UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Matheus Wallace Silva Carvalho

TEOREMA DE RECONSTRUÇÃO DE TANNAKA E SUA APLICAÇÃO PARA ÁLGEBRAS DE HOPF

Florianópolis
2021

Matheus Wallace Silva Carvalho

TEOREMA DE RECONSTRUÇÃO DE TANNAKA E SUA APLICAÇÃO PARA ÁLGEBRAS DE HOPF

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em em Matemática.
Orientador: Prof. Eliezer Batista, Dr.

Florianópolis
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Carvalho, Matheus
TEOREMA DE RECONSTRUÇÃO DE TANNAKA E SUA APLICAÇÃO PARA ÁLGEBRAS DE HOPF / Matheus Carvalho ; orientador, Eliezer Batista, 2021.
134 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Teoria de Categorias. 3. Teorema de Reconstrução de Tannaka. 4. Álgebras de Hopf. 5. Categorias Monoidais. I. Batista, Eliezer. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Matheus Wallace Silva Carvalho

TEOREMA DE RECONSTRUÇÃO DE TANNAKA E SUA APLICAÇÃO PARA ÁLGEBRAS DE HOPF

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Abdelmoubine Amar Henni
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Eduardo Tengan
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves
Universidade Federal do Paraná

Prof. Dr. Willian Goulart Gomes Velasco
Universidade Federal do Paraná

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em em Matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Daniel Goncalves
Data: 12/01/2022 16:08:25-0300
CPF: 017.022.459-77
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
Coordenador do Programa

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Eliezer Batista
Data: 12/01/2022 12:36:04-0300
CPF: 135.541.288-99
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Eliezer Batista
Orientador

Florianópolis, 2021.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus por ter me guiado e sustentado durante todos esses anos e por ter me dado sabedoria para a realização deste trabalho.

À minha esposa Cristina Valéria Frantz por sempre ter me incentivado e me apoiado todo esse tempo e por, inúmeras vezes, ter abdicado do lazer enquanto eu estudava. Por ter sido carinhosa e amável desde o primeiro dia em que nos conhecemos. Amo você, querida.

Aos meus pais e irmão, Sirlei Aparecida da Silva Aparecida Carvalho, Salmo Carvalho e Marcus Vinicius Silva Carvalho, por sempre estarem comigo e me motivando desde a graduação.

Ao minha orientador e, com todo respeito e carinho, Professor Eliezer Batista. Agradeço por ter aceitado me orientar e por compartilhar seus conhecimentos. Por todas as aulas, pela motivação, por sempre ser solícito em tirar dúvidas e que, mesmo em tempos difíceis de pandemia, não deixou de prestar ajuda.

Aos meus amigos Jonatan Ismael Eisermann, Maritza Camilli Almeida Brito, Guilherme Schimanko de Godoy e tantos outros por terem me acompanhado nesses dois anos e tornado eles mais do que especiais. Vocês serão levados para sempre em minha vida.

Aos professores Abdelmoubine Amar Henni, Eduardo Tengan, Gilles Gonçalves de Castro, Marcelo Muniz Silva Alves, Willian Goulart Gomes Velasco por gentilmente terem aceito participar da banca. Obrigado pelos comentários e sugestões.

Aos professores Larissa Hagedorn Vieira e Wilian Francisco de Araujo por terem me apresentado essa área tão bonita que é a Álgebra.

Por fim, não menos importante, à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pela bolsa de mestrado, que foi fundamental na realização deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho exploraremos alguns resultados e conceitos relacionados a Categorias Monoidais e álgebras de Hopf. Como resultado principal, teremos o Teorema de Reconstrução de Tannaka. O teorema de reconstrução consiste de, a partir de uma categoria $\mathbb{k}$ linear abeliana $\mathscr{C}$ e um funtor aditivo fiel e exato $\omega : \mathscr{C} \to \mathit{Vect}_{\mathbb{k}}$ reconstruir uma estrutura de coálgebra sobre o *coend*(ω). Adicionalmente, se a categoria $\mathscr{C}$ é uma categoria monoidal rígida e o funtor ω é monoidal estrito, então a coalgebra *coend*(ω) pode ser munida de uma estrutura de álgebra de Hopf.

Palavras-chave: Teoria de Categorias. Categorias Monoidais. Teorema de Reconstrução de Tannaka. Álgebras de Hopf.

ABSTRACT

In this work we will explore some results and concepts related to Monoidal Categories and Hopf algebras. As a main result, we will have the Tannaka Reconstruction Theorem. This reconstruction theorem consists of, from a $\mathbb{k}$ linear abelian category $\mathscr{C}$ and a faithful exact additive functor $\omega : \mathscr{C} \to$ *Vect*$_{\mathbb{k}}$, to reconstruct a coalgebra structure on the *coend*(ω). Additionally, if the category $\mathscr{C}$ is a rigid monoidal category and the functor ω is strictly monoidal, then the coalgebra *coend*(ω) can be endowed with a Hopf algebra structure.

Keywords: Category Theory. Monoidal Categories. Tannaka Reconstruction Theorem. Hopf Algebras.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A teoria de categorias oferece uma visão panorâmica da matemática. Do alto do céu, os detalhes se tornam invisíveis, mas podemos detectar padrões que eram impossíveis de serem detectados no nível do solo. Os primeiros conceitos de categorias, funtores e transformações naturais foram feitos em 1945, no trabalho *General Theory of Natural Equivalences*, desenvolvido por Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane, em estudos voltados para topologia algébrica, os quais tinham como objetivo compreender ferramentas que preservassem a estrutura matemática em questão.

Com o passar dos anos, a teoria de categorias passou a ser estudada por vários pesquisadores e se tornou indispensável em muitas áreas da matemática, como geometria algébrica, topologia e teoria de representações, fazendo correlações entre elas. Alguns nomes como Alexander Grothendieck, responsável por introduzir o conceito de categorias abelianas no artigo *Sur quelques points d'algèbre homologique* em 1957, e Daniel Marinus Kan com a formulação abstrata da descoberta de functores adjuntos em 1958, participaram da evolução da área.

Uma das aplicações de teoria de categorias, a qual será trabalhada nesta dissertação, é apresentar os fundamentos de uma generalização, adequada para álgebras de Hopf, da teoria clássica de Categorias Tannakianas para grupos algébricos afins (SCHAUENBURG, 1992). Essa teoria na verdade substitui o clássico Teorema de Dualidade de Tannaka-Krein, demonstrado pelos matemáticos Tadao Tannaka em (TANNAKA, 1939) e Mark Grigorievich Krein em (KREIN, 1949), no século passado, para o caso de grupos.

De forma concisa, a teoria de Tannaka-Krein pode ser formulada (e generalizada para grupos algébricos afim em um corpo arbitrário, como pode ser visto em (DELIGNE; MILNE, 1982)) como sendo o processo de reconstruir um grupo a partir da coleção de todas as suas representações de dimensão finita. Para esta reconstrução, temos que levar em consideração algumas "estrutura" que a categoria de todas as representações possui. Estas, são o produto tensorial de duas representações, a representação trivial no corpo base, e o dual de uma representação, que esta ligado com a inversão no grupo.

Sendo assim, o objetivo desta dissertação, é estudar o Teorema da Reconstrução de Tannaka, visto em (SCHAUENBURG, 1992), e exemplificá-lo com o *coend*, do funtor esquecimento $\omega : \mathit{Rep}(G)^{(f)} \to \mathit{Vect}_{\Bbbk}^{(f)}$, sendo $\mathit{Rep}(G)^{(f)}$ a categoria das representações do grupo G sobre o corpo $\Bbbk$ fixado de dimensão finita e $\mathit{Vect}^{(f)}$ a categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita. Mas afinal, o que são *coends*? De forma resumida, são objetos iniciais de uma transformação dinatural que tem como imagem um funtor constante (*wedge*).

A ideia principal é definirmos a categoria $\underline{\mathit{Tan}}$ a qual possui como objetos $(\mathscr{C},\omega)$

sendo $\mathscr{C}$ uma categoria $\mathbb{k}$ linear abeliana e $\omega : \mathscr{C} \to$ *Vect*$^{(f)}$ um funtor aditivo fiel e exato. Nela, seus objetos se relacionam com morfismos que são classes $[F,\zeta]$: $(\mathscr{C},\omega) \to (\mathscr{D},\gamma)$ tais que $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é um funtor e $\zeta : \omega \cong \gamma F$ é um isomorfismo natural. Denotando *coend*$(\mathscr{C},\omega)$ como o *coend* do bifuntor $\omega(\_)^* \otimes \omega(\_) : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to$ *Vect*$^{(f)}$. Por estarmos trabalhando em *Vect*$_{\mathbb{k}}^{(f)}$, o *coend*(ω) sempre existirá, pois produtos tensoriais preservam colimites. A partir daí no decorrer do trabalho será visto que é possível definir um estrutura de coálgebra em *coend*(ω). Além disso, adicionando estruturas em $\mathscr{C}$ e ω obteremos que *coend*(ω) é na verdade uma álgebra de Hopf.

Para chegarmos no *gran finale*, no primeiro capítulo apresentaremos alguns resultados acerca de categorias, funtores e transformações naturais monoidais, os quais serão essenciais no decorrer do trabalho. Definiremos também, numa visão categórica, objetos duais, álgebras, coálgebras, biálgebras e álgebras de Hopf, como também abordaremos algumas propriedades de módulos e comódulos.

No segundo capítulo definiremos com mais detalhes a categoria $\underline{Tan}$, assim como *ends* e *coends*, os quais podem ser vistos como (co)equalizadores. Ressaltamos a caracterização que o *coend*(ω) nos dá, fazendo com que o funtor *Nat*$(\omega,\omega \otimes \_)$: *Vect* $\to$ *Set* seja representável.

No terceiro capítulo iniciamos o Teorema de Reconstrução de Tannaka sobre o *coend*(ω). O primeiro resultado importante é o fato do *coend*(ω) ser naturalmente uma coálgebra. Adicionando estrutura monoidal à categoria $\mathscr{C}$ e supondo que o funtor ω é estritamente monoidal, obtemos uma estrutura de biálgebra em *coend*(ω). Por fim, se $\mathscr{C}$ é uma categoria monoidal rígida e ω um funtor monoidal estrito, obteremos uma estrutura de álgebra de Hopf em *coend*(ω).

No apêndice teremos uma apresentação de resultados importantes sobre teoria de categorias.

2 CATEGORIAS MONOIDAIS E PRELIMINARES DE ÁLGEBRAS DE HOPF

Neste capítulo, apresentamos algumas notações, definições e resultados. Começaremos com conceitos sobre categorias e funtores monoidais e apresentaremos alguns exemplos. Em seguida, estudaremos a dualidade em categorias monoidais rígidas e posteriormente faremos resultados importantes relativos a Álgebras de Hopf. Os resultados sobre teoria de categorias, que antecedem tais conteúdos, estarão no apêndice.

2.1 CATEGORIAS MONOIDAIS

Nesta seção usaremos (ETINGOF *et al.*, 2016) como referência para as definições.

Definição 2.1.1. *Uma categoria monoidal é uma sêxtupla* $\mathscr{C} = (\mathscr{C}, \otimes, \alpha, \mathbb{I}, l, r)$ *tal que*

- $\mathscr{C}$ *é uma categoria,*
- $\otimes : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ *é um bifuntor chamado produto tensorial, dado por:*

$$\otimes(X,Y) = X \otimes Y \quad e \quad \otimes(f,g) = f \otimes g,$$

  com $X,Y \in \mathscr{C}$, $f : X \to Y$ *e* $g : X' \to Y'$ *morfismos em* $\mathscr{C}$*, sendo que* $f \otimes g : X \otimes Y \to X' \otimes Y'$.
- $\alpha : (\_\otimes\_)\otimes\_ \Rightarrow \_\otimes(\_\otimes\_)$ *é um isomorfismo natural denominado por associador,*
- $\mathbb{I} \in \mathscr{C}$ *é o objeto unidade ou identidade,*
- $l : \mathbb{I} \otimes \_ \Rightarrow \_ \quad e \quad r : \_ \otimes \mathbb{I} \Rightarrow \_$ *são isomorfismos naturais.*

  e as transformações, α, l *e* r *satisfazendo os seguintes diagramas:* $\forall X, Y, Z, W \in \mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[dl, "\alpha_{X,Y,Z}\otimes Id_W"'] \arrow[dr, "\alpha_{X\otimes Y,Z,W}"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d, "\alpha_{X,Y\otimes Z,W}"'] & & (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d, "\alpha_{X,Y,Z\otimes W}"] \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[rr, "Id_X\otimes\alpha_{Y,Z,W}"'] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbb{I}) \otimes Y \arrow[rr, "\alpha_{X,\mathbb{I},Y}"] \arrow[dr, "r_X\otimes Id_Y"'] & & X \otimes (\mathbb{I} \otimes Y) \arrow[dl, "Id_X\otimes l_Y"] \\
 & X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

As comutatividades do primeiro e segundo diagramas acima são chamadas *axiomas do pentágono* e do *triângulo*, respectivamente. Se os morfismos α,r e l são identidades, dizemos que $\mathscr{C}$ é monoidal estrita. No decorrer do trabalho deixaremos implícito o uso do associador durante as demonstrações, a menos que o mesmo seja mencionado. Isso não implica uma perda de generalidade pois, toda categoria monoidal é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal estrita.

Vejamos alguns resultados que serão importantes no decorrer do trabalho.

Proposição 2.1.2. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria monoidal e $f,g \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$, tais que $Id_{\mathbb{I}} \otimes f = Id_{\mathbb{I}} \otimes g$. Então, $f = g$.*

Demonstração. Da naturalidade de l, temos que:

$$f \circ l_X = l_Y \circ (Id_{\mathbb{I}} \otimes f) = l_Y \circ (Id_{\mathbb{I}} \otimes g) = g \circ l_X.$$

Além disso, l é um isomorfismo e portanto $f = g$. ■

De forma análoga, se $f \otimes Id_{\mathbb{I}} = g \otimes Id_{\mathbb{I}}$ pelo isomorfismo natural r obtemos que $f = g$.

Proposição 2.1.3. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria monoidal e $X,Y \in \mathscr{C}$. Então os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{I} \otimes X) \otimes Y \arrow[rr, "\alpha_{\mathbb{I},X,Y}"] \arrow[dr, "l_X \otimes Id_Y"'] & & \mathbb{I} \otimes (X \otimes Y) \arrow[dl, "l_{X \otimes Y}"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes \mathbb{I} \arrow[rr, "\alpha_{X,Y,\mathbb{I}}"] \arrow[dr, "r_{X \otimes Y}"'] & & X \otimes (Y \otimes \mathbb{I}) \arrow[dl, "Id_X \otimes r_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Inicialmente iremos demonstrar que o primeiro diagrama comuta. Para isso faremos uso de cinco diagramas comutativos, como veremos. De fato, consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
((\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) \otimes X) \otimes Y \arrow[r, "(r_{\mathbb{I}} \otimes Id_X) \otimes Id_Y"] \arrow[d, "\alpha_{\mathbb{I} \otimes \mathbb{I},X,Y}"'] \arrow[dr, phantom, "(i)"] & (\mathbb{I} \otimes X) \otimes Y \arrow[d, "\alpha_{\mathbb{I},X,Y}"] \\
(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) \otimes (X \otimes Y) \arrow[r, "r_{\mathbb{I}} \otimes (Id_{X \otimes Y})"] & \mathbb{I} \otimes (X \otimes Y)
\end{tikzcd},$$

observe que este diagrama comuta da naturalidade de α com os objetos $\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, X, Y$ juntamente com os morfismos $r_{\mathbb{I}}$, Id_X, e Id_Y. Assim como o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
((\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) \otimes X) \otimes Y \arrow[d, "(r_{\mathbb{I}} \otimes Id_X) \otimes Id_Y"'] \arrow[dr, "\alpha_{\mathbb{I},\mathbb{I},X} \otimes Id_Y"] \arrow[dr, phantom, "(ii)"', near start] & \\
(\mathbb{I} \otimes X) \otimes Y & (\mathbb{I} \otimes (\mathbb{I} \otimes X)) \otimes Y) \arrow[l, "(Id_Y \otimes l_X) \otimes Id_Y"]
\end{tikzcd},$$

comuta pela identidade do triângulo com os elementos $\mathbb{I}, \mathbb{I}, X$ avaliados no funtor $\_ \otimes Y$.

Agora,

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{I} \otimes X) \otimes Y \arrow[d, "\alpha_{\mathbb{I},X,Y}"'] \arrow[dr, phantom, "(iii)"] & (\mathbb{I} \otimes (\mathbb{I} \otimes X)) \otimes Y \arrow[l, "(Id_{\mathbb{I}} \otimes l_X) \otimes Id_Y"'] \arrow[d, "\alpha_{\mathbb{I},\mathbb{I} \otimes X,Y}"] \\
\mathbb{I} \otimes (X \otimes Y) & \mathbb{I} \otimes ((\mathbb{I} \otimes X) \otimes Y) \arrow[l, "Id_{\mathbb{I}} \otimes (l_X \otimes Id_Y)"]
\end{tikzcd},$$

comuta pela naturalidade de α sobre os objetos $\mathbb{I}$,X e Y juntamente com os morfismos $Id_{\mathbb{I}}$, l_X, e Id_Y. Além disso o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) \otimes (X \otimes Y) \arrow[r, "r_{\mathbb{I}} \otimes (Id_X \otimes Id_Y)"] \arrow[dr, "\alpha_{\mathbb{I},\mathbb{I},X \otimes Y}"'] \arrow[dr, phantom, "(iv)", near end] & \mathbb{I} \otimes (X \otimes Y) \\
& \mathbb{I} \otimes (\mathbb{I} \otimes (X \otimes Y)), \arrow[u, "Id_{\mathbb{I}} \otimes l_{X \otimes Y}"']
\end{tikzcd}$$

comuta por conta do axioma do triângulo com os elementos $\mathbb{I}, \mathbb{I}$ e $X \otimes Y$.

O seguinte diagrama comuta devido ao axioma do pentágono para os objetos $\mathbb{I}$,$\mathbb{I}$, X e Y:

$$\begin{tikzcd}
& ((\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) \otimes X) \otimes Y \arrow[dl, "\alpha_{\mathbb{I} \otimes \mathbb{I},X,Y}"'] \arrow[dr, "\alpha_{\mathbb{I},\mathbb{I},X} \otimes Id_Y"] & \\
(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) \otimes (X \otimes Y) \arrow[d, "\alpha_{\mathbb{I},\mathbb{I},X \otimes Y}"'] & (v) & (\mathbb{I} \otimes (\mathbb{I} \otimes X)) \otimes Y \arrow[d, "\alpha_{\mathbb{I},\mathbb{I} \otimes X,Y}"] \\
\mathbb{I} \otimes (\mathbb{I} \otimes (X \otimes Y)) & & \mathbb{I} \otimes ((\mathbb{I} \otimes X) \otimes Y) \arrow[ll, "Id_{\mathbb{I}} \otimes \alpha_{\mathbb{I},X,Y}"]
\end{tikzcd}$$

Por fim, veja que:

$$((Id_{\mathbb{I}} \otimes (l_X \otimes Id_Y))(\alpha_{\mathbb{I},\mathbb{I} \otimes X,Y})(\alpha_{\mathbb{I},\mathbb{I},X} \otimes Id_Y) \overset{(iii)}{=} (\alpha_{\mathbb{I},X,Y})((Id_Y \otimes l_X) \otimes Id_Y)(\alpha_{\mathbb{I},\mathbb{I},X} \otimes Id_Y)$$

$$\overset{(ii)}{=} (\alpha_{\mathbb{I},X,Y})((r_{\mathbb{I}} \otimes Id_X) \otimes Id_Y)$$

$$\overset{(i)}{=} (r_{\mathbb{I}} \otimes Id_{X\otimes Y})(\alpha_{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I},X,Y})$$
$$\overset{(iv)}{=} ((Id_{\mathbb{I}} \otimes l_{X\otimes Y}) \circ \alpha_{\mathbb{I},\mathbb{I},X\otimes Y})(\alpha_{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I},X,Y})(\alpha_{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I},X,Y})$$
$$\overset{(v)}{=} (\mathbb{I} \otimes (l_{X\otimes Y} \circ \alpha_{\mathbb{I},X,Y}))(\alpha_{\mathbb{I},\mathbb{I}\otimes X,Y})(\alpha_{\mathbb{I},\mathbb{I},X} \otimes Id_Y),$$

sendo $\alpha_{\mathbb{I},\mathbb{I},X} \otimes Id_Y$ e $\alpha_{\mathbb{I},\mathbb{I}\otimes X,Y}$ isomorfismos, temos que:

$$Id_{\mathbb{I}} \otimes (l_X \otimes Id_Y) = Id_{\mathbb{I}} \otimes (l_{X\otimes Y} \circ \alpha_{\mathbb{I},X,Y}),$$

e mais, da Proposição 2.1.2, $l_X \otimes Id_Y = l_{X\otimes Y} \circ \alpha_{\mathbb{I},X,Y}$.

Considerando a categoria monoidal $\mathscr{C}^{rev} = (\mathscr{C}, \otimes^{rev}, \mathbb{I}^{rev}, \alpha^{rev}, l^{rev}, r^{rev})$, sendo que $X \otimes^{rev} Y = Y \otimes X$ e $f \otimes^{rev} g = g \otimes f$, $\forall X, Y \in \mathscr{C}$ com f,g morfismos em $\mathscr{C}$, $\alpha^{rev}_{X,Y,Z} = \alpha^{-1}_{Z,Y,X}$, $l^{rev}_X = r_X$ e $r^{rev}_X = l_X$. Do diagrama já provado temos que:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{I} \otimes^{rev} Y) \otimes^{rev} X \arrow[rr, "\alpha^{rev}_{\mathbb{I},Y,X}"] \arrow[dr, "l^{rev}_Y \otimes^{rev} Id_X"'] & & \mathbb{I} \otimes^{rev} (Y \otimes^{rev} X) \arrow[dl, "l^{rev}_{Y\otimes^{rev} X}"] \\
& Y \otimes^{rev} X &
\end{tikzcd},$$

é comutativo e da definição de $\mathscr{C}^{rev}$ temos:

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (Y \otimes \mathbb{I}) \arrow[rr, "\alpha^{-1}_{X,Y,\mathbb{I}}"] \arrow[dr, "Id_Y \otimes r_Y"'] & & (X \otimes Y) \otimes \mathbb{I} \arrow[dl, "r_{X\otimes Y}"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd},$$

o qual é o segundo diagrama da proposição se considerarmos a inversa de $\alpha_{X,Y,\mathbb{I}}$. ■

Proposição 2.1.4. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria monoidal. Então:*

(i) $l_{\mathbb{I}\otimes X} = Id_{\mathbb{I}} \otimes r_X, \forall X \in \mathscr{C}$.

(ii) $r_{X\otimes\mathbb{I}} = r_X \otimes Id_{\mathbb{I}}, \forall X \in \mathscr{C}$.

(iii) $l_{\mathbb{I}} = r_{\mathbb{I}}$.

Demonstração. (i) Seja $X \in \mathscr{C}$. Da naturalidade de l temos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{I} \otimes (\mathbb{I} \otimes X) \arrow[r, "l_{\mathbb{I}\otimes X}"] \arrow[d, "Id_{\mathbb{I}} \otimes l_X"'] & \mathbb{I} \otimes X \arrow[d, "l_X"] \\
\mathbb{I} \otimes X \arrow[r, "l_X"'] & X,
\end{tikzcd}$$

isto é,

$$l_X \circ l_{\mathbb{I}\otimes X} = l_X \circ (Id_{\mathbb{I}} \otimes l_X).$$

E mais, sendo l um isomorfismo, temos que $l_{\mathbb{I}\otimes X} = Id_{\mathbb{I}} \otimes l_X$.

(ii) De forma análoga porém da naturalidade de r, temos

$$r_X \circ r_{X\otimes\mathbb{I}} = r_X \circ (r_X \otimes Id_{\mathbb{I}}).$$

E, como r é um isomorfismo, temos que $r_{X\otimes\mathbb{I}} = r_X \otimes Id_{\mathbb{I}}$.

(iii) Primeiro vejamos que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{I}\otimes\mathbb{I})\otimes\mathbb{I} \arrow[rr, "\alpha_{\mathbb{I},\mathbb{I},\mathbb{I}}"] \arrow[dr, "l_{\mathbb{I}}\otimes Id_{\mathbb{I}}"'] & & \mathbb{I}\otimes(\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}) \arrow[dl, "l_{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}}"] \\
& \mathbb{I}\otimes\mathbb{I} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{I}\otimes\mathbb{I})\otimes\mathbb{I} \arrow[rr, "\alpha_{\mathbb{I},\mathbb{I},\mathbb{I}}"] \arrow[dr, "r_{\mathbb{I}}\otimes Id_{\mathbb{I}}"'] & & \mathbb{I}\otimes(\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}) \arrow[dl, "Id_{\mathbb{I}}\otimes l_{\mathbb{I}}"] \\
& \mathbb{I}\otimes\mathbb{I} &
\end{tikzcd}.$$

De fato, o primeiro triângulo em questão comuta pela Proposição 2.1.3 com os objetos $X = Y = \mathbb{I}$. Já o segundo, comuta pelo axioma do triângulo novamente com os objetos $X = Y = \mathbb{I}$. Sendo assim temos:

$$l_{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}} \circ \alpha_{\mathbb{I},\mathbb{I},\mathbb{I}} = l_{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}} \quad \text{e} \quad (Id_{\mathbb{I}} \otimes l_{\mathbb{I}}) \circ \alpha_{\mathbb{I},\mathbb{I},\mathbb{I}} = r_{\mathbb{I}} \otimes Id_{\mathbb{I}}.$$

Do item (i) dessa proposição obtemos:

$$Id_{\mathbb{I}} \otimes l_{\mathbb{I}} = l_{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}} = l_{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}} \circ \alpha_{\mathbb{I},\mathbb{I},\mathbb{I}}$$

e em conjunto com a equação anterior e o isomorfismo α temos que:

$$r_{\mathbb{I}} \otimes Id_{\mathbb{I}} = l_{\mathbb{I}} \otimes Id_{\mathbb{I}}.$$

Por fim, da Proposição 2.1.2, $r_{\mathbb{I}} = l_{\mathbb{I}}$.

■

A seguir, alguns exemplos de categorias monoidais.

Exemplo 2.1.5. *Sejam G um grupo e $\Bbbk$ um corpo. A categoria de representações de um grupo G, denotada por $Rep_{\Bbbk}(G)$ a qual os objetos são pares (V,Φ) em que V é um $\Bbbk$-espaço vetorial, $\Phi : G \to GL(V)$ é morfismo de grupos e $GL(V)$ é o grupo das transformações lineares bijetoras de V em V é uma categoria monoidal. Dados dois* *objetos* $(V,\Phi),(W,\Psi) \in Rep_{\mathbb{k}}(G)$ *um morfismo entre eles será uma transformação linear* $T : V \to W$ *tal que,* $\Psi_g \circ T = T \circ \Phi_g, \forall g \in G$. *De fato, sendo* V *e* W $\mathbb{k}$ *- espaços vetoriais, temos o produto tensorial de espaços vetoriais e assim podemos definir um produto tensorial de representações.*

Para todo $g \in G$*, definimos:*

$$\begin{array}{rccc} (\Phi \times \Psi)_g : & V \times W & \to & V \otimes W \\ & (v,w) & \mapsto & \Phi_g(v) \otimes \Psi_g(w). \end{array}$$

Sendo $(\Phi \times \Psi)_g$ *bilinear, para todo* $g \in G$*, existe uma única transformação linear:*

$$\begin{array}{rccc} (\Phi \otimes \Psi)_g : & V \otimes W & \to & V \otimes W \\ & v \otimes w & \mapsto & \Phi_g(v) \otimes \Psi_g(w). \end{array}$$

E mais, $(\Phi \otimes \Psi)_g \in GL(V \otimes W)$*:*

$$\begin{aligned} (\Phi \otimes \Psi)_g \circ (\Phi \otimes \Psi)_{g^{-1}}(v \otimes w) &= (\Phi \otimes \Psi)_g(\Phi_{g^{-1}}(v) \otimes \Psi_g(w)) \\ &= (\Phi_g(\Phi_{g^{-1}}(v)) \otimes \Psi_g(\Psi_{g^{-1}}(w))) \\ &= v \otimes w, \end{aligned}$$

dessa forma, conseguimos definir:

$$\begin{array}{rccc} \Phi \otimes \Psi : & G & \to & GL(V \otimes W) \\ & g & \mapsto & (\Phi \otimes \Psi)_g. \end{array}$$

Resta verificarmos que $(V \otimes W, \Psi \otimes \Phi)$ *é uma representação de G. De fato, sejam* $g,h \in G$ *temos:*

$$\begin{aligned} (\Phi \otimes \Psi)_g \circ (\Phi \otimes \Psi)_h &= (\Phi_g \otimes \Psi_g) \circ (\Phi_h \otimes \Psi_h) \\ &= (\Phi_g \circ \Phi_g) \otimes (\Psi_g \circ \Psi_h) \\ &= \Phi_{gh} \otimes \Psi_{gh} \\ &= (\Phi \otimes \Psi)_{gh}. \end{aligned}$$

Sendo assim, $\Phi \otimes \Psi$ *é um morfismo de grupo e claro, se fixarmos* $g \in G$*,* $\Phi_g \otimes \Psi_g$ *é linear pelas propriedades do produto tensorial de espaços vetoriais.*

Neste caso, o objeto unidade $\mathbb{I}$ *é a representação trivial, sendo* $(\mathbb{k}, \mathbb{I})$*:*

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{I} : & G & \to & GL(\mathbb{k}) \\ & g & \mapsto & Id_{\mathbb{k}}. \end{array}$$

Exemplo 2.1.6. *(Categoria monoidal oposta) Seja* $\mathscr{C} = (\mathscr{C}, \otimes, \alpha, \mathbb{I}, l, r)$ *uma categoria monoidal. Então a categoria oposta* $\mathscr{C}^{op}$ *herda a estrutura monoidal, sendo:*

(i) Como $(\mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C}^{op}) \cong (\mathscr{C} \times \mathscr{C})^{op}$, isto é, preserva produtos, podemos definir o produto tensorial a partir de $\otimes$:

$$\begin{array}{rccc} \otimes^{op}: & (\mathscr{C}^{op} \otimes \mathscr{C}^{op}) & \to & \mathscr{C}^{op} \\ & (X,Y) & \mapsto & X \otimes^{op} Y = X \otimes Y. \end{array}$$

(ii) O associador fica definido como $\alpha^{op}_{X,Y,Z} = \alpha^{-1}_{X,Y,Z}$, $\forall X,Y,Z \in \mathscr{C}$.

(iii) Os isomorfismos neste caso são $l^{op} = r^{-1}$ e $r^{op} = l^{-1}$, sendo o objeto unidade o mesmo de $\mathscr{C}$, isto é, $\mathbb{I}^{op} = \mathbb{I}$.

Exemplo 2.1.7. *Seja $\mathscr{C} = (\mathscr{C}, \otimes, \alpha, \mathbb{I}, l, r)$ uma categoria monoidal. Então a categoria $\mathscr{C}^{rev}$ herda a estrutura monoidal, sendo:*

$$\begin{array}{rccc} \otimes^{rev}: & \mathscr{C} \otimes \mathscr{C} & \to & \mathscr{C} \\ & (X, Y) & \mapsto & X \otimes^{rev} Y = Y \otimes X \end{array}$$

e para os morfismos f,g de $\mathscr{C}$, temos $f \otimes^{rev} g = g \otimes f$. Com relação ao associador, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathscr{C}$, definimos:

$$\alpha^{rev}_{X,Y,Z} = \alpha^{-1}_{Z,Y,X}$$

Com o objeto unidade sendo $\mathbb{I}^{rev} = \mathbb{I}$, definimos $l^{rev} = r$ e $r^{rev} = l$. Com isso, $\mathscr{C}^{rev} = (\mathscr{C}, \otimes^{rev}, \alpha^{rev}, \mathbb{I}^{rev}, l^{rev}, r^{rev})$ é uma categoria monoidal.

Exemplo 2.1.8. *Sendo $\mathscr{C}$ uma categoria, definimos $End(\mathscr{C})$ a categoria a qual tem como objetos funtores de $\mathscr{C}$ em $\mathscr{C}$ e como morfismos transformações naturais. Neste caso, o morfismo identidade do funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ é a transformação natural $Id_F : F \Rightarrow F$ e a composição de morfismos é dada pela composição vertical de transformações naturais. Vejamos que $(End(\mathscr{C}), \otimes, \mathbb{I} = Id_{\mathscr{C}})$ é monoidal estrita, sendo:*

$$\begin{array}{rccc} \otimes: & End(\mathscr{C}) \otimes End(\mathscr{C}) & \to & End(\mathscr{C}) \\ & (F,G) & \mapsto & F \otimes G = F \circ G \end{array}$$

e $\alpha : F \Rightarrow F'$ e $\gamma : G \Rightarrow G'$ transformações naturais temos:

$$\otimes(\alpha, \gamma)_X = (\alpha * \gamma)_X = \alpha_{G'(X)} \circ F(\gamma_X), \forall X \in \mathscr{C}.$$

Além disso, da naturalidade de α temos:

$$\alpha_{G'(X)} \circ F(\gamma_X) = F'(\gamma_X) \circ \alpha_{G(X)} \tag{1}$$

Vejamos que $\otimes$ um funtor. De fato, sejam $\nu : F \Rightarrow G, \nu' : G \Rightarrow H, \mu : J \Rightarrow R$ e $\mu' : R \Rightarrow S$ transformações naturais e $F, G, H, J, R, S \in End(\mathscr{C})$. Assim $\forall X \in \mathscr{C}$:

$$(\nu * \mu)_X = \nu_{R(X)} \circ F(\mu_X) \quad e \quad (\nu' * \mu')_X = \nu'_{S(X)} \circ G(\mu'_X).$$

Portanto:

$$
\begin{aligned}
\otimes(Id_{(F,G)})_X &= \otimes(Id_F, Id_G)_X \\
&= (Id_F * Id_G)_X \\
&= (Id_F)_{G(X)} \circ F((Id_G)_X) \\
&= Id_{F(G(X))} \\
&= Id_{(F\circ G)(X)} \\
&= (Id_{F\circ G})_X \\
&= (Id_{\otimes(F,G)})_X
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\otimes((\nu',\mu')\circ(\nu,\mu))_X &= \otimes(\nu'\circ\nu, \mu'\circ\mu)_X \\
&= ((\nu'\circ\nu) * (\mu'\circ\mu))_X \\
&= (\nu'\circ\nu)_{S(X)} \circ F((\mu'\circ\mu)_X) \\
&= \nu'_{S(X)} \circ \nu_{S(X)} \circ F(\mu'_X \circ \mu_X) \\
&= \nu'_{S(X)} \circ \nu_{S(X)} \circ F(\mu'_X) \circ F(\mu_X) \\
&\overset{(i)}{=} \nu'_{S(X)} \circ G(\mu'_X) \circ \nu_{R(X)} \circ F(\mu_X) \\
&= (\nu' * \mu')_X \circ (\nu * \mu)_X \\
&= ((\nu' * \mu') \circ (\nu * \mu))_X \\
&= (\otimes(\nu',\mu') \circ \otimes(\nu,\mu))_X,
\end{aligned}
$$

sendo que (i) segue da igualdade (1). Logo, $\otimes$ é um funtor e portanto $(End(\mathscr{C}), \otimes, Id_{\mathscr{C}})$ é uma categoria monoidal estrita.

Exemplo 2.1.9. *Seja $(\mathscr{C}, \otimes, \alpha, \mathbb{I}, l, r)$ uma categoria monoidal. Definimos a categoria $End(\mathscr{C}_{\mathscr{C}})$ em que seus objetos são pares (F,Φ), em que $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ é um funtor e $\Phi^F : F(\_ \otimes \_) \Rightarrow F(\_) \otimes \_$ é um isomorfismo natural tais que, $\forall X, Y, Z \in \mathscr{C}$ o seguinte diagrama comuta*

$$
\begin{tikzcd}
F((X\otimes Y)\otimes Z) \arrow[r, "\Phi^F_{X\otimes Y,Z}"] \arrow[dd, "F(\alpha_{X,Y,Z})"'] & F(X\otimes Y)\otimes Z \arrow[d, "\Phi^F_{X,Y}\otimes Id_Z"] \\
& (F(X)\otimes Y)\otimes Z \arrow[d, "\alpha_{F(X),Y,Z}"] \\
F(X\otimes(Y\otimes Z)) \arrow[r, "\Phi^F_{X,Y\otimes Z}"'] & F(X)\otimes(Y\otimes Z)
\end{tikzcd}
$$

e, para todo $X \in \mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
F(X \otimes \mathbb{I}) \arrow[rr, "\Phi^F_{X,\mathbb{I}}"] \arrow[dr, "F(r_X)"'] & & F(X) \otimes \mathbb{I} \arrow[dl, "r_{F(X)}"] \\
& F(X) &
\end{tikzcd}$$

comuta. Dados quaisquer objetos $(F, \Phi^F), (G, \Phi^G) \in End(\mathscr{C}_{\mathscr{C}})$*, um morfismo de* (F, Φ^F) *em* (G, Φ^G) *é uma transformação natural* $\mu : F \Rightarrow G$ *tal que para todo* $X, Y \in \mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
F(X \otimes Y) \arrow[r, "\mu_{X\otimes Y}"] \arrow[d, "\Phi^F_{X,Y}"'] & G(X \otimes Y) \arrow[d, "\Phi^G_{X,Y}"] \\
F(X) \otimes Y \arrow[r, "\mu_X \otimes Id_Y"'] & G(X) \otimes Y
\end{tikzcd}$$

comuta. Já a composição de morfismos é dada pela composição vertical de transformações naturais. O morfismo identidade é a transformação natural $1_F : F \Rightarrow F$.

Afirmamos que $(End(\mathscr{C}_{\mathscr{C}}), \otimes, (Id_{\mathscr{C}}, \Phi^{Id_{\mathscr{C}}}))$ *é uma categoria monoidal estrita, com*

$$\otimes : End(\mathscr{C}_{\mathscr{C}}) \times End(\mathscr{C}_{\mathscr{C}}) \to End(\mathscr{C}_{\mathscr{C}})$$

definido por:

$$\otimes((G, \Phi^G), (F, \Phi^F)) = (G \circ F, \Phi^{G\circ F})$$

e

$$\otimes(\gamma, \mu) = \gamma \otimes \mu = \gamma * \mu$$

$\forall (F, \Phi^F), (G, \Phi^G) \in End(\mathscr{C}_{\mathscr{C}})$ *e* γ, μ *morfismos em* $End(\mathscr{C}_{\mathscr{C}})$*. Da composição, para todo* $X, Y \in \mathscr{C}$

$$\Phi^{G\circ F}_{X,Y} = \Phi^G_{F(X),Y} G(\Phi^F_{X,Y})$$

Precisamos verificar que para quaisquer $(F, \Phi^F), (G, \Phi^G), (H, \Phi^H) \in End(\mathscr{C}_{\mathscr{C}})$ *temos as seguintes igualdades:*

$$((H, \Phi^H) \otimes (G, \Phi^G)) \otimes (F, \Phi^F) = (H, \Phi^H) \otimes ((G, \Phi^G) \otimes (F, \Phi^F))$$

e

$$(Id_{\mathscr{C}}, \Phi^{Id_{\mathscr{C}}}) \otimes (F, \Phi^F) = (F, \Phi^F) = (F, \Phi^F) \otimes (Id_{\mathscr{C}}, \Phi^{Id_{\mathscr{C}}}),$$

isto é,

$$((H \circ G) \circ F, \Phi^{(H\circ G)\circ F}) = (H \circ (G \circ F), \Phi^{H\circ(G\circ F)})$$

e

$$(Id_{\mathscr{C}} \circ F, \Phi^{Id_{\mathscr{C}}\circ F}) = (F, \Phi^F) = (F \circ Id_{\mathscr{C}}, \Phi^{F\circ Id_{\mathscr{C}}}).$$

Já sabemos que $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$ *e* $Id_{\mathscr{C}} \circ F = F = F \circ Id_{\mathscr{C}}$. *Resta verificarmos que*

$$\Phi^{H\circ(G\circ F)} = \Phi^{(H\circ G)\circ F} \quad e \quad \Phi^{F\circ Id_{\mathscr{C}}} = \Phi^{F} = \Phi^{Id_{\mathscr{C}}\circ F}.$$

Para isso, sejam $X, Y \in \mathscr{C}$. *Então,*

$$\begin{aligned}
\Phi^{(H\circ G)\circ F} &= \Phi^{(H\circ G)}_{F(X),Y}(H \circ G)(\Phi^{F}_{X,Y}) \\
&= \Phi^{H}_{GF(X),Y} H(\Phi^{G}_{F(X),Y})(H \circ G)(\Phi^{F}_{X,Y}) \\
&= \Phi^{H}_{GF(X),Y} H(\Phi^{G}_{F(X),Y} G(\Phi^{F}_{X,Y})) \\
&= \Phi^{H}_{GF(X),Y} H(\Phi^{(G\circ F)}_{X,Y}) \\
&= \Phi^{H\circ(G\circ F)}_{X,Y}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Phi^{Id_{\mathscr{C}}\circ F} &= \Phi^{Id_{\mathscr{C}}}_{F(X),Y} Id_{\mathscr{C}}(\Phi^{F}_{X,Y}) \\
&= Id_{F(X)\otimes Y}\Phi^{F}_{X,Y} \\
&= \Phi^{F}_{X,Y} \\
&= \Phi^{F}_{X,Y} Id_{F(X\otimes Y)} \\
&= \Phi^{F}_{X,Y} F(Id_{X\otimes Y}) \\
&= \Phi^{F}_{Id_{\mathscr{C}}(X),Y} F(\Phi^{Id_{\mathscr{C}}}_{X,Y}) \\
&= \Phi^{F\circ Id_{\mathscr{C}}}_{X,Y}.
\end{aligned}$$

Definição 2.1.10. *Sejam* $\mathscr{C} = (\mathscr{C}, \otimes, \alpha, \mathbb{I}, l, r)$ *e* $\mathscr{D} = (\mathscr{D}, \tilde{\otimes}, \tilde{\alpha}, \tilde{\mathbb{I}}, \tilde{l}, \tilde{r})$ *categorias monoidais. Um funtor monoidal entre* $\mathscr{C}$ *e* $\mathscr{D}$ *é a terna* (F, ξ, ξ_0) *satisfazendo:*

(i) $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *é um funtor;*

(ii) $\xi : \tilde{\otimes} \circ (F \times F) \to F \circ \otimes$ *é um isomorfismo natural, isto é,* $\xi_{X,Y} : F(X)\tilde{\otimes}F(Y) \to F(X \otimes Y), \forall X, Y \in \mathscr{C}$*;*

(iii) $\xi_0 : \tilde{\mathbb{I}} \to F(\mathbb{I})$ *é um isomorfismo em* $\mathscr{D}$*.*

Além disso, os seguintes diagramas comutam. Para quaisquer $X, Y, Z \in \mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & (F(X)\tilde{\otimes}F(Y))\tilde{\otimes}F(X) \arrow[dl, "\xi_{X,Y}\tilde{\otimes}Id_{F(Z)}"'] \arrow[dr, "\tilde{\alpha}_{F(X),F(Y),F(Z)}"] & \\
F(X\otimes Y)\tilde{\otimes}F(Z) \arrow[d, "\xi_{X\otimes Y,Z}"'] & & F(X)\tilde{\otimes}(F(Y)\tilde{\otimes}F(Z)) \arrow[d, "Id_{F(X)}\tilde{\otimes}\xi_{Y,Z}"] \\
F((X\otimes Y)\otimes Z) \arrow[dr, "F(\alpha_{X,Y,Z})"'] & & F(X)\tilde{\otimes}F(Y\otimes Z) \arrow[dl, "\xi_{X,Y\otimes Z}"] \\
 & F(X\otimes(Y\otimes Z)) &
\end{tikzcd}$$

e, $\forall X \in \mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\otimes}F(X) \arrow[r, "\tilde{l}_{F(X)}"] \arrow[d, "\xi_0\tilde{\otimes}Id_{F(X)}"'] & F(X) \\
F(\mathbb{I})\tilde{\otimes}F(X) \arrow[r, "\xi_{\mathbb{I},X}"'] & F(\mathbb{I}\otimes X) \arrow[u, "F(l_X)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X)\tilde{\otimes}\tilde{\mathbb{I}} \arrow[r, "\tilde{r}_{F(X)}"] \arrow[d, "Id_{F(X)}\tilde{\otimes}\xi_0"'] & F(X) \\
F(X)\tilde{\otimes}F(\mathbb{I}) \arrow[r, "\xi_{X,\mathbb{I}}"] & F(X\otimes\mathbb{I}), \arrow[u, "F(r_X)"']
\end{tikzcd}$$

De forma explícita, dados $f : X \to Y$ e $g : W \to Z$ morfismos em $\mathscr{C}$, da naturalidade de ξ temos:

$$\begin{tikzcd}
F(X)\tilde{\otimes}F(W) \arrow[r, "\xi_{X,W}"] \arrow[d, "F(f)\tilde{\otimes}F(g)"'] & F(X\otimes W) \arrow[d, "F(f\otimes g)"] \\
F(Y)\tilde{\otimes}F(Z) \arrow[r, "\xi_{Y,Z}"'] & F(Y\otimes Z)
\end{tikzcd}$$

Além disso, dizemos que um funtor monoidal é estrito se ξ e ξ_0 são identidades. Vale ressaltar que, alguns autores definem como funtor monoidal de forte se ξ e ξ_0 são isomorfismos e satisfazem os diagramas acima.

Exemplo 2.1.11. *Sejam $\mathscr{C} = (\mathscr{C}, \otimes, \alpha, \mathbb{I}, l, r)$ uma categoria monoidal e $End(\mathscr{C}_{\mathscr{C}})$ a categoria monoidal descrita no Exemplo 2.1.9. Seja o funtor $\forall X, Y, Z \in \mathscr{C}$*

$$\begin{array}{cccc}
F: & \mathscr{C} & \to & End(\mathscr{C}_{\mathscr{C}}) \\
 & X & & (X\otimes _, \Phi^{F(X)}) \\
 & f\big\downarrow & \mapsto & \big\downarrow f\otimes Id_ \\
 & Y & & (Y\otimes _, \Phi^{F(Y)})
\end{array}$$

com $\Phi^{F(X)}_{Y,Z} = \alpha^{-1}_{X,Y,Z}$.

Definimos para todo $X, Y, Z \in \mathscr{C}$,

$$(\xi_{X,Y})_Z : ((F(X) \otimes F(Y)))(Z) = X \otimes (Y \otimes Z) \to F(X \otimes Y)(Z) = (X \otimes Y) \otimes Z$$

por $(\xi_{X,Y})_Z = \alpha^{-1}_{X,Y,Z}$. *E para todo* $X \in \mathscr{C}$,

$$(\xi_0)_X : Id_{\mathscr{C}}(X) = X \to F(\mathbb{I})(X) = \mathbb{I} \otimes X$$

como sendo $(\xi_0)_X = l^{-1}_X$.

(F, ξ, ξ_0) *é um funtor monoidal.*

Exemplo 2.1.12. *Sejam* $\mathscr{C} = (\mathscr{C}, \otimes, \alpha, \mathbb{I}, l, r)$ *uma categoria monoidal e* $End(\mathscr{C}_{\mathscr{C}})$ *a categoria monoidal descrita no Exemplo 2.1.9. Seja o funtor*

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & End(\mathscr{C}_{\mathscr{C}}) & \to & \mathscr{C} \\ & (G, \Phi^G) & & G(\mathbb{I}) \\ & \mu \big\downarrow & \mapsto & \big\downarrow \mu_{\mathbb{I}} \\ & (H, \Phi^H) & & H(\mathbb{I}) \end{array}$$

Definimos para quaisquer $(G, \Phi^G), (H, \Phi^H) \in End(\mathscr{C}_{\mathscr{C}})$,

$$\xi_{H,G} : \Psi(H, \Phi^H) \otimes \Psi(G, \Phi^G) = H(\mathbb{I}) \otimes G(\mathbb{I}) \to \Psi(H \circ G) = HG(\mathbb{I})$$

sendo $\xi_{H,G} = H(l_{G(\mathbb{I})}) \circ (\Phi^F_{\mathbb{I},G(\mathbb{I})})^{-1}$. *Definimos também*

$$\xi_0 : \mathbb{I} \to \Psi(Id_{\mathscr{C}}, \Phi^{Id_{\mathscr{C}}}) = Id_{\mathscr{C}}(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$$

por $\xi_0 = 1_{\mathbb{I}}$.

(Ψ, ξ, ξ_0) *é um funtor monoidal.*

Na próxima proposição, não será diferenciado o produto tensorial, o objeto identidade e os respectivos isomorfismos de cada categoria monoidal para não deixar carregada a notação, mas fica evidente que cada categoria em si tem sua estrutura, não necessariamente igual.

Proposição 2.1.13. *Sejam* $\mathscr{C}$,$\mathscr{C}'$ *e* $\mathscr{D}$ *categorias monoidais,* $(F,\xi,\xi_0) : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *e* $(G,\chi,\chi_0) : \mathscr{D} \to \mathscr{C}'$ *funtores monoidais. Então, a composição dos funtores F e G definidas como a terna* $(G \circ F, \varsigma, \varsigma_o)$ *para todo* $X, Y \in \mathscr{C}$:

$$\begin{tikzcd} G(F(X)) \otimes G(F(Y)) \arrow[rr, "\varsigma_{X,Y}"] \arrow[dr, "\chi_{F(X)} \otimes \chi_{F(Y)}"'] & & G(F(X \otimes Y)) \\ & G(F(X) \otimes F(Y)) \arrow[ur, "G(\xi_{X,Y})"'] & \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} \mathbb{I} \arrow[rr, "\varsigma_0"] \arrow[dr, "\chi_0"'] & & G(F(\mathbb{I})) \\ & G(\mathbb{I}) \arrow[ur, "G(\xi_0)"'] & \end{tikzcd}$$

é um funtor monoidal.

