



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CAMPUS FLORIANÓPOLIS  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM  
REDE NACIONAL-PROFMAT**

Jeison Marion Wilberstaedt

**TAXA DE CRESCIMENTO EXPONENCIAL DO NÚMERO DE  
PERMUTAÇÕES POLINOMIAIS**

Florianópolis

2021



Jeison Marion Wilberstaedt

**TAXA DE CRESCIMENTO EXPONENCIAL DO NÚMERO DE  
PERMUTAÇÕES POLINOMIAIS**

Dissertação submetido ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Mario Rodolfo Roldan Daquilema

Florianópolis

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Wilberstaedt, Jeison Marion  
Taxa de crescimento exponencial do número de permutações  
polinomiais / Jeison Marion Wilberstaedt ; orientador,  
Mario Rodolfo Roldán Daquilema, 2021.  
112 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade  
Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e  
Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática,  
Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Permutação polinomial. 3. Taxa de  
crescimento. I. Daquilema, Mario Rodolfo Roldán. II.  
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós  
Graduação em Matemática. III. Título.

Jeison Marion Wilberstaedt

**TAXA DE CRESCIMENTO EXPONENCIAL DO NÚMERO DE  
PERMUTAÇÕES POLINOMIAIS**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Pablo Gutierrez Barrientos  
Universidade Federal Fluminense - UFF

Prof. Dr. Felipe Lopes Castro  
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Marianna Ravara Vago  
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão  
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria Inez Cardoso Gonçalves  
Coordenadora do Programa

---

Prof. Dr. Mario Rodolfo Roldan Daquilema  
Orientador

Florianópolis, 17 de setembro 2021.



Dedico este trabalho aos meus pais, que nunca pouparam esforços para me propiciar uma boa educação e a minha esposa Flávia pelo incentivo contínuo.



## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me conceder condições de concluir esse trabalho.

A minha querida esposa Flávia Vieira Wilberstaedt pela compreensão e apoio durante a realização de mais uma etapa em minha vida acadêmica.

Aos meus filhos Breno e Davi, que mesmo pequenos foram privados de momentos em família por minha ausência, no entanto me deram forças para superar dificuldades no caminho.

Aos meus pais, por tudo que me ofereceram desde minha infância.

Aos demais membros da família por palavras de incentivo quando pesava o cansaço.

Aos colegas de curso por dividirem seus conhecimentos durante cada etapa.

Aos professores e funcionários do departamento de pós graduação em matemática da UFSC por tudo que me ofertaram.

Ao professor e amigo Dr. Ruy Coimbra Charão pelo incentivo ao ingresso no PROF-MAT, e tempo desprendido para que fosse possível a realização de etapas no processo do curso.

Aos demais membros da banca examinadora, Prof. Dr. Felipe Lopes Castro, Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Marianna Ravara Vago e Prof. Dr. Pablo Gutierrez Barrientos, por aceitarem avaliar o trabalho e pelas sugestões dadas para sua melhora.

Ao professor Dr. Mario Rodolfo Roldan Daquilema, que se dispôs acompanhar-me neste projeto e que durante a orientação do mesmo sempre esteve disposto a ajudar, em qualquer momento do dia.

A todos vocês, meu muito Obrigado!



*Na vida, podemos enxergar três verdades máximas: Deus, a morte e a matemática.*

(Luciano Pontes)



## RESUMO

Resulta que um conjunto de 4 polinômios distintos que passam pela origem, induzem de forma “natural” uma permutação de 4 elementos. A forma “natural” consiste em analisar a configuração local dos gráficos dos polinômios em torno da origem e ordená-los de acordo com a posição que ocupam à esquerda do zero e reordená-los de acordo com a sua posição à direita do zero. Neste trabalho estudamos o problema enunciado por Maxim Kontsevich que consiste em saber se, a permutação  $(2, 4, 1, 3)$  pode ser induzida por um conjunto de 4 polinômios. Permutações induzidas por polinômios são chamadas permutações *polinômiais*. Mostramos uma caracterização mais geral, devido a Étienne Ghys, que afirma que nenhuma permutação de  $n$  elementos que contenha  $(2, 4, 1, 3)$  pode ser induzida por polinômios. Também contamos o número de permutações polinômiais de  $n$  elementos e analisamos sua taxa de crescimento. Tal contagem é feita transportando o problema de polinômios a um problema de árvores planares.

**Palavras-chave:** Permutação. Polinômio. Árvore Planar. Taxa de crescimento.



## ABSTRACT

It turns out that a set with 4 different polynomials passing through the origin “naturally” induce a permutation of 4 elements. The “natural” way consists of analyzing the local configuration of the polynomials’ graphs and ordering them according to the position they occupy to the left and right of zero. In this work we study the problem due to Maxim Kontsevich which consists in knowing whether the permutation  $(2, 4, 1, 3)$  can be induced by a set of 4 polynomials. Permutations induced by polynomials are called *polynomial* permutations. We show a more general characterization, due to Étienne Ghys, who states that no permutation of  $n$  elements containing  $(2, 4, 1, 3)$  can be induced by polynomials. We also count the number of polynomial permutations of  $n$  elements and analyze their growth rate. Such counting is done by transporting the polynomial problem to a planar tree problem.

**Keywords:** Permutation. Polynomial. Planar Tree. Growth rate.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Gráfico de $x^2$ e $x^3$ .....	32
Figura 2	Gráfico de $p_1$ e $p_2$ .....	34
Figura 3	Gráfico de $q_1$ e $q_2$ .....	35
Figura 4	Ordenações .....	35
Figura 5	Componentes de uma árvore .....	39
Figura 6	Árvore A .....	40
Figura 7	Árvore planar .....	41
Figura 8	Árvore planar .....	41
Figura 9	Subárvore da figura 8 .....	42
Figura 10	Árvore com 1 aresta .....	42
Figura 11	Árvores com 2 arestas .....	42
Figura 12	Árvores com 3 arestas .....	43
Figura 13	Contorno da árvore .....	43
Figura 14	Pilha de 5 objetos em formação. ....	47
Figura 15	Pilha de 5 objetos em formação. ....	47
Figura 16	Pilha de 5 objetos .....	48
Figura 17	Permutação $(1, 2, 3) \longrightarrow (3, 1, 2)$ .....	58
Figura 18	Permutação $(2\ 1)$ .....	58
Figura 19	permutação $(1\ 2)$ .....	59
Figura 20	Permutação $(1\ 2\ 3)$ .....	59
Figura 21	Permutação $(1\ 3\ 2)$ .....	60
Figura 22	Permutação $(2\ 1\ 3)$ .....	60
Figura 23	Permutação $(2\ 3\ 1)$ .....	60

Figura 24	Permutação ( 3 1 2 )	60
Figura 25	Permutação ( 3 2 1 )	61
Figura 26	Permutação (2, 4, 1, 3)	62
Figura 27	Permutação (3, 1, 4, 2)	65
Figura 28	Permutação (3, 1, 4, 2)	65
Figura 29	Pontos colapsados	67
Figura 30	Gráficos dos oito polinômios	70
Figura 31	Zoom na origem	71
Figura 32	Termos de grau 1	71
Figura 33	Termos de grau 2	72
Figura 34	Termos de grau 3	72
Figura 35	Árvore completa	73
Figura 36	Árvore original e com torção de $p_4 \wedge p_5$	74
Figura 37	Árvores com torção dos galhos partindo dos ancestrais nos níveis 3 e árvore torcida	75
Figura 38	Árvores associadas a trios de polinômios diferentes que induzem a mesma permutação	79
Figura 39	Árvore completa e árvore completa podada	80
Figura 40	Árvores de Schroder de raiz com mais de um filho ou com um único filho	81
Figura 41	Folhas $i$ e $i + 1$ não são irmãs	82
Figura 42	Árvores podadas com 2 folhas	83
Figura 43	Situação em que a $(i+1)$ -ésima folha possui apenas uma irmã	84
Figura 44	Retorno de $A'$ para $A_1$ e $A_2$	85
Figura 45	Árvores com 3 folhas	86
Figura 46	Árvore podada $n = 5$ e $K = 3$	87
Figura 47	Permutação (1 2 3 4)	103

Figura 48	Permutação (1 2 4 3)	103
Figura 49	Permutação (1 3 2 4)	103
Figura 50	Permutação (1 3 4 2)	104
Figura 51	Permutação ( 1 4 2 3)	104
Figura 52	Permutação ( 1 4 3 2)	104
Figura 53	Permutação (2 1 3 4)	105
Figura 54	Permutação (2 1 4 3)	105
Figura 55	Permutação (2 3 1 4)	105
Figura 56	Permutação ( 2 3 4 1)	106
Figura 57	Permutação (2 4 3 1)	106
Figura 58	Permutação (3 1 2 4)	106
Figura 59	Permutação (3 2 1 4)	107
Figura 60	Permutação ( 3 2 4 1)	107
Figura 61	Permutação (3 4 1 2)	107
Figura 62	Permutação (3 4 2 1)	108
Figura 63	Permutação (4 1 2 3)	108
Figura 64	Permutação (4 1 3 2)	108
Figura 65	Permutação (4 2 1 3)	109
Figura 66	Permutação ( 4 2 3 1)	109
Figura 67	Permutação (4 3 1 2)	109
Figura 68	Permutação (4 3 2 1)	110



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	21
<b>2 PRELIMINARES IMPORTANTES</b> .....	25
2.1 TAXA DE CRESCIMENTO .....	25
2.2 FUNÇÃO GERADORA .....	26
2.3 CONFIGURAÇÃO LOCAL DE UM GRÁFICO DE POLINÔMIO .....	29
2.4 REVISÃO DE PERMUTAÇÕES .....	36
2.5 PERMUTAÇÃO E RELAÇÃO DE ORDEM TOTAL .....	37
<b>3 UM EXEMPLO PRELIMINAR DE CONTAGEM</b> .....	39
3.1 ÁRVORES PLANARES .....	39
3.2 SORTEIO DE PILHAS .....	46
3.3 NÚMERO DE SORTEIO DE PILHAS .....	49
<b>4 PERMUTAÇÕES DE TIPO POLINOMIAL</b> .....	57
4.1 PERMUTAÇÃO POLINOMIAL .....	57
4.2 PERMUTAÇÃO POLINOMIAL COM DUAS CURVAS .....	58
4.3 PERMUTAÇÃO POLINOMIAL COM TRÊS CURVAS .....	59
4.4 TEOREMA DE MAXIM KONTSEVICH .....	61
4.5 TEOREMA DE ÉTIENNE GHYS .....	63
<b>5 CONTANDO PERMUTAÇÕES POLINOMIAIS</b> .....	69
5.1 ARBORIZAÇÃO DE POLINÔMIOS .....	69
5.2 ÁRVORES PLANARES DE SCHRODER .....	79
5.3 TAXA DE CRESCIMENTO DE PERMUTAÇÕES POLINOMIAIS .....	85
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	91
6.1 INFORMAÇÕES ADICIONAIS .....	91
6.2 APLICAÇÃO .....	92
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	95
<b>APÊNDICE A – Números de Catalan e Sequências de Contorno</b> .....	99
<b>APÊNDICE B – Lista de permutações polinomiais de 4 elementos</b> .....	103



## 1 INTRODUÇÃO

“Em março de 2009, participei de uma reunião administrativa e o colega sentado ao meu lado ficou ainda mais entediado do que eu. Obviamente Maxim Kontsevich tinha outra coisa em mente. De repente, ele me passou um bilhete de metrô parisiense contendo um rabisco e uma única palavra: “impossível”. Esse era o novo teorema que ele queria compartilhar comigo!” (GHYS, 2017).

É impressionante como um rabisco em um bilhete de metrô pode gerar um estudo que contempla assuntos de álgebra, topologia, geometria, entre outros. O teorema escrito por Maxim Kontsevich citado por Étienne Ghys é um dos pontos principais tratados neste trabalho. Outro ponto importante é o teorema enunciado pelo próprio Étienne, que generaliza o teorema de Kontsevich. Os dois teoremas, também mostrados em (GHYS, 2013), tratam da possibilidade de encontrarmos polinômios passando pela origem tais que a ordenação dos polinômios referentes a posição local dos seus gráficos vistos à esquerda da origem, comparada com a ordenação da posição dos gráficos olhados à direita da origem podem ser relacionada a uma permutação  $\pi$  dada. Se forem encontrados tais polinômios então diremos que  $\pi$  é uma permutação polinomial. Enquanto o teorema de Maxim Kontsevich elucidava o caso para as permutações polinomiais de quatro elementos, o teorema de Étienne Ghys se vale do primeiro para generalizar como são as permutações polinomiais de uma quantidade qualquer de elementos.

Como ponto alto do trabalho, utilizando o conceito de arborização de polinômios, contaremos o número de permutações polinomiais de  $n$  elementos e veremos qual é a sua taxa de crescimento.

É interessante citar que, apesar do trabalho requerer um conhecimento matemático mais específico, partes dele podem ser compreendidas por pessoas que possuem um entendimento dos conceitos de polinômios, gráficos e permutações. Isso torna possível uma aplicação desse estudo para alunos que se encontram cursando o primeiro ano do ensino médio.

Para facilitar a compreensão, o texto deste trabalho foi estruturado da seguinte maneira:

No segundo capítulo apresentamos os conceitos de taxa de crescimento e funções geradoras, conceitos esses que são essenciais para atingirmos o objetivo final do trabalho. Também faremos uma revisão sobre polinômios e em seguida estudamos a configuração local do gráfico de polinômio. Para isso utilizamos o conceito de valuação de um polinômio, que se mostra uma interessante ferramenta no estudo devido ao fato de ser facilmente

identificada no polinômio e em contrapartida fornecendo importantes resultados. Finalizamos o capítulo com mais duas seções: uma trabalhando com revisão sobre permutações, conteúdo base para o começo do quarto capítulo, e a última falando sobre relação de ordem total e uma forma alternativa de introduzir permutações.

No terceiro capítulo iniciamos o estudo de árvores planares que serão a ferramenta principal para contagem do número de permutações polinomiais, onde a ideia geral será transportar o estudo do problema dado no nível de permutações ao estudo do problema no nível de árvores. Para nos familiarizarmos com estes ingredientes, terminaremos este capítulo com um problema clássico da computação, o problema do sorteio de pilhas, onde a resolução nos apresenta uma ideia de como resolver o problema que é o foco principal do nosso estudo.

No quarto capítulo tratamos de uma classe especial de permutações, chamadas de permutações polinomiais, que recebe esse nome devido a forma que é definida, envolvendo polinômios. Informalmente podemos dizer que uma permutação  $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  é polinomial se existem  $n$  polinômios passando pela origem de forma que a configuração local dos seus gráficos, quando olhados à esquerda da origem forem ordenados como  $1, 2, \dots, n$  de acordo com a posição que ocupam, e quando olhados à direita da origem a posição ocupada pelo gráfico de cada um dos polinômios passa a ser a mesma indicada pela permutação  $\pi$ . Depois de definir formalmente uma permutação polinomial, passamos a analisar os casos de intercâmbios polinomiais de duas curvas, depois de três curvas e então chegando ao caso com quatro curvas, onde apresentamos o teorema de Maxim Kontsevich, e terminamos o capítulo com a generalização para intercâmbio polinomiais de  $n$  curvas com o teorema de Étienne Ghys. Quando passamos do caso de permutações de três elementos para o caso com quatro elementos é que percebemos que existem permutações que não são polinomiais, e já nos aguça a vontade de saber quantas das permutações de  $n$  elementos serão polinomiais.

No quinto capítulo trazemos o conceito de arborização de polinômios, isto é, dado  $n$  polinômios distintos passando pela origem, vamos construir uma árvore que seja relacionada a eles. Em seguida definimos árvore de Schroder ou árvore podada e vemos que uma árvore deste tipo pode ser associada a  $n$  polinômios. Mais ainda, mostramos que tomando conjuntos distintos contendo  $n$  polinômios cada, sendo que estes  $n$  polinômios induzam uma mesma permutação de acordo com a configuração local dos seus gráficos na vizinhança da origem, então eles são relacionados a uma única árvore de Schroder. Depois vemos que o número de árvores de Schroder contendo  $n$  folhas é igual ao número de permutações polinomiais de  $n$  elementos e portanto, ao invés de contarmos diretamente o número de permutações polinomiais, vamos contar o número de árvores de Schroder. No

fim do capítulo cinco finalmente chegamos a uma forma de calcular o valor aproximado do número de permutações polinomiais e mostramos a taxa de crescimento do número de permutações polinomiais.

No sexto capítulo finalizamos falando que o trabalho poderia ter uma continuação no sentido de ampliarmos o estudo para uma visão no espaço, visto que todo ele foi feito pensando em duas dimensões e terminamos o capítulo apresentamos uma possível aplicação do conteúdo do trabalho para alunos do ensino médio, mostrando o que um “simples” comentário pode trazer a tona uma questão que se desdobra em vários assuntos estudados por eles nas aulas de matemática e que ainda pode continuar a ser uma fonte de conteúdos a serem aprendidos e aprofundados.



## 2 PRELIMINARES IMPORTANTES

Na primeira parte deste capítulo introduzimos dois ingredientes essenciais que serão importantes no capítulo cinco: o conceito de taxa de crescimento exponencial associada a uma sequência de números reais e o conceito de função geradora induzida por uma sequência de números reais. Na segunda parte faremos uma revisão de polinômios focando nossa atenção no estudo da configuração local do gráfico de um polinômio. Depois revisaremos o conceito de permutação que, a grosso modo expressa a ideia de que objetos distintos podem ser arranjados em inúmeras ordens diferentes. Para finalizar, veremos uma forma alternativa de introduzir permutações via o conceito de relação de ordem total.

### 2.1 TAXA DE CRESCIMENTO

Dada uma sequência  $(a_n)$  de números reais positivos, a *taxa de crescimento exponencial* da sequência  $(a_n)$ , denotada por  $\tau = \tau((a_n))$ , é definido pelo seguinte limite,

$$\tau((a_n)) := \limsup \frac{1}{n} \log a_n.$$

Isto significa que para  $n$  grande  $a_n$  se comporta como  $e^{\tau n}$ . Note que se  $(a_n)$  for uma sequência de ordem polinomial<sup>1</sup> então  $\tau((a_n)) = 0$ . Por outro lado, se  $(a_n)$  for a sequência de fatorial  $a_n = n!$  então  $\tau((a_n)) = +\infty$ . É interessante estudar sequências cuja taxa de crescimento seja positiva e finita. De fato, muitos fenômenos da natureza (biológica, física, econômica, computacional, etc.) podem ser descritos por uma sequência cujo crescimento é de ordem exponencial.

No presente trabalho estudaremos um tipo especial de sequência  $(a_n)$  associada a permutações de  $n$  elementos que chamamos de permutações polinomiais. Veremos que esta sequência admite crescimento exponencial. Como sabemos, com  $n$  elementos distintos temos um total de  $n!$  permutações distintas. Assim a sequência  $(a_n)$ , que tem crescimento exponencial, comparada com o número total de permutações resulta ser uma sequência, em algum sentido, limitada. Em outras palavras, para  $n$  grande, se escolhermos ao acaso uma permutação de  $n$  elementos então, com alta probabilidade, tal escolha não será uma permutação polinomial; no capítulo 5 comentaremos novamente este fato.

---

<sup>1</sup>A sequência  $a_n$  é dita de ordem polinomial se  $|a_n| \leq Mp(n)$  para algum polinômio  $p(n)$  e alguma constante  $M > 0$ .

## 2.2 FUNÇÃO GERADORA

Seja  $(a_n)$  uma sequência de números reais. Quando queremos extrair alguma informação da sequência  $(a_n)$ , às vezes é útil considerar a seguinte soma infinita (chamada também de série):

$$G(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (2.1)$$

Estamos interessados em estudar e obter informações da soma  $G$  para depois obter alguma informação da sequência  $(a_n)$ . No final desta seção ilustraremos com um exemplo o fato de que trabalhar com  $G$  tem uma vantagem especial quando a sequência  $(a_n)$  está definida de forma recursiva. Por outro lado, a partir da soma  $G$ , usando técnicas do cálculo diferencial, podemos recuperar toda a sequência se assumirmos que a soma (2.1) converge para algum valor não nulo de  $z$ .

A soma  $G(z)$  é chamada *função geradora* associada à sequência  $(a_n)$ .

O uso de funções geradoras proporciona uma gama de técnicas para resolver problemas complicados. Uma pergunta importante tem a ver com a convergência<sup>2</sup> da soma (2.1). Em qualquer texto que trate a teoria das séries infinitas, (LEITHOLD, 1994) por exemplo, o leitor pode consultar os seguintes resultados de convergência:

1. Se a série converge para algum valor particular de  $z = z_0$ , então também converge para todos os valores de  $z$  tais que  $|z| < |z_0|$ .
2. A série converge para algum  $z \neq 0$  se, e somente se, a sequência  $(\sqrt[n]{|a_n|})$  é limitada.

Antes de apresentarmos exemplos, vamos ver resumidamente algumas propriedades ou técnicas fundamentais das funções geradoras. Para isso vamos considerar as séries convergentes, ou seja, tomando  $z$  dentro do raio de convergência das séries em questão.

**Soma:** Seja  $G(z)$  a função geradora da sequência  $(a_n)$  e seja  $H(z)$  a função geradora da sequência  $(b_n)$ . Então  $\alpha G(z) + \beta H(z)$  é a função geradora da sequência  $(\alpha a_n + \beta b_n)$ , assim:

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^n.$$

**Deslocamento:** Seja  $G(z)$  a função geradora da sequência  $(a_n)$ . Então  $z^m G(z)$  é a função geradora de  $(a_{n-m}) = (0, \dots, 0, a_0, a_1, a_2, \dots)$  cujo os  $m$  primeiros termos são zeros. Portanto

$$z^m G(z) = z^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=m}^{\infty} a_{n-m} z^n.$$

---

<sup>2</sup>O raio de convergência  $\rho$  da série  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$  é um número real não negativo ou  $\infty$  tal que a série converge para todo  $|z| < \rho$ , mas não converge para  $|z| > \rho$ .

De forma similar a função geradora da sequência  $(a_{n+m}) = (a_m, a_{m+1}, \dots)$  é a função

$$\frac{1}{z^m}(G(z) - a_0 - a_1z - \dots - a_{m-1}z^{m-1}).$$

**Multiplicação:** Seja  $G(z)$  a função geradora da sequência  $(a_n)$  e seja  $H(z)$  a função geradora da sequência  $(b_n)$ . Então o produto  $G(z) \cdot H(z)$  é a função geradora para a sequência  $(c_n)$ , onde

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

**Derivação:** As técnicas do cálculo nos dão mais uma operação. Se  $G(z)$  é a soma dada pela Equação 2.1, então sua derivada é dada por

$$G'(z) = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}z^k.$$

Portanto, a função geradora da sequência  $(na_n)$  é  $zG'(z)$ .

**Funções Geradoras Conhecidas:** Dada uma função qualquer, sempre que for possível determinar sua expansão em séries de potências, então explicitamente teremos uma função geradora para uma sequência particular. Estas funções podem ser utilizadas em conjunto com as operações anteriores. Consideremos as duas funções principais que admitem expansão em séries de potências:

(i) Série binomial:

$$(1+z)^l = 1 + lz + \frac{l(l-1)}{2}z^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{l}{k} z^k,$$

onde  $l$  é um número inteiro não negativo.

(ii) Série exponencial:

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}z^k.$$

Exemplos:

(a) Seja  $a_n$  uma sequência constante, digamos  $a_n = 1$  para todo  $n \geq 0$ . Então a função geradora de  $(a_n)$  é dada por

$$G(z) = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \quad (2.2)$$

Note que  $G(z)$  está bem definida para  $|z| < 1$ . Pela propriedade de deslocamento,  $zG(z)$  é a função geradora da sequência  $(0, 1, 1, \dots)$  e portanto  $G(z) - zG(z) = 1$ .

E isto nos dá a importante fórmula

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots \quad (2.3)$$

(b) Sejam  $(a_n)$  a sequência exponencial com  $a_n = k^n$ ,  $k \in \mathbb{R}^*$  e  $F(z)$  a função geradora associada à sequência  $(a_n)$ .

De acordo com o exemplo (a),  $F(z) = G(kz)$ . Portanto a função estará bem definida se  $|kz| < 1$ , ou seja, para todo  $|z| < \frac{1}{|k|}$ . Neste caso

$$F(z) = \frac{1}{1-kz} \quad (2.4)$$

(c) Agora vamos ver um exemplo em que a sequência está definida de forma recursiva. Utilizando as propriedades de funções geradoras chegaremos a uma maneira de encontrar o  $n$ -ésimo termo da sequência sem ter que descobrir todos os termos anteriores.

Seja  $(F_n)$  a conhecida sequência de Fibonacci. Sabemos que  $(F_n)$  é definida pela recorrência  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  para  $n \geq 0$ , com  $F_0 = 0$  e  $F_1 = 1$ . Vamos determinar uma fórmula fechada para calcular  $F_n$ .

Seja  $F(z)$  a função geradora da sequência  $(F_n)$ . Segue que

$$\begin{aligned} F(z) &= F_0 + F_1z + F_2z^2 + F_3z^3 + \dots \\ \implies -zF(z) &= -F_0z - F_1z^2 - F_2z^3 - \dots \\ \implies -z^2F(z) &= -F_0z^2 - F_1z^3 - \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Somando as três igualdades em (2.5), teremos

$$\begin{aligned} F(z) - zF(z) - z^2F(z) &= F_0 + (F_1 - F_0)z \\ \iff (1 - z - z^2)F(z) &= 0 + (1 - 0)z \\ \iff (1 - z - z^2)F(z) &= z \end{aligned}$$

$$\iff F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} \quad (2.6)$$

Note que o denominador  $1 - z - z^2$  é uma equação quadrática cujas raízes são  $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Usando decomposição em frações parciais resulta que

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{1 - \tau z} - \frac{1}{1 - \tilde{\tau} z} \right),$$

onde  $\tau = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$  e  $\tilde{\tau} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ . Agora, sabendo que a soma infinita  $1 + \tau z +$

$(\tau z)^2 + \dots$  é igual a  $\frac{1}{1 - \tau z}$  temos que,

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( (1 + \tau z + (\tau z)^2 + \dots) - (1 + \tilde{\tau} z + \tilde{\tau}^2 z^2 + \dots) \right).$$

Portanto, observando os coeficientes dos termos de  $z^n$  que devem ser iguais a  $F_n$  obtemos

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau^n - \tilde{\tau}^n)$$

ou seja,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

que é a fórmula fechada para os números de Fibonacci.

### 2.3 CONFIGURAÇÃO LOCAL DE UM GRÁFICO DE POLINÔMIO

Nesta seção faremos uma revisão de polinômios para depois focarmos nossa atenção no estudo da configuração local do gráfico de um polinômio.

