UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Edivania Ruvinski Barreto

Princípios de Dualidade para Otimização Não-Convexa e Aplicações à Super-Condutividade

Florianópolis
2021

Edivania Ruvinski Barreto

Princípios de Dualidade para Otimização Não-Convexa e Aplicações à Super-Condutividade

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Fábio Silva Botelho

Florianópolis
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Barreto, Edivania Ruvinski
Princípios de Dualidade para Otimização Não-Convexa e Aplicações à Super-Condutividade / Edivania Ruvinski Barreto ; orientador, Fábio Silva Botelho, 2021.
71 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Princípios de dualidade. 3. Sistemas do tipo Ginzburg-Landau. 4. Otimização não-convexa. I. Botelho, Fábio Silva. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Edivania Ruvinski Barreto

Princípios de Dualidade para Otimização Não-Convexa e Aplicações à Super-Condutividade

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Juliano de Bem Francisco
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof.(a) Dr(a).Celene Buriol
Universidade Federal de Santa Maria

Prof. Dr. Fábio Silva Botelho
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Daniel Goncalves
Data: 24/08/2021 07:14:46-0300
CPF: 017.022.459-77
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Fabio Silva Botelho
Data: 24/08/2021 08:43:33-0300
CPF: 479.614.810-87
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Fábio Silva Botelho
Orientador

Florianópolis, 2021.

Aos meus pais: porque foram suporte, porque sacrificaram, porque acreditaram!

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus, por me fazer filha, pelo seu espírito bem-presente e por todas as vezes que fez nascer em mim novas forças.

Agradeço ao meu orientador Fábio da Silva Botelho, pelo tempo e apoio sempre que preciso, e por me fazer e se manter otimista.

Aos meus pais e família, pelo carinho e credibilidade que depositaram em mim. Minha mãe porque se tornou uma melhor amiga, meu pai pela preocupação e cuidado de sempre. Letícia por ser minha referência, por me proteger e por ser esse poço de sabedoria que és. Jefferson pelo abraço e colo sempre prontos. Wellington pelo companherismo e conexão únicos. Sophia, Cristina e Esther por serem para mim um motivo a seguir em frente.

Aos Amigos e Colegas, os antigos, por permanecer, e os que foram surgindo no meio do caminho. Alison Santos, Emerson Correia e Everson Santos por serem os melhores da Matemática/2017-UEPG, como matemáticos, como pessoas e como amigos. Grazielli Nabosny pela paciência principalmente quando o único assunto que eu queria falar era dissertação, você é maravilhosa! Agradecimento especial também à Ana Lucília Toledo, Jaqueline Chaves e Elisabeth Gamba, três anjos na minha vida! Aos colegas de percurso pela companhia, Tais Leite, Maria Eduarda, Thais Mara, Ben-hur, Vitor Espinoza, Gabriel Michels, Daniela Losso, Jonathan Ismael, Mateus Wallace, Fabiano Pereira, Guilherme Schimanko, Marco Pauleti e Javier Alfonso, carinho e admiração enorme por vocês! Obrigada Lucas Lara por ser uma companhia perfeita: muita inteligência, humildade e cumplicidade! Obrigada Hernan Agamez por ser o melhor, pelas aulas de espanhol e por ser meu Google Scholar humano! Obrigada Juan pelas conversas sobre futuro ou sobre nada e por sempre me incentivar a acreditar em mim mesma! Obrigada Geovana França pelos momentos ócios e tranquilos tão importantes para manter-se bem.

Ao casal Mirian e Tiago de São José, que abriram suas vidas e casa, e me fizeram família. À Alcionei Pires e família, Adeciula Tavares e família, Rosa Líria e famíla, Esther e família pelo puro amor fraternal, e por me acolherem em suas vidas.

Aos matemáticos, estatísticos e físicos, Jusmara Cioffi, Vanderlei Staron, Andrea Ribeiro, Elisângela Albini, Marceli Goulart, Luis Antônio Grados, Marciano Pereira, Ana Lúcia Bacon, Luciane Grossi , Scheila Biehl, Airton Kist, Lucas Stori, por acompanhar minha academia e me inspirarem a buscar sempre mais.

Ao professor Mateus Bortolan pela atenção com a disciplina Medida e Integração e por dar o seu melhor em funções que nem eram suas, como acalmar alunos em desespero, obrigada! Ao profesor Daniel Gonçalves por ser um profissional incrível e pelos saberes compartilhados, matemáticos ou não. Agradeço ao professor Fábio Margotti e ao professor Leandro Morgado por tornarem as aulas de Álgebra Linear, Análise Convexa e Análise A leves.

À banca pela disponibilidade e contribuições.

Agradeço ao CNPq e a CAPES pelo apoio financeiro.

Ó Deus de meus pais, eu te louvo e celebro porque me deste sabedoria e força; e, agora nos fizeste saber o que te pedimos, porque nos fizeste saber este assunto do rei. (Dn 2:23)

RESUMO

Na primeira parte deste trabalho apresentamos alguns resultados fundamentais sobre Análise Funcional, Cálculo das Variações e Análise Convexa, em geral sem provas, as quais serão utilizados nas partes posteriores do texto. Na segunda parte, estendemos e generalizamos um resultado conhecido, publicado por J.F. Toland em 1979 para otimização variacional não-convexa, mais especificamente, para a diferença de dois funcionais convexos, a chamada abordagem de otimização D.C. No último capítulo, aplicamos o resultado anterior obtido para o sistema Ginzburg-Landau em supercondutividade, estabelecendo um novo princípio de dualidade para tal modelo. Na parte final do texto, apresentamos um algoritmo numérico correlato e realizamos alguns cálculos numéricos para a versão real mais simples do sistema de Ginzburg-Landau em supercondutividade.

Palavras-chave: Princípios de dualidade. Sistemas do tipo Ginzburg-Landau. Otimização não-convexa.

ABSTRACT

In the first part of this work we present some fundamental results on functional analysis, calculus of variations and convex analysis, in general with no proofs, which will be used in the subsequent text parts. In a second step we extend and generalize a well known result published by J.F. Toland in 1979 for non- convex variational optimization, more specifically, for the difference of two convex functionals, the so-called D.C. optimization approach. In the last chapter we apply such a previous result obtained to the Ginzburg-Landau system in superconductivity establishing a new duality principle for such a model. In the final text part we present a concerning numerical algorithm and perform some numerical computations for the simpler real version of the Ginzburg-Landau system in superconductivity.

Keywords: Duality principle. Ginzburg-Landau type systems. Non-convex optimization.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

À medida da capacidade de um material transportar carga elétrica, chamamos condutividade elétrica. Se não temos uma boa condutividade elétrica dizemos que o material resiste ao fluxo da corrente elétrica. Sendo assim os dois estados do material estão intimamente interligados, uma vez que ao quantificar o aumento da resistividade elétrica, perde-se condutividade elétrica e vice-versa.

Em 1911 o físico Heike Karelingh Onnes observava a resistividade elétrica do mercúrio quando este era resfriado, percebendo-a então como uma função que depende da temperatura. De fato, de forma abrupta e completa este material perdia sua resistividade quando resfriado abaixo de -268,8° C. A este estado de resistividade zero, ele denominou "supercondutividade". Desde então, diversos físicos contribuíram para o desenvolvimento da teoria de materiais em estado supercondutor, observando seu comportamento e suas propriedades.

A teoria da supercondutividade por Vitaly Lazarevich Ginzburg e Lev Davidovich Landau de 1950 descreve a transição da fase normal para a supercondutora de um material, levando em consideração as variedades de materiais e caracterizando-os como tipo I e tipo II, bem como sua reação quando expostos a um campo magnético externo. Tal teoria é derivada das ideias de Landau para transições de fase de segunda ordem, que se fundamentam na existência de uma variável termodinâmica, denominada parâmetro de ordem, que por sua vez caracteriza o estado ordenado de baixas temperaturas. O aspecto central da teoria Ginzburg- Landau (G-L) é a noção de parâmetro de ordem supercondutor. Este conceito tem origem na proposta de Fritz London em caracterizar o estado supercondutor como um estado quântico macroscópico, no qual a densidade de superpartículas, n_S, está associada ao comprimento de penetração, que é o indicador do comprimento de penetração do campo magnético na superfície do material. Aqui enfatizamos que o parâmetro de ordem $\Psi(\vec{r})$ é um número complexo tal que $|\Psi(\vec{r})|^2$ representa a densidade local de superpartículas; ou seja

$$|\Psi(\vec{r})|^2 = n_S(\vec{r}).$$

As variações de $\Psi(\vec{r})$ são determinadas pela minimização da energia livre de Hermann von Helmholtz, cuja expressão é a versão supercondutora da expansão em série de potências do parâmetro de ordem da teoria de Landau para as transições de fase de segunda ordem. Empregando a notação usual, na ausência de campos magnéticos aplicados, a densidade de energia livre G-L é escrita como

$$f_S(|\Psi|, T) = f_N(T) + \alpha(T)|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \gamma|\nabla\Psi|^2 \tag{1.1}$$

onde $f_N(T)$ refere-se ao estado normal e α, β, γ são parâmetros fenomenológicos (dependem do material e da temperatura). Esta expressão se justifica em situações em que $|\Psi|$ é relativamente pequeno, como nas vizinhanças de uma temperatura crítica T_C, que depende do material em questão. Nestas circunstâncias é aceitável o desenvolvimento da expressão para a energia livre numa série de potências em $|\Psi|^2$, com a retenção apenas dos termos de mais baixa ordem. Na expansão deve-se excluir o termo proporcional a $|\Psi|$, pois impede que o estado com parâmetro de ordem nulo (fase normal) seja um estado de equiíbrio. O termo cúbico no módulo do parâmetro de ordem é importante na teoria para transições de fase de primeira ordem, o que não é o caso da transição supercondutora. Por outro lado, a introdução do termo proporcional a $|\nabla\Psi|^2$ visa refletir a penalização em energia livre causada pela variação espacial de $\Psi(r)$. Notamos que f não deve depender de $\nabla\Psi$ se estivermos falando de sistema isotrópicos. Observamos também que a inclusão de um termo em $\nabla^2\Psi$, que seria de mesma ordem que o terceiro termo em 1.1, é de fato supérflua, pois numa integração em volume

$$F_S(|\Psi|,T) = \int f_S(|\Psi|,T)dr^3,$$

tal termo se tornaria, pelo teorema da divergência, num termo de superfície mais um termo em $|\nabla\Psi|^2$ o qual já está incluso em 1.1. Para sistemas suficientemente grandes, as contribuições de superfície para energia livre F_S podem ser desprezadas.

Em relação às Propriedades de Equilíbrio, consideramos inicialmente o caso de um sistema homogêneo em que não hajam gradientes do parâmetro de ordem. O estado de equilíbrio é então dado pela minimização da densidade de energia livre, que é obtida de

$$\frac{\partial f_S}{\partial|\Psi|} = 2\alpha|\Psi| + 2\beta|\Psi|^3 = 0.$$

As soluções são

$$|\Psi|^2 = 0 \tag{1.2}$$

e

$$|\Psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}. \tag{1.3}$$

O tipo de solução que procuramos é a que fornece

$$\Psi = \begin{cases} 0, & \text{se } T > T_C; \\ \Psi(T) \neq 0, & \text{se } T < T_C. \end{cases} \tag{1.4}$$

Considerando as condições em 1.2, 1.3 e 1.4, na ausência de gradientes de Ψ, a expansão 1.1 pode ser escrita como

$$f_S - f_N = \alpha_0(T - T_C)|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4.$$

Os estados de equilíbrio serão $\Psi_0 = 0$ para $T > T_C$ e $|\Psi|^2 = \Psi_0^2 = -(\alpha_0/\beta)(T - T_C)$ para $T < T_C$.

As densidades de energia livre de equilíbrio serão

$$f_S = f_N, \text{ se } T > T_C$$

e

$$f_S = f_N + \alpha_0(T - T_C)\left[-\frac{\alpha_0}{\beta}(T - T_C)\right] + \frac{\beta}{2}\left[-\frac{\alpha_0}{\beta}(T - T_C)\right]^2 = f_N - \frac{\alpha_0^2}{2\beta}(T - T_C)^2, \text{ se } T < T_C.$$

Veja (PUREUR, 2004) para mais detalhes. Por outro lado, incluindo um termo com gradiente de Ψ, Ginzburg e Landau postularam que a densidade de energia livre próximo à T_C pode ser escrita como

$$f_S(T) = f_N(T) + \frac{\hbar}{4m}\int_\Omega |\nabla\Psi|_2^2 dx + \frac{\alpha(T)}{4}\int_\Omega |\Psi|^4 dx - \frac{\beta(T)}{2}\int_\Omega |\Psi|^2 dx,$$

onde Ψ é um parâmetro complexo, $\hbar$ é a constante de Planck, m é a massa de um elétron em repouso, α e β são parâmetros fenomenológicos e $f_N(T)$ e $f_S(T)$ são as densidades normal e supercondutora, respectivamente.

Considerando que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ denota a amostra supercondutora com uma fronteira denotada por $\partial\Omega$, a função complexa $\Psi \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{C})$ tem como objetivo minimizar $f_S(T)$ para uma temperatura fixa T.

Denotando $\alpha(T)$ e $\beta(T)$ simplesmente por α e β, as equações de Euler-Lagrange são dadas por

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar}{2m}\nabla^2\Psi + \alpha|\Psi|^2\Psi - \beta\Psi = 0, & \text{no interior da amostra: } \Omega; \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}} = 0, & \text{na fronteira da amostra: } \partial\Omega. \end{cases}$$

Este último sistema de equações é bem conhecido como o de Ginzburg-Landau (G-L). Apresentamos-o como a formulação do problema

$$\mathscr{P}: \ \textit{minimizar a densidade de energia livre em } W^{1,2}(\Omega;\mathbb{C}).$$

Na literatura de física, também é bem conhecida a energia G-L na qual um potencial magnético aqui denotado **A** está incluso. O funcional em questão é dado por

$$J(\Psi,\mathbf{A}) = \frac{1}{8\pi}\int_{\mathbb{R}^3} |rot\mathbf{A} - \mathbf{B}_0|_2^2 dx + \frac{\hbar^2}{4m}\int_\Omega \left|\nabla\Psi - \frac{2ie}{hc}\mathbf{A}\Psi\right|_2^2 dx + \frac{\alpha}{4}\int_\Omega |\Psi|^4 dx - \frac{\beta}{2}\int_\Omega |\Psi|^2 dx,$$

onde, rot **A** é o rotacional de A e i é a unidade imaginária tal que $i^2 = -1$

E consideramos sua minimização no espaço U, onde

$$U = W^{1,2}(\Omega;\mathbb{C}) \times W^{1,2}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$$

As correspondentes equações Euler-Lagrange são

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \dfrac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2 \Psi + \alpha|\Psi|^2\psi - \beta\Psi = 0 & \text{em } \Omega \\ \left(i\hbar\nabla\Psi + \dfrac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi\right)\cdot \mathbf{n} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} rot(rot\,\mathbf{A}) = rot\,\mathbf{B}_0 + \dfrac{4\pi}{c}\tilde{\mathrm{J}}, & \text{em } \Omega \\ rot(rot\,\mathbf{A}) = rot\,\mathbf{B}_0 & \text{em } \mathbb{R}^3 - \overline{\Omega}, \end{cases}$$

Em que,

$$\tilde{\mathrm{J}} = -\frac{ie\hbar}{2m}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{2e^2}{mc}|\Psi|^2\mathbf{A}.$$

e

$$\mathbf{B}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$$

é um campo magnético conhecido. Essas equações nos sugerem a formulação de um novo problema $\mathscr{P}$ referente ao funcional $J : U = W^{1,2}(\Omega;\mathbb{C}) \times W^{1,2}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, que será melhor detalhado adiante. Referências da teoria da supercondutividade são (ANNETT, 2010) e (LANDAU; LIFSCHITS, 2008).

Sendo assim, considerando que o problema $\mathscr{P}$ em questão é relevante na teoria de otimização não-convexa, no sentido que utilizaremos um princípio de dualidade adequado para uma classe de problemas variacionais não-convexos, estabeleceremos esse princípio de dualidade para tal problema.

Na primeira parte deste trabalho apresentamos alguns resultados fundamentais sobre Análise Funcional, Cálculo das Variações e Análise Convexa, partimos da definição de um espaço com estrutura Hilbertiana para construção da noção de espaço de funções de Sobolev, que é o espaço a ser considerado nesse texto. Apresentamos também teoremas com propriedades importantes para elementos nesses espaços, principalmete como se comportam em domínios compactos e convexos. Em geral esses resultados são apresentados sem as provas, as provas e um estudo mais aprofundado podem ser encontrados em (BOTELHO, 2014), (ADAMS; FOURNIER, 2003), (EKELAND I.; TÉMAM, 1999) e (ROCKAFELLAR, 1970).

