



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS/CFM  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Betânia Camille Tumelero Backes

**Matéria de quarks:** estrelas compactas e transições de fases

Florianópolis  
2021

Betânia Camille Tumelero Backes

**Matéria de quarks:** estrelas compactas e transições de fases

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Física.  
Orientadora: Débora Peres Menezes, Dra.

Florianópolis  
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Backes, Betânia Camille Tumelero

Matéria de quarks : estrelas compactas e transições de fases / Betânia Camille Tumelero Backes ; orientadora, Débora Peres Menezes, 2021.

93 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Física. 2. Matéria estranha. 3. Matéria de quarks. 4. Estrelas compactas. 5. Transição de fases. I. Menezes, Débora Peres. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

Betânia Camille Tumelero Backes

**Matéria de quarks:** estrelas compactas e transições de fases

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof.(a) Mariana Dutra da Rosa Lourenço, Dr(a).  
Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Prof. Tiago José Nunes da Silva, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Física.

---

Coordenação do Programa de  
Pós-Graduação

---

Débora Peres Menezes, Dra.  
Orientadora

Florianópolis, 2021.

À minha família, por tudo.

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, Camilo e Carmen, meus exemplos de perseverança e fontes inesgotáveis de inspiração diante de qualquer dificuldade. Por terem sempre me dado seus amor e carinho incondicionais, sou imensamente grata por tudo. Ao meu irmão, Felipe, por ter sempre acreditado em mim mais do que eu mesma jamais consegui. Ao meu namorado, Daniel, que me apoiou muito além do que eu poderia ter pedido e me fez ver como tudo vale a pena.

À professora Débora, um grande exemplo com quem tem sido uma honra colaborar e aprender, pela paciência e dedicação. Devo a ela praticamente tudo o que sei sobre física nuclear. Sou grata pelo encorajamento e por todo o apoio.

Aos colegas, principalmente àqueles com quem colaborei. Cabe aqui um “muito obrigada!” especial ao Eduardo Hafemann, pelas longas horas de troca de ideias no desenvolvimento dos códigos numéricos deste trabalho.

Como esta seção precisa ter tamanho finito, agradeço a todos os professores que contribuíram com minha formação e a todos que torcem por mim. Agradeço também aos amigos, que sempre estiveram comigo durante a jornada e tornaram-na muito mais agradável.

Agradeço à coordenação e todos os servidores do PPGFSC/UFSC.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

*"They were not the same eyes with which  
he had last looked out at this particular  
scene, and the brain which interpreted the  
images the eyes resolved was not the same  
brain. There had been no surgery involved,  
just the continual wrenching of experience."  
(Douglas Adams)*

## RESUMO

No presente trabalho, a matéria de quarks desconfiados é descrita por meio de um modelo efetivo no qual a massa dos quarks depende da densidade do meio. A descrição da matéria de quarks tem por finalidade a aplicação na astrofísica de objetos compactos e no estudo do diagrama de fases da cromodinâmica quântica (QCD). São investigadas ambas as hipóteses de matéria puramente de quarks com potenciais químicos iguais e de matéria estelar sujeita a equilíbrio químico e neutralidade de carga. Inicialmente, é abordado o problema da consistência termodinâmica ao introduzir a dependência da densidade, impasse que é corrigido na construção da equação de estado (EoS) do modelo utilizado. A partir da hipótese de Bodmer-Witten, são construídas janelas de estabilidade a fim de restringir os parâmetros livres do modelo. À temperatura zero, os parâmetros livres do modelo são investigados de modo a observar sua influência na EoS e o modelo é aplicado ao estudo das hipotéticas estrelas estranhas, compostas por matéria de quarks desconfiados absolutamente estável. Os resultados sugerem que o modelo é capaz de reproduzir dados experimentais de estrelas massivas, assim como o raio da estrela de nêutrons canônica. É realizada uma adaptação do modelo para que seja capaz de descrever a matéria de quarks na presença de um campo magnético externo. À temperatura finita, o modelo é utilizado para a descrição da transição de fases de desconfiamento no diagrama de fases da QCD. Os resultados são confrontados com previsões de outros modelos efetivos, estimativas da QCD na rede e dados da transição de fases líquido-gás em baixas temperaturas.

**Palavras-chave:** Estrelas compactas. Estrelas estranhas. Matéria estranha. Matéria de quarks. Transição de fases.

## ABSTRACT

In the present work, deconfined quark matter is described by an effective model on which the quark masses depend on the density. The description of quark matter aims astrophysical applications on the study of compact objects as well as the study of the quantum chromodynamics (QCD) phase diagram. The hypotheses of both pure quark matter with equal quark chemical potentials and stellar matter subject to chemical stability and charge neutrality are investigated. Initially, the issue of thermodynamic consistency that arises from the inclusion of density dependence is addressed, a problem that is solved by the construction of the equation of state (EoS) of the model utilised. From the Bodmer-Witten hypothesis, stability windows are built to restrict the model free parameters. At zero temperature, the model free parameters are investigated to observe their influence on the EoS and then applied to the study of the hypothetical strange stars, composed of absolutely stable deconfined quark matter. The results suggest that the model is capable of describing experimental data for massive stars, as well as the radii of the canonical neutron star. An adaptation is performed on the model so that it becomes capable of describing quark matter in the presence of an external magnetic field. At finite temperature, the model is utilised to describe the deconfinement phase transition in the QCD phase diagram. The results are confronted with predictions from other effective models, estimates from lattice QCD and data from the liquid-gas phase transition in low temperatures.

**Keywords:** Compact stars. Strange stars. Strange matter. Quark matter. Phase transition.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama conjecturado de transição de fases da QCD. Figura de Kevin Schroeder, inspirada em (WATTS <i>et al.</i> , 2014) . . . . .	16
Figura 2 – Possíveis interiores de uma estrela de nêutrons de acordo com a teoria. Figura extraída de (WEBER; NEGREIROS; ROSENFELD, 2009). . . . .	19
Figura 3 – A janela de estabilidade para matéria estelar considerando $m_{s0} = 100$ MeV. . . . .	36
Figura 4 – A janela de estabilidade para matéria estelar considerando $m_{s0} = 80$ MeV. . . . .	36
Figura 5 – A janela de estabilidade para matéria puramente de quarks considerando $m_{s0} = 100$ MeV. . . . .	37
Figura 6 – A janela de estabilidade para matéria puramente de quarks considerando $m_{s0} = 80$ MeV. . . . .	37
Figura 7 – A janela de estabilidade para matéria estelar. O parâmetro $C$ é mantido fixo e igual a zero, a fim de observar como a janela de estabilidade muda com $m_{s0}$ . . . . .	39
Figura 8 – Equação de estado mantendo $C = -0.49$ . . . . .	40
Figura 9 – Equação de estado mantendo $\sqrt{D} = 187.75$ MeV. . . . .	40
Figura 10 – Energia por bárion mantendo $C = -0.49$ . . . . .	41
Figura 11 – Energia por bárion mantendo $\sqrt{D} = 187.75$ MeV. . . . .	41
Figura 12 – Massa máxima de uma estrela estranha obtida para todos os valores da janela de estabilidade, considerando $m_{s0} = 80$ MeV. Os pontos pretos correspondem aos parâmetros indicados na Tabela 2. Figura extraída de (BACKES; HAFEMANN <i>et al.</i> , 2021). . . . .	43
Figura 13 – Raio da estrela estranha de massa máxima, obtido para todos os valores da janela de estabilidade, considerando $m_{s0} = 80$ MeV. Os pontos pretos correspondem aos parâmetros indicados na Tabela 2. Figura extraída de (BACKES; HAFEMANN <i>et al.</i> , 2021). . . . .	44
Figura 14 – Diagrama massa-raio para diferentes conjuntos de parâmetros, considerando $m_{s0} = 80$ MeV. . . . .	45
Figura 15 – Densidade na superfície de uma estrela estranha para todos os valores da janela de estabilidade, considerando $m_{s0} = 80$ MeV. . . . .	46
Figura 16 – Equação de estado variando a temperatura, fixando $C = 0.17$ e $\sqrt{D} = 148$ MeV. . . . .	48
Figura 17 – Energia livre por bárion variando a temperatura, fixando $C = 0.17$ e $\sqrt{D} = 148$ MeV. . . . .	49

Figura 18 – Energia por bárion variando a temperatura, fixando $C = 0.17$ e $\sqrt{D} = 148$ MeV. . . . .	49
Figura 19 – Equação de estado variando o campo magnético, mantendo $C = 0$ e $\sqrt{D} = 158.5$ MeV. . . . .	55
Figura 20 – Energia por bárion variando o campo magnético, mantendo $C = 0.17$ e $\sqrt{D} = 148$ MeV. . . . .	55
Figura 21 – População relativa das partículas em função da densidade bariônica. Linhas tracejadas correspondem à matéria na ausência de campo magnético, enquanto linhas cheias correspondem à matéria de quarks na presença de um campo magnético de $3 \times 10^{18}$ G. . . .	57
Figura 22 – Diagrama de fases para a matéria de três sabores, obtido ao manter $C = -0.27$ . . . . .	62
Figura 23 – Diagrama de fases para a matéria de três sabores, obtido ao manter $\sqrt{D} = 169.5$ MeV. . . . .	62
Figura 24 – Potencial químico crítico da matéria simétrica de dois sabores, à temperatura zero, obtido para todos os valores da janela de estabilidade. . . . .	63
Figura 25 – Potencial químico crítico da matéria simétrica de dois sabores, à temperatura zero, para parâmetros de dentro e fora da janela de estabilidade. . . . .	64
Figura 26 – Diagrama de fases para matéria simétrica de dois sabores. Os parâmetros utilizados se encontram nos extremos da janela de estabilidade da matéria puramente de quarks ao considerar $m_{s0} = 80$ MeV e temperatura nula. Os valores destacados em preto correspondem à região na qual é esperada uma transição de fases líquido-gás (CHOMAZ, 2001; FINN <i>et al.</i> , 1982; LOPES <i>et al.</i> , 2021). . . . .	65
Figura 27 – Equação de estado para a matéria hadrônica (linha cheia) (BACKES; MARQUEZ; MENEZES, 2021) e para a matéria de quarks (linha tracejada). Para o modelo DDQM, foram utilizados $C = 0$ e $\sqrt{D} = 165$ MeV. O resultado apresentado considera temperatura nula e campo magnético de $3 \times 10^{18}$ G. . . . .	68
Figura 28 – Distribuição de partículas para diferentes temperaturas. Figura de Kevin Schroeder. Adaptado de (GREINER; NEISE; STÖCKER, 1997). . . . .	84

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Cargas e massas “de corrente” dos seis sabores de quarks. Os valores das massas possuem incertezas consideráveis, aqui sendo apresentados a título de ilustração. Valores experimentais com suas respectivas incertezas se encontram disponíveis em (ZYLA <i>et al.</i> , 2020). . . . .	14
Tabela 2 – O raio da estrela de $1.4 M_{\odot}$ ( $R_{1.4}$ ), a densidade na superfície de estrelas estranhas ( $n_{sup}$ ), além das massas máximas ( $M_{max}$ ) e seus respectivos raios ( $R$ ) para estrelas estranhas obtidas ao integrar a TOV com EoS utilizando parâmetros $C$ e $D$ ao longo das bordas da região estável da Figura 4, com $m_{s0} = 80$ MeV. . . . .	47
Tabela 3 – O potencial químico crítico à temperatura zero ( $\mu_c$ ) e a temperatura crítica a potencial químico zero ( $T_c$ ). A coluna “L-G” apresenta informações acerca de se a transição líquido-gás se encontra ou não completamente na fase hadrônica para os parâmetros considerados.	66
Tabela 4 – Níveis de Landau obtidos ao variar a projeção do spin e o momento angular orbital. . . . .	88

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
1.1	CROMODINÂMICA QUÂNTICA	14
1.2	ESTRELAS DE NÊUTRONS	17
1.3	OBJETIVOS E ESTRUTURA DO TRABALHO	20
<b>2</b>	<b>MATÉRIA DE QUARKS</b>	<b>21</b>
2.1	A HIPÓTESE DA MATÉRIA ESTRANHA	21
<b>2.1.1</b>	<b>Descrição de estrelas estranhas</b>	<b>23</b>
2.2	MATÉRIA ESTELAR	23
2.3	MATÉRIA PURAMENTE DE QUARKS	24
<b>3</b>	<b>MODELO DE QUARKS DEPENDENTE DA DENSIDADE</b>	<b>26</b>
3.1	MASSA DEPENDENTE DA DENSIDADE	26
3.2	CONSISTÊNCIA TERMODINÂMICA	27
3.3	EQUAÇÃO DE ESTADO CONSISTENTE TERMODINAMICAMENTE	31
3.4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	35
<b>3.4.1</b>	<b>Janela de estabilidade para <math>T = 0</math></b>	<b>36</b>
<b>3.4.2</b>	<b>Equação de estado para <math>T = 0</math></b>	<b>39</b>
<b>3.4.3</b>	<b>Estrelas estranhas</b>	<b>42</b>
<b>3.4.4</b>	<b>Equação de estado para temperatura finita</b>	<b>47</b>
<b>4</b>	<b>MODELO DE QUARKS NA PRESENÇA DE CAMPO MAGNÉTICO</b>	<b>51</b>
4.1	FORMALISMO	51
4.2	RESULTADOS E DISCUSSÃO	54
4.3	LIMITAÇÕES	57
<b>5</b>	<b>TRANSIÇÃO DE FASES</b>	<b>59</b>
5.1	TRANSIÇÃO DE FASES A PARTIR DE UM MODELO DE QUARKS	59
5.2	RESULTADOS E DISCUSSÃO	60
<b>5.2.1</b>	<b>Matéria desmagnetizada</b>	<b>61</b>
<b>5.2.2</b>	<b>Matéria magnetizada</b>	<b>67</b>
5.3	TRANSIÇÃO DE FASES A PARTIR DE DOIS MODELOS EFETIVOS	67
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>69</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>71</b>
	<b>APÊNDICE A – DEFINIÇÕES E CONVENÇÕES DE NOTAÇÃO</b>	<b>78</b>
	<b>APÊNDICE B – GÁS DE FÉRMIONS LIVRES</b>	<b>80</b>
	<b>APÊNDICE C – GÁS DE FÉRMIONS LIVRES NA PRESENÇA DE CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO</b>	<b>85</b>
C.1	A EQUAÇÃO DE DIRAC NA PRESENÇA DE UM CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO	85
<b>C.1.1</b>	<b>Degenerescências</b>	<b>87</b>

C.2	A EQUAÇÃO DE ESTADO DO GÁS DE FÉRMIONS LIVRES NA PRESENÇA DE UM CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO . . . . .	88
C.2.1	<b>Valor máximo dos níveis de Landau . . . . .</b>	<b>90</b>
C.2.2	<b>A contribuição do campo magnético . . . . .</b>	<b>91</b>
	<b>APÊNDICE D – AS EQUAÇÕES DE TOLMAN-OPPENHEIMER-VOLKOFF</b>	<b>92</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CROMODINÂMICA QUÂNTICA

De acordo com o modelo padrão das interações fundamentais, crê-se que a matéria é constituída por léptons e quarks em um nível elementar. Na década de 1930, sabia-se da existência de partículas subatômicas como os prótons, nêutrons e elétrons; a questão acerca de quais seriam os constituintes básicos da matéria parecia, a princípio, uma questão encerrada. A primeira reviravolta ocorreu com a detecção do pión em 1947 por Powell, Lattes e outros. Com os avanços na física nuclear e na tecnologia dos aceleradores de partículas, uma grande fauna de partículas subatômicas passou a ser descoberta, e sua constituição apenas foi explicada com a proposta dos quarks por Gell-Mann e Zweig em 1964. Determinou-se que as partículas descobertas teriam estrutura interna, sendo compostas por partículas mais elementares, os quarks. Assim, três quarks se uniriam, criando os bárions (férmions), ou dois quarks, criando os mésons (bósons). Existem seis tipos, ou sabores, de quarks, apresentados na Tabela 1.

Sabor	Carga ( $e$ )	Massa (MeV)
<i>up</i> ( $u$ )	+2/3	2
<i>down</i> ( $d$ )	-1/3	5
<i>strange</i> ( $s$ )	-1/3	95
<i>charm</i> ( $c$ )	+2/3	1270
<i>bottom</i> ( $b$ )	-1/3	4180
<i>top</i> ( $t$ )	+2/3	172760

Tabela 1 – Cargas e massas “de corrente” dos seis sabores de quarks. Os valores das massas possuem incertezas consideráveis, aqui sendo apresentados a título de ilustração. Valores experimentais com suas respectivas incertezas se encontram disponíveis em (ZYLA *et al.*, 2020).

Os quarks estão sujeitos a todas as forças fundamentais. A eles são atribuídas cargas elétricas fracionárias e não nulas, sendo portanto sujeitos à força eletromagnética. Também possuem massa, o que os submete à força gravitacional. Outrossim, é possível que quarks mudem de sabor em um decaimento, o que é atribuído à força fraca. Além das características típicas das partículas quânticas, os quarks também possuem carga de cor, que pode ser vermelha, verde ou azul ( $r$ ,  $g$  e  $b$ , respectivamente, oriundo do inglês). Por possuírem carga de cor, estão sujeitos à força forte. Cada quark possui seu respectivo antiquark, uma partícula de igual massa e carga elétrica inversa. Diferentemente dos quarks, os antiquarks possuem “anticores” (e.g., *antivermelho*, denotado como  $\bar{r}$ ). Assim, a combinação das cores em hádrons (i.e. bárions e mésons) deve ser tal que resulte na cor branca. Os mésons são então descritos

por um par quark-antiquark, enquanto os bárions são uma combinação de três quarks. Devido à falta de evidências experimentais que confirmassem a existência dos quarks, postulou-se então a propriedade do confinamento, de que a interação entre os quarks aumenta muito com a distância, de modo que separar dois quarks demande altíssimas energias. Dessa maneira, em condições normais, os quarks se encontram sempre confinados dentro dos hádrons.

A Cromodinâmica Quântica (abreviada como QCD, do inglês, *Quantum Chromodynamics*) é a teoria quântica de campos que explica a interação forte entre os quarks através dos glúons. Uma de suas mais interessantes propriedades é a liberdade assintótica, descoberta pela primeira vez em 1973 por Frank Wilczek, David Gross, e independentemente por David Politzer (GROSS; WILCZEK, 1973; POLITZER, 1973). Tal propriedade diz que em escalas de energia muito altas, ou distâncias muito pequenas, a ligação à qual os quarks estão submetidos diminui de intensidade. Assim, em situações extremas, como nos colisores de partículas, no universo primordial, ou no interior de estrelas compactas, é possível que haja quarks desconfinados.

A busca por quarks desconfinados em um plasma de quarks e glúons (abreviado como QGP, do inglês, *Quark-Gluon Plasma*) é um tema de pesquisa atual. Diversos experimentos de colisões de íons pesados em altas energias possuem essa finalidade, sendo que a primeira corroboração experimental da existência de um QGP ocorreu em 2005, no RHIC<sup>1</sup> (ADAMS *et al.*, 2005; ADCOX *et al.*, 2005; BACK *et al.*, 2005; ARSENE *et al.*, 2005).

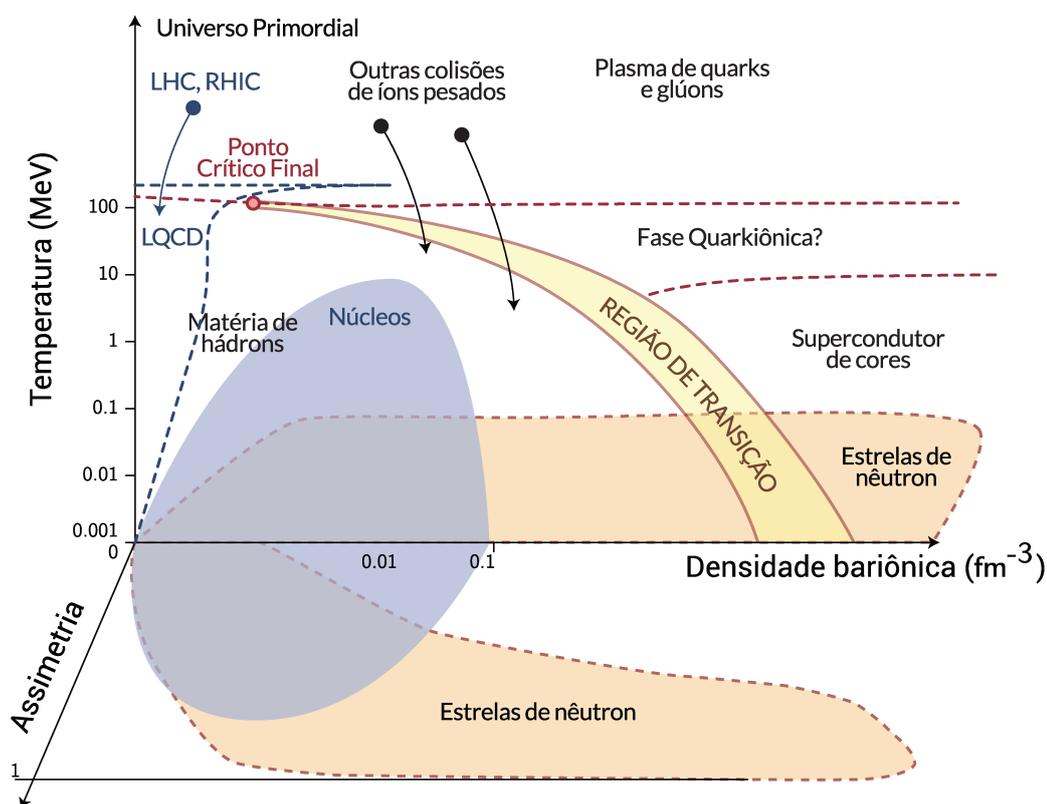
Do ponto de vista teórico, um tratamento analítico completo da QCD não é trivial e está longe de ser obtido. Assim, para diferentes condições, abordagens distintas são tomadas para descrever a matéria nuclear. Em regiões de altas energias e baixas densidades, é possível utilizar métodos aproximativos para investigar a interação forte. Um método não-perturbativo, mas de elevado custo computacional, é a QCD na rede (LQCD, de *Lattice Quantum Chromodynamics*). Ela parte da discretização do espaço-tempo em uma rede de pontos para a busca de soluções numéricas para a dinâmica de quarks. Apesar de ser uma importante fonte de informações precisas no estudo teórico da QCD, dificuldades computacionais limitam o método da LQCD ao regime de potenciais químicos baixos. Em contrapartida, ao considerar regiões de maior potencial químico, é possível obter resultados a partir de modelos efetivos. Tais modelos são geralmente construídos a partir de densidades lagrangianas, tendo por finalidade emular a dinâmica das partículas sujeitas à interação forte.

A partir das diversas abordagens teóricas para descrever as interações fortes, além de resultados experimentais, é possível construir um diagrama de transições de fases para a QCD. De forma simplificada, tal diagrama é responsável por atribuir diferentes condições — como temperaturas, densidades, potenciais químicos, etc. — à

<sup>1</sup> *Relativistic Heavy Ion Collider*, um colisor de íons pesados em Upton, Nova Iorque.

ocorrência de hádrons confinados ou desconfinados. Uma das possíveis versões para tal diagrama é disposta na Figura 1.

Figura 1 – Diagrama conjecturado de transição de fases da QCD. Figura de Kevin Schroeder, inspirada em (WATTS *et al.*, 2014)



Apesar do diagrama exposto na Figura 1 estar em termos da densidade bariônica, é importante salientar que os potenciais químicos são conectados às densidades. Assim, é comum encontrar o diagrama de transição de fases da QCD expresso em termos da temperatura e do potencial químico bariônico, e ambas as versões expressam a mesma física.

No diagrama, é possível observar que para valores baixos de temperatura e da densidade bariônica, os quarks devem se encontrar confinados dentro de hádrons. Mantendo baixos valores de densidade — ou potencial químico — e considerando temperaturas elevadas, é possível obter resultados da LQCD. É previsto que em temperaturas altas ocorra a transição de fases da matéria hadrônica para o QGP. Além disso, a LQCD prevê que a transição de fases é um *crossover* (BAZAVOV *et al.*, 2012; AOKI *et al.*, 2009). Por outro lado, em temperaturas baixas e densidades altas, acredita-se que também haja uma transição para a fase desconfinada. Como em tal região do diagrama é comum utilizar modelos efetivos para descrever a matéria nuclear, não é trivial a previsão exata de uma densidade crítica na qual a transição ocorre. De acordo

com os modelos efetivos, em tal região ocorre uma transição de fases de primeira ordem. As abordagens aparentemente conflitantes entre os resultados da LQCD e dos modelos efetivos podem ser conciliadas, desde que haja um ponto crítico final na intersecção entre o domínio da LQCD e a região de altas densidades e temperatura baixa. Ainda, na região de altíssimas densidades, conjectura-se a existência de uma fase supercondutora de cor.

Neste trabalho, a região do diagrama a ser descrita é a de quarks desconfina- dos. Para tal, será utilizado um modelo efetivo que introduz as interações fortes como um termo dependente da densidade na massa dos três quarks mais leves. Ademais, uma das regiões de grande interesse no diagrama é a de altas densidades e baixas temperaturas. Em tais condições, é possível encontrar estrelas compactas. Dada a grande indeterminação de uma densidade crítica na qual a transição ocorre à tempe- ratura nula, objetos como estrelas de nêutrons se tornam poderosas ferramentas para o estudo das interações fortes.

## 1.2 ESTRELAS DE NÊUTRONS

Junto das anãs brancas e buracos negros, as estrelas de nêutrons são objetos compactos chamados de remanescentes estelares, ou “cadáveres” estelares. Tais objetos são o que resta quando o ciclo de vida de uma estrela é finalizado.

Durante o período de “vida”, estrelas se mantêm estáveis devido à fusão nuclear em seu interior. Isso se dá devido à pressão de radiação gerada a partir da fusão, a principal responsável por contrabalancear a força gravitacional. Para estrelas bastante massivas ( $8 M_{\odot} < M < 25 M_{\odot}$ ), tal processo se mantém até o momento em que haja ferro no núcleo da estrela. O núcleo de  $^{56}\text{Fe}$  é o núcleo atômico com maior energia de ligação por nucleon, e por consequência disso, sua fusão é um processo endotérmico. Assim, a partir do momento em que haja suficiente ferro no núcleo da estrela, as reações de fusão são interrompidas, e a estrela colapsa sob sua própria gravidade, dando origem a uma supernova. Após tal fenômeno, o que resta é o caroço mais interno, um núcleo extremamente denso. Tal remanescente é chamado de estrela de nêutrons.

Tais objetos compactos possuem massas tipicamente de  $1.4 M_{\odot}$  e raios de cerca de 10 km. Assim, apesar de terem uma massa similar à do Sol, seus raios são  $\sim 10^5$  vezes menores que o da estrela central do sistema solar. Tais estimativas põe em perspectiva o quão densa é, de fato, uma estrela de nêutrons. Quantitativamente, sua densidade média é de duas a três vezes superior à densidade da matéria nuclear<sup>3</sup>, podendo mesmo ser dezenas de vezes maior em seu centro (POTEKHIN; YAKOVLEV;

<sup>2</sup>  $M_{\odot}$  é uma massa solar, equivalente a  $1.989 \times 10^{30}$  kg.

<sup>3</sup> A densidade da matéria nuclear dentro de núcleos atômicos é de cerca de  $2.8 \times 10^{14}$  g/cm<sup>3</sup>.

HAENSEL, 2007). Não é qualquer exagero afirmar que estrelas de nêutrons são as estrelas mais compactas no universo.

A ideia de um objeto compacto mais denso que uma anã branca precede a própria descoberta do nêutron. Um ano antes da descoberta de Chadwick, Landau havia sugerido estrelas que se comportassem como um núcleo gigante. Como o nome sugere, a ideia ganhou força depois da descoberta do nêutron em 1932. Ao analisarem explosões de supernova, Baade e Zwicky propuseram pela primeira vez a existência de uma estrela de nêutrons em 1934, mesmo que muito diferente da concepção atual do mesmo objeto compacto.

Um grande passo no desenvolvimento da física de estrelas de nêutrons se deu em 1939, quando Tolman, Oppenheimer e Volkoff concomitantemente obtiveram a equação para o equilíbrio hidrostático de um objeto esfericamente simétrico de acordo com a relatividade geral. Desde então, surgiram diversas propostas para a composição de estrelas de nêutrons, de forma atrelada ao descobrimento de novas partículas (GLENDEENING, 2000). Uma descrição histórica completa pode ser encontrada em (POTEKHIN; YAKOVLEV; HAENSEL, 2007).

No campo experimental, a primeira estrela de nêutrons foi observada por Jocelyn Bell em 1967, como uma fonte de ondas de rádio de período extremamente estável. O sinal observado se repetia a cada 1.3373012 s, o que gerou a suspeita de que talvez se tratasse de uma tentativa de comunicação extraterrestre. Assim, o sinal chegou a ser apelidado de “LGM” (abreviação de *Little Green Men*, ou homenzinhos verdes, em livre tradução). A descoberta de Bell e de seu orientador, Antony Hewish, foi anunciada em 1968, após concluírem que se tratava de um *pulsar*. Os *pulsares* foram então identificados como estrelas de nêutrons magnetizadas que giram. Até o final do mesmo ano, centenas de artigos sobre *pulsares* foram então publicados. Hoje, há milhares de estrelas de nêutrons identificadas experimentalmente e devidamente catalogadas (THE... , s.d.; MCGILL... , s.d.; OLAUSEN; KASPI, 2014).

