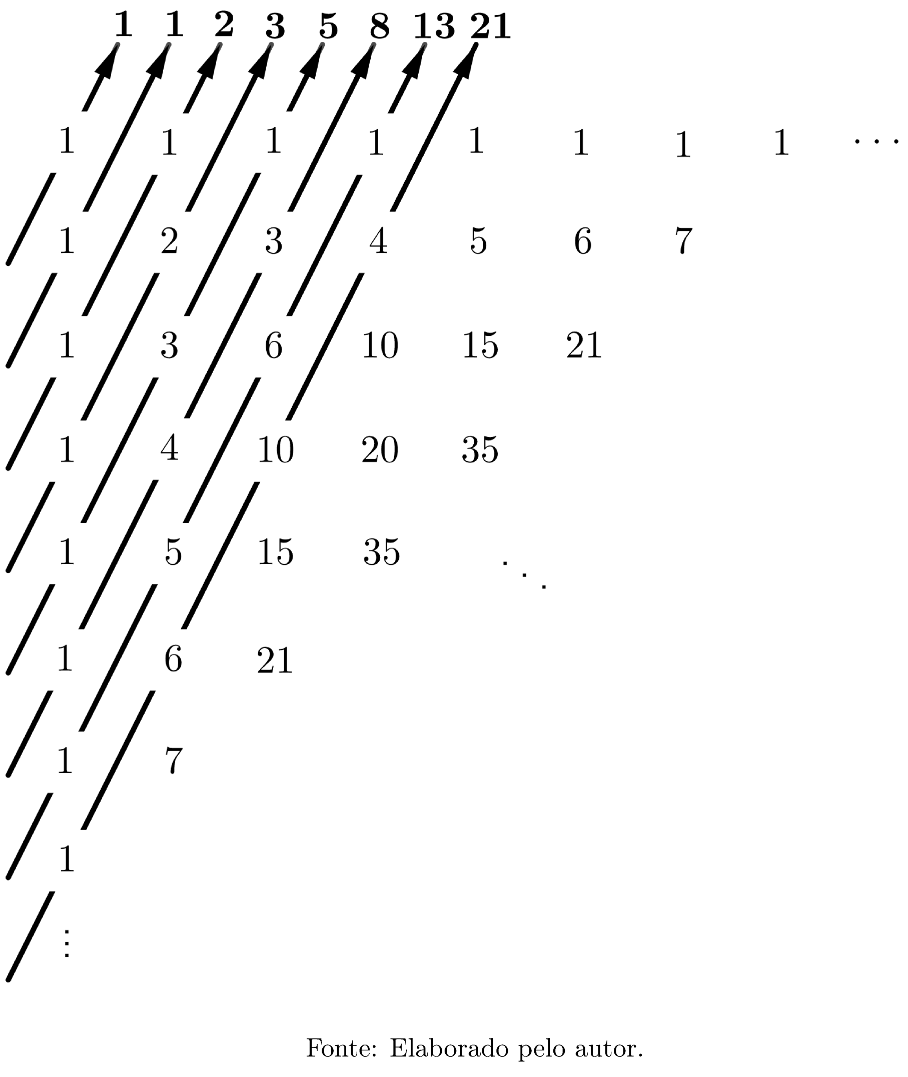
Assim, por meio de números da sequência de Fibonacci podemos obter a razão áurea. Note ainda que, ao tomarmos uma unidade de medida cada vez menor e construirmos retângulos de Fibonacci, a figura que obteremos se aproximará, cada vez mais da composição de retângulos áureos da figura 4. Assim, podemos considerar uma espiral de Fibonacci, formada a partir retângulos de Fibonacci, como uma aproximação para a espiral de ouro. Deixaremos como sugestão de pesquisa a verificação da diferença entre a espiral de ouro e a espiral de Fibonacci, a medida que se aumenta o números de quadrados com lados cujas medidas são números de Fibonacci.

Os números de Fibonacci surgem também em uma das formas de representar e obter as potências de expoente natural de ϕ. Em seu livro, Maurício (ZAHN, 2011)(p.29) mostra que $\phi^n = f_{n-1} + f_n \cdot \phi$, e para contemplar o expoente 1 ele acrescenta o termo $f_0 = 0$ na sequência dos números de Fibonacci. É possível notar esse padrão para o cálculo das potências de ϕ por meio do cálculo das primeiras potências, como (POSAMENTIER; LEHMANN, 2007)(p.113) fez.

O famoso triângulo de Pascal também está conectado aos números de Fibonacci.

Ele é formado pelos chamados *Números Binomiais*[2]. Ao somarmos os elementos das diagonais do triângulo de Pascal, surgem os números de Fibonacci. A Figura 15 ilustra as primeiras diagonais e suas respectivas somas, no referido triângulo.

Figura 15: Soma dos elementos da diagonal do Triângulo de Pascal.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Outro resultado muito interessante ocorre na utilização dos números de Fibonacci nas fórmulas para obtermos triplas Pitagóricas de números inteiros. Chamamos de triplas Pitagóricas de números inteiros a sequência de três números inteiros positivos a, b e c que satisfazem $a^2 = b^2 + c^2$. Ao tomarmos dois números r e s naturais, com $r > s$ podemos escrever,

$$(r^2 - s^2)^2 + (2rs)^2 = (r^2 + s^2)^2.$$

[2]Para saber mais sobre o triângulo de Pascal consulte (MORGADO et al., 2004)

Assim podemos associar:

$$a = r^2 + s^2, \tag{3.6}$$

$$b = 2rs, \tag{3.7}$$

$$c = r^2 - s^2. \tag{3.8}$$

Onde, r e s são números naturais.

Para exemplificar, considere $r = 4$ e $s = 1$ nas equações acima. Então teremos:

$$\begin{aligned} a &= 4^2 + 1^2 = 17. \\ b &= 2 \cdot 4 \cdot 1 = 8. \\ c &= 4^2 - 1^2 = 15. \end{aligned}$$

Note que,

$$17^2 = 8^2 + 15^2.$$

Ao escolhermos números consecutivos de Fibonacci para r e s, para determinarmos uma tripla pitagórica a, b e c, o valor a será um número de Fibonacci.

Podemos perceber que essa afirmação vale para $r = 8$ e $s = 5$, pois:

$$a = 8^2 + 5^2 = 89,$$

e 89 é número de Fibonacci. Podemos verificar que isso sempre ocorrerá. Para isso considere, $r = f_{n+2}$ e $s = f_{n+1}$. Assim,

$$\begin{aligned} a &= f_{n+2}^2 + f_{n+1}^2 = f_{n+2} \cdot (f_{n+1} + f_n) + f_{n+1}^2 \\ a &= f_{n+2} \cdot f_{n+1} + f_{n+2} \cdot f_n + f_{n+1}^2 \\ a &= f_n \cdot f_{n+2} + f_{n+1} \cdot (f_{n+2} + f_{n+1}) \\ a &= f_n \cdot f_{n+2} + f_{n+1} \cdot f_{n+3} \overset{(2.3.5)}{=} f_{n+1+n+2} = f_{2n+3}. \end{aligned}$$

Assim, ao utilizarmos dois números consecutivos para obter um tripla Pitagórica, como apresentado acima, certamente o número a será um número de Fibonacci.

É possível obter ainda muitas outras relações entre os números de Fibonacci e distintos resultados matemáticos, como você pode conferir em (POSAMENTIER; LEHMANN, 2007), (ZAHN, 2011) e (VOROBIEV, 2002).