Na segunda parte, estendemos e generalizamos um resultado conhecido, publicado em (TOLAND, 1979), e incluímos o Teorema 3.2 que antecede a formulação do nosso resultado principal, e apresenta o caso real mais simples para um princípio de dualidade onde para um funcional não-convexo pode-se considerar a abordagem dual desde que escrito como a diferença de dois funcionais convexos, a chamada abordagem de otimização D.C. O Teorema 3.2 considera o espaço de Sobolev $U = \{\phi \in W^{1,2} : \phi = 0 \text{ em } \partial\Omega\} = W_0^{1,2}(\Omega \subset \mathbb{R}, \mathbb{C})$, para definir o funcional $J : U \to \mathbb{R}$ onde

$$J(\phi)=\frac{\gamma}{2}\int_\Omega \nabla\phi.\nabla\phi dx+\frac{\alpha}{4}\int_\Omega |\phi|^4dx-\frac{\beta}{2}\int_\Omega |\phi|^2dx-\langle\phi,f\rangle_{L^2}$$

Denotamos

$$G(\phi)=\frac{\gamma}{2}\int_\Omega \nabla\phi.\nabla\phi dx+\frac{k}{2}\int_\Omega |\phi|^2dx-\langle\phi,f\rangle_{L^2}$$

$$F(\phi)=-\frac{\alpha}{4}\int_\Omega |\phi|^4dx+\frac{\beta}{2}\int_\Omega |\phi|^2dx+\frac{K}{2}\int_\Omega |\phi|^2dx$$

para $K>0$ suficientemente grande de modo que G e F são convexos em U_1, onde

$$U_1=\{u\in U:\|u\|_\infty\leq\sqrt[4]{K}\}$$

$$J(\phi)=G(\phi)-F(\phi).$$

Aqui os respectivos polares de G e F são

$$G^*(u^*)=\sup_{\phi\in U_1}\{\langle\phi,u^*\rangle_{L^2}-G(\phi)\}$$

$$F^*(u^*)=\sup_{\phi\in U_1}\{\langle\phi,u^*\rangle_{L^2}-F(\phi)\}.$$

Considerando que em caso de convexidade o funcional polar coincide com o de Legrendre, isso nos possibilita usar as propriedades apresentadas em 2.10.1 e concluirmos que

$$J(\phi_0)=\inf_{\phi\in U}\{J(\phi)\}=\inf_{u^*\in U^*}\{-G^*(u^*)+F^*(u^*)\}=-G^*(u_0^*)+F^*(u_0^*),$$

onde $u_0^*=-\nabla^2\phi_0+k\phi_0-f$, e ϕ_0 pertence à um subespaço específico, contido em U, e $\inf_{\phi\in U}\{J(\phi)\}=J(\phi_0)$.

No último capítulo, aplicamos o resultado anterior obtido para o sistema Ginzburg-Landau em supercondutividade, estabelecendo o novo princípio de dualidade para tal modelo, que trata-se do modelo com campo e potencial magnético. Apesar do fato de o funcional ser não convexo, usando uma constante $K>0$ associada e relativos funcionais quadráticos, conseguimos escrever o funcional de energia principal como a diferença de dois funcionais convexos em um domínio devidamente definido. Em

$$U_3=\{\phi\in U_1\ :\ \|\phi\|_{1,\infty}\leq\sqrt[4]{K}\},$$

e

$$U_4 = \{\mathbf{A} \in U_2 : \|\mathbf{A}\|_{1,\infty} \leq \sqrt[4]{K}, \text{ div } \mathbf{A} = 0, \text{ em } \Omega_1 \text{ e } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0, \text{ em } \partial\Omega_1\},$$

consideramos os funcionais $F, G : U_3 \times U_4 \to \mathbb{R}$, tais que

$$\begin{aligned} G(\phi, \mathbf{A}) &= \frac{\gamma}{2} \int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla\phi^* \, dx + \frac{1}{8\pi} \| \text{ rot } \mathbf{A} - \mathbf{B}_0 \|_{2,\Omega_1}^2 \\ &+ \frac{K}{2} \int_\Omega |\phi|^2 \, dx + \frac{K}{2} \int_{\Omega_1} |\mathbf{A}|^2 \, dx + \frac{K}{2} \int_\Omega \nabla\phi . \nabla\phi^* \, dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F(\phi, \mathbf{A}) &= -\frac{\alpha}{4} \int_\Omega |\phi|^4 \, dx + \frac{\beta}{2} \int_\Omega |\phi|^2 \, dx \\ &+ \frac{\gamma}{2} \int_\Omega 2Re[\nabla\phi^* \cdot (i\rho\mathbf{A}\phi)] \, dx - \frac{\gamma}{2} \int_\Omega |\phi|^2 |\mathbf{A}|^2 \, dx \\ &+ \frac{K}{2} \int_\Omega |\phi|^2 \, dx + \frac{K}{2} \int_{\Omega_1} |\mathbf{A}|^2 dx + \frac{K}{2} \int_\Omega \nabla\phi . \nabla\phi^* \, dx. \end{aligned}$$

Assumindo que $K > 0$ é grande o suficiente de modo que F e G são convexos em $U_3 \times U_4$, definindo os polares F^* e G^* e adicionando algumas hipóteses importantes, como condições necessárias de otimalidade, concluiremos que

$$\begin{aligned} J(\phi_0, \mathbf{A}_0) &= \min_{(\phi, \mathbf{A}) \in U_3 \times U_4} J(\phi, \mathbf{A}) \\ &= \min_{(v_1^*, v_2^*) \in A^*} J^*(v_1^*, v_2^*) \\ &= J^*(\hat{v}_1^*, \hat{v}_2^*), \end{aligned}$$

onde

$$A^* = A_1 \cap A_2,$$

$$\begin{aligned} A_1 = &\Big\{(v_1^*, v_2^*) \in Y_1^* \times Y_2^* : \text{ existe } (\phi, \mathbf{A}) \in U_3 \times U_4 \\ &\text{tal que } v_1^* = \frac{\partial F(\phi, \mathbf{A})}{\partial \phi} \text{ e } v_2^* = \frac{\partial F(\phi, \mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} \Big\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A_2 = &\Big\{(v_1^*, v_2^*) \in Y_1^* \times Y_2^* : \text{ tal que } (\phi, \mathbf{A}) \in U_3 \times U_4 \\ &\text{tal que } v_1^* = \frac{\partial G(\phi, \mathbf{A})}{\partial \phi} \text{ e } v_2^* = \frac{\partial G(\phi, \mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} \Big\}. \end{aligned}$$

Finalmente, encerramos o texto com um algoritmo numérico para resolver um sistema específico de equações relacionado ao de Ginzburg-Landau em supercondutividade na ausência de um campo e potencial magnético, o caso real mais simples. Por fim, destacamos que o procedimento numérico desenvolvido é bastante econômico do ponto de vista computacional, pois envolve a inversão de uma única matriz, adequada para todas as iterações (ou solução do sistema linear correspondente), que em um certo sentido qualitativo, é altamente positiva definida (diagonal dominante positiva).

2 ELEMENTOS DE ANÁLISE FUNCIONAL E ANÁLISE VARIACIONAL CONVEXA

Neste capítulo apresentamos resultados preliminares de Análise Funcional, Cálculo das Variações e Análise Convexa. A ideia é que de posse dessas ferramentas tenhamos suporte para seguir aos capítulos 3 e 4, em especial o capítulo 4, que é o objetivo principal do texto.

Iniciamos com algumas definições fundamentais.

Definição 1. Um espaço vetorial U é dito ser espaço normado, se é possível definir uma função $\|.\|_U : U \to \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, chamada *norma*, que satisfaz às seguintes propriedades:

1. $\|u\|_U \geq 0$, e $\|u\| = 0$, se e somente e se $u = \vec{0}, \forall\ u\ \in\ U$;
2. $\|u + v\|_U \leq \|u\|_U + \|v\|_U, \forall u, v \in U$;
3. $\|\alpha u\|_U = |\alpha| \|u\|_U, \forall u \in U, \alpha \in \mathbb{R}$.

Definição 2. Um conjunto U é dito ser um *espaço métrico* se é possível definir uma função $d : U \times U \to \mathbb{R}$ chamada *métrica* em U, tal que

1. $0 \leq d(u, v), \forall u, v \in U$;
2. $d(u, v) = 0 \Longleftrightarrow u = v, \forall u, v \in U$;
3. $d(u, v) = d(v, u), \forall u, v \in U$;
4. $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w), \forall u, v, w \in U$.

Uma métrica pode ser definida mediante uma norma, da seguinte maneira

$$d(u, v) = \|u - v\|_U.$$

Neste caso, dizemos que a métrica é induzida pela norma.

O conjunto $B_r(u) = \{v \in U$ tal que $d(u, v) < r\}$ é chamado de *bola aberta* com centro em u e raio r.

Uma métrica $d : U \times U \to \mathbb{R}^+$ é dita ser *invariante* se

$$d(u + w, v + w) = d(u, v), \forall u, v, w \in U.$$

Definição 3. Dado um espaço métrico U, dizemos que $\{u_n\} \subset U$ *converge* para $u_0 \in U$, quando $n \to \infty$, se para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq n_0$, então $d(u_n, u_0) < \epsilon$. Neste caso, escrevemos $u_n \to u_0$, quando $n \to +\infty$.

Definição 4. $\{u_n\} \subset U$ é dito ser uma *sequência de Cauchy* se para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(u_n, u_m) < \epsilon$, $\forall m, n \geq n_0$.

Definição 5. Um espaço normado U é dito ser um *espaço de Banach* se cada sequência de Cauchy de U relacionada à métrica induzida pela norma converge para um elemento de U.

2.1 ESPAÇOS DE HILBERT

Nesta seção definiremos uma importante classe de espaços métricos a saber, os espaços de Hilbert.

Definição 6. Seja H um espaço vetorial. Dizemos que H é um *pré-espaço de Hilbert* se existe uma função $(\cdot,\cdot)_H : H \times H \to \mathbb{R}$ tal que

1. $(u,v)_H = (v,u)_H, \forall u,v \in H$,
2. $(u+v,w)_H = (u,w)_H + (v,w)_H, \forall u,v,w \in H$,
3. $(\alpha u,v)_H = \alpha(u,w)_H,\ \forall u,v \in H, \alpha \in \mathbb{R}$,
4. $(u,u)_H \geq 0, \forall u \in H$ e $(u,u) = 0$, se e somente se $u = \theta$.

Observação: A função $(\cdot,\cdot)_H : H \times H \to \mathbb{R}$ é chamada *produto interno*.

Proposição 1 (Inequação Cauchy-Schwarz)**.** Seja H um pré-espaço de Hilbert. Definindo

$$\|u\|_H = \sqrt{(u,u)_H}, \forall u \in H$$

temos

$$|(u,v)| \leq \|u\|_H \|v\|_H, \forall u,v \in H.$$

A igualdade é válida se e somente se $u = \alpha v$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ ou $v = 0$.

Proposição 2. Em um espaço pré-Hilbert H, a função $(\cdot,\cdot)_H : H \to \mathbb{R}$ é uma norma, onde como acima

$$\|u\|_H = \sqrt{(u,u)}.$$

Definição 7. Um espaço Pré-Hilbert H é dito ser um *Espaço de Hilbert* se é completo, isto é, se toda sequência de Cauchy em H converge para um elemento em H.

Um espaço vetorial é dito ser Hilbert se é munido de um produto interno cuja norma determinada por esse produto interno o torne um espaço completo. Sendo um Hilbert espaço normado completo, convém observar que espaços de Hilbert também são espaços de Banach e em conjunto com uma série de propriedades e resultados são muito úteis na modelagem de uma grande classe de problemas em análise funcional.

Lema 1 (Lema de Riesz)**.** *Seja H um espaço de Hilbert e $f : H \to \mathbb{R}$ um funcional linear e contínuo. Então existe um único $u_0 \in H$ tal que*

$$f(u) = (u, u_0)_H, \forall u \in H$$

Além disso,

$$\|f\|_{H^*} = \|u_0\|_H$$

Notamos que o Lema de Riesz associa o espaço de Hilbert H ao conjunto de todos os funcionais lineares contínuos definidos em H, isto é, o seu respectivo espaço dual.

2.2 O TEOREMA DE HAHN-BANACH

O teorema de Hahn-Banach e suas implicações são resultados fundamentais para a teoria a seguir desenvolvida, portanto enunciamos agora os teoremas de extensão e separação de Hahn-Banach. Observamos que o teorema de Hahn-Banach estende funcionais lineares que cumprem determinadas condições quando definidos em um subespaço, à todo espaço vetorial e quando visto como um teorema de separacão, atenta-se à sua interpretaçao geométrica.

2.2.1 Teorema de Hahn-Banach

Teorema 2.1 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Seja U um Espaço de Banach, considere um funcional $p : U \to \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$p(\lambda u) = \lambda p(u), \forall u \in U, \lambda > 0$$

$$p(u + v) \leq p(u) + p(v), \forall u, v \in U.$$

Sejam $V \subset U$ um subespaço vetorial e

$$g : V \to \mathbb{R}$$

um funcional linear tal que

$$g(u) \leq p(u), \forall u \in V.$$

Então existe um funcional linear $f : U \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(u) = f(u), \forall u \in V \ e \ f(u) \leq p(u), \forall u \in U.$$

Corolário 2.1.1. Seja $V \subset U$ um subespaço vetorial de U, $g : V \to \mathbb{R}$ funcional linear e contínuo para o qual a norma é

$$\|g\|_{V^*} = \sup_{u \in V}\{|g(u)| : \|u\|_V \leq 1\}$$

Então existe um u^* em U^* tal que

$$\langle u, u^* \rangle_U = g(u), \forall u \in V \text{ e } \|u^*\|_{U^*} = \|g\|_{V^*}$$

Corolário 2.1.2. Dado $u_0 \in U$ existe $u_0^* \in U^*$ tal que

$$\|u_0^*\|_{U^*} = \|u_0\| \text{ e } \langle u_0, u_0^* \rangle_U = \|u_0\|_U^2.$$

Corolário 2.1.3. Dados $u \in U$ temos

$$\|u\|_U = \sup_{u^* \in U^*}\{|\langle u, u^* \rangle_U : \|u^*\|_{U^*} \leq 1\}$$

Definição 8 (Hiperplano Afim)**.** Seja U um espaço de Banach. Um *hiperplano afim H* é um conjunto da forma

$$H = \{u \in U : \langle u, u^* \rangle_U = \alpha\}$$

para algum $u^* \in U^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

Definição 9 (Separação)**.** Dados $A, B \subset U$ dizemos que um hiperplano H separa A e B se

$$\langle u, u^* \rangle_U \leq \alpha, \forall u \in A, \text{ e } \langle u, u^* \rangle_U \geq \alpha, \forall u \in B.$$

Dizemos que H separa A e B estritamente se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\langle u, u^* \rangle_U \leq \alpha - \varepsilon, \forall u \in A, \text{ e } \langle u, u^* \rangle_U \geq \alpha + \varepsilon, \forall u \in B.$$

2.2.2 Teorema de Hahn-Banach, forma geométrica

Teorema 2.2 (Teorema de Hahn-Banach, forma geométrica)**.** *Considere A e B ⊂ U conjuntos convexos, disjuntos, não vazios, e A é aberto. Então existe um hiperplano fechado que separa A e B.*

2.3 TOPOLOGIAS FRACAS

Nesta seção vamos introduzir as topologias fraca e fraca-estrela, definiremos as vizinhanças que determinam os abertos nas respectivas topologias, apresentaremos os resultados que asseguram que munidos com qualquer dessas topologias um espaço de Banach é Hausdorff, e então, por fim, enunciamos os teoremas de compacidade correspondentes.

Definição 10. Para um espaço topológico U e $u_0 \in U$, nós definimos uma *vizinhança fraca* de u_0 denotada por $\mathcal{V}_W$ como

$$\mathcal{V}_W = \{u \in U \text{ tal que } |\langle u - u_0, u_i^* \rangle_U| < \varepsilon_i, \forall i \in \{1, \cdots, m\}\},$$

para algum $m \in \mathbb{N}, \varepsilon_i > 0$ e $u_i^* \in U^*$, $\forall i \in \{1, \cdots, m\}$.

Também definimos a *topologia fraca* para U: Dizemos que $E \subset U$ é fracamente aberto, quando para cada $u \in E$ existe alguma vizinhança $\mathcal{V}_W(u) \subset E$. Assim, definimos a topologia fraca para U, denotada por $\sigma(U, U^*)$ como o conjunto de todos os conjuntos $E \subset U$ fracamente abertos.

Notação: Se $\{u_n\} \subset U$ é tal que u_n converge para u em $\sigma(U, U^*)$, então escrevemos $u_n \rightharpoonup u$.

Proposição 3. Um espaço de Banach U é Hausdorff, quando munido com a topologia $\sigma(U, U^*)$.

