UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Gabriel Sehnem Michels

O problema de Poincaré para folheações no plano projetivo complexo

Florianópolis
2021

Gabriel Sehnem Michels

O problema de Poincaré para folheações no plano projetivo complexo

Dissertação submetida ao Programa de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientadora: Prof. Dra. Marianna Ravara Vago

Florianópolis
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Michels, Gabriel
O problema de Poincaré para folheações no plano projetivo complexo / Gabriel Michels ; orientador, Marianna Ravara Vago, 2021.
91 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Folheações holomorfas. 3. O problema de Poincaré. 4. Curvas invariantes. I. Ravara Vago, Marianna . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Gabriel Sehnem Michels

O problema de Poincaré para folheações no plano projetivo complexo

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dra. Marianna Ravara Vago
Orieentadora - Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. Dr. Arturo Fernandez Peres
Universidade Federal de Minas Gerais

Prof. Dr. Francisco Carlos Caramello Junior
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Daniel Goncalves
Data: 30/08/2021 12:23:24-0300
CPF: 017.022.459-77
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Marianna Ravara Vago
Data: 30/08/2021 10:42:38-0300
CPF: 074.347.836-30
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dra. Marianna Ravara Vago
Orientadora

Florianópolis, 2021.

Resumo

Este trabalho versa sobre o problema de Poincaré para folheações. Dada uma folheação definida em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$, esse problema consiste em determinar se é possível limitar o grau de todas as suas separatrizes pelo grau da folheação. Nesse texto exploramos o problema sob o ponto de vista algébrico e geométrico, exibindo condições necessárias para a resposta positiva do problema. Inicialmente apresentamos a solução do problema quando as separatrizes possuem todas as singularidades do tipo nodal. Em seguida apresentamos a solução no caso em que as singularidades da folheação sobre a separatriz são todas não dicríticas.

Palavras chave: Folheações, Separatriz, Singularidades.

Abstract

This work deals with the Poincaré problem for foliations. Given a foliation defined in $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$, this problem consists in determining whether it is possible to limit the degree of all its separatrices by the degree of foliation. In this text, we explore the problem from an algebraic and geometric point of view, showing necessary conditions for the positive response of the problem. Initially, we present the solution to the problem when the separatrix have all the singularities of the nodal type. Then we present the solution in the case where the singularities of the foliation on the separatrix are all non-dicritical.

Keywords: Foliations, Separatrix, Singularities.

Sumário

Introdução

O principal objetivo do trabalho é apresentar a demonstração de dois resultados que dizem respeito ao problema de Poincaré para folheações holomorfas em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$. Historicamente, esse problema começa em 1981, quando Poincaré publicou três artigos tentando responder a seguinte questão: "É possível decidir se uma equação diferencial algébrica em duas variáveis é algebricamente integrável?" Nessa questão, o termo "algebricamente integrável" significa dizer que a equação possui uma integral primeira racional, e por equação diferencial algébrica estamos nos referindo a equações diferenciais definidas da forma $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ onde P e Q são polinômios. Usando a terminologia da teoria de folheações, esse problema pode ser escrito de uma forma moderna como: "É possível decidir se uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ no plano projetivo complexo $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ possui uma primeira integral racional?". Poincaré observou que para resolver esse problema basta achar um limite para o grau das folhas genéricas de $\mathcal{F}$, e então chega-se na formulação atual: "É possível limitar o grau das separatrizes de uma folheação pelo seu grau?"

Esse problema, como formulado na última frase recebeu a atenção de diversos matemáticos durante o século passado. De modo geral, a resposta é negativa.

Entretanto, se colocarmos condições sobre a curva algébrica S que é invariante pela folheação $\mathcal{F}$, pode-se cotar o grau de S por $\mathcal{F}$. O Teorema que estabelece esse resultado é apresentado aqui com base no estudo do artigo [6]: "Holomorphic foliations in $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ having an invariant algebraic curve" publicado em 1991 por Dominique Cerveau e Alcides Lins Neto. Nesse caso, as técnicas utilizadas são predominantemente algébricas.

O outro ponto de vista é quando coloca-se uma restrição sobre a folheação e não mais sobre a curva. Um resultado dessa forma foi enunciado e provado em 1994 no artigo de Manuel Carnicer que se chama "The Poincaré problem in the non-dicritical case". A solução desse problema também é apresentada nesse texto. Nesse caso, as técnicas empregadas são predominantemente geométricas.

O trabalho se divide em 7 capítulos. No capítulo 1 são apresentados os conceitos básicos sobre teoria de folheações holomorfas. Foram provados apenas os resultados que ilustrassem alguma técnica relevante para a compreensão do texto. O capítulo 2 trata de resultados sobre a propriedade de divisão relativa estudada em [6]. No capítulo 3, temos a resposta para o problema de poincaré dada por Cerveau e Alcides. O capítulo 4 é devotado a algumas aplicações dos resultados dos capítulos 2 e 3. Os capítulos 5 e 6 são pré- requisitos para o capítulo 7. No capítulo 5, apresentamos resultados básicos sobre o processo de blow-up e singularidades de folheações. O capítulo 7 versa sobre curvas generalizadas, um importante conceito pra a compreensão da prova dada por Carnicer. Um estudo um pouco mais detalhado sobre curvas generalizadas pode facilitar o entendimento da prova dada por M. Carnicer. No capítulo 7 temos finalmente essa demonstração.

1 Preliminares

Nesse capítulo, serão expostos alguns fatos básicos sobre folheações holomorfas. Tal objeto consiste, de um certo modo, em uma partição de uma variedade M em subvariedades (imersas) de M. Em certos casos esse objeto pode ser representado por uma certa coleção de 1-formas holomorfas ou campos de vetores. Daremos também a definição de folheações holomorfas singulares e enunciaremos resultados elementares para o texto. Grande parte dos resultados é apresentada sem demonstração.

1.1 Folheações Regulares

Definição 1.1. *Seja M uma variedade complexa de dimensão m. Uma folheação holomorfa regular $\mathcal{F}$ n-dimensional de M, é dada por um atlas maximal holomorfo $\{(U_j, \phi_j)\}$ de M tal que $\phi_j(U_j) \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n}$ onde os mapas de mudança de coordenadas*

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

são da forma

$$(x, y) \longmapsto (g_{ij}(x, y), h_{ij}(y)), x \in U \subset \mathbb{C}^n, y \in \mathbb{C}^{m-n},$$

com g_{ij}, h_{ij} holomorfas.

Em todo esse texto, por uma variedade complexa entendemos uma variedade complexa conexa.

Observamos que se $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}$ é um atlas satisfazendo a definição, então existe um único atlas maximal da forma acima. Assim, uma folheação holomorfa regular é dada por um atlas maximal do tipo acima. Note ainda que a função h_{ij} dada acima é, na verdade, um biholomorfismo.

Definição 1.2. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheção holomorfa de dimensão n da variedade complexa M, de dimensão m. Fixe (U, ϕ) uma carta da folheação. Uma placa da folheação é um conjunto da forma $\phi^{-1}(V \times \{c\})$ onde V é um conjunto aberto conexo em $\mathbb{C}^n$ e c está em $\mathbb{C}^{m-n}$*

Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação de M e U_1, U_2 dois abertos coordenados de $\mathcal{F}$ tal que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Se P_1 é uma placa de U_1 e P_2 é uma placa de U_2 então ou essas placas coincidem na intersecção de U_1 e U_2 ou elas possuem intersecção vazia. De fato, suponha que a intersecção é não vazia. Então existe $(x_0, y_0) \in U_1 \cap U_2$ de modo que $(x_0, y_0) \in P_1 \cap P_2$. Notando que P_1 é da forma $\phi_1^{-1}(V_1 \times \{c_1\})$ e P_2 da forma $\phi_2^{-1}(V_2 \times \{c_2\})$, teremos que $(x_1, c_1) = \phi_1(x_0, y_0)$ e $(x_2, c_2) = \phi_2(x_0, y_0)$, com $x_1 \in V_1$ e $x_2 \in V_2$. Utilizando a forma dos mapas de transição dada na definição de folheação, obtém-se que $c_2 = h_{12}(c_1)$. Se $(x, y) \in P_1$, temos $(x', c_1) = \phi(x, y)$, com

$(x, y) \in U_1 \cap U_2$. Note que $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(x, y) = \phi_2(x, y) = (g_{12}(x, c_1), h_{12}(c_1)) = (g_{12}(x, c_1), c_2)$, donde concluímos que $P_1 \cap U_1 \cap U_2 \subset P_2 \cap U_1 \cap U_2$. Do mesmo modo, prova-se a inclusão contrária.

Definimos agora uma relação de equivalência do seguinte modo: Dados $p, q \in M$, dizemos que p e q são equivalentes por $\mathcal{F}$ se existe uma sequência finita $P_1, ..., P_n$ de placas de $\mathcal{F}$ tal que $p \in P_1$, $q \in P_n$ e $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ para $i = 1, ..., n-1$. Finalmente, dizemos que as folhas da folheação são as classes de equivalência dadas pela relação anterior. Duas folheações serão ditas equivalentes (iguais) se elas possuem as mesmas folhas e seus respectivos atlas são compatíveis.

É possível mostrar que cada folha L de uma folheação possui uma estrutura de variedade complexa, chamado a estrutura intrínseca de L, de modo que a inclusão canônica $i : L \to M$ é uma imersão (veja [1]). Assim, podemos também definir uma folheação como uma partição de M por subvariedades imersas de L tal que para todo $x \in M$ existe uma vizinhança U de x biholomorfa a $\Delta^n \times \Delta^{m-n}$, tal que as folhas da partição intersectam U na folheação trivial $\{\Delta^n \times y; y \in \Delta^{m-n}\}$. Aqui, Δ denota o polidisco centrado na origem, isto é, um produto de discos centrados na origem. Assim, tem-se a seginte definição equivalente de folheação ([18]):

Definição 1.3. *Uma folheação holomorfa regular de dimensão n de M é uma partição $\mathcal{F}$ de M consistindo de subvariedades imersas disjuntas $L \subset M$ com a seguinte propriedade: Para cada $x \in M$ existe uma vizinhança U de x e um biholomorfismo $\phi : U \to \Delta^n \times \Delta^{m-n}$, tal que $\forall y \in \Delta^{m-n}$, existe $L \in \mathcal{F}$ satisfazendo:*

$$\phi^{-1}(\Delta^n \times y) \subset L.$$

As subvariedades imersas da definição são as folhas da folheação. Se $p \in M$, o espaço tangente de $\mathcal{F}$ em p, denotado por $T_p\mathcal{F}$, é o espaço tangente da subvariedade L em p tal que $p \in L$, ou seja, $T_p\mathcal{F} = T_pL$.

Construiremos agora exemplos e resultados básicos. Para isso precisaremos do seguinte resultado:

Teorema 1.4. *(Teorema da Submersão Holomorfa) Seja M uma variedade complexa de dimensão m, $U \subset M$ um domínio em M e $f : U \to \mathbb{C}^k$ uma submersão holomorfa. Então para todo ponto $p \in U$, existe uma vizinhança U_p de p, uma vizinhança W de $f(p)$, um domínio aberto $V \subset \mathbb{C}^{m-k}$ e um mapa holomorfo $g : U_p \to V$ tal que $q \mapsto (g(q), f(q))$ define um biholomorfismo de U_p para um subconjunto aberto de $V \times W$.*

Para a demonstração veja [8]. O uso do teorema anterior nos conduzirá a uma definição equivalente de folheação muito atrativa. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão n de uma variedade complexa M. Definindo $f_i : U_i \to \mathbb{C}^{m-n}$ por $f_i = \pi_2 \circ \phi_i$, onde $\pi_2 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n} \to \mathbb{C}^{m-n}$ é a projeção canônica, temos

$$f_j = \pi_2 \circ \phi_j = \pi_2 \circ \phi_j \circ \phi_i^{-1} \circ \phi_i = \pi_2 \circ \phi_j \circ \phi_i^{-1}) \circ \phi_i = h_{ij} \circ (\pi_2 \circ \phi_i) = h_{ij} \circ f_i$$

Assim, $\mathcal{F}$ é equipada com uma cobertura $\{U_i\}$ de M e submersões $f_i : U_i \to \mathbb{C}^{m-n}$ tal que para todo i, j existe um biholomorfismo $h_{ij} : \mathbb{C}^{m-n} \to \mathbb{C}^{n-m}$ satisfazendo as relações de cociclo:

$$f_j = h_{ij} \circ f_i,\ h_{ii} = id$$

Os $f_i' s$ como acima são ditos mapas distinguidos de $\mathcal{F}$. Note que as folhas de $\mathcal{F}$ são dadas pelas colagens das componentes conexas das imagens inversas dos $f_i' s$. De fato, basta notar que uma placa é dada por $\phi^{-1}(V \times \{c\})$.

A recíproca do fato acima também é válida. Seja (U_i, f_i) uma cobertura de M por submersões satisfazendo as condições de cociclo. Para cada ponto $p \in U_i$, pelo teorema da submersão holomorfa, existe uma vizinhança $U_{ip} \subset U$ de p tal que $\phi_{ip} = (g_{ip}, f_i)$ é um biholomorfismo entre U_{ip} e um subconjunto aberto $V \times W \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n-m}$. Refinando $\{U_i\}$ para a cobertura $\{U_{ip}\}$, temos um atlas $\{(U_{ip}, \phi_{ip})\}$ de M. Sejam (U_{ip}, ϕ_{ip}) e (U_{jq}, ϕ_{jq}) duas cartas com $U_{ip} \cap U_{iq} \neq \emptyset$. Se $z \in U_{ip} \cap U_{jq}$ e $(x, y) = \phi_{ip}^{-1}(z)$, ou seja, $x = g_{jq}(z)$ e $y = f_i(z)$. Então:

$$\phi_{jq} \circ \phi_{ip}^{-1}(x, y) = \phi_{jq}(z) = (g_{jq}(z), h_{ij}(f_i(z))) = (g_{jq}(\phi_{ip}(x, y), h_{ij}(y)),$$

e portanto o atlas define uma folheação. Essa discussão nos permite dar outra definição de folheação:

Definição 1.5. *Uma folheação holomorfa regular de dimensão n de M é uma coleção (U_i, f_i) de modo que $\{U_i\}$ é uma cobertura de M por abertos conexos e $f_i : U_i \to \mathbb{C}^{m-n}$ é uma submersão holomorfa satisfazendo as condições de cociclo.*

Temos então três maneiras equivalentes de definir uma folheação holomorfa regular.

Exemplo 1.6. Um primeiro exemplo de folheação é considerar $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$, munido da única carta $\phi_{x,y} = (x, y)$, com $x \in \mathbb{C}^k$ e $y \in \mathbb{C}^{n-k}$. Note que essa carta define uma folheação de dimensão k e as folhas dessa folheação são conjuntos da forma $\mathbb{C}^k \times \{c\}$, com $c \in \mathbb{C}^{n-k}$. ◂

Exemplo 1.7. Sejam M e N variedades complexas de $f : M \to N$ uma submersão. Se $\dim M - \dim N = k$, onde $1 \leq k \leq m$, então as subvariedades de dimensão k da forma $f^{-1}(z) \neq \emptyset$, onde z $\in N$, são as folhas de uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão k de M. Para mostrar isso basta adaptar as ideias descritas anteriormente. Neste caso, para todo $p \in M$, temos $T_p\mathcal{F} = Ker(df(p))$, onde $df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$. ◂

Exemplo 1.8. (Folheações definidas por campos de vetores holomorfos)

Sejam M uma variedade complexa de dimensão m e X um campo de vetores holomorfo que não é identicamente nulo em M. Seja $Sing(X) = \{p \in M; X(p) = 0\}$ o conjunto singular de X. Então X gera uma folheação de dimensão um no aberto $U = M \backslash Sing(X)$. Esse fato segue do seguinte teorema ([16]):

Teorema 1.9. *(Fluxo Tubular) Seja M uma variedade complexa de dimensão m e X um campo de vetores holomorfo definido em M. Para todo $p \in M$ tal que $X(p) \neq 0$, existe um sistema de coordenadas holomorfo $(U, \phi = (z_1, \dots, z_m))$, onde $p \in U$, $\phi : U \longrightarrow \phi(U) = A \times B \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{m-1}$ e no qual $X = \frac{\partial}{\partial z_1}$. Ou seja, X é biholomorficamente conjugado a $\frac{\partial}{\partial z_1}$.*

Agora, como as trajetórias de X são as soluções da equação diferencial $\frac{dz}{dt} = X(z(t))$, e $X|_U = \frac{\partial}{\partial z_1}$, vemos que as trajetórias de X em U são da forma $\phi^{-1}(A \times \{w\})$ com $w \in B$. Assim, da definição 1.1, obtemos uma folheação de dimensão um cujas folhas são as trajetórias de X.

Observe agora que se $\tilde{U}$ é um aberto com $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$, admitindo a existência de um campo holomorfo não singular $\tilde{X}$ que satisfaz $X|_{U \cap \tilde{U}} = f\tilde{X}_{U \cap \tilde{U}}$, onde $f : U \cap \tilde{U} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ é uma função holomorfa que não se anula. Então X e $\tilde{X}$ induzem a mesma folheação em $U \cap \tilde{U}$.

Observamos por fim que uma folheação de dimensão um é dada localmente por campos de vetores não singulares. De fato, para cada aberto trivializador U_i, tome o campo $X_i = d(\phi_i^{-1})(\frac{\partial}{\partial z_1})$, onde $(z_1, (z_2, \dots, z_m))$ são coordenadas de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{m-1}$. Nesse caso, existem funções holomorfas f_{ij} tal que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $f_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{C}^*$ são tais que $X_j = f_{ij} X_i$. Concluímos então esse exemplo com o seguinte resultado:

Proposição 1.10. *Sejam M uma variedade complexa de dimensão $m \geq 2$ e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa regular de dimensão um em M. Então existem coleções $(U_i, X_i)_{i \in A}$ e funções holomorfas que não se anulam $f_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{C}^*$ tais que:*

(i). $(U_i)_{i \in A}$ é uma cobertura de M por abertos.

(ii). X_i é um campo de vetores holomorfo em U_i que não se anula em nenhum ponto.

(iii). Em $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, temos $X_j = f_{ij} X_i$.

(iv). Se $p \in U_i$, então $T_p\mathcal{F} = \mathbb{C}.X_i(p)$ é o subespaço de T_pM gerado por $X_i(p)$.

Reciprocamente, dada uma coleção $(U_i, X_i)_{i \in A}$ do tipo acima, então essa coleção define uma folheação de M.

Exemplo 1.11. (Folheações dadas por 1-formas holomorfas)

Sejam M uma variedade complexa e $U \subset M$ aberto. Seja ω uma 1-forma holomorfa em U e seja $Sing(\omega) = \{p \in U, \omega(p) = 0\}$ seu conjunto singular. Dizemos que ω é integrável se existe uma folheação $\mathcal{F}$ não sigular de codimensão um em $U \backslash Sing(\omega)$ tal que $T_p\mathcal{F}$ coincide com o núcleo de $\omega(p)$ para todo $p \in U \backslash Sing(\omega)$, ou seja, $T_p\mathcal{F} = Ker(\omega(p))$.

O seguinte teorema nos dá uma noção equivalente de 1-formas integráveis ([1]):

Teorema 1.12. *(Frobenius) Nas condições acima, ω é integrável se, e somente se, $\omega \wedge d\omega = 0$*

É comum dizermos que a folheação $\mathcal{F}$ é definida pela equação diferencial $\omega = 0$ e que as folhas de $\mathcal{F}$ são as subvariedades integrais dessa equação.

Observamos que se $U_i, U_j \subset M$ são abertos com $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e ω_i, ω_j são 1-formas holomorfas integráveis em U_i e U_j respectivamente, então elas geram a mesma folheação em $U_i \cap U_j$ se e somente se existe $g_{ij} : U_i \cap U_j \backslash (Sing(\omega_i) \cup Sing(\omega_j)) \to \mathbb{C}^*$ tal que $\omega_j = g_{ij}\omega_i$ no conjunto acima.

Como no caso de campos de vetores, dada uma folheação $\mathcal{F}$ e uma carta trivializadora $(U_i, \phi_i = (z_1, \ldots, z_m))$, defina $\omega_i = \phi_i^* dz_n$. Finalizamos esse exemplo com o resultado:

Proposição 1.13. *Sejam M uma variedade complexa de dimensão $m \geq 2$ e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa regular de codimensão um em M. Então existem coleções $(U_i, \omega_i)_{i \in A}$ e funções holomorfas que não se anulam $f_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$ tais que:*

(i). $(U_i)_{i \in A}$ é uma cobertura de M por abertos.

(ii). ω_i é uma 1-forma holomorfa integrável em U_i que não se anula em nenhum ponto.

(iii). Em $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, temos $\omega_j = f_{ij}\omega_i$.

(iv). Se $p \in U_i$, então $T_p\mathcal{F} = Ker(\omega_i(p))$.

Exemplo 1.14. (Pullback de uma folheação)

Seja $f : M \to N$ é uma função holomorfa entre duas variedades complexas. Dizemos que f é transversa a uma subvariedade $S \subset N$ se para todo $p \in M$ tal que $f(p) \in S$ temos

$$df(p).T_pM + T_{f(p)}S = T_{f(p)}N.$$

Se $\mathcal{F}$ é uma folheação definida em N, dizemos que f é transversa a $\mathcal{F}$ se f é transversa a toda folha de $\mathcal{F}$. Assim, seja $\mathcal{F}$ uma folheação definida em N e f transversa a $\mathcal{F}$. Afirmamos que existe uma única folheação em M denotada por $f^*(\mathcal{F})$ de codimensão $cod(f^*(\mathcal{F})) = cod(\mathcal{F}) = k$ cujas folhas são as componentes conexas dos conjuntos $f^{-1}(L)$, onde L é uma folha de $\mathcal{F}$. De fato, seja (U_i, g_i) uma coleção de mapas distinguidos que define $\mathcal{F}$, onde $g_i : U_i \to \mathbb{C}^k$ e $g_j = h_{ij}g_i$ em $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Defina $l_i = g_i \circ f : f^{-1}(U_i) \to \mathbb{C}^k$. Mostraremos que a coleção $(f^{-1}(U_i), l_i)$ define uma folheação em M. Note que $f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j) \neq \emptyset$ se e somente se $U_i \cap U_i \neq \emptyset$. Além disso, em $f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j) \neq \emptyset$ temos $l_j = g_j \circ f = h_{ij} \circ f_i \circ f = h_{ij} \circ (f_i \circ f) = h_{ij} \circ l_i$. Resta mostrar que l_i é de fato uma submersão. Isso segue da condição de transversalidade. Como f é transversa a $\mathcal{F}$, se $p \in U_i$, e $q = f(p)$, então:

$$T_qN = T_q\mathcal{F} + df(p).T_pM.$$

Aplicando $dg_i(q) : T_pN \to \mathbb{C}^k$ a ambos os lados e usando a regra da cadeia, obtemos

$$\mathbb{C}^k = dg_i(q).T_qN = dg_i(q).T_q(\mathcal{F}) + d(g_i \circ f).T_pM.$$

Como f é constante em cada placa de $\mathcal{F}$ em U_i que passa por q, temos $df(q).T_q\mathcal{F} = \{0\}$, isto é, $g_i \circ f$ é uma submersão. Segue então que a folheação $f^*(\mathcal{F})$ é bem definida. $f^*(\mathcal{F})$ é chamada o pullback de $\mathcal{F}$ por f. ◀

1.2 Folheações Holomorfas Singulares

Nem toda variedade complexa pode ser folheada. Por exemplo, é um fato conhecido que o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(n)$ não possui folheações holomorfas regulares de dimensão k, $1 \leq k < n$. Para uma prova desse fato, no caso de codimensão um, veja [14]. Em particular $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ não pode ser folheado.

Tendo em vista esse último fato e levando em conta os exemplos apresentados na seção anterior, torna-se natural a seguinte definição:

Definição 1.15. *Uma folheação holomorfa singular de codimensão um numa variedade complexa M é dada por uma cobertura $(U_i)_{i\in I}$ de M por abertos conexos e por coleções $(\omega_i)_{i\in I}$ e funções (g_{ij}) , $g_{ij} : U_{ij} = U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$, tais que:*

(i). ω_j é uma 1-forma holomorfa integrável ($\omega_j \wedge d\omega_j = 0$ em U_j) não identicamente nula.

(ii). Se $U_{ij} \neq \emptyset$, então $\omega_j = g_{ij}\omega_i$ em U_{ij}.

(iii). Se $W = \cup_{i\in I} Sing(\omega_i)$, então $Cod(W) \geq 2$.

Se $Sing(\omega_i) = \{p \in U_i; \omega_i(p) = 0\}$ então a condição (ii) da definição nos diz que $Sing(\omega_i) \cap U_{ij} = Sing(\omega_j) \cap U_{ij}$. Definimos o conjunto singular de $\mathcal{F}$ por $Sing(\mathcal{F}) = \cup_i Sing(\omega_i)$. O conjunto $Sing(\mathcal{F})$ é um subconjunto analítico de M. Com efeito, dado $p \in U_i$, tomamos uma carta local $(V, \phi = (z_1, \ldots, z_m))$, com $p \in V$. Nesta carta $\omega_i|_V = \sum_{j=1}^m f_j(z)dz_j$ e $Sing(\mathcal{F}) \cap V = \{f_1 = \cdots = f_m = 0\}$, portanto $Sing(\mathcal{F})$ é localmente definido por equações analíticas, logo é analítico.

Desta maneira, uma folheação singular de codimensão um é definida localmente por 1-formas holomorfas integráveis com uma condição de compatibilidade $\omega_j = g_{ij}\omega_i$ na intersecção dos abertos onde as formas estão definidas, chamada condição de colagem. De fato, observe que esta condição faz com que as curvas tangentes de ω_j e ω_i se "colem" em U_{ij}.

Quando restrita a $V = M \backslash Sing(\mathcal{F})$, a coleção como dada na definição 1.15 define uma folheação holomorfa regular $\mathcal{F}'$ de codimensão um em V. As folhas de $\mathcal{F}$ são por definição as folhas de $\mathcal{F}'$ em $M \backslash Sing(\mathcal{F})$.

Diremos que duas folheações de codimensão um $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são iguais se $Sing(\mathcal{F}_1) = Sing(\mathcal{F}_2)$ e as folheações que elas induzem no complemento de seus conjuntos singulares também coincidem.

Analisaremos agora a importância de impor que $CodSing(\mathcal{F}) \geq 2$. Considere o exemplo:

Exemplo 1.16. Sejam $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ folheações definidas em $\mathbb{C}^2$ definidas pelas 1-formas $\omega_2 = d(z_1^2) = 2z_1 dz_1$ e $\omega_2 = d(z_1^3) = 3z_1^2 dz_1$. Elas possuem o mesmo conjunto singular (de codimensão um) e as folhas de ambas são as hipersuperfícies $z_1 = c$, $c \neq 0$. Porém, não existe função holomorfa que nunca se anula tal que uma seja múltipla da outra. (Note: $\omega_2 = \frac{3}{2} z_1 \omega_1$ e $\frac{3}{2} z_1$ se anula em $(z_1 = 0)$). ◀

De todo modo, caso não exigíssemos esse fato na definição, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.17. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um na variedade complexa M tal que $Sing(\mathcal{F})$ tenha codimensão um. Então existe uma folheação $\mathcal{G}$ de codimensão um em M tal que $CodSing(\mathcal{G}) \geq 2$ e $\mathcal{G}$ coincide com $\mathcal{F}$ em $M \backslash Sing(\mathcal{F})$.*

Isso ocorre pois dado um germe de forma ω, dizer que seu conjunto singular tem codimensão menor ou igual a um equivale a dizer que as componentes de ω na representação local tem fatores em comum. A prova dada em [16] consiste em fatorar essas representações locais, eliminando os fatores em comum das componentes.

Define-se também o conceito de folheação holomorfa singular de dimensão um da mesma forma que folheações de codimensão um, "trocando-se" as 1-formas na definição por campos vetoriais holomorfos satisfazendo a condição de colagem $X_j = f_{ij} X_i$ na intersecção dos abertos $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ (onde definidos). Toda a discussão feita para folheações de codimensão um se adapta naturalmente para folheações de dimensão um. Quando definimos algum conceito para folheações de codimensão um, a menos que mencionado o contrário, a definição será de uma forma natural modificada para folheações de dimensão um e vice-versa.

Quando se estuda folheações singulares, é de muito interesse estudar o comportamento de uma folheação em torno da singularidade. Logo, do mesmo modo que falamos de germes de funções holomorfas, falamos naturalmente de germes de formas holomorfas, campos holomorfos, e portanto de germe de folheação em um ponto.

Antes de prosseguirmos enunciaremos alguns resultados que serão utilizados nos capítulos posteriores. Iniciamos pelo seguinte:

Teorema 1.18. *(Remmert-Stein). Seja M uma variedade complexa e $A \subset M$ um subconjunto analítico de M, de codimensão ≥ 2. Se f é uma função holomorfa definida em $M \backslash A$, então f se estende para uma função holomorfa F em M, isto é, $F|_{M \backslash A} = f$.*

O mesmo resultado vale trocando-se a palavra holomorfa por meromorfa no teorema acima (Teorema de Levi). A prova do Teorema 1.18 (e também do Teorema de Levi) pode ser vista em [12].

Proposição 1.19. *Sejam ω_1 e ω_2 duas formas diferenciais holomorfas definidas em um polidisco $\Delta(z_0; r) \subset \mathbb{C}^n$. Escreva $\omega_1 = \sum_{j=1}^{n} a_j dz_j$. Se $CodSing(\omega_1) \geqslant 2$, são equivalentes:*

(i). $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$

(ii). Existe $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(\Delta(z_0; r))$ tal que $\omega_2 = h\omega_1$

Demonstração. (ii) $\Rightarrow$ (i). É claro que se $\omega_2 = h\omega_1$, então $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Escreva $\omega_2 = \sum_{j=1}^{n} b_j dz_j$. Temos:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j dz_i \wedge dz_j = 0 \Leftrightarrow a_i b_j - a_j b_i = 0, \forall i, j = 1, \cdots n$$

Note que fixando $z \in \Delta(z_0; r) \backslash Sing(\omega_1)$, existe um inteiro $1 \leqslant i \leqslant n$ tal que $a_i(z) \neq 0$. Pela continuidade desse a_i, podemos tomar uma vizinhança de z de modo que a_i nunca se anula. Nessa vizinhança, denotada por U_i, definimos:

$$h_i = \frac{b_i}{a_i}.$$

Note que $h_i|_{U_j \cap U_i} = h_j|_{U_j \cap U_i}$. Assim, fica bem definida a função holomorfa h em $\Delta(z_0; r) \backslash Sing(\omega_1)$, de modo que $h|_{U_i} = h_i$. Usando o teorema de Remmert-Stein, podemos estender essa função h para uma função em todo o polidisco, também denotada por h, de modo que $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(\Delta(z_0; r))$ e, por construção, $\omega_2 = h\omega_1$, como queríamos. ∎

É claro que este resultado vale em uma variedade complexa localmente, isto é, a nível de germe. Vemos portanto que se o conjunto singular de uma folheação tem codimensão maior ou igual a 2, temos $\omega_i \wedge \omega_j = 0, \forall i, j$.