Uma função  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma *função polinomial (ou polinômio)* se existem  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tais que para todo  $x \in \mathbb{R}$  temos

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0. \quad (2.7)$$

Se  $a_n \neq 0$ , dizemos que  $p$  tem grau  $n$ .

Denotemos com  $\mathbb{R}[x]$  o conjunto de todos os polinômios de uma variável a coeficientes reais.

A soma e o produto de funções polinomiais também são funções polinomiais.

Uma função polinomial  $f$  chama-se *identicamente nula* quando  $p(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . É possível demonstrar que para isso acontecer, na soma (2.7) teremos todos os coeficientes  $a_i$ 's iguais a zero.

Seja  $p$  um polinômio qualquer. Se  $p(\alpha) = 0$  então  $\alpha$  é chamado de raiz de  $p$ .

Dado um polinômio  $p$  de grau  $n \geq 1$  sabemos que  $p$  possui  $n$  raízes, que podem ser complexas ou reais e não necessariamente diferentes entre si. Portanto  $p$  possui no máximo  $n$  raízes reais distintas. Mais informações e outras propriedades importantes dos polinômios podem ser vistas em (LIMA et al., 1997).

Dado um polinômio que passa pela origem, queremos entender como é o seu gráfico numa vizinhança da origem. Veremos que, dependendo da paridade da valuação do polinômio, existem apenas duas configurações possíveis. Para isso começaremos introduzindo o conceito de *valuação*.

**Definição 1** Seja  $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$  um polinômio não identicamente nulo de  $\mathbb{R}[x]$ . A avaliação de  $p(x)$  é o menor inteiro  $k$  tal que  $a_k$  é não nulo,

$$v(p) = \inf\{k/a_k \neq 0\},$$

ou seja, é o primeiro índice do coeficiente não trivial do polinômio.

Definimos também  $v(0) := \infty$ .

**Proposição 2.3.1** A avaliação é uma função  $v : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- (a)  $v(0) = \infty$ .
- (b)  $v(pq) = v(p) + v(q)$ .
- (c)  $v(p + q) \geq \min\{v(p), v(q)\}$  se  $p + q \neq 0$ .

*Demonstração:* O primeiro item segue por definição. Para provar (b) e (c) consideremos os polinômios  $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$  e  $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$  tais que  $p(x) - q(x) \neq 0$ , com  $v(p) = k$  e  $v(q) = t$ .

$$(b) \quad v(pq) = v(p) + v(q).$$

Temos:

$$v(p) = k \Rightarrow p(x) = \sum_{i=k}^n a_i x^i$$

e

$$v(q) = t \Rightarrow q(x) = \sum_{i=t}^m b_i x^i.$$

Assim

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i,$$

com  $c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j}$ . Porém como  $a_j = 0$  para  $j < k$  e  $b_{i-j} = 0$  para  $i - j < t$  então, para qualquer  $i < k + t$  segue que

$$c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots + a_k b_{i-k} + \cdots + a_{i-1} b_1 + a_i b_0 = 0$$

pois cada parcela da soma é igual a 0, visto que possui pelo menos um dos fatores igual a 0.

Por outro lado, se  $i = k + t$  então  $c_i = a_k b_t \neq 0$ .

E assim temos

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{i=k+t}^{n+m} c_i x^i.$$

Portanto,  $v(pq) = k + t = v(p) + v(q)$ .

$$(c) \quad v(p + q) \geq \min\{k, t\} = \min\{v(p), v(q)\}.$$

Para mostrar (c), consideremos, sem perda de generalidade,  $n > m$ . Segue que

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)x_i.$$

Caso  $k < t$  teremos  $a_i + b_i = 0 + 0 = 0$  para todo  $i < k$ , mas como  $p(x) \neq q(x)$  então  $a_i + b_i \neq 0$  para algum  $i \geq k$ . Portanto,  $v(p + q) \geq k$ .

Analogamente, para o caso  $t < k$  concluímos que  $v(p + q) \geq t$ .

Logo mostramos que  $v(p + q) \geq \min\{k, t\} = \min\{v(p), v(q)\}$ .  $\square$

Para traçar gráficos de funções polinomiais, certas informações são de grande utilidade, em particular se soubermos o que acontecerá quando tomarmos  $|x|$  suficientemente grande<sup>3</sup> ou pequeno<sup>4</sup>. Veremos então como serão os gráficos de acordo com algumas características da função.

Seja o polinômio

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \text{ com } a_n \neq 0.$$

Tomando  $|x|$  suficientemente grande, temos duas situações distintas dependendo da paridade de  $n$ .

Se  $n$  é par então o valor de  $p(x)$  possui o mesmo sinal de  $a_n$ , não importando se  $x$  é positivo ou negativo.

Por outro lado, se  $n$  for ímpar então  $p(x)$  terá o mesmo sinal de  $a_n$  para  $x$  positivo e terá o sinal oposto a  $a_n$  se  $x$  for um número negativo. Como uma função polinomial é contínua, o fato de existir  $x_0 < 0$  e  $x_1 > 0$  tal que  $p(x_0)$  e  $p(x_1)$  possuem sinais distintos nos diz que  $p$  possui uma raiz real entre  $x_0$  e  $x_1$ .

Também temos que se  $|x|$  tende ao infinito<sup>5</sup> então  $|p(x)|$  também tende ao infinito, não importando se  $n$  é par ou ímpar.

Observe os gráficos dos polinômios  $p(x) = x^2$  e  $q(x) = x^3$  mostrados na Figura 1.

---

<sup>3</sup>Dizemos que  $|x|$  é suficientemente grande quando dado qualquer número real positivo  $N$ , tomaremos para valores de  $x$  os que possuem  $|x| > N$ .

<sup>4</sup>De forma similar, tomamos  $|x|$  suficientemente pequeno quando dado qualquer número real positivo  $\varepsilon$ , tomaremos para valores de  $x$  os que possuem  $|x| < \varepsilon$ .

<sup>5</sup>Ao longo do trabalho veremos expressões como “ $x$  tende ao infinito”, “ $x$  tende a 0”, “ $f(x)$  tende a infinito se  $|x|$  tende ao infinito”, etc. Todas elas são dadas na linguagem clássica de limites.

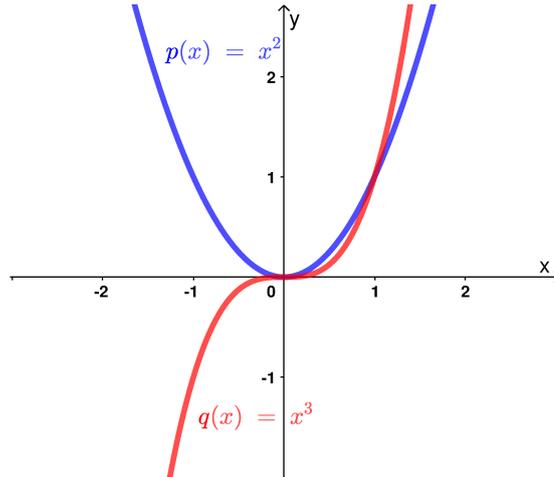


Figura 1: Gráfico de  $x^2$  e  $x^3$

Podemos perceber que  $p(x) = x^2$  é positivo para  $x$  positivo ou negativo enquanto que  $q(x) = x^3$  possui sinal positivo para  $x > 0$  e negativo para  $x < 0$ . Além disso, se  $|x|$  tende ao infinito, tanto  $|p(x)|$  quanto  $|q(x)|$  também tendem ao infinito.

Na verdade, o que mais nos interessa neste momento é a configuração local do gráfico de uma função polinomial na vizinhança da origem<sup>6</sup>.

Com base no conceito de valuação definido, começaremos a estudar algumas afirmações a respeito do comportamento de funções na vizinhança da origem, isto é, o que podemos dizer a respeito de  $p(x)$  quando tomamos  $|x|$  suficientemente pequeno.

**Proposição 2.3.2** *Seja  $p \in \mathbb{R}[x]$  tal que  $p(0) = 0$ . Então, o polinômio  $p$  muda de sinal na vizinhança de 0 se, e somente se, sua valuação for ímpar.*

*Demonstração:* Seja  $p$  uma função polinomial com  $v(p) = k$ . Temos:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \cdots + a_n x^n \\ &= x^k (a_k + a_{k+1} x + \cdots + a_n x^{n-k}) \\ &= x^k (a_k + q(x)), \end{aligned}$$

onde  $q(x) = a_{k+1} x + \cdots + a_n x^{n-k}$ .

Note que se  $x \rightarrow 0$  então  $q(x) \rightarrow 0$  e, sendo assim,  $a_k + q(x) > 0$  se  $a_k > 0$  e  $a_k + q(x) < 0$  se  $a_k < 0$ , quando  $x \rightarrow 0$ .

<sup>6</sup>Poderíamos ter feito o estudo da estrutura local dos gráficos de polinômios que se intersectam num ponto comum  $(x_0, y_0)$ , porém é suficiente considerar apenas o caso  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Isto se deve ao fato de que dada uma função  $p$  que passa pela origem, podemos trabalhar com uma função  $p'$  que é a  $p$  transladada de forma que  $p'(x) = p(x - x_0) + y_0$ , isto é, o ponto  $(0, 0)$  seja transladado para o ponto  $(x_0, y_0)$ . Assim, as conclusões que tomamos para as funções na vizinhança da origem podem ser generalizadas, com algumas adequações, para um outro ponto qualquer.

Vamos supor que  $a_k > 0$  e consideremos  $x$  suficientemente pequeno.

Então, como vimos, temos  $a_k + q(x) > 0$ .

( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $p$  mude de sinal na vizinhança de 0.

Assim, para  $x > 0$  temos  $x^k > 0 \forall k$ , segue que  $p(x) = x^k (a_k + q(x)) > 0$ . Como por hipótese  $p$  muda de sinal, para  $x < 0$  teremos  $p(x) < 0$ , daí,

$$p(x) < 0 \Rightarrow x^k (a_k + q(x)) < 0 \Rightarrow x^k < 0 \Rightarrow k \text{ é ímpar.}$$

( $\Leftarrow$ ) Suponha que  $k$  é ímpar.

Assim,  $x > 0 \Rightarrow x^k > 0 \Rightarrow x^k (a_k + q(x)) > 0 \Rightarrow p(x) > 0$ . Por outro lado,  $x < 0 \Rightarrow x^k < 0 \Rightarrow x^k (a_k + q(x)) < 0 \Rightarrow p(x) < 0$ . Portanto, se  $k$  é ímpar então  $f$  muda de sinal na vizinhança de 0.

De forma análoga provamos o caso  $a_k < 0$ .

Logo  $p$  muda de sinal na vizinhança de 0 se e somente se  $v(p) = k$  é ímpar.  $\square$

Note agora que dadas duas funções polinomiais  $p_1$  e  $p_2$ , a posição relativa dos gráficos de  $p_1$  e  $p_2$  na vizinhança de um certo ponto pode ser descrita considerando a valuação de  $p_1 - p_2$ .

**Proposição 2.3.3** *Sejam  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[x]$  tal que  $p_1(0) = p_2(0) = 0$ . Se a valuação de  $(p_1 - p_2)$  for ímpar então os gráficos de  $p_1$  e  $p_2$  se cruzam na origem.*

*Demonstração:* Assuma que a valuação de  $(p_1 - p_2)$  é ímpar e tome  $|x|$  suficientemente pequeno. Suponha por absurdo que os gráficos de  $p_1$  e de  $p_2$  não se cruzam na origem. Então temos duas possibilidades, ou  $(p_1 - p_2)(x) > 0$  para  $x \neq 0$  ou então  $(p_1 - p_2)(x) < 0$  para  $x \neq 0$ . Em qualquer dos dois casos concluí-se que  $(p_1 - p_2)$  não muda de sinal numa vizinhança de 0, sendo assim, de acordo com a proposição 2.3.2 temos que  $v(p_1 - p_2)$  é par o que é uma contradição pois tomamos  $v(p_1 - p_2)$  ímpar. Logo  $p_1$  e  $p_2$  necessariamente se cruzam na origem. Assim provamos a proposição.  $\square$

Também temos o seguinte lema:

**Lema 2.3.4** *Sejam  $p_1(x)$  e  $p_2(x)$  dois polinômios distintos que passam pela origem. Seja  $0 < \varepsilon < 1$  e assumamos que  $0 < |p_1(x)| < |p_2(x)|$  para  $0 < x < \varepsilon$ . Então  $v(p_1) \geq v(p_2)$ .*

*Demonstração:* Sejam  $p_1(x) = a_k x^k + \dots + a_n x^n$  e  $p_2(x) = a_t x^t + \dots + a_m x^m$  com  $|p_1(x)| < |p_2(x)|$  para  $0 < x < \varepsilon$ .

Assim,

$$\begin{aligned}
 |p_1(x)| < |p_2(x)| &\Rightarrow |a_k x^k + \dots + a_n x^n| < |a_t x^t + \dots + a_m x^m| \\
 &\Rightarrow |x^k (a_k + \dots + a_n x^{n-k})| < |x^t (a_t + \dots + a_m x^{m-t})| \\
 &\Rightarrow |x^k| |a_k + \dots + a_n x^{n-k}| < |x^t| |a_t + \dots + a_m x^{m-t}| \\
 &\Rightarrow |x|^{(k-t)} < \frac{|a_t + \dots + a_m x^{m-t}|}{|a_k + \dots + a_n x^{n-k}|}
 \end{aligned}$$

Vamos analisar o que acontece com a última desigualdade quando tomamos  $x$  pequeno. Note que o lado direito da última desigualdade converge para  $\left| \frac{a_t}{a_k} \right| > 0$  quando  $x$  tende a zero. Agora, a expressão do lado esquerdo dessa desigualdade converge (para zero) unicamente quando  $k \geq t$ , pois se  $k < t$  o limite é infinito o qual é um absurdo porque  $|x|^{(k-t)}$  é limitado por  $\left| \frac{a_t}{a_k} \right|$  para  $x$  pequeno.

Portanto  $v(p_1) \geq v(p_2)$ . Logo o lema está demonstrado.

Note que se na hipótese do lema tivermos  $0 < |p_1(x)| < |p_2(x)|$  para todo  $-\varepsilon < x < 0$  obtemos o mesmo resultado.  $\square$

Com os resultados obtidos até aqui mostramos que dados dois polinômios passando pela origem, se ambos possuem valorações de mesma paridade, a configuração dos seus gráficos na vizinhança da origem será a mesma, levando em consideração o sinal do coeficiente do termo responsável pela valoração. Isso pode ser visto na Figura 2 com os gráficos dos polinômios  $p_1$  e  $p_2$  de valorações pares, com  $p_1(x) = x^2 + x^3$  e  $p_2(x) = x^4 - x^5$ , assim como também na Figura 3 com os gráficos de  $q_1(x) = x^3 + x^8$  e  $q_2(x) = x^5 + x^7$ , com valorações ímpares.

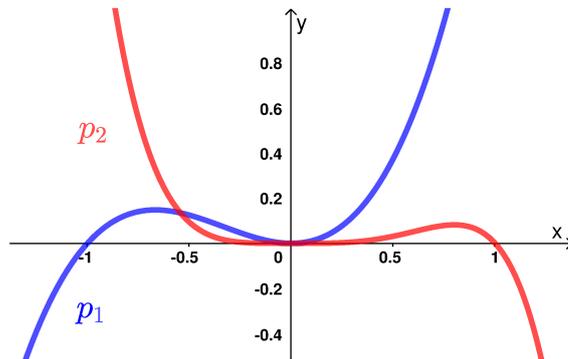


Figura 2: Gráfico de  $p_1$  e  $p_2$

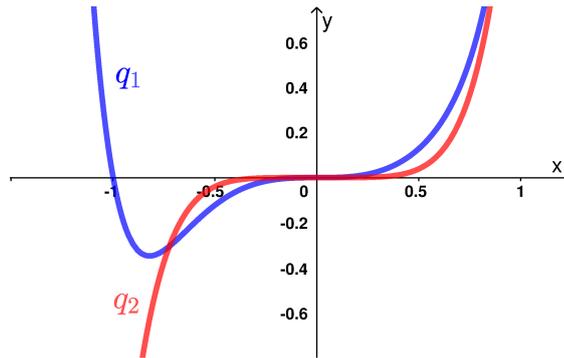


Figura 3: Gráfico de  $q_1$  e  $q_2$

É importante perceber que dado um polinômio de grau  $k$  que passa pela origem, apesar de ele poder ter outras  $k - 1$  raízes reais, é possível escolher um  $\varepsilon > 0$  tal que  $x = 0$  será a única raiz no intervalo  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Sendo assim, tomando  $|x|$  suficientemente pequeno, toda função de valuação par terá configuração local parecida com  $p(x) = x^2$  ou  $p'(x) = -x^2$  e toda função de valuação ímpar, parecida com  $q(x) = x^3$  ou  $q'(x) = -x^3$ .

Outra conclusão importante é que dados  $k$  polinômios distintos quaisquer, passando pela origem, existe  $\varepsilon > 0$  ( $\varepsilon$  que depende dos  $k$  polinômios escolhidos) tal que a restrição dos gráficos dos  $k$  polinômios no intervalo  $(-\varepsilon, 0)$  são dois a dois disjuntos. Esta configuração local dos gráficos, à esquerda da origem, nos permite estabelecer uma ordem (ordem à esquerda) entre os polinômios dados. Claramente podemos ajustar  $\varepsilon > 0$  de modo que, uma configuração local dos gráficos à direita da origem induzam uma outra ordem (ordem à direita). Em ambos os casos, a ordem em questão é estabelecida da seguinte maneira: tome dois polinômios, digamos  $p_1$  e  $p_2$ . Se a restrição, no intervalo em questão, do gráfico de  $p_1$  está acima do gráfico de  $p_2$ , então diremos que  $p_1 > p_2$ , caso contrário  $p_2 > p_1$ . Por exemplo, tomando  $p_1(x) = 0$ ,  $p_2(x) = -x$  e  $p_3(x) = x^2$ , temos os gráficos conforme apresenta a Figura 4.

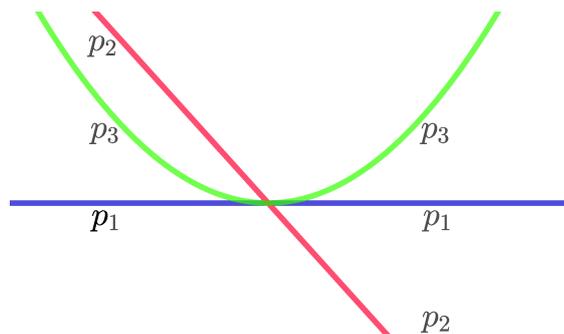


Figura 4: Ordenações

Escolhendo  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , teremos as ordenações  $p_2 > p_3 > p_1$  para  $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$  e  $p_3 > p_1 > p_2$  para  $x \in (0, \frac{1}{2})$ .

## 2.4 REVISÃO DE PERMUTAÇÕES

Começaremos essa seção revisando o conceito de permutação que, a grosso modo expressa a ideia de que objetos distintos podem ser arranjados em inúmeras ordens diferentes. Este conceito será base para que no capítulo 4 possamos definir permutação polinomial. Depois veremos como contar a quantidade de permutações de  $n$  elementos e uma estimativa para este número.

**Definição 2** *Seja  $S$  um conjunto com  $n$  objetos. Uma permutação em  $S$  é uma bijeção de  $S$  em  $S$ .*

Uma permutação  $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  pode ser vista como a reordenação dos  $n$  elementos do conjunto  $A$  que estão ordenados. Note que cada elemento pode ou não ser reordenado. Por exemplo, se três pessoas estão em fila por ordem de altura crescente e depois as mesmas três pessoas são reorganizadas na fila, porém agora em ordem de altura decrescente, podemos dizer que foi feita uma permutação das posições, relacionando a posição em que cada pessoa ocupava na primeira fila com a posição que ocuparam na segunda fila. Chamando esta permutação de  $\pi$  e rotulando as pessoas como 1, 2 e 3 sendo 1 a pessoa mais alta, e 3 a mais baixa temos que  $\pi(1) = 3$ ,  $\pi(2) = 2$  e  $\pi(3) = 1$ . Neste caso que a permutação  $\pi$  é a bijeção que leva  $(1, 2, 3)$  em  $(3, 2, 1)$ .

Logo surge a pergunta: quantas permutações de  $n$  elementos distintos existem?

A resposta para tal questão é  $n!$ .

De fato, após ordenarmos os  $n$  elementos, temos que o primeiro elemento poderá ser reordenado em  $n$  posições diferentes, o segundo poderá ser reordenado em  $n - 1$  posições distintas pois uma posição já foi ocupada pelo primeiro elemento e assim por diante até que o  $n$ -ésimo elemento será reordenado na última posição livre que resta. Portanto o número de permutações possíveis é

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Agora, sabemos que o fatorial cresce rápido, por exemplo,  $1000!$  é um inteiro com pelo menos 2500 casas decimais. É natural se perguntar qual a relação que este número guarda com outras quantidades em matemática. Ou de outra forma, gostaríamos saber se é possível obter uma estimativa de  $1000!$  em termos apenas do valor 1000 sem ter que efetuar a multiplicação de  $1000!$ . Felizmente a resposta foi dada por James Stirling. No

seu livro *Methodus Differentiales* (1730), pág. 137, temos a seguinte estimativa:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

onde “ $\approx$ ” quer dizer “aproximadamente igual” e “ $e$ ” é a usual base do logaritmo natural.

## 2.5 PERMUTAÇÃO E RELAÇÃO DE ORDEM TOTAL

Nesta seção mostraremos que um conjunto finito de objetos, digamos  $1, 2, \dots, n$ , munido de duas relações de ordem total induzem uma permutação  $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ . Reciprocamente, toda permutação  $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  dá lugar a um conjunto finito com duas relações de ordem.

Seja  $E$  um conjunto finito com  $n$  elementos e suponha que neste conjunto estão definidas duas relações de ordem total,  $<_1$  e  $<_2$ . Usando a ordem  $<_1$  podemos ordenar o conjunto  $E$ , digamos,

$$1 <_1 2 <_1 3 <_1 \cdots <_1 n,$$

onde  $1, 2, \dots, n$  são os nomes dos elementos de  $E$ . Agora podemos utilizar a segunda relação de ordem ( $<_2$ ) para ordenar  $E$ . Defina  $\pi$  sendo  $\pi(i)$  igual a posição em que se encontra o elemento  $i$  segundo a ordenação  $<_2$ .

Sendo assim, obtemos uma permutação  $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  que está bem definida. Logo, duas relações de ordem total num conjunto finito induzem uma permutação.

Como exemplo, considere um conjunto finito  $E \subset \mathbb{R}[x]$  munido de duas relações de ordem total  $<_1$  e  $<_2$  definidas por:

$$p <_1 q \iff p(x) \leq q(x), \quad \text{para } x < 0, \text{ pequeno}$$

$$p <_2 q \iff p(x) \leq q(x), \quad \text{para } x > 0, \text{ pequeno.}$$

Vemos assim, que um conjunto finito de polinômios vem com duas relações de ordem e portanto vem com permutações.

Por outro lado, dada uma permutação  $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ , podemos formar um conjunto de  $E$  contendo  $n$  elementos onde cada elemento é associado a um número de 1 até  $n$ . Definimos por  $<_1$  a relação de ordem natural para  $1, 2, \dots, n$  e por  $<_2$  a relação que compara  $\pi(i)$  com  $\pi(j)$  sendo  $1 \leq i, j \leq n$  do mesmo modo que  $<_1$  compara  $i$  com  $j$ , assim ficando  $\pi(1) <_2 \pi(2) <_2 \cdots <_2 \pi(n)$ . Formamos assim um conjunto de  $n$  elementos com duas relações de ordem.



### 3 UM EXEMPLO PRELIMINAR DE CONTAGEM

Neste capítulo estudaremos árvores planares, conceito que será a ferramenta principal na contagem de permutações polinomiais. Recordemos que estamos interessados no estudo de sequências induzidas por um tipo especial de permutação, e a ideia geral será transportar o estudo do problema dado no nível de permutações ao estudo do problema no nível de árvores. Para nos familiarizarmos com estes ingredientes, terminaremos este capítulo com um problema clássico da computação, o problema do sorteio de pilhas.

#### 3.1 ÁRVORES PLANARES

Nesta seção veremos a estrutura não linear mais importante que surgem em algoritmos computacionais. A grosso modo, uma árvore planar é um desenho no plano construído por pontos e por segmentos de reta que unem esses pontos. Os pontos serão chamados de *vértices* ou de *nós* e, os segmentos de reta serão chamados de *arestas* ou de *galhos*. Tal construção é uma ramificação relacionando os nós.

Formalmente, define-se uma *árvore planar* como um conjunto  $A$  de nós tal que:

- a) existe um nó especial chamado *raiz* da árvore;
- b) excluindo a raiz, o conjunto de nós restante é particionado em  $(k \geq 0)$ -conjuntos distintos  $A_1, A_2, \dots, A_k$  e cada um destes conjuntos é por sua vez uma árvore. As árvores  $A_1, \dots, A_k$  são chamados *subárvores* da raiz.

Esta definição recursiva (definição de árvore em termos de árvores) está bem definida pois uma árvore com um único nó é um conjunto cujo único elemento é a raiz e qualquer árvore com  $(n > 0)$ -nós é definido em função de árvores contendo um número de nós menor que  $n$ .

Uma forma de visualizar a árvore usando vértices e arestas é: a partir da raiz principal do item a) da definição podemos ligar raízes principais das subárvores do item b).

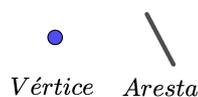


Figura 5: Componentes de uma árvore

Vejam os um exemplo. Tome  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  e seja  $a$  a raiz. Agora tome  $A_1 = \{b\}$ ,  $A_2 = \{c\}$  e  $A_3 = \{d, e, f\}$  e defina  $b, c$  e  $d$  sendo as raízes de  $A_1, A_2$  e  $A_3$  respectivamente. Por fim tome  $A_4 = \{e\}$  e  $A_5 = \{f\}$  com  $e$  a raiz de  $A_4$  e  $f$  a raiz de  $A_5$ . Assim temos a árvore  $A$  e as subárvores  $A_1, A_2, A_3, A_4$  e  $A_5$ , conforme mostra a Figura 6.