Proposição 4. Seja U um espaço de Banach. Considerando $\{u_n\} \subset U$, temos

1. $u_n \rightharpoonup u$, para $\sigma(U, U^*) \Longleftrightarrow \langle u_n, u^* \rangle_U \to \langle u, u^* \rangle_U, \forall u^* \in U^*$,
2. se $u_n \to u$ fortemente (em norma), então $u_n \rightharpoonup u$ fracamente,
3. se $u_n \rightharpoonup u$ fracamente, então $\{\|u_n\|_U\}$ é limitada e $\|u\|_U \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_U$,
4. se $u_n \rightharpoonup u$ fracamente e $u_n^* \to u^*$ fortemente em U^*, então $\langle u_n, u_n^* \rangle_U \to \langle u, u^* \rangle_U$.

Definição 11 (Espaços Reflexivos)**.** Seja U um espaço de Banach. Dizemos que U é reflexivo se a injeção canônica $J : U \to U^{**}$ definida por

$$\langle u, u^* \rangle_U = \langle u^*, J(u) \rangle_{U^*}, \forall u \in U, u^* \in U^*,$$

é sobrejetora.

A topologia fraca para U^* é denotada por $\sigma(U^*, U^{**})$. Analogamente, podemos definir a topologia $\sigma(U^*, U)$, que é chamado *topologia fraca estrela*. Uma vizinhança padrão de $u_0^* \in U^*$ na topologia fraca estrela, que denotamos por $\mathcal{V}_{W^*}$ é dada por

$$\mathcal{V}_{W^*} = \{u^* \in U^* : |\langle u_i, u^* - u_0^* \rangle_U| < \varepsilon_i, \forall i \in \{1, ..., m\}\}$$

para algum $\varepsilon_i > 0, m \in \mathbb{N}$, $u_i \in U$, $\forall i \in \{1, ..., m\}$. É claro que a topologia fraca para U^* e a topologia fraca estrela coincidem se U é reflexivo.

Proposição 5. Seja U um espaço de Banach. U^* dotado com a topologia fraca estrela é um espaço de Hausdorff.

Teorema 2.3 (Teorema Banach-Alaoglu)**.** *O conjunto $B_U^* = \{f \in U^* : \|f\|_{U^*} \leq 1\}$ é compacto para a topologia fraca estrela $\sigma(U^*, U)$.*

Teorema 2.4 (Kakutani)**.** *Seja U espaço de Banach. Então U é reflexivo se e somente se*

$$B_U = \{u \in U : \|u\|_U \leq 1\}$$

é compacto para a topologia fraca $\sigma(U, U^*)$.

2.4 OPERADORES

Essa é uma breve seção sobre operadores: definições e propriedades. Em especial o Teorema 2.6 a seguir descreve alguns comportamentos dos operadores lineares limitados em espaços de Hilbert, a propriedade 2 deste teorema, por exemplo, nos diz que o adjunto do adjunto de um operador é o próprio operador, se o operador é linear, limitado e definido de um Hilbert nele mesmo.

Definição 12. Sejam U, V espaços de Banach. Chamamos a função $A : U \to V$ um *operador*.

Definição 13. Sejam U, Y espaços de Banach. Dado um operador linear limitado $A : U \to Y$ e $v^* \in Y^*$, temos que $T(u) = \langle Au, v^* \rangle_Y$ é tal que

$$|T(u)| \leq \|Au\|_Y \cdot \|v^*\|_{Y^*} \leq \|A\| \|v^*\|_{Y^*} \|u\|_U.$$

Portanto, $T(u)$ é um funcional linear contínuo em U e da nossa hipótese de representação do espaço dual, existe $u^* \in U^*$ tal que

$$T(u) = \langle u, u^* \rangle_U, \forall u \in U.$$

Definimos A^* por $u^* = A^* v^*$, ou seja,

$$T(u) = \langle u, u^* \rangle_U = \langle u, A^* v^* \rangle_U,$$

isto é,

$$\langle u, A^* v^* \rangle_U = \langle Au, v^* \rangle_Y, \forall u \in U, v^* \in Y^*.$$

Nós chamamos $A^* : Y^* \to U^*$ o *operador adjunto* de $A : U \to Y$.

Teorema 2.5. *Sejam U, Y espaços de Banach e seja $A : U \to Y$ um operador linear limitado. Então*

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

No caso particular em que $U = Y = H$, com H espaço de Hilbert, o seguinte teorema é válido:

Teorema 2.6. *Dados operadores lineares limitados $A, B : H \to H$, temos que*

1. *$(AB)^* = B^*A^*$,*

2. *$(A^*)^* = A$,*

3. *se A possui inversa limitada A^{-1}, então A^* possui inversa limitada e*

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

4. $$\|AA^*\| = \|A\|^2.$$

Definição 14. Seja C um subconjunto de um Espaço de Banach U e $T : C \to C$ um operador. O operador T é dito ser uma contração em C se existe $0 \leq \alpha < 1$ tal que

$$\|T(u) - T(v)\|_U \leq \alpha \|u - v\|_U, \forall, u, c \in C$$

Teorema 2.7 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Seja C um subconjunto fechado de um espaço de Banach U. Assuma que T é uma contração em C, então existe um único u_0 tal que $u_0 = T(u_0)$. E ainda, para $u_1 \in C$ arbitrário, definindo a sequência*

$$u_2 = T(u_1) \text{ e } u_{n+1} = T(u_n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

temos

$$u_n \to u_0, \text{ em norma com } n \to \infty.$$

2.5 MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Nesta seção, caminharemos pela construção da teoria da medida, funções μ-integráveis, Espaços L^p e Espaços de Sobolev. Aqui, μ é uma medida; elementos de um espaço L^p são funções p-integráveis, com respeito à medida μ. Seja U um espaço topológico, iniciamos definindo os subconjuntos de U que podem ser medidos, isto é, os conjuntos mensuráveis de U.

Definição 15 ($\sigma -$ *algebra*)**.** Uma coleção $\mathcal{M}$ de subconjuntos de U é dito ser uma σ**-algebra** se $\mathcal{M}$ tem as seguintes propriedades:

1. $U \in \mathcal{M}$,

2. Se $A \in \mathcal{M}$, então $U - A \in \mathcal{M}$,

3. Se $A_n \in \mathcal{M}, \forall n \in \mathbb{N}$, então $\cup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Definição 16. Se $\mathcal{M}$ é uma σ-algebra em U, dizemos que U é um *espaço mensurável*. Os elementos de $\mathcal{M}$ são chamados de *conjuntos mensuráveis de U*.

Definição 17. Se U é um espaço mensurável e V é um espaço topológico, dizemos que $f : U \to V$ é uma *função mensurável* se $f^{-1}(\mathcal{V})$ é mensurável, sempre que $\mathcal{V} \subset V$ é um conjunto aberto.

Definição 18. Uma função $f : U \to \mathbb{C}$ é dita ser uma *função simples* se a imagem $(R(f))$ contém somente finitos pontos. Se $\{\alpha_1, ...\alpha_n\} = R(f)$ e temos o conjunto $A_i = \{u \in U : f(u) = \alpha_i\}$, claramente temos $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathscr{X}_{A_i}$, onde

$$\mathscr{X}_{A_i}(u) = \begin{cases} 1, \text{ se } u \in A_i, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}.$$

Teorema 2.8. *Seja $f : U \to [0,\infty]$ uma função mensurável. Portanto existe uma sequência de funções simples $\{s_n : U \to [0,\infty]\}$ tal que*

1. $0 \le s_1 \le s_2 \le ... \le f$,
2. *$s_n(u) \to f(u)$ quando $n \to \infty$, $\forall u \in U$.*

Definição 19. Seja $\mathscr{M}$ uma σ-algebra em um espaço topológico U. A função $\mu : \mathscr{M} \to [0,\infty]$ é dita ser uma *medida* se μ é enumeravelmente aditiva, isto é dado $\{A_i\} \subset U$, uma sequência de conjuntos, dois a dois disjuntos, então

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Neste caso $(U, \mathscr{M}, \mu)$ é chamado *espaço de medida*.

Proposição 6. Seja $\mu : \mathscr{M} \to [0,\infty]$ uma medida, onde $\mathscr{M}$ é uma σ-algebra de U. Então temos o seguinte:

1. $\mu(A_1 \cup ... \cup A_n) = \mu(A_1) + ...\mu(A_n)$ para qualquer sequência $\{A_i\}$ de conjuntos mensuráveis e disjuntos dois a dois.
2. Se $A, B \in \mathscr{M}$ e $A \subset B$, então $\mu(A) \le \mu(B)$.
3. Se $\{A_n\} \subset \mathscr{M}, A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset ...$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.
4. Se $\{A_n\} \subset \mathscr{M}, A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ e $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ...$ e $\mu(A_1)$ é finito, então $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

A integral de uma função com respeito à μ será definida na seguinte ordem: integrais de funções simples, integrais de funções não-negativas e finalmente a integrais de uma funções mensuráveis quaisquer.

Definição 20 (Integral para Funções Simples)**.** Seja $s : U \to [0,\infty]$, uma função simples mensurável, isto é,

$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathscr{X}_{A_i}$. Definimos a integral s sobre $E \in \mathscr{M}$, denotado por $\int_E s d\mu$, como

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

Aqui convecionamos que $0.\infty = 0$

Definição 21 (Integral para funções mensuráveis não negativas)**.** Se $f : U \to [0,\infty]$ é mensurável, para $E \in \mathscr{M}$, definimos a integral de f em E, denotado por $\int_E f d\mu$, como

$$\int_E f d\mu = \sup_{s \in A} \left\{ \int_E s d\mu \right\}$$

onde $A = \{s : U \to [0,+\infty] \mid s \text{ simples e mensurável e } 0 \leq s \leq f\}$.

Definição 22 (Integrais para funções mensuráveis)**.** Para uma função $f : U \to [-\infty,\infty]$ e $E \in \mathscr{M}$, definimos $f^+ = max\{f,0\}$, $f^- = max\{-f,0\}$ e a integral de f em E, denotada por $\int_E f d\mu$, como

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Dado uma sequência de f_n de funções mensuráveis, apresentamos agora os seguintes resultados: o Teorema da Convergência Monótona, o Lema de Fatou e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que permitem comutar o limite com a integral sem que se tenha a convergência uniforme da sequência.

Teorema 2.9 (Teorema da Convergência Monótona)**.** *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funcões mensuráveis reais em U e suponha que*

1. $0 \leq f_1(u) \leq f_2(u) \leq \ldots \leq \infty, \forall u \in U,$
2. $f_n(u) \to f$ *quando* $n \to \infty, \forall u \in U$. *Então*
   a) *f é mensurável,*
   b) $\int_U f_n d\mu \to \int_U f d\mu$ *quando* $n \to \infty$.

Corolário 2.9.1. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis não negativas definidas em U,

$(f_n : U \to [0,\infty], \forall n \in \mathbb{N})$. Definindo $f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(u), \forall u \in U$, temos

$$\int_U f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_U f_n d\mu.$$

Teorema 2.10 (Lema de Fatou)**.** *Seja $\{f_n : U \to [0,\infty]\}$ uma sequência de funções mensuráveis, então*

$$\int_U \lim_{n\to\infty} \inf f_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_U f_n d\mu.$$

Teorema 2.11 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Suponha $\{f_n\}$ é uma sequência de funções complexas mensuráveis em U, tal que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(u) = f(u), \forall u \in U.$$

Se existe uma função mensurável $g : U \to \mathbb{R}^+$ tal que $\int_U g d\mu < \infty$ e $|f_n(u)| \leq g(u), \forall u \in U, n \in \mathbb{N}$, então

1. $\int_U |f| d\mu < \infty$,
2. $\lim_{n\to\infty} \int_U |f_n - f| d\mu = 0.$

Teorema 2.12 (Fubini)**.** *Seja $(U, \mathscr{M}_1, \mu_1)$ e $(V, \mathscr{M}_2, \mu_2)$ dois espaços de medidas completos e f uma função integrável em $U \times V$. Então*

1. $f_u(v) = f(u,v)$ *é mensurável e integrável para quase todo u,*
2. $f_v(u) = f(u,v)$ *é mensurável e integrável para quase todo v,*
3. $h_1(u) = \int_V f(u,v) d\mu_2(v)$ *é integrável em U,*
4. $h_2(v) = \int_U f(u,v) d\mu_1(u)$ *é integrável em V,*
5. $$\int_U \left[\int_V f d\mu_2(v) \right] d\mu_1(u) = \int_V \left[\int_U f d\mu_1(u) \right] d\mu_2(v) = \int_{U\times V} f d(\mu_1 \times \mu_2).$$

Destacamos o item 5 do Teorema de Fubini, por ser de grande utilidade ao calcular uma integral dupla, o fazemos como duas integrais simples sucessivas, apenas trocando a ordem de integração.

2.6 ESPAÇOS L^p

Introduzimos agora a definição dos espaços de Lebesgue, denotados por $L^p(\Omega)$, onde $1 \leq p \leq \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto. Neste ponto, integrais sempre se referem à medida de Lebesgue.

Definição 23 (Espaços L^p)**.** Para $1 \leq p < \infty$, dizemos que $u : \Omega \to \mathbb{R} \in L^p(\Omega)$ se tal função é mensurável e

$$\int_\Omega |u|^p dx < \infty.$$

Também denota-se $\|u\|_p = [\int_\Omega |u|^p dx]^{\frac{1}{p}}$. Que, de fato, é uma norma.

Definição 24 (Espaço L^∞)**.** Dizemos que $u \in L^\infty(\Omega)$ se u é mensurável e existe $M \in \mathbb{R}^+$, tal que $|u(x)| < M$, em quase todo ponto de Ω. Definimos

$$\|u\|_\infty = inf\{M > 0 \text{ tal que } |u(x)| < M \text{ em quase todo ponto de } \Omega\}.$$

Para $1 \leq p \leq \infty$, definimos q que satisfaça as relações seguintes

$$q = \begin{cases} +\infty, & \text{se} \quad p = 1, \\ \dfrac{p}{p-1}, & \text{se} \quad 1 < p < +\infty, \\ 1, & \text{se} \quad p = +\infty. \end{cases}$$

Dssa forma, temos

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Teorema 2.13. *Considere $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Teorema 2.14. *$L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial e $\|.\|_p$ é uma norma $\forall p$ tal que $1 \leq p \leq \infty$.*

Teorema 2.15. *$L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach para qualquer p tal que $1 \leq p \leq \infty$.*

Teorema 2.16. *Seja $\{u_n\} \subset L^P(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$ tal que $\|u_n - u\|_p \to 0$. Então existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ tal que*

1. *$u_{n_k}(x) \to u(x)$, a.e em Ω,*
2. *$|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$, a.e em Ω, $\forall k \in \mathbb{N}$, para algum $h \in L^p$.*

Teorema 2.17. *$L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo p tal que $1 < p < \infty$.*

Teorema 2.18. *Seja $1 < p < \infty$ e seja f um funcional linear contínuo em $L^p(\Omega)$. Então existe um único $u_0 \in L^q$ tal que*

$$f(v) = \int_\Omega v u_0 dx, \forall v \in L^p(\Omega).$$

2.7 ESPAÇOS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS

Incluiremos algumas definições e propriedades relativas a espaços de funções contínuas. Primeiro lembramos que por domínio nos referimos a um aberto do $\mathbb{R}^n$. Portanto para um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e para um inteiro não-negativo m definimos por $C^m(\Omega)$ o conjunto de todas as funções u em que as derivadas parciais $D^\alpha u$ são contínuas em Ω para algum α tal que $|\alpha| \leq m$, onde se $D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ... D_n^{\alpha_n}$, temos $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Definimos $C^{\infty}(\Omega) = \cap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$ e denotamos $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. Dada uma função $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, o fecho do conjunto de elementos em Ω tais que ϕ é não nula é chamado de *suporte de* ϕ, denotado por *supp*(f). Ou seja,

$$supp(\phi) = \overline{\{x \in \Omega, \text{ tal que } \phi(x) \neq 0\}}.$$

$C_C^{\infty}(\Omega)$ denota o conjunto de funções em C^{∞} com suporte compacto em Ω.

Os conjuntos $C_0(\Omega)$ e $C_0^{\infty}(\Omega)$, consistem do fecho de $C_C(\Omega)$(que é o conjunto de funções em $C(\Omega)$ com suporte compacto em Ω) e C_C^{∞}, respectivamente. Por outro lado, $C_B^m(\Omega)$ denota o conjunto das funções $u \in C^m(\Omega)$ para qual D_u^{α} é limitada em Ω para $0 \leq |\alpha| \leq m$. Observe que C_B^m é um espaço de Banach, com a norma denotada por $\|.\|_B, m$ dada por

$$\|u\|_B, m = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \left\{ |D^{\alpha} u(x)| \right\}.$$

Também definimos $C^m(\overline{\Omega})$ como o conjunto de funções $u \in C^m(\Omega)$ para qual D^{α}u é limitada e uniformemente contínua em Ω para $0 \leq |\alpha| \leq m$. Observe que $C^m(\overline{\Omega})$ é um subespaço fechado de $C_B^m(\Omega)$ e é também um espaço de Banach com a norma herdada de C_B^m. Um importante espaço é o das funções contínuas de Hölder.