Existe uma generalização da proposição 1.19. Enunciamos aqui diretamente na forma como utilizaremos no texto. Para mais detalhes e demonstração veja [17], ou mesmo o capítulo 5 de [4].

Teorema 1.20. *(Divisão de Rham-Saito) Seja ω um germe de 1-forma holomorfa de $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ e β um germe de k-forma tal que $\omega \wedge \beta = 0$. Se $k < CodSing(\omega)$, existe um germe θ de $(k-1)$-forma tal que*

$$\beta = \omega \wedge \theta$$

Em particular, quando ω possui singularidades isoladas, o teorema se aplica a toda forma de grau menor ou igual a $n - 1$.

O resultado seguinte mostra que se M é uma superfície complexa, as noções de folheação de dimensão ou codimensão um são as mesmas.

Proposição 1.21. *Seja M uma superfície complexa. Então dada uma coleção de campos holomorfos satisfazendo a condição de colagem, existe uma coleção de 1-formas satisfazendo a condição de colagem e vice-versa.*

Demonstração. Seja $\{X_i\}$, $\{U_i\}$ e $\{g_{ij}\}$ coleção de campos holomorfos saisfazendo a condição de colagem. A menos de um refinamento da cobertura $\{U_i\}$, podeos supor que U_i é domínio de uma carta local $\phi_i : U_i \to \mathbb{C}^2$. Para cada i podemos escrever $\phi_i = (x_i, y_i)$ e $X_i = a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial}{\partial y_i}$. Consideramos a 1-forma dual de X_i definida por $\omega_i = i_{X_i}(dx_i \wedge du_i) = a_i dy_i - b_i dx_i$. Segue que se $X_j = g_{ij} X_i$, então $\omega_j = g_{ij}.det_{ij}$, sendo det_{ij} o determinante da jacobiana da mudança de coordenadas $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$. A recíproca segue de modo análogo. ■

Deixamos aqui alguns comentários superficiais sobre o problema de Cousin. Seja M uma variedade complexa e $\{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura de abertos que são imagens de polidiscos de $\mathbb{C}^n$ pelas cartas de M. Um cociclo de funções holomorfas em M é dado por uma coleção de funções holomorfas $h_{ij} \in O_M(U_j \cap U_k)$ satisfazendo:

$$h_{jk} + h_{kl} + h_{lj} = 0; \quad h_{jk} + h_{kj} = 0$$

em $U_i \cap U_j \cap U_k$ e $U_j \cap U_k$, respectivamente. Dizemos que o cociclo $\{h_{jk}\}$ é um cobordo se é possível encontrar funções h_l definidas nos abertos U_l de modo que

$$h_{jk} = h_{j|U_j \cap U_k} - h_{k|U_j \cap U_k}.$$

Esse é o problema aditivo ou primeiro problema de Cousin. Enunciamos abaixo o Teorema de Cartan da forma como será utilizado nesse texto e cuja prova pode ser vista em [8].

Teorema 1.22. *Seja $\{U_i\}$ uma cobertura de abertos de $\mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ com $n \geq 3$ ou de $\mathbb{C}^n$ com $n \geq 1$. Então todo cociclo é um cobordo.*

De modo análogo, podemos considerar o problema de Cousin multiplicativo ou segundo problema de Cousin, que trata de decidir se todo cociclo é um cobordo no caso multiplicativo.

A próxima proposição caracteriza completamente folheações definidas em $\mathbb{C}^n$ e nos fornece um exemplo do uso do Teorema de Cartan.

Proposição 1.23. *Uma folheação $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}^n$ é definida por uma 1-forma integrável global.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{C}^n$ e $\{(U_j, \omega_j)\}$ um sistema que define $\mathcal{F}$. Na intersecção $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, a condição de colagem nos diz que $\omega_j = h_{jk}\omega_k$, onde $h_{jk} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$. Note que se $U_j \cap U_k \cap U_l \neq \emptyset$, teremos em $U_k \cap U_l$ que $\omega_k = h_{kl}\omega_l$ e também $\omega_l = h_{lj}\omega_j$. Unindo esses fatos, segue que $\omega_j = h_{jk}\omega_k = h_{jk}h_{kl}h_{lj}\omega_j$. Segue então que $h_{jk}h_{kl}h_{lj} = 1$. É claro que $h_{jk}h_{kj} = 1$. Portanto o problema de Cousin é satisfeito. Então, segue que $h_{jk} = h_k/h_j$. Defina agora a forma global ω que definirá $\mathcal{F}$ pondo $\omega|_{U_j} = h_j\omega_j$. ■

1.3 Separatrizes

Seja f uma função holomorfa definida em uma variedade complexa M, $f : M \to \mathbb{C}$. Dado $p \in M$, tomamos uma carta local $\phi = (z_1, \ldots, z_m)$, em torno de p, de modo que $\phi(p) = 0$.

A expansão de Taylor de f em p é dada, nessas coordenadas, por

$$f \circ \phi^{-1}(z_1, \ldots, z_m) = f_\nu(z_1, \ldots, z_m) + f_{\nu+1}(z_1, \ldots, z_m) + \ldots$$

onde cada f_i é um polinômio homogêneo de grau i e $f_\nu \neq 0$. Chamamos o inteiro não negativo ν de multiplicidade de f em p, $\nu_p f = \nu$. Um cálculo direto mostra que a definição independe da carta local escolhida. Note que f não se anula em p se e somente se $\nu = 0$. Assim, se $\mathcal{F}$ é uma folheação de codimensão um definida em M, definimos a multiplicidade algébrica ou simplesmente multiplicidade de $\mathcal{F}$ em p, denotada por ν_p, tomando um germe de 1-forma ω que representa $\mathcal{F}$ em p, $\omega = \sum_{i=1}^m f_i dz_i$, e colocando $\nu_p(\mathcal{F}) = \min(\nu_p f_1, \ldots, \nu_p f_m)$. Observamos que $\nu_p(\mathcal{F}) \neq 0$ se, e somente se, $p \in Sing(\mathcal{F})$.

Definição 1.24. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em uma variedade complexa M. Se $p \in Sing(\mathcal{F})$, uma separatriz em p é um germe de conjunto analítico H contendo p de modo que $H \backslash Sing(\mathcal{F})$ é, localmente, uma reunião de folhas de $\mathcal{F}$.*

Claramente se H é uma separatriz de $\mathcal{F}$, então H deve ter codimensão um. Se f é uma equação local e redutível de H, mediante uma aplicação do Teorema dos Zeros de Hilbert-Rückert ([12]), H é separatriz de $\mathcal{F}$ se e somente se dado um gerador local ω de $\mathcal{F}$ em p, temos que f divide $\omega \wedge df$, isto é, existe um germe de 2-forma holomorfa η tal que

$$\omega \wedge df = f\eta.$$

Exemplo 1.25. Seja $\omega = pydx + qxdy$, onde p e q são naturais. Então a folheação dada por $\omega = 0$ tem separatrizes na singularidade $(0, 0)$ dadas por $x = 0$ e $y = 0$. Para ver isso, basta observar que $\omega \wedge dx = x(-qdx \wedge dy)$ e $\omega \wedge dy = y(pdx \wedge dy)$. ◀

Exemplo 1.26. Se $\omega = pxdy - qydx$, onde p, q são naturais relativamente primos, existe uma infinidade de separatrizes contendo a singularidade (0,0) da forma $f = y^p - cx^q = 0$, onde $c \in \mathbb{C}^*$. De fato, basta notar que $\omega \wedge df = f(-pqdx \wedge dy)$ ◀

O Teorema de Camacho-Sad (para uma prova veja, por exemplo, [4]) afirma que se p é uma singularidade de uma folheação definida em uma superfície complexa, então existe uma separatriz passando por p.

1.4 Folheações no Espaço projetivo

Caracterizaremos agora as folheações singulares definidas em espaços projetivos.

Seja M uma variedade complexa. Uma 1-forma meromorfa ω em M se diz integrável se e somente se satisfaz $\omega \wedge d\omega = 0$. Denotamos por $|\omega|_\infty$ o conjunto de pólos de ω. Note que ω é integrável e holomorfa quando restrita ao aberto $M \backslash |\omega|_\infty$, onde $Sing(\omega)$ é o conjunto de zeros de ω. Dizemos que uma folheação de codimensão um $\mathcal{F}$ em uma variedade M pode ser definida por 1-formas meromorfas se para todo ponto $p \in M$ existe uma 1-forma meromorfa integrável ω em M tal que $p \notin |\omega|_\infty$ e ω define $\mathcal{F}$ em $M\backslash|\omega|_\infty$.

Exemplo 1.27. Nesse exemplo, veremos como estender uma folheação definida em $\mathbb{C}^n$ para uma folheação em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(n)$.

Seja $\omega = \sum_{j=1}^n f_j(z)dz_j$ uma 1-forma holomorfa integrável definida em $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, com $f_1, \dots, f_n$ polinômios. Como $CodSing(\omega) \geq 2$, então $f_1, \dots, f_n$ não possuem fator irredutível em comum. Identificamos $\mathbb{C}^n$ com a carta afim $U_n = \{[z] = [z_o, \dots, z_n] \in \mathbb{C}\boldsymbol{P}(n); z_n \neq 0\}$. O hiperplano no infinito é dado por $H = \{[z] = [z_0, \dots, z_n]; z_n = 0\}$. Fixamos $z \in H$, $z = [x_1 : \cdots : x_n : 0]$ tal que por exemplo, $x_1 \neq 0$, ou seja, $z \in U_0$. A mudança de cartas $\phi : U_0 \longrightarrow U_n$ é $[z] = \phi[1 : x] = \left[\frac{1}{x_n}, \frac{x}{x_n}\right]$. Logo, a expressão de ω na carta U_0 é dada por

$$\phi^*\omega = f_1\left(\frac{1}{x_n}, \frac{x}{x_n}\right)\phi\left(\frac{1}{x_n}\right) + \sum_{j=2}^n f_j\left(\frac{1}{x_n}, \frac{x}{x_n}\right) d\left(\frac{x_j}{x_n}\right).$$

Como os f_j são polinômios, a 1-forma acima é meromorfa, sendo $|\phi^*\omega|_\infty = \{x_n = 0\}$. Podemos então escrever $\phi^*(\omega) = \frac{\omega_0}{x_n^k}$, onde ω_0 possui coeficientes polinomiais (em particular é holomorfa). A forma ω_0 é integrável, pois sendo ω integrável, obtemos:

$$\phi^*(\omega)\wedge\phi^*(d\omega) = \phi^*(\omega\wedge d\omega) = 0 = \frac{\omega_0}{x_n^k}\wedge\frac{d\omega_0 x_n^k - kx_n^{k-1}\omega_0}{x_n^{2k}}$$

e portanto $d\omega_0\wedge\omega_0 = 0$. Assim a 1-forma ω_0 define uma folheação que estende $\mathcal{F}$ a $H \cap U_0$. Procedendo de maneira análoga, obtemos formas integráveis ω_j cujas folheações associadas estendem $\mathcal{F}$ a uma folheação $\mathcal{G}$ de $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(n)$. ◀

Com argumento similar ao do exemplo anterior mostra-se que folheações definidas por campos de vetores polinomias em $\mathbb{C}^n$ se estendem a folheações em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(n)$ ([16]).

Denotaremos por $E(x) = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n\frac{\partial}{\partial x_n}$, o campo radial definido em $\mathbb{C}^n$.

Lema 1.28. *Seja ω uma 1-forma polinomial homogênea de grau k definida em $\mathbb{C}^n$ e tal que $i_E(\omega) = 0$. Nessas condições, $i_E(d\omega) = (k+1)\omega$.*

Demonstração. Seja $\omega = \sum_{j=1}^n f_j dz_j$, onde os f_j são homogêneos, todos de grau k. Note que $i_E(\omega) = \sum_{j=1}^n f_j x_j = 0$. Logo,

$$d(i_E(\omega)) = \sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}dx_i\right)x_j + \sum_{j=1}^n f_j dx_j.$$

Note que $d\omega = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}dx_i\right)\wedge dx_j$ e portanto,

$$i_E(d\omega) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}x_i dx_j - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}x_j dx_i \tag{1.1}$$

Note que

$$d(i_E(\omega)) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}x_j dx_i + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f_j\frac{\partial x_j}{\partial x_i}dx_i$$

ou seja,

$$d(i_E(\omega)) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}x_j dx_i + \sum_{j=1}^{n} f_j dx_j \tag{1.2}$$

Usando a relação de Euler em 1.1, e somdando 1.1 com 1.2, obtemos

$$i_E(d\omega) + d(i_E(\omega)) = (k+1)\sum_{j=1}^{n} f_j dx_j.$$

Porém, $i_E(\omega) = 0$. Logo, $i_E(d\omega) = (k+1)\omega$. ■

Teorema 1.29. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa singular de codimensão um em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(n)$, $n \geq 2$. Então $\mathcal{F}$ pode ser representada em coordenadas homogêneas por uma 1-forma polinomial integrável em $\mathbb{C}^{n+1}$*

$$W = \sum_{j=0}^{n} A_j dz_j$$

onde os polinômios A_j são homogêneos e satisfazem a condição de Euler

$$\sum_{j=0}^{n} z_j A_j = 0.$$

Demonstração. Seja $\pi : \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}\boldsymbol{P}(n)$ a projeção de um ponto em sua classe. Como π é uma submersão, então $\pi^*\mathcal{F}$ é uma folheação de codimensão um definida em $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$. Como $n+1 \geq 3$, o Teorema de Cartan nos permite definir $\pi^*\mathcal{F}$ por uma 1-forma global, digamos W, em $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$. Pelo Teorema de Hartogs, podemos estender W para uma 1-forma holomorfa, ainda denotada por W, definida em $\mathbb{C}^{n+1}$. Mostraremos agora a homogeneidade de W. Escreva a expansão de Taylor de W como

$$W = W_\nu + W_{\nu+1} + \ldots$$

Para concluir a prova basta mostrarmos que existe $h \in \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^{n+1}}$ tal que $W = hW_\nu$. Se E é o campo radial, afirmamos que $i_E(W) = 0$. De fato, $\mathcal{F}$ é dada localmente por 1-formas η_j em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(n)$. Consideramos a carta (U_0, ϕ_0). Note que se, por exemplo, temos η definida em U_0, então em $\pi^{-1}(U_0)$ temos W dada por $W = \pi^*\eta$. Na carta (U_0, ϕ_0), π é dada por

$\phi_0 \circ \pi(z_0,\ldots,z_n) = \left(\frac{z_1}{z_0},\ldots,\frac{z_n}{z_0}\right)$. Então se $\eta = a_1 d\tilde{z_1} + \cdots + a_n d\tilde{z_n}$, temos nessa carta que

$$\pi^*\eta = a_1\left(\frac{1}{z_0}dz_1 - \frac{z_1}{z_0^2}dz_0\right) + \cdots + a_n\left(\frac{1}{z_0}dz_n - \frac{z_n}{z_0^2}dz_0\right)$$

e portanto, $i_E(\pi^*\eta) = 0$. Repetindo o argumento nas outras cartas, obteremos $i_E(W) = 0$.

Note que $W \wedge dW = 0 \Rightarrow i_E(W \wedge dW) = 0 \Rightarrow W \wedge i_E(dW) = 0$. O lema de divisão de Rham-Saito, nos dá $h \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^{n+1})$ tal que $i_E(dW) = hW$. Como cada W_j é homogêneo de grau j, temos $i_E(dW_j) = (j+1)W_j$. Assim, temos

$$hW = (\nu+1)W_\nu + (\nu+2)W_{\nu+1} + \ldots.$$

usando a expansão de h em Taylor e igualando termos de mesma ordem, obtém-se que $W_j = h'_{j-\nu}W_\nu$, onde os $h'_{j-\nu}$ são homogêneos de grau $j-\nu$. Então segue que

$$W = \left(1 + \sum_{j\geq\nu+1} h'_{j-\nu}\right)W_\nu = h'W_\nu.$$

Assim, a folheação é dada pela 1-forma homogênea de grau ν, W_ν. Por fim, note que $i_E(W) = 0$ nos dá a condição de Euler. ∎

Observe que dado W como no enunciado do teorema 1.29, considerando $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(n)$ dado pelas cartas $U_j = \{(z_0,\ldots,z_n); z_j = 1\}$, e dada a imersão canônica i_j de U_j em $\mathbb{C}^{n+1}$, se $\omega_j = i_j^*W$, então as formas ω_j se colam definindo uma folheação em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(n)$. Identificando $\mathbb{C}^n$ com a carta U_n, tomando W como no anteriormente e pondo $z_n = 1$, obtemos uma 1-forma polinomial definida em $\mathbb{C}^n$.

Note também que a palavra "singular" que aparece no enunciado do Teorema 1.29 poderia, a priori, ser retirada. Porém, como afirmamos antes, não existe folheação regular definida em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(n)$. Para $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ esse fato segue como corolário do Teorema 1.29.

Corolário 1.30. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação definida em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$. Se $\mathcal{F}$ não possui singularidades nos pontos tais que $z = 0$, então $\mathcal{F}$ possui singularidades nos pontos onde $z = 1$. Assim, toda folheação de $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ possui singularidades.*

Demonstração. Pelo Teorema de Bézout os polinômios A e B têm um número finito de zeros comuns. Seja $p = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto tal que $A(p) = B(p) = 0$. Assim, como $x_0A(p) + y_0B(p) + z_0C(p) = 0$ temos que se $z_0 \neq 0$ então $C(p) = 0$, e assim temos uma singularidade onde $z = 1$. Se $z_0 = 0$, isto é, se $p \in L_\infty$, então basta aplicar uma transformação projetiva de modo que $p \notin L_\infty$ e assim podemos usar o mesmo raciocínio de antes. ∎

Nas condições do Teorema 1.29, se $\mathcal{F}$ é uma folheação definida em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(n)$ e $k+1$ é o grau da 1-forma W, dizemos que k é o grau de $\mathcal{F}$. Denotamos por $\mathcal{F}(n,k)$ o conjunto das folheações holomorfas de codimensão um e grau k definidas em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(n)$. Note que o conjunto $\mathcal{F}(n,k)$ pode ser visto como o conjunto de 1-formas homogêneas W de grau $k+1$ que satisfazem as condições $i_E(W)=0$ e $W \wedge dW = 0$. A primeira condição é uma condição linear nos coeficientes de W e a segunda condição é quadrática. Desse modo, tomando-se o projetivizado do conjunto acima, obtém-se $\mathcal{F}(n,k)$ que portanto tem uma estrutura natural de conjunto algébrico. Para mais detalhes sobre esse fato veja, por exemplo, [16].

Daremos agora a definição geométrica de grau de uma folheação em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$. Seja $L \subset \mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ uma linha projetiva que não é invariante pela folheação $\mathcal{F}$. Dizemos que $p \in L$ é um ponto de tangência de $\mathcal{F}$ com L, se $p \in Sing(\mathcal{F})$ ou $p \notin Sing(\mathcal{F})$ e os espaços tangentes de $\mathcal{F}$ e L coincidem. Esse fato pode ser expresso da seguinte forma: tome um sistema de coordenadas afins (x,y) de $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$. Seja $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ um representante de $\mathcal{F}$ e suponha que $L \cap \mathbb{C}^2$ seja parametrizada por $\varphi(t) = (x_0 + at, y_0 + bt)$ onde $p = \varphi(t_1)$. Nesse caso, como L não é invariante por $\mathcal{F}$, temos $\varphi^*\omega \neq 0$ e vemos que p é um ponto de tangência se, e somente se, $\varphi^*\omega(t) = 0$ quando $t = t_1$. A relação $\varphi^*\omega(t) = 0$ pode ser escrita como

$$P(\varphi(t)).a + Q(\varphi(t)).b = 0.$$

Assim, p é um ponto de tangência se, e somente se, t_1 é raiz do polinômio $P(\varphi(t)).a + Q(\varphi(t)).b = h(t)$. A multiplicidade de tangência de $\mathcal{F}$ com L em p é a multiplicidade de t_1 como uma raíz de h. Denotaremos esse número por $m(\mathcal{F}, L, p)$. Como é de se esperar, $m(\mathcal{F}, L, p)$ não depende da parametrização de $L \cap \mathbb{C}^2$. Definimos o número total de tangência de $\mathcal{F}$ com L como

$$n(\mathcal{F}, L) = \sum_{p \in L} m(\mathcal{F}, L, p)$$

convencionando que $n(\mathcal{F}, L, p) = 0$ se p não é um ponto de tangência. O teorema seguinte nos conduz à definição de grau de uma folheação:

Teorema 1.31. *O número $n(\mathcal{F}, L)$ independe de L, sendo L uma reta projetiva não invariante por $\mathcal{F}$.*

De forma bastante natural e esperada, definimos o grau da folheação $\mathcal{F}$ por $n(\mathcal{F}, L)$, tomando alguma reta L.

O teorema a seguir dá um método de cálculo do grau de uma folheação.

Teorema 1.32. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ expressa em coordenadas afins por $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, onde $d = max(grau(Q), grau(P))$. Então $grau(\mathcal{F}) = d$ ou $grau(\mathcal{F}) = d-1$. Se P_d e Q_d são as partes homogêneas de grau d, respectivamente, de P e Q, então, são equivalentes:*

(i) $grau(\mathcal{F}) = d$;

(ii) $xP_d(x,y) + yQ_d(x,y) \neq 0$;

(iii) A reta no infinito não é invariante por $\mathcal{F}$.

A demonstração dos Teoremas 1.31 e 1.32 podem ser vistas em [15]. Usando as cartas do plano projetivo complexo e o Teorema 1.32, obtém-se a equivalência das duas definições de grau.

Exemplo 1.33. Seja $\mathcal{F}$ a folheação definida em coordenadas afins por $axdy - bydx = 0$ onde $a, b \neq 0$ são números complexos não nulos. Temos que $grau(\mathcal{F}) = 0$ se $a = b$, e $grau(\mathcal{F}) = 1$ se $a \neq b$. ◄

O próximo exemplo classifica completamente folheações de grau zero.

Exemplo 1.34. (Folheações de grau zero)

Considere P e Q polinômios homogêneos de grau um definidos em $\mathbb{C}^{n+1}$, linearmente independentes. Notamos que a forma $\Omega = PdQ - QdP$ define, em coordenadas homogêneas, uma folheação de grau zero em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(n)$. De fato, tomando a carta afim $Q = 1$, temos a 1-forma $\omega = dl$, onde $l = P$ calculado em $Q = 1$. O fato de P e Q serem linearmente independentes implica que dl é uma 1-forma com coeficientes constantes em $\mathbb{C}^n$.

Toda folheação de grau zero é do tipo acima. Seja $\mathcal{F}$ representada em coordenadas homogêneas pela 1-forma Ω, tal que $\Omega \wedge d\Omega = 0$. Note que $d\Omega$ possui coeficientes constantes, pois Ω possui grau um. Afirmamos que existem 1-formas α, β holomorfas e com coeficientes constantes tais que $d\Omega = \alpha \wedge \beta$. Para mostrar isso, seja $a = i_u(i_v(d\Omega))$, com u e v vetores constantes escolhidos de modo que a é um complexo não nulo. Note que $d\Omega \wedge d\Omega = d(\Omega \wedge d\Omega) = 0$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
0 = i_v(d\Omega \wedge d\Omega) = 2i_v(d\Omega)\wedge d\Omega \Rightarrow \\
0 = i_u(i_v(d\Omega)\wedge\Omega) = i_u(i_v(d\Omega))d\Omega - i_v(d\Omega)\wedge i_u(d\Omega) \\
\Rightarrow d\Omega = \alpha\wedge\beta
\end{aligned}
$$

onde $\alpha = a^{-1} i_v(d\Omega)$ e $\beta = i_u(d\Omega)$. Como α e β têm coeficientes constantes (são fechadas em $\mathbb{C}^n$), existem polinômios de grau um P e Q tais que $\alpha = dP$ e $\beta = dQ$. Segue então que

$$2\Omega = i_E d\Omega = i_E(dP \wedge dQ) = i_E(dP)dQ - i_R(Q)dP = PdQ - QdP,$$

como queríamos mostrar. ◄

Denote por $\mathcal{P}(n, k)$ o conjunto dos polinômios homogêneos de grau k em $\mathbb{C}^m$. O que o exemplo anterior mostra é que o espaço $\mathcal{F}(n, 0)$ é parametrizado pela função:

$$(P, Q) \in \mathcal{P}(n + 1, 1) \times \mathcal{P}(n + 1, 1) \mapsto [PdQ - QdP] \in \mathbb{P}(\Lambda_1(n))$$

Por fim, observamos que sendo P e Q linearmente independentes, podemos tomar uma transformação linear T, que associa no espaço dos polinômios (homogêneos) P ao polinômio x e Q ao polinômio y, de modo que dada uma folheação $\mathcal{F}$ em $\mathcal{F}(n, 0)$, podemos mudar o sistema de coordenadas por T a fim de que $\mathcal{F}$ seja dada pela 1-forma $\omega = xdy - ydx$. A folheação gerada por ω é chamada de folheação radial.

2 Divisão Relativa e Lema de Noether

Nesse capítulo, desenvolveremos uma técnica que será utilizada posteriormente para resolver o problema de Poincaré, quando pomos uma restrição na separatriz, pedindo que esta tenha singularidades do tipo nodal.

Lembramos que se S é uma curva algébrica $S \subset \mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ e $p \in S$ é uma singularidade de S, dizemos que p é do tipo nodal, ou com cruzamento normal, se em torno de uma vizinhança de p, existe um sistema de coordenadas local em que o polonômio homogêneo que define S é dado por $f = xy$. Isso é equivalente a dizer que existem dois ramos suaves de curva passando por p.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa singular de codimensão um em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$, dada em coordenadas homogêneas pela 1-forma $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, onde P, Q e R são polinômios homogêneos de mesmo grau. Seja S uma curva algébrica em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ dada por $S = \{f = 0\}$, onde f é um polinômio homogêneo. Neste capítulo, vamos supor que f é reduzido, isto é, sua decomposição em fatores primos não contém fatores com potências ≥ 2, e que $\mathcal{F}$ tenha S como separatriz. Nessas condições, damos a seguinte definição:

Definição 2.1. *Dizemos que ω tem a propriedade de divisão relativa (PDR) com relação a f se pudermos escrever $\omega = gdf + f\mu$, com g polinômio homogêneo e μ uma 1-forma holomorfa. Dizemos que ω tem a propriedade de divisão relativa (PDR) no ponto p com relação a f, se existem germes g_p e μ_p tais que $\omega_p = g_p df + f\mu_p$. Dizemos que ω tem PDR localmente com relação a f se satisfaz PDR em todos os pontos de $\mathbb{C}^3 \backslash \{0\}$.*

No primeiro caso da definição acima, dizemos também que ω tem PDR global com relação a f. Se algum dos itens da definição for satisfeito, também dizemos que a folheação tem PDR em relação a f.

Notamos que se uma folheação é dada em coordenadas afins e satisfaz PDR nesse sistema de coordenadas, então o projetivizado dessa folheação também satisfará esta propriedade.

Exemplo 2.2. Considere uma folheação representada em coordenadas homogêneas pela 1-forma ω tendo a reta $z = 0$ como separatriz. Nesse caso, ω pode ser escrita como $\omega = z\alpha dx + z\beta dy + \gamma dz$, onde α, β e γ são holomorfas.Tomando $g = \gamma$ e $\mu = \alpha dx + \beta dy$, obtemos que ω tem PDR em relação a z. ◄

Exemplo 2.3. Seja f um polinômio homogêneo reduzido e $f = f_1 \cdots f_k$ a decomposição de f em fatores irredutíveis, onde $k > 1$. Considere a folheação ω em coordenadas homogêneas dada por $\omega = df$. Note que a equação $f_j = 0$ dá uma curva invariante por ω. Nesse caso, temos $df = \sum_{i=1}^{k} f_1 \cdots \hat{f_i} \cdots f_k df_i$. Tomando $h = f_1 \cdots \hat{f_j} \cdots f_k$, obtemos que, $\forall j$, $df = hdf_j + f_j\alpha$, onde $f_j\alpha = \sum_{i \neq j} f_1 \cdots \hat{f_i} \cdots f_k df_i$. Segue que a folheação tem PDR em relação a cada f_j. ◄

Começamos explorando alguns fatos básicos concernentes à definição 2.1.

Proposição 2.4. *Se ω tem PDR localmente com relação a f, então ω tem PDR global.*

Demonstração. Seja $(P_i)_{i\in A}$ uma cobertura de $\mathbb{C}^3\backslash\{0\}$ por polidiscos tal que $\omega|_{P_i} = g_i df + f\mu_i$, onde $g_i \in \mathcal{O}(P_i)$ e μ_i é uma 1-forma holomorfa. Em $P_i \cap P_j \neq \emptyset$, temos $g_i df + f\mu_i - g_j df - f\mu_j = 0$ e então,

$$(g_i - g_j)df = f(\mu_j - \mu_i).$$

Sendo f reduzida, então f divide $g_i - g_j$.

Como consequência, existe $h_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ de modo que

$$(g_i - g_j) = h_{ij} f. \tag{2.1}$$

Como $0 = g_i - g_j + g_j - g_k + g_k - g_i$, por (2.1) segue que $0 = (h_{ij} + h_{jk} + h_{ki})f \Rightarrow h_{ij} + h_{jk} + h_{ki} = 0$. Então h_{ij} satisfaz a condição de cociclo aditivo em $P_i \cap P_j \cap P_k$. Pelo Teorema de Cartan, h_{ij} pode ser escrito como $h_{ij} = h_j - h_i$, onde $h_i \in \mathcal{O}(P_i)$. Substituindo essa igualdade em (2.1), obtemos

$$g_i - g_j = (h_j - h_i)f \Rightarrow g_i + h_i f = g_j + h_j f.$$

Definimos g em $\mathbb{C}^3\backslash\{0\}$ pondo

$$g|_{U_i} = g_i + h_i f.$$

Pelo Teorema de Extensão de Hartogs, g pode ser estendida a $\mathbb{C}^3$. Por outro lado, temos também que $h_{ij}df = \mu_j - \mu_i$. Como $h_{ij} = h_j - h_i$, temos

$$(h_j - h_i)df = \mu_j - \mu_i$$

e então, $\mu_i - h_i df = \mu_j - h_j df$ em $P_i \cap P_j$. Assim, podemos definir uma 1-forma holomorfa em $\mathbb{C}^3\backslash\{0\}$ pondo $\mu|_{P_i} = \mu_i - h_i df$. Novamente, pelo Teorema de Hartogs, podemos estender μ a $\mathbb{C}^3$. Por construção, podemos escrever

$$\omega = gdf + f\mu.$$

Como f e ω são homogêneas, podemos supor que g e μ são homogêneas, eliminando, se necessário, os monômios de graus não compatíveis de g e μ. ∎

Exemplo 2.5. Consideremos o caso em que uma folheação é representada em coordenadas homogêneas por uma 1-forma ω e que possua uma separatriz lisa (sem singularidades) dada por $f = 0$. Como f é lisa, podemos achar um sistema de coordenadas em que a curva $\{f = 0\}$ é dada por $y = 0$. Note que nessas coordenadas, ω se escreve como $\omega = yAdx + Bdy + yCdz$ com A, B e C polinômios homogêneos. Assim, $\omega = Bdy + y(Adx + Cdz)$ e portanto ω tem PDR global com relação a f.