Além de relacionarem-se entre si por meio de muitos resultados e de também relacionarem-se com outros resultados da matemática, curiosamente os números de Fibonacci surgem em muitas outras situações como na natureza, na arte, na arquitetura, segurança da transmissão de dados por um meio não seguro, na análise da variação de preços do mercado de ações, entre outras. As relações observadas dos números da sequência de Fibonacci nos campos acima apontados é apresentada por autores como (ZAHN, 2011), (SINHA, 2017), (BORTNER; PETERSON, 2016) e (POSAMENTIER; LEHMANN, 2007).

Na sessão seguinte você verá algumas das curiosas relações entre os números da sequência de Fibonacci e a natureza. Depois é apresentado o uso da sequência de Fibonacci no processo de criptografia de dados.

4 NÚMEROS DE FIBONACCI NA NATUREZA

A observação atenta da natureza nos ajuda a encontrar respostas para muitos problemas do nosso dia-a-dia. Ao observar o deslocamento da água, de uma banheira cheia, no momento em que ele entra na banheira, Arquimedes conseguiu, segundo Jeanne, (BENDICK, 2006), descobrir como verificar se o rei Hiero tinha sido enganado por um ourives. Assim, observar a natureza pode nos levar a solução de problemas do cotidiano.

Curiosamente ao observamos a natureza encontramos alguns dos números da sequência de Fibonacci. A autora Sudipta, (SINHA, 2017), fala que o número de pétalas em muitas flores são números da sequência de Fibonacci. Ela conjectura no seu artigo a possibilidade de ser essa a melhor forma de diminuir a área sobreposta entre pétalas e, então, obter maior área de contato com a luz solar. Vejamos a quantidade de pétalas observadas em algumas espécies de flores nas imagens a seguir.

Figura 16: Número de Pétalas em Flores.

(a) Girassol

(b) Lírio Impala

(c) Copo de Leite

(d) Flor Cosmea

(e) Margarida

Fonte: Figura formada com imagens dos seguintes endereços,
(a): https://pixabay.com/pt/photos/flor-girassol-amarelo-natureza-2797087/, acesso em 24/06/2021.
(b): https://pixabay.com/pt/photos/flores-lírio-impala-planta-191909/, acesso em 24/06/2021.
(c): https://pixabay.com/pt/photos/white-flower-nice-flower-3568166/, acesso em 24/06/2021.
(d): https://pixabay.com/pt/photos/cosmea-flor-cosmos-rosa-planta-3711568/, acesso em 24/06/2021.
(e): https://pixabay.com/pt/photos/margarida-flor-natureza-florescer-3976641/, acesso em 24/06/2021.

Nas imagens da Figura 16, podemos observar exemplos de flores com 13, 5, 1, 8 e

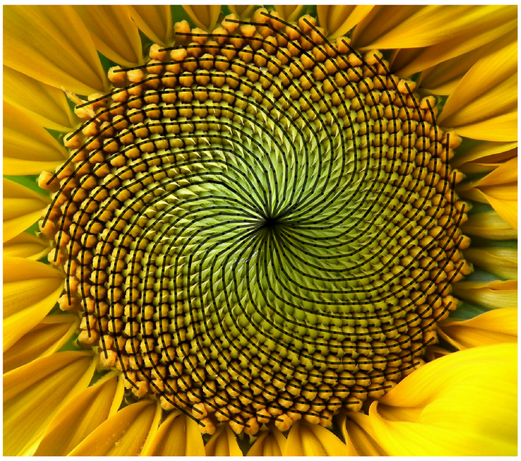
21 pétalas. Lembre que todos esses são números da sequência de Fibonacci. Posamentier e Lehmann (p.71), (POSAMENTIER; LEHMANN, 2007) citam outros exemplos de flores onde é comum encontrar o número de pétalas igual a um número de Fibonacci. Outro fato intrigante está nas formas espirais que surgem em muitas plantas. Por exemplo, no Girassol podemos observar uma organização em espirais no seu centro. A quantidade de espirais em um girassol, no sentido horário e no sentido anti-horário, segundo (POSAMENTIER; LEHMANN, 2007)(p.68), geralmente são números consecutivos de Fibonacci. A figura 17 mostra de forma destacada a parte central de um Girassol.

Figura 17: Espirais no centro do Girassol

Fonte: https://pixabay.com/pt/photos/flor-flores-girassol-amarelo-194831/, acesso em 24/06/2021.

Com paciência, você perceberá 34 espirais no sentido anti-horário, nesse girassol. No sentido horário o número de espirais é 55. Lembre que 34 e 55 são números consecutivos na sequência de Fibonacci. A imagem da Figura 18 destaca as espirais observadas no sentido anti-horário, e assim, facilita a contagem do números de espirais nesse sentido.

Figura 18: Espirais no sentido anti-horário destacadas no centro do Girassol.



Fonte: Adaptação feita pelo autor na imagem obtida do endereço
https://pixabay.com/pt/photos/flor-flores-girassol-amarelo-194831/, acesso em 24/06/2021.

As espirais são encontradas ainda nas pinhas. Nelas também é possível observar a presença dos números de Fibonacci ao olharmos a quantidade de espirais presentes na sua estrutura. A figura a seguir mostra a imagem de uma pinha onde podemos ver suas espirais.

Figura 19: Pinha.

Fonte: https://pixabay.com/pt/photos/pinhas-pinha-outono-floresta-3026691/, acesso em 24/06/2021.

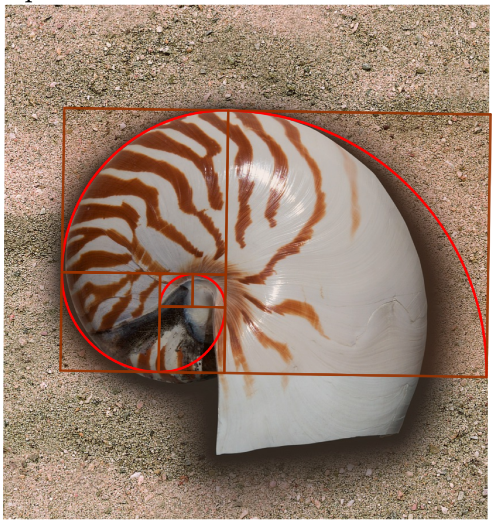
Ao continuarmos nossa busca por números de Fibonacci na natureza, voltaremos o nosso olhar para a forma do nautilus. Perceba a forma de sua concha. Na Figura 20 temos uma imagem de uma concha de nautilus para analisarmos.

Figura 20: Foto da concha de um nautilus.

Fonte: https://pixabay.com/pt/photos/nautilus-cefalópodes-mar-férias-179394/, acesso em 24/06/2021.

A concha de Nautilus parece obedecer a um padrão espiral. Na Figura 21 podemos comparar a imagem da concha do Nautilus com uma espiral obtida a partir de retângulos de Fibonacci.

Figura 21: Espiral de Fibonacci e concha de um nautilus.



Fonte: composição feita pelo autor a partir da imagem do nautilus, disponível em: https://pixabay.com/pt/photos/nautilus-cefalópodes-mar-férias-179394/, acesso em 24/06/2021.

Para mais exemplos de onde os números de Fibonacci podem ser encontrados na natureza o leitor pode consultar (POSAMENTIER; LEHMANN, 2007), (SINHA, 2017), (ZAHN, 2011) ou (BORTNER; PETERSON, 2016).

Os exemplos acima apresentados, bem como, todos os outros que podem ser obtidos nas referências citadas acima podem despertar no leitor uma atitude de busca por números de Fibonacci no ambiente a sua volta. Essa atitude poderá contribuir para enriquecer a leitura que fazemos de mundo.