Definição 25. Se $0 < \lambda < 1$, para um inteiro não negativo m, definimos o *espaço de funções contínuas de Hölder*, denotado por $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$, como o subespaço de $C^m(\bar{\Omega})$ consistindo das funções u as quais, para $0 \leq |\alpha| \leq m$, existe uma constante K tal que

$$|D^{\alpha} u(x) - D^{\alpha} u(y)| \leq K|x-y|^{\lambda}, \forall x, y \in \Omega.$$

$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ é um espaço de Banach com a norma denotada por $\|.\|_{m,\lambda}$ dada por

$$\|u\|_{m,\lambda} = \|u\|_{B,m} + \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x,y \in \Omega} \left\{ \frac{|D^{\alpha} u(x) - D^{\alpha} u(y)|}{|x-y|^{\lambda}}, x \neq y \right\}. \quad (2.1)$$

De agora em diante nós diremos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é *localmente integrável*, se é Lebesgue integrável em todo compacto $K \subset \Omega$. Além disso dizemos que $f \in L_{loc}^p(\Omega)$ se $f \in L^p(K)$ para todo compacto $K \subset \Omega$. Finalmente, dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, denotamos $W \subset\subset \Omega$ sempre que $\overline{W}$ é compacto e $\overline{W} \subset \Omega$.

Teorema 2.19. *O espaço* $C_0(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$*, para* $1 \leq p < \infty$.

Lema 2.20. Seja $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} fu dx = 0, \forall u \in C_0(\Omega)$$

Então $f = 0$ *a.e* em Ω.

Teorema 2.21. *$L^p(\Omega)$ é separável para qualquer $1 \leq p < \infty$.*

Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p$ então u possui derivadas de todas as ordens em um certo sentido, chamado sentido das distribuições. $D^\alpha u$, não é, em geral, uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$, é definida por uma função de $L^p(\Omega)$, define-se um novo espaço denominado Espaço de Sobolev. A derivada no sentido das distribuições de uma função $u \in L^p(\Omega)$ pode ser definida de um modo direto e de fácil entendimento. Podemos chamá-la de derivada distribucional. Seja $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, com Ω aberto do $\mathbb{R}^n$.

Dizemos que uma função v_i é a derivada distribucional de u, em relação à variável $x_i = 1, 2, ..., n$, se:

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega v_i(x)\varphi(x)dx$$

para toda função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Se isso for o caso, usaremos a notação: $v_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ $i = 1, 2, ..., n$

Se v_i também possui derivadas distribucionais então se denota:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Analogamente, denotamos:

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha^1} ... \partial x_n^{\alpha^n}}$$

com $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{N}$ e $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Aqui $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ e

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$$

denota o operador diferencial de ordem $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$.

Além disso, denotamos $D^{(0,...,0)}u = u$.

2.8 OS ESPAÇOS DE SOBOLEV

Agora definiremos os espaços de Sobolev, denotados por $W^{m,p}(\Omega)$

Definição 26 (Espaços de Sobolev)**.** Dizemos que $u \in W^{m,p}(\Omega)$ se $u \in L^p(\Omega)$ e $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo α tal que $0 \leq |\alpha| \leq m$, onde as derivadas são entendidas no sentido das distribuições. Dizemos que o conjunto $W^{m,p}(\Omega)$ é o *Espaço de Sobolev* de ordem m.

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) | D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall \alpha \text{ com } 0 \leq |\alpha| \leq m \right\}$$

.

Para o contexto de parâmetro de ordem considere imagem complexa, isto é, $u \in L(\Omega)$ tal que $u : \Omega \to \mathbb{C}$,, o que notaremos por $W^{m,p}(\Omega, \mathbb{C})$

Definição 27. Definimos a norma $\|\cdot\|_{m,p}$ para $W^{m,p}(\Omega)$ onde $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$, como

$$\|u\|_{m,p} = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_p^p \right\}^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sup_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_{\infty}$$

Teorema 2.22. *$W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Teorema 2.23. *$W^{m,p}(\Omega)$ é separável se $1 \leq p < \infty$. Particularmente, $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno*

$$(u, v)_m = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^{\alpha} u, D^{\alpha} v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Lema 2.24. Seja $1 \leq p < \infty$ e definimos $U = L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Para cada funcional linear contínuo f em U, existe um único $v \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^N) = U^*$ tal que

$$f(u) = \sum_{i=1}^{N} \langle u_i, v_i \rangle, \forall u \in U.$$

Mais ainda,

$$\|f\|_{U^*} = \|v\|_{q^N},$$

onde $\|.\|_{q^N} = \|.\|_{L^q(\Omega, \mathbb{R}^N)}$.

Teorema 2.25. *Seja $1 \leq p < \infty$. Dado um funcional linear e contínuo f em $W^{m,p}(\Omega)$, existe $v \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que*

$$f(u) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^{\alpha} u, v_{\alpha} \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Definição 28. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio. Para um inteiro positivo m e $1 \leq p < \infty$ definimos $W_0^{m,p}(\Omega)$ como o fecho em $\|.\|_{m,p}$ de $C_C^{\infty}(\Omega)$, onde relembramos que $C_C^{\infty}(\Omega)$ denota o conjunto de funções de $C^{\infty}(\Omega)$ com suporte compacto contido em Ω.

Lembramos que para espaços normados X,Y dizemos que X está *imerso* em Y e denotamos $X \hookrightarrow Y$, se $X \subset Y$ e existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\|u\|_Y \leq K \|u\|_X, \forall u \in X.$$

Se,além disso, a imersão for compacta então para qualquer sequência limitada $\{u_n\} \subset X$ existe uma subsequência que converge para algum u, em Y, na norma $\|.\|_Y$. Neste ponto, pimeiro apresentamos a seguinte definição.

Definição 29. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado. Dizemos que $\partial\Omega$ é $\hat{C}^1$ se para cada $x_0 \in \partial\Omega$, denotando $\hat{x} = (x_1, \cdots, x_{n-1})$ para um sistema de coordenadas local, existe $r > 0$ e uma função $f(x_1, \cdots, x_{n-1}) = f(\hat{x})$ tal que

$$W = \overline{\Omega} \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0) \text{ tal que } x_n \leq f(x_1, \cdots, x_n)\}.$$

Além disso, $f(\hat{x})$ é uma função Lipschitz contínua tal que

$$|f(\hat{x}) - f(\hat{y})| \leq C_1 |\hat{x} - \hat{y}|_2,$$

em seu domínio para algum $C_1 > 0$. Finalmente, assumimos que

$$\left\{ \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_k} \right\}_{k=1}^{n-1}$$

é definida da forma usual em quase todo o ponto do seu domínio, de forma que $f \in W^{1,2}$.

2.8.1 Imersões de Sobolev, Teorema do Traço e compacidade de Rellich-Kondrachov

Essenciais na teoria qualitativa das Imersões de Sobolev enunciamos a seguir o Teorema das Imersões de Sobolev, Teorema do Traço e o Teorema de compacidade de Rellich-Kondrachov. Em particular o Teorema do Traço permite-nos pensar em $u\big|_{\partial\Omega}$ para funções em $W^{1,p}(\Omega)$ e o Teorema das Imersões de Sobolev é uma ferramenta importante para prova das existências de soluções dos problemas apresentados nos capítulos 3 e 4, que assumimos estar bem estabelecidas.

Teorema 2.26 (Teorema das Imersões de Sobolev)**.** *Seja Ω um conjunto aberto e limitado em $\mathbb{R}^n$ tal que $\partial\Omega$ é $\hat{C}^1$. Seja $j \geq 0$ e $m \geq 1$ inteiros não-negativos e seja $1 \leq p < \infty$.*

1. ***Parte I***

   a) ***Caso A*** *Se $mp > n$ ou então $m = n$ e $p = 1$, então*

   $$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega).$$

   Além disso,

   $$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \text{ para } p \leq q \leq \infty,$$

   e, em particular

   $$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para } p \leq q \leq \infty.$$

b) ***Caso B*** *Se $mp = n$, então*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \text{ para } p \le q < \infty,$$

e, em particular,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega), \text{ para } p \le q < \infty.$$

c) ***Caso C*** *Se $mp < n$ ou $p = 1$, então*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \text{ para } p \le q \le p^* = \frac{np}{n-mp},$$

e, em particular,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega), \text{ para } p \le q \le p^* = \frac{np}{n-mp}.$$

2. ***Parte II*** *Se $mp > n > (m-1)p$, então*

$$W^{j+m,p} \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}), \text{ para } 0 < \lambda \le m-(n/p),$$

e se $n = (m-1)p$, então

$$W^{j+m,p} \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}), \text{ para } 0 < \lambda < 1.$$

Além disso, se $n = m-1$ e $p = 1$, então a equação acima é válida para $\lambda = 1$ também.

3. ***Parte III*** *Todas as imersões das Partes A e B são válidas para domínios arbitrários Ω se o W-espaço envolvido na imersão é substituído pelo W_0-espaço correspondente.*

Teorema 2.27 (Teorema do Traço)**.** *Seja $1 < p < \infty$ e seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado aberto tal que $\partial\Omega$ é $\hat{C}^1$. Então, existe um operador linear limitado*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^{p}(\partial\Omega),$$

tal que

1. *$Tu = u\Big|_{\partial\Omega}$ se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$,*
2. *$\|Tu\|_{p,\partial\Omega} \le K\|u\|_{1,p,\Omega}, \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$, em que a constante K depende apenas de p e Ω.*

Teorema 2.28 (Teorema de Rellich-Kondrachov)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado tal que $\partial\Omega$ é $\hat{C}^1$. Sejam j, m inteiros e seja $1 \le p < \infty$.*

1. ***(Parte I)*** *Se $mp \leq n$, então as seguintes imersões são compactas:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \ \textit{se } 0 < n - mp \textit{ e } 1 \leq q < np/(n-mp),$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \ \textit{se } n = mp, 1 \leq p < \infty.$$

2. ***(Parte II)*** *Se $mp > n$, então as seguintes imersões são compactas:*

$$W^{j+m,p} \hookrightarrow C_B^j(\Omega),$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \ \textit{se } 1 \leq q \leq \infty.$$

3. ***(Parte III)*** *As seguintes imersões são compactas:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega}), \ \textit{se } mp > n.$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}), \ \textit{se } mp > n \geq (m-1)p \textit{ e } 0 < \lambda < m - n/p.$$

4. ***(Parte IV)*** *Todas as imersões acima são compactas se substituirmos $W^{j+m,p}(\Omega)$ por $W_0^{j+m,p}(\Omega)$, onde $W_0^{m,p}(\Omega)$ é o fecho de $C_0^{\infty}(\Omega)$ no espaço $W^{m,p}(\Omega)$*

2.9 INTRODUÇÃO AO CÁLCULO VARIACIONAL

Nesta seção apresentamos as principais definições e resultados que norteiam a teoria variacional. Chamamos problemas variacionais a problemas em que se está interessado em encontrar uma solução ótima, minimizando ou maximizando um funcional F definido em um subconjunto D de um Espaço de Banach U. A esses dois tipos de problemas nos referiremos apenas a minimizar o funcional F em D, uma vez que maximizar F em D é equivalente a minimizar $-F$ na mesma região.

Definição 30. Dado $F : D \subset U \to \mathbb{R}$, definimos o *espaço das variações admissíveis* para F, denotado por $\mathcal{V}$ como

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in U \text{ tal que } u + \varphi \in D, \forall u \in D\}.$$

Por exemplo, para $F : U \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \nabla u . \nabla u dx - \langle u, f \rangle_U$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e

$$U = \{u \in W^{1,2}(\Omega) : u = \hat{u} \text{ em } \partial\Omega\}.$$

temos

$$\mathcal{V} = W_0^{1,2}(\Omega)$$

Definição 31. Dado $F : U \to \mathbb{R}$, dizemos que $u_0 \in U$ é um *mínimo local* para F se existe $\delta > 0$ tal que

$$F(u) \geq F(u_0), \forall u \in U, \text{ tal que } \|u - u_0\|_U < \delta,$$

ou equivalentemente,

$$F(u_0 + \varphi) \geq F(u_0), \forall \varphi \in \mathcal{V}, \text{ tal que } \|\varphi\|_U < \delta.$$

2.9.1 Diferencialbilidade à Gâteaux

Definição 32. Dado $F : U \to \mathbb{R}$, nós definimos a *Variação à Gâteaux* de F em $u \in U$ na direção $\varphi \in \mathcal{V}$, denotada por $\delta F(u, \varphi)$ como

$$\delta F(u, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(u + \varepsilon\varphi) - F(u)}{\varepsilon},$$

se tal limite existe e é bem definido. Além disso, se existe $u^* \in U^*$ tal que

$$\delta F(u, \varphi) = \langle \varphi, u^* \rangle_U, \forall \varphi \in U,$$

dizemos que F é Gâteaux diferenciável em $u \in U$ e $u^* \in U^*$ é dito ser o *diferencial à Gâteaux* de F em u. Finalmente, denotamos,

$$u^* = \delta F(u) \text{ ou } u^* = \frac{\partial F(u)}{\partial u}.$$

Seja F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função, as derivadas parciais dessa função, quando existem, fornecem informações sobre a função ao longo de retas paralelas aos eixos. O diferencial à Gâteaux (ou aqui, derivada direcional) de F em um ponto $u \in U$ permite a análise do comportamento da função em outras direções. Podemos dizer que uma função Gâteaux diferenciável considera todas as direções admissíveis do Espaço das direções admissíveis.

Teorema 2.29 (Lema fundamental do cálculo das variações)**.** *Considere um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u\varphi dx = 0, \forall \varphi \in C^\infty_C(\Omega),$$

então $u = 0, q.t.p$ em Ω.

2.9.2 Diferenciabilidade à Fréchet

Uma definição ainda mais geral é a de derivada de Fréchet. Quando F é diferenciável à Fréchet, então é diferenciável à Gâteaux.

Definição 33. Sejam U, Y espaços de Banach e considere a transformação $T: U \to Y$. Dizemos que T é Fréchet diferenciável em $u \in U$ se existe uma transformação linear limitada $T'(u): U \to Y$ tal que

$$\lim_{v \to 0} \frac{\| T(u+v) - T(u) - T'(u)(v) \|_Y}{\| v \|_U} = 0, v \neq 0$$

Neste caso $T'(u)$ é chamada **derivada de Fréchet** de T e $u \in U$

Proposição 7. Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável e

$$\left\{ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right\},$$

positiva definida, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então f é convexa

Proposição 8. Seja U um espaço de Banach. Considere que $F: U \to \mathbb{R}$ é um funcional Gâteaux diferenciável. Então F é convexa se, e somente se

$$F(v) - F(u) \geq \langle F'(u), v - u \rangle_U, \forall u, v \in U.$$

Definição 34 (A segunda variação)**.** Seja U um espaço de Banach. Suponha $F: U \to \mathbb{R}$ um funcional Gâteaux diferenciável. Dados $\varphi, \eta \in \mathcal{V}$, definimos a segunda variação de F em u, em relação às direções φ, η, denotada por

$$\delta^2 F(u, \varphi, \eta),$$

por

$$\delta^2 F(u, \varphi, \eta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta F(u + \varepsilon \eta, \varphi) - \delta F(u, \varphi)}{\varepsilon},$$

Se tal limite existe $\forall \varphi, \eta \in \mathcal{V}$, dizemos que F é duas vezes Gâteaux diferenciável em u. Finalmente, se $\eta = \varphi$, denotamos $\delta^2 F(u, \varphi, \eta) = \delta^2 F(u, \varphi)$.

Teorema 2.30. *Seja U um espaço de Banach. Suponha que $F: U \to \mathbb{R}$ é um funcional duas vezes Gâteaux diferenciável e que*

$$\delta^2 F(u, \varphi) \geq 0, \forall u \in U, \varphi \in \mathcal{V}.$$

Então,

$$F(\lambda u + (1 - \lambda v)) \leq \lambda F(u) + (1 - \lambda) F(v), \forall u, v \in U, \lambda \in [0, 1].$$

Ou seja, F é convexo.

Faz-se necessário, pela funcionaliadade de simplificar a busca das soluções ótimas, o teorema 30 a seguir.

Teorema 2.31. ***(Condição Suficiente para um Mínimo Local):*** *Seja U um espaço de Banach. Suponha $F : U \to \mathbb{R}$ é um funcional duas vezes Gâteaux diferenciável em uma vizinhança de u_0, tal que*

$$\delta F(u_0) = 0$$

e

$$\delta^2 F(u, \varphi) \geq 0, \forall u \in B_r(u_0), \varphi \in \mathcal{V},$$

para algum $r > 0$. Sob tais hipóteses, temos que

$$F(u_0) \leq F(u_0 + \varepsilon\varphi), \forall \varepsilon, \varphi$$

tal que $|\varepsilon| < min\{r, 1\}, \|\varphi\|_U < 1$. Ou seja, u_0 é um mínimo local do funcional F.