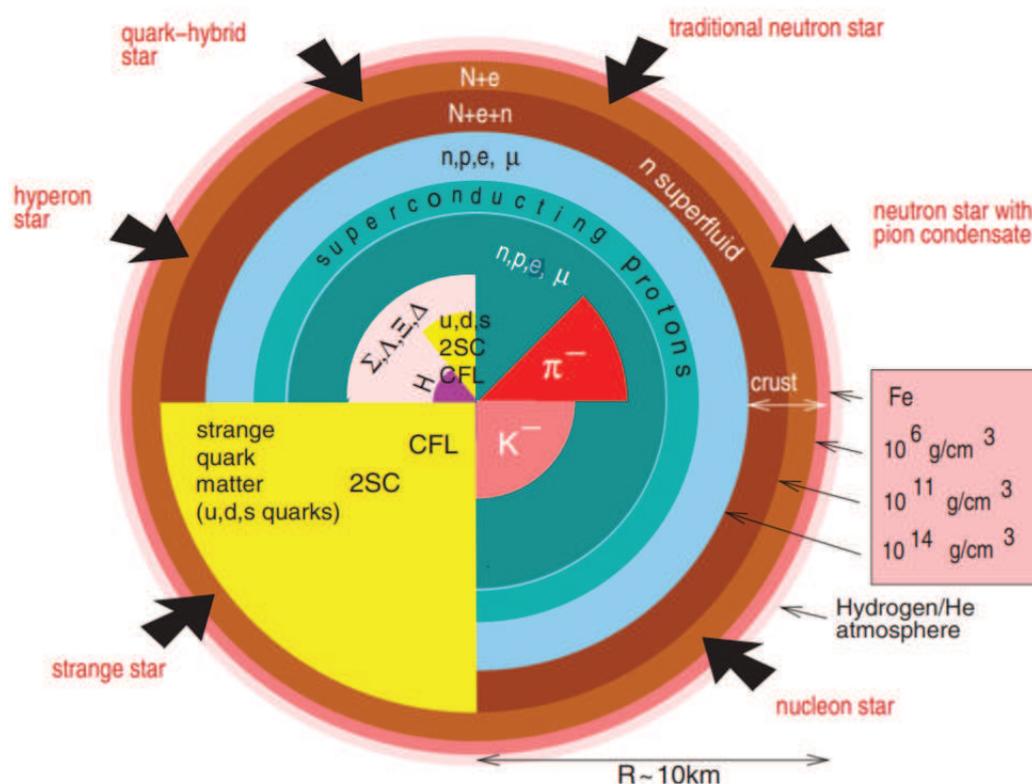
À luz da perspectiva atual, estrelas de nêutrons são objetos extremos. Tais cadáveres estelares possuem campos magnéticos e gravitacionais que não são encontrados em quaisquer outros corpos do universo, exceto talvez em buracos negros. Uma descrição rigorosa de suas propriedades envolve conhecimento de quase todas as áreas da física: eletromagnetismo, relatividade geral, mecânica quântica, física da matéria condensada, física nuclear e tantas outras. Suas características extremas e a multidisciplinaridade envolta em seu estudo fazem com que sejam um laboratório interessantíssimo para testes de modelos da física.

Todavia, do que realmente são feitas as estrelas de nêutrons? Diferentemente do que o nome sugere, a resposta pode não ser tão simples. Dotadas de condições tão extremas, essas estrelas se encontram em uma região indefinida do diagrama de fases da QCD, como destacado na Figura 1. É possível que seja energeticamente favorável

a aparição de híperons (bárions constituídos por pelo menos um quark  $s$ ), ou mesmo de uma fase de quarks desconfinados nas densidades centrais da estrela. Dessa forma, modelos teóricos com as mais diferentes propostas podem ser confrontados com dados astrofísicos a fim de obter uma resposta para quais realmente são os constituintes de uma estrela de nêutrons.

Na Figura 2, estão dispostas várias possibilidades para o interior de uma estrela de nêutrons. É de grande interesse deste trabalho salientar a possibilidade de uma estrela estranha, destacada em amarelo na mesma figura. Tal objeto compacto é de existência hipotética, baseada na ideia de que talvez o verdadeiro estado fundamental da matéria nuclear sejam os quarks desconfinados em detrimento da matéria hadrônica, a chamada hipótese de Bodmer-Witten (BODMER, 1971; WITTEN, 1984). Estrelas estranhas são compostas em sua totalidade por quarks  $u$ ,  $d$  e  $s$  desconfinados, o que seria possível caso a hipótese supracitada seja verdadeira, dadas as altas densidades de estrelas de nêutrons.

Figura 2 – Possíveis interiores de uma estrela de nêutrons de acordo com a teoria. Figura extraída de (WEBER; NEGREIROS; ROSENFELD, 2009).



A obtenção de estimativas teóricas para as propriedades macroscópicas de estrelas de nêutrons (como massa e raio), que podem ser comparadas a dados experimentais obtidos por astrofísicos, é um tema de pesquisa atual. Tentativas de descrever as massas máximas observadas experimentalmente têm gerado uma série de modelos

construídos a partir de diferentes bases teóricas e equações de estado (EoS). Portanto, do ponto de vista da física nuclear, as estrelas de nêutrons são um laboratório excepcional para testar como a matéria nuclear se comporta em situações extremas, muito diferentes daquelas que são encontradas em experimentos terrestres. Por hora, os verdadeiros constituintes de um dos mais compactos objetos do universo, permanece uma incógnita a qual pretendemos explorar no decorrer deste trabalho.

### 1.3 OBJETIVOS E ESTRUTURA DO TRABALHO

Do exposto acima, pretendemos neste trabalho estudar com afinco uma descrição adequada para a matéria de quarks desconfinados. Para tal, um modelo efetivo com dependência da densidade é empregado, um recurso que pretende imitar a interação forte entre os quarks. Os resultados obtidos visam a obtenção de propriedades macroscópicas de estrelas compactas condizentes com resultados astrofísicos, além de um estudo simplificado do diagrama de transição de fases da QCD. A seguir, explicamos como a presente dissertação foi dividida.

No Capítulo 2, são apresentados os contextos nos quais a matéria de quarks desconfinados será avaliada no decorrer do trabalho. No Capítulo 3, o modelo efetivo escolhido para a descrição da matéria de quarks é apresentado. Em sequência, expomos os principais resultados numéricos obtidos para a equação de estado da matéria de quarks fria e quente, além da aplicação do modelo ao estudo de estrelas estranhas. Na prática, a matéria de quarks desconfinados é prevista em situações onde campos magnéticos extremos estão presentes, como em pulsares e colisões de íons pesados. Assim, no Capítulo 4 apresentamos uma maneira de adaptar o modelo de quarks escolhido para que seja capaz de descrever matéria magnetizada. Partindo apenas do modelo de quarks, é feita uma abordagem simplista para descrever o diagrama de transição de fases da QCD, apresentada no Capítulo 5. Por fim, no Capítulo 6 são delineadas as conclusões do estudo desenvolvido.

Maiores detalhes das contas apresentadas no decorrer do trabalho estão dispostos nos Apêndices A, B, C e D. Os principais códigos desenvolvidos para a obtenção de resultados numéricos estão disponíveis para livre acesso em <https://github.com/b-backes/Quark-matter-model>.

## 2 MATÉRIA DE QUARKS

A discussão acerca de uma matéria composta de quarks desconfiados foi iniciada após se ter noticiado que os quarks são assintoticamente livres (GROSS; WILCZEK, 1973; POLITZER, 1973), como discutido no Capítulo 1. Portanto, tanto em temperaturas quanto em densidades extremamente altas, os quarks estão livres de interações fortes. Sob tais condições, os constituintes da matéria nuclear se encontrariam livres para explorar uma região “livre de cor”, chamada de matéria de quarks.

A motivação atual para uma descrição adequada da matéria de quarks se baseia em estudos do universo primordial (RAFELSKI, 2013), de colisões de íons pesados, (RAFELSKI, 2013; ADAMS *et al.*, 2005), e principalmente, de estrelas de nêutrons (GLENDEENING, 2000; POTEKHIN; YAKOVLEV; HAENSEL, 2007). Todos os cenários citados são extremos o suficiente para que as condições de desconfiamento devam ser atingidas. Notadamente, um estudo recente baseado na velocidade do som aponta para que núcleos de matéria de quarks devam ser encontrados no interior de estrelas de nêutrons massivas (ANNALA; GORDA; KURKELA *et al.*, 2020).

Neste capítulo serão discutidos três cenários importantes ao estudar a matéria de quarks, que serão explorados durante todo este trabalho. Primeiramente, será exposta a hipótese da matéria estranha, um caso especial de matéria de quarks. Em seguida, serão expostas as condições para que se encontre matéria de quarks no meio estelar, na presença de léptons. Por último, serão apresentadas as condições consideradas para o estudo de uma matéria puramente de quarks, sem que haja a presença de léptons.

### 2.1 A HIPÓTESE DA MATÉRIA ESTRANHA

Nossa experiência física atesta para a inexistência de matéria estável contendo quarks estranhos ( $s$ ), dado que os híperons e hipernúcleos decaem em nucleons e núcleos comuns. Além disso, toda a experiência cotidiana aponta para que o estado fundamental da matéria nuclear seja confinada dentro de hádrons. Todavia, não é possível provar que este não seja apenas um estado metaestável duradouro.

Há evidências suficientes para assegurar que a matéria hadrônica é o estado fundamental da matéria nuclear quando há apenas quarks up ( $u$ ) e down ( $d$ ). Assim, para a matéria de dois sabores desconfiados, sabe-se que a energia de ligação é maior que a da matéria hadrônica, i.e., o estado confinado é o preferencial. O que a hipótese da matéria estranha — ou hipótese/conjectura de Bodmer-Witten — propõe, é que em densidades altas, a aparição do quark estranho pode diminuir a energia de ligação da matéria de quarks desconfiados. Assim, desde que haja presença de quarks  $u$ ,  $d$  e  $s$  em proporções idênticas, a matéria de quarks desconfiados seria estável (BODMER, 1971; WITTEN, 1984). Essa matéria de quarks, correspondente

ao possível verdadeiro estado fundamental da matéria nuclear, é chamada de matéria estranha (abreviada como SQM, do inglês *Strange Quark Matter*).

Tal hipótese não pode ser descartada, dada a dificuldade de obter resultados diretamente da QCD. Contudo, apesar de parecer completamente chocante em um primeiro momento, as consequências da existência da matéria estranha não trariam nenhuma mudança drástica ao Universo como conhecemos. Para que a fase de quarks desconfiados seja a preferencial, é necessário um grande número de quarks estranhos, o que ocorre apenas em altas densidades. Dessa forma, a conjectura de Bodmer-Witten é completamente conciliável com a observação de que a fase hadrônica é favorecida em baixas densidades.

Assim, é preciso estabelecer os critérios para que a SQM seja absolutamente estável. Sendo  $^{56}\text{Fe}$  o mais estável dos núcleos, convém comparar sua energia de ligação com a da SQM. Estabelece-se que caso o mínimo da energia por bárion ( $\bar{E}/A$ ) da matéria estranha seja menor que o do  $^{56}\text{Fe}$ , equivalente a 930 MeV, a SQM será estável

$$\left( \frac{E}{n_B} = \frac{\bar{E}}{A} \right)_{\text{SQM estável}} \leq 930 \text{ MeV.} \quad (1)$$

A notação  $E/n_b$  corresponde à densidade de energia ( $E$ ) dividida pela densidade bariônica ( $n_b$ ), apresentada aqui por conveniência futura.

Seguindo a definição apresentada em (PENG; LI; LOMBARDO, 2008), caso o mínimo da energia por bárion da SQM esteja entre a do  $^{56}\text{Fe}$  e a massa de um nucleon, 939 MeV, ela é denominada metaestável

$$930 \text{ MeV} < \left( \frac{E}{n_B} = \frac{\bar{E}}{A} \right)_{\text{SQM metaestável}} \leq 939 \text{ MeV.} \quad (2)$$

Por conseguinte, caso o mínimo da energia por bárion seja superior a 939 MeV, a SQM será considerada instável

$$\left( \frac{E}{n_B} = \frac{\bar{E}}{A} \right)_{\text{SQM instável}} > 939 \text{ MeV.} \quad (3)$$

As condições anteriores precisam ser simultaneamente consistentes com o fato de que a matéria de quarks de dois sabores desconfiados, 2QM, deve ser instável

$$\left( \frac{E}{n_B} = \frac{\bar{E}}{A} \right)_{\text{2QM instável}} > 930 \text{ MeV.} \quad (4)$$

Neste trabalho, os resultados serão extraídos levando em consideração o supracitado. Apesar disso, como não há certeza quanto à estabilidade absoluta da matéria estranha, a condição de estabilidade da SQM poderia ser negligenciada, mantendo-se apenas o critério de que a 2QM deve ser instável.

### 2.1.1 Descrição de estrelas estranhas

A ideia de uma estrela composta apenas por matéria de quarks desconfiados foi considerada pela primeira vez por Itoh (ITOH, 1970). Ao levar em consideração a hipótese da matéria estranha, essa ideia se torna mais tangível, gerando possíveis consequências no cenário de estrelas compactas. Caso a hipótese de Bodmer-Witten esteja correta, uma das formas do estado de quarks confinados evoluir ao de matéria estranha, é através do processo de formação de estrelas de nêutrons. Como discutido no Capítulo 1, estrelas de nêutrons possuem interiores extremamente densos, criando um cenário no qual a transição de fases para matéria de quarks é possível. Caso a matéria estranha realmente seja o estado fundamental e tal transição de fases ocorra, a partir do momento em que o caroço da estrela se converter para matéria estranha, nada impedirá que toda a estrela acabe se tornando apenas de SQM. Dessa forma, algumas — ou até mesmo todas — as estrelas de nêutrons sofreriam uma conversão para o que são chamadas estrelas estranhas, compostas apenas de matéria estranha auto-ligada.

## 2.2 MATÉRIA ESTELAR

Além de modelos efetivos para a obtenção da equação de estado, a descrição da matéria de quarks no ambiente estelar pressupõe também condições de equilíbrio. A discussão acerca das condições de equilíbrio é válida tanto no âmbito do estudo de estrelas estranhas, quanto no estudo de estrelas híbridas com um núcleo de quarks desconfiados.

Ao descrever a matéria de quarks no ambiente estelar, consideraremos que ela seja composta de quarks  $u$ ,  $d$ ,  $s$ , e elétrons ( $e$ ). Devido à presença dos léptons, tem-se interações fracas, como

$$d, s \leftrightarrow u + e + \bar{\nu}_e. \quad (5)$$

Durante o processo de esfriamento, a estrela perde grande parte de sua energia inicial ao emitir neutrinos, no que é conhecido como processo Urca. Restringiremos então nosso estudo ao caso de estrelas frias, quando os neutrinos já abandonaram o sistema, carregando consigo a energia térmica do nascimento da estrela. Assim, o estado de equilíbrio da matéria estelar será atingido quando cessarem as reações do processo Urca (GAMOW, George; SCHOENBERG, 1940; GAMOW, G.; SCHOENBERG, 1941), demandando que não haja mais níveis de energia disponíveis aos léptons envolvidos no decaimento  $\beta$ , impondo

$$E_{Fd} = E_{Fu} + E_{Fe}, \quad (6)$$

$$E_{Fs} = E_{Fu} + E_{Fe}. \quad (7)$$

Dessa forma, todos os níveis de energia de Fermi estarão ocupados, encerrando o processo. Fazendo a identificação de que no estado fundamental  $E_F = \mu^1$ , pode-se reescrever a condição de equilíbrio químico como

$$\mu_u + \mu_e = \mu_d = \mu_s. \quad (8)$$

Dado que a intensidade da interação eletromagnética é muito maior que a da interação gravitacional — ou forte —, e que as últimas duas são as grandes responsáveis por manter uma estrela de nêutrons ou estrelas de quarks ligada, qualquer carga residual na estrela deve ser bastante branda. Assim, considera-se que qualquer carga residual maior que um valor infinitesimal acabaria sendo desligada da estrela (GLENDEENING, 2000). Desta forma, pode-se escrever a condição para que haja neutralidade de carga

$$\frac{2}{3}n_u - \frac{1}{3}n_d - \frac{1}{3}n_s - n_e = 0. \quad (9)$$

Além das condições de equilíbrio químico e neutralidade de carga, convém citar a condição de conservação de número bariônico

$$n_b = \frac{1}{3}(n_u + n_d + n_s). \quad (10)$$

Partindo das eqs. (8)-(10), junto da EoS, tem-se a descrição microscópica da matéria que compõe uma estrela de quarks. A ponte entre a microfísica e a macrofísica das propriedades de objetos estelares observáveis é feita pelas equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) (TOLMAN, 1939; OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939), oriundas da relatividade geral. Tais equações descrevem, a partir da EoS, a massa e o raio de uma estrela em equilíbrio hidrostático. Uma descrição mais apropriada da TOV está disponível no Apêndice D.

### 2.3 MATÉRIA PURAMENTE DE QUARKS

Devido majoritariamente às estrelas estranhas serem a maior consequência da conjectura de Bodmer-Witten, a matéria de quarks desconfinados normalmente é descrita na literatura na presença de léptons. Apesar disso, tais condições não

<sup>1</sup> Uma discussão mais detalhada pode ser encontrada no Apêndice B.

são adequadas à descrição da matéria nuclear estável. Assim, escolhemos aplicar o formalismo descrito nos próximos capítulos também ao caso da matéria simétrica

$$\mu_u = \mu_d = \mu_s, \quad (11)$$

na qual os quarks possuem o mesmo potencial químico.

### 3 MODELO DE QUARKS DEPENDENTE DA DENSIDADE

Quaisquer informações concretas sobre a validade da conjectura de Bodmer-Witten, ou sobre a equação de estado (EoS) da matéria de quarks, esbarram na atual impossibilidade de resolver analiticamente a QCD. Assim, faz-se necessário o uso de modelos efetivos para descrever a matéria de quarks.

Neste capítulo, é apresentado o modelo utilizado para descrever a matéria estranha (ou de quarks), que possui uma dependência da massa com a densidade do meio. Depois de introduzidas as noções básicas de como a massa dos quarks depende da densidade, é discutido o problema da consistência termodinâmica em modelos dependentes da densidade, para que formalismo completo do modelo seja finalmente apresentado. Por último, são apresentados os resultados obtidos para a janela de estabilidade, a equação de estado, e a consistência termodinâmica. É também apresentada uma análise acerca da descrição de estrelas estranhas com o modelo utilizado.

#### 3.1 MASSA DEPENDENTE DA DENSIDADE

O modelo de escolha para investigar a matéria de quarks é o modelo de quarks com massa dependente da densidade (abreviado como modelo DDQM, do inglês, *density dependent quark mass model*). A motivação de tal abordagem está em expressar de uma maneira simples a interação entre os quarks. Neste trabalho, restringimos nossos resultados ao estudo da matéria de quarks com dependência da densidade, embora a inclusão de dependência de temperatura também seja apresentada no desenvolvimento teórico do modelo. Considerando a matéria de quarks como sendo composta de quarks *up*, *down* e *strange*, a massa é expressa por

$$m_i = m_{i0} + m_I, \quad (12)$$

onde  $m_{i0}$  ( $i = u, d, s$ ) é a massa de corrente de cada um dos quarks e  $m_I$  é a quantidade dependente da densidade e/ou temperatura. Uma questão importante a se considerar é a maneira como a massa depende da densidade. Apesar de várias dependências diferentes serem apresentadas na literatura (CHAKRABARTY, Somenath, 1991; XIAO-PING *et al.*, 2004; PENG; CHIANG *et al.*, 2000), a de escolha para este trabalho é a apresentada em (XIA *et al.*, 2014), dada por

$$m_i = m_{i0} + \frac{D}{n_b^{1/3}} + Cn_b^{1/3}, \quad (13)$$

onde  $C$  e  $D$  são os parâmetros livres do modelo, ditando a intensidade da interação. O termo dependente da densidade possui duas partes, portanto: (i) o termo de confinamento,  $D/n_b^{1/3}$ , que domina em baixas densidades; (ii) o termo de primeira ordem das interações perturbativas,  $Cn_b^{1/3}$ .

O termo perturbativo foi introduzido por (XIA *et al.*, 2014) como uma tentativa de obter massas maiores para estrelas estranhas, já que estrelas de nêutrons tão massivas quanto  $2M_{\odot}$  já foram detectadas (CROMARTIE; FONSECA; RANSOM *et al.*, 2020; DEMOREST; PENNUCCI; RANSOM *et al.*, 2010; ANTONIADIS *et al.*, 2013). Assim, como um dos objetivos deste trabalho é o estudo de estrelas estranhas, fez-se a escolha de utilizar a relação (13) em todos os resultados que seguem.

### 3.2 CONSISTÊNCIA TERMODINÂMICA

A introdução de uma massa dependente da densidade é uma ferramenta interessante para imitar as interações fortes. Todavia, a introdução de uma nova dependência das variáveis de estado do sistema — como a densidade ou a temperatura — pode quebrar a concordância da EoS com a equação fundamental da termodinâmica. Sendo a termodinâmica uma das áreas mais bem estabelecidas da física, torna-se necessário um tratamento mais cauteloso do modelo para que não haja inconsistências.

Dessa forma, é útil estabelecer condições necessárias para que a EoS esteja de acordo com a equação fundamental da termodinâmica. Para encontrar tais condições, que sejam independentes do modelo escolhido, começamos com a forma diferencial da equação fundamental da termodinâmica

$$d\bar{E} = Td\bar{S} - PdV + \sum_i \mu_i d\bar{N}_i, \quad (14)$$

onde  $\bar{E}$  é a energia interna,  $T$  a temperatura,  $\bar{S}$  a entropia,  $P$  a pressão,  $V$  o volume,  $\mu_i$  o potencial químico, e  $\bar{N}_i$  o número de partículas da  $i$ -ésima espécie. O índice  $i$  varia de acordo com o caso a ser considerado, sendo  $i = u, d, s, e$  para matéria estelar, ou  $i = u, d, s$  para matéria puramente de quarks. Os três termos à direita equivalem às maneiras de aumentar a energia interna de um sistema, sendo respectivamente por troca de calor, realização de trabalho, ou por troca de partículas.

Como desejamos estudar um sistema com dependência da densidade e/ou da temperatura, é natural escolher a temperatura  $T$ , o volume  $V$  e as densidades  $n_i = \bar{N}_i/V$  como variáveis de estado independentes. Sendo essas as variáveis naturais da energia livre de Helmholtz,  $\bar{F}$ , convém analisar o sistema à luz deste potencial termodinâmico (CALLEN, 1985). Usando a definição de energia livre, tem-se

$$\bar{F} = \bar{E} - T\bar{S}, \quad (15)$$

$$d\bar{F} = d\bar{E} - \bar{S}dT - Td\bar{S}, \quad (16)$$

$$= -\bar{S}dT - PdV + \sum_i \mu_i d\bar{N}_i. \quad (17)$$

Para que a dependência da densidade se torne explícita, se torna conveniente a introdução de quantidades intensivas tais quais a densidade de energia  $E \equiv \bar{E}/V$ , a densidade de energia livre  $F \equiv \bar{F}/V$ , a densidade de entropia  $S \equiv \bar{S}/V$  e as densidades de partículas  $n_i$  definidas acima. Notando que

$$d\bar{F} = d(FV) = VdF + FdV, \quad (18)$$

$$d\bar{N}_i = d(n_i V) = Vdn_i + n_i dV \quad (19)$$

é possível reescrever a equação fundamental como

$$dF = -SdT + \sum_i \mu_i dn_i + \left( -P - F + \sum_i \mu_i n_i \right) \frac{dV}{V}. \quad (20)$$

Desse modo, fica explícito que  $T$ ,  $n_i$  e  $V$  são as variáveis de estado independentes. Isso implica que, sabendo  $F$  como uma função das variáveis de estado independentes, todas as quantidades termodinâmicas podem ser obtidas por

$$S = - \left. \frac{dF}{dT} \right|_{n_k}, \quad (21)$$

$$\mu_i = \left. \frac{dF}{dn_i} \right|_{T, n_{\{k \neq i\}}}. \quad (22)$$

Além disso, como a matéria de quarks de interesse deste trabalho é considerada um sistema infinitamente grande para o qual efeitos de borda não são significativos, a energia livre não deve depender do volume, de modo que

$$P = -F + \sum_i \mu_i n_i, \quad (23)$$

$$dF = -SdT + \sum_i \mu_i dn_i. \quad (24)$$

Sendo a densidade de energia livre uma função analítica, suas derivadas parciais mistas de segunda ordem devem ser iguais. Assim, obtém-se matematicamente as relações

$$\Delta_i \equiv \left. \frac{dS}{dn_i} \right|_{T, \{n_{k \neq i}\}} + \left. \frac{d\mu_i}{dT} \right|_{T, \{n_k\}} = 0 \quad (25)$$

e

$$\Delta_{ij} \equiv \left. \frac{d\mu_j}{dn_i} \right|_{T, n_{k \neq i}} - \left. \frac{d\mu_i}{dn_j} \right|_{T, n_{k \neq j}} = 0. \quad (26)$$

Tais condições correspondem às condições de Cauchy para que o lado direito da eq. (24) seja integrável ao escolher a energia livre como função característica.

É possível também utilizar condições adicionais, como as introduzidas no Capítulo 2, para obter outras relações necessárias para que a EoS de um sistema seja completamente consistente com a equação fundamental da termodinâmica. Primeiramente, nos atentamos ao caso da matéria estelar, reescrevendo as condições previamente descritas

$$\mu_u + \mu_e = \mu_d = \mu_s \equiv \mu, \quad (27)$$

$$n_b = \frac{1}{3} \sum_q n_q, \quad (28)$$

$$n_b = n_u - n_e, \quad (29)$$

onde a primeira condição descreve o equilíbrio químico, a segunda descreve a conservação de número bariônico, e a última é uma combinação da conservação de número bariônico e da neutralidade de carga, como descritas previamente em (10) e (9). O índice  $q$  indica que a soma é realizada sobre todos os quarks,  $q = u, d, s$ .

Através das condições (27)—(29), é possível descrever a energia livre como uma função da temperatura e das densidades. Para um valor fixo de  $T$ , podemos escrever

$$\frac{dF}{dn_b} = \sum_i \mu_i \frac{dn_i}{dn_b} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} n_b \frac{dF}{dn_b} &= n_b \left[ \sum_q \mu_q \frac{dn_q}{dn_b} + \mu_e \frac{dn_e}{dn_b} \right] \\ &= n_b \left[ \mu \sum_q \frac{dn_q}{dn_b} - \mu_e \frac{dn_u}{dn_b} + \mu_e \frac{dn_e}{dn_b} \right] \\ &= n_b \left[ \mu \frac{d}{dn_b} \left( \sum_q n_q \right) - \mu_e \frac{d}{dn_b} (n_u - n_e) \right] \\ &= n_b (3\mu - \mu_e) \\ &= \mu \sum_q n_q - \mu_e n_b \\ &= \sum_q \mu_q n_q + \mu_e n_u - \mu_e n_b \\ &= \sum_i \mu_i n_i - \mu_e n_e + \mu_e n_u + \mu_e n_b \\ &= \sum_i \mu_i n_i + \mu_e (n_u - n_e - n_b) \\ &= \sum_i \mu_i n_i. \end{aligned} \quad (31)$$

Unindo o resultado à eq. 23, tem-se

$$P = -F + n_b \frac{dF}{dn_b}, \quad (32)$$

sendo que é possível reescrever o lado direito como

$$n_b \frac{dF}{dn_b} - F = n_b^2 \left[ \frac{1}{n_b} \frac{dF}{dn_b} - \frac{F}{n_b^2} \right] = n_b^2 \frac{d}{dn_b} \left( \frac{F}{n_b} \right)_T, \quad (33)$$

obtendo-se

$$\Delta \equiv P - n_b^2 \frac{d}{dn_b} \left( \frac{F}{n_b} \right)_T = 0. \quad (34)$$

O significado físico da eq. (34) é de que a pressão no mínimo da energia livre por bárion — ou mínimo da energia por bárion, à temperatura zero — deve ser exatamente zero. Além disso, esse mínimo representa um estado mecanicamente estável.

Esse resultado foi obtido a partir das condições de estabilidade para matéria estelar, i.e., na presença de elétrons. Apesar disso, o mesmo pode ser encontrado

também para matéria puramente de quarks com potenciais químicos iguais, como definido no Capítulo 2. Partindo novamente da eq. (30) e utilizando

$$\mu_u = \mu_d = \mu_s \equiv \mu, \quad (35)$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dn_b} &= \sum_i \mu_i \frac{dn_i}{dn_b} \\ n_b \frac{dF}{dn_b} &= n_b \mu \frac{d}{dn_b} \left( \sum_q n_q \right) \\ &= 3n_b \mu \\ &= \sum_i \mu_i n_i. \end{aligned}$$

Assim, o resultado da eq. (34) é válido para ambos os cenários discutidos neste trabalho como forma de verificar a consistência termodinâmica. Junto das condições de Cauchy, dadas pelas eqs. (25) e (26), tem-se as condições necessárias para que um modelo de matéria de quarks possua consistência termodinâmica.

### 3.3 EQUAÇÃO DE ESTADO CONSISTENTE TERMODINAMICAMENTE

Dados os critérios que precisam ser satisfeitos para que haja consistência termodinâmica, convém apontar os problemas normalmente encontrados por modelos com dependência da densidade e/ou temperatura.

Inicialmente, todas as expressões eram tomadas como as de um sistema livre, apenas incluindo a dependência da densidade (CHAKRABARTY; RAHA; SINHA, 1989). O modelo foi então melhorado, incluindo um termo adicional à pressão, devido à dependência da densidade na massa dos quarks, simultaneamente subtraindo o mesmo valor da densidade de energia (BENVENUTO; LUGONES, 1995). Um problema sério de ambos os tratamentos é que violam o critério estabelecido pela eq. (34), já que a pressão não é nula no mínimo de sua energia livre por bárion. Um terceiro tratamento adiciona um termo de correção à pressão, resolvendo o problema das abordagens anteriores (PENG; CHIANG *et al.*, 2000). Um trabalho recente analisou detalhadamente cada uma das três propostas, apontando que apesar de satisfazer a condição (34), o último caso é inconsistente com as condições de Cauchy, de modo que um cuidado ainda mais minucioso é necessário para que a consistência termodinâmica seja plenamente alcançada (XIA *et al.*, 2014).

Ainda em (XIA *et al.*, 2014), é proposta uma maneira de satisfazer completamente as condições para que haja consistência termodinâmica, sendo este o modelo de escolha para descrever a matéria de quarks neste trabalho. A obtenção de uma equação de estado auto-consistente é demonstrada a seguir.

Como citado anteriormente, é preferível descrever o sistema em termos da energia livre, já que é conveniente escolher a temperatura e as densidades de partículas como variáveis de estado independentes. Tal como na seção anterior, começamos expressando a equação fundamental da termodinâmica para a densidade de energia livre de um sistema sem dependência do volume

$$dF = -SdT + \sum_i \mu_i dn_i. \quad (36)$$

Similarmente ao apresentado na seção anterior, obtém-se a pressão ao eliminar a dependência do volume

$$P = -F + \sum_i \mu_i n_i. \quad (37)$$

A maneira descrita por (XIA *et al.*, 2014) e (PENG; LI; LOMBARDO, 2008) para subjugar a inconsistência termodinâmica é a introdução de potenciais químicos efetivos, denotados  $\mu_j^*$ . À luz desta abordagem, além da equação fundamental, a energia livre do sistema pode ser simultaneamente descrita pela de um sistema livre de partículas com massas  $m_j(T, n_b)$  e potenciais químicos efetivos  $\mu_j^*$  à temperatura  $T$ . Assim, pode-se escrever

$$F = \Omega_0(T, \{\mu_j^*\}, \{m_j\}) + \sum_i \mu_i^* n_i, \quad (38)$$

onde  $\Omega_0$  é a densidade de potencial termodinâmico de um sistema livre com partículas de massas  $m_j$  e potenciais químicos efetivos  $\mu_j^*$ . A presença dos potenciais químicos efetivos serve ao propósito de garantir a consistência termodinâmica, sendo que a relação entre os potenciais químicos reais e efetivos será futuramente mostrada de forma explícita. Ao descrever o sistema dessa forma, é importante notar que os momentos de Fermi, denotados  $p_{Fj}$ , serão conectados aos potenciais químicos efetivos, e não aos reais. Assim, deve-se sempre levar em consideração a relação dada por  $p_{Fj} = \sqrt{\mu_j^{*2} - m_j^2}$ .