5 FIBONACCI NA CODIFICAÇÃO DE DADOS

A quantidade de informações que circulam na internet é muito grande. Neste ambiente as informações podem ser enviadas por um remetente para um destinatário de forma que a mesma pode ser vista por vários usuários da rede. Uma forma de promover a privacidade da mensagem enviada pela internet é utilizar a criptografia para ocultar os dados de uma mensagem de modo que a mesma seja compreensível apenas para o remetente e destinatário. Nesse sentido, (AGARWAL; AGARWAL; SAXENA, 2015) (p.79) afirmam que cada técnica simples de criptografia pode ajudar a ocultar e assim garantir o sigilo de alguma informação. Ainda, (RAPHAEL; SUNDARAM, 2012) dizem que uma simples técnica de criptografia pode ajudar a preservar a privacidade de alguma pessoa. A criptografia é mais segura na medida em que dificulta a compreensão da mensagem por invasores ou destinatários não desejados. Para aumentar a segurança na codificação de dados (RAPHAEL; SUNDARAM, 2012) apresentaram a utilização dos números de Fibonacci no processo de Criptografia. A utilização dos números de Fibonacci na criptografia torna para nós essa sequência ainda mais importante.

Aqui não há a pretensão de fazer um estudo aprofundado sobre criptografia. A intenção é apresentar o uso dos números de Fibonacci como estratégia para criptografar o conteúdo de uma mensagem enviada por um meio público. Na descrição desse processo o leitor vai entender como os números de Fibonacci podem contribuir nas etapas de criptografar e descriptografar uma mensagem. Ao criptografar uma mensagem simples obtemos um mensagem cifrada, ou seja, um conjunto de códigos que substituem a mensagem simples inicial e torna muito difícil, para alguém indesejado, a compreensão da mesma. O envio da mensagem cifrada por um meio não seguro passa a ser viável, uma vez que apenas quem tenha informações suficientes para descriptografar a mensagem cifrada terá acesso a mensagem simples inicial. Ao receber o mensagem cifrada o destinatário deve descriptografar a mesma para então ter acesso a mensagem simples inicial.

Para iniciar devemos escolher uma chave, que deve ser conhecida pelo remetente e o destinatário da mensagem. Essa chave estabelece o início do processo. A partir da chave um conjunto de caracteres do nosso alfabeto é escolhido em quantidade igual ao número de caracteres da mensagem inicial, a qual queremos enviar. Cada caractere será escolhido a partir da chave seguindo a ordem alfabética (convencional) de maneira cíclica. Iniciamos uma lista a partir da chave de forma que os caracteres que ocupam posição, nessa lista, representada por um número de Fibonacci são escolhidos para formar um texto com a mesma quantidade de caracteres da mensagem simples inicial. Vamos imaginar que queremos enviar a mensagem **Jesus**. Utilizaremos a chave k para o início do processo. Então o conjunto de caracteres que iremos escolher será obtido como mostramos abaixo:

Tabela 1: Escolha das letras para o texto cifrado

Posição	**Letra do alfabeto**
1	**k**
2	**l**
3	**m**
4	n
5	**o**
6	p
7	q
8	**r**
9	s
10	t
11	u
12	v
13	w
14	x
15	y
16	z
17	a
18	b
19	c
20	d
21	e
22	f
23	g
24	h
25	i
26	j
27	k
28	l
29	m
30	n
$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim para a mensagem simples **Jesus**, com 5 caracteres, obtivemos o texto cifrado **klmor**, ao escolhermos para ele as letras contidas nas linhas de posições marcadas por números de Fibonacci na Tabela 1. Assim temos

Mensagem simples: Jesus

Chave: K

Texto cifrado: klmor

Depois de obter o texto cifrado o valor decimal de cada caractere da mensagem simples, contido na tabela de códigos American Standard Code for Information Interchange[1] (ASCII), é adicionado aos códigos da correspondente letra que o substitui na mensagem cifrada, ao código da letra que antecede e da letra que sucede a letra correspondente na mensagem cifrada. O resultado dessa soma será utilizado para escrever a mensagem cifrada em símbolos Unicode.

Assim nossa mensagem será escrita por meio dos seguintes números:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}+\mathrm{j}+\mathrm{k}+\mathrm{l} &= 74+106+107+108=395 \\
\mathrm{e}+\mathrm{k}+\mathrm{l}+\mathrm{m} &= 101+107+108+109=425 \\
\mathrm{s}+\mathrm{l}+\mathrm{m}+\mathrm{n} &= 115+108+109+110=442 \\
\mathrm{u}+\mathrm{n}+\mathrm{o}+\mathrm{p} &= 117+110+111+112=450 \\
\mathrm{s}+\mathrm{q}+\mathrm{r}+\mathrm{s} &= 115+113+114+115=457
\end{aligned}
$$

Em seguida o valor das somas são convertidos para símbolos Unicode. O arquivo com os símbolos Unicode é transmitivo para o destinatário. Ao receber, o destinatário inicia o processo de descriptografar a mensagem recebida. Para tanto ele irá recuperar o valor decimal de cada símbolo Unicode presente no arquivo criptografado recebido. Ou seja, os valores:

$$395,\ 425,\ 442,\ 450 \text{ e } 457.$$

Então de posse da chave e ciente da quantidade de caracteres na mensagem recebida ele poderá encontrar a mensagem cifrada inicial que é **klmor**. Assim da soma obtida ele deverá subtrair o valor decimal das letras correspondentes do texto cifrado, contido na tabela ASCII, o valor da letra que antecede e o valor da letra que sucede, a letra correspondente a letra do texto cifrado. Desta maneira ele realizará os seguintes cálculos:

$$
\begin{aligned}
395-\mathrm{j}-\mathrm{k}-\mathrm{l} &= 395-106-107-108=74=\mathrm{J} \\
425-\mathrm{k}-\mathrm{l}-\mathrm{m} &= 425-107-108-109=101=\mathrm{e} \\
442-\mathrm{l}-\mathrm{m}-\mathrm{n} &= 442-108-109-110=115=\mathrm{s} \\
450-\mathrm{n}-\mathrm{o}-\mathrm{p} &= 450-110-111-112=117=\mathrm{u} \\
457-\mathrm{q}-\mathrm{r}-\mathrm{s} &= 457-113-114-115=115=\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

Com os valores obtidos no cálculo anterior o destinatário pode encontrar as letras correspondentes a cada um deles na tabela de códigos ASCII. Então, a mensagem inicial pode ser finalmente conhecida: **Jesus**.

A utilização do números de Fibonacci no processo acima descrito nos mostra um

[1] Tabelas de códigos ASCII podem ser vistas no Apêndice A

pouco mais do alcance que os números de Fibonacci podem ter em diferentes campos de conhecimento.

6 FIBONACCI, ATIVIDADES PARA O ENSINO FUNDAMENTAL - ANOS FINAIS

Nesse capítulo colocamos a disposição do leitor uma apostila com atividades sobre números de Fibonacci. Assim esperamos facilitar o trabalho do professor de matemática do Ensino Fundamental - Anos Finais, que queira abordar essa importante sequência de números nessa etapa do ensino.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT

Giliar Ferreira Pacheco

FIBONACCI: ATIVIDADES PARA O ENSINO FUNDAMENTAL - ANOS FINAIS

Florianópolis

2021

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Uma das sequências numéricas mais antigas, e também uma das mais conhecidas, é a *Sequência de Fibonacci*, a qual foi introduzida na matemática ocidental pelo matemático italiano Leonardo de Pisa, também conhecido por Leonardo Fibonacci, como um dos problemas propostos no seu livro "Liber Abaci", publicado em 1202, (DEVLIN, 2011).

