



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS TRINDADE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

João Victor Zamperlini dos Santos

**Estudo da matéria hadrônica em condições extremas na presença de campos elétricos
e magnéticos fortes**

Florianópolis

2021

João Victor Zamperlini dos Santos

Estudo da matéria hadrônica em condições extremas na presença de campos elétricos e magnéticos fortes

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Física.
Orientador: Prof. Sidney dos Santos Avancini, Dr.

Florianópolis

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Santos, João Victor

Estudo da matéria hadrônica em condições extremas na presença de campos elétricos e magnéticos fortes / João Victor Santos ; orientador, Sidney dos Santos Avancini, 2021.

83 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Física. 2. Modelo de Nambu-Jona Lasinio. 3. Lagrangiana de Euler-Heisenberg. 4. Modelos Efetivos da QCD. 5. Taxa de Criação de Pares de Schwinger. I. dos Santos Avancini, Sidney. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

João Victor Zamperlini dos Santos

Estudo da matéria hadrônica em condições extremas na presença de campos elétricos e magnéticos fortes

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Ricardo Luciano Sonogo Farias, Dr.
Universidade Federal de Santa Maria

Prof. Marcus Emmanuel Benghi Pinto, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Celso De Camargo Barros Junior, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Física.

Prof. Ivan Helmuth Bechtold, Dr.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Física

Prof. Sidney dos Santos Avancini, Dr.
Orientador

Florianópolis, 02 de Agosto de 2021.

À todos que acumulam gotas de curiosidade o suficiente para
combater as chamas da ignorância.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família, em especial aos meus pais por todo apoio, esforço, cuidado e ajuda que me deram em todos os momentos.

À minha namorada e meu amor, Júlia Thainá, por ser um exemplo de dedicação e determinação e por me fazer uma pessoa melhor todos os dias.

À todos os cientistas e seus trabalhos que direta e/ou indiretamente foram base para esta dissertação.

Ao professor Sidney pela orientação e auxílio nos cálculos e conceitos.

À banca examinadora: Prof. Dr. Ricardo Luciano Sonego Farias, Prof. Dr. Marcus Emmanuel Benghi Pinto e Prof. Dr. Celso De Camargo Barros Junior pela excelente avaliação do trabalho e pelos diversos comentários pertinentes e necessários.

À CAPES pelo apoio financeiro, que foi essencial para a conclusão desta dissertação, sobretudo em meio à pandemia.

À todos que de alguma forma estiveram presentes nos momentos da minha vida que precisei de ajuda.

*“Nature uses only the longest threads
to weave her patterns,
so each small piece of her fabric reveals
the organization of the entire tapestry.”
(Richard P. Feynman)*

RESUMO

Numa colisão de íons pesados ou no interior de estrelas de nêutrons encontramos partículas de spin $1/2$, com carga de cor que interagem majoritariamente pela força forte, designadas como quarks, formando a matéria hadrônica, nestes tipos de sistema podemos ter fortes campos eletromagnéticos da ordem de m_π^2 , a massa do pión ao quadrado. A matéria hadrônica é descrita pela Cromodinâmica Quântica (QCD), no entanto para um regime de baixas energias os cálculos são muito extensos, e devido à constante de acoplamento da QCD, a teoria perturbativa não é possível e, portanto, uma possibilidade é nos ater ao uso de modelos efetivos, que incorporam as principais simetrias da teoria. É feito então um estudo da matéria de quarks de acordo com o modelo efetivo de Nambu-Jona Lasinio $SU(2)$, no qual se considera apenas os sabores de quark up e down, e feita uma análise adicionando efeitos não-lineares da Eletrodinâmica Quântica (QED), através do uso da lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg. Da lagrangiana completa obtemos a equação de *gap* que dita qual a massa efetiva dos quarks no modelo. Discutimos o comportamento da massa efetiva em três situações diferentes, com campo magnético constante, elétrico constante e magnético e elétrico constantes paralelos entre si. Na primeira situação conseguimos notar o comportamento ditado pelo fenômeno da catálise magnética, na segunda conseguimos notar o contrário, a catálise inversa, mostrando que o campo elétrico tende a restaurar a simetria quiral do modelo. Já no terceiro caso foi feito um gráfico em três dimensões que mostra uma superfície de massa efetiva em função dos dois campos simultaneamente, e posteriormente foram feitos gráficos a partir desta, onde notamos o comportamento limite de campo elétrico nulo e magnético nulo separadamente, além disso, analisamos o comportamento em função dos dois campos em mesma intensidade, a fim de analisar esta competição entre fenômenos. Este último mostra que à campos mais intensos, em geral, o efeito do campo elétrico é mais presente e faz com que o resultado seja a diminuição da massa efetiva. Além dos resultados para a massa efetiva, calculamos outro resultado, previsto pela QED: a taxa de produção de pares de Schwinger, Γ especificamente a taxa em GeV^4 para a produção de pares quark-antiquark na aproximação do modelo no caso de campo elétrico e magnético paralelos e, então, obtivemos uma superfície de Γ em função dos dois campos e tomamos o limite de campo magnético nulo a fim de retomarmos o resultado de apenas campo elétrico já calculado na literatura. E finalmente analisamos o comportamento pressão da matéria em função da intensidade dos campos elétricos e magnéticos.

Palavras-chave: Nambu-Jona Lasinio. Lagrangiana de Euler-Heisenberg. Modelos Efetivos da QCD.

ABSTRACT

On a heavy-ion collision or inside a neutron star we find particles of spin $1/2$, color charged, interacting mainly by the strong force, called quarks, composing the hadronic matter. In these types of systems, it is possible to obtain electromagnetic fields of the order of m_π^2 , the square of the pion mass. The hadronic matter is described by the theory of Quantum Chromodynamics (QCD), however in a low energy regime the calculations become extensive, and due to the QCD running coupling constant, the perturbative theory is not possible. So an option is the use of effective models, that embed the main symmetries of the full theory. In this work, it is done a study of the quark matter accordingly to the two-flavor Nambu-Jona Lasinio model, which it is considered only the up and down quark flavors, and it is done an analysis adding non-linear effects from QED (Quantum Electrodynamics) through the use of the effective lagrangian of Euler and Heisenberg. From the complete lagrangian, we obtain the gap equation that dictates the effective mass of the quarks in the model. We discuss the behavior of the effective mass in three different scenarios: adding only magnetic field, only electric field, and adding both magnetic and electric field parallel. From the first scenario, we can notice the behavior dictated by the phenomenon of magnetic catalysis. From the second one, we can notice the opposite, the inverse catalysis, demonstrating that the electric field tends to restore the chiral symmetry of the model. Finally, in the third scenario, we produced an effective mass surface plot as a function of both fields, so we could evaluate the limit of null magnetic field and null electric field separately, beyond that, we obtain the behavior of both fields increasing in the same intensity, in order to analyze this competition between phenomena. This last result shows that for the most intense fields, in general, the effect of the electric field is predominant and makes the effective mass decrease. Beyond the results for effective mass, we calculate another result predicted by the QED: the Schwinger pair production rate, Γ , specifically the rate in units of GeV^4 for the production of quark-antiquark pairs in our approximation within the model in the case of magnetic and electric fields parallel. We obtained a Γ surface plot as a function of both fields and evaluated the limit of null magnetic field so we could summarize the known result of only the electric field already described in the literature. Finally, we evaluate and analyze the behavior of the pressure of the matter as a function of the magnetic and electric field intensities.

Keywords: Nambu-Jona Lasinio Model. Euler-Heisenberg Lagrangian. Effective Models of QCD.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama das partículas descritas pelo Modelo Padrão.	13
Figura 2 – Valores da constante de acoplamento da QCD, α_s , em função do momento Q . . .	15
Figura 3 – Esquema do diagrama de fases da QCD.	18
Figura 4 – Esquema de como o campo magnético altera o diagrama de fases da QCD. . . .	19
Figura 5 – Esquema no momento da colisão de íons pesados considerando a contração de Lorentz.	20
Figura 6 – Função de gap para o modelo de NJL à temperatura e potenciais químico nulos sem campos adicionais, para quatro conjuntos de parâmetros conforme a Tabela 2.	27
Figura 7 – Gráfico da Massa efetiva obtida pelo modelo NJL na presença de um campo magnético constante B , em função de eB , dividida pela massa efetiva à campo nulo.	46
Figura 8 – Gráfico da Massa efetiva obtida pelo modelo NJL na presença de um campo elétrico constante E , em função de eE , dividida pela massa efetiva à campo nulo.	47
Figura 9 – Superfície de massa efetiva para o modelo NJL em $SU(2)$ em função de eE e eB constantes e paralelos entre si.	48
Figura 10 – Valores de massa efetiva do modelo NJL em $SU(2)$ em função de eB para distintos valores de eE fixos.	49
Figura 11 – Valores de massa efetiva do modelo NJL em $SU(2)$ em função de eE para distintos valores de eB fixos.	49
Figura 12 – Exemplos de mínimos de potencial, Ω_{NJL} , para três eB e um conjunto de eE fixos.	50
Figura 13 – Exemplos de mínimos de potencial, Ω_{NJL} , para três eE e um conjunto de eB fixos.	51
Figura 14 – Valores de massa efetiva do modelo NJL em $SU(2)$ em função da intensidade do campo eE e eB mantendo ambos igualmente intensos.	52
Figura 15 – Valores de massa efetiva do modelo NJL em $SU(2)$ em função da intensidade do campo elétrico eE (na curva em preto, em traço e ponto, para $B=0$), em função da intensidade do campo magnético eB (na curva em vermelho, tracejada, para $E=0$) e em função de $eB=eE$ no caso dos campos em mesma intensidade, na curva azul, contínua.	53
Figura 16 – Diversas curvas de massa efetiva em função de eB , onde as curvas variam do roxo, com o campo elétrico mais forte, $E=B$, para o vermelho, com o campo elétrico mais fraco, com $E=B/(5.1)$	54
Figura 17 – Curvas da Pressão da matéria hadrônica descrita pelo modelo em função de eB para valores de campos elétricos selecionados.	55
Figura 18 – Curvas da Pressão da matéria hadrônica descrita pelo modelo em função de eE para valores de campos magnéticos selecionados.	56

Figura 19 – Gráfico da Pressão aplicada na massa efetiva em função de $eE (= eB)$, considerando que em cada ponto os valores de campo elétrico e magnético são iguais.	56
Figura 20 – Superfície de taxa de criação de pares em função dos campos elétrico $\vec{E} = E\hat{z}$ e magnético $\vec{B} = B\hat{z}$	57
Figura 21 – Gráfico da Taxa de produção de pares em função do campo magnético para diversos valores de campo elétrico fixos.	58
Figura 22 – Taxa de produção de pares em função de eE para valores selecionados de eB	59
Figura 23 – Taxa de produção em função do campo elétrico vezes a carga elementar, eE	59
Figura 24 – Figura de comparação do trabalho desta dissertação com o de Wang <i>et al.</i> (2018) no que se refere ao comportamento da curva de massa efetiva em função do invariante de Lorentz EB	61
Figura 25 – Figura de comparação do trabalho desta dissertação com o de Ruggieri e Peng (2016) no que se refere ao comportamento da curva de massa efetiva em função do campo magnético (eB).	62

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	QCD e a Matéria Hadrônica	14
1.1.1	Diagrama de Fases da QCD	17
1.2	Campos Fortes e Colisões de íons pesados	18
1.3	Modelos Efetivos	21
2	O MODELO DE NAMBU-JONA LASINIO	22
2.1	Formulação	22
2.2	Potencial Termodinâmico e a Equação de gap	25
3	MODELO NJL NA PRESENÇA DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS	29
3.1	Lagrangiana de Euler-Heisenberg	30
3.1.1	Caso de Campo Magnético Puro	32
3.1.2	Caso de Campo Elétrico Puro	32
3.1.3	Caso de \vec{E} e \vec{B} paralelos entre si	33
3.2	Taxa de criação de Pares	34
3.2.1	Taxa de produção de pares de quarks no modelo NJL em SU(2)	35
3.3	Renormalização da carga, função- β da QED e limite de campo forte	36
3.4	Modelo NJL com campo magnético - Catálise Magnética	38
3.5	Modelo NJL com campo elétrico - Restauração da Simetria Quiral	38
3.6	Modelo NJL com Campo Elétrico e Magnético - Regularização do Potencial Efetivo e da Equação de Gap	39
4	RESULTADOS	45
4.1	Massa Efetiva com Campo Magnético Constante	45
4.2	Massa Efetiva com Campo Elétrico Constante	46
4.3	Massa Efetiva com Campo Elétrico e Magnético paralelos	47
4.4	Pressão Efetiva do modelo com campos paralelos	54
4.5	Taxa de criação de Pares com campo Elétrico e Magnético Paralelos	57
4.6	Comparação com a Literatura	60
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	63
	REFERÊNCIAS	66

APÊNDICE A – OBTENÇÃO DA LAGRANGIANA DE EULER- HEI- SENBERG	74
APÊNDICE B – REGULARIZAÇÃO DO POTENCIAL EFETIVO PARA O CASO DE CAMPO MAGNÉTICO PURO	78
APÊNDICE C – REGULARIZAÇÃO DO POTENCIAL EFETIVO PARA O CASO DE CAMPO ÉLETRICO PURO	81

1 INTRODUÇÃO

Nesta parte do trabalho, pretendo introduzir os tópicos e conceitos mais importantes para se entender a pesquisa feita. É importante comentar o conceito de partículas elementares, partículas compostas e seus diferentes tipos e, também, a interação entre elas. Uma consideração importante a se ressaltar é o uso de unidades naturais nas contas, ou seja $\hbar = c = k_B = 1$.

Tratando-se de elementaridade a física explica as partículas fundamentais e suas interações usando o formalismo da Teoria Quântica de Campos, que é a linguagem que descreve o Modelo Padrão da Física de Partículas.

O Modelo Padrão consiste em explicar doze campos fermiônicos (de spin em unidades semi-inteiras de \hbar) e cinco campos bosônicos (de spin em unidades inteiras de \hbar) fundamentais, e a interação entre eles. Sendo seis campos de quarks, seis campos leptônicos, cinco bósons de gauge e o bóson de Higgs. As partículas fundamentais podem ser resumidas numa tabela, com suas principais cargas, como na Figura 1.

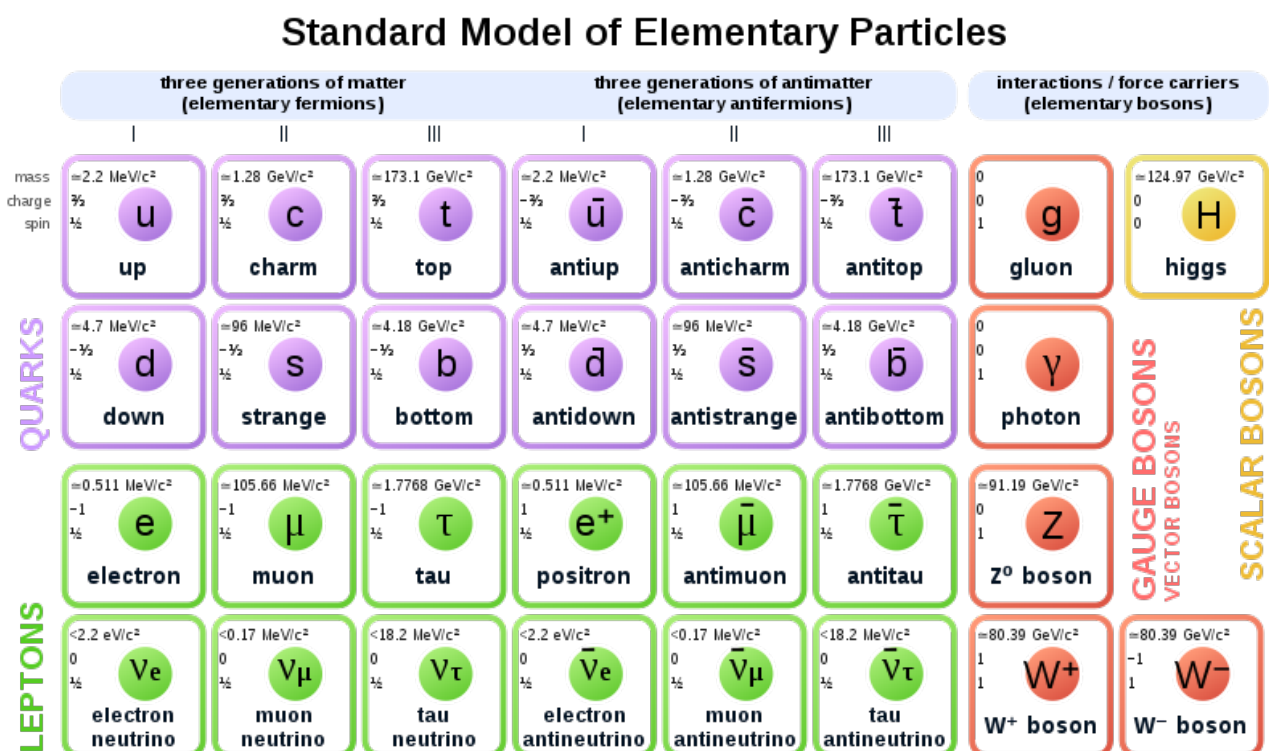


Figura 1 – Diagrama das partículas descritas pelo Modelo Padrão.

Fonte – Figura retirada de Cush (2021).

No contexto desta dissertação as partículas de interesse são os quarks, as partículas de spin 1/2

que possuem carga de cor, o que faz com que interajam principalmente pela força forte, mas também possuem carga elétrica, massa e mudam de sabor, e, portanto, interagem eletromagneticamente, gravitacionalmente e via força fraca, respectivamente. Os quarks e suas antipartículas (antiquarks) ficam em estados ligados, de diferentes formas e em diferentes quantidades, tal que estas partículas compostas, de estrutura complexa, são chamadas de hádrons.

1.1 QCD e a Matéria Hadrônica

Os hádrons são partículas compostas principalmente de quarks e antiquarks e glúons interagindo pela força forte, em um estado ligado. Eles são classificados em: mésons: compostos por par de um quark e um antiquark, como o méson π^0 , π^+ , e têm spin inteiro e, portanto, são bósons; e bárions (anti-bárions): compostos de três quarks (antiquarks), como o nêutron, o próton, Δ^{++} , e possuem spin semi-inteiro e, portanto, são férmions. Para o caso de mais de 3 quarks e antiquarks em sua composição, temos partículas exóticas que estão sendo encontradas e teorizadas como os tetraquarks, pentaquarks e hexaquarks.

Reenfatizando, a interação entre quarks se dá principalmente pela interação forte devido à carga não-abeliana que eles carregam, a carga de cor. É aceito atualmente que essa força é descrita pela teoria da Cromodinâmica Quântica, ou QCD (do inglês *Quantum Chromodynamics*).

A QCD é uma teoria de gauge em $SU(3)$ de interações de carga de cor entre quarks, de spin meio, e gluons, de spin 1, na qual sua densidade lagrangiana, invariante por transformações de cor, é dada por

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) q_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a, \quad (1)$$

no qual

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_S f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2)$$

tal que, A_μ^a são os campos de glúons, q corresponde aos campos de quarks, o índice f corresponde ao sabor (*flavour*) dos quarks, ou seja $f = u, d, s, c, b, t$, e a, b, c são os índices de cor, que variam de 1 à 3 para os quarks e de 1 à 8 para os glúons, g_S é a constante de acoplamento e f^{abc} são as constantes de estrutura do grupo $SU(3)$. Além disso, D_μ é a derivada covariante, cujo termo é meramente

$$i\gamma^\mu D_\mu q_f = \gamma^\mu (i\partial_\mu + g A_\mu^a t_a) q_f, \quad (3)$$

na qual $t_a = \lambda_a/2$, sendo λ_a as matrizes de Gell-Mann.

A QCD é caracterizada principalmente por duas características principais: confinamento e liberdade assintótica. Na qual, confinamento é o regime de baixa energia que dita que os quarks não são observados em estados livres, eles estão sempre confinados em hádrons. E liberdade assintótica é

um aspecto que se percebe em altas energias, quando quarks interagem fracamente via força forte e cálculos perturbativos são possíveis. Numa linguagem mais técnica essas duas propriedades acontecem devido à constante (parâmetro, mais corretamente) de acoplamento da QCD, α_s , ser variável com a escala de energia do sistema, ela se torna fraca em pequenas distâncias, ou equivalentemente para momentos euclidianos grandes, Q , isto pode ser relacionado com o fato da função β da QCD ser negativa, implicando que a constante de acoplamento decresce com a escala de energia. À ordem de 1-loop, é dada por (POLITZER, 1973), (GROSS; WILCZEK, 1973):

$$\alpha_s(Q^2) \equiv \frac{g^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{4\pi}{(11 - \frac{2}{3}N_f)\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right)}, \quad (4)$$

tal que N_f é o número de sabores (*flavours*) e Λ_{QCD} é parâmetro de escala da QCD a ser determinado fitando a expressão 4 com dados experimentais para Q^2 grande. A Figura 2 mostra a curva de evolução do parâmetro de acoplamento α_s em função de Q .

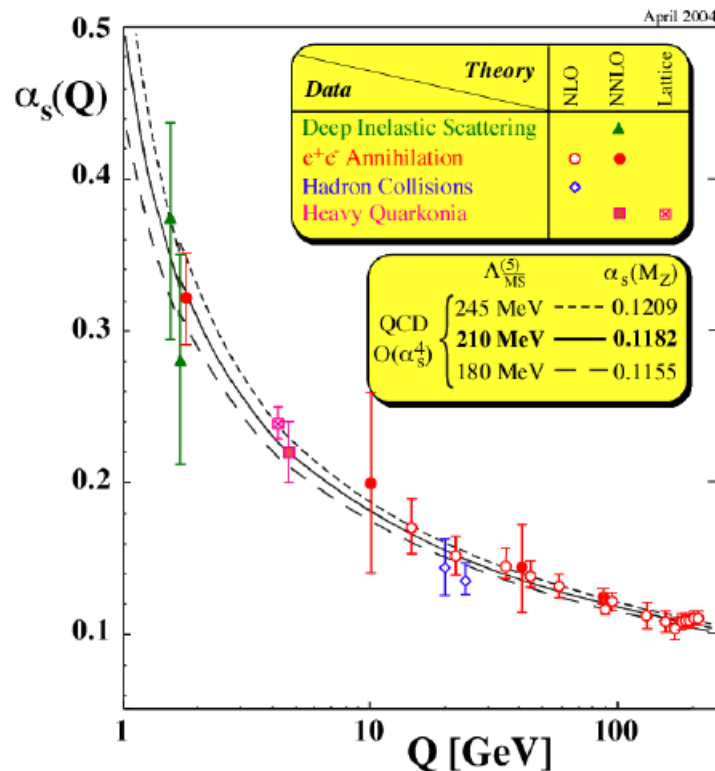


Figura 2 – Valores da constante de acoplamento da QCD, α_s , em função do momento Q .

Fonte – Figura retirada de García Canal (2008).

Além disso, a QCD possui algumas simetrias de interesse. Ela é definida completamente exigindo a invariância por transformações de gauge locais, ou seja, a física se mantém a mesma para transformações sob $SU(3)_{color}$ para quarks e gluons. Também há a simetria por uma transformação global, uma rotação $SU(2)$ no espaço de sabores. E a simetria quiral, que merece um destaque especial no âmbito deste trabalho: ela consiste uma simetria global que aparece no limite de massa

zero. Exemplificando: tomando $\lim_{m \rightarrow 0} \mathcal{L}_{QCD}$ tem-se:

$$\lim_{m \rightarrow 0} \mathcal{L}_{QCD} = \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu) q_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a. \quad (5)$$

Nessa ocasião, as partes destra (*right-handed*) e sinistra (*left-handed*) dos campos fermiônicos são separadamente invariantes. Ou seja, com $q = q_R + q_L$, no qual

$$q_{R,L} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5) q. \quad (6)$$

A densidade lagrangiana então é invariante pelas transformações $SU(3)_L \times SU(3)_R$:

$$q \rightarrow \exp(i\theta_V^a t_a) q, \quad q \rightarrow \exp(i\gamma^5 \theta_A^a t_a) q. \quad (7)$$

Se adicionarmos o termo de massa, essa simetria não se mantém mais, ou seja, ela é espontaneamente quebrada para o subgrupo vetorial:

$$SU(3)_L \times SU(3)_R = SU(3)_V \times SU(3)_A \rightarrow SU(3)_V. \quad (8)$$

As simetrias podem ser listadas de acordo com sua transformação, nome e manifestação, como na Tabela 1. Mais detalhes sobre as mesmas podem ser encontrados em uma revisão mais completa no trabalho de Klevansky (1992).

Tabela 1 – Tabela de simetrias da Cromodinâmica Quântica.

Simetria	Transformação	Corrente Conservada	Nome	Manifestação
$SU_V(2)$	$\psi \rightarrow e^{-i\tau \cdot \omega/2} \psi$	$J_\mu^k = \bar{\psi} \gamma_\mu \tau^k \psi$	Isospin	aproximadamente conservada
$U_V(1)$	$\psi \rightarrow e^{-i\alpha} \psi$	$J_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$	Bariônica	sempre conservada
$SU_A(2)$	$\psi \rightarrow e^{-i\tau \cdot \theta/2} \psi$	$J_{5\mu}^k = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \tau^k \psi$	Quiral	CSB ¹ ; Modo de Goldstone
$U_A(1)$	$\psi \rightarrow e^{-i\beta \gamma_5} \psi$	$J_{5\mu} = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi$	Axial	“enigma” $U_A(1)$

Fonte – Tabela retirada de Klevansky (1992).

Estamos interessados na matéria de hádrons no regime não-perturbativo da QCD, quando a constante de acoplamento, $g = 4\pi\alpha_S$, é maior que um, sendo que há diferentes formas de abordá-la, como por exemplo, através de equações de Dyson-Schwinger (DSE, do inglês *Dyson-Schwinger Equations*) (ALKOFER, 2001), (ROBERTS; WILLIAMS, 1994), modelos holográficos (AdS/QCD, na qual AdS se refere à *Anti-de Sitter Space*) (BRODSKY; TÉRAMOND, 2009), QCD na rede (LQCD, do inglês *Lattice QCD*), modelos efetivos, entre outros; sendo que nesta dissertação fazemos um estudo através do modelo efetivo de Nambu-Jona Lasinio, uma alternativa eficaz que mostra bons resultados, ainda quando comparados com os fornecidos de LQCD (RATTI; WEISE, 2004), (BUBALLA, 2005), (KLEVANSKY, 1992).

¹ CSB é a sigla para designar “quebra de simetria quiral”, do inglês: chiral symmetry breaking.

Dado o confinamento é impossível observar e medir diretamente a massa dos quarks isolados, essa massa é muitas vezes chamada de massa de corrente, crua ou nua, e através da teoria e de resultados experimentais do espalhamento inelástico profundo de elétron-próton (LICHTENBERG; ROSEN, 1980) é possível inferir esta massa como sendo em torno de 4,7 MeV para o quark down e 2,15 MeV para o quark up (TANABASHI *et al.*, 2018). No entanto a massa de hádrons é da ordem de 1000 MeV, como por exemplo o próton cuja massa é de 938,272 MeV, composto de dois quarks up e um down, que juntos tem uma massa total de 9,1 MeV. A razão disso está na origem da massa das duas ocasiões, no caso dos quarks “desconfinados”, sua massa é gerada pelo mecanismo de Higgs (ENGLERT; BROUT, 1964) e quando eles estão interagindo, no caso, confinados em hádrons eles apresentam uma massa muito maior, que é chamada de massa efetiva, ou massa constituinte, que no caso do próton, assumindo $m_u \approx m_d = m$, seria cerca de 312 MeV para cada quark. Essa massa efetiva é consequência de outra simetria, ou melhor, quebra de simetria, a simetria quiral.

1.1.1 Diagrama de Fases da QCD

Ainda no âmbito do estudo do regime não-perturbativo da QCD, existe um grande desafio ainda em pesquisa e que merece destaque: o estudo e a tentativa de entender melhor o Diagrama de Fases da QCD (STEPHANOV, 2006), (SCHAEFER, 2005). A matéria composta principalmente de quarks e glúons têm seu próprio diagrama de fases termodinâmicas assim como a matéria usual, onde as variáveis são a temperatura T , o volume V e o potencial químico μ , que está relacionado com a conservação da quantidade líquida de quarks, ou densidade bariônica. Atualmente é possível esquematizar um diagrama de fases no plano $T \times \mu$ representado na Figura 3.

Conforme é muito bem descrito em Möller (2013), há algumas transições de fase que vale a pena salientar. A fase de matéria comum, ou ordinária, é uma fase mista de gotas de matéria nuclear rodeada por vácuo, e ela existe para temperaturas próximas de zero e para relativamente baixos potenciais químicos. No potencial químico $\mu = \mu_0 \approx 310 \text{ MeV}$ há uma transição de fase de gás para líquido, passando da região de vácuo para matéria nuclear. Para potenciais químicos maiores, em baixas temperaturas é esperado uma transição de fase para uma fase teórica de supercondutividade de cor, quando os quarks formam pares de Cooper, cujas propriedades de cor são correlacionadas com suas propriedades de sabor e uma correspondência um a um: uma fase de cor-sabor-fixos, ou CFL, do inglês, *Color-Flavor-Locked* (BAILIN; LOVE, 1984), (BARROIS, 1977), (ALFORD *et al.*, 2008).