Exemplo 2.6. Considere a folheação dada em coordenadas afins pela 1-forma $\omega = pxdy - qydx$ com p e q primos entre si e a separatriz de ω dada por $f(x, y) = x^p - y^q = 0$. Afirmamos que ω não tem PDR em relação a f. De fato, se tivermos $\omega = gdf + f\mu$ então $d\omega = dg \wedge df + df \wedge \mu + f d\mu$. Como f é singular em $p = (0, 0)$, temos $f(p) = 0$ e $df(p) = 0$. Portanto, $d\omega(p) = 0$. Porém, isso não pode acontecer pois $d\omega = (p + q)dx \wedge dy$ nunca se anula. ◀

A Proposição 2.4, em linhas gerais, nos diz que uma certa propriedade local é equivalente à mesma propriedade global. O próximo teorema caminhará no mesmo sentido, tratando-se de um tipo de Lema de Noether para folheações em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$. Note que se uma folheação $\mathcal{F}$ de grau n é dada pela forma homogênea $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, fixado $p \in \mathbb{C}^3 \backslash \{0\}$ podemos tomar germes P_p, Q_p, R_p, gerados por R, P e Q e considerar o ideal local $I(\omega)_p \subset \boldsymbol{O}_p$ gerado por (P_p, Q_p, R_p) e também o ideal gerado por (P, Q, R). Um deles é de característica local e outro global. A proposição seguinte relaciona de algum modo esses ideais:

Proposição 2.7. *Seja g um polinômio homogêneo de $\mathbb{C}^3$ tal que para cada $p \in \mathbb{C}^3 \backslash \{0\}$ o germe g_p pertence a $I(\omega)_p$. Então $g \in I(\omega)$, isto é, existem polinômios homogêneos A, B, C tais que $g = AP + BQ + CR$.*

Demonstração. Seja (U_i) uma cobertura de $\mathbb{C}^3 \backslash \{0\}$ por abertos, tais que para cada i, temos

$$g|_{U_i} = A_i P + B_i Q + C_i R$$

onde $A_i, B_i, C_i \in \boldsymbol{O}(U_i)$. Em U_i definimos a 2-forma:

$$\mu_i = A_i dy \wedge dz + B_i dz \wedge dx + C_i dx \wedge dz.$$

Com isso, temos que

$$\omega \wedge \mu_i = g|_{U_i} \Omega$$

com $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$. De fato, temos

$$\omega \wedge \mu_i = (Pdx + Qdy + Rdz) \wedge (A_i dy \wedge dz + B_i dz \wedge dx + C_i dx \wedge dy)$$

e então

$$\omega \wedge \mu_i = PA_i dx \wedge dy \wedge dz + QB_i dx \wedge dy \wedge dz + RC_i dx \wedge dy \wedge dz = g|_{U_i} \Omega$$

exatamente como afirmado.

Calculando $\omega \wedge \mu_{ij}$, obtemos

$$\omega \wedge \mu_{ij} = \omega \wedge \mu_j - \omega \wedge \mu_i = g_i \Omega - g_j \Omega = 0$$

em $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Assim, contraindo $\omega\wedge\mu_{ij}$ pelo campo radial $E = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$, obtemos:

$$0 = i_E(\omega\wedge\mu_{ij}) = i_E(\omega)\wedge\mu_{ij} - \omega\wedge i_E(\mu_{ij}).$$

Lembrando que $i_E(\omega) = 0$, obtemos da equação acima que $\omega\wedge i_E(\mu_{ij}) = 0$. Como $CodSing(\omega) \geq 2$, pelo lema de divisão de Rham-Saito, podemos escrever $i_E(\mu_{ij}) = h_{ij}\omega$, onde $h_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$. Agora, como $\mu_{ij} + \mu_{jk} + \mu_{ki} = 0$ em $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, temos

$$0 = i_E(\mu_{ij}) + i_E(\mu_{jk}) + i_E(\mu_{ki}) = (h_{ij} + h_{jk} + h_{ki})\omega$$

e isso implica que $h_{ij} + h_{jk} + h_{ki} = 0$ para $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$. Sendo ω homogênea de grau k, e lembrando que $i_E(d\omega) = (k+1)\omega$, segue que

$$i_E(\mu_{ij}) = \frac{h_{ij}}{k+1} i_E(d\omega)$$

e assim, $i_E\left(\mu_{ij} - \frac{h_{ij}}{k+1}d\omega\right) = 0$. Chamando $\tilde{h_{ij}} = \frac{h_{ij}}{k+1}$, temos

$$i_E(\mu_{ij} - \tilde{h_{ij}}d\omega) = 0.$$

Para completar a demonstração, provaremos a seguinte afirmação:

Afirmação 2.1. *Seja $\eta = Adx\wedge dy + Bdy\wedge dz + Cdx\wedge dz$ uma 2-forma em $U \subset \mathbb{C}^3$ e X um campo holomorfo que não se anula em U. Se $i_X(\eta) = 0$, então $\eta = li_X(\Omega)$ para algum $l \in \mathcal{O}(U)$.*

De fato, escrevendo $X = X_1\frac{\partial}{\partial x} + X_2\frac{\partial}{\partial y} + X_3\frac{\partial}{\partial z}$, como $i_X(\eta) = 0$, temos:

$$(-AX_2 - CX_3)dx + (AX_1 - BX_3)dy + (BX_2 + CX_1)dz = 0. \tag{2.2}$$

Agora, note que

$$i_X(\Omega) = X_1 dy\wedge dz - X_2 dx\wedge dz + X_3 dx\wedge dy. \tag{2.3}$$

Usando (2.2), notamos que $\frac{A}{X_3} = \frac{-C}{X_2} = \frac{B}{X_1}$, onde as expressões são bem definidas. Definimos então l como um dos quocientes acima, onde isso pode ser feito. Note que dado $x \in U$, algum dos X_i é não nulo; podemos então definir, em uma vizinhança em torno de x, uma função holomorfa como sendo a fração que não se anula. Faça isso para todo $x \in U$ e defina l como a colagem de todas essas funções. Por fim, substituindo essas relações em (2.3), obtemos que $\eta = li_X(\Omega)$, o que prova a afirmação.

Usando agora a afirmação 2.1 observando que o campo radial não se anula em $\mathbb{C}^3\backslash\{0\}$, obtemos $l_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$, de modo que

$$\mu_{ij} = \tilde{h_{ij}}d\omega + l_{ij}i_E(\Omega). \tag{2.4}$$

Como μ_{ij} e h_{ij} satisfazem a condição de cociclo, o mesmo acontece com l_{ij}. Logo, pelo Teorema de Cartan, temos $\tilde{h_{ij}} = \tilde{h_j} - \tilde{h_i}$ e $l_{ij} = l_j - l_i$. Substituindo em (2.4), temos

$$\mu_i - \mu_j = (h_j - h_i)d\omega + (l_j - l_i)i_E(\Omega)$$

e então,

$$\mu_i + h_i d\omega + l_i i_E(\Omega) = \mu_j + h_j d\omega + l_j i_E(\Omega).$$

Logo, podemos definir uma 2-forma holomorfa em $\mathbb{C}^3 \backslash \{0\}$ de modo que quando restrita a U_i, μ seja $\mu_i + h_i d\omega + l_i i_E(\Omega)$. Dessa forma, em cada U_i, temos

$$\omega \wedge \mu = \omega \wedge \mu_i + \omega \wedge l_i d\omega + \omega \wedge l_i i_E(\Omega).$$

Como $\omega \wedge \Omega = 0$, temos $0 = i_E(\omega \wedge \Omega) = i_E(\omega) \wedge \Omega + \omega \wedge i_E(\Omega)$, donde $\omega \wedge i_E(\Omega) = 0$. Usando o fato de que $\omega \wedge d\omega = 0$ e $\omega \wedge i_E(\Omega) = 0$, juntamente com o modo como μ foi definida, obtemos

$$\omega \wedge \mu = \omega \wedge \mu_i = g\Omega.$$

Podemos supor que μ é homogêneo pois ω, g e Ω são homogêneos. Logo, todas as componentes da 2-forma μ são homogêneas e isso é suficiente para garantir que $g \in I(\omega)$. ■

Usando os resultados anteriores, podemos dar uma resposta positiva para o problema de Poincaré no caso de a separatriz da folheção ser lisa. Na verdade, a estimativa do grau da curva em termos do grau da folheação fica um pouco melhor nesse caso.

Teorema 2.8. *([6]) Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau n em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ dada em coordenadas homogêneas por uma 1-forma polinômial ω. Seja S uma separatriz lisa de $\mathcal{F}$, definida pelo polinômio irredutível f de grau m. Então ω tem PDR em relação a f e $m \leq n+1$.*

Demonstração. Pelo exemplo 2.5, ω tem PDR em relação a f e portanto $\omega = gdf + f\mu$. Repetindo argumentos das proposições 2.4 e 2.7 podemos supor que g e μ são homogêneos. Vamos mostrar agora que $\mu \neq 0$. De fato, supondo que $\mu = 0$, obtemos $\omega = gdf$ e portanto $i_E(\omega) = i_E(gdf) = mf$, usando a relação de Euler. Mas isso é uma contradição, pois $i_E(\omega) = 0$. Comparando os graus da equação $\omega = gdf + f\mu$, obtemos que $m \leq n+1$. ■

Corolário 2.9. *Nas hipóteses do Teorema 2.8, suponha que $m = n+1$. Então $\mathcal{F}$ coincide com uma folheação dada pelas curvas de uma função racional $\frac{f}{g^m}$ onde o grau de g é um. Em particular, podemos escolher um sistema de coordenadas afins $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ tal que $\mathcal{F}|_{\mathbb{C}^2}$ é dada pelas curvas de nível de um polinômio.*

Demonstração. Se $m = n+1$, de $\omega = gdf + f\mu$, obtemos que o grau de g é um e o grau de μ é zero. Como $i_E(\omega) = 0$, obtemos que

$$0 = i_E(\omega) = i_E(gdf + f\mu) = i_E(gdf) + i_E(f\mu).$$

Como $i_E(df) = mf$, concluímos que

$$i_E(\mu) = -mg.$$

Fazendo $\mu = Adx + Bdy + Cdz$ e observando que A, B e C são números complexos (pois o grau de μ é zero), obtemos:

$$i_E(\mu) = Ax + By + Cz = -mg,$$

e então

$$Adx + Bdy + Cdz = -mdg,$$

logo, $\mu = -mdg$. Usando PDR, concluímos que $\omega = gdf - mfdg$. Observando agora que

$$d\left(\frac{f}{g^m}\right) = \frac{g^{m-1}(gdf - mfdg)}{g^{2m}},$$

temos $d\left(\frac{f}{g^m}\right) = g^{-m-1}\omega$ ou seja,

$$\omega = g^{m+1} d\left(\frac{f}{g^m}\right).$$

Daí, a folheação coincide com a folheação dada pelas curvas de nível de $\frac{f}{g^m}$. Por fim, se tomarmos um sistema de coordenadas afim $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$, tal que $g = 0$ é a reta no infinito, obtemos a última afirmação dada no enunciado, pois nesse caso, as coordenadas afins correspondem a $g \neq 0$ e portanto, $d\left(\frac{f}{g^m}\right) = 0$ se, e somente se, $mdg = gdf$; logo $\omega = 0$ se e somente se $(g - fg)df = 0$, e o resultado segue. ■

Proposição 2.10. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau n dada por uma 1-forma ω. Suponha que todas as singularidades de ω são não degeneradas (isso é equivalente ao fato que $\mathcal{F}$ tem $n + n^2 + 1$ singularidades distintas). Seja g um polinômio homogêneo em $\mathbb{C}^3$ que se anula no conjunto singular de ω. Então $g \in I(\omega)$.*

Demonstração. Fixado $p \in \mathbb{C}^3\backslash\{0\}$, temos, por hipótese que $g_p \in I(\omega)_p$, logo pela Proposição 2.7, $g \in I(\omega)$. ■

Veremos agora a divisão local em dimensão 2, pois a aplicação concreta da Proposição 2.4 só é possível se conhecermos como a folheação se comporta localmente.

Considere um germe de curva $f = 0$ na origem de $\mathbb{C}^2$, com f reduzida. Denotamos por $\Lambda_0(f)$ o conjunto de germes de 1-formas holomorfas tendo f como separatriz. Uma forma $\omega \in \Lambda_0(f)$ se e somente se $\omega \wedge df = f\eta$, onde η é um germe de dois forma holomorfa. Note que $\Lambda_0(f)$ é um $\boldsymbol{O}_2$ módulo. Denotaremos por $\Lambda_1(f)$ o conjunto dos germes de 1-formas holomorfas em $0 \in \mathbb{C}^2$ que tem PDR com relação a f. Notamos que $\Lambda_1(f)$ é um submódulo de $\Lambda_0(f)$. De fato, seja $\omega \in \Lambda_1(f)$ e escreva $\omega = gdf + f\mu$, onde μ é um germe de 1-forma e g é um germe de curva. Obtemos então que $\omega \wedge df = gdf \wedge df + f\mu \wedge df = f(\mu \wedge df)$, e então $\omega \in \Lambda_0(f)$, Agora, se $h \in \mathcal{O}_2$, $h\omega = hgdf + h\mu f$, donde $h\omega$ tem PDR em relação a f e $\Lambda_1(f) \subset \Lambda_0(f)$ é um submódulo.

Definição 2.11. *Seja $f \in \mathcal{O}_2$ uma função holomorfa. Dizemos que f é quasihomogênea se existem um sistema de coordenadas (x, y) e racionais positivos k, l tais que f se escreve como*

$$f = \sum_{ki+lj=1} a_{ij}x^i y^j.$$

Por exemplo, é imediato que todo polinômio homogêneo é quasihomogêneo, pois se d é o grau de um polinômio homogêneo, basta tomar $l = k = \frac{1}{d}$. Outro exemplo pode ser dado por $f(x, y) = x^{a_1} + y^{a_2}$, pois

$$f(x, y) = \sum_{\frac{1}{a_1}i+\frac{1}{a_2}j=1} x^i y^j.$$

Observamos que a definição dada acima se estende naturalmente para uma função holomorfa de n variáveis. Outro fato importante que será utilizado posteriormente, é que se $I = (f_x, f_y)$ é o ideal jacobiano de f e f é quasihomogênea, então $f \in I(f_x, f_y)$. De fato, escreva

$$f = \sum_{ki+lj=1} a_{ij}x^i y^j$$

com l, k racionais positivos. Calculando f_x e f_y, obtemos

$$f_x = \sum_{ki+lj=1} ia_{ij}x^{i-1}y^j \quad \text{e} \quad f_y = \sum_{ki+lj=1} ja_{ij}x^i y^{j-1}$$

e usando o fato que $ki + lj = 1$, obtemos

$$f = xkf_x + ylf_y$$

e então $f \in I(f_x, f_y)$.

Para f como descrita acima, considere a folheação dada por $\omega_0 = lydx - kxdy$. Note que sendo f quasihomogênea, $f = lxf_x + kyf_y$, e portanto

$$\omega_0 \wedge df = (-lydx - kxdy) \wedge (f_x dx + f_y dy) = (kxf_x + lyf_y)dx \wedge dy = fdx \wedge dy,$$

ou seja, f é uma separatriz de ω_0; em outras palavras, $\omega_0 \in \Lambda_0(f)$.

Lema 2.12. *Seja $f \in \mathcal{O}_2$ quasi-homogênea. Se $\omega \in \Lambda_0(f)$ então existem $g, h \in \mathcal{O}_2$ tais que $\omega = gdf + h\omega_0$.*

Demonstração. Como $\omega \in \Lambda_0(f)$, então $\omega \wedge df = f\eta$, onde $\eta = hdx \wedge dy$ é uma 2-forma holomorfa. Assim, podemos escrever $\omega \wedge df - hfdx \wedge dy = 0$. Agora, $\omega_0 \in_0 (f)$ e $\omega_0 \wedge df =$

$f dx \wedge dy$ e substituindo na expressão acima, obtemos

$$\omega \wedge df - h(\omega_0 \wedge df) = 0,$$

ou seja,

$$(\omega - h\omega_0) \wedge df = 0.$$

Logo, pelo lema de divisão de Rham-Saito, sendo f reduzida (e portanto, $CodSing(df) \geq 2$), obtemos $\omega = gdf + h\omega_0$. ■

Lema 2.13. *Sejam f quasihomogênea e $h \in \mathcal{O}_2$. Então $h\omega_0 \in \Lambda_1(f)$ se e somente se $h \in I(f_x, f_y)$.*

Demonstração. Suponha inicialmente que $h\omega_0 \in \Lambda_1(f)$. Então, podemos escrever $h\omega_0 = gdf + f\mu$, onde g é uma função holomorfa e μ é uma 1-forma holomorfa. Então

$$hf dx \wedge dy = h\omega_0 \wedge df = (gdf + f\mu) \wedge df = f\mu \wedge df$$

e portanto $hdx \wedge dy = \mu \wedge df$. Escrevendo $\mu = Adx + Bdy$, obtemos que $h = -Bf_x + Af_y$, donde $h \in I(f_x, f_y)$.

Reciprocamente, seja $h \in I(f_x, f_y)$ Então $h = af_x + bf_y$, e tomando $\mu = bdx - ady$, temos $hdx \wedge dy = \mu \wedge df$. Logo, $(h\omega_0 - f\mu) \wedge df = 0$. Como f é reduzida, temos $h\omega_0 - f\mu = gdf$, $g \in \mathcal{O}_2$. ■

Proposição 2.14. *Nas hipóteses anteriores,*

$$\Lambda_0(f) = \Lambda_1(f) \oplus \mathbb{C}f_1\omega_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}f_\mu\omega_0$$

onde $f_1, \ldots f_\mu$ é uma base de $\frac{\mathcal{O}_2}{I(f_x, f_y)}$

Demonstração. Se $\omega \in \Lambda_0(f)$, então pelo Lema 2.12, $\omega = gdf + h\omega_0$, onde $g, h \in \mathcal{O}_2$. Escrevendo $h = c_1 f_1 + \cdots + c_\mu f_\mu + h_1 f_x + h_2 f_y$ e observando que $gdf \in \Lambda_1$, temos o resultado. ■

Proposição 2.15. *Com as hipóteses anteriores, $I(f_x, f_y).\Lambda_0 \subset \Lambda_1$. Em particular, se f tem apenas duas componentes transversas, então $\mathfrak{m}.\Lambda_0 \subset \Lambda_1$, onde $\mathfrak{m}$ é o ideal maximal de $\mathcal{O}_2$.*

Demonstração. Como no Lema 2.12, escreva $\omega = gdf + h\omega_0$. Se $h \in I(f_x, f_y)$, então o lema 2.13 nos dá $h\omega_0 \in \Lambda_1$. A última afirmação é obtida observando que se f possui duas componentes transversais, então f_x, f_y geram o ideal maximal de $\mathcal{O}_2$. ■

Terminamos esse capítulo com um último resultado que será utilizado no capítulo seguinte:

Proposição 2.16. *Seja ω um germe de 1-forma holomorfa e seja $f = 0$, sendo f quasihomogênea, a equação local reduzida de uma curva S em $p = (0, 0)$ que tenha dois ramos transversais suaves em p e que seja separatriz de ω. Então ω tem PDR em relação a f se e somente se $d\omega(0) = 0$.*

Demonstração. Se ω tem PDR em relação a f, escreva $\omega = gdf + f\mu$. Dessa expressão, obtemos $d\omega = dg \wedge df + df \wedge \mu + f d\mu$. Note que a hipótese implica que p é um ponto nodal e portanto, $f(p) = 0$ e $df(p) = 0$. Assim, teremos que $d\omega(0,0) = 0$.

A volta é uma aplicação dos resultados anteriores. Se $d\omega(0) = 0$, e f é separatriz de ω, obtemos do lema 2.12 que $\omega = gdf + h\omega_0$ e tomando a diferencial dessa expressão, obtemos:

$$d\omega = dg \wedge df + dh \wedge \omega_0 + h \wedge d\omega_0,$$

lembrando que $\omega_0 = lydx - kxdy$, temos $\omega_0(0) = 0$ e sendo $df(0) = 0$, obtemos $d\omega(0) = h(0) \wedge d\omega_0 = 0$. Notando que $d\omega_0 = (k + l)dx \wedge dy$, teremos $h(0) = 0$ donde concluímos que $h \in I(f_x, f_y)$. Temos então $h\omega_0 \in \Lambda_1(f)$ e portanto, $\omega \in \Lambda_1(f)$, donde ω tem PDR em relação a f. ■

Exemplo 2.17. Considere a curva dada por $f = xy$, que possui uma singularidade do tipo nodal em $p = (0,0)$. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ dada pela 1-forma $\omega = 2ydx + xdy$. Note que f é uma separatriz de ω. Porém, um simples cálculo mostra que

$$d\omega = -dx \wedge dy,$$

que nunca se anula. A Proposição 2.16 nos permite concluir que ω não possui PDR em relação a f. ◀

Exemplo 2.18. Um exemplo simples mostra que a hipótese de a curva ser singular na origem é necessária. De fato, se temos uma curva suave, podemos tomar um sistema de coordenadas em que essa curva é dada por $y = 0$. Tomando a folheação induzida por $\omega = ydx + (x^2 + 2x)dy$, vemos que $y = 0$ é separatriz de ω e pelo exemplo 2.5 ω tem PDR em relação a f. Porém, $d\omega(0,0) \neq 0$. ◀

3 Problema de Poincaré no caso Nodal

Tendo em vista os resultados da seção anterior, estamos agora prontos para dar uma solução do problema de Poincaré pondo uma restrição na curva que é separatriz de uma folheação. Antes de começarmos a enunciar os resultados, damos algumas definições e propriedades elementares.

Seja M uma variedade complexa, com $\dim M \geq 2$. Sejam $f_1, \ldots f_k$, funções holomorfas definidas sobre M que não são identicamente nulas, e $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ números complexos. A 1-forma meromorfa

$$\eta = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$$

dá origem a uma folheação que chamamos logarítmica. Por exemplo, a folheação radial do exemplo 1.34 é logarítimica, pois $\omega = xdy - ydx$ pode ser escrita como

$$\omega = xy\left(\frac{dx}{y} - \frac{dy}{x}\right).$$

Para a demonstração do Teorema 3.2, vamos precisar do seguinte resultado, cuja prova pode ser encontrada em [7]:

Teorema 3.1. *Sejam ω uma 1-forma holomorfa definida em $\mathbb{C}^n$ e $f = f_1 \ldots f_n$ um polinômio reduzido, de modo que $d\left(\frac{\omega}{f}\right) = 0$. Então existem escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tais que*

$$\frac{\omega}{f} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}.$$

Com isso em mãos, damos uma resposta para o problema de Poincaré dada em [6].

Teorema 3.2. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ de grau n, tendo S como separatriz, onde S é dada pelo polinômio homogêneo reduzido f, de grau m, e todas as singularidades são nodais. Então $m \leq n+2$. Além disso, se $m = n+2$, então f é redutível e $\mathcal{F}$ é logarítmica.*

Demonstração. Seja ω uma 1-forma integrável homogênea definida em $\mathbb{C}^3$ que representa $\mathcal{F}$. Como S é uma separatriz de $\mathcal{F}$, existe uma 2-forma η de modo que

$$\omega \wedge df = f\eta. \tag{3.1}$$

Defina uma 1-forma holomorfa μ por $\mu = \eta + d\omega$. Notamos que, sendo f reduzida, e ω homogênea de grau $n+1$, então η é homogênea de grau n. Segue então que μ como definida acima é homogênea de grau n. Isolando η, temos $\eta = \mu - d\omega$. Segue então que $\omega \wedge df = f(\mu - d\omega)$ e portanto,

$$\omega \wedge df + f d\omega = f\mu. \tag{3.2}$$

Afirmação 3.1. *Se p é singularidade de f, então $\mu(p) = 0$.*

Note que como p é singularidade nodal de f, existe um sistema de coordenadas locais (x, y, z) tal que $f = xy$ e a singularidade p se escreve como $x = y = 0$. Como f é separatriz de ω, podemos escrever ω nesse sistema de coordenadas como

$$\omega = \alpha y dx + \beta x dy + xy\gamma dz, \tag{3.3}$$

onde α, β e γ são holomorfas. Considere as equações 3.2 e 3.3. Usando-as juntamente, temos que

$$\begin{aligned}\omega\wedge df + f d\omega = {} & (\alpha y dx + \beta x dy + xy\gamma dz)\wedge(ydx + xdy)\\ & + xy(\alpha dy\wedge dx + y d\alpha\wedge dx + \beta dx\wedge dy + x d\beta\wedge dy\\ & + y\gamma dx\wedge dz + x\gamma dy\wedge dz + xy d\gamma\wedge dz)\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\omega\wedge df + f d\omega = {} & xy^2\gamma dz\wedge dx + x^2 y\gamma dz\wedge dy + xy^2 d\alpha\wedge dx + x^2 y d\beta\wedge dy\\ & + xy^2\gamma dx\wedge dz + x^2 y\gamma dy\wedge dz + x^2y^2 d\gamma\wedge dz,\end{aligned}$$

que nos dá como resultado:

$$\omega\wedge df + f d\omega = xy^2 d\alpha\wedge dx + x^2 y d\beta\wedge dy + x^2y^2 d\gamma\wedge dz.$$

Note que o $2-$jato do lado direito da expressão acima é nulo e, tendo em vista a equação (3.2), obtemos que $f\mu = xy^2 d\alpha\wedge dx x^2 y d\beta\wedge dy + x^2y^2 d\gamma\wedge dz$ e portanto $\mu = y d\alpha\wedge dx x d\beta\wedge dy + xy d\gamma\wedge dz$. Assim, ou μ tem pelo menos grau um, ou é identicamente nulo (caso em que o lado direito da expressão também se anula) e portanto se anula em $x = y = 0$. Assim, $\mu(0) = 0$. Isso finaliza a prova da afirmação.

Voltamos à prova do teorema. Dividiremos em dois casos. O primeiro caso em que μ é identicamente nula e o segundo caso em que não é.

Caso 1: $\mu \equiv 0$. Nesse caso, lembrando que $\mu = \eta + d\omega$, segue que $d\omega = -\eta$ e portanto, de $\omega\wedge df = -f\eta$, conclui-se que $\omega\wedge df + f d\omega = 0$, e então

$$d\left(\frac{\omega}{f}\right) = \frac{f d\omega + \omega\wedge df}{f^2} = 0.$$

O Teorema 3.1 nos permite concluir que

$$\frac{\omega}{f} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}.$$

Se denotarmos o grau de f_j por d_j, usando o fato que $i_E(\omega) = 0$, fazendo a contração da expressão acima pelo campo radial, obtemos que $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j d_j = 0$. Então $k \geq 2$ e os coeficientes de ω tem grau $m-1$, pois observando que a forma $\frac{\omega}{f}$ tem grau -1, obtemos que $gr(\omega) - grf = -1$ e como $grf = m$, concluímos que $gr(\omega) = m-1$. Porém $gr(\omega) = n+1$. Logo, $n+1 = m-1 \Rightarrow n = m-2$. Isso prova o teorema no primeiro caso.

Caso 2: $\mu \not\equiv 0$. Nesse caso, seja g uma componente de μ, $g \neq 0$. Defina

$$V = \{h; h \text{ é polinômio homogêneo de grau } n \text{ e } h \text{ se anula no conjunto singular de } f\}.$$

É claro que V é um espaço vetorial. Além disso $V \neq \{0\}$, pois $g \in V$, pela a afirmação feita acima.

Seja $h \in V - \{0\}$. Como h se anula no conjunto singular de f, existe um sistema de coordendas (f é uma curva nodal, então localmente $f = xy$) local em torno de $p \in Sing(S)$ de modo que $h \in I(x,y)$. Sendo f homogênea e portanto, quasihomogênea, temos pelo lema 2.13 que $h\omega_0 \in \Lambda_1(f)$, com ω_0 como no capítulo 2. Como $h\omega_0 \in \Lambda_1(f)$, pelo lema 2.12, podemos escrever

$$h\omega = adf + f\theta \tag{3.4}$$

onde a é homogêneo. Usando (3.4), concluímos que a tem grau $2n+2-m$, pois h tem grau n e ω grau $n+1$. Suponhamos agora que $h\omega$ possa ser escrito de outra forma, isto é $h\omega = a_1 df + f\theta_1$, onde a_1 é homogêneo, e como as duas formas de escrever são diferentes, $a \neq a_1$. Note que subtraindo as duas formas de escrever $h\omega$, obtemos:

$$(a - a_1)df = f(\theta_1 - \theta_2).$$

Como f é reduzida, f divide $(a - a_1)$ e como $gr(a) = gr(a_1) = 2n+2-m$ e $gr(f) = m$, temos $m \leq 2n+2-m$ e portanto $m \leq n+1$ e a prova do teorema acaba.