Diferenciando a eq. (38), obtém-se

$$d\Omega_0 = dF - \sum_i \mu_i^* dn_i - \sum_i n_i d\mu_i^*, \quad (39)$$

que leva diretamente à maneira como escolhemos conectar os potenciais químicos efetivos às densidades de partículas

$$n_i = -\frac{\partial \Omega_0}{\partial \mu_i^*}. \quad (40)$$

Para obter as grandezas termodinâmicas em termos dos potenciais químicos efetivos, pode-se reescrever a eq. (39) como

$$dF = d\Omega_0 + \sum_i \mu_i^* dn_i + \sum_i n_i d\mu_i^*. \quad (41)$$

Observando os argumentos de  $\Omega_0$  e  $m_j$ , pode-se escrever

$$d\Omega_0 = \frac{\partial \Omega_0}{\partial T} dT + \sum_i \frac{\partial \Omega_0}{\partial \mu_i^*} d\mu_i^* + \sum_j \frac{\partial \Omega_0}{\partial m_j} dm_j \quad (42)$$

e

$$dm_j = \frac{\partial m_j}{\partial T} dT + \sum_j \frac{\partial m_j}{\partial n_j} dn_j. \quad (43)$$

Fazendo uso das eqs. (40), (42) e (43), a eq. (41) se torna

$$dF = \left( \frac{\partial \Omega_0}{\partial T} + \sum_i \frac{\partial \Omega_0}{\partial m_j} \frac{\partial m_j}{\partial T} \right) dT + \sum_i \left( \mu_i^* + \sum_j \frac{\partial \Omega_0}{\partial m_j} \frac{\partial m_j}{\partial n_i} \right) dn_i. \quad (44)$$

Apesar da introdução dos potenciais químicos efetivos para garantir a consistência termodinâmica, todas as quantidades termodinâmicas devem ser consistentes com a equação fundamental, com potenciais químicos reais. Comparando o resultado da equação acima com a eq. (36), obtém-se diretamente a relação entre os potenciais químicos reais e os efetivos

$$\mu_i = \mu_i^* + \sum_j \frac{\partial \Omega_0}{\partial m_j} \frac{\partial m_j}{\partial n_i}, \quad (45)$$

além da densidade de entropia

$$S = -\frac{\partial \Omega_0}{\partial T} - \sum_i \frac{\partial \Omega_0}{\partial m_j} \frac{\partial m_j}{\partial T}. \quad (46)$$

A pressão pode ser obtida substituindo a eq. (38) em (37), o que dá

$$P = -\Omega_0 + \sum_i (\mu_i - \mu_i^*) n_i \quad (47)$$

$$= -\Omega_0 + \sum_{i,j} \frac{\partial \Omega_0}{\partial m_j} n_i \frac{\partial m_j}{\partial n_i}. \quad (48)$$

A densidade de energia pode ser obtida substituindo as eqs. (46) e (38) na relação  $E = F + TS$ , de modo que

$$E = \Omega_0 - \sum_i \mu_i^* \frac{\partial \Omega_0}{\partial \mu_i^*} - T \frac{\partial \Omega_0}{\partial T} - T \sum_i \frac{\partial \Omega_0}{\partial m_j} \frac{\partial m_j}{\partial T}. \quad (49)$$

A relação entre a densidade de potencial termodinâmico e a densidade de energia livre é dada por

$$\Omega = F - \sum_i \mu_i n_i, \quad (50)$$

de modo que, similarmente ao feito para a pressão, pode-se escrever

$$\Omega = \Omega_0 - \sum_i (\mu_i - \mu_i^*) n_i \quad (51)$$

$$= \Omega_0 - \sum_{i,j} \frac{\partial \Omega_0}{\partial m_j} n_i \frac{\partial m_j}{\partial n_i}. \quad (52)$$

Como a eq. (48) é o exato oposto da eq. (52), é fácil notar que a relação fundamental  $P = -\Omega$  ainda é satisfeita. Além disso, pode-se diferenciar a eq. (50), obtendo-se

$$d\Omega = dF - \sum_i \mu_i dn_i - \sum_i n_i d\mu_i, \quad (53)$$

que, ao adicionar a eq. (36), resulta

$$d\Omega = -SdT - \sum_i n_i d\mu_i \quad (54)$$

$$= \frac{\partial \Omega}{\partial T} dT + \sum_i \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_i} d\mu_i. \quad (55)$$

Assim, obtém-se diretamente

$$n_i = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_i} = \frac{\partial P}{\partial \mu_i}, \quad (56)$$

que corresponde à maneira tradicional com que as densidades são conectadas aos potenciais químicos. Dessa forma, é trivial perceber que  $\Omega_0$  serve o propósito de uma quantidade intermediária. Apesar de os potenciais químicos efetivos serem introduzidos, todas as expressões obtidas da termodinâmica tradicional são plenamente satisfeitas com o desenvolvimento acima.

Utilizando a relação (13) como dependência da densidade na massa dos quarks, as expressões citadas acima podem ser simplificadas. Assim, é conveniente escrever a relação entre os potenciais químicos efetivos e reais como

$$\mu_i = \mu_i^* + \frac{1}{3} \frac{\partial m_l}{\partial n_b} \frac{\partial \Omega_0}{\partial m_l} \equiv \mu_i^* - \mu_l. \quad (57)$$

Dessa forma, os potenciais químicos reais equivalem aos efetivos somados a uma quantidade dependente da densidade, que é igual para todos os quarks. Assim, as condições de equilíbrio químico, dadas em (8), podem ser reescritas como

$$\mu_u^* + \mu_e = \mu_d^* = \mu_s^*. \quad (58)$$

Similarmente para a matéria puramente de quarks, a relação (11) pode ser reescrita como

$$\mu_u^* = \mu_d^* = \mu_s^*. \quad (59)$$

Por fim, a pressão também pode ser reescrita como

$$P = -\Omega_0 + n_b \frac{\partial m_l}{\partial n_b} \frac{\partial \Omega_0}{\partial m_l} \quad (60)$$

$$= -\Omega_0 = 3n_b \mu_l. \quad (61)$$

Analisando as expressões anteriores, é perceptível que a obtenção da EoS depende apenas da determinação de  $\Omega_0$ , o potencial termodinâmico de um gás de férmions livres. O tratamento termodinâmico de um gás de férmions livres está expresso cuidadosamente no Apêndice B. A expressão para  $\Omega_0$ , à uma temperatura finita  $T$ , é dada por

$$\Omega_0 = \sum_i -g_i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_i^2}} (f_+ + f_-), \quad (62)$$

onde  $f_+$  e  $f_-$  são respectivamente as distribuições de partículas e de antipartículas, tal como definido no Apêndice B. A integral pode ser resolvida analiticamente à temperatura zero, resultando em

$$\Omega_0(T = 0) = -\sum_i \frac{g_i}{24\pi^2} \left[ \mu_i^* \rho_{Fi} \left( p_{Fi}^2 - \frac{3}{2} m_i^2 \right) + \frac{3}{2} m_i^4 \ln \frac{\mu_i^* + \rho_{Fi}}{m_i} \right]. \quad (63)$$

Em ambos os casos,  $g_i$  é a degenerescência, sendo equivalente a 6 para o caso dos quarks (3 (cor) x 2 (spin)).

### 3.4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O formalismo apresentado, juntamente da conjectura de Bodmer-Witten, e das condições de matéria estelar e matéria puramente de quarks, foram utilizados para obtenção de resultados numéricos. No que segue, as massas de corrente dos quarks mais leves são sempre consideradas  $m_{u0} = 5$  MeV e  $m_{d0} = 10$  MeV, enquanto a do quark estranho varia dentro de diferentes cenários. Os valores das massas de corrente foram escolhidos para que os primeiros resultados pudessem ser facilmente comparados com o exposto em (XIA *et al.*, 2014). Apesar de tais valores não serem condizentes com dados experimentais atuais (ZYLA *et al.*, 2020), cabe salientar que a contribuição da massa de corrente para a massa total dos quarks é muito pequena, sendo geralmente duas ordens de grandeza menor do que a massa total. Além disso, como são consideradas grandes variações dos parâmetros livres do modelo, modificações na massa de corrente dos quarks mais leves não ocasionariam modificações consideráveis nos resultados apresentados.

### 3.4.1 Janela de estabilidade para $T = 0$

Figura 3 – A janela de estabilidade para matéria estelar considerando  $m_{s0} = 100$  MeV.

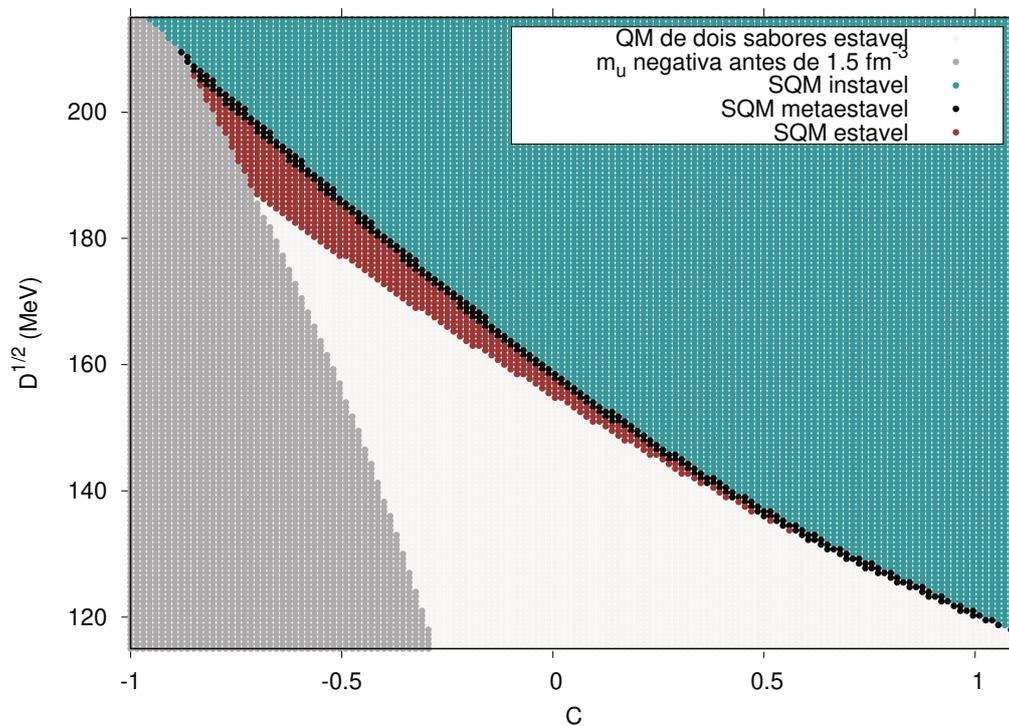


Figura 4 – A janela de estabilidade para matéria estelar considerando  $m_{s0} = 80$  MeV.

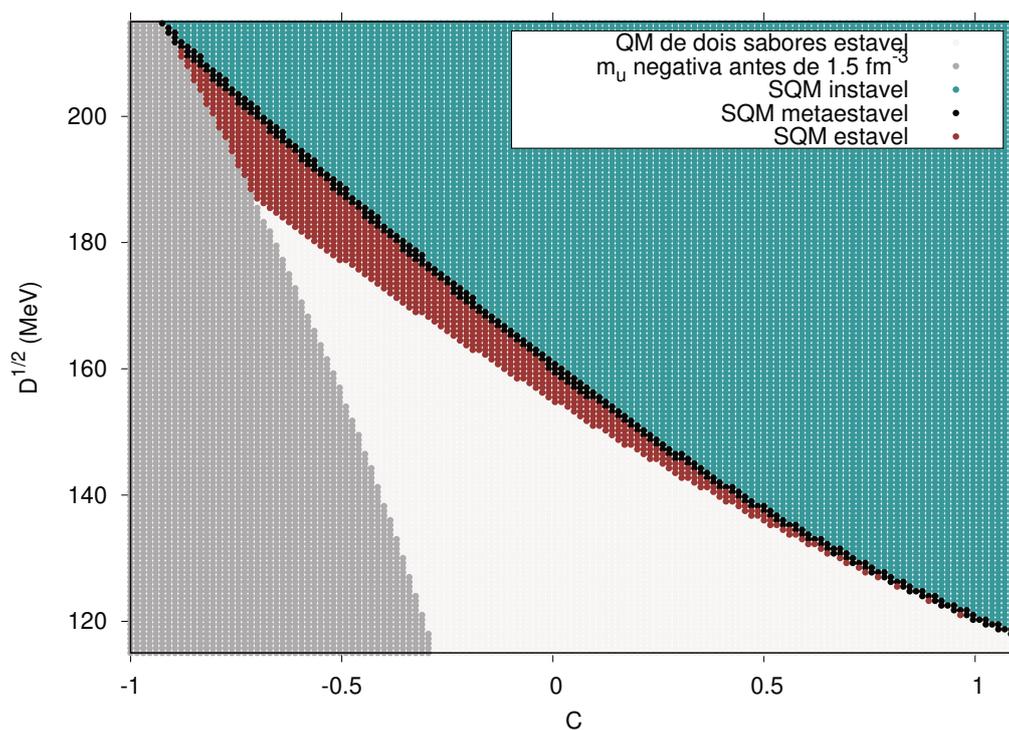


Figura 5 – A janela de estabilidade para matéria puramente de quarks considerando  $m_{s0} = 100$  MeV.

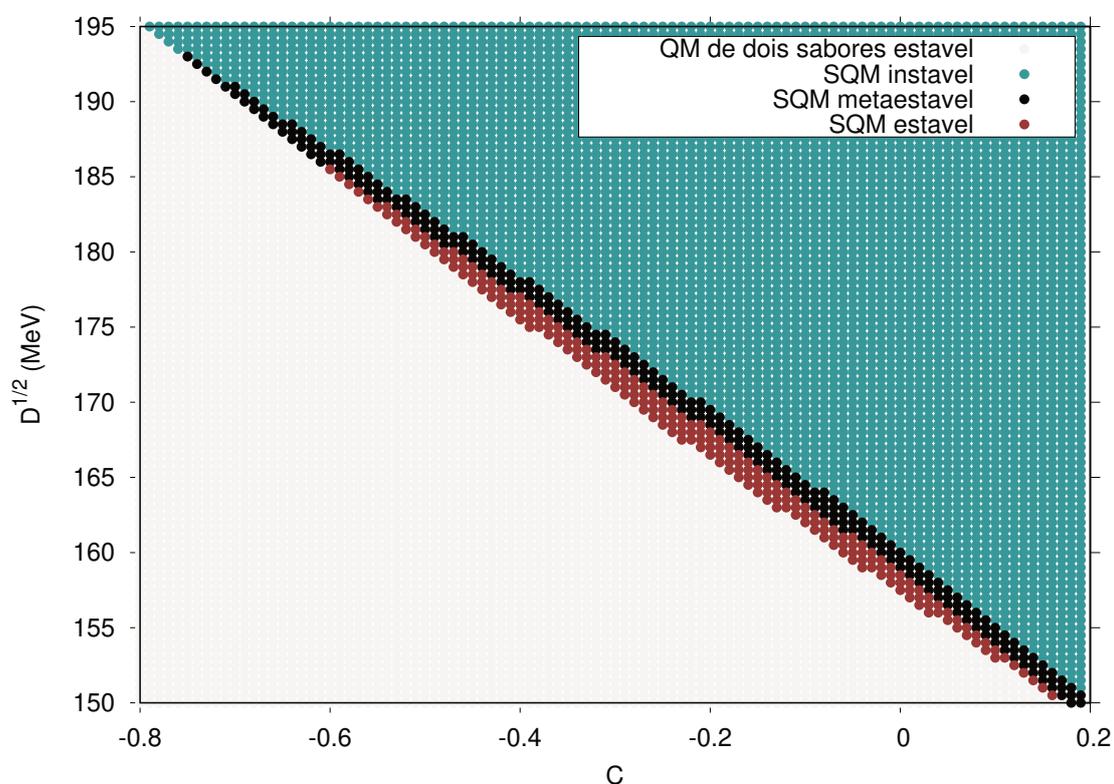
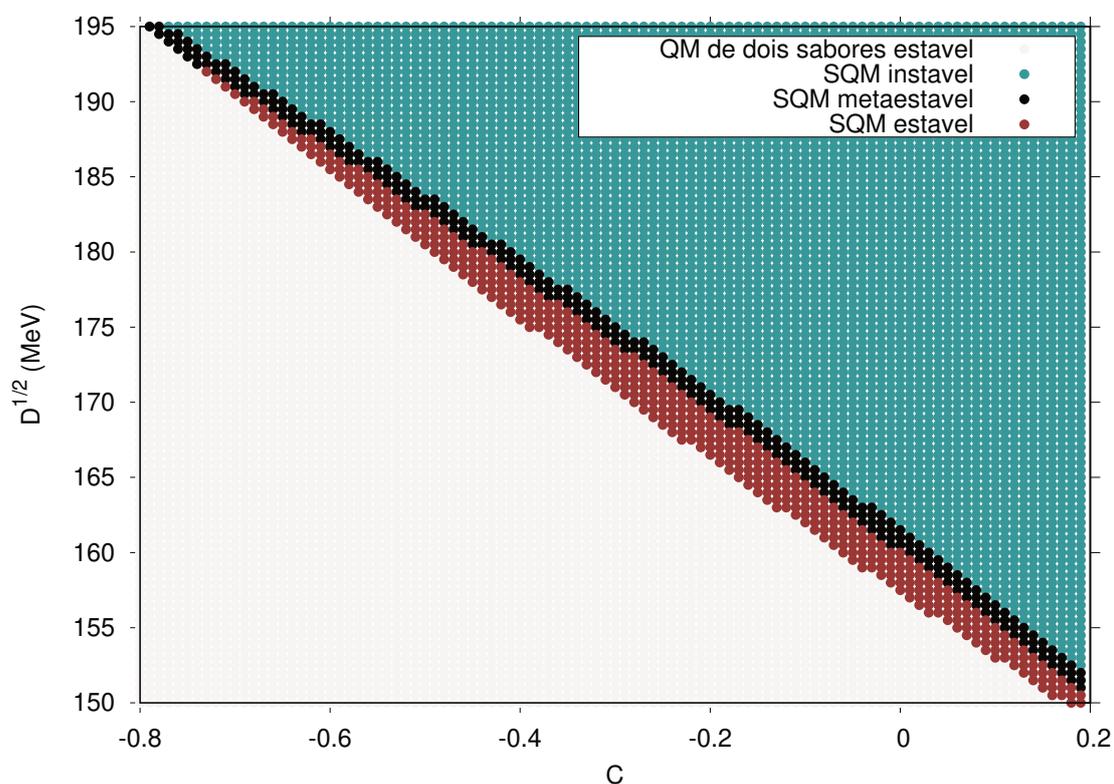


Figura 6 – A janela de estabilidade para matéria puramente de quarks considerando  $m_{s0} = 80$  MeV.



Ao calcular a energia por bárion tanto para a matéria estranha quanto para a matéria de quarks de dois sabores, é possível avaliar ambos os mínimos de acordo com a conjectura de Bodmer-Witten, como definida no Capítulo 2. Ao realizar tal procedimento para diversos valores dos parâmetros livres  $C$  e  $D$ , é possível construir uma janela de estabilidade, destacando os parâmetros para os quais a EoS satisfaz a eq. (1). Para realizar essa análise, nos limitamos ao caso de temperatura zero.

A janela de estabilidade para matéria estelar é apresentada nas Figuras 3 e 4 considerando  $m_{s0} = 100$  MeV e 80 MeV, respectivamente. A região cinza clara no inferior da janela de estabilidade representa os valores de  $C$  e  $D$  para os quais a matéria de quarks de dois sabores seria absolutamente estável, configurando uma região proibida, tal como discutido no Capítulo 2. A matéria estranha é considerada estável dentro da região amarronzada, metaestável na região preta, e instável na região verde. Ao comparar ambas as figuras, é possível notar que ao considerar valores menores de  $m_{s0}$ , um número maior de parâmetros livres satisfaz os critérios de estabilidade.

Ao analisar a eq. (13), é possível notar que para valores negativos de  $C$ , a massa dos quarks pode se tornar negativa em densidades suficientemente altas. Isso se torna particularmente importante no estudo de estrelas estranhas, já que densidades bastante altas podem ser atingidas em seu interior. Como uma massa negativa não possui qualquer significado físico, trata-se de um regime no qual o modelo não possui qualquer validade. Portanto, encontram-se segregados os parâmetros  $C$  e  $D$  nos quais a massa do quark  $u$  — o mais leve — se torna negativa em densidades inferiores a  $1.5 \text{ fm}^{-3}$ , cerca de dez vezes a densidade de saturação da matéria nuclear.

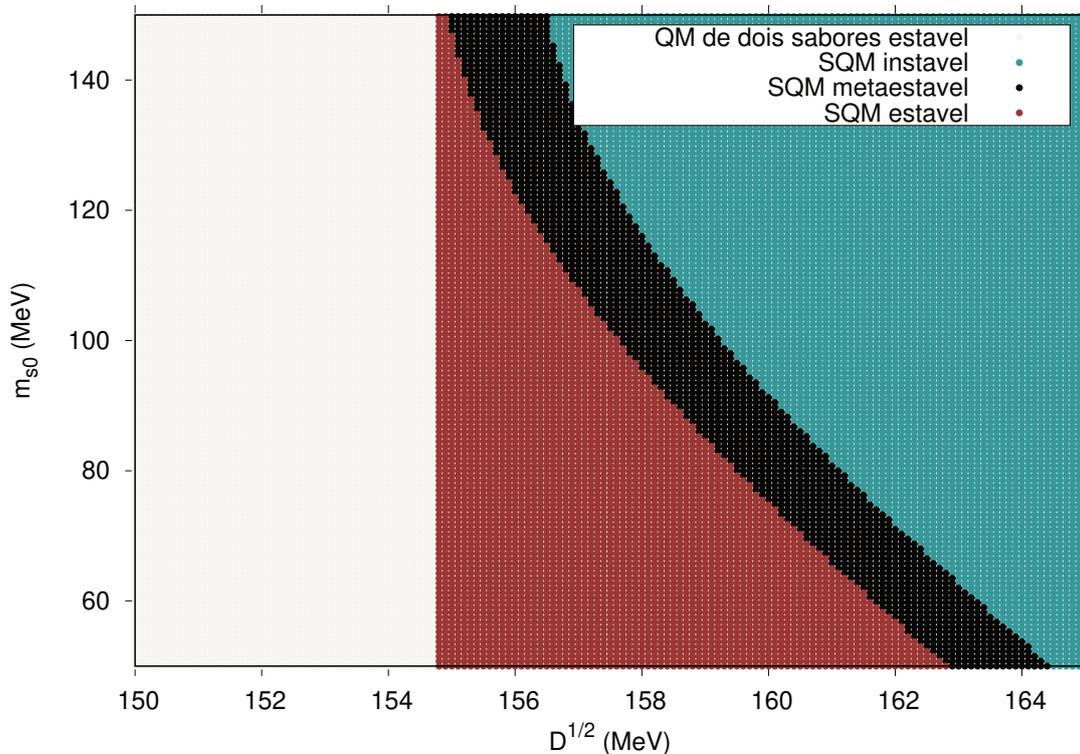
O resultado obtido para  $m_{s0} = 100$  MeV concorda com o resultado apresentado na literatura (XIA *et al.*, 2014), sendo a única adição a limitação do modelo para valores de  $C$  negativos.

A janela de estabilidade para matéria puramente de quarks é apresentada nas Figuras 5 e 6 tomando  $m_{s0} = 100$  MeV e 80 MeV, respectivamente. Similarmente à matéria estelar, a região cinza clara no inferior da janela de estabilidade representa os valores de  $C$  e  $D$  para os quais a matéria de quarks de dois sabores seria absolutamente estável, configurando uma região proibida. A matéria estranha é considerada estável dentro da região amarronzada, metaestável na região preta, e instável na região verde. É possível observar novamente que menores valores de  $m_{s0}$  possibilitam um conjunto maior de parâmetros  $C$  e  $D$  dentro da região de estabilidade da SQM.

É possível observar que, de um modo geral, os parâmetros que satisfazem a condição de estabilidade para matéria puramente de quarks, também o satisfazem para a matéria estelar. Isso vai de acordo com o que já havia sido explorado na literatura para o modelo de sacola do MIT e para a versão do modelo DDQM sem consistência termodinâmica (TORRES; MENEZES, 2013).

Como já observado nos exemplos anteriores, ao considerar diferentes valores

Figura 7 – A janela de estabilidade para matéria estelar. O parâmetro  $C$  é mantido fixo e igual a zero, a fim de observar como a janela de estabilidade muda com  $m_{s0}$ .



para a massa do quark estranho, a EoS é afetada. Dessa forma, também é de interesse mapear como a janela de estabilidade se modifica para diferentes valores da massa de corrente do quark estranho,  $m_{s0}$ . A fim de visualizar tal efeito com maior clareza, está exposta na Figura 7 a janela de estabilidade para a matéria estelar ao manter o parâmetro  $C$  fixo e igual a zero, permitindo que  $D$  e  $m_{s0}$  variem. Como previamente observado, é possível notar que menores valores de  $m_{s0}$  resultam em uma região de estabilidade mais ampla. Esse resultado também está de acordo com o exposto previamente para a versão sem consistência termodinâmica do modelo DDQM em (TORRES; MENEZES, 2013).

### 3.4.2 Equação de estado para $T = 0$

Tendo em vista a janela de estabilidade, se torna possível utilizar os conjuntos de parâmetros  $C$  e  $D$  estáveis para investigar a EoS de uma maneira mais profunda. Nos resultados que seguem, foi considerado o caso da matéria estelar e  $m_{s0} = 100$  MeV, mantendo a temperatura fixa e igual a zero.

Visando uma melhor análise da influência de cada um dos parâmetros, as equações de estado para matéria estelar estão dispostas em duas imagens distintas. Na Figura 8, manteve-se  $C$  fixo em  $-0.49$  enquanto o parâmetro  $D$  varia dentro dos

Figura 8 – Equação de estado mantendo  $C = -0.49$ .

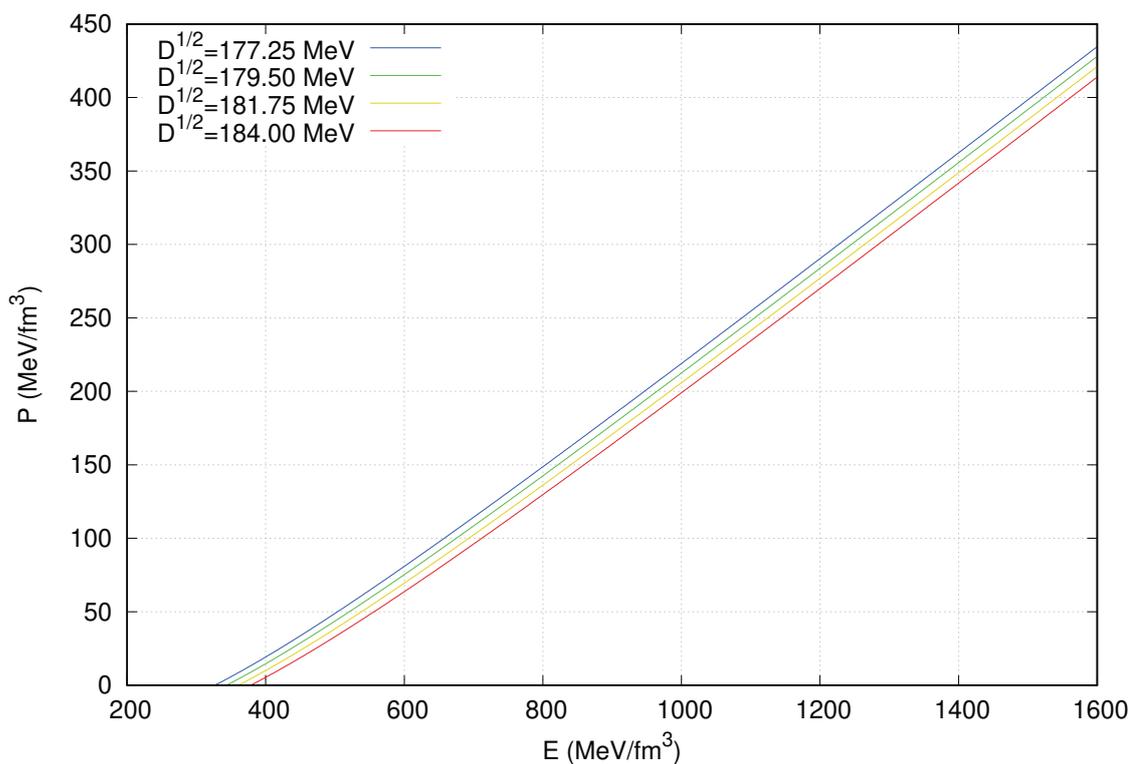


Figura 9 – Equação de estado mantendo  $\sqrt{D} = 187.75$  MeV.