Outra transição de grande interesse, é a transição entre a fase confinada, onde os quarks estão confinados formando hádrons, e a fase *desconfinada*, ou partônica, chamada de plasma de quarks e glúons (ou QGP do inglês, *quark-gluon plasma*). Esse plasma é criado, aumentando a temperatura e mantendo μ relativamente baixo, e há um *crossover* para esta fase em torno de uma temperatura de 170 MeV, e alguns modelos preveem que este se torne uma transição de fase de primeira ordem para potenciais químicos mais altos; no fim da transição de primeira ordem, há um chamado ponto

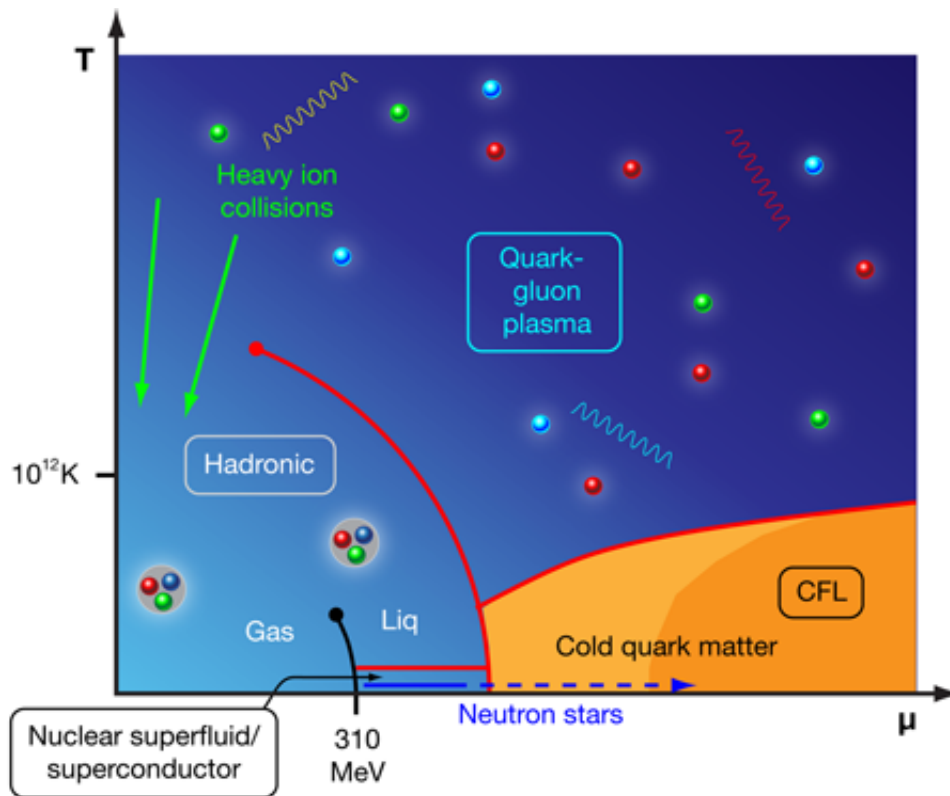


Figura 3 – Esquema do diagrama de fases da QCD.

Fonte – Figura retirada de Alford (2010).

crítico, ou CEP, do inglês *Critical End Point*, o CEP de uma linha de primeira ordem é um ponto onde a transição será mais semelhante à de segunda ordem, um *crossover*, sendo a localização deste CEP uma das grandes metas dos experimentos de colisões de íons pesados (BZDAK *et al.*, 2020).

Entretanto, neste trabalho, o foco é o estudo com um sistema mais simples, sem potencial químico e sem temperatura ($\mu = 0$ e $T = 0$) onde adicionamos outros elementos de interesse à matéria hadrônica: campos elétricos e magnéticos intensos, sendo que esse último altera o diagrama de fases (FERREIRA; COSTA; PROVIDÊNCIA, 2018), (FERREIRA, 2015), sendo que uma ilustração desse efeito pode ser vista na Figura 4, e as circunstâncias onde podemos obter estes campos explanarei na seção a seguir. Ou seja, no que se refere ao estudo da QCD com estas variáveis (μ e T), esta dissertação diz respeito à um trabalho introdutório, sendo possível adicioná-las em estudos futuros e generalizar o diagrama de fases com campos eletromagnéticos.

1.2 Campos Fortes e Colisões de íons pesados

O estudo da QCD na presença de campos eletromagnéticos fortes e/ou sob condições extremas de densidade e temperatura é um assunto de grande interesse na atualidade. Pode-se obter esses campos no interior de um magnetar ou, no caso de baixas densidades e altas temperaturas, estas condições podem acontecer nas colisões de íons pesados feitas em aceleradores de partículas, como

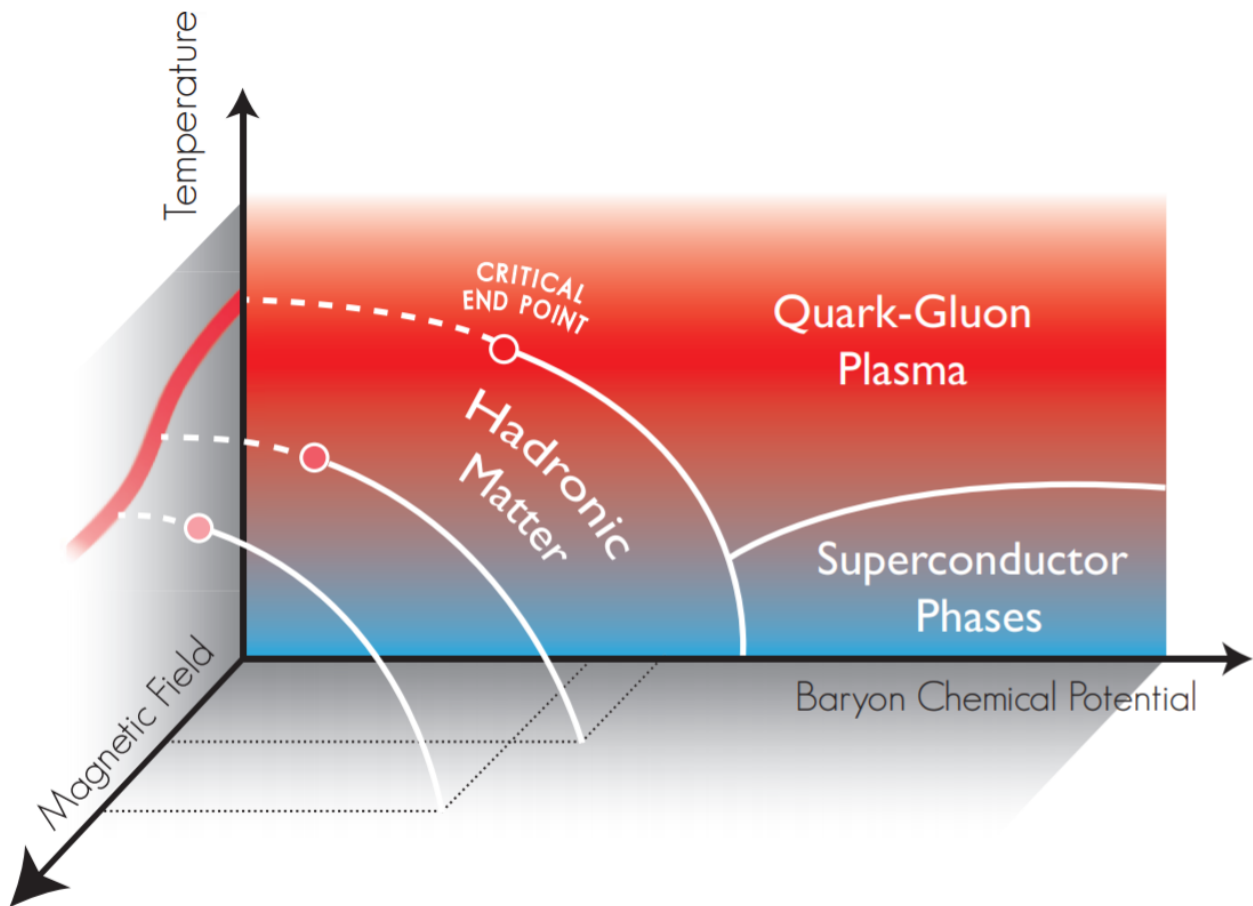


Figura 4 – Esquema de como o campo magnético altera o diagrama de fases da QCD.

Fonte – Figura retirada de Ferreira (2015)

o CERN, FERMILAB e o RHIC, além do NICA e do FAIR, que irá testar a matéria em condições de altas densidades e temperaturas moderadas.

Simulações (KHARZEEV; MCLERRAN; WARRINGA, 2008) mostram que, em reações de íons pesados relativísticos não-centrais, campos elétricos e magnéticos extremamente intensos podem ser gerados imediatamente após a colisão, sendo proporcionais à energia da colisão, especificamente campos da ordem do quadrado da massa do píon $m_\pi^2 \approx 0,02 \text{ GeV}^2$, como é mostrado por Skokov, Illarionov e Toneev (2009), a estimativa é de $eB_y \sim 0,1 m_\pi^2$ no alcance de energia do SPS, $eB_y \sim m_\pi^2$ no RHIC e $eB_y \sim 10 m_\pi^2$ no LHC, ou de uma referência um pouco mais recente, m_π^2 no RHIC e $10 m_\pi^2 \approx 0,2 \text{ GeV}^2$ no LHC (TUCHIN, 2013), cerca de 10^{18} G , ou seja, cerca de um quintilhão de vezes mais forte que o da Terra. Ainda é controverso quais devem ser os efeitos destes campos nas reações e mesmo a duração dos mesmos ainda é um tema de pesquisa e debate.

No que se refere à matéria hadrônica nestas condições, logo após a colisão, pode haver um novo estado da matéria, o plasma de quarks e glúons, que abrange parte do diagrama de fases da QCD dado na Figura 3; nesta fase, os quarks e glúons não formam mais hádrons, visto que o livre caminho médio dos mesmos é maior do que quando estão confinados.

No âmbito do estudo da matéria de hádrons na presença de campos eletromagnéticos, temos

uma vantagem no uso de modelos efetivos, pois (no caso do modelo NJL) podemos adicionar ambos campos elétricos e magnéticos, assim como potencial químico e temperatura, sendo uma alternativa à LQCD, por exemplo, na qual, devido ao chamado “Problema do Sinal”, temos uma incapacidade em implementar o potencial químico e o campo elétrico.

Na colisão de íons pesados, geralmente é utilizado núcleos de chumbo (Pb) ou ouro (Au), uma vez que são elementos com muitos núcleons: prótons e nêutrons, se tornam ótimos objetos para o estudo de aspectos da cromodinâmica quântica. A dinâmica do processo é acelerar vários destes núcleos pesados em velocidades, ou energias muito altas, a fim de que alguns deles colidam e produzam uma “chuva” de partículas que irão interagir entre si. Dada a velocidade dos núcleos, pensando nos mesmos como esferas compostas de núcleons eles se tornariam achatados na direção do movimento, devido ao efeito de contração de Lorentz, no caso dos núcleos de chumbo e ouro, na ordem de 14fm (BUSZA; RAJAGOPAL; SCHEE, 2018), sendo ainda, que, em colisões não centrais é possível a formação momentânea de QGP; um esquema da colisão pode ser visto na Figura 5.

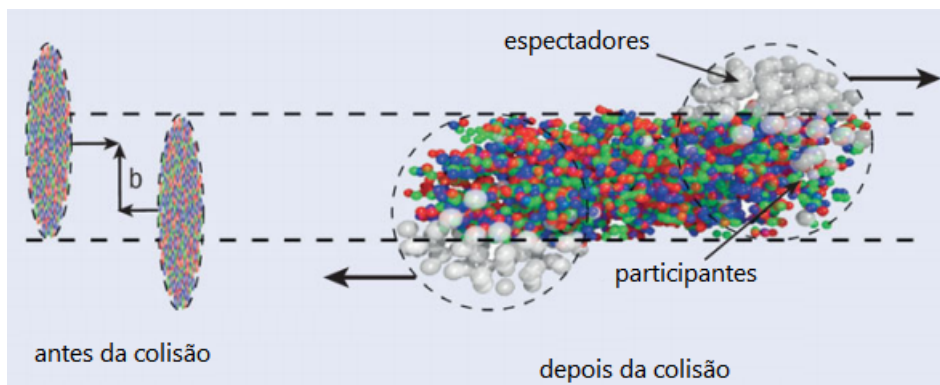


Figura 5 – Esquema no momento da colisão de íons pesados considerando a contração de Lorentz.

Fonte – Figura retirada de Micheletti (2020)

Logo após a colisão, dada à energia concentrada naquela região do espaço, é possível alcançar temperaturas muito altas e atingir a fase de plasma de quarks e glúons. Depois de um tempo curtíssimo, da ordem de $1\text{fm}/c \sim 10^{-24}\text{s}$ (BUSZA; RAJAGOPAL; SCHEE, 2018), há o resfriamento e a volta para a forma confinada: acontece a hadronização. Se considerarmos as possíveis colisões ultraperiféricas, quando os núcleos não interagem por meio de seus núcleons, mas pelos seus campos eletromagnéticos ao redor do núcleo, como estudado pela ATLAS Collaboration (2017), e também por Aad *et al.* (2019), é possível identificar a ocorrência do fenômeno do espalhamento fóton-fóton, um efeito não-linear da eletrodinâmica quântica.

Dada as circunstâncias físicas que é possível encontrarmos hádrons, o intuito deste trabalho é analisar algumas características da matéria composta por estas partículas nestas situações extremas, particularmente iremos fazer um estudo do comportamento da massa efetiva dos quarks e da taxa de criação de pares no âmbito do modelo de Nambu-Jona Lasinio $SU(2)$. No próximo capítulo apresentarei o modelo e no capítulo subsequente as alterações que podemos adicionar no mesmo a fim de representar as situações físicas comentadas.

1.3 Modelos Efetivos

Como mencionado na seção anterior, quando falamos de baixas energias, ou seja, ao trabalharmos no regime não-perturbativo da QCD, há alguns artifícios para conseguir os resultados físicos de interesse, um deles é o uso de modelos efetivos, que mantêm algumas simetrias da QCD a fim de reproduzir resultados satisfatórios em um regime de energias de interesse. Há uma variedade de modelos efetivos para serem usados na literatura, tais como o modelo de sacolas do MIT (MIT Bag model) (CHODOS *et al.*, 1974), (DEGRAND *et al.*, 1975)), modelo Sigma Linear (GELL-MANN; LÉVY, 1960) e o modelo de Nambu-Jona Lasinio, ou NJL, abreviado, sendo que este último será abordado nessa dissertação.

Destes diferentes modelos, temos que eles trazem consigo vantagens e desvantagens nos resultados. Primeiramente, não representam a teoria completa, vinda de primeiros princípios, são teorias que mantêm as principais simetrias e física do problema e com isso é possível retirar informações de uma forma que não é possível na teoria original.

O uso de modelos efetivos é útil até certo ponto, no caso até certa escala de energia. Esta escala de energia, no caso do modelo NJL vêm atrelada ao fato de o modelo ser não renormalizável em $3+1$ dimensões, e aparece de uma regularização nas quantidades divergentes, um truncamento até uma escala Λ de energia. Isso será abordado em mais detalhes nos capítulos seguintes.

2 O MODELO DE NAMBU-JONA LASINIO

Dentre os vários modelos efetivos para descrever a fenomenologia da matéria hadrônica, trabalharemos nesta dissertação com o modelo de Nambu-Jona Lasinio, neste capítulo abordo a motivação em usar este modelo, sua origem e os resultados que ele traz consigo.

O modelo de Nambu-Jona Lasinio, em sua forma original foi criado como uma teoria de núcleons (componentes do núcleo atômico) que interagiriam via uma interação efetiva entre dois corpos, trocando mésons π e σ . Dado primeiramente dessa forma, pois, na época da publicação, os quarks ainda não eram conhecidos e tão pouco as características de confinamento e liberdade assintótica, assim como a geração da massa efetiva dos mesmos, sendo esta possível obtermos pela quebra espontânea de simetria quiral do modelo e também pela equação de *gap*, que abordarei neste capítulo.

2.1 Formulação

O modelo NJL é um modelo efetivo dinâmico de partículas elementares baseado em uma analogia com a teoria de Bardeen, Cooper e Schrieffer, a teoria BCS para a supercondutividade elétrica, desenvolvido por Yoichiro Nambu e Giovanni Jona-Lasinio, (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961a), (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961b). Depois de certo tempo ele foi reinterpretado como um modelo efetivo da QCD. A lagrangiana deste modelo efetivo é construída de tal forma que contenha as principais simetrias da QCD (na primeira publicação continha todas as simetrias em 1, porém na segunda parte, em Nambu e Jona-Lasinio (1961b), a simetria $U_A(1)$ foi removida), especialmente a simetria quiral, que é essencial para o entendimento dos hádrons mais leves. Mais detalhes podem ser encontrados em Klevansky (1992). Em dois sabores, $SU(2)$, a densidade lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi} (\gamma_\mu i \partial^\mu - m) \psi + G \left[(\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \vec{\tau} \psi)^2 \right], \quad (9)$$

ou utilizando a notação barrada (*slash*) de Feynman e o operador de 4-momento linear $\not{p} = i \partial^\mu$:

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi} (\not{p} - m) \psi + G \left[(\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \vec{\tau} \psi)^2 \right], \quad (10)$$

na qual ψ corresponde aos campos dos quarks up e down, m é a matriz diagonal das massas de correntes dos quarks, dados por:

$$\psi = \begin{pmatrix} \Psi_u \\ \Psi_d \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Além disso temos o parâmetro G , que tem o papel de uma constante de acoplamento, de dimensão canônica $[G] = -2$, significando que as eventuais divergências não podem ser eliminadas por uma redefinição dos parâmetros originais do modelo (campos, massas e acoplamentos), sendo $\vec{\tau}$ o vetor de matrizes de Pauli e $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

Podemos perceber da Equação (10) o primeiro termo contendo as informações cinéticas e de massa e o segundo termo com a constante de acoplamento separado em dois termos, canais de interação, um escalar que representa os mésons σ e um pseudo-escalar representando os píons.

A partir de agora, vamos fazer uso da Aproximação de Campo Médio (ou MFA, do inglês *Mean Field Approximation*), nesta aproximação assumimos que as flutuações em torno do valor médio de um certo operador, seja por exemplo, \mathcal{O} , são pequenas quando calculamos as grandezas termodinâmicas e, portanto, negligenciamos termos da ordem de $(\Delta\mathcal{O})^2$. Partindo da identidade

$$\mathcal{O} \equiv \langle \mathcal{O} \rangle + \mathcal{O} - \langle \mathcal{O} \rangle = \langle \mathcal{O} \rangle + \Delta\mathcal{O}, \quad (12)$$

podemos então escrever o quadrado de um operador como

$$\mathcal{O}^2 = (\langle \mathcal{O} \rangle + \Delta\mathcal{O})^2 \quad (13)$$

$$= \langle \mathcal{O} \rangle^2 + (\Delta\mathcal{O})^2 + 2\langle \mathcal{O} \rangle \Delta\mathcal{O}, \quad (14)$$

e com MFA obtemos

$$\mathcal{O}^2 \approx \langle \mathcal{O} \rangle^2 + 2\langle \mathcal{O} \rangle \Delta\mathcal{O} = \quad (15)$$

$$= \langle \mathcal{O} \rangle^2 + 2\langle \mathcal{O} \rangle (\mathcal{O} - \langle \mathcal{O} \rangle) = \quad (16)$$

$$= \langle \mathcal{O} \rangle^2 + 2\langle \mathcal{O} \rangle \mathcal{O} - 2\langle \mathcal{O} \rangle^2 = \quad (17)$$

$$= 2\langle \mathcal{O} \rangle \mathcal{O} - \langle \mathcal{O} \rangle^2. \quad (18)$$

Assim, aplicamos MFA aos termos de interação do modelo NJL, presentes na Equação (10), tal que

$$(\bar{\psi}\psi)^2 \approx 2\langle \bar{\psi}\psi \rangle \bar{\psi}\psi - \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2; \quad (19)$$

$$(\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 \approx 2\langle \bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi \rangle \bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi - \langle \bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi \rangle^2, \quad (20)$$

das quais definimos:

$$\sigma = \langle \bar{\psi}\psi \rangle; \quad (21)$$

$$\vec{\pi} = \langle \bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi \rangle. \quad (22)$$

É possível demonstrar que $\vec{\pi} = 0$ (STEFAN SCHERER, 2012), assumindo que o vácuo tenha paridade definida, tal que a lagrangiana fica

$$\mathcal{L}_{NJL}^{MFA} = \bar{\psi}(\not{p} - (m - 2G\sigma))\psi - G\sigma^2, \quad (23)$$

do qual podemos identificar uma redefinição no termo de massa, que pode ser reescrito como

$$M = m - 2G\sigma, \quad (24)$$

do qual também podemos reescrever σ em termos de m , M e G :

$$\sigma = \frac{m-M}{2G}, \quad (25)$$

tal que a lagrangiana do modelo em MFA fica dada como

$$\mathcal{L}_{NJL}^{MFA} = \bar{\psi} (\not{p} - M) \psi - \frac{(m-M)^2}{4G}. \quad (26)$$

É possível mostrar (BUBALLA, 2005) que o condensado de quarks $\sigma = \langle \bar{\psi} \psi \rangle$ pode ser escrito como

$$\sigma = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p), \quad (27)$$

no qual $\text{tr} S(p)$ é o traço do propagador do quark “vestido”, ou seja, confinado no hádron com sua massa efetiva, dado por

$$S(p) = \frac{1}{\not{p} - M + i\epsilon} = \frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2 + i\epsilon}, \quad (28)$$

e o traço é feito no espaço de cores, sabores e de Dirac, resultando na equação

$$\sigma = \frac{m-M}{2G} = -4iN_f N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{M}{p^2 - M^2 + i\epsilon}, \quad (29)$$

na qual $N_f = 2$ e $N_c = 3$ são o número de sabores e cores do modelo em $SU(2)$, respectivamente. Para um acoplamento G suficientemente forte, há uma solução não trivial tal que $M \neq m$, mesmo no limite quiral de $m=0$, produzindo um *gap* de $\Delta E = 2M$ no espectro de energia dos quarks. Fazendo uma analogia com a teoria BCS, a equação 29 é referida como equação de *gap*.

Pode-se realizar a integral da equação 29 (MÖLLER, 2013), primeiramente integrando em $d\mathbf{p}_0$ aplicando o teorema dos resíduos e através de coordenadas esféricas, integrando nos ângulos θ e ϕ , restando a integral no módulo do 3-momento, resultando em

$$\frac{m-M}{2G} = 4N_f N_c \int_0^\infty dp \frac{M}{4\pi^2} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M^2}}. \quad (30)$$

A integral resultante é divergente, portanto é necessário implementar um método de regularização, que vai ditar a parte “efetiva” do modelo efetivo, ou seja, nesta parte ditamos qual o regime de aplicabilidade do modelo.

O método de regularização que utilizaremos aqui é o *Cutoff-3D*, isto é, um corte no 3-momento não covariante, ou seja, invés de integrar até infinito, colocamos um limite superior Λ nas integrais em $d^3 p$ que possuem divergência, como é uma divergência para altas energias, é comumente chamada divergência ultravioleta. No âmbito desta regularização, portanto o modelo é efetivo nos regimes de energia menor que Λ e portanto, caso adicionemos campos elétricos e magnéticos, o limite é válido até cerca de Λ^2 . É importante ressaltar que há outros métodos de regularização que são

utilizados, como Pauli-Villars (PAULI; VILLARS, 1949), método do tempo-próprio (SCHWINGER, 1951) e também *Cutoff*-4D, no 4-momento (HATSUDA; KUNIHURO, 1994).

Desta forma, temos três parâmetros no modelo: G , m e Λ , que devem reproduzir certas quantidades físicas como a massa e constante de decaimento do pión dados respectivamente por 135 MeV (GROUP *et al.*, 2020) e 92,6 MeV (PESKIN; SCHROEDER, 1995), aproximadamente.

Assim, retornando a equação de gap, agora regularizada temos:

$$\frac{m-M}{2G} = -4N_f N_c \int_0^\Lambda dp \frac{M}{4\pi^2} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M^2}} \quad (31)$$

$$\frac{m-M}{2G} = -\frac{N_f N_c M}{2\pi^2} \left[\Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - M^2 \ln \left(\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2}}{M} \right) \right]. \quad (32)$$

Na seção seguinte comento mais sobre a função de gap e alguns resultados que reforçam a utilidade deste modelo efetivo.

2.2 Potencial Termodinâmico e a Equação de gap

Dado o modelo e as simetrias mantidas, podemos obter o resultado de massa efetiva através deste modelo efetivo, na aproximação de campo médio, a partir da termodinâmica, tal que pode-se então achar a massa para qual a densidade de potencial termodinâmico Ω é mínima, e teremos um resultado estável para o valor de M_{eff} . De um modo geral, Ω é dado por (BUBALLA, 2005):

$$\Omega(T, \mu) = -T \ln \Xi = -T \text{tr} \exp \left(-\frac{1}{T} \int d^3x (\mathcal{H} - \mu q^\dagger q) \right), \quad (33)$$

no qual μ é o potencial químico, T a temperatura, \mathcal{H} a densidade de hamiltoniano, Ξ a função de partição grande-canônica e tr é o traço feito sobre todos os estados do sistema, incluindo spin, sabor, cor e momento.

Para o caso deste trabalho utilizamos outra relação conhecida:

$$\Omega = u - Ts - \mu n = -P, \quad (34)$$

na qual u , s , n e P são a densidade de energia, densidade de entropia, densidade de partículas e pressão respectivamente. No caso simples de temperatura e potencial químico nulos, apenas teremos

$$\Omega = u = -P. \quad (35)$$

No caso do modelo NJL simples podemos obter a densidade de energia da densidade de hamiltoniano, que se pode relacionar com a densidade de lagrangiana, tal que (somando nos sabores dos quarks, f)

$$\mathcal{H} = \sum_{f=u,d} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_f} \dot{\psi}_f - \mathcal{L}, \quad (36)$$

tal que há de se realizar um processo de segunda quantização para os operadores do campo ψ em termos de operadores criação e aniquilação (AVANCINI, 2021) e a densidade de hamiltoniana para o modelo NJL é dada por

$$\mathcal{H} = G\sigma^2 + \sum_{f=u,d} \mathcal{H}_f, \quad (37)$$

na qual \mathcal{H}_f depende das energias relativísticas dos quarks e de consequentes regularizações necessárias que o modelo necessita, que depende das condições que se deseja aplicar a matéria de quarks, por exemplo no caso de adição de campo magnético ao modelo, deve ser feita uma soma sobre os níveis de Landau, além disso teria o termo de densidade de energia do campo eletromagnético. É possível mostrar, que no caso do modelo puro, com a regularização de *Cutoff 3D*, obtemos (KLEVANSKY, 1992)

$$\Omega_{NJL}(M) = \frac{(M-m)^2}{4G} + \frac{N_c N_f}{8\pi^2} \left[M^4 \ln \frac{\Lambda + \mathcal{E}_\Lambda}{M} - \Lambda \mathcal{E}_\Lambda (\Lambda^2 + \mathcal{E}_\Lambda^2) \right], \quad (38)$$

na qual definimos a energia \mathcal{E}_Λ :

$$\mathcal{E}_\Lambda = \sqrt{\Lambda^2 + M^2}. \quad (39)$$

A equação de gap é então obtida pela minimização do potencial efetivo:

$$\left. \frac{\partial \Omega_{NJL}}{\partial M} \right|_{M=M_{eff}} = 0 \implies f_{gap}(M) \quad (40)$$

Tal que o objetivo é obter uma solução, um valor para a massa $M = M_{eff}$ para qual $f_{gap}(M_{eff}) = 0$. No caso de interesse temos

$$f_{gap}(M) = M - m - \frac{MGN_c N_f}{\pi^2} \left[\Lambda \mathcal{E}_\Lambda - M^2 \ln \left(\frac{\Lambda + \mathcal{E}_\Lambda}{M} \right) \right], \quad (41)$$

Esta equação é transcendental e, então, temos que resolver numericamente buscando o zero da mesma. Há uma variedade de métodos numéricos na literatura para este tipo de procedimento mas os mais utilizados e que conseguem melhores resultados são o método de Ridder (RIDDER, 1979) e o método de Brentq (BRENT, 1972).

Há alguns conjuntos de parâmetros que ajustam a equação. Tomando o *set 2* de Buballa (2005), ou seja, o conjunto de parâmetros dado por $\Lambda = 587,9 \text{ MeV}$, $G\Lambda^2 = 2,44$ e $m = 5,6 \text{ MeV}$, iterando numericamente, o código numérico informa que o zero da função é para $M_{eff} = 399,44 \text{ MeV}$, que é aproximadamente de um terço do valor da massa do hádron, esta que é medida experimentalmente, assim, o modelo mostra um resultado satisfatório na obtenção dessa quantidade.

Para outros conjuntos de parâmetros, há diferentes resultados que reproduzem a massa e a constante de decaimento do pión. A fim de exemplificar o processo, na Figura 6 mostro o gráfico da função de gap para um intervalo de massas, para os conjuntos de parâmetros de Buballa (2005) que estão na Tabela 2, tal que podemos notar os diferentes pontos que a função cruza o eixo de $y = 0$ e, portanto, denotando as massas efetivas.