Proposição 9. Assuma

$$U = \{u \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^N); u = u_0 \text{ em } \Gamma_0\}$$

onde $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ é fechado e $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ sendo Γ_1 aberto em Γ e $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \emptyset$. Portanto se $\partial\Omega \in C^1$, $f \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N\times n})$ e $u \in C^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N)$, e também

$$\delta F(u, \varphi) = 0, \forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N) \text{ tal que } \varphi = 0 \text{ em } \Gamma_0,$$

então u é um extremo de F que satisfaz as seguintes condições naturais de fronteira:

$$n_\alpha f_{\xi^i_\alpha}(x, u(x)\nabla u(x)) = 0, a.e \text{ em } \Gamma_1, \forall i \in \{1, ..., N\}.$$

2.10 ANÁLISE CONVEXA

Esta seção enuncia ferramentas elementares para se entender e manipular problemas de convexidade. Problemas nos quais a função objetivo e o conjunto factível são ambos convexos e fornecem estruturas para as quais teoremas decorrentes da análise convexa podem ser generalizados ou usados como base para a construção de novas teorias mais amplas.

Definição 35 (Conjunto convexo)**.** Seja S um subconjunto de um espaço vetorial U. S é convexo se dado $u, v \in S$ então $\lambda u + (1 - \lambda)v \in S, \forall \lambda \in [0, 1]$.

Definição 36 (Envoltória convexa)**.** Se S é um subconjunto de um espaço vetorial U. Definimos o *envelope convexo* de S, denotado por $Co(S)$ como

$$Co(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i : n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, u_i \in S, \forall i\{1, ...n\} \right\}$$

Definição 37. Seja S um subconjunto convexo de um espaço vetorial U. Um funcional $F : S \to \overline{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R} \cup +/-\infty\}$ é dito ser convexo se $F(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda F(u) + (1-\lambda)F(v)$, $\forall u, v \in S, \lambda \in [0,1]$

Definição 38. Dado $F : U \to \overline{\mathbb{R}}$ definimos seu *epígrafo*, denotado por $Epi(F)$ como

$$Epi(F) = \{(u,a) \in U \times \mathbb{R} : a \geq F(u)\}.$$

Definição 39. Seja U um espaço de Banach. Considere a topologia fraca $\sigma(U, U^*)$ e seja $F : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Tal função é dita ser fracamente semicontínua inferiormente se, $\forall \lambda$ tal que $\lambda < F(u)$, existe uma vizinhança fraca $V_\lambda(u) \in \sigma(U, U^*)$ tal que

$$F(v) > \lambda, \forall v \in V_\lambda(u).$$

Teorema 2.32. *Seja U um espaço de Banach e seja $F : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *F é fracamente semicontínua inferiormente (f.s.c.i.).*
2. *$Epi(F)$ é fechado em $U \times \mathbb{R}$ com a topologia produto entre $\sigma(U, U^*)$ e a topologia usual em R.*
3. *$H_\gamma^F = \{u \in U : F(u) \leq \gamma\}$ é fechado em $\sigma(U, U^*)$, $\forall \gamma \in \mathbb{R}$.*
4. *O conjunto $G_\gamma^F = \{u \in U : F(u) > \gamma\}$ é aberta em $\sigma(U, U^*), \forall \gamma \in \mathbb{R}$.*
5. $$\liminf_{v \rightharpoonup u} F(v) \geq F(u), \forall u \in U.$$

Corolário 2.32.1. Cada função convexa s.c.i. $F : U \to \overline{\mathbb{R}}$ é também f.s.c.i.

Definição 40. Seja U um espaço de Banach. Um funcional $F : U \to \mathbb{R}$ é dito ser contínuo afim se existe $u^* \in U^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(u) = \langle u, u^* \rangle_U + \alpha, \forall u \in U$$

.

Definição 41. $(\Gamma(U))$ Seja U espaço de Banach. Dizemos que $F : U \to \overline{\mathbb{R}}$ pertence $\Gamma(U)$ e escrevemos $F \in \Gamma(U)$ se F pode ser representado pontualmente como o supremo de uma família de funções contínuas afins. Se $F \in \Gamma(U)$ e $F(u) \in \mathbb{R}$ para algum $u \in U$ então escrevemos $F \in \Gamma_0(U)$.

Proposição 10. Seja U um espaço de Banach, então $F \in \Gamma(U)$ se e somente se F é convexa e s.c.i., ainda se F toma o valor $-\infty$, então $F \equiv -\infty$.

Definição 42 (Envelope Convexo)**.** Seja U um espaço de Banach. Dado $F: U \to \bar{\mathbb{R}}$, definimos seu envelope convexo, denotado por $CF: U \to \bar{\mathbb{R}}$ por

$$CF(u) = \sup_{(u^*,\alpha)\in A^*} \{\langle u, u^*\rangle + \alpha\},$$

onde

$$A^* = \{(u^* \alpha) \in U^* \times \mathbb{R} : \langle v, u^*\rangle_U + \alpha \leq F(v), \forall v \in U\}.$$

Definição 43 (Funcional Polar)**.** Seja U um espaço de Banach. Dado $F: U \to \overline{\mathbb{R}}$, definimos seu funcional polar, denotado por $F^*(u^*): U^* \to \overline{\mathbb{R}}$, por:

$$F^*(u^*) = \sup_{u\in U}\{\langle u, u^*\rangle_U - F(u)\},$$

$\forall u^* \in U^*$.

Definição 44. (Funcional Bipolar) Dado $F: U \to \overline{\mathbb{R}}$, definimos o funcional bipolar associado, denotado por $F^{**}: U \to \overline{\mathbb{R}}$, como

$$F^{**}(u) = \sup_{u^*\in U^*}\{\langle u, u^*\rangle_U - F^*(u^*)\}, \forall u \in U.$$

Definição 45 (Sub-gradientes)**.** Dado $F: U \to \bar{\mathbb{R}}$ definimos o conjunto de *sub-gradientes* de F em u, denotado por $\partial F(u)$ como

$$\partial F(u) = \{u^* \in U^*, \text{ tal que } \langle v - u, u^*\rangle_U + F(u) \leq F(v), \forall v \in U\}.$$

Proposição 11. Seja $F: U \to \bar{R}$ uma função finita e contínua em $u \in U$. Então $\partial F(u) \neq \emptyset$.

Proposição 12. Para o funcional $G: U \to \mathbb{R}$, definido por $G(u) = \int_S g(x, u(x))dS$, onde $U = U^* = [L^2(S)]^l$. Podemos expressar $G^*: U^* \to \bar{\mathbb{R}}$ como

$$G^*(u^*) = \int_S g^*(x, u^*(x))dS$$

onde $g^*(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{R}^l}(y.\eta - g(x,\eta))$ quase toda parte em S.

2.10.1 Transformada de Legendre

A Transformada de Legendre toma uma variável x no domínio de uma função g, e a relaciona à uma nova variável y^* de um funcional definido como segue.

Definição 46 (Transformada de Legendre e Funcional associado)**.** Considere uma função diferenciável $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sua transformada de Legendre, denotada por g_L^* : $R_L^n \to \mathbb{R}$, é expressa como:

$$g_L^*(y^*) = x_{0^i}.y_i^* - g(x_0),$$

onde x_0 é a solução do sistema:

$$y_i^* = \frac{\partial g(x_0)}{\partial x_i}$$

e $R_L^n = \{y^* \in \mathbb{R}^n$ tal que o sistema acima tem solução única $\}$.

Além disso, considerando o funcional $G: Y \to \mathbb{R}$ definido como $G(v) = \int_S g(v)dS$, definimos o funcional transformada de Legendre associado, denotado por $G_L^* : Y_L^* \to \mathbb{R}$ como

$$G_L^*(v^*) = \int_S g_L^*(v^*)dS,$$

onde $Y_L^* = \{v^* \in Y^* : v^*(x) \in R_L^n, a.e.$ em $S\}$.

Observamos que, quando a função g é também convexa, o funcional de Legendre coincide com o Funcional Polar.

Proposição 13. Considerando as últimas definições, suponha que para cada $y^* \in R_L^n$, finalmente em uma vizinhança (de y^*) é possível definir uma função diferenciável pela expressão:

$$x_0(y^*) = \left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]^{-1}(y^*).$$

Então podemos escrever

$$y_i^* = \frac{\partial g(x_0)}{\partial x_i} \Leftrightarrow x_{0^i} = \frac{\partial g_L^*(y^*)}{\partial y_i^*}, \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

Teorema 2.33. *Considere o funcional $J: U \to \bar{\mathbb{R}}$ definido como $J(u) = (G \circ \Lambda)(u) - \langle u, f \rangle_U$ onde $\Lambda(\{\Lambda_i\}) : U \to Y$ $(i \in \{1, ..., n\})$ é um operador linear contínuo e $G: Y \to \mathbb{R}$ é um funcional que pode ser expresso como $G(v) = \int_S g(v)dS, \forall v \in Y$ (aqui $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável que adimite transformada de Legendre denotada por $g_L^* : R_L^n \to \mathbb{R}$. Isto é, a hipótese mencionada na proposição anterior é satisfeita).*

Sob tais suposições temos

$$\delta J(u_0) = 0 \Leftrightarrow \delta(-G_L^*(v_0^*) + \langle u_0, \Lambda^* v_0^* - f \rangle_U) = 0,$$

onde $v_0^* = \dfrac{\partial G(\Lambda(u_0))}{\partial v}$ *é suposto ser tal que* $v_0^* \in R_L^n, a.e.$ *em S e neste caso*

$$J(u_0) = -G_L^*(v_0^*).$$

2.11 DUALIDADE EM OTIMIZAÇÃO CONVEXA

Nesta seção iremos associar à um problema de minimização $\mathscr{P}$, o problema primal, um problema de maximização $\mathscr{P}^*$, denominado problema dual de $\mathscr{P}$ e examinaremos a relação entre esses dois problemas (a comparação do ínfimo com o supremo, e a relação entre as soluções, em particular).

Sejam U e Y espaços de Banach. Dado $F: U \to \mathbb{R}$ ($F \in \Gamma_0(U)$). Nós definimos o problema $\mathscr{P}$ como:

$$\mathscr{P}: \text{ minimize } F(u) \text{ em } U.$$

Dizemos que $u_0 \in U$ é uma solução do problema $\mathscr{P}$ se $F(u_0) = \inf_{u \in U} F(u)$. Considere (ou defina) uma função $\phi: U \times Y \to \mathbb{R}$ tal que

$$\phi(u,p) \in \mathbb{R} \text{ e } \phi(u,0) = F(u)$$

.

Nós definimos o problema $\mathscr{P}^*$ como:

$$\mathscr{P}^*: \text{ maximize } -\phi^*(0,p^*) \text{ em } Y^*$$

Observe que

$$\phi^*(0,p^*) = \sup_{(u,p) \in U \times Y} \{\langle 0,u\rangle_U + \langle p,p^*\rangle_Y - \phi(u,p)\} \geq -\phi(u,0),$$

ou

$$\inf_{u \in U} \{\phi(u,0)\} \geq \sup_{p^* \in Y^*} \{-\phi^*(0,p^*)\}.$$

As provas das proposições a seguir é apresentada por (EKELAND I.; TÉMAM, 1999).

Proposição 14. Considere $\phi \in \Gamma_0(U \times Y)$. Se definimos

$$h(p) = \inf_{u \in U} \{\phi(u,p)\},$$

então h é convexo.

Prova. Temos que mostrar primeiro que dados $p, q \in Y$ e $\lambda \in (0,1)$, temos

$$h(\lambda p + (1-\lambda)q) \leq \lambda h(p) + (1-\lambda)h(q).$$

Se $h(p) = +\infty$ ou $h(q) = +\infty$, já está feito. Portanto assumimos que $h(p) < +\infty$ e $h(q) < +\infty$. Para cada $a > h(p)$ existe $u \in U$ tal que

$$h(p) \leq \phi(u,p) \leq a,$$

e se $b > h(q)$, existe $v \in U$ tal que

$$h(q) \leq \phi(v,q) \leq b$$

Portanto

$$h(\lambda p + (1-\lambda)q) \leq \inf_{w \in U}\{\phi(w, \lambda p + (1-\lambda)q)\}$$

$$\leq \phi(\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda p + (1-\lambda)q) \leq \lambda\phi(u,p) + (1-\lambda)\phi(v,q)$$

$$\leq \lambda a + (1-\lambda)b.$$

Fazendo $a \to h(p)$ e $b \to h(q)$ obtemos

$$h(\lambda p + (1-\lambda)q) \leq \lambda h(p) + (1-\lambda)h(q).$$

■

Proposição 15. Para h como acima, temos $h^*(p^*) = \phi^*(0,p^*), \forall p^* \in Y^*$ de modo que

$$h^{**}(0) = \sup_{p^* \in Y^*}\{-\phi^*(0,p^*)\}.$$

Prova. Observe que, por definição

$$h^*(p^*) = \sup_{p \in Y}\{\langle p, p^*\rangle_Y - h(p)\}$$

$$= \sup_{p \in Y}\{\langle p, p^*\rangle_Y - \inf_{u \in U}\{\phi(u,p)\}\}$$

$$= \sup_{p \in Y}\{\langle p, p^*\rangle_Y + \sup_{u \in U} -\phi(u,p)\}$$

$$= \sup_{p \in Y}\sup_{u \in U}\{\langle p, p^*\rangle_Y - \phi(u,p)\}$$

$$= \sup_{(u,p) \in (U \times Y)}\{\langle p, p*\rangle_Y - \phi(u,p)\}$$

$$= \phi^*(0,p^*)$$

de modo que disto e da definição de bipolar temos

$$h^{**}(0) = \sup_{p^* \in Y}\{\langle 0, p^*\rangle_Y - \phi^*(0,p^*)\} = \sup_{p^* \in Y^*}\{-\phi^*(0,p^*)\}.$$

■

Proposição 16. O conjunto de soluções do problema $\mathscr{P}^*$ (o problema dual) é idêntico a $\partial h^{**}(0)$

Prova. Lembre que da definição de sub-gradiente, o sub gradiente de h^{**} em 0, denotado por $\partial h^{**}(0)$ é o seguinte subconjunto de Y^*

$$\partial h^{**}(0) = \{p^* \in Y^* | \langle p-0, p^*\rangle_Y + h^{**}(0) \leq h^{**}(p),\ \forall\ p \in Y\},$$

que é equivalente a

$$\partial h^{**}(0) = \{p^* \in Y^* | h^{**}(0) \leq h^{**}(p) - \langle p, p^*\rangle_Y,\ \forall\ p \in Y\},$$

Se tomarmos p_0^* solução do problema dual e mostrarmos que cumpre a condição $h^{**}(0) \leq h^{**}(p) - \langle p, p_0^*\rangle_Y$, $\forall p \in Y$ e reciprocamente, então teremos provado a proposição.

Assim, considere $p_0^* \in Y^*$ uma solução do problema $\mathscr{P}^*$, isto é, p_0^* maximiza $-\phi^*(0, P^*)$ em Y^*,

$$-\phi^*(0, p_0^*) \geq -\phi^*(0, p^*), \forall p^* \in Y^*,$$

que é equivalente, pela proposição anterior a

$$-h^*(p_0^*) \geq -h(p^*),\ \forall p^* \in Y^*,$$

e portanto

$$-h(p_0^*) = \sup_{p^* \in Y^*} \{\langle 0, p^*\rangle_Y - h^*(p^*)\}.$$

E disso concluímos que

$$-h^*(p_0^*) = h^{**}(0).$$

Como $h^{**}(p) = h(p)$, $\forall p \in Y$,

$$-h^*(p_0^*) = \inf_{p \in Y} \{h(p) - \langle p, p_0^*\rangle_Y\} = \inf_{p \in Y} \{h^{**}(p) - \langle p, p_0^*\rangle_Y\} = h^{**}(0)$$

o que finalmente equivale a

$$p_0^* \in \partial h^{**}(0).$$

Assim, p_0^* é solução do problema dual se e só se, também é subgradiente de h^{**} em 0. ■

Teorema 2.34. *Considere* $\phi : U \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ *convexo. Assuma* $\inf_{u \in U} \{\phi(u, 0)\} \in \mathbb{R}$ *e existe* $u_0 \in U$ *tal que* $p \to \phi(u_0, p)$ *é finito e contínuo em* $0 \in Y$*. Então*

$$\inf_{u \in U}\{\phi(u,0)\} = \sup_{p^* \in Y^*}\{-\phi^*(0,p^*)\}$$

e o problema dual tem finalmente uma solução.