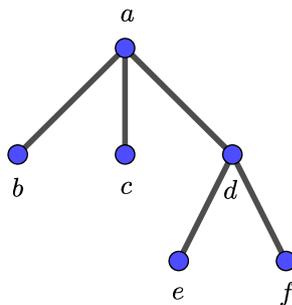


Figura 6: Árvore A

Assim, o desenho de uma árvore será feito a partir um único vértice, chamado de *raiz*. Da raiz podem partir arestas que, por sua vez possuirão um outro vértice no lado oposto à raiz. De cada um desses novos vértices podem surgir novas arestas que também terão novos vértices nos lados opostos de onde partiram e assim sucessivamente. Construindo uma árvore desta maneira podemos organizá-la em níveis, sendo o nível zero formado pela raiz, o nível 1 será composto pelos nós que estão no lado oposto aos galhos que partiram da raiz, já o nível 2 conterá os nós que estão nas extremidades opostas aos galhos que partiram dos nós que estão no nível 1, e assim sucessivamente, ou seja, o nível  $n$  será formado pelos nós que estão nas extremidades opostas aos galhos que partiram de algum nó presente no nível  $n - 1$ . Além disso, não pode existir um nó pertencente a um certo nível que é a extremidade oposta de dois galhos que partiram de nós diferentes do nível anterior. Chamamos de *folhas* os nós dos quais não geram novos galhos. Estes conceitos estão ilustrados na Figura 7.

Afim de simplificarmos a comunicação, podemos nos referir a uma árvore planar apenas como árvore.

Por costume, na matemática representamos graficamente uma árvore de cabeça para baixo, ou seja, a raiz fica em cima e os galhos vão surgindo para baixo até chegarmos nas folhas, conforme o exemplo da Figura 7.

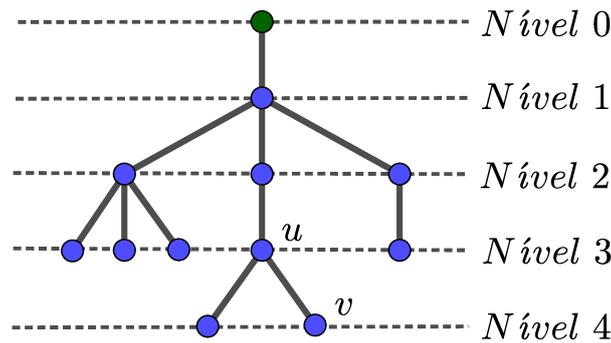


Figura 7: Árvore planar

Quando uma árvore é desenhada desta maneira ela é correspondente a uma árvore genealógica, portanto é comum usarmos a terminologia desse conceito, por exemplo, de acordo com a Figura 7 denominarmos o nó  $v$  como *filho* do vértice  $u$  assim como dizemos que o vértice  $u$  é *pai* do vértice  $v$ . Também, os vértices que possuem um mesmo pai são ditos *irmãos* e, uma folha pode ser vista como sendo um nó que não possui filho.

Vejamos um outro exemplo de árvore na Figura 8. Esta árvore possui a raiz  $R$ , as arestas  $a_1$  até  $a_{10}$ , as folhas  $F_1$  até  $F_5$ , além dos outros nós intermediários.

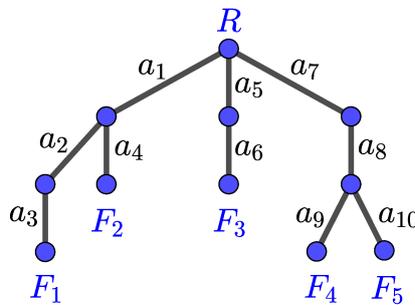


Figura 8: Árvore planar

Recordemos que dada uma árvore com mais de uma aresta é possível fazer um corte eliminando uma delas, assim a parte que foi separada é uma subárvore. Por exemplo na Figura 8, tomando o vértice  $v$  como sendo a raiz teremos uma subárvore formada pelo nó que segue da aresta  $a_1$  conforme mostra a Figura 9. Ela pode ser vista como sendo a subárvore formada pelo corte da aresta  $a_1$ .

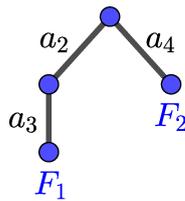


Figura 9: Subárvore da figura 8

Agora que sabemos o que é uma árvore e quais são as partes que a compõem, podemos perceber que existem uma infinidade de árvores com diferentes características, portanto cabe pensar se é possível contar o número delas e em caso afirmativo, como pode ser feita esta contagem. Veremos dois problemas relacionados a esta questão, um logo a seguir e o outro na próxima seção.

Uma outra questão que pode surgir é determinar quantas árvores planares diferentes existem contendo  $n$  arestas. Para nos familiarizarmos com esta questão começaremos examinando os caso pequenos, isto é, árvores com poucas arestas.

No caso em que a árvore planar não possui nenhuma aresta temos apenas a árvore formada unicamente pela raiz, sem nenhum galho.

Com a condição da árvore possuir uma única aresta, também teremos uma única possibilidade, mostrada na Figura 10.



Figura 10: Árvore com 1 aresta

Para o caso da árvore possuir duas arestas existe mais de uma formação possível, na verdade temos duas árvores diferentes com tal condição, conforme mostra a Figura 11.

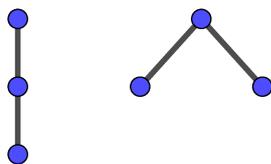


Figura 11: Árvores com 2 arestas

Pensando no caso em que a árvore planar possui 3 arestas podemos ter 5 árvores diferentes, que são mostradas na Figura 12.

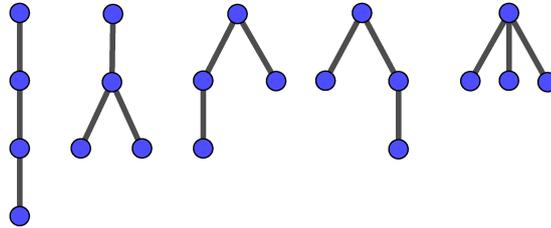


Figura 12: Árvores com 3 arestas

Acabamos de ver que para os casos em que as árvores possuem 0, 1, 2 ou 3 arestas podemos ter, respectivamente 1, 1, 2 e 5 árvores diferentes sendo formadas.

Para contarmos o número de árvores com  $n$  arestas vamos trabalhar com o contorno de uma árvore. O *contorno* de uma árvore planar é feito partindo da raiz e descendo pela aresta mais à esquerda, seguindo para baixo até que cheguemos a primeira folha, que estará no lado extremo esquerdo da árvore, a partir daí vamos subir até nos deparemos com um nó que possui uma bifurcação, ou seja, um nó que possui mais de uma aresta partindo dele em direção a um nível maior. Então voltaremos a descer e, caso apareça uma nova bifurcação, sempre tomaremos o caminho mais à esquerda até chegarmos na próxima folha e seguindo esse processo contornaremos toda a árvore, passando por todas as arestas e todos os nós e terminando na raiz, que foi nosso ponto de partida. Contornando uma árvore desta maneira, podemos enumerar cada vértice e aresta da árvore pela ordem de aparecimento.

A Figura 13 exemplifica o contorno de uma árvore partindo da raiz  $R$ .

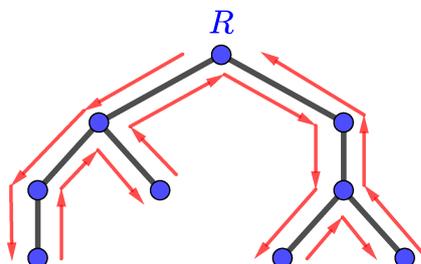


Figura 13: Contorno da árvore

Representando por  $D$  cada vez que descemos ao lado de uma aresta e por  $S$  cada vez que subimos, podemos definir o contorno da árvore mostrada na figura 13 pela sequên-

cia  $(D, D, D, S, S, D, S, S, D, D, D, S, D, S, S, S)$ . Como esta árvore possui 8 arestas e o contorno é feito pelos dois lados de cada arestas, teremos 8  $D$ 's e 8  $S$ 's.

Nitidamente uma sequência que descreve o contorno de uma árvore contendo  $n$  arestas será formada por  $n$   $D$ 's e de  $n$   $S$ 's então diremos que a sequência possui  $n$  pares de  $D$ 's e  $S$ 's.

É importante notar que assim como é possível, partindo de uma árvore escrever a sequência que mostra o seu contorno, também podemos a partir da sequência que define o contorno de uma árvore, construir esta árvore.

Facilmente percebemos que a sequência deve sempre começar com  $D$ , terminar com  $S$  e que, enquanto estamos formando a sequência, ela nunca apresentará um número maior de  $S$ 's do que de  $D$ 's. Também percebemos que em qualquer parte da sequência que aparecer um  $D$  seguido de um  $S$ , estamos em uma folha da árvore, assim como quando aparecer um  $S$  seguido de um  $D$  estamos em um nó que não é folha e, neste caso se o número de  $D$ 's e  $S$ 's forem iguais, este nó será a raiz, caso contrário, estamos em um nó interior que foi ramificado, isto é, um nó interior que possui mais de um galho partindo dele. Para desenharmos a árvore, cada vez que aparece um  $S$  na sequência faremos um desenho de uma aresta e quando aparecer um  $D$  estamos contornando uma aresta que já foi desenhada.

Analisando a sequência  $(D, D, D, S, S, D, S, S, D, D, D, S, D, S, S, S)$  mostrada a pouco concluímos que, partindo da raiz, os três primeiros termos da sequência são  $D$ 's, isso nos indica que teremos três arestas consecutivas. O quarto termo da sequência é um  $S$  que é antecedido por um  $D$  e portanto o terceiro nó após a raiz é a primeira folha da árvore relacionada a tal sequência. Continuando a sequência temos outro  $S$  e depois um  $D$ , indicando que depois da primeira folha desenhada devemos descer contornando duas arestas seguidas e voltando a subir, isso nos mostra que após subirmos por duas arestas estamos em um nó que foi ramificado, isto é, dele aparece uma nova aresta. Procedendo desta maneira vamos reconhecendo todas as estruturas que formam a árvore relacionada a sequência dada.

Dada uma sequência que representa o contorno de uma árvore, o desenho desta árvore pode ser feito da seguinte maneira: Primeiro desenhamos a raiz. Como o primeiro termo da sequência é um  $D$ , desenhamos uma aresta, lembrando que cada aresta desenhada deve acompanhar o desenho de um vértice na extremidade que estará mais abaixo na árvore. A partir dela, olhando os termos da sequência vamos desenhar uma nova aresta cada vez que aparecer um  $D$ , partindo do nó em que estamos em direção a parte de baixo da árvore e se esse  $D$  vier precedido de um  $S$  a aresta deverá ser desenhada voltada para o lado direito da árvore e, cada vez que aparecer um  $S$  vamos apenas contornar a aresta

(não será desenhado nada), subindo em direção a raiz, parando em cima de um nó. O desenho será finalizado quando chegarmos ao último termo da sequência, que será um  $S$  e indicará o último contorno a ser feito, retornando até a raiz. Note que podemos passar pela raiz antes de terminar a sequência, mas com certeza a sequência terminará com o último contorno chegando na raiz.

Para a sequência  $(D, D, D, S, S, D, S, S, D, D, D, S, D, S, S, S)$  que estamos analisando, o desenho será feito passo a passo como descrito a seguir, terminando como a árvore da Figura 13.

- $D \rightarrow$  desenhamos uma aresta
- $D \rightarrow$  desenhamos uma aresta
- $D \rightarrow$  desenhamos uma aresta
- $S \rightarrow$  contornamos uma aresta (acabamos de ter uma folha)
- $S \rightarrow$  contornamos uma aresta
- $D \rightarrow$  desenhamos uma aresta em direção ao lado direito (acabamos de passar por um nó bifurcado)
- $S \rightarrow$  contornamos uma aresta (acabamos de ter uma folha)
- $S \rightarrow$  contornamos uma aresta (estamos na raiz)
- $D \rightarrow$  desenhamos uma aresta em direção ao lado direito (acabamos de passar por um nó bifurcado)
- $D \rightarrow$  desenhamos uma aresta
- $D \rightarrow$  desenhamos uma aresta
- $S \rightarrow$  Contornamos uma aresta (acabamos de ter uma folha)
- $D \rightarrow$  contornamos uma aresta (acabamos de passar por um nó bifurcado)
- $S \rightarrow$  contornamos uma aresta (acabamos de ter uma folha)
- $S \rightarrow$  contornamos uma aresta
- $S \rightarrow$  contornamos uma aresta (estamos na raiz)

Desta forma finalizamos a sequência retornando para a raiz.

Vimos que o contorno de uma árvore com  $n$  arestas origina uma sequência  $\mathcal{C}$  de comprimento  $2n$ , formada por  $n$   $D$ 's e  $n$   $S$ 's tal que:

- a)  $\mathcal{C}$  começa com  $D$  e termina com  $S$ .
- b)  $\mathcal{C}$  nunca possuirá um número maior de  $S$ 's do que  $D$ 's tomados os  $i$  primeiros

termos,  $1 \leq i \leq 2n$ .

Agora com o conhecimento de contorno de uma árvore podemos pensar em determinar quantas árvores planares diferentes contendo  $n$  arestas podem ser formadas, mas isso será visto na seção 3.3.

### 3.2 SORTEIO DE PILHAS

Na computação, uma *pilha* é uma estrutura de dados que armazena objetos em um arranjo linear e para a qual a inserção e remoção acontece apenas em um dos extremos da pilha. Este extremo é chamado *topo* da pilha que é visualizada como uma ordenação de objetos em coluna vertical. O exemplo protótipo de uma pilha é uma pilha de pratos de jantar, onde um prato é colocado apenas no topo da pilha e um prato é removido apenas do topo da pilha.

Queremos saber de quantas maneiras diferentes podemos empilhar  $n$  objetos que estão enfileirados em uma mesa sendo antes de serem organizados como queremos eles devem ser empilhados em uma caixa e dela serem retirados para então formarem a pilha desejada. Vamos organizar a situação para melhor entendermos o problema.

Sejam  $n$  objetos colocados lado a lado em uma mesa, rotulados de 1 até  $n$ , ordenados de forma crescente da esquerda para a direita, conforme seus rótulos. Esses objetos devem ser retirados desta mesa, empilhados em uma caixa para serem finalmente empilhados em outra mesa, obedecendo as seguintes regras:

1. Os objetos devem ser movidos do local onde estão um a um.
2. Quando mais de um objeto forem colocados na caixa eles ficarão empilhados de forma que na base da pilha estará o que, dentre esses, foi primeiramente colocado seguindo até o topo, que será o último objeto lá colocado.
3. Os objetos que estão enfileirados em cima da mesa devem ser retirados da direita para a esquerda os que estão dentro da caixa devem ser retirados do topo da pilha para a base.

Inicialmente a caixa está vazia, então vamos pegar o objeto  $n$  e colocá-lo na caixa. A seguir temos duas opções, ou colocamos o objeto  $n - 1$  da mesa para dentro da caixa ou retiramos o objeto  $n$  da caixa e o colocamos base da pilha da mesa onde ficarão os objetos reorganizados. Até que sejam retirados todos os objetos que estão enfileirados na mesa ou que não exista nenhum objeto na pilha formada dentro da caixa, basicamente teremos sempre duas opções: colocar um objeto que está enfileirado para dentro da caixa ou retirar um objeto que está no topo na pilha dentro da caixa e colocá-lo na pilha que

está sendo formada na outra mesa.

Podemos ver essa situação como uma sequência de *Push* (empilha) e *Pop* (desempilha), isto é, *Push* faz com que o próximo elemento da primeira mesa seja colocado na caixa e *Pop* tira o elemento que está no topo da pilha dentro da caixa e o coloca no topo da pilha de objetos reorganizados que está sendo formada .

Vejamos uma maneira de reorganizar cinco objetos. A Figura 14 mostra a formação da pilha passo a passo após uma sequência inicial de *Push, Push, Push*.

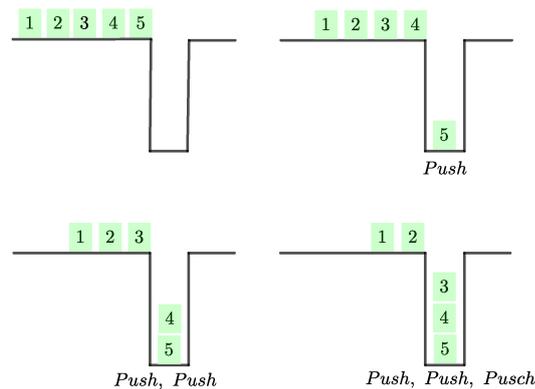


Figura 14: Pilha de 5 objetos em formação.

Continuando a sequência de *Push*'s e *Pop*'s, vamos construindo a pilha conforme mostra a Figura 15.

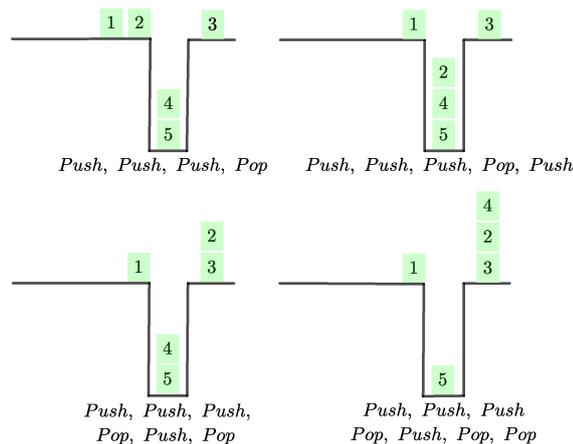


Figura 15: Pilha de 5 objetos em formação.

Ao finalizarmos a sequência *Push, Push, Push, Pop, Push, Pop, Pop, Pop, Push, Pop*, teremos os objetos inicialmente rotulados como (1, 2, 3, 4, 5) reorganizados na sequência (1, 5, 4, 2, 3), sendo que o objeto 1 estará no topo e o objeto 3 estará na base da pilha

na segunda mesa, como mostra a Figura 16.

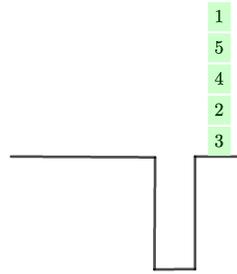


Figura 16: Pilha de 5 objetos.

O problema que acabamos de descrever pode ser resumido da seguinte forma: cada pilha de 5 objetos,  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , depois de uma operação de *Push* e *Pop*, induz uma permutação,  $(1, 5, 4, 2, 3)$ , dos 5 objetos. Por construção, pilhas de  $n$  objetos induzem uma permutação de  $n$  elementos. As permutações induzidas por esta construção serão chamadas *sorteio de pilha*.

Surge então a pergunta: seguindo estas regras, de quantas maneiras diferentes poderemos empilhar os  $n$  objetos na segunda mesa? Ou melhor, dada uma permutação de  $n$  elementos qualquer, estamos interessados em saber se esta permutação pode ser realizada por uma pilha de  $n$  objetos e saber qual é a propriedade das permutações tipo sorteio de pilha.

Por exemplo seja  $\pi : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ . Se  $\pi$  é a permutação  $(1, 3, 2)$  então podemos formar a pilha através da sequência *Push, Push, Pop, Pop, Push, Pop*. E é claro que tendo a pilha reordenada  $(1, 3, 2)$  temos a permutação  $\pi$ .

Porém se  $\pi$  for a permutação  $(2, 3, 1)$  não conseguimos formar a sequência de *Push*'s e *Pop*'s pois teríamos que começar a sequência com *Push, Push, Push* e então viria o primeiro *Pop* para colocar o 1 para a base da pilha e então aparece o problema, como vamos colocar agora o objeto 3 na pilha se ele está embaixo do objeto 2?

A propriedade que caracteriza estas permutações está dada no seguinte resultado.

**Definição 3** *Seja  $n > 0$  um número inteiro e  $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ . Dizemos que  $\pi$  contém  $(i_1, i_2, \dots, i_m)$  se existirem  $m \leq n$  índices  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n$  de modo que  $\pi(j_{i_1}) < \pi(j_{i_2}) < \dots < \pi(j_{i_m})$ .*

Sendo assim, dizemos que uma permutação  $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ , com  $n \geq 3$  não contém  $(2, 3, 1)$  se não existem 3 índices  $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq n$  de modo que  $\pi(j_2) < \pi(j_3) < \pi(j_1)$ .

**Teorema 3.2.1 (Caracterização de sorteio de pilhas)** *Seja  $\pi$  uma permutação no conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Então,  $\pi$  é um sorteio de pilha se, e somente se,  $\pi$  não contém  $(2, 3, 1)$ .*

*Demonstração:* Seja  $\pi : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ . Devemos ver que se  $\pi$  não é a permutação  $(2, 3, 1)$  então  $\pi$  é um sorteio de pilhas e vice-versa.

De uma forma geral, se quisermos classificar uma permutação de  $n$  objetos precisamos entender quando ela pode dar errado. Isso acontecerá precisamente quando for a hora de colocar na pilha algum objeto que está na caixa, mas não no topo, abaixo de algum objeto  $b < a$ . Se o objeto  $b$  já estiver colocado na caixa então é porque tivemos que retirar algum objeto  $c$  da primeira mesa, sendo  $c < b < a$ .

Temos  $a < c$ , pois  $c$  já foi removido da caixa e estamos tentando retirar  $a$  para colocá-lo na pilha. Da mesma forma, temos  $b < a$ , pois não queremos retirar  $b$  da caixa (*Pop*), mas  $a$ . O subconjunto  $\{c, b, a\}$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , portanto, dá origem à permutação  $(2, 3, 1)$ , que vimos não ser possível.  $\square$

### 3.3 NÚMERO DE SORTEIO DE PILHAS

Agora vamos contar o número de sorteio de pilhas possíveis para  $n$  objetos.

Primeiro vamos observar alguns casos em que existem poucos objetos a serem empilhados.

Com apenas um objeto na fila é óbvio que teremos apenas uma forma de organizarmos uma pilha que será composta por ele mesmo.

Quando dois objetos são colocados na fila temos duas formas possíveis de empilhá-los, que são  $(1, 2)$  ou  $(2, 1)$ .

Estes casos seriam obtidos através das sequências:

- a) *Push, Pop, Push e Pop,*
- b) *Push, Push, Pop e Pop,*

respectivamente.

Agora, para três objetos na fila podemos formar 5 pilhas diferentes seguindo as orientações dadas para a sua formação. Estas pilhas seriam rotuladas como:

$$(1, 2, 3), (2, 1, 3), (1, 3, 2), (3, 1, 2) \text{ ou } (3, 2, 1).$$

Já estes casos seriam obtidos através das sequências:

- a) *Push, Pop, Push, Pop, Push e Pop,*

- b) *Push, Pop, Push, Push, Pop e Pop,*
- c) *Push, Push, Pop, Pop, Push e Pop,*
- d) *Push, Push, Pop, Push, Pop, e Pop,*
- e) *Push, Push, Push, Pop, Pop e Pop,*

respectivamente.

Temos assim, 1, 2 e 5 maneiras de organizar um, dois e três objetos em uma pilha, respectivamente. Estes são os três primeiros termos da sequência dos Números de Catalan (vide apêndice A), partindo de  $n = 1$ , ou seja, desconsiderando o primeiro número da sequência que seria para o caso  $n = 0$ .

Os números de Catalan são definidos pela recorrência  $C_0 = 1$  e  $C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}$  para  $n \geq 0$ . Podemos obter mais informações sobre os números de Catalan em (ROMAN, 2015).

Fazendo o próximo caso, com 4 objetos na fila teremos as seguintes possibilidades de pilhas:

(1, 2, 3, 4), (2, 1, 3, 4), (1, 3, 2, 4), (3, 1, 2, 4), (3, 2, 1, 4)(1, 2, 4, 3), (2, 1, 4, 3), (1, 4, 2, 3), (1, 4, 3, 2), (4, 1, 2, 3), (4, 2, 1, 3), (4, 1, 3, 2), (4, 3, 1, 2) e (4, 3, 2, 1).

Portanto, para reorganizarmos os quatro objetos de forma que seus rótulos formam um total de 14 sequências diferentes, que é o próximo número de Catalan da sequência.

Vamos então mostrar, por indução forte, que a resposta da questão proposta é dado pelo  $n$ -ésimo número Catalan, indicado por  $C_n$ .

**Proposição 3.3.1** *Seja  $n$  um inteiro positivo. O número de sorteio de pilhas com  $n$  objetos é igual a  $C_n$ .*

*Demonstração:* Para  $n = 1$  temos um modo possível para organizarmos o objeto em pilha e também  $C_1 = 1$ . Na verdade já vimos que a afirmação é verdadeira para todos os casos até  $n = 4$ .

Supomos a afirmação verdadeira para todos os casos até  $n$ .