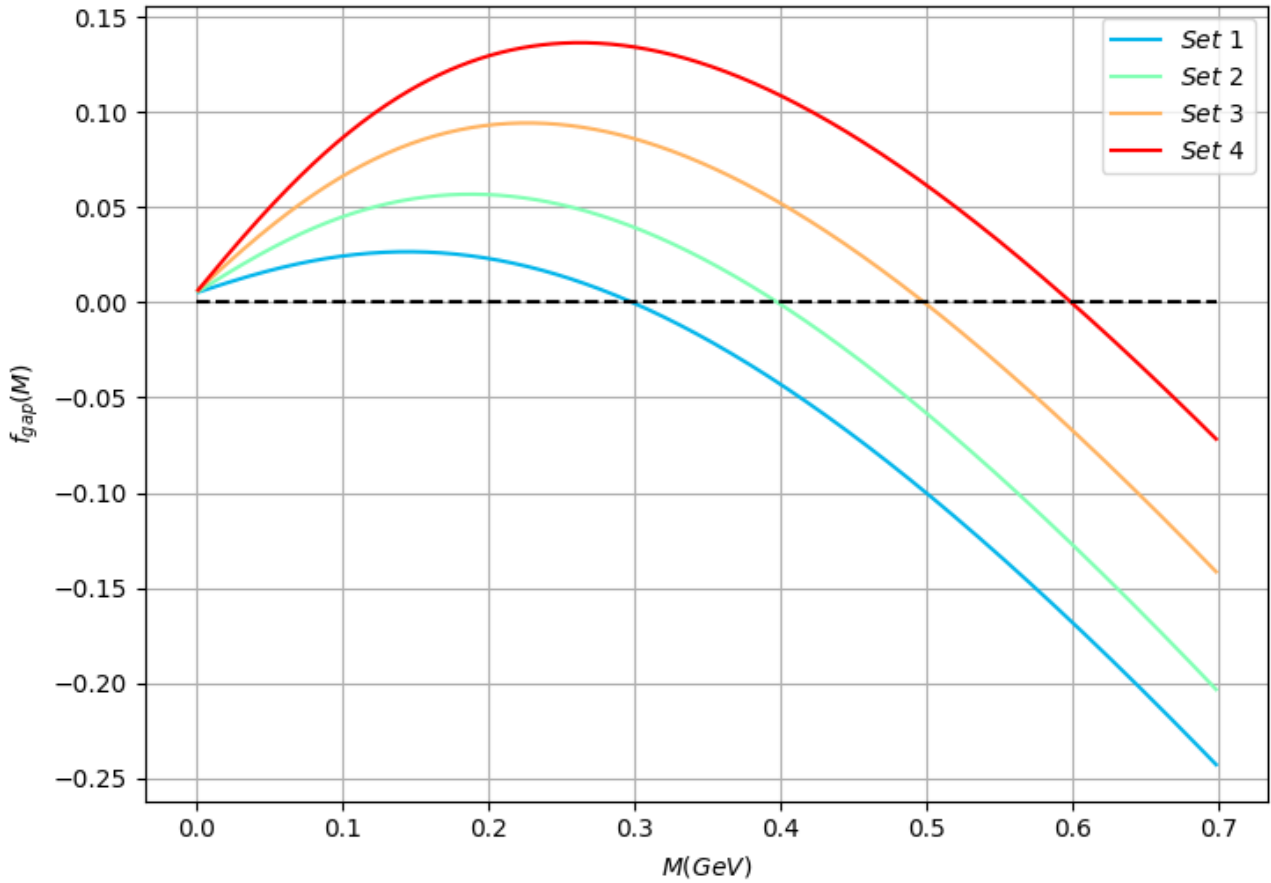


Figura 6 – Função de gap para o modelo de NJL à temperatura e potenciais químico nulos sem campos adicionais, para quatro conjuntos de parâmetros conforme a Tabela 2.

Tabela 2 – Tabela dos conjuntos (sets) de parâmetros do modelo NJL, que ajustam os dados da constante de decaimento do pión e a massa do pión aos seus valores empíricos: $f_{\pi} = 92,4 \text{ MeV}$ e $m_{\pi} = 135 \text{ MeV}$. E o resultado aproximado da massa efetiva, M_{eff} , ao solucionar a equação de gap, o que pode ser visualizado na Figura 6.

Set	Λ (MeV)	$G\Lambda^2$	m (MeV)	M_{eff} (MeV)
1	664.3	2.06	5.0	300
2	587.9	2.44	5.6	400
3	569.3	2.81	5.5	500
4	568.3	3.17	5.1	600

Fonte – Tabela retirada de Buballa (2005).

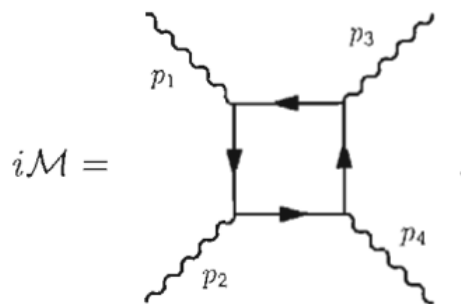
Com base nesse formalismo é possível adicionar ao modelo quantidades físicas de interesse, como temperatura, potencial químico e até campos eletromagnéticos, tal que neste caso é possível observar fenômenos de interesse no alcance de intensidades dos campos fortes mencionados na introdução (FUKUSHIMA, 2019), que é o que será feito neste trabalho. No capítulo a seguir introduzo como faremos isto e a regularização do modelo NJL com estes campos adicionais. É importante salientar que o modelo que estamos utilizando (NJL $SU(2)$) é a versão mais simples, sendo possível encontrar na literatura o modelo NJL considerando 3 sabores (NJL $SU(3)$) e que

adicionam o loop de Polyakov para simular o aspecto do confinamento, também conhecido como PNJL (RATTI; THALER; WEISE, 2006), (SCHAEFER; WAGNER; WAMBACH, 2010), e também é possível trabalhar com um termo de acoplamento vetorial que é importante à densidades bariônicas finitas (MENEZES *et al.*, 2009).

3 MODELO NJL NA PRESENÇA DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS

Para analisarmos o comportamento da massa efetiva na presença de campos eletromagnéticos devemos acrescentar à lagrangiana de NJL um termo que traga consigo os efeitos dos campos eletromagnéticos para as altas intensidades em que desejamos calcular. E estamos interessados em calcular nossos resultados considerando efeitos não-lineares da eletrodinâmica quântica, portanto utilizaremos uma lagrangiana bem conhecida e que encapsula muita física em si, que foi obtida por Werner Heisenberg e seu aluno Hans Euler, em 1936 (HEISENBERG; EULER, 1936), (HEISENBERG; EULER, 2006), e separadamente por Weisskopf (1936). Esta lagrangiana, de Euler-Heisenberg, descreve a dinâmica não-linear de campos eletromagnéticos no vácuo, tratando-o como um meio.

Por ser não-linear nos campos, os termos de ordem quártica ou maior representam novas interações que não ocorrem à *tree level*, ou aproximação de árvore, a ordem dominante na ação maxwelliana. A primeira destas novas interações é espalhamento fóton-fóton, cujo cálculo da taxa era a motivação original para Heisenberg e Euler, um problema proposto por Otto Halpern (HALPERN, 1933), na época, em virtude da obsoleta ideia da interpretação do Mar de Dirac para as soluções de frequência negativa da equação de Dirac. Este processo é às vezes chamado de espalhamento Delbrück, nome dado por Hans Bethe em homenagem à Max Delbrück, biofísico de origem alemã e auxiliar de Lise Meitner, que publicou estudos sobre o espalhamento de raios gama por um campo coulombiano, na década de 30. A amplitude do processo, em ordem mais baixa, pode ser dada pelo seguinte diagrama de Feynman:



No qual há uma “troca” de pares férmion-anti-férmion de massa m . A resposta da seção de choque total deste processo pode ser dada no limite de baixas energias ($\omega \ll m$), como (HEISENBERG; EULER, 2006), (SCHWARTZ, 2013)

$$\sigma_{tot} = \frac{973}{10125\pi} \alpha^4 \frac{\omega^6}{m^8}. \quad (42)$$

Como discutido primeiramente por Euler e Köckel (EULER, 1935), estas não-linearidades podem ser vistas como efeitos dielétricos, com o vácuo quântico se comportando como um meio polarizável. Como Weisskopf descreveu, no caso da luz passar por campos eletromagnéticos ela se comportaria de tal forma que o vácuo, por causa dos campos, adquirisse uma constante dielétrica $\epsilon \neq \epsilon_0 = 1$ (em unidades naturais).

O processo de espalhamento fóton-fóton foi completamente resolvido por Karplus e Neuman (1951).

Além disso, a lagrangiana também antecipa a renormalização da carga, funções- β e o limite de campo forte da QED e também prediz a produção de pares de Schwinger, ou seja, a criação de pares partícula-anti-partícula no vácuo.

Na seção a seguir vou apresentá-la e analisar os casos específicos que podemos usá-las, e então demonstrar brevemente estas últimas características citadas.

É importante ressaltar que os cálculos aqui utilizados, neste capítulo, no que se refere à densidade de potencial termodinâmico (que é igual à densidade de energia no nosso caso) é sempre feito considerando apenas a correção à 1-loop de Euler-Heisenberg, $\mathcal{L}^{(1)}$, ou seja, sempre em relação ao termo de maxwell $\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2$. Assim, consideraremos apenas $\mathcal{L}^{(1)}$ da densidade lagrangiana eletromagnética \mathcal{L}_{EM} :

$$\mathcal{L}_{EM} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}^{(1)}. \quad (43)$$

E como bem explica Walter Greiner (2009), neste caso, esta parte é o negativo da densidade de energia proveniente dos campos: $\mathcal{L}^{(1)} = -u_{EM}$, tal que os potenciais termodinâmicos que serão dados aqui nesta seção são dados (à $T = 0$ e $\mu = 0$) como a soma do potencial usual do modelo NJL $SU(2)$, $G\sigma^2$, com a densidade de energia eletromagnética:

$$\Omega_{NJL+EM} = u + u_{EM} = G\sigma^2 - \mathcal{L}^{(1)} = \frac{(M-m)^2}{4G} - \mathcal{L}^{(1)}. \quad (44)$$

3.1 Lagrangiana de Euler-Heisenberg

Primeiramente, se desejamos obter uma lagrangiana não-maxwelliana para descrever efeitos não-lineares do eletromagnetismo, ou seja, quando tratamos de casos de sistemas sujeitos à campos eletromagnéticos intensos, da ordem dos campos críticos:

$$E_c = \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar} \sim 1,32 \times 10^{18} \text{V/m}; \quad (45)$$

$$B_c = \frac{m_e^2 c^2}{e\hbar} \sim 4,41 \times 10^9 \text{T}, \quad (46)$$

onde seria possível perceber efeitos quânticos. É fundamental que ela seja proporcional às quantidades invariantes de Lorentz e de gauge, \mathcal{F} e \mathcal{G} , que podem ser escritas em termos do tensor eletromagnético

$F_{\mu\nu}$ ou dos campos \vec{E} e \vec{B} , dadas por

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\vec{B}^2 - \vec{E}^2) \quad ; \quad \mathcal{G} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \vec{E} \cdot \vec{B} = EB \cos(\theta). \quad (47)$$

Ou seja desejamos obter $\mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, por exemplo, a lagrangiana de Maxwell é apenas $-\mathcal{F}$. As consequências gerais destas extensões não-maxwellianas são frequências de propagação das ondas, velocidades de grupo e índices de refração, inclusive do vácuo, dependentes da interação da onda eletromagnética campos elétricos e magnéticos externos. Estas características tem aplicações na astrofísica, no estudo da estrutura do vácuo e inclusive em física de materiais, o que torna estas novas formulações um campo de pesquisa efervescente nos dias atuais (BANDOS *et al.*, 2020), (ELLIS; MAVROMATOS; YOU, 2017), (ROBERTSON *et al.*, 2021), (SEKINE; NOMURA, 2021) (GULLU; MAZHARIMOUSAVI, 2020).

No apêndice A discuto e mostro algumas contas de como podemos obter a lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg para o caso spinorial. De forma geral, para um campo eletromagnético dado pelo tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$ a Lagrangiana de Euler-Heisenberg pode ser dada por (DITTRICH; GIES, 2000):

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{im^2 s} \left\{ (es)^2 |\mathcal{G}| \cot \left[es \sqrt{\sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2} + \mathcal{F}} \right] \coth \left[es \sqrt{\sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2} - \mathcal{F}} \right] + \right. \quad (48)$$

$$\left. + \frac{2}{3} (es)^2 \mathcal{F} - 1 \right\}. \quad (49)$$

Uma vez que θ é o ângulo formado entre \vec{E} e \vec{B} . Com isso posso redefinir a expressão dentro da cotangente e cotangente hiperbólica como:

$$X_{\pm} = \sqrt{\sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2} \pm \mathcal{F}} = \left(\sqrt{\frac{E^4 + B^4 + 2E^2 B^2 \cos(2\theta)}{4} \pm \frac{B^2 - E^2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (50)$$

Considerando três casos de limites particulares, obtém-se:

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow X_{\pm} = \begin{cases} X_+ = B; \\ X_- = 0 \end{cases}; \quad \vec{B} = 0 \Rightarrow X_{\pm} = \begin{cases} X_+ = 0; \\ X_- = E \end{cases}; \quad (51)$$

$$\theta = 0 \Rightarrow X_{\pm} = \begin{cases} X_+ = B \\ X_- = E \end{cases}. \quad (52)$$

É possível realizar uma rotação de Wick no plano complexo da integral de $\mathcal{L}^{(1)}$ realizando uma mudança de variável $s \mapsto is$ tal que, reescrevendo em termos dos campos e da nova variável X_{\pm} , tem-se

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-m^2 s} \left\{ (es)^2 |\vec{E} \cdot \vec{B}| \coth(eX_+ s) \cot(eX_- s) - \frac{1}{3} (es)^2 (\vec{B}^2 - \vec{E}^2) - 1 \right\}. \quad (53)$$

Na qual foi usado que $\cot(i\alpha s) = -i \coth(\alpha s)$ e que $\coth(i\alpha s) = -i \cot(\alpha s)$. Agora analisamos a forma da densidade lagrangiana para os três limites particulares.

3.1.1 Caso de Campo Magnético Puro

Neste caso $\vec{E} = 0$, consideremos primeiro que os campos são paralelos entre si ($\theta = 0$) e então tomamos o limite: $\lim_{\vec{E} \rightarrow 0} \mathcal{L}^{(1)}$. Neste limite há de tomar cuidado ao primeiro dos três termos de $\mathcal{L}^{(1)}$.

$$\lim_{\vec{E} \rightarrow 0} |\vec{E} \cdot \vec{B}| \cot(eX_- s) = \frac{B}{es}. \quad (54)$$

Assim, fazendo a substituição deste termo no limite e de X_+ tem-se:

$$\mathcal{L}_{E=0}^{(1)} = \frac{-1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-m^2 s} \left\{ eBs \coth(eBs) - \frac{(eBs)^2}{3} - 1 \right\}. \quad (55)$$

Realizando uma mudança de variáveis $s \mapsto s'/eB$ sem que interfira nos limites da integral, tem-se:

$$\mathcal{L}_{E=0}^{(1)} = \frac{-1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds' e^3 B^3}{eB(s')^3} e^{-m^2 s'/eB} \left\{ s' \coth(s') - \frac{(s')^2}{3} - 1 \right\}. \quad (56)$$

Como s' é apenas a variável a ser integrada, podemos remover o apóstrofo e chegarmos na forma final:

$$\boxed{\mathcal{L}_{E=0}^{(1)} = \frac{-e^2 B^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-m^2 s/eB} \left\{ \coth(s) - \frac{s}{3} - \frac{1}{s} \right\}}. \quad (57)$$

3.1.2 Caso de Campo Elétrico Puro

Neste caso, $\vec{B} = 0$, consideremos primeiro que os campos são paralelos entre si ($\theta = 0$) e então tomamos o limite: $\lim_{\vec{B} \rightarrow 0} \mathcal{L}^{(1)}$. Analogamente ao caso de magnético puro, tratamos dos três termos de $\mathcal{L}^{(1)}$.

$$\lim_{\vec{B} \rightarrow 0} |\vec{E} \cdot \vec{B}| \coth(eX_+ s) = \frac{E}{es}. \quad (58)$$

Assim, fazendo a substituição deste termo no limite e de X_- tem-se:

$$\mathcal{L}_{B=0}^{(1)} = \frac{-1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-m^2 s} \left\{ eEs \cot(eEs) + \frac{(eEs)^2}{3} - 1 \right\}. \quad (59)$$

Novamente, realizando uma mudança de variáveis $s \mapsto s'/eE$, tem-se:

$$\mathcal{L}_{B=0}^{(1)} = \frac{-1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds' e^3 E^3}{eE(s')^3} e^{-m^2 s'/eE} \left\{ s' \cot(s') + \frac{(s')^2}{3} - 1 \right\}. \quad (60)$$

Como s' é a apenas a variável a ser integrada, podemos remover o apóstrofo e chegarmos na forma final:

$$\mathcal{L}_{B=0}^{(1)} = \frac{-e^2 E^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-m^2 s/eE} \left\{ \cot(s) + \frac{s}{3} - \frac{1}{s} \right\}. \quad (61)$$

3.1.3 Caso de \vec{E} e \vec{B} paralelos entre si

Neste caso, temos $\theta = 0$ e ao substituirmos os valores de X_\pm temos a seguinte forma (considerando $\vec{E} = E\hat{E}$ e $\vec{B} = B\hat{B}$), onde \hat{E} e \hat{B} são versores que dão direção aos vetores campo elétrico e magnético):

$$\mathcal{L}_{E\parallel B}^{(1)} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-m^2 s} \left\{ (es)^2 EB \coth(eBs) \cot(eEs) - \frac{1}{3} (es)^2 (B^2 - E^2) - 1 \right\}. \quad (62)$$

Realizando uma mudança de variáveis $s \mapsto \pi s'$, podemos usar uma fórmula desenvolvida por Ramanujan e Sitaramanchadradao (GEORGE E. ANDREWS, 2013), que é dada por:

$$[\pi x \cot(\pi x)][\pi y \coth(\pi y)] = 1 + \frac{\pi^2}{3} (y^2 - x^2) \quad (63)$$

$$-2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{xy}{n} \left[\frac{y^2}{n^2 + y^2} \coth(n\pi x/y) + \frac{x^2}{n^2 - x^2} \coth(n\pi y/x) \right]. \quad (64)$$

Observando $\mathcal{L}_{E\parallel B}^{(1)}$ com a mudança de variáveis:

$$\mathcal{L}_{E\parallel B}^{(1)} = -\frac{1}{8\pi^4} \int_0^\infty \frac{ds'}{(s')^3} e^{-m^2 \pi s'} \left\{ \pi (eEs') \pi (eBs') \coth(\pi eBs') \cot(\pi eEs') + \right. \quad (65)$$

$$\left. -\frac{\pi^2}{3} ((eBs')^2 - (eEs')^2) - 1 \right\}. \quad (66)$$

Associando (eBs') e (eEs') com y e x respectivamente na penúltima equação, temos o cancelamento dos dois últimos dos três termos na integral e ficamos com:

$$\mathcal{L}_{E\parallel B}^{(1)} = \frac{e^2 EB}{4\pi^3} \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ds'}{(s')^3} \frac{e^{-m^2 \pi s'} (s')^2}{n} \left[\frac{(eBs')^2}{n^2 + (eBs')^2} \coth\left(n\pi \frac{E}{B}\right) + \frac{(eEs')^2}{n^2 - (eEs')^2} \coth\left(n\pi \frac{B}{E}\right) \right]. \quad (67)$$

Realizando uma última mudança de variáveis por $s' \mapsto nt$ e simplificando os termos chegamos na seguinte forma para a densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{E\parallel B}^{(1)} = \frac{e^2 EB}{4\pi^2} \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} dt \frac{e^{-m^2 n\pi t}}{n\pi t} \left[\frac{(eBt)^2}{1 + (eBt)^2} \coth\left(n\pi \frac{E}{B}\right) + \frac{(eEt)^2}{1 - (eEt)^2} \coth\left(n\pi \frac{B}{E}\right) \right]. \quad (68)$$

É importante evidenciar que no caso das lagrangianas de campo elétrico puro e nessa última, de $\vec{E} \parallel \vec{B}$ temos singularidades nos integrandos, no termo de cotangente da Equação (61) e no

segundo integrando da Equação (68) (devido à presença de campo elétrico), implicando em uma parte imaginária na lagrangiana, que por sua vez implica numa expressão para a taxa de produção de pares, como explicado no trabalho de Schwinger (1951), e, também, num processo de regularização mais cuidadoso, o que comentamos em mais detalhes na seção a seguir, no Apêndice C e na Seção 3.6.

3.2 Taxa de criação de Pares

Nos casos de campo elétrico puro ou campo elétrico e magnético paralelos, podemos notar polos nas integrais presentes na lagrangiana, todas essas singularidades associadas com campos elétricos constantes, provindas do termo de cotangente, $\cot(eEs)$. Neste formato, os polos ocorrem em $s = s_n = \frac{n\pi}{eE}$ para $n \in \mathbb{R}^*$; Não há polos em $s = 0$, o que pode ser notado expandindo o integrando para s pequeno. Estes polos indicam que campos elétricos fortes podem criar pares partícula-anti-partícula, no caso de criar um par elétron-pósitron, é conhecido como produção de pares de Schwinger, apesar de ser previsto, como vemos aqui, primeiramente por Euler e Heisenberg.

Como é bem descrito por DUNNE (2005): a presença de um campo elétrico acelera a divide pares de dipolo de vácuo virtuais, levando a criação de pares partícula-anti-partícula. Essa instabilidade do vácuo foi notada por Euler e Heisenberg, motivada em parte pelo trabalho de Sauter (1931) sobre o paradoxo de Klein, e posteriormente este processo foi formalizado na linguagem da eletrodinâmica quântica por Schwinger (1951). Heisenberg e Euler deduziram o termo dominante na produção de pares com um campo elétrico fraco como

$$\Gamma \sim \frac{e^2 E^2}{4\pi^3} e^{-\frac{m^2 \pi}{eE}}. \quad (69)$$

A taxa pode ser obtida, pela técnica de Schwinger, partindo da parte imaginária da Lagrangiana efetiva:

$$\Gamma = 2 \text{Im}\{\mathcal{L}\}. \quad (70)$$

No caso de somente campo elétrico, como Schwartz (2013) deduz, usando integração complexa, temos

$$\Gamma(B=0) = 2 \text{Im}[\mathcal{L}_{B=0}] = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s_n^2} e^{-m^2 s_n} = \quad (71)$$

$$= \frac{e^2 E^2}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{n\pi m^2}{eE}} = \quad (72)$$

$$= \frac{e^2 E^2}{4\pi^3} Li_2 \left(e^{-\frac{m^2 \pi}{eE}} \right), \quad (73)$$

na qual $Li_2(x)$ é a função dilogarítmica.

Se considerarmos o caso de campo elétrico e magnético paralelos, da Equação (68), temos um polo em $t = 1/eE$ na integral em $\mathcal{L}_{E\parallel B}^{(1)}$, e usando a prescrição $i\epsilon$ podemos usar a fórmula de

Sokhotski-Plemelj (SOKHOTSKI, 1873), (PLEMELJ, 1908), dada por

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0 \pm i\epsilon} dx = \text{P.V.} \int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0} dx \mp i\pi f(x_0), \quad \text{para } x_0 \in [a, b], \quad (74)$$

e obter a parte imaginária.

A parte da densidade lagrangiana que contém $\coth(n\pi E/B)$ não contribui com parte imaginária já que não possui polos. Realizando uma mudança de variáveis $t' \mapsto eEt$ pode-se reescrever a parte de $\mathcal{L}_{E\parallel B}^{(1)}$ de interesse, tal que a taxa de criação de pares será dada por.

$$\Gamma = 2 \text{Im} \left\{ -\frac{e^2 EB}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} dt' e^{\frac{-m^2 n\pi t'}{eE}} \frac{(t')^2}{(t' - 1 - i\epsilon)(t' + 1)} \coth\left(n\pi \frac{B}{E}\right) \right\}. \quad (75)$$

Usando a fórmula de Sokhotski-Plemelj no intervalo de integração, onde o polo é dado por $t'_0 = 1$, a parte imaginária da integral é $\pi f(t' = 1)$, onde $f(t')$ é obtida fazendo a comparação com a equação (74). Portanto,

$$\Gamma = \frac{eB}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{eE}{n\pi} e^{\frac{-m^2 n\pi}{eE}} \coth\left(n\pi \frac{B}{E}\right). \quad (76)$$

Apenas para fins de simplificação, se a razão $n\pi B/E$ for suficientemente grande temos que $\coth\left(n\pi \frac{B}{E}\right)$ será aproximadamente a unidade e podemos aplicar o resultado da convergência da soma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-an}}{n} = -\ln(1 - e^{-a}), \quad (77)$$

e a taxa de criação de pares será dada por

$$\Gamma = -\frac{e^2 BE}{4\pi^2} \ln\left(1 - e^{-\frac{m^2 \pi}{eE}}\right). \quad (78)$$

Nota-se em ambos os casos que para termos uma taxa de criação apreciável é necessário um campo elétrico da ordem de m^2/e , cerca de 10^{18}V/m para o caso de um par elétron-pósitron, ou no caso de quarks, cerca de $0,5 \text{GeV}^2$, em unidades naturais, usando a massa efetiva à campo nulo ($\sim 400 \text{ MeV}$).

3.2.1 Taxa de produção de pares de quarks no modelo NJL em SU(2)

Aplicando ao modelo do trabalho, considerando a aproximação de campo médio, temos que considerar a soma no espaço de sabores e de cores (esta última resultando apenas em N_C , uma vez que não há quantidade dependente da carga cor) dos quarks up e down ao realizarmos a conta da taxa de produção de pares, tal que ela será dada simplesmente pela Equação (75) onde a carga

elementar e é substituída pelo módulo das cargas elétricas dos quarks e a massa m é substituída pela massa efetiva M_{eff} , e a soma sobre os sabores há de ser feita, resultando em:

$$\Gamma = \sum_{f=u,d} \frac{N_c |q_f| B}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|q_f| E}{n\pi} e^{-\frac{M_{eff}^2 n\pi}{|q_f| E}} \coth\left(n\pi \frac{B}{E}\right), \quad (79)$$

tal que q_f é o módulo da carga do quark de sabor f :

$$q_u = \left| \frac{2}{3} e \right| = \frac{2}{3} e, \quad (80)$$

$$q_d = \left| -\frac{1}{3} e \right| = \frac{1}{3} e. \quad (81)$$

A expressão deve ser consistente de forma a retomar o caso de campo elétrico puro, no qual devemos obter, como feito por Tavares e Avancini (2018)

$$\Gamma = \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|q_f|^2 E^2}{(n\pi)^2} e^{-\frac{M_{eff}^2 n\pi}{|q_f| E}}. \quad (82)$$

É fácil demonstrar tomando o limite de $B \rightarrow 0$ da Equação (79), expandindo a cotangente hiperbólica, como na expansão da série de Laurent, dada por

$$\coth(ax) = \frac{1}{ax} + \frac{ax}{3} - \frac{a^3 x^3}{45} + \mathcal{O}(x^5), \quad (83)$$

ao substituirmos e tomando o limite:

$$\begin{aligned} \lim_{B \rightarrow 0} \Gamma &= \lim_{B \rightarrow 0} \sum_{f=u,d} \frac{N_c |q_f| B}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|q_f| E}{n\pi} e^{-\frac{M_{eff}^2 n\pi}{|q_f| E}} \coth\left(n\pi \frac{B}{E}\right) \\ &= \lim_{B \rightarrow 0} \sum_{f=u,d} \frac{N_c |q_f| B}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|q_f| E}{n\pi} e^{-\frac{M_{eff}^2 n\pi}{|q_f| E}} \left(\frac{E}{n\pi B} + \frac{n\pi B}{3E} - \frac{(n\pi)^3 B^3}{45E^3} + \mathcal{O}(B^5) \right) \\ &= \lim_{B \rightarrow 0} \sum_{f=u,d} \frac{N_c |q_f| B}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|q_f| E}{n\pi} e^{-\frac{M_{eff}^2 n\pi}{|q_f| E}} \left(\frac{|q_f| E}{n\pi |q_f| B} \right) \\ &= \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|q_f|^2 E^2}{(n\pi)^2} e^{-\frac{M_{eff}^2 n\pi}{|q_f| E}}, \end{aligned} \quad (84)$$

obtemos o limite e a consistência desejada, compatível com o resultado obtido primeiramente por Schwinger (1951).

3.3 Renormalização da carga, função- β da QED e limite de campo forte

A função β em teoria de campos descreve como a constante de acoplamento de uma teoria, g por exemplo, varia com a escala de energia, μ , introduzida pela regularização dimensional, por

exemplo, como

$$\beta(g) = \frac{\partial g}{\partial \log(\mu)}. \quad (85)$$

Observando a forma da lagrangiana, na Equação (49), o primeiro termo é o resultado puro não renormalizado, o terceiro termo corresponde à uma subtração do termo infinito de campo livre e o segundo termo é uma subtração de um termo que diverge logaritmicamente que tem a mesma forma da lagrangiana clássica de Maxwell, o que corresponde ao que é chamado de renormalização de carga.

Tomando a lagrangiana de Euler-Heisenberg obtida no Apêndice A, mais especificamente a expansão da lagrangiana não renormalizada, se não tivéssemos removido os contra-termos, a expansão forneceria a expressão

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{is\epsilon} e^{-sm^2} \left[\frac{1}{e^2 s^2} + \frac{1}{6} F_{\mu\nu}^2 \right] + \text{termos finitos}. \quad (86)$$

O primeiro termo no integrando é constante e fornece a densidade de energia do vácuo. Já o segundo termo tem a forma do termo cinético em *tree-level* da QED, se mantivermos apenas este termo antes de renormalizar, temos

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{6} F_{\mu\nu}^2 \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{is\epsilon} e^{-sm^2}. \quad (87)$$

O que é uma expressão divergente no ultravioleta (UV), na região de $s \sim 0$. Ao regularizarmos com um *cutoff* s_0 , invariante de Lorentz, temos

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \left(1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \int_{s_0}^\infty \frac{ds}{s} e^{is\epsilon} e^{-sm^2} \right) = \quad (88)$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln(s_0 m^2) + \text{constante} \right). \quad (89)$$

Essa dependência logarítmica no *cutoff* está relacionado diretamente com a função- β da QED, relacionado à polarização do vácuo. E estas divergências UV levam as equações do grupo de renormalização e esta determina o coeficiente em ordem dominante da função- β . Neste caso, o coeficiente do logaritmo, tal que a função- β à *1-loop* é

$$\beta(e) = \frac{e^2}{12\pi^2}, \quad (90)$$

e ao contrário da QCD, na QED a função beta é positiva e portanto a constante de acoplamento dessa teoria aumenta com a escala de energia.