O interesse na sequência de Fibonacci deve-se ao fato de possuir aplicações em diversas áreas da matemática, bem como em áreas inusitadas como arte, arquitetura e também por estar presente em vários padrões na natureza. A definição recursiva dessa sequência é muito conhecida. Ela pode ser encontrada em (ZAHN, 2011)(p.7), (MORGADO; CARVALHO, 2015)(p.68) ou (VOROBIEV, 2002)(p.3), por exemplo.

A presente apostila FIBONACCI: ATIVIDADES PARA O ENSINO FUNDAMENTAL - ANOS FINAIS, foi desenvolvida por Giliar Ferreira Pacheco para a Dissertação de Mestrado, intilutalda SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: História, Propriedades e Aplicações, a qual foi apresentada no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), campus Florianópolis, sob orientação da professora Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves.

Nessa apostila faremos uma reunião de atividades sobre números de Fibonacci. Com isso pretendemos auxiliar o professor de matemática da Educação Básica, especialmente, os docentes desse componente curricular do Ensino Fundamental - Anos Finais. As atividades visam ajudar a desenvolver algumas das habilidades presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), para a etapa Ensino Fundamental - Anos Finais.

Elas foram pensadas para situações onde os alunos viram previamente uma definição de sequência de forma recursiva e também iniciaram o uso de letras para representar números. Assim, devem contribuir para desenvolver principalmente habilidades relacionadas a unidade temática Álgebra, conforme a BNCC.

Apostila desenvolvida pelo professor Giliar Ferreira Pacheco para a Dissertação de Mestrado apresentada no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da UFSC em 2021.

2 FIBONACCI, ATIVIDADES PARA O ENSINO FUNDAMENTAL - ANOS FINAIS

As sequências são parte do currículo da educação básica, na etapa do Ensino Fundamental - Anos Finais. Ao abordarmos esse assunto surge a oportunidade de colocarmos os estudantes em contanto com a importante sequência de Fibonacci.

A sequência de Fibonacci possui diversas relações entre os seus números e, ainda, é possível encontrar relações entre seus números e outros resultados da matemática. Curiosamente seus números surgem na natureza. Ela também é aplicada áreas como, por exemplo, codificação de dados e na análise de preços no mercado de ações. Por tudo isso, preparamos esse material que tem por objetivo propor atividades relacionadas a sequência de Fibonacci para serem trabalhadas na etapa do Ensino Fundamental - Anos finais, da educação básica.

As atividades propostas nesse material foram pensadas para alunos que já tiveram uma introdução ao conceito de sequências numéricas recursivas e a forma de indicar seus elementos por meio do uso de uma letra do nosso alfabeto acompanhada de um subíndice para indicar sua posição na sequência.

Ao buscarmos evidenciar a contribuição para a efetivação do currículo proposto na BNCC, destacamos uma lista com habilidades trabalhadas nessas atividades. As habilidades e seus respectivos códigos, obtidos da BNCC, são:

- **(EF06MA19)** Identificar características dos triângulos e classifica-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.

- **(EF06MA27)** Determinar medidas da abertura de ângulos, por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais.

- **(EF07MA14)** Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.

- **(EF07MA15)** Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

Apostila desenvolvida pelo professor Giliar Ferreira Pacheco para a Dissertação de Mestrado apresentada no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da UFSC em 2021.

- **(EF08MA06)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

- **(EF08MA11)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

A primeira atividade proposta trabalha a identificação de regularidade de uma sequência numérica recursiva e assim contempla parte da habilidade EF08MA11.

Atividade 1) Observe o padrão na sequência abaixo e escreva os três próximos termos:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21, \cdots .$$

A resposta esperada para a **Atividade 1** é: $34,\ 55$ e 89.

A próxima atividade oferece uma ilustração para sugerir o padrão. Assim pode ser aplicada aos alunos menos experientes ou com mais dificuldades. Ela também facilita a classificação da sequência como recursiva, além de trabalhar o uso da simbologia algébrica para expressar a regularidade de uma sequência numérica. Assim, ela abrange a habilidade EF07MA15 e parte da habilidade EF07MA14.

Atividade 2) A Figura 1 a seguir apresenta uma forma de obter os termos da sequência de números contidos nela.

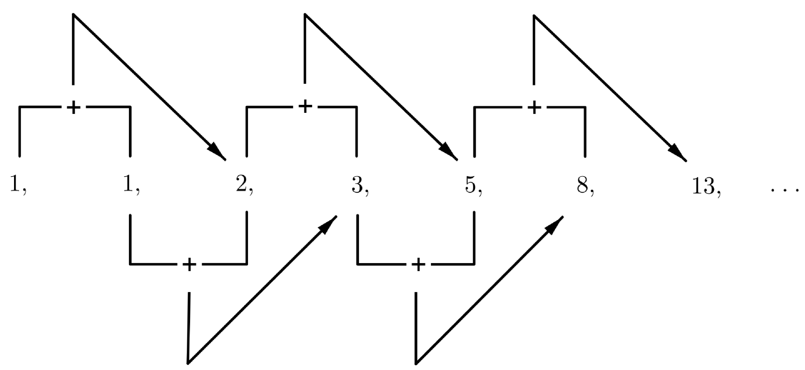


Figura 1: Esquema para obter os números de Fibonacci.

Com base na Figura 1, escreva uma expressão para definir de maneira recursiva a sequência de números sugeridos pela mesma.

Apostila desenvolvida pelo professor Giliar Ferreira Pacheco para a Dissertação de Mestrado apresentada no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da UFSC em 2021.

Para a **Atividade 2** a resposta esperada deve conter: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para os termos após a segunda posição da sequência.

A próxima atividade trabalha a classificação de sequências em recursivas e não recursivas. Assim contempla parte da habilidade EF07MA14.

Atividade 3) A Figura 2 a seguir é composta por quadrados. A medida do lado de cada quadrado da está indicada no interior do mesmo.

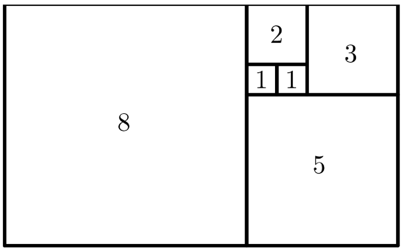


Figura 2: Retângulo de Fibonacci

As medidas dos lados dos quadrados da Figura 2 acima podem ser escritos por meio de uma sequência:

$$(1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8, \cdots).$$

a) Analise a figura e determine o termo da sétima e da oitava posição na sequência.

b) É possível definir essa sequência de maneira recursiva?

A resposta esperada para a **Atividade 3** é:

a) Na sétima posição teremos 13, pois $5 + 8 = 13$, e na oitava posição 21, pois $8 + 13 = 21$.

b) Sim.

Embora o item (b) da **Atividade 3** não peça para apresentar a definição recursiva da sequência de Fibonacci é interessante que seja discutida com a turma e, então, seja colocada no quadro a seguinte definição:

Definição 1. Seja f_n o n-ésimo termo da *Sequência de Fibonacci.* Então f_n satisfaz:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ \forall\ n \geq 3,\ n\ \in\ \mathbb{N},$$

Apostila desenvolvida pelo professor Giliar Ferreira Pacheco para a Dissertação de Mestrado apresentada no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da UFSC em 2021.

onde $f_1 = 1,\ f_2 = 1.$

A atividade seguinte colabora para o desenvolvimento da resolução de problemas que envolvem o cálculo do valor numérico de expressões algébricas. Portanto, essa atividade é uma possibilidade para desenvolver a habilidade EF08MA06.