Demonstração. Sejam $X, Y, Z \in \mathscr{C}$. Queremos mostrar que:

$$\begin{aligned}(\varsigma_{X,Y\otimes Z})(Id_{G(F(X))} \otimes \varsigma_{Y,Z})\alpha_{G(F(X)),G(F(Y)),G(F(Z))} = \\ = (G\circ F)(\alpha_{X,Y,Z})(\varsigma_{X\otimes Y,Z})(\varsigma_{X,Y}\otimes Id_{G(F(Z))}),\end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
&\varsigma_{X,Y\otimes Z}(Id_{G(F(X))} \otimes \varsigma_{Y,Z})\alpha_{G(F(X)),G(F(Y)),G(F(Z))} && = \\
&G(\xi_{X,Y\otimes Z})\chi_{F(X),F(Y\otimes Z)}(Id_{G(F(X))} \otimes G(\xi_{X,Z})) && \\
&(Id_{G(F(X))} \otimes \chi_{F(Y),F(Z)})\alpha_{G(F(X)),G(F(Y)),G(F(Z))} && \overset{(i)}{=} \\
&G(\xi_{X,Y\otimes Z})G(Id_{F(X)} \otimes \xi_{Y,Z})\xi_{F(X),F(Y)\otimes F(Z)} && \\
&(Id_{G(F(X))} \otimes \chi_{F(Y),F(Z)})\alpha_{G(F(X)),G(F(Y)),G(F(Z))} && \overset{(ii)}{=} \\
&G(\xi_{X,Y\otimes Z})G(Id_{F(X)} \otimes \xi_{Y,Z})G(\alpha_{F(X),F(Y),F(Z)}) && \\
&\chi_{F(X)\otimes F(Y),F(Z)}(\chi_{F(X),F(Y)} \otimes Id_{G(F(Z))}) && \overset{(iii)}{=} \\
&G(F(\alpha_{X,Y,Z}))G(\xi_{X\otimes Y,Z})G(\xi_{X,Y} \otimes Id_{F(X)}) && \\
&\chi_{F(X)\otimes F(Y),F(Z)}(\chi_{F(X),F(Y)} \otimes Id_{G(F(Z))}) && \overset{(iv)}{=} \\
&G(F(\alpha_{X,Y,Z}))G(\xi_{X\otimes Y,Z}) && \\
&(G(\xi_{X,Y}) \otimes G(Id_{F(Z)}))(\chi_{F(X),F(Y)} \otimes Id_{G(F(Z))}) && = \\
&(G\circ F)(\alpha_{X,Y,Z})\varsigma_{X\otimes Y,Z}(\varsigma_{X,Y} \otimes Id_{G(F(Z))}) &&
\end{aligned}$$

em que (*ii*) e (*iii*) é resultado de, respectivamente, G e F serem funtores monoidais. Já (*i*) e (*ii*) provém, respectivamente, dos seguintes diagramas da naturalidade de χ:

$$\begin{tikzcd} G(F(X)) \otimes G(F(Y) \otimes F(Z)) \arrow[r, "\chi_{F(X),F(Y)\otimes F(Z)}"] \arrow[d, "Id_{G(FX))}\otimes G(\xi_{Y,Z})"'] & G(F(X) \otimes (F(Y) \otimes F(Z))) \arrow[d, "G(Id_{F(X)}\otimes \xi_{Y,Z})"] \\ G(F(X)) \otimes G(F(Y \otimes Z)) \arrow[r, "\chi_{F(X),F(Y\otimes Z)}"'] & G(F(X) \otimes F(Y \otimes Z)) \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
G(F(X)\otimes F(Y))\otimes G(F(Z)) \arrow[r, "\chi_{F(X)\otimes F(Y),F(Z)}"] \arrow[d, "\chi_{F(X),F(Y)}\otimes Id_{G(F(Z))}"'] & G((F(X)\otimes F(Y))\otimes F(Z)) \arrow[d, "G(\chi_{X,Y}\otimes Id_{F(Z)})"] \\
G(F(X\otimes Y))\otimes G(F(Z)) \arrow[r, "\chi_{F(X\otimes Y),F(Z)}"'] & G(F(X\otimes Y)\otimes F(Z))
\end{tikzcd}$$

Agora vejamos que, $r_{G(F(X))} = (G\circ F)(r_X)\varsigma_{X,I} = (Id_{G(F(X))}\otimes\varsigma_0)$. De fato,

$$\begin{aligned}
r_{G(F(X))} &\overset{(v)}{=} G(r_{F(X)})\chi_{F(X),\mathbb{I}}(Id_{G(F(X))}\otimes\chi_0)\\
&\overset{(vi)}{=} G(F(r_X))G(\xi_{X,\mathbb{I}})G(Id_{F(X)}\otimes\xi_0)\chi_{F(X),\mathbb{I}}(Id_{G(F(X))}\otimes\chi_0)\\
&=(G\circ F)(r_X)G(\xi_{X,\mathbb{I}})\chi_{F(X),F(\mathbb{I})}(Id_{G(F(X))}\otimes\chi_0)\\
&=(G\circ F)(r_X)\varsigma_{X,\mathbb{I}}(Id_{G(F(X))}\otimes\varsigma_0)
\end{aligned}$$

Sendo que, (v) e (vi) são do fato de G e F serem funtores monoidais, respectivamente.De forma análoga, temos que

$$l_{G(F(X))} = (G\circ F)(l_X)(\varsigma_{\mathbb{I},X})(\varsigma_0\otimes Id_{G(F(X))}).$$

■

Definição 2.1.14. *Sejam $\mathscr{C} = (\mathscr{C}_0, \otimes, \alpha, \mathbb{I}, l, r)$ e $\mathscr{D} = (\mathscr{D}_0, \tilde{\otimes}, \tilde{\alpha}, \tilde{\mathbb{I}}, \tilde{l}, \tilde{r})$ categorias monoidais e os funtores $(F,\xi,\xi_0),(G,\chi,\chi_0) : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ monoidais. Uma transformação natural monoidal entre F e G é uma transformação natural $\nu : F \Rightarrow G$ de tal forma que, para todo $X,Y \in \mathscr{C}$ os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
F(X)\tilde{\otimes}F(Y) \arrow[r, "\nu_X\tilde{\otimes}\nu_Y"] \arrow[d, "\xi_{X,Y}"'] & G(X)\tilde{\otimes}G(Y) \arrow[d, "\chi_{X,Y}"] \\
F(X\otimes Y) \arrow[r, "\nu_{X\otimes Y}"'] & G(X\otimes Y)
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
& \tilde{\mathbb{I}} \arrow[dl, "\xi_0"'] \arrow[dr, "\chi_0"] & \\
F(\mathbb{I}) \arrow[rr, "\nu_{\mathbb{I}}"'] & & G(\mathbb{I})
\end{tikzcd}.$$

Um resultado uma importância conhecido como *Mac Lane's Strictness Theorem*, o qual pode ser visto em (SAMUEL, 2016), garante que muitos problemas e propriedades de categorias monoidais podem ser reduzidos à categorias monoidais estritas, categorias nas quais possuem estruturas mais simples. Tendo os Exemplos 2.1.11 e 2.1.12, apresentamos o teorema:

Teorema 2.1.15 (Mac Lane's Strictness Theorem)**.** *Toda categoria monoidal é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal estrita.*

2.2 OBJETOS DUAIS

Na teoria de categorias, veremos a generalização de um objeto dual. Os resultados aqui estão presentes em (ETINGOF *et al.*, 2016) e (SCHAUENBURG, 1992).

Definição 2.2.1. *Sejam $\mathscr{C} = (\mathscr{C}, \otimes, \mathbb{I}, \alpha, l, r)$ uma categoria monoidal e $X \in \mathscr{C}$. Dizemos que $X^* \in \mathscr{C}$ é* ***dual*** *(à esquerda) de X se existem os morfismos $ev_X : X^* \otimes X \to \mathbb{I}$ e $cv_X : \mathbb{I} \to X \otimes X^*$ em $\mathscr{C}$ tais que:*

$$(X \xrightarrow{cv_X \otimes Id_X} X \otimes X^* \otimes X \xrightarrow{Id_X \otimes ev_X} X) = Id_X$$

$$(X^* \xrightarrow{Id_{X^*} \otimes cv_X} X^* \otimes X \otimes X^* \xrightarrow{ev_X \otimes Id_{X^*}} X^*) = Id_{X^*}.$$

Neste caso dizemos que $\mathscr{C}$ é ***rígida*** *(à esquerda), se todo objeto de $\mathscr{C}$ possui dual à esquerda.*

Além disso, de forma análoga definimos dualidade e rigidez à direita:

Definição 2.2.2. *Sejam $\mathscr{C} = (\mathscr{C}, \otimes, \mathbb{I}, \alpha, l, r)$ uma categoria monoidal e $X \in \mathscr{C}$. Dizemos que ${}^*X \in \mathscr{C}$ é* ***dual*** *(à direita) de X se existem os morfismos $ev'_X : X \otimes {}^*X \to \mathbb{I}$ e $cv'_X : \mathbb{I} \to {}^*X \otimes X$ em $\mathscr{C}$ tais que:*

$$(X \xrightarrow{Id_X \otimes cv'_X} X \otimes^* X \otimes X \xrightarrow{ev'_X \otimes Id_X} X) = Id_X$$

$$({}^*X \xrightarrow{cv'_X \otimes Id_{{}^*X}} {}^*X \otimes X \otimes^* X \xrightarrow{Id_{{}^*X} \otimes ev'_X} {}^*X) = Id_{{}^*X}.$$

Neste caso dizemos que $\mathscr{C}$ é ***rígida*** *(à direita), se todo objeto de $\mathscr{C}$ possui dual à direita.*

Denotamos os morfismos ev e ev' de **avaliação** e cv e cv' de **coavaliação**.

No decorrer do trabalho, realizaremos todas propriedades e demonstrações para o caso do dual à esquerda.

Observação 2.2.3. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria monoidal. Se $X \in \mathscr{C}$ admite dual à esquerda, digamos (X^*, ev_X, cv_X), então fica evidente que X^* é dual à direita de $X \in \mathscr{C}^{rev}$ e dual à direita de $X \in \mathscr{C}^{op}$.*

Exemplo 2.2.4. *Todo $\mathbb{k}$-espaço vetorial de dimensão finita é dualizável na categoria $Vect_{\mathbb{k}}$. De fato, seja V um $\mathbb{k}$-espaço vetorial de dimensão finita, então o espaço vetorial*

$X^* = Hom_{\Bbbk}(X,\Bbbk)$ *é dual à esquerda sendo a avalição e coavaliação definidas como:*

$$\begin{array}{rccc} ev_X: & X^* \otimes X & \to & \Bbbk \\ & \varphi \otimes x & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$$

e sendo base $\{v_i\}_{i=1}^n$ *de* X *e sua base dual* $\{e_i\}_{i=1}^n$*:*

$$\begin{array}{rccc} cv_X: & \Bbbk & \to & X \otimes X^* \\ & \mathbb{1}_{\Bbbk} & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \otimes e_i \end{array}$$

Primeiro, notemos que cv_X *independe da base pois, dado o isomorfismo canônico:*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & X \otimes X^* & \to & End(X) \\ & x \otimes \psi & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$$

em que $\varphi(x): X \to X$ *é definido por* $\varphi(x)w$ *para todo* $w \in X$*, temos que* $\varphi(cv_X(\mathbb{1}_{\Bbbk})) = Id_X$*.*

Vejamos que a Definição 2.2.1 é satisfeita. Seja $X \in Vect_{\Bbbk}$*, então:*

$$\begin{aligned} (Id_X \otimes ev_X) \circ (cv \otimes Id_X)(\mathbb{1}_{\Bbbk} \otimes x) &= (Id_X \otimes ev_X)(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes e_i \otimes x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes e_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i e_i(x) \otimes \nVdash_{\Bbbk} \\ &= x \otimes \mathbb{1}_{\Bbbk}. \end{aligned}$$

Por outro lado, seja $\varphi \in Hom_{\Bbbk}(X,\Bbbk)$*:*

$$\begin{aligned} (ev_X \otimes Id_{X^*}) \circ (Id_{X^*} \otimes cv_X)(\varphi \otimes \mathbb{1}_{\Bbbk}) &= (ev_X \otimes Id_{X^*})(\sum_{i=1}^{n} \varphi \otimes v_i \otimes e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi(v_i) \otimes e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\Bbbk} \otimes \varphi(v_i) e_i \\ &= \mathbb{1}_{\Bbbk} \otimes \varphi. \end{aligned}$$

Observação 2.2.5. *$(Y, ev_X : Y \otimes X \to \mathbb{I}, cv_X : \mathbb{I} \to X \otimes Y)$ é dual à esquerda de X se, e somente se, $(X, ev'_Y = ev_X : Y \otimes X \to \mathbb{I}, cv'_Y = cv_X : \mathbb{I} \to X \otimes Y)$ é dual à direita de Y.*

Teorema 2.2.6. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria monoidal rígida (à esquerda). Então, $\forall X, Y, Z \in \mathscr{C}$ temos que $Hom_{\mathscr{C}}(Y \otimes X, Z) \cong Hom_{\mathscr{C}}(Y, Z \otimes X^*)$.*

Demonstração. Vejamos que as seguintes funções são bijetoras:

$$\begin{array}{rccc} \wedge: & Hom_{\mathscr{C}}(Y \otimes X, Z) & \to & Hom_{\mathscr{C}}(Y, Z \otimes X^*) \\ & f & \mapsto & \hat{f} = (f \otimes Id_{X^*}) \circ (Id_Y \otimes cv_X) \end{array}$$

isto é, $\hat{f}$ é definida por:

$$Y \xrightarrow{Id_Y \otimes cv_X} Y \otimes X \otimes X^* \xrightarrow{f \otimes Id_{X^*}} Z \otimes X^*$$

e

$$\begin{array}{rccc} \sim: & Hom_{\mathscr{C}}(Y, Z \otimes X^*) & \to & Hom_X(Y \otimes X, Z) \\ & g & \mapsto & \tilde{g} = (Id_Z \otimes ev_X) \circ (g \otimes Id_X) \end{array}$$

isto é, $\tilde{g}$ é dada por:

$$Y \otimes X \xrightarrow{g \otimes Id_X} Z \otimes X^* \otimes X \xrightarrow{Id_Z \otimes ev_X} Z$$

Verifiquemos a bijeção. Sendo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(Y \otimes X, Z)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{f}} &= (Id_Z \otimes ev_X) \circ (\hat{f} \otimes Id_X) \\ &= (Id_Z \otimes ev_X) \circ (f \otimes Id_{X^*} \otimes X) \circ (Id_Y \otimes cv_X \otimes Id_X) \\ &= f \circ (Id_Y \otimes Id_X \otimes ev_X) \circ (Id_Y \otimes cv_X \otimes Id_X) \\ &= f \circ (Id_Y \otimes ((Id_X \otimes ev_X) \circ (cv_X \otimes Id_X))) \\ &\overset{(i)}{=} f \circ (Id_Y \otimes Id_X) \\ &= f, \end{aligned}$$

sendo (i) da Definição 2.2.1. Por outro lado temos, para cada $g \in Hom_{\mathscr{C}}(Y, Z \otimes X^*)$:

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{g}} &= (\tilde{g} \otimes Id_{X^*}) \circ (Id_Y \otimes cv_X) \\ &= (Id_Z \otimes ev_X \otimes Id_{X^*}) \circ (g \otimes Id_X \otimes Id_{X^*}) \circ (Id_Y \otimes cv_X) \\ &= (Id_Z \otimes ev_X \otimes Id_{X^*}) \circ (Id_Z \otimes Id_{X^*} \otimes cv_X) \circ g \\ &= (Id_Z \otimes ((ev_X \otimes Id_{X^*}) \circ (Id_{X^*} \otimes cv_X))) \circ g \\ &\overset{(ii)}{=} (Id_Z \otimes Id_{X^*}) \circ g \\ &= g, \end{aligned}$$

no qual (ii) se dá novamente pela Definição 2.2.1.

■

Teorema 2.2.7. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria monoidal rígida (à esquerda). Então, $\forall X, Y, Z \in \mathscr{C}$ temos que $Hom_{\mathscr{C}}(X^* \otimes Y, Z) \cong Hom_{\mathscr{C}}(Y, X \otimes Z)$.*

Demonstração. Sejam as funções:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & Hom_{\mathscr{C}}(X^* \otimes Y, Z) & \to & Hom_{\mathscr{C}}(Y, X \otimes Z) \\ & h & \mapsto & \Phi(h) = (Id_X \otimes h) \circ (cv_X \otimes Id_Y) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & Hom_{\mathscr{C}}(Y, X \otimes Z) & \to & Hom_{\mathscr{C}}(X^* \otimes Y, Z) \\ & p & \mapsto & \Psi(p) = (ev_X \otimes Id_Z) \circ (Id_{X^*} \otimes p) \end{array}$$

Seja $p \in Hom_{\mathscr{C}}(Y, X \otimes Z)$. Então,

$$\begin{aligned} \Phi \circ \Psi(p) &= (Id_X \otimes \Psi(p)) \circ (cv_X \otimes Id_Y) \\ &= (Id_X \otimes ev_X \otimes Id_Z) \circ (Id_X \otimes Id_{X^*} \otimes p) \circ (cv_X \otimes Id_Y) \\ &= (Id_X \otimes ev_X \otimes Id_Z) \circ (cv_X \otimes Id_X \otimes Id_Z) \circ p \\ &= ((Id_X \otimes ev_X) \circ (cv_X \otimes Id_X) \otimes Id_Z) \circ p \\ &\overset{(iii)}{=} (Id_X \otimes Id_Z) \circ p \\ &= p \end{aligned}$$

o qual (iii) se dá pela Definição 2.2.1. Além disso, sendo $h \in Hom_{\mathscr{C}}(X^* \otimes Y, Z)$

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi(h) &= (ev_X \otimes Id_Z) \circ (Id_{X^*} \otimes \Phi(h)) \\ &= (ev_X \otimes Id_Z) \circ (Id_{X^*} \otimes Id_X \otimes h) \circ (Id_{X^*} \otimes cv_X \otimes Id_Y) \\ &= h \circ (ev_X \otimes Id_{X^*} \otimes Id_Y) \circ (Id_{X^*} \otimes cv_X \otimes Id_Y) \\ &= h \circ ((ev_X \otimes Id_{X^*}) \circ (Id_{X^*} \otimes cv_X) \otimes Id_Y) \\ &\overset{(iv)}{=} h \circ (Id_{X^*} \otimes Id_Y) \\ &= h \end{aligned}$$

com (iv) referente à Definição 2.2.1. ■

Do Teorema A.0.17 temos que adjunções à direita preservam limites e como resultado segue o seguinte Corolário:

Corolário 2.2.8. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria monoidal rígida. Então para cada $X \in \mathscr{C}$ o funtor $\_ \otimes X$ é adjunto à esquerda e preserva colimites. Além disso, o funtor $X \otimes \_$ é adjunto à direita e preserva limites.*

Teorema 2.2.9. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria monoidal. Se $X \in \mathscr{C}$ admite dual (à esquerda), (X^*, ev, cv), ele é único no sentido de que para outro dual $(D, \hat{ev}, \hat{cv})$ de X (à esquerda) existe um único isomorfismo $j : D \to X^*$ tal que*

$$\begin{tikzcd} D \otimes X \arrow[rr, "j \otimes Id_X"] \arrow[dr, "\hat{ev}"'] & & X^* \otimes X \arrow[dl, "ev"] \\ & \mathbb{I} & \end{tikzcd}$$

comuta.

Demonstração. Seja j definida da seguinte forma:

$$j : D \xrightarrow{Id_D \otimes cv} D \otimes X \otimes X^* \xrightarrow{\hat{ev} \otimes Id_{X^*}} X^*.$$

Seja também o seguinte morfismo:

$$g : X^* \xrightarrow{Id_{X^*} \otimes \hat{cv}} X^* \otimes X \otimes D \xrightarrow{ev \otimes Id_D} D.$$

Vejamos que g é inversa de j a partir da comutatividade do seguinte diagrama.

$$\begin{tikzcd}
X^* \arrow[r, "Id_{X^*} \otimes \hat{cv}"] \arrow[d, "Id_{X^*} \otimes cv"'] & X^* \otimes X \otimes D \arrow[r, "ev \otimes Id_D"] \arrow[d, "Id_{X^*} \otimes Id_X \otimes Id_D \otimes cv"] & D \arrow[d, "Id_D \otimes cv"] \\
X^* \otimes X \otimes X^* \arrow[r, "Id_{X^*} \otimes \hat{cv} \otimes Id_X \otimes Id_{X^*}"] \arrow[dr, "Id_{X^*} \otimes Id_X \otimes Id_{X^*}"'] & X^* \otimes X \otimes D \otimes X \otimes X^* \arrow[r, "ev \otimes Id_D \otimes Id_X \otimes Id_{X^*}"'] \arrow[d, "Id_{X^*} \otimes Id_X \otimes \hat{ev} \otimes Id_{X^*}"] & D \otimes X \otimes X^* \arrow[d, "\hat{ev} \otimes Id_{X^*}"] \\
& X^* \otimes X \otimes X^* \arrow[r, "ev \otimes Id_{X^*}"'] & X^*
\end{tikzcd}$$

De fato, os quadrados do diagrama acima comutam pois $\otimes$ é um bifuntor. Com relação ao triângulo à esquerda, o mesmo comuta devido a primeira equação da Definição 2.2.1 juntamente ao funtor $X^* \otimes \_ \otimes X^*$.

De forma análoga temos que o seguinte diagrama também comuta:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "Id_D \otimes cv"] \arrow[d, "Id_D \otimes \hat{cv}"'] & D \otimes X \otimes X^* \arrow[r, "\hat{ev} \otimes Id_{X^*}"] \arrow[d, "Id_D \otimes Id_X \otimes Id_{X^*} \otimes \hat{cv}"] & X^* \arrow[d, "Id_{X^*} \otimes \hat{cv}"] \\
D \otimes X \otimes D \arrow[r, "Id_D \otimes cv \otimes Id_X \otimes Id_D"] \arrow[dr, "Id_D \otimes Id_X \otimes Id_D"'] & D \otimes X \otimes X^* \otimes X \otimes D \arrow[r, "\hat{ev} \otimes Id_D \otimes Id_X \otimes Id_{X^*}"'] \arrow[d, "Id_D \otimes Id_X \otimes ev \otimes Id_D"] & X^* \otimes X \otimes D \arrow[d, "ev \otimes Id_D"] \\
& D \otimes X \otimes D \arrow[r, "\hat{ev} \otimes Id_D"'] & D
\end{tikzcd}$$

Sendo o primeiro diagrama comutativo, das flechas de fora temos a seguinte igualdade:

$$Id_{X^*} \overset{(i)}{=} (ev \otimes Id_{X^*}) \circ (Id_{X^*} \otimes Id_X \otimes Id_{X^*}) \circ (Id_{X^*} \otimes cv)$$

$$= (\hat{ev} \otimes Id_{X^*}) \circ (Id_D \otimes cv) \circ (ev \otimes Id_D) \circ (Id_{X^*} \otimes \hat{cv})$$
$$= j \circ g,$$

a qual (i) é dada pela Definição 2.2.1 com um adicional às identidades tensorizadas.

Por outro lado, de forma semelhante, do segundo diagrama temos:

$$\begin{aligned} Id_D &= (\hat{ev} \otimes Id_D) \circ (Id_D \otimes Id_X \otimes Id_D) \circ (Id_D \otimes \hat{cv}) \\ &= (ev \otimes Id_D) \circ (Id_{X^*} \otimes \hat{cv}) \circ (\hat{ev} \otimes Id_{X^*}) \circ (Id_D \otimes cv) \\ &= g \circ j. \end{aligned}$$

Sendo assim, $j^{-1} = g$. Além disso da definição do bifuntor $\otimes$ e do morfismo j temos:

$$\begin{aligned} ev \circ (j \otimes Id_X) &= ev \circ (\hat{ev} \otimes Id_{X^*}) \circ (Id_D \otimes cv \otimes Id_X) \\ &= \hat{ev} \circ (Id_D \otimes Id_X \otimes ev) \circ (Id_D \otimes cv \otimes Id_X) \\ &= \hat{ev}, \end{aligned}$$

satisfazendo assim o diagrama do Corolário em questão.

Além disso, suponhamos que exista outro morfismo $\beta : D \otimes X^*$ o qual satisfaça o Corolário e vejamos que $\beta = j$. Da adjunção do Teorema A.0.12 temos a seguinte bijeção:

$$\beta = \varphi_{D,\mathbb{I}}(ev \circ (\beta \otimes Id_X)) = \varphi_{D,\mathbb{I}}(ev \circ (j \otimes Id_X)) = j$$

■

Apresentaremos a seguir, numa visão categórica, a caracterização do objeto dual de um produto tensorial, geralmente visto em Álgebra Linear e/ou Estruturas Algébrica.

Teorema 2.2.10. *Seja $\mathscr{C} = (\mathscr{C}, \otimes, \alpha, \mathbb{I}, l, r)$ uma categoria monoidal. Sejam também $X, Y \in \mathscr{C}$ com (X^*, ev_X, cv_X) e (Y^*, ev_Y, cv_Y) duais (à esquerda), respectivamente. Então, $(Y^* \otimes X^*, ev_{X\otimes Y}, cv_{X\otimes Y})$ é dual (à esquerda) de $X \otimes Y$ com:*

$$ev_{X\otimes Y} : Y^* \otimes X^* \otimes X \otimes Y \xrightarrow{Id_{Y^*}\otimes ev_X \otimes Id_Y} Y^* \otimes Y \xrightarrow{ev_Y} \mathbb{I}.$$

e

$$cv_{X\otimes Y} : \mathbb{I} \xrightarrow{cv_X} X \otimes X^* \xrightarrow{Id_X \otimes cv_Y \otimes Id_{X^*}} X \otimes Y \otimes Y^* \otimes X^*.$$

Demonstração. Vejamos que $cv_{X\otimes Y}$ e $ev_{X\otimes Y}$ satisfazem a Definição 2.2.1. De fato, da definição dos morfismos ilustradas acima temos:

$$(Id_{X\otimes Y} \otimes ev_{X\otimes Y}) \circ (cv_{X\otimes Y} \otimes Id_{X\otimes Y}) = (Id_X \otimes Id_Y \otimes ev_Y) \circ (Id_X \otimes$$
$$\otimes Id_Y \otimes Id_{Y^*} \otimes ev_X \otimes Id_Y) \circ (Id_X \otimes cv_Y \otimes Id_{X^*} \otimes Id_X \otimes Id_Y) \circ$$

$\circ(cv_X \otimes Id_X \otimes Id_Y)$

Dando continuidade à igualdade acima e usando o fato de $\otimes$ ser um bifuntor, temos:

$$\begin{aligned}
&(Id_X \otimes Id_Y \otimes ev_Y) \circ (Id_X \otimes Id_Y \otimes Id_{Y^*} \otimes ev_X \otimes Id_Y) \circ (Id_X \otimes cv_Y \otimes \\
&\otimes Id_X \otimes Id_{X^*} \otimes Id_X \otimes Id_Y) \circ (cv_X \otimes Id_X \otimes Id_Y) \\
&\quad = (Id_X \otimes Id_Y \otimes ev_Y) \circ (Id_X \otimes cv_Y \otimes Id_Y) \circ (Id_X \otimes ev_X \otimes Id_Y) \circ \\
&(cv_X \otimes Id_X \otimes Id_Y) \\
&\quad = (Id_X \otimes (Id_Y \otimes ev_Y) \circ (cv_Y \otimes Id_Y)) \circ ((Id_X \otimes ev_X) \circ (cv_X \otimes \\
&\otimes Id_X) \otimes Id_Y) \\
&\quad \overset{(i)}{=} (Id_X \otimes Id_Y) \circ (Id_X \otimes Id_Y) = (Id_X \otimes Id_Y) \overset{(ii)}{=} Id_{X \otimes Y},
\end{aligned}$$

sendo (i) referente a Definição 2.2.1 para os objetos Y e X e (ii) se dá pelo fato de $\otimes$ ser (bi)funtor.

De forma análoga obtemos que:

$$(ev_{X \otimes Y} \otimes Id_{X \otimes Y}) \circ (Id_{X \otimes Y} \otimes cv_{X \otimes Y}) = Id_{Y^* \otimes X^*}$$

Sendo assim, da Definição 2.2.1 temos que $(Y^* \otimes X^*, ev_{X \otimes Y}, cv_{X \otimes Y})$ é dual (à esquerda) de $X \otimes Y$. ∎

Corolário 2.2.11. *Seja $\mathscr{C} = (\mathscr{C}, \otimes, \alpha, \mathbb{I}, l, r)$ uma categoria monoidal rígida. Então $(\_)^* : \mathscr{C}^{op} \to \mathscr{C}$ define um funtor contravariante.*

Demonstração. Sejam $X, Y, Z \in \mathscr{C}$ com os seus respectivos duais (X^*, ev_X, cv_X), (Y^*, ev_Y, cv_Y), (Z^*, ev_Z, cv_Z) e os morfismos $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$. Definimos o dual (à esquerda) $f^* : Y^* \to X^*$ de f como:

$$f^* : Y^* \xrightarrow[Id_{Y^*} \otimes cv_X]{} Y^* \otimes X \otimes X^* \xrightarrow[Id_{Y^*} \otimes f \otimes Id_{X^*}]{} Y^* \otimes Y \otimes X^* \xrightarrow[ev_Y \otimes Id_{X^*}]{} X^*$$

Vejamos que $(Id_X)^* = Id_{X^*}$. De fato,

$$\begin{aligned}
(Id_X)^* &= (ev_X \otimes Id_{X^*}) \circ (Id_{X^*} \otimes Id_X \otimes Id_{X^*}) \circ (Id_{X^*} \otimes cv_X) \\
&= (ev_X \otimes Id_{X^*}) \circ (Id_{X^*} \otimes cv_X) \\
&\overset{(i)}{=} Id_{X^*},
\end{aligned}$$

sendo (i) referente à segunda equação da Definição 2.2.1.

Resta verificarmos que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. Para isso, vejamos que o seguinte diagrama comuta. Neste caso, para não deixarmos o mesmo poluído, denotaremos os morfismos $Id\_$ apenas pela letra do objeto em questão.

$$
\begin{tikzcd}
Z^* \arrow[r, "Z^*\otimes cv_X"] \arrow[d, "Z^*\otimes cv_Y"'] & Z^*\otimes X\otimes X^* \arrow[r, "Z^*\otimes f\otimes X^*"] \arrow[d, "Z^*\otimes cv_Y\otimes X\otimes X^*"'] & Z^*\otimes Y\otimes X^* \arrow[d, "Z^*\otimes cv_Y\otimes Y\otimes X^*"'] \arrow[dr, "Z^*\otimes Y\otimes X^*"] & \\
Z^*\otimes Y\otimes Y^* \arrow[r, "Z^*\otimes Y\otimes Y^*\otimes cv_X"] \arrow[d, "Z^*\otimes g\otimes Y^*"'] & Z^*\otimes Y\otimes Y^*\otimes X\otimes X^* \arrow[r, "Z^*\otimes Y\otimes Y^*\otimes f\otimes X^*"] \arrow[d, "Z^*\otimes g\otimes Y^*\otimes X\otimes X^*"'] & Z^*\otimes Y\otimes Y^*\otimes Y\otimes X^* \arrow[r, "Z^*\otimes Y\otimes ev_Y\otimes X^*"'] \arrow[d, "Z^*\otimes g\otimes Y^*\otimes Y\otimes X^*"'] & Z^*\otimes Y\otimes X^* \arrow[d, "Z^*\otimes g\otimes X^*"'] \\
Z^*\otimes Z\otimes Y^* \arrow[r, "Z^*\otimes Z\otimes Y^*\otimes cv_X"] \arrow[d, "ev_Z\otimes Y^*"'] & Z^*\otimes Z\otimes Y^*\otimes X\otimes X^* \arrow[r, "Z^*\otimes Z\otimes Y^*\otimes f\otimes X^*"] \arrow[d, "ev_Z\otimes Y^*\otimes X\otimes X^*"'] & Z^*\otimes Z\otimes Y^*\otimes Y\otimes X^* \arrow[r, "Z^*\otimes Z\otimes ev_Y\otimes X^*"] \arrow[d, "ev_Z\otimes Y^*\otimes Y\otimes X^*"'] & Z^*\otimes Z\otimes X^* \arrow[d, "ev_Z\otimes X^*"'] \\
Y^* \arrow[r, "Y^*\otimes cv_X"'] & Y^*\otimes X\otimes X^* \arrow[r, "Y^*\otimes f\otimes X^*"'] & Y^*\otimes Y\otimes X^* \arrow[r, "ev_Y\otimes X^*"'] & X^*
\end{tikzcd}
$$

De fato, a comutatividade dos retângulos se dão pela bifuntorialidade de $\otimes$ e do triângulo pela Definição 2.2.1 funtorizado por $Z^* \otimes \_ \otimes X^*$. Sabemos que:

$$
\begin{aligned}
(f^* \circ g^*) = (ev_Y \otimes X^*) \circ (Y^* \otimes f \otimes X) \circ (Y^* \otimes cv_X) \circ (ev_Z \otimes Y^*)\circ \\
\circ (Z^* \otimes g \otimes Y^*) \circ (Z^* \otimes cv_Y)
\end{aligned}
$$

e

$$
(g \circ f)^* = (ev_Z \otimes X^*) \circ (Z^* \otimes g \otimes X^*) \circ (Z^* \otimes f \otimes X^*) \circ (Z^* \otimes cv_X)
$$

Da comutatividade do último diagrama, juntamente com as igualdades acima, temos que: $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. ■

Teorema 2.2.12. *Sejam* $\mathscr{C} = (\mathscr{C}, \otimes, \alpha, \mathbb{I}, l, r)$*,* $\mathscr{D} = (\mathscr{D}, \tilde{\otimes}, \tilde{\alpha}, \tilde{\mathbb{I}}, \tilde{l}, \tilde{r})$ *categorias monoidais e* $(F, \xi, \xi_0) : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *um funtor monoidal. Seja* $X \in \mathscr{C}$ *tal que* (X^*, ev_X, cv_X) *é seu dual à esquerda. Então* $(F(X^*), ev_{F(X)}, cv_{F(X)})$ *é dual à esquerda de* $F(X)$*, sendo*

$$
ev_{F(X)} : F(X^*)\tilde{\otimes}F(X) \xrightarrow{\xi_{X^*,X}} F(X^* \otimes X) \xrightarrow{F(ev_X)} F(\mathbb{I}) \xrightarrow{\xi_0^{-1}} \tilde{\mathbb{I}}.
$$

e

$$
cv_{F(X)} : \tilde{\mathbb{I}} \xrightarrow{\xi_0} F(\mathbb{I}) \xrightarrow{F(cv_X)} F(X \otimes X^*) \xrightarrow{\xi^{-1}_{X,X^*}} F(X)\tilde{\otimes}F(X^*).
$$

Demonstração. Vejamos que $cv_{F(X)}$ satisfaz a Definição 2.2.1. Na demonstração estaremos omitindo ξ_0 e sua inversa, justamente por serem isomorfismos de objetos fixados. Do seguinte diagrama,

$$\begin{tikzcd}
F(\mathbb{I})\tilde{\otimes}F(X) \arrow[r, "F(cv_X)\tilde{\otimes}Id_{F(X)}"] \arrow[d, "\xi_{\mathbb{I},X}"'] & F(X\otimes X^*)\tilde{\otimes}F(X) \arrow[r, "\xi^{-1}_{X,X^*}\tilde{\otimes}Id_{F(X)}"] \arrow[d, "\xi_{X\otimes X^*,X}"] & F(X)\tilde{\otimes}F(X^*)\tilde{\otimes}F(X) \arrow[d, "Id_{F(X)}\tilde{\otimes}\xi_{X^*,X}"] \\
F(\mathbb{I}\otimes X) \arrow[r, "F(cv_X\otimes Id_X)"] \arrow[dr, "F(Id_X)"'] & F(X\otimes X^*\otimes X) \arrow[r, "\xi^{-1}_{X,X^*\otimes X}"] \arrow[d, "F(Id_X\otimes ev_X)"] & F(X)\tilde{\otimes}F(X^*\otimes X) \arrow[d, "Id_{F(X)}\tilde{\otimes}F(ev_X)"] \\
 & F(X\otimes\mathbb{I}) \arrow[r, "\xi^{-1}_{X,\mathbb{I}}"] & F(X)\tilde{\otimes}F(\mathbb{I})
\end{tikzcd}$$

obtemos uma comutatividade, sendo que, o primeiro e terceiro retângulo são provenientes da naturalidade de ξ. Já o segundo retângulo comuta pelo fato de F ser um funtor monoidal, mais especificamente, do hexágono da Definição 2.1.10 retirando o associador. Por fim, a comutatividade do triângulo do diagrama acima se dá pela Definição 2.2.1 juntamente com o funtor F. Como resultado disso, temos:

$$\begin{aligned}
Id_{F(X)} &= (Id_{F(X)}\tilde{\otimes}F(ev_X))\circ(Id_{F(X)}\tilde{\otimes}\xi_{X^*,X})\circ(\xi^{-1}_{X,X^*}\tilde{\otimes}Id_{F(X)})\circ(F(cv_X)\tilde{\otimes}Id_{F(X)}) \\
&= (Id_{F(X)}\tilde{\otimes}ev_{F(X)})\circ(cv_{F(X)}\tilde{\otimes}Id_{F(X)}).
\end{aligned}$$

De forma análoga obtemos:

$$(ev_{F(X)}\tilde{\otimes}Id_{F(X)})\circ(Id_{F(X)}\tilde{\otimes}cv_{F(X)}) = Id_{F(X^*)}$$

Assim da Definição 2.2.1 temos que $(F(X^*), ev_{F(X)}, cv_{F(X)})$ é dual à esquerda de $F(X)$. ■

Observação 2.2.13. *Do Teorema 2.2.9 existe um único isomorfismo $j : (Y^*\otimes X^*)\to(X\otimes Y)^*$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
(Y^*\otimes X^*)\otimes X\otimes Y \arrow[rr, "j\otimes Id_{X\otimes Y}"] \arrow[dr, "ev_{X\otimes Y}"'] & & (X\otimes Y)^*\otimes X\otimes Y \arrow[dl, "ev_{X\otimes Y}"] \\
 & \mathbb{I} &
\end{tikzcd}$$

Definição 2.2.14. *Sejam $\mathscr{C} = (\mathscr{C}, \otimes, \alpha, \mathbb{I}, l, r)$ uma categoria monoidal, $X, Y, Z \in \mathscr{C}$ e o isomorfismo natural $\sigma_{X,Y} : X\otimes Y\to Y\otimes X$, $\forall X, Y\in\mathscr{C}$. Dizemos que $\mathscr{C}$ é uma **Categoria Monoidal Trançada** se os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[r, "\sigma_{X,Y\otimes Z}"] \arrow[d, "\alpha^{-1}_{X,Y,Z}"'] & (Y\otimes Z)\otimes X & Y\otimes(Z\otimes X) \arrow[l, "\alpha^{-1}_{Y,Z,X}"'] \\
(X\otimes Y)\otimes Z \arrow[r, "\sigma_{X,Y}\otimes Id_Z"'] & (Y\otimes X)\otimes Z \arrow[r, "\alpha_{Y,X,Z}"'] & Y\otimes(X\otimes Z) \arrow[u, "Id_Y\otimes\sigma_{X,Z}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes Y)\otimes Z \arrow[r, "\sigma_{X\otimes Y,Z}"] \arrow[d, "\alpha_{X,Y,Z}"'] & Z\otimes(X\otimes Y) & (Z\otimes X)\otimes Y \arrow[l, "\alpha_{Z,X,Y}"'] \\
X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[r, "Id_X\otimes\sigma_{Y,Z}"'] & X\otimes(Z\otimes Y) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{X,Z,Y}"'] & (X\otimes Z)\otimes Y \arrow[u, "\sigma_{X,Z}\otimes Id_Y"']
\end{tikzcd}$$

Dizemos $\mathscr{C}$ que é simétrica, se $\sigma_{X,Y}\circ\sigma_{Y,X} = Id_{X\otimes Y}$.

Exemplo 2.2.15. *Seja R um anel. Temos que ${}_R\mathscr{M}_R$, a categoria de R-bimódulos, é monoidal (com o produtor tensorial comum entre R-módulos), mas não necessariamente é simétrica. Agora, se R for um anel comutativo, temos que a categoria dos R-módulos à esquerda é monoidal simétrica.*

2.3 ÁLGEBRAS E COÁLGEBRAS

Nesta seção, teremos como objetivo apresentar as definições, exemplos e alguns resultados de álgebras e coálgebras os quais serão importantes para a Reconstrução de Tannaka. Aqui, teremos como textos base (HUNGERFORD, 1980) e (ALVES; BATISTA, 2014).

A partir deste ponto, sempre que dissermos que $\mathscr{C}$ é uma categoria monoidal, ficará implícita a sêxtupla $(\mathscr{C}, \otimes, \alpha, \mathbb{I}, l, r)$, a menos que seja necessário diferenciá-la de outras categorias monoidais. Além disso, $\Bbbk$ será sempre um corpo.

Definição 2.3.1. ***(Álgebra)*** *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria monoidal. Uma álgebra em $\mathscr{C}$ é a tripla (A,μ,η) em que $A\in\mathscr{C}$ e $\mu : A\otimes A\to A$ e $\eta : \mathbb{I}\to A$ são morfismos em $\mathscr{C}$ tais que os diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes A)\otimes A \arrow[r, "\alpha_{A,A,A}"] \arrow[d, "\mu\otimes Id_A"'] & A\otimes(A\otimes A) \arrow[r, "Id_A\otimes\mu"] & A\otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A\otimes A \arrow[rr, "\mu"'] & & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& A\otimes A \arrow[dd, "\mu"] & \\
\mathbb{I}\otimes A \arrow[ur, "\eta\otimes Id_A"] \arrow[dr, "l"'] & & A\otimes\mathbb{I} \arrow[ul, "Id_A\otimes\eta"'] \arrow[dl, "r"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

*comutam. Denotamos μ e η de **multiplicação** e **unidade**, respectivamente. O primeiro diagrama é chamado de diagrama da associatividade e o segundo de diagrama da unidade.*

Exemplo 2.3.2. ***(Álgebra de Grupo)*** *Seja G um grupo multiplicativo e $\Bbbk$ um $\Bbbk$-espaço vetorial. Denotaremos por $\Bbbk G$ a soma direta $\bigoplus_{g\in G} \Bbbk$, a qual também é um $\Bbbk$-espaço vetorial. Um elemento em $\Bbbk G$ é descrito como a seguinte soma finita:*

$$\sum_{g\in G} \alpha_g \delta_g$$

sendo para qualquer $g \in G$, $\alpha_g \in \Bbbk$ e $\{\delta_g\}_{g\in G}$ uma base de $\Bbbk G$. Então $\Bbbk G$ é na verdade uma $\Bbbk$-álgebra com a multiplicação e unidade definidas da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \Bbbk G \otimes \Bbbk G & \to & \Bbbk G \\ & \left(\sum\limits_{g\in G} \alpha_g \delta_g\right) \otimes \left(\sum\limits_{h\in G} \beta_h \delta_h\right) & \mapsto & \sum\limits_{g,h\in G} \alpha_g \beta_h \delta_{gh} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \eta : & \Bbbk\, G & \to & \Bbbk G \\ & k & \mapsto & k1_{\Bbbk G} \end{array}.$$

Exemplo 2.3.3. *Seja a categoria monoidal $(Set, \times, \{*\})$, sendo Set a categoria dos conjuntos, $\times$ o produto cartesiano e $\{*\}$ o conjunto unitário. Seja também $(M,\#,\varepsilon_M)$ um monoide, então M é na verdade uma álgebra em Set, sendo:*

$$\begin{array}{rccc} \mu : & M \times M & \to & M \\ & (a,b) & \mapsto & a\#b \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \eta : & \{*\} & \to & M \\ & * & \mapsto & \varepsilon_M \end{array}.$$

Definição 2.3.4. *Sejam (A,μ_A,η_A) e (B,μ_B,η_B) álgebras em $\mathscr{C}$, uma categoria monoidal. Um morfismo de álgebras $f : A \to B$ é um morfismo em $\mathscr{C}$ tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ & \mathbb{I} \arrow[ul, "\eta_A"] \arrow[u, "\eta_B"'] \end{tikzcd}.$$

Dualizando a Definição 2.3.1 nós obtemos a definição de uma coálgebra.

Definição 2.3.5. ***(Coálgebra)*** *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria monoidal. Uma coálgebra em $\mathscr{C}$ é a tripla (D,Δ,ε) em que $D \in \mathscr{C}$ e $\Delta : D \to D \otimes D$ e $\varepsilon : D \to \mathbb{I}$ são morfismos em $\mathscr{C}$ tais que os diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & & D \otimes D \arrow[d, "\Delta\otimes Id_D"] \\
D \otimes D \arrow[r, "Id_D\otimes\Delta"'] & D \otimes (D \otimes D) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{D,D,D}"'] & (D \otimes D) \otimes D
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "l_D^{-1}"'] \arrow[dr, "r_D^{-1}"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\
\mathbb{I} \otimes D & & D \otimes \mathbb{I} \\
 & D \otimes D \arrow[ul, "\varepsilon\otimes Id_D"] \arrow[ur, "Id_D\otimes\varepsilon"'] &
\end{tikzcd} .$$

Denotamos os morfismos Δ de ***comultiplicação****, ε de* ***counidade****. Além disso, as comutatividades acima são nomeadas de diagrama da coassociatividade e counidade, respectivamente.*

Exemplo 2.3.6. *Em $(Set,\times,\{*\})$ todo objeto é uma coálgebra. De fato, definimos a comultiplicação e a counidade como sendo $\Delta(d) = (d,d)$ e $\varepsilon(d) = *$ para todo $d \in D$ sendo D um conjunto qualquer. Vejamos que são satisfeitos os diagramas da definição de uma coálgebra:*

$$(\Delta \otimes Id_D) \circ \Delta(d) = (\Delta \otimes Id_D)(d,d) = (d,d,d),$$

por outro lado,

$$(Id_D \otimes \Delta) \circ \Delta(d) = (Id_D \otimes \Delta)(d,d) = (d,d,d).$$

E mais,

$$\begin{aligned}(\varepsilon \otimes Id_D) \circ \Delta(d) &= (\varepsilon \otimes Id_D)(d,d) = (*,d) \\ &= l^{-1}(d).\end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos que $(Id_D \otimes \varepsilon) \circ \Delta(d) = r^{-1}(d)$. Sendo assim, qualquer conjunto é uma coálgebra.

Além disso, toda coálgebra em Set possui a mesma estrutura de coálgebra. Suponhamos que (C,Δ,ε) seja uma coálgebra em Set. Sendo $\{*\}$ objeto final em Set, o morfismo ε é definido de forma única como sendo $\varepsilon(c) = *$ para todo $c \in C$.

Sejam as projeções $\pi_1, \pi_2 : C \times C \to C$ $C \times C$ e as aplicações $f_1 = f_2 = Id_C$. Da propriedade universal do produto existe um único morfismo $\Delta : C \to C \times C$ tal que, para todo $c \in C$, $\pi_1 \circ \Delta(c) = Id_C(c) = c = Id_C = \pi_2 \circ \Delta(c)$. Sendo assim, Δ fica definida como $\Delta(c) = (c, c)$ para todo $c \in C$. Do diagrama da counidade temos:

$$(\varepsilon \otimes Id_C) \circ \Delta(c) = \varepsilon(a) \otimes b = (*, b) = l^{-1}(c) = (*, c).$$

De forma análoga, obtemos que $(a, *) = (c, *)$. Sendo assim

$$\Delta(d) := (a,b) = (c,c).$$

Exemplo 2.3.7. *A álgebra de grupo $\Bbbk G$ de um grupo multiplicativo G é uma coálgebra, com a comultiplicação $\Delta(g) = g \otimes g$ e a counidade $\varepsilon(g) = 1_{\Bbbk}$.*

Para facilitar algumas demonstrações que envolvam $\Bbbk$-coálgebras, da **Notação Sigma**, também conhecida como **Notação de Heyenman-Sweedler**, vista em (DASCALESCU; NASTASESCU; RAIANU, 2000), temos a seguinte definição:

Definição 2.3.8. *Seja (C, Δ, ε) uma $\Bbbk$-coálgebra. Para cada elemento $c \in C$ denotamos:*

$$\Delta(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}.$$

Como resultado dessa notação, denotando $\Delta = \Delta_1$ e $\Delta_n : C \to C \otimes C \otimes ... \otimes C$ $(n + 1 vezes)$ por $\Delta_n = (\Delta \otimes Id_C^{n-1}) \circ \Delta_{n-1}$ temos que:

$$\Delta_2(c) = \sum \Delta(c_1) \otimes c_{(2)} = \sum c_{(1)} \otimes \Delta(c_{(2)}) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)},$$

e da comutatividade do diagrama da counidade juntamente com o isomorfismo $\Bbbk \otimes \Bbbk \cong \Bbbk$, temos:

$$\sum \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)} = \sum c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)}) = c,$$

e para o caso de $n = 3$, obtemos:

$$\sum \varepsilon(c_{(1)})\varepsilon(c_{(2)})c_{(3)} = c.$$

Como, neste caso, Δ é $\Bbbk$-linear, podemos omitir o somatório e então: $\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$.

Definição 2.3.9. *Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ coálgebras em $\mathscr{C}$, sendo essa, uma categoria monoidal. Um morfismo de cóalgebras $f : C \to D$ é um morfismo em $\mathscr{C}$ que satisfaz a comutatividade dos seguintes diagramas:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[d, "\varepsilon_D"] \\ & \mathbb{I}. \end{tikzcd}$$

As próximas definições e resultados nos levarão à um teorema que diferencia a teoria de coálgebras da teoria de álgebras, determinando finitude das coálgebras. Para isso, estaremos tratando de $\Bbbk$-cóalgebras, sendo assim, os morfismos Δ e ε além de satisfazerem a Definição 2.3.5 são $\Bbbk$ lineares.

Definição 2.3.10. *Sejam $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ uma $\Bbbk$-coálgebra. Um $\Bbbk$-subespaço de C, D é dito uma subcoálgebra se $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$.*

Observação 2.3.11. *Se $D \subseteq C$ é uma subcoálgebra, é evidente que D é uma coálgebra com $\Delta : D \to D \otimes D$ (definição de subcoálgebra) e $\varepsilon_D : D \to \Bbbk$, a restrição de ε_C.*

Proposição 2.3.12. *Se $(C_i)_{i \in I}$ é uma família de coálgebras de C, então $\sum\limits_{i \in I} C_i$ é uma subcoálgebra.*

Demonstração. Da definição de subcoálgebra e linearidade de Δ e do produto tensorial temos:

$$\Delta\left(\sum_{i \in I} C_i\right) = \sum_{i \in I} \Delta(C_i) \subseteq \sum_{i \in I} (C_i \otimes C_i) \subseteq \sum_{i \in I} C_i \otimes \sum_{i \in I} C_i.$$

■

Observação 2.3.13. *Se C é uma $\Bbbk$-coálgebra e $X \subseteq C$ é um subespaço vetorial qualquer, então a subcoálgebra de C gerada por X é a intersecção de todas as subcoálgebras de C que contém X. De fato, seja a família de C-subcoálgebras $\{S_i\}_{i \in I}$ tal que, $\Delta(S_i) \subseteq S_i \otimes S_i$ e $X \subseteq S_i, \forall i \in I$. Assim, $\bigcap\limits_{i \in I} S_i \neq \varnothing$. Então da linearidade de Δ e S_i sendo uma subcoálgebra de C para todo $i \in I$ temos:*

$$\Delta\left(\bigcap_i S_i\right) \subseteq \bigcap_i \Delta(S_i) \subseteq \bigcap_i (S_i \otimes S_i) \subseteq \bigcap_i S_i \otimes \bigcap_i S_i.$$

Logo $\bigcap\limits_i S_i$ é uma subcoálgebra de C.