Para o caso  $n + 1$ , podemos organizar os objetos em pilhas do seguinte modo:

- Simplesmente colocando e retirando de dentro da caixa o objeto  $n + 1$ , sobrando assim  $n$  objetos na fila para serem empilhados acima do objeto já na base que, de acordo com a hipótese de indução, podem ser organizados de  $C_n$  maneiras diferentes.

$$\underbrace{\text{Push, Pop}}_1 \underbrace{n \text{ objetos restantes}}_{C_n} = C_0 \cdot C_n.$$

- Colocando o objeto  $n + 1$  dentro da caixa, mas antes de retirá-lo, inserindo nela um outro objeto, que pode ser organizado de uma única maneira, sobram ainda  $n - 1$

objetos que, pela hipótese de indução, podem ser organizados de  $C_{n-1}$  maneiras diferentes.

$$\underbrace{\text{Push, Push, Pop, Pop}}_1 \underbrace{n-1 \text{ objetos restantes}}_{C_{n-1}} = C_1 \cdot C_{n-1}.$$

- Colocando dentro da caixa o objeto  $n+1$  e, agora colocando e retirando outros dois objetos na caixa, seguindo as regras descritas, antes de retirar da caixa o objeto  $n+1$ . Isso pode ser feito de  $C_2$  maneiras, ainda restam outros  $n-2$  objetos que por sua vez, podem ser organizados de  $C_{n-2}$  maneiras.

$$\underbrace{\text{Push, 2 objetos a serem empilhados, Pop}}_{C_2} \underbrace{n-2 \text{ objetos restantes}}_{C_{n-2}} = C_2 \cdot C_{n-2}.$$

Prosseguindo desta forma um número finito de vezes chegamos a:

- Colocando o objeto  $n+1$  dentro da caixa e organizando a pilha com outros  $n-1$  objetos antes de retirá-lo da caixa que, pela hipótese de indução, pode ser feito de  $C_{n-1}$  maneiras, sobrando um único objeto na fila que só pode ser colocado de uma única maneira.

$$\underbrace{\text{Push, } n-1 \text{ objetos a serem empilhados, Pop}}_{C_{n-1}} \underbrace{\text{push, pop}}_{C_1} = C_{n-1} \cdot C_1$$

- E por fim colocando dentro da caixa o objeto  $n+1$  e antes de retirá-lo, empilhar os outros  $n$  objetos restantes que, de acordo com a hipótese de indução podem ser organizados de  $C_n$  maneiras.

$$\underbrace{\text{Push, } n \text{ objetos restantes a serem empilhados, Pop}}_{C_n} = C_n = C_n \cdot 1 = C_n \cdot C_0$$

Portanto, somando todos os casos possíveis de cada item, temos

$$C_0 \cdot C_n + C_1 \cdot C_{n-1} + C_2 \cdot C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} \cdot C_1 + C_n \cdot C_0 = \sum_{i=0}^n C_i \cdot C_{n-i} = C_{n+1}.$$

Logo, dados  $n$  objetos, podemos empilhá-los de acordo com as regras estipuladas de  $C_n$  formas possíveis.  $\square$

O número de Catalan  $C_n$  pode ser reescrito como

$$C_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} & \text{se } n \geq 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Vamos então a partir da recorrência em (3.1) definir uma fórmula explícita para o número de Catalan  $C_n$ . Seja a sequência infinita  $C_0, C_1, \dots$ , assim teremos a sua função geradora

$$C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n = 1 + t + 2t^2 + 5t^3 + 14t^4 \dots \quad (3.2)$$

De acordo com a definição de produto de séries e utilizando a expressão (3.2) teremos o produto  $C^2(t)$ <sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} C^2(t) &= \sum_{i+j=n} C_i C_j t^n \\ &= C_0 C_0 + C_0 C_1 t + C_0 C_2 t^2 + C_0 C_3 t^3 + \dots \\ &\quad + C_1 C_0 t + C_1 C_1 t^2 + C_1 C_2 t^3 + \dots \\ &\quad \quad \quad + C_2 C_0 t^2 + C_2 C_1 t^3 + \dots \\ &\quad \quad \quad \quad \quad + C_3 C_0 t^3 + \dots \\ &\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \dots \\ &= 1 + 2t + 5t^2 + 14t^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Olhando a soma (3.3) percebemos que o coeficiente de  $t^{n-1}$  é igual a  $C_n$ , sendo assim, multiplicando  $C^2(t)$  por  $t$  teremos o coeficiente de  $t^n$  igual a  $C_n$ , ou seja,

$$tC^2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n t^n = t + 2t^2 + 5t^3 + 14t^4 + \dots \quad (3.4)$$

Agora comparando (3.2) e (3.4) vemos que

$$tC^2(t) = C(t) - 1,$$

e daí segue

$$tC^2(t) - C(t) + 1 = 0. \quad (3.5)$$

Resolvendo a equação quadrática (3.5), obtemos

$$C(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4t}}{2t}. \quad (3.6)$$

De acordo com a expressão (3.2) temos que  $C(0) = 1$  e como

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 + \sqrt{1 - 4t}}{2t} = +\infty$$

---

<sup>1</sup> $C^n(t) = \underbrace{C(t) \cdot C(t) \cdots C(t)}_{n \text{ vezes}}$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1 + \sqrt{1 - 4t}}{2t} = -\infty,$$

então a solução de  $C(t) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4t}}{2t}$  da equação (3.5) será descartada. Por outro lado, usando a regra de L'Hôpital temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(1 - 4t)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4)}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 - 4t}} = 1.$$

Portanto temos a função  $C(t)$  como geradora para os números de Catalan, onde

$$C(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}. \quad (3.7)$$

**Teorema 3.3.2** *Seja  $C_n$  o  $n$ -ésimos número de Catalan, então temos  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .*

*Demonstração:* Usando o teorema binomial generalizado temos que

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - 4t} &= (1 - 4t)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4t)^n \\ &= 1 + \frac{1}{2}(-4t) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(-4t)^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}(-4t)^3 + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdots (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-4t)^n. \end{aligned}$$

Substituindo na equação (3.7) temos:

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t} = \frac{1 - \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdots (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-4t)^n\right)}{2t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2) \cdots (\frac{1}{2}-n+1) (-4t)^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2}) \cdots (\frac{3-2n}{2}) (-4)^{n-1} t^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2n-3}{2} (-1)^{n-1} (-4)^{n-1} t^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3) 4^{n-1} t^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{n!} t^{n-1}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

O coeficiente de  $t^n$  em (3.8) é

$$\begin{aligned}
 C_n &= 2^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2(n+1) - 3)}{(n+1)!} = 2^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n - 1)}{(n+1)!} \\
 &= \frac{2^n}{(n+1)!} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (2n - 1)(2n)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} = \frac{2^n}{(n+1)!} \frac{(2n)!}{(2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdots (2n)} \\
 &= \frac{2^n}{(n+1)!} \frac{(2n)!}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} \\
 &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.
 \end{aligned}$$

Chegando ao resultado esperado. □

Utilizando o teorema 3.3.2 e aplicando o teste da razão para convergência absoluta na série  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$ , veremos onde ela converge. De fato,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1} t^{n+1}}{C_n t^n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1+1} \binom{2(n+1)}{n+1} t^{n+1}}{\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} t^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+2} \cdot \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \cdot t^{n+1}}{\frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} \cdot t^n} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+2)! \cdot t^{n+1}}{(n+2)!(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)! \cdot n!}{(2n)! \cdot t^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+2) \cdot (2n+1) \cdot (2n)! \cdot n! \cdot t}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n! \cdot (2n)!} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+2) \cdot (2n+1) \cdot t}{(n+2) \cdot (n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2 \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \cdot t}{(n+2) \cdot (n+1)} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2 \cdot (2n+1) \cdot t}{(n+2)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(4n+2) \cdot t}{(n+2)} \right| = 4|t|.
 \end{aligned}$$

Portanto a série é convergente para  $4|t| < 1$  ou seja, para  $|t| < \frac{1}{4}$ .

Logo temos uma série centrada em zero e com raio de convergência igual a  $\frac{1}{4}$ .

Por definição, sabemos que ,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} |C_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4} = 4 &\implies \limsup_{n \rightarrow \infty} \log |C_n|^{\frac{1}{n}} = \log 4 \\ &\implies \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log C_n = \log 4. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Assim sendo, para  $n$  grande, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log C_n \approx \log 4 &\implies \log C_n \approx n \log 4 \\ &\implies \log C_n \approx \log 4^n \\ &\implies C_n \approx 4^n. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Portanto, de acordo com (3.10), percebemos que  $C_n$  cresce de forma exponencial ou seja, o crescimento dos números de Catalan é exponencial.

Voltamos ao problema de contagem em que queremos saber o número de árvores contendo  $n$  arestas existem. Lembremos para árvores com zero até três folhas, o número de árvores era igual ao respectivo número  $C_n$  de Catalan, e isso é confirmado com a proposição a seguir.

**Proposição 3.3.3** *Seja  $n$  um inteiro positivo. O número árvores contendo  $n$  arestas é igual a  $C_n$ .*

*Demonstração:* Primeiro note que como existe uma bijeção entre as árvores planares com  $n$  arestas e a sequência  $\mathcal{C}$  de  $n$   $D$ 's e  $n$   $S$ 's que descrevem o seu contorno, basta sabermos quantas sequências do tipo  $\mathcal{C}$  diferentes com comprimento  $2n$  podem ser escritas.

Podemos provar que o número de sequências  $\mathcal{C}$  de comprimento  $2n$  que descreve o contorno de uma árvore de  $n$  arestas é igual ao  $n$ -ésimo número de Catalan de uma forma semelhante à que provamos a Proposição 3.3.1, o que realmente foi feito e pode ser visto no apêndice A.

Aqui demonstraremos a proposição identificando uma bijeção entre a sequência  $\mathcal{C}$  relacionada com uma árvore com  $n$  arestas e a sequência de *Push's e Pop's* que se relaciona com um sorteio de pilha com  $n$  objetos.

Basta para isso perceber que trocado cada *Push* por um  $D$  e cada *Pop* por um  $S$  temos uma relação um a um entre as sequências. Isso realmente pode ser feito visto que as duas sequências possuem  $2n$  elementos, divididos em 2 tipos (*Push* , *Pop* e  $D$ ,  $S$ ). Ambas começam com um elemento e terminam com outro e além disso possuem o mesmo limitante enquanto estão sendo formadas, não podem possuir mais *Pop's* /  $S$ 's do que *Push's* /  $D$ 's quando olhadas a qualquer momento enquanto estão sendo formadas.

Portanto o número de sequências do tipo  $\mathcal{C}$  de  $n$  elementos é igual ao número de sequências de *Push's* e *Pop's*, isto é, o número de árvores com  $n$  arestas é igual ao número de sorteio de pilhas de  $n$  objetos, que conforme mostra a proposição 3.3.1, é igual ao  $n$ -ésimo número de Catalan.  $\square$

Deixamos mais quatro exemplos de sequencias que são relacionadas aos números de Catalan.

- (a)  $C_n$  conta o número de caminhos monotônicos em uma grade  $n \times n$  que não sobe acima da diagonal.
- (b)  $C_n$  conta o número de caminhos Dyck de comprimento  $2n$  que terminam no eixo horizontal.
- (c)  $C_n$  conta o número de árvores planares binárias com  $n + 1$  folhas.
- (d)  $C_n$  conta o número de strings balanceadas de parênteses de comprimento  $2n$ .

Poderíamos citar tantas outras ainda. Para mais informações da sequências dos exemplos ou outras veja em (ROMAN, 2015).

## 4 PERMUTAÇÕES DE TIPO POLINOMIAL

Neste capítulo veremos que todo conjunto finito de  $n$  polinômios induz a uma permutação de  $n$  elementos. Mostraremos que para os casos em que  $n < 3$ , qualquer permutação de  $n$  elementos distintos pode ser induzida a partir de  $n$  polinômios distintos, porém para  $n \geq 4$  nem toda permutação pode ser obtida desta maneira. Nosso objetivo é descrever todas as permutações que podem ser induzidas por polinômios. Este tipo de permutações serão chamadas de permutações polinomiais, permutações permissíveis ou também de intercâmbios polinomiais. O teorema de Maxim Kontsevich apresenta uma característica de todas as permutações polinomiais de quatro elementos e o teorema de Étienne caracteriza todas as permutações polinomiais com  $(n > 4)$  elementos.

### 4.1 PERMUTAÇÃO POLINOMIAL

**Definição 4** *Sejam  $n \geq 2$  um número inteiro e uma permutação  $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ . Dizemos que  $\pi$  é uma permutação polinomial se existirem  $n$  polinômios  $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}[x]$  e existe  $\varepsilon > 0$  tais que:*

- (a)  $P_1(x) > P_2(x) > \dots > P_n(x)$  para todo  $-\varepsilon < x < 0$ ; e
- (b)  $P_{\pi(1)}(x) > P_{\pi(2)}(x) > \dots > P_{\pi(n)}(x)$  para todo  $0 < x < \varepsilon$ .

Uma permutação polinomial também é chamada de *permutação permissível* ou de *intercâmbio polinomial*.

Observe que a permutação  $\pi$  de  $(1, 2, 3)$  tal que  $\pi(1) = 3$ ,  $\pi(2) = 1$  e  $\pi(3) = 2$  é uma permutação polinomial. Tome  $P_1(x) = x^2$ ,  $P_2(x) = x^3$  e  $P_3(x) = x$ , para  $|x|$  suficientemente pequeno temos  $P_1(x) > P_2(x) > P_3(x)$  para  $x < 0$  e  $P_3(x) > P_1(x) > P_2(x)$  para  $x > 0$ , conforme podemos ver no gráfico dos polinômios apresentado na Figura 17.

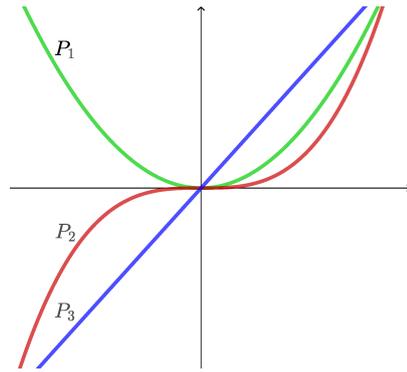


Figura 17: Permutação  $(1, 2, 3) \rightarrow (3, 1, 2)$

Ficam algumas questões em aberto. Será que todas permutações são permutações polinomiais? Se não, podemos saber quais permutações serão polinomiais e quais não? Responderemos essas questões nas próximas seções.

Para cada conjunto de  $n$  funções polinomiais dadas a partir de agora, vamos estudar as permutações polinomiais a elas associadas considerando  $|x|$  suficientemente pequeno.

#### 4.2 PERMUTAÇÃO POLINOMIAL COM DUAS CURVAS

Podemos encontrar duas funções polinomiais, digamos  $p_1$  e  $p_2$ , com  $p_1(x) > p_2(x)$  para  $x$  negativo e que satisfaçam as duas permutações possíveis para  $p_1$  e  $p_2$  com  $x$  positivo, que são  $p_1(x) > p_2(x)$  e  $p_1(x) < p_2(x)$ .

Por exemplo, tomando  $p_1(x) = x^2$  e  $p_2(x) = x$  teremos  $p_1(x) > p_2(x)$  para  $x$  negativo e  $p_1(x) < p_2(x)$  para  $x$  positivo, conforme mostra a Figura 18.

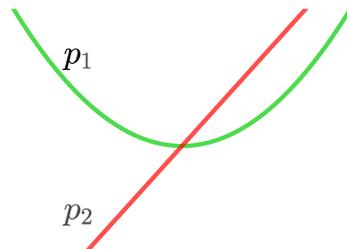


Figura 18: Permutação  $(2, 1)$

Porém, tomando  $p_1(x) = x^2$  e  $p_2(x) = 0$  teremos novamente  $p_1(x) > p_2(x)$  para  $x$  negativo, mas agora  $p_1(x) > p_2(x)$  para  $x$  positivo. A Figura 19 mostra esse caso.

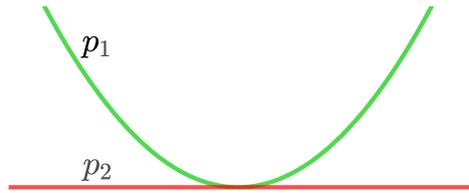


Figura 19: permutação ( 1 2 )

É possível ver que existem infinitos polinômios que satisfaçam a definição de permutação polinomial para cada uma das permutações.

Para o caso em que  $p_1(x) > p_2(x)$  com  $x \neq 0$ , seja  $q_n(x) = p_1(x) + x^{2n}$ , assim teremos  $q_n(x) > p_1(x) > p_2(x)$  com  $x \neq 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Porém, se  $p_1(x) > p_2(x)$  para  $x < 0$  e  $p_1(x) < p_2(x)$  para  $x > 0$ , tome  $q_n(x) = p_2(x) - x^{2n}$ ,  $n > N \in \mathbb{N}$  com  $N$  suficientemente grande, assim teremos  $p_1(x) > q_n(x)$  para  $x < 0$  e  $q_n(x) > p_1(x)$  para  $x > 0$ .

Resumindo, todas as permutações de dois elementos (a permutação identidade e a permutação cíclica) são realizadas por polinômios.

### 4.3 PERMUTAÇÃO POLINOMIAL COM TRÊS CURVAS

Veremos agora as diferentes configurações dos gráficos na vizinhança da origem escolhendo três polinômios  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  distintos que passam pela origem. Lembrando que as posições relativas desses polinômios nos gráficos quando olhamos em cada lado da origem, são determinadas pelas valorações das diferenças  $p_i - p_j$ .

Seja  $\pi : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  uma permutação. Mostraremos através de exemplos que cada uma das seis permutações possíveis para  $\pi$  são de fato permutações polinomiais.

I) Permutação ( 1 2 3 ).

Tome:

$$p_1(x) = x^2$$

$$p_2(x) = 0$$

$$p_3(x) = -x^2$$

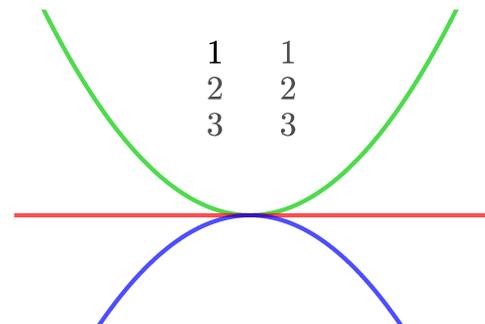


Figura 20: Permutação ( 1 2 3 )

II) Permutação ( 1 3 2 ).

Tome:

$$p_1(x) = x^2$$

$$p_2(x) = -x^3$$

$$p_3(x) = 0$$

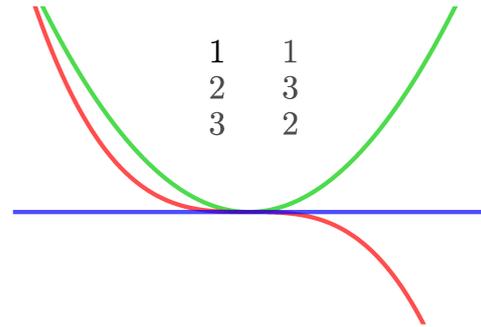


Figura 21: Permutação ( 1 3 2 )

III) Permutação ( 2 1 3 ).

Tome:

$$p_1(x) = 0$$

$$p_2(x) = x^3$$

$$p_3(x) = -x^2$$

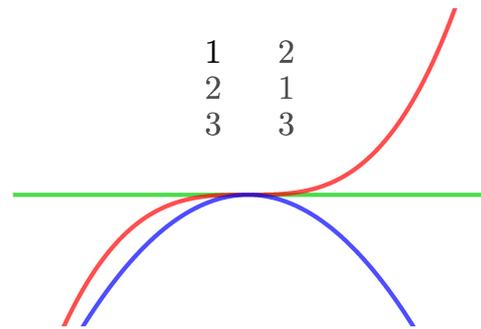


Figura 22: Permutação ( 2 1 3 )

IV) Permutação ( 2 3 1 ).

Tome:

$$p_1(x) = -x$$

$$p_2(x) = x^2$$

$$p_3(x) = -x^2$$

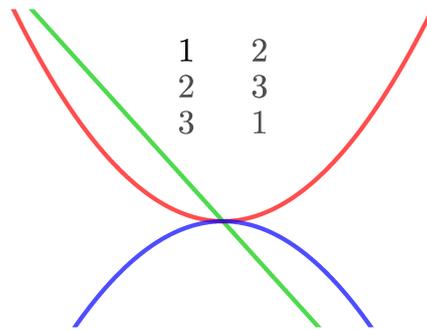


Figura 23: Permutação ( 2 3 1 )

V) Permutação ( 3 1 2 ).

Tome:

$$p_1(x) = x^2$$

$$p_2(x) = -x^2$$

$$p_3(x) = x$$

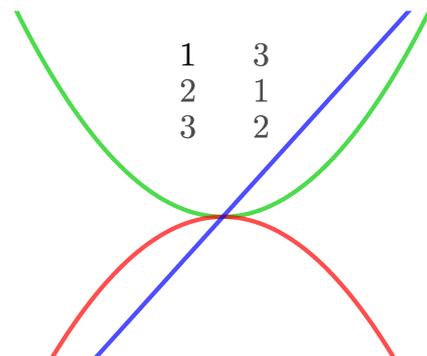


Figura 24: Permutação ( 3 1 2 )

VI) Permutação ( 3 2 1 ).

Tome:

$$p_1(x) = -x$$

$$p_2(x) = 0$$

$$p_3(x) = x$$

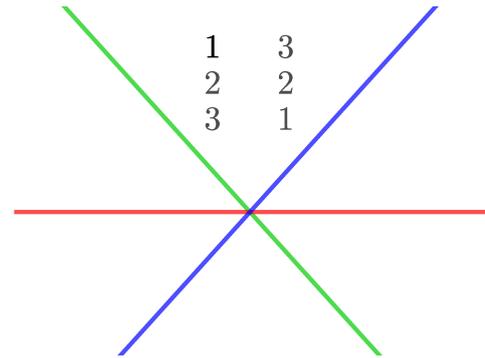


Figura 25: Permutação ( 3 2 1 )

#### 4.4 TEOREMA DE MAXIM KONTSEVICH

Nesta seção, veremos que dada uma permutação  $\pi$  de quatro elementos, nem sempre é possível encontrar quatro polinômios que realize  $\pi$ . Assim, nem todas as vinte e quatro permutações possíveis são permutações polinomiais. Na verdade podemos mostrar exemplos de polinômios que nos permitem dizer que vinte e duas delas são permutações polinomiais, sendo que para as outras duas é uma tarefa impossível, conforme afirma o teorema 4.4.1 para uma delas e a outra é uma decorrência direta.

**Teorema 4.4.1 (de Maxim Kontsevich)** *Não existem quatro polinômios  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$ ,  $p_3(x)$  e  $p_4(x)$  passando pela origem tais que, tomando  $|x|$  suficientemente pequeno, temos  $p_1(x) > p_2(x) > p_3(x) > p_4(x)$  para  $x < 0$  e  $p_2(x) > p_4(x) > p_1(x) > p_3(x)$  para  $x > 0$ .*

*Demonstração:* Suponha por absurdo que existam tais polinômios.

Seja  $P_i = p_i - p_4$ . Assim temos  $P_4(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , e  $P_1(x) > P_2(x) > P_3(x) > 0$  para  $x < 0$ , assim como  $P_2(x) > 0 > P_1(x) > P_3(x)$  para  $x > 0$ , conforme mostra a Figura 26.

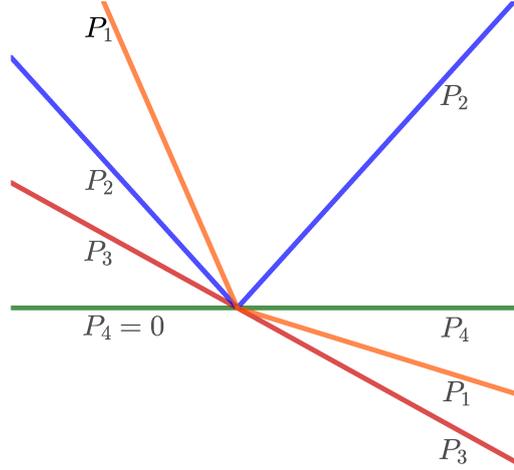


Figura 26: Permutação  $(2, 4, 1, 3)$ .

Note que  $P_1(x)$  e  $P_3(x)$  assumem valores positivos para  $x < 0$  e valores negativos para  $x > 0$ , isto é, mudam de sinal na origem e, sendo assim, pela proposição 2.3.2, temos que  $v(P_1)$  e  $v(P_3)$  são ímpares. Também temos  $P_2(x) > 0$  para todo  $x$  portanto, utilizando a mesma justificativa,  $v(P_2)$  é par.

Agora, como  $P_1(x) > P_2(x) > P_3(x) > 0$  para  $x$  negativo então, pelo lema 2.3.4, temos

$$v(P_3) \geq v(P_2) \geq v(P_1). \quad (4.1)$$

Por outro lado,  $0 > P_1(x) > P_3(x)$  para  $x$  positivo implica que  $|P_1| < |P_3|$ , para  $x$  positivo, sendo assim, novamente de acordo com o lema 2.3.4 temos que

$$v(P_1) \geq v(P_3). \quad (4.2)$$

Para que as desigualdades (4.1) e (4.2) sejam satisfeitas teremos

$$v(P_1) = v(P_2) = v(P_3).$$

O que nos leva a uma contradição, pois vimos que  $v(P_1)$  e  $v(P_3)$  são ímpares e  $v(P_2)$  é par.

Logo concluímos que não existem tais polinômios.  $\square$

Acabamos de ver que a permutação  $(2, 4, 1, 3)$  não é uma permutação polinomial, sendo assim, veremos que a permutação inversa  $(3, 1, 4, 2)$  também não é.

**Corolário 4.4.2** *Não existem quatro polinômios  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$ ,  $p_3(x)$  e  $p_4(x)$  passando pela origem tais que, tomando  $|x|$  suficientemente pequeno, temos  $p_1(x) > p_2(x) > p_3(x) > p_4(x)$  para  $x < 0$  e  $p_3(x) > p_1(x) > p_4(x) > p_2(x)$  para  $x > 0$ .*

*Demonstração:* Escolhendo valores para  $|x|$  suficientemente pequeno, suponha que existam  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$  com  $P_1(x) > P_2(x) > P_3(x) > P_4(x)$  para  $x$  negativo e,  $P_3(x) > P_1(x) > P_4(x) > P_2(x)$  para  $x$  positivo. Tomando  $Q_1(x) = P_3(-x)$ ,  $Q_2(x) = P_1(-x)$ ,  $Q_3(x) = P_4(-x)$  e  $Q_4(x) = P_2(-x)$ , teríamos  $Q_1(x) > Q_2(x) > Q_3(x) > Q_4(x)$  para  $x$  negativo e  $Q_2(x) > Q_4(x) > Q_1(x) > Q_3(x)$  para  $x$  positivo, mas isso nos diz que a permutação  $(2, 4, 1, 3)$  é polinomial, e acabamos de mostrar no teorema 4.4.1 o contrário. Logo a permutação  $(3, 1, 4, 2)$  também não é uma permutação polinomial.  $\square$

As permutações  $(2, 4, 1, 3)$  e  $(3, 1, 4, 2)$  são chamadas de *permutações proibidas* ou *permutações de Kontsevich*.

No apêndice são mostrados exemplos de polinômios comprovando que todas as outras vinte e duas permutações possíveis são permutações polinomiais.

#### 4.5 TEOREMA DE ÉTIENNE GHYS

Vimos que dada uma permutação  $\pi$  de até três elementos, existem polinômios distintos passando pela origem que induzem a permutação  $\pi$ . Porém se  $\pi$  é uma permutação de quatro elementos, nem sempre  $\pi$  é uma permutação polinomial, mais precisamente as únicas permutações que não são induzidas por polinômios são as permutações  $(2, 4, 1, 3)$  e  $(3, 1, 4, 2)$ . Mas como fica a situação quando  $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  é uma permutação para  $n \geq 5$ ? É o que veremos nesta seção.

Vamos provar que os as permutações que não contém as permutações proibidas são as únicas que tornam uma permutação  $\pi$  não polinomial. Isso é o conteúdo do teorema 4.5.3 de Etienne Ghys que, em outras palavras nos diz que dada uma permutação  $\pi$  de quatro ou mais elementos ela será polinomial se, e somente, não existe uma subconjunto de  $E \subset \{1, \dots, n\}$  tal que restrição de  $\pi$  a  $E$  seja uma permutação de Kontsevich. Antes de enunciarmos o teorema de Étienne veremos alguns resultados que nos ajudarão na demonstração do teorema.

**Lema 4.5.1** *Seja  $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ , com  $n \geq 3$ , uma permutação que não contém  $(2, 4, 1, 3)$  nem  $(3, 1, 4, 2)$ . Então existe um intervalo<sup>1</sup> próprio  $I = \{m, \dots, k\}$ , com  $1 \leq m < k \leq n$ , de comprimento  $k - m + 1 \geq 2$  cuja imagem por  $\pi$  é um intervalo.*

*Demonstração:* Podemos ver nos exemplos mostrados na seção 4.3 que em todas as permutações possíveis existem um intervalo cuja imagem por  $\pi$  também é um intervalo. Sendo assim, daqui para frente trataremos na demonstração para valores de  $n \geq 4$ .