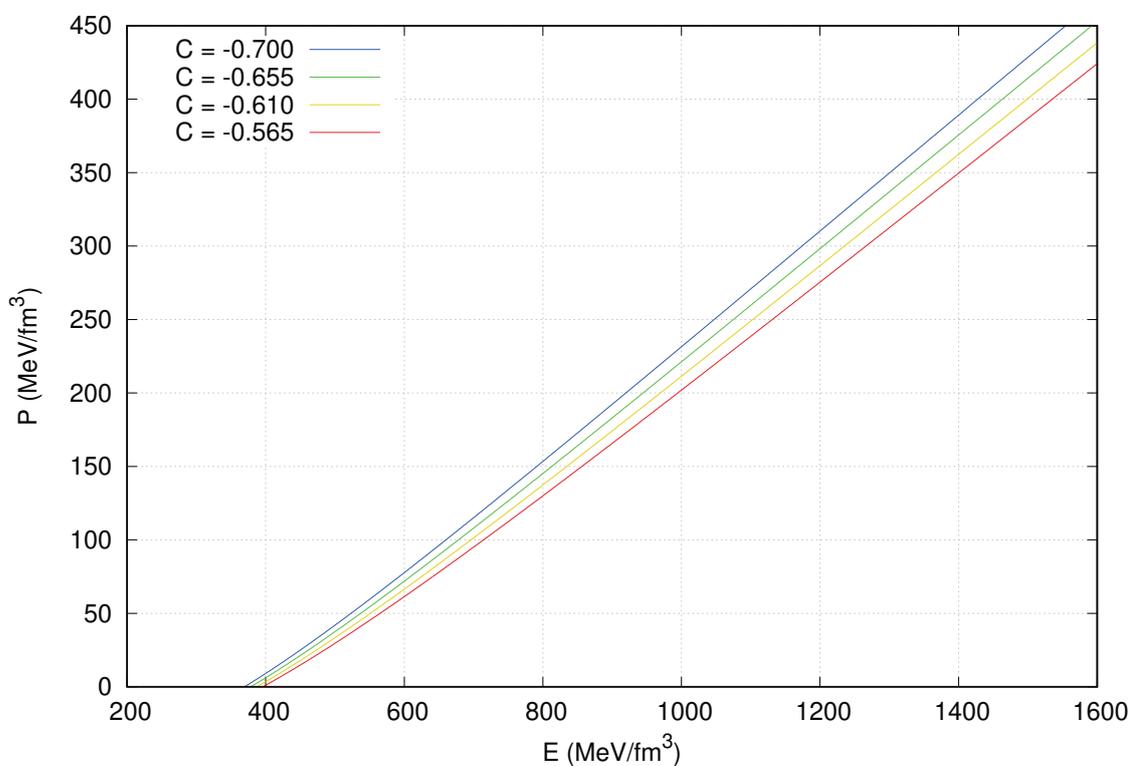


Figura 10 – Energia por bárion mantendo  $C = -0.49$ .

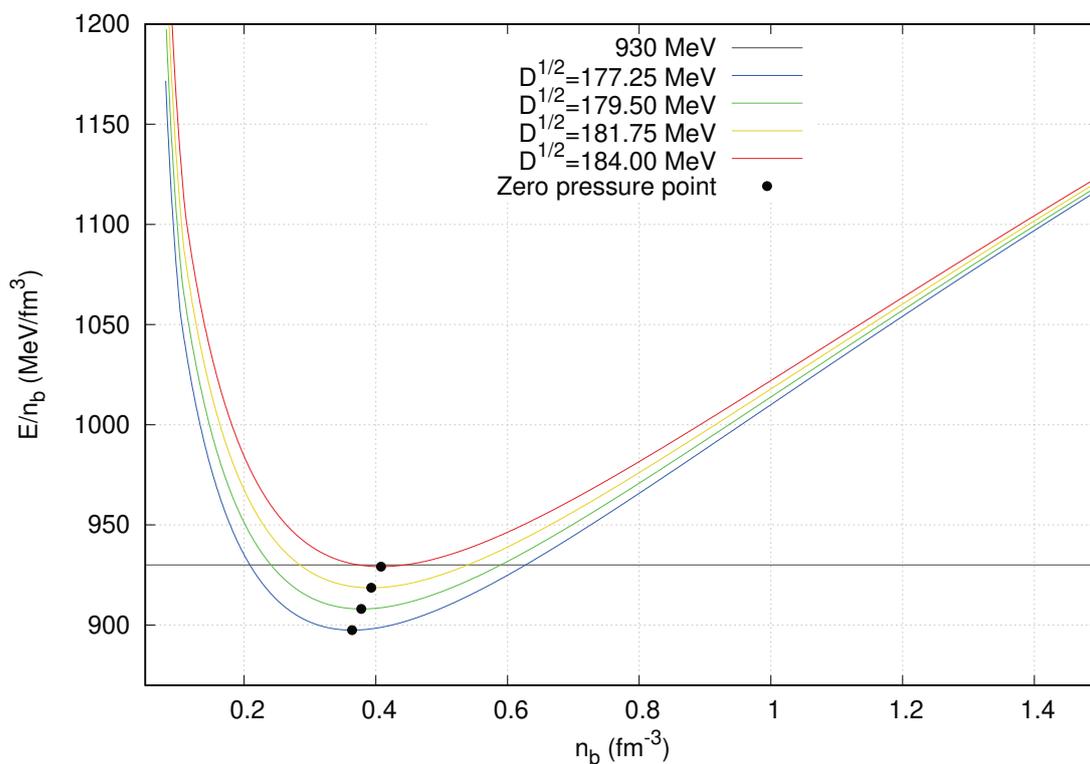
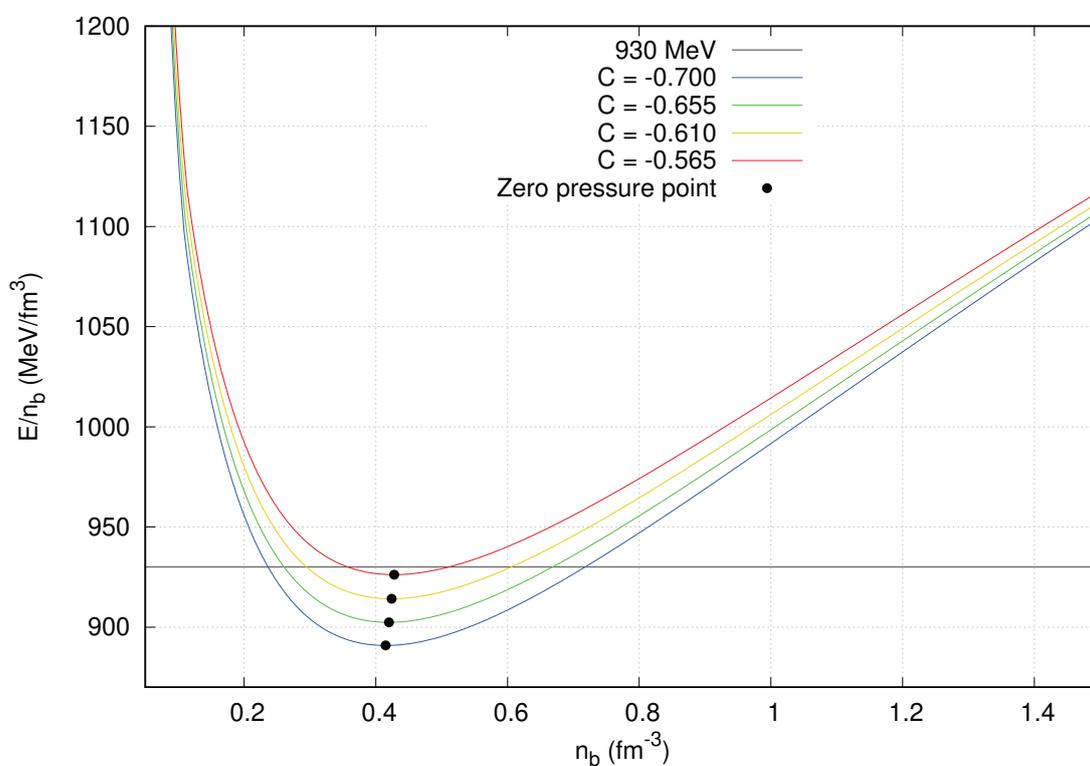


Figura 11 – Energia por bárion mantendo  $\sqrt{D} = 187.75 \text{ MeV}$ .



valores da janela de estabilidade. É possível ver que a EoS se torna mais dura — i.e., comporta uma maior pressão para o mesmo valor da densidade de energia — conforme o valor de  $D$  diminui. É possível também ver que, limitando o estudo à janela de estabilidade, o parâmetro  $D$  possui grande influência no ponto em que a pressão é nula.

De modo análogo, a Figura 9 apresenta a EoS para quatro valores distintos de  $C$  ao manter  $\sqrt{D}$  fixo em 187.75 MeV. É possível verificar que o parâmetro  $C$  não possui grande influência no ponto em que a pressão é nula. Além disso, é visível que a EoS se torna mais dura conforme  $C$  diminui. Todavia, caso se deseje obter uma EoS tão dura quanto for possível dentro da janela de estabilidade, deve-se ater à região de altos valores de  $C$ . Isso se deve ao fato de que a EoS também se torna mais dura conforme  $D$  diminui, e os menores valores de  $D$  dentro da janela de estabilidade estão acoplados a grandes parâmetros  $C$ .

Sendo a consistência termodinâmica uma das maiores vantagens da versão utilizada do modelo DDQM, convém checar graficamente se a relação dada em (34) é satisfeita. Para os mesmos parâmetros utilizados anteriormente, a energia por bárion está apresentada nas Figuras 10 e 11, mantendo  $C$  e  $D$  fixos, respectivamente. Em ambos os casos, o ponto de pressão zero é destacado, e se encontra no exato mínimo da curva, o que corresponde ao critério de consistência termodinâmica. Além disso, é possível checar visualmente que todos os mínimos se encontram abaixo de 930 MeV, como esperado de conjuntos de parâmetros que se encontram dentro da parte estável da janela de estabilidade. É possível verificar novamente que conforme o parâmetro  $D$  diminui, o ponto de pressão zero é deslocado para a esquerda, enquanto a variação é sutil para modificações no parâmetro  $C$ .

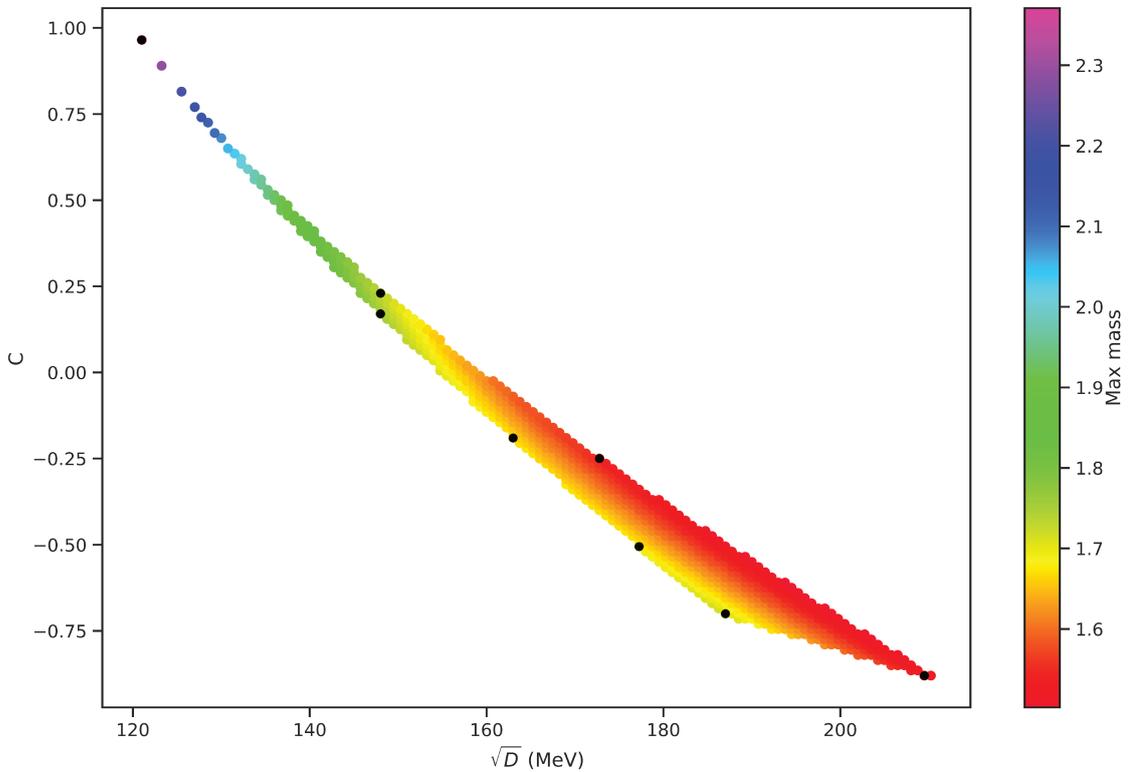
### 3.4.3 Estrelas estranhas

O modelo apresentado nesta seção é uma tentativa de descrever a matéria estranha em situações microscópicas. Apesar disso, como discutido no Capítulo 2, essa mesma física pode ser utilizada para a descrição de estrelas estranhas em equilíbrio hidrostático, ou mesmo a descrição de quarks desconfiados no caroço de estrelas híbridas. Para realizar este estudo, o primeiro passo é impor as condições de neutralidade de carga e equilíbrio químico, dadas pelas eqs. (8) e (9) para calcular a equação de estado para a SQM. Em sequência, numericamente resolvemos as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) (TOLMAN, 1939; OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939), que realizam a ponte entre a microfísica da EoS e as propriedades macroscópicas de uma estrela. Utilizando a EoS como *input*, a solução da TOV dá as principais propriedades de estrelas estranhas, em particular, o diagrama massa-raio para uma família de estrelas estranhas em equilíbrio hidrostático.

Na última década, estrelas de nêutrons bastante massivas foram detectadas.

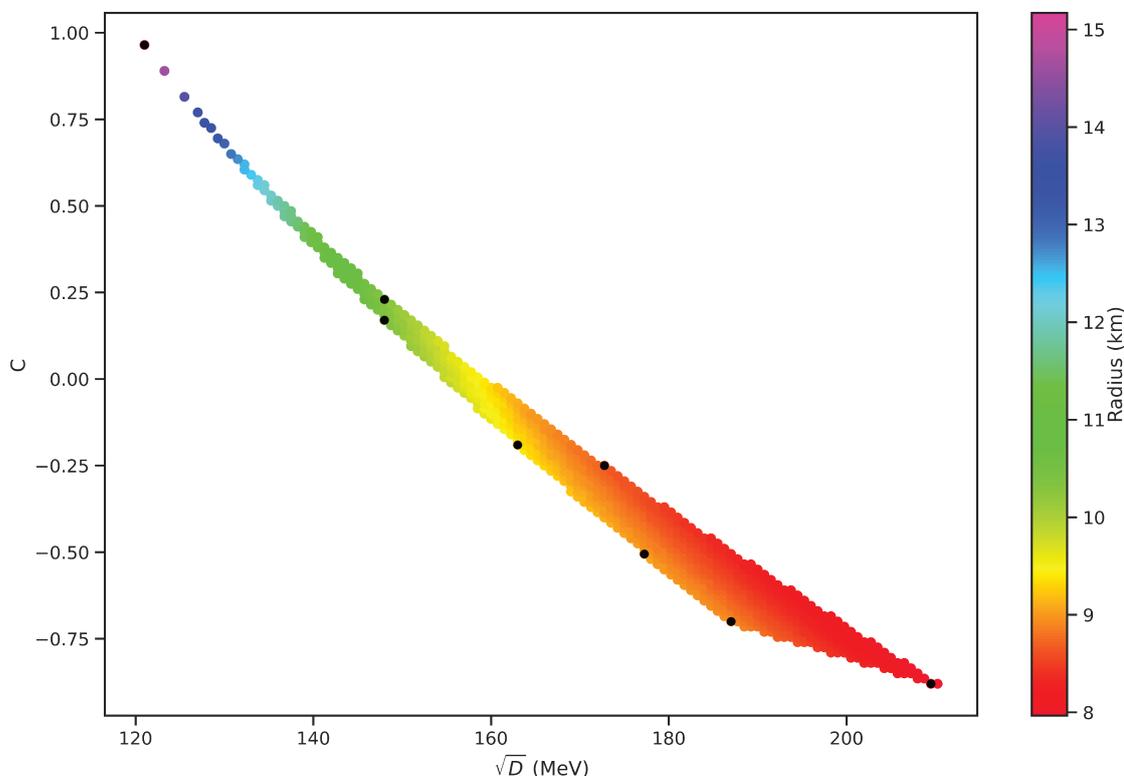
Exemplos são as estrelas de nêutrons J1614-2230 (DEMOREST; PENNUCCI; RANSOM *et al.*, 2010) e J0348+0432 (ANTONIADIS *et al.*, 2013), com massas próximas a  $2 M_{\odot}$ , ou possivelmente atingindo  $2.15 M_{\odot}$  no caso da J0740+6620 (CROMARTIE; FONSECA; RANSOM *et al.*, 2020; MILLER *et al.*, 2021). Sendo as estrelas estranhas um dos candidatos para descrever tais objetos compactos, é de interesse verificar quais as massas máximas obtidas pelo modelo DDQM.

Figura 12 – Massa máxima de uma estrela estranha obtida para todos os valores da janela de estabilidade, considerando  $m_{s0} = 80$  MeV. Os pontos pretos correspondem aos parâmetros indicados na Tabela 2. Figura extraída de (BACKES; HAFEMANN *et al.*, 2021).



As diferenças obtidas entre as massas máximas do modelo dependem apenas da escolha dos parâmetros livres  $C$  e  $D$ . É sabido que quanto mais dura for a EoS, mais alta será a massa máxima obtida a partir da TOV. Pelo discutido anteriormente, é de se esperar que para valores fixos de  $D$ , se obtenha massas maiores conforme  $C$  diminui, e, para valores fixos de  $C$ , se obtenha massas maiores conforme  $D$  diminui. Ambos os comportamentos podem ser observados na Figura 12, onde as massas máximas são apresentadas para todos os parâmetros da janela de estabilidade. É possível notar também que as maiores massas obtidas estão na região na qual o parâmetro perturbativo  $C$  é maior. Como discutido na seção anterior, isso ocorre devido ao fato de que nesta região da janela de estabilidade, estão também os menores valores de  $D$ . Os valores obtidos para os conjuntos de parâmetros destacados em preto podem ser visualizados na Tabela 2, sendo que o maior valor é de  $2.37 M_{\odot}$ .

Figura 13 – Raio da estrela estranha de massa máxima, obtido para todos os valores da janela de estabilidade, considerando  $m_{s0} = 80$  MeV. Os pontos pretos correspondem aos parâmetros indicados na Tabela 2. Figura extraída de (BACKES; HAFEMANN *et al.*, 2021).



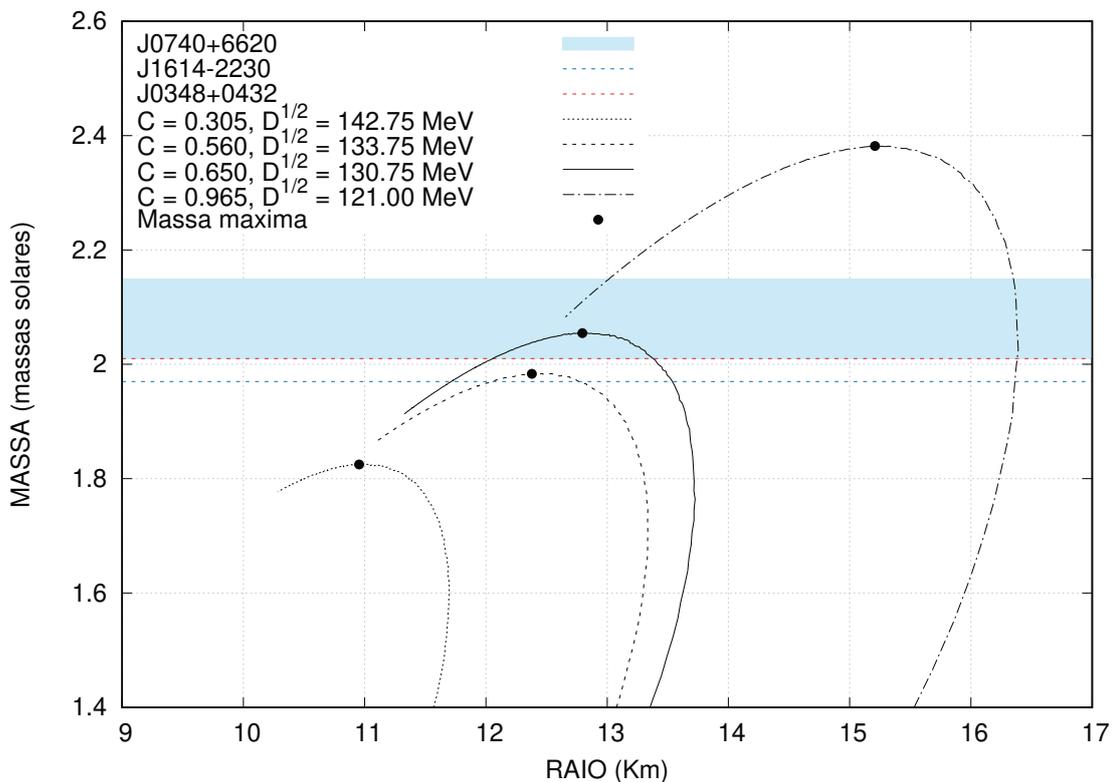
Outro dado astrofísico importante é o raio da estrela de nêutrons canônica, a que possui uma massa de  $1.4 M_{\odot}$ . A colaboração entre LIGO e Virgo sugere, baseada na polarizabilidade de maré das estrelas canônicas, que seus raios devam estar entre 10.5 e 13.4 km (ABBOTT *et al.*, 2018). Em contrapartida, estudos recentes baseados no *merger* de estrelas de nêutrons binárias GW170817 impuseram maiores restrições à equação de estado da matéria estelar. Foi concluído que o raio da estrela canônica deve estar entre 10.4 km e 11.6 km, com 90% de credibilidade (CAPANO *et al.*, 2020). Por outro lado, novas informações oriundas do NICER apontam para uma estrela de nêutrons massiva com raio da ordem de  $12.35 \pm 0.75$  km, estimando que o raio da estrela canônica seja de  $12.45 \pm 0.65$  km (MILLER *et al.*, 2021). Outra estimativa é oriunda de análises do experimento PREX, implicando que o raio da estrela canônica deva estar entre 13.25 e 14.26 km (REED *et al.*, 2021). Assim, o tamanho de tais objetos compactos ainda é fonte de discussões e incertezas.

Os raios da estrela estranha de massa máxima estão expostos na Figura 13 para todos os parâmetros da janela de estabilidade. Os dados dos parâmetros destacados em preto também estão dispostos na Tabela 2, junto do raio da estrela canônica. É possível notar que o raio da estrela canônica é sempre maior que o da estrela de massa máxima. Para grande parte da janela de estabilidade, os raios são bastante

pequenos, mas na região de massas máximas altas, os raios da estrela canônica são bastante grandes, podendo chegar a 15.53 km para a estrela de massa  $2.37 M_{\odot}$ . Comparando os resultados das Figuras 12 e 13, é possível ver que dentro da janela de estabilidade há regiões com grande variação na massa máxima nas quais o raio se mantém praticamente inalterado.

Os resultados obtidos mostram que modelo DDQM é capaz de obter massas máximas superiores ao modelo do MIT (TORRES; MENEZES, 2013), um dos mais utilizados para descrever matéria de quarks. Apesar disso, o modelo não é capaz de satisfazer simultaneamente os critérios de massas estelares altas e de baixos raios para a estrela canônica sugeridos em (CAPANO *et al.*, 2020). Analisando simultaneamente as Figuras 12 e 13, é possível notar que há regiões dentro da janela de estabilidade capazes de satisfazer simultaneamente massas altas e raios da estrela canônica previstos em (ABBOTT *et al.*, 2018), (MILLER *et al.*, 2021) e (REED *et al.*, 2021).

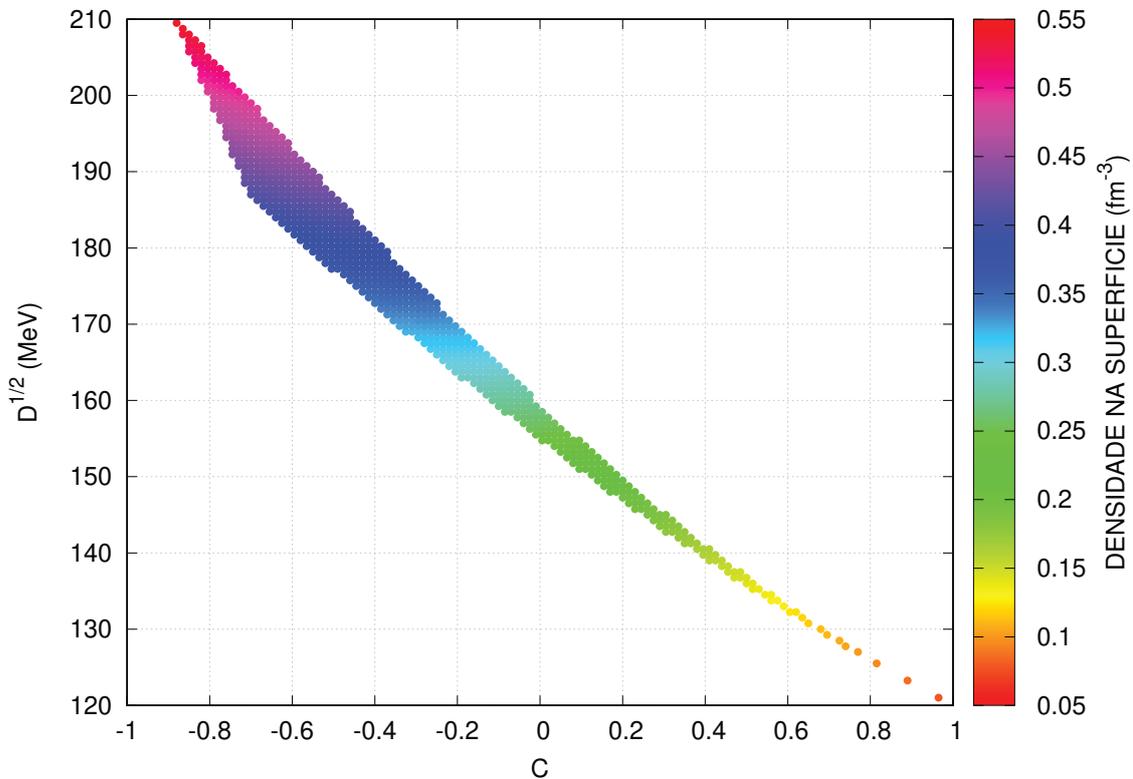
Figura 14 – Diagrama massa-raio para diferentes conjuntos de parâmetros, considerando  $m_{s0} = 80$  MeV.



O diagrama massa-raio para alguns conjuntos de parâmetros está disposto na Figura 14, na qual as massas máximas estão destacadas com pontos pretos. Dados experimentais estão representados no diagrama pelas linhas horizontais, correspondendo às massas máximas das estrelas J1614-2230 (DEMOREST; PENNUCCI; RANSOM *et al.*, 2010) e J0348+0432 (ANTONIADIS *et al.*, 2013), enquanto a região

sombreada representa o limite da massa da J0740+6620 (CROMARTIE; FONSECA; RANSOM *et al.*, 2020) com 95.4% de credibilidade. Como já exposto, o conjunto de parâmetros que possui maior massa é  $C = 0.965$  e  $\sqrt{D} = 121$  MeV, que dá uma massa máxima  $2.37 M_{\odot}$  com raio de 15.17 km. Entre os parâmetros que satisfazem a condição do raio da estrela canônica imposta em (CAPANO *et al.*, 2020), as maiores massas máximas são próximas de  $1.8 M_{\odot}$ , com um dos melhores conjuntos de parâmetros sendo  $C = 0.305$ ,  $\sqrt{D} = 142.75$  MeV, resultando em uma massa máxima de  $1.83 M_{\odot}$  com  $R_{1.4}$  de 11.57 km. Todavia, ao considerarmos apenas as outras possíveis restrições ao raio da estrela canônica, é possível simultaneamente obter raios adequados e massas altas. Um possível exemplo é o conjunto de parâmetros  $C = 0.65$  e  $\sqrt{D} = 130.65$  MeV, que resulta em  $R_{1.4}$  de 13.35 km, condizente com duas das imposições (REED *et al.*, 2021; ABBOTT *et al.*, 2018), e uma massa máxima de  $2.05 M_{\odot}$ . Já o conjunto de parâmetros  $C = 0.56$  e  $\sqrt{D} = 133.75$  MeV gera um  $R_{1.4}$  de 13.07 km, condizente com outras duas estimativas (ABBOTT *et al.*, 2018; MILLER *et al.*, 2021), enquanto a massa máxima é de  $1.98 M_{\odot}$ .

Figura 15 – Densidade na superfície de uma estrela estranha para todos os valores da janela de estabilidade, considerando  $m_{s0} = 80$  MeV.



Outra análise que pode ser feita diz respeito à densidade na superfície da estrela, que corresponde à densidade na qual a pressão é exatamente zero. Como discutido anteriormente, esse ponto se desloca para menores densidades conforme  $C$  e  $D$  diminuem. A densidade na superfície ( $n_{sup}$ ) para todos os parâmetros da janela

$C$	$\sqrt{D}$ (MeV)	$M_{max}$ ( $M_{\odot}$ )	$R$ (km)	$R_{1.4}$ (km)	$n_{sup}$ ( $\text{fm}^{-3}$ )
-0.880	209.50	1.52	8.01	8.11	0.540
-0.700	187.00	1.72	8.94	9.18	0.409
-0.505	177.25	1.69	9.03	9.39	0.365
-0.250	172.75	1.54	8.68	9.06	0.347
-0.190	163.00	1.68	9.42	9.90	0.291
0.170	148.00	1.76	10.45	11.00	0.207
0.230	148.00	1.73	10.35	10.92	0.204
0.965	121.00	2.37	15.17	15.53	0.078

Tabela 2 – O raio da estrela de  $1.4 M_{\odot}$  ( $R_{1.4}$ ), a densidade na superfície de estrelas estranhas ( $n_{sup}$ ), além das massas máximas ( $M_{max}$ ) e seus respectivos raios ( $R$ ) para estrelas estranhas obtidas ao integrar a TOV com EoS utilizando parâmetros  $C$  e  $D$  ao longo das bordas da região estável da Figura 4, com  $m_{s0} = 80$  MeV.

de estabilidade está disposta na Figura 15. É possível ver que para grandes valores do parâmetro perturbativo  $C$ , a densidade na superfície da estrela se torna bastante baixa. Para valores de  $C < \approx 0.5$ ,  $n_{sup}$  chega a ser menor que a densidade de saturação da matéria nuclear. Como sabe-se que em densidades tão baixas os quarks devem se encontrar confinados, esse é um sinal claro para que haja transição de fases. Apesar de não caber ao escopo deste trabalho, uma análise mais aprofundada da situação foi realizada e está disponível em (BACKES; MARQUEZ; MENEZES, 2021).

Na Tabela 2, está disposto um resumo dos os resultados obtidos nesta seção para parâmetros nas bordas da janela de estabilidade. Para tais parâmetros, estão demarcados os valores das massas máximas, raio, raio da estrela canônica e densidade na superfície.