Definição 2.3.14. *Sejam C uma $\Bbbk$-coálgebra e V um $\Bbbk$-subespaço de C. Então V é chamado de coideal à esquerda (à direita) se $\Delta(V) \subseteq C \otimes V$ ($\Delta(V) \subseteq V \otimes C$).*

Proposição 2.3.15. *Sejam C,D duas coálgebras e $I \subseteq C$ e $J \subseteq D$ coideais, respectivamente, de C e D. Então $I \otimes D + C \otimes J$ é um coideal da coálgebra $(C \otimes D, \Delta, \varepsilon)$.*

Demonstração. Da hipótese, $\Delta_C(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$, $\varepsilon_C(I) = 0$, $\Delta_D(J) \subseteq J \otimes D + D \otimes J$ e $\varepsilon_D(J) = 0$. Assim, dados $i \in I$, $j \in J$, $c \in C$ e $d \in D$ temos:

$$\begin{aligned}
\Delta(i \otimes d + c \otimes j) &= i_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes i_{(2)} \otimes d_{(2)} + c_{(1)} \otimes j_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes j_{(2)} \\
&\cong i_{(1)} \otimes i_{(2)} \otimes d_{(1)} \otimes d_{(2)} + c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes j_{(1)} \otimes j_{(2)} \\
&\subseteq (I \otimes C + C \otimes I) \otimes D \otimes D + C \otimes C \otimes (J \otimes D + D \otimes J)
\end{aligned}$$

$$\cong (I \otimes D + C \otimes J) \otimes C \otimes D + C \otimes D \otimes (I \otimes D + C \otimes J)$$

e

$$\begin{aligned}
\varepsilon(I \otimes D + C \otimes J) &= \varepsilon(I \otimes D) + \varepsilon(C \otimes J) \\
&= \varepsilon_C(I) \otimes \varepsilon_D(D) + \varepsilon_C(C) \otimes \varepsilon_D(J) \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

O seguinte resultado nos mostra que subcoálgebras geradas por coideais à direita de dimensão finita tem dimensão finita.

Lema 2.3.16. *Sejam C uma $\Bbbk$-coálgebra e V um coideal à direita de C de dimensão finita com base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Sejam também $c_{ij} \in C$ com $i, j = 1, 2, ..., n$ tais que, para cada $j = 1,2,...,n$,*

$$\Delta(v_j) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes c_{ij}.$$

Então o subespaço de C gerado por $\{c_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ coincide com a subcoálgebra de C gerada por V.

Demonstração. Do diagrama da coassociatividade temos que $(\Delta \otimes Id_C) \circ \Delta(v_j) = (Id_C \otimes \Delta) \circ \Delta(v_j)$, isto é,

$$\sum_{k,i} v_k \otimes c_{ki} \otimes c_{ij} = \sum_{i} v_i \otimes \Delta(c_{ij}) \quad \forall i, k, j = 1, 2, ..., n.$$

Sendo $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é linearmente independente, concluímos que

$$\Delta(c_{kj}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ki} \otimes c_{ij},$$

o que mostra que o subespaço D gerado pelos c_{ij}'s é uma subcoálgebra (finita) de C. Veja ainda que, para cada $i = 1, 2, ..., n$, do diagrama da counidade temos:

$$v_j = l \circ (\varepsilon \otimes Id_C) \circ \Delta(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(v_i) c_{ij} \in D,$$

logo $V \subseteq D$. Para mostrarmos que D é a subcoálgebra de C gerada por V, considere W uma subcoálgebra de C contendo V.

Sendo $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \in V$ linearmente independente, existem $\{c_1^*, c_2^*, ..., c_n^*\}$ base dual de V, tal que $c_i^*(v_k) = \delta_{ik}$ para todo $i, k = 1, 2, ..., n$. Sendo W uma subcoálgebra de C, temos que $\Delta(v_j) \in W \otimes W$. Assim,

$$1_{\Bbbk} \otimes c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_i^*(v_k) \otimes c_{kj} = (c_i^* \otimes Id_C) \circ \Delta(v_j) \in \Bbbk \otimes W \quad \forall i,j = 1,2,...,n.$$

Assim, $c_{ij} \in W$, $\forall i, j = 1, 2, ..., n$ e portanto, $D \subseteq W$. ■

Teorema 2.3.17. ***(Teorema Fundamental das Coálgebras)*** *Todo elemento de uma coálgebra pertence a uma subcoálgebra de dimensão finita.*

Demonstração. Seja (C, Δ, ε) uma $\Bbbk$-coálgebra. Seja também $x \in C$ tal que $\Delta(x) = \sum\limits_i b_i \otimes c_i$. Consideremos então

$$\Delta_2(x) = \sum_i \Delta(b_i) \otimes c_i = \sum_{i,j} a_j \otimes b_{ij} \otimes c_i$$

com a_j's e c_i's linearmente independentes. Seja subespaço D gerado pelos b_{ij}'s. Fica claro que $dim_{\Bbbk} D < \infty$. Além disso, $x \in D$, pois,

$$x = \sum_{i,j} \varepsilon(a_j)\varepsilon(c_i)b_{ij}.$$

Agora, como $(\Delta \otimes Id_C \otimes Id_C)(\Delta_2(x)) = (Id_C \otimes \Delta \otimes Id_C)(\Delta_2(x))$ e c_i's são linearmente independentes obtemos que:

$$\sum_i \Delta(a_j) \otimes b_{ij} = \sum_j a_j \otimes \Delta(b_{ij}) \qquad \forall i.$$

então,

$$\sum_j a_j \otimes \Delta(b_{ij}) \in C \otimes C \otimes D$$

e como os a_j's são linearmente independentes, temos que $\Delta(b_{ij}) \in C \otimes D$ para todo i,j. Analogamente obtemos que $\Delta(b_{ij}) \in D \otimes C$. Logo,

$$\Delta(b_{ij}) \in C \otimes D \cap D \otimes C = D \otimes D.$$

O que mostra que D é uma subcoálgebra de C. ∎

Podemos, também, considerar módulos à esquerda (à direita) sobre uma álgebra. Neste caso consideraremos categorias monoidais estritas, pois fica claro o papel do associador, se o mesmo for necessário.

Definição 2.3.18. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria monoidal (estrita) e $A = (A, \mu, \eta)$ uma álgebra em $\mathscr{C}$. Um módulo à esquerda sobre A é o par (M, π) onde $M \in \mathscr{C}$ e $\pi : A \otimes M \to M$ é um morfismo em $\mathscr{C}$ tal que:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "Id_A \otimes \pi"] \arrow[d, "\mu \otimes Id_M"'] & A \otimes M \arrow[d, "\pi"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\pi"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \otimes M \arrow[r, "\pi"] & M \\ & \mathbb{I} \otimes M \arrow[ul, "\mu \otimes Id_M"] \arrow[u, "l_M"'] \end{tikzcd} .$$

*Denominamos π de **ação** de M sobre A. De forma análoga definimos A-módulos à direita. Todos os resultados deste trabalho serão verdadeiros <u>mutatis mutandis</u> para os módulos à direita a menos que seja mencionado.*

Exemplo 2.3.19. *Toda álgebra (A, μ, η) é um A-módulo à esquerda e à direita, tendo μ como a ação.*

Exemplo 2.3.20. *Seja $M = (M, \mu, \eta)$ uma álgebra em Set, isto é, um monoide. Sendo X um M-conjunto via morfismo de monoides $\Phi : S \to End(X)$. Então $\pi(s, x) = \Phi(s)(x)$ define uma estrutura de S-módulo à esquerda em sobre X.*

Exemplo 2.3.21. *Sejam R um anel e $M = M_{m,n}(R)$ o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ com entradas em R. Então M é um R-módulo, sendo a ação a multiplicação por escalar.*

Definição 2.3.22. *Sejam (M, π_M) e (N, π_N) A-módulos à esquerda. Um morfismo f : $M \to N$ em $\mathscr{C}$ é um morfismo de A-módulos, se o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes M \arrow[r, "Id_A \otimes f"] \arrow[d, "\pi_M"'] & A \otimes N \arrow[d, "\pi_N"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N. \end{tikzcd}$$

Dualizando as definições anteriores obtemos a estrutura de comódulo.

Definição 2.3.23. *Seja $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ uma coálgebra em $\mathscr{C}$. Um C-comódulo à esquerda é o par (P, ρ) onde $P \in \mathscr{C}$ e $\rho : P \to C \otimes P$ é morfismo em $\mathscr{C}$ tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & C \otimes P \arrow[d, "\Delta \otimes Id_P"] \\ C \otimes P \arrow[r, "Id_C \otimes \rho"'] & C \otimes C \otimes P \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P \arrow[r, "r_P^{-1}"] \arrow[dr, "\rho"'] & I \otimes P \\ & C \otimes P \arrow[u, "\varepsilon \otimes Id_P"'] \end{tikzcd}$$

*Denominamos ρ de **coação** de P sobre C. Similarmente, podemos definir a estrutura de C-comódulo à direita.*

Assim como para $\Bbbk$-coálgebras, em (DASCALESCU; NASTASESCU; RAIANU, 2000) também é definido uma notação de *Sweedler* para comódulos sobre uma $\Bbbk$-coálgebra:

Definição 2.3.24. *Sejam C uma $\Bbbk$-coálgebra e (P, ρ) um C-comódulo à direita. Então para todo $m \in P$ denotamos:*

$$\rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}.$$

Assim, a definição de comódulo à direita pode ser escrito da seguinte forma:

$$\sum m_{(0)} \otimes m_{(1)} \otimes m_{(2)} = \sum (m_{(0)})_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(1)} \otimes m_{(1)} = \sum m_{(0)} \otimes (m_{(1)})_{(1)} \otimes (m_{(1)})_{(2)}$$

Se (P, ρ) é um C-comódulo à esquerda, denotamos para todo $m \in P$:

$$\rho(m) = \sum m_{(-1)} \otimes m_{(0)}.$$

Logo, da definição de comódulo à esquerda juntamente com a notação de Sweedler temos, para todo $m \in P$:

$$\begin{aligned}\sum m_{(-2)} \otimes m_{(-1)} \otimes m_{(0)} &= \sum m_{(-1)} \otimes (m_{(0)})_{(-1)} \otimes (m_{(0)})_{(0)} \\ &= \sum (m_{(-1)})_{(1)} \otimes (m_{(-1)})_{(2)} \otimes m_{(0)}.\end{aligned}$$

Exemplo 2.3.25. *Toda coálgebra $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ é um C-comódulo à esquerda e à direita tendo Δ como coação.*

Exemplo 2.3.26. *Seja a coálgebra $\Bbbk G$ de um grupo multiplicativo G. Então o $\Bbbk$-espaço vetorial graduado $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$ é um $\Bbbk G$-comódulo à direita com a coação*

$$\rho(v) = \rho\left(\sum_{g \in G} v_g\right) = \sum_{g \in G} v_g \otimes \delta_g$$

Exemplo 2.3.27. *Seja a coálgebra $((Fun(G, \Bbbk), \Delta, \varepsilon)$, com G um monoide finito, $Fun(G, \Bbbk)$ o conjunto das funções de G em $\Bbbk$,*

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & Fun(G, \Bbbk) & \to & Fun(G, \Bbbk) \otimes Fun(G, \Bbbk) \\ & \varphi & \mapsto & \begin{array}{rccc} \Delta(\varphi) : & G \times G & \to & \Bbbk \\ & (g, h) & \mapsto & \varphi(gh) \end{array} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon : & Fun(G, \Bbbk) & \to & \Bbbk \\ & \varphi & \mapsto & \varphi(e_G) \end{array}$$

Sendo V um $\Bbbk$-espaço vetorial, $\pi : G \to End(V)$ e $p_g : G \to \Bbbk$ definida por $p_g(h) = \delta_{g,h}, \forall g,h \in G$, podemos construir a coação de $Fun(G, \Bbbk)$ em V como:

$$\begin{array}{rccc} \rho : & V & \to & V \otimes Fun(G, \Bbbk) \\ & v & \mapsto & \sum_{g \in G} \pi(g)(v) \otimes p_g \end{array}$$

Definição 2.3.28. *Sejam (P, ρ_P) e (Q, ρ_Q) C-comódulos à esquerda. Um morfismo $g : P \to Q$ em $\mathscr{C}$ é um morfismo de comódulos se o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho_P"'] & Q \arrow[d, "\rho_Q"] \\ C \otimes P \arrow[r, "Id_C \otimes g"'] & C \otimes Q \end{tikzcd}$$

Se P e Q são dois $\mathbb{k}$-comódulos, a comutatividade diagrama é escrito, na notação de Sweedler, como:

$$\rho_Q(g(m)) = \sum m_{(-1)} \otimes g(m_{(0)})$$

para todo $m \in P$.

Definição 2.3.29. *Sejam C uma $\mathbb{k}$-coálgebra e (M, ρ) um C-comódulo à direita. Um $\mathbb{k}$-subespaço N de M é chamado C-subcomódulo de M se $\rho(N) \subseteq N \otimes C$.*

Teorema 2.3.30. ***(Teorema Fundamental dos Comódulos)*** *Seja C uma $\mathbb{k}$-coálgebra e M um C-comódulo à direita. Então todo elemento de M pertence a um subcomódulo de M de dimensão finita.*

Demonstração. Seja $\{c_i\}_{i \in I}$ uma base para C. Seja também $\rho : M \to M \otimes C$ a coação de M. Para $m \in M$ escrevemos:

$$\rho(m) = \sum_{i \in I} m_i \otimes c_i.$$

Como o número de m_i's não nulos é finito, o subespaço W de M gerado por esses elementos tem dimensão finita. Agora, para cada c_i temos $\Delta(c_i) = \sum_{j,k} a_{ijk} c_j \otimes c_k$ sendo $a_{ijk} \in \mathbb{k}$. Assim, sendo M um C-comódulo à direita temos que $(\rho \otimes Id_C) \circ \rho(m) = (Id_M \otimes \Delta) \circ \rho(m)$, isto é,

$$\sum_i \rho(m_i) \otimes c_i = \sum_{i,j,k} m_i \otimes a_{ijk} c_j \otimes c_k.$$

Como $\{c_i\}_{i \in I}$ forma uma base, da igualdade acima temos que $\rho(m_i) = \sum_{i,j} m_i \otimes a_{ijk} c_j$. Assim, W é um C-subcomódulo de M (de dimensão finita). Além disso,

$$\begin{aligned} m &= r \circ (Id_M \otimes \varepsilon) \circ \rho(m) \\ &= r\left(\sum_i m_i \otimes \varepsilon(c_i)\right) \\ &= \sum_i m_i \varepsilon(c_i) \in W, \end{aligned}$$

pois W é um $\mathbb{k}$-espaço vetorial. Disso, concluímos que $\forall m \in M \implies m \in W$. ■

2.4 BIÁLGEBRAS

Como vimos na seção anterior, qualquer categoria monoidal pode conter objetos que sejam uma álgebra ou uma coálgebra. Mas algo mais forte pode acontecer. Alguns objetos podem, em uma categoria monoidal, possuírem estruturas de álgebra e coálgebra ao mesmo tempo. Nesta seção, baseado no texto (ALVES; BATISTA, 2014), iremos discutir alguns objetos nos quais possuam a mesma estrutura e ainda sejam compatíveis.

Suponhamos, por exemplo, que A é uma álgebra e uma coálgebra em $(\mathscr{C}, \otimes, \mathbb{I})$, uma categoria monoidal. Sendo assim, existem os morfismos $\mu : A \otimes A \to A$, $\eta : \mathbb{I} \to A$, $\Delta : A \to A \otimes A$ e $\varepsilon : A \to \mathbb{I}$ tais que (A, μ, η) é uma álgebra e (A, Δ, ε) é uma coálgebra em $\mathscr{C}$. Quando dizemos que a estrutura de álgebra e coálgebra são compatíveis, significa que Δ e ε são morfismos de álgebras e μ e η são morfismos de coálgebras. Um exemplo disso é o objeto $\mathbb{I}$, o qual possui estrutura de álgebra $(I, \mu = l_{\mathbb{I}} = r_{\mathbb{I}}, \eta = Id_{\mathbb{I}})$ e estrutura de coálgebra $(\mathbb{I}, \Delta = l_{\mathbb{I}}^{-1} = r_{\mathbb{I}}^{-1}, \varepsilon = Id_{\mathbb{I}})$. Um fator que se faz necessário é que a categoria monoidal seja trançada, para que assim possamos definir uma estrutura de álgebra em um produto tensorial de duas álgebras e também uma estrutura de coálgebra em um produto tensorial de duas coálgebras, resultado o qual será apresentado a seguir.

Teorema 2.4.1. *Seja $\mathscr{C} = (\mathscr{C}, \otimes, \mathbb{I}, \alpha, \sigma, l, r)$ uma categoria monoidal simétrica.*

(a) *Se A e B são duas álgebras em $\mathscr{C}$, então $A \otimes B$ é uma álgebra.*

(b) *Se C e D são duas coálgebras em $\mathscr{C}$, então $C \otimes D$ é uma coálgebra.*

Demonstração. (a) Primeiramente, da naturalidade de σ temos:

$$\sigma_{B,A} \circ (\mu_B \otimes Id_A) = (Id_A \otimes \mu_B) \circ \sigma_{B \otimes B, A}$$

e

$$\sigma_{B,A} \circ (Id_B \otimes \mu_A) = (\mu_A \otimes Id_B) \circ \sigma_{B, A \otimes A}.$$

Definimos a multiplicação e a unidade de $A \otimes B$ da seguinte forma:

$$\mu_{A \otimes B} = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (Id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes Id_B) \quad e \quad \eta_{A \otimes B} = \eta_A \otimes \eta_B.$$

Vejamos que $\mu_{A \otimes B}$ e $\eta_{A \otimes B}$ satisfazem a Definição 2.3.1, isto é, queremos ver que

$$\mu_{A \otimes B} \circ (\mu_{A \otimes B} \otimes Id_{A \otimes B}) = \mu_{A \otimes B} \circ (Id_{A \otimes B} \otimes \mu_{A \otimes B}),$$

$$\mu_{A \otimes B} \circ (\eta_{A \otimes B} \otimes Id_{A \otimes B}) = l_{A \otimes B} \quad e \quad \mu_{A \otimes B} \circ (Id_{A \otimes B} \otimes \eta_{A \otimes B}) = r_{A \otimes B}.$$

De fato,

$$\mu_{A \otimes B} \circ (\mu_{A \otimes B} \otimes Id_{A \otimes B}) = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (Id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes Id_B) \circ (\mu_A \otimes \mu_B \otimes Id_A \otimes Id_B)$$
$$\circ (Id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes Id_B \otimes Id_A \otimes Id_B)$$
$$\overset{(i)}{=} (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (\mu_A \otimes Id_A \otimes \mu_B \otimes Id_B) \circ (Id_A \otimes Id_A \otimes \sigma_{B \otimes B, A} \otimes Id_B) \circ$$

$$
\begin{aligned}
&\circ(Id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes Id_B \otimes Id_A \otimes Id_B)\\
&\overset{(ii)}{=} (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (\mu_A \otimes Id_A \otimes \mu_B \otimes Id_B) \circ (Id_A \otimes Id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes Id_B \otimes Id_B)\circ\\
&\circ(Id_A \otimes Id_A \otimes Id_B \otimes \sigma_{B,A} \otimes Id_B) \circ (Id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes Id_B \otimes Id_A \otimes Id_B)\\
&\overset{(iii)}{=} (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (Id_A \otimes \mu_A \otimes Id_B \otimes \mu_B) \circ (Id_A \otimes Id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes Id_B \otimes Id_B)\circ\\
&\circ(Id_A \otimes Id_A \otimes Id_B \otimes \sigma_{B,A} \otimes Id_B) \circ (Id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes Id_B \otimes Id_A \otimes Id_B)\\
&= (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (Id_A \otimes \mu_A \otimes Id_B \otimes \mu_B) \circ (Id_A \otimes (Id_A \otimes \sigma_{B,A})\circ\\
&\circ(\sigma_{B,A} \otimes Id_A) \otimes Id_B \otimes Id_B) \circ (Id_A \otimes Id_B \otimes Id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes Id_B)\\
&\overset{(iv)}{=} (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (Id_A \otimes \mu_A \otimes Id_B \otimes \mu_B) \circ (Id_A \otimes \sigma_{B,A\otimes A} \otimes Id_B \otimes Id_B)\circ\\
&\circ(Id_A \otimes Id_B \otimes Id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes Id_B)\\
&\overset{(v)}{=} (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (Id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes \mu_B) \circ (Id_A \otimes Id_B \otimes \mu_A \otimes Id_B \otimes Id_B)\circ\\
&\circ(Id_A \otimes Id_B \otimes Id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes Id_B)\\
&= (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (Id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes Id_B) \circ (Id_A \otimes Id_B \otimes \mu_A \otimes \mu_B)\circ\\
&\circ(Id_A \otimes Id_B \otimes Id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes Id_B)\\
&= \mu_{A\otimes B} \circ (Id_A \otimes Id_B \otimes (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (Id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes Id_B))\\
&= \mu_{A\otimes B} \circ (Id_{A\otimes B} \otimes \mu_{A\otimes B}),
\end{aligned}
$$

sendo (*i*) e (*v*), respectivamente, das equações da naturalidade de σ, (*iv*) e (*ii*), respectivamente, dos diagramas da definição de uma categoria monoidal simétrica e a igualdade (*iii*) se dá pelos diagramas da associatividade de A e B.

Agora, vejamos que $\mu_{A\otimes B} \circ (Id_{A\otimes B} \otimes \eta_{A\otimes B}) = Id_{A\otimes B}$:

$$
\begin{aligned}
\mu_{A\otimes B} \circ (Id_{A\otimes B} \otimes \eta_{A\otimes B}) &= (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (Id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes Id_B) \circ (Id_A \otimes Id_B \otimes \eta_A \otimes \eta_B)\\
&= (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (Id_A \otimes \eta_A \otimes Id_B \otimes \eta_B)\\
&\overset{(vi)}{=} Id_A \otimes Id_B\\
&= Id_{A\otimes B},
\end{aligned}
$$

sendo que a igualdade (*vi*) se dá pelo diagrama da unidade de A e B. De forma análoga temos que $\mu_{A\otimes B} \circ (\eta_{A\otimes B} \otimes Id_{A\otimes B}) = Id_{A\otimes B}$. Sendo assim, da Definição 2.3.1, $A \otimes B$ é uma álgebra em $\mathscr{C}$.

(b) Novamente, da naturalidade de σ temos as seguintes equações:

$$\sigma_{C,D\otimes D} \circ (Id_C \otimes \Delta_D) = (\Delta_D \otimes Id_C) \circ \sigma_{C,D}$$

e

$$\sigma_{C\otimes C,D} \circ (\Delta_C \otimes Id_D) = (Id_D \otimes \Delta_C) \circ \sigma_{C,D}.$$

Definimos a comultiplicação e a counidade da seguinte forma:

$$\Delta_{C\otimes D} = (Id_C \otimes \sigma_{C,D} \otimes Id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D) \quad e \quad \varepsilon_{C\otimes D} = \varepsilon_C \otimes \varepsilon_D$$

Vejamos que $(\Delta_{C\otimes D} \otimes Id_{C\otimes D}) \circ (\Delta_{C\otimes D}) = (Id_{C\otimes D} \otimes \Delta_{C\otimes D}) \circ (\Delta_{C\otimes D})$. De fato,

$$
\begin{aligned}
&(\Delta_{C\otimes D} \otimes Id_{C\otimes D}) \circ (\Delta_{C\otimes D}) = (Id_C \otimes \sigma_{C,D} \otimes Id_D \otimes Id_C \otimes Id_D)\circ\\
&\circ(\Delta_C \otimes \Delta_D \otimes Id_C \otimes Id_D) \circ (Id_C \otimes \sigma_{C,D} \otimes Id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\\
&\quad \overset{(i)}{=} (Id_C \otimes \sigma_{C,D} \otimes Id_D \otimes Id_C \otimes Id_D) \circ (Id_C \otimes Id_C \otimes \sigma_{C,D\otimes D} \otimes Id_D)\circ\\
&\circ(\Delta_C \otimes Id_C \otimes \Delta_D \otimes Id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\\
&\quad \overset{(ii)}{=} (Id_C \otimes \sigma_{C,D} \otimes Id_D \otimes Id_C \otimes Id_D) \circ (Id_C \otimes Id_C\otimes\\
&(Id_D \otimes \sigma_{C,D}) \circ (\sigma_{C,D} \otimes Id_D) \otimes Id_D) \circ (\Delta_C \otimes Id_C \otimes \Delta_D \otimes Id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\\
&\quad = (Id_C \otimes \sigma_{C,D} \otimes Id_D \otimes Id_C \otimes Id_D) \circ (Id_C \otimes Id_C \otimes Id_D \otimes \sigma_{C,D} \otimes Id_D)\circ\\
&\circ(Id_C \otimes Id_C \otimes \sigma_{C,D} \otimes Id_D \otimes Id_D) \circ (\Delta_C \otimes Id_C \otimes \Delta_D \otimes Id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\\
&\quad \overset{(iii)}{=} (Id_C \otimes \sigma_{C,D} \otimes Id_D \otimes Id_C \otimes Id_D) \circ (Id_C \otimes Id_C \otimes Id_D \otimes \sigma_{C,D} \otimes Id_D)\circ\\
&\circ(Id_C \otimes Id_C \otimes \sigma_{C,D} \otimes Id_D \otimes Id_D) \circ (Id_C \otimes \Delta_C \otimes Id_D \otimes \Delta_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\\
&\quad = (Id_C \otimes Id_D \otimes Id_C \otimes \sigma_{C,D} \otimes Id_D) \circ (Id_C \otimes \sigma_{C,D} \otimes Id_C \otimes Id_D)\circ\\
&\circ(Id_C \otimes Id_C \otimes \sigma_{C,D} \otimes Id_D \otimes Id_D) \circ (Id_C \otimes \Delta_C \otimes Id_D \otimes \Delta_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\\
&\quad = (Id_C \otimes Id_D \otimes Id_C \otimes \sigma_{C,D} \otimes Id_D) \circ (Id_C \otimes (\sigma_{C,D} \otimes Id_C)\circ\\
&\circ(Id_D \otimes \sigma_{C,D}) \otimes Id_D \otimes Id_D) \circ (Id_C \otimes \Delta_C \otimes Id_D \otimes \Delta_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\\
&\quad \overset{(iv)}{=} (Id_C \otimes Id_D \otimes Id_C \otimes \sigma_{C,D} \otimes Id_D) \circ (Id_C \otimes \sigma_{C\otimes C,D} \otimes Id_D \otimes Id_D)\circ\\
&\circ(Id_C \otimes \Delta_C \otimes Id_D \otimes \Delta_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\\
&\quad \overset{(v)}{=} (Id_C \otimes Id_D \otimes Id_C \otimes \sigma_{C,D} \otimes Id_D) \circ (Id_C \otimes Id_D \otimes \Delta_C \otimes \Delta_D)\circ\\
&\circ(Id_C \otimes \sigma_{C,D} \otimes Id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\\
&\quad = (Id_{C\otimes D} \otimes \Delta_{C\otimes D}) \circ (\Delta_{C\otimes D}),
\end{aligned}
$$

sendo que (*i*) e (*iv*) se dão, respectivamente, das equações de naturalidade de σ. Já as igualdades (*ii*) e (*iv*) são resultados dos diagramas da definição de categoria monoidal simétrica. Por fim, a igualdade (*iii*) se dá pelo diagrama da comultiplicação das coálgebras C e D. Por último, vejamos que $(\varepsilon_{C\otimes D} \otimes Id_{C\otimes D}) \circ \Delta_{C\otimes D} = l^{-1}_{C\otimes D}$. De fato,

$$
\begin{aligned}
&(\varepsilon_{C\otimes D} \otimes Id_{C\otimes D}) \circ \Delta_{C\otimes D} = ((\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D) \otimes Id_C \otimes Id_D) \circ (Id_C \otimes \sigma_{C,D} \otimes Id_D)\circ\\
&\circ(\Delta_C \otimes \Delta_D)\\
&\quad = (\varepsilon_C \otimes Id_C \otimes \varepsilon_D \otimes Id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\\
&\quad = ((\varepsilon_C \otimes Id_C) \circ \Delta_C) \otimes ((\varepsilon_D \otimes Id_D) \circ \Delta_D)\\
&\quad \overset{(vi)}{=} l^{-1}_C \otimes l^{-1}_D\\
&\quad = l^{-1}_{C\otimes D},
\end{aligned}
$$

sendo (*vi*) resultado do diagrama da counidade de C e D. Portanto, da Definição 2.3.5, $C \otimes D$ é uma coálgebra em $\mathscr{C}$.

■

Proposição 2.4.2. *Sejam* $\mathscr{C} = (\mathscr{C}, \otimes, \mathbb{I}, \alpha, \sigma, l, r)$ *uma categoria monoidal simétrica (estrita) e* $(B, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ *objeto em* $\mathscr{C}$ *o qual é simultaneamente álgebra e coálgebra em* $\mathscr{C}$*. Então são equivalentes:*

(a) Δ *e* ε *são morfismos de álgebras.*

(b) μ *e* η *são morfismos de coálgebras.*

Demonstração. Primeiro se Δ e ε são morfismos de álgebras, então temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \mu_{B\otimes B} \circ (\Delta \otimes \Delta) &= (\mu \otimes \mu) \circ (Id_B \otimes \sigma_{B,B} \otimes Id_B) \circ (\Delta \otimes \Delta) \\ &= \Delta \otimes \mu \end{aligned} \tag{2}$$

$$\eta_{B\otimes B} = \eta \otimes \eta = \Delta \circ \eta \tag{3}$$

$$\mu_I \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon) = \varepsilon \circ \varepsilon \tag{4}$$

$$\eta_I = \varepsilon \circ \eta, \tag{5}$$

sendo que $\eta_I = Id_I$ e $\mu_I = l_I = r_I$. Já, se μ e η são morfismos de coálgebras temos,

$$\begin{aligned} \Delta \circ \mu &= (\mu \otimes \mu) \circ \Delta_{B\otimes B} \\ &= (\mu \otimes \mu) \circ (Id_B \otimes \sigma_{B,B} \otimes Id_B) \circ (\Delta \otimes \Delta) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\varepsilon \circ \mu = \varepsilon_{B\otimes B} = \varepsilon \otimes \varepsilon \tag{7}$$

$$\Delta \circ \eta = (\eta \otimes \eta) \circ \Delta_I \tag{8}$$

$$\varepsilon \circ \eta = \varepsilon_I, \tag{9}$$

no qual $\Delta_I = l_I^{-1} = r_I^{-1}$ e $\varepsilon_I = Id_I$. Vale ressaltar aqui que omitimos os isomorfismos $l_I^{-1} = r_I^{-1}$ e $l_I = r_I$ no Teorema anterior, quando definimos $\varepsilon_{B\otimes B} = \varepsilon \otimes \varepsilon$ e $\eta_{B\otimes B} = \eta \otimes \eta$. Vejamos agora as equivalências em questão.

(a) $\Rightarrow$ (b) De fato,

$$\begin{aligned} (\mu \otimes \mu) \circ \Delta_{B\otimes B} &= (\mu \otimes \mu) \circ (Id_B \otimes \sigma_{B,B} \otimes Id_B) \circ (\Delta \otimes \Delta) \\ &\overset{(2)}{=} \Delta \circ \mu \end{aligned}$$

e mais,

$$\varepsilon_{B\otimes B} = \varepsilon \otimes \varepsilon \overset{(4)}{=} \varepsilon \circ \mu,$$

logo μ é um morfismo de coálgebras. Agora,

$$(\eta \otimes \eta) \circ \Delta_I \overset{(3)}{=} \eta_{B\otimes B} = \Delta \circ \eta,$$

e

$$\varepsilon \circ \eta \overset{(5)}{=} \eta_I = Id_I = \varepsilon_I,$$

logo, η é um morfismo de coálgebras.
(b) $\Rightarrow$ (a) Vejamos agora que Δ e ε são morfismos de álgebras. De fato,

$$\begin{aligned}\mu_{B\otimes B} \circ (\Delta \otimes \Delta) &= (\mu \otimes \mu) \circ (Id_B \otimes \sigma_{B,B} \otimes Id_B) \circ (\Delta \otimes \Delta)\\ &\overset{(6)}{=} \Delta \circ \mu\end{aligned}$$

e

$$\eta_{B\otimes B} = \eta \otimes \eta \overset{(8)}{=} \Delta \circ \eta,$$

logo, Δ é um morfismo de álgebras. Por fim,

$$\varepsilon \circ \mu \overset{(7)}{=} \varepsilon_{B\otimes B} = \mu_I \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon)$$

e

$$\varepsilon \circ \eta \overset{(9)}{=} \varepsilon_I = Id_I = \eta_I,$$

assim, ε é um morfismo de álgebras. ■

Definição 2.4.3. ***(Biálgebra)*** *Sendo $\mathscr{C}$ uma categoria monoidal simétrica, dizemos que B é uma bialgebra em $\mathscr{C}$ se possui estrutura de álgebra e coálgebra e a comultiplicação e a counidade são morfismos de álgebras.*

Definição 2.4.4. *Sejam A e B duas biálgebras em $\mathscr{C}$. Dizemos que $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ é um morfismo de biálgebra se, simultaneamente, for um morfismo de álgebra e coálgebra.*

Exemplo 2.4.5. *Sendo G um grupo multiplicativo e $\Bbbk$ um corpo, a álgebra de grupo $\Bbbk G$ é uma biálgebra. Vejamos que os morfismos da Definição 2.3.7 são morfismos de álgebras. De fato, sejam $g,h \in \Bbbk G$,*

$$\begin{aligned}\mu_{\Bbbk G\otimes \Bbbk G} \circ (\Delta \otimes \Delta)(g \otimes h) &= \mu_{\Bbbk G\otimes \Bbbk G}(g \otimes g \otimes h \otimes h)\\ &= gh \otimes gh\end{aligned}$$

por outro lado, $\Delta \circ \mu(g \otimes h) = gh \otimes gh$ e portanto $\mu_{\Bbbk G\otimes \Bbbk G} \circ (\Delta \otimes \Delta) = \Delta \circ \mu$. Além disso,

$$\Delta \circ \eta(1_{\Bbbk}) = \Delta(1_{\Bbbk G}) = 1_{\Bbbk G} \otimes 1_{\Bbbk G} = \eta_{\Bbbk G\otimes \Bbbk G}(1_{\Bbbk}).$$

Sendo assim, Δ é um morfismo de álgebra. Com relação a ε temos,

$$\begin{aligned}\mu_{\Bbbk} \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon)(g \otimes h) &= \mu_{\Bbbk}(1_{\Bbbk} \otimes 1_{\Bbbk}) \\ &= 1_{\Bbbk}\end{aligned}$$

por outro lado, $\varepsilon \circ \mu(g \otimes h) = \varepsilon(gh) = 1_{\Bbbk}$. Logo, $\mu_{\Bbbk} \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon) = \varepsilon \circ \mu$. E mais,

$$\varepsilon \circ \eta_{\Bbbk G}(1_{\Bbbk}) = \varepsilon(1_{\Bbbk G}) = 1_{\Bbbk} = \eta_{\Bbbk}(1_{\Bbbk}).$$

Portanto, ε é um morfismo de álgebra e então $\Bbbk G$ é uma biálgebra.

Exemplo 2.4.6. *Em Set, todo monoide $(M, \#, \varepsilon_M)$ é uma biálgebra. De fato, sabemos que a categoria Set é monoidal trançada, sendo $\tau(a,b) = (b,a)$ e mais, todo monoide é uma álgebra e todo objeto é uma coálgebra em Set. Basta verificamos que Δ e ε, definidos no Exemplo 2.3.6, são morfismos de álgebra. Sejam $a,b \in M$, então temos:*

$$\begin{aligned}\mu_{M\times M} \circ (\Delta, \Delta)(a,b) &= \mu_{M\times M}(a, a, b, b) \\ &= (a\#b, a\#b) = \Delta \circ \mu(a, b)\end{aligned}$$

e

$$\Delta \circ \eta(*) = \Delta(\varepsilon_M) = (\varepsilon_M, \varepsilon_M) = \eta_{M\times M}(*),$$

sendo assim, Δ é um morfismo de álgebra. Vejamos agora que ε também o é,

$$\mu_{\{*\}} \circ (\varepsilon, \varepsilon)(a, b) = \mu_{\{*\}}(*, *) = * = \varepsilon \circ \mu(a, b)$$

e

$$\varepsilon \circ \eta(*) = \varepsilon(\varepsilon_M) = * = \eta_{\{*\}}(*).$$

Sendo assim ε é um morfismo de álgebra e portanto M é uma biálgebra em Set.

Vejamos uma outra caracterização para $\Bbbk$-biálgebras.

Teorema 2.4.7. *Seja B uma $\Bbbk$-álgebra. B é uma $\Bbbk$-biálgebra se, e somente se, a categoria de B-módulos à esquerda (${}_B\mathscr{M}$) é uma categoria monoidal e o funtor esquecimento $U : {}_B\mathscr{M} \to Vect_{\Bbbk}$ é um funtor monoidal estrito.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Por hipótese, B é uma $\Bbbk$-biálgebra, então $\Delta : B \to B \otimes B$ e $\varepsilon : B \to \Bbbk$ são morfismos de álgebra. Sejam $M, N \in {}_B\mathscr{M}$. Vejamos que o tensor de dois B-módulos é um B-módulo. De fato, definimos a ação $\cdot : B \otimes M \otimes N \to M \otimes N$ da seguinte forma, para quaisquer $a, b \in B$, $m \in M$ e $n \in N$:

$$a \cdot (m \otimes n) \coloneqq a_{(1)}m \otimes a_{(2)}n.$$

De fato,

$$(ab) \cdot (m \otimes n) = (ab)_{(1)}m \otimes (ab)_{(2)}n$$

$$\begin{aligned}
&= (a_{(1)}b_{(1)})m \otimes (a_{(2)}b_{(2)})n \\
&\overset{(i)}{=} a_{(1)}(b_{(1)}m) \otimes a_{(2)}(b_{(2)}n) \\
&= a \cdot (b_{(1)}m \otimes b_{(2)}n) \\
&= a \cdot (b \cdot (m \otimes n))
\end{aligned}$$

no qual (i) se dá pelo fato de M e N serem dois B-módulos à esquerda. E mais, $1_B \cdot (m \otimes n) = (1_B m \otimes 1_B n) = m \otimes n$. Além disso, $\Bbbk$ possui uma estrutura de B-módulo com a ação $a \triangleright \lambda \coloneqq \varepsilon(a)\lambda$ para todo $a \in B$ e $\lambda \in \Bbbk$:

$$(ab) \triangleright \lambda = \varepsilon(ab)\lambda = \varepsilon(a)\varepsilon(b)\lambda \overset{(ii)}{=} \varepsilon(a)(\varepsilon(b)\lambda) = a \triangleright (b \triangleright \lambda)$$

e

$$1_B \triangleright \lambda = \varepsilon(1_B)\lambda \overset{(iii)}{=} 1_{\Bbbk}\lambda = \lambda,$$

nos quais, (ii) e (iii) se dão pelo fato de ε ser um morfismo de álgebra.

Vejamos agora que os morfismos α,l_B e r_B são morfismos de B-módulos. Sejam $\lambda \in \Bbbk$, $a \in B$, $m \in M$, $n \in N$ e $p \in P$, com M, N e P B-módulos à esquerda,

- Com relação ao associador α temos:

$$\begin{aligned}
a \cdot ((m \otimes n) \otimes p) &= a_{(1)} \cdot (m \otimes n) \otimes a_{(2)}p \\
&= a_{(1)(1)}m \otimes a_{(1)(2)}n \otimes a_{(2)}p \\
&\overset{(iv)}{=} a_{(1)}m \otimes a_{(2)(1)}n \otimes a_{(2)(2)}p \\
&= a_{(1)}m \otimes a_{(2)} \cdot (n \otimes p) \\
&= a \cdot (m \otimes (n \otimes p))
\end{aligned}$$

  sendo a igualdade (iv) referente à coassociativdade de B.

- Referente ao l_B, temos:

$$\begin{aligned}
l_B(a \cdot (\lambda \otimes m)) &= l_B(a_{(1)} \triangleright \lambda \otimes a_{(2)}m) = a_{(1)} \triangleright \lambda a_{(2)}m \\
&= \varepsilon(a_{(1)})\lambda a_{(2)}m = \lambda\varepsilon(a_{(1)})a_{(2)}m \\
&\overset{(v)}{=} \lambda(a \cdot m) \\
&= a \cdot (\lambda m) = a \cdot l_{(B)}(\lambda \otimes m)
\end{aligned}$$

  no qual, (v) se dá pela counidade de B.

- Com relação à r_B temos:

$$\begin{aligned}
r_B(a \cdot (m \otimes \lambda)) &= r_B(a_{(1)}m \otimes a_{(2)} \triangleright \lambda) = a_{(1)}m\varepsilon(a_{(2)})\lambda \\
&= a_{(1)}m\varepsilon(a_{(2)})m\lambda \\
&\overset{(vi)}{=} a \cdot (m\lambda) = a \cdot r_B(m \otimes \lambda)
\end{aligned}$$

  no qual, (vi) se dá pela counidade de B.

Fica claro que os axiomas do pentágono e do triângulo são satisfeitos. Logo ${}_B\mathscr{M}$ é uma categoria monoidal. Vejamos que U é monoidal estrito. Sejam, M,N dois B-módulos à esquerda. Então,

$$U(M) \otimes_{\Bbbk} U(N) = M \otimes_{\Bbbk} N = U(M \otimes N)$$

($\Leftarrow$) Vejamos agora que B é uma biálgebra, isto é, definiremos ε e Δ tais que ambos sejam morfismos de álgebra. Como ${}_B\mathscr{M}$ é monoidal, temos que B é um B-módulo à esquerda, então $B \otimes B$ é um B-módulo à esquerda. Assim, podemos definir Δ e ε da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & B & \to & B \otimes B \\ & b & \mapsto & b \cdot (1_B \otimes 1_B) := b_{(1)} \otimes b_{(2)} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon : & B & \to & \Bbbk \\ & b & \mapsto & b \cdot 1_{\Bbbk} \end{array}$$

Mostraremos que Δ satisfaz a coassociatividade. Para isso, precisaremos definir o seguinte morfismo: sejam M e N dois B-módulos à esquerda e $m \in M$ e $n \in N$, então

$$\begin{array}{rccc} \rho_m : & B & \to & M \\ & b & \mapsto & b \cdot m \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \rho_n : & B & \to & N \\ & b & \mapsto & b \cdot n \end{array}$$

Afirmamos que ρ_m e ρ_n são morfismos de B-módulos à esquerda. De fato, sendo a,$b \in B$, então:

$$\rho_m(ab) = (ab) \cdot m = a(b \cdot m) = a\rho_m(b)$$

De forma análoga temos que ρ_n é um morfismo de B-módulo à esquerda. Além disso, definimos o seguinte morfismo:

$$\begin{array}{rccc} (\rho_m \otimes \rho_n) : & B \otimes B & \to & M \otimes N \\ & a \otimes b & \mapsto & a \cdot m \otimes b \cdot n \end{array}$$

Vejamos que $\rho_m \otimes \rho_n$ é um morfismo de B-módulo à esquerda. Sendo a,b,$c \in B$, temos:

$$\begin{aligned} (\rho_m \otimes \rho_n)(d \cdot (a \otimes b)) &= (\rho_m \otimes \rho_n)(da \otimes b) = (da) \cdot m \otimes b \cdot n \\ &= d \cdot (a \cdot m) \otimes b \cdot n = d \cdot (a \cdot m \otimes b \cdot n) \\ &= d \cdot (\rho_m \otimes \rho_n)(a \otimes b) \end{aligned}$$

Com isso temos:

$$b \cdot (m \otimes n) = b \cdot (\rho_m \otimes \rho_n)(1_B \otimes 1_B) = (\rho_m \otimes \rho_n)(b \cdot (1_B \otimes 1_B))$$

$$= (\rho_m \otimes \rho_n)(b_{(1)} \otimes b_{(2)}) = b_{(1)} \cdot m \otimes b_{(2)} \cdot n$$

Finalmente, Δ satisfaz a coassociatividade:

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes Id_B) \circ \Delta(b) &= (\Delta \otimes Id_B)(b_{(1)} \otimes b_{(2)}) \\
&= (b_{(1)(1)} \otimes b_{(1)(2)}) \otimes b_{(2)} \\
&= (b_{(1)} \cdot (1_B \otimes 1_B)) \otimes b_{(2)} \\
&= b \cdot ((1_B \otimes 1_B) \otimes 1_B) \\
&\overset{\alpha}{=} b \cdot (1_B(\otimes 1_B \otimes 1_B)) \\
&= b_{(1)} \otimes b_{(2)} \cdot (1_B \otimes 1_B) \\
&= b_{(1)} \otimes (b_{(2)(1)} \otimes b_{(2)(2)}) \\
&= (Id_B \otimes \Delta) \circ \Delta(b).
\end{aligned}$$

Agora, vejamos que Δ é um morfismo de álgebra:

$$\begin{aligned}
\Delta(ab) &= (ab) \cdot (1_B \otimes 1_B) = a \cdot (b \cdot (1_B \otimes 1_B)) = a \cdot (b_{(1)} \otimes b_{(2)}) \\
&= a \cdot (\rho_{b_{(1)}} \otimes \rho_{b_{(2)}})(1_B \otimes 1_B) = (\rho_{b_{(1)}} \otimes \rho_{b_{(2)}})(a \cdot (1_B \otimes 1_B)) \\
&= a_{(1)}b_{(1)} \otimes a_{(2)}b_{(2)} = (a_{(1)} \otimes a_{(2)})(b_{(1)} \otimes b_{(2)}) \\
&= \Delta(a)\Delta(b)
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\Delta(1_B) = (1_B \cdot 1_B \otimes 1_B \cdot 1_B) = 1_B \otimes 1_B.$$

Logo Δ é um morfismo de álgebra.

Vejamos agora que ε satisfaz a counidade. De fato, sendo $b \in B$ temos:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes Id_B) \circ \Delta(b) &= \varepsilon(b_{(1)})b_{(2)} = l_B(\varepsilon(b_{(1)} \otimes b_{(2)}) = l_B(b_{(1)} \cdot 1_{\Bbbk} \otimes b1_B) \\
&= l_B((\rho_{1_{\Bbbk}} \otimes \rho_{1_B})(b_{(1)} \otimes b_{(2)})) \\
&= l_B((\rho_{1_{\Bbbk}} \otimes \rho_{1_B})(b \cdot (1_B \otimes 1_B)) \\
&= b \cdot l_B((\rho_{1_{\Bbbk}} \otimes \rho_{1_B})(1_B \otimes 1_B)) = b \cdot l_B(1_{\Bbbk} \otimes 1_B) \\
&= b1_B = b
\end{aligned}$$

De forma análoga, temos que $(Id_B \otimes \varepsilon) \circ \Delta(b) = b$. Nos resta verificar que ε é um morfismo de álgebra:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(ab) &= (ab) \cdot 1_{\Bbbk} \\
&= a \cdot (b \cdot 1_{\Bbbk}) \\
&= a \cdot (\varepsilon(b)) \\
&= \varepsilon(a)\varepsilon(b)
\end{aligned}$$

e

$$\varepsilon(1_B) = 1_B \cdot 1_{\Bbbk} = 1_{\Bbbk}$$

Logo ε é morfismo de álgebra e assim B é uma $\Bbbk$-álgebra. ■

2.5 ÁLGEBRAS DE HOPF

Nessa seção toda construção será dada na categoria $Vect_{\Bbbk}$. Sejam (C,Δ,ε) uma coálgebra e (A,μ,η) uma álgebra. Vejamos que o espaço vetorial $Hom_{\Bbbk}(C,A)$ possui uma estrutura de álgebra associativa. Definimos a multiplicação e a unidade, $\forall f,g \in Hom_{\Bbbk}(C,A)$, da seguinte forma:

$$(f * g) \coloneqq \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta,$$

isto é, sendo $c \in C$, então:

$$(f * g)(c) = \sum f(c_{(1)})g(c_{(2)})$$

e

$$\mathbf{1} = \mu \circ \varepsilon,$$

isto é,

$$\begin{aligned}(f * \mathbf{1})(c) &= (f * \mu \circ \varepsilon)(c)\\ &= \sum f(c_{(1)})(\mu \circ \varepsilon(c_{(2)}))\\ &= \sum f(c_{(1)})\varepsilon(c_{(2)})1_A\\ &= \sum f(c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)})) = f(c).\end{aligned}$$

De forma análoga, $(\mu \circ \varepsilon) * f = f$. Como $Hom_{\Bbbk}(C,A)$ é um $\Bbbk$-espaço vetorial, para verificarmos que o mesmo é uma álgebra, basta mostrar a associatividade e a distributividade de *. De fato, sejam $f,g,h \in Hom_{\Bbbk}(C,A)$, $\lambda \in \Bbbk$ e $c \in C$, assim:

$$\begin{aligned}((f + \lambda g) * h)(c) &= (f + \lambda g)(c_{(1)})h(c_{(2)})\\ &= (f(c_{(1)}) + \lambda g(c_{(1)}))h(c_{(2)})\\ &= f(c_{(1)})h(c_{(2)}) + \lambda g(c_{(1)})h(c_{(2)})\\ &= (f * h)(c) + (\lambda g * h)(c)\\ &= (f * h + \lambda g * h)(c),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f * (g + \lambda h))(c) &= f(c_{(1)})(g + \lambda h)(c_{(2)})\\ &= f(c_{(1)})(g(c_{(2)}) + \lambda h(c_{(2)})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(c_{(1)})g(c_{(2)}) + \lambda f(c_{(1)})h(c_{(2)}) \\
&= (f * g)(c) + \lambda(f * h)(c) \\
&= (f * g + \lambda f * h)(c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(c) &= \sum (f * g)(c_{(1)})h(c_{(2)}) = \sum f(c_{(1)(1)})g(c_{(1)(2)})h(c_{(2)}) \\
&= \sum f(c_{(1)})g(c_{(2)})h(c_{(3)}) = \sum f(c_{(1)})(g * h)(c_{(2)}) \\
&= f * (g * h)(c)
\end{aligned}$$

A operação * é denominada por **convolução**. Considere agora $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra. Denotaremos $H^C = (H, \Delta, \varepsilon)$ a coálgebra e $H^A = (H, \mu, \eta)$ a estrutura de álgebra.

Fica claro que $Hom(H^C, H^A)$ é uma álgebra com a operação de convolução, sendo que, Id_H é um elemento de $Hom(H^C, H^A)$.

Definição 2.5.1. *Seja $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra. Uma aplicação linear $S : H^C \to H^A$ é dita antípoda de H se S é o elemento inverso de Id_H com respeito a operação convolução, ou seja, se*

$$S * Id_H = Id_H * S = \eta \circ \varepsilon$$

Definição 2.5.2. *Seja $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra. Se H possuir uma antípoda, então H é dita uma álgebra de Hopf. Na notação de Sweedler, $\forall h \in H$ temos:*

$$S(h_{(1)})h_{(2)} = h_{(1)}S(h_{(2)}) = \varepsilon(h)1_H$$

Definição 2.5.3. *Sejam H e K duas álgebras de Hopf. Uma transformação linear $f : H \to K$ é um morfismo de álgebras de Hopf se é um morfismo de biálgebras.*

Proposição 2.5.4. *Sejam H e K duas álgebras de Hopf com antípodas S_H e S_K. Se $f : H \to K$ é um morfismo de biálgebras, então $S_K \circ f = f \circ S_H$.*

Demonstração. Primeiramente, sabemos que $S_K \circ f, f \circ S_H \in Hom(H,K)$, isto é, ambos são elementos da álgebra $Hom(H,K)$, com o produto de convolução. Vejamos que $S_K \circ f$ e $f \circ S_H$ são inversíveis por f. De fato, $\forall h \in H$ temos:

$$\begin{aligned}
((S_K \circ f) * f)(h) &= (S_K \circ f)(h_{(1)})f(h_{(2)}) \\
&\overset{(i)}{=} S_K(f(h)_{(1)})f(h)_{(2)} \\
&= \varepsilon_K(f(h))1_K \\
&\overset{(ii)}{=} \varepsilon_H(h)1_K,
\end{aligned}$$

sendo que as igualdades (*i*) e (*ii*) são referentes do fato de f ser morfismo de cóalgebras. Por outro lado temos:

$$\begin{aligned}(f * (f \circ S_H))(h) &= f(h_{(1)})f(S_H(h_{(2)}))\\ &\overset{(iii)}{=} f(h_{(1)}S_H(h_{(2)}))\\ &= f(\varepsilon_H(h)1_H)\\ &= \varepsilon_H(h)f(1_H)\\ &\overset{(iv)}{=} \varepsilon_H(h)1_K,\end{aligned}$$

nas quais (*iii*) e (*iv*) se dão pelo fato de f ser um morfismo de álgebras. Pela unicidade do objeto inverso, $S_K \circ f = f \circ S_H$. ■

Proposição 2.5.5. *Seja H uma álgebra de Hopf e S sua antípoda. Então:*

(a) $S(hg) = S(g)S(h)$, $\forall g, h \in H$;

(b) $S(1_H) = 1_H$;

(c) $\Delta(S(h)) = S(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)})$;

(d) $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$.