3.4 Modelo NJL com campo magnético - Catálise Magnética

Uma vez que definimos a lagrangiana da parte eletromagnética, vamos adicionar esta à lagrangiana do modelo NJL. Vamos considerar primeiramente o caso de adicionar apenas um campo magnético de intensidade B constante na direção \hat{z} e derivar a equação de gap.

Como é feito por Avancini *et al.* (2021), aqui exemplificado no Apêndice B, temos que o potencial efetivo para o caso de campo magnético puro no modelo NJL de dois sabores é dado por

$$\Omega_{NJL}(M, B) = \frac{(M-m)^2}{4G} + \frac{N_c N_f}{8\pi^2} \left[M^4 \ln \frac{\Lambda + \mathcal{E}_\Lambda}{M} - \Lambda \mathcal{E}_\Lambda (\Lambda^2 + \mathcal{E}_\Lambda^2) \right] +$$

$$- \sum_{f=u,d} \frac{N_c B_f^2}{2\pi^2} \left\{ \zeta'(-1, x_f) - \frac{1}{2}(x_f^2 - x_f) \ln(x_f) + \frac{x_f^2}{4} - \frac{(1 + \ln(x_f))}{12} \right\} +$$

$$- \sum_{f=u,d} \frac{N_c B_f^2}{24\pi^2} \left[\ln \left(\frac{M^2}{\Lambda^2} \right) + \gamma_E \right], \quad (91)$$

na qual é definido

$$x_f = \frac{M^2}{2B_f},$$

$$B_f = q_f B,$$

e na qual $\gamma_E (\approx 0,577215)$ é a constante de Euler-Mascheroni.

A partir da expressão para $\Omega_{NJL}(M, B)$, a função de gap em $SU(2)$ para o modelo NJL com campo magnético B constante é dada por:

$$f_{gap}(M, B) = m - M + \frac{M G N_c N_f}{\pi^2} \left[\Lambda \mathcal{E}_\Lambda - M^2 \ln \left(\frac{\Lambda + \mathcal{E}_\Lambda}{M} \right) \right] +$$

$$+ \sum_{f=u,d} \frac{M |q_f| B N_c G}{\pi^2} \left[\ln[\Gamma(x_f)] - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + x_f - \frac{1}{2} (2x_f - 1) \ln(x_f) \right]. \quad (92)$$

Nota-se que a parte magnética na equação de gap vem acompanhada de um sinal positivo, o que significa que podemos esperar um aumento da massa efetiva, uma característica do campo magnético, chamada catálise magnética, que abordarei em mais detalhes no capítulo seguinte.

3.5 Modelo NJL com campo elétrico - Restauração da Simetria Quiral

Agora, fazemos o procedimento análogo da seção anterior, somando a lagrangiana com apenas o campo elétrico $\vec{E} = E \hat{z}$ e então derivar a equação de gap para este caso.

Como é feito, a menos de um termo de regularização do campo, por Tavares e Avancini (2018) e aqui nesta dissertação exemplificado no Apêndice C, temos que o potencial efetivo neste caso pode ser dado por

$$\Omega_{NJL}(M, E) = \frac{(M-m)^2}{4G} + \frac{N_c N_f}{8\pi^2} \left[M^4 \ln \frac{\Lambda + \mathcal{E}_\Lambda}{M} - \Lambda \mathcal{E}_\Lambda (\Lambda^2 + \mathcal{E}_\Lambda^2) \right] +$$

$$+ \sum_{f=u,d} \frac{N_c E_f^2}{2\pi^2} \left\{ \zeta'(-1) + \frac{\pi}{4} y_f + \frac{y_f^2}{2} \left(\gamma_E - \frac{3}{2} + \ln(y_f) \right) - \frac{(1 + \ln(y_f))}{12} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} k \left[\frac{y_f}{k} \tan^{-1} \left(\frac{y_f}{k} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{y_f}{k} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y_f}{k} \right)^2 \right] \right\}$$

$$+ \sum_{f=u,d} \frac{N_c E_f^2}{24\pi^2} \left[\ln \left(\frac{M^2}{\Lambda^2} \right) + \gamma_E \right], \quad (93)$$

na qual é definido, analogamente ao caso de campo magnético puro,

$$y_f = \frac{M^2}{2E_f},$$

$$E_f = q_f E.$$

Tal que derivando em relação a massa M obtemos a função de gap em $SU(2)$ para o modelo NJL com campo elétrico \vec{E} constante, que é dada por

$$f_{gap}(M, E) = m - M + \frac{MGN_c N_f}{\pi^2} \left[\Lambda \mathcal{E}_\Lambda - M^2 \ln \left(\frac{\Lambda + \mathcal{E}_\Lambda}{M} \right) \right] +$$

$$- \sum_{f=u,d} \frac{MGN_c}{\pi^2} E_f \left[\frac{\pi}{4} + y_f (\gamma_E - 1 + \ln y_f) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\arctan \left(\frac{y_f}{k} \right) - \frac{y_f}{k} \right) \right]. \quad (94)$$

E então, teremos que resolver numericamente para obter o zero desta função e consequentemente a massa efetiva. Nota-se que o termo com campo elétrico na equação de gap, ao contrário do campo magnético, vem acompanhado de um sinal negativo, onde podemos esperar uma diminuição de M_{eff} , tendendo a restaurar a simetria quiral. A partir dos resultados no capítulo seguinte, fazemos uma discussão qualitativa deste fenômeno.

Agora, podemos nos perguntar qual o efeito de termos ambos campos elétrico e magnético.

3.6 Modelo NJL com Campo Elétrico e Magnético - Regularização do Potencial Efetivo e da Equação de Gap

Da lagrangiana obtida no caso de \vec{E} e \vec{B} paralelos entre si, ao aplicarmos ao modelo NJL, naturalmente teríamos a seguinte expressão para o potencial termodinâmico (sem regularização

alguma):

$$\Omega_{NJL} = \frac{(M-m)^2}{4G} + \Omega_{EB}; \quad (95)$$

$$\Omega_{EB} = \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-M^2 s} [B_f \text{scoth}(B_f s) E_f \text{scot}(E_f s)]. \quad (96)$$

A partir deste resultado para o potencial, poderíamos obter a forma regularizada, Ω_{NJL}^{reg} , do mesmo jeito que foi feito para o caso das Seções 3.4 e 3.5, com detalhes nos Apêndices B e C e então obter a função de gap regularizada, derivando em relação à M . Porém, também podemos optar por obter uma função de gap a partir deste potencial não regularizado e, então, regularizá-la, obtendo f_{gap}^{reg} , e desta reobter uma expressão para o potencial termodinâmico, integrando em M . No entanto, contra-intuitivamente, este potencial não estará regularizado e precisará passar por este processo, como descreveremos a seguir, tal que no final, resultará em Ω_{NJL}^{reg} , e deste temos que recuperar a mesma expressão para f_{gap}^{reg} , que foi obtida e regularizada a partir da expressão de Ω_{NJL} dada nas Equações (95) e (96).

Deste potencial, derivamos e obtemos a função de gap não regularizada:

$$\frac{\partial \Omega_{NJL}}{\partial M} = \frac{M-m}{2G} - \sum_{f=u,d} \frac{MN_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-M^2 s} B_f \text{scoth}(B_f s) E_f \text{scot}(E_f s). \quad (97)$$

Para regularizá-la usamos a expansão da expressão entre colchetes, tal que:

$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \dots \quad (98)$$

$$\cot y = \frac{1}{y} - \frac{y}{3} + \frac{y^3}{45} - \dots \quad (99)$$

Assim, ela pode ser reescrita na forma expandida:

$$B_f \text{scoth}(B_f s) E_f \text{scot}(E_f s) = \left(1 + \frac{(B_f s)^2}{3} - \frac{(B_f s)^4}{45} + \dots \right) \left(1 - \frac{(E_f s)^2}{3} - \frac{(E_f s)^4}{45} + \dots \right); \quad (100)$$

$$B_f \text{scoth}(B_f s) E_f \text{scot}(E_f s) \approx 1 + \frac{1}{3} (B_f^2 - E_f^2) s^2 + \mathcal{O}(s^4). \quad (101)$$

Tal que ao substituir a expansão na Equação (97) notamos o termo divergente, dado pelo termo proporcional à $\int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-M^2 s}$, que não depende dos campos (E e B) e, portanto, corresponde à regularização do próprio modelo NJL, como está descrito no Capítulo 2, no qual regularizamos com um *cutoff*-3D no momento, Λ , também como é descrito para os casos de campo magnético puro e campo elétrico puro nos Apêndices B e C no termo $I_0^B = I_0^E$, tal que emprestamos e repetimos aqui o resultado, ocasionando na equação de gap regularizada:

$$f_{gap}^{reg}(E, B, M) = \frac{M-m}{2G} - \sum_{f=u,d} \frac{MN_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-M^2 s} [B_f \text{scoth}(B_f s) E_f \text{scot}(E_f s) - 1] + \frac{N_f N_c M}{2\pi^2} \left[\Lambda \mathcal{E}_\Lambda - M^2 \ln \left(\frac{\Lambda + \mathcal{E}_\Lambda}{M} \right) \right]. \quad (103)$$

Agora vamos tratar a regularização de Ω_{NJL} e obter a expressão para o potencial termodinâmico regularizado, Ω_{NJL}^{reg} , integrando e lidando com as divergências. Da integração obtemos

$$\begin{aligned} \Omega_{NJL} = & \frac{(M-m)^2}{4G} + \frac{N_c N_f}{8\pi^2} \left[M^4 \ln \frac{\Lambda + \mathcal{E}_\Lambda}{M} - \Lambda \mathcal{E}_\Lambda (\Lambda^2 + \mathcal{E}_\Lambda^2) \right] + \\ & + \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-M^2 s} [B_f s \coth(B_f s) E_f s \cot(E_f s) - 1]. \end{aligned} \quad (104)$$

Da mesma expansão das cotangentes se colocarmos nesta nova expressão para Ω_{NJL} , uma vez que é dividida por s^3 , temos que lidar com o termo $\propto \frac{1}{3}(B_f^2 - E_f^2)s^2$ e sua correspondente regularização com o *cutoff* $3D$, assim:

$$\Omega_{NJL} = \frac{(M-m)^2}{4G} + \Omega_{EB} + \Omega_{NJL,reg}^{E=B=0} + \Omega_{field}^{reg}, \quad (105)$$

tal que

$$\begin{aligned} \Omega_{NJL}^{reg} = & \frac{(M-m)^2}{4G} + \frac{N_c N_f}{8\pi^2} \left[M^4 \ln \frac{\Lambda + \mathcal{E}_\Lambda}{M} - \Lambda \mathcal{E}_\Lambda (\Lambda^2 + \mathcal{E}_\Lambda^2) \right] + \\ & + \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-M^2 s} \left[B_f s \coth(B_f s) E_f s \cot(E_f s) - \frac{1}{3} (B_f^2 - E_f^2) s^2 - 1 \right] + \\ & + \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_{1/\Lambda^2}^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-M^2 s} \frac{1}{3} (B_f^2 - E_f^2) s^2, \end{aligned} \quad (106)$$

e o termo devido ao campo regularizado pode ser reescrito como

$$\Omega_{field}^{reg} = \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_{1/\Lambda^2}^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-M^2 s} \frac{1}{3} (B_f^2 - E_f^2) s^2 = \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{24\pi^2} (B_f^2 - E_f^2) \int_{1/\Lambda^2}^\infty \frac{ds}{s} e^{-M^2 s}. \quad (107)$$

A integral pode ser escrita em termos da função gama incompleta (WEISSTEIN, s.d.):

$$\Gamma(a, z) = \int_z^\infty dy y^{a-1} e^{-y}; \quad (108)$$

$$\Gamma(0, z) = \int_z^\infty dy y^{-1} e^{-y} \approx -\ln z - \gamma_E + z - \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{18} + \mathcal{O}(z^4), \quad (109)$$

e adotando a forma truncada dessa expressão, para o nosso caso tem-se $y = M^2 s$ e $z = M^2/\Lambda^2$, logo:

$$\Omega_{field}^{reg} = - \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{24\pi^2} (B_f^2 - E_f^2) \left[\ln \left(\frac{M^2}{\Lambda^2} \right) + \gamma_E \right]. \quad (110)$$

Para verificarmos a consistência do processo, ao obtermos a equação de gap pela derivada em relação à M da Equação (106) temos que reobter a expressão regularizada da função de gap dada na Equação (103).

Notamos diretamente que derivada do termo do campo regularizado em relação à M é dada por

$$\partial_M \Omega_{field}^{reg} = - \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{24\pi^2} (B_f^2 - E_f^2) \frac{2}{M} = - \frac{N_c M}{12\pi^2} \sum_{f=u,d} (B_f^2 - E_f^2), \quad (111)$$

e cancela com a derivada do termo adicional $\propto \frac{1}{3}(B_f^2 - E_f^2)s^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial M} \left[- \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty ds \frac{e^{-M^2 s}}{s^3} \frac{1}{3} (B_f^2 - E_f^2) s^2 \right] &= - \frac{N_c M}{12\pi^2} \sum_{f=u,d} (B_f^2 - E_f^2) \int_0^\infty ds e^{-M^2 s} = \\ &= - \frac{N_c M}{12\pi^2} \sum_{f=u,d} (B_f^2 - E_f^2) \frac{e^{-M^2 s}}{-M^2} \Big|_0^\infty = \\ &= \frac{N_c M}{12\pi^2} \sum_{f=u,d} (B_f^2 - E_f^2). \end{aligned}$$

Daqui em diante aplicamos a Equação (64) e trabalhamos com a expressão contendo a somatória em n , tal que a expressão se torna:

$$\begin{aligned} \Omega_{NJL}^{reg} &= \frac{(M-m)^2}{4G} + \frac{N_c N_f}{8\pi^2} \left[M^4 \ln \frac{\Lambda + \mathcal{E}_\Lambda}{M} - \Lambda \mathcal{E}_\Lambda (\Lambda^2 + \mathcal{E}_\Lambda^2) \right] + \\ &- \sum_{f=u,d} \frac{N_c E_f B_f}{4\pi^2} \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty dt \frac{e^{-m^2 n\pi t}}{n\pi t} \left[\frac{(B_f t)^2}{1 + (B_f t)^2} \coth \left(n\pi \frac{E}{B} \right) + \frac{(E_f t)^2}{1 - (E_f t)^2} \coth \left(n\pi \frac{B}{E} \right) \right] + \\ &- \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{24\pi^2} (B_f^2 - E_f^2) \left[\ln \left(\frac{M^2}{\Lambda^2} \right) + \gamma E \right]. \end{aligned} \quad (112)$$

Prosseguindo, a última coisa que resta a fazer para termos uma expressão definitiva e regularizar a divergência nas integrais proporcionais à $\coth(n\pi B/E)$. Rescrevendo a parte da somatória de integrais como

$$\Omega_{EB} \equiv \Omega^{int} = \sum_{f=u,d} \left(\Omega_{1,f}^{int} + \Omega_{2,f}^{int} \right) \quad (113)$$

$$\Omega^{int} = \sum_{f=u,d} \frac{N_c E_f B_f}{4\pi^2} \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty dt \frac{e^{-m^2 n\pi t}}{n\pi t} \left[\frac{(B_f t)^2}{1 + (B_f t)^2} \coth \left(n\pi \frac{E}{B} \right) + \frac{(E_f t)^2}{1 - (E_f t)^2} \coth \left(n\pi \frac{B}{E} \right) \right] \quad (114)$$

$$\Omega_{1,f}^{int} = \frac{N_c E_f B_f}{4\pi^2} \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty dt \frac{e^{-m^2 n\pi t}}{n\pi t} \frac{(B_f t)^2}{1 + (B_f t)^2} \coth \left(n\pi \frac{E}{B} \right) \quad (115)$$

$$\Omega_{2,f}^{int} = \frac{N_c E_f B_f}{4\pi^2} \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty dt \frac{e^{-m^2 n\pi t}}{n\pi t} \frac{(E_f t)^2}{1 - (E_f t)^2} \coth \left(n\pi \frac{B}{E} \right). \quad (116)$$

Primeiramente realizamos uma mudança de variáveis, tal que

$$s' = E_f t, \quad ds' = E_f dt, \quad (117)$$

e reescrevemos como

$$\Omega_{2,f}^{int} = \frac{E_f B_f N_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds'}{E_f} \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-M^2 n \pi s'/E_f}}{n \pi s'/E_f} \frac{s'^2}{1-s'^2} \coth\left(n\pi \frac{B}{E}\right) = \quad (118)$$

$$= \frac{E_f B_f N_c}{4\pi^3} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-M^2 n \pi s'/E_f} \frac{s'}{1-s'^2} \coth\left(n\pi \frac{B}{E}\right), \quad (119)$$

na qual é possível notar um polo em $s' = 1$ ao reescrevermos

$$-\frac{1}{s'^2-1} = \frac{1}{1-s'^2} = \frac{1}{(1-s')(1+s')}. \quad (120)$$

E assim podemos usar a fórmula de Sokhotski-Plemelj (74) e usar o seguinte resultado para o cálculo do valor principal (BYRON; FULLER, 1969):

$$\text{P.V.} \int_0^R \frac{f(x)}{x^2-a^2} dx = f(a) \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{R-a}{R+a}\right) + \text{P.V.} \int_0^R \frac{f(x)-f(a)}{x^2-a^2} dx. \quad (121)$$

Tomando apenas a parte real, que é a que nos interessa, tem-se, com $a = 1$ e tomando o limite de $R \rightarrow \infty$ e removendo o apóstrofo em s' por simplicidade da notação, temos

$$\begin{aligned} \text{Re}[\Omega_{2,f}^{int}] &= -\frac{E_f B_f N_c}{4\pi^3} \left[\frac{f(1)}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{R-1}{R+1}\right) + \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty ds \frac{se^{-M^2 n \pi s/E_f} - e^{-M^2 n \pi/E_f} \coth\left(n\pi \frac{B}{E}\right)}{s^2-1} \frac{1}{n} \right] \\ &= -\frac{E_f B_f N_c}{4\pi^3} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty ds \frac{\left(se^{-M^2 n \pi s/E_f} - e^{-M^2 n \pi/E_f}\right) \coth\left(n\pi \frac{B}{E}\right)}{s^2-1} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Com isso, a expressão final e real para o potencial termodinâmico efetivo do modelo NJL em $SU(2)$ com campo elétrico e magnético paralelos é dada por

$$\begin{aligned} \Omega_{NJL}(M, E, B) &= \frac{(M-m)^2}{4G} + \frac{N_c N_f}{8\pi^2} \left[M^4 \ln \frac{\Lambda + \mathcal{E}_\Lambda}{M} - \Lambda \mathcal{E}_\Lambda (\Lambda^2 + \mathcal{E}_\Lambda^2) \right] + \\ &\quad - \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{24\pi^2} (B_f^2 - E_f^2) \left[\ln\left(\frac{M^2}{\Lambda^2}\right) + \gamma E \right] + \\ &\quad - \sum_{f=u,d} \frac{N_c E_f B_f}{4\pi^2} \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty dt \frac{e^{-m^2 n \pi t}}{n \pi t} \frac{(B_f t)^2}{1+(B_f t)^2} \coth\left(n\pi \frac{E}{B}\right) + \\ &\quad + \frac{E_f B_f N_c}{4\pi^3} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty ds \frac{\left(se^{-\frac{M^2 n \pi s}{E_f}} - e^{-\frac{M^2 n \pi}{E_f}}\right) \coth\left(n\pi \frac{B}{E}\right)}{s^2-1} \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (122)$$

Com isso, a expressão final para a equação de gap, dada apenas derivando em relação à M , fica

$$\begin{aligned}
 f_{\text{gap}}(E, B) = & \frac{M-m}{2G} + \frac{MN_c N_f}{2\pi^2} \left[M^2 \ln \frac{\Lambda + \mathcal{E}_\Lambda}{M} - \Lambda \mathcal{E}_\Lambda \right] \\
 & - \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{12\pi^2 M} (B_f^2 - E_f^2) + \\
 & + \sum_{f=u,d} \frac{MN_c E_f B_f}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} ds e^{-M^2 n \pi s} \frac{(B_f s)^2}{1 + (B_f s)^2} \coth \left(n\pi \frac{E}{B} \right) + \\
 & - \sum_{f=u,d} \frac{MN_c B_f}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} ds \frac{\left(s^2 e^{-\frac{M^2 n \pi s}{E_f}} - e^{-\frac{M^2 n \pi}{E_f}} \right)}{s^2 - 1} \coth \left(n\pi \frac{B}{E} \right).
 \end{aligned} \tag{123}$$

4 RESULTADOS

Os resultados que apresentarei neste capítulo são aplicações numéricas para o cálculo da massa efetiva para os diferentes casos de campos elétricos e magnéticos. Foi utilizado um método iterativo para a realização dos cálculos e geração dos gráficos em códigos escritos em FORTRAN e em Python, onde para as rotinas de integrais foi utilizado o método de integração por exponencial dupla (TAKAHASI; MASATAKE, 1973) e o método de encontrar raízes foram usados ambos os métodos de Ridder (RIDDER, 1979) e Brentq (BRENT, 1972), os quais obtiveram resultados praticamente idênticos e em velocidades também praticamente idênticas.

Além disso, enfatizamos que o conjunto de parâmetros usados foi o *set-2* de Buballa (2005): $\Lambda = 587,9\text{MeV}$, $G\Lambda^2 = 2,44$ e $m = 5,6\text{MeV}$. Ou seja, admitimos que os valores obtidos devem ser satisfatórios no regime de energias até $\Lambda \approx 0,58\text{GeV}$ e campos elétricos e magnéticos até $\Lambda^2 \approx 0,36\text{GeV}^2$. Vale destacar que os resultados de campo magnético puro, Seção 4.1, e de campo elétrico puro, Seção 4.2, assim como as explicações qualitativas foram obtidas primeiramente por Klevansky (1992) em seu trabalho seminal sobre o modelo NJL.

4.1 Massa Efetiva com Campo Magnético Constante

Tomando a função de gap para o caso de um campo magnético constante na direção \hat{z} , Equação (92), e encontrando os valores de Massa Efetiva para valores de eB no intervalo de 0 à 1GeV^2 , temos o gráfico da Figura 7.

Como esperado, vemos o fenômeno da catálise magnética: ao aumentar a intensidade do campo magnético, tem-se uma espécie de fortalecimento da ligação entre os quarks, uma vez que o modelo é em $SU(2)$, o condensado de quarks da equação de gap é um par quark-antiquark, formando um méson, onde um tem carga e spin oposto ao outro, e então seus momentos magnéticos estão na mesma direção, ao interagir com o campo magnético, esses momentos tendem a se alinhar, fortalecendo a ligação.

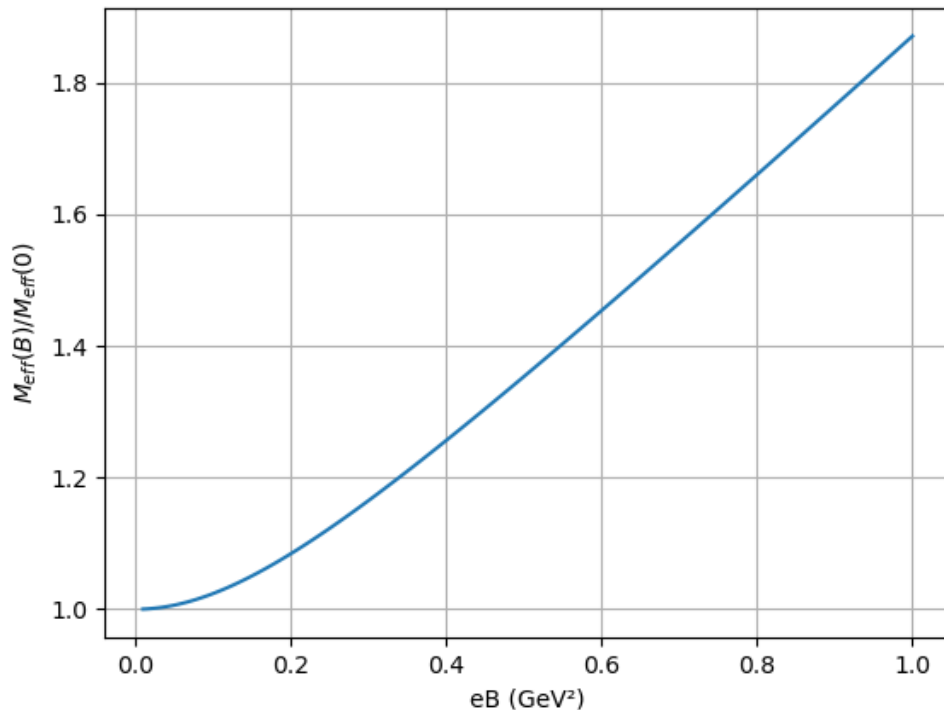


Figura 7 – Gráfico da Massa efetiva obtida pelo modelo NJL na presença de um campo magnético constante B , em função de eB , dividida pela massa efetiva à campo nulo.

4.2 Massa Efetiva com Campo Elétrico Constante

Analogamente, agora tomando a função de gap para o caso de um campo elétrico constante na direção \hat{z} , Equação (94), e encontrando os valores de Massa Efetiva para valores de eE no intervalo de 0 à 1GeV^2 , temos o gráfico da Figura 8.

Como pode-se observar o efeito do campo elétrico é contrário ao do campo magnético, tendendo a restaurar a simetria quiral conforme a intensidade do campo E aumenta. Ao atingir o valor de $eE \sim 0,2\text{GeV}^2$, a massa cai em valor rapidamente, tendendo ao limite “quiral” de $M_{\text{eff}} = m$. Qualitativamente, poderíamos pensar que no modelo em $SU(2)$ que estamos trabalhando, tendo um par quark-antiquark de cargas opostas, teria uma força contrária entre eles enfraquecendo a ligação e, portanto, assintoticamente atingiriam a massa de corrente.

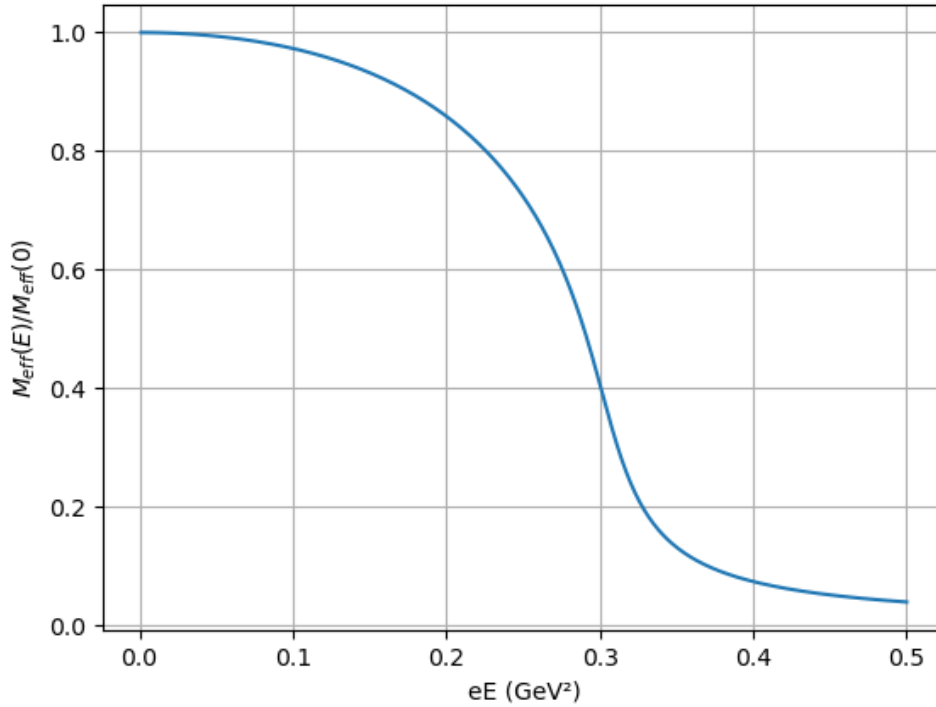


Figura 8 – Gráfico da Massa efetiva obtida pelo modelo NJL na presença de um campo elétrico constante E , em função de eE , dividida pela massa efetiva à campo nulo.

4.3 Massa Efetiva com Campo Elétrico e Magnético paralelos

Por fim, tomando a função de gap para o caso de um campo elétrico E e um campo magnético B paralelos entre si, Equação (123), encontramos a massa efetiva para valores de eE e eB até cerca de $0,5\text{GeV}^2$. Primeiramente fazemos um gráfico em 3 dimensões para definir a superfície de massa efetiva, dada no eixo z , em função do plano $eE \times eB$, como está na Figura 9.

Com estes resultados, primeiro precisamos verificar os limites de campo $eE \rightarrow 0$ e $eB \rightarrow 0$ para verificar a consistência com os resultados das duas seções anteriores.

Primeiramente, fixamos alguns valores de eE e fazemos um gráfico da massa efetiva contra o campo magnético, resultando na Figura 10.

Podemos notar que, a medida que o campo elétrico se aproxima de zero, a curva fica cada vez mais próxima da obtida com a da penúltima seção. Além disso, percebemos o efeito do campo elétrico, na qual cada vez mais intenso, mais a curva de $M_{\text{eff}} \times B$ fica com valores deslocados para massas menores.

Realizando o mesmo procedimento com os papéis invertidos, fazemos um gráfico da massa efetiva contra o campo elétrico, mantendo alguns valores de eB fixos, resultando na Figura 11.

Pode-se notar agora o efeito esperado, conforme B se aproxima de zero, mais se aproxima da curva da última seção, de $B = 0$. E temos a presença da catálise magnética: para valores mais intensos de eB , a curva se desloca para valores maiores de massa.