Atividade 4) Os números 233 e 377 são dois números consecutivos na sequência de Fibonacci. Qual número antecede o 233, nesse sequência?
Lembre-se que:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall\ n \geq 3 \in\ \mathbb{N}.$$

A resposta para a **Atividade 4** pode ser obtida com o seguinte cálculo: $377 - 233 = 144$. Portanto, o número que antecede o 233, na sequência de Fibonacci é 144.

Ao buscar incorporar a sequência de Fibonacci na vida escolar de alunos do Ensino Fundamental - Anos Finais, a Atividade 5 trabalha a construção de um fluxograma para indicar os números seguintes dessa sequência. Portanto, ela trabalha parte da habilidade EF08MA11.

Atividade 5) A sequência de Fibonacci pode ser definida recursivamente da seguinte forma:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall\ n \geq 3 \in\ \mathbb{N},\ \text{com } f_1 = 1 \text{ e } f_2 = 1.$$

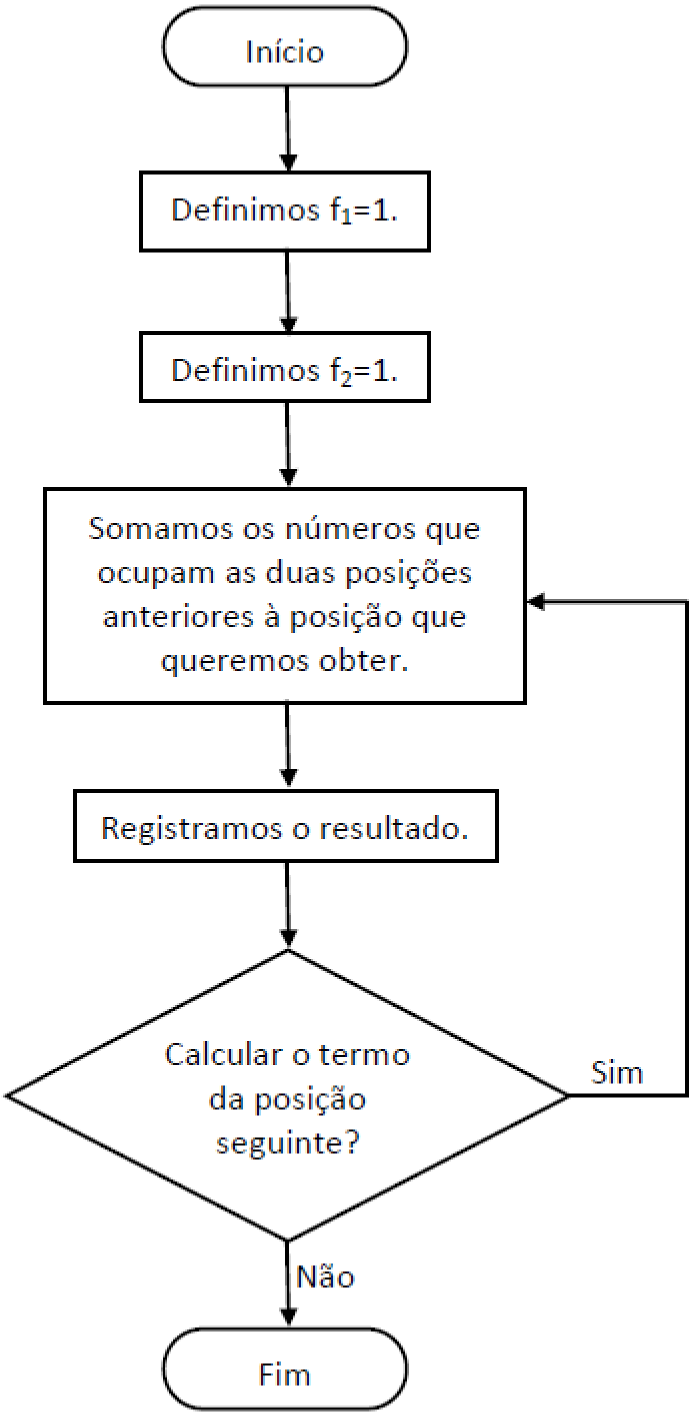
Faça um fluxograma para indicar como obter os números de Fibonacci.

Ao realizar a **Atividade 5** o estudante obterá um fluxograma como o da Figura 3, na página 11.

A estratégia de analisar casos pequenos (com poucos elementos ou com elementos de menor valor) foi fortemente incentivada pelo Professor Dr. Eduardo Tengan durante as aulas das disciplinas que ele ministrou para nós, discentes, durante esse curso. Ela se mostrou muito útil para a elaboração, bem como, para a eliminação de hipóteses.

A atividade a seguir trabalha a utilização da simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas. Além disso, coloca o aluno em contato com uma forma de analisar padrões por meio da observação de casos pequenos. Oferecemos essa atividade como um meio para auxiliar o desenvolvimento da habilidade EF08MA11.

Figura 3: Fluxograma para obter a sequência de Fibonacci.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Atividade 6) Considere a sequência de Fibonacci escrita abaixo, e faça o que se pede.

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...).$$

a) Calcule:

I) f_1.

II) $f_1 + f_3$.

III) $f_1 + f_3 + f_5$.

IV) $f_1 + f_3 + f_5 + f_7$.

V) $f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9$.

b) O resultado de cada um dos cálculos dos itens I ao V são números da sequência de Fibonacci?

c) De acordo com o padrão observado nos resultados dos cálculos dos itens I ao V, responda: qual termo da sequência de Fibonacci será o resultado da soma abaixo?

$$f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{97} + f_{99}$$

Para a **Atividade 6** as respostas esperadas são:

a) Os cálculos são:

I) $f_1 = 1$.

II) $f_1 + f_3 = 1 + 2 = 3$.

III) $f_1 + f_3 + f_5 = 1 + 2 + 5 = 8$.

IV) $f_1 + f_3 + f_5 + f_7 = 1 + 2 + 5 + 13 = 21$.

V) $f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9 = 1 + 2 + 5 + 13 + 34 = 55$.

b) Sim, pois 1, 3, 8, 21 e 55 são números da sequência de Fibonacci.

c) $f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{97} + f_{99} = f_{100}$.

A próxima atividade segue as mesmas características da anterior, agora porém, com o uso de outro padrão presente nos números de Fibonacci.

Atividade 7) Para a sequência de Fibonacci, encontre:

a) O resultado de:

   I) $f_1 + f_2 + f_3$.

   II) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$.

   III) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5$.

   IV) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6$.

   V) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7$.

   VI) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8$.

b) Encontre o termo da sequência de Fibonacci que está mais próximo do resultado obtido em cada um dos itens, I ao VI, e responda: qual a diferença entre o termo encontrado e a soma realizada?

c) De acordo com o padrão observado no resultados dos cálculos dos itens I ao VI, responda: qual termo da sequência de Fibonacci será o resultado da soma abaixo?

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_{n-1} + f_n$$

Para a **Atividade 7** as respostas esperadas são:

a) O resultados para cada cálculo é:

   I) $f_1 + f_2 + f_3 = 1 + 1 + 2 = 4$.

   II) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 + 1 + 2 + 3 = 7$.

   III) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12$.

   IV) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20$.

   V) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 = 33$.