Demonstração. (a) Consideremos $H \otimes H$ como uma coálgebra. Então podemos tomar a álgebra $Hom(H \otimes H, H)$, com a multiplicação dada pela convolução e a identidade definida por $\eta_H \circ \varepsilon_{H \otimes H}$, com $\varepsilon_{H\otimes H}$ definido no Teorema 2.4.1. Consideremos os seguintes morfismos $M, F, G : H \otimes H \to H$, definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}F(h \otimes g) &= S(g)S(h)\\ G(h \otimes g) &= S(hg)\\ M(h \otimes g) &= hg, \qquad \forall g,h \in H\end{aligned}$$

Mostremos que M é inversa à esquerda de F e à direita de G. De fato, sendo $g, h \in H$, temos:

$$\begin{aligned}(M * F)(h \otimes g) &= M((h \otimes g)_{(1)})F((h \otimes g)_{(2)})\\ &= M(h_{(1)} \otimes g_{(1)})F(h_{(2)} \otimes g_{(2)})\\ &= h_{(1)}g_{(1)}S(g_{(2)})S(h_{(2)})\\ &= h_{(1)}\varepsilon(g)1_H S(h_{(2)}\\ &= \varepsilon(g)h_{(1)}S(h_{(2)})\\ &= \varepsilon(g)\varepsilon(h)1_H = \varepsilon(h)\varepsilon(g)1_H\\ &= \varepsilon_{H\otimes H}(h \otimes g)1_H\\ &= \eta_H \circ \varepsilon_{H\otimes H}(h \otimes g),\end{aligned}$$

logo, $M * F = \eta_H \circ \varepsilon_{H\otimes H}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}(G * M)(h \otimes g) &= \eta_M \circ (G \otimes M) \circ \Delta(h \otimes g)\\ &= \eta_M \circ (G \otimes M)((h_{(1)} \otimes g_{(1)}) \otimes (h_{(2)} \otimes g_{(2)}))\\ &= G(h_{(1)} \otimes g_{(1)})M(h_{(2)} \otimes g_{(2)})\\ &= S(h_{(1)}g_{(1)})h_{(2)}g_{(2)}\\ &= S((hg)_{(1)})(h_{(2)}g_{(2)})\\ &= \varepsilon(hg)1_H\\ &= \varepsilon(h)\varepsilon(g)1_H\\ &= \eta_H \circ \varepsilon_{H\otimes H}(h \otimes g),\end{aligned}$$

sendo assim, $G * M = \eta_H \circ \varepsilon_{H\otimes H}$. Logo, pela unicidade do elemento inverso, $F = G$, isto é, para todo $g, h \in H$ temos:

$$S(g)S(h) = F(h \otimes g) = S(h)S(g)$$

(b) Sendo $h \in H$ qualquer,

$$\begin{aligned}S(1_H)h &= S(1_H)\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)} = S(1_H)\varepsilon(h_{(1)})1_H h_{(2)}\\ &= S(1_H)S(h_{(1)(1)})h_{(1)(2)}h_{(2)}\\ &= S(1_H)S(h_{(1)})h_{(2)}h_{(3)}\\ &\overset{(a)}{=} S(h_{(1)})h_{(2)}h_{(3)}\\ &= \varepsilon(h_{(1)})1_H h_{(2)} = \varepsilon(h_{(1)})h_{(2)}\\ &= h.\end{aligned}$$

De forma análoga temos que $hS(1_H) = h$. Da unicidade da unidade, temos que $S(1_H) = 1_H$.

(c) Tomando $Hom(H^C, H^A \otimes H^A)$ com $\eta_{H\otimes H} \circ \varepsilon_H$ a unidade da álgebra, sendo $\eta_{H\otimes H} = \eta_H \otimes \eta_H$. Sendo $h \in H$, consideremos $G, F : H^C \to H^A \otimes H^A$, definidos por:

$$F(h) = \Delta(S(h)) = S(h)_{(1)} \otimes S(h)_{(2)} \;\; e \;\; G(h) = (S \otimes S)(\Delta^{op}(h)) = S(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)})$$

Vejamos que $\Delta * F = G * \Delta = \eta_{H\otimes H} \circ \varepsilon_H$ e então $F = G$. De fato,

$$\begin{aligned}(\Delta * F)(h) &= \mu_H \circ (\Delta \otimes F) \circ \Delta(h)\\ &= \Delta(h_{(1)})F(h_{(2)})\\ &= \Delta(h_{(1)})\Delta(S(h_{(2)}))\\ &= \Delta(h_{(1)}S(h_{(2)}))\\ &= \Delta(\varepsilon_H(h)1_H)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon(h)\Delta(1_H) \\
&= \varepsilon(h)(1_H \otimes 1_H) \\
&= \eta_{H\otimes H} \circ \varepsilon(h)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos:

$$
\begin{aligned}
(G * \Delta)(h) &= G(h_{(1)})\Delta(h_{(2)}) \\
&= (S(h_{(1)(2)}) \otimes S(h_{(1)(1)}))(h_{(2)(1)} \otimes h_{(2)(2)}) \\
&= (S(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)}))(h_{(3)} \otimes h_{(4)}) \\
&= S(h_{(2)})h_{(3)} \otimes S(h_{(1)})h_{(4)} \\
&= S(h_{(2)(1)})h_{(2)(2)} \otimes S(h_{(1)})h_{(3)} \\
&= \varepsilon(h_{(2)})1_H \otimes S(h_{(1)})h_{(3)} \\
&= 1_H \otimes S(h_{(1)})\varepsilon(h_{(2)})h_{(3)} \\
&= 1_H \otimes S(h_{(1)})\varepsilon(h_{(2)(1)})h_{(2)(2)} \\
&= 1_H \otimes S(h_{(1)})h_{(2)} \\
&= 1_H \otimes \varepsilon(h)1_H = \eta_{H\otimes H} \circ \varepsilon_H(h)
\end{aligned}
$$

Sendo assim, da unicidade do elemento inverso temos que $F = G$, isto é, $\Delta(S(h)) = S(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)})$.

(d) Da definição da antípoda, sabemos que $h_1 S(h_{(2)}) = \varepsilon(h)1_H$. Aplicando ε em ambos os lados da igualdade temos:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(h_{(1)}S(h_{(2)})) &= \varepsilon(\varepsilon(h)1_H) && \Leftrightarrow \\
\varepsilon(h_{(1)})\varepsilon(S(h_{(2)})) &= \varepsilon(h)\varepsilon(1_H) && \Leftrightarrow \\
\varepsilon(\varepsilon(h_{(1)})S(h_{(2)})) &= \varepsilon(h) && \Leftrightarrow \\
\varepsilon(S(\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)})) &= \varepsilon(h) && \Leftrightarrow \\
\varepsilon(S(h)) &= \varepsilon(h)
\end{aligned}
$$

■

Proposição 2.5.6. *Seja H uma álgebra de Hopf com S sua antípoda. Então são equivalentes:*

(i) $S(h_{(2)})h_{(1)} = \varepsilon(h)1_H$;

(ii) $h_{(2)}S(h_{(1)}) = \varepsilon(h)1_H$;

(iii) $S \circ S = Id_H \quad \forall h \in H$.

Demonstração. ($i \Rightarrow ii$) Sabemos que Id_H é a inversa de S pela convolução. Mostremos então que $S \circ S$ é também inversa de Id_H e, pela unicidade do elemento inverso, teremos que $S \circ S = Id_H$. Seja $h \in H$. Então,

$$S * (S \circ S)(h) = S(h_{(1)})S(S(h_{(2)}))$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(a)}{=} S(S(h_{(2)})h_{(1)} \\
&= S(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(h)S(1_H) \\
&\overset{(b)}{=} \varepsilon(h)1_H = \eta \circ \varepsilon(h),
\end{aligned}$$

sendo (a) e (b) resultados da Proposição 4.3.6.

($iii \Rightarrow ii$) Sabemos que para todo $h \in H$ temos que $h_{(1)}S(h_{(2)}) = \varepsilon(h)1_H$. Aplicando S em ambos os lados da igualdade temos:

$$\begin{aligned}
S(h_{(1)}S(h_{(2)})) &= S(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(h)S(1_H) \\
&\overset{(c)}{=} \varepsilon(h)1_H,
\end{aligned}$$

no qual, (c) é novamente resultado da Proposição 4.3.6. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
S(h_{(1)}S(h_{(2)})) &= S(S(h_{(2)}))S(h_{(1)}) \\
&= h_{(2)}S(h_{(1)}) \\
&= \varepsilon(h)1_H
\end{aligned}$$

($ii \Rightarrow iii$) Mostremos que $S \circ S$ é inversa de S com a convolução e pela unicidade da inversa $S \circ S = Id_H$. Sendo $h \in H$ temos:

$$\begin{aligned}
((S \circ S) * S)(h) &= (S \circ S)(h_{(1)})S(h_{(2)}) \\
&= S(S(h_{(1)}))S(h_{(2)}) \\
&\overset{(d)}{=} S(h_{(2)}S(h_{(1)})) \\
&= S(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(h)(S(1_H)) \\
&\overset{(e)}{=} \varepsilon(h)1_H,
\end{aligned}$$

com (d) e (e) decorrentes da Proposição 4.3.6.

($iii \Rightarrow i$) De forma análoga, para todo $h \in H$, sabemos que $S(h_{(1)})h_{(2)} = \varepsilon(h)1_H$. Aplicando S em ambos os lados da igualdade temos:

$$\begin{gathered}
S(S(h_{(1)})h_{(2)}) = S(\varepsilon(h)1_H) \overset{(f)}{\Leftrightarrow} \\
S(h_{(2)})S(S(h_{(1)})) = \varepsilon(h)S(1_H) \overset{(g)}{\Leftrightarrow} \\
S(h_{(2)})h_{(1)} = \varepsilon(h)1_H,
\end{gathered}$$

com (f) e (g) resultantes da Proposição 4.3.6. ■

Exemplo 2.5.7. *Sendo $\Bbbk$ um corpo e G um grupo multiplicativo, a álgebra de grupo $\Bbbk G$ é uma álgebra de Hopf. De fato, do Exemplo 2.4.5 já sabemos que $\Bbbk G$ é uma biálgebra. Seja a seguinte aplicação linear:*

$$\begin{array}{rccc} S: & \Bbbk G & \to & \Bbbk G \\ & \delta_g & \mapsto & \delta_{g^{-1}} \end{array}$$

Vejamos que S é de fato uma antípoda, isto é, que $(S * Id_{\Bbbk G}) = (Id_{\Bbbk G} * S) = \eta \circ \varepsilon$. Sendo $g \in G$, temos:

$$\begin{aligned}(S * Id_{\Bbbk G})(\delta_g) &= S(\delta_g)\delta_g \\ &= \delta_{g^{-1}}\delta_g \\ &= \delta_\varepsilon \\ &= \eta(1_\Bbbk) \\ &= \eta \circ \varepsilon(\delta_g)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(Id_{\Bbbk G} * S)(\delta_g) &= \delta_g S(\delta_g) \\ &= \delta_g \delta_{g^{-1}} \\ &= \delta_\varepsilon \\ &= \eta(1_\Bbbk) \\ &= \eta \circ \varepsilon(\delta_g) \quad \forall g \in G\end{aligned}$$

Sendo assim, S é a antípoda e com isso $\Bbbk G$ é uma álgebra de Hopf.

Definição 2.5.8. *Sejam $\Bbbk$-espaço vetorial M e H uma $\Bbbk$-biálgebra. M é um H-módulo de Hopf à direita se possui estrutura à direita de H-módulo ($h \in H$ e $m \in M$, então $m \triangleleft h$) e estrutura de H-comódulo à direita, dada pela função*

$$\begin{array}{rccc} \rho: & M & \to & M \otimes H \\ & m & \mapsto & m_{(0)} \otimes m_{(1)} \end{array}$$

com a compatibilidade $\rho(m \triangleleft h) = \rho(m) \triangleleft h$, isto é, ρ é um morfismo de H-módulos à direita. Dizemos que, dados M,N dois H-módulos de Hopf à direita, $f : M \to N$ é um morfismo de H-módulos de Hopf à direita se f é simultaneamente morfismo de H-módulo à direita e H-comódulo à direita.

Podemos definir o lado da estrutura dos módulos de Hopf conforme a ação e coação, isto é, pode-se ter H-módulos à esquerda e H-comódulos à direita resultando, se existir a compatibilidade, em H-módulos de Hopf à esquerda-direita.

Com base na definição anterior, podemos construir uma categoria no qual os objetos são H-módulos de Hopf, com H uma $\Bbbk$-biálgebra, e os morfismos são morfismos de H-módulos de Hopf. Denotaremos a categoria dos H-módulos de Hopf à direita de $\mathscr{M}_H^H$.

Exemplo 2.5.9. *Sejam V um $\Bbbk$-espaço vetorial e H uma $\Bbbk$-biálgebra. Então $V \otimes H$ é um H-módulo à direita com a estrutura $(v \otimes h) \triangleleft g = v \otimes hg$ e um H-comódulo à direita com estrutura dada por $\rho_{V\otimes H}(v \otimes h) = v \otimes h_{(1)} \otimes h_{(2)}$, $\forall h, g \in H$ e $m \in M$. Vejamos que a relação de compatibilidade é satisfeita. De fato, sendo $v \in V$ e $h, g \in H$, temos:*

$$\begin{aligned}
\rho_{V\otimes H}((v \otimes h) \triangleleft g) &= \rho_{V\otimes H}(v \otimes hg)\\
&= v \otimes (hg)_{(1)} \otimes (hg)_{(2)}\\
&= v \otimes h_{(1)}g_{(1)} \otimes h_{(2)}g_{(2)}\\
&= ((v \otimes h_{(1)}) \triangleleft g_{(1)} \otimes h_{(2)}g_{(2)}\\
&= \rho_{V\otimes H}(v \otimes h) \triangleleft g
\end{aligned}$$

Com base no Exemplo 2.5.7, sendo H uma $\Bbbk$-biálgebra, podemos definir o funtor $(\_ \otimes H) : Vect_\Bbbk \to \mathscr{M}_H^H$, no qual

$$\begin{array}{cccc}
(_ \otimes H): & Vect_\Bbbk & \to & \mathscr{M}_H^H\\
& M & & M \otimes H\\
& f\big\downarrow & \mapsto & \big\downarrow f\otimes Id_H\\
& N & & N \otimes H
\end{array},$$

no qual f é um morfismo linear. Vejamos que $f \otimes Id_H$ é um morfismo de H-módulo de Hopf à direita, isto é, que f é um morfismo de H-(co)módulo à direita. De fato, sejam $m \in M$ e $g, h \in H$ temos:

$$\begin{aligned}
(f \otimes Id_H)((m \otimes h) \triangleleft g) &= f(m) \otimes hg\\
&= (f(m) \otimes h) \triangleleft g\\
&= ((f \otimes Id_H)(m \otimes h)) \triangleleft g,
\end{aligned}$$

logo, f é um morfismo de H-módulos à direita. Por fim,

$$\begin{aligned}
(\rho_{N\otimes Id_H}) \circ (f \otimes Id_H)(m \otimes h) &= (\rho_{N\otimes Id_H})(f(m) \otimes h)\\
&= f(m) \otimes h_{(1)} \otimes h_{(2)}\\
&= (f \otimes Id_H \otimes Id_H)(m \otimes h_{(1)} \otimes h_{(2)})\\
&= (f \otimes Id_H \otimes Id_H) \circ (\rho_{M\otimes Id_H})(m \otimes h),
\end{aligned}$$

portanto f é um morfismo de H-comódulos à direita e assim, f é um morfismo de H-módulos de Hopf à direita.

Definição 2.5.10. *Sejam H uma álgebra de Hopf e M um H-módulo de Hopf à direita. O conjunto*

$$M^{coH} = \{m \in M : \rho(m) = m \otimes 1_H\},$$

sendo ρ a coação de M. O subespaço vetorial M^{coH} de M é chamado de subespaço dos coinvariantes de M. Além disso, sendo $f : M \to N$ morfismo de H-comódulos e $m \in M^{coH}$ temos:

$$(f(m))_{(0)} \otimes (f(m))_{(1)} = f(m_{(0)}) \otimes m_{(1)} = f(m) \otimes 1_H, \tag{10}$$

isto é,

$$Im(f) \subseteq M^{coH}$$

Com isso, podemos definir o funtor $(\_)^{coH}$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccc} (\_)^{coH}: & \mathscr{M}_H^H & \to & Vect_{\Bbbk} \\ & M & & M^{coH} \\ & f\big\downarrow & \mapsto & \big\downarrow f|_{M^{coH}} \\ & N & & N^{coH} \end{array},$$

sendo f um morfismo de H-módulo de Hopf. Veja que $(f)^{coH} = f|_{M^{coH}}$ fica bem definido por conta da equação (10).

Teorema 2.5.11. *Seja H uma biálgebra. Então o funtor $\_ \otimes H$ é adjunto à esquerda do funtor $(\_)^{coH}$.*

Demonstração. Dividiremos a prova em duas partes. Na primeira parte mostraremos que existe a bijeção $Hom_{\mathscr{M}_H^H}(V \otimes H) \to Hom_{\Bbbk}(V, M^{coH})$ para quaisquer $V \in Vect_{\Bbbk}$ e $M \in \mathscr{M}_H^H$. Já na segunda parte será construído a unidade e a counidade da adjunção e verificado os triângulos da adjunção (ver Apêndice A.0.11).

De fato, sejam $V \in Vect_{\Bbbk}$ e $M \in \mathscr{M}_H^H$. Definimos o seguinte morfismo

$$\begin{array}{cccc} (\ \hat{}\ ): & Hom_{\mathscr{M}_H^H}(V \otimes H) & \to & Hom_{\Bbbk}(V, M^{coH}) \\ & f & \mapsto & \hat{f}(v) = f(v \otimes 1_H). \end{array} \tag{11}$$

Vejamos que $\hat{f}(v) \in M^{coH}$. Para todo $v \in V$ temos

$$\begin{aligned} \rho(\hat{f}(v)) &= \hat{f}(v)_{(0)} \otimes \hat{f}(v)_{(1)} \\ &= f(v \otimes 1_H)_{(0)} \otimes f(v \otimes 1_H)_{(1)} \\ &\overset{(i)}{=} f(v \otimes 1_H) \otimes 1_H \\ &= \hat{f}(v) \otimes 1_H, \end{aligned}$$

no qual (i) se dá justamente pelo fato de f ser um morfismo de H-módulos de Hopf à direita. Sendo assim, o morfismo (11) está bem definido. Definimos agora:

$$\begin{array}{cccc} (\ \tilde{}\ ): & Hom_{\Bbbk}(V, M^{coH}) & \to & Hom_{\mathscr{M}_H^H}(V \otimes H, M) \\ & g & \mapsto & \tilde{g}(v \otimes h) = g(v) \lhd h\,. \end{array} \tag{12}$$

Vejamos que (12) é um morfismo de módulos de Hopf à direita. De fato, sejam $v \in V$ e $h, k \in H$, então

$$\begin{aligned} \tilde{g}((v \otimes h) \triangleleft k) &= \tilde{g}(v \otimes hk) \\ &= g(v) \triangleleft (hk) \\ &= (g(v) \triangleleft h) \triangleleft k) \\ &= \tilde{g}(v \otimes h) \triangleleft k \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{g}(v \otimes h)) &= \rho(g(v) \triangleleft h) \\ &= (g(v))_{(0)} \triangleleft h_{(1)} \otimes (g(v))_{(1)} \triangleleft h_{(2)} \\ &= (g(v) \triangleleft h_{(1)}) \otimes 1_H h_{(2)} \\ &= \tilde{g}(v \otimes h_{(1)}) \otimes h_{(2)} \\ &= (\tilde{g} \otimes Id_H) \circ \rho(v \otimes h), \end{aligned}$$

sendo assim (12) é um morfismo de H-módulo de Hopf à direita e portanto bem definida. Mostraremos agora (11) é inversa de (12). De fato, sejam $v \in V$, $h \in H$, $g \in Hom_{\mathbb{k}}(V, M^{coH})$ e $f \in Hom_{\mathscr{M}_H^H}(V \otimes H)$. Então,

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{g}}(v) &= \tilde{g}(v \otimes 1_H) \\ &= g(v) \triangleleft 1_H = g(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{f}}(v \otimes h) &= \hat{f} \triangleleft h \\ &= f(v \otimes 1_H) \triangleleft h \\ &= f(v \otimes 1_H h) \\ &= f(v \otimes h) \end{aligned}$$

Sendo assim $Hom_{\mathscr{M}_H^H}(V \otimes H) \cong Hom_{\mathbb{k}}(V, M^{coH})$. Agora, construiremos a unidade e a counidade da adjunção e verificaremos que ambos satisfazem os triângulos da adjunção. De fato, sejam $\eta : Id_{Vect_{\mathbb{k}}} \Rightarrow (\_ \otimes H)^{coH}$, definida da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccc} \eta_V : & V & \rightarrow & (V \otimes H)^{coH} \\ & v & \mapsto & v \otimes 1_H \end{array}$$

e $\varepsilon : (\_)^{coH} \otimes H \Rightarrow Id_{\mathscr{M}_H^H}$ definida como

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon_V : & V^{coH} \otimes H & \rightarrow & V \\ & v \otimes h & \mapsto & v \triangleleft h. \end{array}$$

Sendo $V \in \mathscr{M}_H^H$, vejamos que ε_V é um morfismo de módulos de Hopf à direita, isto é, morfismo de H-(co)módulos à direita. Sejam $v \in V$ e $h, k \in H$, então

$$\begin{aligned}
\varepsilon_V((v \otimes h) \lhd k) &= \varepsilon_V(v \otimes hk)\\
&= v \lhd (hk)\\
&= (v \lhd h) \lhd k\\
&= \varepsilon_V(v \otimes h) \lhd k
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\rho(\varepsilon_V(v \otimes h)) &= \rho(v \lhd h)\\
&= v_{(0)} \lhd h_{(1)} \otimes v_{(1)} \lhd h_{(2)}\\
&= v \lhd h_{(1)} \otimes 1_H h_{(2)}\\
&= \varepsilon_V(v \otimes h_{(1)}) \otimes h_{(2)}\\
&= (\varepsilon_V \otimes Id_H) \circ \rho(v \otimes h),
\end{aligned}$$

logo, ε_V é um morfismo de H-módulos de Hopf à direita. Afirmamos que ε e η são transformações naturais, isto é, que os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[d, "f"'] & (V \otimes H)^{coH} \arrow[d, "(f \otimes Id_H)|_{(V \otimes H)^{coH}}"] \\
W \arrow[r, "\eta_W"'] & (W \otimes H)^{coH}
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
V^{coH} \otimes H \arrow[r, "\varepsilon_V"] \arrow[d, "f|_{V^{coH}} \otimes Id_H"'] & V \arrow[d, "f"] \\
W^{coH} \otimes H \arrow[r, "\varepsilon_W"'] & W.
\end{tikzcd}$$

De fato, para todo $v \in V$, sendo V e W $\mathbb{k}$-espaços vetoriais e $f : V \to W$ $\mathbb{k}$-linear, do primeiro diagrama temos:

$$\begin{aligned}
(f \otimes Id_H)|_{(V \otimes H)^{coH}} \circ \eta_V(v) &= (f \otimes Id_H)|_{(V \otimes H)^{coH}}(v \otimes 1_H)\\
&= f(v) \otimes 1_H\\
&= \eta_W(f(v))\\
&= \eta_W \circ f(v).
\end{aligned}$$

Agora, sendo $v \in V^{coH}$ e $f : V \to W$ um morfismo de H-módulos de Hopf, do segundo diagrama temos:

$$f \circ \varepsilon_V(v \otimes h) = f(v \lhd_V h)$$

$$
\begin{aligned}
&= f(v) \triangleleft_W h \\
&= \varepsilon_W(f(v) \otimes h) \\
&= \varepsilon_W \circ (f \otimes Id_H)(v \otimes h).
\end{aligned}
$$

Logo, η e ε são transformações naturais. Por fim, nos resta conferir as identidades do triângulo, isto é, dados $V \in Vect_{\Bbbk}$ e $N \in \mathscr{M}_H^H$ que $\varepsilon_{V\otimes H} \circ (\eta_V \otimes Id_H) = Id_{V\otimes H}$ e que $(\varepsilon_N)^{coH} \circ \eta_{(N)^{coH}} = Id_{(N)^{coH}}$. Para isso, sejam quaisquer $v \in V$, $n \in N$ e $h \in H$ tais que

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{V\otimes H} \circ (\eta_V \otimes Id_H)(v \otimes h) &= \varepsilon_{V\otimes H}((v \otimes 1_H) \otimes h) \\
&= (v \otimes 1_H) \triangleleft h \\
&= v \otimes h \\
&= Id_{V\otimes H}(v \otimes h)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon_N)^{coH} \circ \eta_{(N)^{coH}}(n) &= (\varepsilon_N)^{coH}(n \otimes 1_H) \\
&= n \triangleleft 1_H \\
&= n \\
&= Id_{(N)^{coH}}(n).
\end{aligned}
$$

Portanto, ε e η satisfazem as identidades do triângulo e assim obtemos a adjunção que gostaríamos. ■

Proposição 2.5.12. *Sendo H uma $\Bbbk$-biálgebra, funtor $\_ \otimes H : Vect_{\Bbbk} \to \mathscr{M}_H^H$ é fiel e cheio.*

Demonstração. Para isso, da Proposição A.0.14, o funtor $\_ \otimes H$ é fiel e cheio se, e somente se, a unidade da adjunção η_V construída no teorema anterior é bijetiva para todo $V \in Vect_{\Bbbk}$. Definimos o seguinte morfismo

$$
\begin{array}{rccc}
\theta_V : & (V \otimes H)^{coH} & \to & V \\
& \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \otimes h_i & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \varepsilon(h_i).
\end{array}
$$

Vejamos que $\theta_V = \eta_V^{-1}$ para todo $V \in Vect_{\Bbbk}$. De fato, para cada $v \in V$ temos

$$
\begin{aligned}
\theta_V \circ \eta_V(v) &= \theta_V(v \otimes 1_H) \\
&= v\varepsilon(1_H) \\
&= v 1_{\Bbbk} \\
&= v
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\eta_V \circ \theta_V \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes h_i \right) = \eta_V \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \varepsilon(h_i) \right)
$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i\varepsilon(h_i) \otimes 1_H. \tag{13}$$

Sabemos que $\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes h_i \in (V \otimes H)^{coH}$, então $\rho\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes h_i\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes (h_i)_{(1)} \otimes (h_i)_{(2)} = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes h_i \otimes 1_H$. Aplicando $Id_V \otimes \varepsilon \otimes Id_H$ em ambos os lados da igualdade temos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \varepsilon((h_i)_{(1)} \otimes (h_i)_{(2)} = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \varepsilon((h_i))_{(2)} \otimes 1_H \quad \Leftrightarrow \\
&\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes (\varepsilon(h_i))_{(1)}(h_i)_{(2)} = \sum_{i=1}^{n} v_i\varepsilon(h_i) \otimes 1_H \quad \Leftrightarrow \\
&\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes h_i = \sum_{i=1}^{n} v_i\varepsilon(h_i) \otimes 1_H.
\end{aligned}$$

Sendo assim, da igualdade anterior e de (13) temos que

$$\eta_V \circ \theta_V\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes h_i\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i\varepsilon(h_i) \otimes 1_H = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes h_i.$$

Portanto, temos que $\theta_V = \eta_V^{-1}$ para todo $V \in Vect_{\Bbbk}$. Logo η é um isomorfismo natural. ∎

Certamente surge a pergunta, quando o funtor $(\_)^{coH}$ é fiel e cheio? A primeira resposta que nos vem a cabeça é, basta que a unidade da adjunção citada anteriormente seja um isomorfismo natural. Mas afinal, quando isso acontece? A solução que temos aqui vem do Teorema Fundamental de Álgebras de Hopf. Antes, vejamos um lema que nos auxiliará posteriormente no Teorema:

Lema 2.5.13. *Dada a estrutura de H-módulo à esquerda e H-comódulo à direita descrita acima, existe um antimorfismo de álgebras entre $Hom_{_H\mathscr{M}^H}(H \otimes H, H \otimes H)$ com a multiplicação sendo a composição e $Hom_{\Bbbk}(H,H)$ com a multiplicação sendo a convolução.*

Demonstração. Seja $f \in Hom_{_H\mathscr{M}^H}(H \otimes H, H \otimes H)$. Definimos $\hat{f} : H \to H$ como

$$\hat{f}(h) = (Id_H \otimes \varepsilon)(f(1_H \otimes h)).$$

Além disso, para todo $f \in Hom_{\Bbbk}(H,H)$ definimos $\tilde{f} : H\otimes \to H \otimes H$ com

$$\tilde{f}(h \otimes k) = hf(k_{(1)}) \otimes k_{(2)}.$$

Vejamos que $\tilde{f}$ é um morfismo de H-módulos à esquerda e H-comódulos à direita para qualquer $f \in Hom_{\Bbbk}(H, H)$. De fato, sejam $l,h,k \in H$ tais que

$$\tilde{f}(l \triangleright (h \otimes k)) = \tilde{f}(lh \otimes k)$$

$$
\begin{aligned}
&= (lh)f(k_{(1)}) \otimes k_{(2)} \\
&= l \triangleright (hf(k_{(1)}) \otimes k_{(2)}) \\
&= l \triangleright \tilde{f}(h \otimes k).
\end{aligned}
$$

Agora

$$
\begin{aligned}
\rho_{H\otimes H}(\tilde{f}(h \otimes k)) &= \rho_{H\otimes H}(hf(k_{(1)}) \otimes k_{(2)}) \\
&= hf(k_{(1)}) \otimes k_{(2)(1)} \otimes k_{(2)(2)} \\
&= hf(k_{(1)(1)}) \otimes k_{(1)(2)} \otimes k_{(2)} \\
&= (\tilde{f} \otimes Id_H)(h \otimes k_{(1)} \otimes k_{(2)}) \\
&= (\tilde{f} \otimes Id_H) \circ \rho_{H\otimes H}(h \otimes k).
\end{aligned}
$$

Sendo assim, para qualquer $f \in Hom_{\Bbbk}(H, H)$ temos que $\tilde{f}$ é um morfismo de H-módulos à esquerda e H-comódulos à direita. Portanto fica bem definido os seguintes morfismos:

$$
\begin{array}{rccc}
(\hat{\_}) : & Hom_{{}_H\mathscr{M}^H}(H \otimes H, H \otimes H) & \to & Hom_{\Bbbk}(H, H) \\
& f & \mapsto & \hat{f}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccc}
(\tilde{\_}) : & Hom_{\Bbbk}(H, H) & \to & Hom_{{}_H\mathscr{M}^H}(H \otimes H, H \otimes H) \\
& g & \mapsto & \tilde{g}
\end{array}
$$

É fácil verificar que ambas aplicações são $\Bbbk$-lineares. Vejamos que ambas são mutualmente inversíveis. Sejam $g \in Hom_{\Bbbk}(H, H)$ e $h \in H$, então

$$
\begin{aligned}
\hat{\tilde{g}}(h) &= (Id_H \otimes \varepsilon)(\tilde{g}(1_H \otimes h)) \\
&= (Id_H \otimes \varepsilon)(g(h_{(1)} \otimes h_{(2)}) \\
&= g(h(1))\varepsilon(h_{(2)}) \\
&= g(h).
\end{aligned}
$$

Agora, sendo $f \in Hom_{{}_H\mathscr{M}^H}(H \otimes H, H \otimes H)$ e $h \otimes k \in H \otimes H$, então

$$
\begin{aligned}
\tilde{\hat{f}}(h \otimes k) &= h\hat{f}(k_{(1)}) \otimes k_{(2)} \\
&= h((Id_H \otimes \varepsilon)(f(1_H \otimes k_{(1)}))) \otimes k_{(2)} \\
&= h \triangleright ((Id_H \otimes \varepsilon)(f(1_H \otimes k_{(1)})) \otimes k_{(2)}) \\
&= h \triangleright ((Id_H \otimes \varepsilon \otimes Id_H)(f(1_H \otimes k_{(1)}) \otimes k_{(2)})) \\
&= h \triangleright ((Id_H \otimes \varepsilon \otimes Id_H)(f \otimes Id_H)\rho_{H\otimes H}(1_H \otimes k)) \\
&= h \triangleright ((Id_H \otimes \varepsilon \otimes Id_H)(f \otimes Id_H)(Id_H \otimes \Delta)(1_H \otimes k)) \\
&= h \triangleright ((Id_H \otimes Id_H)f(1_H \otimes k)) \\
&= h \triangleright f(1_H \otimes k) \\
&= f(h \otimes k).
\end{aligned}
$$

Resta verificar que ambos são anti-multiplicativos. Mas como os morfismos são inversos, basta mostrarmos somente que um é anti-multiplicativo. De fato, sejam $f,g \in Hom_{\Bbbk}(H,H)$ e $h \otimes k \in H \otimes H$. Então

$$\begin{aligned}
\widetilde{f * g}(h \otimes k) &= h(f * g(k_{(1)})) \otimes k_{(2)} \\
&= h(f(k_{(1)(1)})g(k_{(1)(2)})) \otimes k_{(2)} \\
&= hf(k_{(1)})g(k_{(2)}) \otimes k_{(3)} \\
&= \tilde{g}(hf(k_{(1)}) \otimes k_{(2)}) \\
&= (\tilde{g} \circ \tilde{f})(h \otimes k).
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.5.14. ***(Teorema Fundamental de Álgebras de Hopf)*** *Seja H uma $\Bbbk$-biálgebra. Então é equivalente:*

(i) H é uma álgebra de Hopf;

(ii) $(\_)^{coH}$ é fiel e cheio;

(iii) $\_ \otimes H$ é uma equivalência de categorias.

(iv) A aplicação canônica $can : H \otimes H \to H$, definida por $can(h \otimes k) = hk_{(1)} \otimes k_{(2)}$ é bijetora.

Demonstração. ($i \Rightarrow ii$) Basta verificarmos, da Proposição A.0.14, que da adjunção anterior a counidade ε é um isomorfismo natural. Sendo H uma álgebra de Hopf, por hipótese, definimos para $M \in \mathscr{M}_H^H$ e S sendo a antípoda de H

$$\begin{array}{rccc}
\psi_M : & M & \to & M^{coH} \otimes H \\
& m & \mapsto & m^{(0)} \triangleleft S(m^{(1)}) \otimes m^{(2)}.
\end{array}$$

Aqui colocaremos os índices da notação de Sweedler para comódulos na parte superior do elemento, para que não haja confusão com os índices referentes à Δ.

Vejamos que ψ_M está bem definida, isto é, $Im(\psi_M) \subseteq M^{coH} \otimes H$. Para isso, basta verificarmos que

$$\rho_M(m^{(0)}) \triangleleft S(m^{(1)}) = m^{(0)} \triangleleft S(m^{(1)}) \otimes 1_H.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\rho_M(m^{(0)} \triangleleft S(m^{(1)})) &= (m^{(0)(0)} \triangleleft S(m^{(1)}))_{(1)} \otimes m^{(0)(1)} S(m^{(1)})_{(2)} \\
&= m^{(0)} \triangleleft S(m^{(1)}_{(2)})_{(1)} \otimes m^{(1)}_{(1)} S(m^{(1)}_{(2)})_{(2)} \\
&= m^{(0)} \triangleleft S(m^{(1)}_{(2)(2)}) \otimes m^{(1)}_{(1)} S(m^{(1)}_{(2)(1)}) \\
&= m^{(0)} \triangleleft S(m^{(1)}_{(3)}) \otimes m^{(1)}_{(1)} S(m^{(1)}_{(2)})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= m^{(0)} \triangleleft S(\varepsilon(m^{(1)}_{(1)})m^{(1)}_{(2)}) \otimes 1_H \\
&= m^{(0)} \triangleleft S(m^{(1)}) \otimes 1_H.
\end{aligned}
$$

Logo, $m^{(0)} \triangleleft S(m^{(1)}) \in M^{coH}$, e assim, $Im(\psi_M) \subseteq M^{coH} \otimes H$ e portanto ψ_M fica bem definida. Afirmamos que $\psi_M = \eta_M^{-1}$. De fato, seja $m \in M$, então

$$
\begin{aligned}
\eta_M \circ \psi_M(m) &= \eta_M((m^{(0)} \triangleleft S(m^{(1)})) \otimes m^{(2)}) \\
&= (m^{(0)} \triangleleft S(m^{(1)})) \triangleleft m^{(2)} \\
&= m^{(0)} \triangleleft (S(m^{(1)})m^{(2)}) \\
&= m^{(0)}\varepsilon(m^{(1)}) \\
&= m,
\end{aligned}
$$

por outro lado, sendo $m \otimes h \in M^{coH} \otimes H$ temos

$$
\begin{aligned}
\psi_M \circ \eta_M(m \otimes h) &= \psi_M(m \triangleleft h) \\
&= (m \triangleleft h)^{(0)} \triangleleft S((m \triangleleft h)^{(1)}) \otimes (m \triangleleft h)^{(2)} \\
&\overset{(a)}{=} (m^{(0)} \triangleleft h_{(1)}) \triangleleft S(m^{(1)}h_{(2)})) \otimes m^{(2)}h_{(3)} \\
&\overset{(b)}{=} ((m \triangleleft h_{(1)}) \triangleleft S(h_{(2)})) \otimes h_{(3)} \\
&= (m \triangleleft (h_{(1)}S(h_{(2)})) \otimes h_{(3)} \\
&= m \triangleleft \varepsilon(h_{(1)})1_H \otimes h_{(2)} \\
&= m \otimes h,
\end{aligned}
$$

sendo que (a) se dá pela relação de compatibilidade e (b) pela definição de $m \otimes h \in M^{coH} \otimes H$. Por fim, mostremos que ψ é uma transformação natura. Para isso, sejam $N \in \mathscr{M}_H^H$, $f : M \to N$ morfismo de H-módulos de Hopf e $m \in M$

$$
\begin{aligned}
(f|_{M^{coH}} \otimes Id_H) \circ \psi_M(m) &= (f|_{M^{coH}} \otimes Id_H)(m^{(0)} \triangleleft_M S(m^{(1)}) \otimes m^{(2)}) \\
&= f(m^{(0)} \triangleleft_M S(m^{(1)})) \otimes m^{(2)} \\
&= f(m^{(0)}) \triangleleft_N S(m^{(1)}) \otimes m^{(2)} \\
&\overset{(c)}{=} f(m^{(0)}) \triangleleft_N S(f(m^{(1)})) \otimes f(m^{(2)}) \\
&= f(m)^{(0)} \triangleleft_N S(f(m)^{(1)}) \otimes f(m)^{(2)} \\
&= \psi_N \circ f(m),
\end{aligned}
$$

no qual a igualdade (c) é referente a equação (10). Sendo M e N módulos de Hopf quaisquer, temos que ψ é uma transformação natural.

$(ii \Rightarrow iii)$ Da Proposição 2.5.12 temos que o funtor $\_ \otimes H$ é fiel e cheio e por hipótese, temos que $(\_)^{coH}$ também o é. Assim, da Proposição A.0.14 temos que existe uma equivalência categórica entre $Vect_{\Bbbk}$ e $\mathscr{M}_H^H$.

($iii \Rightarrow iv$) Consideremos o $\Bbbk$-espaço vetorial $H \otimes H$ com estrutura de H-módulo à direita dada por:

$$(h \otimes k) \cdot l = hl_{(1)} \otimes kl_{(2)},$$

isto é, dados $h, k, l, q \in H$ temos:

$$\begin{aligned}(h \otimes k) \cdot (lq) &= h(lq)_{(1)} \otimes k(lq)_{(2)} \\ &= h(l_{(1)}q_{(1)}) \otimes k(l_{(2)}q_{(2)}) \\ &= (hl_{(1)})q_{(1)} \otimes (kl_{(2)})q_{(2)} \\ &= ((hl_{(1)}) \otimes (kl_{(2)})) \cdot q \\ &= ((h \otimes k) \cdot l) \cdot q\end{aligned}$$

e a estrutura de H-comódulo à direita dada por:

$$\rho_{H\otimes H}(h \otimes k) = h \otimes k_{(1)} \otimes k_{(2)}.$$

Vejamos que $H \otimes H$, com as estruturas descritas acima, é um H-módulo de Hopf, isto é, que satistisfazem a relação de compatibilidade. Sejam $h, k, l \in H$ tais que

$$\begin{aligned}\rho_{H\otimes H}((h \otimes k) \cdot l) &= \rho_{H\otimes H}(hl_{(1)} \otimes kl_{(2)}) \\ &= hl_{(1)} \otimes (kl_{(2)})_{(1)} \otimes (kl_{(2)})_{(2)} \\ &= hl_{(1)} \otimes k_{(1)}l_{(2)(1)} \otimes k_{(2)}l_{(2)(2)} \\ &= hl_{(1)} \otimes (k_{(1)} \otimes k_{(2)}) \cdot l_{(2)} \\ &= (h \otimes k_{(1)} \otimes k_{(2)}) \cdot l \\ &= \rho_{H\otimes H}(h \otimes k) \cdot l.\end{aligned}$$

Logo $H \otimes H$ é um H-comódulo de Hopf com as estruturas acima. Como, por hipótese, a unidade η_H e a counidade $\varepsilon_{H\otimes H}$ do Teorema 2.5.11 são isomorfismos naturais (equivalência de categorias). Mostremos que $can : H \otimes H \to H$ é igual à $\varepsilon_{H\otimes H} \circ (\eta_H \otimes Id_H)$. Sejam $h \otimes k \in H \otimes H$, então

$$\begin{aligned}\varepsilon_{H\otimes H} \circ (\eta_H \otimes Id_H)(h \otimes k) &= \varepsilon_{H\otimes H}(h \otimes 1_H \otimes k) \\ &= (h \otimes 1_H) \cdot k \\ &= hk_{(1)} \otimes k_{(2)} \\ &= can(h \otimes k).\end{aligned}$$

Sendo a composição $\varepsilon_{H\otimes H} \circ (\eta_H \otimes Id_H)$ um isomorfismo, temos que can é um isomorfismo.

($iv \Rightarrow i$) Para que H seja uma álgebra de Hopf, precisamos construir uma antípoda. Da mesma forma que definimos na ação e a coação de H em $V \otimes H$, para $V \in Vect_{\Bbbk}$, nós podemos definir a ação e coação de H em $H \otimes H$. Aqui faremos uma única mudança, a ação será a multiplicação à esquerda, isto é, teremos uma estrutra de H-módulo à esquerda. Denotaremos a ação por $\triangleright$. Afirmamos que *can* é um morfismo de H-módulo à esquerda e H-comódulo à direita. De fato, sejam $h, l, k \in H$. Então

$$\begin{aligned} can(k \triangleright (h \otimes l)) &= can(kh \otimes l) \\ &= (kh)l_{(1)} \otimes l_{(2)} \\ &= k(hl_1) \otimes l_{(2)} \\ &= k \triangleright (can(h \otimes l)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (can \otimes Id_H) \circ \rho_{H \otimes H}(h \otimes k) &= can \otimes Id_H(h \otimes k_{(1)} \otimes k_{(2)}) \\ &= hk_{(1)} \otimes k_{(2)} \otimes k_{(3)}, \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} \rho_{H \otimes H} \circ can(h \otimes k) &= \rho_{H \otimes H}(hk_{(1)} \otimes h_{(2)}) \\ &= hk_{(1)} \otimes k_{(2)} \otimes k_{(3)}. \end{aligned}$$

Sendo assim, *can* é um morfismo de H-módulos à esquerda e H-comódulos à direita, isto é, *can* é um morfismo de H-módulos de Hopf à esquerda-direita. Aplicando o morfismo $(\hat{\_})$ do Lema **??** em *can* temos:

$$\begin{aligned} \widehat{can}(h) &= (Id_H \otimes \varepsilon)can(1_H \otimes h) \\ &= (Id_H \otimes \varepsilon)(h_{(1)} \otimes h_{(2)}) \\ &= h_{(1)} \otimes \varepsilon(h_{(2)}) \\ &= h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)}) \\ &= h. \end{aligned}$$

Sendo *can* bijetora, isto é, inversível, e $(\hat{\_})$ associa *can* com Id_H, temos que Id_H é invertível pelo produto convolução, isto é, existe uma antípoda que faz com que H seja uma álgebra de Hopf. ■

3 ENDS E COENDS

Neste capítulo, teremos como objetivo inicial definir a categoria Tan a partir de uma categoria $\Bbbk$ linear abeliana $\mathscr{C}$ e um funtor aditivo fiel e exato $\omega : \mathscr{C} \to Vect_{\Bbbk}$. Posterior a isto, iremos introduzir e caracterizar os objetos *end* e *coend* de um bifuntor. Todo esse capítulo será embasado em (SCHAUENBURG, 1992).

A partir de agora composições de funtores ao invés de serem escritos como $F \circ G$ deixaremos apenas como FG. Assim como a composição vertical de duas transformações naturais $\zeta \circ \varphi = \zeta\varphi$.

Definição 3.0.1. *A categoria Tan possui objetos os pares $(\mathscr{C}, \omega)$ nos quais, $\mathscr{C}$ é uma categoria $\Bbbk$ linear abeliana e $\omega : \mathscr{C} \to Vect_{\Bbbk}^{(f)}$ um funtor aditivo fiel e exato. Definimos os morfismos em Tan como, dados os objetos $(\mathscr{C}, \omega)$ e $(\mathscr{C}', \omega')$, classes de equivalência $[F, \zeta]$ de pares (F, ζ) sendo $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ funtor e $\zeta : \omega \Rightarrow \omega' F$ um isomorfismo natural.*

(F, ζ) e (G, ϑ) são equivalentes se, e somente se, existe um isomorfismo natural $\varphi : F \Rightarrow G$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r, Rightarrow, "\zeta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\vartheta"'] & \omega' F \arrow[d, Rightarrow, "\omega'\varphi"] \\ & \omega' G. \end{tikzcd}$$

Neste caso, nós dizemos que $(F, \zeta) \overset{\mathscr{L}}{\sim} (G, \vartheta)$. A composição de morfismos fica definida por

$$[F, \zeta] \circ [G, \vartheta] = [FG, (\zeta_G)\vartheta].$$

Observação 3.0.2. *A categoria $\underline{Tan}_0$ possui os mesmos objetos que Tan, mas os morfismos são somente os funtores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ que satisfaçam $\omega = \omega' F$.*

Vejamos a seguir um Lema que torna a definição de Tan razoável.

Lema 3.0.3. *Sejam $(\mathscr{C}, \omega), (\mathscr{C}', \omega') \in$ Tan e o morfismo $[F,\zeta] : (\mathscr{C}, \omega) \to (\mathscr{C}', \omega')$. Então $[F,\zeta]$ é um isomorfismo em Tan se, e somente se, F é uma equivalência categórica.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Suponhamos, sem perda de generalidade, que $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ seja uma equivalência categórica. Seja também $G : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ adjunto à direita de F. Da Proposição A.0.14 a unidade $\eta : Id_{\mathscr{C}} \Rightarrow GF$ e a counidade $\varepsilon : FG \Rightarrow Id_{\mathscr{C}'}$ são isomorfismos naturais.

Definimos a seguinte transformação natural:

$$\gamma = (\omega' \overset{\omega'(\varepsilon^{-1})}{\Longrightarrow} \omega' FG \overset{\zeta_G^{-1}}{\Longrightarrow} \omega G).$$

Primeiro temos que, sendo $X, Y \in \mathscr{C}$ e $f : X \to Y$ morfismo em $\mathscr{C}$ temos que:

$$
\begin{aligned}
\omega' FG(f) \circ \omega'(\varepsilon_X^{-1}) &= \omega^{-1}(FG(f) \circ \varepsilon_X^{-1}) \\
&= \omega'(\varepsilon_Y^{-1} \circ Id_{\mathscr{C}}(f)) \\
&= \omega'(\varepsilon_Y^{-1} \circ f) \\
&= \omega'(\varepsilon_Y^{-1}) \circ \omega'(f),
\end{aligned}
$$

isto é, $\omega'(\varepsilon^{-1})$ é uma transformação natural. Fica claro que $\omega'(\varepsilon^{-1})$ é um isomorfismo natural pois ε^{-1} o é.

Sendo γ uma composição de isomorfismos naturais, temos que o mesmo é um isomorfismo natural. Vejamos que $[G,\gamma] : (\mathscr{C}', \omega') \to (\mathscr{C}, \omega)$ é o inverso de $[F,\zeta]$ em $\underline{Tan}$. De fato,

$$
\begin{aligned}
(G,\gamma) \circ (F,\zeta) &= (GF,(\gamma_F)\zeta) \\
&= (GF,((\zeta_G^{-1})(\omega'(\varepsilon^{-1}))_F)\zeta) \\
&= (GF,(\zeta_{GF}^{-1})(\omega'(\varepsilon_F^{-1}))\zeta) \\
&\overset{(i)}{=} (GF,(\zeta_{GF}^{-1})(\omega' F\eta)\zeta) \\
&\overset{(ii)}{=} (GF,\omega\eta) \\
&\overset{\eta^{-1}}{\sim} (Id_{\mathscr{C}},1_\omega)
\end{aligned}
$$

sendo (i) referente ao primeiro triângulo da adjunção, já a igualdade (ii) se dá pela naturalidade de ζ e a transformação natural $1_\omega : \omega \Rightarrow \omega$. Logo $[G,\gamma] \circ [F,\zeta] = [Id_{\mathscr{C}},1_\omega]$. Por outro lado temos,

$$
\begin{aligned}
(F,\zeta) \circ (G,\gamma) &= (FG, \zeta_G\gamma) \\
&= (FG, \zeta_G\zeta_G^{-1}\omega'\varepsilon^{-1}) \\
&= (FG, \omega'\varepsilon^{-1}) \\
&\overset{\varepsilon}{\sim} (Id_{\mathscr{C}'},1_{\omega'})
\end{aligned}
$$

no qual $1_{\omega'} : \omega' \Rightarrow \omega'$. Sendo assim, $[F,\zeta] \circ [G,\gamma] = [Id_{\mathscr{C}'}, 1_{\omega'}]$.