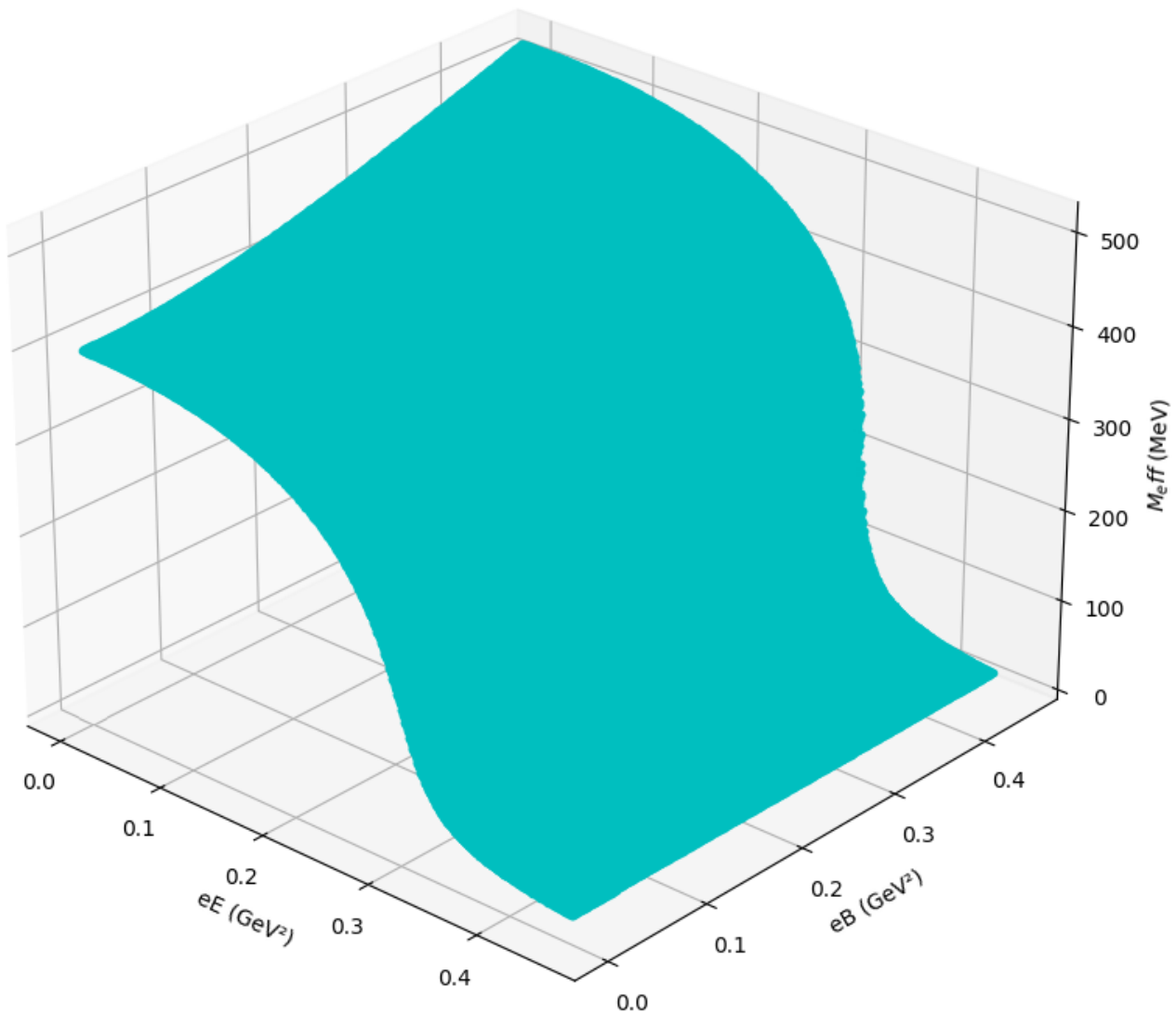


Figura 9 – Superfície de massa efetiva para o modelo NJL em $SU(2)$ em função de eE e eB constantes e paralelos entre si.

Podemos verificar a consistência dos resultados novamente, mais precisamente: uma maneira de controlar os resultados, seria analisar algumas curvas do potencial efetivo em relação à massa para diversos valores de B e E , e comparando a massa onde ocorre o mínimo global de Ω_{NJL} com a massa obtida pela função de gap. Foram feitos alguns gráficos, a fim de notar que o padrão se mantivesse e que realmente foi obtido o resultado desejado. Como exemplo, as Figuras 12 e 13 mostram as curvas de potencial efetivo e pode-se comparar as massas para os mínimos com as massas das Figuras 10 e 11, reforçando a consistência das expressões e resultados.

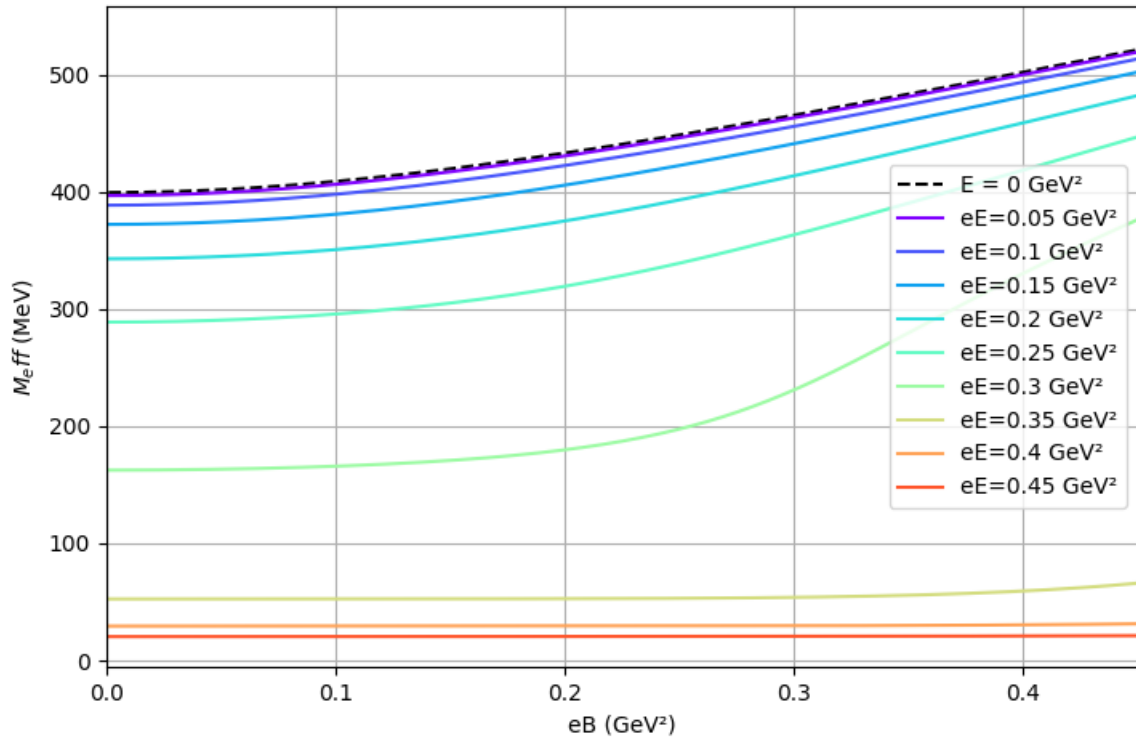


Figura 10 – Valores de massa efetiva do modelo NJL em $SU(2)$ em função de eB para distintos valores de eE fixos.

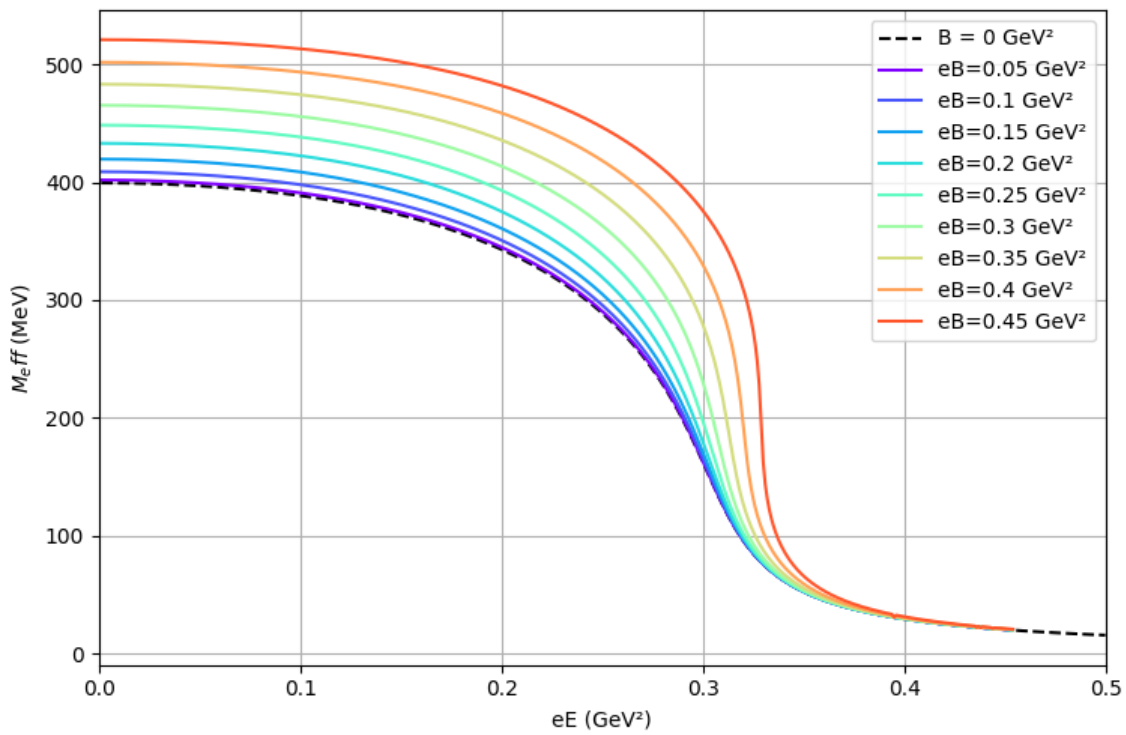


Figura 11 – Valores de massa efetiva do modelo NJL em $SU(2)$ em função de eE para distintos valores de eB fixos.

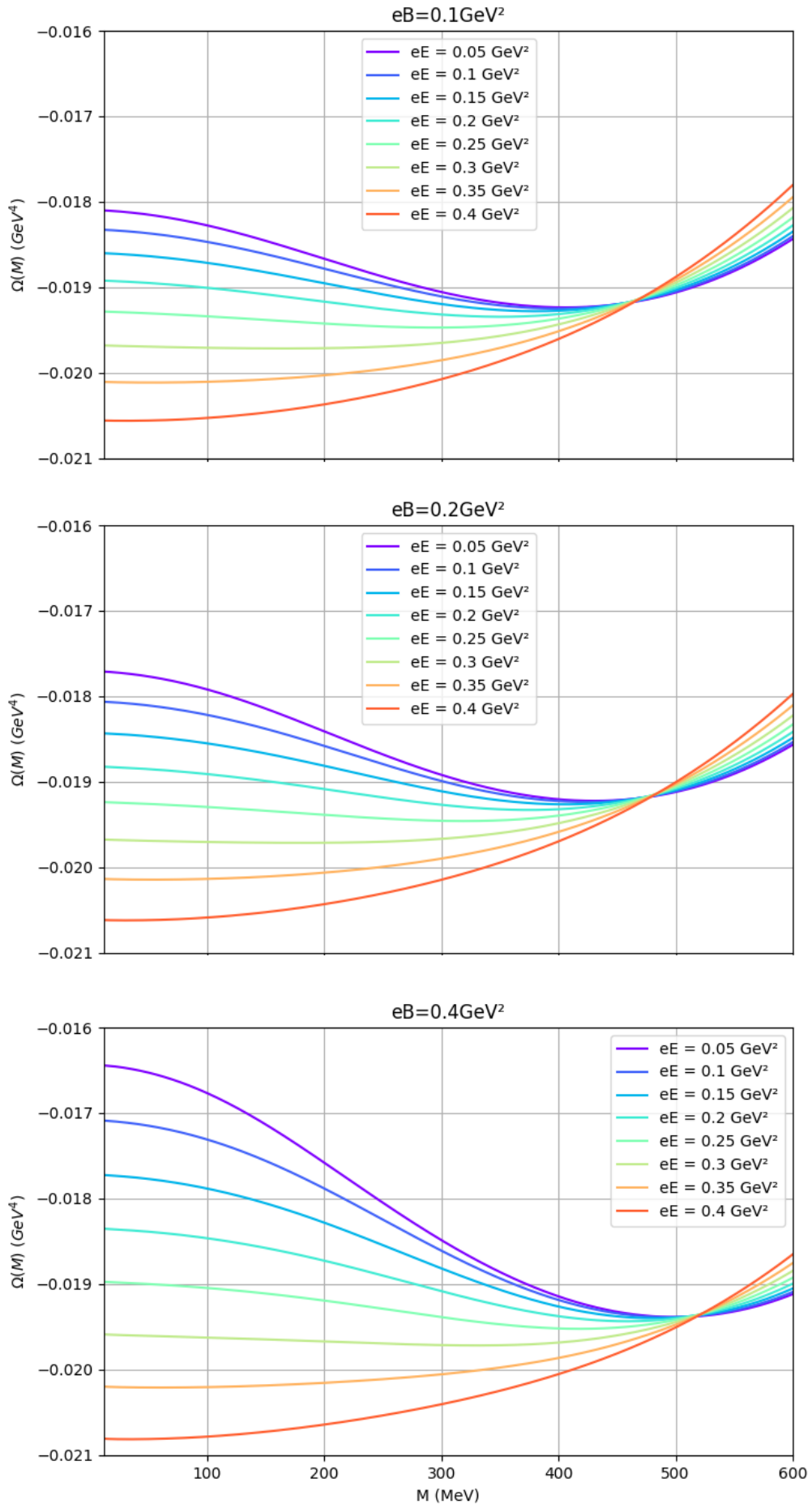


Figura 12 – Exemplos de mínimos de potencial, Ω_{NJL} , para três eB e um conjunto de eE fixos.

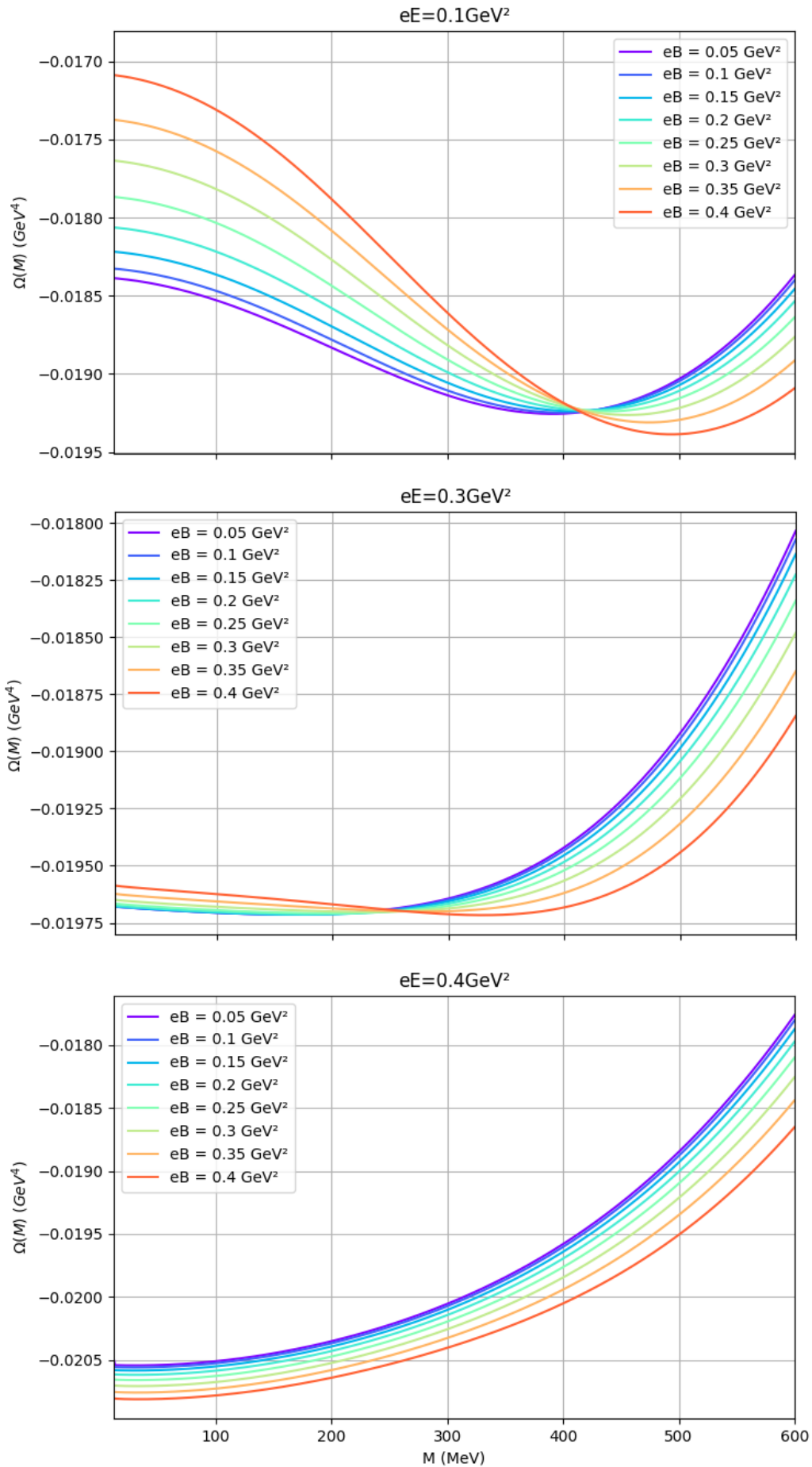


Figura 13 – Exemplos de mínimos de potencial, Ω_{NJL} , para três eE e um conjunto de eB fixos.

Outro resultado que vale a pena salientar é o comportamento da massa efetiva ao aumentarmos ambos os campos elétrico e magnético igualmente, como o intuito de responder qual efeito é mais importante, a catálise magnética ou a restauração da simetria quirial. Considerando a quantidade $k = E/B$, fazemos, então, um gráfico da massa efetiva em função da intensidade dos campos para o caso de $k = 1$, como consta na Figura 14.

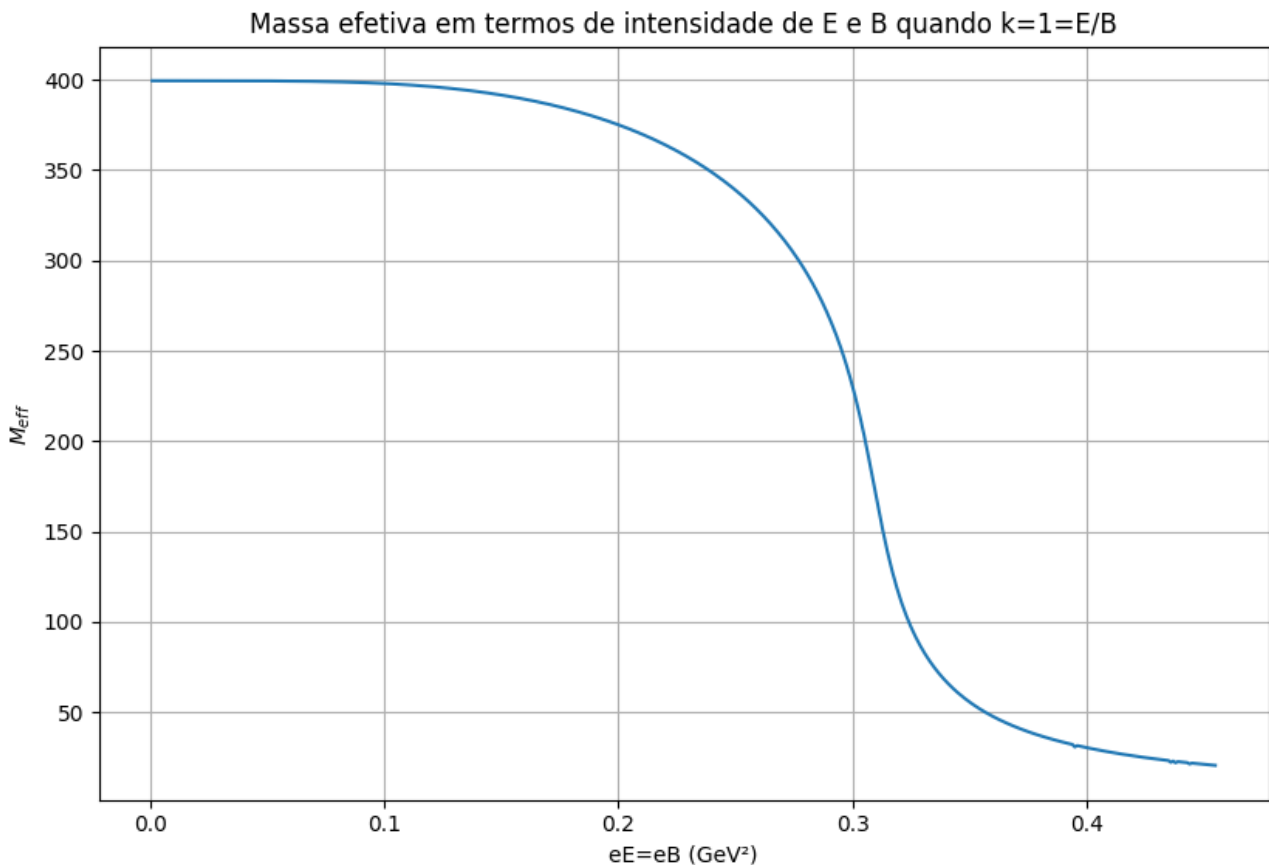


Figura 14 – Valores de massa efetiva do modelo NJL em $SU(2)$ em função da intensidade do campo eE e eB mantendo ambos igualmente intensos.

Notamos que o comportamento que vence esta disputa é o mesmo de campo elétrico puro, ou seja, a massa efetiva diminui, mesmo tendo o campo magnético tão intenso quanto presente, mais similar ao resultado da Figura 8. A fins de comparação entre os três casos que estamos cobrindo, temos na Figura 15 um gráfico da massa efetiva para os casos de $B = 0$, $E = 0$ e $B = E$, onde é claro o resultado desta “competição”. Ainda estamos estudando uma razão física qualitativa satisfatória para responder este fenômeno. Este resultado foi obtido de maneira diferente, na literatura, no trabalho de Ruggieri e Peng (2016), como iremos comparar na Seção 4.6.

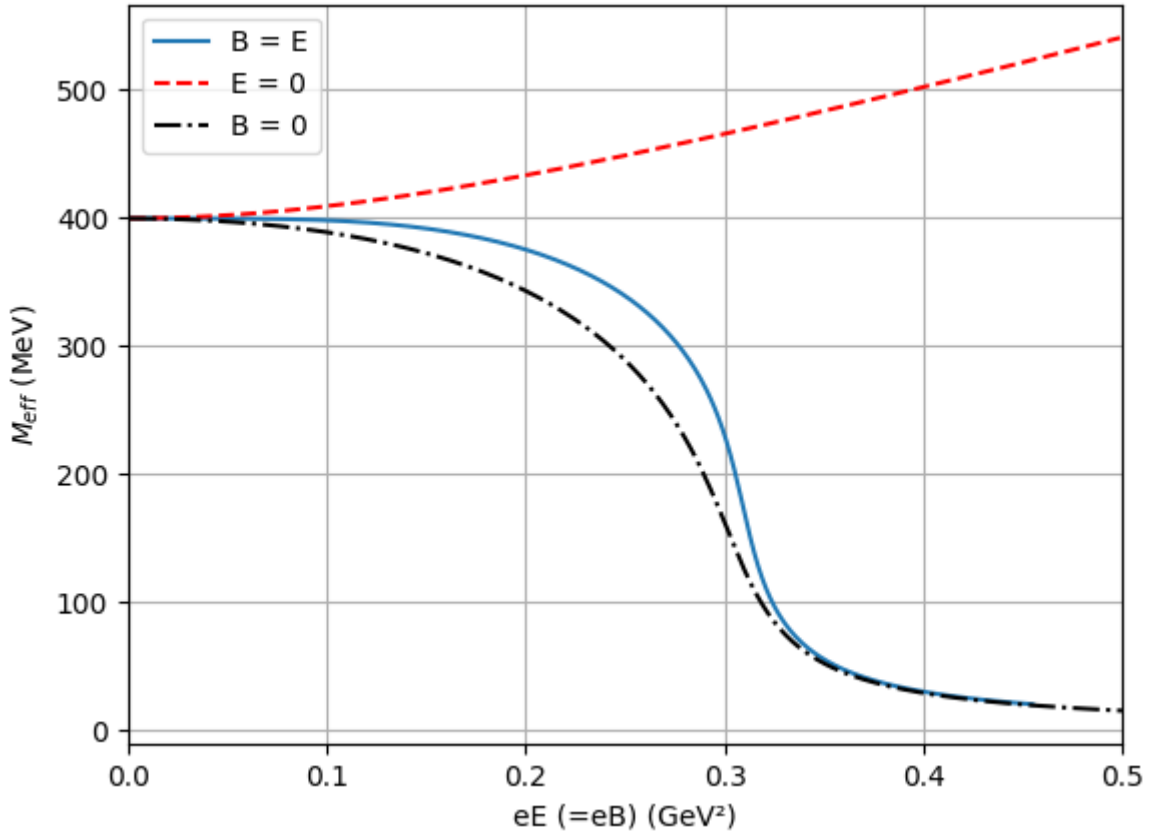


Figura 15 – Valores de massa efetiva do modelo NJL em $SU(2)$ em função da intensidade do campo elétrico eE (na curva em preto, em traço e ponto, para $B=0$), em função da intensidade do campo magnético eB (na curva em vermelho, tracejada, para $E=0$) e em função de $eB=eE$ no caso dos campos em mesma intensidade, na curva azul, contínua.

Este comportamento se repete mesmo para $eB = n \cdot eE$ ($n > 0$), no qual temos, em cada ponto da curva, um campo B , n vezes mais intenso que E , isto desloca a curva para cima onde, naturalmente, em cada ponto temos uma massa efetiva maior do que comparado com $B=0$ (campo elétrico puro), porém, podemos notar uma tendência desta característica da curva continuar, eventualmente caindo, para certo valor de eB . Para termos uma ideia da supressão podemos fazer curvas de massa efetiva por campo magnético, variando o valor do campo elétrico em cada ponto, conforme a Figura 16, na qual, conforme a curva “se avermelha” mais fraco se torna o campo elétrico, tendendo ao limite de campo magnético puro; nessa figura podemos perceber uma tendência numérica que se apresenta, mesmo com o campo elétrico fraco, é de se esperar que para certo valor de campo magnético a massa efetiva eventualmente decrescerá, ou seja, a simples presença do campo elétrico no sistema faz com que eventualmente a massa decresça em valor, para um campo magnético suficientemente grande.

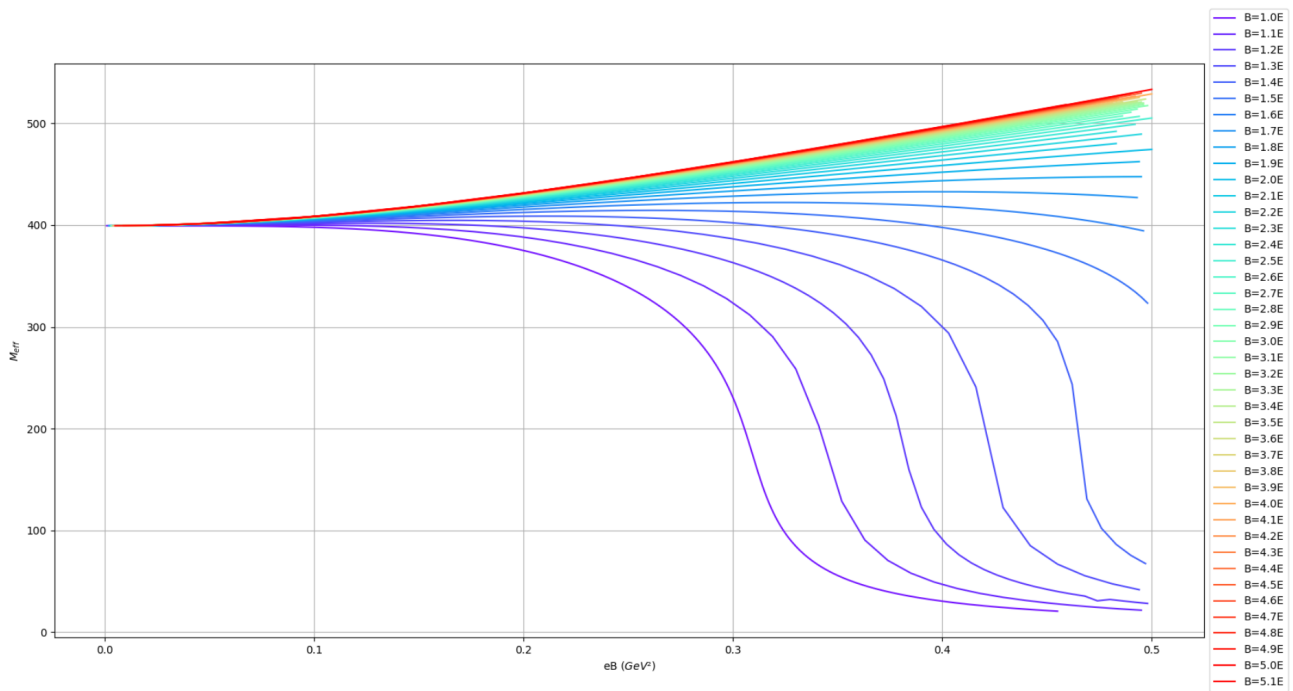


Figura 16 – Diversas curvas de massa efetiva em função de eB , onde as curvas variam do roxo, com o campo elétrico mais forte, $E = B$, para o vermelho, com o campo elétrico mais fraco, com $E = B/(5.1)$.