   VI) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 = 54$.

b) Os termo mais próximo de cada resultado obtido nos itens de I a VI é, respectivamente: 5, 8, 13, 21, 34 e 55. A diferença entre a soma obtida em cada item e o termo mais próximo é de uma unidade.

c) $f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_{n-1} + f_n = f_{n+2} - 1$

Apostila desenvolvida pelo professor Giliar Ferreira Pacheco para a Dissertação de Mestrado apresentada no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da UFSC em 2021.

Seguiremos com uma atividade que promove uma investigação colaborativa de uma característica dos números de Fibonacci. Ela também retoma a habilidade de identificar características de triângulos, habilidade EF06MA19, e a habilidade de determinação de medida da abertura de ângulo, por meio do transferidor, habilidade EF06MA27. Por fim, além de interessante, ela trabalha a resolução de problemas que envolvem cálculo do valor numérico de expressões algébricas, ou seja, a habilidade EF08MA06.

Atividade 8) Escolha 4 números consecutivos da sequência de Fibonacci, ou seja, tome $f_n,\ f_{n+1},\ f_{n+2}$ e f_{n+3} (*Por conveniência escolha números menores do que 34*). Em seguida faça o que se pede:

a) Com o auxílio de um compasso e uma régua, construa um triângulo de forma que as medidas dos seus lados sejam obtidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a &= f_n \cdot f_{n+3} \\ b &= 2 \cdot f_{n+1} \cdot f_{n+2} \\ c &= f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 \end{aligned}$$

b) Com um transferidor, meça o ângulo formado pelos lados de medidas a e b.

c) Compare com a medidas obtidas por seus colegas. Elas são iguais?

d) O que podemos dizer sobre um triângulo cujas medidas dos lados são obtidas a partir de 4 números consecutivos da sequência de Fibonacci, como indicado no item (a)?

A recomendação de utilizar números de Fibonacci menores do que 34, na **Atividade 8** tem a finalidade de possibilitar o desenho em uma folha A4. Para números maiores as medidas obtidas são também maiores e isso pode tornar o trabalho mais difícil. Para realizar essa atividade o estudante inicia com a escolha dos 4 números de Fibonacci. Feita a escolha, ele deverá calcular as medidas de $a,\ b$ e c. Para obter o desenho com as medidas indicadas, utilizamos o software Geogebra[1], e nele, já indicamos o ângulo entre os lados a e b. Com a medida desse ângulo, temos subsídio para responder ao item (b) e (c) dessa atividade. Obviamente, o aluno deverá realizar a medição com o transferidor.

Vejamos as medidas e as formas obtidas para cada uma das possibilidades de es-

[1]Disponível em: https://www.geogebra.org/classic

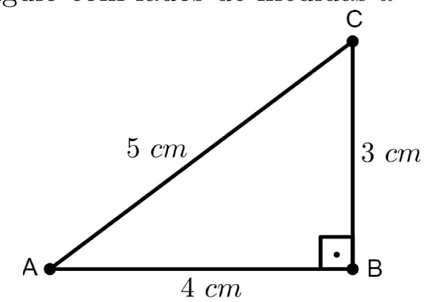
colha de 4 números de Fibonacci, ao seguirmos a recomendação dada no enunciado:

- Números de Fibonacci: $f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_3 = 2$ e $f_4 = 3$.

$$\begin{aligned} a &= f_1 \cdot f_4 = 1 \cdot 3 = 3, \\ b &= 2 \cdot f_2 \cdot f_3 = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4 \quad \text{e} \\ c &= f_2^2 + f_3^2 = 1^2 + 2^2 = 5. \end{aligned}$$

Para $a = 3,\ b = 4$ e $c = 5$ sugerimos usar a unidade de medida centímetro na construção da figura. O triângulo obtido está na Figura 4.

Figura 4: Triângulo com lados de medidas $a = 3,\ b = 4$ e $c = 5$



Fonte: Elaborado pelo autor.

- Números de Fibonacci: $f_2 = 1,\ f_3 = 2,\ f_4 = 3$ e $f_5 = 5$.

$$\begin{aligned} a &= f_2 \cdot f_5 = 1 \cdot 5 = 5, \\ b &= 2 \cdot f_3 \cdot f_4 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12 \quad \text{e} \\ c &= f_3^2 + f_4^2 = 2^2 + 3^2 = 13. \end{aligned}$$

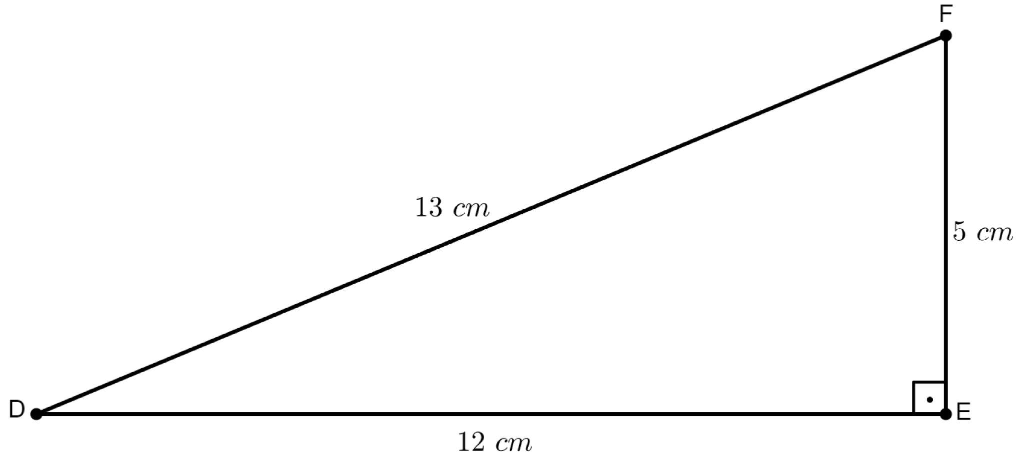
Para $a = 5,\ b = 12$ e $c = 13$ sugerimos usar a unidade de medida centímetro para a medida dos lados. O triângulo obtido está na Figura 5.

- Números de Fibonacci: $f_3 = 2,\ f_4 = 3,\ f_5 = 5$ e $f_6 = 8$.

$$\begin{aligned} a &= f_3 \cdot f_6 = 2 \cdot 8 = 16, \\ b &= 2 \cdot f_4 \cdot f_5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \quad \text{e} \\ c &= f_4^2 + f_5^2 = 3^2 + 5^2 = 34. \end{aligned}$$

Apostila desenvolvida pelo professor Giliar Ferreira Pacheco para a Dissertação de Mestrado apresentada no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da UFSC em 2021.

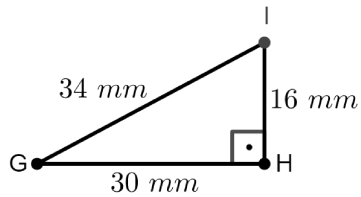
Figura 5: Triângulo com lados de medidas $a = 5,\ b = 12$ e $c = 13$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para $a = 16,\ b = 30$ e $c = 34$ sugerimos usar a unidade de medida milímetro para a medida dos lados. Para utilizar a unidade de medida centímetro nessa e nas próximas figuras, será necessário um papel maior do que uma folha A4. O triângulo obtido está na Figura 6.

Figura 6: Triângulo com lados de medidas $a = 16,\ b = 30$ e $c = 34$



Fonte: Elaborado pelo autor.