Prova. Da hipótese $h(0) \in \mathbb{R}$ e como mostramos acima, h é convexa. Como a função $p \to \phi(u_0,p)$ é convexa e contínua em $0 \in Y$ existe uma vizinhança $\mathbb{V}$ de zero em Y tal que

$$\phi(u_0,p) \leq M < +\infty, \forall p \in \mathcal{V},$$

para algum $M \in \mathbb{R}$. Portanto, podemos escrever

$$h(p) = \inf_{u \in U}\{\phi(u,p)\} \leq \phi(u_0,p) \leq M, \forall p \in \mathcal{V}$$

Consequentemente, h é contínua em 0. Portanto, h é sub-diferenciável em 0, que significa $h(0) = h^{**}(0)$. Assim o problema dual tem solução e

$$h(0) = \inf_{u \in}\{\phi(u,0)\} = \sup_{p^* \in Y^*}\{-\phi^*(0,p^*)\} = h^{**}(0).$$

■

Agora aplicamos os últimos resultados para $\phi(u,p) = G(\Lambda u + p) + F(u)$, onde $\Lambda : U \to Y$ é um operador linear contínuo de quem o operador adjunto é denotado por $\Lambda^* : Y^* \to U^*$.

Teorema 2.35. *Suponha que U é um espaço de Banach reflexivo e defina $J : U \to \mathbb{R}$ por*

$$J(u) = G(\Lambda u) + F(u) = \phi(u,0),$$

onde $\lim J(u) = +\infty$ *como* $\|u\|_U \to \infty$ *e* $F \in \Gamma_0(U), G \in \Gamma_0(Y)$. *Também suponha que existe $\hat{u} \in U$ tal que $J(\hat{u}) < +\infty$ com a função $p \to G(p)$ contínua em $\Lambda\hat{u}$. Sob tais hipóteses, existe $u_0 \in U$ e $p_0^* \in Y^*$ tal que*

$$J(u_0) = \min_{u \in U}\{J(u)\} = \max_{p^* \in Y^*}\{-G^*(p^*) - F^*(-\Lambda^* p^*)\}$$

$$= -G^*(p_0^*) - F^*(-\Lambda^* p_0^*)$$

Prova. A existência de soluções para o problema primal segue do método do cálculo de variações. Isto é, considerando uma sequência minimizando, por cima (hipótese de coercividade), tal sequência é limitada e tem uma subsequência fracamente convergente para algum $u_0 \in U$. Finalmente da semicontinuidade inferior da formulação primal, podemos concluir que u_0 é mínimo. As outras conclusões seguem observando que

$$\phi^*(0,p^*) = \sup_{u\in U, p\in Y}\{\langle p,p^*\rangle_Y - G(\Lambda u+p) - F(u)\}$$

$$= \sup_{u\in U, q\in Y}\{\langle q,p^*\rangle_Y - G(q) - \langle \Lambda u,p^*\rangle_Y - F(u)\},$$

de modo que

$$\phi^*(0,p^*) = G^*(p^*) + \sup_{u\in U}\{-\langle u,\Lambda^* p^*\rangle_U - F(u)\}$$

$$= G^*(p^*) + F^*(-\Lambda^* p^*).$$

Portanto

$$\inf_{u\in U}\{\phi(u,0)\} = \sup_{p^*\in Y^*}\{-\phi^*(0,p^*)\}$$

e as soluções u_0 e p_0^* para o problema primal e dual, respectivamente, implica que

$$J(u_0) = \min_{u\in U}\{J(u)\} = \max_{p^*\in Y^*}\{-G^*(p^*) - F^*(-\Lambda^* p^*)\}$$
$$= -G^*(p_0^*) - F^*(-\Lambda^* p_0^*).$$

■

3 A ABORDAGEM DUAL-CONVEXA PARA OTIMIZAÇÃO NÃO-CONVEXA

Apresentamos na seção 2.11 como podemos tratar um problema de otimização na perspectiva dual. Nesta perspectiva, a solução para o problema dual fornece um limite inferior para a solução do problema primal $\mathscr{P}$, mas ainda, quando o problema $\mathscr{P}$ trata-se da minimização de um funcional convexo, então dizemos que os problemas são *equivalentes*, isto é, as soluções dos problemas primal e dual são as mesmas.

Resumidamente, na dualidade em otimização convexa tratamos um problema $\mathscr{P}$ associando-o à um problema derivado, o problema dual. Em geral a manipulação do problema dual pode ser mais simples, justificando o uso deste. No entanto, resolver problemas de otimização não-convexa exige a ampliação dessa teoria. Neste texto, estendemos e generalizamos um resultado conhecido, publicado por J.F. Toland em 1979 para otimização variacional não-convexa, mais especificamente, para a diferença de dois funcionais convexos, a chamada abordagem de otimização dual-convexa(D.C.), que baseia-se na suposição de que o funcional não-convexo a ser minimizado, possa ser escrito na forma de uma diferença entre dois funcionais convexos.

Neste capítulo, primeiramente apresentamos o resultado obtido por Toland, onde dados dois funcionais F e G, tal que existe um α real que é a maior das cotas inferiores das diferenças $G-F$ em U, temos também que α é a maior cota das cotas inferiores para as diferenças $F^*- G^*$ em U^*, isto é, o ínfimo do conjunto dessas diferenças tomadas em U^*, aqui F^* é o polar de F e G^* o polar de G. Com isso, estamos interessados principalmente que α seja também mínimo das diferenças em algum u_0 em U, e além disso, F possua sub-gradiente em u_0 não-vazio. A seguir, o Teorema 3.2 antecede a formulação do nosso resultado principal, descrito no capítulo 4, e apresenta o caso real para um princípio de dualidade adequado para uma classe de problemas variacionais não-convexos.

3.1 UM PRINCÍPIO DE DUALIDADE PARA OTIMIZAÇÃO NÃO-CONVEXA

Teorema 3.1 (Toland, 1979)**.** *Seja U um espaço de Banach e sejam $F, G : U \to \mathbb{R}$ funcionais tais que $\inf_{u \in U} \{G(u) - F(u)\} = \alpha \in \mathbb{R}$. Sob tais hipóteses*

$$F^*(u^*) - G^*(u^*) \geqslant \alpha, \ \forall \ u^* \in U^*.$$

Além disso suponha que $u_0 \in U$ seja tal que $G(u_0) - F(u_0) = \min_{u \in U}\{G(u) - F(u)\} = \alpha$. Assuma também que $u_0^* \in \partial F(u_0)$. Sob tais hipóteses $F^*(u_0^*) - G^*(u_0^*) = \alpha$ de modo que,

$$G(u_0) - F(u_0) = min_{u \in U}\{G(u) - F(u)\} = \min_{u^* \in U^*} \{F^*(u^*) - G^*(u^*)\} = F^*(u_0^*) - G(u_0^*).$$

Prova. Das hipóteses,

$$\inf_{u \in U}\{G(u) - F(u)\} = \alpha \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$G(u) - F(u) \geq \alpha, \ \forall u \in U. \tag{3.1}$$

Portanto para $u^* \in U^*$, temos que (somando zero),

$$-\langle u, u^* \rangle_U + G(u) + \langle u, u^* \rangle_U - F(u) \geqslant \alpha, \ \forall \ u \in U.$$

Assim,

$$-\langle u, u^* \rangle_U + G(u) + \sup_{u \in U}\{\langle u, u^* \rangle_U - F(u)\} \geqslant -\langle u, u^* \rangle_U + G(u) + \langle u, u^* \rangle_U - F(u) \geqslant \alpha, \ \forall \ u \in U,$$

de modo que,

$$-\langle u, u^* \rangle_U + G(u) + F^*(u^*) \geqslant \alpha, \ \forall \ u \in U,$$

assim,

$$\inf_{u \in U}\{-\langle u, u^* \rangle_U + G(u)\} + F^*(u^*) \geqslant \alpha,$$

logo,

$$-\sup_{u \in U}\{\langle u, u^* \rangle_U - G(u)\} + F^*(u^*) \geqslant \alpha,$$

isto é,

$$-G^*(u^*) + F^*(u^*) \geqslant \alpha, \forall u^* \in U^*.$$

E assim temos

$$\inf_{u^* \in U^*}\{F^*(u^*) - G^*(u^*)\} \geq \alpha. \tag{3.2}$$

Também das hipóteses,

$$G(u_0) - F(u_0) \leqslant G(u) - F(u), \forall u \in U. \tag{3.3}$$

Por outro lado de $u_0^* \in \partial F(u_0)$ obtemos

$$\langle u_0, u_0^* \rangle_U - F(u_0) \geqslant \langle u, u_0^* \rangle_U - F(u), \forall u \in U, \tag{3.4}$$

de modo que,

$$-F(u) \leqslant \langle u_0 - u, u_0^* \rangle_U - F(u_0), \ \forall \ u \in U.$$

Disto e 3.3 ,

$$G(u_0)-F(u_0)\leqslant G(u)-F(u)\leqslant G(u)+\langle u_0-u,u_0^*\rangle_U-F(u_0),\ \forall\ u\in U,$$

isto é,

$$G(u_0)-F(u_0)\leqslant G(u)+\langle u_0-u,u_0^*\rangle_U-F(u_0),\ \forall\ u\in U,$$

de modo que,

$$\langle u_0,u_0^*\rangle_U-G(u_0)\geqslant\langle u,u_0^*\rangle_U-G(u),\ \forall\ u\in U,$$

ou seja,

$$G^*(u_0^*)=\sup_{u\in U}\{\langle u,u_0^*\rangle_U-G(u)\}\leqslant\langle u_0,u_0^*\rangle_U-G(u_0).$$

Da definição de supremo (em particular para $u_0\in U$) temos

$$G^*(u_0^*)=\sup_{u\in U}\{\langle u,u_0^*\rangle_U-G(u)\}\geqslant\langle u_0,u_0^*\rangle_U-G(u_0).$$

Logo,

$$G^*(u_0^*)=\langle u_0,u_0^*\rangle_U-G(u_0).$$

Temos também,

$$F^*(u_0^*)=\langle u_0,u_0^*\rangle_U-F(u_0).$$

Logo,

$$F^*(u_0^*)-G^*(u_0^*)=\langle u_0,u_0^*\rangle_U-F(u_0)-\langle u_0,u_0^*\rangle_U+G(u_0)=G(u_0)-F(u_0)=\min_{u\in U}\{G(u)-F(u)\}=\alpha,$$

isto é,

$$F^*(u_0^*)-G^*(u_0^*)=\alpha.$$

De modo que, disto e de 3.2,

$$G(u_0)-F(u_0)=\min_{u\in U}\{G(u)-F(u)\}=\alpha=\min_{u^*\in U^*}\{F^*(u^*)-G^*(u^*)\}=F^*(u_0^*)-G^*(u_0^*).$$

■

3.2 FORMULAÇÃO D.C. SOBRE AS EQUAÇÕES GINZBURG-LANDAU: O CASO REAL MAIS SIMPLES

As equações G.L, o caso real, são condições necessárias para a solução do problema $\mathscr{P}$, onde

$$\text{Problema } \mathscr{P}\text{: encontre } \phi_0 \in U \text{ tal que } J(\phi_0) = \min_{u \in U}\{J(\phi)\}$$

e

$$J(\phi) = \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \nabla\phi.\nabla\phi dx + \frac{\alpha}{4}\int_\Omega |\phi|^4 dx - \frac{\beta}{2}\int_\Omega |\phi|^2 dx - \langle\phi, f\rangle_{L^2},$$

A solução para o sistema de equações G-L existe como mostra Botelho (BOTELHO, 2014).

Quanto à formulação D.C., propõe-se reescrever o funcional $J : U \to \mathbb{R}$, onde $U = \{\phi \in W^{1,2} : \phi = 0 \text{ em } \partial\Omega\} = W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{C})$, como $J(\phi) = G(\phi) - F(\phi)$, em que

$$G(\phi) = \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \nabla\phi.\nabla\phi dx + \frac{K}{2}\int_\Omega |\phi|^2 dx - \langle\phi, f\rangle_{L^2}$$

e

$$F(\phi) = -\frac{\alpha}{4}\int_\Omega |\phi|^4 dx + \frac{\beta}{2}\int_\Omega |\phi|^2 dx + \frac{K}{2}\int_\Omega |\phi|^2 dx,$$

para então resolver o problema $\mathscr{P}$ através da abordagem D.C. Para isso incluímos o seguinte teorema

Teorema 3.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, limitado, conexo com uma fronteira regular (Lipschitziana) denotada por $\partial\Omega$. Considere o funcional $J : U \to \mathbb{R}$ onde*

$$J(\phi) = \tfrac{\gamma}{2}\int_\Omega \nabla\phi.\nabla\phi dx + \tfrac{\alpha}{4}\int_\Omega |\phi|^4 dx - \tfrac{\beta}{2}\int_\Omega |\phi|^2 dx - \langle\phi, f\rangle_{L^2}$$

onde $\gamma > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ U = \{\phi \in W^{1,2} : \phi = 0 \text{ em } \partial\Omega\} = W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{C}),$ e $f \in L^2(\Omega)$.
Denotemos,

$$G(\phi) = \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \nabla\phi.\nabla\phi dx + \frac{K}{2}\int_\Omega |\phi|^2 dx - \langle\phi, f\rangle_{L^2}$$

$$F(\phi) = -\frac{\alpha}{4}\int_\Omega |\phi|^4 dx + \frac{\beta}{2}\int_\Omega |\phi|^2 dx + \frac{K}{2}\int_\Omega |\phi|^2 dx$$

para $K > 0$ suficientemente grande de modo que G e F são convexos em U_1 e

$$J(\phi) = G(\phi) - F(\phi).$$

Defina $U_1 = \{\phi \in U : \|\phi\|_\infty \leqslant \sqrt[4]{K}\}$.
E assuma que $\phi_0 \in U$ é tal que $\inf_{\phi \in U}\{J(\phi)\} = J(\phi_0)$ e $\phi_0 \in U_1$.

Sob tais hipóteses, denotando,

$$G^*(u^*) = \sup_{\phi \in U_1} \{\langle \phi, u^* \rangle_{L^2} - G(\phi)\},$$

$$F^*(u^*) = \sup_{\phi \in U_1} \{\langle \phi, u^* \rangle_{L^2} - F(\phi)\},$$

e

$$J^*(u^*) = -G^*(u^*) + F^*(u^*).$$

temos,

$$J(\phi_0) = \inf_{\phi \in U} \{J(\phi)\} = \inf_{u^* \in U^*} \{-G^*(u^*) + F^*(u^*)\} = -G^*(u_0^*) + F^*(u_0^*),$$

onde $u_0^* = -\nabla^2 \phi_0 + k\phi_0 - f$.

Prova. Como F, G são funcionais tais que

$$\inf_{u \in U} \{G(u) - F(u)\} = \alpha \in \mathbb{R},$$

do Teorema de Toland (1979) temos

$$F^*(u^*) - G^*(u^*) \geqslant \alpha = \inf_{\phi \in U_1} J(\phi), \forall u^* \in U^*$$

Observe que

$$G^*(u^*) = \sup_{\phi \in U_1} \left\{ \langle \phi, u^* \rangle_{L^2} - G(\phi) \right\}$$

.

$$= \sup_{\phi \in U_1} \left\{ \langle \phi, u^* \rangle_{L^2} - \frac{\gamma}{2} \int_\Omega \nabla\phi . \nabla\phi dx - \frac{K}{2} \int_\Omega |\phi|^2 dx + \langle \phi, f \rangle_{L^2} \right\}$$

Como tal funcional é quadrático e convexo, este último supremo é atingido mediante à equação

$$u^* + \gamma \nabla^2 \hat{\phi} - K\hat{\phi} + f = 0 \text{ em } \Omega,$$

isto é, em Ω se $\hat{\phi} \in U_1$.

$$\hat{\phi} = (KI_d - \gamma \nabla^2)^{-1} (u^* + f).$$

De modo que neste caso,

$$G^*(u^*) = \langle \hat{\phi}, u^* \rangle_{L^2} - G(\hat{\phi})$$

$$= \int_\Omega \hat{\phi} u^* dx - \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \nabla\hat{\phi}.\nabla\hat{\phi} dx - \frac{K}{2}\int_\Omega |\hat{\phi}|^2 dx + \langle \hat{\phi}, f\rangle_{L^2}$$

$$= \int_\Omega \hat{\phi} u^* dx - \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \nabla\hat{\phi}.\nabla\hat{\phi} dx - \frac{K}{2}\int_\Omega |\hat{\phi}|^2 dx + \int_\Omega \hat{\phi} f dx$$

$$= \int_\Omega \hat{\phi}(u^* + f) dx - \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \nabla\hat{\phi}.\nabla\hat{\phi} dx - \frac{K}{2}\int_\Omega |\hat{\phi}|^2 dx$$

$$= \int_\Omega \hat{\phi}(u^* + f) dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \gamma\nabla\hat{\phi}.\nabla\hat{\phi} dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K\hat{\phi}^2 dx$$

$$= \int_\Omega \hat{\phi}(u^* + f) dx - \frac{1}{2}\int_\Omega -\gamma\hat{\phi}\nabla^2\hat{\phi} dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K\hat{\phi}^2 dx$$

$$= \int_\Omega \hat{\phi}(u^* + f) dx - \frac{1}{2}\int_\Omega -\gamma\hat{\phi}\nabla^2\hat{\phi} + K\hat{\phi}^2 dx$$

$$= \int_\Omega \hat{\phi}(u^* + f) dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \hat{\phi}(k\hat{\phi} - \gamma\nabla^2\hat{\phi}) dx$$

$$= \int_\Omega \hat{\phi}(u^* + f) dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \hat{\phi}(u^* + f) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \hat{\phi}(u^* + f) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega [(KI_d - \gamma\nabla^2)^{-1}(u^* + f)](u^* + f) dx.$$

Similarmente temos,

$$F^*(u^*) = \sup_{\phi \in U_1} \left\{ \langle \phi, u^* \rangle_{L^2} - F(\phi) \right\}$$

$$= \sup_{\phi \in U_1} \left\{ \langle \phi, u^* \rangle_{L^2} + \frac{\alpha}{4}\int_\Omega |\phi|^4 dx - \frac{\beta}{2}\int_\Omega |\phi|^2 dx - \frac{K}{2}\int_\Omega |\phi|^2 dx \right\}$$

Observe que para $K > 0$ suficientemente grande, este último supremo é atingido mediante a equação:

$$u^* + \alpha\hat{\phi}^3 - \beta\hat{\phi} - K\hat{\phi} = 0$$

em Ω, se $\hat{\phi} \in U_1$.