<sup>1</sup>Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$  com  $a < b$ . Vamos considerar  $I = \{a, b\}$  um intervalo em  $\mathbb{N}$  quando  $I$  for o conjunto formado por todos números naturais de  $a$  até  $b$ , ou seja,  $I = \{a, a + 1, \dots, b\}$ .

Agora note que a permutação “reversa”  $\pi'(k) = n+1-\pi(k)$  também não contém  $(2, 4, 1, 3)$  nem  $(3, 1, 4, 2)$ . De fato, como  $\pi$  não contém  $(2, 4, 1, 3)$  então não existem 4 índices  $i_1, i_2, i_3$  e  $i_4$  com  $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4$  tais que  $\pi(i_2) < \pi(i_4) < \pi(i_1) < \pi(i_3)$ . Mas como  $\pi'(i_3) = n+1-\pi(i_3)$ ,  $\pi'(i_1) = n+1-\pi(i_1)$ ,  $\pi'(i_4) = n+1-\pi(i_4)$  e  $\pi'(i_2) = n+1-\pi(i_2)$ , segue que:

$$\pi(i_2) < \pi(i_4) < \pi(i_1) < \pi(i_3) \implies \pi'(i_3) < \pi'(i_1) < \pi'(i_4) < \pi'(i_2)$$

Portanto  $\pi$  não contém  $(2, 4, 1, 3)$  implica que  $\pi'$  não contém  $(3, 1, 4, 2)$ .

De forma análoga temos que  $\pi$  não contém  $(3, 1, 4, 2)$  implica que  $\pi'$  não contém  $(4, 2, 1, 3)$ .

Sem perda de generalidade podemos supor que  $\pi(1) < \pi(2)$ , pois caso contrário, poderíamos substituir  $\pi$  pela permutação reversa pois

$$\pi(1) > \pi(2) \implies n+1-\pi'(1) > n+1-\pi'(2) \implies \pi'(1) < \pi'(2)$$

.

Assim, se  $\pi(2) = \pi(1) + 1$ , terminamos, pois a imagem de  $\{1, 2\}$  é o intervalo  $\{\pi(1), \pi(2)\}$ .

Porém, se  $\pi(2) \neq \pi(1) + 1$ , segue que  $\pi(2) > \pi(1) + 1$ . Seja  $J = \{x \in \mathbb{N} / \pi(1) + 1 \leq x \leq \pi(2)\}$ .

Sendo assim, considere o menor número inteiro  $k$  tal que  $\pi(\{2, \dots, k\})$  contenha o intervalo  $J$ . Note que  $\pi(k)$  está em  $J$ , de modo que  $\pi(1) < \pi(k) < \pi(2)$ .

Agora, se a imagem  $\pi(\{2, \dots, k\})$  é exatamente igual ao intervalo  $J$ , então encontramos um intervalo não trivial cuja imagem por  $\pi$  é um intervalo.

Por outro lado, se a imagem  $\pi(\{2, \dots, k\})$  não é exatamente igual ao intervalo  $J$ , escolha um elemento  $l$  entre 2 e  $k$  cuja imagem por  $\pi$  não pertença ao intervalo  $J$ . Deste modo temos  $\pi(l) < \pi(1)$  ou  $\pi(l) > \pi(2)$ .

Se  $\pi(l) < \pi(1)$ , olhando os elementos 1, 2,  $l$ ,  $k$ , verificamos que satisfazem  $1 < 2 < l < k$  e  $\pi(l) < \pi(1) < \pi(k) < \pi(2)$  de acordo com a Figura 27, o que seria impossível pois  $\pi$  não possui  $(3, 1, 4, 2)$ .

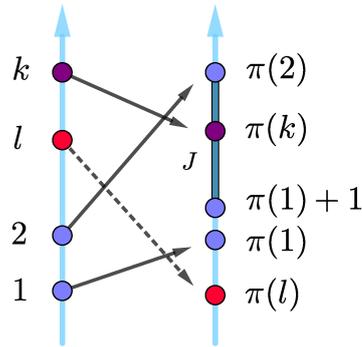


Figura 27: Permutação  $(3, 1, 4, 2)$

Portanto, podemos assumir que todos os elementos de  $\pi(\{2, \dots, k\})$  são maiores do que  $\pi(1)$ .

Podemos também assumir que  $\pi(\{2, \dots, k\})$  não é um intervalo, caso contrário terminaríamos. Portanto, se  $\pi(l) > \pi(2)$  então há pelo menos uma “lacuna” em  $\pi(\{2, \dots, k\})$ , que deve ser maior que  $\pi(2)$ . Logo, existem  $m$  e  $l$  tais que  $k < m$  e  $2 < l < k$  com  $\pi(2) < \pi(m) < \pi(l)$ . Perceba que assim os quatro elementos  $(2, l, k, m)$  são tais que  $2 < l < k < m$  e  $\pi(k) < \pi(2) < \pi(m) < \pi(l)$ , como mostra a Figura 28, o que nos leva novamente a uma contradição pois  $\pi$  não contém  $(3, 1, 4, 2)$ .

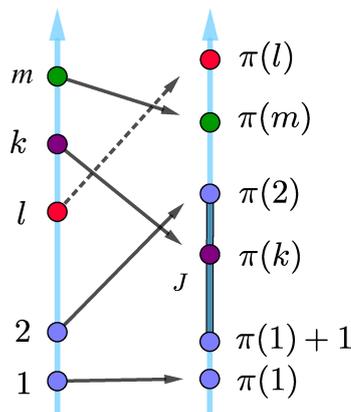


Figura 28: Permutação  $(3, 1, 4, 2)$ .

Portanto acabamos de ver que a imagem de todos os elementos entre 2 e  $k$  pertencem a  $J$ . Assim, demonstramos o lema.  $\square$

A partir dele, podemos escrever o próximo lema.

**Lema 4.5.2** *Seja  $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  uma permutação que não contenha*

$(2, 4, 1, 3)$  nem  $(3, 1, 4, 2)$ , com  $n \geq 2$ . Então existem dois números inteiros consecutivos cujas imagens deles por  $\pi$  são consecutivas.

*Demonstração:* De acordo com lema 4.5.1 existe um intervalo próprio  $I = \{m, \dots, k\}$  sendo  $1 \leq m < k \leq n$ , de comprimento  $k - m + 1 \geq 2$ , cuja imagem por  $\pi$  é um intervalo. Se  $k - m = 1$  então temos que as imagens de  $m$  e  $k$  por  $\pi$  são consecutivas.

Caso contrário, note que a permutação  $\pi$  de  $\{m, m+1, \dots, k\}$  continua sendo uma permutação que não contém  $(2, 4, 1, 3)$  nem  $(3, 1, 4, 2)$ . Portanto, aplicando novamente o lema 4.5.1, sabemos que existe um intervalo  $I_1 \subset I$  com  $I_1 = \{m_1, m_1 + 1, \dots, k_1\}$  sendo  $m \leq m_1 < k_1 \leq k$ , de comprimento  $k_1 - m_1 + 1 \geq 2$ , cuja imagem por  $\pi$  é um intervalo. Se  $k_1 - m_1 = 1$  então as imagens de  $m_1$  e  $k_1$  por  $\pi$  são consecutivas.

Caso contrário seguimos este processo até que encontremos um intervalo  $I_j \subset I_{j-1} \subset \dots \subset I_1 \subset I$ , contendo apenas dois elementos,  $m_j$  e  $k_j$ , e portanto o lema 4.5.1 nos diz que a imagem deles por  $\pi$  é um intervalo que será formado por no máximo quatro termos, e de acordo com os exemplos mostrados no trabalho possui dois termos consecutivos com respectivas imagens consecutivas. Portanto provamos o lema.  $\square$

**Teorema 4.5.3 (de Étienne)** *Seja  $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  para  $n \geq 4$  uma permutação.  $\pi$  é uma permutação polinomial se e somente se  $\pi$  não contém  $(2, 4, 1, 3)$  ou  $(3, 1, 4, 2)$ .*

*Demonstração:* De acordo o teorema 4.4.1 de Maxim Kontsevich e com as definições de permutação polinomial e de permutação que contém  $(2, 4, 1, 3)$  ou  $(3, 1, 4, 2)$ , temos que todas permutações polinomiais são permutações que não contém  $(2, 4, 1, 3)$  nem  $(3, 1, 4, 2)$ . De fato, se  $\pi$  é uma permutação polinomial que contém  $(2, 4, 1, 3)$  ou  $(3, 1, 4, 2)$  então existiriam quatro polinômios,  $P_{i_1}$ ,  $P_{i_2}$ ,  $P_{i_3}$  e  $P_{i_4}$  que iriam contrapor o teorema 4.4.1.

Portanto falta mostrar que se uma permutação  $\pi$  não contém  $(2, 4, 1, 3)$  nem  $(3, 1, 4, 2)$ , então ela é uma permutação polinomial. Faremos isso usando o método de indução começando em  $n = 4$ .

Seja  $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  uma permutação que não contém  $(2, 4, 1, 3)$  nem  $(3, 1, 4, 2)$ , isto é, não existem  $i_1, i_2, i_3$ , e  $i_4$  com  $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n$  de modo que  $\pi(i_2) < \pi(i_4) < \pi(i_1) < \pi(i_3)$  ou  $\pi(i_3) < \pi(i_1) < \pi(i_4) < \pi(i_2)$ .

Já vimos que para  $n = 4$ , se  $\pi$  não contém  $(2, 4, 1, 3)$  nem  $(3, 1, 4, 2)$ , então  $\pi$  é uma permutação polinomial.

Supomos então a afirmação verdadeira para  $n$ .

Seja  $\pi : \{1, 2, \dots, n+1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n+1\}$  uma permutação que não contém  $(2, 4, 1, 3)$  nem  $(3, 1, 4, 2)$ . Pelo lema 4.5.2, sabemos que existem dois números inteiros consecutivos  $i, i+1$ , com imagens consecutivas  $\pi(i), \pi(i+1)$ .

Colapsando  $\{i, i+1\}$  e  $\{\pi(i), \pi(i+1)\}$ , ou seja, tomando-os como sendo um único elemento conforme ilustrado na Figura 29, teremos uma permutação  $\pi'$  de  $n$  elementos que não contém  $(2, 4, 1, 3)$  nem  $(3, 1, 4, 2)$ . Então, de acordo com a hipótese,  $\pi'$  é uma permutação polinomial.

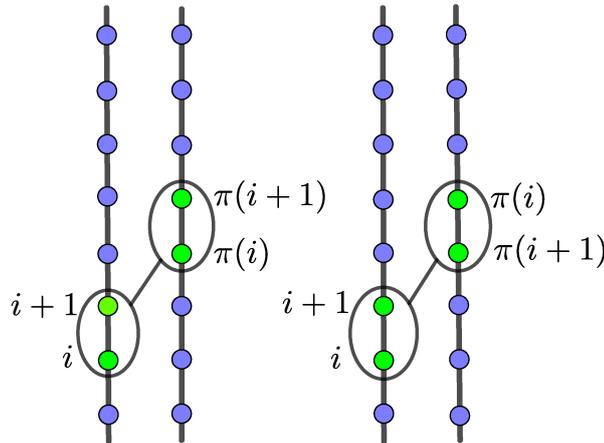


Figura 29: Pontos colapsados.

Sendo assim, existem  $n$  polinômios  $P_1, P_2, \dots, P_n$  de modo que, tomando  $|x|$  suficientemente pequeno temos  $P_1(x) > P_2(x) > \dots > P_n(x)$  para  $x < 0$  e  $P_{\pi'(1)}(x) > P_{\pi'(2)}(x) > \dots > P_{\pi'(n)}(x)$  para  $x > 0$ .

Vamos agora substituir o  $i$ -ésimo polinômio  $P_i$  por dois polinômios,  $P'_i$  e  $P''_i$ , para produzir  $n+1$  polinômios

$$P_1, \dots, P_{i-1}, P'_i, P''_i, P_{i+1}, \dots, P_n$$

que induzam a permutação  $\pi$ . Basta definir

$$P'_i(x) = P_i(x) \quad e \quad P''_i(x) = P_i(x) + (-x)^T$$

onde  $T$  deve ser maior do que o grau do polinômio  $P_{i+1}$ , além disso, deve par se  $\pi(i+1) > \pi(i)$  ou ímpar se  $\pi(i+1) < \pi(i)$ . Assim teremos  $n+1$  polinômios de forma que  $P_1(x) > P_2(x) > \dots > P_n(x)$  para  $x < 0$  e  $P_{\pi(1)}(x) > P_{\pi(2)}(x) > \dots > P_{\pi(n)}(x)$  para  $x > 0$ .

Portanto se  $\pi$  não contém  $(2, 4, 1, 3)$  nem  $(3, 1, 4, 2)$ , então é uma permutação polinomial.

Logo o teorema está demonstrado.  $\square$

Concluimos que, tomando uma permutação  $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  com

$n \geq 4$ ,  $\pi$  é uma permutação polinomial se e somente se  $\pi$  não contém  $(2, 4, 1, 3)$  nem  $(3, 1, 4, 2)$ .

Mas ainda não respondemos quantas permutações polinomiais existem quando tomamos  $n \geq 5$ , nem sabemos se é possível fazer esta contagem para um  $n$  qualquer. Esse será o foco do próximo capítulo.

## 5 CONTANDO PERMUTAÇÕES POLINOMIAIS

Neste capítulo vamos contar a quantidade de permutações de  $n$  elementos que são polinomiais. Para facilitar essa contagem iremos “arborizar polinômios”, isto é, traduzir o problema descrito a um problema equivalente de contagem no nível de árvores. Portanto, calcular o número de permutações polinomiais de  $n$  elementos, equivale (a menos de uma operação que “poda” árvores) a contar o número de árvores podadas contendo  $n$  folhas. Finalmente usaremos funções geradoras para estabelecer a contagem de árvores desejada.

Esperamos que o seguinte resumo facilite a leitura do trabalho a ser feito nesta seção.

### RESUMO:

1. Todo conjunto de  $n$  polinômios que passam pela origem induz uma árvore planar  $A$  com  $n$  folhas.
2. Toda árvore planar  $A$  com  $n$  folhas vem munido com duas relações de ordem total definidas de forma natural.
3. Sabemos que qualquer conjunto finito munido de duas relações de ordem induzem uma permutação de  $n$  elementos. Em particular, qualquer árvore planar  $A$  com  $n$  folhas induz uma permutação de  $n$  elementos.
4. Duas árvores planares com  $n$  folhas podem induzir a mesma permutação. Para não ter esta situação indesejável, iremos a “podá-las”. Tal poda será feito mantendo a estrutura original da árvore, isto é, que a árvore planar podada induza a permutação original.
5. Toda árvore podada com  $n$  folhas induz uma única permutação. Além disso, esta permutação associada é polinomial.
6. O número de árvores planares podadas de  $n$  folhas é igual ao número de permutações polinomiais.

### 5.1 ARBORIZAÇÃO DE POLINÔMIOS

Começaremos mostrando como podemos construir uma árvore a partir de um exemplo para oito polinômios dados. Sejam os polinômios:

$$p_1(x) = 3x + x^2 - 2x^3 + x^5$$

$$p_2(x) = x^2 + 5x^3 - 2x^4$$

$$p_3(x) = -x + x^2 + x^3 - x^4 + 2x^6$$

$$p_4(x) = x^2 - 3x^3 + x^4 + 5x^5 - x^6$$

$$p_5(x) = x^2 - 3x^3 + x^4 + x^5$$

$$p_6(x) = 3x + x^2 - x^3 + 4x^4$$

$$p_7(x) = -x + x^2 + x^3 - x^4 + x^6$$

$$p_8(x) = 3x + 2x^2 + x^3 - 4x^4 + x^5.$$

A Figura 30 mostra o gráfico destes oito polinômios. Vamos analisar a configuração local dos gráficos numa vizinhança da origem.

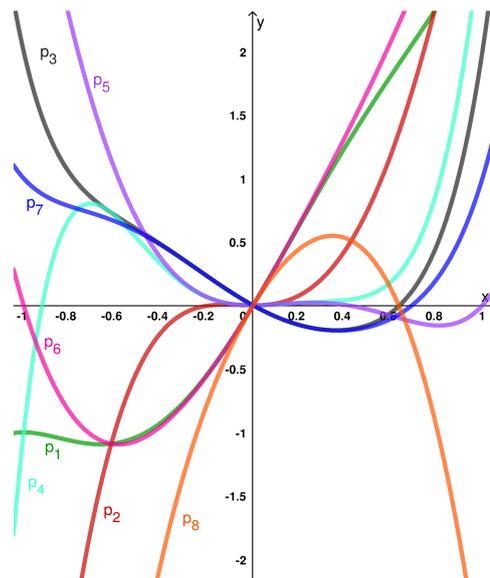


Figura 30: Gráficos dos oito polinômios.

Como estamos escolhendo polinômios que passam pela origem então todos os coeficientes do termo independente são zeros, sendo assim vamos considerar primeiro os termos de grau 1. Encontramos então três possibilidades:  $3x$  (para  $p_1$ ,  $p_6$  e  $p_8$ ),  $0$  (para  $p_2$ ,  $p_4$  e  $p_5$ ) e  $-x$  (para  $p_3$  e  $p_7$ ).

Como podemos observar na Figura 31 que é uma linearização local da Figura 30, dando um zoom nas proximidades da origem vemos apenas três gráficos. Isso porque quando tomamos  $x$  suficientemente pequeno, as funções que possuem o mesmo coeficiente para o termo de grau um sofrem pouca influência dos outros termos com maior grau.

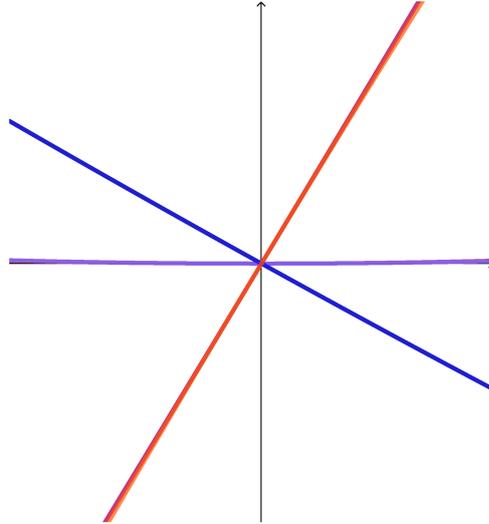


Figura 31: Zoom na origem.

Portanto, considerando valores positivos suficientemente pequenos para  $x$  temos  $3x > 0 > -x$ , e assim podemos dizer que para estes valores de  $x$  o gráfico de  $p_1$ , por exemplo, está acima do gráfico de  $p_2$ , que por sua vez está acima do gráfico de  $p_3$ . No entanto os termos de grau 1 não nos fornecem informações suficientes para compararmos as funções que possuem coeficientes iguais relativos a esse termo, o que acontece entre  $p_1$ ,  $p_6$  e  $p_8$ , também entre  $p_2$ ,  $p_4$  e  $p_5$  e com  $p_3$  e  $p_7$ . Visualizamos a situação na Figura 32.

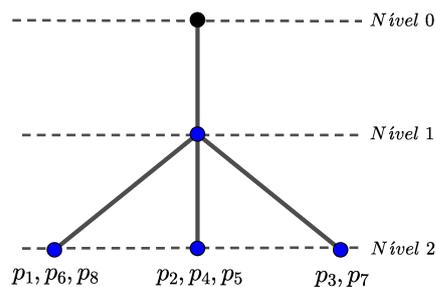


Figura 32: Termos de grau 1.

O nível 0 na Figura 32 indica a raiz da árvore. O nível 1 mostra as posições dos polinômios referentes aos termos dos coeficientes de grau zero, que para o nosso caso sempre ocupam a mesma posição pois são todos iguais a zero. Já o nível 2 apresenta as distinções dos polinômios a partir dos termos de coeficientes de grau 1.

Considerando os termos de grau 2, a árvore passará a apresentar o nível 3, no qual existe a possibilidade de fazer a distinção dos polinômios que eram indistinguíveis no nível

anterior, o que de fato acontece. Temos então quatro possibilidades,  $3x + 2x^2$ ,  $3x + x^2$ ,  $x^2$  e  $-x + x^2$ , mostradas na Figura 33.

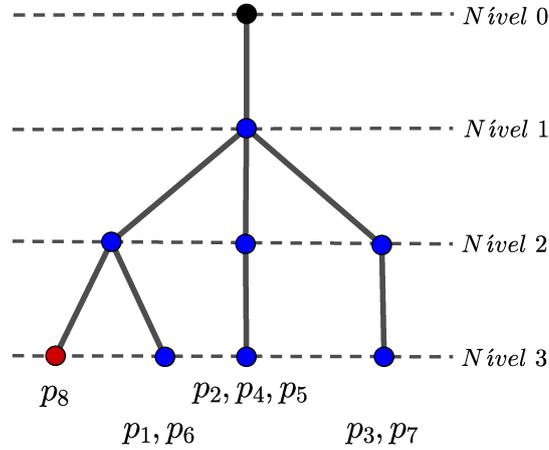


Figura 33: Termos de grau 2.

Os termos de grau 2 nos permitiram distinguir  $p_8$  de  $p_1$  e  $p_6$ , portanto será desnecessário continuar analisando este polinômio em graus maiores, o que não acontece para os demais polinômios pois  $p_1$  e  $p_6$ , assim como  $p_2$ ,  $p_4$  e  $p_5$  e também  $p_3$  e  $p_7$  ainda estão igualmente posicionados. Prosseguiremos então refinando nossa análise dos termos.

No nível 4 os coeficientes dos termos de grau 3 nos permitem distinguir  $p_1$  de  $p_6$  assim como  $p_2$  de  $p_4$  e de  $p_5$ , como mostra a Figura 34.

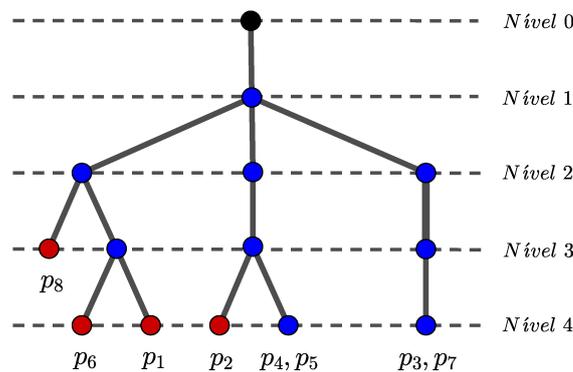


Figura 34: Termos de grau 3.

A análise dos termos de grau 4 é inútil pois não permite fazer a distinção entre dois polinômios anteriormente indistinguíveis, porém olhando os termos de grau 5 podemos

separar  $p_4$  de  $p_5$  enquanto que apenas quando olhamos os coeficientes dos termos de grau 6, já no nível 7 da árvore, podemos fazer a distinção entre  $p_3$  e  $p_7$ , conseguindo assim separar todos os oito polinômios dados.

Codificaremos esta situação em uma árvore planar onde, em cada nível os nós são ordenados da esquerda para a direita e quando ocorre uma bifurcação em um determinado nó, colocamos mais a esquerda o filho que representa o polinômio que possui o maior coeficiente do termo que foi responsável pela separação. A árvore da Figura 35 ilustra o resultado final, onde cada folha representa um dos polinômios dados.

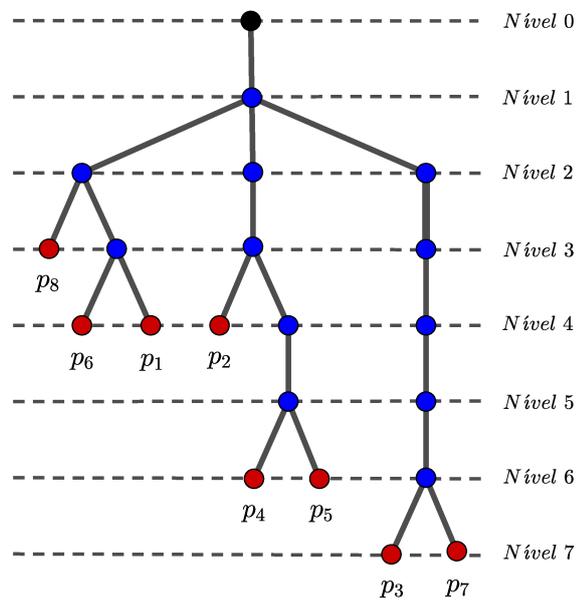


Figura 35: Árvore completa.

Vamos verificar que desta maneira a árvore possui informações suficientes para construir a permutação polinomial associada aos oito polinômios dados no exemplo.

De fato, é fácil ver que tomando  $x$  positivo suficientemente pequeno temos

$$p_8 > p_6 > p_1 > p_2 > p_4 > p_5 > p_3 > p_7.$$

Para ordenarmos os polinômios considerando valores de  $x$  negativos próximos ao zero, isto é, determinarmos a permutação polinomial, vamos avaliar as avaliações da diferença entre dois polinômios. Na verdade esta ordenação será feita baseada na árvore recém construída, olhando em qual nível está o primeiro ancestral comum a duas folhas da árvore.

Vamos então definir a relação de ordem para os polinômios quando tomamos  $|x|$

suficientemente pequeno. Denote com  $p_i \wedge p_j$  o primeiro ancestral comum às folhas que representam  $p_i$  e  $p_j$ . Note que o nível deste ancestral será igual a valoração da diferença dos polinômios representados por estas folhas. Sendo assim, devido a proposição 2.3.3 sabemos que de acordo com a paridade da valuação desta diferença, os polinômios se cruzam ou não quando passam pela origem. Sem perda de generalidade considere  $p_i < p_j$  para  $x$  positivo. Portanto se  $p_i \wedge p_j$  está em um nível par da árvore então teremos  $p_i < p_j$  para  $x$  negativo. Por outro lado, se  $p_i \wedge p_j$  está em um nível ímpar da árvore então teremos  $p_i > p_j$  para  $x$  negativo.

Como cada folha da árvore representa um dos polinômios dados, após reordenarmos os polinômios para os valores de  $x$  negativos, teremos o que pode ser chamado de árvore “torcida” relacionada a árvore inicialmente construída, ou seja, partindo da árvore construída podemos torcer os galhos fazendo com que as folhas passem a ocupar uma nova posição. Vamos torcer os galhos a partir dos maiores níveis em que se encontram os ancestrais comuns às folhas, como veremos nas figuras a seguir.

A Figura 36 mostra a árvore construída a partir dos polinômios e também a árvore com a torção dos galhos que partem de  $p_4 \wedge p_5$ , que é o ancestral comum que aparece em no maior nível ímpar (nível 5).