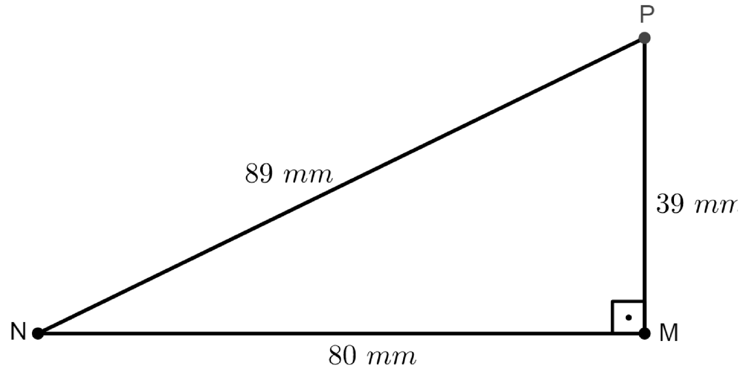
- Números de Fibonacci: $f_4 = 3,\ f_5 = 5,\ f_6 = 8$ e $f_7 = 13$.

$$\begin{aligned} a &= f_4 \cdot f_7 = 3 \cdot 13 = 39, \\ b &= 2 \cdot f_5 \cdot f_6 = 2 \cdot 5 \cdot 8 = 80 \quad \text{e} \\ c &= f_5^2 + f_6^2 = 5^2 + 8^2 = 89. \end{aligned}$$

Para $a = 39,\ b = 80$ e $c = 89$ sugerimos usar a unidade de medida milímetro para a medida dos lados. O triângulo obtido está na Figura 7.

Apostila desenvolvida pelo professor Giliar Ferreira Pacheco para a Dissertação de Mestrado apresentada no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da UFSC em 2021.

Figura 7: Triângulo com lados de medidas $a = 39,\ b = 80$ e $c = 89$



Fonte: Elaborado pelo autor.

- Números de Fibonacci: $f_5 = 5,\ f_6 = 8,\ f_7 = 13$ e $f_8 = 21$.

$$\begin{aligned} a &= f_5 \cdot f_8 = 5 \cdot 21 = 105, \\ b &= 2 \cdot f_6 \cdot f_7 = 2 \cdot 8 \cdot 13 = 208 \quad \text{e} \\ c &= f_6^2 + f_7^2 = 8^2 + 13^2 = 233. \end{aligned}$$

Para $a = 105,\ b = 208$ e $c = 233$ sugerimos usar a unidade de medida milímetro para a medida dos lados. O triângulo obtido está na Figura 8.

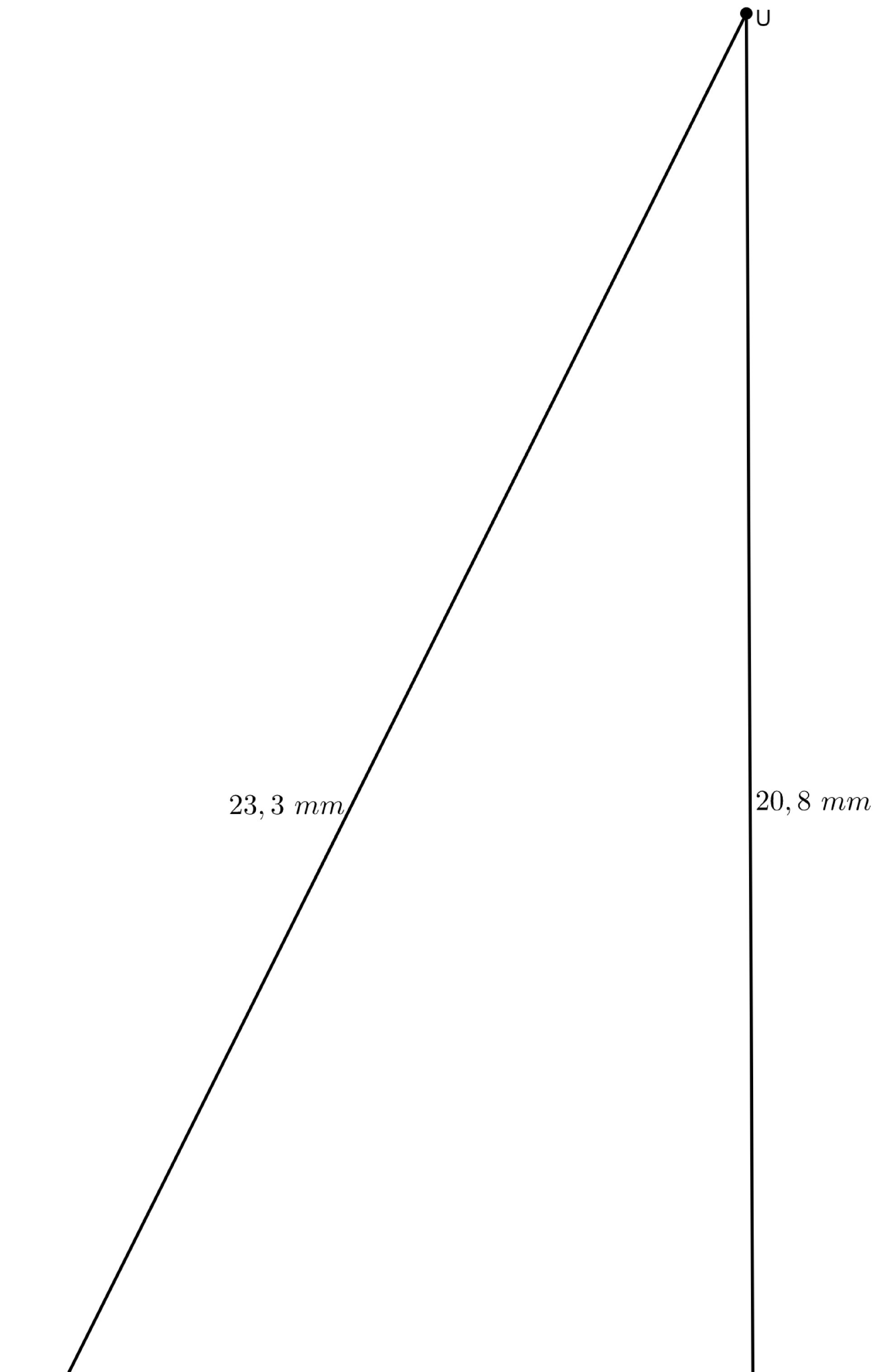
Depois de fazer o desenho do triângulo, conforme indicado no item (a), da **atividade 8**, o aluno poderá responder ao item (b). É importante disponibilizar transferidor para que cada um possa fazer a medida na figura que desenhou. As medidas obtidas, como nossas figuras já indicaram, serão 90º.

Ao responder o item (c) eles irão constatar que todos, salvo erros de construção, obtiveram a mesma medida, ou seja todos são triângulos retângulos.

Por fim, eles poderão escrever no item (d), que todos os triângulos obtidos a partir de 4 números consecutivos da sequência de Fibonacci, conforme indicado no item (a), são retângulos.

As atividades propostas nesse seção servem ainda para inspirar o professor de matemática na utilização da sequência de Fibonacci, assim como, das propriedades relativas aos seus números na etapa do Ensino Fundamental - Anos Finais.

Figura 8: Triângulo com lados de medidas $a = 105,\ b = 208$ e $c = 233$



Fonte: Elaborado pelo autor.

REFERÊNCIAS

DEVLIN, k. *The Men of Numbers. Fibonacci's arithmetic revolution.* New York - NY: Walker Publishing Company, Inc., 2011.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta.* Rio de Janeiro - RJ: SBM, 2015.

VOROBIEV, N. N. *Fibonacci Numbers.* [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2002.

ZAHN, M. *Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.* Rio de Janeiro - RJ: CIÊNCIA MODERNA, 2011.

Apostila desenvolvida pelo professor Giliar Ferreira Pacheco para a Dissertação de Mestrado apresentada no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da UFSC em 2021.