4.4 Pressão Efetiva do modelo com campos paralelos

Outro resultado que podemos tirar é a pressão efetiva, no nosso caso, equivalente à densidade de energia, que o modelo reproduz, ou seja: $P = -\Omega(M_{eff})$. Fazemos um gráfico desta quantidade em função dos campos, seguindo a comparação com os casos de campo magnético nulo e campo elétrico nulo, conforme foi realizado nas seções anteriores.

Primeiramente, tomamos o caso de variarmos o campo magnético para diversos valores de campo elétrico fixos e observamos o comportamento, dado na Figura 17, na qual é possível notar, naturalmente, que o campo elétrico aumenta a pressão da matéria hadrônica descrita pelo modelo para o mesmo valor de campo magnético. E notamos a consistência com o resultado para campo elétrico nulo, baseado nos cálculos de Avancini *et al.* (2021).

Num segundo caso, fazemos o procedimento contrário, variamos o campo elétrico e percebemos o comportamento da pressão efetiva para valores de campo magnético fixos, como na Figura 18, onde notamos novamente, como esperado, que o campo magnético aumenta a pressão da matéria hadrônica descrita pelo modelo para o mesmo valor de campo elétrico. O que é consistente automaticamente com o caso anterior: no qual fixando um valor de eB e analisando o comportamento para vários valores de eE , notamos o aumento, neste último gráfico apenas tomamos o caso contínuo desta análise para valores de eB selecionados. Além disso, é possível notarmos o limite bem definido quando o campo magnético se aproxima de zero, dando a consistência entre o nosso resultado e no resultado baseado nos cálculos de Tavares e Avancini (2018).

Finalmente, somente para fins de ilustração, podemos aumentar ambos E e B na mesma proporção e analisamos o que ocorre com a pressão efetiva, como dado na Figura 19. De maneira geral, como esperado, quanto maior a intensidade dos campos elétricos e magnéticos, maior a densidade de energia do sistema e, portanto, maior pressão, todavia, vale a pena observar que estes resultados trazem consigo mais uma instância de consistência entre o limite de campo magnético nulo e elétrico nulo do nosso trabalho com os trabalhos que tratam estes campos independentemente (AVANCINI *et al.*, 2021),(TAVARES; AVANCINI, 2018).

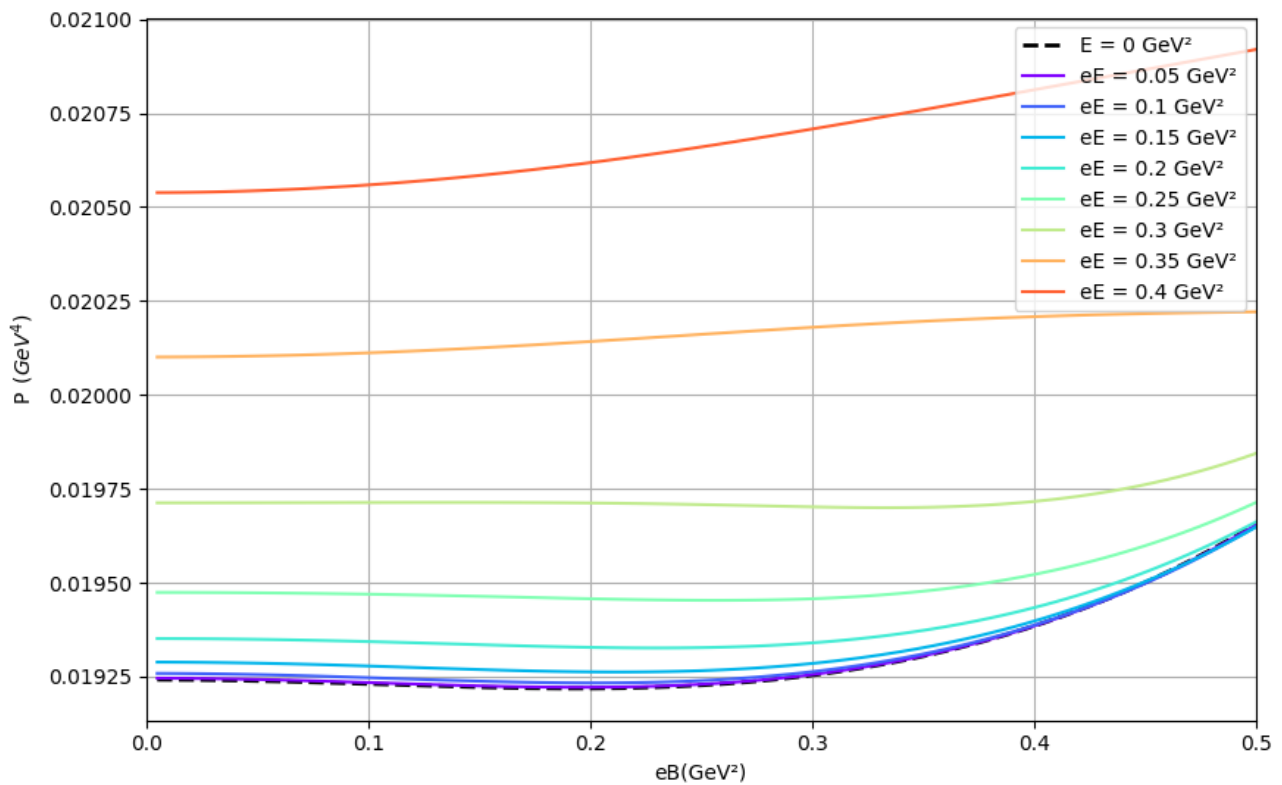


Figura 17 – Curvas da Pressão da matéria hadrônica descrita pelo modelo em função de eB para valores de campos elétricos selecionados.

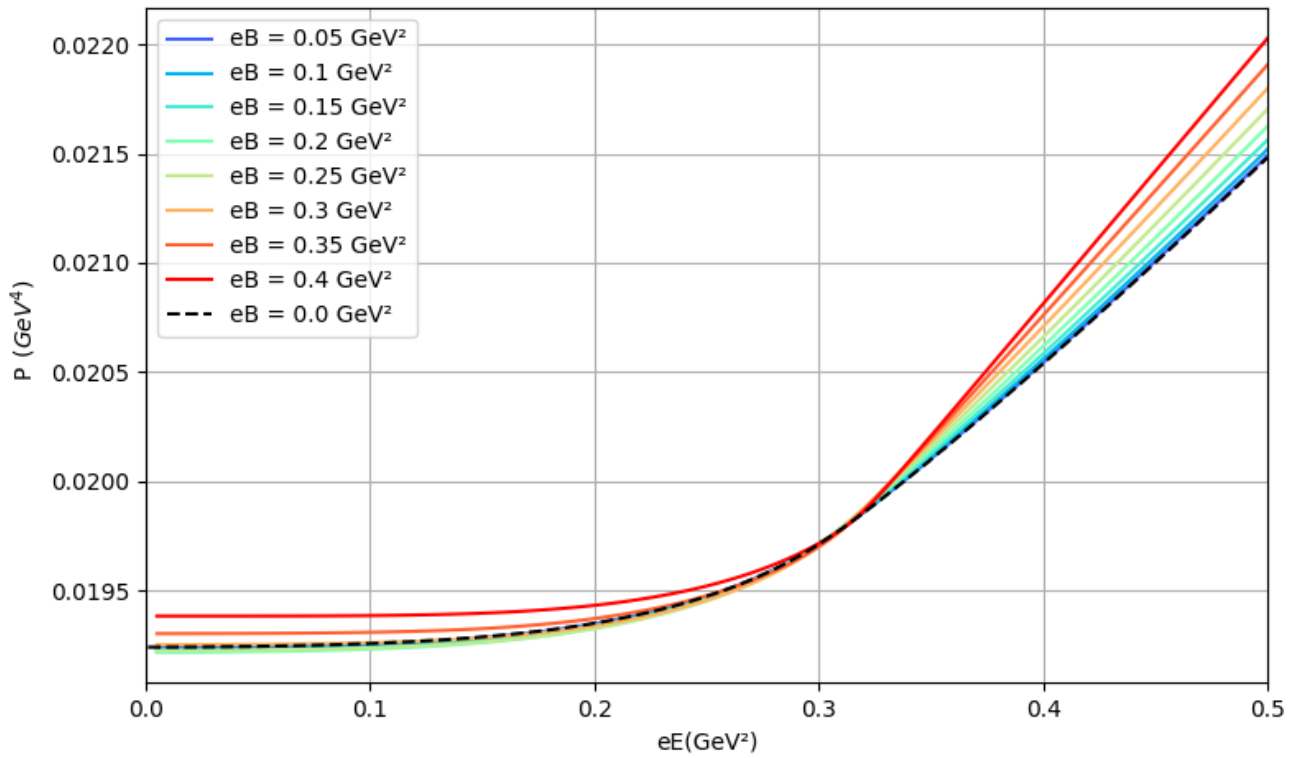


Figura 18 – Curvas da Pressão da matéria hadrônica descrita pelo modelo em função de eE para valores de campos magnéticos selecionados.

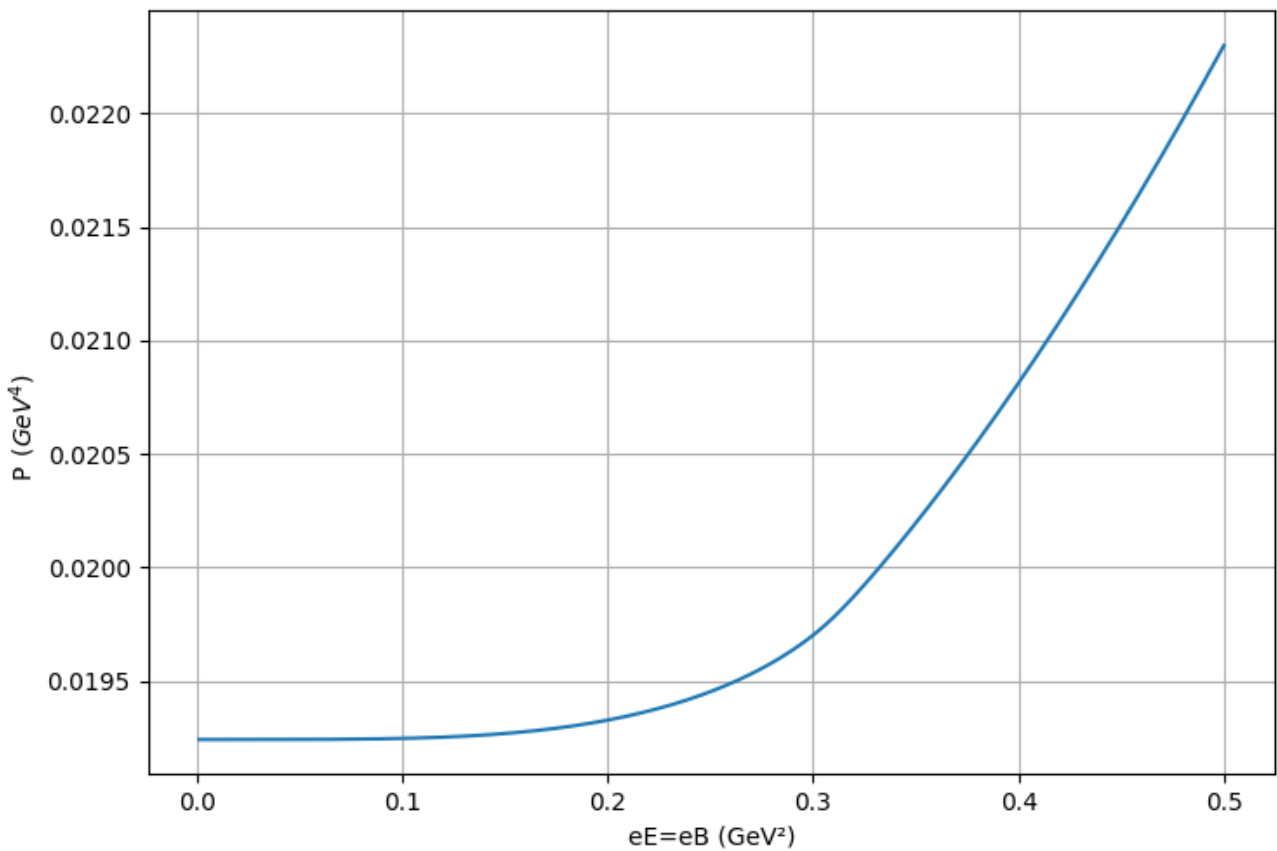


Figura 19 – Gráfico da Pressão aplicada na massa efetiva em função de eE ($= eB$), considerando que em cada ponto os valores de campo elétrico e magnético são iguais.

4.5 Taxa de criação de Pares com campo Elétrico e Magnético Paralelos

Nesta seção mostro os resultados obtidos para a taxa de criação de pares, de acordo com a Equação (79), primeiramente faço um gráfico em três dimensões, dado na Figura 20, onde temos uma superfície da taxa de produção no eixo z em função dos campos E e B nos eixos x e y respectivamente, na qual podemos perceber que após um campo $eE \sim 0,3\text{GeV}^2$ o comportamento das curvas muda de forma que a taxa de produção aumenta muito mais rapidamente para a mesma variação de campo elétrico (e magnético).

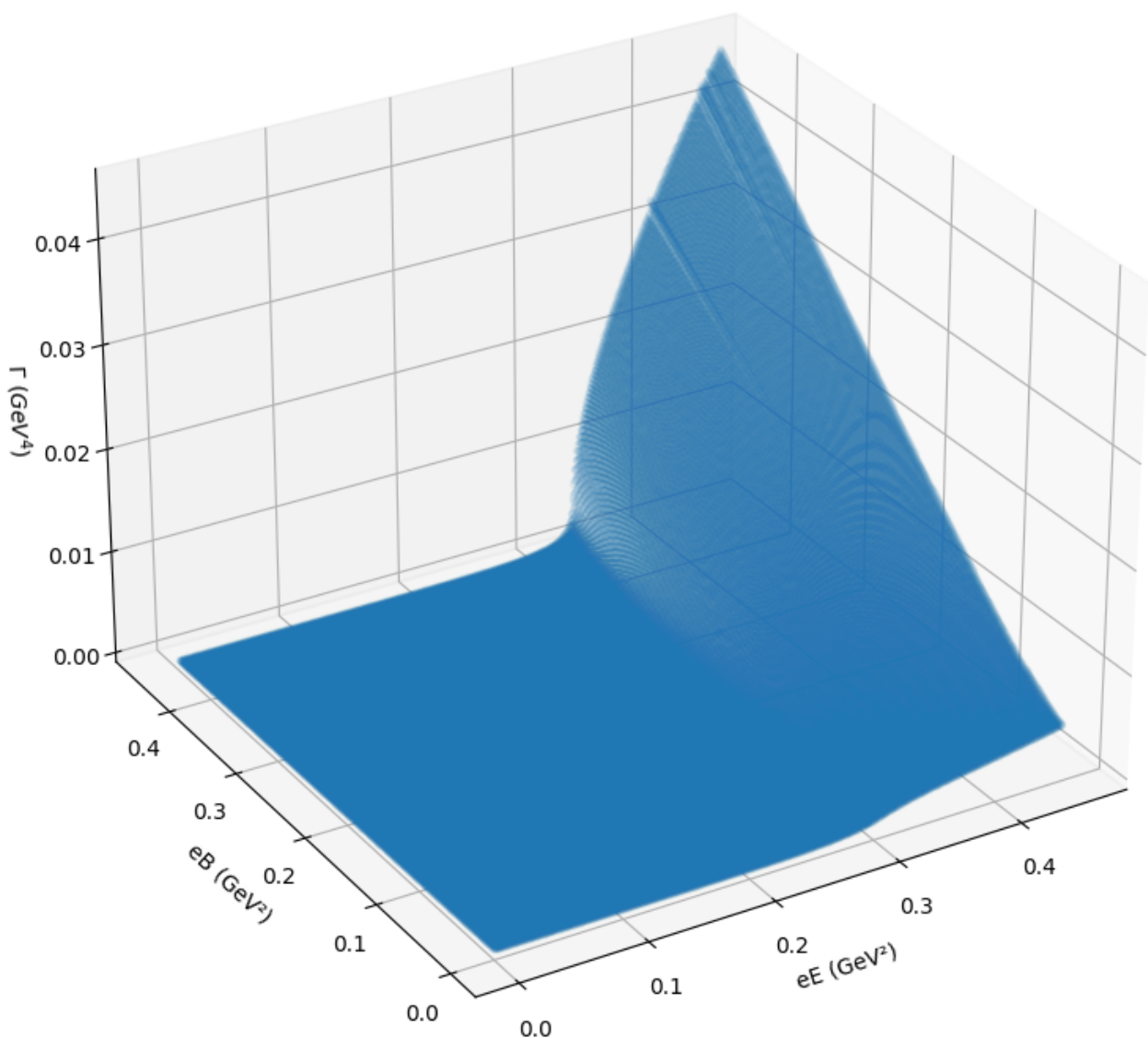


Figura 20 – Superfície de taxa de criação de pares em função dos campos elétrico $\vec{E} = E\hat{z}$ e magnético $\vec{B} = B\hat{z}$.

Como fizemos no caso da massa efetiva, analisaremos casos limites e interpretaremos com base nas expressões e resultados esperados. Primeiramente fazemos um gráfico da taxa de produção de pares em função do campo magnético, para diversos valores de campo elétrico de acordo com a Figura 21.

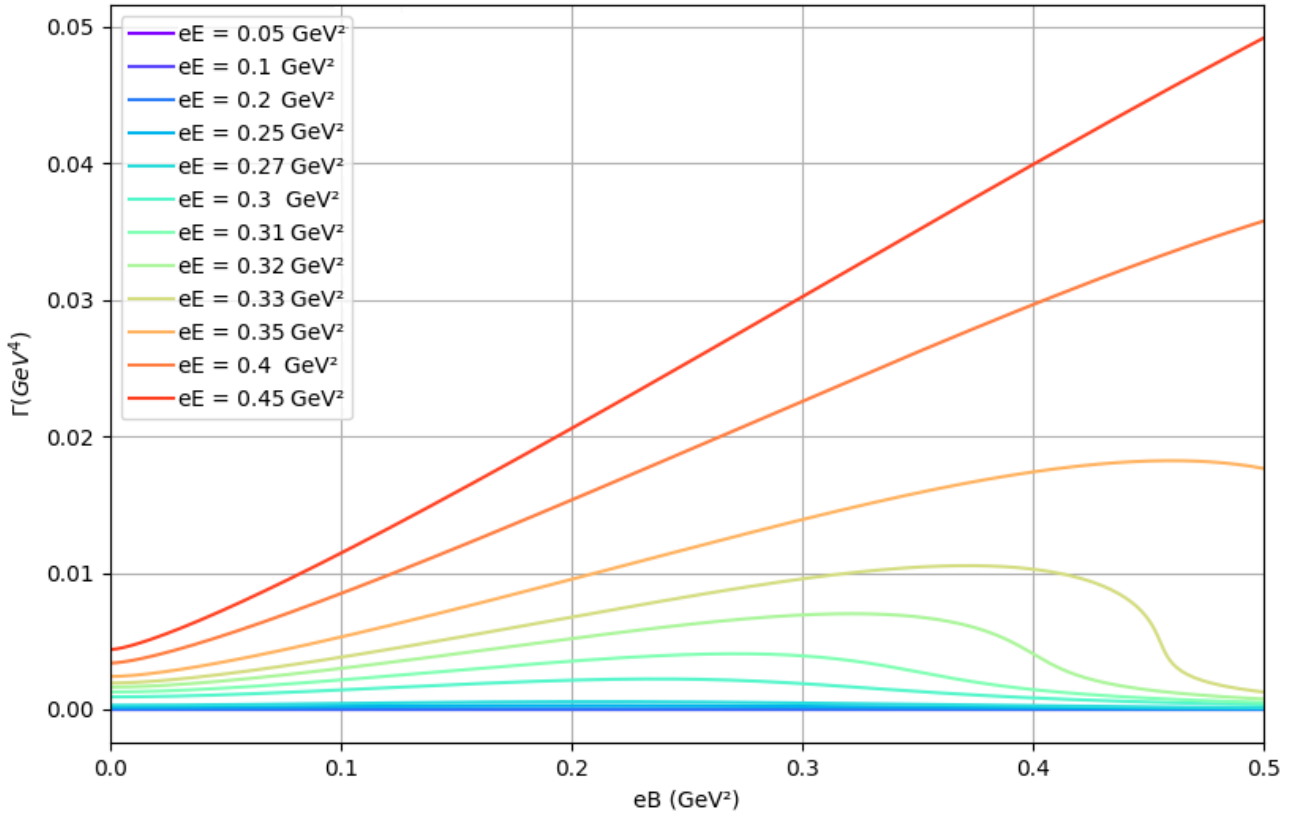


Figura 21 – Gráfico da Taxa de produção de pares em função do campo magnético para diversos valores de campo elétrico fixos.

Percebemos, naturalmente, o aumento da taxa de criação com o aumento do campo elétrico, porém, há um campo magnético particular que dita o máximo possível para esta situação, a partir dele quanto maior a intensidade do campo magnético, a taxa de criação de pares diminui, partindo da expressão para Γ , isso deve acontecer indiretamente, devido à catálise magnética, conforme aumenta-se B aumenta-se a massa efetiva M_{eff} , que está presente na exponencial decrescente da expressão da Equação (79), e, portanto, se torna um comportamento característico, esta diminuição. Além disso podemos perceber o grande aumento de Γ para a mesma variação de eE , quando eE passa do limite de $0,3\text{GeV}^2$ em poucos intervalos de intensidade a taxa aumenta drasticamente de valor, sendo que nesta região escolhemos colocar o gráfico de mais valores de eE , quando geralmente só variaríamos em intervalos $0,05\text{GeV}^2$, a diferença no gráfico para este intervalo é bem grande. Como veremos na sequência, a partir deste valor a taxa realmente apresenta um comportamento de aumento drástico.

O próximo caso que temos que analisar é o contrário, mantemos campos B fixos e fazemos um gráfico da taxa de criação em função do campo elétrico E , dado na Figura 22 a fim de notarmos o limite de campo $B=0$ para compararmos com o resultado de campo elétrico puro, como foi feito por Tavares e Avancini (2018), aqui replicado na Figura 23, a fim de mostrar a curva de evolução em outra perspectiva.

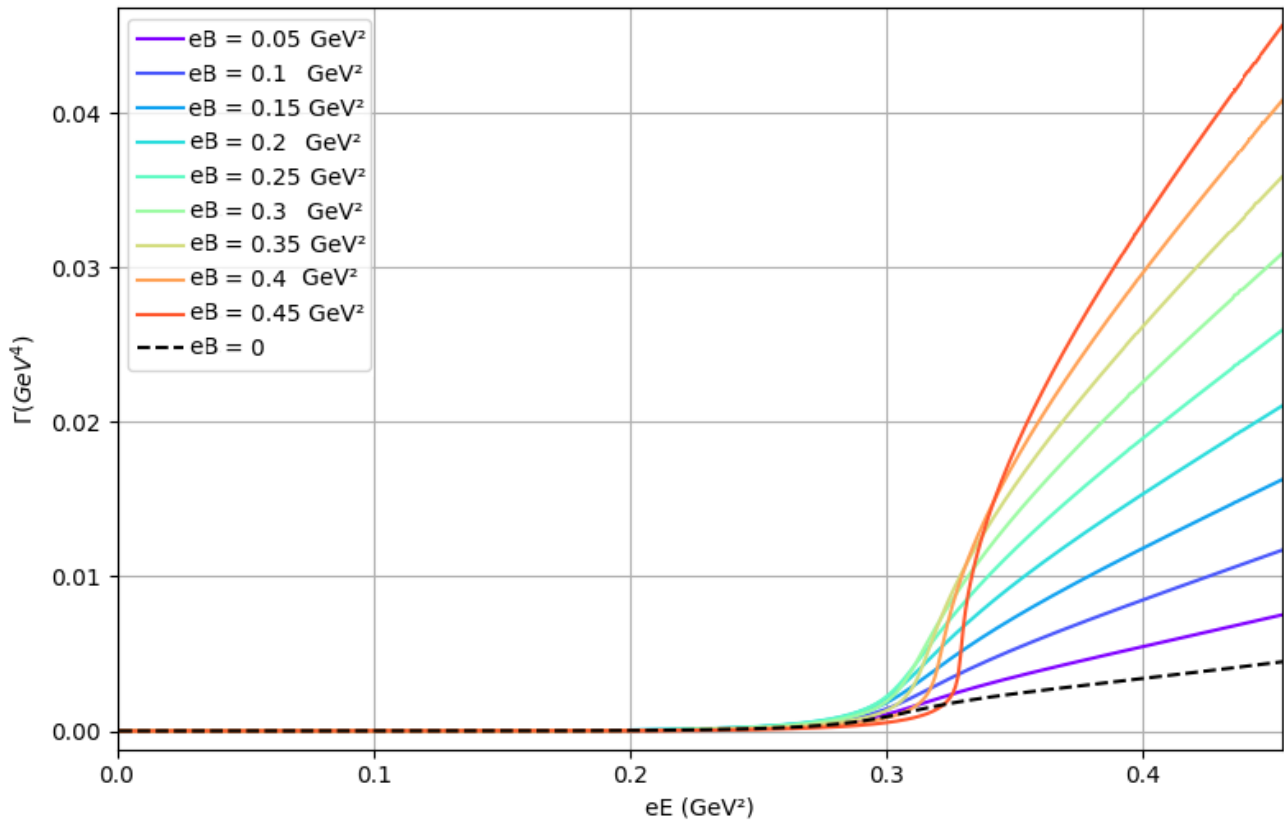


Figura 22 – Taxa de produção de pares em função de eE para valores selecionados de eB .

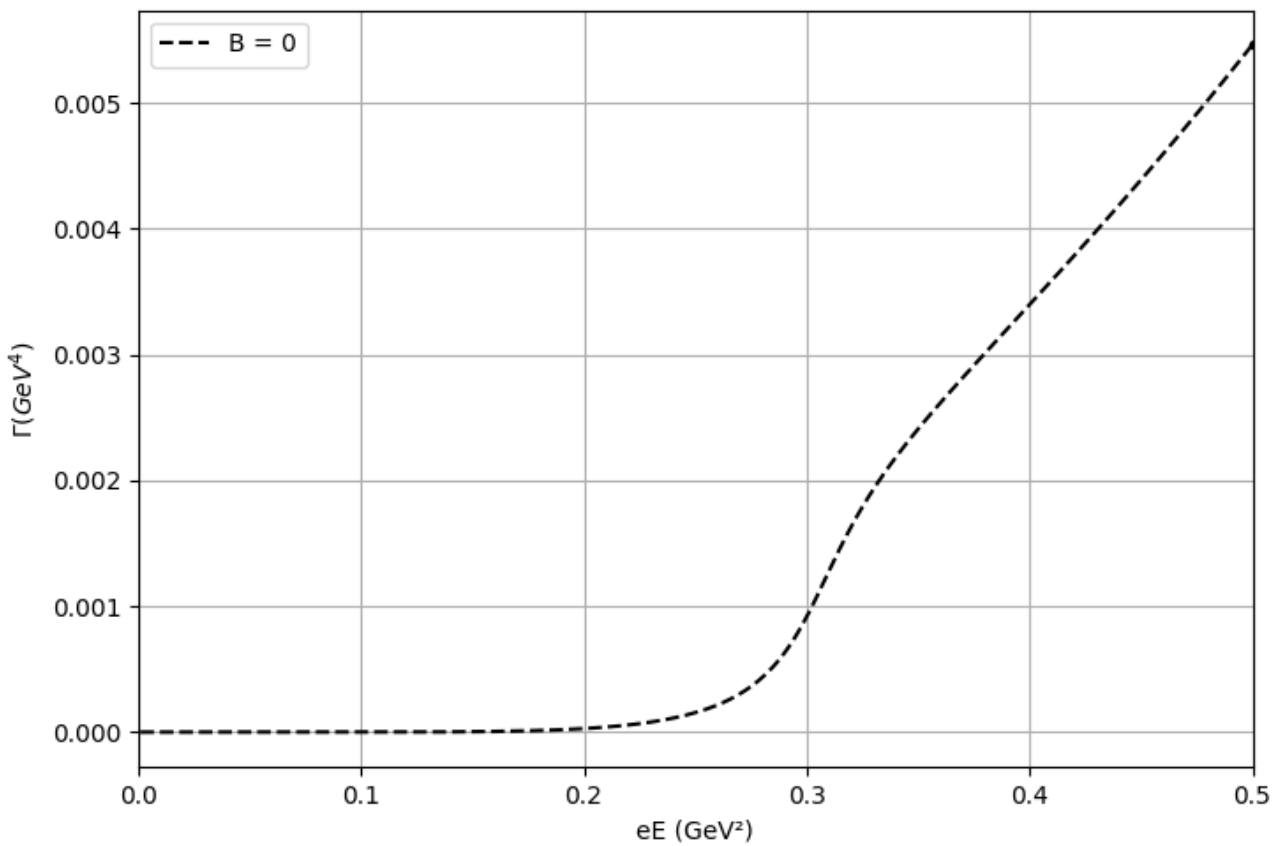


Figura 23 – Taxa de produção em função do campo elétrico vezes a carga elementar, eE .