Suponhamos agora que a é unicamente determinado por h. Assim, podemos definir um mapa, que denotaremos por T, que leva um elemento de V no espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau $2n+2-m$. A aplicação T é da forma $T(h) = a$, em que vale a equação $h\omega = adf + f\theta$. Notamos que se T não é injetivo, podemos tomar $h_1 \neq h_2$, de modo que $h_1\omega = adf + f\theta_1$ e $h_2\omega = adf + f\theta_2$ e então $(h_1 - h_2)\omega = f(\theta_2 - \theta_1)$. Como $CodSing(\omega) \geq 2$, as componentes de ω não possuem fator irredutível em comum e então essa última igualdade implica que f divide $h_1 - h_2$. Assim, f divide um polinômio de grau n e portanto, $m \leq n$ e a prova do teorema acaba. Suponhamos então que T é injetiva. Veja que $m \leq n+2$ é equivalente a $n \leq 2n+2-m$. Suponha que $n > 2n+2-m$. Afirmamos que para qualquer $h \in V$ o polinômio $a = T(h)$ se anula no conjunto singular de f. De fato, como $h\omega - adf - f\theta = 0$, tomamos um sistema de coordenadas local em torno do ponto singular de modo que $f = xy$, donde o primeiro jato da expressão $h\omega - adf - f\theta = 0$ é escrito como $-a(0)(xdy + ydx) = 0$, e então, $a(0) = 0$. Seja V_1 o espaço de polinômios homogêneos de grau $2n+2-m$ que se anula no conjunto singular de f. Note que o mapa $T : V \to V_1$ é um mapa linear injetivo (isso implica que

$\dim V \leq \dim V_1$). Mas isso é impossível, pois se A é qualquer polinômio homogêneo de grau $m-n-2>0$, podemos construir um mapa linear injetivo $i_A : V_1 \to V$ dado por $i_A(h_1) = Ah_1$. Isso implica que $\dim V_1 \leq \dim V \Rightarrow \dim V = \dim V_1$ e portanto o mapa i_A é um isomorfismo e isso não pode acontecer, pois não é possível que todos os elementos em V sejam divisíveis por qualquer polinômio homogêneo A de grau $m-n-2$ que escolhermos. Por contradição fica provado que $m \leq n+2$.

Seja agora $m = n+2$. Provaremos que ω é do tipo logarítmica. A prova é por indução no grau $k = n+1$ da 1-forma que determina a folheação. Seja $k=1$. Nesse caso, ω pode ser escrita como $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, onde P, Q e R são homogêneos de grau 1. Lembrando que em coordenadas locais, $f = xy$ é separatriz, obtemos que existe um sistema de coordenadas tal que ω se escreve como $\omega = -ydx + xdy$ (folheação radial). Portanto, $\mathcal{F}$ é logarítmica. Suponha que a afirmação é válida para todo $k \leq k_0 - 1$, onde $k_0 \geq 2$. Vamos prová-la para k_0. Temos, $n+1 = m-1 \Rightarrow 2n+2-m = n$, o que implica $V_1 = V$. Assim, podemos supor que o mapa $T : V \to V_1$ é bem definido e injetivo. Em espaços vetorias complexos, todo operador linear possui autovalor. Seja então λ um autovalor de T. Escrevemos

$$h\omega = \lambda h df + f\theta \tag{3.5}$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$ é o autovalor associado ao autovetor h. Observe que a relação acima implica que se h_1 é um fator irredutível de h, então h_1 divide f ou θ. Como $gr(h) = n < n+2 = gr(f)$, então podemos efetuar todas as possíveis divisões, eliminando h por completo, ficando com

$$\omega = \lambda df + f_1\theta_1 \tag{3.6}$$

onde f_1 divide f e f_1 não é constante. Isso é claro, observando que $gr(f_1) \geq gr(f) - gr(h) = 2$. Sendo f não constante, obtemos que $gr(\theta_1) < gr(\omega)$. Escreva $f = f_1 f_2$. Como $i_E(\omega) = 0$, usando a equação (3.6) e a relação de Euler, obtemos

$$f_1 i_E(\theta_1) + \lambda m f = 0.$$

Então:

$$i_E(\theta_1) = -\lambda m f_2.$$

Denote por m_1 e m_2 os graus de f_1 e f_2, respectivamente. Então a expressão acima nos diz que $k_1 = m_2 - 1$ é o grau de θ_1. Seja L_E a derivada de Lie na direção do campo radial E. Usando a linearidade de L_E e a equação (3.6), temos $L_E(\omega) = L_E(\lambda df) + L_E(f_1\theta_1)$ e portanto, pela definição de L_E:

$$\begin{aligned} i_E(d\omega) + d(i_E(\omega)) &= L_E(\lambda df) + L_E(f_1\theta_1) \\ i_E(d\omega) - L_E(\lambda df) &= L_E(f_1\theta_1) \\ i_E(d\omega) - i_E(\lambda d^2 f) - d(i_E(\lambda df) &= L_E(f_1\theta_1) \\ i_E(d\omega) - d(\lambda mf) &= L_E(f_1\theta_1) \end{aligned}$$

e então $i_E(d\omega) - \lambda mdf = L_E(f_1\theta_1)$. Notando que $i_E(d\omega) = (n+2)\omega$, obtemos

$$(n+2)(\omega - \lambda df) = L_E(f_1\theta_1) \tag{3.7}$$

Calculamos agora $L_E(f_1\theta_1)$:

$$\begin{aligned} L_E\left(f_1\theta_1\right) &= i_E\left(df_1 \wedge \theta_1 + f_1 d\theta_1\right) + d\left(i_E\left(f_1\theta_1\right)\right) \\ &= m_1 f_1\theta_1 - df_1 \wedge i_E\left(\theta_1\right) + f_1 i_E(\theta_1) + df_1 \wedge i_E\left(\theta_1\right) + f_1 d(i_E\left(\theta_1\right). \\ &= m_1 f_1\theta_1 + f_1(L_E\theta_1). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$L_E(f_1\theta_1) = m_1 f_1\theta_1 + f_1(L_E\theta_1). \tag{3.8}$$

Usando as equações 3.7 e 3.8, juntamente com $\omega = \lambda df + f_1\theta_1$, obtemos:

$$(n+2)f_1\theta_1 = m_1 f_1\theta_1 + f_1 L_E\eta_1$$

o que nos dá $(n+2-m_1)\theta_1 = L_E\theta_1$. Note que $n+1-m_1 = k_1$, logo

$$L_E\theta_1 = (k_1+1)\theta_1. \tag{3.9}$$

Pela definição de L_E, temos $L_E\theta_1 = i_E(d\theta_1) + di_E(\theta_1)$. Como $i_E(\theta_1) = -\lambda mf_2$, temos:

$$L_E\theta_1 = i_E(d\theta_1) - \lambda mdf_2.$$

Seja $\omega_1 = \frac{i_E(d\theta_1)}{k_1+1}$. Note que $gr(\omega_1) = k_1 < k$. Da forma como definimos ω_1, temos

$$(k_1+1)\theta_1 = (k_1+1)\omega_1 - \lambda mdf_2.$$

Usando o fato que $k_1 + 1 = m_2$ na equação acima, obtemos

$$m_2\theta_1 = m_2\omega_1 - \lambda mdf_2,$$

e então

$$\theta_1 = \omega_1 - \lambda\frac{m}{m_2}df_2.$$

Usando (3.6), obtemos:

$$\omega = \lambda df + f_1\omega_1 - \lambda\frac{m}{m_2}f_1df_2.$$

Observando que $m = m_1 + m_2$ e que $f = f_1f_2$, temos:

$$\omega = f_1\omega_1 + \lambda d(f_1f_2) - \lambda\frac{m_1}{m_2}f_1df_2 - \lambda f_1df_2,$$

calculando $d(f_1f_2)$ acima, depois de algumas manipulações, teremos:

$$\omega = f_1\omega_1 + \frac{\lambda}{m_2}\left(m_2f_2df_1 - m_1f_1df_2\right).$$

Contraindo a expressão anterior pelo campo radial E, segue que

$$f_1i_E(\omega_1) = -i_E\left(\lambda f_2df_1 - \frac{m_1}{m_2}f_1df_2\right).$$

Essa última expressão implica que $i_E(\omega_1) = 0$. De fato, basta notar que

$$i_E(m_2df_1 - m_1f_1df_2) = m_2f_2m_1f_1 - m_1f_1m_2f_2 = 0.$$

Notamos que f_2 é separatriz de ω_1, pois é uma componente de f. Sendo $f = f_1f_2$ e $df = f_1df_2 + f_2df_1$, obtemos $df \wedge df_2 = f_2df_1 \wedge df_2$ e então f_2 é separatriz de df e portanto, temos que f_2 é separatriz de θ_1, pois $\omega = \lambda df + f_1\theta_1$. Como $\omega = \theta_1 + \lambda\frac{m_1}{m_2}df_2$, então f_2 é separatriz de ω_1.

Usando a equação que define ω_1, resulta que $gr(f_2) = gr(\mathcal{F}_{\omega_1}) + 2$, ou seja, $m_2 = gr(\omega_1) + 1$, logo como $m_2 = k_1 + 1$ segue que $gr(\omega_1) = k_1 < k$. Aplicando a hipótese de indução em f_2 e ω_1 ganhamos

$$\omega_1 = \sum \lambda_j \frac{dh_j}{h_j},$$

onde $h_1, \ldots, h_r$ são componentes de f_2. Portanto, θ_1 é logarítimica e assim, ω é logarítmica. ■

A estimativa pode ainda ser melhorada se tivermos mais restrições sobre a separatriz de $\mathcal{F}$.

Teorema 3.3. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau n em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$. Seja f irredutível de grau m, sendo que a curva $S = \{f = 0\}$ é uma separatriz de $\mathcal{F}$ com apenas uma singularidade, do tipo nodal. Se $\mathcal{F}$ não possui PDR em relação a f, então $m \leq \frac{n}{2} + 2$.*

Demonstração. Seja ω uma 1-forma homegênea de grau $n+1$ em $\mathbb{C}^3$ que represente $\mathcal{F}$. Fazendo uma mudança projetiva de coordenadas, podemos supor que o ponto nodal de f é $[0 : 0 : 1]$. Consideramos as funções lineares x e y.

Afirmação 3.2. *As 1-formas $x\omega$ e $y\omega$ satisfazem PDR (global) com relação a f.*

De fato, tomando coordenadas locais em 0, temos $x \in I(f_x, f_y)$. Então, segue do Lema 2.13 que $x\omega_0 \in \Lambda_1(f)$ (note: como a singularidade é nodal, temos $f = xy$, e então $I(f_x, f_y) = (x, y)$). Como $\omega \in \Lambda_0(f)$ e f é homogênea, o lema 2.12 nos diz que existem $g, h \in \mathcal{O}_2$ tal que $\omega = gdf + h\omega_0$. Segue então que $x\omega = xgdf + hx\omega_0$, e usando o fato que $x\omega_0$ possui PDR local, obtemos que $x\omega$ também possui. Logo, $x\omega$ possui PDR global. A prova para $y\omega$ é a mesma.

Assim, escrevemos:

$$x\omega = g_1 df + f\mu_1 \text{ e } y\omega = g_2 df + f\mu_2. \tag{3.10}$$

Logo, os graus de g_1 e g_2 são dados por $grau(g_1) = grau(g_2) = n + 2 - (m - 1) = n - m + 3$. Note que g_1 não pode ser identicamente nula. Com efeito, se fosse, teríamos $x\omega = f\mu_1$. Como f é irredutível, teriamos que x divide μ_1. Então, podemos escrever $\omega = f\frac{\mu_1}{x}$, e ω teria PDR em relação a f, o que é uma contradição por hipótese. Assim, g_1 não é identicamente nula. Com o mesmo argumento se conclui que g_2 não é identicamente nula. Note que multiplicando $x\omega$ por y e $y\omega$ por x na equação (3.10) e depois subtraindo, obtemos:

$$(xg_2 - yg_1)df = f(y\mu_1 - x\mu_2).$$

Temos duas possibilidades: ou $xg_2 - yg_1$ é identicamente nulo ou não é. Na primeira possibilidade, temos $xg_2 = yg_1$, e portanto, x divide g_1. Assim, usando (3.10) obtemos que x divide μ_1 e então ω possui PDR com relação a f, o que não pode acontecer por hipótese. Segue que vale apenas a segunda possibilidade. Nesse caso, sendo f irredutível, concluímos que f divide $xg_2 - yg_1$ e como $grau(g_1) = grau(g_2) = n - m + 3$, então $m \leq 1 + (n - m + 3)$, ou seja, $2m \leq n + 4 \Rightarrow m \leq \frac{n}{2} + 2$. Portanto, o teorema está provado. ■

Vamos agora construir um exemplo que mostra que a estimativa dada no Teorema 3.3 é a melhor possível. Considere coordenadas afins (x, y) e suponha que f tem um ponto nodal em $(0, 0)$. Escolhemos um sistema de coordenadas tal que

$$f = x^2 - y^2 + \cdots = x^2(1 + \alpha) - y^2(1 + \beta),$$

onde os graus de $1 + \alpha$ e $1 + \beta$ são $m - 2$. Seja $\mathcal{F}$ a folheação em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$, que é dada em coordenadas afins pelas curvas de nível da função $x^2(1 + \alpha)/y^2(1 + \beta) = f_1/f_2$. Essa folheação pode ser representada pela 1-forma:

$$\omega_1 = xy(1 + \alpha)(1 + \beta)\left(2\frac{dx}{x} - 2\frac{dy}{y} + \frac{d\alpha}{1 + \alpha} - \frac{d\beta}{1 + \beta}\right) = \frac{f_2 df_1 - f_1 df_2}{xy}.$$

Seja ω_0 a 1-forma homogênea em $\mathbb{C}^3$ obtida depois da homogeneização. A expressão de ω_1 acima nos mostra que grau de $\omega_0 \geq 2m - 3$, e então grau de $\mathcal{F} \geq 2m - 4$. Afirmamos que ω_0 não satisfaz PDR com relação a f. De fato, se isso fosse verdade, escreveríamos em coordenadas afins $\omega_1 = gdf + f\mu$, e então $d\omega_1(0) = 0$, pois 0 é um ponto nodal de f. Mas, calculando $d\omega_1$, obtemos que $d\omega_1(0) = -4dx\wedge dy$. Então grau de $\mathcal{F} \leq 2m-4$ pelo teorema anterior. Segue então que o grau da folheação é exatamente $2m-4$, como queríamos.

Corolário 3.4. *Sejam f, ω_0 como antes e $\mathcal{F}$ uma folheação de grau n tendo f como separatriz. Seja ω o representante de $\mathcal{F}$ em coordenadas homogêneas. Então, ou $m-2 \leq n < 2m-4$ e ω tem PDR com com relação a f, ou $n \geq 2m-4$ e existe um polinômio homogêneo de grau $n-2m+4$, h, tal que $\omega - h\omega_0$ tem PDR com relação a f. Além disso, se p é o ponto nodal de f, então $h(p) = 0$ se, e somente, ω tem PDR com relação a f.*

Assim, se denotarmos

$$\Lambda_0(f,n) = \{\omega; grau(\omega) = n+1, i_E(\omega) = 0 \text{ e } \omega\wedge df = f\eta\ \},$$

e

$$\Lambda_1(f,n) = \{\omega \in \Lambda_0(f,n); \omega \text{ tem PDR com relação a } f\ \},$$

então o corolário anterior implica que

$$\dim_{\mathbf{c}} \frac{\Lambda_0(f,n)}{\Lambda_1(f,n)} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad n < 2m-4, \\ 1 & \text{if} \quad n \geqslant 2m-4. \end{cases}$$

Consideraremos agora o caso em que $f = 0$ tem $k \geq 2$ pontos nodais em posição geral, isso é, se $k \geq 2$, existem k linhas distintas $L_1, \ldots L_k$ tal que para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que os pontos nodais de f estão contidos em $\bigcup_{i\neq j} L_i$. Temos então o seguinte teorema:

Teorema 3.5. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ de grau n, tendo $f = 0$ como separatriz, onde f é um polinômio homogêneo de grau m com k singularidades nodais em posição geral. Então ou $\mathcal{F}$ tem PDR em relação a f e $m \leq n+1$, ou:*

1. *Se $k \geq 3$, então $2m \leq n+k+2$;*
2. *Se $k \leq 2$, então $2m \leq n+k+3$.*

Demonstração. Seja ω uma 1-forma homogênea de grau $n+1$ que representa $\mathcal{F}$. Suponhamos que ω não tem PDR em relação a f. Vamos considerar primeiro o caso $k \geq 3$. Sejam $L_1, \ldots, L_k$ as linhas retas tais que para todo $j \in \{1, \ldots k\}$, os pontos nodais de f estão contidos em $L_1, \ldots, L_k/L_j = 0$. Seja $\tilde{L_j} = L_1 \ldots L_k/L_j$. Observe que, $\tilde{L_j}\omega = h_j df + f\mu_j$, pois como $\tilde{L_j}$ se anula nas componentes nodais de f, então pelo lema 2.13 obtemos que $\tilde{L_j}$ tem PDR local e portanto global. Agora, multiplicando $\tilde{L_j}$ por L_j, obtemos:

$$L_1 \ldots L_k\omega = L_j h_j df + L_j f\mu_j.$$

Seja $i \neq j$. Repetindo a mesma conta para L_i, com $i \neq j$ e subtraindo as equações, obtemos:

$$(L_i h_i - L_j h_j)df = f(L_j\mu_j - L_i\mu_i).$$

Agora, temos dois casos a considerar: O primeiro caso é quando $L_ih_i - L_jh_j$ é identicamente nulo e o segundo quando não é. No primeiro caso, L_i divide h_j, para todo $i \neq j$. Logo, concluí-se que ω possui PDR em relação a f , o que é um absurdo. No segundo caso, temos que f divide $L_ih_i - L_jh_j$ e portanto, $m \leq n - m + k + 2 = grau(L_ih_i - L_jh_j)$, ou seja, $2m \leq n + k + 2$. Suponhamos agora que $k \leq 2$, ou mais geralmente, todos os pontos nodais estão na mesma linha L. Tome um ponto p que não pertence a reta L, e denote por $L_1, \ldots, L_k$ as linhas retas que ligam p aos pontos nodais de f. Temos:

$$L\omega = hdf + f\mu \text{ e } L_1 \ldots L_k\omega = h_1 df + f\mu_1 \tag{3.11}$$

pois as retas acima se anulam nos pontos nodais de f. Comparando os graus da equação acima, obtemos $grau(h) = n - m + 3$ e $grau(h_1) = n + k - m + 2$. Usando a equação 3.11, obtemos que ou $Lh_1 - L_1 \ldots L_k h = 0$, e nesse caso temos PDR, ou f divide $Lh_1 - L_1 \ldots L_k h \neq 0$ e nesse último caso, obtemos $m \leq n + k - m + 3$. ∎

Façamos uma observação sobre resultado acima. Podemos enunciá-lo de uma forma mais geral. Se denotarmos por k' o número de linhas retas $L_1 \ldots L_{k'}$ tal que para todo $j \in \{1, \ldots k'\}$ os pontos nodais de f estão contidos em $\frac{L_1 \ldots L_{k'}}{L_j} = 0$, repetindo os passos do Teorema 3.5 prova-se que se $\mathcal{F}$ não tem PDR com relação a f, então $2m \leq n + k' + 3$.

Iremos agora considerar o caso em que $S = \{f = 0\}$ tem $k \geq 2$ nós e o grau da folheação é $n \geq 2m - 4$. Primeiramente, construiremos k 1-formas $\omega_1, \ldots, \omega_k$ de grau $n + 1 = 2m - 3$ com a propriedades seguinte:

Se $p_1, \ldots, p_k$ são os nós de $f = 0$ então $d\omega_j(p_i) = 0$ se $i \neq j$, e $d\omega_j(p_j) \neq 0$.

Observe que as formas ω_i são extremos da desigualdade $n \geq 2m - 4$. É suficiente construir apenas ω_1. Com um procedimento análogo ao feito antes, construiremos ω_1 em um sistema de coordenadas afins. Tome (x, y) um sistema de coordenadas afim com as seguintes propriedades:

1. $p_1 = (0, 0)$.

2. $p_2, \ldots, p_k$ não estão contidos na reta do infinito.

3. Para todo $l \geq 2$, $p_j \notin \{x = 0\} \cup \{y = 0\}$.

4. O segundo jato de f em $(0, 0)$ é $x^2 - y^2$.

Esse tal sistema é possível obter, pois sendo as singularidades da curva nodais, podemos tomar um sistema de coordenadas em que f se escreve como

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + x^2\alpha - y^2\beta = x^2(1 + \alpha) - y^2(1 + \beta)$$

onde o máximo dos graus de α e β é $m - 2$. Além dos itens acima, podemos também supor que

$$(1 + \alpha)p_j \neq 0$$

para todo $j \in \{2, \ldots, k\}$.

De fato, observe que o grau de f é ≥ 4, pois $k \geq 2$. Além disso, f se escreve:

$$f = x^2(1+\alpha) - y^2(1+\beta) = x^2(1+\alpha+\lambda y^2) - y^2(1+\beta+\lambda x^2),$$

é claro que podemos escolher $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $(1+\alpha+\lambda y^2)(p_j) \neq 0$ para todo $j \in \{2, \ldots, k\}$, pois $y^2(p_j) \neq 0$ para todo j. Como feito antes, consideramos:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_1 &= XY(1+\alpha)(1+\beta)\left(2\frac{dX}{X} - 2\frac{dY}{Y} + \frac{d\alpha}{1+\alpha} - \frac{d\beta}{1+\beta}\right)\\ &= 2Y(1+\alpha)(1+\beta)dX - 2x(1+\alpha)(1+\beta)dY + XY(1+\beta)d\alpha - XY(1+\alpha)d\beta\end{aligned}$$

Usando a expressão acima, um cálculo nos mostra que $d\tilde{\omega}_1(0,0) = -4dx \wedge dy \neq 0$. Além disso, pela propriedade 2, temos $\tilde{\omega}_1(p_j) = 0$ para $j \geq 2$. Vamos agora ver que $d\tilde{\omega}_1(p_j) = 0$ para $j \geq 2$. Fixe $j \in \{2, \ldots, k\}$,e seja $f = f_1 - f_2$, onde $f_1 = x^2(1+\alpha)$ e $f_2 = y^2(1+\beta)$. Note que $\tilde{\omega}_1$ pode ser escrita como

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{y^3(1+\beta)^2}{x} d\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = gd\left(\frac{f_1}{f_2}\right) \Rightarrow d\tilde{\omega}_1 = dg \wedge d\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$$

Observamos que $g(p_j) \neq 0$ e $f_2(p_j) \neq 0$ pelo item 3 e também pelo fato adicional de que $(1+\alpha)(p_j) \neq 0$. Isso implica que

$$d\widetilde{\omega}_1\left(p_j\right) = dg\left(p_j\right) \wedge \frac{\left(f_2\left(p_j\right) df_1\left(p_j\right) - f_1\left(p_j\right) df_2\left(p_j\right)\right)}{f_2\left(p_j\right)^2}.$$

Como $f(p_j) = 0$ e p_j é um ponto nodal de f, temos $f_1(p_j) = f_2(p_j) \neq 0$ e $df_1(p_j) = df_2(p_j)$. Isso implica que $d\tilde{\omega}_1(p_j) = 0$ como queríamos mostrar. Olhando para a expressão de $\tilde{\omega}_1$, vemos que o grau de $\tilde{\omega}_1$ é claramente $\leq 2m-3$, pois o máximo grau de cada termo que aparece na expressão de $\tilde{\omega}_1$ é $2m-3$.

Tendo em vista a construção apresentada, e considerando $\Lambda_0(f,n)$ e $\Lambda_1(f,n)$ como definidos anteriormente, enunciamos o último teorema do capítulo:

Teorema 3.6. *Se $n \geq 2m-4$ então $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\Lambda_0(f,n)}{\Lambda_1(f,n)} = k$, onde k é o número de pontos nodais de f.*

Demonstração. Sejam $\omega_1, \ldots, \omega_k$ como na construção feita no texto. Fixe $n \geq 2m-4$ e considere polinômios homogênios $h_1, \ldots h_k$ de grau $n-2m+4$ tais que $h_j(p_j) = 1$, $\forall j \in \{1, \ldots, k\}$. Observe que para $i \neq j$,

$$d(h_j\omega_j)(p_i) = dh_j\omega_j(p_i) + h_j(p)d\omega_j(p_i) = 0.$$

Porém,

$$d(h_j\omega_j)(p_j) = dh_j(p_j)\omega_j(p_j) + h_j(p_j)d\omega_j(p_j) = d\omega_j(p_j) \neq 0,$$

para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. Afirmamos que para qualquer 1-forma $\omega \in \Lambda_0(f,n)$, existem

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ tal que $\omega - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j h_j \omega_j \in \Lambda_1(f,n)$. De fato, sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ números complexos tais que $d\omega(p_j) = \lambda_j d\omega_j(p_j)$. Então, tomando a diferencial, obtemos:

$$d\omega_{p_i} - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j d(h_j \omega_j)(p_i) = d\omega(p_i) - \lambda_i d\omega_i(p_i) = 0.$$

Assim, usando a Proposição 2.16, concluímos que $\omega - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (h_j \omega_j) \in \Lambda_1(f,n)$, pois possui PDR global, o que prova a afirmação feita.

Como para $i \neq j$, $d(h_j\omega_j)(p_i) = 0$ e para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$, $d(h_j\omega_j) \neq 0$, temos que $h_1\omega_1, \ldots, h_k\omega_k$ são linearmente independentes e formam uma base para o espaço quociente $\frac{\Lambda_0(f,n)}{\Lambda_1(f,n)}$. Logo, $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\Lambda_0(f,n)}{\Lambda_1(f,n)} = k$. ■

4 Aplicação do caso nodal em domínios de Poincaré

Este capítulo é devotado a algumas aplicações simples dos teoremas estudados nos capítulos anteriores. Inicialmente serão expostos alguns resultados gerais necessários ao texto.

4.1 Fatos básicos

Dada uma curva algébrica C definida em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$, para cada ponto não singular dessa curva, podemos considerar a reta tangente à curva no ponto. Cada reta definida em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ pode ser vista como um ponto no espaço projetivo dual de $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$. Assim, as retas tangentes da curva algébrica C correspondem a pontos nesse espaço projetivo dual e definem uma curva algébrica nesse espaço. A curva formada pelas retas tangentes de C é chamada de curva dual de C e é denotada por C^*. Geometricamente, o grau d de C é o número de intersecções, contadas com multiplicidade, que uma reta qualquer faz com C (Teorema de Bézout). De modo análogo, d^* é o número de tangentes de C que passam por um ponto dado em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$.

Se δ é o número de nós, ou singularidades nodais, de uma curva C e κ é o número de cúspides, então uma das fórmulas de Plücker afirma que

$$d(d-1) = d^* + 2\delta + 3\kappa.$$

A prova de que C^* é uma curva algébrica e a prova da fórmula de Plücker podem ser vistas em [9].

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ e $p \in Sing(\mathcal{F})$ um ponto singular de $\mathcal{F}$. Seja $X = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$ um campo vetorial que representa $\mathcal{F}$ em coordenadas locais em torno de p. Dizemos que $\mathcal{F}$ é do tipo Poincaré em p, se a razão dos autovalores da parte linear de X é um número real não negativo e os autovalores são não nulos. Nesse caso, dizemos também que a singularidade p está no domínio de Poincaré. Um fato que pode ser visto em [21] é que se $\mathcal{F}$ é do tipo Poincaré em p, então existem duas separatrizes locais, lisas e transversais em p.

Considere a folheação $\mathcal{F}_n$ dada em coordenadas afins pela 1-forma

$$\omega_n = (x^n - y^{n+1})dx - (1 - xy^n)dy$$

Essa folheação é conhecida como folheação de Jouanulou. Jouanulou provou em [13] que essa folheação não possui separatrizes. Neste capítulo daremos uma prova mais simples desse fato. Note que a folheação de Jouanulou possui grau n e além disso, um cálculo mostra que ω_n possui $n^2 + n + 1$ singularidades. Esse cálculo (e outros fatos sobre a folheação de Jouanulou), que trata-se de uma conta direta, pode também ser visto em [15]. Na verdade, temos mais geralmente o teorema ([14]):

Teorema 4.1. *Se $\mathcal{F}$ é uma folheação de dimensão um e de grau k, definida em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(n)$ com todas as suas singularidades não degeneradas, então o número de singularidades de $\mathcal{F}$ é dado por*

$$1 + k + \cdots + k^n$$

Calculando a matriz da parte linear de ω_n, mostra-se que o quociente dos autovalores é um número real positivo. Ou seja, todas as singularidades de $\mathcal{F}_n$ estão no domínio de Poincaré. Denotaremos por $\Lambda_n^1(\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2))$, o sub-espaço linear das 1−formas, definido como

$$\begin{aligned} \Lambda_n^1(\mathbf{CP}(2)) = \{\omega = Adx + Bdy + Cdz;\ xA + yB + zC = 0; \\ \mathrm{dg}(A) = \mathrm{dg}(B) = \mathrm{dg}(C) = n + 1\} \end{aligned}.$$

Ou seja, o projetivizado desse conjunto é o conjunto das folheações de grau n. O subconjunto $\mathcal{P}_n \subset \mathbb{P}_n(\Lambda_n^1(\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)))$ é definido como sendo o espaço das folheações de grau n, cujas singularidades são do tipo Poincaré. $\mathcal{P}_n$ é um aberto de Zariski no espaço projetivo. Denotaremos ainda por $\mathcal{P}_n^0 \subset \mathcal{P}_n$ o conjunto das folheações cujas singularidades estão no domínio de Poincaré e que tem uma separatriz algébrica. A próxima seção nos dá resultados acerca de $\mathcal{P}_n^0$.

4.2 Aplicações

Antes de enunciar o primeiro teorema, obervamos que se $\mathcal{F}$ é uma folheação cuja singularidade p está no domínio de Poincaré, então dada uma separatriz em p, ou essa separatriz é suave ou possui uma singularidade nodal. Isso segue facilmente do fato de que $\mathcal{F}$ tem duas separatrizes locais e suaves passando em p.