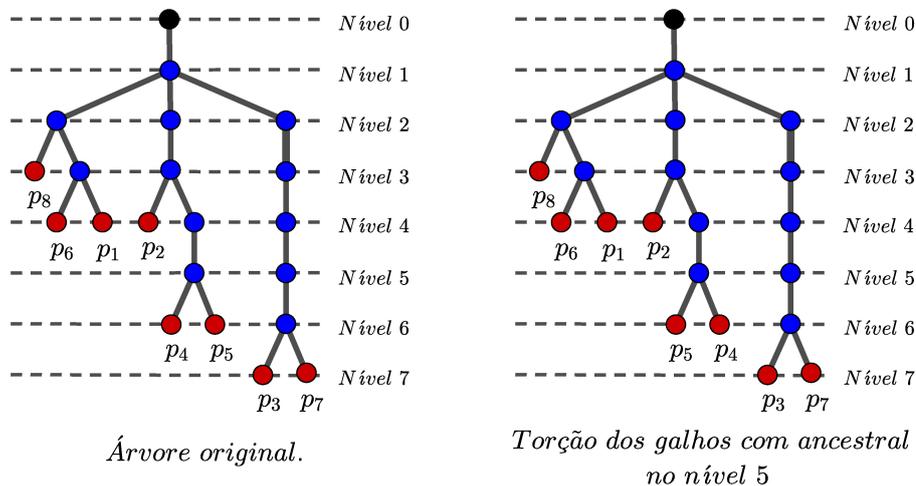


Figura 36: Árvore original e com torção de  $p_4 \wedge p_5$ .

A Figura 37 apresenta os gráficos com a torção dos galhos que partem dos ancestrais no nível 3 e finalmente com a torção dos galhos que partem do ancestral no nível 1, formando a árvore torcida.

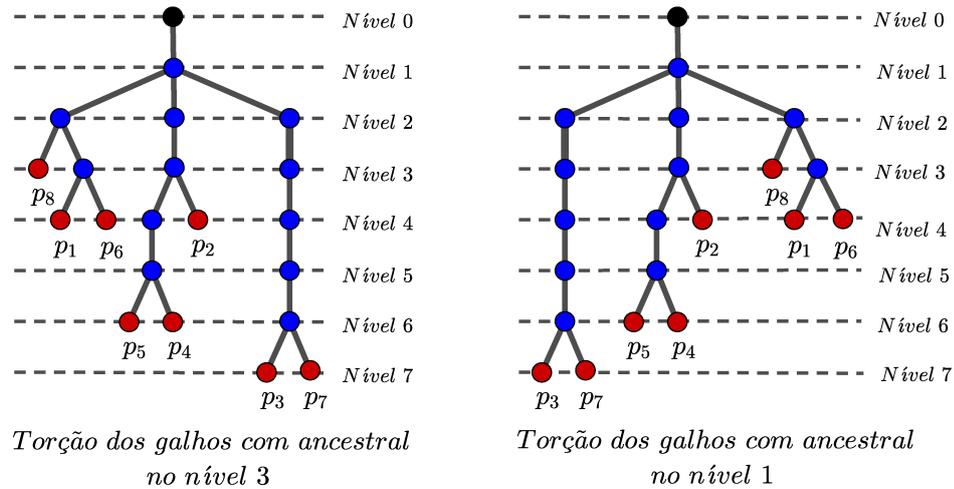


Figura 37: Árvores com torção dos galhos partindo dos ancestrais nos níveis 3 e árvore torcida.

De acordo com a relação de ordem definida para  $x$  negativo temos

$$p_3 > p_7 > p_5 > p_4 > p_2 > p_8 > p_1 > p_6,$$

o que era esperado. Obtemos assim a permutação polinomial

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \longrightarrow (7, 8, 6, 5, 4, 1, 3, 2)$$

Passemos então a considerar o caso geral.

**Proposição 5.1.1** *Seja  $P$  um conjunto de  $n$  polinômios passando pela origem. Então existe uma árvore planar com  $n$  folhas induzida por  $P$ .*

*Demonstração:* A ideia é a seguinte, para cada  $k \in \mathbb{N}$  vamos a definir uma relação de equivalência “ $\sim_k$ ” no conjunto  $P$ . Veremos que se  $k$  é grande, então as classes de equivalência correspondentes possuem um único polinômio. Utilizaremos essa relação para associar cada polinômio a uma folha da árvore dos polinômios que iremos construir. Começemos então definindo a seguinte relação “ $\sim_k$ ” sobre  $P$ :

$$\forall p, q \in P, \quad p \sim_k q \iff v(p - q) \geq k,$$

onde  $v(p)$  é a valuação do polinômio  $p$ . Mostremos que “ $\sim_k$ ” define uma relação de equivalência. De fato, vamos mostrar que cada uma das propriedades são satisfeitas.

- Reflexiva

$$v(p - p) = v(0) = \infty \geq k, \text{ logo } p \sim_k p$$

- Simétrica

Seja  $p \sim_k q$ . Assim  $v(p - q) \geq k$ , mas como  $p - q = -(q - p)$ , temos que  $v(q - p) = v(-(p - q)) = v(-1) + v(p - q) = 0 + v(p - q) \geq k$ , e daí temos que  $q \sim_k p$ .

- Transitiva.

Sejam  $t, p, q \in P$  tais que  $p \sim_k q$  e  $q \sim_k t$ . Assim  $v(p - q) \geq k$  e  $v(q - t) \geq k$ . Portanto  $v(p - t) = v(p - q + q - t) \geq \min\{v(p - q), v(q - t)\} \geq k$ , logo  $p \sim_k t$ .

Note que para um valor de  $k$  suficientemente grande o conjunto  $P$  terá  $n$  classes de equivalências cada uma contendo apenas um polinômio.

Isso pode ser mostrado por contradição, supondo que exista uma classe com dois polinômios equivalentes, digamos  $p \sim_k q$ . Então os coeficientes de  $x^0, x^1, \dots, x^{k-1}$  de  $p$  são iguais aos coeficientes de  $x^0, x^1, \dots, x^{k-1}$  de  $q$ , respectivamente, mas como  $p \neq q$  temos que os coeficientes de ambos os polinômios relativos a algum  $x^i$  são diferentes, porém como tomamos  $k$  suficientemente grande temos  $k > i$  e isso nos diz que os coeficientes de  $x_i$  referentes aos dois polinômios são iguais, chegando a uma contradição. Logo  $p \not\sim_k q$ , ou seja, não existe nenhuma classe de polinômios com mais de um elemento de  $P$  se escolhermos um  $k$  suficientemente grande.

Podemos começar a organizar a construção da árvore que será associada a  $n$  polinômios dados, de maneira que depois possamos mostrar que seguindo as regras definidas, esta árvore será única.

A construção da árvore relacionada a  $n$  polinômios dados se dará da seguinte forma:

O nível zero vai conter a raiz, que será rotulada pela classe de equivalência da relação  $v(p - q) \geq 0$ , isto é, todos os polinômios de  $P$ .

O nível 1 vai ser formado por todas as classes de equivalência formadas a partir da relação  $v(p - q) \geq 1$ . Como escolhemos polinômios passando pela origem (termo independente igual a zero), continuamos com todos os  $n$  polinômios pertencendo a mesma classe.

No segundo nível teremos os netos da raiz, eles serão rotulados pelas classes de equivalências da relação  $v(p - q) \geq 2$ . Perceba que aqui podemos novamente ter apenas uma classe de equivalência mas agora há possibilidade de existirem mais classes, de fato, para que isso aconteça basta que pelo menos um dos polinômios possua o termo de grau 1 com coeficiente diferente dos demais. Os polinômios que possuem os coeficientes iguais para o termo de grau 1, pertencem a mesma classe de equivalência.

Apesar de podermos seguir esses passos infinitamente, aumentando os níveis cada vez mais, tomando  $k > \max\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  onde  $t_i$  é o grau do  $i$ -ésimo polinômio, teremos cada classe de equivalência composta por apenas um polinômio de  $P$  e aí já podemos

parar o processo, ficando com  $n$  folhas rotuladas pelos  $n$  polinômios do conjunto  $P$ .  $\square$

**Proposição 5.1.2** *Seja  $A$  uma árvore planar com  $n$  folhas. Então o conjunto das  $n$  folhas induzem uma permutação em  $\{1, \dots, n\}$ .*

*Demonstração:* Vamos nomear cada folha de acordo com a posição em que ocupa na árvore, partindo da esquerda para a direita, assim, a primeira folha à esquerda será a folha 1, a próxima folha que aparecer no seu lado direito será a folha 2 e assim sucessivamente. Deste modo podemos definir uma ordenação das  $n$  folhas de  $A$ , denotada por  $\prec$ , onde  $a \prec b$  ( $a$  precede  $b$ ) se a folha  $a$  não estiver à direita da folha  $b$  na árvore. Aqui estamos considerando a ordenação natural dada pelo plano.

Agora definiremos uma outra relação denotada por  $\prec\prec$ .

Seja  $a \wedge b$  o primeiro ancestral comum às folhas  $a$  e  $b$ .

$$a \prec\prec b \iff \begin{cases} \text{Se } a \prec b \text{ e } a \wedge b \text{ estiver em um nível par} \\ \text{ou} \\ \text{Se } b \prec a \text{ e } a \wedge b \text{ estiver em um nível ímpar.} \end{cases}$$

Isso pode ser visto como uma forma de “torcer” a árvore.

Assim definida, a relação  $\prec\prec$  também é uma relação de ordem total pois dadas folhas  $a, b, c$  temos:

- $a \prec\prec a$  pois  $a \prec a$  ( $a$  não está à direita de  $a$ ). Aqui mostramos a reflexividade.
- Se  $a \prec\prec b$  e  $b \prec\prec a$  então, considerando que  $a \wedge b$  está em um nível par temos  $a \prec b$  e  $b \prec a$ . Por outro lado se  $a \wedge b$  está em um nível ímpar temos  $b \prec a$  e  $a \prec b$ . Em ambos os casos, como  $\prec$  é uma relação de ordem temos que  $a = b$ . Assim mostramos a propriedade anti-simétrica.
- Para provar a transitividade, seja  $a \prec\prec b$  e  $b \prec\prec c$ .

Vamos analisar caso a caso a paridade dos níveis em que  $a \wedge b$  e  $b \wedge c$  podem estar.

(I) Se  $a \wedge b$  e  $b \wedge c$  estão em um nível par então  $a \wedge c$  também está em um nível par. Além disso temos  $a \prec b$  e  $b \prec c$ , mas como  $\prec$  é uma relação de ordem, então  $a \prec c$ . Sendo assim,

$$a \prec\prec b \text{ e } b \prec\prec c \implies a \prec b \text{ e } b \prec c \implies a \prec c \implies a \prec\prec c.$$

(II) Se  $a \wedge b$  está em um nível par e  $b \wedge c$  em um nível ímpar então  $a \wedge c$  está em um nível ímpar e daí segue que

$$a \prec\prec b \text{ e } b \prec\prec c \implies a \prec b \text{ e } c \prec b.$$

Mas ainda não podemos concluir diretamente que  $c \prec a$ . Suponha por absurdo que  $a \prec c$ .

Segue que  $a \prec c \prec b$ . Como  $a \wedge b$  está em um nível par e  $a \wedge c$  em um nível ímpar então sabemos que eles pertencem a níveis diferentes da árvore. Para o caso em que  $a \wedge c$  está em um nível maior do que  $a \wedge b$ , partindo de  $c$  em direção a  $c \wedge b$  passamos por  $a \wedge c$ , portanto  $a \wedge b = c \wedge b$ . Mas isso é uma contradição pois eles pertencem a níveis diferentes da árvore. Analogamente chegamos a uma contradição para o caso em que  $a \wedge c$  está em um nível menor do que  $a \wedge b$ . Logo temos que  $c \prec a$ .

Sendo assim, como  $a \wedge c$  está em um nível ímpar, temos

$$c \prec a \implies a \prec \prec c.$$

- (III) Se  $a \wedge b$  está em um nível ímpar e  $b \wedge c$  está em um nível par então  $a \prec c$  está em um nível ímpar. Aqui, novamente estaremos em um caso semelhante ao do item (II), onde não chegamos a uma conclusão direta entre  $a$  e  $c$ . Fazendo o raciocínio análogo ao que foi feito no item anterior mostramos que  $c \prec a$ . Agora, como  $a \wedge c$  está em um nível ímpar, temos que

$$c \prec a \implies a \prec \prec c.$$

- (IV) Se  $a \wedge b$  e  $b \wedge c$  estão em um nível ímpar então  $a \wedge c$  também está em um nível ímpar e daí segue que

$$a \prec \prec b \text{ e } b \prec \prec c \implies b \prec a \text{ e } c \prec b \implies c \prec a \implies a \prec \prec c.$$

Portanto está mostrada a transitividade.

Logo mostramos que  $\prec \prec$  realmente é uma relação de ordem. Falta mostrar que é uma relação de ordem total, isto é, se  $a$  e  $b$  são duas folhas quaisquer então  $a \prec \prec b$  ou  $b \prec \prec a$ . De fato, sendo  $\prec$  uma relação de ordem total, as folhas  $a$  e  $b$  satisfazem  $a \prec b$  ou  $b \prec a$ . Assuma que  $a \prec b$ . Então dependendo da paridade do nível de  $a \wedge b$  teremos  $a \prec \prec b$  (nível par) ou  $b \prec \prec a$  (nível ímpar).

O caso em que  $b \prec a$  pode ser feito de forma análoga.

Logo, dados  $a$  e  $b$  temos que  $a \prec \prec b$  ou  $b \prec \prec a$  ou seja,  $\prec \prec$  é uma relação de ordem total.

Portanto, temos um conjunto de  $n$  elementos (folhas), munidos com duas relações de ordem total,  $\prec$  e  $\prec \prec$ . Sendo assim, como sabemos, induz uma permutação de  $n$  elementos.  $\square$

Desta maneira, dados  $n$  polinômios distintos que passam pela origem podemos montar uma árvore planar com  $n$  folhas de modo que cada folha represente um dos polinômios dados e a partir desta árvore teremos duas ordenações de suas folhas, denotadas por  $\prec$  para a posição natural das folhas na árvore original e  $\prec\prec$  para a posição das folhas após torcermos a árvore. Para o caso do exemplificado na Figura 35 teremos

$$1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \quad \text{e} \quad 7 \prec\prec 8 \prec\prec 6 \prec\prec 5 \prec\prec 4 \prec\prec 1 \prec\prec 3 \prec\prec 2,$$

que pode ser vista como a permutação que leva  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$  em  $(7, 8, 6, 5, 4, 1, 3, 2)$ .

## 5.2 ÁRVORES PLANARES DE SCHRODER

Já sabemos que dado  $n$  polinômios podemos construir uma árvore associada a eles contendo  $n$  folhas, que por sua vez induzam a uma permutação de  $n$  elementos. Agora veja que é possível escolher outros  $n$  polinômios que serão associadas a uma árvore  $A''$ , mas que induza a mesma permutação  $\pi$  relacionada à árvore  $A'$ . Para isso vamos escolher 3 polinômios  $p_1(x) = x^2$ ,  $p_2(x) = 0$  e  $p_3(x) = x$  e outros 3,  $q_1(x) = x^2 + x^4$ ,  $q_2(x) = x^2$  e  $q_3(x) = x$ . As árvores associadas a cada trio são diferentes, conforme mostra a Figura 38, mas induzem a uma mesma permutação.

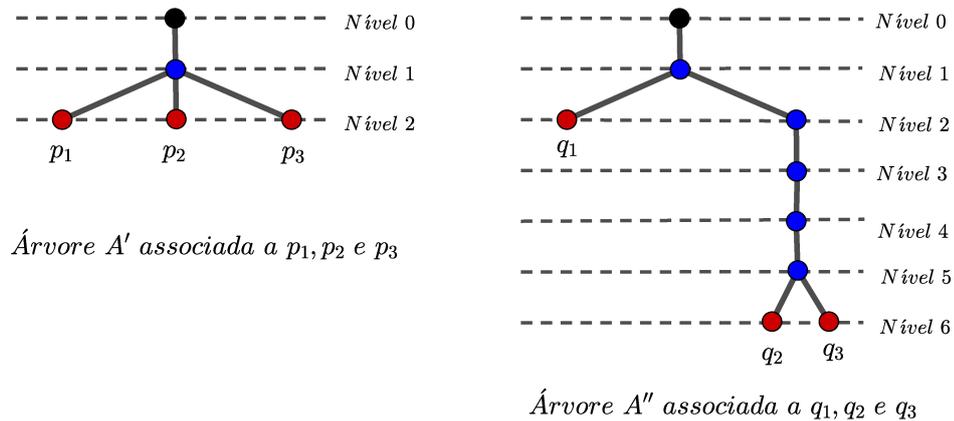


Figura 38: Árvores associadas a trios de polinômios diferentes que induzem a mesma permutação.

Vamos mostrar que após realizarmos algumas operações de “poda” de galhos, fazendo com que as árvores  $A'$  e  $A''$  sejam iguais a uma árvore podada  $A$ , que mantém as características principais e suficientes para o nosso estudo dos polinômios a ela associados, ou seja que induza também à permutação  $\pi$ . Mostraremos então que para cada

$n$ -polinômios dados existe apenas uma árvore podada com  $n$  folhas associada a ele e que, para cada árvore dessas existe uma única permutação polinomial relacionada, chegando a conclusão que para contar o número de permutações polinomiais existentes para  $n$  elementos basta contar o número de árvores podadas distintas contendo  $n$  folhas.

**Definição 5** *Árvore planar podada é uma árvore em que todo nó interno, isto é, nó que não é folha nem a raiz, possui ramificação.*

Uma árvore planar podada será chamada de *árvore planar de Schroder*.

Para não alterarmos nem perdermos as informações que realmente são importantes no estudo da árvore, a poda deve seguir os critérios:

- Se um nó interno possuir apenas uma folha em sua descendência, podaremos todos galhos a partir dele, assim ele se tornará uma folha.
- Se um nó interno possui uma ramificação vamos subindo a partir dele em direção à raiz até que encontremos um outro nó que também possui uma ramificação ou, caso não exista, até chegarmos na raiz. Se a quantidade de galhos entre os dois nós, ou entre o nó e a raiz, for par então podaremos todos os galhos, unindo assim os nós, se no entanto tiver uma quantidade ímpar de galhos entre eles, deixamos apenas um galho ligando esses dois nó e podamos todos os outros galhos restantes.

Como exemplo temos a Figura 39, que mostra a árvore da Figura 35 e ela após a poda.

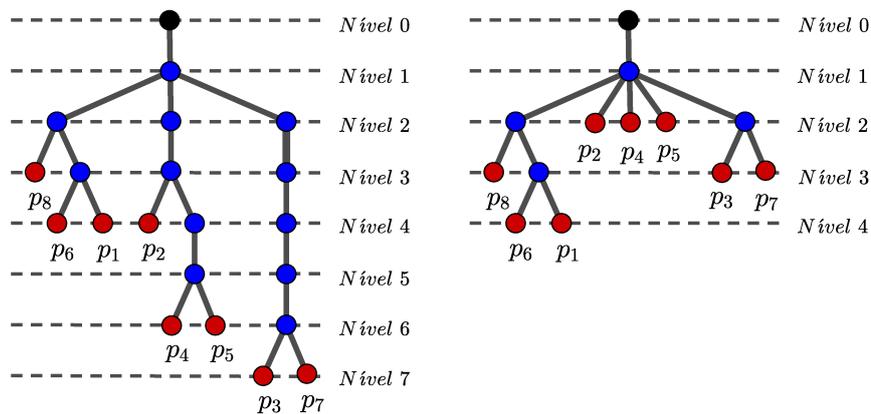


Figura 39: Árvore completa e árvore completa podada.

É importante perceber que as relações de ordem  $\prec$  e  $\prec\prec$  permanecem inalteradas quando são tomadas a partir de uma árvore qualquer ou da árvore de Schroder associada a

ela, pois apenas encurtamos alguns caminhos entre as folhas mas não alteramos a posição das folhas nem a paridade dos níveis dos nós que são ancestrais comuns a elas, isto é, um ancestral comum a duas folhas que estava em um nível par, continua em um nível par após a poda e um que estava em um nível ímpar também continua em um nível ímpar na árvore podada.

Sendo assim podemos ter diferentes árvores que serão associadas a mesma árvore de Schroder, porém cada árvore de Schroder gera uma única ordenação  $\prec\prec$ . Isto quer dizer que podemos ter diferentes polinômios que serão relacionados a diferentes árvores, mas se estas árvores se tornarem na mesma árvore podada então, como a relação  $\prec$  e a paridade nos nós ancestrais não são alteradas temos que a relação  $\prec\prec$  também será a mesma.

De acordo com as leis de formação de uma árvore de Schroder, ela possui basicamente duas formas, ou a raiz possui mais de um filho ou o seu único filho terá mais de um filho. Em qualquer um dos modos, ao ser escolhido aleatoriamente um de seus nós diferente da raiz, esse nó será uma folha ou possuirá pelo menos dois filhos, conforme podemos ver nos exemplos mostrados na Figura 40.

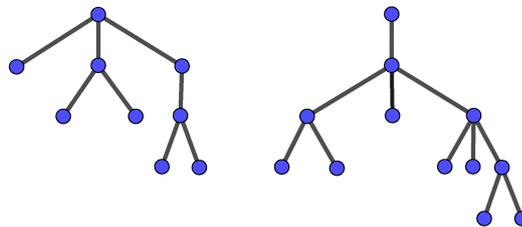


Figura 40: Árvores de Schroder de raiz com mais de um filho ou com um único filho.

Alguns resultados podem ser retirados das árvores de Schroder com as relações de ordem já definidas.

**Lema 5.2.1** *Seja  $A$  uma árvore podada com  $n \geq 2$  folhas tal que  $1 \prec 2 \prec \dots \prec n$  e  $\pi$  a permutação que associa a sequência de folhas ordenada por  $\prec$  com a sequência ordenada por  $\prec\prec$ .*

*As imagens por  $\pi$  de dois inteiros  $i$  e  $i + 1$  são consecutivas se, e somente se,  $i$  e  $i + 1$  são folhas irmãs em  $A$ , isto é, possuem o mesmo pai.*

*Demonstração:*

( $\Rightarrow$ ) Se a árvore  $A$  possui apenas duas folhas, então é óbvio que elas serão irmãs e suas imagens por  $\pi$  de serão consecutivas. Para o caso de  $A$  possuir mais de duas folhas, sejam  $i$  e  $i + 1$  duas folhas irmãs e  $j$  uma outra folha. Sendo assim temos  $i \wedge j = (i + 1) \wedge j$ .

Utilizando a relação  $\prec\prec$  e supondo  $i + 1 \prec j$ , teremos quatro possibilidades para a ordenação de  $i$ ,  $i + 1$  e  $j$ .

- I) Se  $i \wedge (i + 1)$  e  $i \wedge j$  estão ambos em níveis pares, então  $i \prec\prec i + 1 \prec\prec j$ .
- II) Se  $i \wedge (i + 1)$  está em um nível par e  $i \wedge j$  em um nível ímpar, então  $j \prec\prec i \prec\prec i + 1$ .
- III) Se  $i \wedge (i + 1)$  está em um nível ímpar e  $i \wedge j$  em um nível par, então  $i + 1 \prec\prec i \prec\prec j$ .
- IV) Se  $i \wedge (i + 1)$  e  $i \wedge j$  estão ambos em níveis ímpares, então  $j \prec\prec i \prec\prec i + 1$ .

Portanto nunca temos  $i \prec\prec j \prec\prec i + 1$  ou  $i + 1 \prec\prec j \prec\prec i$ , ou seja, não existe um número entre  $\pi(i)$  e  $\pi(i + 1)$ .

O mesmo acontece se  $j \prec i$ . Logo as imagens de  $i$  e  $i + 1$  por  $\pi$  são consecutivas.

( $\Leftarrow$ ) Sejam  $\pi(i)$  e  $\pi(i + 1)$  consecutivos, portanto na sequência ordenada por  $\prec\prec$  teremos  $i$  e  $i + 1$  consecutivos. Suponha que  $i$  e  $i + 1$  não sejam irmãs. Então o caminho que conecta  $i$  e  $i + 1$  na árvore  $A$  possui pelo menos 3 arestas de comprimento e nele existe um nó  $x$  de modo que  $x$  e  $i \wedge (i + 1)$  estejam em um níveis com paridades diferentes. Agora como cada nó tem pelo menos dois filhos em uma árvore podada, escolha  $j$  uma folha que seja descendente de  $x$  e diferente de  $i$  e  $i + 1$ . Daí segue que  $j \wedge i$  e  $j \wedge (i + 1)$  não estão ambos em níveis pares ou ímpares e portanto teremos  $i \prec\prec j \prec\prec i + 1$  ou  $i + 1 \prec\prec j \prec\prec i$ , o que é uma contradição, logo  $i$  e  $i + 1$  são folhas irmãs.  $\square$

A Figura 41 mostra o caso em as folhas  $i$  e  $i + 1$  não são irmãs. Perceba que se o nível  $K$  for par então o nó  $x$ , que é  $j \wedge i$  estará em um nível ímpar, e daí teremos  $i \prec\prec j \prec\prec i + 1$ . Por outro lado de  $K$  for ímpar então  $x$  estará em um nível par, neste caso teremos  $i + 1 \prec\prec j \prec\prec i$ . De qualquer forma  $\pi(i)$  e  $\pi(i + 1)$  não são consecutivos.

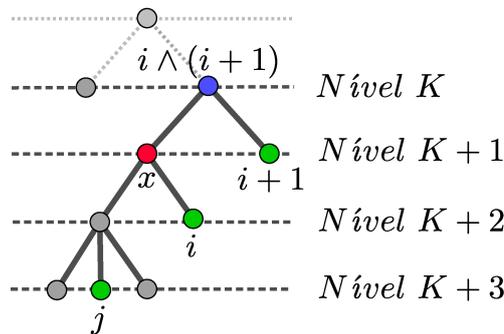


Figura 41: Folhas  $i$  e  $i + 1$  não são irmãs.

Este lema nos dá uma outra demonstração para o lema 4.5.2, bastando tomar o nó intermediário com maior nível possível na árvore podada. Como este nó possui pelo menos dois filhos, que serão folhas pela forma que foi feita a escolha, teremos dois irmãos

que serão rotulados por números consecutivos e devido ao lema 5.2.1 sabemos que terão imagens consecutivas por  $\pi$ .

Também podemos mostrar, usando o lema 5.2.1, que nunca teremos uma árvore que nos possibilite  $2 \prec 4 \prec 1 \prec 3$  nem  $3 \prec 1 \prec 4 \prec 2$ .

**Proposição 5.2.2** *Toda permutação induzida por uma árvore planar podada é polinomial.*

*Demonstração:* De fato, supondo que tenhamos um dos casos proibidos, então percebemos que não existe imagens de dois inteiros consecutivos que são consecutivos, portanto pelo lema 5.2.1 a árvore podada não possui folhas irmãs, o que é um absurdo pois como já foi falado toda árvore podada com duas ou mais folhas possui pelo menos duas folhas irmãs, mostrando que realmente não teremos uma árvore que resulte nas permutações proibidas.  $\square$

**Teorema 5.2.3** *Seja  $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  uma permutação. Se existe uma árvore podada com  $n$  folhas que gere tal permutação, ela é única.*

*Demonstração:* Vamos provar por indução para  $n \geq 2$ .