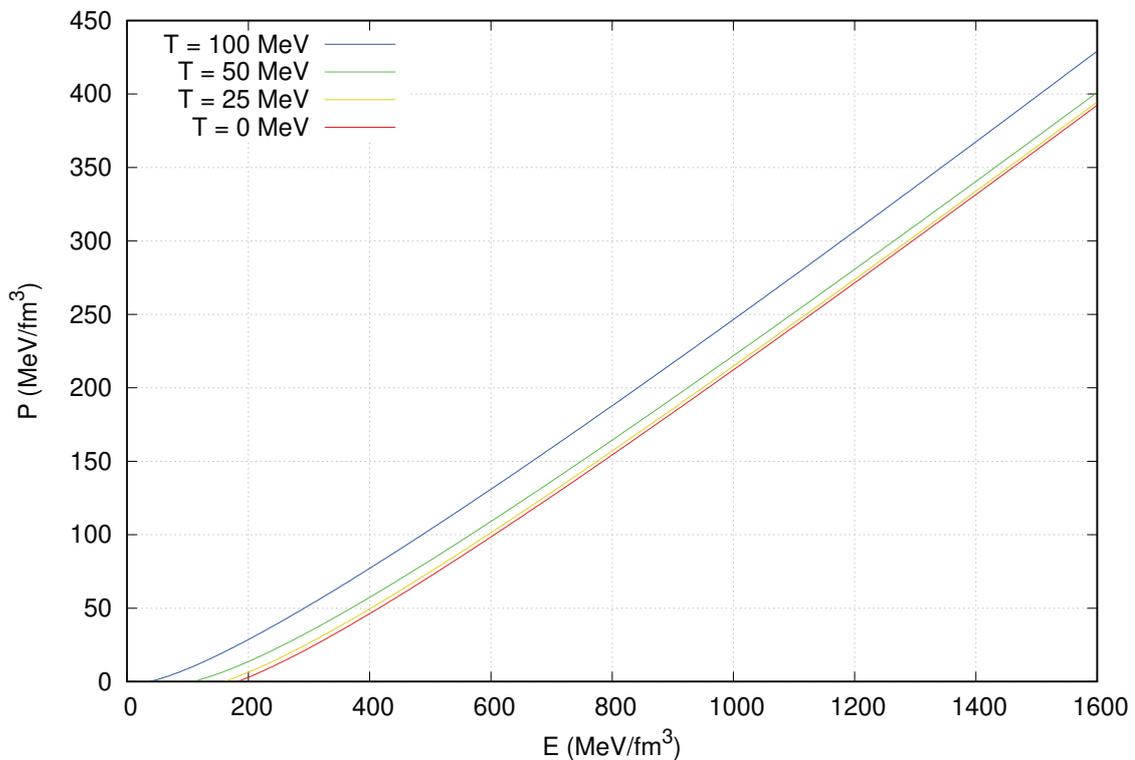
### 3.4.4 Equação de estado para temperatura finita

Dados os principais resultados obtidos fixando a temperatura em zero, resta aplicar o formalismo também para os casos de temperatura finita. Por simplicidade, os resultados apresentados se têm ao caso da matéria puramente de quarks.

Na Figura 16, a EoS é mostrada ao manter fixos os parâmetros  $C$  e  $D$  enquanto a temperatura varia. Para valores baixos de temperatura<sup>1</sup>, é possível ver que a diferença em relação ao resultado de  $T = 0$  é mínima. Todavia, conforme a temperatura considerada aumenta, a EoS se torna mais dura e o ponto de pressão zero se desloca em direção a energias mais baixas. Tal comportamento será discutido com maior cautela no Capítulo 5.

<sup>1</sup> São considerados valores baixos de temperatura aqueles para qual a energia térmica é desprezível diante da energia total das partículas. Também pode ser visto como o limite no qual a distribuição de antipartículas é negligenciável, tendendo a zero. No Apêndice B, o tema é discutido com maior profundidade.

Figura 16 – Equação de estado variando a temperatura, fixando  $C = 0.17$  e  $\sqrt{D} = 148$  MeV.



Apesar da consistência termodinâmica ter sido verificada para o caso de temperatura zero, convém verificar se a condição (34) também se mantém quando o modelo é estendido à temperatura finita. A energia livre por bárion para diferentes temperaturas é apresentada na Figura 17, mantendo  $C$  e  $D$  fixos. É possível verificar que o ponto em que a pressão é nula corresponde exatamente ao mínimo da energia livre por bárion, satisfazendo a condição de consistência termodinâmica. Além disso, também é possível verificar o que já havia sido observado na Figura 16, de que o ponto de pressão zero se desloca para a esquerda conforme a temperatura aumenta.

A título de comparação, a energia por bárion está disposta na Figura 18. Além dos valores numéricos diferirem, o ponto de pressão zero também é diferente em ambas as curvas, sendo que a energia livre por bárion é a que satisfaz a condição de consistência termodinâmica.

Quanto à janela e estabilidade no regime de temperatura finita, convém abordar o problema com cautela. Nesse regime, as condições de estabilidade da hipótese de Bodmer-Witten apresentadas no Capítulo 2 se modificam. Para que a matéria estranha seja absolutamente estável, a energia livre por bárion da matéria estranha deve ser menor que a do ferro, não a energia por bárion. Note que ambas as afirmações são equivalentes para  $T = 0$ , como  $F = E - TS$ . Enquanto é fácil observar que a energia livre por bárion diminui conforme a temperatura aumenta, de modo que a SQM seja mais

Figura 17 – Energia livre por bárion variando a temperatura, fixando  $C = 0.17$  e  $\sqrt{D} = 148$  MeV.

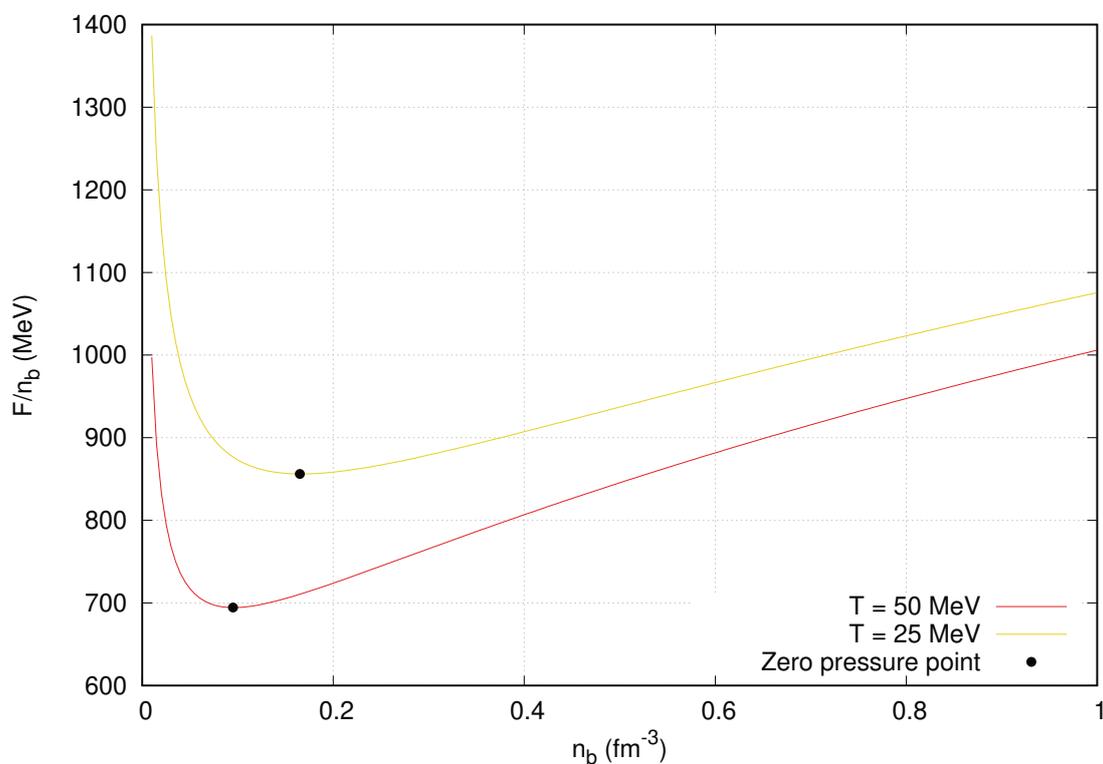
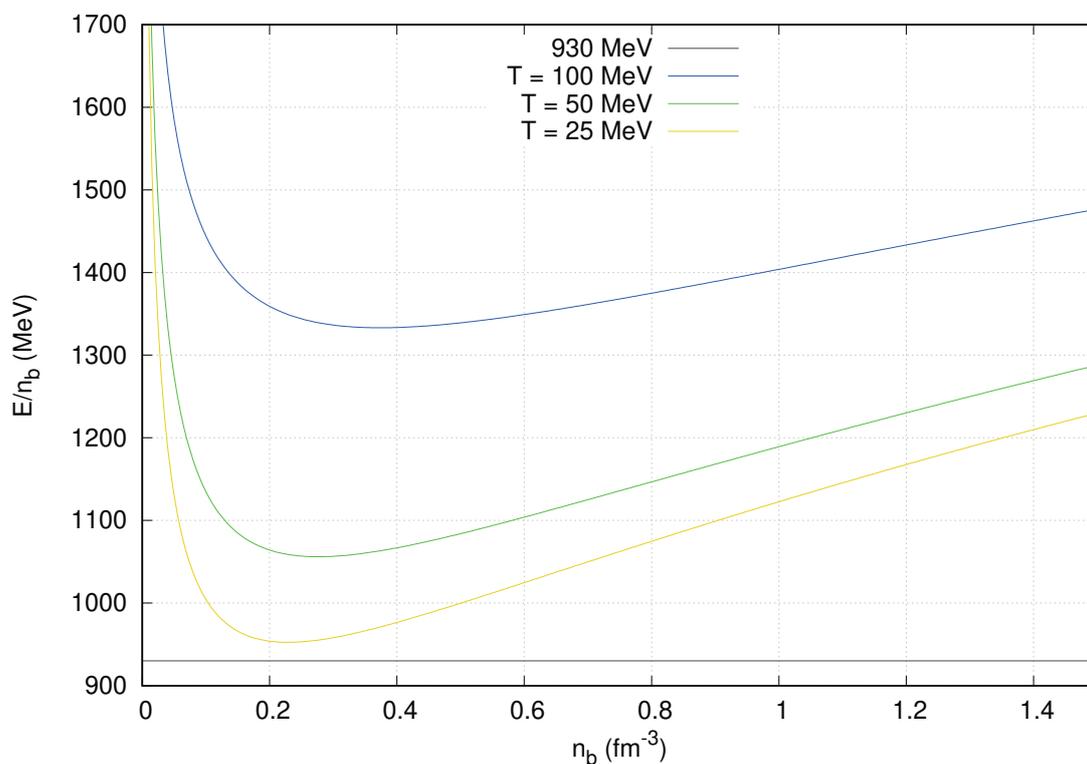


Figura 18 – Energia por bárion variando a temperatura, fixando  $C = 0.17$  e  $\sqrt{D} = 148$  MeV.



fortemente ligada, o mesmo acontece para a matéria de quarks de dois sabores. Como a 2QM não deve ser estável, uma construção completa da janela de estabilidade fora do regime de temperatura nula é um assunto que deve ser tratado com maior cuidado.

A construção completa das janelas de estabilidade para diferentes valores de temperatura foge das pretensões deste trabalho. Contudo, convém mencionar que conforme a temperatura se eleva, os parâmetros que devem satisfazer a condição de estabilidade são aqueles de maior  $D$  em relação aos de temperatura zero, de modo análogo ao que ocorre com o modelo do MIT (TORRES, 2016).

No Capítulo 5, a EoS de quarks com temperatura finita será aplicada ao estudo do diagrama de fases da QCD. Assim, convém mencionar que embora os parâmetros condizentes com a janela de estabilidade à temperatura nula sejam mencionados, tal resultado não deve ser levado de maneira rigorosa ao considerar o regime de temperatura finita.

## 4 MODELO DE QUARKS NA PRESENÇA DE CAMPO MAGNÉTICO

Duas situações nas quais se espera encontrar matéria de quarks desconfinados são o interior de estrelas de nêutrons massivas e durante alguns estágios da colisão de íons pesados. Ambos os cenários possuem campos magnéticos extremamente altos, da ordem de  $10^{18}$  G no interior de magnetares (estrelas de nêutrons com campo magnético extremamente alto) (CHATTERJEE; NOVAK; OERTEL, 2019) e em colisões de íons pesados (ZHONG *et al.*, 2014). Dessa forma, se torna necessária a descrição adequada da matéria de quarks na presença de tais campos. De maneira simplificada, abordaremos o problema como o de matéria homogênea permeada por um campo magnético constante. Durante este trabalho, adaptamos ao modelo DDQM uma maneira de introduzir a presença de um campo magnético externo. Primeiramente, será apresentado o desenvolvimento teórico dessa abordagem. Em sequência, introduziremos os resultados obtidos. Por fim, serão discutidas as limitações da abordagem inicial adotada.

### 4.1 FORMALISMO

Similarmente ao que ocorre com a matéria de quarks desmagnetizada, a consistência termodinâmica também precisa ser tratada com cautela ao se introduzir o campo magnético no modelo com dependência da densidade. O procedimento apresentado a seguir é similar ao apresentado no Capítulo 3 para matéria desmagnetizada, seguindo também a mesma linha do que foi desenvolvido em (ISAYEV, 2015) para a introdução de um campo magnético externo no modelo do MIT com dependência da densidade.

Para tal, estudaremos a matéria de quarks magnetizada como sendo uma matéria uniforme, homogênea e permeada por um campo magnético externo  $B$ . Partimos então da equação fundamental da termodinâmica na forma diferencial

$$dF_m = -SdT + \sum_i \mu_i dn_i, \quad (64)$$

onde  $F_m$  é a contribuição da matéria para a densidade de energia livre do sistema,  $\mu_i$  seguem sendo os potenciais químicos reais das partículas,  $n_i$  as densidades de partículas,  $S$  a densidade de entropia e  $T$  a temperatura.

Novamente, adotamos a introdução de potenciais químicos efetivos como uma forma de conquistar a consistência termodinâmica, como feito para matéria desmagnetizada em (PENG; LI; LOMBARDO, 2008). À luz dessa abordagem, a densidade de energia livre pode ser vista como a mesma de um sistema de partículas livres, cujas massas das partículas são  $m_i(n_i)$  e os potenciais químicos são equivalentes aos

efetivos,  $\mu_i^*$

$$F_m = \Omega_m^0(\{\mu_i^*\}, m_j, B, T) + \sum_i \mu_i^* n_i, \quad (65)$$

onde  $\Omega_m^0$  é a contribuição da matéria para o potencial termodinâmica de um sistema livre na presença de campo magnético externo. Para um valor fixo de  $B$ , a forma diferencial da Eq. (65) é

$$dF_m = d\Omega_m^0 + \sum_i \mu_i^* dn_i + \sum_i n_i d\mu_i^*. \quad (66)$$

Explicitamente, podemos escrever  $d\Omega_m^0$  como

$$d\Omega_m^0 = \frac{\partial \Omega_m^0}{\partial T} dT + \sum_i \frac{\partial \Omega_m^0}{\partial \mu_i^*} d\mu_i^* + \sum_i \frac{\partial \Omega_m^0}{\partial m_j} dm_j \quad (67)$$

onde

$$dm_j = \sum_j \frac{\partial m_j}{\partial n_j} dn_j + \frac{\partial m_j}{\partial T} dT, \quad (68)$$

e as densidades estão conectadas aos potenciais químicos efetivos por

$$n_i = -\frac{\partial \Omega_m^0}{\partial \mu_i^*} \quad (69)$$

para garantir a consistência termodinâmica, similar ao exposto no capítulo 3.

A Eq. (66) pode então ser reescrita como

$$dF_m = \left( \frac{\partial \Omega_m^0}{\partial T} + \sum_i \frac{\partial \Omega_m^0}{\partial m_j} \frac{\partial m_j}{\partial T} \right) dT + \sum_i \left( \mu_i^* + \sum_j \frac{\partial \Omega_m^0}{\partial m_j} \frac{\partial m_j}{\partial n_i} \right) dn_i, \quad (70)$$

que deve ser consistente com a equação fundamental. Comparando as equações (64) e (70), obtém-se a relação que conecta os potenciais químicos reais aos efetivos

$$\mu_i = \mu_i^* + \sum_j \frac{\partial \Omega_m^0}{\partial m_j} \frac{\partial m_j}{\partial n_i}, \quad (71)$$

além da densidade de entropia

$$S = -\frac{\partial \Omega_m^0}{\partial T} - \sum_i \frac{\partial \Omega_m^0}{\partial m_j} \frac{\partial m_j}{\partial T}. \quad (72)$$

Considerando a matéria de quarks magnetizados como um gás isotrópico, da termodinâmica temos que a contribuição da matéria para a pressão,  $P_m$ , é dada por

$$P_m = -F_m + \sum_i \mu_i n_i. \quad (73)$$

A introdução de potenciais químicos efetivos através da Eq. (65) dá

$$\begin{aligned} P_m &= -\Omega_m^0 + \sum_i (\mu_i - \mu_i^*) n_i \\ &= -\Omega_m^0 + \sum_{i,j} \frac{\partial \Omega_m^0}{\partial m_j} n_i \frac{\partial m_j}{\partial n_i}. \end{aligned} \quad (74)$$

Pode-se notar que, da termodinâmica, é possível escrever a contribuição da matéria para o potencial termodinâmico,  $\Omega_m$ , como

$$\Omega_m = F_m - \sum_i \mu_i n_i, \quad (75)$$

mais uma vez introduzindo os potenciais químicos efetivos através da Eq. (65), resulta

$$\Omega_m = \Omega_m^0 - \sum_i (\mu_i - \mu_i^*) n_i, \quad (76)$$

de modo que a relação fundamental  $\Omega_m = -P_m$  ainda é válida, como esperado de um modelo termodinamicamente consistente.

A contribuição da matéria para a densidade de energia livre é dada simplesmente pela eq. (65), enquanto a contribuição da matéria para a densidade de energia pode ser obtida através da relação  $E_m = F_m + TS$ , que resulta explicitamente em

$$E_m = \Omega_m^0 + \sum_i \mu_i^* n_i - \frac{\partial \Omega_m^0}{\partial T} T - \sum_i \frac{\partial \Omega_m^0}{\partial m_i} \frac{\partial m_i}{\partial T} T \quad (77)$$

A EoS do sistema pode então ser obtida tomando em consideração a contribuição do campo eletromagnético. Tal qual expresso no Apêndice C, em unidades naturais de Heaviside-Lorentz, a densidade de energia total  $E$  e a pressão  $P$  são dadas por

$$E = E_m + \frac{B^2}{2} \quad (78)$$

$$= \Omega_m^0 + \sum_i \mu_i^* n_i - \frac{\partial \Omega_m^0}{\partial T} T - \sum_i \frac{\partial \Omega_m^0}{\partial m_i} \frac{\partial m_i}{\partial T} T + \frac{B^2}{2} \quad (79)$$

e

$$P = P_m + \frac{B^2}{2} \quad (80)$$

$$= -\Omega_m^0 + \sum_{i,j} \frac{\partial \Omega_m^0}{\partial m_j} n_i \frac{\partial m_j}{\partial n_i} + \frac{B^2}{2}. \quad (81)$$

Caso seja considerado o caso de temperatura zero, a densidade de energia e a densidade de energia livre se tornam iguais, de modo que se pode reescrever a eq. (79) como

$$E(T = 0) = E_m(T = 0) + \frac{B^2}{2} \quad (82)$$

$$= \Omega_m^0 + \sum_i \mu_i^* n_i + \frac{B^2}{2}. \quad (83)$$

Tal como no formalismo para matéria desmagnetizada, é possível notar que as quantidades termodinâmicas normalmente podem ser computadas como um termo equivalente à contribuição de um gás ideal, com correções dependentes da densidade que são oriundas da introdução de potenciais químicos efetivos para recuperar a consistência termodinâmica. Para a obtenção completa da EoS, é necessária apenas a descrição adequada da contribuição da matéria para o potencial termodinâmico do gás de férmions livres. A expressão para  $\Omega_m^0$  à temperatura zero é dada por

$$\Omega_m^0(T = 0) = - \sum_{i,\nu} \frac{g_i(\nu)}{2\pi^2} |Q_{ej}| eB \frac{1}{2} \left[ \bar{p}_{Fi} \mu_i^* - \bar{m}_i^2 \ln \left| \frac{\bar{p}_{Fi} + \mu_i^*}{\bar{m}_i} \right| \right], \quad (84)$$

onde  $e$  é a carga do elétron e  $Q_{ej}$  é a carga de cada partícula como um múltiplo da carga do elétron. A massa de cada partícula modificada pela presença do campo magnético é  $\bar{m}_i = \sqrt{m_i^2 + 2|Q_{ej}|eB\nu}$ , enquanto  $\bar{p}_{Fi} = \sqrt{\mu_i^{*2} - \bar{m}_i^2}$  denota o momento de Fermi modificado pelo campo magnético,  $g_i(\nu)$  é a degenerescência de cada partícula e  $\nu$  são os níveis de Landau. A dependência da degenerescência no nível de Landau decorre de que quando  $\nu = 0$ , a degenerescência é apenas metade do seu valor usual para partículas de spin 1/2.

A soma das quantidades termodinâmicas sobre o nível de Landau decorre da quantização dos níveis de energia nas direções perpendiculares ao campo magnético. A soma é realizada até que o nível máximo de Landau,  $\nu_{\max}$ , seja atingido. O nível máximo corresponde a

$$\nu_{\max} = \frac{E_{Fi}^2 - m_i^2}{2|Q_{ej}|eB}, \quad (85)$$

onde  $E_{Fi}$  é a energia de Fermi. A obtenção da EoS de um gás de Fermi livre na presença de campo magnético está disponível no Apêndice C, onde conceitos como os níveis de Landau são abordados com maior cuidado. Por outro lado, a definição de energia de Fermi é discutida no Apêndice B. É importante ressaltar que sempre que os potenciais químicos aparecem na eq. (84), deve-se considerar os potenciais químicos efetivos e não os reais.

## 4.2 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Por simplicidade, o formalismo descrito acima foi utilizado apenas para a descrição da matéria puramente de quarks à temperatura nula. A fim de avaliar a influência

Figura 19 – Equação de estado variando o campo magnético, mantendo  $C = 0$  e  $\sqrt{D} = 158.5$  MeV.

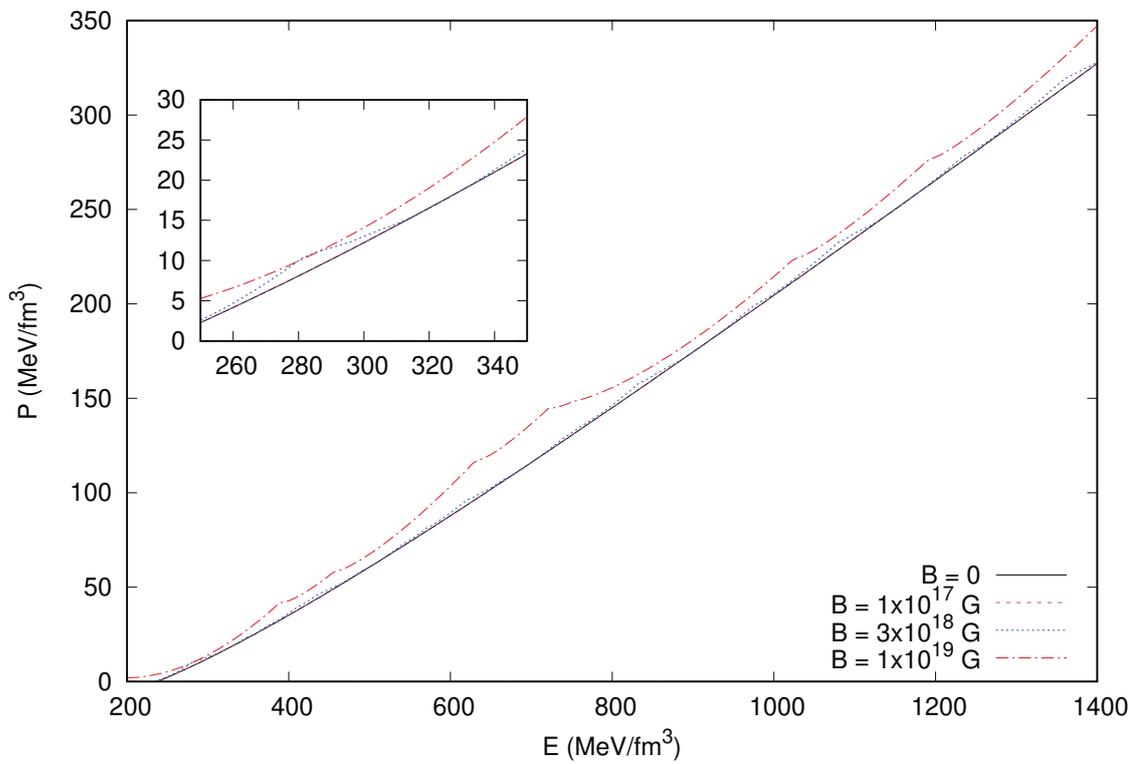
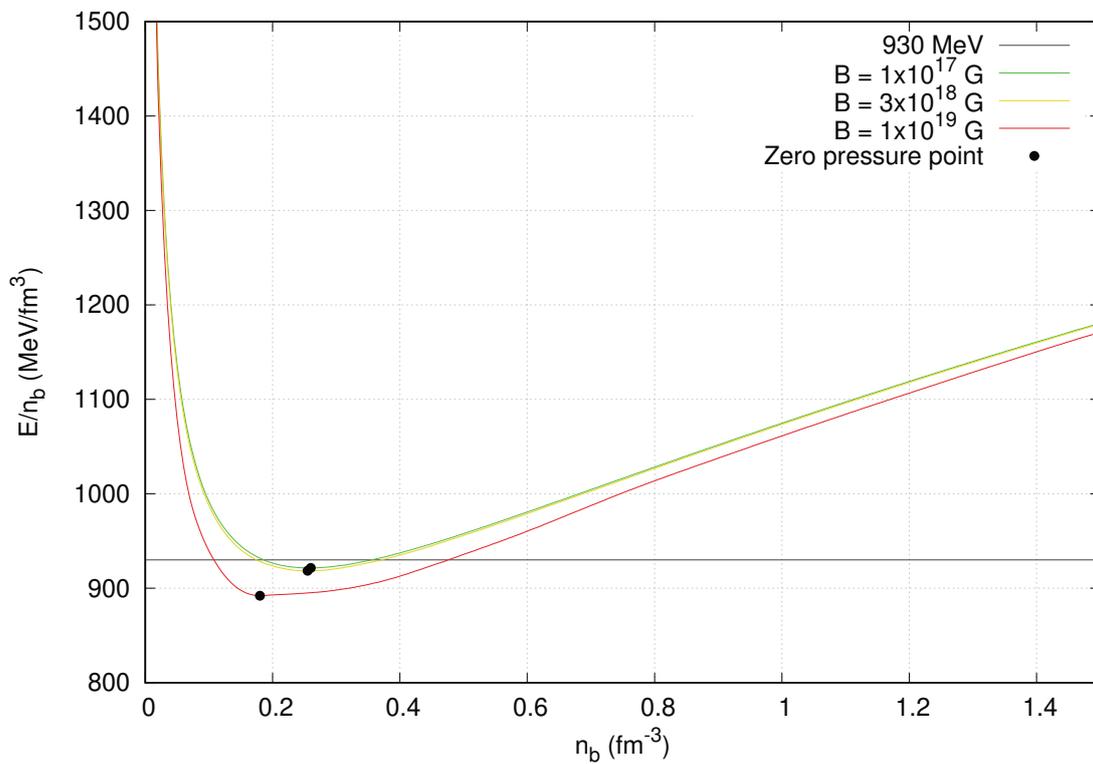


Figura 20 – Energia por bárion variando o campo magnético, mantendo  $C = 0.17$  e  $\sqrt{D} = 148$  MeV.



do campo magnético na equação de estado, apresentamos na Figura 19 a EoS ao fixar os parâmetros  $C$  e  $D$ , variando o campo magnético. O resultado exposto não leva em consideração a contribuição do campo magnético, dado que o termo proporcional a  $B^2$  se torna muito grande para campos magnéticos maiores que  $\sim 1 \times 10^{17}$  G, o que dificultaria a observação do efeito do campo magnético na contribuição da matéria para a EoS.

Na Figura 19, é possível ver que a influência do campo magnético na equação de estado da matéria de quarks é pequena. Ao considerar um campo magnético de  $1 \times 10^{17}$  G, a diferença entre a EoS da matéria magnetizada e desmagnetizada é completamente negligenciável. Tal diferença começa a ser mais significativa para valores de  $B$  maiores que  $3 \times 10^{18}$  G. Esse resultado é compatível com o observado para outros modelos ao desconsiderar o termo proporcional a  $B^2$  (PERES MENEZES; LAÉRCIO LOPES, 2016).

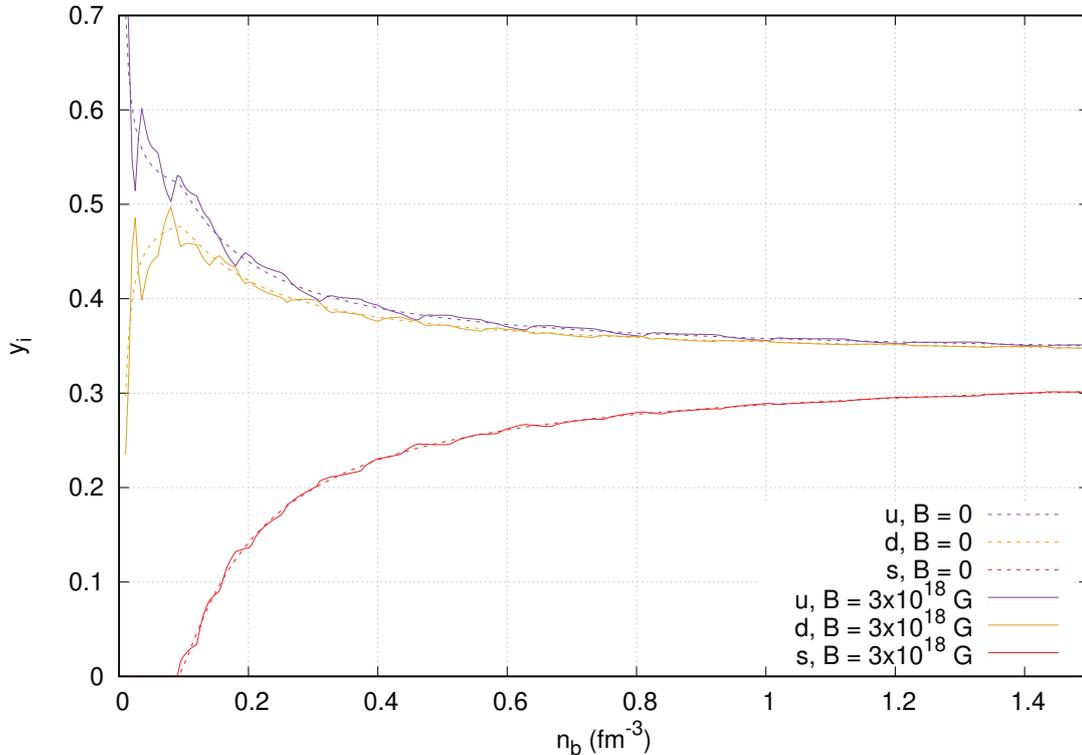
A energia por bárion e o ponto de pressão zero estão dispostos na Figura 20, o que torna possível verificar que o critério de consistência termodinâmica é satisfeito ao utilizar o procedimento introduzido neste capítulo. Observa-se que ao aumentar o campo magnético, o mínimo da energia por bárion se desloca para densidades menores. Além disso, nota-se que a presença de campos magnéticos maiores torna a matéria mais fortemente ligada. Esse comportamento já havia sido observado anteriormente para outros modelos, sendo descrito na literatura (DEXHEIMER; MENEZES; STRICKLAND, 2013). Dentro do âmbito da discussão da janela de estabilidade, é importante salientar que esse mesmo comportamento é esperado para a matéria de dois sabores, de modo que os parâmetros que satisfazem o critério de estabilidade da matéria estranha devem mudar ao considerar campos magnéticos muito altos.