Teorema 4.2. *A folheação de Jouanulou definida em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ não possui separatriz, ou seja, $\mathcal{F}_n \notin \mathcal{P}_n^0$.*

Demonstração. Seja $N = n^2 + n + 1$ o número de singularidades de $\mathcal{F}_n$. Seja $\lambda = \exp\frac{2\pi i}{N}$. Definindo $\sigma(x, y) = (\lambda x, \lambda^{n+1} y)$, observamos que $\sigma^*\omega_n = \lambda^{n+1}\omega_n$. Assim, informalmente, a folheação "não muda" pelo pullback de σ. Formalmente, ω_n é equivariante pela ação de σ. Notamos que as singularidades de $\mathcal{F}_n$ são dadas por $\sigma^i(1, 1)$, $i = 0, \cdots, N - 1$. Suponha por absurdo que S_0 é uma separatriz de $\mathcal{F}_n$. Então, como σ não altera a folheação,

$$S = \bigcup_{i=0}^{N} \sigma^i(S_0)$$

é uma separatriz de $\mathcal{F}_n$. Note que as singularidades de S são nodais pois $Sing(S) \subset Sing(\mathcal{F})$ e $\mathcal{F}_n$ está no domínio de Poincaré. Segue então que $grau(S) \leq n + 2$. Mas pela invariância da folheação por σ, S possui n^2+n+1 singularidades nodais. Porém, isso não pode ocorrer. Com efeito, a fórmula de Plücker nos diz que

$$d^* + 2\delta + 3\kappa = d(d-1).$$

Aplicando à curva S, temos que $d \le n+2$, $\delta = n^2+n+1$, $\kappa = 0$, e portanto,

$$d^* \le (n+2)(n+1) - 2\left(n^2+n+1\right) = -n^2+n,$$

logo $d^* < 0$ se $n > 1$ o que é uma contradição. Concluímos então que S é uma curva suave e portanto irredutível. Nesse caso, temos $m \le n+1$ e vale

$$\omega_n = adf + f\eta,$$

onde ω_{n+1} e f são as equações homogêneas de $\mathcal{F}_n$ e S. Comparando os graus na equação acima, obtemos que a é um polinômio não constante, pois tem grau $\ge n+1-m+1 = 2+n-m > 0$. Assim, todas as singularidades de $\mathcal{F}_n$ estão em S, e sendo S lisa, essas singularidades serão dadas por $a = f = 0$. Pelo teorema de Bézout, obtemos

$$n^2+n+1 \le m.\,\mathrm{grau}(a) = m(n+2-m) \le (n+1)(n+2-m)$$

e então $1 \le (2-m)(n+1)$. Então, $m = 1$ e todas as singularidades estão em uma reta, o que é um absurdo. ∎

Teorema 4.3. *Se $n \ge 2$ então $\mathcal{P}_n^0$ é um subconjunto algébrico próprio de $\mathcal{P}_n$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_n$ dada por ω, tendo uma separatriz irredutível $S = (f = 0)$. Temos,

$$\omega \wedge df = f\theta,$$

onde θ é uma 2-forma. Como as singularidades de $\mathcal{F}$ são do tipo Poincaré, então ou S é suave ou é uma curva nodal. Assim, temos $m = \mathrm{grau}(f) \le n+2$. Considere o conjunto $\Sigma(m,n)$ dado por

$$\{(\omega, f, \theta); \omega \wedge df = f\theta, dg(\omega) = n+1, dg(f) = m, dg(\theta) = n\}.$$

A relação $\omega \wedge df = f\theta$ é uma relação algébrica, e notando que

$$\mathcal{P}_n^0 = \bigcup_{1 \le m \le n+2} \mathcal{P}_n \cap \mathbb{P}(pr_1 \Sigma(m,n)),$$

vemos que $\mathcal{P}_n^0$ é algébrico, pois é a união finita de algébricos. Acima, pr_1 denota a primeira projeção $(\omega, f, \theta) \to \omega$. O Teorema 4.2 nos diz que a folheação de Jouanulou está em $\mathcal{P}_n$ mas não em $\mathcal{P}_n^0$; portanto, $\mathcal{P}_n^0$ é próprio. ∎

Teorema 4.4. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ e S uma separatriz de $\mathcal{F}$. Suponha que $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_n^0$ e que todas as singularidades de $\mathcal{F}$ estão contidas em S. Então $n = 1$.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{F}$ tenha grau n e seja dada em coordenadas homogêneas pela 1-forma homogênea ω. Seja $f = 0$ a equação homogênea da separatriz S. Nesse caso, temos $m = \text{grau}(f) \leq n + 2$. Se todas as singularidades de $\mathcal{F}$ estão em S, o Lema de Noether para folheações implica que f pertence ao ideal gerado pelos coeficientes de ω. Portanto, $n + 1 \leq m$. Como $m \leq n + 2$, obtemos que

$$n + 1 \leq m \leq n + 2.$$

Nesse caso, ou $m = n + 1$ ou $m = n + 2$. Se for $m = n + 2$, então ω é do tipo logarítimica, isto é, $f = f_1 \cdots f_p$ e

$$\omega = f \sum \lambda_i \frac{df_i}{f_i}, \quad \sum \lambda_i m_i = 0, \quad m_i = dg\,(f_i)\,.$$

Assim, as singularidades de $\mathcal{F}$ são exatamente as singularidades de S. Segue que S possui exatamente $n^2 + n + 1$ singularidades que são todas nodais. Usando agora a fórmula de Plücker para S, com $d = n + 2$ e $\delta = n^2 + n + 1$ e assim,

$$d^* + 2(n^2 + n + 1) + 3\kappa = (n + 2)(n + 1).$$

Sendo $d^* \geq 0$ e $\kappa = 0$, temos

$$n^2 + n + 1 = \#\text{ nós de } S \leqslant \frac{(n + 2)(n + 1)}{2}$$

e isso é possível apenas para $n = 1$.

Agora, seja f de grau $n + 1$. Nesse caso, escrevemos $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. Como P, Q e R possuem grau $n + 1$, existem constantes α, β e γ tal que $f = \alpha P + \beta Q + \gamma R$. Neste caso, tomando a 2-forma constante $\eta_0 = \alpha dy \wedge dz + \beta dz \wedge dx + \gamma dx \wedge dy$, obtemos que

$$\omega \wedge \eta_0 = f dx \wedge dy \wedge dz.$$

Fazendo uma mudança de coordenadas, podemos supor que $\eta = dy \wedge dz$ Assim, obtemos que $P = f$ e portanto $P = 0$ é uma separatriz de ω. Então, $i_{\frac{\partial}{\partial x}} \omega = 0$ quando calculado nos pontos de f, e portanto $\frac{\partial}{\partial x}$ é tangente a ω quando $P = 0$. Notamos que sobre $P = 0$, $P_x = 0$ e portanto, $i_{\frac{\partial}{\partial x}} dP = P_x = 0$. Disso segue que P divide P_x. Assim, $P_x = 0$ e portanto, P não depende de x, isto é, $P = P(y, z)$. Assim, $P = 0$ consiste dos planos passando pelo eixo x. Como as singularidades são do tipo Poincaré existem no máximo dois planos em $P = 0$ e então $n + 1 \leq 2$. ■

5 Blow-up e singularidades de Folheações

Neste e no próximo capítulo, daremos os pré-requisitos para a solução do problema de Poincaré quando temos uma restrição sobre a folheação (a explosão é não dicrítica), não mais sobre a curva. Falaremos um pouco sobre o processo de explosão de uma superfície complexa e seus efeitos sobre uma folheação e também sobre uma curva. Intuitivamente, o processo de blow-up em torno de uma singularidade consiste em "substituir essa singularidade" por um espaço projetivo, de modo que fora do espaço projetivo a folheação encontrada coincida com a folheação original. Daremos alguns resultados (de caráter local) que nos dizem como a folheação se comporta em torno de determinado tipo de singularidade. No próximo capítulo, falaremos de um tipo especial de folheação, que são as curvas generalizadas.

5.1 O blow-up

Nesta seção, definiremos o blow-up de uma superfície complexa M. Nesse texto a abordagem é feita de de uma maneira rudimentar, porém suficiente para nossos propósitos.

Considere:

$$\tilde{\mathbb{C}}^2 = \{(x, y, [u : v]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}(1) | xv = yu\} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}(1).$$

Ou seja, $\tilde{\mathbb{C}}^2$ é o conjunto dos pontos $(x, y, [u : v])$, de modo que $(x, y) \in [u : v]$. Isso é claro, pois se $[u : v] \in \mathbb{CP}(1)$, então sem perda de generalidade, podemos supor $v \neq 0$, donde podemos escrever $x = \frac{yu}{v}$, logo $\frac{y}{v}(u, v) = (x, y)$ e então $(x, y) \in [u : v]$.

Chamamos o conjunto $D = \{0\} \times \mathbb{CP}(1) \subset \tilde{\mathbb{C}}^2$ de divisor excepcional. Note que D é identificado com $\mathbb{CP}(1)$. Chamaremos a projeção canônica $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}^2$ dada por $\pi(x, y, [u : v]) = (x, y)$ de blow-down. Note que o divisor excepcional é dado por $\pi^{-1}(\{0\}) \subset \tilde{\mathbb{C}}^2$. A proposição a seguir dá uma estrutura de variedade complexa em $\tilde{\mathbb{C}}^2$.

Proposição 5.1. *$\tilde{\mathbb{C}}^2$ é uma superfície complexa.*

Demonstração. Considere os conjuntos:

$$U_1 = \{(x, y, [u : v]) \in \tilde{\mathbb{C}}^2 | u \neq 0\} = \{(x, xz, [1 : z]) | (x, y) \in \mathbb{C}^2\};$$

$$U_2 = \{(x, y, [u : v]) \in \tilde{\mathbb{C}}^2 | v \neq 0\} = \{(wy, y, [w : 1]) | (y, w) \in \mathbb{C}^2\}.$$

Note que $U_1 = \{(x, y, [u : v]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}(1); u \neq 0\} \cap \tilde{\mathbb{C}}^2$ e portanto é um aberto de $\tilde{\mathbb{C}}^2$. Analogamente, U_2 é também aberto de $\tilde{\mathbb{C}}^2$. É claro que $U_1 \cup U_2 = \tilde{\mathbb{C}}^2$. Considere as aplicações:

$$\psi_1 : U_1 \to \mathbb{C}^2$$

$$(x, xz, [1:z]) \mapsto (x, z)$$

$$\psi_2 : U_2 \to \mathbb{C}^2$$
$$(wy, y, [w:1]) \mapsto (y, w)$$

que são, claramente, bijeções. Note que, em $U_1 \cap U_2$,

$$\psi_1 \circ \psi_2^{-1}(y, w) = \psi_1(wy, y, [w:1]) = \psi_1\left(wy, y, [1:\frac{1}{w}]\right) = \left(wy, \frac{1}{w}\right)$$

do mesmo modo,

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1}(x, z) = \left(xz, \frac{1}{z}\right)$$

que são holomorfas e bijetivas, logo biholomorfismos. Assim, $\tilde{\mathbb{C}}^2$ possui uma estrutura de superfície complexa. ■

Considere o atlas de $\tilde{\mathbb{C}}^2$ dado na demonstração da proposição anterior. Expressando π e D nas cartas U_1 e U_2, temos:

$$\pi_1 = \pi \circ \psi_1^{-1} : (x, t) \to (x, tx) = (x, y)$$

e $D \cap U_1 = \{x = 0\}$. Analogamente,

$$\pi_2 = \pi \circ \psi_2^{-1} : (s, y) \to (sy, y) = (x, y)$$

e $D \cap U_2 = \{y = 0\}$.

Notamos que $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \backslash D \to \mathbb{C}^2 \backslash \{0\}$ é bijetiva. A expressão nas cartas nos diz que π quando restrita à $\tilde{\mathbb{C}}^2 \backslash D$ é holomorfa e o mesmo ocorre com a inversa da bijeção dada acima.

Proposição 5.2. *A aplicação $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}^2$ é uma aplicação própria.*

Demonstração. Pela definição de π, para todo compacto $K \subset \mathbb{C}^2$, $\pi^{-1}(K) \subset K \times \mathbb{CP}(1)$, que é compacto, pois é produto de compactos. Pela continuidade de π, $\pi^{-1}(K)$ é fechado, e como está contido em um compacto, é também compacto. ■

A imagem inversa de $\mathbb{C}^2$ pela função π é chamada de blow-up da origem.

Podemos fazer a construção do blow-up da origem de $\mathbb{C}^n$, generalizando a construção acima. De fato, definimos:

$$\tilde{\mathbb{C}}^n = \{(x, X) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}\boldsymbol{P}(n-1) | x \in \mathbb{C}\boldsymbol{P}(n-1)\},$$

$$H_j = \{[a_1 :, \cdots : a_n] \in \mathbb{C}\boldsymbol{P}(n-1) | a_j \neq 0\}.$$

É claro que $H_j \approx \mathbb{C}^{n-1}$. Sejam

$$U_j = \tilde{\mathbb{C}^n} \cap (\mathbb{C}^n \times H_j) = \{(x, X) | x \in X = [a_1, \ldots, a_n] \text{ e } a_j \neq 0\}$$

e

$$\begin{aligned}\psi_j : U_j &\longrightarrow \mathbb{C}^n\\ (x, X) &\mapsto \left(\frac{X_1}{X_j}, \frac{X_2}{X_j}, \ldots, \frac{X_{j-1}}{X_j}, x_j, \frac{X_{j+1}}{X_j}, \ldots, \frac{X_n}{X_j}\right).\end{aligned}$$

Como na proposição 5.1 a coleção (U_j, ψ_j) dará a $\tilde{\mathbb{C}}^n$ uma estrutura de variedade complexa de dimensão n. Nesse caso, a aplicação de blow-down continua sendo a projeção $\pi(x, X) = x$, e em cartas se lê como:

$$\pi \circ \psi_j^{-1}\left((x_1, \ldots, x_n)\right) = \left(x_1 x_j, x_2 x_j, \ldots, x_{j-1} x_j, x_j, x_{j+1} x_j, \ldots, x_n x_j\right).$$

Novamente, chamamos de blow-up da origem em $\mathbb{C}^n$ a imagem inversa do blow-down e $\pi^{-1}(0)$ é o divisor excepcional que se identifica com $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(n-1)$. Note que o processo de blow-up pode ser feito em qualquer aberto de $\mathbb{C}^n$, e como o grupo de automorfismos de $\mathbb{C}^n$ é transitivo, podemos considerar o blow-up de qualquer ponto também. Vamos agora generalizar o processo de blow-up para uma superfície complexa. Seja M uma superfície complexa e considere $p \in M$ fixo. Fixemos uma carta local em torno de p como $\phi : U \longrightarrow \mathbb{C}^2$ tal que $p \in U$ e $\phi(p) = 0$. Sejam $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ a aplicação de blow-down em 0, com divisor D. Seja $\tilde{\mathbb{C}}^2 = \pi^{-1}(\mathbb{C}^2)$. A união de $M \backslash \{p\}$ e $\tilde{\mathbb{C}}^2$ é disjunta e denotada por M'. Definimos uma relação de equivalência $\sim$, dizendo que $x \sim y$ se $x = y$ ou se $x \in U \backslash \{p\}$, $y \in \tilde{\mathbb{C}}^2 \backslash D$ e $y = \pi^{-1}(\phi(x))$. O blow-up de M em p é o quociente $\tilde{M} = M' \backslash \sim$. Como $\tilde{\mathbb{C}}^2$ é uma variedade e $\pi^{-1} \circ \phi : U \backslash \{p\} \longrightarrow \tilde{\mathbb{C}}^2 \backslash D$ é um biholomorfismo, temos que $\tilde{M}$ é uma variedade complexa. Intuitivamente, $\tilde{M}$ foi obtida de M substituindo o ponto p por um espaço projetivo.

Definimos a aplicação de blow-down $\Pi : \tilde{M} \longrightarrow M$ como sendo $\Pi(x) = p$, no caso em que a classe de equivalência de x está em D, $\Pi(x) = x$, caso a classe de equivalência de x esteja em $M \backslash U$ e $\Pi(x) = y$, no caso em que a classe de equivalência de x contenha dois pontos $y \in U \backslash \{p\}$ e $y_0 \in \tilde{\mathbb{C}}^2 \backslash D$. Note que a função Π como definida acima é tal que $\Pi^{-1}(p) = D$, $\Pi|_{\tilde{M} \backslash D} : \tilde{M} \backslash D \longrightarrow M \backslash \{p\}$ é um biholomorfismo e Π é própria. Essa discussão nos permite iterar o processo de blow-up de uma superfície. Dada uma variedade M e um ponto $q \in M$, fazendo o blow-up em q, obtemos uma superfície M_1, onde $\pi_1 : M_1 \longrightarrow M$ é a aplicação de blow-down e $D_1 = \pi^{-1}(q)$ é o divisor da primeira explosão. Se tomarmos $q_1 \in M_1$, podemos considerar a aplicação de blow-down $\pi_2 : M_2 \longrightarrow M_1$, onde M_2 é o blow-up de M. Podemos prosseguir com esse processo indutivamente, obtendo um número n de blow-ups:

$$M_n \xrightarrow{\pi_n} M_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\pi_1} M_0 = M.$$

Assim, após n blow-ups, temos a variedade M_n e uma aplicação de blow-down $\Pi_n : M_n \longrightarrow M_{n-1}$ com divisor D_n. A composta $\pi = \pi_n \circ \cdots \circ \pi_1 : M_n \longrightarrow M$ é uma aplicação holomorfa própria, que será chamada de um processo de blow-up ou explosão. Definimos o divisor D da explosão de modo indutivo, pondo $D = D_1$ se tivermos uma explosão e na última explosão colocamos $D^n = D = D_n \cup \pi_n^{-1}(D^{n-1})$.

Resumimos essa discussão no seguinte teorema:

Teorema 5.3. *Seja M uma superfície complexa e $S \subset M$ um subconjunto finito de M. Existe uma superfície complexa $\tilde{M}$ e uma aplicação holomorfa própria $\Pi : \tilde{M} \to M$ tal que*

1. *para todo $p \in S$, D_p é biholomorfo à uma união de linhas projetivas, onde $D_p = \Pi^{-1}(p) \simeq \mathbb{C}\boldsymbol{P}(1)$ e os D_p são disjuntos.*

2. *Π induz uma bijeção entre $\tilde{M} \setminus \cup_{p \in S} D_p \to M \setminus S$.*

3. *para todo $p \in S$, existe uma vizinhança aberta V_p de D_p em $\tilde{M}$ tal que $\Pi|_{V_p}$ seja biholomorficamente conjugado à aplicação π em uma vizinhança de D em $\tilde{\mathbb{C}}^2$.*

   Nesse caso diremos que efetuamos explosões simultâneas.

Observamos que $\Pi(D^n)$ é um conjunto finito de M: são os pontos de M onde foram executados os blow-ups. Notamos que do modo como o divisor após n explosões foi definido, ele de fato é uma união de n curvas complexas, todas difeomorfas à esfera de Riemann $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(1)$. Note que, por exemplo ao efetuar a segunda explosão em $q_1 \in D_1$, temos $D^2 = D_2 \cup \Pi_2^{-1}(D_1)$. É fácil ver que $\Pi_2^{-1}(D_1)$ corresponde a $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(1)$ e que D_2 corta $\Pi_2^{-1}(q)$ transversalmente num único ponto, ou seja, D^2 é a união de dois espaços projetivos.

Considere um processo de blow-up em que para todo $j = 1, \dots, n-1$ o j-ésimo blow-up é feito em um ponto de D^j, isto é, para cada i o projetivo D_i corta um outro D_j transversalmente num único ponto. Pontos desse tipo serão chamados de esquinas de D^n, de modo que se $D_{i1} \cap D_{i2} \neq \emptyset, \dots, D_{im-1} \cap D_{im} \neq \emptyset$, então as intersecções são transversais, consistem em um único ponto e $D_{i1} \neq D_{im}$. No que segue, tentaremos dar um entendimento do que ocorre com uma folheação ou uma curva quando efetuamos um processo de blow-up sobre a superfície em que estão definidos.

5.2 Efeito de uma explosão sobre uma curva

Lembramos que uma curva holomorfa ou analítica definida em $\mathbb{C}^n$ é um conjunto analítico C de dimensão um. Assim, uma curva holomorfa em $\mathbb{C}^2$ é um conjunto C localmente dado por zeros de funções holomorfas, isto é; dado $p \in C$ existe um aberto U em torno de p e uma função holomorfa f tal que $C \cap U = \{q \in U | f(q) = 0\}$. Tomando cartas locais, estende-se a definição para uma superfície complexa. No que segue, quando estivermos interessados no caráter local de uma curva em um certo ponto, confundiremos os termos curva e germe de curva.

Consideremos uma curva holomorfa C, definida em $\mathbb{C}^2$, com $0 \in C$, onde localmente em torno de 0, temos $C = \{f(x, y) = 0\}$. Considere o desenvolvimento de Taylor de f em torno de 0 dado por $f = \sum_{j=k}^{\infty} f_j(x, y)$, onde cada f_j é um polonômio homogêneo de grau j. Considere o blow-up em $0 \in \mathbb{C}^2$, $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}^2$. Na carta (x, t), obtemos

$$f \circ \pi(x,t) = f(x,tx) = \sum_{j=k}^{\infty} f_j(x,xt) = x^k \sum_{j=k}^{\infty} x^{j-k} f_j(1,t) = x^k \tilde{f}(x,t)$$

O cálculo acima nos mostra que $\pi^{-1}(C) \cap U_1 = \{x = 0\} \cup \{\tilde{f}(x,t) = 0\}$. Do mesmo modo, na outra carta, $\pi^{-1}(C) \cap U_2 = \{y = 0\} \cup \{\tilde{f}(s,y) = 0\}$. Assim, o blow-up de C é dado por $\pi^{-1}(C) = D \cup \tilde{C}$, onde $\tilde{C} = \{\tilde{f}(x,t) = 0\} \cup \{\tilde{f}(s,y) = 0\}$. Chamamos a curva $\tilde{C}$ de transformado estrito da curva C. De um modo geral, podemos considerar uma sequência de n explosões em uma superfície complexa M, dada por um blow-down $\pi : M_n \longrightarrow M$, tendo como resultado $\pi^{-1}(C) = D \cup C_n$, onde a curva C_n é a transformada estrita de C por π.

Dada uma curva holomorfa C em uma superfície complexa M, dizemos que um processo de blow-up $\pi : M_n \longrightarrow M$, com divisor $D = \cup_{j=1}^{n} D_j$ é uma resolução de C, se a sua transformada estrita C_n é regular (não possui singularidades), C_n corta cada $D_j \subset D$ transversalmente, e a intersecção da transformada estrita com o divisor não contém nenhuma esquina. A seguir, enunciamos um importante teorema cuja demonstração pode ser vista em [3]:

Teorema 5.4. *Toda curva holomorfa numa superfície complexa admite uma resolução.*

Dada uma curva holomorfa, depois de aplicarmos o processo de resolução nessa curva, diremos que a curva está resolvida ou reduzida.

Se C é uma curva holomorfa numa superfície complexa M, dado $p \in C$, existe uma vizinhança U de p e curvas holomorfas irredutíveis $C_1, \ldots, \ldots C_m \subset U$ de modo que $p \in C_j$ para todo j, $C \cap U$ está contida na união das curvas C_j e também $C_i \cap C_j = \{p\}$ se i é diferente de j. Por último, para todo j, existem uma aplicação holomorfa injetiva $\gamma_j : \mathbb{D} \longrightarrow U$, onde a imagem é justamente S_i e γ_i é um mergulho. Aqui, $\mathbb{D}$ é o disco de raio 1 em $\mathbb{C}$ (veja [12] para a prova desses fatos).

As curvas $C_1, \ldots, C_m$ acima são chamadas de ramos de C em p. No caso de p ser um ponto regular, existe um único ramo, que é o germe da própria curva em p e tal ramo é uma curva suave. No caso de p ser uma singularidade nodal, existem dois ramos passando por p que são suaves. As parametrizações γ_i dos ramos são ditas parametrizações de Puiseux do ramo C_j. Mais geralmente, se S é um germe de curva analítica irredutível com equação local reduzida $f = 0$ em torno de $0 \in \mathbb{C}^2$, existe uma aplicação holomorfa $\alpha : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ da forma $\alpha(t) = (t^m, t^n u(t))$, onde u é holomorfa com $u(0) \neq 0$ e $m_p(f) = \text{mín}\{m, n\}$, cuja imagem coincide com a imagem da curva S. Esse é o chamado Teorema de Parametrização de Puiseux ([10]).

Usando o Teorema 5.4 pode ser mostrado que se C é uma curva holomorfa definida em uma superfície complexa M, então existe uma superfície de Riemann $\tilde{C}$ tal que $h : \tilde{C} \rightarrow C$ é um homeomorfismo fora de $Sing(C)$ ([16]). A superfície de Riemann $\tilde{C}$ é chamada de normalização de C. Esse resultado nos permite então definir a característica de Euler-Poincaré de C como sendo a característica de $\tilde{C}$.

5.3 Efeito de uma explosão sobre uma Folheação

Considere uma folheação holomorfa singular $\mathcal{F}$ definida em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$, pela 1-forma ω, e tendo uma única singularidade na origem. Considere a pré-imagem $\pi^{-1}(\mathcal{F})$. Note que $\pi^*\omega$ define uma folheação holomorfa regular em $\tilde{\mathbb{C}}^2 \backslash \pi^{-1}(Sing(\mathcal{F})) \cup D$. Porém, como $cod(D) = 1$, podemos estender $\pi^*\omega$ de modo que ela defina uma folheação holomorfa singular ($CodSing(\mathcal{F}) \geq 2$) em $\tilde{\mathbb{C}}^2$. Do mesmo modo e mais geralmente, se $\mathcal{F}$ está definida em uma superfície complexa M com ponto singular p, podemos fazer o processo de blow-up e obter uma folheação em $\tilde{M}$. Essa folheação, denotada $\pi^*(\mathcal{F})$ ou $\tilde{\mathcal{F}}$ será chamada de transformada estrita de $\mathcal{F}$ por π. Observe também que iterando o processo de blow-up, podemos obter uma sequência de explosões e na última explosão teremos bem definida uma folheação singular.

Vamos agora definir conceitos importantes: o de explosão dicrítica e não dicrítica. Seja $\mathcal{F}$ definida localmente em torno de uma singularidade $p \in M$ por uma 1-forma holomorfa ω. Tome coordenadas locais (x, y) no qual $p = (0, 0)$ e $\mathcal{F}$ é induzida por $\omega = Pdx + Qdy$, ou, pelo campo dual $X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$, onde $b = -P$ e $a = Q$. Lembramos que a multiplicidade da folheação $\nu = \nu_p(\mathcal{F})$ em p é dada pelo grau do polinômio homogêneo de menor grau que aparece nas expansões de Taylor de P e Q, e que não depende do sistema de coordenadas escolhido. Escreva então $P = P_\nu + P'$ e $Q = Q_\nu + Q'$, onde P_ν e Q_ν são polinômios homogêneos de grau ν nas varáveis x e y e ν é a multiplicidade da folheação. Consideramos a explosão de $\mathcal{F}$ dada por $\pi^*\mathcal{F}$.

Na 1º carta do blow-up, temos as coordenadas (x, t), onde π é da forma $\pi(x, t) = (x, xt)$, $y = xt$, de onde obtemos

$$\begin{aligned}\pi^*\omega(x, t) &= (P_\nu(x, xt) + P'(x, xt))dx + (Q_\nu(x, xt) + Q'(x, xt))(tdx + xdt)\\ &= (P(x, xt) + tQ(x, xt))dx + xQ(x, xt)dt.\end{aligned}$$

Como mín$(grau(P), grau(Q)) = \nu$, e vendo que

$$\pi^*\omega = (P_\nu(x, xt) + tQ_\nu(x, xt) + P'(x, xt) + tQ'(x, xt))dx + (xQ(x, xt))dt,$$

obtemos

$$\pi^*\omega = x^\nu[(P_\nu(1, t) + tQ_\nu(1, t) + P'(x, xt) + tQ'(x, xt))dx + x(Q_\nu(1, t) + Q'(x, xt))dt].$$

Para simplificar a escrita, colocamos $f_1(x, t) = P'(x, xt) + tQ'(x.xt)$ e $f_2(x, t) = Q_\nu(1, t) + Q'(x, xt)$, e então

$$\pi^*\omega = x^\nu[(P_\nu(1, t) + tQ_\nu(1, t) + f_1(x, t))dx + xf_2(x, t)dt]. \tag{5.1}$$

Na segunda carta, temos as coordenadas (s, y), de forma que $\pi(s, y) = (sy, y)$, $x = sy$.

Escrevendo a expressão de P e Q como antes, obtemos:

$$\begin{aligned}\pi^*\omega(s,y) &= (P(sy,y)(yds+sdy)+Q(sy,y)dy)\\ &= yP(s,sy)ds+(sP(sy,y)+Q(sy,y))dy\end{aligned}$$

ou seja,

$$\pi^*\omega(s,y) = y^\nu[y(P_\nu(s,1)+P'(sy,y))ds+(sP(s,1)+Q(s,1)+sP'(sy,y)+Q'(sy,y))dy]$$

Como antes, chamando $g_1(s,y) = sP'(sy,y)+Q'(sy,y)$ e $g_2(s,y) = P_\nu(s,1)+P'(sy,y)$, obtemos

$$\pi^*\omega = y^\nu[yg_2(s,y)ds+(sP(s,1)+Q(s,1)+g_1(s,y))dy] \tag{5.2}$$

Vamos analisar as expressões finais obtidas nas duas cartas. Considere o polinômio $R(x,y) = xP_\nu(x,y)+yQ_\nu(x,y)$. Temos dois casos a considerar, quando $R(x,y)\not\equiv 0$ e quando $R(x,y)\equiv 0$. No primeiro caso, dizemos que a explosão é não dicrítica e no segundo caso, temos uma explosão dicrítica

Se a explosão é não dicrítica, podemos dividir $\pi^*\omega$ por x^ν na primeira carta e y^ν na segunda carta, e escrevemos

$$1^{\text{º}}\text{ carta: } \tilde{\omega_1} = \frac{\pi^*\omega}{x^\nu} = (P_\nu(1,t)+tQ_\nu(1,t)+f_1)dx+xf_2dt;$$

$$2^{\text{º}}\text{ carta: } \tilde{\omega_2} = \frac{\pi^*\omega}{y^\nu} = yg_2(s,y)ds+(sP_\nu(s,1)+Q_\nu(s,1))dy.$$

Na primeira carta o divisor excepcional é dado por $x=0$ e portando, $\tilde{\omega_1}\wedge dx = xf_2dt\wedge dx$. Na segunda carta, ele é dado por $y=0$ e então $\tilde{\omega_2}\wedge dy = yg_2ds\wedge dy$. Assim, podemos concluir que no caso de a explosão ser não dicrítica o divisor excepcional é uma separatriz do transformado estrito de $\mathcal{F}$. De fato, essa é uma condição equivalente da explosão ser não dicrítica.

Note que, por exemplo, na 1º carta, as singularidades sobre o divisor excepcional ($x=0$) correspondem às raízes da equação $P_\nu(1,t)+tQ_\nu(1,t)=0$ e, possivelmente, a uma outra singularidade na origem do sistema de coordenadas (s,y). Observamos também que se $Q_\nu(0,1)\neq 0$, então Q_ν possui um termo de y^ν. Neste caso, temos que todas as singularidades estão no aberto coordenado da 1º carta. Essa situação em que todas as singularidades estão no aberto coordenado da 1º carta é sempre possível obter por meio de uma mudança de coordenadas.