($\Rightarrow$) Da hipótese, $[F,\zeta]$ é um isomorfismo em $\underline{Tan}$, isto é, existe o morfismo $[G,\gamma] : (\mathscr{C}', \omega') \to (\mathscr{C}, \omega)$ tal que:

$$
\begin{aligned}
[F,\zeta] \circ [G,\gamma] &= [Id_{\mathscr{C}'}, 1_{\omega'}] \\
[G,\gamma] \circ [F,\zeta] &= [Id_{\mathscr{C}}, 1_\omega].
\end{aligned}
$$

Das classes de equivalência e das equações acima temos os seguintes resultados:

(a) $(FG, \zeta_G\gamma) \sim (Id_{\mathscr{C}'}, 1_{\omega'})$, então existe o isomorfismo natural $FG \cong Id_{\mathscr{C}'}$;

(b) $(GF, \gamma_F\zeta) \sim (Id_{\mathscr{C}}, 1_\omega)$, então existe o isomorfismo natural $GF \cong Id_{\mathscr{C}}$, e da Proposição A.0.14 temos que F é uma equivalência categórica. ■

Definição 3.0.4. *Sejam as categorias $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ e os bifuntores $F, G : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to \mathscr{D}$. Uma transformação dinatural de F e G, denotada por $\alpha : F \overset{\bullet}{\Rightarrow} G$, consiste em uma coleção de morfismos $\alpha_X : F(X,X) \to G(X,X)$ tal que para todo morfismo $f : X \to Y$ em $\mathscr{C}$ o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
 & F(X,X) \arrow[r, "\alpha_X"] & G(X,X) \arrow[dr, "G(Id_X{,}f)"] & \\
F(Y,X) \arrow[ur, "F(f{,}Id_X)"] \arrow[dr, "F(Id_Y{,}f)"'] & & & G(X,Y). \\
 & F(Y,Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & G(Y,Y) \arrow[ur, "G(f{,}Id_Y)"'] &
\end{tikzcd}$$

Observação 3.0.5. *Um caso particular de transformação dinatural é quando F é um bifuntor constante, isto é, $F : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to D$ sendo $D \in \mathscr{D}$. Neste caso a transformação dinatural é a família $\alpha_X : D \to G(X,X)$ tal que para todo morfismo $f : X \to Y$ em $\mathscr{C}$ o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\alpha_Y"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & G(Y,Y) \arrow[d, "G(f{,}Id_Y)"] \\
G(X,X) \arrow[r, "G(Id_X{,}f)"'] & G(X,Y).
\end{tikzcd}$$

*Denotamos tal transformação dinatural de uma constante para um bifuntor de **wedge**.*

*Dualmente, um **cowedge** é a família $\alpha_X : F(X,X) \to D$ tal que para qualquer morfismo $f : X \to Y$ em $\mathscr{C}$, o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
F(Y,X) \arrow[r, "F(Id_Y{,}f)"] \arrow[d, "F(f{,}Id_X)"'] & F(Y,Y) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\
F(X,X) \arrow[r, "\alpha_X"'] & D.
\end{tikzcd}$$

Definição 3.0.6. *Sejam $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ duas categorias e $H : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um bifuntor. O **end** de H consiste no objeto $E \in \mathscr{D}$ juntamente com a transformação dinatural $\alpha : E \overset{\bullet}{\Rightarrow} H$*

sendo, de forma simplificada, $E : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um funtor constante definido por $E(X,Y) = E, \forall X, Y \in \mathscr{C}$ e $E(f,g) = Id_E$, tal que para toda transformação dinatural $\beta : X \overset{\bullet}{\Rightarrow} H$ existe um único morfismo $h : X \to E$ em $\mathscr{D}$ de tal forma que $\beta_C = \alpha_C \circ h$ para todo $C \in \mathscr{C}$.

Denotamos o end de H por $E = \int_{C\in\mathscr{C}} H(C,C)$. Explicitando a universalidade, temos para qualquer $f : B \to A$ o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\exists! h"] \arrow[rrd, bend left, "\beta_B"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_A"'] & & \\
& \int_{C\in\mathscr{C}} H(C,C) \arrow[r, "\alpha_B"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & H(B,B) \arrow[d, "H(Id_B,f)"] \\
& H(A,A) \arrow[r, "H(f,Id_A)"'] & H(B,A).
\end{tikzcd}$$

*De forma dual, definimos um **coend** de H o par (D,ζ) com $D \in \mathscr{D}$ e $\zeta : H \overset{\bullet}{\Rightarrow} D$ uma transformação dinatural, tal que, para toda transformação dinatural $\gamma : H \overset{\bullet}{\Rightarrow} X$, existe um único morfismo $g : D \to X$ em $\mathscr{D}$ de tal forma que $\gamma_A = g \circ \zeta_A$ para todo $A \in \mathscr{C}$.*

Denominamos o coend de H por $D = \int^{C\in\mathscr{C}} H(C,C)$. Em forma de diagrama, para qualquer $f : B \to A$ em $\mathscr{D}$ temos que o seguinte comuta

$$\begin{tikzcd}
H(A,B) \arrow[r, "H(f,Id_B)"] \arrow[d, "H(Id_A,f)"'] & H(B,B) \arrow[d, "\zeta_B"] \arrow[ddr, bend left, "\gamma_B"] & \\
H(A,A) \arrow[r, "\zeta_A"'] \arrow[drr, bend right, "\gamma_A"'] & \int^{C\in\mathscr{C}} H(C,C) \arrow[dr, dashed, "\exists! g"] & \\
& & X.
\end{tikzcd}$$

Tanto end quanto coend, caso existam, são únicos a menos de isomorfismo.

Uma outra caracterização de (co)ends são os (co)equalizadores. Primeiro vejamos a definição de equalizadores e coequalizadores.

Definição 3.0.7. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria, $A, B \in \mathscr{C}$, $f, g \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$. Um equalizador do par (f,g) é o par (E,h), sendo $E \in \mathscr{C}$ e $h \in Hom_{\mathscr{C}}(E,A)$ tal que, $f \circ h = g \circ h$ e, para* *qualquer outro par (T, t) tal que $f \circ t = g \circ t$, existe um único morfismo $u \in Hom_{\mathscr{C}}(T, E)$ satisfazendo $t = h \circ u$. Isso significa que, em diagrama, temos a seguinte comutatividade:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B. \\ T \arrow[u, dashed, "\exists! u"] \arrow[ur, "t"'] & & \end{tikzcd}$$

De forma dual, um coequalizador do par (f,g) é o par (C, c) com $C \in \mathscr{C}$ e $c \in Hom_{\mathscr{C}}(B, C)$ tal que $c \circ f = c \circ g$ e, para qualquer outro par (T, t) tal que $t \circ f = t \circ g$, existe um único morfismo $u \in Hom_{\mathscr{C}}(C,T)$ satisfazendo $t = u \circ c$, isto é, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "t"'] & C \arrow[d, dashed, "\exists! u"] \\ & & T. \end{tikzcd}$$

Equalizadores e coequalizadores são únicos a menos de isomorfismo.

Observação 3.0.8. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria pequena, $\mathscr{D}$ uma categoria completa, isto é, que possui produtos e equalizadores e $H : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um bifuntor. Indicando o conjunto dos morfismos de $\mathscr{C}$ por $\mathscr{C}^{(1)}$, definimos os morfismos para $f \in \mathscr{C}^{(1)}$:*

$$\prod_{A \in C} H(A, A) \xrightarrow{\pi_{t(f)}} H(t(f), t(f)) \xrightarrow{H(f, Id_{t(f)})} H(s(f), t(f))$$

e

$$\prod_{A \in C} H(A, A) \xrightarrow{\pi_{s(f)}} H(s(f), s(f)) \xrightarrow{H(Id_{s(f)}, f)} H(s(f), t(f)).$$

Da propriedade universal do produto existem os morfismos

$$\psi_1, \psi_2 : \prod_{A \in \mathscr{C}} H(A, A) \to \prod_{f \in \mathscr{C}^{(1)}} H(s(f), t(f))$$

tais que o seguinte digrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
H(t(f),t(f)) \arrow[r, "H(f,Id_{t(f)})"] & H(s(f),t(f)) \\
\prod\limits_{A\in\mathscr{C}} H(A,A) \arrow[u, "\pi_{t(f)}"] \arrow[d, "\pi_{s(f)}"'] \arrow[r, shift left, "\psi_2"] \arrow[r, shift right, "\psi_1"'] & \prod\limits_{f\in\mathscr{C}^{(1)}} H(s(f),t(f)) \arrow[u, "\pi_f"'] \arrow[d, "\pi_f"] \\
H(s(f),s(f)) \arrow[r, "H(Id_{s(f)},f)"'] & H(s(f),t(f)).
\end{tikzcd}$$

sendo os morfismos π's respectivas projeções, $s(f)$ o domínio de f e $t(f)$ seu contradomínio.

De forma dual, temos a seguinte observação:

Observação 3.0.9. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria pequena, $\mathscr{D}$ uma categoria cocompleta, isto é, que possui coprodutos e coequalizadores e $H : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um bifuntor. Indicando o conjunto dos morfismos de $\mathscr{C}$ por $\mathscr{C}^{(1)}$, definimos os morfismos para $f \in \mathscr{C}^{(1)}$:*

$$H(t(f),s(f)) \xrightarrow{H(f,Id_{s(f)})} H(s(f),s(f)) \xrightarrow{\iota_{s(f)}} \coprod_{A\in\mathscr{C}} H(A,A)$$

e

$$H(t(f),s(f)) \xrightarrow{H(Id_{t(f)},f)} H(t(f),t(f)) \xrightarrow{\iota_{t(f)}} \coprod_{A\in\mathscr{C}} H(A,A).$$

Da propriedade universal do coproduto existem os morfismos

$$\varphi_1,\varphi_2 : \coprod_{f\in\mathscr{C}^{(1)}} H(t(f),s(f)) \to \coprod_{A\in\mathscr{C}} H(A,A)$$

tais que o seguinte digrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
H(t(f),s(f)) \arrow[r, "H(Id_{t(f)},f)"] \arrow[d, "\iota_f"'] & H(t(f),t(f)) \arrow[d, "\iota_{t(f)}"] \\
\coprod\limits_{f\in\mathscr{C}^{(1)}} H(t(f),s(f)) \arrow[r, shift left, "\varphi_2"] \arrow[r, shift right, "\varphi_1"'] & \coprod\limits_{A\in\mathscr{C}} H(A,A) \\
H(t(f),s(f)) \arrow[r, "H(f,Id_{s(f)})"'] \arrow[u, "\iota_f"] & H(s(f),s(f)). \arrow[u, "\iota_{s(f)}"']
\end{tikzcd}$$

sendo os morfismos $\imath$'s respectivas inclusões, $s(f)$ o domínio de f e $t(f)$ seu contradomínio.

A partir dos morfismos definidos nas Observações 3.0.8 e 3.0.9, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.0.10. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria pequena, $\mathscr{D}$ uma categoria (co)completa, isto é, que possui (co)produtos e (co)equalizadores e $H : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um bifuntor. Então (e, α) é o (co)end de H se, e somente se, e é um equalizador do par (ψ_1, ψ_2) (coequalizador do par (φ_1, φ_2)).*

Demonstração. Faremos para o caso de end, sendo o de coend análogo (dual). Indicando o conjunto dos morfismos de $\mathscr{C}$ por $\mathscr{C}^{(1)}$, da Observação 3.0.8 existem ψ_1,ψ_2 : $\prod\limits_{A\in\mathscr{C}} H(A,A) \to \prod\limits_{f\in\mathscr{C}^{(1)}} H(s(f),t(f))$ tais que:

$$\pi_f \circ \psi_1 = H(Id_{s(f)}, f) \circ \pi_{s(f)} \qquad e \qquad \pi_f \circ \psi_2 = H(f, Id_{t(f)}) \circ \pi_{t(f)}$$

sendo os morfismos π's respectivas projeções, $s(f)$ o domínio de f e $t(f)$ seu contradomínio. Primeiro vejamos que $(e, \alpha : e \overset{\bullet}{\Rightarrow} H)$ é *wedge* de H se, e somente se, $\psi_1 \circ i = \psi_2 \circ i$ com $i : e \to \prod\limits_{A\in\mathscr{C}} H(A,A)$ o único morfismo que comuta o seguinte diagrama proveniente da propriedade universal do produto

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[rr, "\alpha_{s(f)}"] \arrow[dr, dashed, "i"'] & & H(s(f),s(f)) \\
& \prod\limits_{A\in\mathscr{C}} H(A,A) \arrow[ur, "\pi_{s(f)}"'] &
\end{tikzcd}$$

para todo $A \in \mathscr{C}$.

Suponhamos que (e, α) seja *wedge* de H e vejamos que $\psi_1 \circ i = \psi_2 \circ i$. De fato,

$$\pi_f \circ \psi_1 \circ i = H(Id_{s(f)}, f) \circ \pi_{s(f)} \circ i$$

$$\begin{aligned}
&= H(Id_A, f) \circ \alpha_{s(f)} \\
&= H(f, Id_{t(f)}) \circ \alpha_{t(f)} \\
&= H(f, Id_{t(f)}) \circ \pi_{t(f)} \circ i \\
&= \pi_f \circ \psi_2 \circ i
\end{aligned}$$

e novamente, da propriedade universal do produto, existe um único morfismo tal que $\pi_f \circ (\psi_1 \circ i) = H(Id_{s(f)}, f) \circ \pi_{s(f)} \circ i$ e em acréscimo a igualdade descrita na equação anterior temos que $\psi_1 \circ i = \psi_2 \circ i$.

Por outro lado, se $\psi_1 \circ i = \psi_2 \circ i$ obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
H(Id_{s(f)}, f) \circ \alpha_{s(f)} &= H(Id_{s(f)}, f) \circ \pi_{s(f)} \circ i \\
&= \pi_f \circ \psi_1 \circ i \\
&= \pi_f \circ \psi_2 \circ i \\
&= H(f, Id_{t(f)}) \circ \pi_{t(f)} \circ i \\
&= H(f, Id_{t(f)}) \circ \alpha_{t(f)}
\end{aligned}$$

isto é, (c, α) é um *wedge* de H.

Supondo que $(e, \alpha) = end(H)$. Do que foi dito antes, temos que $\psi_1 \circ i = \psi_2 \circ i$. Agora seja $T \in \mathscr{D}$ e $\beta : T \overset{\bullet}{\Rightarrow} H$ uma transformação dinatural. Da propriedade universal do produto existe um único morfismo $j : T \to \prod_{A \in \mathscr{C}} H(A, A)$ tal que $\pi_{s(f)} \circ j = \beta_{s(f)}$. Temos que (T, β) é um *wedge* de H. Da definição de *end*, existe um único morfismo $h : T \to e$ tal que $\alpha_{s(f)} \circ h = \beta_{s(f)}$ e $\alpha_{t(f)} \circ h = \beta_{t(f)}$. Vejamos que $i \circ h = j$

$$\begin{aligned}
\pi_{s(f)} \circ i \circ h &= \alpha_{s(f)} \circ h \\
&= \beta_{s(f)} \\
&= \pi_{s(f)} \circ j
\end{aligned}$$

Assim, da propriedade universal do produto (unicidade do morfismo) temos que $i \circ h = j$. Logo (e, i) é um equalizador dos pares (ψ_1, ψ_2).

Por outro lado, supondo que (e,i) é equalizador dos pares (ψ_1, ψ_2). Já sabemos que (e, α) é um *wedge* de H. Tomando (T, β) outro *wedge* de H com $\pi_{s(f)} \circ j = \beta_{s(f)}$ e $\pi_{t(f)} \circ j = \beta_{t(f)}$ (propriedade universal do produto), temos que $\psi_1 \circ j = \psi_2 \circ j$. Além disso, existe um único $h : T \to e$ tal que $i \circ h = j$. Assim,

$$\alpha_{s(f)} \circ h = \pi_{s(f)} \circ i \circ h = \pi_{s(f)} \circ j = \beta_{s(f)}$$

e, de forma análoga, $\alpha_{t(f)} \circ h = \beta_{t(f)}$. Sendo assim, (e, α) é um *end* de H.

Quanto ao coend, de forma análoga obtemos que, sendo $f \in \mathscr{C}^{(1)}$, é coequalizador do diagrama:

$$\coprod_{f \in \mathscr{C}^{(1)}} H(t(f), s(f)) \overset{\varphi_1}{\underset{\varphi_2}{\rightrightarrows}} \coprod_{A \in \mathscr{C}} H(A, A) \longrightarrow coend(H)$$

nos quais φ_1 e φ_2 são definidas unicamente na Observação 3.0.9 tais que:

$$\varphi_1 \circ \imath_f = \imath_{t(f)} \circ H(Id_{t(f)}, f) \qquad e \qquad \varphi_2 \circ \imath_f = \imath_{s(f)} \circ H(f, Id_{s(f)})$$

sendo os morfismos $\imath$'s respectivas inclusões, $s(f)$ o domínio de f e $t(f)$ seu contradomínio. ■

Um outro exemplo que caracteriza um *End* é o conjunto das transformações naturais entre dois funtores $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, com $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ duas categorias pequenas, denotado por $Nat(F, G)$.

Exemplo 3.0.11. *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ duas categorias pequenas e os funtores $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$. Então temos o seguinte isomorfismo dos conjuntos:*

$$Nat(F, G) \cong \int_{X \in \mathscr{C}} Hom_{\mathscr{D}}(F(X), G(X))$$

sendo o funtor $Hom_{\mathscr{D}}(F(\_), G(\_)) : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to Set$.

Denotando por $E = \int_{X \in \mathscr{C}} Hom_{\mathscr{D}}(F(X), G(X))$, existe a transformação dinatural $\alpha : E \overset{\bullet}{\Rightarrow} Hom_{\mathscr{D}}(F(\_), G(\_))$ tal que, sendo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "\alpha_Y"'] & Hom_{\mathscr{D}}(F(X), G(X)) \arrow[d, "G(f)\circ_"] \\
Hom_{\mathscr{D}}(F(Y), G(Y)) \arrow[r, "_\circ F(f)"'] & Hom_{\mathscr{D}}(F(X), G(Y)).
\end{tikzcd}$$

Mas, da comutatividade do diagrama temos que $G(f) \circ \alpha_X(e) = \alpha_X(e) \circ F(f)$, isto é, $\alpha \in Nat(F, G)$, sendo $e \in E$.

Seja a aplicação $\beta_X(\theta) \coloneqq \theta_X$, $\forall X \in \mathscr{C}$ e $\theta \in Nat(F, G)$. Temos que β é naturalmente uma transformação dinatural entre os funtores $Nat(F, G)$ e $Hom_{\mathscr{D}}(F(\_), G(\_))$.

Além disso, definindo a aplicação $\zeta : E \overset{\bullet}{\Rightarrow} Hom_{\mathscr{D}}(F(\_), G(\_))$ tal que $\zeta_X(e) = \alpha_X(e)$, para todo $X \in \mathscr{C}$. Assim, temos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "\zeta(e)"] \arrow[drrr, bend left, "\alpha_X(e)"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha_Y(e)"'] & & & \\
& Nat(F,G) \arrow[rr, "\alpha_X(e)"] \arrow[d, "\alpha_Y(e)"'] & & Hom_{\mathscr{D}}(F(X),G(X)) \arrow[d, "G(f)\circ_"] \\
& Hom_{\mathscr{D}}(F(Y),G(Y)) \arrow[rr, "_\circ F(f)"'] & & Hom_{\mathscr{D}}(F(X),G(Y))
\end{tikzcd}$$

Sendo assim, da comutatividade do diagrama acima e da unicidade de E, temos que $E \cong Nat(F,G)$.

Uma aplicação do fato de $Nat(F,G) \cong \int\limits_{X\in\mathscr{C}} Hom_{\mathscr{D}}(F(X),G(X))$ é o seguinte exemplo:

Exemplo 3.0.12. *Consideremos a categoria $Rep_{\Bbbk}(G)$ (Definição A.0.1) e tomemos o funtor esquecimento:*

$$\begin{array}{rccc}
U: & Rep_{\Bbbk}(G) & \to & Vect_{\Bbbk} \\
& (V,\rho) & & V \\
& f\big\downarrow & \mapsto & \big\downarrow f \\
& (W,\sigma) & & W
\end{array}$$

Vejamos que $\Bbbk G \cong \int\limits_{(V,\rho)\in Rep_{\Bbbk}(G)} Hom_{Vect_{\Bbbk}}(U((V,\rho)),U((V,\rho)))$, sendo $\Bbbk G = \{\sum\limits_{g\in G}\alpha_g\delta_g | \alpha_g \in \Bbbk\}$ e o homomorfismo

$$\begin{array}{rccc}
\Lambda: & G & \to & GL(\Bbbk G) \\
& g & \mapsto & \lambda_g
\end{array}$$

em que

$$\lambda_g\left(\sum_{h\in G}\alpha_h\delta_h\right) = \sum_{h\in G}\alpha_h\delta_{gh}$$

Primeiro mostremos que $(\Bbbk G,\Lambda) \in Rep_{\Bbbk}(G)$. De fato, seja $g \in G$. Então,

$$\begin{aligned}
\lambda_g \circ \lambda_{g^{-1}}\left(\sum_{h\in G}\alpha_h\delta_h\right) &= \lambda_g\left(\sum_{h\in G}\alpha_h\delta_{g^{-1}h}\right) \\
&= \sum_{h\in G}\alpha_h\delta_{gg^{-1}h}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{h \in G} \alpha_h \delta_h$$

e de forma análoga temos que

$$\lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_g \left(\sum_{h \in G} \alpha_h \delta_h \right) = \sum_{h \in G} \alpha_h \delta_h$$

Sendo assim, Λ fica bem definida, por λ_g é linear da forma como foi construída e inversível, para todo $g \in G$. Vejamos agora que Λ é um homomorfismo de grupos. De fato, sejam $g,h,p \in G$. Então

$$\begin{aligned} \lambda_{gh}(\delta_p) &= \delta_{(gh)p} \\ &= \delta_{g(hp)} \\ &= \lambda_g(\delta_{hp}) \\ &= \lambda_g \circ \lambda_h(\delta_p) \end{aligned}$$

logo, Λ é um homomorfismo de grupos e portanto $(\Bbbk G, \Lambda)$ é uma representação de G.

Agora vejamos que $U(V,\rho) \cong Hom_{Rep_{\Bbbk}(G)}((\Bbbk G,\Lambda),(V,\rho))$. Definimos o seguinte morfismo:

$$\begin{array}{cccc} \Psi: & Hom_{Rep_{\Bbbk}(G)}((\Bbbk G,\Lambda),(V,\rho)) & \to & V \\ & f & \mapsto & f(\delta_e) \end{array}$$

sendo e o elemento neutro de G. Vejamos que Ψ é $\Bbbk$-linear. De fato, sejam $f_1, f_2 \in Hom_{Rep_{\Bbbk}(G)}((\Bbbk G,\Lambda),(V,\rho))$ e $k \in \Bbbk$. Então,

$$\begin{aligned} \Psi(f_1 + kf_2) &= (f_1 + kf_2)(\delta_e) \\ &= f_1(\delta_e) + kf_2(\delta_e) \\ &= \Psi(f_1) + k\Psi(f_{(2)}) \end{aligned}$$

Agora definimos o seguinte morfismo:

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & V & \to & Hom_{Rep_{\Bbbk}(G)}((\Bbbk G,\Lambda),(V,\rho)) \\ & v & \mapsto & r_v : \Bbbk G \to V \end{array}$$

em que r_v é definida, para todo $v \in V$, como:

$$\begin{array}{cccc} r_v: & \Bbbk G & \to & V \\ & \sum_{g \in G} \alpha_g \delta_g & \mapsto & r_v\left(\sum_{g \in G} \alpha_g \delta_g \right) = \rho_g(v) \end{array}$$

Vejamos que r_v é de fato um morfismo em $Rep_{\Bbbk}(G)$. Seja $h \in G$. Então,

$$\begin{aligned} r_v \circ \Lambda_g(\delta_h) &= r_v(\delta_{gh}) \\ &= \rho_{gh}(v) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho_g \rho_h(v)\\
&= \rho_g \circ r_v(\delta_h)
\end{aligned}
$$

Vejamos que $\Phi = \Psi^{-1}$*. Sejam* $v \in V$ *e* $f : (\Bbbk G, \Lambda) \to (V, \rho)$*. Então,*

$$
\begin{aligned}
\Psi \circ \Phi(v) &= \Psi(r_v)\\
&= r_v(\delta_e)\\
&= \rho_e(v) = v
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\Phi \circ \Psi(f)(\delta_e) &= \Phi(f(\delta_e))\\
&= \rho_g(f(\delta_e))\\
&= f \circ \Lambda g(\delta_e)\\
&= f(\delta_g)
\end{aligned}
$$

Na verdade temos um isomorfismo natural $U(\_) \cong Hom_{Rep_{\Bbbk}(G)}((\Bbbk G, \Lambda), \_)$*, isto é, sendo* $f : (V, \rho) \to (W, \sigma)$ *vejamos que o seguinte diagrama comuta:*

$$
\begin{tikzcd}
Hom_{Rep_{\Bbbk}(G)}((\Bbbk G, \Lambda), (V, \rho)) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "f \circ \_"'] & V \arrow[d, "f"] \\
Hom_{Rep_{\Bbbk}(G)}((\Bbbk G, \Lambda), (W, \sigma)) \arrow[r, "\Psi"'] & W
\end{tikzcd}
$$

Seja $h : (\Bbbk G, \Lambda) \to (V, \rho)$ *morfismo em* $Rep_{\Bbbk}(G)$*. Então*

$$f \circ \Psi(h) = f \circ h(\delta_e)$$

Por outro lado,

$$\Psi \circ (f \circ h) = f \circ h(\delta_e)$$

Logo Ψ *é um isomorfismo natural.*

Por fim, do exemplo anterior, do Lema de Yoneda (Lema A.0.10) e do isomorfismo natural $U(\_) \cong Hom_{Rep_{\Bbbk}(G)}((\Bbbk G, \Lambda), \_)$ *temos a seguinte sequência de isomorfismos:*

$$
\begin{aligned}
&End(Hom_{Rep_{\Bbbk}(G)}(U(\_), U(\_))) \cong Nat(U, U)\\
&\quad \cong Nat(Hom_{Rep_{\Bbbk}(G)}((\Bbbk G, \Lambda), \_), Hom_{Rep_{\Bbbk}(G)}((\Bbbk G, \Lambda), \_)))\\
&\quad \cong Hom_{Rep_{\Bbbk}(G)}((\Bbbk G, \Lambda), (\Bbbk G, \Lambda))\\
&\quad \cong \Bbbk G.
\end{aligned}
$$

Definição 3.0.13. *Seja* $(\mathscr{C}, \omega) \in \underline{Tan}$*. Denominamos*

$$coend(\mathscr{C}, \omega) = coend(\omega) := \int^{X \in \mathscr{C}} \omega(X)^* \otimes \omega(X)$$

O próximo Lema nos dá uma caracterização melhor sobre essa estrutura:

Lema 3.0.14. *Para cada $(\mathscr{C}, \omega) \in \underline{Tan}$ e $C \in Vect$, são equivalentes:*

(i) $C \cong coend(\omega)$;

(ii) *O funtor $Nat(\omega, \omega \otimes \_) : Vect \to Set$ é representável com o objeto C;*

(iii) *Existe a transformação natural $\delta^{\omega} : \omega \Rightarrow \omega \otimes C$, tal que $\forall M \in Vect$ e para toda transformação natural $\varphi : \omega \Rightarrow \omega \otimes M$ existe um único morfismo $f : C \to M$ satisfazendo $(1_{\omega} \otimes f) \circ \delta^{\omega} = \varphi$, isto é,*

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, Rightarrow, "\delta^{\omega}"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_{\omega}"'] & \omega \otimes C \arrow[d, Rightarrow, "1_{\omega}\otimes f"] \\
& \omega \otimes M
\end{tikzcd}$$

Demonstração. ($i \Leftrightarrow ii$) Vejamos que existe uma bijeção entre $Hom(\omega(\_), \omega(\_) \otimes M)$ e $Hom(\omega(\_)^* \otimes \omega(\_), M)$, sendo, respectivamente, conjuntos das transformações naturais e dinaturais (aqui $M \in Vect$ é visto como um funtor constante). Para todo $X \in \mathscr{C}$, definimos os seguintes morfismos:

$$\begin{array}{rccc}
\Psi : & Hom(\omega(X), \omega(X) \otimes M) & \to & Hom(\omega(X)^* \otimes \omega(X), M) \\
& \varphi_X & \mapsto & (ev_{\omega(X)} \otimes Id_M)(Id_{\omega(X)^*} \otimes \varphi_X)
\end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc}
\Phi : & Hom(\omega(X)^* \otimes \omega(X), M) & \to & Hom(\omega(X), \omega(X) \otimes M) \\
& \theta_X & \mapsto & (Id_{\omega(X)} \otimes \theta_X)(cv_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)})
\end{array}$$

Vejamos que $\Psi = \Phi^{-1}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\Psi \circ \Phi(\theta_X) &= \Psi((Id_{\omega(X)^*} \otimes \theta_X)(cv_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)})) \\
&= (ev_{\omega(X)} \otimes Id_M)(Id_{\omega(X)^*} \otimes (Id_{\omega(X)} \otimes \theta_X)(cv_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)})) \\
&= (ev_{\omega(X)} \otimes Id_M)(Id_{\omega(X)^*} \otimes Id_{\omega(X)} \otimes \theta_X)(Id_{\omega(X)^*} cv_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)^*}) \\
&= \theta_X(ev_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)^*} \otimes Id_{\omega(X)})(Id_{\omega(X)^*} \otimes cv_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)}) \\
&= \theta_X((ev_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)^*})(Id_{\omega(X)^*} \otimes ev_{\omega(X)}) \otimes Id_{\omega(X)}) \\
&\overset{(a)}{=} \theta_X,
\end{aligned}$$

sendo (a) resultado da Definição 2.2.1 aplicada no objeto $\omega(X)$, $\forall X \in \mathscr{C}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\Phi \circ \Psi(\varphi_X) &= \Phi((ev_{\omega(X)} \otimes Id_M)(Id_{\omega(X)^*} \otimes \varphi_X)) \\
&= (Id_{\omega(X)} \otimes (ev_{\omega(X)} \otimes Id_M)(Id_{\omega(X)^*} \otimes \varphi_X))(cv_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)}) \\
&= (Id_{\omega(X)} \otimes ev_{\omega(X)} \otimes Id_M)(Id_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)^*} \otimes \varphi_X)(cv_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (Id_{\omega(X)} \otimes ev_{\omega(X)} \otimes Id_M)(cv_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)} \otimes Id_M)\varphi_X \\
&= ((Id_{\omega(X)} \otimes ev_{\omega(X)})(cv_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)}) \otimes Id_M)\varphi_X \\
&\overset{(b)}{=} (Id_{\omega(X)} \otimes Id_M)\varphi_X \\
&= \varphi_X
\end{aligned}$$

sendo (b) resultado da Definição 2.2.1 aplicada no objeto $\omega(X)$, $\forall X \in \mathscr{C}$.

A junção dos resultados da última bijeção, das Proposições A.0.19, 3.0.10 e do Exemplo 3.0.11 temos a seguinte cadeia de isomorfismos:

$$\begin{aligned}
Nat(\omega, \omega \otimes M) &\cong \int_{X \in \mathscr{C}} Hom(\omega(X), \omega(X) \otimes M) \\
&\cong \int_{X \in \mathscr{C}} Hom(\omega(X)^* \otimes \omega(X), M) \\
&\cong Hom\left(\int^{X \in \mathscr{C}} \omega(X)^* \otimes \omega(X), M\right) \\
&\cong Hom(C, M)
\end{aligned}$$

($ii \Leftrightarrow iii$) De um modo geral, sendo $\mathscr{C}$ uma categoria localmente pequena, $A \in \mathscr{C}$ e $F : \mathscr{C} \to Set$ um funtor, de acordo com o Lema de Yoneda, a transformação natural de $Hom(A, \_)$ para F está em correspondência biunívoca com os elementos de $F(A)$. Isto é, dada a transformação natural $\alpha : Hom(A, \_) \Rightarrow F$ o elemento correspondente $u \in F(A)$ é dada por

$$u = \alpha_A(Id_A)$$

Por outro lado, dado qualquer elemento $u \in F(A)$ nós definimos a transformação natural $\alpha : Hom(A, \_) \Rightarrow F$ da seguinte forma:

$$\alpha_X(f) = (Ff)(u)$$

sendo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, X)$. A fim de obtermos uma representação do funtor F, queremos saber quando a transformação natural induzida por u é um isomorfismo. Isso nos leva ao seguinte resultado: a transformação natural induzida por um elemento $u \in F(A)$ é um isomorfismo se e somente se, (A, u) é uma flecha universal de F. Uma flecha universal de um functor $F : \mathscr{C} \to Set$ é um par (A, u) consistindo em um objeto A de $\mathscr{C}$ e um elemento $u \in F(A)$ tal que para cada par (X, v) com $v \in F(X)$ existe um morfismo único $f : A \to X$ tal que $(Ff)u = v$.

De fato, temos as seguintes equivalências:

- $\forall v \in F(X)$, existe um único $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, X)$ tal que $(Ff)(u) = v$;
- $\forall v \in F(X)$, existe um único $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, X)$ tal que $\alpha_X(f) = v$;

De volta ao problema inicial, a flecha universal de $Nat(\omega, \omega \otimes \_)$ é justamente δ^{ω}. Mais precisamente, o isomorfismo natural $\Theta : Hom(C, \_) \cong Nat(\omega, \omega \otimes \_)$ e a transformação natural $\delta^{\omega} : \omega \Rightarrow \omega \otimes C$ estão relacionadas por $\delta^{\omega} = \Theta^{\omega}_{C}(Id_C)$ e $\Theta^{\omega}_{M}(f) = (1_{\omega} \otimes f)\delta^{\omega}$. ■

4 RECONSTRUÇÃO TANNAKIANA

Neste capítulo, definiremos uma estrutura de coálgebra em *coend*$(\mathscr{C}, \omega)$ tal que, $\mathscr{C}$ é uma categoria $\Bbbk$ linear abeliana $\mathscr{C}$ e $\omega : \mathscr{C} \to Vect_{\Bbbk}^{(f)}$ um funtor aditivo fiel e exato. Veremos que para todo $X \in \mathscr{C}$, $\omega(X)$ possui estrutura de comódulo sobre essa coálgebra.

No desenvolvimento do capítulo, veremos que quanto mais estrutura damos a categoria $\mathscr{C}$ e ω, mais resultados obtemos, por exemplo,

(a) Se $\mathscr{C}$ e ω são monoidais, então a coálgebra em questão na verdade é uma biálgebra;

(a) Se $\mathscr{C}$ é monoidal rígida e ω é monoidal, então a cóalgebra procurada na verdade é uma álgebra de Hopf.

Em particular, a álgebra de endomorfismos de um funtor, ou seja, a álgebra que consiste em toda transformação natural de um funtor para si mesmo, é um *end* na categoria de conjuntos.

Devido a finitude garantida pelo Teorema Fundamental das Coálgebras, todas construções serão feitas para comódulos e coálgebras ao invés de módulos e álgebras.

4.1 RECONSTRUÇÃO DE COÁLGEBRAS

Definição 4.1.1. *Sejam $(\mathscr{C},\omega) \in \underline{Tan}$, $C = coend(\omega)$, o isomorfismo natural $\Theta : Hom(C,\_) \Rightarrow Nat(\omega, \omega \otimes \_)$ e a transformação natural universal, definidos no Lema 3.0.14, $\delta = \delta^{\omega} : \omega \Rightarrow \omega \otimes C$. Definimos $\Delta : C \to C \otimes C$ tal que:*

$$\Theta_{C\otimes C}(\Delta) = (\delta \otimes Id_C)\delta$$

isto é,

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r, Rightarrow, "\delta"] \arrow[d, Rightarrow, "\delta"'] & \omega \otimes C \arrow[d, Rightarrow, "1_{\omega}\otimes\Delta"] \\ \omega \otimes C \arrow[r, Rightarrow, "\delta\otimes Id_C"'] & \omega \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

comuta, ou seja, $\forall X \in \mathscr{C}$,

$$\begin{tikzcd} \omega(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta_X"'] & \omega(X) \otimes C \arrow[d, "Id_{\omega(X)}\otimes\Delta"] \\ \omega(X) \otimes C \arrow[r, "\delta_X\otimes Id_C"'] & \omega(X) \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

comuta.

Uma outra forma de definirmos Δ é a partir da consequência imediata da correspondência entre a transformação dinatural $\mu : \omega^* \otimes \omega \overset{\bullet}{\Rightarrow} C$ e a transformação natural

$\delta^{\omega} = \delta : \omega \Rightarrow \omega \otimes C$, *com* $C = coend(\omega)$, *descritas no Lema 3.0.14 definidas por:*

$$
\begin{tikzcd}
\omega(X) \arrow[r, "cv_{\omega(X)}\otimes Id_{\omega(X)}"] \arrow[dr, "\delta_X"'] & \omega(X)\otimes\omega(X)^*\otimes\omega(X) \arrow[d, "Id_{\omega(X)}\otimes\mu_X"] \\
& \omega(X)\otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\omega(X)^*\otimes\omega(X) \arrow[r, "Id_{\omega(X)^*}\otimes\delta_X"] \arrow[dr, "\mu_X"'] & \omega(X)^*\otimes\omega(X)\otimes C \arrow[d, "ev_{\omega(X)}\otimes Id_C"] \\
& \omega(X)
\end{tikzcd}
$$

para todo $X \in \mathscr{C}$.

Notemos que, da naturalidade de cv *e pelo fato de* μ *ser uma transformação dinatural, temos a comutatividade do seguinte diagrama para todo* $X, Y \in \mathscr{C}$ *e* $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$*:*

$$
\begin{tikzcd}
& \omega(Y)^*\otimes\omega(X)\otimes\omega(X)^*\otimes\omega(X) \arrow[dr, "\omega(f)^*\otimes Id_{\omega(X)}\otimes Id_{\omega(X)^*}\otimes Id_{\omega(X)}"] & \\
\omega(Y)^*\otimes\omega(X) \arrow[ur, "Id_{\omega(Y)^*}\otimes cv_{\omega(X)}\otimes Id_{\omega(X)}"] \arrow[r, "\omega(f)^*\otimes Id_{\omega(X)}"] \arrow[d, "Id_{\omega(Y)^*}\otimes\omega(f)"] \arrow[dd, bend right, "Id_{\omega(Y)^*}\otimes cv_{\omega(Y)}\otimes Id_{\omega(X)}"'] & \omega(X)^*\otimes\omega(X) \arrow[r, "Id_{\omega(X)^*}\otimes cv_{\omega(X)}\otimes Id_{\omega(X)}"] \arrow[d, "\mu_X"] & (\omega(X)^*\otimes\omega(X))^{\otimes 2} \arrow[dd, "\mu_X\otimes\mu_X"] \\
\omega(Y)^*\otimes\omega(Y) \arrow[r, "\mu_Y"] \arrow[dr, "Id_{\omega(Y)^*}\otimes cv_{\omega(Y)}\otimes Id_{\omega(Y)}"] & C & \\
\omega(Y)^*\otimes\omega(Y)\otimes\omega(Y)^*\otimes\omega(X) \arrow[r, "Id_{\omega(Y)^*}\otimes Id_{\omega(Y)}\otimes Id_{\omega(Y)^*}\otimes\omega(f)"'] & (\omega(Y)^*\otimes\omega(Y))^{\otimes 2} \arrow[r, "\mu_Y\otimes\mu_Y"'] & C\otimes C.
\end{tikzcd}
$$

os quais $(\omega(X)^*\otimes\omega(X))^{\otimes 2} = \omega(X)^*\otimes\omega(X)\otimes\omega(X)^*\otimes\omega(X)$ *e* $(\omega(Y)^*\otimes\omega(Y))^{\otimes 2} = \omega(Y)^*\otimes\omega(Y)\otimes\omega(Y)^*\otimes\omega(Y)$*. Assim, sendo* $C = coend(\omega)$*, definimos* $\Delta : C \to C\otimes C$*, a qual é definida unicamente tal que*

$$
\begin{tikzcd}
\omega(X)^*\otimes\omega(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "Id_{\omega(X)^*}\otimes cv_{\omega(X)}\otimes Id_{\omega(X)}"'] & C \arrow[d, "\Delta"] \\
\omega(X)^*\otimes\omega(X)\otimes\omega(X)^*\otimes\omega(X) \arrow[r, "\mu_X\otimes\mu_X"'] & C\otimes C
\end{tikzcd}
$$

comuta $\forall X \in \mathscr{C}$.

Veremos em breve que C *é uma coálgebra com a comultiplicação* Δ.

Definição 4.1.2. *Sejam* $(\mathscr{C},\omega) \in \underline{Tan}$, $C = coend(\omega)$*, o isomorfismo natural* $\Theta : Hom(C,\_) \Rightarrow Nat(\omega, \omega\otimes\_)$ *e a transformação natural universal, definidos no Lema*

3.0.14, $\delta = \delta^{\omega} : \omega \Rightarrow \omega \otimes C$. Definimos $\varepsilon : C \to \mathbb{k}$ tal que $\Theta_{\mathbb{k}}(\varepsilon) = 1_{\omega}$, isto é,

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, Rightarrow, "\delta"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_\omega"'] & \omega \otimes C \arrow[d, Rightarrow, "1_\omega \otimes \varepsilon"] \\
& \omega
\end{tikzcd}$$

comuta. Ou seja, $\forall X \in \mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
\omega(X) \arrow[r, "\delta_X"] \arrow[dr, "Id_{\omega(X)}"'] & \omega(X) \otimes C \arrow[d, "Id_{\omega(X)} \otimes \varepsilon"] \\
& \omega(X)
\end{tikzcd}$$

comuta.

Uma outra forma de definirmos ε é a partir da consequência imediata da correspondência entre a transformação dinatural $\mu : \omega^* \otimes \omega \overset{\bullet}{\Rightarrow} C$ e a transformação natural $\delta^{\omega} = \delta : \omega \Rightarrow \omega \otimes C$ descritas na Definição anterior. Sendo $C = coend(\omega)$ e da comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\omega(Y)^* \otimes \omega(X) \arrow[r, "\omega(f)^* \otimes Id_{\omega(X)}"] \arrow[d, "Id_{\omega(Y)^*} \otimes \omega(f)"'] & \omega(X)^* \otimes \omega(X) \arrow[d, "\mu_X"] \arrow[ddr, bend left, "ev_{\omega(X)}"] & \\
\omega(Y)^* \otimes \omega(Y) \arrow[r, "\mu_Y"'] \arrow[drr, bend right, "ev_{\omega(Y)}"'] & C & \\
& & \mathbb{k}
\end{tikzcd}$$

para todo $X, Y \in \mathscr{C}$ e $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$, definimos unicamente ε tal que:

$$\begin{tikzcd}
\omega(Y)^* \otimes \omega(X) \arrow[d, "\mu_X"'] \arrow[dr, "ev_{\omega(X)}"] & \\
C \arrow[r, "\varepsilon"'] & \mathbb{k}
\end{tikzcd}$$

comuta $\forall X \in \mathscr{C}$.

Lema 4.1.3. *Sejam, $\mathscr{C}$, ω, C, Θ, δ e Δ descritas acima e sejam os morfismos $f : C \to M$ e $g : C \to N$. Então,*

$$\Theta_{M \otimes N}((f \otimes g)\Delta) = (\Theta_M(f) \otimes Id_N)\Theta_N(g).$$

Demonstração. Da definição de Θ do Lema 3.0.14, para o morfismo $(f \otimes g)\Delta$, temos:

$$\Theta_{M\otimes N}((f \otimes g)\Delta)) = (1_\omega \otimes (f \otimes g)\Delta)\delta$$

Vejamos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[rrr, Rightarrow, "\delta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\delta"] \arrow[dd, Rightarrow, "\Theta_N(g)"'] & & & \omega \otimes C \arrow[d, Rightarrow, "1_\omega\otimes\Delta"] \\
& \omega \otimes C \arrow[rr, Rightarrow, "\delta\otimes Id_C"] \arrow[dl, Rightarrow, "1_\omega\otimes g"] \arrow[drr, Rightarrow, "\Theta_M(f)\otimes Id_C"'] & & \omega \otimes C \otimes C \arrow[d, Rightarrow, "1_\omega\otimes f\otimes Id_C"] \\
\omega \otimes N \arrow[dr, Rightarrow, "\Theta_M(f)\otimes Id_N"'] & & & \omega \otimes M \otimes C \arrow[dll, Rightarrow, "1_\omega\otimes Id_M\otimes g"] \\
& \omega \otimes M \otimes N & &
\end{tikzcd} .$$

De fato, temos que:

- O triângulo da esquerda comuta pela definição de Θ_N;
- O quadrilátero de cima comuta pela definição de Δ;
- O triângulo da direita comuta pela definição de Θ_M tensorizado por C;
- O quadrilátero debaixo comuta pela naturalidade de $\Theta_M(f)$.

Da definição de $\Theta_{M\otimes N}$ e das comutatividades acima temos,

$$\begin{aligned}
\Theta_{M\otimes N}((f \otimes g)\Delta)) &= (1_\omega \otimes (f \otimes g)\Delta)\delta \\
&= (1_\omega \otimes Id_M \otimes g)(1_\omega \otimes f \otimes Id_C)(\omega \otimes \Delta)\delta \\
&= (\Theta_M(f) \otimes Id_N)\Theta_N(g).
\end{aligned}$$

∎

O Lema 4.1.3 nos auxilia a demonstrar o seguinte resultado:

Proposição 4.1.4. *Afirmamos que*

$$\begin{array}{cccc}
coend(_): & \underline{Tan} & \to & Coalg \\
& (\mathscr{C},\omega) & & coend(\omega) \\
& {\scriptstyle [F,\zeta]}\downarrow & \mapsto & \downarrow{\scriptstyle coend(F,\zeta)=g} \\
& (\mathscr{D},\gamma) & & coend(\gamma)
\end{array}$$

é um funtor, sendo $coend(F,\zeta) = g$ definido unicamente por

$$\Theta^{\omega}_{coend(\gamma)}(g) = (\zeta \otimes Id_{coend(\gamma)})^{-1}(\delta^{\gamma}_{F})\zeta,$$

isto é, satisfazendo

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, Rightarrow, "\delta^{\omega}"] \arrow[d, Rightarrow, "\zeta"'] & \omega \otimes coend(\omega) \arrow[d, Rightarrow, "\zeta\otimes g"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_{\omega}\otimes g"] & \\
\gamma F \arrow[r, Rightarrow, "\delta^{\gamma}_{F}"'] & \gamma F \otimes coend(\gamma) \arrow[r, Rightarrow, "\zeta^{-1}\otimes Id_{coend(\gamma)}"'] & \omega \otimes coend(\gamma).
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Sejam $(\mathscr{C},\omega) \in \underline{Tan}$ e $C = coend(\omega)$. Sejam também Θ e $\delta = \delta^{\omega}$ descritos no Lema 3.0.14 e os morfismos Δ^{C} e ε^{C} das Definições 4.1.1 e 4.1.2, respectivamente.

Primeiro, vejamos que Δ satisfaz o diagrama da coassociatividade a partir do isomorfismo Θ:

$$\begin{aligned}
\Theta_{C\otimes C\otimes C}((\Delta^{C}\otimes Id_{C})\Delta^{C}) &\overset{(i)}{=} (\Theta_{C\otimes C}(\Delta^{C})\otimes Id_{C})\Theta_{C}(Id_{C})\\
&\overset{(ii)}{=} (((\delta\otimes Id_{C})\delta)\otimes Id_{C})\delta\\
&= ((\delta\otimes Id_{C})\otimes Id_{C})(\delta\otimes Id_{C})\delta\\
&= ((\delta\otimes Id_{C})\otimes Id_{C})\Theta_{C\otimes C}(\Delta^{C})\\
&= (\Theta_{C}(Id_{C})\otimes Id_{C})\Theta_{C\otimes C}(\Delta^{C})\\
&\overset{(iii)}{=} \Theta_{C\otimes C\otimes C}((Id_{C}\otimes\Delta^{C})\Delta^{C}),
\end{aligned}$$

sendo (i) e (iii) provenientes do Lema 4.1.3, (ii) da definição de Δ^{C} e da equação definidora de Θ, $\Theta_{C}(Id_{C}) = \delta$.

Agora, vejamos que ε é a counidade de C. De fato,

$$\begin{aligned}
\Theta_{\Bbbk\otimes C}((\varepsilon^{C}\otimes Id_{C})\Delta^{C}) &\overset{(iv)}{=} (\Theta_{\Bbbk}(\varepsilon^{C})\otimes Id_{C})\Theta_{C}(Id_{C})\\
&= (1_{\omega}\otimes Id_{C})\Theta_{C}(Id_{C})\\
&= \Theta_{C}(Id_{C}),
\end{aligned}$$

no qual, (iv) é resultado do Lema 4.1.3. Sendo assim, $(C,\Delta^{C},\varepsilon^{C})$ é uma coálgebra.

Sendo $g : coend(\omega) \to coend(\gamma)$ o morfismo expresso no enunciado da Proposição e denotando $coend(\gamma) = D$, vejamos que g é na verdade um morfismo de coálgebras. De fato,

$$\begin{aligned}
\Theta_{D\otimes D}((g\otimes g)\Delta^{C}) &\overset{(v)}{=} (\Theta_{D}(g)\otimes Id_{D})\Theta_{D}(g)\\
&= [(\zeta^{-1}\otimes Id_{D})\delta^{\gamma}_{F}\zeta\otimes Id_{D}](\zeta^{-1}\otimes Id_{D})\delta^{\gamma}_{F}\zeta\\
&= [(\zeta^{-1}\otimes Id_{D})\delta^{\gamma}_{F}\otimes Id_{D}]\delta^{\gamma}_{F}\zeta\\
&= (\zeta^{-1}\otimes Id_{D}\otimes Id_{D})(\delta^{\gamma}_{F}\otimes Id_{D})\delta^{\gamma}_{F}\zeta,
\end{aligned}$$

sendo (v) resultado do Lema 4.1.3. Por outro lado,

$$\Theta_{D\otimes D}(\Delta^{D}\circ g) = (1_{\omega}\otimes\Delta^{D}\circ g)\delta^{\omega}$$

$$= (1_\omega \otimes \Delta^D)(1_\omega \otimes g)\delta^\omega.$$

Mas da comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, Rightarrow, "\delta^\omega"] \arrow[d, Rightarrow, "\zeta"'] & \omega \otimes C \arrow[d, Rightarrow, "\zeta\otimes g"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_\omega\otimes g"] & \\
\gamma F \arrow[r, Rightarrow, "\delta^\gamma_F"] \arrow[d, Rightarrow, "\delta^\gamma_F"'] & \gamma F \otimes D \arrow[r, Rightarrow, "\zeta^{-1}\otimes Id_D"] \arrow[d, Rightarrow, "1_{\gamma F}\otimes Id_D"] & \omega \otimes D \arrow[d, Rightarrow, "1_\omega\otimes\Delta^D"] \\
\gamma F \otimes D \arrow[r, Rightarrow, "\delta^\gamma_F\otimes\Delta^D"'] & \gamma F \otimes D \otimes D \arrow[r, Rightarrow, "\zeta^{-1}\otimes Id_D\otimes Id_D"'] & \omega \otimes D \otimes D,
\end{tikzcd}$$

temos que, $\Theta_{D\otimes D}(\Delta^D \circ g) = (\zeta^{-1} \otimes Id_D \otimes Id_D)(\delta^\gamma_F \otimes Id_D)\delta^\gamma_F\zeta$ e portanto, $\Theta_{D\otimes D}(\Delta^D \circ g) = \Theta_{D\otimes D}((g \otimes g)\Delta^C)$. Mas como $\Theta_{D\otimes D}$ é bijetora, temos que $\Delta^D \circ g = (g \otimes g)\Delta^C$.