Assim,

$$F^*(u^*) = \langle \hat{\phi}, u^* \rangle_{L^2} - F(\hat{\phi}).$$

Lembre que,

$$J^*(u_0^*) = -G^*(u_0^*) + F^*(u_0^*).$$

e portanto

$$\delta J^*(u_0^*) = \delta(-G^*(u_0^*) + F^*(u_0^*)) = -\frac{\partial G^*(u_0^*)}{\partial u^*} + \frac{\partial F^*(u_0^*)}{\partial u^*}.$$

onde

$$\frac{\partial G^*(u_0^*)}{\partial u^*} = (KI_d - \gamma\nabla^2)^{-1}(u_0^* + f) = \phi_0$$

de modo que

$$G^*(u_0^*) = \langle \phi_0, u_0^* \rangle_{L^2} - G(u_0)$$

e

$$\delta J^*(u_0^*) = -\phi_0 + \frac{\partial F^*(u_0^*)}{\partial u^*}.$$

De $\delta J(\phi_0) = 0$, temos em Ω

$$-\gamma\nabla^2\phi_0 + \alpha\phi_0^3 - \beta\phi_0 - f = 0.$$

Portanto em Ω,

$$-\gamma\nabla^2\phi_0 + K\phi_0 - f + \alpha\phi_0^3 - \beta\phi_0 - K\phi = 0.$$

Consequentemente, em Ω,

$$u_0^* + \alpha\phi_0^3 - \beta\phi_0 - K\phi_0 = 0,$$

isto é,

$$u_0^* = -\alpha\phi_0^3 + \beta\phi_0 + K\phi_0 = \frac{\partial F(\phi_0)}{\partial \phi}.$$

Disto e das propriedades da transformada de Legendre, temos

$$\phi_0 = \frac{\partial F^*(u_0^*)}{\partial u^*}.$$

De modo que

$$F^*(u_0^*) = \langle \phi_0, u_0^* \rangle_{L^2} - F(u_0)$$

e

$$\delta J^*(u_0^*) = -\phi_0 + \frac{\partial F^*(u_0^*)}{\partial u^*} = 0.$$

Novamente, usando as propriedades da transformada de Legendre, obtemos

$$-G^*(u_0^*)+F^*(u_0^*)=J^*(u_0^*)=J(\phi_0)=G(\phi_0)-F(\phi_0)$$

e como mostramos no início que

$$\inf_{\phi\in U}\{J(\phi)\}=\inf_{u^*\in U^*}\{-G^*(u^*)+F^*(u^*)\},$$

podemos concluir que

$$\begin{aligned}&-G^*(u_0^*)+F^*(u_0^*)=J^*(u_0^*)=J(\phi_0)\\&=\inf_{\phi\in U}\{J(\phi)\}=\inf_{u^*\in U^*}\{-G^*(u^*)+F^*(u^*)\}.\end{aligned}$$

■

4 PRINCÍPIO D.C. PARA O SISTEMA G.L NA PRESENÇA DE UM CAMPO E POTENCIAL MAGNÉTICO

A existência de um minimizador global para o funcional de energia de Ginzburg-Landau, num sistema em supercondutividade com a presença de um campo e potencial magnético é provado em (BOTELHO, 2014), veja também (GIORGI; SMITS, 2003). A hipótese chave da demonstração é que norma infinito do potencial magnético é limitada, ressaltamos que tal hipótese é físicamente observada. Assim, considere a existência do minimizador. Sobre a teoria de dualidade, seguimos (BIELSKI; GALKA; TELEGA, 1988) e (BIELSKI; TELEGA, 1985), sendo que apesar do fato de o funcional original ser não-convexo, usando uma constante $K>0$ associada e relativos funcionais quadráticos em um domínio devidamente definido, escrevemos o funcional de energia Ginzburg-Landau como a diferença de dois funcionais convexos. Isto é,

$J: U_3 \times U_4 \to \mathbb{R}$, onde

$$J(\phi,\mathbf{A}) = \frac{\gamma}{2}\int_\Omega |\nabla\phi - i\rho\mathbf{A}\phi|^2\,dx + \frac{\alpha}{4}\int_\Omega |\phi|^4\,dx - \frac{\beta}{2}\int_\Omega |\phi|^2\,dx + \frac{1}{8\pi}\|\text{ rot }\mathbf{A}-\mathbf{B}_0\|^2_{2,\Omega_1}.$$

é escrito como

$$J(\phi,\mathbf{A}) = G(\phi,\mathbf{A}) - F(\phi,\mathbf{A}),$$

em que,

$$\begin{aligned} G(\phi,\mathbf{A}) &= \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \nabla\phi\cdot\nabla\phi^*\,dx + \frac{1}{8\pi}\|\text{ rot }\mathbf{A}-\mathbf{B}_0\|^2_{2,\Omega_1} + \frac{K}{2}\int_\Omega |\phi|^2\,dx + \frac{K}{2}\int_{\Omega_1} |\mathbf{A}|^2 dx \\ &+ \frac{K}{2}\int_\Omega \nabla\phi.\nabla\phi^*\,dx, \end{aligned} \tag{4.1}$$

e

$$\begin{aligned} F(\phi,\mathbf{A}) &= -\frac{\alpha}{4}\int_\Omega |\phi|^4\,dx + \frac{\beta}{2}\int_\Omega |\phi|^2\,dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega 2Re[\nabla\phi^*\cdot(i\rho\mathbf{A}\phi)]\,dx - \frac{\gamma}{2}\int_\Omega |\phi|^2|\mathbf{A}|^2\,dx \\ &+ \frac{K}{2}\int_\Omega |\phi|^2\,dx + \frac{K}{2}\int_{\Omega_1} |\mathbf{A}|^2\,dx + \frac{K}{2}\int_\Omega \nabla\phi.\nabla\phi^*\,dx, \end{aligned} \tag{4.2}$$

Analogamente ao feito para o caso real, incluindo agora campo e potencial magnético, aplicamos o obtido no capítulo 3, para o sistema Ginzburg-Landau em supercondutividade, ampliando o novo princípio de dualidade para o modelo com campo e potencial magnético. Na próxima seção, apresentaremos um algoritmo numérico para resolver um sistema específico de equações relacionado ao de Ginzburg-Landau, que neste caso, está associado à supercondutividade na ausência de um campo e potencial magnético, ou seja, para a versão real mais simples do sistema de Ginzburg-Landau em supercondutividade. Destacamos que o procedimento numérico desenvolvido é bastante econômico do ponto de vista computacional, pois envolve a inversão de uma única matriz, adequada para todas as iterações (ou solução do sistema linear correspondente), que em um certo sentido qualitativo, é altamente positiva definida (diagonal dominante positiva).

O princípio de dualidade para o sistema Ginzburg-Landau na presença de um campo e potencial magnético inclui condições suficientes de otimalidade global e é resumido pelo próximo teorema. Notamos que por uma fronteira regular limitada $\partial\Omega$ de Ω, queremos dizer regularidade suficiente para que os teorema das Imersões de Sobolev e o teorema do Traço se mantenham. Observamos também que derivadas aqui são sempre entendidas no sentido distribuicional.

Teorema 4.1. *Sejam $\Omega, \Omega_1 \subset \mathbb{R}^3$, conjuntos abertos, limitados e conexos com fronteira regular (Lipschitziana) denotadas por $\partial\Omega, \partial\Omega_1$ respectivamente. Assuma que $\overline{\Omega} \subset \Omega_1$ e Ω_1 é convexo.*

Seja $U = U_1 \times U_2$ onde $U_1 = W^{1,2}(\Omega;\mathbb{C})$ e $U_2 = W^{1,2}(\Omega_1;\mathbb{R}^3)$.

Seja $K > 0$ uma constante real, suficientemente grande, a ser especificada e defina

$$U_3 = \{\phi \in U_1 \ : \ \|\phi\|_{1,\infty} \leq \sqrt[4]{K}\},$$

e

$$U_4 = \{\mathbf{A} \in U_2 : \|\mathbf{A}\|_{1,\infty} \leq \sqrt[4]{K}, \ \ div\, \mathbf{A} = 0, \ \ em \ \ \Omega_1 \ \ e \ \ \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0, \ \ em \ \ \partial\Omega_1\}.$$

Defina também, $J : U_3 \times U_4 \to \mathbb{R}$ como

$$J(\phi, \mathbf{A}) = G(\phi, \mathbf{A}) - F(\phi, \mathbf{A}),$$

onde

$$\begin{aligned} G(\phi,\mathbf{A}) \ &= \ \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla\phi^* \, dx + \frac{1}{8\pi}\| \ rot\, \mathbf{A} - \mathbf{B}_0\|^2_{2,\Omega_1} \\ &+ \frac{K}{2}\int_\Omega |\phi|^2 \, dx + \frac{K}{2}\int_{\Omega_1} |\mathbf{A}|^2 \, dx + \frac{K}{2}\int_\Omega \nabla\phi . \nabla\phi^* \, dx, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F(\phi,\mathbf{A}) \ &= \ -\frac{\alpha}{4}\int_\Omega |\phi|^4 \, dx + \frac{\beta}{2}\int_\Omega |\phi|^2 \, dx \\ &+ \frac{\gamma}{2}\int_\Omega 2Re[\nabla\phi^* \cdot (i\rho\mathbf{A}\phi)] \, dx - \frac{\gamma}{2}\int_\Omega |\phi|^2|\mathbf{A}|^2 \, dx \\ &+ \frac{K}{2}\int_\Omega |\phi|^2 \, dx + \frac{K}{2}\int_{\Omega_1} |\mathbf{A}|^2 \, dx + \frac{K}{2}\int_\Omega \nabla\phi . \nabla\phi^* \, dx, \end{aligned}$$

Neste ponto assumimos que $K > 0$ é grande o suficiente de modo que F e G são convexos em $U_3 \times U_4$.

Aqui nós ressaltamos que

$$J(\phi,\mathbf{A}) = \frac{\gamma}{2}\int_\Omega |\nabla\phi - i\rho\mathbf{A}\phi|^2\,dx + \frac{\alpha}{4}\int_\Omega |\phi|^4\,dx - \frac{\beta}{2}\int_\Omega |\phi|^2\,dx + \frac{1}{8\pi}\|\ rot\ \mathbf{A}-\mathbf{B}_0\|^2_{2,\Omega_1}.$$

Defina também

$$J^*(v_1^*,v_2^*) = F^*(v_1^*,v_2^*) - G^*(v_1^*,v_2^*),$$

onde

$$F^*(v_1^*,v_2^*) = \sup_{(\phi,\mathbf{A})\in U_3\times U_4}\{\langle\phi,v_1^*\rangle_{L^2} + \langle\mathbf{A},v_2^*\rangle_{L^2} - F(\phi,\mathbf{A})\},$$

e

$$G^*(v_1^*,v_2^*) = \sup_{(\phi,\mathbf{A})\in U_3\times U_4}\{\langle\phi,v_1^*\rangle_{L^2} + \langle\mathbf{A},v_2^*\rangle_{L^2} - G(\phi,\mathbf{A})\},$$

$\forall (v_1^*,v_2^*)\in Y_1^*\times Y_2^*$, *onde*

$$Y_1^* = L^2(\Omega;\mathbb{C})$$

e

$$Y_2^* = L^2(\Omega_1;\mathbb{R}^3).$$

Seja $(\phi_0,\mathbf{A}_0)\in U_3\times U_4$ *tal que*

$$\delta J(\phi_0,\mathbf{A}_0) = \mathbf{0}$$

e

$$J(\phi_0,\mathbf{A}_0) = \min_{(\phi,\mathbf{A})\in U_3\times U_4} J(\phi,\mathbf{A}).$$

Sob tais hipóteses, definindo

$$\hat{v}_1^* = -\gamma\nabla^2\phi_0 + K\phi_0 - K\nabla^2\phi_0,$$

e

$$\hat{v}_2^* = \ rot\ (\ rot\ \mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0) + K\mathbf{A}_0,$$

temos que

$$\begin{aligned} J(\phi_0,\mathbf{A}_0) &= \min_{(\phi,\mathbf{A})\in U_3\times U_4} J(\phi,\mathbf{A}) \\ &= \min_{(v_1^*,v_2^*)\in A^*} J^*(v_1^*,v_2^*) \\ &= J^*(\hat{v}_1^*,\hat{v}_2^*), \end{aligned}$$

onde

$$A^* = A_1\cap A_2,$$

$$A_1 = \big\{(v_1^*,v_2^*)\in Y_1^*\times Y_2^*\ :\ \textit{existe}\ (\phi,\mathbf{A})\in U_3\times U_4$$

$$\textit{tal que } v_1^* = \frac{\partial F(\phi,\mathbf{A})}{\partial \phi} \textit{ e } v_2^* = \frac{\partial F(\phi,\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}}\Big\}$$

e

$$\begin{aligned} A_2 &= \Big\{(v_1^*,v_2^*) \in Y_1^* \times Y_2^* : \textit{ tal que } (\phi,\mathbf{A}) \in U_3 \times U_4 \\ &\qquad \textit{tal que } v_1^* = \frac{\partial G(\phi,\mathbf{A})}{\partial \phi} \textit{ e } v_2^* = \frac{\partial G(\phi,\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}}\Big\}. \end{aligned}$$

Prova. De $\delta J(\phi_0,\mathbf{A}_0) = \mathbf{0}$ temos

$$\frac{\partial G(\phi_0,\mathbf{A}_0)}{\partial \phi} - \frac{\partial F(\phi_0,\mathbf{A}_0)}{\partial \phi} = \mathbf{0}, \tag{4.3}$$

e

$$\frac{\partial G(\phi_0,\mathbf{A}_0)}{\partial \mathbf{A}} - \frac{\partial F(\phi_0,\mathbf{A}_0)}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{0}. \tag{4.4}$$

Observe também que

$$\hat{v}_1^* = \frac{\partial G(\phi_0,\mathbf{A}_0)}{\partial \phi} \tag{4.5}$$

e

$$\hat{v}_2^* = \frac{\partial G(\phi_0,\mathbf{A}_0)}{\partial \mathbf{A}}, \tag{4.6}$$

de modo que de (4.3) and (4.5) obtemos

$$\hat{v}_1^* = \frac{\partial F(\phi_0,\mathbf{A}_0)}{\partial \phi}.$$

Similarmente, de (4.4) e (4.6) temos

$$\hat{v}_2^* = \frac{\partial F(\phi_0,\mathbf{A}_0)}{\partial \mathbf{A}}.$$

Disso e da convexidade de G e F, temos

$$F^*(\hat{v}_1^*,\hat{v}_2^*) = \langle \phi_0, \hat{v}_1^* \rangle_{L^2} + \langle \phi_0, \hat{v}_1^* \rangle_{L^2} - F(\phi_0,\mathbf{A}_0) \tag{4.7}$$

e

$$G^*(\hat{v}_1^*,\hat{v}_2^*) = \langle \phi_0, \hat{v}_1^* \rangle_{L^2} + \langle \phi_0, \hat{v}_1^* \rangle_{L^2} - G(\phi_0,\mathbf{A}_0) \tag{4.8}$$