As frações de partículas na ausência e presença de campo magnético externo podem ser observadas na Figura 21. A definição das frações de partículas é tal que

$$y_i = \frac{n_i}{3n_b}. \quad (86)$$

As diferenças entre as curvas são decorrentes do preenchimento dos níveis de Landau. As mudanças mais drásticas são observadas em densidades baixas. Nesse regime, o potencial químico das partículas é baixo, de modo que o nível máximo de Landau é facilmente obtido, e poucos níveis são preenchidos. Dessa forma, o movimento das partículas no plano  $xy$  fica altamente quantizado, se diferenciando do contínuo observado na ausência de campo magnético. Conforme o potencial químico aumenta, mais níveis de Landau podem ser ocupados. Dessa forma, ao aumentar a densidade, o resultado gradativamente se aproxima do movimento contínuo observada na ausência de campo magnético.

Figura 21 – População relativa das partículas em função da densidade bariônica. Linhas tracejadas correspondem à matéria na ausência de campo magnético, enquanto linhas cheias correspondem à matéria de quarks na presença de um campo magnético de  $3 \times 10^{18}$  G.



### 4.3 LIMITAÇÕES

O formalismo e os resultados apresentados neste capítulo se tratam de uma primeira abordagem, dado que a inclusão da presença de campo magnético externo no modelo DDQM não se encontrava na literatura. Decorre disso que muito do que foi apresentado é bastante simplificado quando comparado a cenários nos quais se deseja estudar a matéria de quarks. A título de exemplo, nesse primeiro momento, foram desprezados efeitos como o momento magnético anômalo (CASALI; CASTRO; MENEZES, 2014). Além disso, para um sistema magnetizado, a pressão do sistema deve ser tratada separadamente na direção perpendicular a paralela ao campo magnético, dado que seus valores são diferentes (DEXHEIMER; MENEZES; STRICKLAND, 2013). A anisotropia, seus desdobramentos no estudo de estrelas de nêutrons, como o código LORENE (GOURGOULHON *et al.*, 2008), além de formulações alternativas, como o campo caótico (LOPES *et al.*, 2021), fogem das pretensões deste trabalho.

No escopo do estudo de estrelas de nêutrons, a aproximação de um campo magnético constante se torna pouco acurada, dado que campos magnéticos dependentes da densidade são mais condizentes com o cenário estelar (DEXHEIMER; MENEZES; STRICKLAND, 2013; PERES MENEZES; LAÉRCIO LOPES, 2016). Caso se deseje

adaptar o formalismo apresentado a esse cenário, é necessário ter cautela para que a consistência termodinâmica não seja violada. Tais cuidados são necessários em decorrência de que ao considerar um campo magnético dependente da densidade, termos adicionais de correção devem aparecer para garantir a consistência termodinâmica.

De um modo geral, seguindo o procedimento apresentado neste capítulo, é simples adaptar o problema para a descrição de cenários mais complexos.

## 5 TRANSIÇÃO DE FASES

Durante toda a extensão deste trabalho, foi discutida a matéria de quarks desconfiados. Como a matéria nuclear normalmente é observada confinada dentro de hádrons, convém retomar o conceito do diagrama de transição de fases da QCD apresentado no Capítulo 1. Visando a construção de um diagrama de fases similar ao apresentado na Figura 1, primeiramente é apresentada a interpretação da transição de fases a partir do modelo DDQM. Em seguida, os resultados obtidos são apresentados e discutidos. Por fim, é feita uma comparação com a abordagem para o estudo do diagrama de fases da QCD a partir de dois modelos efetivos distintos, um para a fase de quarks desconfiados e outro para a fase hadrônica.

### 5.1 TRANSIÇÃO DE FASES A PARTIR DE UM MODELO DE QUARKS

Dentre os modelos efetivos para a matéria de quarks, alguns como o DDQM e o modelo de sacola do MIT possuem a peculiaridade de apresentarem pressões negativas em baixas densidades. Além de ser uma propriedade curiosa no estudo das hipotéticas estrelas estranhas, tal propriedade serve de base para analisar a transição de fases de desconfiamento. A interpretação da transição de fases é bastante simples ao utilizar este tipo de modelo: interpreta-se que para valores baixos de temperatura e de potencial químico, os quarks se encontram confinados. Isso é indicado pela pressão negativa, que simboliza a fase hadrônica.

Ao aquecer a matéria hadrônica, há a criação de hádrons leves, que preenchem o espaço entre os nucleons. Conforme a temperatura aumenta, os hádrons criados termicamente começam a se sobrepor à matéria nuclear, criando zonas de quarks, antiquarks e glúons. Ao atingir uma temperatura crítica,  $T_c$ , tais zonas ocupam a totalidade do espaço, criando um novo estado da matéria, o QGP. De modo análogo, quando a matéria é comprimida, tal estado é formado em uma densidade crítica,  $n_c$ , dando origem a um QGP degenerado e composto majoritariamente de quarks. Dada a interpretação apresentada para os valores negativos de pressão, ao analisar a transição de fases partindo do modelo DDQM, o ponto com  $T_c$  e  $n_c$  será sempre o que possui pressão nula,  $P = 0$ .

Convém introduzir o potencial químico da fase de quarks a partir da equação fundamental da termodinâmica, tal que

$$\mu = \frac{E + P - TS}{n_b} = \frac{F + P}{n_b}, \quad (87)$$

onde  $E$  é a densidade de energia,  $P$  é a pressão,  $T$  é a temperatura,  $S$  é a densidade de entropia,  $F$  é a densidade de energia livre e  $n_b$  é a densidade bariônica. Como em um primeiro momento as aplicações do estudo do diagrama de fases não envolvem a

matéria estelar, por simplicidade, nos restringimos ao estudo da matéria puramente de quarks como definida no Capítulo 2. Aplicando a condição de que os três quarks mais leves possuem o mesmo potencial químico, pode-se escrever

$$\mu = \mu_b = 3\mu_q, \quad (88)$$

onde  $\mu_q$  é o potencial químico dos quarks e  $\mu_b$  é o potencial químico bariônico.

Ao analisar a eq. (87) no ponto da transição de fases, i.e.,  $P = 0$ , é possível notar que

$$\mu_b(P = 0) = \frac{F}{n_b}, \quad (89)$$

ou, à temperatura zero,

$$\mu_b(P, T = 0) = \frac{E}{n_b}. \quad (90)$$

Assim, o potencial químico corresponde ao valor mínimo da energia livre por bárion, quantidade que foi extensivamente discutida no Capítulo 3.

No que segue, a transição de fases será tratada como uma transição de primeira ordem. Em uma transição de fases de primeira ordem, a energia livre de Gibbs, dada por

$$\bar{G} = \bar{E} + PV - T\bar{S} = \sum_i \mu_i \bar{N}_i, \quad (91)$$

é igual em ambas as fases. A notação empregada segue o padrão utilizado no Capítulo 3. A definição de uma transição de fases de primeira ordem é de que as derivadas de primeira ordem de  $\bar{G}$  em relação aos parâmetros intensivos, como a entropia, são descontínuas (CALLEN, 1985). Nesses processos, haverá absorção ou perda de energia na forma de calor latente ao longo da transição. Caso apenas uma derivada de segunda ordem dos mesmos parâmetros fosse descontínua, a transição seria de segunda ordem.

É possível que haja transições de fases de segunda ordem no diagrama de fases da QCD, devido à transição quiral que ocorre nas regiões de altas densidades e baixas temperaturas (RAJAGOPAL; WILCZEK, 1993). Todavia, como o modelo empregado neste trabalho não contém informações sobre quiralidade, a transição de fases será considerada de primeira ordem.

## 5.2 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O formalismo apresentado, junto da equação de estado para a matéria de quarks conforme anteriormente discutida, foram utilizados para a obtenção de resultados numéricos. No que segue, as massas de corrente dos três quarks mais leves foram tomadas como  $m_{u0} = 5$  MeV,  $m_{d0} = 10$  MeV e  $m_{s0} = 80$  MeV.

### 5.2.1 Matéria desmagnetizada

Tendo em vista a janela de estabilidade para a matéria estranha, é possível avaliar a influência dos valores de  $C$  e  $D$  estáveis. Para que o efeito de cada um dos parâmetros seja mais facilmente visualizado, as Figuras 22 e 23 dispõem os diagramas de fases obtidos ao fixar os valores de  $C$  e  $D$ , respectivamente. Em ambos os casos, os diagramas são apresentados em termos da pressão e do potencial químico bariônico, e os parâmetros respeitam os valores da janela de estabilidade da matéria puramente de quarks. Apesar de diferente da representação da Figura 1, que é apresentada em termos da temperatura e densidade bariônica, ambos os casos são equivalentes e representam a mesma física, conforme mencionado no Capítulo 1. De imediato, observa-se que apesar da abordagem adotada ser bastante simples, o comportamento observado no diagrama é bastante similar. No que segue, temperatura crítica se refere à temperatura da transição a potencial químico zero, enquanto potencial químico crítico se refere ao potencial químico da transição a temperatura zero.

Relembrando as discussões apresentadas no Capítulo 3 quanto à equação de estado da matéria de quarks, já havia sido observado que o mínimo da energia livre por bárion se desloca para densidades mais baixas conforme a temperatura aumenta, o que leva ao comportamento observado em ambas as figuras. Também nas discussões do Capítulo 3, já havia sido observado que mudanças no parâmetro  $D$  produzem mudanças mais significativas no ponto de pressão zero quando comparadas a variações no parâmetro  $C$ . Esse padrão também pode ser observado nos diagramas obtidos ao comparar as Figuras 22 e 23. Além disso, é possível notar que a temperatura crítica aumenta conforme  $C$  e  $D$  aumentam.

Para um estudo mais aprofundado, analisaremos diferentes regiões do diagrama de fases separadamente. Primeiramente, nosso foco será na região de altas densidades e baixas temperaturas. Nesse cenário, a análise aqui apresentada é inspirada nos resultados obtidos para o modelo do MIT em (LOPES *et al.*, 2021). Em tal região, a forte dependência de modelos para obter resultados teóricos gera incertezas na busca de um potencial químico no qual a transição deva ocorrer. A título de exemplo, abordagens baseadas no modelo de Nambu-Jona-Lasinio preveem que o potencial químico crítico à temperatura zero esteja próximo de 1080 a 1100 MeV (BUBALLA, 2005; RÜSTER *et al.*, 2005) para a matéria de dois sabores. Uma abordagem diferente, baseada na teoria do funcional da densidade, sugere que para matéria estelar de dois sabores, a transição de fases à temperatura nula deva ocorrer em um potencial químico de cerca de 1200 MeV (AYRIYAN *et al.*, 2018).

Ao recordar a definição da janela de estabilidade, tem-se que a energia por bárion da matéria estranha à pressão nula sempre será menor que 930 MeV. Assim, seguindo a abordagem anteriormente apresentada para a transição de fases, decorre que a matéria de três sabores absolutamente estável não é capaz de satisfazer poten-

Figura 22 – Diagrama de fases para a matéria de três sabores, obtido ao manter  $C = -0.27$ .

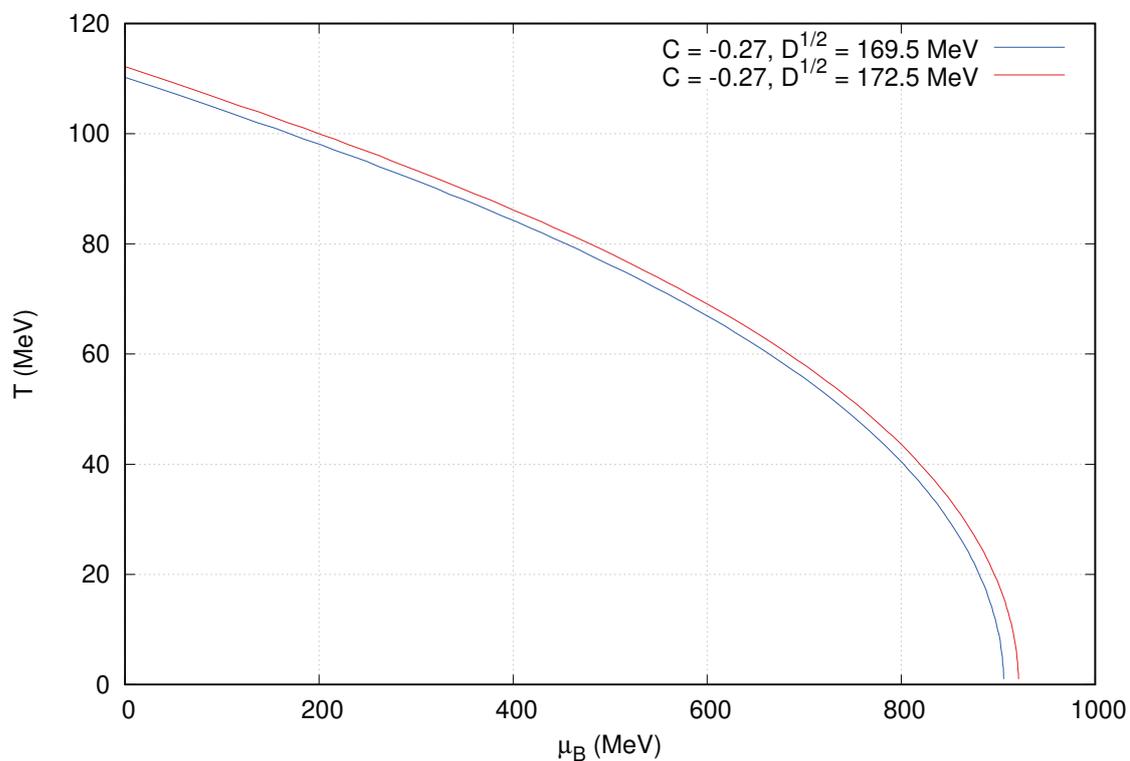
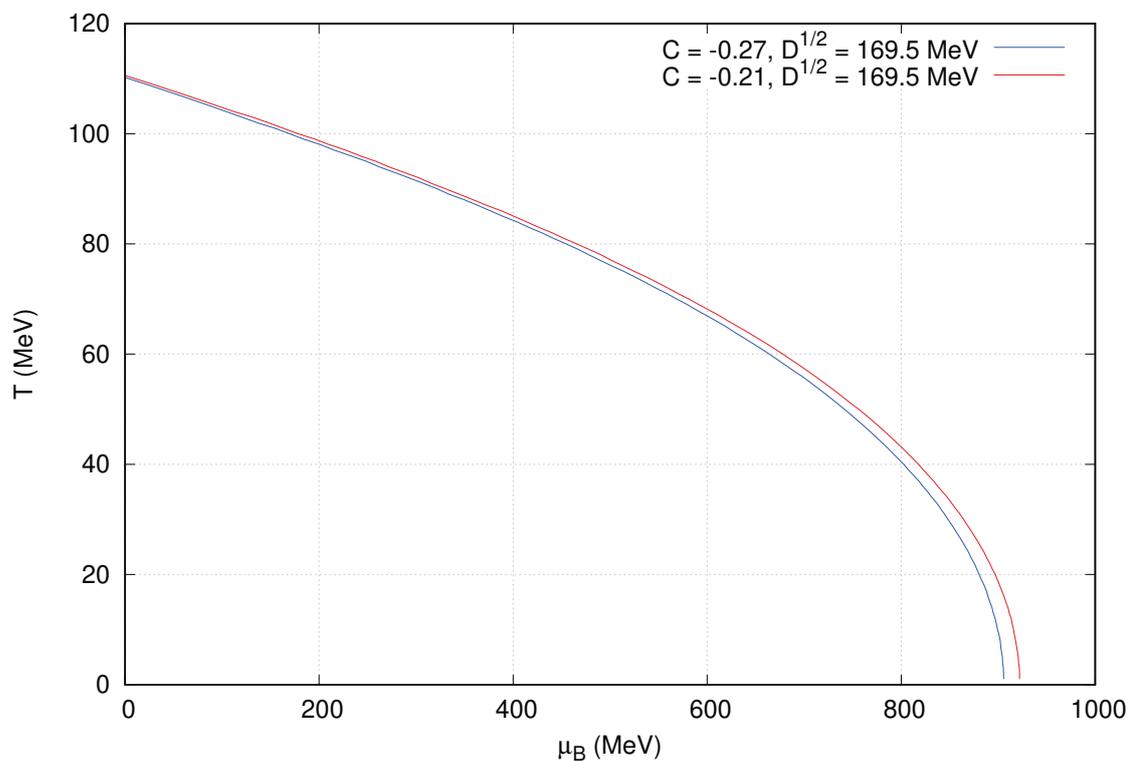
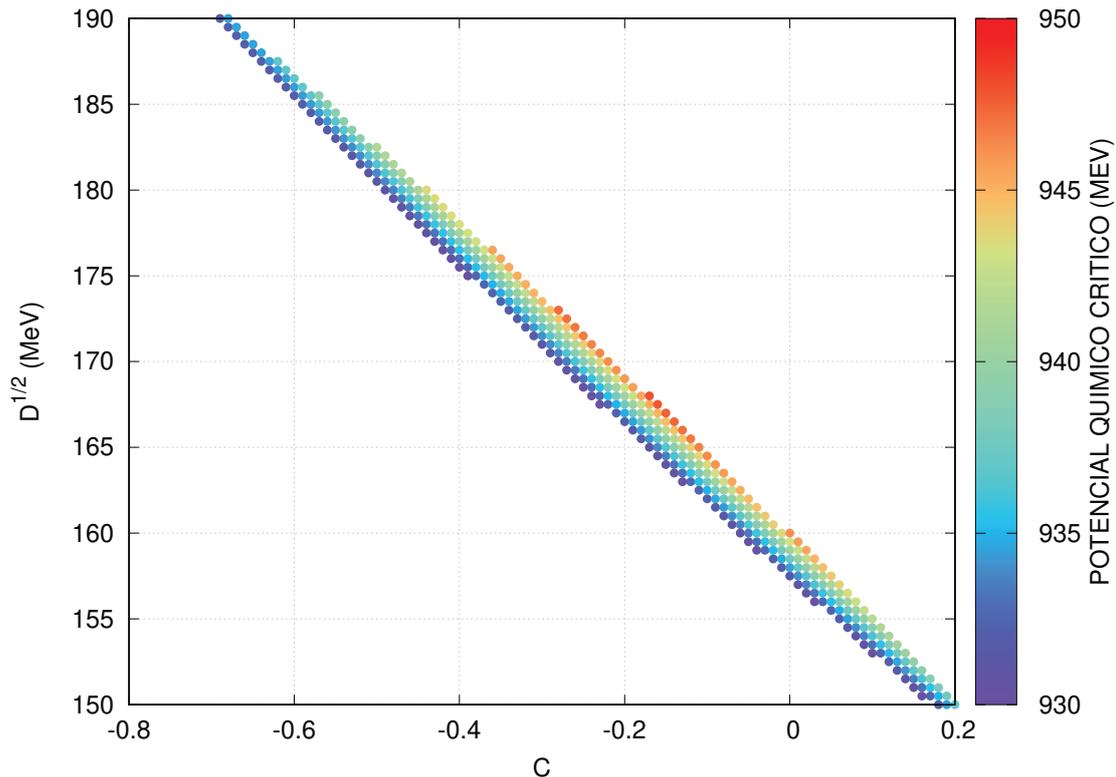


Figura 23 – Diagrama de fases para a matéria de três sabores, obtido ao manter  $\sqrt{D} = 169.5 \text{ MeV}$ .



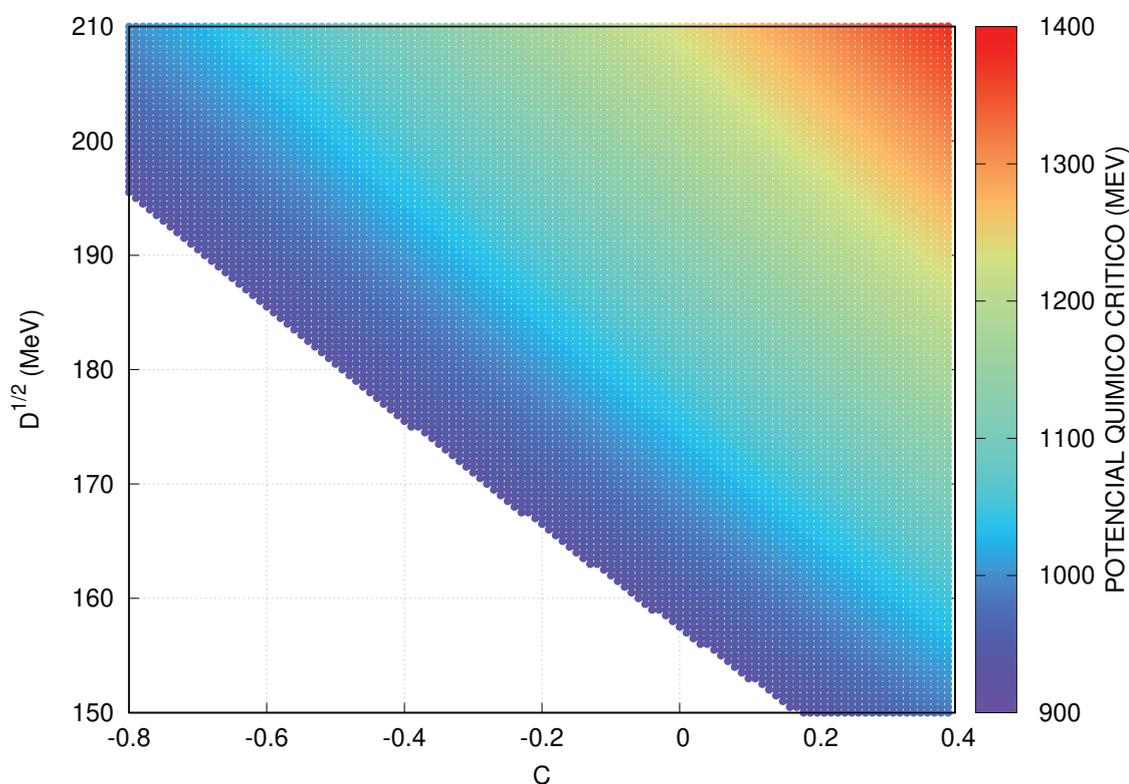
ciais químicos tão elevados na transição. Em contrapartida, a energia de ligação da matéria de dois sabores deve sempre ser superior a 930 MeV, o que torna possível uma comparação com as abordagens supramencionadas sem abrir mão do conceito da janela de estabilidade. Em virtude disso, levaremos em consideração uma matéria de quarks simétrica de dois sabores, também com iguais potenciais químicos,  $\mu_U = \mu_D$ .

Figura 24 – Potencial químico crítico da matéria simétrica de dois sabores, à temperatura zero, obtido para todos os valores da janela de estabilidade.



Na Figura 24, estão dispostos os potenciais químicos críticos à temperatura nula para a matéria simétrica de dois sabores, contemplando todos os parâmetros da janela de estabilidade da matéria puramente de quarks com  $m_{S0} = 80$  MeV. Conforme mencionado, todos os valores são superiores a 930 MeV, podendo chegar próximos de 950 MeV. Na imagem, é possível observar com maior clareza que os valores do potencial químico crítico aumentam conforme  $C$  e  $D$  aumentam. Todavia, os valores observados dentro da janela de estabilidade estão bastante aquém dos previstos por outras abordagens, de modo que para conciliar ambas previsões, seria necessário abrir mão do conceito da conjectura de Bodmer-Witten. Na Figura 25, está disposto o potencial químico crítico para a matéria simétrica de dois sabores à temperatura zero, tanto dentro quanto fora da janela de estabilidade. Observa-se que, conforme os parâmetros livres se distanciam dos valores da janela de estabilidade, potenciais químicos mais altos são obtidos, podendo coincidir com as previsões supracitadas ao desconsiderar a hipótese da matéria estranha absolutamente estável. A região

Figura 25 – Potencial químico crítico da matéria simétrica de dois sabores, à temperatura zero, para parâmetros de dentro e fora da janela de estabilidade.

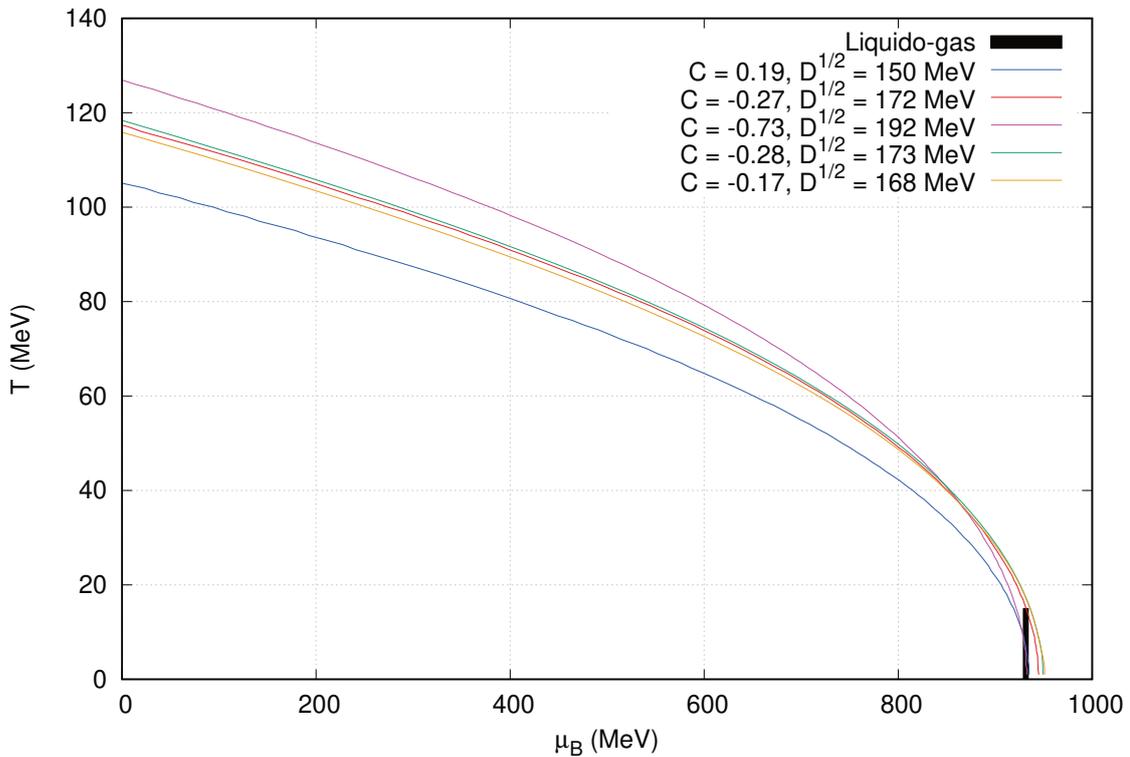


branca na Figura 25 corresponde à região proibida da conjectura, na qual a matéria de quarks de dois sabores seria absolutamente estável. Tal região deve ser desprezada independentemente da validade da hipótese de Bodmer-Witten, sendo descartada para todos os resultados apresentados.

Conquanto não hajam dados experimentais que ditem um potencial químico máximo para o qual a matéria se encontre confinada, ainda é possível comparar os resultados do diagrama de fases com quantidades físicas mensuráveis em laboratório. Uma região de importância no estudo do diagrama de fases da QCD é a região de instabilidade líquido-gás, relacionada à fragmentação nuclear (FINN *et al.*, 1982; D'AGOSTINO *et al.*, 2005; MENEZES1; PROVIDÊNCIA2, 2001). Para baixas temperaturas e potenciais químicos, se espera que os nucleons estejam confinados nos núcleos, o que pode ser identificado como uma fase “líquida”. Ao aumentar a temperatura, o núcleo começa a se dissolver em um gás de nucleons interagentes, a fase gasosa. A transição líquido-gás é um processo puramente hadrônico, portanto, não devendo se encontrar na fase desconfiada do diagrama de fases. Colisões de íons pesados de baixas energias indicam que essa transição de fase é esperada na região destacada na Figura 26 (CHOMAZ, 2001; FINN *et al.*, 1982; LOPES *et al.*, 2021).

Apesar da condição imposta pela transição líquido-gás ser facilmente atendida para potenciais químicos críticos mais altos, como os apresentados na Figura 25, é de

Figura 26 – Diagrama de fases para matéria simétrica de dois sabores. Os parâmetros utilizados se encontram nos extremos da janela de estabilidade da matéria puramente de quarks ao considerar  $m_{S0} = 80$  MeV e temperatura nula. Os valores destacados em preto correspondem à região na qual é esperada uma transição de fases líquido-gás (CHOMAZ, 2001; FINN *et al.*, 1982; LOPES *et al.*, 2021).



interesse discutir as implicações dessa limitação ao considerar o caso mais restritivo, quando a conjectura de Bodmer-Witten é satisfeita. Na Figura 26, estão dispostos os diagramas de fases obtidos para parâmetros nas bordas da janela de estabilidade da matéria puramente de quarks. A fim de comparar os resultados com a transição líquido-gás, levou-se em consideração a matéria simétrica de dois sabores. Para a maior parte dos parâmetros considerados, ao menos parte da transição líquido-gás ocorre na região desconfiada, o que não é esperado. Todavia, há parâmetros que satisfazem simultaneamente o critério da transição de fases líquido-gás e a estabilidade da matéria estranha. Os principais resultados da Figura 26 estão disponíveis na Tabela 3.