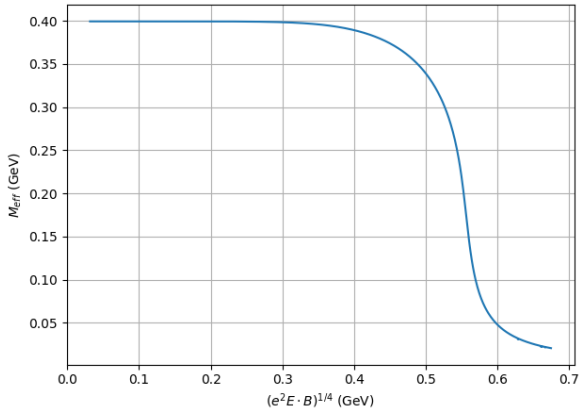
Podemos ver, da figura, que o conforme o campo B se aproxima de zero, mais próximo o gráfico produzido chega ao caso de campo elétrico puro, trazendo credibilidade e consistência entre os resultados. Além disso a figura mostra um comportamento curioso, de certa forma não intuitivo, até a região de $eE \sim 0.33\text{GeV}^2$ não necessariamente o maior campo magnético produz a maior taxa, mas muito pelo contrário, inclusive as curvas de maiores eB ficam abaixo da curva de $B=0$, neste regime, um comportamento indireto que percebemos da Figura 21, onde temos máximos bem definidos.

4.6 Comparação com a Literatura

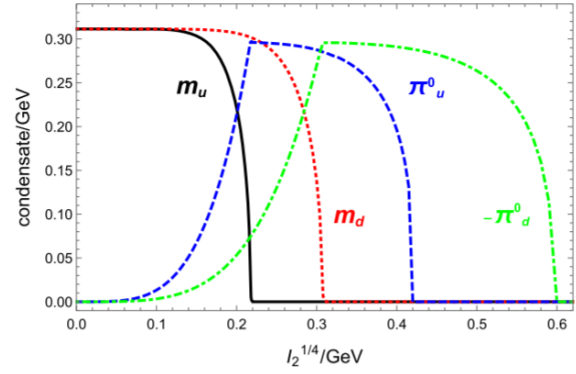
Nesta seção tento confrontar, na medida do possível, os resultados que obtivemos, usando o caso de campo elétrico e magnético paralelos, com os encontrados na literatura. A respeito dos resultados para o potencial efetivo, ou equivalentemente a pressão e para taxa de produção de pares, não encontramos nada na literatura que dê para comparar, somente os casos limites já realizados nas seções anteriores. Antes dos resultados numéricos, ressaltamos que não encontramos nenhum trabalho que use a expressão da Equação (64) e fórmula de Sokhotski-Plemelj, Equação (74), com as aproximações e regularização que utilizamos.

Primeiramente, sobre o resultado teórico obtido para a taxa de produção de pares: o caso de campo elétrico puro foi primeiramente obtido por Schwinger (1951) e o caso de campo elétrico e magnético, Equação (75), foi obtido por Nikishov (1969), porém as contas foram feitas de maneiras completamente diferentes do caso deste trabalho e ambas estão de acordo entre si.

Posteriormente, é possível comparar os resultados de massa efetiva com os trabalhos de Wang *et al.* (2018) e de Ruggieri e Peng (2016), porém apenas no âmbito qualitativo, já que quantitativamente os três trabalhos usam regularizações e parâmetros diferentes entre si. No primeiro é feito um gráfico da massa efetiva para o interessante caso de $E = B$ em função do invariante de Lorentz, no que é chamado no artigo de $I_2 = E \cdot B$. A principal diferença entre nossos resultados são o conjunto de parâmetros (G, Λ e m) usados devido à regularização ser diferente, no caso deles, é utilizado a regularização de Pauli-Villars como eles se referem (CAO; ZHUANG, 2015) e o fato de no artigo ser utilizado $m_U \neq m_D$ num esquema de equações de gap acopladas. Na Figura 24 temos um comparativo direto das curvas de massa efetiva, na qual pode-se notar uma consistência qualitativa, em grande parte, entre os resultados, no que se refere ao comportamento desta quantidade física em função de I_2 , no nosso trabalho obtemos um comportamento assintoticamente mais suave, sendo que no trabalho em comparação o comportamento da massa efetiva cai abruptamente, em torno de $I_2^{1/4} = 0,2\text{GeV}$, evidenciando uma transição de fase de primeira ordem, que provavelmente é um artefato do método de regularização utilizado.



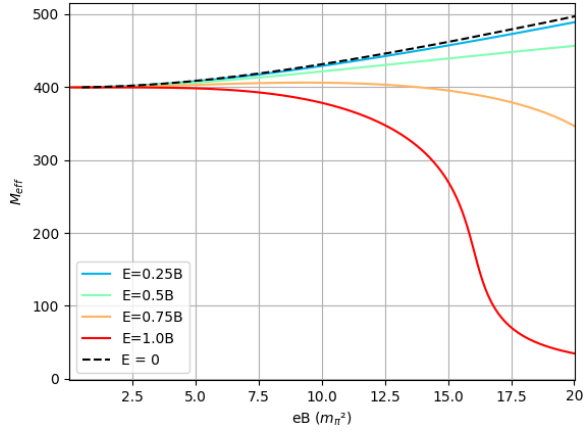
(a) Gráfico da massa efetiva M_{eff} usando o modelo e as contas desta dissertação em função de $(e^2 EB)^{1/4}$ com os parâmetros $\Lambda = 587,9 \text{ MeV}$, $G = 2,44/\Lambda^2$ e $m = 5,6 \text{ MeV}$.



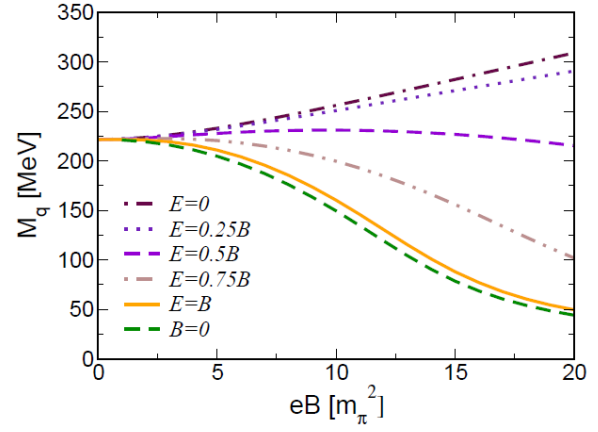
(b) Figura retirada de (WANG *et al.*, 2018), na qual temos as curvas de massa efetiva para m_u e m_d em função de $l_2^{1/4} = EB^{1/4}$, assim como as curvas para os condensados de pión, que a princípio podem ser negligenciadas em comparação com os resultados desta dissertação. Com os parâmetros $\Lambda = 653 \text{ MeV}$, $G = 4,93 \text{ GeV}^{-2}$ e $m = 5,0 \text{ MeV}$.

Figura 24 – Figura de comparação do trabalho desta dissertação com o de Wang *et al.* (2018) no que se refere ao comportamento da curva de massa efetiva em função do invariante de Lorentz EB .

Já o trabalho de Ruggieri e Peng (2016) traz resultados mais próximos aos obtidos nesta dissertação e podem ser vistos na Figura 25, na qual, agora fazemos gráficos da massa efetiva em função de eB em unidades da massa do pión ao quadrado ($m_\pi = 139 \text{ MeV}$, como usado no artigo em questão). Apesar de usarmos métodos e parâmetros completamente diferentes, os resultados mostram comportamentos qualitativamente muito parecidos a respeito da massa efetiva, tal que nesse trabalho em comparação, foi utilizado o método de regularização de tempo-próprio, no qual a equação de gap foi feita utilizando $\theta_3(x, z)$, a terceira função *theta* elíptica e no resultado obtido por eles é possível observar uma curva mais suave (considerando as curvas $E = B$, $E = 0,5B$ e $E = 0,75B$) enquanto que no nosso resultado, a mudança em valor da massa efetiva acontece mais “rápido” a fim da curva tomar o limite $M_{eff} = m$.



(a) Gráfico da massa efetiva M_{eff} usando o modelo e as contas desta dissertação em função de (eB) com os parâmetros $\Lambda = 587,9 \text{ MeV}$, $G = 2,44/\Lambda^2$ e $m = 5,6 \text{ MeV}$.



(b) Figura retirada de (RUGGIERI; PENG, 2016), na qual temos as curvas de massa efetiva no modelo NJL em $SU(2)$ em função de eB , para selecionados valores de campo elétrico. Pelo que se pode entender do artigo, a curva designada com $B = 0$ pode ser interpretada como a curva de campo elétrico puro e o eixo x deve ser tomado como eE e está de acordo com os resultados que obtivemos. Com os parâmetros $\Lambda = 1086 \text{ MeV}$, $G = 3,78/\Lambda^2$ e $m = 5,49 \text{ MeV}$.

Figura 25 – Figura de comparação do trabalho desta dissertação com o de Ruggieri e Peng (2016) no que se refere ao comportamento da curva de massa efetiva em função do campo magnético (eB) .

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

O estudo da Cromodinâmica Quântica e da matéria hadrônica em geral assim como extensões não-maxwellianas do eletromagnetismos são campos de pesquisa efervescentes atualmente, sendo o uso de modelos efetivos uma alternativa para descrever a matéria composta de quarks no regime não-perturbativo da QCD. Neste contexto mostramos um trabalho feito sobre o modelo de Nambu-Jona Lasinio em 2 sabores (NJL $SU(2)$) a fim de reproduzir resultados para a massa efetiva dos quarks, pressão e taxa de produção de pares quark-antiquark, quando esta matéria é submetida à um campo elétrico constante E e um campo magnético constante B paralelos entre si descritos pela lagrangiana de Euler-Heisenberg, no qual o modelo completo é regularizado com um corte no 3-momento por um parâmetro Λ . Todo o procedimento numérico é realizado usando os parâmetros do *set-2* de Buballa (2005): $\Lambda = 587,9 \text{ MeV}$, $G = 2,44/\Lambda^2$ e $m = 5,6 \text{ MeV}$.

Os resultados se mostraram satisfatórios ao serem comparados com os resultados da literatura. Utilizamos a lagrangiana de Euler-Heisenberg como base descritiva dos efeitos eletromagnéticos somada à lagrangiana usual do modelo NJL, tal que nos limites de campos nulos $B \rightarrow 0$ e $E \rightarrow 0$ recuperamos com certa clareza os limites já tidos na literatura, principalmente tomando como referência os trabalhos de Menezes *et al.* (2009) e de Tavares e Avancini (2018), nos quais obtivemos as curvas de massa efetiva se aproximando do caso de campos independentes, para somente B e somente E respectivamente.

Sobre a massa efetiva, pudemos notar, nos gráficos dos resultados, o comportamento dado por ambos o fenômeno da catálise magnética e da catálise magnética inversa e a competição entre esses dois efeitos. De modo geral, foi feito um gráfico em três dimensões, Figura 9 da massa efetiva em função de ambos os campos, especificamente em função de eB e eE no intervalo de interesse, e então analisamos casos particulares desta figura geral. Como feito na Figura 10, o evoluirmos a massa efetiva com o aumento do campo magnético, notamos um aumento da mesma: a catálise magnética, e o comportamento é o mesmo para diversos valores de campo elétrico, sendo a diferença dada por este último, em deslocar a curva para baixo quanto maior a intensidade de eE . O efeito do campo elétrico é melhor visto então na Figura 11: ao evoluirmos a massa efetiva com o aumento de eE , notamos uma diminuição da mesma e relacionado com o resultado anterior, como esperado, o comportamento segue para diversos valores de eB fixos, uma vez que quando maior essa quantidade, mais deslocada a curva fica para cima. Ainda sobre o resultado da massa efetiva, é interessante ressaltar a curva do plano que intersecta a Figura 9 onde $eB = eE$, ao evoluirmos com o aumento simultâneo ambas quantidades, que como já mencionado, tem resultados distintos no valor final da massa efetiva, percebemos um comportamento que é predominado pelo do campo

elétrico eE e a massa diminui nestas circunstâncias, no entanto, ainda não possuímos uma explicação física satisfatória, qualitativamente falando, para o porquê dos efeitos da catálise magnética serem suprimidos. Como já descrito na Seção 4.6, nossos resultados para o comportamento das curvas de massa efetiva são compatíveis, de modo qualitativo, com os resultados de Wang *et al.* (2018) e de Ruggieri e Peng (2016), nos quais foram realizados procedimentos diferentes de regularização e conjunto de parâmetros diferentes, ocasionando apenas em resultados quantitativamente distintos dos resultados do nosso trabalho.

Já para os resultados de pressão efetiva da matéria hadrônica obtemos as curvas de evolução que esperaríamos: a pressão aumenta conforme os campos magnéticos e elétricos aumentam, mas vale a pena ressaltar que estes resultados, dados nas Figuras 17 e 18 reforçam a consistência entre as nossas contas feitas no Capítulo 3 a respeito do caso de campo elétrico e magnético paralelos e os resultados para o potencial termodinâmico baseados nos cálculos feitos por Avancini *et al.* (2021) e Tavares e Avancini (2018) que apresentam os resultados para os casos de campo magnético puro e campo elétrico puro.

No que se refere à taxa de produção de pares, Γ , analogamente ao caso da massa efetiva, foi feito um gráfico em três dimensões em função de eE e eB desta quantidade, dada na Figura 20, usando resultados anteriores para massa efetiva, de maneira geral o campo responsável pela parte imaginária da lagrangiana e, por consequência, para ser possível a criação de pares quark-antiquark, é o campo elétrico, assim notamos uma evolução bem rápida de Γ a partir de $eE \sim 0,3\text{GeV}^2$. Ao selecionarmos planos particulares e paralelos entre si de curvas da Figura 20, fizemos primeiramente gráficos da taxa de pares em função do campo magnético para diversos valores de eE diferentes de zero, como vemos na Figura 21 tal que notamos que todas as curvas evoluem com eB de forma a crescer até um valor de campo magnético onde a taxa é máxima e então caem para zero, o motivo disso foi constatado que, mesmo que o campo magnético não tenha influência na taxa de criação diretamente, indiretamente ele possui, uma vez que a catálise magnética está presente e a massa efetiva aumenta, tornando cada vez mais difícil a probabilidade da criação de par quark-antiquark para um aumento da intensidade de eB , isso é manifestado na exponencial decrescente da Equação (79). Analogamente com os resultados anteriores, repetimos o processo fazendo um gráfico de Γ por eE , mantendo diversos valores de eB fixos, dado na Figura 22, incluindo o valor de $B = 0$ a fim de reproduzir no limite o resultado de Tavares e Avancini (2018), o que é observado, além disso notamos um resultado curioso onde curvas se cruzam e para campos eE maiores que aproximadamente 0,33, quanto maior o valor de campo magnético, maior a taxa de produção de pares.

Como uma visão geral do trabalho, ressaltamos que não foi encontrado na literatura um procedimento de cálculo e regularização do modelo NJL em $SU(2)$ como fizemos, com o método de regularização *Cutoff-3D* e usando as Equações (64) e (74) para extrairmos o Valor Principal e trabalharmos com a parte real do potencial termodinâmico e também para conseguirmos uma expressão para a taxa de produção de pares, dada na Equação (79), completamente compatível com o resultado chegado por Nikishov (1969), obtido de uma maneira distinta. Porém, é importante

salientar que os resultados obtidos foram feitos para esse procedimento de regularização específico e também especificamente para o conjunto 2 de parâmetros, dado por Buballa (2005), sendo que não podemos afirmar, com certeza, que o comportamento dos resultados, mesmo que a nível qualitativo, para outros procedimentos de regularização e/ou outros conjuntos de parâmetros, seja o mesmo, sendo interessante analisar a possível influência das parametrizações nos resultados.

Como perspectiva futura, é possível estender os resultados deste trabalho considerando efeitos da temperatura, que desempenha um papel de catálise magnética inversa e também do potencial químico diferentes de zero, assim como incorporar o quark *strange* e analisar a influência dos mesmos nos cálculos, mudando assim para o modelo *NJL* em *SU(3)*. Outra possibilidade, seria considerar uma constante de acoplamento dependente dos campos, no entanto devido a escassez de resultados de LQCD, com campos elétricos e magnéticos, seria apenas um trabalho acadêmico. Ainda é possível implementar o Loop de Polyakov, como é bem sabido, simula o aspecto de confinamento da QCD.

REFERÊNCIAS

AAD, G. *et al.* Observation of Light-by-Light Scattering in Ultraperipheral Pb+Pb Collisions with the ATLAS Detector. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 123, p. 052001, 5 jul. 2019. DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.052001. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.052001>.

ALFORD, Mark. **Cool Quarks**. Mai. 2010. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/Physics.3.44>. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/Physics.3.44>.

ALFORD, Mark G. *et al.* Color superconductivity in dense quark matter. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 80, p. 1455–1515, 4 nov. 2008. DOI: 10.1103/RevModPhys.80.1455. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.80.1455>.

ALKOFER, R. The infrared behaviour of QCD Greens functions Confinement, dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states. **Physics Reports**, Elsevier BV, v. 353, n. 5-6, p. 281–465, nov. 2001. ISSN 0370-1573. DOI: 10.1016/S0370-1573(01)00010-2. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573\(01\)00010-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573(01)00010-2).

ATLAS COLLABORATION. Evidence for light-by-light scattering in heavy-ion collisions with the ATLAS detector at the LHC. *Nature Phys.*, v. 13, p. 852–858, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/nphys4208>.

AVANCINI, Sidney dos Santos. *Magnetares no Contexto do Modelo Nambu-Jona-Lasinio*. [S.l.], 2021.

AVANCINI, Sidney S. *et al.* Regularizing thermo and magnetic contributions within nonrenormalizable theories. **Phys. Rev. D**, v. 103, n. 5, p. 056009, 2021. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.056009. arXiv: 2008.10720 [hep-ph].

BAILIN, D.; LOVE, A. Superfluidity and Superconductivity in Relativistic Fermion Systems. **Phys. Rept.**, v. 107, p. 325, 1984. DOI: 10.1016/0370-1573(84)90145-5.

BANDOS, Igor *et al.* Nonlinear duality-invariant conformal extension of Maxwells equations. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 102, n. 12, dez. 2020. ISSN 2470-0029. DOI: 10.1103/physrevd.102.121703. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.102.121703>.

BARROIS, Bertrand C. Superconducting quark matter. **Nuclear Physics B**, v. 129, n. 3, p. 390–396, 1977. ISSN 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(77\)90123-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(77)90123-7). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321377901237>.

BRENT, Richard P. **Algorithms for minimization without derivatives**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1972. (Prentice-Hall series in automatic computation). ISBN 0-13-022335-2.

BRODSKY, Stanley J.; TÉRAMOND, Guy F. de. Light-Front Holography and Novel Effects in QCD. **PARTICLES AND FIELDS: Proceedings of the XIII Mexican School of Particles and Fields**, ASCE, 2009. DOI: 10.1063/1.3131569. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1063/1.3131569>.

BUBALLA, M. NJL-model analysis of dense quark matter. **Physics Reports**, Elsevier BV, v. 407, n. 4-6, p. 205–376, fev. 2005. ISSN 0370-1573. DOI: 10.1016/j.physrep.2004.11.004. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2004.11.004>.

BUSZA, Wit; RAJAGOPAL, Krishna; SCHEE, Wilke van der. Heavy Ion Collisions: The Big Picture and the Big Questions. **Annual Review of Nuclear and Particle Science**, Annual Reviews, v. 68, n. 1, p. 339–376, out. 2018. ISSN 1545-4134. DOI: 10.1146/annurev-nucl-101917-020852. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1146/annurev-nucl-101917-020852>.

BYRON, Frederick W.; FULLER, Robert W. **Mathematics of Classical and Quantum Physics**. [S.l.]: Addison-Wesley Pub. Co, 1969.

BZDAK, Adam *et al.* Mapping the phases of quantum chromodynamics with beam energy scan. **Physics Reports**, Elsevier BV, v. 853, p. 1–87, abr. 2020. ISSN 0370-1573. DOI: 10.1016/j.physrep.2020.01.005. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2020.01.005>.

CAO, Gaoqing; ZHUANG, Pengfei. Effects of chiral imbalance and magnetic field on pion superfluidity and color superconductivity. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 92, p. 105030, 10 nov. 2015. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.105030. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.105030>.

CERN. **Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire**. Disponível em: <http://home.web.cern/>.

CHODOS, A. *et al.* New extended model of hadrons. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 9, p. 3471–3495, 12 jun. 1974. DOI: 10.1103/PhysRevD.9.3471. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.9.3471>.

CUSH. The standard model of elementary particles including anti-particles. *In*: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. [S.l.]: Wikimedia, 2021. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Standard_Model_of_Elementary_Particles_Anti.svg?uselang=pt-br.

DEGRAND, T. *et al.* Masses and other parameters of the light hadrons. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 12, p. 2060–2076, 7 out. 1975. DOI: 10.1103/PhysRevD.12.2060. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.12.2060>.

DITTRICH, W.; GIES, H. **Probing the quantum vacuum. Perturbative effective action approach in quantum electrodynamics and its application.** [S.l.: s.n.], 2000. v. 166. ISBN 978-3-540-67428-3, 978-3-540-45585-1. DOI: 10.1007/3-540-45585-X.

DUNNE, GERALD V. HEISENBERGEULER EFFECTIVE LAGRANGIANS: BASICS AND EXTENSIONS. **From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics**, WORLD SCIENTIFIC, p. 445–522, fev. 2005. DOI: 10.1142/9789812775344_0014. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1142/9789812775344_0014.

ELLIS, John; MAVROMATOS, Nick E.; YOU, Tevong. Light-by-Light Scattering Constraint on Born-Infeld Theory. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 118, n. 26, jun. 2017. ISSN 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.118.261802. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.261802>.

ELMFORS, Per; PERSSON, David; SKAGERSTAM, Bo-Sture. Real-time thermal propagators and the QED effective action for an external magnetic field. **Astroparticle Physics**, Elsevier BV, v. 2, n. 3, p. 299–325, ago. 1994. ISSN 0927-6505. DOI: 10.1016/0927-6505(94)90008-6. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/0927-6505\(94\)90008-6](http://dx.doi.org/10.1016/0927-6505(94)90008-6).

ENGLERT, F.; BROUT, R. Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 13, p. 321–323, 9 ago. 1964. DOI: 10.1103/PhysRevLett.13.321. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.321>.

EULER, Hans. Über die Streuung von Licht an Licht nach der Diracschen Theorie. **Naturwissenschaften**, v. 23, p. 246–247, 1935. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01493898>.

FAIR. **Facility for Antiproton and Ion Research, GSI.** Disponível em: <https://www.gsi.de/forschungbeschleuniger/fair.htm>.

FERMILAB. **Fermi National Accelerator Laboratory, site: Laboratory (BNL)".** Disponível em: <http://www.fnal.gov/>.

FERREIRA, Márcio. **QCD Phase Diagram Under an External Magnetic Field.** 2015.

FERREIRA, Márcio; COSTA, Pedro; PROVIDÊNCIA, Constança. Magnetized QCD Phase Diagram: Net-baryon Susceptibilities. Edição: Pedro Bicudo. **Acta Phys. Polon. Supp.**, v. 11, p. 441–445, 2018. DOI: 10.5506/APhysPo1BSupp.11.441. arXiv: 1810.09139 [hep-ph].

FUKUSHIMA, Kenji. Extreme matter in electromagnetic fields and rotation. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, Elsevier BV, v. 107, p. 167–199, jul. 2019. ISSN 0146-6410. DOI: 10.1016/j.pnpnp.2019.04.001. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.pnpnp.2019.04.001>.

- GARCÍA CANAL, Carlos. HERA has Been Closed, LHC is Being Opened: Near Past and Near Future of Particle Physics. **Brazilian Journal of Physics - BRAZ J PHYS**, v. 38, set. 2008. DOI: 10.1590/S0103-97332008000400004.
- GELL-MANN, M.; LÉVY, M. The axial vector current in beta decay. **Il Nuovo Cimento**, v. 16, n. 4, p. 705–726, mai. 1960. DOI: 10.1007/BF02859738.
- GEORGE E. ANDREWS, Bruce C. Berndt (auth.) **Ramanujan's Lost Notebook: Part IV**. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 2013. ISBN 978-1-4614-4080-2,978-1-4614-4081-9.
- GROSS, David J.; WILCZEK, Frank. Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 30, p. 1343–1346, 26 jun. 1973. DOI: 10.1103/PhysRevLett.30.1343. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1343>.
- GROUP, Particle Data *et al.* Review of Particle Physics. **Progress of Theoretical and Experimental Physics**, v. 2020, n. 8, ago. 2020. 083C01. ISSN 2050-3911. DOI: 10.1093/ptep/ptaa104. eprint: <https://academic.oup.com/ptep/article-pdf/2020/8/083C01/34673722/ptaa104.pdf>. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/ptep/ptaa104>.
- GULLU, Ibrahim; MAZHARIMOUSAVI, S. Habib. **Double-logarithmic nonlinear electrodynamics**. [S.l.: s.n.], 2020. arXiv: 2009.08665 [gr-qc].
- HALPERN, O. Scattering Processes Produced by Electrons in Negative Energy States. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 44, p. 855–856, 10 nov. 1933. DOI: 10.1103/PhysRev.44.855.2. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.44.855.2>.
- HATSUDA, Tetsuo; KUNIHIRO, Teiji. QCD phenomenology based on a chiral effective Lagrangian. **Physics Reports**, Elsevier BV, v. 247, n. 5-6, p. 221–367, out. 1994. ISSN 0370-1573. DOI: 10.1016/0370-1573(94)90022-1. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573\(94\)90022-1](http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573(94)90022-1).
- HEISENBERG, W.; EULER, H. Consequences of Dirac Theory of the Positron. **arXiv e-prints**, physics/0605038, physics/0605038, mai. 2006. arXiv: physics/0605038 [physics.hist-ph].
- HEISENBERG, W.; EULER, H. Consequences of Dirac's theory of positrons. **Z. Phys.**, v. 98, n. 11-12, p. 714–732, 1936. DOI: 10.1007/BF01343663. arXiv: physics/0605038.
- KARPLUS, Robert; NEUMAN, Maurice. The Scattering of Light by Light. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 83, p. 776–784, 4 ago. 1951. DOI: 10.1103/PhysRev.83.776. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.83.776>.
- KHARZEEV, Dmitri E.; MCLERRAN, Larry D.; WARRINGA, Harmen J. The effects of topological charge change in heavy ion collisions: Event by event and violation. **Nuclear Physics A**, Elsevier

BV, v. 803, n. 3-4, p. 227–253, mai. 2008. ISSN 0375-9474. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2008.02.298.

KLEVANSKY, S. P. The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics. **Rev. Mod. Phys.**, v. 64, p. 649–708, 1992. DOI: 10.1103/RevModPhys.64.649.

LICHTENBERG, Don Bennett; ROSEN, S P. **Developments in the Quark Theory of Hadrons**. Nonantum, MA: Hadronic Press, 1980. Not held by the CERN library. Disponível em: <https://cds.cern.ch/record/784713>.

MENEZES, D. P. *et al.* Quark matter under strong magnetic fields in the NambuJona-Lasinio model. **Physical Review C**, American Physical Society (APS), v. 79, n. 3, mar. 2009. ISSN 1089-490X. DOI: 10.1103/physrevc.79.035807. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.79.035807>.

MICHELETTI, Luca. **Quarkonium polarization in PbPb collisions with the ALICE experiment at the LHC**. 2020.

MÖLLER, Sven. Pion-Pion Scattering and Shear Viscosity in the Nambu-Jona-Lasinio Model Corrected and Extended Version: A Guide to the Nambu-Jona-Lasinio Model. *In*:

NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 122, p. 345–358, 1 abr. 1961. DOI: 10.1103/PhysRev.122.345. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.122.345>.

NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 124, p. 246–254, 1 out. 1961. DOI: 10.1103/PhysRev.124.246. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.124.246>.

NICA. **Nuclotron-based Ion Collider fAcility**. Disponível em: <https://nica.jinr.ru/>.

NIKISHOV, A. I. Pair production by a constant external field. **Zh. Eksp. Teor. Fiz.**, v. 57, p. 1210–1216, 1969.

PAULI, W.; VILLARS, F. On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 21, p. 434–444, 3 jul. 1949. DOI: 10.1103/RevModPhys.21.434. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.21.434>.

PESKIN, Michael E; SCHROEDER, Daniel V. **An introduction to quantum field theory**. Boulder, CO: Westview, 1995. Includes exercises. Disponível em: <https://cds.cern.ch/record/257493>.

PLEMELJ, J. Ein ergänzungssatz zur cauchyschen integraldarstellung analytischer funktionen, randwerte betreffend. **Monat. Math. Phys.**, v. 19, p. 205–210, 1908.

POLITZER, H. David. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 30, p. 1346–1349, 26 jun. 1973. DOI: 10.1103/PhysRevLett.30.1346. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1346>.

RATTI, Claudia; THALER, Michael A.; WEISE, Wolfram. Phases of QCD: Lattice thermodynamics and a field theoretical model. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 73, n. 1, jan. 2006. ISSN 1550-2368. DOI: 10.1103/physrevd.73.014019. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.73.014019>.

RATTI, Claudia; WEISE, Wolfram. Thermodynamics of two-color QCD and the Nambu Jona-Lasinio model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 70, p. 054013, 5 set. 2004. DOI: 10.1103/PhysRevD.70.054013. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.054013>.

RHIC. **Relativistic Heavy Ion Collider, Brookhaven National Laboratory (BNL)**. Disponível em: www.bnl.gov/rhic/.

RIDDER, C. A new algorithm for computing a single root of a real continuous function. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 26, n. 11, p. 979–980, 1979. DOI: 10.1109/TCS.1979.1084580.

ROBERTS, Craig D.; WILLIAMS, Anthony G. Dyson-Schwinger equations and their application to hadronic physics. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, Elsevier BV, v. 33, p. 477–575, jan. 1994. ISSN 0146-6410. DOI: 10.1016/0146-6410(94)90049-3. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/0146-6410\(94\)90049-3](http://dx.doi.org/10.1016/0146-6410(94)90049-3).