Consequentemente, de (4.7) and (4.8) temos

$$\begin{aligned} J(\phi_0,\mathbf{A}_0) &= G(\phi_0,\mathbf{A}_0) - F(\phi_0,\mathbf{A}_0) \\ &= F^*(\hat{v}_1^*,\hat{v}_2^*) - G^*(\hat{v}_1^*,\hat{v}_2^*) \\ &= J^*(\hat{v}_1^*,\hat{v}_2^*). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Neste ponto, seja $\eta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\eta = \min_{(\phi,\mathbf{A}) \in U_3 \times U_4} J(\phi,\mathbf{A}) = J(\phi_0,\mathbf{A}_0).$$

Consequentemente,

$$J(\phi,\mathbf{A}) = G(\phi,\mathbf{A}) - F(\phi,\mathbf{A}) \geq \eta,\ \forall(\phi,\mathbf{A}) \in U_3 \times U_4.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &-\langle\phi, v_1^*\rangle_{L^2} - \langle\mathbf{A}, v_2^*\rangle_{L^2} + G(\phi,\mathbf{A}) \\ &+\langle\phi, v_1^*\rangle_{L^2} + \langle\mathbf{A}, v_2^*\rangle_{L^2} - F(\phi,\mathbf{A}) \geq \eta,\ \forall(\phi,\mathbf{A}) \in U_3 \times U_4, (v_1^*, v_2^*) \in A^*. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & -\langle\phi, v_1^*\rangle_{L^2} - \langle\mathbf{A}, v_2^*\rangle_{L^2} + G(\phi,\mathbf{A}) + \sup_{(\phi,\mathbf{A})\in U_3\times U_4} \{\langle\phi, v_1^*\rangle_{L^2} + \langle\mathbf{A}, v_2^*\rangle_{L^2} - F(\phi,\mathbf{A})\} \\ = & -\langle\phi, v_1^*\rangle_{L^2} - \langle\mathbf{A}, v_2^*\rangle_{L^2} - G(\phi,\mathbf{A}) + F^*(v_1^*, v_2^*) \geq \eta,\ \forall(\phi,\mathbf{A}) \in U_3 \times U_4, (v_1^*, v_2^*) \in A^*. \end{aligned}$$

Disto, temos

$$\begin{aligned} & \inf_{(\phi,\mathbf{A})\in U_3\times U_4} \{-\langle\phi, v_1^*\rangle_{L^2} - \langle\mathbf{A}, v_2^*\rangle_{L^2} + G(\phi,\mathbf{A})\} + F^*(v_1^*, v_2^*) \\ = & -G^*(v_1^*, v_2^*) + F^*(v_1^*, v_2^*) \geq \eta = J(\phi_0, \mathbf{A}_0),\ \forall(v_1^*, v_2^*) \in A^*. \end{aligned}$$

Disto e de (4.9), obtemos

$$\begin{aligned} J(\phi_0, \mathbf{A}_0) &= \min_{(\phi,\mathbf{A})\in U_3\times U_4} J(\phi,\mathbf{A}) \\ &= \min_{(v_1^*, v_2^*)\in A^*} J^*(v_1^*, v_2^*) \\ &= J^*(\hat{v}_1^*, \hat{v}_2^*), \end{aligned}$$

■

4.1 ALGORITIMO NUMÉRICO

Considere a formulação variacional primal dual

$$J_1(\phi, z^*) = \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \nabla\phi\cdot\nabla\phi dx + \frac{K}{2}\int_\Omega \phi^2 dx - \langle\phi, f\rangle_{L^2} - \langle\phi, z^*\rangle_{L^2} + F^*(z^*).$$

Para uma aproximação finita dimensional para tal problema de diferenças finitas. Considere o seguinte algoritmo:

1. Seja $n = 1$ e para um dado $\phi_1 \in U_1$ específico, defina $z_1^* = -\alpha\phi_1^3 + \beta\phi_1 + K\phi_1$.

2. Calcule $\phi_{n+1} \in U_1$ tal que

$$\phi_{n+1} = \arg\min_{\phi\in U_1} J_1^*(\phi, z_n^*)$$

isto é, ϕ_{n+1} tal que

$$-\gamma\nabla^2\phi_{n+1} + K\phi_{n+1} - f - z_n^* = 0$$

3. Calcule z^*_{n+1} tal que

$$z^*_{n+1} = \arg\min_{z^* \in U_2} J_1^*(\phi_{n+1}, z^*),$$

que é, z^*_{n+1} tal que

$$-\phi_{n+1} + \frac{\partial F^*(z^*_{n+1})}{\partial z^*} = 0$$

de modo que,

$$z^*_{n+1} = \frac{\partial F(\phi_{n+1})}{\partial \phi}$$

E consequentemente,

$$z^*_{n+1} = -\phi^3_{n+1} + \beta\phi_{n+1} + K\phi_{n+1}$$

4. Seja $n := n+1$ e vamos para o item 2, até a satisfação de um critério de convergência adequado.

   No próximo teorema provamos que sob algumas condições específicas que o algoritmo é convergente.

Teorema 4.2. *Seja $\phi_1 \in U_1$ tal que existe $r > 0$ e $K_1 > 0$ tal que $\frac{\partial^2 J(\phi)}{\partial \phi^2} \geq K_1 I_d$, $\forall$ $\phi \in B_r(\phi_1)$, onde I_d denota a matriz identidade.*

Defina a sequência $\{\phi_n\} \subset U_1$ usando a relação:

$$-\gamma\nabla^2\phi_{n+1} + K\phi_{n+1} = -\alpha\phi_n^3 + \beta\phi_n + K\phi_n + f$$

para um $K > 0$ tal que existe $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ tal que

$$(1-\lambda)(-\gamma\nabla^2 + KI_d) < K_1 I_d,$$

e

$$-3\alpha\phi^2 + \beta I_d + KI_d > 0, \forall \phi \in B_r(\phi_1).$$

Sob tais hipóteses, se $K_1 > 0$ é suficientemente grande, existe $\phi_0 \in U_1$ tal que $\phi_n \to \phi_0$, quando $n \to \infty$ e $\delta J(\phi_0) = 0$.

Prova. Observe que, da hipótese, fixando $\phi \in B_r(\phi_1)$ temos

$$\frac{\partial^2 J(\phi)}{\partial \phi^2} = -\gamma\nabla^2 + KI_d + 3\alpha\phi^2 - \beta I_d - KI_d \geq K_1 I_d > 0$$

e existe $0<\lambda<\frac{1}{2}$ tal que

$$(1-\lambda)(-\gamma\nabla^2+KI_d)<K_1 I_d.$$

Neste ponto, assumimos que $K_1>0$ é suficintemente grande, para que tal $K>0$ possa ser tal que

$$\|\phi_2-\phi_1\|<(1-\lambda)r<r$$

Observe que, para tal λ, temos

$$\frac{\partial^2 J(\phi)}{\partial\phi^2}=(-\gamma\nabla^2+KI_d)+3\alpha\phi^2-\beta I_d-KI_d\geq K_1 I_d>(1-\lambda)(-\gamma\nabla^2+KI_d).$$

Também da hipótese $K>0$ é tal que

$$-3\alpha\phi^2+\beta I_d+KI_d>0,\ \forall\ \phi\in B_r(\phi_1).$$

Portanto temos

$$\lambda(-\gamma\nabla^2+KI_d)>-3\alpha\phi^2+\beta I_d+KI_d>0,$$

isto é,

$$\lambda I_d>(-\gamma\nabla^2+KI_d)^{-1}(-3\alpha\phi^2+\beta I_d+KI_d)>0,$$

de modo que,

$$\|(-\gamma\nabla^2+KI_d)^{-1}(-3\alpha\phi^2+\beta I_d+KI_d)\|<\lambda<1,\ \forall\ \phi\in B_r(\phi_1).$$

Por outro lado, retomando a sequência em questão, temos

$$-\gamma\nabla^2\phi_{n+2}+K\phi_{n+2}=-\alpha\phi_{n+1}^3+\beta\phi_{n+1}+K\phi_{n+1}+f,$$

$$-\gamma\nabla^2\phi_{n+1}+K\phi_{n+1}=-\alpha\phi_n^3+\beta\phi_n+K\phi_n+f,\ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

Destas duas últimas equações e o Teorema do Valor Médio, para cada coordenada escalar, obtemos:

$$\begin{aligned}
\phi_{n+2}-\phi_{n+1} &= (-\gamma\nabla^2+KI_d)^{-1}[-\alpha(\phi_{n+1}^3-\phi_n^3)+\beta(\phi_{n+1}-\phi_n)+K(\phi_{n+1}-\phi_n)]\\
&= (-\gamma\nabla^2+KI_d)^{-1}[-3\alpha\hat{\phi}_n^2(\phi_{n+1}-\phi_n)+\beta(\phi_{n+1}-\phi_n)+K(\phi_{n+1}-\phi_n)]\\
&= (-\gamma\nabla^2+KI_d)^{-1}[-3\alpha\hat{\phi}_n^2+\beta I_d+KI_d](\phi_{n+1}-\phi_n),
\end{aligned}$$

de modo que,

$$\|\phi_{n+2}-\phi_{n+1}\| \leq \|(-\gamma\nabla^2+KI_d)^{-1}(-3\alpha\hat{\phi}_n^2+\beta I_d+KI_d\|\|\phi_{n+1}-\phi_n\| < \lambda\|\phi_{n+1}-\phi_n\|,$$

onde $\{\hat{\phi}_n\}$ está na linha entre ϕ_n e ϕ_{n+1}.

Disto obtemos

$$\|\phi_n-\phi_1\| = \|\phi_n-\phi_{n-1}+\ldots\phi_2-\phi_1\|$$

$$\leq \|\phi_n-\phi_{n-1}\|+\ldots+\|\phi_2-\phi_1\|$$

$$\leq (1+\lambda+\ldots\lambda^{n-2})\|\phi_2-\phi_1\|$$

$$< \frac{1}{1-\lambda}\|\phi_2-\phi_1\|$$

$$< r, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, temos

$$\{\phi_n\} \subset B_r(\phi_1).$$

Consequentemente de tal resultado e do teorema do ponto fixo de Banach, nós podemos inferir que $\{\phi_n\}$ é convergente, de modo que existe $\phi_0 \in U_1$ tal que $\phi_n \to \phi_0$, quando $n \to \infty$.

A conclusão restante, $\delta J(\phi_0) = 0$, segue da continuidade das funções em questão. ■

4.2 UM EXEMPLO NUMÉRICO

Nessa seção apresentamos um exemplo numérico relativo ao algoritmo previamente desenvolvido.

Considere a equação do tipo Ginzburg-Landau definida por

$$-\varepsilon u'' + u^3 - u - 1 = 0 \text{ em } [0,1]$$

com as condições de contorno

$$u(0) = 0 \text{ e } u(1) = 0.$$

Para tal caso, o algoritmo em questão é resumido por

1. Escolha $K > 0$, $b_{12} = 1$ e defina $n = 1$, $u_1 \equiv 10$, $z_1^* \equiv 0$

2. Calcule u_{n+1} solução da equação

$$-\varepsilon u''_{n+1} + K u_{n+1} - z_n^* - 1 = 0, \text{ em } [0,1]$$

com as condições de contorno

$$u_{n+1}(0) = u_{n+1}(1) = 0.$$

3. Calcule

$$z_{n+1}^* = -u_{n+1}^3 + u_{n+1} + K u_{n+1}.$$

4. Obtenha

$$b_{12} = \| u_n - u_{n+1} \|_\infty.$$

5. Se $b_{12} < 10^{-4}$ ou $n > 500$, pare, senão $n \to n+1$ e vá para o item 2.

Sobre os resultados numéricos, para o caso em que $\varepsilon = 0.1$ e $K = 500$ veja a figura 1, para o caso em que $\varepsilon = 0.01$ e $K = 15000$ veja a figura 2. Mais exemplos podem ser encontrados no livro Functional Analysis ((BOTELHO, 2014)).

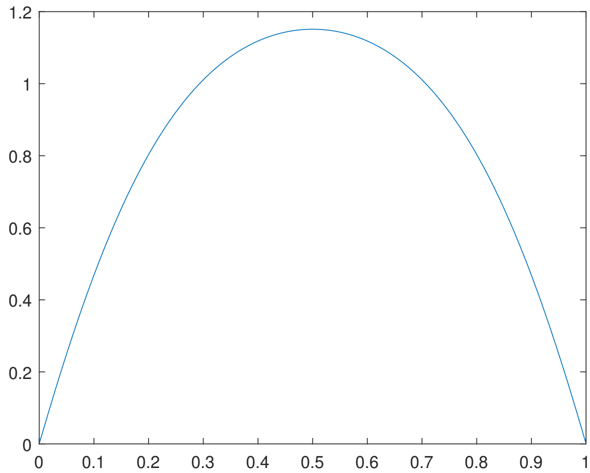

Figura 1 – Solução $u(x)$ para $\varepsilon = 0.1$.

Observamos que quando $\varepsilon > 0$ é menor, isto é, $\varepsilon = 0.01$, a solução aproxima-se do valor constante ≈ 1.32 ao longo do domínio, o que é esperado, pois ≈ 1.32 é uma solução aproximada da equação $u^3 - u - 1 = 0$.

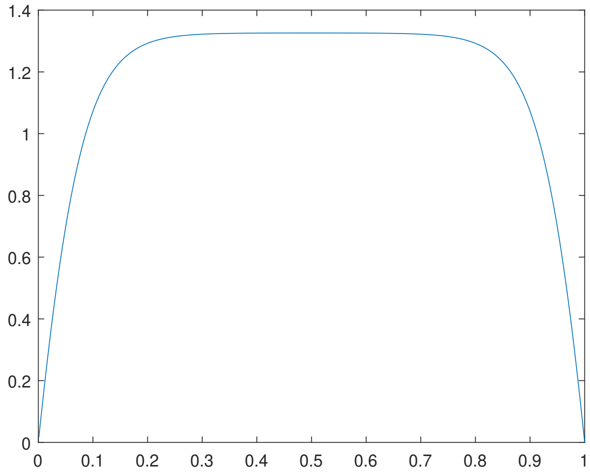

Figura 2 – Solução $u(x)$ para $\varepsilon = 0.01$.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho desenvolvemos um princípio de dualidade que, em certo sentido, aplica e generaliza um importante resultado publicado por J.F. Toland em 1979 (TOLAND, 1979). Mais especificamente escrevemos a formulação variacional das equações de Ginzburg-Landau como uma diferença entre dois funcionais convexos, o que viabilizou a aplicação do resultado mencionado.

Estabelecemos princípios de dualidade primeiramente para o caso real e sem potencial magnético, o qual é mais simples e, num segundo passo, para o modelo completo incluindo campo e potencial magnéticos.

Finalmente, nas últimas seções, com base em tais princípios de dualidade, desenvolvemos um algoritmo para a solução numérica do problema.

Os resultados obtidos incluem a prova da convergência do método sob certas hipóteses especificadas. Na última seção apresentamos alguns resultados numéricos para um problema real unidimensional correlato para ilustrar as aplicações dos resultados obtidos.

REFERÊNCIAS

ADAMS, R.A.; FOURNIER, J.F. **Sobolev Spaces**. [*S.l.*]: Elsevier, New York, 2003.

ANNETT, J. F. **Superconductivity, Superfluids and Condensates**. [*S.l.*]: Oxford Master Series in Condensed Matter Physycs, Oxford University Press, 2010. v. 5.

BIELSKI, W.R.; GALKA, A.; TELEGA, J.J. **The Complementary Energy Principle and Duality for Geometrically Nonlinear Elastic Shells. I. Simple case of moderate rotations aroud a tangent to the middle surface.** [*S.l.*]: Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, No. 7-9, 1988. v. 38.

BIELSKI, W.R.; TELEGA, J.J. **A Contribution to Contact Problems for a Class of Solids and Structures**. [*S.l.*]: Arch. Mech., 37, 4-5, pp. 303-320, Warszawa, 1985.

BOTELHO, F. S. **Functional Analysis and Applied Optimization in Banach Spaces**. [*S.l.*]: Springer, Switzerland, 2014.

EKELAND I.; TÉMAM, R. **Convex Analysis and Variational Problems, Classics in applied mathematics**. [*S.l.*]: SIAM, 1999.

GIORGI, T.; SMITS, R.T. **Remarks on the existence of global minimizers for the Ginzburg Landau energy functional Nonlinear Analysis, Theory Methods and Applications**. [*S.l.*]: 147:155, 2003. v. 53.

LANDAU, L.D.; LIFSCHITS, E.M. **Course of Theoretical Physics**. [*S.l.*]: Statistical Physics, parte 1, 2008. v. 5.

PUREUR, P. **Supercondutividade e Materiais Supercondutores**. [*S.l.*]: Instituto de Física UFRGS, Porto Alegre, 2004. v. 1.

ROCKAFELLAR, R. T. **Convex Analysis**. [*S.l.*]: Princeton Uni. Press, 1970.

TOLAND, J. F. **A duality principle for non-convex optimisation and the calculus of variations**. [*S.l.*]: Arch. Rat. Mech. Anal., 71, No. 1, 1979.