Resta verificarmos que $\varepsilon^D \circ g = \varepsilon^C$. Para isso, usaremos novamente a bijeção $\Theta_{\Bbbk}$, isto é, verificaremos que $\Theta_{\Bbbk}(\varepsilon^D \circ g) = \Theta_{\Bbbk}(\varepsilon^C)$. De fato, da Definição 4.1.2, temos a comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, Rightarrow, "\delta^\omega"] \arrow[d, Rightarrow, "\zeta"'] & \omega \otimes C \arrow[r, Rightarrow, "1_\omega\otimes g"] \arrow[d, Rightarrow, "\zeta\otimes g"] & \omega \otimes D \arrow[d, Rightarrow, "\zeta\otimes Id_D"] \\
\gamma F \arrow[r, Rightarrow, "\delta^\gamma_F"'] \arrow[dr, equal] & \gamma F \otimes D \arrow[r, equal] \arrow[d, Rightarrow, "1_{\gamma F}\otimes\varepsilon^D"] & \gamma F \otimes D \arrow[d, Rightarrow, "\zeta^{-1}\otimes\varepsilon^D"] \\
 & \gamma F \arrow[r, Rightarrow, "\zeta^{-1}"'] & \omega,
\end{tikzcd}$$

isto é, $\Theta_{\Bbbk}(\varepsilon^D \circ g) = \Theta_{\Bbbk}(\varepsilon^C)$.

Agora, com relação a funtoralidade de *coend*, seja $[Id_{\mathscr{C}}, 1_\omega]$ identidade de $(\mathscr{C}, \omega)$ em $\underline{Tan}$. Então

$$\begin{aligned}
\Theta^\omega_C(coend(Id_{\mathscr{C}},1_\omega)) &= (1_\omega)(\delta^\omega)1_\omega \\
&= \delta^\omega = \Theta^\omega_C(Id_C).
\end{aligned}$$

Sendo Θ^ω_C bijetiva, temos que $coend(Id_{\mathscr{C}},1_\omega) = Id_C$.

Por fim, dados os objetos $(\mathscr{C}', \omega')$,$(\mathscr{D}, \gamma)$,$(\mathscr{C}, \omega) \in \underline{Tan}$ juntamente com os morfismos $[G, \chi] : (\mathscr{C}, \omega) \to (\mathscr{D}, \gamma)$ e $[F, \zeta] : (\mathscr{D}, \gamma) \to (\mathscr{C}', \omega')$. Então temos que:

$$\begin{aligned}
\Theta^\omega_{\mathscr{C}'}(coend(F, \zeta) \circ coend(G, \chi)) &= ((\zeta_G)\chi \otimes Id_{\mathscr{C}'})^{-1}\delta^{\omega'}_{FG}(\zeta_G)\chi \\
&= \Theta^\omega_{\mathscr{C}'}(coend(FG, (\zeta_G)\chi)).
\end{aligned}$$

Mas da definição de composição em $\underline{Tan}$, temos que $[F, \zeta] \circ [G, \chi] = [FG, (\zeta_G)\chi]$.

■

Proposição 4.1.5. *Sejam $(C,\Delta_C,\varepsilon_C),(D,\Delta_D,\varepsilon_D)$ $\Bbbk$-coálgebras. Sejam $\mathscr{M}^C$ e $\mathscr{M}^D$ as categorias, respectivamente, dos C-comódulos (à direita) e D-comódulos (à direita). Seja também $f: C \to D$ morfismo de coálgebras. Então, se $(A,\rho) \in \mathscr{M}^C$, temos que $(A,\kappa) \in \mathscr{M}^D$, sendo*

$$\kappa : A \xrightarrow{\rho_A^C} A \otimes C \xrightarrow{Id_A \otimes f} A \otimes D$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}(\kappa \otimes Id_D)\kappa &= ((Id_A \otimes f)\rho_A^C \otimes Id_D)(Id_A \otimes f)\rho_A^C\\ &= (Id_A \otimes f \otimes Id_D)(\rho_A^C \otimes Id_D)(Id_A \otimes f)\rho_A^C\\ &= (Id_A \otimes f \otimes Id_D)(\rho_A^C \otimes f)\rho_A^C\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}(Id_A \otimes \Delta_D)(Id_A \otimes f)\rho_A^C &= (Id_A \otimes \Delta_D \otimes f)\rho_A^C\\ &\overset{(i)}{=} (A \otimes (f \otimes f)\Delta_C)\rho_A^C\\ &= (Id_A \otimes f \otimes f)(Id_A \otimes \Delta_C)\rho_A^C\\ &\overset{(ii)}{=} (Id_A \otimes f \otimes f)(\rho_A^C \otimes Id_C)\rho_A^C\\ &= (Id_A \otimes f \otimes Id_D)(\rho_A^C \otimes f)\rho_A^C\end{aligned}$$

nos quais, (i) é referente ao fato de f ser um morfismo de coálgebra e (ii) é resultado da coação de A. Por fim,

$$\begin{aligned}(Id_A \otimes \varepsilon_D)\kappa &= (Id_A \otimes \varepsilon_D)(Id_A \otimes f)\rho_A^C\\ &= (Id_A \otimes \varepsilon_D f)\rho_A^C\\ &\overset{(iii)}{=} (Id_A \otimes \varepsilon_C)\rho_A^C\\ &\overset{(iv)}{=} Id_A\end{aligned}$$

com (iii) referente a f ser morfismo de coálgebra e (iv) da coação de A.

Logo, (A,κ) é um D-comódulo (à direita). ■

Lema 4.1.6. *Nas mesmas hipóteses da Proposição anterior,*

$$\begin{array}{cccc}\mathscr{M}^f: & \mathscr{M}^C & \to & \mathscr{M}^D\\ & (M,\rho_M^C) & & (M,\kappa_M^f)\\ & g\big\downarrow & \mapsto & \big\downarrow g\\ & (N,\rho_N^C) & & (M,\kappa_N^f)\end{array}$$

é um funtor.

Demonstração. Primeiro vejamos que g é um morfismo de D-comódulos. De fato,

$$\begin{aligned}
\kappa_N^f \circ g &= (Id_N \otimes f)\rho_N^C \circ g \\
&\overset{(i)}{=} (Id_N \otimes f)(g \otimes Id_C)\rho_M^C \\
&= (g \otimes Id_D)(Id_M \otimes f)\rho_M^C \\
&= (g \otimes Id_D)\kappa_M^f
\end{aligned}$$

Na realidade, a forma como foi construída a coação, todo morfismo de C-comódulo também será um morfismo de D-comódulo. Sendo assim $\mathscr{M}^f$ é um funtor para cada $f \in Hom_{Coalg}(C, D)$. ■

No próximo resultado, utilizaremos a caracterização de adjunto à direita (à esquerda) conforme (MACLANE, 1988). O mesmo afirma, de forma resumida, que um funtor $G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é adjunto à direita se, para cada objeto $Y \in \mathscr{D}$, existe um morfismo universal Y para G, isto é, para cada $Y \in \mathscr{D}$ existe um objeto $F(Y) \in \mathscr{C}$ e um morfismo $\eta_Y : Y \to G(F(Y))$ tal que, para cada $X \in \mathscr{C}$ e todo morfismo $g : Y \to G(X)$ existe um único morfismo $f : F(Y) \to X$ tal que $G(f) \circ \eta_Y = g$. Com isso é possível verificar que F pode ser unicamente transformado em um funtor $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tal que $G(F(g)) \circ \eta_Y = \eta_Z \circ g$ para todo $g : Y \to Z$ em $\mathscr{D}$ e portanto, G é adjunto à direita de F.

Teorema 4.1.7. *Seja o funtor*

$$\begin{array}{cccc}
\mathscr{M}- : & Coalg & \to & \underline{Tan} \\
& C & & (\mathscr{M}^C, U_C) \\
& f\big\downarrow & \mapsto & \big\downarrow[\mathscr{M}^f, \imath] \\
& D & & (\mathscr{M}^D, U_D)
\end{array},$$

sendo $U\_ : \mathscr{M}- \to Vect^{(f)}$ *o funtor esquecimento e a transformação natural* $\imath : U_D \cong U_C\mathscr{M}^f$.

Então o funtor $coend(\_)$ *é adjunto à esquerda de* $\mathscr{M}-$.

Demonstração. Note que $\mathscr{M}-$ definido acima é um funtor, pois, dados D,C,$B \in Coalg$ tais que $f : C \to D$ e $g : D \to B$ são morfismos de coálgebras, temos:

$$\mathscr{M}(Id_C) = [\mathscr{M}^{Id_C}, 1_{U_C}]$$

com $1_{U_C} : U_C \cong U_C$. Além disso, da composição em $\underline{Tan}$,

$$\begin{aligned}
[\mathscr{M}^g, \upsilon] \circ [\mathscr{M}^f, \imath] &= [\mathscr{M}^g \circ \mathscr{M}^f, \upsilon_{\mathscr{M}^f}\imath] \\
&= [\mathscr{M}^{g\circ f}, \upsilon_{\mathscr{M}^f}\imath] \\
&= \mathscr{M}(g \circ f)
\end{aligned}$$

Sejam $(\mathscr{C},\omega) \in \underline{Tan}$ e $C = coend(\omega)$. Sejam também $\delta = \delta^{\omega}$ e Θ definidos no Lema 3.0.14 e o morfismo Δ da Definição 4.1.1. O primeiro resultado que temos é, sendo $C = coend(\omega)$ uma coálgebra (Proposição 4.1.4), vejamos que $(\omega(X),\delta)$ é um C-comódulo (à direita), $\forall X \in \mathscr{C}$. De fato, os seguintes diagramas comutam da definição de Δ e ε, respectivamente:

$$\begin{tikzcd}
\omega(X) \arrow[r, "\delta_X"] \arrow[d, "\delta_X"'] & \omega(X)\otimes C \arrow[d, "1_{\omega(X)}\otimes\Delta"] \\
\omega(X)\otimes C \arrow[r, "\delta_X\otimes Id_C"'] & \omega(X)\otimes C\otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\omega(X)\otimes C \arrow[r, "1_{\omega(X)}\otimes\varepsilon"] & \omega(X) \\
 & \omega(X) \arrow[ul, "\delta_X"] \arrow[u, "1_{\omega(X)}"']
\end{tikzcd}$$

Além disso, sendo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$, $\omega(f)$ é um morfismo de C-comódulos. De fato, graças a naturalidade de δ temos:

$$\begin{tikzcd}
\omega(X) \arrow[r, "\omega(f)"] \arrow[d, "\delta_X"'] & \omega(Y) \arrow[d, "\delta_Y"] \\
\omega(X)\otimes C \arrow[r, "\omega(f)\otimes Id_C"'] & \omega(Y)\otimes C
\end{tikzcd}$$

Com isso construímos um funtor $I_C : \mathscr{C} \to \mathscr{M}^C$ satisfazendo $U_C I_C = \omega$. Em particular ele define um morfismo em $\underline{Tan}$ de $(\mathscr{C},\omega)$ para $(\mathscr{M}^C, U_C)$.

O próximo passo será verificarmos que o morfismo $[I_C, 1] : (\mathscr{C},\omega) \to (\mathscr{M}^C, U_C)$, com $1 : \omega \cong U_C I_C$ a transformação natural identidade, resolve o problema universal da unidade definida pelo funtor $\mathscr{M}$. Desta forma, definindo assim um adjunto à esquerda para ele.

Para isso, seja $[T,\tau] : (\mathscr{C},\omega) \to (\mathscr{M}^B, U_B)$ um morfismo em $\underline{Tan}$, com B uma coálgebra. Seja $\delta^B : U_B \Rightarrow U_B \otimes B$ a transformação natural que relaciona a estrutura dos B-comódulos. Assim, podemos dar uma estrutura de B-comódulo à $\omega(X)$ para todo $X \in C$ a partir da transformação natural:

$$\omega \xRightarrow{\ \tau\ } U_B T \xRightarrow{\ \delta^B_T\ } U_B T \otimes B \xRightarrow{\ \tau^{-1}\otimes Id_B\ } \omega \otimes B$$

Vejamos que existe um único morfismo de coálgebras $f : C \to B$ tal que satisfaça $[\mathscr{M}^f, \imath][I_C, 1] = [T,\tau]$. Isso de fato é uma igualdade em $\underline{Tan}$, exigindo a existência de $\hat{\tau} : \mathscr{M}^f I_C \Rightarrow T$ satisfazendo $U_B\hat{\tau} = \tau$, isto é, τ é um morfismo de B-comódulo.

Assim, tudo o que precisamos fazer é mostrar a existência do único morfismo de coálgebras $f : C \to B$ tal que

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, Rightarrow, "\delta^{\omega}"] \arrow[d, Rightarrow, "\tau"'] & \omega \otimes C \arrow[r, Rightarrow, "1_{\omega}\otimes f"] & \omega \otimes B \arrow[d, Rightarrow, "\tau\otimes Id_B"] \\
U_B T \arrow[rr, Rightarrow, "\delta_T^B"'] & & U_B T \otimes B
\end{tikzcd}$$

comuta, e, claro, mostraremos que a forma com que f foi definida, independe do representante para $[T, \tau]$.

Primeiro, da bijeção $Nat(\omega, \omega \otimes B) \to Hom(C,B)$, existe um único morfismo $f : C \to B$ (até então, morfismo de $\mathbb{k}$-linear) tal que $\Theta_B(f) = (\tau^{-1} \otimes Id_B)\delta_T^B\tau$. O que mostra a comutatividade do diagrama acima. Além disso, tal f é um morfismo de coálgebras, pois:

$$\begin{aligned}
\Theta_{B\otimes B}((f \otimes f)\Delta_C) &= (\Theta_B(f) \otimes Id_B)\Theta_B(f) \\
&= ((\tau^{-1} \otimes Id_B)\delta_T^B \otimes Id_B)(\tau \otimes Id_B)(\tau^{-1} \otimes Id_B)\delta_T^B\tau \\
&= (\tau^{-1} \otimes Id_B \otimes Id_B)(\delta_T^B \otimes Id_B)\delta_T^B\tau \\
&\overset{(i)}{=} (\tau^{-1} \otimes Id_B \otimes Id_B)(1_T \otimes \Delta_B)\delta_T^B\tau \\
&= (1_{\omega} \otimes \Delta_B)(\tau^{-1} \otimes Id_B)(\delta_T^B)\tau \\
&= (1_{\omega} \otimes \Delta_B)\Theta_B(f) \\
&= \Theta_{B\otimes B}(\Delta_B \circ f)
\end{aligned}$$

no qual, (i) se refere a um dos axiomas de B-comódulos. E mais,

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mathbb{k}}(\varepsilon_B \circ f) &= (1_{\omega} \otimes \varepsilon_B)(1_{\omega} \otimes f)\delta^{\omega} \\
&= (1_{\omega} \otimes \varepsilon_B)(\tau^{-1} \otimes Id_B)(\delta_T^B)\tau \\
&= \tau^{-1}(1_T \otimes \varepsilon_B)\delta_T^B\tau \\
&\overset{(ii)}{=} \tau^{-1}1_T\tau \\
&= 1_{\omega} = \Theta_{\mathbb{k}}(\varepsilon_C)
\end{aligned}$$

sendo (ii) referente a um dos axiomas de B-comódulos. Portanto temos a unicidade do morfismo de cóalgebra f, o qual satisfaz o último diagrama.

Agora, vejamos que f independe do representante $[T, \tau]$. De fato, supondo $[T', \tau'] = [T, \tau]$ em <u>*Tan*</u> e seja $\varphi : T \Rightarrow T'$ isomorfismo natural, tal que $(T, \tau) \overset{\varphi}{\sim} (T', \tau')$, isto é, satisfaz o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, Rightarrow, "\tau"] \arrow[dr, Rightarrow, "\tau'"'] & U_B T \arrow[d, Rightarrow, "U_B\varphi"] \\
& U_B T'.
\end{tikzcd}$$

Então, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
 & U_BT \arrow[r, Rightarrow, "\delta^B_T"] \arrow[dd, Rightarrow, "U_B\varphi"'] & U_BT \otimes B \arrow[dd, Rightarrow, "U_B\varphi\otimes Id_B"] & \\
\omega \arrow[ur, Rightarrow, "\tau"] \arrow[dr, Rightarrow, "\tau^{'}"'] & & & \omega \otimes B \arrow[ul, Rightarrow, "\tau\otimes Id_B"'] \arrow[dl, Rightarrow, "\tau^{'}\otimes Id_B"] \\
 & U_BT^{'} \arrow[r, Rightarrow, "\delta^B_T"'] & U_BT^{'} \otimes B &
\end{tikzcd}$$

pois, os triângulos esquerdo e direito comutam pela definição de φ, no qual o segundo se dá pela definição de φ aplicado no funtor $\_ \otimes Id_B$. Sendo φ um morfismo em $\mathscr{M}^B$ (quando avaliado em um objeto de $\mathscr{C}$) e $(U_BT, \delta^B_T), (U_BT^{'}, \delta^B_{T^{'})} \in \mathscr{M}^B$, temos, do fato de φ ser um morfismo de B-comódulo (à direita) que o quadrilátero do centro comuta.

Portanto, o morfismo f definido acima não depende da escolha de (T, τ) ou $(T^{'}, \tau^{'})$ como representante de $[T, \tau]$.

Concluímos então que, para todo $(\mathscr{C}, \omega) \in \underline{Tan}$ e $C = coend(\omega)$ definimos o morfismo $[I_C,1] : (\mathscr{C}, \omega) \to (\mathscr{M}^C, U_C)$ e verificamos que existe um único morfismo de coálgebras $f : C \to B$ tal que $[\mathscr{M}^f, \imath][I_C, 1] = [T, \tau]$. Sendo assim, $[I_C, 1]$ resolve o problema universal da unidade e portanto $\mathscr{M}-$ é adjunto à direita do funtor $coend(\_)$.

$\blacksquare$

Corolário 4.1.8. *O funtor coend(_) define um adjunto à esquerda do funtor $\mathscr{M}- : Coalg \to \underline{Tan}_0$, sendo $\underline{Tan}_0$ a categoria que possui os mesmos objetos de $\underline{Tan}$, mas os morfismos são somente os funtores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ que satisfaçam $\omega = \omega^{'}F$.*

Demonstração. Neste caso, do Teorema anterior, basta tomar $\tau = 1$ e a igualdade $\mathscr{M}^f I_C = T$ e a partir daí a demonstração segue análoga. $\blacksquare$

Observação 4.1.9. *Até então temos como resultados que, dado $(\mathscr{C}, \omega) \in \underline{Tan}$, o coend$(\omega)$ é uma coálgebra e o morfismo $\delta^\omega_X : \omega(X) \to \omega(X) \otimes coend(\omega)$ é a coação do coend(ω)-comódulo $\omega(X)$. Então, o morfismo $f = coend(F, \zeta)$ pode ser descrito como:*

$$\delta^\gamma_{F(X)}\zeta(x) = \zeta(x_{(0)}) \otimes f(x_{(1)}).$$

Os próximos resultados nos darão formas de calcular exemplos de coálgebras de coendomorfismo de $\omega = (\mathscr{C}, \omega)$.

Proposição 4.1.10. *Sejam C uma coálgebra e M um $\Bbbk$-espaço vetorial de dimensão finita. Então, $M \in \mathscr{M}^C$ se, e somente se, existe $\Phi : M^* \otimes M \to C$ morfismo de coálgebra.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Por hipótese, $M \in \mathscr{M}^C$ e assim existe a coação (utilizaremos os índices da notação de Sweedler para comódulos na parte superior do elemento, para que não haja confusão):

$$\begin{array}{rccc} \rho : & M & \to & M \otimes C \\ & m & \mapsto & m^{(0)} \otimes m^{(1)}. \end{array}$$

Vejamos que $M^* \otimes M$ é uma coálgebra. De fato sejam, $\{m_i\}_{i=1}^n \subseteq M$ e $\{m_i^*\}_{i=1}^n \subseteq M^*$ bases, respectivamente, de M e M^*, isto é, $m_i^*(m_j) = \delta_{ij}$. Definimos:

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & M^* \otimes M & \to & M^* \otimes M \otimes M^* \otimes M \\ & \varphi \otimes m & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi \otimes m_i \otimes m_i^* \otimes m \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon : & M^* \otimes M & \to & \Bbbk \\ & \varphi \otimes m & \mapsto & \varphi(m). \end{array}$$

Mostremos que Δ e ε satisfazem os diagramas da comultiplicação e counidade. De fato, sejam $\varphi \in M^*$ e $m \in M$. Então

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes Id_{M^* \otimes M})\Delta(\varphi \otimes m) &= (\Delta \otimes Id_{M^* \otimes M}) \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi \otimes m_i \otimes m_i^* \otimes m \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi \otimes m_i \otimes m_i^* \otimes m_i \otimes m_i^* \otimes m. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (Id_{M^* \otimes M} \otimes \Delta)\Delta(\varphi \otimes m) &= (Id_{M^* \otimes M} \otimes \Delta) \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi \otimes m_i \otimes m_i^* \otimes m \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi \otimes m_i \otimes m_i^* \otimes m_i \otimes m_i^* \otimes m, \end{aligned}$$

logo, $(\Delta \otimes Id_{M^* \otimes M})\Delta = (Id_{M^* \otimes M} \otimes \Delta)\Delta$. Além disso,

$$\begin{aligned} (\varepsilon \otimes Id_{M^* \otimes M})\Delta(\varphi \otimes m) &= (\varepsilon \otimes Id_{M^* \otimes M}) \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi \otimes m_i \otimes m_i^* \otimes m \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi(m_i) \otimes m_i^* \otimes m \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi(m_i) m_i^* \otimes m = \varphi \otimes m, \end{aligned}$$

portanto, $(\varepsilon \otimes Id_{M^* \otimes M})\Delta = Id_{M^* \otimes M}$. De forma análoga, $(Id_{M^* \otimes M} \otimes \varphi)\Delta = Id_{M^* \otimes M}$. Então, $(M^* \otimes M, \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra.

Afirmamos que

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & M^* \otimes M & \to & C \\ & \varphi \otimes m & \mapsto & \varphi(m^{(0)})m^{(1)} \end{array}$$

é um morfismo de coálgebras. Notemos que,

$$\begin{aligned}(\Phi \otimes \Phi)\Delta(\varphi \otimes m) &= (\Phi \otimes \Phi)\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi \otimes m_i \otimes m_i^* \otimes m\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Phi(\varphi \otimes m) \otimes \Phi(m_i^* \otimes m) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi(m_i^{(0)})m_i^{(1)} \otimes m_i^*(m^{(0)})m^{(1)}.\end{aligned}$$

Esquecendo um pouco o somatório, pela notação de Sweedler e do fato de que $m_i^*(v)m_i^{(0)} \otimes m_i^{(1)} = v^{(0)} \otimes v^{(1)}$ para todo $v \in M$. Retornando para a equação, temos

$$\begin{aligned}(\Phi \otimes \Phi)\Delta(\varphi \otimes m) &= \sum_{i=1}^{n} \varphi(m_i^{(0)})m_i^{(1)} \otimes m_i^*(m^{(0)})m^{(1)} \\ &= \varphi(m^{(0)(0)})m^{(0)(1)} \otimes m^{(1)} \\ &= \varphi(m^{(0)})m^{(1)}_{(1)} \otimes m^{(1)}_{(2)} \\ &= \Delta_C(\varphi(m^{(0)}m^{(1)}) \\ &= \Delta_C\Phi(\varphi \otimes m).\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\varepsilon_C\Phi(\varphi \otimes m) &= \varepsilon_C(\varphi(m^{(0)})m^{(1)}) \\ &= \varphi(m^{(0)}\varepsilon(m^{(1)})) \\ &= \varphi(m).\end{aligned}$$

Logo, Φ é um morfismo de coálgebras.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que Φ seja um morfismo de coálgebras. Definimos $\rho : M \to M \otimes C$ como sendo:

$$\rho : M \xrightarrow{cv_M \otimes Id_M} M \otimes M^* \otimes M \xrightarrow{Id_M \otimes \Phi} M \otimes C$$

isto é, sendo $m \in M$,

$$\rho(m) = \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes \Phi(m_i^* \otimes m).$$

Vejamos que (M,ρ) é um C-comódulo à direita.

$$\begin{aligned}
(\rho\otimes Id_C)\rho(m) &= \sum_{i=1}^{n}\rho(m_i)\otimes\Phi(m_i^*\otimes m)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n} m_j\otimes\Phi(m_j^*\otimes m_i)\otimes\Phi(m_i^*\otimes m)\\
&= \sum_{j=1}^{n} m_j\otimes(\Phi\otimes\Phi)\Delta_{M^*\otimes M}(m_j^*\otimes m)\\
&= \sum_{j=1}^{n} m_j\otimes\Delta_C\Phi(m_j^*\otimes m)\\
&= (Id_M\otimes\Delta_C)\left(\sum_{j=1}^{n} m_j\otimes\Phi(m_j^*\otimes m)\right)\\
&= (Id_M\otimes\Delta_C)\rho(m)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(Id_M\otimes\varepsilon_C)\rho(m) &= (Id_M\otimes\varepsilon_C)\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\otimes\Phi(m_i^*\otimes m)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i\otimes\varepsilon_C\Phi(m_i^*\otimes m)\\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i\otimes\varepsilon_C(m_i^*\otimes m)\\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i\otimes m_i^*(m)\\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i m_i^*(m) = m.
\end{aligned}$$

Logo, (M,ρ) é um C-comódulo à direita. ■

Lema 4.1.11. *Seja $(\mathscr{C},\omega)\in Tan$ tal que, $\omega(X)\in Vect^{(f)}$ e $X, Y\in\mathscr{C}$. Então o $coend(\omega)$ é um $\Bbbk$-espaço vetorial da forma:*

$$coend(\omega)\cong\bigoplus_{X\in\mathscr{C}}\omega(X)^*\otimes\omega(X)\Big/\mathscr{N}_\omega$$

sendo $\mathscr{N}_\omega =<\omega(f)^*\varphi\otimes v-\varphi\otimes\omega(f)v>$, tais que $v\in\omega(X), \varphi\in\omega(Y)^*, f\in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$.

Demonstração. Como resultado da Proposição 3.0.10, $coker(\varphi_1 – \varphi_2) = coeq(\varphi_1,\varphi_2)\cong coend(\omega)$ sendo

$$\begin{array}{rccc}
\varphi_1-\varphi_2: & \omega(Y)^*\otimes\omega(X) & \to & \bigoplus_{X\in\mathscr{C}}\omega(X)^*\otimes\omega(X)\\
& \varphi\otimes v & \mapsto & <\omega(f)^*\varphi\otimes v-\varphi\otimes\omega(f)v>
\end{array}$$

tais que $v \in \omega(X), \varphi \in \omega(Y)^*$ e $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$. Sendo assim,

$$coend(\omega) \cong coker(\varphi_1 - \varphi_2) = \bigoplus_{X \in \mathscr{C}} \omega(X)^* \otimes \omega(X) \big/ \mathscr{N}_{\omega}.$$

■

Com isso, nós temos uma nova caracterização a partir do $coend(\omega)$-comódulo $\omega(X)$:

Definição 4.1.12. *Seja $(\mathscr{C}, \omega) \in \underline{Tan}$. Da definição, $\mu_X = (ev_{\omega(X)} \otimes Id_{coend(\omega)}) \circ (Id_{\omega(X)^*} \otimes \delta_X)$ para todo $X \in \mathscr{C}$. Isto é, do Lema anterior, para quaisquer $\varphi \in \omega(X)^*$ e $v \in \omega(X)$ temos:*

$$\begin{aligned}
\mu_X(\varphi \otimes v) &= (ev_{\omega(X)} \otimes Id_{coend(\omega)}) \circ (Id_{\omega(X)^*} \otimes \delta_X)(\varphi \otimes v) \\
&= ev_{\omega(X)} \otimes Id_{coend(\omega)})(\varphi \otimes v^{(0)} \otimes v^{(1)}) \\
&= \varphi(v^{(0)})v^{(1)}.
\end{aligned}$$

Além disso, como visto anteriormente, $\omega(X)$ é um $coend(\omega)$-comódulo à direita. Sendo $\omega(X)^* \otimes \omega(X)$ uma coálgebra, então, denotamos:

$$\begin{array}{rccc}
\mu_X : & \omega(X)^* \otimes \omega(X) & \to & coend(\omega) \\
& \varphi \otimes v & \mapsto & [\varphi | v] = \varphi(v^{(0)})v^{(1)}
\end{array}$$

o qual, da Proposição 4.1.10, é morfismo de coálgebra.

Observação 4.1.13. *Com essa nova representação do $coend(\omega)$, sendo $\sum_{i=1}^{n} x^i \otimes x_i$ base de $\omega(X)^* \otimes \omega(X)$, conseguimos expressar a coação de $\omega(X)$ por*

$$\begin{aligned}
\delta_X^{\omega}(v) &= (Id_{\omega(X)} \otimes \mu_X) \circ (cv_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)})(v) \\
&= (Id_{\omega(X)} \otimes \mu_X) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x^i \otimes v \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes [x^i | v]
\end{aligned}$$

para todo $v \in \omega(X)$, isto é,

$$\begin{array}{rccc}
\delta_X^{\omega} : & \omega(X) & \to & \omega(X) \otimes coend(\omega) \\
& v & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes [x^i | v].
\end{array}$$

Além disso, da estrutura da coálgebra $(coend(\omega), \Delta, \varepsilon)$ definidas anteriormente, com

$$\Delta([\varphi \otimes v]) = (\mu_X \otimes \mu_X) \circ (Id_{\omega(X)^*} \otimes cv_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)})(\varphi \otimes v)$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mu_X \otimes \mu_X)\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi \otimes x_i \otimes x^i \otimes v\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} [\varphi | x_i] \otimes [x^i | v]
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{array}{rccc}
\Delta : & coend(\omega) & \to & coend(\omega) \otimes coend(\omega)\\
& [\varphi|v] & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} [\varphi|x_i] \otimes [x^i|v]
\end{array}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\varepsilon([\varphi|v]) &= ev_{\omega(X)}(\varphi \otimes v)\\
&= \varphi(v)
\end{aligned}
$$

para todo $\varphi \otimes v \in \omega(X)^* \otimes \omega(X)$*, isto é,*

$$
\begin{array}{rccc}
\varepsilon : & coend(\omega) & \to & \Bbbk\\
& [\varphi|v] & \mapsto & \varphi(v).
\end{array}
$$

Além disso, fixando $\{x_i\}_{i=1}^n$ *base de* $\omega(X)$*,* $\{x^i\}_{i=1}^n$ *sua base dual e* $T_{ij} = [x^i|x_j]$ *temos:*

$$
\begin{array}{rccc}
\delta_X^{\omega} : & \omega(X) & \to & \omega(X) \otimes coend(\omega)\\
& x_j & \mapsto & \sum_{i,j=1}^{n} x_i \otimes T_{ij}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccc}
\Delta : & coend(\omega) & \to & coend(\omega) \otimes coend(\omega)\\
& T_{ij} & \mapsto & \sum_{k,i,j=1}^{n} T_{ik} \otimes T_{kj}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccc}
\varepsilon : & coend(\omega) & \to & \Bbbk\\
& T_{ij} & \mapsto & x^i(x_j) = \delta_{ij}.
\end{array}
$$

Com essa estrutura da coálgebra $coend(\omega)$ *nós podemos definir a* (n,n)*-coálgebra matricial* $(M_n^{coend(\omega)}(\Bbbk), \Delta, \varepsilon)$.

Exemplo 4.1.14. *Sejam* $Rep_{\Bbbk}(G)$*, a categoria das representações* $\Bbbk$*-lineares do grupo* G *e* $R_{\Bbbk}(G)$ *o conjunto das funções representativas de* G*, isto é,* $R_{\Bbbk}(G) = \{f : G \to \Bbbk \mid \exists \pi : G \to GL(V), V \in Vect^{(f)}, v \in V, \varphi \in V^* \text{ tal que } f(g) = \varphi_f(\pi_f(g)v_f)\}$ *e o funtor esquecimento* $\omega : Rep_{\Bbbk}(G)^{(f)} \to Vect^{(f)}$*. Então,* $coend(\omega) \cong R_{\Bbbk}(G)$*.*

Do lema anterior,

$$
coend(\omega) \cong \bigoplus V^* \otimes V \Big/ \mathcal{N}_U
$$

sendo $\mathcal{N}_U =< f^*\varphi \otimes v - \varphi \otimes f(v) \mid v \in V, \varphi \in W^*, f : (V,\pi) \to (W,\upsilon) >$.

Definimos:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & R_{\Bbbk}(G) & \to & coend(\omega) \\ & f & \mapsto & [\varphi_f^{(\pi)}|v_f^{(\pi)}] \end{array}$$

tal que $\varphi_f \otimes v_f \in V^*_{\pi_f} \otimes V_{\pi_f}$.

Mesmo parecendo um abuso de notação, existe a necessidade de salientarmos a interdependência de f, π_f *e* v_f, *pois ao tomarmos* $\omega(V,\pi)$ *e* $\omega(V,\rho)$ *temos como imagem* V.

Vejamos que $(R_{\Bbbk}(G), \Delta, \varepsilon)$ *é uma coálgebra, com*

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon: & R_{\Bbbk}(G) & \to & \Bbbk \\ & f & \mapsto & f(e) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} C: & R_{\Bbbk}(G) & \to & R_{\Bbbk}(G \times G) \\ & f & \mapsto & f(g,h) = f(gh). \end{array}$$

Vejamos que C *é* $\Bbbk$*-linear. De fato,*

$$\begin{aligned} C(\beta f + m) &= (\beta f + m)(g,h) \\ &= (\beta f)(g,h) + m(g,h) \\ &= \beta(f(gh)) + m(gh) \\ &= \beta(f(g,h)) + m(g,h) \\ &= \beta(C(f)) + C(m)) \end{aligned}$$

e, sendo $\{v_i\}_{=1}^n$ *base de* $V \in Vect^{(f)}$ *com* $\{v^i\}_{=1}^n$ *base dual. Assim, dados* $x, y \in G$

$$\begin{aligned} f(xy) &= \varphi_f(\pi_f(xy)v_f) \\ &= \varphi_f\left(\pi_f(x)\sum_{i=1}^n v^i(\pi_f(y)v_f)v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi_f(\pi_f(x)v_i)v^i(\pi_f(y)v_f) \end{aligned}$$

definindo $f_i^{(1)}(x) = \varphi_f(\pi_f(x)v_i)$ *e* $f_i^{(2)}(y) = v^i(\pi_f(y)v_f)$, *as quais são representações. Do isomorfismo em Vect, podemos reescrever* $f(xy) \mapsto \sum_{i=1}^n f_i^{(1)}(x) \otimes f_i^{(2)}(y)$. *Assim definimos*

$$\begin{array}{rccc} \Delta: & R_{\Bbbk}(G) & \to & R_{\Bbbk}(G) \otimes R_{\Bbbk}(G) \\ & f & \mapsto & f(x,y) \mapsto \sum_{i=1}^n f_i^{(1)}(x) \otimes f_i^{(2)}(y). \end{array}$$

Vejamos que $R_{\Bbbk}(G)$ *é uma coálgebra. De fato, omitindo os somatórios temos:*

$$(\Delta \otimes Id_{R_{\Bbbk}(G)})\Delta(f)(x,y,z) = f^{(1)(1)}(x)f^{(1)(2)}(y)f^{(2)}(z)$$

$$= f(xyz)$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}(Id_{R_{\Bbbk}(G)} \otimes \Delta)\Delta(f)(x,y,z) &= f^{(1)}(x)f^{(2)(1)}(y)f^{(2)(2)}(z)\\ &= f(xyz).\end{aligned}$$

Logo, $(\Delta \otimes Id_{R_{\Bbbk}(G)})\Delta = (Id_{R_{\Bbbk}(G)} \otimes \Delta)\Delta$. *Além disso,*

$$\begin{aligned}(Id_{R_{\Bbbk}(G)}\varepsilon)\Delta(f) &= f^{(1)} \otimes f^{(2)}(e)\\ &= f^{(1)}f^{(2)}(e)\\ &= f \otimes 1,\end{aligned}$$

pois, $f^{(1)}(x)f^{(2)}(e) = f(xe) = f(x)$, *para todo* $x \in G$. *De forma análoga,* $(\varepsilon \otimes Id_{R_{\Bbbk}(G)})\Delta(f) = 1 \otimes f$ *e portanto,* $(R_{\Bbbk}(G), \Delta, \varepsilon)$ *é uma coálgebra.*

Agora, vejamos que $\Phi : R_{\Bbbk}(G) \to coend(\omega)$ *é um isomorfismo de coálgebras.*

Afirmamos que Φ *é um morfismo de coálgebras. Sendo a coálgebra* $(coend(\omega), \hat{\Delta}, \hat{\varepsilon})$ *temos:*

$$\begin{aligned}\hat{\Delta} \circ \Phi(f)(x,y) &= \hat{\Delta}\left([\varphi_f^{\pi}|v_f^{\pi}]\right)\\ &= [\varphi_f^{\pi}|v_i] \otimes [v^i|v_f^{\pi}]\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}(\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta(f(x,y)) &= \sum_{i=1}^{n} \Phi(\varphi_f(\pi_f(x)v_i)) \otimes \Phi(v^i(\pi_f(y)v_f))\\ &= [\varphi_f^{\pi}|v_i] \otimes [v^i|v_f^{\pi}].\end{aligned}$$

Além disso, sabendo que $f(e) = \varphi_f(\pi_f(e)v_f) = \varphi_f(v_f$, *temos:*

$$\begin{aligned}\varepsilon(f) &= f(e)\\ &= \varphi_f(v_f)\\ &= \hat{\varepsilon} \circ \Phi(f).\end{aligned}$$

Por fim, nos resta verificar que Φ *é um isomorfismo. Para isso, definimos:*

$$\begin{array}{rccc}\Psi : & coend(\omega) & \to & R_{\Bbbk}(G)\\ & [\varphi^{\pi}|v^{\pi}] & \mapsto & f_{[\varphi|v]}(g) = \varphi(\pi(g)v).\end{array}$$

Mostremos que $\Phi = (\Psi)^{-1}$. *De fato,*

$$\begin{aligned}\Phi \circ \Psi\left([\varphi^{\pi}|v^{\pi}]\right) &= \Phi(f_{[\varphi|v]}(g))\\ &= [\varphi^{\pi}|v^{\pi}]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Psi \circ \Phi(f) &= \Psi([\varphi_f^{\pi}|v_f^{\pi}])\\ &= f.\end{aligned}$$

Portanto, $\Phi : R_{\Bbbk}(G) \to coend(\omega)$ *é um isomorfismo de coálgebras.*

4.2 RECONSTRUÇÃO DE BIÁLGEBRAS

Nesta seção veremos que, sendo $(\mathscr{C}, \omega) \in \underline{Tan}$. Se $\mathscr{C} = (\mathscr{C}, \otimes, \alpha, \mathbb{I}, l, r)$ é uma categoria monoidal e (ω, ξ, ξ_0) é um funtor monoidal, então *coend*(ω) é na verdade uma biálgebra.

Teorema 4.2.1. *A categoria $\underline{Tan}$ possui uma estrutura de categoria monoidal com o objeto unidade $(\mathbb{I}, \mathbb{1}) \in \underline{Tan}$ nos quais $\mathbb{I} = \{*\}$ e $\mathbb{1}$ o funtor constante com a constante $\mathbb{k}$ e o produto tensorial:*

$$(\mathscr{C}, \omega) \boxtimes (\mathscr{D}, \gamma) = (\mathscr{C} \times \mathscr{D}, \omega \otimes \gamma)$$

sendo o funtor:

$$\begin{array}{rccc} \omega \otimes \gamma : & \mathscr{C} \times \mathscr{D} & \to & Vect^{(f)} \\ & (c, d) & \mapsto & \omega(c) \otimes \gamma(d). \end{array}$$

O tensor dos morfismos em $\underline{Tan}$ fica definido como:

$$\begin{tikzcd} (\mathscr{C}, \omega) \boxtimes (\mathscr{D}, \gamma) \arrow[d, "{[F,\zeta]}"', shift right=6ex] \arrow[d, "{[G,\Lambda]}", shift left=6ex] \arrow[r, equal] & (\mathscr{C} \times \mathscr{D}, \omega \otimes \gamma) \arrow[d, "{(F\times G, \zeta\otimes\Lambda)}"] \\ (\mathscr{C}', \omega') \boxtimes (\mathscr{D}', \gamma') \arrow[r, equal] & (\mathscr{C}' \times \mathscr{D}', \omega' \otimes \gamma'). \end{tikzcd}$$

Demonstração. Vejamos primeiro que $\zeta \otimes \Lambda : \omega \otimes \lambda \Rightarrow \omega' F \otimes \gamma' G$ é uma transformação natural. De fato, sejam $X, X' \in \mathscr{C}$ e $Y, Y' \in \mathscr{D}$ tais que $f : X \to X'$ e $g : Y \to Y'$. Queremos ver que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \omega(X) \otimes \gamma(Y) \arrow[r, "{(\zeta\otimes\Lambda)_{(X,Y)} = \zeta_X \otimes \Lambda_Y}"] \arrow[d, "\omega(f)\otimes\gamma(g)"'] & \omega' F(X) \otimes \gamma' G(Y) \arrow[d, "\omega' F(f)\otimes\gamma' G(g)"] \\ \omega(X') \otimes \gamma(Y') \arrow[r, "{(\zeta\otimes\Lambda)_{(X',Y')} = \zeta_{X'} \otimes \Lambda_{Y'}}"'] & \omega' F(X') \otimes \gamma' G(Y'). \end{tikzcd}$$

Sendo ζ e Λ transformações naturais, temos:

$$\begin{aligned} (\omega' F(f) \otimes \gamma' G(g))(\zeta_X \otimes \Lambda_Y) &= \omega' F(f)\zeta_X \otimes \gamma' G(g)\Lambda_Y \\ &= (\zeta_{X'}\omega(f)) \otimes (\Lambda_{Y'}\gamma(g)) \\ &= (\zeta_{X'} \otimes \Lambda_{Y'})(\omega(f) \otimes \gamma(g)). \end{aligned}$$

Sendo os funtores $l_{\mathscr{C}}^{Set} : \{*\} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ e $r_{\mathscr{C}}^{Set} : \mathscr{C} \times \{*\} \to \mathscr{C}$ definimos os isomorfismos naturais:

$$L_{(\mathscr{C},\omega)} = (l_{\mathscr{C}}^{Set}, l_\omega) : \quad (\mathbb{I}, \mathbb{1}) \boxtimes (\mathscr{C}, \omega) = (\mathbb{I} \times \mathscr{C}, \mathbb{1} \otimes \omega) \quad \to \quad (\mathscr{C}, \omega)$$

e

$$R_{(\mathscr{C},\omega)} = (r^{Set}_{\mathscr{C}}, r_\omega) : \quad (\mathscr{C},\omega) \boxtimes (\mathbb{I},\mathbb{1}) = (\mathscr{C} \times \mathbb{I}, \omega \otimes \mathbb{1}) \quad \to \quad (\mathscr{C},\omega),$$

nos quais, $l_{\omega(\_)} : \Bbbk \otimes \omega(\_) \Rightarrow \omega(\_)$ e $r_{\omega(\_)} : \omega(\_) \otimes \Bbbk \Rightarrow \omega(\_)$ são isomorfismos naturais. Sendo assim, respectivamente, temos:

$$(\mathbb{1} \otimes \omega)(*, C) = \Bbbk \otimes \omega(C) \cong \omega(C) \in Vect^{(f)}$$

e

$$(\omega \otimes \mathbb{1})(C,*) = \omega(C) \otimes \Bbbk \cong \omega(X) \in Vect^{(f)}.$$

Assim ficam definidos os isomorfismos naturais $L_{(\mathscr{C},\omega)} : \mathbb{1} \otimes \omega \Rightarrow \omega$ e $R_{(\mathscr{C},\omega)} : \omega \otimes \mathbb{1} \Rightarrow \omega$.

Quanto ao associador α o mesmo fica bem definido visto que estamos trabalhando com produto cartesiano de conjuntos e o produto tensorial em *Vect*. Sendo assim, podemos afirmar que $(\underline{Tan}, \boxtimes, \alpha, (\mathbb{I}, \mathbb{1}), L, R)$ é uma categoria monoidal. ■

Definição 4.2.2. *Denotamos $\underline{Tan}_{\otimes}$ a categoria das álgebras (e morfismos de álgebras) na categoria monoidal $\underline{Tan}$.*

Lema 4.2.3. *Seja $(\mathscr{C}, \omega) \in \underline{Tan}$. Se $\mathscr{C}$ e ω são monoidais, então $(\mathscr{C}, \omega) \in \underline{Tan}_{\otimes}$.*

Demonstração. Sejam $(\mathscr{C}, \otimes, \mathbb{I}, l, r)$ uma categoria monoidal e (ω, ξ, ξ_0) um funtor monoidal, sendo $\xi : \omega \otimes \omega \cong \omega \circ \otimes$ e $\xi_0 : \Bbbk \cong \omega(\mathbb{I})$.

Definimos o morfismo em $\underline{Tan}$:

$$(\otimes, \xi) : \quad (\mathscr{C}, \omega) \boxtimes (\mathscr{C}, \omega) = (\mathscr{C} \times \mathscr{C}, \omega \otimes \omega) \quad \to \quad (\mathscr{C}, \omega).$$

Afirmamos que $(\otimes, \xi)$ define a multiplicação em $\underline{Tan}_{\otimes}$, isto é,

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{C},\omega) \boxtimes (\mathscr{C},\omega) \boxtimes (\mathscr{C},\omega) \arrow[r, "(\otimes\xi)\boxtimes(Id_{\mathscr{C}},1_\omega)"] \arrow[d, "(Id_{\mathscr{C}},1_\omega)\boxtimes(\otimes,\xi)"'] & (\mathscr{C},\omega) \boxtimes (\mathscr{C},\omega) \arrow[d, "(\otimes,\xi)"] \\
(\mathscr{C},\omega) \boxtimes (\mathscr{C},\omega) \arrow[r, "(\otimes,\xi)"'] & (\mathscr{C},\omega).
\end{tikzcd}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(\otimes, \xi)((\otimes,\xi) \boxtimes (Id_{\mathscr{C}},1_\omega)) &= (\otimes, \xi)(\otimes \times Id_{\mathscr{C}},\xi \otimes 1_\omega) \\
&= (\otimes(\otimes \times Id_{\mathscr{C}}),\xi(\xi \otimes 1_\omega)) \\
&\overset{\alpha}{\sim} (\otimes(Id_{\mathscr{C}} \times \otimes), \xi(1_\omega \otimes \xi)) \qquad (14)\\
&= (\otimes, \xi)((Id_{\mathscr{C}} \times \otimes), (1_\omega \otimes \xi)) \\
&= (\otimes, \xi)((Id_{\mathscr{C}}, 1_\omega) \boxtimes (\otimes, \xi)).
\end{aligned}$$

Do associador de $\mathscr{C}$, temos o isomorfismo $\alpha : \otimes \circ (Id_{\mathscr{C}} \times \otimes) \cong \otimes(\otimes \times Id_{\mathscr{C}})$. Assim, do fato de ω ser monoidal, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\omega \otimes \omega \otimes \omega \arrow[r, Rightarrow, "\xi(\xi\otimes 1_\omega)"] \arrow[dr, Rightarrow, "\xi(1_\omega\otimes\xi)"'] & \omega \otimes (\otimes \times Id_{\mathscr{C}}) \arrow[d, Rightarrow, "\omega\alpha"] \\
 & \omega \otimes (Id_{\mathscr{C}} \times \otimes).
\end{tikzcd}$$

O que expressa a equivalência em (14).

Agora, seja o funtor $\psi : \{*\} \to \mathscr{C}$ tal que $\psi(*) = \mathbb{I}_{\mathscr{C}}$ e $\psi(Id_*) = Id_{\mathbb{I}_{\mathscr{C}}}$.

$$(\psi,\chi) : \quad (\{*\},\mathbb{1}) \quad \to \quad (\mathscr{C},\omega),$$

no qual $\chi : \mathbb{1} \Rightarrow \omega\psi$ acaba tendo somente um morfismo $(\chi)_* : Hom_{Vect}(\mathbb{1}(*) = \mathbb{k}, \omega(\psi)(*) = \omega(\mathbb{I}_{\mathscr{C}}))$, sendo este ξ_0.

Afirmamos que (ψ,χ) é a unidade em $\underline{Tan}_{\otimes}$, isto é,

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathscr{C},\omega)\otimes(\mathscr{C},\omega) \arrow[dd, "(\otimes{,}\xi)"] & \\
(\mathbb{I},\mathbb{1})\otimes(\mathscr{C},\omega) \arrow[ur, "(\psi{,}\chi)\boxtimes(Id_{\mathscr{C}}{,}1_\omega)"] \arrow[dr, "L_{(\mathscr{C},\omega)}"'] & & (\mathscr{C},\omega)\otimes(\mathbb{I},\mathbb{1}) \arrow[ul, "(Id_{\mathscr{C}}{,}1_\omega)\boxtimes(\psi{,}\chi)"'] \arrow[dl, "R_{(\mathscr{C},\omega)}"] \\
 & (\mathscr{C},\omega) &
\end{tikzcd} .$$

Notemos que,

$$\begin{aligned}
(\otimes,\xi)((\psi,\chi \boxtimes (Id_{\mathscr{C}}, 1_\omega)) &= (\otimes,\xi)(\psi \times Id_{\mathscr{C}}, \chi \otimes 1_\omega) \\
&= (\otimes(\psi \times Id_{\mathscr{C}}), \xi(\chi \otimes 1_\omega)) \\
&\overset{l}{\sim} (\omega l^{Set}, l_\omega) \qquad (15) \\
&= L_{(\mathscr{C},\omega)},
\end{aligned}$$

sendo a equivalência (15) resultado do fato de ω ser um funtor monoidal e assim o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \otimes \omega \arrow[r, Rightarrow, "\xi(\chi\otimes 1_\omega)"] \arrow[dr, Rightarrow, "l_\omega"'] & \omega \otimes (\psi \times Id_{\mathscr{C}}) \arrow[d, Rightarrow, "\omega l"] \\
 & \omega l^{Set}_{\mathscr{C}}.
\end{tikzcd}$$

De forma análoga obtemos que $(\otimes,\xi)((Id_{\mathscr{C}},1_\omega) \boxtimes (\psi,\chi)) = R_{(\mathscr{C},\omega)}$.

Logo, $(\mathscr{C},\omega)$ é uma álgebra em $\underline{Tan}$ e portanto $(\mathscr{C},\omega) \in \underline{Tan}_{\otimes}$. ■

Lema 4.2.4. *Sejam $[F,\zeta] : (\mathscr{C},\omega) \to (\mathscr{D},\omega^{'})$ morfismos em* $\underline{Tan}$*, tais que $(\mathscr{C},\otimes,\mathbb{I}_{\mathscr{C}})$, $(\mathscr{D},\hat{\otimes},\mathbb{I}_{\mathscr{D}})$, (ω,ξ,ξ_0), $(\omega^{'},\xi^{'},\xi_0^{'})$, (F,Ξ,j) e $\zeta : \omega \cong \omega^{'}F$ são monoidais. Então, (F,ζ) é morfismo de álgebras em* $\underline{Tan}$.