Se a explosão é dicrítica, temos $R(x,y)\equiv 0$ e portanto, $\pi^*\omega$ pode ser escrito como:

$$1^{\text{º}}\text{ carta: } \pi^*\omega(x,t) = x^{\nu+1}[(P_{\nu+1}+tQ_{\nu+1}+x\tilde{f_1}(x,t))dx+\tilde{f_2}(x,t)dt]$$

onde $\tilde{f_1}$ e $\tilde{f_2}$ são holomorfas.

$$2^{\underline{\text{o}}} \text{ carta: } \pi^*\omega(s,y) = y^{\nu+1}[\tilde{g_2}(s,y)ds + sP_{\nu+1} + Q_{\nu+1}(s,1) + \tilde{g_1}(s,y)]$$

onde $\tilde{g_1}$ e $\tilde{g_2}$ são holomorfas. Nesse caso, nota-se que o divisor excepcional não é separatriz de $\pi^*\mathcal{F}$ e as singularidades de $\pi^*(\mathcal{F})$ sobre o divisor excepcional correspondem, por exemplo, na primeira carta às soluções simultâneas das equações $P_{\nu+1}(1,t) + tQ_{\nu+1}(1,t) = 0$ e $Q_\nu(1,t) = 0$ e, possivelmente mais a origem da segunda carta. As folhas de $\pi^*\mathcal{F}$ são transversais ao divisor excepcional (se fossem não transversais, o divisor seria invariante), com exceção das que passam por pelos pontos que são raízes de $Q_\nu(1,t) = 0$, e possivelmente da origem da outra carta. Note que nos pontos $(t_0, 0)$ tais que $Q_\nu(1,t) \neq 0$ (que são infinitos) as folhas são transversais ao divisor, e gerarão, via aplicação blow-down, separatrizes infinitas em p.

Observamos que se tomássemos um campo X que define $\mathcal{F}$ e fizessemos o pullback de X por π, o transformado estrito da folheação na primeira carta seria dado por

$$\tilde{X} = \frac{\pi^*X}{x^s}, \tag{5.3}$$

onde $s = \nu - 1$ no caso não dicrítico e $s = \nu$ no caso dicrítico. Na segunda carta $\tilde{X}$ é dado de forma análoga.

Exemplo 5.5. Seja M uma superfície complexa e seja $\mathcal{F}$ uma folheação com uma singularidade isolada $p \in M$ de tal modo que tomando cartas em torno de p, teremos $p = (0,0)$ e $\mathcal{F}$ dada por:

$$\omega = xdx + ydy + f(x,y)dx + g(x,y)dy,$$

onde f e g tem multiplicidade maior ou igual a 2.

Seja $\pi : \tilde{M} \to M$ a explosão de M em p. Na carta com coordenadas (x,t), temos:

$$\begin{aligned}\pi^*\omega &= xdx + xt(xdt + tdx) + f(x,xt)dx + g(x,xt)(tdx + xdt)\\ &= (x + xt^2 + x^2\tilde{f}(x,t) + x^2t\tilde{g}(x,t))dx + (x^2t + x^3\tilde{g}(x,t))dt,\end{aligned}$$

onde $g(x,xt) = x^2\tilde{g}(x,t)$ e $f(x,xt) = x^2\tilde{f}(x,t)$, com $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ holomorfas, pois f e g possuem multiplicidade pelo menos 2. Fatorando a expressão acima pelo termo comum x, obtemos que o transformado estrito de $\mathcal{F}$, $\widetilde{\mathcal{F}}$, é dado pela 1-forma:

$$\tilde{\omega_1} = (1 + t^2 + x\tilde{f}(x,t) + xt\tilde{g}(x,t))dx + (xt + x^2\tilde{g}(x,t))dt.$$

Segue que na primeira carta o divisor excepcional dado por $D = \{x = 0\}$ é uma separatriz do transformado estrito de $\mathcal{F}$. Um cálculo análogo usando a outra carta mostra que

$$\tilde{\omega_2} = (1 + u^2 + y\tilde{g}(u,y) + yu\tilde{f}(u,y))dy + (uy + y^2\tilde{f}(u,y))du.$$

As expressões acima nos mostram que a explosão é não dicrítica, ou seja, o divisor excepcional é uma separatriz de $\widetilde{\mathcal{F}}$. ◂

Para finalizar essa seção, relacionaremos a explosão de curvas com a explosão de folheações. Faremos isso em $\mathbb{C}^2$, observando que os resultados de caráter local se estendem para uma superfície complexa tomando cartas locais. Começaremos provando o seguinte

Lema 5.6. *Sejam $\mathcal{F}$ um germe de folheação em $\mathbb{C}^2$ gerada pela 1-forma $\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$ e $S = \{f = 0\}$ uma curva irredutível, com parametrização de Puiseux γ. São equivalentes:*

1. *S é uma separatriz de $\mathcal{F}$*
2. *$\gamma^*\omega = 0$.*

Demonstração. Escreva γ como $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$. Como γ é parametrização de S, temos $f(\gamma(t)) = 0$. Derivando essa expressão com relação a t, obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\frac{d\alpha(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\frac{d\beta(t)}{dt} = 0,$$

e isso quer dizer que os vetores

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\right) \ e \ \left(\frac{-d\beta(t)}{dt}, \frac{d\alpha(t)}{dt}\right)$$

são paralelos. Note que

$$\begin{aligned}
\omega \wedge df &= (a(x,y)dx + b(x,y)dy) \wedge \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial n}{\partial y}(x,y)dy\right) \\
&= \left(a(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - b(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) dx \wedge dy \\
&= \Delta(x,y) dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

Assim, f divide $\Delta(x,y)$ se, e somente se, f divide $\omega \wedge df$. f dividir $\Delta(x,y)$ significa que existe g de modo que $\Delta(x,y) = g(x,y)f(x,y)$ e então $\Delta(\gamma(t)) = 0$, ou seja

$$\Delta(\gamma(t)) = a(\gamma(t))\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) - b(\gamma(t))\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) = 0.$$

Usando a proporcionalidade dos vetores acima, obtemos que isso equvale a

$$\gamma^*\omega = a(\gamma(t))\frac{d\alpha(t)}{dt} + b(\gamma(t))\frac{d\beta(t)}{dt} = 0.$$

Antes de prosseguirmos faremos algumas observações simples acerca de conjuntos analíticos. Seja X um conjunto analítico em $U \subset N$, onde N é uma variedade complexa. Então se $f : M \to N$ é uma função holomorfa, a imagem inversa $f^{-1}(X)$ é claramente um subconjunto analítico de $f^{-1}(U)$, como se pode verificar facilmente. Observamos porém que a imagem direta de conjuntos analíticos pode não ser analítico.

Exemplo 5.7. Considere o conjunto analítico $X \subset \mathbb{C}^2$ dado pelas equações

$$z_1(z_1z_2 - 1) = 0 \;\text{ e }\; e^{2\pi i z_2} - 1 = 0.$$

A equação $e^{2\pi i z_2} - 1 = 0$ nos diz que $z_2 \in \mathbb{Z}$, e a primeira equação, que $z_1 = 0$ ou $z_1 = \frac{1}{z_2}$. Assim, X é descrito por

$$X = \left\{ \left(\frac{1}{n}, n \right); n \in \mathbb{Z}^* \right\} \cup \{(0, n); n \in \mathbb{Z}\}.$$

Considere $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z_1, z_2) = z_1$. Claro que fé holomorfa e

$$Y = f(X) = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{Z}^*\}.$$

É fácil ver que Y não é analítico em $\mathbb{C}$, pois uma função holomorfa de uma variável que se anula em torno de $0 \in \mathbb{C}$ só pode se anular em um conjunto discreto, assim a definição de conjunto analítico não pode ser satisfeita em $0 \in \mathbb{C}$. . Outro exemplo, devido a Osgood pode ser dado por $\Phi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3$, onde $\Phi(x, y) = (x, xy, xe^y)$. Nesse caso a imagem de $\mathbb{C}^2$ não é analítica em $\mathbb{C}^3$.◂

Intuitivamente, o que ocorre no exemplo anterior é que os pontos da forma $(\frac{1}{n}, n)$ estão "escapando" para o infinito e isso implica na falta de analiticidade em 0. Porém, se a função f de alguma forma evitar que os pontos escapem para o infinito, a imagem de um conjunto analítico é analítico. Isso se traduz formalmente exigindo que f seja uma aplicação própria. Com isso, temos o teorema a seguir, conhecido como Teorema da aplicação própria, ou Teorema de Grauert-Remmert ([10]).

Teorema 5.8. *Seja $\Phi : M \longrightarrow N$ uma aplicação holomorfa e própria entre as variedades complexas M e N. Se $A \subset M$ é um subconjunto analítico de M, então $\Phi(A)$ é um subconjunto analítico de N e além disso*

$$dim_w Y = \sup_{z \in f^{-1}(w)} dim_z X.$$

Em particular, se um conjunto analítico definido um uma superfície complexa M tem dimensão 1, sua imagem por uma aplicação própria $f : M \longrightarrow N$, onde N é uma superfície complexa, terá também dimensão 1.

Unindo os comentários feitos a respeito de imagens de conjuntos analíticos e tendo o lema 5.6 em mente, provamos facilmente o próximo resultado:

Proposição 5.9. *Seja $\mathcal{F}$ um germe de folheação holomorfa gerada por uma 1-forma ω. Se $S \subset \mathbb{C}^2$ é uma curva irredutível, então são equivalentes:*

(i). S é uma separatriz de $\mathcal{F}$.

(ii). $\tilde{S}$ é uma separatriz de $\tilde{\mathcal{F}}$ no ponto $\tilde{S} \cap \pi^{-1}(0)$.

Demonstração. Sejam γ e $\tilde{\gamma}$ parametrizações de Puiseux de S e $\tilde{S}$ respectivamente. Pelo Lema 5.6, segue-se que $\gamma^*\omega = 0$. Como $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, então $\tilde{\gamma}^* \circ \pi^*\omega = \gamma^*\omega$ e portanto a equivalência segue novamente do lema 5.6. ∎

5.4 Singularidades de Folheações

Seja X um campo vetorial holomorfo definido em um abeto $U \subset \mathbb{C}^n$. Nesse caso, podemos escrever $X = (X_1, \dots X_n)$. Vendo $X : U \to \mathbb{C}^n$ como uma aplicação holomorfa, consideramos a matriz Jacobiana $DX(p)$, onde p é um ponto singular de X. Consideramos o espectro $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de $DX(p)$. Se $\varphi : U \to V$ é um biholomorfismo e $Y = \varphi_* X$ é o pushforward de X por φ, então $DY(\varphi(p)) = d\varphi(p)DX(p)d\varphi(\varphi^{-1}(p))$, pois $X(p) = 0$. Isso mostra que $DY(\varphi(p))$ e $DX(p)$ são matrizes conjugadas e portanto possuem o mesmo espectro. Segue que o espectro independe do sistema de coordenadas e assim podemos definir o espectro em p de um campo singular definido numa variedade complexa qualquer, definindo o espectro desse campo como o espectro do pushfoward desse campo via uma carta local em torno de p.

Considere agora um campo holomorfo X definido em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{C}^2$. Sejam λ_1, λ_2 os autovalores de $DX(p)$, onde p é uma singularidade de X. Dizemos que p é singularidade reduzida de X se $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ e $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$; ou $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$; ou $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$. Seja agora $Y = fX$, onde $f : U \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa que nunca se anula. Um simples cálculo mostra que $DY(p) = f(p)DX(p) + X(p)Df(p)$, e como $X(p) = 0$, temos $DY(p) = f(p)DX(p)$, logo $f(p)\lambda_1$ e $f(p)\lambda_2$ são os autovalores de $DY(p)$. Assim p é singularidade reduzida de X se e somente se é singularidade reduzida de Y. As discussões feitas até aqui mostram que a definição seguinte está bem definida.

Definição 5.10. *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície complexa, $p \in Sing(\mathcal{F})$ e X um campo vetorial holomorfo que representa $\mathcal{F}$ em torno de p. Sejam λ_1, λ_2 os autovalores de $DX(p)$. Dizemos que p é singularidade reduzida de $\mathcal{F}$ se*

1. $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ *e* $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$ *ou*

2. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ *ou* $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$.

No primeiro caso, p é dita uma singularidade simples e no segundo caso uma sela-nó.

O resultado a seguir é conhecido como Teorema de redução (ou resolução) de singularidades e representou um grande avanço na teoria de folheações. A demonstração pode ser encontrada em [19].

Teorema 5.11. *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa e $p \in Sing(\mathcal{F})$. Então existe uma sequência finita de explosões π em p tal que todas as singularidades do transformado estrito de $\mathcal{F}$ sobre $\pi^{-1}(p)$ são reduzidas.*

O Teorema 5.11 nos permite dar a seguinte definição:

Definição 5.12. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação definida em uma superfície complexa M e $p \in Sing(\mathcal{F})$. Dizemos que p é uma singularidade não dicrítica se na quantidade mínima de blow-ups necessárias para dessingularizar p, tivermos todas as explosões não dicríticas. Equivalentemente, todas as linhas projetivas do divisor são separatrizes da folheação reduzida. Se alguma das explosões for dicrítica, então p é dita uma singularidade dicrítica.*

Se $\mathcal{F}$ é uma folheação definida em uma superfície complexa M, e $p \in Sing(\mathcal{F})$ é um ponto singular de $\mathcal{F}$, tomando cartas locais de modo que $p = (0,0) \in \mathbb{C}^2$ e $X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ represente $\mathcal{F}$, chamaremos a matriz Jacobiana $DX(0)$ de matriz da parte linear de X, ou mesmo matriz da parte linear de $\mathcal{F}$, ou simplesmente parte linear de $\mathcal{F}$.

Seja $\mathcal{F}$ como no paragráfo anterior e tal que $\nu_p(\mathcal{F}) = 1$. Nesse caso a parte linear de $\mathcal{F}$ é uma matriz não nula. Usando a forma canônica de Jordan, podemos supor que $DX(0)$ tem uma das seguintes formas:

(i). $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbf{C}^*$;

(ii). $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}^*$;

(iii). $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbf{C}^*$

(iv). $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

O caso (i) acima ocorre quando um autovalor da matriz é nulo e o outro não, isto é, a singularidade é uma sela-nó. Se o caso (iv) ocorre, dizemos que a singularidade é nilpotente, ou de forma equivalente, uma singularidade de uma folheação é dita nilpotente se a matriz da parte linear de $\mathcal{F}$ é nilpotente.

Nosso objetivo é explorar um pouco os tipos de singularidades (i), (ii), (iii) e (iv). Esse estudo nos será útil para estabelecermos alguns resultados sobre curvas generalizadas. Em particular, entenderemos como uma singularidade de um determinado tipo se comporta quando é explodida por um blow-up. Note que se a singularidade é, por exemplo, do tipo (ii), podemos diagonalizar a matriz da parte linear de $\mathcal{F}$, obtendo coordenadas em que a matriz do representante X de $\mathcal{F}$ é dada como em (ii). Nessas coordenadas, se $X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$, comparando a matriz jacobiana com a matriz (ii), obtemos que

$$\frac{\partial a}{\partial x}(0) = \lambda_1,\ \frac{\partial b}{\partial y}(0) = \lambda_2 \text{ e } \frac{\partial b}{\partial x}(0) = \frac{\partial a}{\partial y}(0) = 0.$$

Nesse caso, tomando a forma dual ω de X, escrevemos nesse sistema de coordenadas

$$\omega = (-\lambda_2 y + f_1(x,y))dx + (\lambda_1 x + f_2(x,y))dy,$$

onde f_1 e f_2 são funções holomorfas com ordem maior ou igual a dois. Assim, cada tipo de singularidade nos dá um sistema de coordenadas em que a folheação é descrita de um certo modo.

Fazendo o blow-up nessas representações locais obtemos algum entendimendo do comportamento dessas singularidades por blow-ups.

Proposição 5.13. *Se p é uma singularidade de uma folheação defininida em uma superfície complexa do tipo (iii) acima, então $\pi^*\mathcal{F}$ possui uma única singularidade do tipo sela-nó sobre o divisor excepcional.*

Demonstração. Seja $\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$ um representante local de $\mathcal{F}$ em torno de $p = (0,0)$, de modo que nessas coordenadas, temos

$$DX(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbf{C}^*.$$

Olhando para a matriz acima, obtemos que

$$\frac{\partial b}{\partial x}(0) = -\lambda,\ \frac{\partial b}{\partial y} = -1,\ \frac{\partial a}{\partial x}(0) = 0,\ \frac{\partial a}{\partial y}(0) = \lambda.$$

Tomando o desenvolvimento de Taylor de a e b em torno de 0, temos:

$$a(x,y) = \lambda y + A_1 xy + \cdots = \lambda y + g(x,y)$$

$$b(x,y) = -\lambda x - y + B_1 xy + \cdots = -\lambda x - y + f(x,y)$$

onde f e g possuem multiplicidade pelo menos 2. Usando as expressões acima, podemos escrever ω como

$$\omega(x,y) = -(\lambda y + g(x,y))dx + (\lambda x + y + f(x,y))dy.$$

Calculando $\pi^*\omega$ nas coordenadas (x,t), obtemos:

$$\begin{aligned}\pi^*\omega(x,t) &= -(\lambda tx + g(x,xt))dx + (\lambda x + xt + f(x,xt))(xdt + tdx)\\ &= (-\lambda tx + g(x,xt) + \lambda xt + xt^2 + tf(x,xt))dx + (\lambda x^2 t + x^2 t + xf(x,xt))dt\\ &= (xt^2 - x\tilde{g} + tx\tilde{f})dx + (\lambda x^2 t + x^2 t + x^2\tilde{f})dt,\end{aligned}$$

onde $f(x,xt) = x\tilde{f}(x,t)$ e $g(x,xt) = x\tilde{g}(x,t)$ e portando, $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ possuem multiplicidade pelo menos um em x. Assim, o transformado estrito de $\mathcal{F}$ por π é dado por:

$$\tilde{\omega}(x,t) = \frac{\pi^*\omega}{x} = (t^2 + t\tilde{f} - \tilde{g})dx + (\lambda x + tx + x\tilde{f})dt.$$

Note que a explosão é não dicrítica e além disso, sobre o divisor excepcional, temos

$$\tilde{\omega}(0,t) = (t^2)dx,$$

pois $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ se anulam sobre o divisor excepcional por possuirem multiplicidade pelo menos 1 em x. Assim, a única singularidade sobre o divisor D é dada por $q = (0,0)$.

Note que se o coeficiente de dx em $\tilde{\omega}$ tem multiplicidade pelo menos 2, então as derivadas (tanto em t, quanto em x) são nulas. A matriz jacobiana em 0 é dada por

$$DX(0) = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto, a singularidade é uma sela-nó. Se o coeficiente de dx não tem multiplicidade pelo menos 2, então $\tilde{g}$ é da forma $\tilde{g}(x,t) = x + \cdots$. Nesse caso, q ainda é uma sela-nó, pois os autovalores da jacobiana serão λ e 0.

Verificaremos que não há singularidades na segunda carta. Façamos $x = uy$. Calculando $\pi^*\omega$, obtemos

$$\begin{aligned}\pi^*\omega(u,y) &= (\lambda uy + y + f(uy,y))dy - (\lambda y + g(uy,y))(udy + ydu)\\ &= (\lambda uy + y + f(uy,y) - \lambda uy - ug(uy,y))dy + (-\lambda y^2 - yg(uy,y))du\\ &= (y + f(uy,y) - ug(uy,y))dy + (-y^2 - yg(uy,y))du\\ &= y[(1 + \tilde{f} - u\tilde{g})dy + (-\lambda y - y\tilde{g})du].\end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{\omega}(u,y) = (-\lambda y - y\tilde{g})du + (1 + \tilde{f} - u\tilde{g})dy$$

Sobre o divisor excepcional $\{y = 0\}$, temos $\tilde{\omega}(u,y) = dy$, que claramente não possui singularidades. Isso conclui a demonstração. ■

Proposição 5.14. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície complexa com uma singularidade p do tipo (ii) com $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Então $\pi^*(\mathcal{F})$ não possui singularidades sobre o divisor excepcional.*

Demonstração. Tome cartas em que $\mathcal{F}$ seja dada localmente em torno de $p = (0,0)$ pela 1-forma:

$$\omega = (-\lambda y + f_1(x,y))dx + (\lambda x + f_2(x,y)dy,$$

onde f_1 e f_2 possuem multiplicidade pelo menos 2. Na 1º carta do blow-up, escrevemos $\pi(x,t) = (x,xt)$, e então

$$\begin{aligned}\pi^*\omega(x,t) &= (-\lambda xt + f_1(x,xt))dx + (\lambda x + f_2(x,xt))(xdt + tdx)\\ &= (-\lambda xt + f_1(x,xt) + \lambda xt + tf_2(x,xt))dx + (\lambda x^2 + xf_2(x,xt))dt\\ &= (f_1(x,xt) + tf_2(x,xt))dx + (\lambda x^2 + xf_2(x,xt))dt.\end{aligned}$$

Escrevendo $f_1(x,xt) = x^2 f_1(\tilde{x,t})$, $f_2(x,xt) = x^2 f_2(\tilde{x,t})$ e dividindo pelo termo comum x^2 que aparece nas coordenadas de ω, obtemos que o transformado estrito de $\mathcal{F}$, $\tilde{\mathcal{F}}$ é dado por

$$\omega(\tilde{x,t}) = (f_1(\tilde{x,t}) + tf_2(\tilde{x,t}))dx + (\lambda + xf_2(\tilde{x,t}))dt.$$

No divisor excepcional $\{x = 0\}$, temos

$$\omega(\tilde{0}, t) = \lambda dt + \cdots$$

que claramente não é singular.

Fazendo cálculos análogos na segunda carta, obtém-se o resultado. ■

Proposição 5.15. *Se $\mathcal{F}$ é uma folheação com uma única singularidade p do tipo (ii) com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então o transformado estrito $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ possui duas singularidades sobre o divisor excepcional, com autovalores $\lambda_1 - \lambda_2$, λ_2 e $\lambda_2 - \lambda_1$, λ_1, respectivamente.*

Demonstração. Novamente, as contas serão feitas na primeira carta. Tome um sistema de coordenadas em que $\mathcal{F}$ é induzida localmente pela 1-forma:

$$\omega = (-\lambda_2 y + f_1(x, y))dx + (\lambda_1 x + f_2(x, y))dy.$$

O pullback de ω por π se escreve:

$$\pi^*\omega(x, t) = (-\lambda_2 xt + f_1(x, xt)\lambda_1 xt + tf_2(x, xt))dx + (\lambda_2 x^2 + xf_2(x, xt))dt.$$

Dividindo pelo termo comum x, obtemos que o transformado estrito de $\mathcal{F}$ é dado pela 1-forma:

$$\tilde{\omega}(x, t) = ((\lambda_1 - \lambda_2)t + xf_1(\tilde{x, t}) + txf_2(\tilde{x, t}))dx + (\lambda_2 x + x^2 f_2(\tilde{x, t}))dt,$$

onde $f_1, f_2, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ são como na proposição anterior. Note que sobre o divisor excepcional, $\{x = 0\}$, temos

$$\omega(\tilde{0}, t) = (\lambda_1 - \lambda_2)tdx$$

que tem uma singularidade em $t = 0$. Calculando a jacobiana do campo conjugado a $\tilde{\omega}$ obtém-se os autovalores como no enunciado da proposição. A segunda carta nos dará a outra singularidade. ■

Vamos apresentar um corolário da proposição 5.15. Trata-se de um resultado técnico.

Corolário 5.16. *Se uma singularidade é do tipo (ii) e possui autovalores λ_1, λ_2 tais que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}^+$, então após um número finito de explosões, teremos que os autovalores das singularidades são iguais ou o quociente é um racional negativo.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos que $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

Pela Proposição 5.15, temos que uma explosão nos dá duas singularidades com autovalores $\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2$ e $\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1$. No primeiro caso, temos $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$ e $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}^-$.

No segundo caso, se $\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_1$, então obtemos autovalores iguais. Por outro lado, se $\lambda_2 - \lambda_1 \neq \lambda_1$, nada podemos concluir sobre a singularidade que tem como autovalores λ_1

e $\lambda_2 - \lambda_1$. Assim, explodimos essa singularidade. Novamente pela Proposição 5.15 teremos duas singularidades com autovalores dados por $\lambda_1 - (\lambda_2 - \lambda_1)$, $\lambda_2 - \lambda_1$ e λ_1, $(\lambda_2 - \lambda_1) - \lambda_1$, ou seja, $-\lambda_2 + 2\lambda_1$, $\lambda_2 - \lambda_1$ e $\lambda_1, \lambda_2 - 2\lambda_1$. Se $-\lambda_2 + 2\lambda_1 < 0$, então $\frac{-\lambda_2+2\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} \in \mathbb{Q}^-$. Além disso, se $\lambda_2 - 2\lambda_1 = \lambda_1$, então teremos uma singularidade com dois autovalores iguais.

Se $\lambda_2 \neq 3\lambda_1$ e $\lambda_2 - 2\lambda_1 > 0$, então realizando mais uma explosão nessa singularidade obtemos, pela Proposição 5.15, uma singularidade com autovalores $\lambda_1 - (\lambda_2 - 2\lambda_1)$, $(\lambda_2 - 2\lambda_1)$ e $\lambda_1, \lambda_2 - 2\lambda_1 - \lambda_1$, ou seja, temos $-\lambda_2 + 3\lambda_1$, $\lambda_2 - 2\lambda_1$ e $\lambda_1, \lambda_2 - 3\lambda_1$. Se $-\lambda_2 + 3\lambda_1 < 0$, então $\frac{-\lambda_2+3\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} \in \mathbb{Q}^-$. Novamente, sendo $\lambda_2 - 3\lambda_1 = \lambda_1$, teremos uma singularidade com dois autovalores iguais.

Seguindo esse processo, na q-ésima etapa, teremos duas singularidades com os autovalores

$$-\lambda_2 + q\lambda_1, \lambda_2 - (q-1)\lambda_1 \ e \ \lambda_1, \lambda_2 - q\lambda_1.$$

Se $-\lambda_2 + q\lambda_1 < 0$, então $\frac{-\lambda_2+q\lambda_1}{\lambda_2-(q-1)\lambda_1} \in \mathbb{Q}^-$.

Se $-\lambda_2 + q\lambda_1 = 0$, então temos que na etapa anterior os autovalores λ_1 e $\lambda_2 - (q-1)\lambda_1$ associados a singularidade são iguais.

Novamente, sendo $\lambda_2 - q\lambda_1 = r > 0$ ainda nada podemos concluir sobre $\lambda_2 - q\lambda_1 = r$. Uma vez que pelo Algoritimo de Euclides, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= q\lambda_1 + r \\
\lambda_1 &= q_1 r + r_1 \\
r &= q_2 r_1 + r_2 \\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n \\
r_n &= 0
\end{aligned}$$

com $0 \leq r_{i-1} < r_i$, aplicamos o que foi descrito acima para r e λ_1 e assim sucessivamente. No transcorrer desse processo obtemos autovalores cujo quociente pertence a $\mathbb{Q}^-$, ou são iguais, em um número finito de explosões. ■

5.5 Singularidades Simples de uma Folheação

Seja $\mathcal{F}$ um germe de folheação holomorfa em $0 \in \mathbb{C}^2$, definida por $\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$, com uma singularidade simples em 0 (Definição 5.10). Neste caso, podemos diagonalizar a matriz jacobiana do campo que representa $\mathcal{F}$, de modo que se λ e μ são os autovalores da matriz, obtemos um sistema de coordenadas tal que:

$$\frac{\partial b}{\partial x} = -\mu, \ \frac{\partial a}{\partial y} = \lambda \text{ e } \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y} = 0.$$

Não é difícil ver, usando as expansões de Taylor de a e b em torno de zero que as relações acima implicam que $a(x, y) = \lambda y + a'(x, y)$ e $b(x, y) = -\mu x + b'(x, y)$, onde a' e b' são holomorfas de multiplicidade maior ou igual a 2.

Se temos uma folheação com uma singularidade simples, ela já está resolvida e além disso, temos o resultado seguinte:

Proposição 5.17. *(Estabilidade por explosões). Suponha que a origem é uma singularidade simples de $\mathcal{F}$ e seja $\pi : \tilde{M} \to M$ a explosão de $\mathbb{C}^2$ centrada na origem. Se $\tilde{\mathcal{F}}$ é o transformado estrito de $\mathcal{F}$ por π, temos o seguinte:*

(i). A explosão é não-dicrítica.

(ii). A folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ possui duas singularidades sobre o divisor excepcional que são também simples.

Demonstração. Tendo em vista o que observamos antes, podemos escolher um sistema de coordenadas (x, y) em que $\mathcal{F}$ é representado pela 1-forma $\omega = ydx - \alpha dy + a'(x, y)dx + b'(x, y)dy$, onde a' e b' são pelo menos de ordem 2. Usando a primeira carta do blow-up, escrevemos $y = xt$ e portanto,

$$\begin{aligned}
\pi^*\omega &= xtdx - \alpha x(xdt + tdx) + a'(x, xt)dx + b'(x, B)(xdt + tdx)\\
&= x[((1 - \alpha)t + xA(x, t))dx + (x^2 B(x, t) - \alpha x)dt],
\end{aligned}$$

onde A e B são holomorfas. A folheação $\widetilde{\mathcal{F}}$ é dada por $\frac{1}{x}\pi^*\omega$. Como o divisor excepcional na 1º carta é $D = \{x = 0\}$, então é uma separatriz de $\widetilde{\mathcal{F}}$. Observamos que a origem da 1º carta é uma singularidade de $\mathcal{F}$. Calculando a jacobiana do campo conjugado, obtemos a matriz

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ A(0, 0) & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

e portanto a razão dos autovalores é $\frac{\alpha}{1-\alpha}$, e como $\alpha \notin \mathbb{Q}^+$, obtemos que $\frac{\alpha}{1-\alpha} \notin \mathbb{Q}^+$. Os cálculos usando a segunda carta são análogos e obtém-se a outra singularidade. ∎

O próximo resultado é de nosso interesse e será utilizado posteriormente.

Teorema 5.18. *Se $\mathcal{F}$ é uma folheação definida em uma superfície complexa M tal que $p \in M$ é uma singularidade simples de $\mathcal{F}$, então $\mathcal{F}$ tem exatamente duas separatrizes em p que são suaves e transversas.*

O Teorema 5.18 é na verdade um corolário do Teorema de Briot-Bouquet, cuja demonstração pode ser encontrada em [4]. Esse teorema implica que uma singularidade do tipo reduzida possui no máximo duas separatrizes. O próximo exemplo mostra que o Teorema 5.18 não é verdade quando a singularidade apesar de reduzida não é simples.

Exemplo 5.19. Considere a folheação dada por $\omega = (x-y)dx + x^2dy$. Essa folheação é chamada de folheação de Euler. Notamos que $0 \in \mathbb{C}^2$ é uma singularidade da folheação. Além disso, essa singularidade é uma sela-nó como pode ser observado calculando-se a matriz Jacobiana de ω.