7 CONCLUSÃO

A contribuição de Fibonacci para a matemática, ao que tudo indica, resultaram do reconhecimento dele à superioridade do sistema de numeração Hindu-Arábico.

Sua obra ajudou a difundir na Europa Ocidental essa importante ferramenta matemática. Além de difundir o sistema de numeração Hindu-Arábico, no livro Liber Abacci, Fibonacci registrou o famoso problema dos coelhos. A partir da solução para esse problema chegamos, nos dias atuais, a conhecida sequência de números que leva o seu nome, a *Sequência de Fibonacci*. Atualmente é possível encontrar muitos trabalhos que envolvem os números dessa sequência, chamados números de Fibonacci. As relações entre os números dessa sequência, as relações entre eles e outros resultados da matemática, a curiosa presença desses números na natureza e ainda a aplicação desses números na codificação de dados ajudaram a ilustrar para nós sua importância. Muitas relações, a ocorrência em diversos campos, e ainda outras aplicações dessa sequência podem ser encontradas, e talvez descobertas, o que não causaria espanto.

Diante de sua importância, reunimos em uma apostila, para os professores da etapa Ensino Fundamental - Anos Finais da Educação Básica, algumas opções de atividades pensadas a partir da sequência de Fibonacci. Ao utilizar essa sequência nessa etapa da escolarização, além de colocar os alunos em contato com esses importantes números também se contempla algumas das habilidades presentes na BNCC. As atividades disponibilizadas na apostila do Capítulo 6 poderão inspirar os professores a elaborar outras versões e, então, utilizar outras relações entre os números de Fibonacci, nas suas aulas para o Ensino Fundamental.

Ao incentivar a abordagem dessa sequência no Enino Fundamental acreditamos aumentar as possibilidades de surgirem novas aplicações dela para a solução de problemas do cotidiano das pessoas.

REFERÊNCIAS

AGARWAL, P.; AGARWAL, N.; SAXENA, R. Data encryption through fibonacci sequence and unicode characters. *MIT International Journal of Computer Science and Information Technology*, v. 5, n. 2, p. 79–82, 2015.

BENDICK, J. *Arquimedes: uma porta para a ciência. Tradução de Cecília Prada.* 2ª. ed. São Paulo: Odysseus, 2006.

BORTNER, C. W.; PETERSON, A. C. *The History and Applications of Fibonacci Numbers*. Spring 2016. [Online; acessado 23-04-2021]. <https://digitalcommons.unl.edu/ucareresearch/42/>.

BRADLEY, M. J. *The birth of mathematics: ancient times to 1300.* [S.l.]: Infobase Publishing, 2006.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2018. <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acessado em 30 de mar de 2020.

DEVLIN, k. *The Men of Numbers. Fibonacci's arithmetic revolution.* New York - NY: Walker Publishing Company, Inc., 2011.

EVES, H. W. *Introdução à história da matemática.* [S.l.]: Unicamp, 2011.

HONSBERGER, R. *Mathematical Gems, Vol. 3 (Dolciani Mathematical Expositions, No. 9).* [S.l.]: The Mathematical Association of America, 1985.

KNUTH, D. E. *The Art of Computer Programming, Vol. 1.* [S.l.]: Addison-Wesley, 1997.

LIMA, S. F. d. O. Um sistema para transposição automática de seqüências midi baseada em alcance vocal. Universidade Federal de Uberlândia, 2006. [Online; acessado 25-06-2021]. <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14443>.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta.* Rio de Janeiro - RJ: SBM, 2015.

MORGADO, A. C. d. O. et al. *Análise combinatória e probabilidade.* Rio de Janeiro - RJ: Editora SBM, 2004.

MRáS, A. M. *Sequência de Fibonacci e uma fórmula para seu termo geral.* Dissertação (Mestrado) — PROFMAT - Universidade Federal de Santa Catarina, 2016.

POSAMENTIER, A. S.; LEHMANN, I. *The Fabulous Fibonacci Numbers.* Amherst, - NY: Prometheus Books, 2007.

RAPHAEL, A. J.; SUNDARAM, V. Secured communication through fibonacci numbers and unicode symbols. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, v. 3, n. 4, p. 2229–5518, 2012.

SIGLER, L. *Fibonacci's Liber Abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's book of calculation.* [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2003.

SINGH, P. The so-called fibonacci numbers in ancient and medieval india. *Historia Mathematica*, volume 12, n. 3, p. 229–244, 1985.

SINHA, S. The fibonacci numbers and its amazing applications. *International Journal of Engineering Science Invention*, volume 6, n. 9, p. 07–14, 2017.

VOROBIEV, N. N. *Fibonacci Numbers*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2002.

ZAHN, M. *Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro*. Rio de Janeiro - RJ: CIÊNCIA MODERNA, 2011.

APÊNDICE A – Códigos ASCII

Disponibilizamos duas tabelas com os códigos ASCII (American Standard Code for Information Interchange) para a consulta. Na Tabela 2 estão os códigos de comando e na Tabela 3 estão os códigos dos caracteres de impressão. Sua versão estendida pode ser consultada em (LIMA, 2006).

Tabela 2: Códigos de controle ASCII

Caracteres ASCII de Controle		
Valor decimal	**Caractere**	**Comentário**
00	NULL	Caracter nulo
01	SOH	Começo de cabeçalho de transmissão
02	STX	Começo de texto
03	ETX	Fim de texto
04	EOT	Fim de transmissão
05	ENT	Interroga
06	ACK	Confirmação
07	BEL	Sinal sonoro
08	BS	Volta um caracter
09	HT	Tabulação horizontal
10	LF	Próxima linha
11	VT	Tabulação vertical
12	FF	Próxima página
13	CR	Início de linha
14	SO	Shift-out
15	SI	Shift-in
16	DLE	Data link escape
17	D1	Controle de dispositivo
18	D2	Controle de dispositivo
19	D3	Controle de dispositivo
20	D4	Controle de dispositivo
21	NAK	Negativa de confirmação
22	SYN	Synchronous idle
23	ETB	Fim de transmissão de bloco
24	CAN	Cancela
25	EM	Fim de meio de transmissão
26	SUB	Substitui
27	ESC	Escape
28	FS	Separador de arquivo
29	GS	Separador de grupo
30	RS	Separador de registro
31	US	Separador de unidade

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 3: Códigos de impressão ASCII

Caracteres ASCII Imprimíveis					
Valor decimal	**Caractere**	**Valor decimal**	**Caractere**	**Valor decimal**	**Caractere**
32	Espaço	64	@	96	‘
33	!	65	A	97	a
34	"	66	B	98	b
35	#	67	C	99	c
36	$	68	D	100	d
37	%	69	E	101	e
38	&	70	F	102	f
39	’	71	G	103	g
40	(	72	H	104	h
41	)	73	I	105	i
42	*	74	J	106	j
43	+	75	K	107	k
44	,	76	L	108	l
45	-	77	M	109	m
46	.	78	N	110	n
47	/	79	O	111	o
48	0	80	P	112	p
49	1	81	Q	113	q
50	2	82	R	114	r
51	3	83	S	115	s
52	4	84	T	116	t
53	5	85	U	117	u
54	6	86	V	118	v
55	7	87	W	119	w
56	8	88	X	120	x
57	9	89	Y	121	y
58	:	90	Z	122	z
59	;	91	[	123	{
60	<	92	\	124	|
61	=	93	]	125	}
62	>	94	ˆ	126	˜
63	?	95	_		

Fonte: Elaborada pelo autor