Para o caso  $n = 2$  sabemos ter apenas duas permutações possíveis que são  $(1, 2)$  e  $(2, 1)$ . Como temos apenas duas árvores podadas diferentes contendo duas folhas, cada uma gerando uma das permutações dadas, conforme mostra a Figura 42, então para cada permutação existe uma única árvore podada com 2 folhas que gere tal permutação.

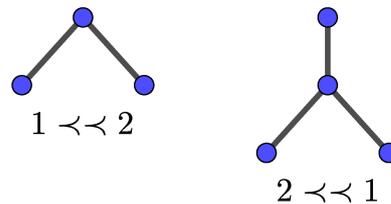


Figura 42: Árvores podadas com 2 folhas

Suponha a afirmação verdadeira para o caso  $n$ .

Vamos analisar o caso de uma permutação de  $n + 1$  elementos.

Se não existe nenhuma árvore que gere a permutação  $\pi$  está provado o teorema, caso contrário, sejam  $A_1$  e  $A_2$  duas árvores podadas com  $n + 1$  folhas cada e gerando a mesma permutação  $\pi$ .

Como toda árvore podada possui pelo menos duas folhas irmãs então  $A_1$  possui 2 folhas irmãs, digamos  $i$  e  $i+1$ . De acordo com o lema 5.2.1,  $\pi(i)$  e  $\pi(i+1)$  são consecutivos. Aplicando novamente o lema 5.2.1, mas agora levando em consideração  $A_2$ , teremos que  $i$  e  $i+1$  são folhas irmãs em  $A_2$ .

Retirando a folha  $i+1$  de  $A_1$  e de  $A_2$  ficamos com árvores  $A'_1$  e  $A'_2$  relacionadas a  $A_1$  e  $A_2$  respectivamente, ambas com  $n$  folhas. Se a folha  $i+1$  que foi retirada era a única irmã da folha  $i$  em alguma das árvores  $A_1$  ou  $A_2$ , então  $A'_1$  ou  $A'_2$  não estaria na forma de uma árvore podada e neste caso, fazendo a poda teríamos a árvore  $A''_1$  correspondentes a  $A'_1$  assim como a  $A''_2$  correspondente a  $A'_2$ . A Figura 43 exemplifica esta situação.

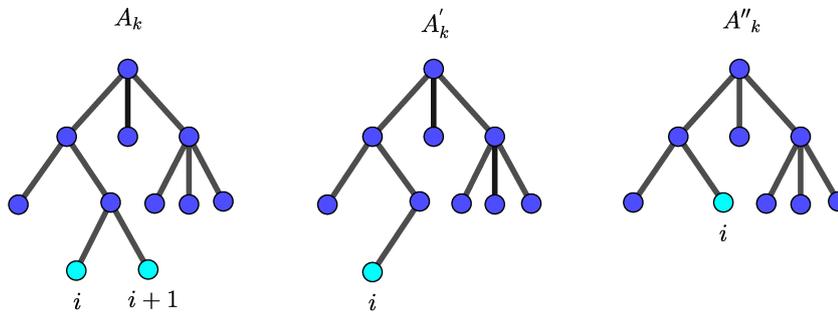


Figura 43: Situação em que a  $(i+1)$ -ésima folha possui apenas uma irmã.

Como  $A_1$  e  $A_2$  geram a mesma permutação  $\pi : \{1, \dots, n+1\} \rightarrow \{1, \dots, n+1\}$  então, após a retirada da folha  $i+1$  as árvores  $A'_1$  e  $A'_2$  definem a mesma permutação  $\pi' : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  onde  $\pi'(k) = \pi(k)$  se  $\pi(k) < i+1$  e  $\pi'(k) = \pi(k) - 1$  se  $k \geq i+1$ . Portanto, pela hipótese de indução, ambas árvores são iguais a alguma árvore podada  $A''$  de  $n$  folhas. Partindo de  $A''$  para retornarmos a  $A_1$  e a  $A_2$  temos que realizar uma das duas operações a seguir: adicionamos uma irmã a sua  $i$ -ésima folha (para o caso em que de  $i$  e  $i+1$  não serem únicas irmãs) ou adicionamos dois filhos a  $i$ -ésima folha (para o caso em que  $i$  era a única irmã de  $i+1$ ). Porém como  $A_1$  e  $A_2$  produzem a mesma permutação  $\pi$ , então  $i \wedge (i+1)$  possui a mesma paridade em ambas as árvores, isso só será possível se  $A_1$  e  $A_2$  forem formados da mesma operação a partir de  $A''$ , o que nos levará a ter  $A_1 = A_2$ , como queríamos.  $\square$

A Figura 44 mostra um exemplo em que os casos em que a  $(i+1)$ -ésima folha tinha apenas uma ou mais de uma folha irmã e como cada situação gera  $i \wedge i+1$  em níveis de paridade diferente na árvore.

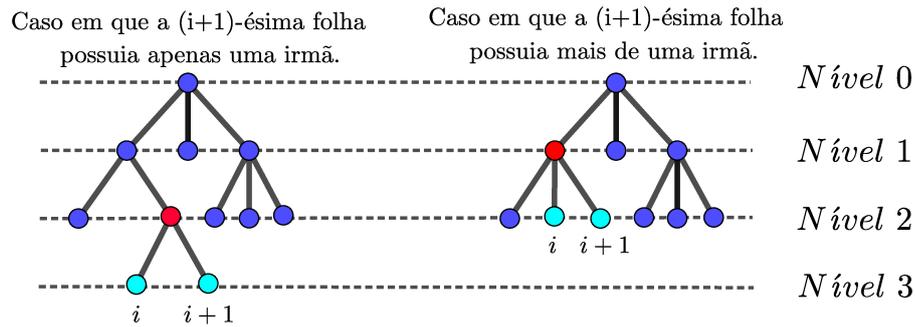


Figura 44: Retorno de  $A'$  para  $A_1$  e  $A_2$ .

Em particular, temos o seguinte resultado.

Denotemos com  $\mathcal{P}_n$  o conjunto de todas as permutações polinomiais de  $\{1, \dots, n\}$  e denote com  $\mathcal{A}_n$  o conjunto de todas as árvores planares podadas contendo  $n$  folhas.

**Proposição 5.2.4** *O conjunto  $\mathcal{P}_n$  e o conjunto  $\mathcal{A}_n$  possuem a mesma cardinalidade.*

Isso se dá ao fato de que cada elemento de  $\mathcal{P}_n$  é associado a uma única árvore podada que por sua vez é relacionada a um único elemento de  $\mathcal{A}_n$ , e vice-versa, ou seja existe uma bijeção entre o número de permutações polinomiais e a quantidade de árvores podadas.

Árvores podadas também são chamadas de *árvores de Schroder* pois, como veremos na próxima seção, a sequência dos números formada pela quantidade de árvores podadas diferentes, contendo  $n \geq 2$  folhas, é igual a ao  $n$ -ésimo número (grande) de Schroder.

### 5.3 TAXA DE CRESCIMENTO DE PERMUTAÇÕES POLINOMIAIS

Vimos até aqui que dada  $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  uma permutação, ela pode ser ou não uma permutação polinomial. Também vimos os  $n$  polinômios que induzem uma permutação polinomial  $\pi$  podem ser relacionados com uma única árvore podada contendo  $n$  folhas, onde cada polinômio será representado por uma das folhas desta árvore, além disso, ao ordenarmos estas folhas utilizando as relações de ordem  $\prec$  e  $\prec\prec$  temos uma permutação que é polinomial. Portanto para contar o número de permutações polinomiais de  $n$  elementos basta contar o número de árvores de Schroder contendo  $n$  folhas existem.

Vamos então contar o número de permutações polinomiais  $a(n)$  para  $n$  elementos.

**Teorema 5.3.1** *Seja  $a(n)$  o número de elementos de  $\mathcal{P}_n$ . Então,*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log a(n) = \log(3 + 2\sqrt{2}).$$

*Demonstração:* Seja  $b(n)$  o número de árvores de Schroder tais que a raiz possua mais de um filho para  $n \geq 2$  e não tenha filho para  $n = 1$ . Dada uma árvore de Schroder deste tipo podemos transformar sua raiz em um único filho de uma nova raiz, formando assim uma nova árvore podada. Note que o processo inverso também pode ocorrer, cortando a raiz e assim tornando seu único filho em raiz. Como toda árvore podada se encaixa em um das duas formas então temos que  $a(n) = 2b(n)$ , considerando  $n \geq 2$ . Calculando  $b(n)$  para os menores valores de  $n$  temos:

- $b(1) = 1$  , a raiz cuja folha é a própria raiz.
- $b(2) = 1$  , a árvore com duas folhas partindo da raiz.
- $b(3) = 3$  : são as três árvores contendo três folhas cada, mostradas na Figura 45.

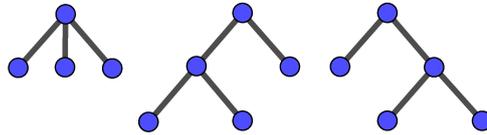


Figura 45: Árvores com 3 folhas

Vamos ver uma maneira de contar  $b(n)$  para um  $n$  qualquer.

Seja  $B$  uma árvore de Schroder com  $n$  folhas tal que sua raiz possua  $k$  filhos, com  $2 \leq k \leq n$ . Se cortarmos fora a raiz e os galhos que partem dela de modo que cada um de seus  $k$  filhos se torne uma nova raiz, formamos  $k$  novas árvores de Schroder com suas raízes contendo mais de um filho ou nenhum e sendo ainda a soma de todas as folhas destas árvores igual a  $n$ . Por outro lado, a partir de  $k$  árvores podadas em que suas raízes não possuam apenas um filho e com a soma total de suas folhas igual a  $n$ , podemos formar qualquer árvore podada com  $n$  folhas cuja raiz contém  $k$  filhos, para isso criamos uma nova raiz e a ligamos a cada uma das  $k$  raízes originais, transformando-as em filhos. Isso nos diz que contarmos quantas árvores de Schroder semelhantes a  $B$  existem é o mesmo que contar de quantas maneiras podemos formar  $k$  árvores podadas cujas raízes não possuam apenas um filho e que a soma total de suas folhas seja  $n$ .

Vamos considerar uma árvore como  $B$ . Seja  $i_1$  o número de folhas da primeira árvore mais a esquerda gerada depois do corte da raiz,  $i_2$  o número de folhas da segunda árvore logo a direita de  $i_1$  e assim sucessivamente até a  $k$ -ésima árvore, que estava no extremo direito da árvore original, desta forma podemos ver que:

$$b(n) = \sum_{2 \leq k \leq n, i_1 + i_2 + \dots + i_k = n} b(i_1)b(i_2) \cdots b(i_k). \quad (5.1)$$

Por exemplo, para encontrar o valor de  $b(5)$  a árvore da Figura 46 estaria contada na parcela  $b(i_1)b(i_2)b(i_3) = b(1)b(3)b(1) = 1 \cdot 3 \cdot 1 = 3$  do somatório (5.1). Essa parcela conta precisamente todas as árvores podadas de 5 folhas com o formato de  $B$  que após o corte da raiz geram a primeira árvore com apenas uma folha, a segunda com 3 folhas e a terceira árvore também com uma folha. De fato, a primeira e a última árvore são formadas de apenas uma maneira enquanto que a segunda árvore pode ser formada de três maneiras diferentes como foi mostrado na Figura 45.

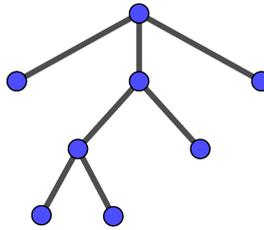


Figura 46: Árvore podada  $n = 5$  e  $K = 3$

Alguém que se aventure a calcular o valor de  $b(n)$  usando a fórmula (5.1) vai perceber que muito rapidamente essa tarefa se tornará extremamente desgastante, por isso vamos usar o estudo de funções geradoras para facilitar nosso cálculo.

Tomando a sequência infinita  $(b(1), b(2), \dots)$  de números reais, seja  $H(t)$  sua função geradora. Assim

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)t^n = t + t^2 + 3t^3 + 11t^4 + \dots \quad (5.2)$$

A soma infinita em  $H(t)$  nos mostra que as potências de  $t$  servem como “marcadores”, com  $t^n$  marcando a  $n$ -ésima posição nesta série, e neste caso marca o número de árvores podadas com  $n \geq 2$  folhas e com a raiz contendo mais de um filho, a exceção de  $t$  que marca o número de árvore com uma folha.

Partindo da expressão (5.2) teremos

$$\begin{aligned}
H^2(t) &= \sum_{i_1+i_2=n} b(i_1)b(i_2)t^n \\
&= b(1)b(1)t^2 &+ b(1)b(2)t^3 &+ b(1)b(3)t^4 &+ b(1)b(4)t^5 &+ \dots \\
& &+ b(2)b(1)t^3 &+ b(2)b(2)t^4 &+ b(2)b(3)t^5 &+ \dots \\
& & &+ b(3)b(1)t^4 &+ b(3)b(2)t^5 &+ \dots \\
& & & &+ b(4)b(1)t^5 &+ \dots \\
& & & & & \ddots & \dots \\
&= t^2 &+ 2t^3 &+ 7t^4 &+ 28t^5 &+ \dots .
\end{aligned} \tag{5.3}$$

A nova série possui o coeficiente de  $t^n$  igual ao número de árvores podadas de  $n$  folhas com raiz contendo exatamente dois filhos, de fato, olhando o desenvolvimento de  $\sum_{i_1+i_2=n} b(i_1)b(i_2)$  em (5.3) para um dado  $n$ , temos que ele é a soma da combinação de todos os possíveis produtos entre dois valores  $b(i_1)$  e  $b(i_2)$  com  $i_1 + i_2 = n$ , o que equivale a parcela correspondente ao valor de  $b(n)$  em que a árvore original tem sua raiz cortada dando origem a duas novas árvores, uma contendo  $p$  e a outra contendo  $q$  folhas.

Já a série formada a partir do produto de  $H(t) \cdot H^2(t)$  será

$$H^3(t) = \sum_{i_1+i_2+i_3=n} b(i_1)b(i_2)b(i_3)t^n = t^3 + 3t^4 + 12t^5 + \dots . \tag{5.4}$$

E na série (5.4) o coeficiente de  $t^n$  será igual ao número de árvores podadas com  $n$  folhas cuja raiz possui exatamente três filhos. Isso pode ser confirmado ao observarmos como se desenvolve o somatório  $\sum_{i_1+i_2+i_3=n} b(i_1)b(i_2)b(i_3)$ .

Continuando desta forma temos que a série

$$H^k(t) = \sum_{i_1+\dots+i_k=n} b(i_1) \dots b(i_k)t^n$$

na qual o coeficiente de  $t^n$  será igual ao número de árvores podadas com  $n$  folhas cuja raiz possui exatamente  $k$  filhos.

Assim podemos ver que a soma infinita das séries

$$H^2(t) + H^3(t) + H^4(t) + \dots \tag{5.5}$$

soma toda as árvores podadas cuja raiz tem pelo menos dois filhos.

Das expressões (5.2) e (5.5) resulta

$$H(t) - t = H^2(t) + H^3(t) + H^4(t) + \dots . \tag{5.6}$$

Somando as séries no lado direito da equação (5.6) obtemos

$$\begin{aligned}
H(t) - t &= \frac{H^2(t)}{1 - H(t)} \\
\implies (1 - H(t)) \cdot (H(t) - t) &= H^2(t) \\
\implies -H^2(t) + tH(t) + H(t) - t &= H^2(t) \\
\implies 2H^2(t) - (t + 1)H(t) + t &= 0
\end{aligned} \tag{5.7}$$

E resolvendo a equação quadrática (5.7) teremos

$$H(t) = \frac{t + 1 \pm \sqrt{t^2 - 6t + 1}}{4} \tag{5.8}$$

Como podemos ver em (5.2) que  $H(0) = 0$  temos que a única solução aceita da equação (5.8) será

$$H(t) = \frac{t + 1 - \sqrt{t^2 - 6t + 1}}{4}. \tag{5.9}$$

Sabendo que o domínio da função  $H(t)$  será o intervalo de convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} b(n)t^n$  então vamos determiná-lo calculando a menor das raízes de  $t^2 - 6t + 1$ . Portanto temos a série centrada em zero com raio de convergência igual a  $3 - 2\sqrt{2}$ .

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} |b(n)|^{\frac{1}{n}} &= \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} \implies \limsup_{n \rightarrow \infty} \log |b(n)|^{\frac{1}{n}} = \log \left( \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} \right) \\
&\implies \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log b(n) = \log(3 + 2\sqrt{2}).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Lembrando que como  $a(n) = 2b(n)$  para  $n > 1$ , segue que

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log a(n) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 2b(n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\log 2 + \log b(n)) \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 2 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log b(n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log b(n).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Portanto de acordo com as igualdades (5.10) e (5.11) concluímos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log a(n) = \log(3 + 2\sqrt{2})$$

Finalizando a demonstração do teorema. □

Vimos que a taxa de convergência de  $a(n)$  é exponencial, portanto para  $n$  grande a sequência se parece com  $x^n$ , para algum  $x \in \mathbb{R}^+$ .

Mas veja que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$  para  $x \in \mathbb{R}^+$ . Primeiro tome  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq m > x$ .

Agora queremos mostrar que

$$0 \leq \frac{x^n}{n!} \leq \frac{x^n}{m^n} \cdot \frac{m^m}{(m-1)!} \quad (5.12)$$

De fato. Se  $n = m$  temos que (5.12) se transforma em

$$0 \leq \frac{x^n}{n!} \leq \frac{x^n}{n^n} \cdot \frac{n^n}{(n-1)!} = \frac{x^n}{(n-1)!}$$

que é verdadeira pois  $n! > (n-1)!$ .

Se  $n > m$  então existe  $a \in \mathbb{N}$  tal que  $n = m + a$ . Assim a desigualdade (5.12) pode ser reescrita como

$$0 \leq \frac{x^{m+a}}{(m+a)!} \leq \frac{x^{m+a}}{m^{m+a}} \cdot \frac{m^m}{(m-1)!} = \frac{x^{m+a}}{m^a \cdot (m-1)!},$$

que também é verdadeira, pois comparando

$$(m+a)! = \underbrace{(m+a) \cdot (m+a-1) \cdots (m+1)}_{a \text{ fatores}} \cdot m \cdot (m-1)!$$

com

$$m^a \cdot (m-1)! = \underbrace{(m) \cdot (m) \cdots (m)}_{a \text{ fatores}} \cdot m \cdot (m-1)!$$

percebemos que  $(m+a)!$  é maior do que  $m^a \cdot (m-1)!$ .

Agora como  $m > x$  então  $\frac{x^n}{m^n} < 1$  e  $\frac{m^m}{(m-1)!}$  é uma constante, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{m^n} \cdot \frac{m^m}{(m-1)!} = 0$$

Como também temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Portanto para um  $n$  grande, quando comparamos o número de permutações polinomiais (exponencial) com o número de permutações  $(n!)$ , temos uma quantidade muito maior de permutações em relação a permutações polinomiais. Isto quer dizer que dada uma permutação  $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ , a probabilidade de ela ser uma permutação polinomial é muito pequena quando tomamos valores altos para  $n$ .

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 6.1 INFORMAÇÕES ADICIONAIS

Na matemática frequentemente problemas surgem por acaso, por um pensamento simples mas aguçado de estudiosos que conseguem enxergar a matemática em situações onde outros nunca imaginariam que geraria uma fonte de estudo e aplicações, problemas estes que muitas vezes podem ser facilmente enunciados, mas que ao nos debruçarmos sobre eles encontramos uma linda e importante teoria, que nos leva a escavar mais e mais profundamente os conteúdos relacionados.

Vimos neste trabalho um estudo detalhado de um rabisco escrito em um bilhete de metrô, feito por Maxim Kontsevich e entregue a Étienne Ghys, de forma que agora não mais caberia no bilhete, porém podendo ainda ser muito ampliado.

Como o principal livro que tomamos como referência para este trabalho é o (GHYS, 2017), “Um Passeio Matemático Singular”, podemos também embarcar nesse metrô para ver por quais caminhos percorremos e imaginar outros mais que poderíamos ter chegado. Começamos nosso percurso revendo conceitos de taxa de crescimento, que é onde queríamos chegar pensando na sequência do número de permutações polinomiais, depois fomos estudar sobre funções geradoras para nos ajudar a tratar com as sequências estudadas. Logo após, fizemos uma revisão de polinômios, não tão profunda, mas estudando aspectos interessantes como valuação e suas implicações, fomos até de permutações, conteúdo que falamos a todo momento da viagem. Tivemos um cuidado especial para tratar das árvores, pois o assunto foi responsável direto para resolvermos a questão que dá título a esta dissertação, mas antes de chegarmos nela, vimos a definição de permutações polinomiais, mostramos exemplos para os caso que envolviam menos elementos, e chegamos ao teorema do bilhete, que para nós foi de suma importância, pois foi o norteador de toda a estrutura do trabalho, nos preparando até chegarmos aqui e nos apoiando nele para continuarmos, assim então estudando o teorema de Étienne. A partir deste momento nos concentramos em criar uma estratégia para contarmos o número de permutações polinomiais de  $n$  termos ou pelo menos saber como se comportam a medida que tomamos um valor cada vez maior para  $n$ . Foi aí que reapareceram as árvores, mais precisamente as árvores de Schroder, ou árvores podadas, que na verdade foram contadas no lugar das permutações, chegando ao maior objetivo do trabalho.

Em todo esse caminho, poderíamos pegar desvios que nos levariam ao mesmo destino, mas talvez com um pouco mais de conceitos a trabalhar, ou até atalhos que

nos levariam mais rápido ao destino. Ainda poderíamos ter descansado um pouco, nos demorando um pouco mais em outras sequências e estudando suas taxas de crescimento, também acrescentando mais informações a sequência formada pelos números de Schroder, que na verdade é a sequência que responde a questão focal.

Uma outra proposta para continuação deste trabalho, que até parece ser um caminho natural mas, devido aos conceitos mais elaborados necessários para tal estudo, se torna mais desafiador, seria agora pensar na configuração local dos gráficos não mais no plano, mas sim no espaço tridimensional. Étienne descreve em seu livro como Newton apresenta em *De Methodis Serierum et Fluxionum*, uma forma de resolver problemas do tipo  $P(x, y) = 0$  onde  $P$  é um polinômio em duas variáveis, visto como um polinômio  $P(x)(y)$  em uma variável  $y$  com coeficientes no campo das funções racionais  $\mathbb{C}$ , aplicando para o exemplo  $P(x, y) = y^6 - 5xy^5 + x^3y^4 - 7x^2y^2 + 6x^3 + x^4 = 0$ . Depois disso, Étienne continua desenvolvendo o estudo e apontando a contribuição de outros matemáticos.

Também gostaria, como professor que sou, de aproveitar este trabalho para apresentar um pouco dele para meus alunos, e se alguém tiver a mesma vontade de compartilhar, na próxima seção faremos um esboço de uma forma de aplicação.

## 6.2 APLICAÇÃO

De uma forma geral, o conteúdo do trabalho pode ser explicado para uma pessoa que não possua conhecimento profundo em matemática, na verdade, alguém que entenda os conceitos de polinômios, funções e permutações, consegue compreender boa parte do que foi dito neste trabalho. Portanto, vamos propor uma maneira de aplicar o estudo feito para alunos do ensino médio.

O conceito de polinômios começa a ser estudado no oitavo ano do ensino fundamental, mas é no primeiro ano do ensino médio em que ele é aprofundado quando se estuda as funções polinomiais, já o conceito de permutação é visto normalmente no segundo ano do ensino médio. Dito isto, podemos apenas com estes conceitos aplicar de uma forma lúdica o problema descrito por Kontsevich sobre os gráficos dos polinômios que foi estudado neste trabalho. Ainda podemos abordar o conceito de crescimento exponencial, que também é visto no primeiro ano do ensino médio e que é um conceito bem atual, especialmente agora no contexto da pandemia da Covid-19.

Uma proposta seria trabalhar com os alunos do primeiro ano do ensino médio, apresentando o problema após o estudo das funções polinomiais. A apresentação aos alunos poderia ser dividida em etapas, para gradualmente, a cada aula, entendermos o problema. Assim teríamos um total de quatro aulas.

**AULA 1:** Um pouco de história e gráficos de funções.

Para a primeira aula os alunos já devem entender o conceito geral de funções e também como plotar pontos no plano cartesiano. Essa aula terá duração de 45 minutos.

*Objetivo Geral:* Introduzir atividades que visam o ensino de conceitos matemáticos para desenvolver o pensamento lógico e a construção de argumentos.

*Objetivos específicos:* Identificar uma função polinomial. Reconhecer e classificar uma função polinomial do 1º e 2º grau.

*Conteúdos:* Valor numérico de uma função. Função polinomial do 1º grau. Função polinomial do 2º grau. Gráfico de função.

*Procedimento metodológico:* Começar contando a história do bilhete do metrô, indicando que o material escrito naquele papel será o responsável por nortear nossas próximas aulas. Logo após, vamos analisar o gráfico local das funções  $x$  e  $x^2$ , explicando todos os detalhes, por exemplo trabalhando o que acontece quando tomamos valores muito grande para  $x$ , assim como quando escolhemos  $x$  muito pequeno. Fazer com que percebam que ambas as funções passam pela origem e ali podemos ter mudanças marcantes em relação aos seus valores.

*Recursos didáticos:* Quadro branco e pincel para quadro branco.

**AULA 2:** Trabalhando com gráficos de funções.

Para esta aula os alunos já devem entender o conceito de funções polinomiais e de gráfico de uma função. Essa aula terá duração de 45 minutos.

*Objetivo Geral:* Desenvolver a capacidade de analisar, relacionar, comparar situações.

*Objetivos específicos:* Construir, ler e interpretar gráficos de funções polinomiais do 1º e do 2º grau.

*Conteúdos:* Valor numérico de uma função. Gráfico de uma função polinomial do 1º grau e de função polinomial do 2º grau. Gráfico de função polinomial qualquer.

*Procedimento metodológico:* Passar a considerar três polinômios quaisquer (que passem pela origem) e usar o programa Geogebra para ir observando o que acontece com seus gráficos isolados e tendo uma percepção geral, quando olhados três a três, da configuração local desses gráficos na vizinhança da origem.

*Recursos didáticos:* Quadro branco e pincel para quadro branco, computador e projetor de imagens.

**AULA 3:** Permutação.

Para esta aula os alunos já devem estar familiarizados com a apresentação dos gráficos das funções. Essa aula terá duração de 45 minutos.