Mudando o foco da região de baixas para a de altas temperaturas, é possível comparar os resultados com os cálculos obtidos a partir da LQCD. Quando o potencial químico se aproxima de zero, é esperada uma temperatura crítica de  $\sim 154$  MeV (BAZAVOV *et al.*, 2012). Ainda que não se trate de um dado experimental, a LQCD é a forma mais precisa de obter resultados a partir da QCD, servindo como uma espécie de gabarito para estudos de física nuclear dentro de seus limites de aplicação. A partir

$C$	$\sqrt{D}$ (MeV)	$\mu_c$ (MeV)	$T_c$ (MeV)	L-G
0.19	150	935	105	Não
-0.17	168	951	115	Sim
-0.27	172	945	117	Não
-0.28	173	949	118	Sim
-0.73	192	933	126	Não

Tabela 3 – O potencial químico crítico à temperatura zero ( $\mu_c$ ) e a temperatura crítica a potencial químico zero ( $T_c$ ). A coluna “L-G” apresenta informações acerca de se a transição líquido-gás se encontra ou não completamente na fase hadrônica para os parâmetros considerados.

da Figura 26, nota-se que a maior temperatura crítica obtida é 126 MeV, bastante aquém do valor obtido pela QCD na rede. É importante salientar que os resultados aqui apresentados consideram uma transição de fases de primeira ordem, enquanto a LQCD aponta para que haja um *crossover* para baixos potenciais químicos e altas temperaturas. Dessa forma, deve haver um ponto crítico final que delimita a curva oriunda da LQCD e a resultante de modelos efetivos. Portanto, ao comparar os resultados deste trabalho com a LQCD, faz-se uma extrapolação. Apesar de temperaturas críticas condizentes com a LQCD serem facilmente obtidos ao ignorar a janela de estabilidade, convém retomar o diálogo da Seção 3.4.4 quanto à estabilidade da matéria estranha à temperatura finita.

Como já discutido, os parâmetros que satisfazem a conjectura de Bodmer-Witten não se mantêm ao aumentar a temperatura. Conforme maiores temperaturas são consideradas, os parâmetros estáveis devem se encontrar em regiões de maior  $D$ , o que aumentaria a temperatura crítica obtida. Dessa forma, não é possível garantir que a matéria estranha seria absolutamente estável ao considerar os mesmos parâmetros em toda a extensão do diagrama de fases da QCD. Outra possibilidade que permitiria que o problema fosse abordado da melhor forma possível, é a introdução de uma dependência da temperatura na massa dos quarks, que foi mencionada como possibilidade no decorrer deste trabalho. Dessa forma, os resultados apresentados nessa seção servem, acima de tudo, como uma abordagem inicial que visa identificar os problemas e apontar possíveis soluções.

Outra adversidade encontrada é de que os parâmetros que melhor satisfazem as condições impostas para o diagrama de fases — maiores valores de  $D$ , consequentemente acompanhados de baixos valores de  $C$  — são exatamente opostos aos desejados para obtenção de altas massas de estrelas compactas. O mesmo problema já havia sido identificado para o modelo do MIT (LOPES *et al.*, 2021), onde a dependência da temperatura no modelo de sacola foi apresentada como uma possível solução para esse aparente desacordo.

### 5.2.2 Matéria magnetizada

Apesar de um estudo da matéria de quarks quente na presença de campo magnético não ter sido feito de maneira numérica devido a limitações de tempo, é possível extrair informações relevantes ao estudo da transição de fases a partir do estudo da equação de estado. Ao manter os parâmetros livres do modelo fixos, o mínimo da energia por bárion — e a EoS como um todo — sofre poucas variações para campos magnéticos menores que  $1 \times 10^{17}$  G. As diferenças só começam a ser significativas para campos magnéticos da ordem de  $1 \times 10^{18}$  G, quando o mínimo de energia por bárion começa a se deslocar para densidades menores. Assim, pode-se inferir que ao considerar a presença campos magnéticos, o potencial químico crítico à temperatura zero seja menor que para o caso da matéria desmagnetizada.

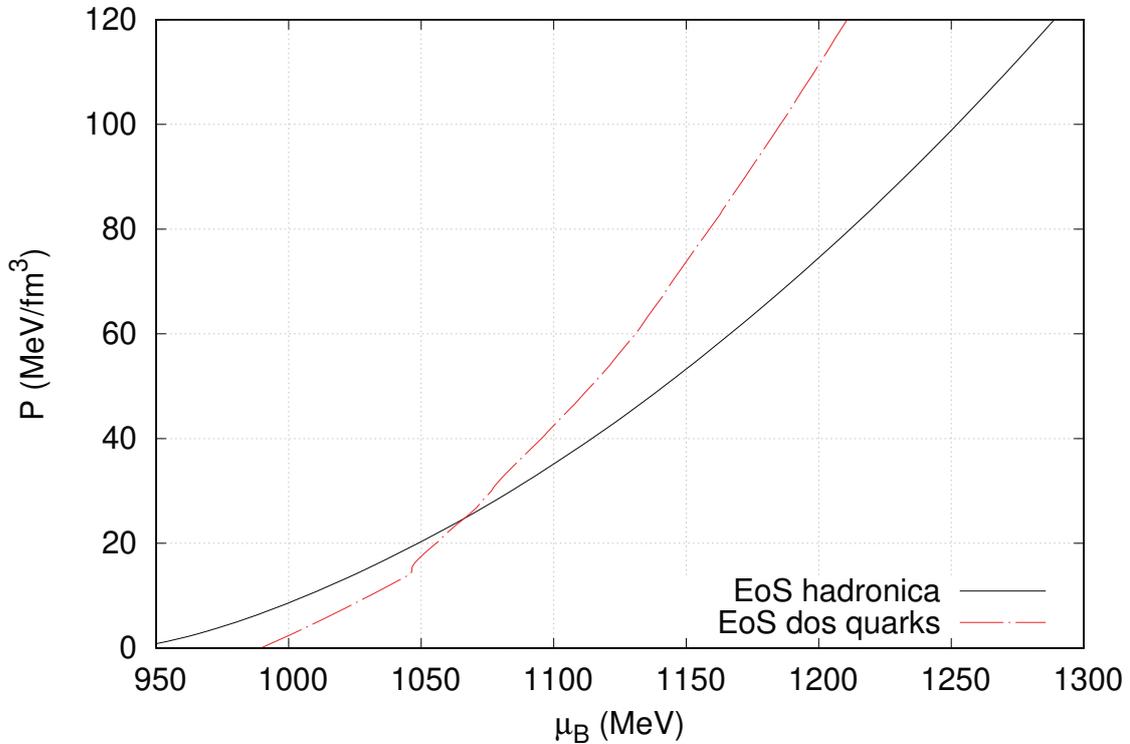
## 5.3 TRANSIÇÃO DE FASES A PARTIR DE DOIS MODELOS EFETIVOS

Além da abordagem mais simples para a transição de fases a partir de um modelo de quarks, dentro do âmbito dos modelos efetivos é possível estudar o diagrama de fases na QCD ao utilizar dois modelos distintos, um para a fase hadrônica e outro para a fase de quarks desconfinados. Durante o período do mestrado, a descrição da matéria de quarks através do modelo DDQM foi utilizada para tais estudos, em colaboração com outros alunos. Para tal, foram utilizados o modelo descrito no Capítulo 3 e a introdução dos efeitos do campo magnético, conforme apresentado no Capítulo 4. Nesse contexto, buscou-se realizar uma análise qualitativa acerca de como a presença de campos magnéticos influencia a transição de fases de desconfinamento à temperatura zero.

A título de ilustração, a Figura 27 apresenta a equação de estado à temperatura nula em termos do potencial químico bariônico e da pressão. Para a fase de quarks desconfinados foi utilizado o o modelo DDQM com campo magnético, enquanto a descrição da matéria hadrônica pode ser encontrada em (BACKES; MARQUEZ; MENEZES, 2021) e foge do escopo deste trabalho. Ao estudar a transição de fases a partir de dois modelos efetivos distintos, o ponto no qual a transição ocorre é aquele em que há um cruzamento entre as equações de estado hadrônica e de quarks. No exemplo disposto na Figura 27, tal ponto equivale a um potencial químico de 1062 MeV e uma pressão de  $21.98 \text{ MeV/fm}^3$ . Os resultados obtidos e explicações mais rigorosas acerca desta abordagem fogem das pretensões desta dissertação, mas podem ser encontradas no artigo desenvolvido em colaboração com outros alunos (BACKES; MARQUEZ; MENEZES, 2021).

Os resultados obtidos no artigo podem ser utilizados a título de comparação com os apresentados neste capítulo. Tanto para a matéria desmagnetizada quando para a matéria magnetizada, encontrou-se potenciais químicos entre 958 e 1475 MeV

Figura 27 – Equação de estado para a matéria hadrônica (linha cheia) (BACKES; MARQUEZ; MENEZES, 2021) e para a matéria de quarks (linha tracejada). Para o modelo DDQM, foram utilizados  $C = 0$  e  $\sqrt{D} = 165$  MeV. O resultado apresentado considera temperatura nula e campo magnético de  $3 \times 10^{18}$  G.



para parâmetros dentro da janela de estabilidade à temperatura zero (BACKES; MARQUEZ; MENEZES, 2021). Tais valores excedem significativamente o obtido utilizando apenas o modelo de quarks. Assim, ao utilizar a abordagem com dois modelos efetivos, mais sofisticada, é possível conciliar facilmente os valores de potencial químico crítico obtidos com o modelo DDQM aos valores esperados a partir de outros modelos, como discutido na seção anterior. Além disso, torna-se possível conciliar parâmetros de baixos valores de  $D$  — para os quais são obtidas altas massas estelares — com o critério de que a transição de fases líquido-gás deva se encontrar na fase confinada. Ao utilizar dois modelos efetivos, a transição de fase sempre ocorrerá para valores de pressão positivos e maiores que zero na EoS da matéria de quarks. Assim, infere-se que ao utilizar dois modelos, o diagrama de fases obtido sempre se desloque em direção a potenciais químicos maiores quando comparado à abordagem utilizando apenas o modelo de quarks. Dessa forma, é possível especular que o estudo da transição de fases com dois modelos possa solucionar muitos dos problemas apontados ao considerar apenas o modelo DDQM.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho, buscou-se descrever a matéria de quarks desconfiados a partir do modelo DDQM. Para tal, primeiramente o modelo foi empregado, à temperatura zero, na descrição de dois cenários distintos : (i) matéria constituída apenas por quarks  $u$ ,  $d$  e  $s$ , com potenciais químicos iguais; (ii) matéria de quarks na presença de léptons, a fim de descrever a matéria estelar no contexto de estrelas compactas. Como há uma vasta gama de valores que podem ser utilizados para os parâmetros livres do modelo, decidiu-se por restringir os parâmetros de modo que as condições de estabilidade absoluta da matéria estranha sejam satisfeitas. Diante da introdução da dependência da densidade no modelo, o problema da consistência termodinâmica foi amplamente discutido, sendo adotada uma abordagem que corrige tais problemas. A partir da EoS e da conjectura de Bodmer-Witten, foi construída a janela de estabilidade para a matéria estelar, um resultado que condiz com o apresentado na literatura. Sob a mesma abordagem, foram construídas janelas de estabilidade para a matéria de quarks, além de uma terceira janela na qual a massa de corrente do quark  $s$  é variável.

Para conjuntos de parâmetros que satisfazem as janelas calculadas, a EoS foi estudada com maior profundidade, a fim de verificar qual a influência de cada um dos parâmetros na dureza da EoS. Os resultados decorrentes da aplicação do modelo da matéria de quarks ao cenário de estrelas compactas sugerem que o modelo DDQM é capaz descrever simultaneamente estrelas estranhas de massas estelares altas, da ordem de  $\sim 2 M_{\odot}$ , além de raios adequados para a estrela de nêutrons canônica, ambos compatíveis com dados astrofísicos. Todavia, observou-se que ao empregar parâmetros capazes de descrever estrelas massivas, as densidades obtidas na superfície da estrela estão aquém do desejado para a descrição de estrelas estranhas. Uma versão deste trabalho que contempla parte de tais análises foi publicada no *Journal of Physics G*, podendo ser consultada em <https://doi.org/10.1088/1361-6471/abc6e9> e em <https://arxiv.org/abs/2007.04494>.

O modelo DDQM consistente termodinamicamente foi utilizado também no estudo da matéria de quarks quente. A partir de uma abordagem simples, realizamos um estudo da transição de fases de desconfiamento, considerada uma transição de fases de primeira ordem sob a perspectiva adotada. Verificou-se que há parâmetros capazes de satisfazer simultaneamente o critério de estabilidade da matéria estranha e o critério de que a transição de fases líquido-gás se encontre na fase confinada. Todavia, não há parâmetros dentro da janela de estabilidade capazes de produzir diagramas cujas temperaturas a baixo potencial químico sejam compatíveis com o observado para o *crossover* obtido nos cálculos oriundos da *Lattice QCD*.

Apresentamos uma maneira de adaptar o formalismo do modelo DDQM com consistência termodinâmica ao estudo da matéria na presença de campos magnéticos.

Esse estudo foi aceito para publicação no *European Physical Journal A*, estando disponível em <https://doi.org/10.1140/epja/s10050-021-00544-2> e em <https://arxiv.org/abs/2103.14733>. Em colaboração com outro estudante, o formalismo foi aplicado ao estudo da transição de fases de desconfinamento a partir de dois modelos efetivos, um que descreve a fase hadrônica e outro que descreve a fase de quarks desconfina- dos. Nesse estudo, foi avaliado como a presença de campo magnético influencia na transição de fases.

Neste trabalho, visou-se construir uma base sólida para futuros estudos envolvendo o modelo DDQM, tanto através de uma abordagem teórica mais didática que a já disponível na literatura, quanto nos códigos numéricos disponibilizados em <https://github.com/b-backes/Quark-matter-model>. Assim, todo o desenvolvimento produzido pode ser facilmente adaptado para cenários mais complexos.

Possíveis trabalhos futuros incluem, mas não se limitam a: (i) obtenção da janela de estabilidade para temperaturas finitas; (ii) um estudo completo do diagrama de transição de fases em conjunto com modelos hadrônicos; (iii) adaptação do modelo DDQM na presença de campo magnético para o caso de campos magnéticos dependentes da densidade; (iv) obtenção de resultados para matéria de quarks quente e magnetizada; (v) realizar um estudo da evolução de protoestrelas a temperatura finita, em cenários que envolvem densidade de entropia fixa.

## REFERÊNCIAS

ABBOTT, B. P. *et al.* GW170817: Measurements of Neutron Star Radii and Equation of State. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 121, p. 161101, 16 out. 2018. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.161101.

ADAMS, J. *et al.* Experimental and theoretical challenges in the search for the quarkgluon plasma: The STAR Collaborations critical assessment of the evidence from RHIC collisions. **Nuclear Physics A**, Elsevier BV, v. 757, n. 1-2, p. 102–183, ago. 2005. ISSN 0375-9474. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2005.03.085.

ADCOX, K. *et al.* Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration. **Nucl. Phys. A**, v. 757, p. 184–283, 2005. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2005.03.086. arXiv: nucl-ex/0410003.

ANNALA, E.; GORDA, T.; KURKELA, A. *et al.* Evidence for quark-matter cores in massive neutron stars. **Nature Physics**, v. 16, p. 907–910, set. 2020. DOI: 10.1038/s41567-020-0914-9.

ANTONIADIS, John *et al.* A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary. **Science**, v. 340, n. 6131, p. 1233232, abr. 2013. DOI: 10.1126/science.1233232.

AOKI, Y. *et al.* The QCD transition temperature: results with physical masses in the continuum limit II. **JHEP**, v. 06, p. 088, 2009. DOI: 10.1088/1126-6708/2009/06/088. arXiv: 0903.4155 [hep-lat].

ARSENE, I. *et al.* Quark gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The Perspective from the BRAHMS experiment. **Nucl. Phys. A**, v. 757, p. 1–27, 2005. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2005.02.130. arXiv: nucl-ex/0410020.

AYRIYAN, A. *et al.* Robustness of third family solutions for hybrid stars against mixed phase effects. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 97, p. 045802, 4 abr. 2018. DOI: 10.1103/PhysRevC.97.045802.

BACK, B.B. *et al.* The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC. **Nucl. Phys. A**, v. 757, p. 28–101, 2005. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2005.03.084. arXiv: nucl-ex/0410022.

- BACKES, Betânia C; HAFEMANN, Eduardo *et al.* Density-dependent quark mass model revisited: thermodynamic consistency, stability windows and stellar properties. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, IOP Publishing, v. 48, n. 5, p. 055104, abr. 2021. DOI: 10.1088/1361-6471/abc6e9.
- BACKES, Betânia C. T.; MARQUEZ, Kauan D.; MENEZES, Débora P. **Effects of Strong Magnetic Fields on the Hadron-Quark Deconfinement Transition**. [S.l.: s.n.], 2021. arXiv: 2103.14733 [nucl-th].
- BAZAVOV, A. *et al.* Chiral and deconfinement aspects of the QCD transition. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 85, p. 054503, 5 mar. 2012. DOI: 10.1103/PhysRevD.85.054503.
- BENVENUTO, O. G.; LUGONES, G. Strange matter equation of state in the quark mass-density-dependent model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 51, p. 1989–1993, 4 fev. 1995. DOI: 10.1103/PhysRevD.51.1989.
- BODMER, A. R. Collapsed Nuclei. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 4, p. 1601–1606, 6 set. 1971. DOI: 10.1103/PhysRevD.4.1601.
- BUBALLA, M. NJL-model analysis of dense quark matter. **Physics Reports**, Elsevier BV, v. 407, n. 4-6, p. 205–376, fev. 2005. ISSN 0370-1573. DOI: 10.1016/j.physrep.2004.11.004.
- CALLEN, Herbert. **Thermodynamics and an introduction to thermostatistics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1985.
- CAPANO, Collin D. *et al.* Stringent constraints on neutron-star radii from multimessenger observations and nuclear theory. **Nature Astronomy**, Springer Science e Business Media LLC, v. 4, n. 6, p. 625–632, mar. 2020. ISSN 2397-3366. DOI: 10.1038/s41550-020-1014-6.
- CASALI, R. H.; CASTRO, L. B.; MENEZES, D. P. Hadronic and hybrid stars subject to density-dependent magnetic fields. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 89, p. 015805, 1 jan. 2014. DOI: 10.1103/PhysRevC.89.015805.
- CHAKRABARTY, S. Quark matter in a strong magnetic field. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 54, p. 1306–1316, 2 jul. 1996. DOI: 10.1103/PhysRevD.54.1306.

CHAKRABARTY, Somenath. Equation of state of strange quark matter and strange star. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 43, p. 627–630, 2 jan. 1991. DOI: 10.1103/PhysRevD.43.627.

CHAKRABARTY, Somenath; RAHA, Sibaji; SINHA, Bikash. Strange quark matter and the mechanism of confinement. **Physics Letters B**, v. 229, n. 1, p. 112–116, 1989. ISSN 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(89\)90166-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(89)90166-4).

CHATTERJEE, Debarati; NOVAK, Jérôme; OERTEL, Micaela. Magnetic field distribution in magnetars. **Physical Review C**, American Physical Society (APS), v. 99, n. 5, mai. 2019. ISSN 2469-9993. DOI: 10.1103/physrevc.99.055811.

CHOMAZ, P. The nuclear liquid gas phase transition and phase coexistence: a review. *In*: 610. INTERNATIONAL NUCLEAR PHYSICS CONFERENCE INPC 2001. Berkeley, United States: American Institute of Physics, jul. 2001. (AIP Conference Proceedings, 610), p. 167–181.

CROMARTIE, H.T.; FONSECA, E.; RANSOM, S.M. *et al.* Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar. **Nature Astronomy**, v. 4, p. 72–76, jan. 2020. DOI: 10.1038/s41550-019-0880-2.

D'AGOSTINO, M. *et al.* NUCLEAR LIQUID-GAS PHASE TRANSITION: EXPERIMENTAL SIGNALS. **Nuclear Physics A**, v. 749, p. 55–64, 2005. Phase transitions in strongly interacting matter. Proceedings of the 18th Nuclear Physics Division Conference of the EPS. ISSN 0375-9474. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2004.12.008>.

DEMOREST, P.; PENNUCCI, T.; RANSOM, S. *et al.* A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay. **Nature**, v. 467, p. 1081–1083, out. 2010. DOI: 10.1038/nature09466.

DEXHEIMER, V; MENEZES, D P; STRICKLAND, M. The influence of strong magnetic fields on proto-quark stars. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, IOP Publishing, v. 41, n. 1, p. 015203, dez. 2013. ISSN 1361-6471. DOI: 10.1088/0954-3899/41/1/015203.

FINN, J. E. *et al.* Nuclear Fragment Mass Yields from High-Energy Proton-Nucleus Interactions. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 49, p. 1321–1325, 18 nov. 1982. DOI: 10.1103/PhysRevLett.49.1321.

GAMOW, G.; SCHOENBERG, M. Neutrino Theory of Stellar Collapse. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 59, p. 539–547, 7 abr. 1941. DOI: 10.1103/PhysRev.59.539.

GAMOW, George; SCHOENBERG, M. The Possible Role of Neutrinos in Stellar Evolution. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 58, p. 1117–1117, 12 dez. 1940. DOI: 10.1103/PhysRev.58.1117.

GLENDENNING, Norman K. **Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity**. Nova Iorque: Springer, 2000.

GOURGOULHON, E. *et al.* **Langage Objet pour la RELativité Numérique**. [S.l.: s.n.], 2008. <https://lorene.obspm.fr/>. [Online; accessed 04-June-2021].

GREINER, Walter; NEISE, Ludwig; STÖCKER, Horst. **Thermodynamics and Statistical Mechanics**. Nova Iorque: Springer, 1997.

GROSS, David J.; WILCZEK, Frank. Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 30, p. 1343–1346, 26 jun. 1973. DOI: 10.1103/PhysRevLett.30.1343.

ISAYEV, A. A. Stability of magnetized strange quark matter in the MIT bag model with a density dependent bag pressure. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 91, p. 015208, 1 jan. 2015. DOI: 10.1103/PhysRevC.91.015208.

ITOH, Naoki. Hydrostatic Equilibrium of Hypothetical Quark Stars. **Progress of Theoretical Physics**, v. 44, n. 1, p. 291–292, jul. 1970. ISSN 0033-068X. DOI: 10.1143/PTP.44.291. eprint: <https://academic.oup.com/ptp/article-pdf/44/1/291/5357142/44-1-291.pdf>.

KUMAR, Bharat. **Implications of nuclear interaction for nuclear structure and astrophysics within the relativistic mean-field model**. [S.l.: s.n.], 2018. arXiv: 1812.03306 [nucl-th].

LOPES, Luiz L *et al.* Modified MIT Bag Modelspart II: QCD phase diagram and hot quark stars. **Physica Scripta**, IOP Publishing, v. 96, n. 6, p. 065302, mar. 2021. ISSN 1402-4896. DOI: 10.1088/1402-4896/abef35.

LOPES, Luiz Laércio. **Estrelas de Nêutrons: do gás de nêutrons livres à inclusão de híperons e campo magnético**. 2012. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina.

MCGILL Online Magnetar Catalog. [S.l.: s.n.].

<http://www.physics.mcgill.ca/~pulsar/magnetar/main.html>. Acesso em: 30-06-2021.

MENEZES<sup>1</sup>, D. P.; PROVIDÊNCIA<sup>2</sup>, C. Caloric curve for finite nuclei in relativistic models. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 64, p. 044306, 4 set. 2001. DOI: 10.1103/PhysRevC.64.044306.

MILLER, M. C. *et al.* **The Radius of PSR J0740+6620 from NICER and XMM-Newton Data**. [S.l.: s.n.], 2021. arXiv: 2105.06979 [astro-ph.HE].

OLAUSEN, S. A.; KASPI, V. M. The McGill Magnetar Catalog., v. 212, n. 1, 6, p. 6, mai. 2014. DOI: 10.1088/0067-0049/212/1/6. arXiv: 1309.4167 [astro-ph.HE].

OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On Massive Neutron Cores. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 55, p. 374–381, 4 fev. 1939. DOI: 10.1103/PhysRev.55.374.

PENG, G. X.; CHIANG, H. C. *et al.* Thermodynamics, strange quark matter, and strange stars. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 62, p. 025801, 2 jun. 2000. DOI: 10.1103/PhysRevC.62.025801.

PENG, G. X.; LI, A.; LOMBARDO, U. Deconfinement phase transition in hybrid neutron stars from the Brueckner theory with three-body forces and a quark model with chiral mass scaling. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 77, p. 065807, 6 jun. 2008. DOI: 10.1103/PhysRevC.77.065807.

PERES MENEZES, Débora; LAÉRCIO LOPES, Luiz. Quark matter under strong magnetic fields. **The European Physical Journal A**, Springer Science e Business Media LLC, v. 52, n. 2, fev. 2016. ISSN 1434-601X. DOI: 10.1140/epja/i2016-16017-2.

POLITZER, H. David. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 30, p. 1346–1349, 26 jun. 1973. DOI: 10.1103/PhysRevLett.30.1346.

POTEKHIN, A.Y.; YAKOVLEV, D. G.; HAENSEL, P. **Neutron Stars 1: Equation of State and Structure**. Nova Iorque: Springer, 2007.

RAFELSKI, Johann. Connecting QGP-Heavy Ion Physics to the Early Universe. **Nuclear Physics B - Proceedings Supplements**, Elsevier BV, v. 243-244, p. 155–162, out. 2013. ISSN 0920-5632. DOI: 10.1016/j.nuclphysbps.2013.09.017.

RAJAGOPAL, Krishna; WILCZEK, Frank. Static and dynamic critical phenomena at a second order QCD phase transition. **Nuclear Physics B**, Elsevier BV, v. 399, n. 2-3, p. 395–425, jul. 1993. ISSN 0550-3213. DOI: 10.1016/0550-3213(93)90502-g.

REED, Brendan T. *et al.* Implications of PREX-2 on the Equation of State of Neutron-Rich Matter. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 126, p. 172503, 17 abr. 2021. DOI: 10.1103/PhysRevLett.126.172503.

RÜSTER, Stefan B. *et al.* Phase diagram of neutral quark matter: Self-consistent treatment of quark masses. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 72, n. 3, ago. 2005. ISSN 1550-2368. DOI: 10.1103/physrevd.72.034004.

STRICKLAND, M.; DEXHEIMER, V.; MENEZES, D. P. Bulk properties of a Fermi gas in a magnetic field. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 86, p. 125032, 12 dez. 2012. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.125032.

THE ATNF Pulsar Catalogue. [*S.l.: s.n.*].  
<https://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat/>. Acesso em: 30-06-2021.

TOLMAN, Richard C. Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 55, p. 364–373, 4 fev. 1939. DOI: 10.1103/PhysRev.55.364.

TORRES, J. R.; MENEZES, D. P. Quark matter equation of state and stellar properties. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 101, n. 4, p. 42003, fev. 2013. DOI: 10.1209/0295-5075/101/42003.

TORRES, James Rudnei. **Transições de fases na matéria estranha e aplicações na matéria estelar**. 2016. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina.

WATTS, A. *et al.* Probing the neutron star interior and the Equation of State of cold dense matter with the SKA. *In: ADVANCING ASTROPHYSICS WITH THE SQUARE KILOMETRE ARRAY (AASKA14)*. Giardini Naxos, Italy: [s.n.], jun. 2014. (Proceedings of Science). 22 pages, 8 figures, to be published in: "Advancing Astrophysics with the Square Kilometre Array", Proceedings of Science, PoS(AASKA14)043.

WEBER, F.; NEGREIROS, R.; ROSENFELD, P. Neutron Star Interiors and the Equation of State of Superdense Matter. *In: W., Becker (Ed.). Neutron Stars and Pulsars*. Berlin: Springer, 2009. cap. 10, p. 213–241. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-540-76965-1\\_0](https://doi.org/10.1007/978-3-540-76965-1_0).

WEBER, Fridolin. **Pulsars as Astrophysical Laboratories for Nuclear and Particle Physics**. [S.l.]: CRC Press, 1999.

WITTEN, Edward. Cosmic separation of phases. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 30, p. 272–285, 2 jul. 1984. DOI: 10.1103/PhysRevD.30.272.

XIA, C. J. *et al.* Thermodynamic consistency, quark mass scaling, and properties of strange matter. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 89, p. 105027, 10 mai. 2014. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.105027.

XIAOPING, Zheng *et al.* Bulk viscosity of strange quark matter in a density-dependent quark mass model and dissipation of the  $r$  mode in strange stars. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 70, p. 015803, 1 jul. 2004. DOI: 10.1103/PhysRevC.70.015803.

ZHONG, Yang *et al.* A Systematic Study of Magnetic Field in Relativistic Heavy-Ion Collisions in the RHIC and LHC Energy Regions. **Advances in High Energy Physics**, Hindawi Limited, v. 2014, p. 1–10, 2014. ISSN 1687-7365. DOI: 10.1155/2014/193039.

ZYLA, P.A. *et al.* Review of Particle Physics. **PTEP**, v. 2020, n. 8, p. 083c01, 2020. DOI: 10.1093/ptep/ptaa104.

## APÊNDICE A – DEFINIÇÕES E CONVENÇÕES DE NOTAÇÃO

A seguir, serão apresentadas convenções adotadas na notação deste trabalho, além de algumas definições. A primeira convenção é o sistema de unidades natural, definido por  $\hbar = c = G = 1$ , onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo,  $\hbar$  é a constante de Plank dividida por  $2\pi$  e  $G$  é a constante de gravitação universal.

O tensor métrico utilizado é o de assinatura negativa, definido como

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (92)$$

As coordenadas contravariantes de um quadrivetor são

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x}), \quad (93)$$

e as covariantes são

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z) = (t, -\mathbf{x}). \quad (94)$$

O produto escalar entre dois quadrivetores é

$$D \cdot E = D_\mu E^\mu = D_0 E_0 - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}. \quad (95)$$

As derivadas contravariantes e covariantes são, respectivamente

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad (96)$$

e

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right). \quad (97)$$

A quadridivergência se torna, então,

$$\partial^\mu D_\mu = \frac{\partial D_0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{D}. \quad (98)$$

O quadrimomento relativístico é dado por

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_x). \quad (99)$$

O quadripotencial eletromagnético é dado por

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}), \quad (100)$$

onde  $\phi$  é o potencial elétrico (escalar) e  $\mathbf{A}$  é o potencial vetor.