É imediato que $x = 0$ é uma separatriz de ω, vamos mostrar que é a única. De fato, seja $\gamma(t)$ a parametrização de Puiseux de uma curva irredutível que é separatriz de ω. Sabemos que $\gamma^*\omega = 0$. Escrevemos γ como $\gamma(t) = (t, \sum_{n=1}^{\infty} a_nt^n)$ e assim,

$$0 = \gamma^*\omega = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_nt^n - t\right) dt + t^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} na_nt^{n-1}\right) dt = \left(a_1t - t + \sum_{n=2}^{\infty} a_nt^n + \sum_{n=1}^{\infty} na_nt^{n+1}\right) dt.$$

Portanto,

$$a_1t + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} + na_n)t^{n+1} = t.$$

Com isso, obtemos $a_1 = 1$ e $a_{n+1} + na_n = 0$, que recursivamente nos dá $a_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Segue então que

$$f(x,y) = y - \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n = y - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n-1)!x^n = y - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n!x^{n+1}$$

seria uma separatriz. Porém, note que essa série não é convergente. Assim, não existem mais separatrizes em torno da origem, porém existe uma separatriz formal. ◀

Podemos dar uma definição equivalente de singularidades dicríticas considerando a quantidade de separatrizes que passam pela singularidade: Uma singularidade p de uma folheação $\mathcal{F}$ é dicrítica se e somente se possui uma infinidade de separatrizes. Com efeito, se p é dicrítica, então tomando uma sequência de blow-ups sobre p que reduz $\mathcal{F}$, temos que alguma componente irredutível de do divisor D não é invariante pela folheação reduzida $\widetilde{\mathcal{F}}$. Nesse caso, existe um ponto regular sobre o divisor, digamos $\tilde{p}$, de modo que as folhas passando por $\tilde{p}$ são transversais ao divisor. Assim, mediante uma composição de blow-downs, projetamos essas folhas em infinitas separatrizes em p. Por outro lado, se π é uma sequência de blow-ups sobre p que reduz $\mathcal{F}$ e S é uma separatriz em p, então o transformado estrito $\tilde{S}$ de S é uma separatriz de $\tilde{F}$ em um ponto $\tilde{p} \in D$. Se D é invariante por $\mathcal{F}$ então $\tilde{p}$ é um ponto singular de $\tilde{\mathcal{F}}$. Mas uma singularidade reduzida tem no máximo duas separatrizes. Portanto, ou p tem um número finito de separatrizes ou D não é invariante por $\tilde{\mathcal{F}}$.

6 Curvas Generalizadas

Neste capítulo, falaremos brevemente de curvas generalizadas. Este capítulo consiste basicamente de um rápido estudo de uma parte do artigo [2], juntamente com o capítulo 8 de [21]. Inicialmente começaremos com a definição de peso projetivo, que leva em conta as intersecções dos espaços projetivos criados em uma resolução (esquinas). Veremos um importante teorema que relaciona esse peso com a multiplicidade da folheação. Depois, daremos a definição de curva generalizada e algumas propriedades.

Neste capítulo, salvo menção contrária, M designará uma superfície complexa e as explosões serão consideradas não dicríticas. Além disso, para simplificar a notação, denotaremos a linha projetiva $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(1)$ simplesmente por P. O divisor excepcional poderá às vezes ser denotado por $\tilde{P}$.

Definição 6.1. *O peso $w(P)$ de uma linha projetiva P que aparece no processo de desingularização é:*

(i). 1, se a linha projetiva aparece imediatamente depois de explodir $p \in M$;

(ii). A soma dos pesos das linhas projetivas que contém a singularidade na qual foi feito o blow-up que originou P.

Observamos que uma vez criada a linha projetiva P, associamos um inteiro a essa linha que fica inalterado após sucessivas explosões, ou seja, o peso dela permanece constante.

Definição 6.2. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação singular em uma superfície complexa que em coordenadas locais é dada por um campo de vetores holomorfo X com uma singularidade na origem. Seja B um ramo de S que é separatriz de $\mathcal{F}$. Tomando uma parametrização de Puiseux minimal de B, ϕ, definimos a multiplicidade de $\mathcal{F}$ em p ao longo de S ($p \in B$) como a ordem de ϕ^*X. Denotamos esse número por $\mu_p(\mathcal{F}, B)$.*

É claro que a definição anterior independe da escolha de coordenadas locais, uma vez que a ordem de X não depende das coordenadas locais e ϕ é tomada como sendo a parametrização minimal.

No apêndice mostramos que o campo ϕ^*X é holomorfo e mostramos que $\mu_p(\mathcal{F}, B)$ é na verdade o índice do campo X quando restrito ao ramo B. Esses fatos são necessários para um teorema a ser provado no capítulo 7.

Se tomarmos uma curva suave S invariante pela folheação, podemos tomar um sistema de coordenadas (x, y) em torno da singularidade em que S é dada por $S = \{y = 0\}$. Se nessas coordenadas $\mathcal{F}$ é dada pela 1-forma $\omega(x, y) = yf(x, y)dx + g(x, y)dy$, então a multiplicidade m de $g(x, 0)$ é a multiplicidade de $\mathcal{F}$ em p ao longo de S. O próximo lema será de extrema importância tanto nesse capítulo quanto no próximo:

Lema 6.3. *Seja $\pi : M' \to M$ blow-up com centro p, B' o transformado estrito de B por π, $\mathcal{F}'$ o transformado estrito de $\mathcal{F}$ e seja p' um ponto de $\pi^{-1}(p) \cap B'$. Então*

$$\mu_p(\mathcal{F}, B) = \begin{cases} \mu_{p'}(\mathcal{F}', B') + \nu_p(B) \cdot \nu_p(\mathcal{F}) & s\ \pi \text{ é dicrítica} \\ \mu_{p'}(\mathcal{F}', B') + \nu_p(B) \cdot \big(\nu_p(\mathcal{F}) - 1\big) & se\ \pi \text{ é não dicrítica} \end{cases} \tag{6.1}$$

Demonstração. Tome cartas locais (x, y) em torno de p e $\phi = (\phi_x, \phi_y) : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$, uma parametrização de Puiseux do ramo B. Suponhamos, sem perda de generalidade que $\phi_x \neq 0$. Então B' pode ser descrita completamente nas coordenanas (x, t) da primeira carta do blow-up, onde $y = tx$. Seja $\tilde{\phi}$ a parametrização de B'. Da equação $\pi \circ \tilde{\phi} = \phi$, obtemos $\tilde{\phi} = \left(\phi_x, \frac{\phi_y}{\phi_x}\right)$. Seja $X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ o campo que gera $\mathcal{F}$, dado em coordenadas locais. Então, pela equação 5.3:

$$\pi^* X = x^s \tilde{X}$$

onde $\tilde{X}$ representa, em coordenadas locais, o transformado estrito de $\mathcal{F}$. No caso, temos $s = \nu_p(\mathcal{F}) - 1$ ou $s = \nu_p(\mathcal{F})$, dependendo de a explosão ser não dicrítica ou dicrítica, respectivamente. Logo, como $\pi \circ \tilde{\phi} = \phi$, temos:

$$\phi^* X = (\pi \circ \tilde{\phi})^* X = \tilde{\phi}^*(\pi^* X) = \tilde{\phi}^*(x^s \tilde{X}) = \phi_x^s \tilde{\phi}^*(\tilde{X}),$$

ou seja,

$$\phi^* X = \phi_x^s \tilde{\phi}^*(\tilde{X}). \tag{6.2}$$

Lembrando que $\mathrm{ord}(\phi_x) = \nu_p(B)$, e que $\mu_{p'}(\pi^*\mathcal{F}, B') = \mathrm{ord}\tilde{\phi}^*(\tilde{X})$, interpretando 6.2, obtemos:

$$\mu_p(\mathcal{F}, B) = \mu_{p'}(\pi^*\mathcal{F}, B') + \nu_p(B)s.$$

Substituindo o s adequado a cada caso obtemos o resultado. ■

Antes de enunciar e provar o próximo teorema, vamos estabelecer notações que nos ajudarão a realizar cálculos com a definição de peso projetivo. Para isso, considere uma sequência de explosões:

$$M_n \overset{\pi_n}{\to} M_{n-1} \overset{\pi_{n-1}}{\to} \ldots \overset{\pi_1}{\to} M_0 = M.$$

Seja $D_1 = \pi_1^{-1}(p)$ o divisor excepcional da primeira explosão, que será denotado também por P_1^1. Ou seja, $D_1 = P_1^1$. Além disso, se $\mathcal{F}$ é uma folheação em $M_0 = M$, denotamos por $\mathcal{F}_1$ a folheação que aparece em M_1, $\mathcal{F}_j$ a folheação que aparece em M_j, que são as explosões sucessivas de $\mathcal{F}$. Assim, por exemplo, $\mathcal{F}_1 = \pi_1^*\mathcal{F}$. Seja agora D_i o divisor excepcional da i-ésima explosão. Denote p por p_0. Se $p_{n-1} \in D_{n-1}$, definimos:

$$P_n^n = \pi_n^{-1}(p_{n-1}).$$

Além disso, para $k = 1, \dots, n-1$, fica bem definido o seguinte:

$$P_k^n = \pi_n^* P_k^{n-1}.$$

Por exemplo, $P_1^2 = \pi_2^* P_1^1$, $P_1^3 = \pi_3^* P_1^2$ e assim por diante. Entendendo a definição de peso projetivo em termos dessa notação, temos $w(P_1^1) = 1$, pois é a linha projetiva depois da primeira explosão. Se tivermos $p_1 \in P_1^1$, considerando $P_2^2 = \pi_2^{-1}(p_1)$, como P_1^1 é a única linha projetiva que contém a singularidade p_1, a definição nos dá:

$$w(P_2^2) = \sum_{p_1 \in P_1^1} w(P_1^1) = 1.$$

Prosseguindo com esse raciocínio, teremos

$$w(P_n^n) = \sum_{p_{n-1} \in P_k^{n-1}} w(P_k^{n-1}).$$

Além disso, observando que $P_k^n = \pi_n^* P_k^{n-1}$, também temos

$$w(P_k^n) = w(P_k^{n-1}).$$

Vamos aplicar a definição 6.2 ao caso específico em que B é uma reta projetiva do divisor excepcional em uma etapa qualquer. Seja $p \in P_k^n = B$. Definimos o seguinte número:

$$\varphi(p, P) = \begin{cases} \mu_p(\mathcal{F}_n, P_k^n) \text{ se } p \in P \text{ não é uma esquina,} \\ \mu_p(\mathcal{F}, P_k^n) - 1 \text{ se } p \in P \text{ é uma esquina.} \end{cases} \tag{6.3}$$

Note que se p é uma esquina, $p = P_{k_1}^n \cap P_{k_2}^n$ e temos dois inteiros associados a p: $\varphi(p, P_{k_1}^n)$ e $\varphi(p, P_{k_2}^n)$

Tendo em vista essas notações, passamos ao:

Teorema 6.4. *Se $p \in M$ é uma singularidade não-dicrítica de $\mathcal{F}$, então denotando $\nu = \nu_p(\mathcal{F})$, temos:*

$$\nu + 1 = \sum_{q \in \tilde{P} \cap Sing(\mathcal{F}_n)} w(P_k^n) \varphi(q, P_k^n).$$

Demonstração. A prova será por indução em n, ou seja, no número de explosões da folheação $\mathcal{F}$. Começaremos a prova para $n = 1$. A asserção para $n = 1$ é equivalente ao seguinte:

$$\nu + 1 = \sum_{q \in D \cap Sing(\pi^* \mathcal{F})} \mu_q(\pi^* \mathcal{F}, D),$$

pois nesse caso, toda singularidade que está no divisor excepcional não é uma esquina e portanto, $\varphi(p, D) = \mu_p(\pi^* \mathcal{F}, D)$. Consideramos nesse caso que $\mathcal{F}$ seja gerado pelo campo vetorial holomorfo $X = a(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$. Note que podemos supor, conforme já observado, que todas as singularidades no divisor excepcional estão na verdade contidas no aberto coordenado da primeira carta da explosão. Então, o blow-up de $\mathcal{F}$ é gerado pelo campo $\tilde{X}$, onde:

$$\tilde{X} = \frac{\pi^* X}{x^{\nu-1}},$$

pois a explosão é não dicrítica. Assim, se $q = (0, t_0) \in Sing(\pi^*\mathcal{F}) \cap E$, então $\mu_q(\pi^*\mathcal{F}, D)$ é a multiplicidade de t_0 com raíz do polinômio $b_\nu(1,t) + ta_\nu(1,t)$. Assim, obtemos:

$$\sum_{q \in E \cap Sing(\pi^*\mathcal{F})} \mu_p(\pi^*\mathcal{F}, E) = \text{grau}(b_\nu(1,t) + ta_\nu(1,t)) = \nu + 1.$$

Assim, a fórmula está provada para o caso $n = 1$.

Suponhamos a validade da afirmação para n explosões. Realizamos então uma explosão em $p_n \in D_n$. Levando em conta a definição antes adotada, temos que separar os casos em que p_n é ou não é uma esquina.

Caso 1: p_n não é uma esquina. Nesse caso p_n está em uma única linha projetiva, digamos, $p_n \in P_k^n$. Como $P_k^{n+1} = \pi_{n+1}^* P_k^n$, o único termo modificado pela explosão em p_n é o termo $w(P_k^n)\phi(p_n, P_k^n) = w(P_k^n)\mu_{p_n}(\mathcal{F}_n, P_k^n)$. Se for $q \in P_k^{n+1} \cap P_{n+1}^{n+1}$, então q é uma esquina. Lembrando que (Lema 6.3)

$$\mu_q(\mathcal{F}_{n+1}, P_k^{n+1}) = \mu_{p_n}(\mathcal{F}_n, P_k^n) - (\nu_{p_n}(\mathcal{F}_n) - 1),$$

temos:

$$w(P_k^n)\varphi(p, P_k^n) = w(P_k^{n+1})(\mu_q(\mathcal{F}_{n+1}, P_k^{n+1}) - 1) + w(P_k^{n+1})\nu_{p_n}(\mathcal{F}_n)). \tag{6.4}$$

O fato de q ser uma esquina nos permite concluir que

$$\varphi(q, P_k^{n+1}) = \mu_p(\mathcal{F}_{n+1}, P_k^{n+1}) - 1. \tag{6.5}$$

Notando que P_k^{n+1} é a única reta projetiva de D_{n+1} que intersecta P_{n+1}^{n+1}, teremos

$$w(P_{n+1}^{n+1}) = w(P_k^{n+1}). \tag{6.6}$$

Usando a validade do teorema quando temos apenas uma explosão, escrevemos:

$$\nu_{p_n}(\mathcal{F}_n) + 1 = \sum_{s \in P_{n+1}^{n+1} \cap Sing(\mathcal{F}_{n+1})} \mu_s(\mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}^{n+1}). \tag{6.7}$$

Usando 6.7, 6.6, 6.5 em 6.4, obtemos:

$$
\begin{aligned}
w(P_k^n)\varphi(p_n, P_k^n) &= w(P_k^{n+1})\left[\varphi(p_n, P_k^{n+1}) - 1\right] + w(P_k^n)\nu_{p_n}(\mathcal{F}_n) \\
&= w(P_k^{n+1})\varphi(q, P_k^{n+1}) + w(P_k^n)\nu_{p_n}(\mathcal{F}_n) \\
&= w(P_k^{n+1})\varphi(q, P_k^{n+1}) + w(P_{n+1}^{n+1})\left(\sum_{s\in(P_{n+1}^{n+1}\cap Sing(\mathcal{F}_{n+1}))} \mu_s(\mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}^{n+1}) - 1\right) \\
&= w(P_k^{n+1})\varphi(q, P_k^{n+1}) + w(P_{n+1}^{n+1})(\mu_q(\mathcal{F}_n, P_{n+1}^{n+1}) - 1) \\
&+ w(P_{n+1}^{n+1}) \sum_{s\in P_{n+1}^{n+1}-\{q\}} \mu_s(\mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}^{n+1}) \\
&= w(P_k^{n+1})\varphi(q, P_k^{n+1}) + w(P_{n+1}^{n+1}) \sum_{s\in P_{n+1}^{n+1}\cap Sing(\mathcal{F}_n)-\{q\}} \mu_s(\mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}^{n+1}).
\end{aligned}
$$

Usando então a hipótese de indução, e substituindo o termo acima na expressão de $\nu + 1$, obtemos:

$$
\nu + 1 = \sum_{q\in D_n\cap Sing(\mathcal{F}_n)} w(P_k^n)\varphi(q, P_k^{n+1}) = \sum_{q\in D_{n+1}\cap Sing(\mathcal{F}_{n+1})} w(P_k^n)\varphi(q, P_k^{n+1})
$$

e isso mostra o caso em que p_n não é uma esquina.

Caso 2: p_n é uma esquina Nese caso, a explosão em p_n modificará os termos $w(P_{k_1}^n)\varphi(p_n, P_{k_1}^n)$ e $w(P_{k_2}^n)\varphi(p_n, P_{k_2}^n)$. Sejam $q_1 = P_{k_1}^{n+1} \cap P_{n+1}^{n+1}$ e $q_2 = P_{k_2}^{n+1} \cap P_{n+1}^{n+1}$. Usando o fato de p_n ser uma esquina, temos:

$$
\begin{aligned}
&w(P_{k_1}^n)\varphi(p_n, P_{k_1}^n) + w(P_{k_2}^n)\varphi(p_n, P_{k_2}^n) \\
&\quad= w(P_{k_1}^n)(\mu_{p_n}(\mathcal{F}_n, P_{k_1}^n) - 1) + w(P_{k_2}^n)(\mu_{p_n}(\mathcal{F}_n, P_{k_2}^n) - 1) \\
&\quad= w(P_{k_1}^n)((\mu_{q_1}(\mathcal{F}_n, P_{k_1}^{n+1}) + \nu_{p_n}(\mathcal{F}_n) - 1) - 1) + w(P_{k_2}^n)((\mu_{q_2}(\mathcal{F}_n, P_{k_2}^{n+1}) \\
&\qquad+ \nu_{p_n}(\mathcal{F}_n) - 1) - 1) \\
&\quad= w(P_{k_1}^n)(\mu_{q_1}(\mathcal{F}_n, P_{k_1}^{n+1}) - 1) + w(P_{k_2}^n)(\mu_{q_2}(\mathcal{F}_n, P_{k_2}^{n+1}) - 1) + (w(P_{k_1}^{n+1}) \\
&\qquad+ w(P_{k_2}^{n+1}))(\nu_{p_n}(\mathcal{F}_n) - 1) \\
&\quad= w(P_{k_1}^{n+1})(\varphi(q_n, P_{k_1}^{n+1})) + w(P_{k_2}^{n+1})(\varphi(q_2, P_{k_2}^{n+1})) + w(P_{n+1}^{n+1})(\nu_{p_n}(\mathcal{F}_n) - 1).
\end{aligned}
$$

Notemos que $w(P_{n+1}^{n+1}) = w(P_{k_1}^{n+1}) + w(P_{k_2}^{n+1})$, pois P_{n+1}^{n+1} é gerado pela explosão de $p_n = P_{k_1} \cap P_{k_2}^n$, além disso, $w(P_{k_1}^n) = w(P_{k_1}^n)$ e $w(P_{k_2}^n) = w(P_{k_2}^n)$. Portanto, a definição de peso projetivo nos permite escrever

$$
w(P_{n+1}^{n+1}) = w(P_{k_1}^n) + w(P_{k_2}^n) = w(P_{k_1}^{n+1}) + w(P_{k_2}^{n+1}).
$$

Usando agora o resultado para uma explosão, ou seja, que

$$\nu_{p_n}(\mathcal{F}_n) + 1 = \sum_{s \in P_{n+1}^{n+1}} \mu_s(\mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}^{n+1}),$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
\nu_{p_n}(\mathcal{F}_n) - 1 &= \sum_{s \in (P_{n+1}^{n+1}) \cap Sing(\mathcal{F}_{n+1})} \mu_s(\mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}^{n+1}) - 2 \\
&= \sum_{s \in (P_{n+1}^{n+1} - \{q_1, q_2\})} \mu_s(\mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}^{n+1}) + (\mu_{q_1}(\mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}^{n+1}) - 1) + (\mu_{q_2}(\mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}^{n+1}) - 1) \\
&= \sum_{s \in (P_{n+1}^{n+1} - \{q_1, q_2\})} \varphi(s, P_{n+1}^{n+1}) + \varphi(q_1, P_{n+1}^{n+1}) + \varphi(q_2, P_{n+1}^{n+1}).
\end{aligned}$$

Usando essa expressão, obtemos como os termos que se alteram são modificados. Logo, levando em conta a hipótese de indução, obtemos o resultado. ■

Damos agora a definição principal desse capítulo:

Definição 6.5. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação definida em uma superfície complexa M com uma singularidade $p \in M$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma curva generalizada em p se não existem singularidades do tipo sela-nó na folheação dessingularizada $\tilde{\mathcal{F}}$.*

Exemplo 6.6. Seja $f = 0$ a equação local e reduzida de um germe de curva em $(\mathbb{C}^2, 0)$ que é singular na origem. Considere a folheação $\mathcal{F}$ induzida por df. Nesse caso $\mathcal{F}$ é singular na origem. Afirmamos que a origem é uma singularidade não dicrítica. De fato, escreva a expansão de f em torno da origem como

$f = \sum_i f_i$ onde $i > 1$ e cada f_i é homogêneo de grau i. Denotando por i_0 o mínimo dos $i's$ tal que $f_{i_0} \neq 0$, temos, pela relação de Euler que

$$x\frac{\partial f_{i_0}}{\partial x} + y\frac{\partial f_{i_0}}{\partial y} = i_0 f_{i_0} \neq 0.$$

Prosseguindo com esse raciocínio até reduzir a folheação $\mathcal{F}$, obtemos que a origem é uma singularidade não dicrítica.

Um fato importante para o capítulo 7 é que df é uma curva generalizada. A justificativa pode ser vista em [2]. ◀

Exemplo 6.7. O fato de df ser curva generalizada nos permite dar uma rápida demonstração do teorema de resolução de curvas em $(\mathbb{C}^2, 0)$ como corolário do teorema de redução para folheações. Com efeito, seja $C = \{f = 0\}$ um germe de curva redutível e singular na origem. Considere a folheação dada por df. Essa folheação é singular na origem. Denotamos por π uma dessingularização de df. Como C é separatriz de df então π^*C é separatriz de π^*df. Como df é curva generalizada então só existem singularidades simples de $\pi^* df$ sobre o divisor excepcional. Assim, existem duas separatrizes lisas e transversais nas singularidades de $\pi^* df$. Portanto, as singularidades em que passam as separatrizes de $\pi^* df$ não podem ser do tipo esquina. Como $\pi^* C$ é separatriz de $\pi^* df$, obtemos que a curva C está resolvida. ◀

Vamos explorar a Definição 6.5 e entender como se comporta uma curva generalizada em torno de suas singularidades. Para isso precisaremos de alguns resultados auxiliares. Enunciamos a seguir o Teorema de Linearização de Poincaré, que será necessário, e cuja demonstração pode ser vista em [3].

Teorema 6.8. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação definida em uma superfície complexa e λ_1, λ_2 os autovalores da parte linear de $\mathcal{F}$ em $p \in M$. Suponha que o quociente $r = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ está no domínio de Poincaré e que $r \notin \mathbb{Z}^+ \backslash \{1\}$. Então existe um sistema de coordenadas locais em que a folheação $\mathcal{F}$, é dada em torno de $0 \in \mathbb{C}^2$ pela 1-forma*

$$\tilde{\omega} = \lambda_1 x dy - \lambda_2 y dx.$$

Lema 6.9. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície complexa M e $p \in Sing(\mathcal{F})$ cuja matriz jacobiana não nula é diagonalizável e com autovalores $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ satisfazendo $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}^+$. Então existe um número infinito de separatrizes em p.*

Demonstração. Se $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Z}^+$, pelo Teorema de Linearização de Poincaré, podemos supor $\mathcal{F}$ definida pela 1-forma

$$\omega = \lambda_1 x dy - \lambda_2 y dx.$$

Suponha que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{Z}^+$ são primos entre si. Note que a função meromorfa $G(x, y) = \frac{x^p}{y^q}$ é tal que suas curvas de nível $G(x, y) = c$ são da forma $x^p - cy^q = f(x, y) = 0$, $c \in \mathbb{C}$. Temos $df = px^{p-1}dx - cqy^{q-1}dy$ e portanto

$$\omega \wedge df = f(-\lambda_1) p dx \wedge dy$$

donde segue que $\mathcal{F}$ possui uma infinidade de separatrizes.

Se for $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Z}^+ \backslash \{1\}$ ou $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{Z}^+ \backslash \{1\}$, então pelo corolário 5.16 uma sequência finita de explosões produzirá uma singularidade com jacobiana diagonalizável onde os autovalores possuem razão um. Essa singularidade é dicrítica e portanto o resultado segue. ■

Utilizando os resultados anteriores provamos o seguinte:

Lema 6.10. *Seja $\mathcal{F}$ uma curva generalizada em $p \in Sing(\mathcal{F})$, definida em uma superfície complexa M. Se $\mathcal{F}$ admite apenas duas separatrizes lisas e transversais em p, então p é reduzida.*

Demonstração. Começamos com a afirmação:

Afirmação 6.1. $\nu_p(\mathcal{F}) = 1$.

Consideramos a resolução de $\mathcal{F}$ em p. Uma vez que há apenas duas separatrizes em p, a resolução é não dicrítica, o que quer dizer que o divisor excepcional $D = \pi^{-1}(p)$ é uma separatriz de $\mathcal{F}$. Sejam C_1 e C_2 as duas separatrizes suaves de $\mathcal{F}$ em p. Sejam $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ seus blow-ups e P_1, P_2 as retas projetivas contidas no divisor excepcional que interceptam $\tilde{C}_1$ e $\tilde{C}_2$ em q_1 e q_2, respectivamente. Observamos que as únicas singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ fora das esquinas de D são q_1 e q_2. De fato, uma singularidade fora das esquinas de D seria uma sela-nó, por admitir uma única separatriz (o divisor excepcional) e isso não pode ocorrer por hipótese (se fosse simples, o Teorema 5.18 nos daria duas separatrizes lisas). Além disso, $w(P_1) = w(P_2) = 1$. Então, pelo teorema 6.4 , obtemos

$$\nu_p(\mathcal{F}) + 1 = w(P_1)\mu_{q_1}(\tilde{\mathcal{F}}, P_1) + w(P_2)\mu_{q_2}(\tilde{\mathcal{F}}, P_2) = 2,$$

portanto $\nu_p(\mathcal{F}) = 1$ e isso prova a afirmação.

Como $\nu_p(\mathcal{F}) = 1$, p é uma singularidade de um dos tipos listados no capítulo 5. No caso (i), a singularidade é uma sela-nó, o que não pode ser pois $\mathcal{F}$ é curva generalizada. O tipo (iii) origina uma sela-nó por explosão (Proposição 5.13) e portanto é igualmente descartado. Agora, se tivermos o caso (iv), então uma explosão π_1 em p origina uma única singularidade sobre a reta projetiva $\pi^{-1}(p)$. Porém, o transformado estrito das duas separatrizes transversais em p interceptam $\pi^{-1}(p)$ em dois pontos distintos, que são singularidades. Assim, o tipo (iv) é também descartado. Nos resta o tipo (ii). Nesse caso, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$, pois caso contrário, pelo lema 6.10, teriamos um número infinito de separatrizes em p. ∎

Lema 6.11. *Seja $\mathcal{F}$ uma curva generalizada em $p \in Sing(\mathcal{F})$, singularidade não dicrítica admitindo uma separatriz lisa em p. Então existe outra separatriz em p.*

Demonstração. A demonstração será feita por indução no número mínimo n de explosões necessárias para resolver $\mathcal{F}$ em p. Se p é reduzida, então não há o que provar, pois p é simples e portanto admite duas separatrizes lisas e transversais.

Suponha que $n \geq 1$ é o número mínimo de explosões que dessingulariza $\mathcal{F}$ em p. Supomos por indução que o resultado é válido para singularidades que se resolvem com menos de n explosões. Seja C a separatriz lisa em p. Considere uma primeira explosão π_1 em p. Seja $P = \pi_1^{-1}(p)$, e $p_0 = \pi_1^* C \cap P$. Se houver outra singularidade em P diferente de p_0, precisaremos de no máximo $n - 1$ blow-ups para resolver p_0 e portanto a hipótese de indução implica que existe uma outra separatriz não contida em P, que se projeta, via π_1, em uma separatriz em p, distinta de C e portanto o teorema está provado. Consideremos o caso em que p_0 é a única singularidade de $\pi_1^*\mathcal{F}$ em P. Se $\pi_1^* C$ e P são as únicas separatrizes em p_0 , então pelo Lema 6.10, p_0 é reduzida. Temos então, pelo Teorema 6.4 (observe que temos apenas uma explosão, e p_0 não é uma esquina)

$$\nu_p(\mathcal{F}) + 1 = \mu_{p_0}(\pi^*\mathcal{F}, P) = 1$$

e portanto $\nu_p(\mathcal{F}) = 0$, o que contradiz o fato de p ser uma singularidade de $\mathcal{F}$. ∎

Antes de prosseguir introduziremos algumas definições. Seja $p \in Sing(\mathcal{F})$. Uma dessingularização para o conjunto de separatrizes de $\mathcal{F}$ em p é uma sequência de explosões π em p tal que as separatrizes de $\pi^*\mathcal{F}$ que cortam o divisor excepcional são todas lisas e disjuntas e além disso, nenhuma dessas separatrizes passa por uma esquina de D e todas as separatrizes são transversais a D. Ainda mais, se todas as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ são reduzidas e estão sobre retas projetivas invariantes de D, dizemos que π é uma dessingularização para $\mathcal{F}$ em p.

Apresentamos agora o resultado principal desse capítulo.

Teorema 6.12. *Seja $\mathcal{F}$ curva generalizada em $p \in Sing(\mathcal{F})$ e suponha que p possui um número finito de separatrizes (p é não dicrítica). Então $\mathcal{F}$ e seu conjunto de separatrizes são dessingularizados pela mesma sequência de blow-ups.*

Demonstração. A dessingularização de $\mathcal{F}$ implica na dessingularização de seu conjunto de separatrizes, pois neste caso, as singularidades da folheação reduzida são simples. O Teorema 5.18 implica que temos, em cada singularidadde da folheação dessingularizada, duas separatrizes lisas e transversais e portanto as separatrizes de $\mathcal{F}$ foram dessingularizadas. Reciprocamente, seja π uma sequência de explosões que dessingulariza o conjunto de separatrizes de $\mathcal{F}$ em p. Mostraremos que todas as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ estão reduzidas. As singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ que estão em alguma esquina do divisor excepcional D ou na intersecção de D com o transformado estrito de alguma separatriz. Assim, cada singularidade de $\pi^*\mathcal{F}$ admite duas separatrizes lisas e transversas e então são reduzidas, pois $\mathcal{F}$ é curva generalizada. Note que essas são todas as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$, pois uma singularidade de $\pi^*\mathcal{F}$ que não é de nenhum dos tipos acima teria uma única separatriz contida em D e isso contraria o Lema 6.11. ∎

7 Problema de Poincaré no caso não dicrítico

Unindo os ingredientes e as técnicas apresentadas nos dois capítulos anteriores, estamos aptos a dar uma resposta (positiva) para o problema de Poincaré no caso não dicrítico.