*Objetivo Geral:* Apresentar os conteúdos relacionando-os uns aos outros.

*Objetivos específicos:* Construir permutações de  $n$  elementos distintos.

*Conteúdos:* Permutações. Gráficos de funções.

*Procedimento metodológico:* Dar uma noção de permutação e associar a posição dos gráficos na vizinhança da origem para valores de  $x$  negativos e positivos a uma permutação.

*Recursos didáticos:* Quadro branco e pincel para quadro branco.

#### **AULA 4:** Teorema de Kontsevich.

Para finalizar, nesta aula o aluno deverá ter compreendido os conteúdos das três aulas anteriores.

*Objetivo Geral:* Desenvolver a capacidade de analisar uma situação e a generalizar.

*Objetivos específicos:* Identificar polinômios que possam ser associados a uma permutação dada.

*Conteúdos:* Permutações. Gráficos de funções.

*Procedimento metodológico:* Mostrar exemplos de permutações a partir da escolha de 2, 3 e 4 polinômios. Pedir que encontrem polinômios que forneça alguns outros exemplos de permutações. Apresentar o problema de Kontsevich para permutações de 4 elementos.

*Recursos didáticos:* Quadro branco e pincel para quadro branco, computador e projetor de imagens.

Tendo sucesso no que foi programado, os alunos podem fortalecer muito sua visão de valores das funções e desenvolver a leitura de gráficos, o que é muito importante em sua vida estudantil e com certeza também irá ajudar no seu dia a dia, também colaboraria para ter uma boa noção sobre permutações para o próximo ano escolar. Outra questão que pode ser bem trabalhada é sobre o uso do Geogebra, que se não é costume da turma utilizar, pode ser que valha a pena aumentar o tempo programado proposto em algumas aulas para terem uma familiaridade com o programa.

## REFERÊNCIAS

- GHYS, É. Intersecting curves (variation on an observation of maxim kontsevich). *The American Mathematical Monthly*, Taylor & Francis, v. 120, n. 3, p. 232–242, 2013.
- GHYS, É. *A singular mathematical promenade*. [S.l.]: ENS Éditions Lyon, 2017.
- LEITHOLD, L. Cálculo com geometria analítica, vol. 2. *Harbra Ltda., Sao Paulo, 3a. edição*, 1994.
- LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. [S.l.]: SBM, 1997.
- ROMAN, S. *An introduction to Catalan numbers*. [S.l.]: Springer, 2015.



## APÊNDICE A – Números de Catalan e Sequências de Contorno



A relação de recorrência (A.1) define os números de Catalan junto com a condição inicial  $C_0 = 1$ .

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} \quad (\text{A.1})$$

Os números de Catalan foram nomeados pelo matemático John Riordan em 1948 em homenagem ao matemático belga Eugène Charles Catalan (1814-1894). Catalão mostrou (em 1838) que o número de Catalan

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

conta o número de maneiras de colocar entre parênteses completos uma string de  $n + 1$  letras.

A fascinante sequência,

**1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845 . . .**

dos números de Catalan aparecem em vários contextos da matemática. Por exemplo já vimos que esta sequência conta o número de sorteio de pilhas. No seguinte resultado mostramos que este número também é igual ao número de sequências de  $D$ 's e  $S$ 's que construímos no Capítulo 3.

Mostraremos aqui, utilizando o método de indução forte, que o número de sequências  $\mathcal{C}$  que definem o contorno de uma árvore com  $n$  arestas é igual ao  $n$ -ésimo número de Catalan.

**Proposição A.0.1** *Seja  $n$  um inteiro positivo. O número de sequências com  $n$  pares  $D$ 's e  $S$ 's, que começam com  $D$  e terminam em  $S$ , é igual a  $C_n$ . Em particular o número de árvores planares com  $n$ -arestas é  $C_n$ .*

*Demonstração:* Veja que a afirmação é verdadeira para o caso  $n = 1$ . De fato, quando temos apenas um par de  $D$  e  $S$ , existe uma única maneira de organizarmos a sequência que, de acordo com as regras exigidas, será  $(D, S)$ . Como também temos  $C_1 = 1$ , confirmamos o caso para  $n = 1$ .

Supomos a afirmação verdadeira para todos os casos até  $n$ .

Para o caso  $n + 1$ , podemos organizar a sequência das seguintes formas:

- Começando com um par de  $D$  e  $S$ , sobram  $n$  pares de  $D$ 's e  $S$ 's que, de acordo com a hipótese de indução, podem ser organizados de  $C_n$  maneiras diferentes.

$$\underbrace{(D, S)}_1 \underbrace{n \text{ pares de } D\text{'s e } S\text{'s restantes}}_{C_n} = C_0 \cdot C_n.$$

- Começando com um par de  $D$  e  $S$ , mas colocando entre eles um outro par de  $D$  e  $S$ , que pode ser organizado de uma única maneira, sobram ainda  $n - 1$  pares de  $D$ 's e  $S$ 's que, pela hipótese de indução, podem ser organizados de  $C_{n-1}$  maneiras diferentes.

$$\underbrace{(D, D, S, S)}_1 \underbrace{n - 1 \text{ pares de } D\text{'s e } S\text{'s restantes}}_{C_{n-1}} = C_1 \cdot C_{n-1}.$$

- Começando com um par de  $D$  e  $S$ , mas colocando entre eles dois pares de  $D$ 's e  $S$ 's, formando seqüências que podem ser escritas de  $C_2$  maneiras, ainda restando outros  $n - 2$  pares que, por sua vez, podem ser organizados de  $C_{n-2}$  maneiras.

$$\underbrace{(D, \text{ 2 pares de } D\text{'s e } S\text{'s restantes}, S)}_{C_2} \underbrace{\text{ } n - 2 \text{ pares de } D\text{'s e } S\text{'s restantes}}_{C_{n-2}} = C_2 \cdot C_{n-2}.$$

Prosseguindo desta maneira, chegamos a:

- Começando com um par de  $D$  e  $S$ , mas colocando entre eles outros  $n - 1$  pares de  $D$ 's e  $S$ 's, formando seqüências que, de acordo com a hipótese de indução, podem ser escritas de  $C_{n-1}$  maneiras, sobrando um único par de  $D$  e  $S$  que só pode ser escrito de uma maneira.

$$\underbrace{(D, \text{ } n - 1 \text{ pares de } D\text{'s e } S\text{'s restantes}, S)}_{C_{n-1}} \underbrace{(D, S)}_{C_1} = C_{n-1} \cdot C_1.$$

- Começando com um par de  $D$  e  $S$  e colocando entre eles todos os outros  $n$  pares de  $D$ 's e  $S$ 's restantes formando seqüências que, de acordo com a hipótese de indução, podem ser escritas de  $C_n$  maneiras diferentes.

$$\underbrace{(D, \text{ } n \text{ pares de } D\text{'s e } S\text{'s restantes}, S)}_{C_n} = C_n = C_n \cdot 1 = C_n \cdot C_0.$$

Portanto, somando todos os casos possíveis de cada item, temos

$$C_0 \cdot C_n + C_1 \cdot C_{n-1} + C_2 \cdot C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} \cdot C_1 + C_n \cdot C_0 = \sum_{k=0}^n C_k \cdot C_{n-k} = C_{n+1}$$

Logo existem  $C_n$  árvores planares diferentes contendo  $n$  arestas.  $\square$

Observação: Podemos considerar a árvore planar que possui 0 aresta como sendo a árvore formada apenas pela raiz e como  $C_0 = 0$  a afirmação demonstrada vale para todo  $n \geq 0$ .

**APÊNDICE B – Lista de permutações polinomiais de 4 elementos**



Seja  $\pi : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$  uma permutação. Vamos dar exemplo de polinômios que mostram que  $\pi$  é uma permutação polinomial para cada um dos vinte e dois casos possíveis.

1. Permutação  $(1, 2, 3, 4)$ .

Tome:

$$p_1(x) = x^2$$

$$p_2(x) = x^4$$

$$p_3(x) = 0$$

$$p_4(x) = -x^2$$

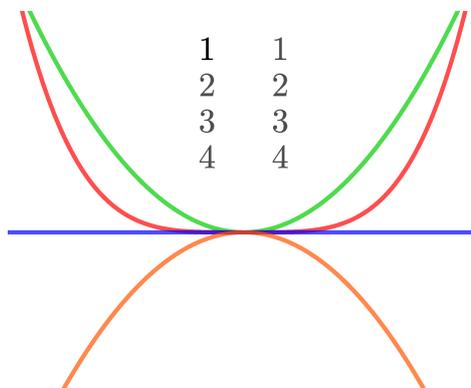


Figura 47: Permutação  $(1\ 2\ 3\ 4)$

2. Permutação  $(1, 2, 4, 3)$ .

Tome:

$$p_1(x) = x^2 + x^4$$

$$p_2(x) = x^2$$

$$p_3(x) = -x^3$$

$$p_4(x) = 0$$

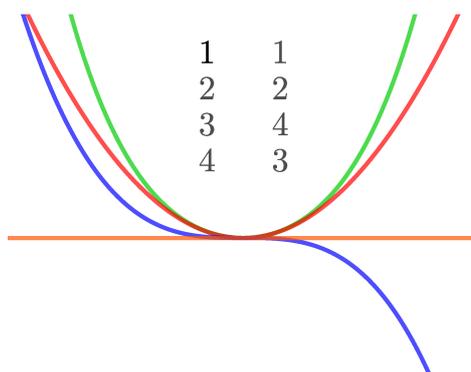


Figura 48: Permutação  $(1\ 2\ 4\ 3)$

3. Permutação  $(1, 3, 2, 4)$ .

Tome:

$$p_1(x) = x^2$$

$$p_2(x) = -x^3$$

$$p_3(x) = 0$$

$$p_4(x) = -x^2$$

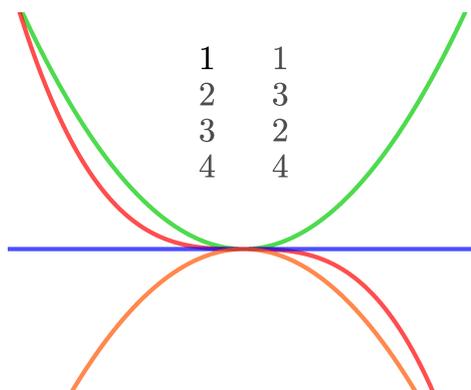


Figura 49: Permutação  $(1\ 3\ 2\ 4)$

4. Permutação (1, 3, 4, 2).

Tome:

$$p_1(x) = 2x^2$$

$$p_2(x) = x^2 - x^3$$

$$p_3(x) = x^2$$

$$p_4(x) = x^2 - x^4$$

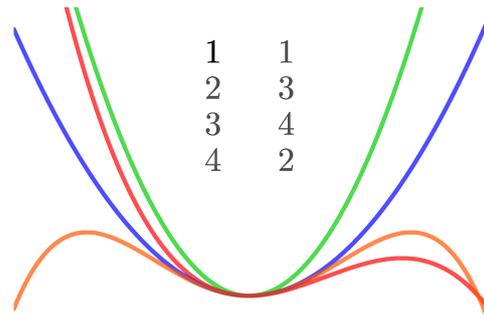


Figura 50: Permutação (1 3 4 2)

5. Permutação (1, 4, 2, 3).

Tome:

$$p_1(x) = 2x^2$$

$$p_2(x) = x^2 + x^4$$

$$p_3(x) = x^2 - x^4$$

$$p_4(x) = -x^2 + x^3$$

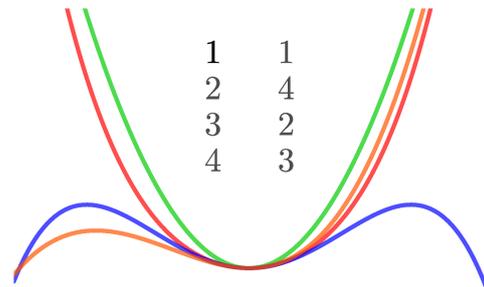


Figura 51: Permutação (1 4 2 3)

6. Permutação (1, 4, 3, 2).

Tome:

$$p_1(x) = 2x^2$$

$$p_2(x) = x^2$$

$$p_3(x) = x^2 + x^3$$

$$p_4(x) = x^2 + 2x^3$$

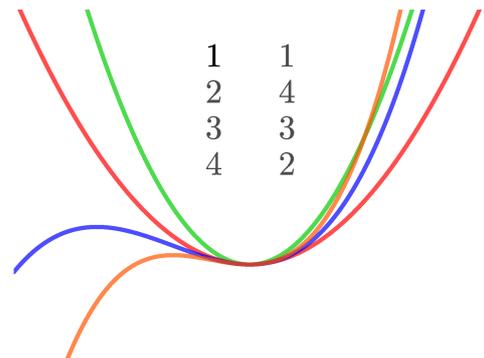


Figura 52: Permutação (1 4 3 2)

7. Permutação (2, 1, 3, 4).

Tome:

$$p_1(x) = x^2 - x^3$$

$$p_2(x) = x^2$$

$$p_3(x) = 0$$

$$p_4(x) = -x^2$$

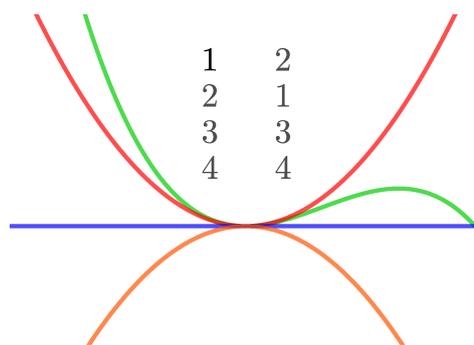


Figura 53: Permutação (2 1 3 4)

8. Permutação (2, 1, 4, 3).

Tome:

$$p_1(x) = x^2 - x^3$$

$$p_2(x) = x^2$$

$$p_3(x) = -x^3$$

$$p_4(x) = 0$$

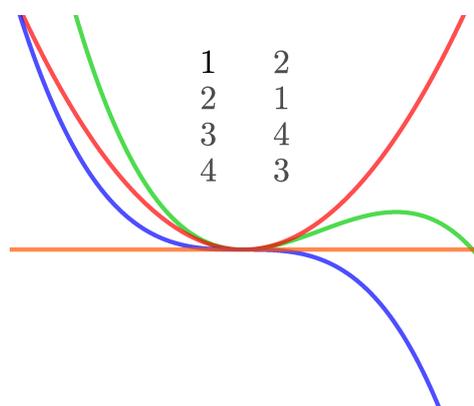


Figura 54: Permutação (2 1 4 3)

9. Permutação (2, 3, 1, 4).

Tome:

$$p_1(x) = x^2$$

$$p_2(x) = x^2 + x^3$$

$$p_3(x) = x^2 + x^3 - x^4$$

$$p_4(x) = 0$$

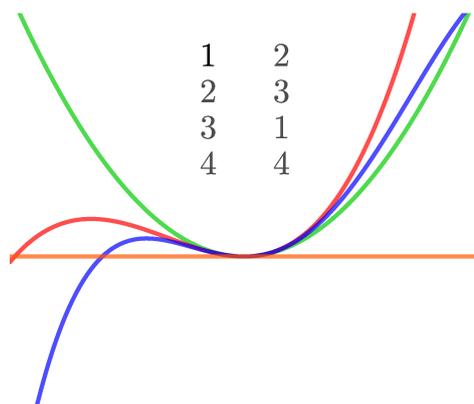


Figura 55: Permutação (2 3 1 4)

10. Permutação (2, 3, 4, 1).

Tome:

$$p_1(x) = -x$$

$$p_2(x) = x^2$$

$$p_3(x) = 0$$

$$p_4(x) = -x^2$$

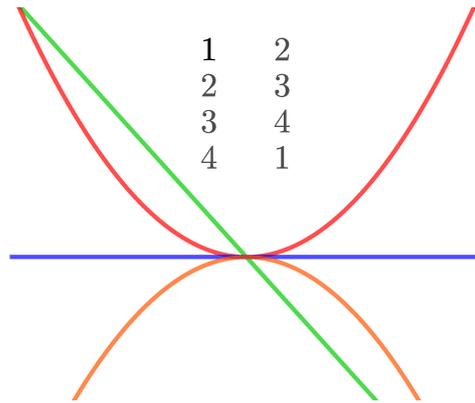


Figura 56: Permutação ( 2 3 4 1)

11. Permutação (2, 4, 3, 1).

Tome:

$$p_1(x) = -x$$

$$p_2(x) = x^2$$

$$p_3(x) = 0$$

$$p_4(x) = x^3$$

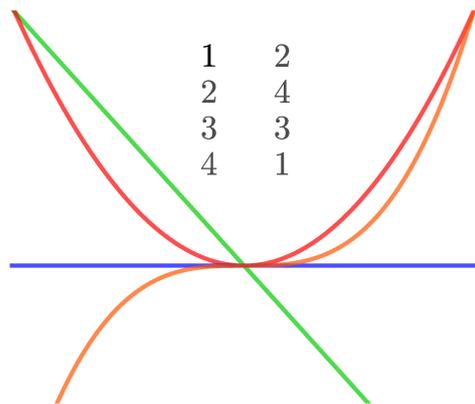


Figura 57: Permutação (2 4 3 1)

12. Permutação (3, 1, 2, 4).

Tome:

$$p_1(x) = x^2 + x^4$$

$$p_2(x) = x^2$$

$$p_3(x) = x^2 + x^3$$

$$p_4(x) = 0$$

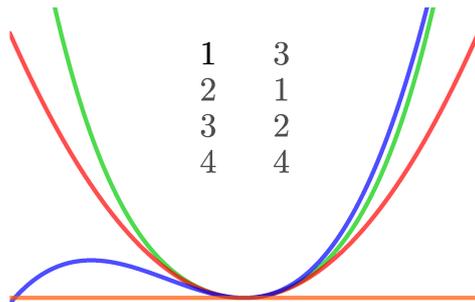


Figura 58: Permutação (3 1 2 4)

13. Permutação (3, 2, 1, 4).

Tome:

$$p_1(x) = x^2 - x^3$$

$$p_2(x) = x^2$$

$$p_3(x) = x^2 + x^3$$

$$p_4(x) = 0$$

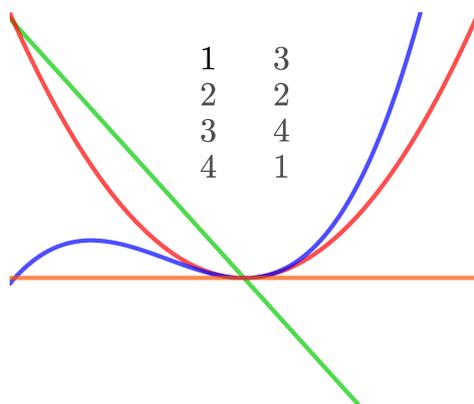


Figura 59: Permutação (3 2 1 4)

14. Permutação (3, 2, 4, 1).

Tome:

$$p_1(x) = -x$$

$$p_2(x) = x^2$$

$$p_3(x) = x^2 + x^3$$

$$p_4(x) = 0$$

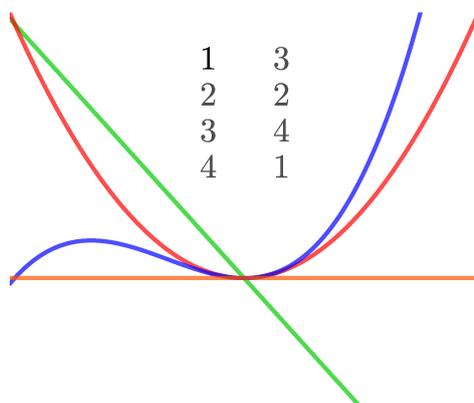


Figura 60: Permutação (3 2 4 1)

15. Permutação (3, 4, 1, 2).

Tome:

$$p_1(x) = -x + x^2$$

$$p_2(x) = -x$$

$$p_3(x) = x^2 + x^4$$

$$p_4(x) = x^2$$

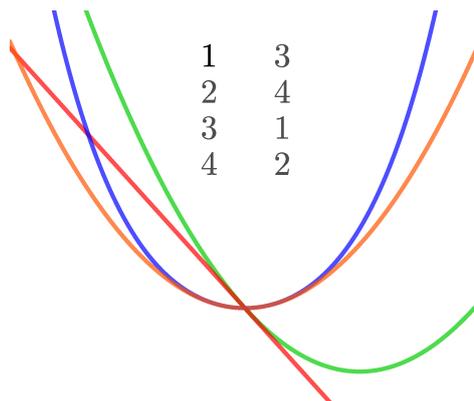


Figura 61: Permutação (3 4 1 2)

16. Permutação (3, 4, 2, 1).

Tome:

$$p_1(x) = -x - x^3$$

$$p_2(x) = -x$$

$$p_3(x) = x^2$$

$$p_4(x) = 0$$

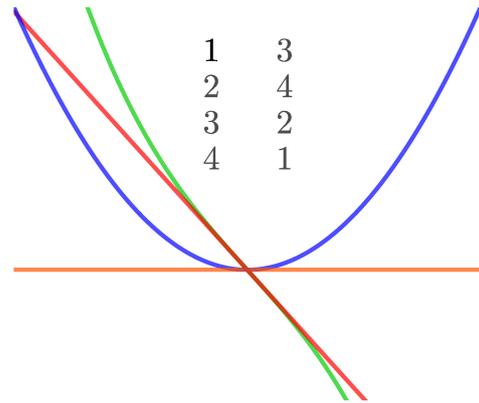


Figura 62: Permutação (3 4 2 1)

17. Permutação (4, 1, 2, 3).

Tome:

$$p_1(x) = x^2$$

$$p_2(x) = 0$$

$$p_3(x) = -x^2$$

$$p_4(x) = x$$

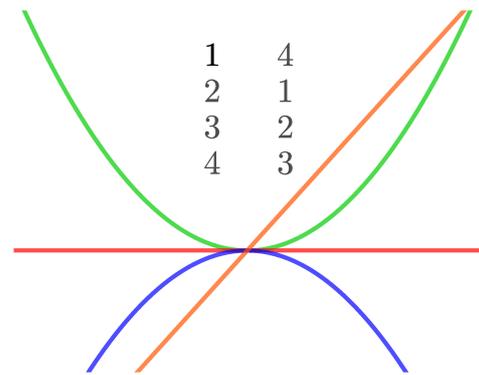


Figura 63: Permutação (4 1 2 3)

18. Permutação (4, 1, 3, 2).

Tome:

$$p_1(x) = x^2$$

$$p_2(x) = 0$$

$$p_3(x) = x^3$$

$$p_4(x) = x$$

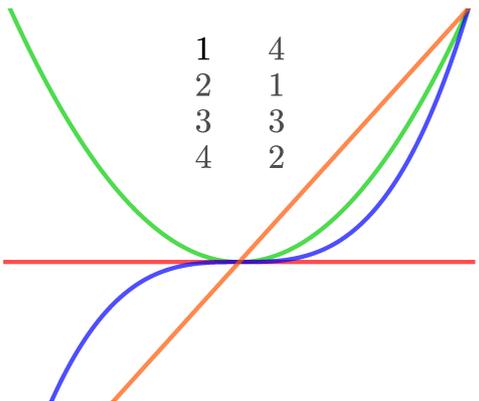


Figura 64: Permutação (4 1 3 2)

19. Permutação (4, 2, 1, 3).

Tome:

$$p_1(x) = x^2$$

$$p_2(x) = x^2 + x^3$$

$$p_3(x) = 0$$

$$p_4(x) = x$$

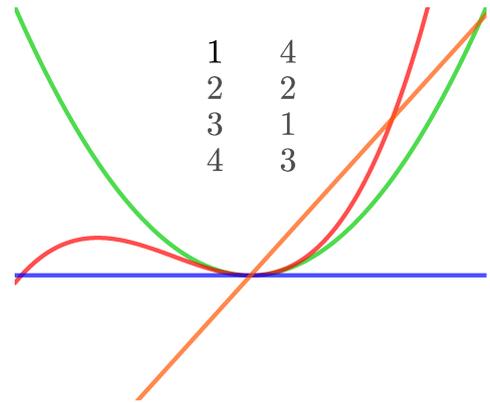


Figura 65: Permutação (4 2 1 3)

20. Permutação (4, 2, 3, 1).

Tome:

$$p_1(x) = -x$$

$$p_2(x) = x^2$$

$$p_3(x) = 0$$

$$p_4(x) = x$$

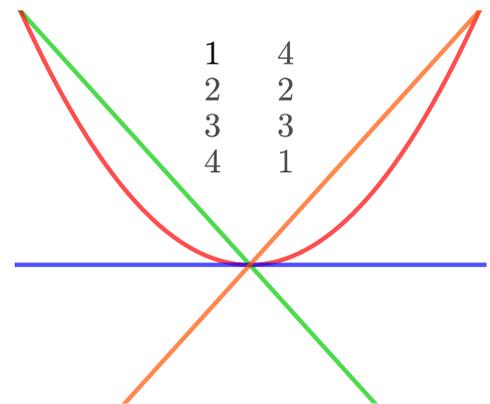


Figura 66: Permutação (4 2 3 1)

21. Permutação (4, 3, 1, 2).

Tome:

$$p_1(x) = x^2$$

$$p_2(x) = 0$$

$$p_3(x) = x$$

$$p_4(x) = x + x^3$$

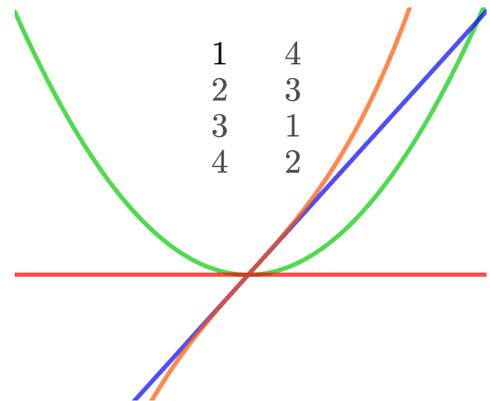


Figura 67: Permutação (4 3 1 2)

22. Permutação (4, 3, 2, 1).

Tome:

$$p_1(x) = 0$$

$$p_2(x) = x^5$$

$$p_3(x) = x^3$$

$$p_4(x) = x$$

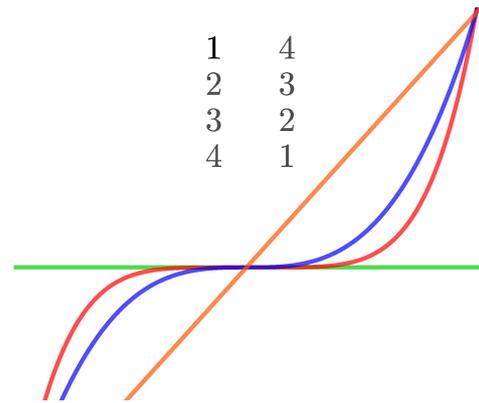


Figura 68: Permutação (4 3 2 1)