Demonstração. Primeiro, da Proposição 2.1.13 a composição dos funtores monoidais $\omega^{'}F$ é também monoidal, com a estrutura $(\omega^{'}F, \omega^{'}\Xi \circ \xi^{'}_{(F\times F)}, \omega^{'}(j) \circ \xi^{'}_0)$.

Vejamos então que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{C},\omega)\boxtimes(\mathscr{C},\omega) \arrow[r, "(F,\zeta)\boxtimes(F,\zeta)"] \arrow[d, "(\otimes,\xi)"'] & (\mathscr{D},\omega^{'})\boxtimes(\mathscr{D},\omega^{'}) \arrow[d, "(\hat{\otimes},\xi^{'})"] \\
(\mathscr{C},\omega) \arrow[r, "(F,\zeta)"'] & (\mathscr{D},\omega^{'}).
\end{tikzcd} \tag{16}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(\hat{\otimes},\xi^{'})((F,\zeta)\boxtimes(F,\zeta)) &= (\hat{\otimes},\xi^{'})(F\times F,\zeta\otimes\zeta)\\
&= (\hat{\otimes}(F\times F),\xi_{(F\times F)}(\zeta\otimes\zeta))\\
&= (F\circ\otimes,\xi_{(F\times F)}(\zeta\otimes\zeta)).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$(F,\zeta)(\otimes,\xi) = (F\otimes,\zeta_{\otimes}\circ\xi).$$

Mas, pelo fato de ζ ser um isomorfismo natural monoidal, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\omega\otimes \arrow[r, Rightarrow, "\zeta\otimes\zeta"] \arrow[d, Rightarrow, "\xi"'] & \omega^{'}F\otimes\omega^{'}F \arrow[r, Rightarrow, "\xi^{'}_{(F\times F)}"] & \omega^{'}(F\otimes F) \arrow[d, Rightarrow, "\omega^{'}\Xi"] \\
\omega\circ\otimes \arrow[rr, Rightarrow, "\zeta_{\otimes}"'] & & \omega^{'}F\otimes.
\end{tikzcd}$$

Sendo assim $(F\otimes,\xi^{'}_{(F\times F)}(\zeta\otimes\zeta)) \overset{\Xi}{\sim} (F\otimes,\zeta_{\otimes}\circ\xi)$ e portanto (16) comuta.

Resta verificarmos a comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{C},\omega) \arrow[rr, "(F,\zeta)"] & & (\mathscr{D},\omega^{'}) \\
& (\{*\},\mathbb{1}) \arrow[ul, "(\psi_{\mathscr{C}},\chi)"] \arrow[ur, "(\psi_{\mathscr{D}},\chi^{'})"'] &
\end{tikzcd}.$$

Para isso, definimos a transformação natural $\beta : F\psi_{\mathscr{C}} \Rightarrow \psi_D$ o qual possui como único (iso)morfismo (quando avaliada em $*$) é $j : F(\mathbb{I}_{\mathscr{C}}) \to Id_{\mathscr{D}}$. Assim, por um lado,

$$(F,\zeta)\circ(\psi_{\mathscr{C}},\chi) = (F\circ\psi_{\mathscr{C}},\zeta_{\psi_{\mathscr{C}}}\chi).$$

Sendo ζ uma isomorfismo natural monoidal, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, Rightarrow, "\chi"] \arrow[drr, Rightarrow, "\chi'"'] & \omega\psi_{\mathscr{C}} \arrow[r, Rightarrow, "\zeta_{\psi_{\mathscr{C}}}"] & \omega' F\psi_{\mathscr{C}} \arrow[d, Rightarrow, "\omega'\beta"] \\ & & \omega'\psi_{\mathscr{D}}. \end{tikzcd}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (F,\zeta)\circ(\psi_{\mathscr{C}},\chi) &= (F\circ\psi_{\mathscr{C}},\zeta_{\psi_{\mathscr{C}}}\chi) \\ &\overset{\beta}{\sim} (\psi_{\mathscr{D}},\chi'). \end{aligned}$$

E assim, concluimos que $[F,\zeta]$ é um morfismo de álgebras, isto é, $[F,\zeta] \in \underline{Tan}_{\otimes}$. ■

Teorema 4.2.5. *O funtor coend é um funtor monoidal.*

Demonstração. Para relembramos, o funtor *coend* é definido como:

$$\begin{array}{cccc} coend(\_): & \underline{Tan} & \to & Coalg \\ & (\mathscr{C},\omega) & & coend(\omega) \\ & {\scriptstyle [F,\zeta]}\downarrow & \mapsto & \downarrow{\scriptstyle coend(F,\zeta)=f} \\ & (\mathscr{D},\gamma) & & coend(\gamma) \end{array}$$

sendo $coend(F,\zeta) = f$ definido unicamente por

$$\Theta^{\omega}_{coend(\gamma)}(f) = (\zeta\otimes Id_{coend(\gamma)})^{-1}(\delta^{\gamma}_{F})\zeta.$$

Queremos verificar que

$$coend(\omega)\otimes coend(\gamma) \cong coend(\mathscr{C}\times\mathscr{D},\omega\otimes\gamma)$$

Como resultado do Lema 4.1.11, podemos definir $\mathscr{N}_{\omega}$ e $\mathscr{N}_{\gamma}$ tais que:

$$coend(\omega) \cong \bigoplus_{X\in\mathscr{C}} \omega(X)^*\otimes\omega(X) \Big/ \mathscr{N}_{\omega}$$

e

$$coend(\gamma) \cong \bigoplus_{Y\in\mathscr{D}} \gamma(Y)^*\otimes\gamma(Y) \Big/ \mathscr{N}_{\gamma}.$$

O primeiro resultado que temos é:

$$\left(\bigoplus_{X\in\mathscr{C}} \omega(X)^* \otimes \omega(X)\right) \otimes \left(\bigoplus_{Y\in\mathscr{D}} \gamma(Y)^* \otimes \gamma(Y)\right) \cong$$
$$\cong \bigoplus_{X\in\mathscr{C}} \bigoplus_{Y\in\mathscr{D}} \omega(X)^* \otimes \omega(X) \otimes \gamma(Y)^* \otimes \gamma(Y)$$
$$\cong \bigoplus_{(X,Y)\in\mathscr{C}\times\mathscr{D}} \gamma(Y)^* \otimes \omega(X)^* \otimes \omega(X) \otimes \gamma(Y)$$
$$\cong \bigoplus_{(X,Y)\in\mathscr{C}\times\mathscr{D}} (\omega(X) \otimes \gamma(Y))^* \otimes \omega(X) \otimes \gamma(Y)$$
$$\cong \bigoplus_{(X,Y)\in\mathscr{C}\times\mathscr{D}} (\omega \otimes \gamma)(X,Y)^* \otimes (\omega \otimes \gamma)(X, Y).$$

Como estamos em *Vect*, dados $V_1, V_2, W_1, W_2 \in$ *Vect* tais que W_i é subespaço de V_i para $i = 1, 2$, temos o isomorfismo:

$$V_1 \big/ W_1 \otimes V_2 \big/ W_2 \cong (V_1 \otimes V_2) \big/ (V_1 \otimes W_2 + W_1 \otimes V_2)$$

com, $\pi_1 : V_1 \to V_1 \big/ W_1$, $\pi_2 : V_2 \to V_2 \big/ W_2$ e $\pi_1 \otimes \pi_2 : V_1 \otimes V_2 \to V_1 \big/ W_2 \otimes V_2 \big/ W_2$.

Assim, queremos que:

$$coed(\omega \otimes \gamma) \cong \bigoplus_{(X,Y)\in\mathscr{C}\times\mathscr{D}} (\omega \otimes \gamma)(X,Y)^* \otimes (\omega \otimes \gamma)(X,Y) \big/ \mathscr{N}$$

com, $\mathscr{N} = \mathscr{N}_\omega \otimes \left(\bigoplus_{Y\in\mathscr{D}} \gamma(Y)^* \otimes \gamma(Y)\right) + \left(\bigoplus_{X\in\mathscr{C}} \omega(X)^* \otimes \omega(X)\right) \otimes \mathscr{N}_\gamma$. Vejamos que $\mathscr{N} = \mathscr{N}_{\omega\otimes\gamma}$.

Primeiro, notemos que $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{N}_\omega \otimes \left(\bigoplus_{Y\in\mathscr{D}} \gamma(Y)^* \otimes \gamma(Y)\right) + \left(\bigoplus_{X\in\mathscr{C}} \omega(X)^* \otimes \omega(X)\right) \otimes \mathscr{N}_\gamma$.

Para isso, sejam $(f, g) : (X, Y) \to (\hat{X}, \hat{Y})$ morfismo em $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$. Sejam também os morfismos:

$$(\omega \otimes \gamma)(g,f) : \omega(X) \otimes \omega(Y) \to \omega(\hat{X}) \otimes \gamma(\hat{Y})$$

e

$$(\omega \otimes \gamma(g, f))^* : \gamma(\hat{Y})^* \otimes \omega(\hat{X})^* \to \gamma(Y)^* \otimes \omega(X)^*,$$

tais que, $v \otimes w \in \omega(X) \otimes \gamma(Y)$ e $\varphi \otimes \psi \in \gamma(\hat{Y})^* \otimes \omega(\hat{X})^*$. Então,

$$\varphi \otimes \psi \otimes ((\omega \otimes \gamma)(f,g))(v \otimes w) - (\omega \otimes \gamma(f,g))^*(\varphi \otimes \psi) \otimes v \otimes w =$$
$$= \varphi \otimes \psi \otimes \omega(f)v \otimes \gamma(g)w - \gamma(g)^*(\varphi) \otimes \omega(f)^*\psi \otimes v \otimes w$$
$$= \varphi \otimes \psi \otimes \omega(f)v \otimes \gamma(g)w - \varphi \otimes \omega(f)^*\psi \otimes v \otimes \gamma(g)w +$$
$$+ \varphi \otimes \omega(f)^*\psi \otimes v \otimes \gamma(g)(w) - \gamma(g)^*\varphi \otimes \omega(f)^*\psi \otimes v \otimes w$$
$$\cong (\psi \otimes \omega(f)v - \omega(f)^*\psi \otimes v) \otimes \varphi \otimes \gamma(g)w + \omega(f)^*\psi \otimes v$$

$$\otimes(\varphi \otimes \gamma(g)w - \gamma(g)^*\varphi \otimes w)$$
$$\subseteq \mathscr{N}_\omega \otimes \left(\bigoplus_{Y \in \mathscr{D}} \gamma(Y)^* \otimes \gamma(Y) \right) \left(\bigoplus_{X \in \mathscr{C}} \omega(X)^* \otimes \omega(X) \right) \otimes \mathscr{N}_\gamma.$$

Por outro lado,

$$((\psi \otimes (\omega f)v - \omega(f)^*\psi \otimes v) \otimes \varphi \otimes \gamma(g)w + \omega(f)^*\psi \otimes v \otimes \varphi \otimes \gamma(g)w - \gamma(g)^*\varphi \otimes w) \cong$$
$$\cong \psi \otimes \omega(f)v \otimes \varphi \otimes \gamma(g)w - \omega(f)^*\psi \otimes v \otimes \varphi \otimes \gamma(g)w + \omega(f)^*\psi \otimes v \otimes \varphi \otimes \gamma(g)w) -$$
$$- \omega(f)^*\psi \otimes v \otimes \gamma(g)^*\varphi \otimes w$$
$$\cong \psi \otimes \omega(f)v \otimes \varphi \otimes \gamma(g)w - \omega(f)^*\psi \otimes v \otimes \gamma(g)^*\varphi \otimes w$$
$$\cong \varphi \otimes \psi \otimes \omega(f)v \otimes \gamma(g)w - \gamma(g)^*\varphi \otimes \omega(f)^*\psi \otimes v \otimes w$$
$$= \varphi \otimes \psi \otimes ((\omega \otimes \gamma)(f,g))(v \otimes w) - ((\omega \otimes \gamma)(f,g))^*(\varphi \otimes \psi) \otimes v \otimes w \in \mathscr{N}.$$

Sendo $coend(\omega)$ uma coálgebra, temos que $\omega(X)$ é um $coend(\omega)$-comódulo à direita de dimensão finita. Sendo assim, sabemos que existe uma estrutura de coálgebra definida da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccc} \hat{\Delta}: & \bigoplus \omega(X)^* \otimes \omega(X) & \to & \bigoplus \omega(X)^* \otimes \omega(X) \otimes \bigoplus \omega(X)^* \otimes \omega(X) \\ & \varphi \otimes v & \mapsto & \sum \varphi \otimes x_i \otimes x^i \otimes v \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \hat{\varepsilon}: & \bigoplus \omega(X)^* \otimes \omega(X) & \to & \Bbbk \\ & \varphi \otimes v & \mapsto & \varphi(v) \end{array}$$

e ainda, $\mathscr{N}_\omega$ é um coideal de $\bigoplus \omega(X)^* \otimes \omega(X)$. O mesmo resultado é válido para $coend(\gamma)$.

Da Proposição 2.3.15 e do fato que o quociente de um coideal de uma coálgebra ser uma coálgebra temos que

$$\bigoplus_{(X,Y) \in \mathscr{C} \times \mathscr{D}} (\omega \otimes \gamma)(X, Y)^* \otimes (\omega \otimes \gamma)(X, Y) \big/ \mathscr{N}$$

possui estrutura de coálgebra.

Em resumo, obtivemos a seguinte cadeia de isomorfismos:

$$\begin{aligned} coend(\omega) \otimes coend(\gamma) &\cong \bigoplus_{X \in \mathscr{C}} \omega(X)^* \otimes \omega(X) \big/ \mathscr{N}_\omega \otimes \bigoplus_{Y \in \mathscr{D}} \gamma(Y)^* \otimes \gamma(Y) \Big/ \mathscr{N}_\gamma \\ &\cong \bigoplus_{(X,Y) \in \mathscr{C} \times \mathscr{D}} (\omega \otimes \gamma)(X,Y)^* \otimes (\omega \otimes \gamma)(X,Y) \big/ \mathscr{N} \\ &\cong coend(\omega \otimes \gamma). \end{aligned}$$

Traduzindo o isomorfismo $M : coend(\omega) \otimes coend(\gamma) \to coend(\omega \otimes \gamma)$ na linguagem de classes, definida anteriormente:

$$\begin{array}{rccc} M: & coend(\omega) \otimes coend(\gamma) & \to & coend(\omega \otimes \gamma) \\ & [\varphi|v] \otimes [\psi|w] & \mapsto & [\psi \otimes \varphi | v \otimes w] \end{array}$$

tais que $\varphi \in \omega(X)^*$, $v \in \omega(X)$, $\psi \in \gamma(Y)^*$ e $w \in \gamma(Y)$.

E mais,

$$coend(\{*\}, \mathbb{1}) \cong \bigoplus \mathbb{1}(*)^* \otimes \mathbb{1}(*) \big/ \mathscr{N}_{\mathbb{1}} \cong \Bbbk.$$

Além disso, M é na verdade um isomorfismo de coálgebras. De fato, sejam $\{x_i\}_{i=1}^n$ base de $\omega(X)$, $\{y_j\}_{j=1}^n$ base de $\gamma(Y)$ e suas bases duais $\{x^i\}_{i=1}^n \subseteq \omega(X)^*$ e $\{y^j\}_{j=1}^n \subseteq \gamma(X)^*$. Assim,

$$\begin{aligned}
(M \otimes M) \circ \Delta_{coend(\omega)\otimes coend(\gamma)}([\varphi|v] \otimes [\psi|w]) &= \\
&= (M \otimes M)\left(\sum_{i,j}([\varphi|x_i] \otimes [\psi|y_i]) \otimes ([x^i|v] \otimes [y^i|w])\right) \\
&= \sum_{i,j}[\psi \otimes \varphi|x_i \otimes y_j] \otimes [y^j \otimes x^i|v \otimes w].
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\Delta_{coend(\omega\otimes\gamma)} \circ M([\varphi|v] \otimes [\psi|w]) &= \Delta([\psi \otimes \varphi, v \otimes w]) \\
&= \sum_{i,j}[\psi \otimes \varphi|x_i \otimes y_j] \otimes [y^j \otimes x^i|v \otimes w],
\end{aligned}$$

com $\{x_i \otimes y_i\}$ base de $\omega(X) \otimes \gamma(Y)$ e sua base dual $\{y^* \otimes x^*\} \subseteq \gamma(Y)^* \otimes \omega(X)^*$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{coend(\omega\otimes\gamma)} \circ M([\varphi|v] \otimes [\psi|w]) &= \varepsilon_{coend(\omega\otimes\gamma)}([\psi \otimes \varphi|v \otimes w]) \\
&= \varphi(v)\psi(w)
\end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\varepsilon_{coend(\omega)\otimes coend(\gamma)}([\varphi|v] \otimes [\psi|w]) = \varphi(v)\psi(w).$$

Sendo assim, M é um morfismo de coálgebras. ■

Proposição 4.2.6. *Sejam* $(\mathscr{C}, \otimes, \mathbb{I}_{\mathscr{C}})$, $(\mathscr{D}, \hat{\otimes}, \mathbb{I}_{\mathscr{D}})$ *categorias monoidas e* $(F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}, \xi, \xi_0)$ *um funtor monoidal. Se* (A, μ, η) *é uma álgebra em* $\mathscr{C}$*, então* $F(A)$ *é uma álgebra em* $\mathscr{D}$*.*

Demonstração. Afirmamos que $(F(A), F(\mu) \circ \xi_{A,A}, F(\eta) \circ \xi_0)$ é uma álgebra em $\mathscr{C}$. Da naturalidade de ξ e $F(\mu)\circ F(Id_A\otimes\mu)=F(\mu)\circ F(\mu\otimes Id_A)$ o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
F(A)\hat{\otimes}F(A)\hat{\otimes}F(A) \arrow[r, "\xi_{A,A}\hat{\otimes}Id_{F(A)}"] \arrow[d, "Id_{F(A)}\hat{\otimes}\xi_{A,A}"'] & F(A\otimes A)\hat{\otimes}F(A) \arrow[r, "F(\mu)\hat{\otimes}Id_{F(A)}"] \arrow[d, "\xi_{A\otimes A,A}"] & F(A)\hat{\otimes}F(A) \arrow[d, "\xi_{A,A}"] \\
F(A)\hat{\otimes}F(A\otimes A) \arrow[r, "\xi_{A,A\otimes A}"] \arrow[d, "Id_{F(A)}\hat{\otimes}F(\mu)"'] & F(A\otimes A\otimes A) \arrow[r, "F(\mu\otimes Id_A)"] \arrow[d, "F(Id_A\otimes\mu)"] & F(A\otimes A) \arrow[d, "F(\mu)"] \\
F(A)\hat{\otimes}F(A) \arrow[r, "\xi_{A,A}"'] & F(A\otimes A) \arrow[r, "F(\mu)"'] & F(A)
\end{tikzcd}$$

satisfazendo assim o diagrama da associatividade. Além disso, da naturalidade de ξ e de um dos quadriláteros da definição de funtor monoidal temos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
I_{\mathscr{D}}\hat{\otimes}F(A) \arrow[r, "\xi_0\hat{\otimes}Id_{F(A)}"] \arrow[d, "l_{F(A)}"'] & F(I_{\mathscr{C}})\hat{\otimes}F(A) \arrow[r, "F(\eta)\hat{\otimes}Id_{F(A)}"] \arrow[d, "\xi_{I_{\mathscr{C}},A}"] & F(A)\hat{\otimes}F(A) \arrow[r, "\xi_{A,A}"] \arrow[d, "\xi_{A,A}"] & F(A\otimes A) \arrow[d, "F(\mu)"] \\
F(A) \arrow[r, "F(l_A^{-1})"'] & F(I_{\mathscr{C}}\otimes A) \arrow[r, "F(\eta\otimes Id_A)"'] & F(A\otimes A) \arrow[r, "F(\mu)"'] & F(A)
\end{tikzcd}$$

e de forma análoga, obtemos que $(F(\mu)\circ\xi_{A,A})(Id_{F(A)}\otimes(F(\eta)\circ\xi_0))=r_{F(A)}$ e portanto $F(A)$ é uma álgebra em $\mathscr{D}$. ■

O primeiro resultado que temos é que do fato da categoria $\underline{Tan}$ e o funtor *coend*(_) serem monoidais, do Lema 3.0.14, denotando $C=coend(\omega)$ e $D=coend(\gamma)$ temos a flecha universal:

$$\delta^{\omega\otimes\gamma}=(\omega\otimes\gamma \xRightarrow{\delta^{\omega}\otimes\delta^{\gamma}} \omega\otimes C\otimes\gamma\otimes D \xRightarrow{1_{\omega}\otimes\tau\otimes 1_{\gamma}} \omega\otimes\gamma\otimes C\otimes D)$$

tais que $(\mathscr{C},\omega),(\mathscr{D},\gamma)\in\underline{Tan}$.

O segundo resultado que temos do fato de *coend*(_) ser um funtor monoidal é que, sendo $\mathscr{C}$ uma categoria monoidal e (ω,ξ,ξ_0) um funtor monoidal, isto é, $(\mathscr{C},\omega)\in\underline{Tan}_{\otimes}$, temos que $coend(\omega)=coend(\mathscr{C},\omega)$ é uma álgebra. Sua estrutura é proveniente da Proposição anterior, isto é, $\mu_{coend(\omega)}=coend([\otimes,\xi])$.

Denotando $coend(\omega)$ apenas por C, o morfismo μ_C é definido unicamente pela comutatividade do diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\omega(X)\otimes\omega(Y) \arrow[r, "\delta^{\omega\otimes\omega}_{X,Y}"] \arrow[d, "\xi_{X,Y}"'] & \omega(X)\otimes\omega(Y)\otimes C\otimes C \arrow[d, "\xi_{X,Y}\otimes\mu_C"] \arrow[dr, "Id_{\omega(X)\otimes\omega(Y)}\otimes\mu_C"] & \\
\omega(X\otimes Y) \arrow[r, "\delta^{\omega}_{X,Y}"'] & \omega(X\otimes Y)\otimes C \arrow[r, "\xi^{-1}_{X,Y}\otimes Id_C"'] & \omega(X)\otimes\omega(Y)\otimes C
\end{tikzcd}$$

isto é, na notação de Sweedler $\delta^{\omega}_{X,Y}(\xi_{X,Y}(x\otimes y)) = \xi_{X,Y}(x_{(0)}\otimes y_{(0)})\otimes\mu_{coend(\omega)}(x_{(1)}\otimes y_{(1)})$, para todo $X, Y\in\mathscr{C}$.

Com relação a unidade de $coend(\omega) = C$, $\eta_C = coend([\psi_{\mathscr{C}},\chi])$ o qual é definido unicamente pela comutatividade do seguinte diagrama (avaliado no objeto $*$):

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk \arrow[r, "\delta^{\Bbbk}=1_{\Bbbk}"] \arrow[d, "\xi_0"'] & \Bbbk\otimes coend(\mathbb{1})\cong\Bbbk\otimes\Bbbk \arrow[d, "\xi_0\otimes\eta_C"] \arrow[dr, "1_{\Bbbk}\otimes\eta_C"] & \\
\omega(\mathbb{I}_{\mathscr{C}}) \arrow[r, "\delta^{\omega}_{\mathbb{I}_{\mathscr{C}}}"'] & \omega(\mathbb{I}_{\mathscr{C}})\otimes C \arrow[r, "\xi_0^{-1}\otimes Id_C"'] & \Bbbk\otimes C
\end{tikzcd}$$

ou seja, $\delta^{\omega}(1_{\Bbbk}) = 1_{\Bbbk}\otimes\mathbb{I}_{\mathscr{C}}$.

Observação 4.2.7. *Traduzindo na notação em que estamos trabalhando, com $(\mathscr{C},\omega)\in\underline{Tan}_{\otimes}$ e $X\in\mathscr{C}$, definimos a estrutura da álgebra $(coend(\omega),\mu_{coend(\omega)},\eta_{coend(\omega)})$ da seguinte forma:*

$$\begin{array}{rccc} \mu_{coend(\omega)}: & coend(\omega)\otimes coend(\omega) & \to & coend(\omega) \\ & [\varphi|v]\otimes[\psi|w] & \mapsto & [\psi\otimes\varphi|v\otimes w] \end{array}$$

para todo $\varphi,\psi\in\omega(X)^*$ e $v,w\in\omega(X)$ e

$$\begin{array}{rccc} \eta_{coend(\omega)}: & \Bbbk & \to & coend(\omega) \\ & 1_{\Bbbk} & \mapsto & [1_{\Bbbk}|1_{\Bbbk}] \end{array}.$$

Como a multiplicação e a unidade de $coend(\omega)$ foram construídas a partir da imagem do funtor $coend(\_)$, resta verificarmos que ambas são morfismos de coálgebra:

Corolário 4.2.8. *Seja $(\mathscr{C},\omega)\in\underline{Tan}$ tais que $(\mathscr{C},\otimes,\mathbb{I}_A)$ é uma categoria monoidal e (ω,ξ,ξ_0) é monoidal. Então $(coend(\omega) = C,\Delta,\varepsilon,\mu,\eta)$ é uma biálgebra.*

Demonstração. Da Proposição 2.4.2, basta verificarmos que Δ e ε são morfismos de álgebra. Para isso, sejam $\varphi,\varphi\in\omega(X)^*$ e $v,z\in\omega(X)$. Sendo $\{x_i\}_{i=1}^{\eta}$ base de $\omega(X)$ e $\{x^i\}$ sua base, temos:

$$\mu_{C\otimes C}\circ(\Delta\otimes\Delta)([\varphi|v]\otimes[\varphi|z]) = \mu_{C\otimes C}\left(\sum_{i,j}[\varphi|x^i]\otimes[x^j|v]\otimes[\varphi,x_j]\otimes[x^j|z]\right)$$

$$= (\mu_C\otimes\mu_C)(1\otimes\tau\otimes 1)\left(\sum_{i,j}[\varphi|x^i]\otimes[x^j|v]\otimes[\varphi|x_j]\otimes[x^j|z]\right)$$

$$= \sum_{i,j} [\varphi \otimes \varphi | x_i \otimes x_j] \otimes [x^j \otimes x^i | v \otimes z].$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \Delta \circ \mu([\varphi|v] \otimes [\varphi|z]) &= \Delta([\varphi \otimes \varphi | v \otimes z]) \\ &= \sum_{i,j} [\varphi \otimes \varphi | x_i \otimes e_j] \otimes [x^j \otimes x^i | v \otimes z]. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \Delta \circ \eta(1_{\Bbbk}) &= \Delta([1_{\Bbbk}|1_{\Bbbk}]) \\ &= [1_{\Bbbk}|1_{\Bbbk}] \otimes [1_{\Bbbk}|1_{\Bbbk}] \\ &= \eta(1_{\Bbbk}) \otimes \eta(1_{\Bbbk}) \\ &= \eta_{C\otimes C}(1_{\Bbbk}). \end{aligned}$$

Logo, Δ é morfismo de álgebra. Agora, vejamos que ε também o é. De fato,

$$\begin{aligned} \mu_{C\otimes C} \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon)([\varphi|v] \otimes [\varphi|z]) &= \mu_{C\otimes C}(\varphi(v) \otimes \varphi(z)) \\ &= \varphi(v)\varphi(z). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \varepsilon \circ \mu([\varphi|v] \otimes [\varphi|z]) &= \varepsilon([\varphi \otimes \varphi | v \otimes z]) \\ &= \varphi(v)\varphi(z). \end{aligned}$$

E mais,

$$\begin{aligned} \varepsilon \circ \eta_{C\otimes C}(1_{\Bbbk}) &= \varepsilon([1_{\Bbbk}|1_{\Bbbk}] \\ &= 1_{\Bbbk} \\ &= \eta(1_{\Bbbk}). \end{aligned}$$

Logo, ε é um morfismo de álgebra. Sendo assim, *coend*(ω) é uma biálgebra. ■

Exemplo 4.2.9. *Retornando ao Exemplo 4.1.14, vejamos que coend$(\omega) \cong R_{\Bbbk}(G)$ é na verdade um isomorfismo de biálgebras, isto é, também é um isomorfismo de álgebras. Primeiro em (AMARO, 2017) pode ser visto que $(R_{\Bbbk}(G), \mu, \eta)$ é uma álgebra, com as estruturas:*

$$\begin{array}{cccc} \mu & R_{\Bbbk}(G) \otimes R_{\Bbbk}(G) & \to & R_{\Bbbk}(G) \\ & f \otimes g & \mapsto & fg \end{array}$$

e sendo $\mathbb{1} : G \to \Bbbk$ tal que $\mathbb{1}(g) = 1_{\Bbbk}$,

$$\begin{array}{cccc} \eta & \Bbbk & \to & R_{\Bbbk}(G) \\ & \lambda & \mapsto & \lambda\mathbb{1} \end{array}.$$

Vejamos que Δ e ε são morfismos de álgebra. De fato, sejam $f,g \in R_{\Bbbk}(G)$. Sabendo que:

$$\begin{array}{cccc} \varepsilon & R_{\Bbbk}(G) & \to & \Bbbk \\ & f & \mapsto & f(e) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{cccc} \Delta & R_{\Bbbk}(G) & \to & R_{\Bbbk}(G)\otimes R_{\Bbbk}(G) \\ & f & \mapsto & \sum f_i^{(1)}(x)\otimes f_i^{(2)}(y) \end{array}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \varepsilon(fg) &= fg(e) \\ &= f(e)g(e) \\ &= \varepsilon(f)\varepsilon(g). \end{aligned}$$

Com relação a Δ, sejam as bases dos $\Bbbk$-espaços vetoriais de dimensão finita $\{e_1,...,e_n\}$ de V_1 e $\{x_1,...,x_n\}$ de V_2 e suas respectivas bases duais $\{e^1,...,e^n\}$ e $\{x^1,...,x^n\}$. Sejam também $\varphi_i \in V_i^*$ com $i = 1,2$ tais que $f_1(g) = \varphi_1(\pi_1(g)v_1)$ e $f_2(g) = \varphi_2(\pi_2(g)v_2)$. Logo,

$$\begin{aligned} \Delta(f_1f_2)(g,h) &= f_1f_2(gh) \\ &= \varphi_1(\pi_1(gh)v_1)\varphi_2(\pi_2(gh)v_2) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \varphi_1(\pi_1(g)e_i)e^i(\pi_1(h)v_1)\right)\left(\sum_{j=1}^n \varphi_2(\pi_2(g)x_j)x^i(\pi_1(h)v_1)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \varphi_1(\pi_1(g)e_i)\varphi_2(\pi_2(g)x_j)e^i(\pi_1(h)v_1)x^j(\pi_2(h)v_2) \\ &= \sum_{i,j=1}^n (\varphi_2\otimes\varphi_2)((\pi_1\otimes\pi_2)(g)(e_i\otimes x_j))(x^j\otimes e^i)((\pi_1\otimes\pi_2)(h)(v_1\otimes v_2)). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} &\Delta(f_1)(g,h)\Delta(f_2)(g,h) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \varphi_1(\pi_1(g)e_i)e^i(\pi_1(h)v_1)\right)\left(\sum_{j=1}^n \varphi_2(\pi_2(g)x_j)x^i(\pi_1(h)v_1)\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n (\varphi_2\otimes\varphi_2)((\pi_1\otimes\pi_2)(g)(e_i\otimes x_j))(x^j\otimes e^i)((\pi_1\otimes\pi_2)(h)(v_1\otimes v_2)), \end{aligned}$$

$\forall g,h \in G$. Logo Δ é um morfismo de álgebras. E portanto, $R_{\Bbbk}(G)$ é uma biálgebra.

Por fim, sejam $f,g \in R_{\Bbbk}(G)$, isto é, $f(h) = \varphi_f^{\pi}(\pi_f(h)v_f^{\pi})$ e $g(h) = \psi_g^{\gamma}(\gamma_g(h)w_g^{\gamma})$. Assim,

$$\mu_{coend(\omega)}\circ(\Phi\otimes\Phi)(f\otimes g) = \mu_{coend(\omega)}([\varphi_f^{\pi}|v_f^{\pi}]\otimes[\psi_g^{\gamma}|w_g^{\gamma}])$$

$$= [\varphi_f^\pi \otimes \psi_g^\gamma | v_f^\pi \otimes w_g^\gamma]$$
$$= \Phi \circ \mu_{R_{\Bbbk}(G)}(f \otimes g)$$

e, por outro lado,

$$\eta_{coend(\omega)}(1_{\Bbbk}) = [1_{\Bbbk}|1_{\Bbbk}]$$
$$= \Phi \circ \eta_{R_{\Bbbk}(G)}(1_{\Bbbk}).$$

Logo, $\Phi : R_{\Bbbk}(G) \to coend(\omega)$ é um isomorfismo de coálgebras e álgebras, isto é, biálgebras.

4.3 RECONSTRUÇÃO DE ÁLGEBRAS DE HOPF

Como sabemos, sendo $(\mathscr{C}, \omega) \in \underline{Tan}$ tais que $\mathscr{C}$ é categoria monoidal e ω um funtor monoidal, então o $coend(\omega)$ é uma biálgebra. Veremos a seguir que ao adicionarmos a estrutura de rigidez em $\mathscr{C}$, teremos na verdade que o $coend(\omega)$ é uma álgebra de Hopf.

Primeiro, vejamos que a categoria dos comódulos de dimensão finita sobre uma álgebra de Hopf H é rígida.

Teorema 4.3.1. *Seja $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf. Se $M \in \mathscr{M}^M$ tal que M possui dimensão finita, então $Hom_{\Bbbk}(M, \Bbbk) = M^*$ é um H-comódulo (à direita), com a coação:*

$$\delta(\varphi)(m) = \sum \varphi(m_{(0)}) \otimes S(m_{(1)}).$$

Demonstração. De fato, sejam $\varphi \in M^*$ e $m \in M$. Então:

$$(\delta \otimes Id_H)\delta(\varphi)(m) = (\delta \otimes Id_H)\left(\sum \varphi(m_{(0)}) \otimes S(m_{(1)})\right)$$
$$= \sum \varphi(m_{(0)})_{(0)} \otimes S(m_{(0)(1)}) \otimes S(m_(1))$$
$$= \sum \varphi(m_{(0)}) \otimes S(m_{(1)}) \otimes S(m_{(2)}).$$

Por outro lado,

$$(Id_H \otimes \Delta)\delta(\varphi)(m) = (Id_H \otimes \Delta)\left(\varphi(m_{(0)}) \otimes S(m_{(1)}\right)$$
$$= \sum \varphi(m_{(0)}) \otimes S(m_{(1)})_{(1)} \otimes S(m_{(1)})_{(2)}$$
$$= \sum \varphi(m_{(0)}) \otimes S(m_{(1)}) \otimes S(m_{(2)}).$$

Logo, $(Id_H \otimes \Delta)\delta = (\delta \otimes Id_H)\delta$. Além disso,

$$\varphi(m_{(0)}) \otimes \varepsilon(S(m_{(1)}) = \varphi(m_{(0)})\varepsilon(m_{(1)})$$
$$= \varphi(m).$$

Sendo assim, $Hom_{\Bbbk}(M, \Bbbk) = M^*$ é um H-comódulo (à direita). ∎

Teorema 4.3.2. *Seja $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ uma álgebra de Hopf. Então a categoria dos comódulos projetivos finitamente gerados é rígida.*

Demonstração. Seja M um comódulo (à direita) projetivo finitamente gerado.Definimos

$$\begin{array}{rccc} ev: & M^* \otimes M & \to & \Bbbk \\ & \varphi \otimes m & \mapsto & \varphi(m) \end{array}.$$

Primeiro, mostremos que ev é um morfismo de H-comódulos (à direita), isto é,

$$\begin{tikzcd} M^* \otimes M \arrow[r, "\delta_{M^*\otimes M}"] \arrow[d, "ev"'] & M^* \otimes M \otimes H \arrow[d, "ev \otimes Id_H"] \\ \Bbbk \arrow[r, "\delta_{\Bbbk}"'] & \Bbbk \otimes H \end{tikzcd}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} (ev \otimes Id_H)\delta_{M^*\otimes M}(\varphi \otimes m) &= (ev \otimes Id_H) \sum \varphi \otimes m_{(0)} \otimes S(m_{(1)})m_{(2)} \\ &= \sum \varphi(m_{(0)}) \otimes \varepsilon(m_{(1)})1 \\ &= \sum \varphi(\varepsilon(m_{(1)})m_{(0)}) \otimes 1 \\ &= \varphi(m) \otimes 1. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \delta_{\Bbbk} \circ ev(\varphi \otimes m) &= \delta_{\Bbbk}(\varphi(m)) \\ &= \varphi(m) \otimes 1. \end{aligned}$$

Da hipótese, podemos construir a base dual $\{m^i, m_i\}$ tal que $m_i \in M$ e $m^i \in M^*$ sendo que $x = \sum m^1(x)m_i$. Com isso, definimos a coavaliação:

$$\begin{array}{rccc} cv: & \Bbbk & \to & M \otimes M^* \\ & 1_{\Bbbk} & \mapsto & \sum m_i \otimes m^i \end{array}.$$

Vejamos que cv é um morfismo de comódulos. Para isso, usaremos os índices relacionados a coação na parte superior do objeto.

$$\begin{aligned} \delta_{M\otimes M^*} \circ cv(1_{\Bbbk}) &= \delta_{M\otimes M^*}\left(\sum m_i \otimes m^i\right) \\ &= \sum m_i^{(0)} \otimes m^i \otimes m_i^{(1)} S(m_i^{(2)}) \\ &= \sum m_i \otimes m^i \otimes 1 \\ &= (cv \otimes Id_H)\delta_{\Bbbk}(1_{\Bbbk}). \end{aligned}$$

Por fim,

$$(Id_M \otimes ev) \circ (cv \otimes Id_M) = (Id_M \otimes ev)\left(\sum m_i \otimes m^i \otimes m\right)$$

$$= \sum m_i m^i(m) = m$$

e

$$\begin{aligned}
(ev \otimes Id_{M^*}) \circ (Id_{M^*} \otimes cv)(\varphi(m)) &= (ev \otimes Id_{M^*}) \left(\sum \varphi(m) \otimes m_i \otimes m^i\right) \\
&= \sum \varphi(m_i) m^i(m) \\
&= \varphi\left(\sum m^i(m) m_i\right) \\
&= \varphi(m)
\end{aligned}$$

para todo $m \in M$ e $\varphi \in M^*$. ■

O que faremos agora é o inverso: à partir de uma categoria monoidal rígida, obter uma estrutura de álgebra de Hopf quanto uma coálgebra de coendomorfismo.

Teorema 4.3.3. *Sejam* $(\mathscr{C}, \omega) \in \underline{Tan}$ *e* $M \in Vect$. *Seja também o objeto dual de* $\omega(X) = (\omega(X)^*, ev_{\omega(X)}, cv_{\omega(X)})$. *Então* $Nat(\omega, \omega \otimes M) \cong Nat(\omega^*, M \otimes \omega^*)$.

Demonstração. Seja $X \in \mathscr{C}$. Definimos os seguintes morfismos:

$$\Psi_X : \quad Hom_{\Bbbk}(\omega(X), \omega(X) \otimes M) \quad \to \quad Hom_{\Bbbk}(\omega(X)^*, M \otimes \omega(X)^*)$$

tal que,

$$\Psi_X(\alpha_X) = (ev_{\omega(X)} \otimes Id_M \otimes Id_{\omega(X)^*})(Id_{\omega(X)^*} \otimes \alpha_X \otimes Id_{\omega(X)^*})(Id_{\omega(X)^*} \otimes cv_{\omega(X)})$$

e

$$\Phi_X : \quad Hom_{\Bbbk}(\omega(X)^*, M \otimes \omega(X)^*) \quad \to \quad Hom_{\Bbbk}(\omega(X), \omega(X) \otimes M)$$

tal que,

$$\Phi_X(\beta_X) = (Id_{\omega(X)} \otimes Id_M \otimes ev_{\omega(X)})(Id_{\omega(X)} \otimes \beta_X \otimes Id_{\omega(X)})(cv_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)}).$$

Vejamos que $\Psi_X = (\Phi_X)^{-1}$, para todo $X \in \mathscr{C}$. De fato, sendo $\alpha \in Nat(\omega, \omega \otimes M)$, temos:

$$\begin{aligned}
&\Phi_X(\Psi_X(\alpha_X)) = (Id_{\omega(X)} \otimes Id_M \otimes ev_{\omega(X)})(Id_{\omega(X)} \otimes \Psi_X(\alpha_X) \otimes Id_{\omega(X)})(cv_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)}) \\
&\quad = (Id_{\omega(X)} \otimes Id_M \otimes ev_{\omega(X)})(Id_{\omega(X)} \otimes (ev_{\omega(X)} \otimes Id_M \otimes Id_{\omega(X)^*}) \\
&(Id_{\omega(X)^*} \otimes \alpha_X \otimes Id_{\omega(X)^*})(Id_{\omega(X)^*} \otimes cv_{\omega(X)}) \otimes Id_{\omega(X)})(cv_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)}) \\
&\quad = (Id_{\omega(X)} \otimes Id_M \otimes ev_{\omega(X)})(Id_{\omega(X)} \otimes ev_{\omega(X)} \otimes Id_M \otimes Id_{\omega(X)^*} \otimes Id_{\omega(X)}) \\
&(Id_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)^*} \otimes \alpha_X \otimes Id_{\omega(X)^*} \otimes Id_{\omega(X)})(Id_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)^*} \otimes cv_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)}) \\
&(cv_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)}) \\
&\quad = (Id_{\omega(X)} \otimes ev_{\omega(X)} \otimes Id_M)(cv_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)} \otimes Id_M)\alpha_X(Id_{\omega(X)} \otimes ev_{\omega(X)}) \\
&(cv_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)}) \\
&\quad = ((I_{\omega(X)} \otimes ev_{\omega(X)})(cv_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)}) \otimes Id_M)\alpha_X Id_{\omega(X)}
\end{aligned}$$

$= (Id_{\omega(X)} \otimes Id_M)\alpha_X$
$= \alpha_X.$

Por outro lado, sendo $\beta \in Nat(\omega^*, M \otimes \omega^*)$, para todo $X \in \mathscr{C}$ temos:

$\Psi_X(\Phi_X(\beta_X)) = (ev_{\omega(X)} \otimes Id_M \otimes Id_{\omega(X)^*})(Id_{\omega(X)^*} \otimes \Phi_X(\beta_X) \otimes Id_{\omega(X)^*})$
$(Id_{\omega(X)^*} \otimes cv_{\omega(X)})$
$= (ev_{\omega(X)} \otimes Id_M \otimes Id_{\omega(X)^*})(Id_{\omega(X)^*} \otimes (Id_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)} \otimes Id_M \otimes ev_{\omega(X)})$
$(Id_{\omega(X)} \otimes \beta_X \otimes Id_{\omega(X)})(cv_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)}) \otimes Id_{\omega(X)^*})(Id_{\omega(X)^*} \otimes cv_{\omega(X)})$
$= (ev_{\omega(X)} \otimes Id_M \otimes Id_{\omega(X)^*})(Id_{\omega(X)^*} \otimes Id_{\omega(X)} \otimes Id_M \otimes ev_{\omega(X)})$
$(Id_{\omega(X)^*} \otimes Id_{\omega(X)} \otimes \beta_X \otimes Id_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)^*})(Id_{\omega(X)^*} \otimes cv_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)^*})$
$(Id_{\omega(X)^*} \otimes cv_{\omega(X)})$
$= (ev_{\omega(X)} \otimes Id_M \otimes Id_{\omega(X)^*})(Id_{\omega(X)^*} \otimes Id_{\omega(X)} \otimes \beta_X)(Id_{\omega(X)^*} \otimes cv_{\omega(X)})$
$(ev_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)^*})(Id_{\omega(X)^*} \otimes cv_{\omega(X)})$
$= \beta_X(ev_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X)})(Id_{\omega(X)^*} \otimes cv_{\omega(X)})Id_{\omega(X)^*}$
$= \beta_X Id_{\omega(X)^*}.$

Logo, $\Psi = \Phi^{-1}$. ■

Do isomorfismo natural do Teorema anterior, $\Psi : Nat(\omega, \omega \otimes M) \Longrightarrow Nat(\omega^*, M \otimes \omega^*)$, denotaremos $\Psi_X(\alpha_X) = (\alpha_X)^\flat$ para toda transformação natural $\alpha \in Nat(\omega, \omega \otimes M)$ e $X \in \mathscr{C}$.

Além disso, juntamente com o funtor $\omega^* : \mathscr{C}^{rev,op} \to Vect^{(f)}$, obtemos que $(\mathscr{C}^{rev,op}, \omega^*) \in \underline{Tan}$ e portanto $coend(\omega^*) \cong coend(\omega)^{op}$. Além disso, com o Lema 3.0.14 podemos definir a flecha universal $\delta^{(\omega^*)} = \tau(\delta^{\omega})^\flat$, sendo

$$\tau : coend(\omega^*) \otimes \omega^* \Longrightarrow \omega^* \otimes coend(\omega^*),$$

um isomorfismo natural.

Observação 4.3.4. *Sendo $(\mathscr{C}, \omega) \in \underline{Tan}$, com $\mathscr{C}$ uma categoria monoidal rígida e ω um funtor monoidal. Denotando por $(\_)^\vee$ objeto dual esquerdo em $\mathscr{C}$ e o funtor $\omega^\vee$ tal que $X \to \omega(X^\vee)$ para todo $X \in \mathscr{C}$.*

Como sabemos, sendo (ω, ξ, ξ_0) monoidal, do Teorema 2.2.12 definimos a estrutura de dual à esquerda de $\omega(X)$ da seguinte forma:

$$\tilde{ev}_{\omega(X)} : \omega(X^\vee) \otimes \omega(X) \xrightarrow{\xi_{X^*,X}} \omega(X^\vee \otimes X) \xrightarrow{\omega(\tilde{ev}_X)} \omega(\mathbb{I}) \xrightarrow{\xi_0^{-1}} \tilde{\mathbb{I}}.$$

e

$$\tilde{cv}_{\omega(X)} : \tilde{\mathbb{I}} \xrightarrow{\xi_0} \omega(\mathbb{I}) \xrightarrow{\omega(\tilde{cv}_X)} \omega(X \otimes X^\vee) \xrightarrow{\xi^{-1}_{X,X^\vee}} \omega(X) \otimes \omega(X^\vee).$$

Sendo assim, da unicidade do dual de $\omega(X)$, do Teorema 2.2.9 existe um único isomorfismo $h_X : \omega(X^\vee) \to \omega(X)^*$ tal que, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\omega(X^\vee) \otimes \omega(X) \arrow[rr, "h_X \otimes Id_{\omega(X)}"] \arrow[dr, "\tilde{ev}_{\omega(X)}"'] & & \omega(X)^* \otimes X \arrow[dl, "ev_{\omega(X)}"] \\
& \Bbbk &
\end{tikzcd}.$$

Dito isso, definiremos o morfismo S que será candidato para ser a antípoda do $coend(\omega)$.

Definição 4.3.5. *Sejam $(\mathscr{C}, \omega) \in \underline{Tan}$ tais que $\mathscr{C}$ é uma categoria monoidal rígida e o funtor monoidal ω. Seja $H = coend(\omega)$. Definimos $S : H \to H$ por:*

$$\begin{tikzcd}
\omega^* \arrow[r, Rightarrow, "\delta^{\omega^*}"] \arrow[d, Rightarrow, "j"'] & \omega^* \otimes H \arrow[d, Rightarrow, "j \otimes S"] \\
\omega^\vee \arrow[r, Rightarrow, "\delta^\vee"'] & \omega^\vee \otimes H
\end{tikzcd}$$

sendo $j = h^{-1} : \omega^* \Longrightarrow \omega^\vee$ da Observação anterior.