ROBERTSON, Scott *et al.* Experiment to observe an optically induced change of the vacuum index. **Physical Review A**, American Physical Society (APS), v. 103, n. 2, fev. 2021. ISSN 2469-9934. DOI: 10.1103/physreva.103.023524. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.103.023524>.

RUGGIERI, M.; PENG, G. X. Quark matter in a parallel electric and magnetic field background: Chiral phase transition and equilibration of chiral density. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 93, p. 094021, 9 mai. 2016. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.094021. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.094021>.

SAUTER, Fritz. Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie. **Zeit. f. Phys.**, v. 69, p. 742–764, 1931.

SCHAEFER, B.-J.; WAGNER, M.; WAMBACH, J. Thermodynamics of (2+1)-flavor QCD: Confronting models with lattice studies. **Physical Review D**, American Physical Society (APS),

v. 81, n. 7, abr. 2010. ISSN 1550-2368. DOI: 10.1103/physrevd.81.074013. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.81.074013>.

SCHAEFER, Thomas. Phases of QCD. *In: hep-ph/0509068*. arXiv: hep-ph/0509068 [hep-ph].

SCHWARTZ, Matthew D. Quantum Field Theory and the Standard Model, 2013.

SCHWINGER, Julian. On Gauge Invariance and Vacuum Polarization. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 82, p. 664–679, 5 jun. 1951. DOI: 10.1103/PhysRev.82.664. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.82.664>.

SEKINE, Akihiko; NOMURA, Kentaro. Axion electrodynamics in topological materials. **Journal of Applied Physics**, AIP Publishing, v. 129, n. 14, p. 141101, abr. 2021. ISSN 1089-7550. DOI: 10.1063/5.0038804. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0038804>.

SKOKOV, V. V.; ILLARIONOV, A. Yu.; TONEEV, V. D. ESTIMATE OF THE MAGNETIC FIELD STRENGTH IN HEAVY-ION COLLISIONS. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 24, n. 31, p. 5925–5932, dez. 2009. ISSN 1793-656X. DOI: 10.1142/S0217751X09047570. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X09047570>.

SOKHOTSKI, Yu.V. **On Definite Integrals and Functions Employed in Expansions into Series**. [S.l.: s.n.], 1873.

SPS. **The Super Proton Synchrotron - CERN**. Disponível em: <https://home.cern/science/accelerators/super-proton-synchrotron>.

STEFAN SCHERER, Matthias R. Schindler (auth.) **A Primer for Chiral Perturbation Theory**. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012. (Lecture Notes in Physics 830). ISBN 364219253X,9783642192531. Disponível em: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=eacc33be0390987bb7fe14fd7aa7935a>.

STEPHANOV, M. A. QCD phase diagram: An Overview. Edição: Tom Blum. **PoS**, LAT2006, p. 024, 2006. DOI: 10.22323/1.032.0024. arXiv: hep-lat/0701002.

TAKAHASHI, Hidetosi; MASATAKE, Mori. Double Exponential Formulas for Numerical Integration. **Publ. Res. Inst. Math. Sci.**, v. 9, p. 721–741, 1973. DOI: 10.2977/prims/1195192451.

TANABASHI, M. *et al.* Review of Particle Physics. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 98, p. 030001, 3 ago. 2018. DOI: 10.1103/PhysRevD.98.030001. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.030001>.

TAVARES, William R.; AVANCINI, Sidney S. Schwinger mechanism in the SU(3) Nambu-Jona-Lasinio model with an electric field. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 97, n. 9, mai. 2018. ISSN 2470-0029. DOI: 10.1103/physrevd.97.094001. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.97.094001>.

TUCHIN, Kirill. Particle production in strong electromagnetic fields in relativistic heavy-ion collisions. **Adv. High Energy Phys.**, v. 2013, p. 490495, 2013. DOI: 10.1155/2013/490495.

WALTER GREINER, Joachim Reinhardt. **Quantum Electrodynamics**. 4ed., Springer. [S.l.: s.n.], 2009. ISBN 3540875603,9783540875604.

WANG, Lingxiao *et al.* NambuJona-Lasinio model in a parallel electromagnetic field. **Physics Letters B**, v. 780, p. 273–282, 2018. ISSN 0370-2693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.03.018>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026931830207%207>.

WEISSKOPF, V. The electrodynamics of the vacuum based on the quantum theory of the electron. **Kong. Dan. Vid. Sel. Mat. Fys. Med.**, 14N6, p. 1–39, 1936.

WEISSTEIN, Eric W. **Incomplete Gamma Function, From MathWorld—A Wolfram Web Resource**. Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/IncompleteGammaFunction.html>.

APÊNDICE A – OBTENÇÃO DA LAGRANGIANA DE EULER- HEISENBERG

Neste apêndice abordarei uma revisão bibliográfica da Lagrangiana de Euler-Heisenberg, uma lagrangiana efetiva para a eletrodinâmica quântica, obtida por Hans Euler e Werner Heisenberg (HEISENBERG; EULER, 1936) e independentemente por Weisskopf (1936) colocada na linguagem da QED por Julian Schwinger (1951). Vou principalmente revisar a abordagem feita por (SCHWARTZ, 2013) sobre ações efetivas e a lagrangiana de interesse.

Uma ação efetiva S_{eff} se refere à um funcional dos campos definida de forma a reproduzir as mesmas funções de Green e elementos de matriz-S para a correspondente ação S , chamada ação da teoria completa, tal que corresponde com a lagrangiana efetiva \mathcal{L}_{eff} :

$$S_{eff} = \int d^4x \mathcal{L}_{eff}(x). \quad (A.1)$$

Em relação à S , S_{eff} frequentemente tem menos campos, é não-renormalizável, ou seja, tem um limite de efetividade para certo intervalo de validade. Além disso, dizemos que quando um campo está presente na teoria completa mas não na parte efetiva, dizemos que ele foi integrado.

A vantagem em utilizar uma ação efetiva é que se focarmos apenas nos graus de liberdade relevantes para um dado problema os cálculos são frequentemente mais fáceis. Existem diferentes jeitos de obter a ação efetiva, como por exemplo, por correspondência (ou expansão em produtos de operadores) de modo a expandir a lagrangiana efetiva em operadores, por exemplo

$$\mathcal{L}_{eff} = \sum_i C_i \mathcal{O}_i. \quad (A.2)$$

E, então, encontrar os coeficientes de Wilson, C_j igualando elementos de matrizes das duas teorias (completa e efetiva):

$$\langle \Omega | T\{\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi\} | \Omega \rangle_{S_{eff}} = \langle \Omega | T\{\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi\} | \Omega \rangle_S. \quad (A.3)$$

Ou pode-se obter a ação efetiva através de valores esperados dependente de campos usando o método do tempo-próprio de Schwinger ou ainda, como iremos calcular neste apêndice, usando determinantes funcionais vindo de integrais de caminho de Feynman.

Neste caso de interesse, a ação efetiva pode ser obtida integrando um férmion de massa m na QED , tal que a ação efetiva pode ser dada por

$$\int \mathcal{D}A e^{iS_{\text{eff}}[A_\mu]} \equiv \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi}(i\mathcal{D}-m)\psi \right)}. \quad (\text{A.4})$$

Podemos, primeiramente reescrever as integrais nos campos fermiônicos como:

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x (\bar{\psi}(i\mathcal{D}-m)\psi)} = \mathcal{N} \det(i\mathcal{D}-m), \quad (\text{A.5})$$

na qual \mathcal{N} é uma constante de normalização. Logo para satisfazer a equação A.4 temos que ter

$$e^{iS_{\text{eff}}[A] + i \int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2} = \mathcal{N} \det(i\mathcal{D}-m). \quad (\text{A.6})$$

Tomando o logaritmo neperiano de ambos os lados têm-se, usando uma base ortogonal completa (ELMFORS; PERSSON; SKAGERSTAM, 1994):

$$iS_{\text{eff}}[A] + i \int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \ln \mathcal{N} = -\ln[\det(i\mathcal{D}-m)] = -\text{Tr}\{\text{tr}[\ln(i\mathcal{D}-m)]\}, \quad (\text{A.7})$$

na qual Tr é o traço de Dirac e tr é o traço que indica a soma nos autovalores, a integração em x^μ ou p^μ , como o traço independe da base, aqui optamos pela base no espaço-tempo. Tal que

$$S_{\text{eff}}[A] = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}} = - \int d^4x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - i \text{Tr}\{\langle x | \ln(i\mathcal{D}-m) | x \rangle\} \right) + \text{constante}; \quad (\text{A.8})$$

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - i \text{Tr}\{\langle x | \ln(i\mathcal{D}-m) | x \rangle\} + \text{constante}. \quad (\text{A.9})$$

Podemos rearranjar esta expressão utilizando uma identidade para o logaritmo neperiano:

$$\lim_{s_0 \rightarrow 0} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-As} = -\ln(A), \quad (\text{A.10})$$

e reescrevendo

$$\text{Tr}\langle x | \ln(i\mathcal{D}-m) | x \rangle = \text{Tr}\langle x | \ln(i\mathcal{D}-m) | x \rangle^* = \text{Tr}\langle x | \ln(-i\mathcal{D}-m) | x \rangle, \quad (\text{A.11})$$

tal que

$$2 \text{Tr}\langle x | \ln(i\mathcal{D}-m) | x \rangle = \text{Tr}\langle x | \ln(i\mathcal{D}-m) | x \rangle + \text{Tr}\langle x | \ln(-i\mathcal{D}-m) | x \rangle; \quad (\text{A.12})$$

$$2 \text{Tr}\langle x | \ln(i\mathcal{D}-m) | x \rangle = \text{Tr}\langle x | (\ln(i\mathcal{D}-m) + \ln(-i\mathcal{D}-m)) | x \rangle; \quad (\text{A.13})$$

$$2 \text{Tr}\langle x | \ln(i\mathcal{D}-m) | x \rangle = \text{Tr}\langle x | \ln[(i\mathcal{D}-m)(-i\mathcal{D}-m)] | x \rangle = 2 \text{Tr}\langle x | \ln(i\mathcal{D}-m) | x \rangle = \text{Tr}\langle x | \ln[(\mathcal{D}^2 + m^2)] | x \rangle. \quad (\text{A.14})$$

Usando a identidade da Equação (A.10) e dividindo por 2 em ambos os lados, ficamos com

$$\text{Tr}\langle x | \ln[(\mathcal{D}^2 + m^2)] | x \rangle = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-m^2s} \text{Tr}\left[\langle x | e^{-\mathcal{D}^2s} | x \rangle\right] \quad (\text{A.15})$$

E utilizando mais uma identidade para a derivada covariante e as matrizes de Dirac:

$$D^2 = D_\mu^2 + \frac{e}{2} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = -(\hat{p} - eA_\mu)^2 + \frac{e}{2} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}, \quad (\text{A.16})$$

na qual $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Finalmente a expressão fica, dependendo do hamiltoniano:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-m^2 s} \text{Tr} \left[\langle x | e^{-\left[-(\hat{p} - eA_\mu)^2 + \frac{e}{2} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}\right] s} | x \rangle \right]. \quad (\text{A.17})$$

O que falta é então realizar o traço no integrando; há algumas formas de calculá-lo, podemos, por exemplo calcular os autovalores do operador $H_0 = -(\hat{p} - eA_\mu)^2 + \frac{e}{2} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$, visto que podemos colocar na base de autovetores do mesmo $|\psi_n\rangle$, assim o traço fica

$$\int d^4x \langle x | \mathbb{1} e^{-H_0 s} | x \rangle = \int d^4x \sum_n \langle x | \psi_n \rangle \langle \psi_n | e^{-H_0 s} | x \rangle \quad (\text{A.18})$$

$$= \int d^4x \sum_n |\psi_n|^2 e^{-E_n s} = \sum_n e^{-E_n s}. \quad (\text{A.19})$$

Há uma maneira mais geral e completa de realizar este cálculo, como fez Schwinger, com seu método de tempo-próprio. Pode-se demonstrar depois de vários passos que a lagrangiana para um campo eletromagnético genérico, dado por $F_{\mu\nu}$ se torna:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} \equiv \mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{e^2}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-m^2 s} \frac{\text{Re}[\cosh(esX)]}{\text{Im}[\cosh(esX)]} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}, \quad (\text{A.20})$$

no qual

$$X = \sqrt{\frac{1}{2} (F_{\mu\nu}^2 + i F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu})}, \quad (\text{A.21})$$

e nos quais: $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$.

A integral resultante é divergente e devemos regularizá-la, na qual faremos uma subtração dos termos divergentes expandindo perturbativamente na carga elétrica e :

$$\frac{\text{Re}[\cosh(esX)]}{\text{Im}[\cosh(esX)]} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{4}{e^2 s^2} + \frac{2}{3} F_{\mu\nu}^2 - \frac{e^2 s^2}{45} \left[(F_{\mu\nu}^2)^2 + \frac{7}{4} (F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu})^2 \right] + \dots \quad (\text{A.22})$$

Os dois primeiros termos da expansão representam uma divergência no ultravioleta e portanto removemos os infinitos com mínima subtração, resultando

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{e^2}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-m^2 s} \left[\frac{\text{Re}[\cosh(esX)]}{\text{Im}[\cosh(esX)]} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} - \frac{4}{e^2 s^2} - \frac{2}{3} F_{\mu\nu}^2 \right]. \quad (\text{A.23})$$

Considerando o caso de \vec{E} e \vec{B} paralelos entre si com intensidades E e B respectivamente, temos as quantidades:

$$F_{\mu\nu}^2 = 2(B^2 - E^2); \quad (\text{A.24})$$

$$F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = 4EB, \quad (\text{A.25})$$

tal que

$$X^2 = (B + iE)^2. \quad (\text{A.26})$$

E é possível demonstrar a relação:

$$\frac{\text{Re}[\cosh(a + ib)]}{\text{Im}[\cosh(a + ib)]} = \coth(a) \cot(b), \quad (\text{A.27})$$

com $a = eBs$ e $b = eEs$, substituindo na lagrangiana obtemos, rearranjando os termos em função de (eEs) e (eBs) ,

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{2}(B^2 - E^2) - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-m^2 s} \left[(eEs) \cot(eEs) (eBs) \coth(eBs) - 1 - \frac{(eBs)^2 - (eEs)^2}{3} \right]. \quad (\text{A.28})$$

APÊNDICE B – REGULARIZAÇÃO DO POTENCIAL EFETIVO PARA O CASO DE CAMPO MAGNÉTICO PURO

Neste apêndice apresento algumas contas, como é feito por Avancini *et al.* (2021), para regularizarmos o potencial no caso de campo magnético puro. Partindo do resultado não regularizado do termo magnético do potencial termodinâmico, provindo da lagrangiana de Euler-Heisenberg, temos

$$I^B = \sum_{f=u,d} \frac{N_c(B_f)^2}{8\pi^2} \int_0^\infty ds \frac{e^{-\frac{M^2 s}{B_f}}}{s^2} \coth(s) = \sum_{f=u,d} \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty ds \frac{e^{-M^2 s}}{s^3} B_f s \coth(B_f s). \quad (\text{B.1})$$

Como já descrito, a integral diverge em $s \rightarrow 0$ e entramos com o processo de regularização com um *cutoff* $1/\Lambda^2$ no limite inferior da integral dos termos divergentes. Para isso expandimos o integrando com

$$\frac{e^{-M^2}}{s^3} (B_f s \coth(B_f s)) = \frac{e^{-M^2 s}}{s^3} \left(1 + \frac{(B_f s)^2}{3} + \mathcal{O}(s^4) \right), \quad (\text{B.2})$$

assim, pode-se notar que são os dois primeiros termos que divergem para $s \rightarrow 0$ e o processo de regularização consta em reescrever I^B para a forma regularizada: $I^B \rightarrow I_{reg}^B$, como a soma de um termo de regularização do modelo, independente do campo (e conseqüentemente independente das cargas), I_0^B , com um termo de regularização do campo, I_{field}^B , e um termo finito de contribuição do campo \vec{B} , I_{int}^B . Resumindo, temos

$$I_{reg}^B = I_0^B + I_{field}^B + I_{int}^B; \quad (\text{B.3})$$

$$I_0^B = \frac{N_f N_c}{8\pi^2} \int_{1/\Lambda^2}^\infty ds \frac{e^{-M^2 s}}{s^3}; \quad (\text{B.4})$$

$$I_{field}^B = \sum_{f=u,d} \frac{N_c B_f^2}{24\pi^2} \int_{1/\Lambda^2}^\infty ds \frac{e^{-M^2 s}}{s}; \quad (\text{B.5})$$

$$I_{int}^B = \sum_{f=u,d} \frac{N_c (B_f)^2}{8\pi^2} \int_0^\infty ds \frac{e^{-\frac{M^2 s}{B_f}}}{s^3} \left(\coth(s) - 1 - \frac{(s)^2}{3} \right). \quad (\text{B.6})$$

Assim como no caso da Seção 3.6, I_0^B representa a regularização do modelo NJL, e empregamos o resultado de campo nulo:

$$I_0^B = \frac{N_c N_f}{8\pi^2} \left[M^4 \ln \frac{\Lambda + \mathcal{E}_\Lambda}{M} - \Lambda \mathcal{E}_\Lambda (\Lambda^2 + \mathcal{E}_\Lambda^2) \right], \quad (\text{B.7})$$

Para a regularização do campo I_{field}^B usamos a expansão da função gamma incompleta e analogamente à Seção 3.6, só que tendo apenas B , têm-se, considerando o limite $\Lambda \rightarrow \infty$:

$$I_{field}^B = - \sum_{f=u,d} \frac{N_c B_f^2}{24\pi^2} \left[\ln \left(\frac{M^2}{\Lambda^2} \right) + \gamma_E \right]. \quad (\text{B.8})$$

Já em I_{int}^B , usando representações da função gamma e da função zeta de Hurwitz-Riemann respectivamente:

$$\int_0^\infty ds s^n e^{-as} = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}, \quad (\text{B.9})$$

$$\zeta(z, q) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(q+k)^z}, \quad (\text{B.10})$$

tal que é possível obter

$$\int_0^\infty dy y^{z-1} e^{-\beta y} \coth(\alpha y) = \Gamma[z] \left\{ \frac{2^{1-z}}{\alpha^z} \zeta \left(z, \frac{\beta}{2\alpha} \right) - \frac{1}{\beta^z} \right\}. \quad (\text{B.11})$$

Substituindo as integrais pelas expressões dada e adicionando um parâmetro ϵ a fim de tomar o limite zero do mesmo no final, e usando $x_f = M^2/2B_f$ ficamos com

$$I_{int}^B = \sum_{f=u,d} \frac{N_c B_f^2}{8\pi^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\Gamma(-1+\epsilon) \left(2^{2-\epsilon} \zeta(-1+\epsilon, x_f) - (2x_f)^{1-\epsilon} \right) - \frac{\Gamma(-2+\epsilon)}{(2x_f)^{-2+\epsilon}} - \frac{1}{3} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(2x_f)^\epsilon} \right]. \quad (\text{B.12})$$

Agora, através do uso das seguintes expansões e relações:

$$a^{-\epsilon} \approx 1 - \ln(a\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon); \quad (\text{B.13})$$

$$\Gamma(-n+\epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\epsilon} + \psi_1(n+1) + \mathcal{O}(\epsilon) \right]; \quad (\text{B.14})$$

$$\psi_1(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma_E, \quad (\text{B.15})$$

Das quais segue que:

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon); \quad (\text{B.16})$$

$$\Gamma(-1+\epsilon) = - \left[\frac{1}{\epsilon} + 1 - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon) \right]; \quad (\text{B.17})$$

$$\Gamma(-2+\epsilon) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{3}{2} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon) \right], \quad (\text{B.18})$$

tal que reescrevemos I_{int}^B como

$$I_{int}^B = \sum_{f=u,d} \frac{N_c B_f^2}{8\pi^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ - \left[\frac{1}{\epsilon} + 1 - \gamma_E \right] \left[4(1 - \ln 2\epsilon) (\zeta(-1, x_f) + \epsilon \zeta'(-1, x_f)) - 2x_f [1 - \epsilon \ln(2x_f)] \right] + \right. \\ \left. - 4x_f^2 \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{3}{2} - \gamma_E \right] [1 - \epsilon \ln(2x_f)] - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E \right] [1 - \epsilon \ln(2x_f)] + \mathcal{O}(\epsilon) \right\}, \quad (B.19)$$

na qual foi usado que

$$\zeta(\epsilon - 1, x_f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x_f + n)^{\epsilon - 1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (x_f + n)^{1 - \epsilon} = \quad (B.20)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(x_f + n) (1 - \epsilon \ln(x_f + n)) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] = \quad (B.21)$$

$$\approx \sum_{n=1}^{\infty} (x_f + n) - \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(x_f + n)}{(x_f + n)^{-1}} = \zeta(-1, x_f) + \epsilon \zeta'(-1, x_f), \quad (B.22)$$

considerando que

$$\zeta'(z, x_f) = \frac{\partial}{\partial z} \zeta(z, x_f) = \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x_f + n)^z} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(x_f + n)}{(x_f + n)^z}. \quad (B.23)$$

Depois de tomar o limite e utilizar o resultado (em função do polinômio de Bernoulli $B_n(x)$):

$$\zeta(-1, x_f) = - \frac{B_2(x_f)}{2} = - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} - x_f + x_f^2 \right], \quad (B.24)$$

e mais alguns passos algébricos, é possível obter

$$I_{int}^B = \sum_{f=u,d} - \frac{N_c B_f^2}{2\pi^2} \left\{ \zeta'(-1, x_f) - \frac{1}{2} (x_f^2 - x_f) \ln(x_f) + \frac{x_f^2}{4} - \frac{1}{12} (1 + \ln(x_f)) \right\}. \quad (B.25)$$

Assim, obtemos a parte regularizada do modelo com a contribuição magnética que fica dada por

$$I_{reg}^B = \frac{N_c N_f}{8\pi^2} \left[M^4 \ln \frac{\Lambda + \mathcal{E}_\Lambda}{M} - \Lambda \mathcal{E}_\Lambda (\Lambda^2 + \mathcal{E}_\Lambda^2) \right] + \\ - \sum_{f=u,d} \frac{N_c B_f^2}{2\pi^2} \left\{ \zeta'(-1, x_f) - \frac{1}{2} (x_f^2 - x_f) \ln(x_f) + \frac{x_f^2}{4} - \frac{1}{12} (1 + \ln(x_f)) \right\} + \quad (B.26) \\ - \sum_{f=u,d} \frac{N_c B_f^2}{24\pi^2} \left[\ln \left(\frac{M^2}{\Lambda^2} \right) + \gamma_E \right].$$

APÊNDICE C – REGULARIZAÇÃO DO POTENCIAL EFETIVO PARA O CASO DE CAMPO ÉLETRICO PURO

Neste apêndice explico o procedimento de regularização do potencial termodinâmico para o caso de campo elétrico puro, conforme é feito por Tavares e Avancini (2018). Empristo aqui os resultados e argumentos do apêndice anterior, B, para obtermos I_{reg}^E , uma vez que, como é demonstrado em diversas referências (SCHWARTZ, 2013), (NIKISHOV, 1969), (KLEVANSKY, 1992), (DUNNE, 2005), (WALTER GREINER, 2009) há uma dualidade entre os resultados para o potencial e a Lagrangiana entre os casos de campo magnético e elétrico puros, no qual para passar de um para outro é só usar a transformação $B \rightarrow -iE$. Aplicando esta transformação no resultado pra I_{reg}^B do Apêndice B, resultaria em I_0^E ser igual, uma vez que independe do campo, já a regularização do campo fica diretamente

$$I_{field}^E = \sum_{f=u,d} \frac{N_c E_f^2}{24\pi^2} \left[\ln \left(\frac{M^2}{\Lambda^2} \right) + \gamma E \right]. \quad (C.1)$$

No entanto ao transformarmos a expressão $I_{int}^B \rightarrow I_{int}^E$ (na qual $x_f \rightarrow iy_f$) ganhamos uma parte imaginária que não deve ser utilizada para a equação de gap, uma vez que temos que ter resultados reais e portanto trabalhar apenas com o valor principal de Cauchy, ou seja, desejamos obter $\text{Re}[I_{int}^E]$. Primeiramente, explicitando a expressão:

$$I_{int}^E = \sum_{f=u,d} -\frac{N_c E_f^2}{2\pi^2} \left\{ \zeta'(-1, iy_f) - \frac{1}{2}(-y_f^2 - iy_f) \ln(iy_f) - \frac{y_f^2}{4} - \frac{1}{12}(1 + \ln(iy_f)) \right\} \quad (C.2)$$

A dificuldade principal em isolar a parte real desta expressão está na função $\zeta'(-1, iy_f)$, para isso pode-ser derivar uma expressão da mesma em função do logaritmo da função Γ . Partindo de

$$\frac{\partial \zeta'(-1, q)}{\partial q} \equiv \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial z} \zeta(z, x) \Big|_{z=-1} = -\frac{\partial}{\partial z} z \zeta(z+1, q) \Big|_{z=-1}, \quad (C.3)$$

dado que

$$\frac{\partial}{\partial q} \zeta(z, q) = \frac{\partial}{\partial q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q+k)^z} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z}{(q+k)^{z+1}} = -z \zeta(z+1, q), \quad (C.4)$$

tal que utilizando as relações:

$$\zeta(0, q) = \frac{1}{2} - q \quad (C.5)$$

$$\zeta'(0, q) = \ln \Gamma(q) - \frac{1}{2} \ln(2\pi), \quad (C.6)$$

resulta em

$$\frac{\partial \zeta'(-1, q)}{\partial q} = -\left(\frac{1}{2} - q\right) + \left[\ln \Gamma(q) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) \right]. \quad (\text{C.7})$$

Integrando a última equação de 0 à q genérico, chegamos em

$$\zeta'(-1, q) = \zeta'(-1, 0) - \frac{q}{2}(1 - q) - \frac{q}{2} \ln(2\pi) + \int_0^q dq' \ln(\Gamma(q')), \quad (\text{C.8})$$

na qual $\zeta'(-1, 0) = \zeta'(-1) = -\frac{1}{12} - \ln(A)$, na qual $A = 1.2814271291\dots$ é a constante de Glaisher-Kinkelin.

Por fim resta avaliar a integral no logaritmo da função gamma, que é possível ser feito ao escrevê-la na seguinte representação:

$$\ln(\Gamma(q)) = -\gamma_E q - \ln(q) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{q}{k} - \ln\left(1 + \frac{q}{k}\right) \right]. \quad (\text{C.9})$$

Como temos que obter $\zeta'(-1, iy_f)$ a integral é feita de 0 até iy_f , assim é possível obter a expressão por continuação analítica:

$$\begin{aligned} \int_0^i y_f dq' \ln(\Gamma(q')) &= \frac{\gamma_E y_f^2}{2} + y_f \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -\frac{y_f^2}{2} - k \left(\frac{1}{2} \ln(1 + y_f^2) - \frac{y_f}{k} \tan^{-1} \frac{y_f}{k} \right) \right\} + \\ &+ i \left\{ -y_f \ln(y_f) + y_f - \sum_{k=1}^{\infty} \left[k \left(\frac{y_f}{2k} \ln\left(1 + \frac{y_f^2}{k^2}\right) + \tan^{-1} \frac{y_f}{k} \right) - y_f \right] \right\}. \quad (\text{C.10}) \end{aligned}$$

A partir destas relações é possível extrair a parte real de I_{int}^E e obtermos a expressão final do potencial efetivo para o modelo NJL em $SU(2)$ no caso de campo elétrico puro. Usando que

$$\ln(iy_f) = \ln(y_f) + \ln(i) = \ln(y_f) + i\frac{\pi}{2}; \quad (\text{C.11})$$

$$\ln(i) = \ln(\sqrt{-1}) = \ln(-1^{1/2}) = \frac{1}{2} \ln(-1) = \frac{1}{2} \ln(e^{i\pi}) = \frac{1}{2} i\pi \ln(e)^{-1} = i\frac{\pi}{2}, \quad (\text{C.12})$$

e após multiplicar todos os termos e eliminarmos a parte imaginária chegamos na expressão final:

$$\begin{aligned} I_{int}^E &= \sum_{f=u,d} \frac{N_c E_f^2}{2\pi^2} \left\{ \zeta'(-1) + \frac{\pi}{4} y_f + \frac{y_f^2}{2} \left(\gamma_E - \frac{3}{2} + \ln(y_f) \right) - \frac{1}{12} (1 + \ln(y_f)) + \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^{\infty} k \left[\frac{y_f}{k} \tan^{-1} \left(\frac{y_f}{k} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{y_f}{k} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y_f}{k} \right)^2 \right] \right\}. \quad (\text{C.13}) \end{aligned}$$

Assim, obtemos a parte regularizada do modelo com a contribuição elétrica que fica dada por

$$\begin{aligned}
 I_{reg}^E = & \frac{N_c N_f}{8\pi^2} \left[M^4 \ln \frac{\Lambda + \mathcal{E}\Lambda}{M} - \Lambda \mathcal{E}\Lambda \left(\Lambda^2 + \mathcal{E}^2 \right) \right] + \\
 & + \sum_{f=u,d} \frac{N_c E_f^2}{2\pi^2} \left\{ \zeta'(-1) + \frac{\pi}{4} y_f + \frac{y_f^2}{2} \left(\gamma_E - \frac{3}{2} + \ln(y_f) \right) - \frac{1}{12} (1 + \ln(y_f)) + \right. \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} k \left[\frac{y_f}{k} \tan^{-1} \left(\frac{y_f}{k} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{y_f}{k} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y_f}{k} \right)^2 \right] \left. \right\} \\
 & + \sum_{f=u,d} \frac{N_c E_f^2}{24\pi^2} \left[\ln \left(\frac{M^2}{\Lambda^2} \right) + \gamma_E \right].
 \end{aligned} \tag{C.14}$$