Antes de enunciar o primeiro resultado, a introdução de algumas notações se faz necessária. Seja S uma curva algébrica em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$. Dado $p \in S$ um ponto singular de S, denotamos por $S\{p\}$ o conjunto de todos os ramos de S que passam por p. Com essa notação, temos a seguinte

Proposição 7.1. *Seja S uma curva irredutível em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ de grau m e $\mathcal{F}$ uma folheação de grau n, tendo S como separatriz. Então:*

$$\chi(S) + m(n-1) = \sum_{p \in S} \sum_{B \in S\{p\}} \mu_p(\mathcal{F}, B).$$

Demonstração. Considere uma reta L em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ que seja transversal a S. Tome um sistema de coordenadas em que L seja a linha no infinito. Como L é transversal a S, $L \cap S$ não possui singularidades de $\mathcal{F}$. Note que sendo a intersecção acima transversal, como consequência do Teorema de Bézout, obtemos que essa intersecção tem exatamente m pontos. Como L é a linha no infinito, identificamos $\mathbb{C}^2$ por $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}\boldsymbol{P}(2) - L$. Consideramos agora coordenadas afins (x, y). Seja ψ, dado por $\psi(u, v) = \left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) = (x, y)$. Se X é um campo vetorial que define $\mathcal{F}$ nas coordenadas (x, y), fazendo o cálculo de $\psi^* X$, obtemos:

$$\psi^* X = \frac{1}{u^{n-1}} Y,$$

onde Y é um campo vetorial holomorfo que define $\mathcal{F}$ nas coordenadas (u, v). Se $p \in L \cap S$ e ϕ é uma parametrização de S em torno de p, obtemos que $ord\phi^*(\psi^* X) = -(n-1)$.

Seja $\pi : \tilde{S} \longrightarrow S$ uma resolução por blow-ups de S. Conforme foi definido no Capítulo 5, temos $2 - 2g(S) = \chi(\tilde{S})$. Seja $\pi^* X = \tilde{X}$. Note que $\pi^*(X|_S) = \tilde{X}|_{\tilde{S}}$ é um campo meroformo com m pólos de ordem $n-1$. Para cada ramo local B de S passando em um ponto singular p de X, obtemos um ponto singular de $\tilde{X}$ de ordem $\mu_p(\mathcal{F}, B)$. Como os pontos de $S \cap L$ são pólos de $X|_S$ de ordem $n-1$, obtemos para cada ponto um polo de $\tilde{X}$ de mesma ordem.
Usando o Teorema de Poincaré-Hopf (Teorema A.2) podemos escrever:

$$\chi(S) = (X|_S)_0 - (X|_S)_\infty .$$

Observe que existem m polos do campo X, cada qual com ordem $(n-1)$. Portanto obtemos a fórmula dada no enunciado. ∎

Lema 7.2. *Seja S uma separatriz de uma folheação $\mathcal{F}$ em uma superfície complexa. Seja $p \in S$ e (x, y) coordenadas locais em torno de p, onde $p \in B \subset S$ e B é um ramo de S em p. Seja $\phi : \mathbb{D} \to B$ uma parametrização de Puiseux de B em p, onde $\phi = (\phi_x, \phi_y)$. Se $\mathcal{F}$ é gerada localmente pelo campo $X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$, então:*

$$\mu_p(\mathcal{F}, B) = \begin{cases} \nu_0(a(\phi_x(t), \phi_y(t)) - \nu_0(\phi_x(t)) + 1, \ se\ \phi_x(t) \neq 0 \\ \nu_0(b(\phi_x(t), \phi_y(t))) - \nu_0(\phi_y(t)) + 1, \ se\ \phi_y(t) \neq 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

Demonstração. Note que, pela definição de pullback, podemos escrever $d\phi \circ \phi^*(X) = X(\phi(t))$ e então, segue que

$$(\phi_x'(t), \phi_y'(t))(\phi^* X(t)) = (a(\phi(t)), b(\phi(t))).$$

Denotando $\phi^* X(t) = Y(t)$, no caso em que $\phi_x(t) \neq 0$ a equação acima implica que $Y(t) = \frac{a(\phi(t))}{\phi_x'(t)}$. Lembrando que $\mu_p(\mathcal{F}, B)$ é a ordem de $Y(t)$, essa última expressão nos diz que

$$\nu_{Y(t)} = \nu_{Y(t)}(a(\phi(t)) - \nu_{Y(t)}(\phi_x'(t)).$$

Observando que $\nu_{Y(t)}(\phi_x'(t)) = \nu_0(\phi_x(t)) - 1$, obtemos o resultado no caso $\phi_x(t) \neq 0$. O caso em que $\phi_y(t) \neq 0$ é análogo.

Lema 7.3. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação singular por curvas em uma superfície complexa M, e seja $p \in M$ uma singularidade não dicrítica de $\mathcal{F}$. Se C é uma curva analítica e separatriz de $\mathcal{F}$ passando por p, então $\nu_p(\mathcal{F}) + 1 \geq \nu_p(C)$.*

Demonstração. Considere uma sequência de explosões em M que resolva $\mathcal{F}$ e o seu conjunto de separatrizes ao mesmo tempo; denotamos por $\tilde{\mathcal{F}}$ a folheação resolvida.

$$M_n \xrightarrow{\pi_n} M_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\pi_1} M_0 = M.$$

Pelo Teorema 6.4, podemos escrever

$$\nu_p(\mathcal{F}) + 1 = \sum_{q \in D \cap Sing(\tilde{\mathcal{F}})} w(P_k^n)\varphi(q, P_k^n) \tag{7.2}$$

Seja $f = 0$ a equação local reduzida de C e seja $\mathcal{G}$ a folheação induzida por df. Note que $\nu_p(\mathcal{G}) + 1 = \nu_p(f) = \nu_p(C)$.

Como a folheação $\mathcal{G}$ é curva generalizada, e a sequência de explosões que dessingulariza $\mathcal{F}$ também dessingulariza C, então a sequência de explosões acima dessingulariza $\mathcal{G}$. Seja $\tilde{\mathcal{G}}$ o transformado estrito de $\mathcal{G}$. Dividiremos a soma dada em 7.2 em duas parcelas. Chame de M_1 o conjunto constituido das singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ sobre o divisor excepcional que possuem duas separatrizes e que não são esquinas, ou seja, os pontos de M_1 são os pontos onde passam os transformados estritos de C. Chame de M_2 as demais singularidades. Assim, escrevemos a soma

em 7.2 como
$$\nu_p(\mathcal{F})+1=\sum_{q\in M_1} w(P_k^n)\varphi(q,P_k^n)+\sum_{q\in M_2} w(P_k^n)\varphi(q,P_k^n)$$

Note que as singularidades de $\tilde{\mathcal{G}}$ estão contidas nos pontos de M_1 pois o transformado estrito de C é separatriz de $\tilde{\mathcal{G}}$. Relembre que como $\tilde{\mathcal{G}}$ só possui singularidades simples, então pode ser dada em um sistema de coordenadas por $\omega=(\lambda_1 x+\dots)dy+(\lambda_2 y+\dots)dx$, logo obtemos $\mu_p(\tilde{\mathcal{G}},P_k^n)=1$, o que nos permite concluir que $\varphi(p,P_k^n)=1$. Assim, obtemos:

$$\nu_p(C)=\nu_p(\mathcal{G})+1\leq\sum_{p\in M_1} w(P_k^n)\varphi(p,P_k^n)+\sum_{p\in M_2} w(P_k^n)\varphi(p,P_k^n)=\nu_p(\mathcal{F})+1.$$

Ou seja, $\nu_p(\mathcal{F})+1\geq\nu_p(C)$, como queríamos demonstrar. ∎

Lema 7.4. *Seja $p\in M$ uma singularidade não dicrítica de $\mathcal{F}$ e seja C uma curva analítica, separatriz de $\mathcal{F}$, tal que $p\in C$. Seja $f=0$ a equação reduzida local de C em p e seja $\mathcal{G}$ a folheação dada por df em uma vizinhança de p. Dado um ramo B de C em p, então:*

$$\mu_p(\mathcal{F},B)\geq\mu_p(\mathcal{G},B)$$

Demonstração. Considere uma sequência de explosões de M,

$$M_n\xrightarrow{\pi_n}M_{n-1}\xrightarrow{\pi_{n-1}}\dots\xrightarrow{\pi_1}M_0=M$$

tal que se $B=B_0$, e B_i é o transformado estrito de B_{i-1}, temos $p_0=p$, $p_i=D_i\cap B_i$, $i=1,\dots,n-1$ e B_n é não singular e transversal a D_n. Seja $C_0=C$ e C_i, $\mathcal{G}_i$ os transformados estritos de C_{i-1}, $\mathcal{G}_{i-1}$ por π_i. Então $p_n=D_n\cap B_n$ é um ponto singular de $\mathcal{F}_n$, pois D_n e B_n são separatrizes de $\mathcal{F}$. Além disso, p_n é singularidade simples de $\mathcal{G}_n$, pois $\mathcal{G}$ é curva generalizada. Então, utilizando argumentos análogos ao lema 7.3, obtemos $\mu_{p_n}(\mathcal{G}_n,B_n)\leq\mu_{p_n}(\mathcal{F}_n,B_n)$. Note que se mostrarmos que $\nu_{p_i}(\mathcal{F}_i)\geq\nu_{p_i}(\mathcal{G}_i)$, para $i=0,\dots,n-1$, então pelo Lema 6.3 mostraremos que $\mu_p(\mathcal{F}_i,B)\geq\mu_p(\mathcal{G},B)$.

Seja $e(0)=0$ e $e(i)$ o número de componentes irredutíveis do divisor excepcional $D_i=(\pi_1\circ\dots\circ\pi_i)^{-1}(p)$ passando por p_i, $i=1,\dots,n$. Note que $e(1)=1$, $e(n)=1$ e $e(i)$ é um ou dois, para $i=2,\dots,n-1$. Pelo Lema 7.3, notando que $\nu_{p_i}(\mathcal{G}_i)=\nu_{p_i}(C_i)+e(i)-1$, obtemos que $\nu_{p_i}(\mathcal{F}_i)\geq\nu_{p_i}(\mathcal{G}_i)$ e então o resultado segue.

Lema 7.5. *Sejam C uma curva projetiva analítica suave de grau m e $f\in\mathbb{C}[x,y]$ de modo que $C=\{f=0\}$, em coordenadas afins (note que como C é suave, f é automaticamente irredutível). Suponhamos que a linha no infinito L_∞ seja transversal a C. Se $\mathcal{G}$ é a folheção induzida por df, então $\mu_p(\mathcal{G},C)=1$, onde $p\in C\cap L_\infty$.*

Demonstração. Consideramos a homogeneização de f, dada por $F(x,y,z)=z^m f\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)$. A folheação $\mathcal{G}$ é dada em coordenadas afins pelas curvas de nível de $f(x,y)=c$ e portanto, sua homogeneização é dada pelas curvas de nível $F(x, y, z) = z^m c$. Agora, sabemos que a linha no infinito é dada por $z = 0$. Considere então $y \neq 0$ e as coordenadas afins $v = \frac{x}{y}$, $u = \frac{z}{y}$. Nessas coordenadas, temos $L_\infty = \{u = 0\}$. Suponha que $p = 0$ nessas coordenadas. Defina agora $h(u, v) = F\left(\frac{x}{y}, 1, \frac{z}{y}\right)$. Como por hipótese C é transversal a L_∞, seu espaço tangente em 0 é diferente do espaço tangente de L_∞, o que quer dizer que $\frac{\partial h}{\partial u}(0, 0) \neq 0$. Portanto temos uma mudança analítica de coordenadas em torno de p dada por

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (h(u, v), v)$$

onde $L_\infty : \{\tilde{x} = 0\}$ e $C : \{\tilde{y} = 0\}$, e como $h(u, v) = F\left(\frac{x}{y}, 1, \frac{z}{y}\right) = \left(\frac{y}{z}\right)^m = cv^m$, as curvas integrais de $\mathcal{G}$ são dadas por $\tilde{x} = c\tilde{y}^m$. Isto implica que $\mathcal{G}$ é induzida por $\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}^m} = c$. Tomando a diferencial, obtemos:

$$d\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right) = \frac{\tilde{y}d\tilde{x} - \tilde{x}m\tilde{y}^{m-1}d\tilde{y}}{(\tilde{y})^{2m}}$$

ou seja, $\tilde{y}d\tilde{x} - m\tilde{x}d\tilde{y} = 0$. Essa folheação terá como campo associado

$$X = m\tilde{x}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}} + \tilde{y}\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}$$

e como C é a curva $\tilde{y} = 0$, temos a parametrização de Puiseux $\phi(t) = (0, t)$, e portanto, $\phi^* X(t) = t\frac{\partial}{\partial t}$, e portanto, $\mu_p(\mathcal{G}, C) = 1$. ■

Com os lemas anteriores, obtemos o Teorema de Carnicer:

Teorema 7.6. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ e seja C uma curva algébrica em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$. Suponha que C é separatriz de $\mathcal{F}$ e não existem singularidades dicríticas de $\mathcal{F}$ em C. Então:*

$$\text{grau}(C) \leq \text{grau}(\mathcal{F}) + 2.$$

Demonstração. Tomamos um sistema de coordenadas afins (x, y) de modo que a reta no infinito L_∞ e a curva C sejam transversais. Seja $f = 0$ a equação reduzida de C em coordenadas afins e seja $\mathcal{G}$ a folheação em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ que estende a folheação de $\mathbb{C}^2$ dada por df. Pelo Lema 7.5, se $q_1, \ldots, q_m$ são os pontos de $C \cap L_\infty$, então $\mu_{q_i}(\mathcal{G}, B) = 1$, onde B é um ramo de C. Se $p \in C$, com $p \neq q_i$, e $B \in C\{p\}$, então $\mu_p(\mathcal{F}, B) \geq \mu_p(\mathcal{G}, B)$. Sejam $C_1, C_2, \ldots, C_t$ as componentes irredutíveis de C. Então

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{t} \chi\left(C_j\right) + m(n-1) &= \sum_{p \in C}\left(\sum_{B \in C\{p\}} \mu_p(\mathcal{F}, B)\right) \\ &\geq \sum_{p \in C}\left(\sum_{B \in C\{p\}} \mu_p(\mathcal{G}, B)\right) - m = \sum_{j=1}^{t} \chi\left(C_j\right) + m(m-3)\end{aligned}$$

Na conta acima foi usado o fato que o grau de $\mathcal{G}$ é $m - 1$. A desigualdade acima nos diz que $m(n-1) \geq m(m-3)$, e como $m > 0$, obtemos o teorema. ■

No caso dicrítico, não podemos limitar o grau de uma curva invariante pelo grau de uma folheação. Considere a folheação $\mathcal{F}_{p,q}$ (em cartas afins) dada por $\omega = pydx - qxdy$, com p e q naturais e primos entre si. Pelo exemplo 1.25 essa folheação possui uma infinidade de separatrizes em $(0,0)$ da forma $y^p - cx^q = 0$, $c \in \mathbb{C}^*$, e portanto a singularidade é dicrítica. O exemplo 1.33 mostra que $\mathcal{F}_{p,q}$ possui grau 1. Porém tomando p e q arbitrariamente grandes, vemos que a separatriz $y^p - x^q = 0$ possui grau também arbitrariamente grande.

7.1 Comentários finais

Se denotarmos por $\mathcal{N}_n$ o conjunto de folheações não dicriticas de $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ e por $\mathcal{N}_n^0$ o subconjunto de $\mathcal{N}_n$ das folheações que possuem curva algébrica invariante, então procedendo de modo análogo ao feito no Capítulo 4, pode ser mostrado que $\mathcal{N}_n^0$ é um subconjunto algébrico de $\mathcal{N}_n$. Nesse caso, usamos o Teorema de Carnicer, ao invés do teorema que dá a solução do problema de Poincaré no caso nodal. Novamente, a folheação de Jouanulou é uma folheação que está em $\mathcal{N}_n$ mas não está em $\mathcal{N}_n^0$.

Pode ser notado nas duas soluções apresentadas aqui, que a principal diferença na solução de Carnicer é o uso da multiplicidade da folheação ao longo de uma curva. Porém, Alcides e Cerveau já haviam utilizado essa multiplicidade em [6]. De fato, a Proposição 7.1 além de provada em [6] foi utilizada para provar o resultado seguinte:

Corolário 7.7. *(da Proposição 7.1) Seja S uma curva irredutível em $\mathbb{C}\boldsymbol{P}(2)$ cujas singularidades são do tipo nodal. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação tendo S como separatriz e tal que todos os pontos singulares de $\mathcal{F}$ em S tem multiplicidade 1. Então temos $m \leq n+2$, onde m é o grau de S e n é o grau de $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Se $\mathcal{F}$ é representada localmente em torno de um ponto singular p pelo campo $P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$, então a multiplicidade de p é dada pela multiplicidade de intersecção de P e Q. Esse número é dado pela dimensão complexa do espaço vetorial

$$\frac{\mathcal{O}_2}{(P,Q)},$$

que é justamente o Número de Milnor de $\mathcal{F}$ em p. Observamos que

$$\mathrm{ind}_p(X) = \mu_p(\mathcal{F}, B),$$

onde acima estamos restringindo o campo X a B para o cálculo de $\mu_p(\mathcal{F}, B)$ e $\mathrm{ind}_p(X)$. Por hipótese, temos que $\mu_p(\mathcal{F}, B) = 1$ para todo ramo B. Se tivermos k pontos nodais de $\mathcal{F}$, cada ponto nos dá dois ramos, e portanto, a contribuição dos pontos nodais de S para a soma $\sum_p \sum_{B \in S\{p\}}$ é dada por $2k$. Assim a proposição 7.1 nos permite escrever:

$$2 - 2g(S) = 2k + l - m(n-1)$$

onde $l = \sum_p \sum_{B \in S\{p\}} \mu_p(\mathcal{F}, B) \geq 0$.

A fórmula do genus aplicado em S nos dá:

$$2 - 2g = 2 - 2\left(\frac{(m-1)(m-2)}{2} - k\right) = -m^2 + 3m + 2k.$$

Assim:

$$2k + l - m(n-1) = -m^2 + 3m + 2k,$$

então temos

$$0 \leq l = m(n + 2 - m)$$

e isso implica o resultado. ∎

A Apêndice

Essa parte do trabalho é devotada a entender um pouco melhor a definição de multiplicidade ao longo de uma curva e enunciar alguns resultados que foram a respeito do Número de Milnor.

A.1 Grau de uma aplicação

Seja $f : M \to N$ uma aplicação suave entre duas variedades suaves e orientadas, com M compacta. Se p é um valor regular de f, então $f^{-1}(p)$ é um subconjunto discreto de M e como M é compacto, $f^{-1}(p)$ é finito. Assim, escrevemos $f^{-1}(p) = \{x_1, \cdots x_n\}$. Pelo Teorema da Função Inversa, dado $x_i \in f^{-1}(p)$, existe um aberto U em torno de x_i tal que $f|_U$ é um difeomorfismo. Se esse difeomorfismo preserva a orientação coloca-se $n(f, x_i) = 1$. Se reverte, $n(f, x_i) = -1$. Define-se então o grau da aplicação suave f por

$$\text{grau}(f) = \sum_i n(f, x_i).$$

Ainda existe o trabalho de mostrar que a definição é boa, isto é, não depende do valor regular escolhido. Para a definição e propriedades do grau veja [11]. Essa definição é dada na Linguagem da topologia Diferencial. Ela coincide com a definição dada em Topologia Algébrica no caso diferenciável.

No caso de M e N serem variedades complexs, com M compacta e $f : M \to N$ uma aplicação holomorfa (nesse caso N é automaticamente compacta) então M e N são orientáveis e todo biholomorfismo preserva orientação ([8]).

A.2 O Índice de um campo holomorfo

Seja $X : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um campo holomorfo e p uma singularidade isolada de X. Identificando $\mathbb{C}^n$ com $\mathbb{R}^{2n}$, vemos X como uma aplicação de $\mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^{2n}$ e tomamos $\epsilon > 0$ tal que X tenha apenas p como singularidade em $\overline{B(p, \epsilon)} \subset U$, a bola fechada de raio ϵ centrada em p. Definimos

$$\text{ind}_p X = \text{grau} \frac{X}{|X|}$$

onde

$$\frac{X}{|X|} : S^{2n-1}_\epsilon \to S^{2n-1}_1$$

$$z \longmapsto \frac{X}{|X|}$$

com S_ϵ^{2n-1} denotando a $(2n-1)$ esfera de raio ϵ centrada em p e S_1^{2n-1} a $(2n-1)$ esfera de raio 1 centrada na origem.

É possível mostrar que o índice de campos difeomorficamente conjugados são os mesmos, isto é, sejam U e V são dois abertos de $\mathbb{C}^n$, $\varphi : U \to V$ um difeormorfismo e X um campo definido em U, singular em $p \in U$. Então se Y é um campo em V dado por $Y = \varphi_* X$, os indíces dos campos X e Y são os mesmos em p e $\varphi(p)$, respectivamente. Isso então nos permite, tomando cartas locais em torno de um ponto singular de um campo definido em uma variedade compacta, definir o indíce desse campo.

Considere agora o caso de um campo holomorfo X definido em $\mathbb{C}$. Identificamos $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$. Considere uma circunferência S_a centrada em uma singularidade p de X, de modo que X seja singular em p e tanto em S_a quanto no interior de S_a não exista mais nenhuma singularidade além do ponto p. Quando percorremos S_a em uma volta completa e olhamos para o vetor definido pelo campo em cada ponto da circunferência, obtemos que se o vetor gira n vezes após uma volta completa, temos $\mathrm{ind}_p(X) = n$.

Exemplo A.1. Seja $X : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um campo holomorfo com única singularidade em $0 \in \mathbb{C}$ e com expansão de Taylor dada por $X(t) = \sum_{i=m}^{\infty} a_i t^i$ onde $a_m \neq 0$. Nesse caso, $\mathrm{ind}_0(X) = m$. Com efeito, note que X pode ser escrito como $X(t) = t^m \lambda(t)$ onde $\lambda(0) \neq 0$. Se $r > 0$ é suficientemente pequeno, então a variação do argumento de $X(re^{i\theta}) = r^m e^{im\theta}\gamma(re^{i\theta})$, quando θ varia de 0 a 2π é m. Segue que $\mathrm{ind}_0(X) = m$, exatamente como queríamos. ◀

O próximo resutado foi utilizado no capítulo 7; trata-se do Teorema de Poincaré-Hopf:

Teorema A.2. *Seja M uma variedade compacta suave, sem bordo, não necessariamente orientada e considere um campo de vetores X com singularidades isoladas, tangente a M. Então a característica de Euler-Poincaré vale*

$$\chi(M) = \sum_{x_i \in M} ind(X, x_i),$$

onde a soma é feita sobre todas as singularidades de X.

A.3 O Número de Milnor

Seja $\mathcal{O}_{n,p}$ o germe de funções holomorfas definidas em uma vizinhança de $p \in \mathbb{C}^n$ e seja $I(X_1, \cdots X_n)$ o ideal gerado pelos germes em $p \in \mathbb{C}^n$ de funções coordenadas de $X = (X_1, \cdots, X_n)$. A dimensão do espaço vetorial

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,p}}{(X_1, \cdots, X_n)}.$$

é chamada de Número de Milnor do campo X em p.

Note que a definição do Número de Milnor é local. Assim, podemos tomar um germe de X. Consequentemente, se $\mathcal{F}$ é uma folheação de dimensão n definida em uma variedade complexa M, definimos o Número de Milnor da folheação em $p \in M$ como o Número de Milnor do campo que representa $\mathcal{F}$. Enunciaremos a seguir algumas propriedades do Número de Milnor.

Denotaremos o Número de Milnor de um campo X em p por $\mu_p(X)$.

Proposição A.3. *$\mu_p(X) = 0$ se, e somente se, p não é uma singularidade de X.*

Demonstração. De fato, o Número de Milnor é nulo se, e somente se, $(X_1, \cdots, X_n) = \mathcal{O}_{n,p}$. Isso ocorre se, e somente se, existem germes $h_1, \cdots, h_n$ tais que

$$1 = h_1 X_1 + \cdots h_n X_n;$$

por sua vez isso só ocorre se as coordenadas de X não se anulam simultaneamente em p pois caso isso acontecesse a expressão acima não poderia ser satisfeita. Se existe alguma delas que não se anula em p, então $I(X_1, \cdots, X_n)$ conterá um elemento inversível de $\mathcal{O}_{n,p}$ e portanto I será igual a $\mathcal{O}_{n,p}$.

Temos também o seguinte resultado: seguinte:

Teorema A.4. *$0 < \mu_p(X) < \infty$ se, e somente se, p é singularidade isolada de X*

A prova pode ser vista em [20].

Teorema A.5. *$\mu_p(X) = \operatorname{ind}_p X$*

A prova também pode ser encontrada em [20]. Para uma exposição um pouco mais detalhada, veja [21]. O Número de Milnor é um invariante topológico, como pode ser visto em [2].

Na sequência, temos o resultado que o campo que aparece na definição 6.2 é de fato um campo analítico.

Proposição A.6. *Sejam Z um campo vetorial holomorfo definido em $\mathbb{C}^2$, singular em 0 0e B um ramo de separatriz da folheação $\mathcal{F}$ dada por Z. Seja $\phi : (\mathbb{D}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ uma parametrização de Puiseux de B. Então existe um único campo vetorial holomorfo X em $\mathbb{D}$ tal que $d\phi \circ X = Z \circ \phi$. Ou seja, fica bem definido o campo analítico dado por $\phi^* Z$. Além disso, se $X(t) = \sum_{j \geq m} a_j t^j$, com $a_m \neq 0$, então $\operatorname{ind}_p(Z|_B) = m$.*

Demonstração. Seja $t \in \mathbb{D} - \{0\}$. Então o espaço tangente de B em $\phi(t)$ é gerado por $\phi'(t)$. Assim, pela invariância de B por Z, escrevemos $Z(\phi(t)) = X(t)\phi'(t) = d\phi(t).X(t)$, onde $X(t) \in \mathbb{C}$. Claramente $X(t) : \mathbb{D} - \{0\} \to \mathbb{C}$ é holomorfo. Provaremos que X se estende analiticamente em 0. Escreva $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t)) = (t^{m_1}, t^{m_2} u(t))$, $m_i \geq 1$, $u(0) \neq 0$ ou $u \equiv 0$. Seja $\nu = \min\{m_1, m_2\}$. Como $0 \in \mathbb{C}^2$ é singularidade de Z a série de Taylor de Z_k em $0 \in \mathbb{C}^2$ pode ser escrita da forma $Z_k(z) = \sum_{(i,j)} A_{ij} x^i y^j$. Temos:

$$Z_1(\phi(t)) = \sum_{i,j} a_{ij} t^{im_1+jm_2} u^j$$

$$Z_2(\phi(t)) = \sum_{i,j} b_{ij} t^{im_1+jm_2} u^j.$$

Segue que $Z_k(\phi(t)) = t^\nu \lambda_k(t)$ onde λ_k é analítica em uma vizinhança de zero. Temos $\phi_1'(t) = m_1 t^{m_1-1}$ e $\phi_2'(t) = m_2 t^{m_2-1} u(t) + t^{m_2}.u'(t) = t^{m_2-1}.v(t)$, onde $v(0) \neq 0$. Isso implica que

$$X(t) = \frac{1}{\phi_k'(t)} Z_k(\phi(t)) = \frac{t\lambda_k(t)}{v(t)}$$

é analítica em 0. Como ϕ é um biholomorfismo nos pontos em que $t \neq 0$, então X é um campo holomorfo bem definido e além disso, os índices de X em $0 \in \mathbb{D}$ e $Z_{|B}$ em $0 \in B$ são iguais. Assim, o exemplo A.1 nos dá a última afirmação da proposição. ■

Referências Bibliográficas

[1] César Camacho and Alcides Lins Neto. *Teoria geométrica das folheaçoes*, volume 9. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

[2] César Camacho, Alcides Lins Neto, and Paulo Sad. Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields. *Journal of Differential Geometry*, 20(1):143–174, 1984.

[3] César Camacho and Paulo Sad. *Pontos singulares de equações diferenciais analíticas*, volume 16. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1987.

[4] Felipe Cano, Dominique Cerveau, and Julie Déserti. *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers*. Belin, 2013.

[5] Manuel Carnicer. The poincaré problem in the nondicritical case. *Annals of Mathematics*, pages 289–294, 1994.

[6] Dominique Cerveau and Alcides Lins Neto. Holomorphic foliations in $\mathbb{CP}(2)$ having an invariant algebraic curve. *Annales de l'Institut Fourier*, 41(4):883–903, 1991.

[7] Dominique Cerveau and Jean-François Mattei. *Formes intégrables holomorphes singulières*, volume 97. Astérisque, Société Mathématique de France, Paris, 1982.

[8] Klaus Fritzsche and Hans Grauert. *From holomorphic functions to complex manifolds*, volume 213. Springer, 2012.

[9] William Fulton. *Algebraic curves. An Introduction to Algebraic Geometry*. Addison-Wesley, 1989.

[10] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry, Pure and Applied Mathematics*. Wiley-Interscience New York, 1978.

[11] Victor Guillemin and Alan Pollack. *Differential topology*, volume 370. American Mathematical Society, 2010.

[12] Robert Clifford Gunning. *Introduction to holomorphic functions of several variables*, volume 2. CRC Press, 1990.

[13] Jean-Pierre Jouanolou. *Equations de Pfaff algébriques*, volume 708. Springer, 1979.

[14] Alcides Lins Neto. Componentes irredutíveis dos espaços de folheações. *Publicações Matemáticas, Instituto de Matemática Pura e Aplicada*, 2007.

[15] Alcides Lins Neto. Algebraic solutions of polynomial differential equations and foliations in dimension two. *Holomorphic dynamics*, pages 192–232, 1988.

[16] Alcides Lins Neto and Bruno Scárdua. Introdução à teoria das folheações algébricas complexas. *Instituto de Matemática Pura e Aplicada*, 2011.

[17] Kyoji Saito. On a generalization of de Rham lemma. *Annales de l'Institut Fourier*, 26(2):165–170, 1976.

[18] Bruno Scárdua and Carlos Arnoldo Morales Rojas. *Geometry, Dynamics and Topology of Foliations: A First Course*. World Scientific, 2017.

[19] Abraham Seidenberg. Reduction of singularities of the differential equation $ady = bdx$. *American Journal of Mathematics*, 90(1):248–269, 1968.

[20] Márcio Soares. *Lectures on point residues*. Pontificia Universidade Catolica del Peru, 2002.

[21] Márcio Soares and Rogério Mol. *Índices de Campos Holomorfos e Aplicações*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2001.