Teorema 4.3.6. *Na hipóteses da definição anterior, $coend(\omega) = H$ é uma álgebra de Hopf com S sendo a sua antípoda.*

Demonstração. Dividiremos a demonstração em partes. Da hipótese, denotaremos $(X, \hat{ev}, \hat{cv})$ dual em $\mathscr{C}$. Primeiro, definindo o isomorfismo natural $\tilde{\delta} : \omega^\vee \Rightarrow H \otimes \omega^\vee$ como $\tau \circ \tilde{\delta} = \delta^\vee$. Assim,

$$\begin{tikzcd}
\omega^* \arrow[r, Rightarrow, "\delta^{\omega^*}"] \arrow[d, Rightarrow, "j"'] & \omega^* \otimes H \arrow[r, Rightarrow, "\tau"] \arrow[d, Rightarrow, "j \otimes S"] & H \otimes \omega^* \arrow[d, Rightarrow, "S \otimes j"] \\
\omega^\vee \arrow[r, Rightarrow, "\delta^\vee"'] & \omega^\vee \otimes H \arrow[r, Rightarrow, "\tau"'] & H \otimes \omega^\vee
\end{tikzcd}$$

comuta pois, os retângulos da esquerda e da direita comutam pela definição de S e o da esquerda comuta pela naturalidade de τ, respectivamente. Portanto,

$$\begin{tikzcd}
\omega^* \arrow[r, Rightarrow, "\delta^\flat"] \arrow[d, Rightarrow, "j"'] & H \otimes \omega^* \arrow[d, Rightarrow, "S \otimes j"] \\
\omega^\vee \arrow[r, Rightarrow, "\tilde{\delta}"] & H \otimes \omega^\vee
\end{tikzcd}.$$

Agora, sendo $X \in \mathscr{C}$ e $(\omega(X)^*, ev_X, cv_X)$ dual de $\omega(X)$, definimos

$$\tilde{ev}_X = ev_X(j_X^{-1} \otimes Id_{\omega(X)}) : \omega(X^\vee) \otimes \omega(X) \to \Bbbk$$

e

$$\tilde{cv}_X = (Id_{\omega(X)} \otimes j_X) \circ cv_X : \Bbbk \to \omega(X) \otimes \omega(X^\vee)$$

Vejamos que:

$$\begin{aligned}
&(Id_{\omega(X)} \otimes \tilde{ev}_X)(\tilde{cv}_X \otimes Id_{\omega(X)}) = (Id_{\omega(X)} \otimes ev_X)(Id_{\omega(X)} \otimes j_X^{-1} \otimes Id_{\omega(X)}) \\
&(Id_{\omega(X)} \otimes j_X \otimes Id_{\omega(X)})(cv_X \otimes Id_{\omega(X)}) \\
&\quad = (Id_{\omega(X)} \otimes ev_X)(Id_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X^\vee)} \otimes Id_{\omega(X)})(cv_X \otimes Id_{\omega(X)}) \\
&\quad = Id_{\omega(X)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&(\tilde{ev}_X \otimes Id_{\omega(X^\vee)})(Id_{\omega(X^\vee)} \otimes \tilde{cv}_X) = (ev_X \otimes Id_{\omega(X^\vee)})(j_X^{-1} \otimes Id_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X^\vee)}) \\
&(j_X \otimes Id_{\omega(X)} \otimes Id_{\omega(X^\vee)})(Id_{\omega(X^\vee)} \otimes cv_X) \\
&\quad = (ev_X \otimes Id_{\omega(X^\vee)})(Id_{\omega(X^\vee)} \otimes cv_X) \\
&\quad = Id_{\omega(X^\vee)}.
\end{aligned}$$

Agora vejamos que o seguinte diagrama comuta (à partir de agora, denotaremos δ^ω apenas por δ):

$$\begin{tikzcd}
\omega^\vee \otimes \omega \arrow[r, Rightarrow, "1_{\omega^\vee} \otimes \delta"] \arrow[d, Rightarrow, "\tilde{\delta} \otimes 1_\omega"'] & \omega^\vee \otimes \omega \otimes H \arrow[d, Rightarrow, "\tilde{ev} \otimes S"] \\
H \otimes \omega^\vee \otimes \omega \arrow[r, Rightarrow, "Id_H \otimes \tilde{ev}"'] & H
\end{tikzcd} .$$

De fato, primeiro observamos que:

$$\begin{aligned}
&(Id_H \otimes ev)(S \otimes j^{-1} \otimes 1_\omega)(\tilde{\delta} \otimes 1_\omega) = (Id_H \otimes ev)(\delta^\flat \otimes 1_\omega)(\tilde{\delta} \otimes 1_\omega) \\
&\quad = (Id_H \otimes ev)(ev \otimes Id_H \otimes 1_{\omega^*} \otimes 1_\omega)(1_{\omega^*} \otimes 1_{\omega^*} \otimes 1_\omega)(1_{\omega^*} \otimes cv \otimes 1_\omega) \\
&(j^{-1} \otimes 1_\omega) \\
&\quad = (ev \otimes Id_H)(1_{\omega^*} \otimes \delta)(1_{\omega^*} \otimes 1_\omega \otimes ev)(1_{\omega^*} \otimes cv \otimes 1_\omega)(j^{-1} \otimes 1_\omega) \\
&\quad = (ev \otimes Id_H)(1_{\omega^*} \otimes S)(j^{-1} \otimes 1_\omega).
\end{aligned}$$

Assim,

$$(Id_H \otimes \tilde{ev})(\tilde{\delta} \otimes 1_\omega) = (Id_H \otimes ev)(Id_H \otimes j^{-1} \otimes 1_\omega)(\tilde{\delta} \otimes 1_\omega). \tag{17}$$

Mas veja que,

$$(Id_H \otimes j^{-1})(\tilde{\delta})(j) = (Id_H \otimes j^{-1})(S \otimes j)\delta^\flat$$

e aplicando j^{-1} na direita da equação,

$$(Id_H \otimes j^{-1})\tilde{\delta} = (Id_H \otimes j^{-1})(S \otimes j)(\delta^\flat)j^{-1}$$

$$= (S \otimes 1_{\omega^*})\delta^\flat j^{-1}.$$

Logo, da (17) temos:

$$(Id_H \otimes \tilde{ev})(\tilde{\delta} \otimes 1_\omega) = (Id_H \otimes ev)(S \otimes 1_{\omega^*} \otimes 1_\omega)(\delta^\flat \otimes 1_\omega)(j^{-1} \otimes 1_\omega)$$
$$= (Id_H \otimes ev)(S \otimes 1_{\omega^*} \otimes 1_\omega)(ev \otimes Id_H \otimes 1_{\omega^*} \otimes 1_\omega)$$
$$(1_{\omega^*} \otimes \delta \otimes 1_{\omega^*} \otimes 1_\omega)(1_{\omega^*} \otimes cv \otimes 1_\omega)(j^{-1} \otimes 1_\omega)$$
$$= S(ev \otimes Id_H)(1_{\omega^*} \otimes \delta)(j^{-1} \otimes 1_\omega)$$
$$= (ev \otimes S)(1_{\omega^*} \otimes \delta)(j^{-1} \otimes 1_\omega)$$
$$= (ev \otimes S)(j^{-1} \otimes 1_\omega \otimes Id_H)(1_{\omega^\vee} \otimes \delta)$$
$$= (\tilde{ev} \otimes S)(1_{\omega^\vee} \otimes \delta).$$

Agora vejamos que o seguinte diagrama comuta,

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk \arrow[r, Rightarrow, "\tilde{cv}"] \arrow[d, Rightarrow, "\tilde{cv}"'] & \omega \otimes \omega^\vee \arrow[d, Rightarrow, "(1_\omega \otimes S)\delta \otimes 1_{\omega^\vee}"] \\
\omega \otimes \omega^\vee \arrow[r, Rightarrow, "1_\omega \otimes \tilde{\delta}"'] & \omega \otimes H \otimes \omega^\vee
\end{tikzcd},$$

isto é, $(1_\omega \otimes \tilde{\delta})(\tilde{cv}) = (1_\omega \otimes S \otimes 1_{\omega^\vee})(\delta \otimes 1_{\omega^\vee})\tilde{cv}$. De fato,

$$(1_\omega \otimes S \otimes 1_{\omega^\vee})(\delta \otimes 1_{\omega^\vee})(1_\omega \otimes j)cv = (1_\omega \otimes S \otimes j)(\delta \otimes 1_{\omega^*})cv$$
$$= (1_\omega \otimes S \otimes j)(1_\omega \otimes ev \otimes Id_H \otimes 1_{\omega^*})(cv \otimes 1_\omega \otimes Id_H \otimes 1_{\omega^*})(\delta \otimes 1_{\omega^*})cv$$
$$= (1_\omega \otimes S \otimes j)(1_\omega \otimes ev \otimes Id_H \otimes 1_{\omega^*})(1_\omega \otimes 1_{\omega^*} \otimes \delta \otimes 1_{\omega^*})$$
$$(1_\omega \otimes 1_{\omega^*} \otimes cv)cv \tag{18}$$
$$= (1_\omega \otimes S \otimes j)(1_\omega \otimes \delta^\flat)cv$$
$$= (1_\omega \otimes \tilde{\delta})(1_\omega \otimes j)cv$$
$$= (1_\omega \otimes \tilde{\delta})(\tilde{cv})$$

sendo assim, da definição de j,

$$\tilde{ev} = ev \circ (j^{-1} \otimes Id_{\omega(X)}) = \xi_0^{-1} \circ \omega(\hat{ev}) \circ \xi.$$

Notemos que para todo $X \in \mathscr{C}$,

$$\begin{tikzcd}
\omega(X^\vee) \otimes \omega(X) \arrow[rr, "\delta^\omega \otimes \delta^\omega"] \arrow[dd, "\tilde{ev}"'] & & \omega(X^\vee) \otimes H \otimes \omega(X) \otimes H \arrow[d, "Id_{\omega(X^\vee)} \otimes \tau \otimes Id_H"] \\
& & \omega(X^\vee) \otimes \omega(X) \otimes H \otimes H \arrow[d, "\tilde{ev} \otimes Id_{\omega(X)} \otimes Id_{H \otimes H}"] \\
\Bbbk \arrow[r, "\eta"'] & H & H \otimes H \arrow[l, "\mu"]
\end{tikzcd} \tag{19}$$

também comuta. De fato,

$$
\begin{aligned}
&\mu(\tilde{ev} \otimes Id_H \otimes Id_H)(Id_{\omega(X^\vee)} \otimes \tau \otimes Id_{\omega(X)})(\delta^{\omega}_{X^\vee} \otimes \delta^{\omega}_{X}) = \\
&\quad = \mu(\xi_0^{-1} \otimes Id_H \otimes Id_H)(\omega(\hat{ev}_X) \otimes Id_H \otimes Id_H)(\xi \otimes Id_H \otimes Id_H) \\
&Id_{\omega(X^\vee)} \otimes \tau \otimes Id_H)(\delta^{\omega}_{X^\vee} \otimes \delta^{\omega}_{X}) \\
&\quad = \mu(\xi_0^{-1} \otimes Id_H \otimes Id_H)(\omega(\hat{ev}) \otimes Id_H \otimes Id_H)(\xi \otimes Id_H \otimes Id_H)\delta^{\omega\otimes\omega}_{X^\vee,X} \\
&\quad = (\xi_0^{-1} \otimes Id_H)(\omega(\hat{ev}) \otimes Id_H)(\xi \otimes \mu)\delta^{\omega\otimes\omega}_{X^\vee,X} \\
&\quad = (\xi_0^{-1} \otimes Id_H)(\omega(\hat{ev}) \otimes Id_H)\delta^{\omega}\xi_{X^\vee,X} \\
&\quad = (\xi_0^{-1} \otimes Id_H)\delta_{1_{\mathscr{C}}} \circ \omega(\hat{ev}) \circ \xi_{X^\vee,X} \\
&\quad = (\eta \circ \xi^{-1})\omega(\hat{ev}) \circ \xi_{X^\vee,X} \\
&\quad = \eta \circ \tilde{ev}.
\end{aligned}
$$

E mais, de forma natural o diagrama a seguir comuta, $\forall X \in \mathscr{C}$:

$$
\begin{tikzcd}
H \otimes \omega(X^\vee) \otimes \omega(X) \arrow[r, "\tau_{H,\omega(X^\vee)}\otimes Id_H"] \arrow[d, "Id_H\otimes\tilde{ev}"'] & \omega(X^\vee) \otimes H \otimes \omega(X) \arrow[d, "Id_{\omega(X^\vee)}\otimes\tau_{H\otimes\omega(X)}"] \\
H & \omega(X^\vee) \otimes \omega(X) \otimes H \arrow[l, "\tilde{ev}\otimes Id_H"]
\end{tikzcd} .
$$

Com isso, temos que o próximo diagrama também comuta:

$$
\begin{tikzcd}
\omega(X^\vee) \otimes \omega(X) \arrow[rr, "\tilde{\delta}\otimes\delta"] \arrow[d, "\tilde{ev}"'] & & H \otimes \omega(X^\vee) \otimes \omega(X) \otimes H \arrow[d, "Id_H\otimes\tilde{ev}\otimes Id_H"] \\
\Bbbk \arrow[r, "\eta"'] & H & H \otimes H \arrow[l, "\mu"]
\end{tikzcd} .
$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
\mu(Id_H \otimes \tilde{ev} \otimes Id_H)(\tilde{\delta} \otimes \delta) &= \mu(\tilde{ev} \otimes Id_H \otimes Id_H)(Id_{\omega(X^\vee)} \otimes \tau \otimes Id_H) \\
&\quad (\tau \otimes Id_{\omega(X)} \otimes Id_H)(\tilde{\delta} \otimes \delta) \\
&= \mu(\tilde{ev} \otimes Id_H \otimes Id_H)(Id_H \otimes \tau \otimes Id_H)(\tau\tilde{\Delta} \otimes \delta) \\
&= \mu(\tilde{ev} \otimes Id_H \otimes Id_H)(Id_H \otimes \tau \otimes Id_H)(\delta \otimes \delta) \\
&= \eta \circ \tilde{ev}.
\end{aligned}
$$

E, de forma análoga, temos, para todo $X \in \mathscr{C}$, a comutatividade do diagrama à seguir:

$$
\begin{tikzcd}
\omega(\mathbb{I}_{\mathscr{C}}) \arrow[r, "\delta^{\omega}_{\mathbb{I}_{\mathscr{C}}}"] \arrow[d, "\omega(\hat{cv})"'] & \omega(\mathbb{I}_{\mathscr{C}}) \otimes H \arrow[d, "\omega(\hat{cv})\otimes Id_H"] \\
\omega(X \otimes X^\vee) \arrow[r, "\delta^{\omega}_{X\otimes X^\vee}"'] & \omega(X \otimes X^\vee) \otimes H
\end{tikzcd} .
$$

Para mostrarmos que $\mu \circ (S \otimes Id_H) \circ \Delta = \mu \circ \varepsilon = \mu(Id_H \otimes S) \circ \Delta$ faremos uso do isomorfismo $\Theta : Hom(H,\_) \Rightarrow Nat(\omega,\omega \otimes \_)$. Isto é, veremos que:

$$\Theta_H(\mu \circ (S \otimes Id_H) \circ \Delta) = \Theta_H(\mu \circ \varepsilon) = \Theta_H(\mu(Id_H \otimes S) \circ \Delta.$$

Vejamos o caso em que $\Theta_H(\mu \circ (S \otimes Id_H) \circ \Delta) = \Theta_H(\mu \circ \varepsilon)$ (o outro caso é análogo). Queremos mostrar então que:

$$(1_\omega \otimes \mu(S \otimes Id_H)\Delta)\delta = (1_\omega \otimes \mu\varepsilon)\delta.$$

Para isso, vejamos que o seguinte diagrama comuta $\forall X \in \mathscr{C}$. Para melhor visualização, trocaremos as identidade por Id, mas pelo diagrama ficará evidente sobre qual objeto a mesma esta sendo usada.

$$\begin{tikzcd}
\omega(X) \arrow[r, "\widetilde{cv}\otimes Id"] \arrow[d, "\widetilde{cv}\otimes Id"'] & \omega(X)\otimes\omega(X^\vee)\otimes\omega(X) \arrow[r, "Id\otimes\widetilde{ev}"] \arrow[dd, "Id\otimes\tilde{\delta}\otimes\delta"] & \omega(X) \arrow[ddd, "Id\otimes\eta"] \\
\omega(X)\otimes\omega(X^\vee)\otimes\omega(X) \arrow[d, "\delta\otimes Id\otimes\Delta"'] & & \\
\omega(X)\otimes H\otimes\omega(X^\vee)\otimes\omega(X)\otimes H \arrow[r, "Id\otimes S\otimes Id\otimes Id\otimes Id"] \arrow[d, "Id\otimes Id\otimes\widetilde{cv}\otimes Id"'] & \omega(X)\otimes H\otimes(X^\vee)\otimes\omega(X)\otimes H \arrow[d, "Id\otimes Id\otimes\widetilde{ev}\otimes Id"] & \\
\omega(X)\otimes H\otimes H \arrow[r, "Id\otimes S\otimes Id"'] & \omega(X)\otimes H\otimes H \arrow[r, "Id\otimes\mu"] & \omega(X)\otimes H
\end{tikzcd}$$

(a) O retângulo superior esquerdo comuta de (18);

(b) O retângulo inferior esquerdo comuta naturalmente;

(c) O retângulo direto comuta por (19).

Primeiro veja que:

$$\begin{aligned}
(Id \otimes Id \otimes \widetilde{ev} \otimes Id)(\delta \otimes Id \otimes \delta)(\widetilde{cv} \otimes Id) &= (\delta \otimes Id)(Id \otimes \widetilde{ev} \otimes Id)(\widetilde{cv} \otimes Id \otimes Id)\delta \\
&= (\delta \otimes Id)(Id \otimes Id)\delta \\
&= (\delta \otimes Id)\delta \\
&= \Theta_H(\Delta) \\
&= (Id \otimes \Delta)\delta.
\end{aligned}$$

Assim, da comutatividade do diagrama temos:

$$(Id \otimes \mu)(Id \otimes S \otimes Id)(Id \otimes \Delta)\delta = (Id \otimes \mu(S \otimes Id)\Delta)\delta$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(Id \otimes \eta)(Id \otimes \tilde{ev})(\tilde{cv} \otimes Id) &= (Id \otimes \mu)Id \\ &= (Id \otimes \eta)(Id \otimes \varepsilon)\delta \\ &= (Id \otimes \eta\varepsilon)\delta.\end{aligned}$$

Sendo assim, $(Id \otimes \eta\varepsilon)\delta = (Id \otimes \mu(S \otimes Id)\Delta)\delta$. E, do isomorfismo Θ, obtemos que $\mu(S \otimes Id)\Delta = \eta \circ \varepsilon$. ■

Traduzindo na notação em que estamos trabalhando, com $(\mathscr{C}, \omega) \in \underline{Tan}_{\otimes}$ e $X \in \mathscr{C}$, temos que a antípoda é descrita da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccc} S: & coend(\omega) & \to & coend(\omega) \\ & [\varphi|v] & \mapsto & [\imath(v)|\varphi] \end{array}$$

sendo $\imath$ o isomorfismo usual de $\Bbbk$-espaços vetoriais definido como:

$$\begin{array}{rccc} \imath: & \omega(X) & \to & \omega(X)^{**} \\ & v & \mapsto & \imath(v)(\varphi) = \varphi(v) \end{array}$$

para todo $x \in \omega(X)$ e $\varphi \in \omega(X)^*$. O que temos na verdade é:

$$\begin{aligned}S[\varphi|v]) &= \varphi(v_{(0)})S(v_{(1)}) \\ &= \varphi_{(0)}(v)\varphi_{(1)} \\ &= \imath(v)(\varphi_{(0)})\varphi_{(1)} \\ &= [\imath(v)|\varphi].\end{aligned}$$

Além disso, com a avaliação

$$\begin{array}{rccc} ev_{\omega(X)}: & \omega(X)^* \otimes \omega(X) & \to & \Bbbk \\ & \varphi \otimes v & \mapsto & \varphi(v) \end{array}$$

temos que $ev_{\omega(X)} \in (\omega(X)^* \otimes \omega(X))^* \cong \omega(X)^* \otimes \omega(X)^{**}$. Sendo $\{x_i\}_{i=1}^n$ base de $\omega(X)$ e $\{x^i\}_{i=1}^n$ sua base dual, temos:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} x^i \otimes \imath(x_i)\right)(\varphi \otimes v) &= \sum_{i=1}^{n} x^i((\imath(x_i)\varphi)v) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x^i(\varphi(x_i)v) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)x^i(v) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x^i(v)x_i\right)\end{aligned}$$

$$= \varphi(v).$$

Sendo assim, para todo $v \in \omega(X)$ e $\varphi \in \omega(X)^*$, da estrutura de álgebra de Hopf $(coend(\omega), \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\mu(S \otimes Id_{\omega(X)})\Delta([\varphi|v]) &= \mu(S \otimes Id_{\omega(X)}) \left(\sum_{i=1}^{n} [\varphi|x_i] \otimes [x^i|v] \right) \\
&= \mu \left([\sum_{i=1}^{n} \imath(x_i)|\varphi] \otimes [x^i|v] \right) \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} x^i \otimes \imath(x_i)|\varphi \otimes v \right] \\
&= [ev_{\omega(X)}|\varphi \otimes v] \\
&= [1_{\Bbbk}|ev_{\omega(X)}(\varphi \otimes v)] \\
&= [1_{\Bbbk}|\varphi(v)] \\
&= \varphi(v)[1_{\Bbbk}|1_{\Bbbk}] \\
&= \varphi(v)[1_{\Bbbk}|1_{\Bbbk}] \\
&= \varepsilon(\varphi \otimes v)\mathbb{1}.
\end{aligned}$$

Além disso, com a coavaliação:

$$\begin{array}{rccc} cv_{\omega(X)}: & \Bbbk & \to & \omega(X) \otimes \omega(X)^* \\ & 1_{\Bbbk} & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes x^i \end{array}$$

obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\mu(Id_{\omega(X)} \otimes S)\Delta([\varphi|v]) &= \mu(Id_{\omega(X)} \otimes S) \left(\sum_{i=1}^{n} [\varphi|x_i] \otimes [x^i|v] \right) \\
&= \mu \left(\sum_{i=1}^{n} [\varphi|x_i] \otimes [\imath(v)|x^i] \right) \\
&= [\imath(v) \otimes \varphi| \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x^i] \\
&= [\imath(v) \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)x^i)|1_{\Bbbk} \right)] \\
&= [\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)x^i(v)|1_{\Bbbk}] \\
&= [\varphi \left(\sum_{i=1}^{n} x^i(v)x_i \right) |1_{\Bbbk}] \\
&= [\varphi(v)|1_{\Bbbk}]
\end{aligned}$$

$$= \varphi(v)[1_{\Bbbk}|1_{\Bbbk}]$$
$$= \varepsilon(\varphi \otimes v)\mathbb{1}.$$

Exemplo 4.3.7. *Dos Exemplos 4.1.14 e 4.2.9 temos que coend$(\omega) \cong R_{\Bbbk}(G)$ sendo este, um isomorfismo de biálgebras e $\omega : Rep(G)_{\Bbbk}^{(f)} \to Vect^{(f)}$ o funtor esquecimento. Vejamos que $(R_{\Bbbk}(G), \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ é na verdade uma álgebra de Hopf. Para isso, definimos a aplicação:*

$$\begin{array}{rccc} S: & R_{\Bbbk}(G) & \to & R_{\Bbbk}(G) \\ & f & \mapsto & S(f) \end{array}$$

no qual, $S(f)(g) = f(g^{-1})$ para todo $g \in G$. Fica claro que S é linear. Sendo $f \in R_{\Bbbk}(G)$ e $g \in G$ temos,

$$\begin{aligned} ((S * Id_{R_{\Bbbk}(G)}(f))))(g) &= (S(f_{(1)})f_{(2)})(g) \\ &= f_{(1)}(g^{-1})f_{(2)}(g) \\ &= f(g^{-1}g) \\ &= f(e)\mathbb{1}(g) \\ &= \eta(\varepsilon(f))(g) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} ((Id_{R_{\Bbbk}(G)} * S)(f))(g) &= f_{(1)}(g)f_{(2)}(g^{-1}) \\ &= f(gg^{-1}) \\ &= f(e)\mathbb{1}(g) \\ &= \eta(\varepsilon(f))(g). \end{aligned}$$

Logo, $S * Id_{R_{\Bbbk}(G)} = \eta \circ \varepsilon = Id_{R_{\Bbbk}(G)} * S$, e portanto S é antípoda de $R_{\Bbbk}(G)$. Então, coend$(\omega) \cong R_{\Bbbk}(G)$ é um isomorfismo de álgebras de Hopf.

Em resumo, toda construção realizada nesse capítulo tem como que, para todo objeto $(\mathscr{C}, \omega) \in$ *Tan*, o *coend*(ω) possui "naturalmente" uma estrutura de coálgebra. Ao adicionarmos uma estrutura monoidal à categoria $\mathscr{C}$ e supondo que o funtor ω é estritamente monoidal, obtemos que o *coend*(ω) é uma biálgebra. Agora, se $\mathscr{C}$ é uma categoria monoidal rígida e ω um funtor monoidal estrito, temos que o *coend*(ω) é álgebra de Hopf, com a antípoda S definida no Teorema 4.3.6.

REFERÊNCIAS

ALVES, M. M. S.; BATISTA, E. An introduction to Hopf algebras:A categorical approach. **XXIII Brazilian Algebra Meeting. Maringá**, 2014.

AMARO, Jadina. **Teoremas de dualidade de Tannaka-Krein**. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) – PPGMTM - UFSC, Florianópolis.

DASCALESCU, Sorin; NASTASESCU, Constantin; RAIANU, Serban. **Hopf algebra: An introduction**. [*S.l.*]: CRC Press, 2000.

DELIGNE, Pierre; MILNE, James S. Tannakian categories. *In*: HODGE cycles, motives, and Shimura varieties. [*S.l.*]: Springer, 1982. P. 101–228.

ETINGOF, Pavel; GELAKI, Shlomo; NIKSHYCH, Dmitri; OSTRIK, Victor. **Tensor categories**. [*S.l.*]: American Mathematical Soc., 2016. v. 205.

HUNGERFORD, Thomas W. **Algebra, vol. 73 of**. [*S.l.*], 1980.

KREIN, M. A principle of duality for bicompact groups and quadratic block algebras. *In*: DOKLADY Akad. Nauk SSSR (NS). [*S.l.*: *s.n.*], 1949. v. 69, p. 725–728.

MACLANE, Saunders. Categories for the working mathematician. 4th corrected printing. **Graduate texts in mathematics**, v. 5, 1988.

SAMUEL, G. A. **Categorias monoidais e o Teorema de Mac Lane para a condição estrita**. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) – PPGMTM - UFSC, Florianópolis.

SCHAUENBURG, Peter. **Tannaka duality for arbitrary Hopf algebras**. [*S.l.*]: R. Fischer, 1992.

TANNAKA, Tadao. Über den Dualitätssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen. **Tohoku Mathematical Journal, First Series**, Mathematical Institute, Tohoku University, v. 45, p. 1–12, 1939.

APÊNDICE A – RESULTADOS IMPORTANTES DE TEORIA DE CATEGORIAS

Definição A.0.1. *Uma categoria $\mathscr{C}$ consiste nos seguintes elementos:*

(i) Uma coleção de objetos, denotada por $\mathscr{C}_0$.

(ii) Para quaisquer objetos X e Y uma coleção de morfismos (ou setas) entre X e Y denotado por $Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$ satisfazendo:

a) Para cada objeto X existe um morfismo Id_X pertencente a coleção/classe de $Hom_{\mathscr{C}}(X,X)$, chamado morfismo identidade ou somente identidade.

b) Para cada tripla de objetos X, Y, Z e dados $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$ e $g \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$ existe um único morfismo $g \circ f \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Z)$. Tal composição além de ser associativa também satisfaz:

$$f \circ Id_X = f \text{ e } Id_Y \circ f = f$$

Alguns exemplos de categorias:

(i) *Set*: categoria a qual os objetos são conjuntos e os morfismos são funções;

(ii) $Vect_{\Bbbk}$: categoria dos espaços vetorials sobre $\Bbbk$, na qual seus morfismos são transformações lineares;

(iii) Sendo B uma $\Bbbk$-álgebra. Temos a categoria ${}_B\mathscr{M}$ na qual seus objetos são B-módulos à esquerda e os morfismos são morfismos de B-módulos à esquerda;

(iv) Seja C uma $\Bbbk$-coálgebra. Temos a categoria $\mathscr{M}^C$ na qual seus objetos são C-comódulos à direita e os morfismos são morfismos de C-comódulos à direita;

(v) *Top*: tem como objetos os espaços topológicos (X,τ), sendo X um conjunto pequeno, e seus morfismos correspondem à funções contínuas;

(vi) Para cada conjunto A, há uma categoria discreta, cujos objetos são precisamente os elementos de A, e na qual os únicos morfismos são as identidades.

(vii) Fixados um grupo G e um corpo $\Bbbk$, a categoria das representações de G, denotada por $Rep_{\Bbbk}(G)$, é a categoria a qual seus objetos são representações $\Bbbk$-lineares de G, isto é, são pares do tipo (V,ρ) onde $\rho : G \to GL(V)$ é um homomorfismo de grupos, V um $\Bbbk$-espaço vetorial e $GL(V)$ é o grupo das transformações lineares bijetoras de V em V. Dados dois objetos em $Rep_{\Bbbk}(G)$, (V,ρ) e (W,σ), um morfismo entre eles será uma transformação linear $f : V \to W$ tal que $\sigma(g)\circ f = f\circ\rho(g)$ (escrito também como $\sigma_g\circ f = f\circ\rho_g$) para todo $g \in G$.

Vejamos que a estrutura acima é de fato uma categoria. De fato, primeiramente temos que Id_V é um morfismo entre (V,ρ) e (V,ρ) e então $Id_V \in Hom_{Rep_{\Bbbk}(G)}((V,\rho),(V,\rho))$.

Agora, sejam $f : (V,\rho) \to (W,\sigma)$ e $h : (W,\sigma) \to (Z,\beta)$. Então, para todo $g \in G$ temos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{h} & Z \\ {\scriptstyle \rho_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_g} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_g} \\ V & \xrightarrow[f]{} & W & \xrightarrow[h]{} & Z \end{array}$$

sendo assim, $h \circ f : (V,\rho) \to (Z,\beta)$. Além disso, sendo a composição de transformações lineares associativa, temos que a composição em questão também será.

Definição A.0.2. *Uma categoria $\mathscr{C}$ é abeliana se satisfaz os seguintes itens:*

(i) $Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ é um grupo abeiliano para todo objeto $A, B \in \mathscr{C}$;

(ii) $\mathscr{C}$ possui objeto nulo;

(iii) Todo par de objetos de $\mathscr{C}$ possui coproduto;

(iv) Todo morfismo em $\mathscr{C}$ possui kernel e cokernel;

(v) Todo monomorfismo é um kernel e todo epimorfismo é um cokernel.

Dizemos que uma categoria abeliana $\mathscr{C}$ é $\Bbbk$-linear, sendo $\Bbbk$ corpo, se para todo $A, B \in \mathscr{C}$ o grupo $Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ possui estrutura de $\Bbbk$-espaço vetorial, e as composições de morfismos são $\Bbbk$-lineares em cada argumento.

Definição A.0.3. *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ duas categorias. Um funtor covariante é uma função que relaciona cada objeto $X \in \mathscr{C}$ a um objeto $F(X) \in \mathscr{D}$ e a cada morfismo $f : X \to Y$ em $\mathscr{C}$ um morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$. Além disso, F satisfaz as seguintes condições:*

(i) Para cada $X \in \mathscr{C}$, $F(Id_X) = Id_{F(X)}$;

(ii) Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ morfismos em $\mathscr{C}$, então $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Definição A.0.4. *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ duas categorias. Um funtor contravariante é uma função que relaciona cada objeto $X \in \mathscr{C}$ a um objeto $F(X) \in \mathscr{D}$ e a cada morfismo $f : X \to Y$ em $\mathscr{C}$ um morfismo $F(f) : F(Y) \to F(X)$. Além disso, F satisfaz as seguintes condições:*

(i) Para cada $X \in \mathscr{C}$, $F(Id_X) = Id_{F(X)}$;

(ii) Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ morfismos em $\mathscr{C}$, então $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Exemplo A.0.5. *Sejam B uma $\Bbbk$-álgebra e ${}_B\mathscr{M}$ a categoria de módulos, cujos objetos são módulos e os morfismos são morfismos de módulos. Então a aplicação $U :_B \mathscr{M} \to Vect_{\Bbbk}$ que associa cada módulo à si mesmo como um $\Bbbk$ espaço vetorial e cada morfismo de módulo à si mesmo como uma transformação linear é um funtor covariante. Denominamos U como funtor esquecimento.*

Definição A.0.6. *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ duas categorias abelianas. Um funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é dito aditivo, se para todo $X, Y \in \mathscr{C}$ e $f,g \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$:*

$$F(f + g) = F(f) + F(g),$$

ou seja, o morfismo $F : Hom_{\mathscr{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathscr{D}}(F(X), F(Y))$ é um homomorfismo de grupos.

Definição A.0.7. *Uma categoria é dita pequena se as coleções de objetos e morfismos forem conjuntos.*

Definição A.0.8. *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ duas categorias abelianas e $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um funtor aditivo. F é dito exato à esquerda (à direita) se, para toda sequência curta exata $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ em $\mathscr{C}$, a sequência $0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z)$ (respectivamente, $F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$) é exata em $\mathscr{D}$. Se F é exato à esquerda e à direita, dizemos que F é um funtor exato.*

Definição A.0.9. *Uma transformação natural entre dois funtores $F,G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é a família de morfismos*

$$\alpha = (\alpha_A \in Hom_D(F(A),G(A)))_{A\in\mathscr{C}}$$

tal que, para cada morfismo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

Denotamos a transformação natura de $\alpha : F \Rightarrow G$. Dizemos que α é um isomorfismo natural se cada α_A é um isomorfismo.

Existem dois tipos de composições de transformações naturais:

- *Sejam $\alpha : F \Rightarrow G$ e $\beta : G \Rightarrow H$ duas transformações naturais entre os funtores $F, G, H : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$. Então, temos a composição natural $\beta\alpha : F \Rightarrow H$, a qual é feita por avaliação, isto é, $(\beta\alpha)_X = \beta_X\alpha_X$. Denotamos essa composição por composição vertical das transformações naturais.*
- *Temos ainda a composição horizontal entre transformações naturais. Esta se da por, sendo $\eta : F \Rightarrow G$ uma transformação natural entre os funtores $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $\varepsilon : J \to K$ a transformação natural entre os funtores $J, K : \mathscr{D} \to \mathscr{M}$, então a composição de funtores permitem a composição de transformações naturais $(\varepsilon * \eta) : JF \Rightarrow KG$, no qual*

  $$(\varepsilon * \eta)_X = \varepsilon_{G(X)}J(\eta_X)$$

  para todo $X \in \mathscr{C}$.

Lema A.0.10. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria localmente pequena e $F : \mathscr{C} \to$ Set um funtor covariante e $C \in \mathscr{C}$. Então existe a bijeção*

$$\Omega : Nat(Hom_{\mathscr{C}}(C, \_), F) \to F(C)$$

sendo que cada transformação natural $\alpha : Hom_{\mathscr{C}}(C, \_) \Rightarrow F$ é levada ao objeto $\alpha_C(Id_C)$.

Definição A.0.11. *Dizemos que dois funtores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ formam uma adjunção, isto é, são adjuntos se existe uma transformação natural $\eta : Id_{\mathscr{C}} \Rightarrow GF$ e $\varepsilon : FG \Rightarrow Id_{\mathscr{D}}$ tal que para cada objeto $A \in \mathscr{C}$ e $B \in \mathscr{D}$ os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(\eta_A)"] \arrow[dr, "Id_{F(A)}"'] & FGF(A) \arrow[d, "\varepsilon_{F(A)}"] \\ & F(A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(B) \arrow[r, "\eta_{G(B)}"] \arrow[dr, "Id_{G(B)}"'] & GFG(B) \arrow[d, "G(\varepsilon_B)"] \\ & G(B) \end{tikzcd}$$

*Denominamos η e ε, respectivamente, de **unidade** e **counidade** da adjunção. Neste caso F é dito como adjunto à esquerda de G e/ou G é adjunto à direita de F.*

Podemos ainda ter uma caracterização análoga de uma adjunção.

Teorema A.0.12. *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ duas categorias e $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ dois funtores. Então é equivalente:*

(i) F é adjunto à esquerda de G.

(ii) Existe a bijeção $\varphi_{A,B} : Hom_{\mathscr{D}}(F(A), B) \to Hom_{\mathscr{C}}(A, G(B))$ para quaisquer $A \in \mathscr{C}$ e $B \in \mathscr{D}$.

Teorema A.0.13. *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ duas categorias equivalentes, isto é, existem funtores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tais que $F \circ G \cong Id_{\mathscr{D}}$ e $Id_{\mathscr{C}} \cong G \circ F$. Neste caso F e G formam uma adjunção.*

Demonstração. Sendo $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ duas categorias equivalentes, existem os isomorfismos naturais $\eta : Id_{\mathscr{C}} \Rightarrow GF$ e $\varepsilon : FG \Rightarrow Id_{\mathscr{D}}$. Definimos os isomorfismos, $\forall X \in \mathscr{C}$:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\eta_X)"] \arrow[dr, "\alpha_X"'] & FGF(X) \arrow[d, "\varepsilon_{F(X)}"] \\ & F(X) \end{tikzcd}$$

isto é, $\alpha_X := \varepsilon_{F(X)} \circ F(\eta_X)$ e $\forall Y \in \mathscr{D}$:

$$\begin{tikzcd} G(Y) \arrow[r, "\eta_{G(Y)}"] \arrow[dr, "\beta_Y"'] & GFG(Y) \arrow[d, "G(\varepsilon_Y)"] \\ & G(Y) \end{tikzcd}$$

isto é, $\beta_Y \coloneqq G(\varepsilon_Y) \circ \eta_{G(Y)}$. Tomando $\varepsilon'_Y = \varepsilon_Y \circ F(\beta_Y^{-1})$, sendo $\beta_Y^{-1} = \eta^{-1}_{G(Y)} \circ G(\varepsilon_Y^{-1})$ para todo $Y \in \mathscr{D}$, vejamos que $\varepsilon'_{F(X)} \circ F(\eta_X) = Id_{F(X)}$ para todo $X \in \mathscr{C}$. De fato, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(\eta_X)"] \arrow[ddrr, bend right, "Id_{F(X)}"'] & FGF(X) \arrow[r, "F(\eta_X^{-1})"] \arrow[d, "FG(\varepsilon^{-1}_{F(X)})"'] & F(X) \arrow[d, "\varepsilon^{-1}_{F(X)}"] \\
 & FGFGF(X) \arrow[r, "F(\eta^{-1}_{GF(X)})"'] & FGF(X) \arrow[d, "\varepsilon_{F(X)}"] \\
 & & F(X)
\end{tikzcd}$$

comuta para todo $X \in \mathscr{C}$, pois, da parte de fora

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{F(X)} \circ \varepsilon^{-1}_{F(X)} \circ F(\eta_X^{-1}) \circ F(\eta_X) &= \varepsilon_{F(X)} \circ \varepsilon^{-1}_{F(X)} \circ F(\eta_X^{-1} \circ \eta_X) \\
&= Id_{F(X)}
\end{aligned}$$

e o retângulo interno do diagrama comuta da naturalidade de η^{-1} funtorizado por F. Sendo assim, da comutatividade do diagrama anterior, temos para todo $X \in \mathscr{C}$:

$$\begin{aligned}
Id_{F(X)} &= \eta_{F(X)} \circ F(\eta^{-1}_{GF(X)}) \circ FG(\varepsilon^{-1}_{F(X)}) \circ F(\eta_X) \\
&= \varepsilon'_{F(X)} \circ F(\eta_X)
\end{aligned}$$

Agora, vejamos que para todo $Y \in \mathscr{D}$, $G(\varepsilon'_Y) \circ \eta_{G(Y)} = Id_{G(Y)}$. Para isso, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
G(Y) \arrow[r, "\eta_{G(Y)}"] \arrow[ddrr, bend right, "Id_{G(Y)}"'] & GFG(Y) \arrow[r, "\eta^{-1}_{G(Y)}"] \arrow[d, "G(\varepsilon^{-1}_{FG(Y)})"'] & G(Y) \arrow[d, "G(\varepsilon_Y^{-1})"] \\
 & GFGFG(Y) \arrow[r, "\eta^{-1}_{GFG(Y)}"'] & GFG(Y) \arrow[d, "G(\varepsilon_Y)"] \\
 & & G(Y)
\end{tikzcd}$$

comuta, pois da parte de fora

$$\begin{aligned}
G(\varepsilon_Y) \circ G(\varepsilon_Y^{-1}) \circ \eta^{-1}_{G(Y)} \circ \eta_{G(Y)} &= G(\varepsilon_Y \circ \varepsilon_Y^{-1}) \circ \eta^{-1}_{G(Y)} \circ \eta_{G(Y)} \\
&= Id_{G(Y)}
\end{aligned}$$

e o retângulo presente no diagrama comuta da naturalidade de η^{-1}. Assim, da comutatividade do diagrama temos:

$$Id_{G(Y)} = G(\varepsilon_Y) \circ \eta^{-1}_{GFG(Y)} \circ G(\varepsilon^{-1}_{FG(Y)}) \circ \eta_{G(Y)}$$

$$= G(\varepsilon'_Y) \circ \eta_{G(Y)}$$

Com isso, os isomorfismos naturais $\eta : Id_{\mathscr{C}} \Rightarrow GF$ e $\varepsilon' : FG \Rightarrow Id_{\mathscr{D}}$ satisfazem os triângulos da adjunção. Assim, F é adjunto à esquerda de G.

Em resumo, toda equivalência categórica pode ser promovida a uma adjunção.

■

Proposição A.0.14. *Dada a adjunção*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathscr{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

o funtor F é fiel e cheio se, e somente se, a unidade da adjunção é bijetiva. O funtor G é fiel e cheio se, somente se, a counidade da adjunção é bijetiva. A categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ são equivalentes se, e somente se, a unidade e a counidade da adjunção são bijetivas.

Definição A.0.15. ***(Cone e Co-cone)*** *Seja $X : J \to \mathscr{C}$ o funtor diagrama sendo J a categoria de índices, tal que para cada $\alpha \in Hom_J(i,j)$ temos $X(\alpha) \in Hom_{\mathscr{C}}(X_i, X_j)$. Isto é, o funtor X funciona basicamente como um indexador de famílias de objetos e morfismos em $\mathscr{C}$. Dizemos que $N \in \mathscr{C}$ é **Cone** de X, juntamente com a família de morfismos $(\pi_i : N \to X(i))_{i \in J}$ tal que $X(\alpha) \circ \pi_i = \pi_j$.*

*De forma dual, um **Co-cone** de X é o par $(P, \pi_i : P \to X_i)$ tal que $\pi_j \circ X(\alpha) = \pi_i$.*

Definição A.0.16. ***(Limite e Colimite)*** *Sejam $X : J \to \mathscr{C}$ o funtor diagrama. Um **limite** de X é o cone $(\lim X, \pi_i)$ de X tal que para qualquer outro cone de X (N, f_i) existe um único morfismo $f : N \to \lim X$ tal que $f_i = \pi_i \circ f$. Isto é, o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[ddl, bend right, "f_i"'] \arrow[ddr, bend left, "f_j"] & \\ & \lim X \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\pi_j"] & \\ X_i \arrow[rr, "X(\alpha)"'] & & X_j \end{tikzcd}$$

E mais, $(\lim X, \pi_i)$ é denominado como cone universal.

*De forma dual, um **colimite** do diagrama X é co-cone $(ColimX, \pi_i)$ de X, tal que para qualquer outro co-cone (P, g_i) de X existe um único morfismo $g : ColimX \to P$ tal que $g \circ \pi_i = g_i$. Em termos de diagramas temos que:*

$$
\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "X(\alpha)"] \arrow[dr, "\pi_i"'] \arrow[ddr, bend right, "g_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\pi_j"] \arrow[ddl, bend left, "g_j"] \\
& ColimX \arrow[d, dashed, "g"] & \\
& P &
\end{tikzcd}
$$

E mais, ($ColimX$,π_i) é denominado como um co-cone universal.

Teorema A.0.17. *Toda adjunção à direita preserva limites.*

Demonstração. Sejam as categorias $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$, os funtores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ sendo F adjunto à direta de G. Da adjunção temos as transformações naturais $\eta : Id_{\mathscr{D}} \Rightarrow FG$ e $\varepsilon : GF \Rightarrow Id_{\mathscr{C}}$ (counidade e unidade, respectivamente). Do Teorema A.0.12 temos a bijeção para quaisquer $A \in \mathscr{D}$ e $B \in \mathscr{C}$:

$$\varphi_{A,B} : Hom_{\mathscr{C}}(G(A),B) \to Hom_{\mathscr{D}}(A,F(B)) \tag{20}$$

Seja agora o funtor diagrama $X : J \to \mathscr{C}$ e o limite de X ($\lim X, \pi_i$). Definindo o funtor diagrama $F \circ X : I \to \mathscr{D}$, queremos mostrar que ($F(\lim X)$,$F(\pi_i : F(\lim X) \to F(X_i))$ é limite de $F \circ X$.

(a) Vejamos que ($F(\lim X)$,$F(\pi_i)$) é cone de $F \circ X$. De fato,

$$F(\pi_j) \circ F(X(\alpha)) = F(\pi_i \circ X(\alpha)) = F(\pi_j)$$

(b) Agora seja (N, $f_i : N \to F(X_i)$) outro cone de $F \circ X$. Vejamos que ($F(\lim X)$, $F(\pi_i)$) é cone universal de $F \circ X$. Da bijeção (20) temos que existe um único $\hat{f}_i \in Hom_{\mathscr{C}}(G(N),X_i)$ tal que $\varphi_{N,X_i}(\hat{f}_i) = f_i$.

Afirmamos que ($G(N)$,$\hat{f}_i$) é cone de $X : I \to \mathscr{C}$. De fato, da adjunção o seguinte diagrama comuta

$$
\begin{tikzcd}
G(N) \arrow[r, "\hat{f}_i"] \arrow[d, "G(f_i)"'] & X_i \\
GF(X_i) \arrow[ur, "\varepsilon_{X_i}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Além disso, da naturalidade de ε temos que o diagrama a seguir comuta.

$$
\begin{tikzcd}
GF(X_i) \arrow[r, "GF(X(\alpha))"] \arrow[d, "\varepsilon_{X_i}"'] & FG(X_j) \arrow[d, "\varepsilon_{X_j}"] \\
X_i \arrow[r, "X(\alpha)"] & X_j
\end{tikzcd}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
X(\alpha) \circ \hat{f}_i &\overset{(i)}{=} X(\alpha) \circ \varepsilon_{X_i} \circ G(f_i) \\
&\overset{(ii)}{=} \varepsilon_{X_j} \circ GF(X(\alpha)) \circ G(f_i) \\
&= \varepsilon_{X_j} \circ G(F(X(\alpha)) \circ f_i) \\
&\overset{(iii)}{=} \varepsilon_{X_j} \circ G(f_j) \\
&= \hat{f}_j
\end{aligned}
$$

sendo (i) e (ii) referentes, respectivamente, aos diagramas acima e a igualdade (iii) é dada pelo fato de $(F(\lim X), F(\pi_i))$ ser cone de $F \circ I$. Logo $(G(N), \hat{f}_i)$ é cone de $X : I \to \mathscr{C}$, isto é, o seguinte diagrama comuta:

$$
\begin{tikzcd}
& G(N) \arrow[dl, "\hat{f}_i"'] \arrow[dr, "\hat{f}_j"] & \\
X_i \arrow[rr, "X(\alpha)"'] & & X_j
\end{tikzcd}
$$

Mas sendo $(\lim X, \pi_i)$ limite de X, temos que existe $\hat{\psi} : G(N) \to \lim X$ tal que

$$
\begin{tikzcd}
& G(N) \arrow[d, dashed, "\hat{\psi}"] \arrow[ddl, bend right, "\hat{f}_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\hat{f}_j"] & \\
& \lim X \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\pi_j"] & \\
X_i \arrow[rr, "F(X(\alpha))"'] & & X_j
\end{tikzcd}
\tag{21}
$$

Da bijeção (20) temos que existe um único $\psi \in Hom_{\mathscr{D}}(N, F(\lim X))$ tal que $\varphi_{N, \lim X}(\hat{\psi}) = \psi$. Afirmamos que o seguinte diagrama comuta:

$$
\begin{tikzcd}
& N \arrow[d, "\psi"] \arrow[ddl, bend right, "f_i"'] \arrow[ddr, bend left, "f_j"] & \\
& F(\lim X) \arrow[dl, "F(\pi_i)"'] \arrow[dr, "F(\pi_j)"] & \\
F(X_i) \arrow[rr, "X(\alpha)"'] & & F(X_j)
\end{tikzcd}
$$

Novamente da adjunção temos que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\eta_N"] \arrow[dr, "\psi"'] & FG(N) \arrow[d, "F(\hat{\psi})"] \\ & F(\lim X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} N \arrow[r, "\eta_N"] \arrow[dr, "f_i"'] & FG(N) \arrow[d, "F(\hat{f}_i)"] \\ & F(X_i) \end{tikzcd}$$

Assim,

$$\begin{aligned} F(\pi_i) \circ \psi &\overset{(iv)}{=} F(\pi_i) \circ F(\hat{\psi}) \circ \eta_N \\ &= F(\pi_i \circ \hat{\psi}) \circ \eta_N \\ &\overset{(v)}{=} F(\hat{f}_i) \circ \eta_N \\ &\overset{(vi)}{=} f_i \end{aligned}$$

Sendo (iv) e (vi) resultados dos diagramas acima e (v) é consequência de (21). De forma análoga obtemos que $F(\pi_j) \circ \psi = f_j$. A unicidade de ψ se dá justamente pela bijeção da adjunção.

Portanto, $(F(\lim X), F(\pi_i))$ é um cone universal de $F \circ X$, isto é, o par é um limite do funtor $F \circ X$.

■

De forma análoga a demonstração acima (por meio de dualidade), demonstra-se o seguinte teorema.

Teorema A.0.18. *Toda adjunção à esquerda preserva colimites.*

Proposição A.0.19. *Afirmamos que o funtor $Hom(X, \_) : \mathscr{C} \to Set$ preserva limites. Sejam $(L, \pi_i : L \to X_i)$ limite de J, sendo $J : I \to \mathscr{C}$ o funtor diagrama, isto é,*

$$\begin{array}{cccc} J: & I & \to & \mathscr{C} \\ & i & & X_i \\ & f\big\downarrow & \mapsto & \big\downarrow J(\alpha) \\ & j & & X_j \end{array}$$

Da definição de limite, sendo (Y, g_i) outro cone de J, existe um único morfismo $\hat{g} : Y \to L$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, dashed, "\hat{g}"] \arrow[ddl, bend right, "g_i"'] \arrow[ddr, bend left, "g_j"] & \\ & L \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\pi_j"] & \\ X_i \arrow[rr, "J(\alpha)"'] & & X_j \end{tikzcd}$$

Vejamos que o diagrama acima funtorizado por $Hom(X, \_)$, isto é,

$$\begin{tikzcd}
& Hom(X,Y) \arrow[d, dashed, "\hat{g}_*"] \arrow[dl, bend right, "(g_i)_*"'] \arrow[dr, bend left, "(g_j)_*"] & \\
& Hom(X,L) \arrow[dl, "(\pi_i)_*"'] \arrow[dr, "(\pi_j)_*"] & \\
Hom(X,X_i) \arrow[rr, "(J(\alpha))_*"'] & & Hom(X,X_j)
\end{tikzcd}$$

comuta. De fato, seja $p \in Hom(X, L)$. Então,

$$\begin{aligned}
(J(\alpha))_* \circ (\pi_i)_*(p) &= J(\alpha) \circ \pi_i(p) \\
&= \pi_j(p) \\
&= (\pi_j)_*(p)
\end{aligned}$$

Além disso, sendo $h \in Hom(X,Y)$ temos que

$$\begin{aligned}
(\pi_i)_* \circ \hat{g}_*(h) &= \pi_i \circ \hat{g}(h) \\
&= g_i(h) \\
&= (g_i)_*(h)
\end{aligned}$$

e, de forma análoga, $(\pi_j)_* \circ \hat{g}_* = (g_j)_*$. E mais, a unicidade de $\hat{g}_*$ se dá justamente da unicidade de $\hat{g}$. Logo $Hom(X,\_)$ preserva limites.

Agora, vejamos que o funtor $Hom(\_, X) : \mathscr{C}^{op} \to Set$ leva limites em colimites. Para isso, do diagrama acima proveniente da definição de limites, mostremos que ao funtorizá-lo por $Hom(\_, X)$, isto é,

$$\begin{tikzcd}
Hom(X,X_i) \arrow[dr, "(\pi_i)^*"'] \arrow[ddr, bend right, "(g_i)^*"'] & & Hom(X_j,X) \arrow[ll, "J(\alpha)^*"'] \arrow[dl, "(\pi_j)^*"] \arrow[ddl, bend left, "(g_j)^*"] \\
& Hom(L,X) \arrow[d, dashed, "\hat{g}^*"] & \\
& Hom(Y,X) &
\end{tikzcd}$$

comuta. De fato, seja $h \in Hom(X_j, X)$. Então,

$$\begin{aligned}
(\pi_i)^* \circ (J(\alpha))^*(h) &= (\pi_i)^*(h \circ J(\alpha)) \\
&= h \circ J(\alpha) \circ \pi_i \\
&= h \circ \pi_j
\end{aligned}$$

$$= (\pi_j)^*(h)$$

Agora, seja $p \in Hom(X_i, X)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\hat{g}^* \circ (\pi_i)^*(p) &= \hat{g}^*(p \circ \pi_i) \\
&= p \circ \pi_i \circ \hat{g} \\
&= p \circ g_i \\
&= (g_i)^*(h)
\end{aligned}$$

e, de forma análoga, $\hat{g}^* \circ (\pi_j)^* = (g_j)^*$. E novamente, a unicidade de $\hat{g}^*$ se dá pois $\hat{g}$ é única que satisfaz a definição de limite.

Como resultado disso, temos para o bifuntor $Hom(\_,\_) : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to Set$ os seguintes resultados:

$$Hom(colimJ, X) \cong limHom(J, X) \;\; e \;\; Hom(X, limJ) \cong limHom(X, J)$$