As matrizes de Pauli são três matrizes unitárias  $2 \times 2$ , hermitianas e de traço nulo. São dadas por

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (101)$$

As matrizes de Dirac são quatro matrizes unitárias  $4 \times 4$  que possuem traço nulo. São dadas por

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_j \\ -\sigma_j & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (102)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz unitária  $2 \times 2$ ,  $\mathbf{0}$  é a matriz nula  $2 \times 2$  e  $\sigma^j$  são as matrizes de Pauli. Também é conveniente introduzir

$$\gamma^\mu = (\gamma_0, \vec{\gamma}), \quad \gamma_\mu = (\gamma_0, -\vec{\gamma}). \quad (103)$$

## APÊNDICE B – GÁS DE FÉRMIONS LIVRES

A descrição da matéria de quarks com o modelo DDQM, utilizado neste trabalho, depende diretamente da densidade do potencial termodinâmico de um gás de Fermi livre, que será expressa a seguir. A EoS de férmions livres pode ser obtida de diversas formas, sendo aqui expostos os cálculos a partir do tensor energia-momento. A densidade lagrangiana que descreve tais partículas é a lagrangiana de Dirac

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi, \quad (104)$$

onde  $\psi$  é o campo do férmion,  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac expressas no Apêndice A,  $m$  é a massa da partícula, e fez-se uso do sistema de unidades naturais ( $c = \hbar = 1$ ).

A obtenção analítica da densidade de energia ( $E$ ) e da pressão ( $P$ ) a partir da lagrangiana está associada ao tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\mathcal{L} + \partial_\nu q_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu q_i)} \right), \quad (105)$$

onde  $q_i$  são os campos das partículas, e  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico de Minkowski tal como expresso no Apêndice A. Para um sistema uniforme e em equilíbrio, também pode-se escrever

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = (E + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (106)$$

sendo que  $u_\mu$  equivale à quadrivelocidade do fluido. Ao levar o equilíbrio hidrostático em consideração, a quadrivelocidade é expressa como  $u_0 = 1$  e  $u_j = 0$ , i.e.,  $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$ . Dessa forma,  $u_0^2 = 1$  e  $|\mathbf{u}|^2 = 0$ . Com isso, é possível expressar as componentes do tensor energia-momento como

$$\langle T_{00} \rangle = (E + P)u_0^2 - P g_{00} \quad (107)$$

$$= E + P - P \quad (108)$$

e

$$\langle T_{ij} \rangle = (E + P)|\mathbf{u}|^2 - P g_{ij} \quad (109)$$

$$= 3P. \quad (110)$$

Assim, a densidade de energia pode ser expressa como

$$E = \langle T_{00} \rangle, \quad (111)$$

e a pressão como

$$P = \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle. \quad (112)$$

Ao aplicar a densidade lagrangiana da eq. (104) na definição do tensor energia momento, obtém-se

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} [\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\nu - m)\psi] + i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi. \quad (113)$$

O termo expresso entre colchetes contém a equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (114)$$

sendo essa a equação de movimento obtida a partir da densidade lagrangiana de Dirac. Como ela equivale a zero, segue que

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \langle i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi \rangle \quad (115)$$

$$E = \langle i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi \rangle \quad (116)$$

$$P = \frac{1}{3} \langle i\bar{\psi}\gamma_i\partial_i\psi \rangle. \quad (117)$$

É possível reescrever a equação de Dirac ao separar os índices temporais e espaciais na forma

$$[(i\gamma_0\partial_0 + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla) - m]\psi = 0, \quad (118)$$

onde é possível isolar os termos necessários para o cálculo da equação de estado. Primeiramente, isolaremos o termo correspondente à densidade de energia, obtendo

$$i\gamma_0\partial_0\psi = m\psi - i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla\psi \quad (119)$$

$$\bar{\psi}i\gamma_0\partial_0\psi = \psi^\dagger(\gamma_0 m - i\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla)\psi \quad (120)$$

$$= \psi^\dagger(\beta m - i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)\psi, \quad (121)$$

onde foi adotada a notação  $\gamma_0 = \beta$  e  $\boldsymbol{\gamma} = \beta\boldsymbol{\alpha}$ , além de  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$ . Ao fazer a identificação do operador momento linear,  $\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla$ , segue que

$$E = \langle i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi \rangle = \langle \Psi | \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m | \Psi \rangle. \quad (122)$$

Convém introduzir a densidade, dada por

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = g_i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (f_+ - f_-) = n_i, \quad (123)$$

onde  $g_j$  equivale à degenerescência do férmion, e  $f_{\pm}$  representa a distribuição de Fermi-Dirac para partículas e antipartículas, como será posteriormente discutido com maior cautela.

Da solução da equação de Dirac, tem-se que a energia pode ser obtida a partir da expressão

$$(\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m)^2 \Psi = E^2 \Psi. \quad (124)$$

Como termos cruzados não contribuem na equação de Dirac, obtém-se

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \quad (125)$$

$$E(\mathbf{p}) = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (126)$$

Retomando a eq. (122), tem-se que a densidade de energia é dada por

$$E = g_j \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} (f_+ + f_-) = \frac{g_j}{2\pi^2} \int \mathbf{p}^2 d\mathbf{p} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} (f_+ + f_-). \quad (127)$$

Os limites de integração compõe uma esfera de raio infinito no espaço dos momentos. Note que a passagem da última igualdade explicita que o problema possui simetria esférica.

Para obter a pressão, retomam-se os cálculos anteriores. Notando que

$$\vec{\alpha} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p} \frac{\partial E(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}^2}{E(\mathbf{p})}, \quad (128)$$

tem-se

$$P = \frac{1}{3} \langle -i \bar{\psi} \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \psi \rangle \quad (129)$$

$$= \frac{1}{3} \langle \psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \mathbf{p} \psi \rangle \quad (130)$$

$$= \left\langle \Psi \left| \frac{\mathbf{p}^2}{E(\mathbf{p})} \right| \right\rangle \quad (131)$$

$$P = \frac{g_j}{3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{p}^2}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} (f_+ + f_-) = \frac{g_j}{6\pi^2} \int d\mathbf{p} \frac{\mathbf{p}^4}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} (f_+ + f_-). \quad (132)$$

Assim, resta apenas definir as funções de distribuição de partículas e anti-partículas para que a equação de estado da matéria fermiônica esteja bem definida. Elas respectivamente são definidas como

$$f_{\pm} = \frac{1}{1 + \exp[(E(\mathbf{p}) \mp \mu)\beta]}, \quad (133)$$

onde  $\beta = 1/k_B T$ , onde  $T$  é a temperatura e  $k_B$  é a constante de Boltzmann, frequentemente tomada como  $k_B = 1$  em unidades naturais.

A partir de tal definição, fica evidente a dependência da temperatura na EoS. Um caso particular de interesse é o de  $T = 0$ , dado que grande parte dos resultados expostos neste trabalho se encontram nesse regime. Tal regime é válido quando a energia térmica é desprezível diante da energia total das partículas, i.e.,

$$k_B T \ll E = \sqrt{p^2 + m^2}. \quad (134)$$

Tomando o limite das funções de distribuição em que a temperatura tende à zero, obtém-se

$$\lim_{T \rightarrow 0} f_{\pm} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \exp \left[ \frac{E(p) \mp \mu}{k_B T} \right]} = 0 \quad (135)$$

e

$$\lim_{T \rightarrow 0} f_{+} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \exp \left[ \frac{E(p) \mp \mu}{k_B T} \right]} = \Theta(E(p) - \mu), \quad (136)$$

onde  $\Theta(E(p) - \mu)$  é a função degrau de Heaviside. Assim, não há antipartículas no regime sem temperatura, e todas as partículas possuem energia menor que seu potencial químico.

Convém observar a Figura 28 para melhor compreender o limite de  $T = 0$ . A energia em que  $E = \mu$  corresponde à energia do último nível ocupado na distribuição, chamado de energia de Fermi. Em virtude de as integrais da EoS serem avaliadas no espaço dos momentos, é útil reescrever a função degrau como  $\Theta(p - p_F)$ , onde  $p_F$  é o momento referente ao nível de Fermi, dado por  $E_f = \sqrt{p_F^2 + m^2}$ .

Ao substituir as funções de distribuição para o limite de temperatura nula, a função degrau modifica os limites de integração das quantidades termodinâmicas. Assim, a densidade dada pela eq. (123) se torna

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{g_i p_F^3}{6\pi^2}. \quad (137)$$

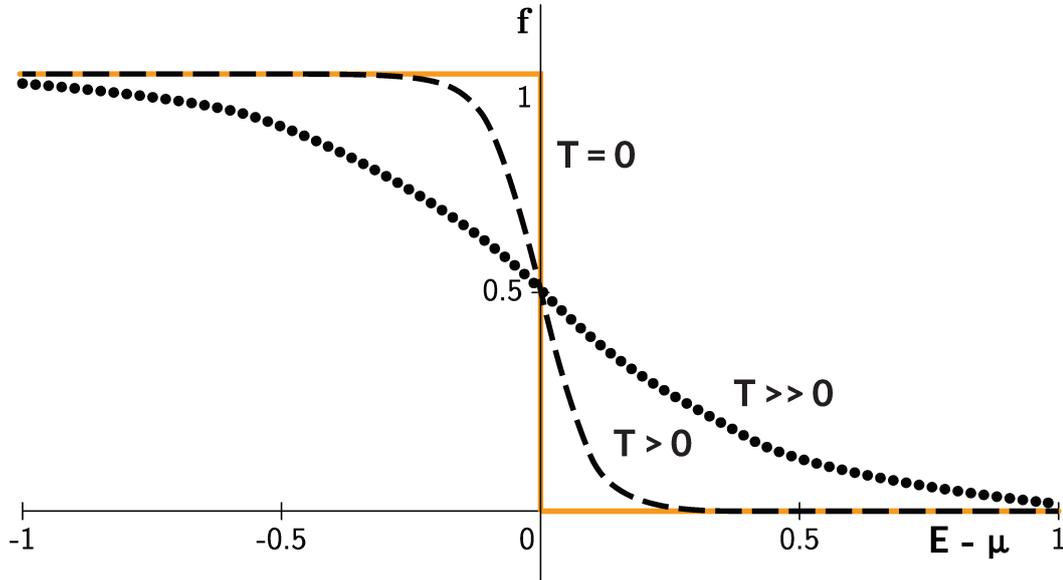
Similarmente, a eq. (127) pode ser reescrita como

$$E = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^{p_F} p^2 dp \sqrt{p^2 + m^2} \quad (138)$$

$$= \frac{g_i}{16\pi^2} [\mu p_F (\mu^2 - m^2) - m^4 \ln(p_F + \mu)], \quad (139)$$

e a eq. (132) como

Figura 28 – Distribuição de partículas para diferentes temperaturas. Figura de Kevin Schroeder. Adaptado de (GREINER; NEISE; STÖCKER, 1997).



$$P = \frac{g_i}{6\pi^2} \int_0^{p_F} dp \frac{p^4}{\sqrt{p^2 + m^2}} \quad (140)$$

$$= \frac{3g_i}{24\pi^2} \left[ \mu p_F \left( \frac{2}{3} p_F^2 - m^2 \right) + m^4 \ln \left( \frac{p_F + \mu}{m} \right) \right]. \quad (141)$$

Como a EoS do modelo DDQM depende da densidade de potencial termodinâmico de um gás de férmions livres, convém mencionar que a definição de densidade de potencial termodinâmico ( $\Omega$ ) é

$$\Omega = E - TS = -P. \quad (142)$$

Assim, pode-se facilmente obter essa quantidade da eq. (132) para temperatura finita, ou da eq. (141) para o regime de temperatura nula.

## APÊNDICE C – GÁS DE FÉRMIONS LIVRES NA PRESENÇA DE CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO

A descrição da matéria de quarks a partir do modelo DDQM com campo magnético, como expresso no Capítulo 4, depende da densidade de potencial termodinâmico de um gás de férmions livres na presença de campo magnético. A obtenção da EoS nessas condições pode partir do tensor energia momento, como exposto em (STRICKLAND; DEXHEIMER; MENEZES, 2012; CHAKRABARTY, S., 1996), em uma abordagem similar à apresentada no Apêndice B para férmions livres. Todavia, por motivos de simplicidade, adotaremos a abordagem apresentada em (LOPES, 2012), sem fazer uso do tensor energia-momento. Para isso, primeiramente discutiremos os efeitos da influência de um campo magnético uniforme na equação de Dirac, para apenas então discutir a EoS do gás de férmions livres.

### C.1 A EQUAÇÃO DE DIRAC NA PRESENÇA DE UM CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO

Tanto no caso da matéria puramente de quarks quanto no caso da matéria estelar, dentro do que se considerou neste trabalho, todas as partículas envolvidas são férmions de spin 1/2. Desse modo, suas equações de movimento são obtidas a partir da equação de Dirac, que na presença de um campo magnético uniforme, é dada por

$$(\gamma^\mu(p_\mu - eA_\mu) - m)\Psi = 0. \quad (143)$$

Na notação empregada,  $p_\mu$  é o quadrimomento,  $e$  é a carga elétrica da partícula e  $A_\mu$  é o quadripotencial eletromagnético. Abrindo a eq. (143) em componentes, tem-se

$$\left( \gamma^0(p_0 - eA_0) - \gamma^1(p_1 - eA_1) - \gamma^2(p_2 - eA_2) - \gamma^3(p_3 - eA_3) - m \right) \Psi = 0. \quad (144)$$

Na ausência de campo elétrico, o potencial escalar é nulo, de modo que  $A_0 = 0$ . Fazendo a identificação de que  $p_0 = E$  no sistema de unidades natural, obtém-se

$$\begin{pmatrix} (E - m) & -\sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \\ \sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) & -(E + m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0, \quad (145)$$

que é a representação matricial de um sistema de equações. Isolando  $u_A$  e  $u_B$  na eq. (145), obtém-se a seguinte equação de auto-valores

$$(\sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}))^2 u_A = (E^2 - m^2) u_A. \quad (146)$$

Antes de solucionar essa equação, é preciso escolher o *gauge* do campo. De-sejamos estudar a influência de um campo magnético uniforme, sendo que, ao fixar

a direção do campo como a direção  $z$ , é necessária a escolha de um dos possíveis *gauges* que reproduza tais condições. Uma das possibilidades é

$$A_0 = A_2 = A_3 = 0, \quad A_1 = -By. \quad (147)$$

Com isso, o primeiro termo da equação de auto-valores se torna

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}))^2 &= (\sigma_x (p_x + eBy) + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z)^2 = \\ &= p_x^2 + 2eBy p_x + (eBy)^2 + p_y^2 + p_z^2 + \sigma_x p_x \sigma_y p_y + \sigma_y p_y \sigma_x p_x + \\ &+ \sigma_x p_x \sigma_z p_z + \sigma_z p_z \sigma_x p_x + \sigma_y p_y \sigma_z p_z + \sigma_z p_z \sigma_y p_y + \\ &+ eB (\sigma_x y \sigma_y p_y + \sigma_y p_y \sigma_x y) + eB (\sigma_x y \sigma_z p_z + \sigma_z p_z \sigma_x y). \end{aligned} \quad (148)$$

Ao analisar os termos resultantes, é conveniente utilizar as regras de comutação dos operadores  $x$  e  $p$ , além das regras de comutação das matrizes de Pauli

$$[x_i, p_j] = i\delta_{ij}, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}. \quad (149)$$

Dessa forma, é possível simplificar os termos da eq. (148), reduzindo o lado direito da equação a

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + 2eBy p_x + (eBy)^2 + eB (\sigma_x y \sigma_y p_y + \sigma_y p_y \sigma_x y), \quad (150)$$

onde o último termo pode ser simplificado ao notar que

$$\begin{aligned} eB \left[ \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -ip_y \\ ip_y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ip_y \\ ip_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} \right] = \\ eB \begin{pmatrix} iyp_y - ip_y y & 0 \\ 0 & -(iyp_y - ip_y y) \end{pmatrix} = ieB y, p_y] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ = -eB \sigma_z. \end{aligned} \quad (151)$$

Assim, a eq. (146) pode ser reescrita como

$$p^2 + (eB)^2 y^2 + eB (2yp_x - \sigma_z) u_A = (E^2 - m^2) u_A. \quad (152)$$

Como as coordenadas  $t$ ,  $x$  e  $z$  não aparecem explicitamente na expressão acima, suas soluções são ondas planas. A solução para  $u_A$  pode então ser dada por

$$u_A = \exp \{i (Et - p_x x - p_z z)\} F(y). \quad (153)$$

Devido à presença de  $\sigma_z$  na eq. (152), há duas equações distintas. Note que elas diferem apenas pelos autovalores da matriz  $\sigma_z$ , i.e.,  $s = \pm 1$ . Utilizando as regras

de quantização para os operadores  $p$ , é possível reescrever ambas as equações de uma forma compacta, dada por

$$\frac{d^2 F_s}{dy^2} - (eBy + p_x)^2 F_s + (E^2 - m^2 - p_z^2 + eBs) F_s = 0. \quad (154)$$

Convém fazer uma mudança de variável, chamando  $(eBy + p_x)$  de  $v\sqrt{|e|B}$ , onde a carga da partícula deve ser tomada em módulo. A partir desta substituição, tem-se que

$$\begin{aligned} (eBy + p_x) &= v\sqrt{|e|B}, & v &= \frac{1}{\sqrt{|e|B}} (eBy + p_x), & dv &= \sqrt{|e|B} dy, \\ \frac{dF}{dy} &= \frac{dF}{dv} \frac{dv}{dy} = \sqrt{|e|B} \frac{dF}{dv}, & \frac{d^2 F}{dy^2} &= \frac{d}{dy} \frac{dF}{dy} = \sqrt{|e|B} \frac{d}{dy} \frac{dF}{dv} = |e|B \frac{d^2 F}{dv^2}. \end{aligned} \quad (155)$$

Assim, podemos reescrever a eq. (154), levando a

$$\begin{aligned} (|e|B) \frac{d^2 F_s}{dv^2} - (|e|B)v^2 F_s + (E^2 - m^2 - p_z^2 + eBs) F_s &= 0 \\ \frac{d^2 F_s}{dv^2} - v^2 F_s + \frac{(E^2 - m^2 - p_z^2 + eBs)}{(|e|B)} F_s &= 0, \end{aligned} \quad (156)$$

que possui a mesma forma do oscilador harmônico quântico. A partir disso, sabemos que para que a solução exista, é necessário que

$$\frac{(E^2 - m^2 - p_z^2 + eBs)}{(|e|B)} = 2l + 1. \quad (157)$$

Assim, os autovalores da energia se tornam

$$E = \sqrt{m^2 + p_z^2 + (2l + 1)|e|B - eBs}, \quad (158)$$

de modo que haja mais de uma solução para cada partícula, dependendo da carga e da orientação do seu spin.

Vale ressaltar que a solução obtida está intimamente ligada ao *gauge* escolhido. Dessa forma, quando tomamos o limite em que  $B \rightarrow 0$ , a expressão para a partícula livre não é recuperada. Além disso, essa solução só é válida para partículas carregadas, de modo que, caso se deseje descrever um férmion de spin 1/2 de carga nula, como o nêutron, deve-se utilizar a abordagem discutida no Apêndice B.

### C.1.1 Degenerescências

Finalizadas as contas, convém mudar a notação da carga elétrica. Agora, denotamos-na como  $eQ_e$ , onde  $e$  é a carga do elétron e  $Q_e$  é a carga de cada partícula em múltiplos da carga do elétron.

Vamos avaliar a eq. (158) com mais cuidado. É possível reescrevê-la na forma

$$E = \sqrt{m^2 + p_z^2 + 2\nu|Q_e|eB}, \quad (159)$$

onde  $\nu$  é o nível de Landau, definido como

$$\nu = l + \frac{1}{2} - \frac{s}{2} \frac{Q_e}{|Q_e|}. \quad (160)$$

Dessa maneira, como  $s = \pm 1$ , fica evidente que os níveis de energia não dependem do sinal da carga da partícula. Ao supor uma partícula de carga positiva, podemos avaliar o valor dos níveis de Landau, exposto na Tabela 4.

$l$	$s$	$\nu$
0	1	0
0	-1	1
1	1	1
1	-1	2
2	1	2

Tabela 4 – Níveis de Landau obtidos ao variar a projeção do spin e o momento angular orbital.

Assim, o estado fundamental não possui energia degenerada, mas todos os outros níveis de Landau possuem degenerescência de ordem 2. Lembrando que a degenerescência de spin para férmions livres de spin 1/2 é sempre 2, tem-se que na presença do campo magnético essa degenerescência será apenas metade do valor usual quando  $\nu = 0$ .

## C.2 A EQUAÇÃO DE ESTADO DO GÁS DE FÉRMIONS LIVRES NA PRESENÇA DE UM CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO

A partir do que foi discutido, é possível obter a EoS do gás de férmions livres na presença de um campo magnético externo. É importante notar que, diferentemente do gás de férmions livres discutido no Apêndice B, onde não havia direção preferencial e o problema possuía simetria esférica, neste caso é necessário distinguir as direções. Devido à presença de um campo magnético na direção  $z$ , a simetria do problema se torna cilíndrica.

A energia de uma partícula livre é dada por

$$E = \sqrt{m^2 + p^2} = \sqrt{m^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}, \quad (161)$$

que ao comparar com a energia na presença de campo magnético, dada pela eq. (159), leva a

$$p_x^2 + p_y^2 = p_\rho^2 = 2\nu|Q_e|eB. \quad (162)$$

A densidade de estados disponíveis por momento, para cada nível de Landau, é dada por

$$dn = g(\nu) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = \frac{g(\nu) p_\rho dp_\rho d\phi dp_z}{(2\pi)^3} = \frac{|Q_e| eB}{2\pi^2} g(\nu) dp_z, \quad (163)$$

onde  $g(\nu)$  é a degenerescência associada ao nível de Landau, que conforme discutido, vale metade do valor usual quando  $\nu = 0$ .

A densidade das partículas é obtida ao integrar a eq. (163) e somando todos os níveis de Landau

$$n = \frac{|Q_e| eB}{2\pi^2} \sum_\nu g(\nu) \int (f_+ - f_-) dp_z. \quad (164)$$

As distribuições de partículas e antipartículas são, respectivamente,  $f_+$  e  $f_-$ , conforme discutido no Apêndice B. À temperatura zero, obtém-se

$$n = \frac{|Q_e| eB}{2\pi^2} \sum_\nu g(\nu) \bar{\rho}_F(\nu), \quad (165)$$

onde  $\bar{\rho}_F(\nu)$  é o momento de Fermi modificado pela presença do campo magnético. É conveniente introduzir a notação  $\bar{m}_i = \sqrt{m_i^2 + 2|Q_{ei}|eB\nu}$  como a massa da partícula modificada pelo campo magnético. Dessa forma, à temperatura zero se tem que

$$E_F = \mu = \sqrt{\bar{m} + \bar{p}_F^2}, \quad (166)$$

de modo que  $\bar{p}_F$  possa ser escrito explicitamente como

$$\bar{p}_F(\nu) = \sqrt{\mu^2 - \bar{m}}. \quad (167)$$

A densidade de energia, aqui denotada como  $\epsilon$  para que não haja conflito de notação, pode ser obtida a partir de

$$d\epsilon = E dn. \quad (168)$$

Ao integrar a equação acima, tem-se que

$$\epsilon = \sum_\nu \frac{g(\nu)}{2\pi^2} |Q_e| eB \int \sqrt{p_z^2 + \bar{m}^2} (f_+ + f_-) dp_z, \quad (169)$$

e à temperatura zero

$$\epsilon(T = 0) = \sum_\nu \frac{f(\nu)}{2\pi^2} |Q_e| eB \frac{1}{2} \left[ \bar{p}_F \mu + \bar{m}^2 \ln \left| \frac{\bar{p}_F + \mu}{\bar{m}} \right| \right]. \quad (170)$$

Para obter a pressão, convém retomar que, da termodinâmica

$$P = -\frac{\partial U}{\partial V} = n^2 \frac{d}{dn} (\epsilon/n) = n \frac{d\epsilon}{dn} - \epsilon, \quad (171)$$

onde para evitar conflitos de notação, denotamos a energia interna do sistema como  $U$ , em detrimento da notação usual no restante deste trabalho. Sabendo que  $d\epsilon = E dn$ , podemos escrever

$$P = nE - \epsilon. \quad (172)$$

Como desejamos a pressão em função dos momentos, é conveniente escrever

$$\frac{dP}{dp_z} = \frac{dn}{dp_z} E + n \frac{dE}{dp_z} - \frac{d\epsilon}{dp_z}, \quad (173)$$

onde a densidade de estados é dada pela eq. (163),  $E$  está expresso na eq. (159) e  $d\epsilon$  na eq. (168). O primeiro e o último termo se cancelam, de modo que tenhamos que

$$\frac{dP}{dp_z} = \frac{|Q_e|eB}{2\pi^2} \frac{p_z^2}{\sqrt{\bar{m}^2 + p_z^2}}. \quad (174)$$

Ao integrar a equação acima, obtém-se a pressão

$$P = \sum_{\nu} \frac{g(\nu)}{2\pi^2} |Q_e| eB \int \frac{p_z^2}{\sqrt{p_z^2 + \bar{m}^2}} (f_+ + f_-) dp_z, \quad (175)$$

que à temperatura zero se torna

$$P(T=0) = \sum_{\nu} \frac{g(\nu)}{2\pi^2} |Q_e| eB \frac{1}{2} \left[ \bar{p}_F \mu - \bar{m}^2 \ln \left| \frac{\bar{p}_F + \mu}{\bar{m}} \right| \right]. \quad (176)$$

É importante ressaltar que o desenvolvimento apresentado neste apêndice até então descreve apenas a contribuição da matéria para a equação de estado do sistema. Dessa forma, lembrando que o potencial termodinâmico é o oposto da pressão, i.e.,  $\Omega = -P$ , tal quantidade pode ser obtida diretamente da eq. (176). A contribuição da matéria para o potencial termodinâmico de um gás de Fermi livre na presença de campo magnético, denotada como  $\Omega_m^0$  no Capítulo 4, é uma quantidade importante da obtenção da EoS da matéria de quarks a partir do modelo DDQM.

### C.2.1 Valor máximo dos níveis de Landau

Devido à quantização da energia nas direções perpendiculares ao campo magnético, as quantidades termodinâmicas são obtidas ao somar sobre os níveis de Landau. À temperatura zero, é necessário garantir que o momento de Fermi exista e seja superior a zero. Dessa forma, é possível utilizar a eq. (167) para definir um nível máximo no qual a soma é feita à temperatura nula. Assim, obtém-se

$$\nu_{\max} = \frac{E_F^2 - m^2}{2|Q_e|eB} = \frac{\mu^2 - m^2}{2|Q_e|eB}. \quad (177)$$

### C.2.2 A contribuição do campo magnético

Além da contribuição da matéria à equação de estado, o próprio campo eletromagnético também acrescenta à pressão e à densidade de energia do sistema. Nas unidades naturais de Heaviside-Lorentz e na presença de um campo magnético na direção  $z$ , o tensor energia momento do campo eletromagnético toma a forma (STRICKLAND; DEXHEIMER; MENEZES, 2012)

$$T_{\text{campo EM}}^{\mu\nu} = \text{diag}(B^2/2, B^2/2, B^2/2, -B^2/2). \quad (178)$$

Ao considerar a matéria como sendo completamente isotrópica, valem as definições do tensor energia momento discutidas no Apêndice B. A partir disso, tem-se que a equação de estado do sistema será dada por

$$E_{\text{total}} = E + \frac{B^2}{2} \quad (179)$$

e

$$P_{\text{total}} = P + \frac{B^2}{2}. \quad (180)$$

## APÊNDICE D – AS EQUAÇÕES DE TOLMAN-OPPENHEIMER-VOLKOFF

Ao almejar fazer a ponte entre a microfísica da equação de estado e a macrofísica de uma estrela, é necessário levar em consideração as equações que descrevem a matéria densa nas condições de equilíbrio hidrostático, dado que estrelas compactas são suficientemente estáveis em sua estrutura interna. Para isso, na situação de equilíbrio, é necessário determinar a relação entre a força gravitacional e a pressão de degenerescência da matéria estelar. Dado que estrelas de nêutrons são objetos extremamente massivos, cujo campo gravitacional é intenso, todas as considerações precisam ser feitas dentro do âmbito da relatividade geral.

As equações para o equilíbrio hidrostático relativístico são deduzidas a partir das equações de Einstein, descrevendo a estrela como uma distribuição de matéria esfericamente simétrica e estática, que se comporta como um fluido perfeito. Tais equações foram obtidas simultaneamente por Tolman, e Oppenheimer e Volkoff (TOLMAN, 1939; OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939), sendo conhecidas como as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). Elas são dadas por

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{mE}{r^2} \left(1 + \frac{P}{E}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{m}\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \quad (181)$$

e

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi E r^2, \quad (182)$$

onde  $E$  e  $P$  são, respectivamente, a densidade de energia e a pressão na camada de raio  $r$ . A eq. (181) dá o balanço entre a pressão de degenerescência, que vai em direção ao exterior da estrela, e a gravidade causada pela massa  $m$  dentro de um raio  $r$ . A eq. (182) é mais simples, ditando o aumento na massa conforme uma camada de matéria é adicionada. Os cálculos envolvidos na obtenção das eqs. (181) e (182) fogem do escopo deste trabalho, mas se encontram disponíveis em (KUMAR, 2018; WEBER, 1999; GLENDENNING, 2000).

As equações de TOV podem ser integradas desde a origem, com a condição inicial  $M(0) = 0$  e um valor arbitrário para a densidade de energia central,  $E(0)$ , até que a pressão  $P(R)$  se torne zero em um raio  $R$ .  $R$  corresponde ao raio da estrela, dado que à pressão zero, a atração gravitacional da estrela não suporta mais matéria sobreposta. A massa gravitacional da estrela é dada por  $M(R)$ . Para uma dada EoS, há apenas uma relação possível entre a massa e a densidade central de energia,  $E(0)$ . Dessa forma, para cada equação de estado, existe uma única família de estrelas, parametrizada pela densidade de energia central ou pressão central.

A título de comparação, a equação de equilíbrio hidrostático newtoniana, análogo clássico da TOV, é dada por

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Em}{r^2}. \quad (183)$$

É simples notar que a TOV possui correções, todas oriundas da relatividade geral. Além disso, a pressão aumenta de forma muito mais rápida no caso relativístico, de modo que objetos esféricos e estacionários estejam sujeitos a maiores forças gravitacionais do que a descrição clássica prevê. Assim, as correções relativísticas possuem um papel importante no contexto do estudo de estrelas de nêutrons, diminuindo o raio obtido para uma mesma massa quando comparada com a versão newtoniana.