



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Matheus Henrique Wagner

**REDUÇÃO DE DIMENSIONALIDADE APLICADA A  
MODELOS TÉRMICOS DE ELEMENTOS FINITOS**

Florianópolis  
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Wagner, Matheus Henrique  
REDUÇÃO DE DIMENSIONALIDADE APLICADA A MODELOS TÉRMICOS  
DE ELEMENTOS FINITOS / Matheus Henrique Wagner ;  
orientador, Mauricio Valencia Ferreira da Luz, 2022.  
62 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -  
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico,  
Graduação em Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Engenharia Elétrica. 2. Redução de dimensionalidade.  
3. Método de elementos finitos. 4. Modelo térmico. 5.  
Indutor monofásico. I. Ferreira da Luz, Mauricio Valencia.  
II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em  
Engenharia Elétrica. III. Título.

Matheus Henrique Wagner

**REDUÇÃO DE DIMENSIONALIDADE APLICADA A  
MODELOS TÉRMICOS DE ELEMENTOS FINITOS**

Trabalho de Conclusão de Curso do Curso de Graduação em Engenharia Elétrica do Centro Tecnológico da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Elétrica.  
Orientador: Prof. Mauricio V. Ferreira da Luz, Dr.

Florianópolis  
2022



Matheus Henrique Wagner

## Redução de Dimensionalidade Aplicada a Modelos Térmicos de Elementos Finitos

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de “Bacharel em Engenharia Elétrica” e aceito, em sua forma final, pelo Curso de Graduação em Engenharia Elétrica.

Florianópolis, 19 de abril de 2022.



Documento assinado digitalmente  
Miguel Moreto  
Data: 20/04/2022 07:39:33-0300  
CPF: 948.850.100-63  
Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

---

Prof. Miguel Moreto, Dr.  
Coordenador do Curso de Graduação em Engenharia Elétrica

### Banca Examinadora:



Documento assinado digitalmente  
Mauricio Valencia Ferreira da Luz  
Data: 19/04/2022 13:42:09-0300  
CPF: 960.926.969-91  
Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

---

Prof. Mauricio Valencia Ferreira da Luz, Dr.  
Orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina



Documento assinado digitalmente  
Jean Viane Leite  
Data: 19/04/2022 15:13:15-0300  
CPF: 003.474.909-80  
Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

---

Prof. Jean Viane Leite, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Angelo Alfredo Hafner, Dr.  
Universidade do Estado de Santa Catarina



Aos meus pais, Lino e Iracema.





## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, não só por terem dado vida e criarem um ser humano que, dotado da feliz ilusão de ser fundamentalmente consciente<sup>1</sup>, chamo de “eu”, mas também por me incentivarem e me apoiarem muito mais do que é razoável se esperar de alguém, incondicionalmente, mesmo quando nem sempre merecido.

Ao meu orientador Mauricio Valencia Ferreira da Luz por ter uma visão além do alcance da maioria, recompensar esforço e dedicação, ensinar e aprender com seus alunos e ter um apetite insaciável por engenharia aplicada, contagiando as pessoas ao seu redor.

Aos meus amigos Daniel, André, Vitor, Mateus e Miguel, principalmente por me aturarem, mas também por propiciarem o contato social necessário para manter minha sanidade.

E à física, matemática e o universo, pelo acaso de serem infindavelmente interessantes.

---

<sup>1</sup> <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fpsyg.2020.01041/full>



*“You know what they call a Quarter Pounder with cheese in Paris?”*  
*(Vincent Vega, 1994)*



## RESUMO

A modelagem de equipamentos elétricos em tempo real é de grande interesse em soluções de engenharia da indústria 4.0. Como problemas de engenharia geralmente são modelados por equações diferenciais parciais, a forma mais óbvia de resolvê-los é por discretização, comumente por meio do método de elementos finitos. No entanto, este método tende a gerar sistemas complexos com alto custo computacional de resolução. Apesar do poder computacional de *hardware* embarcado ser maior do que nunca, simular o mundo físico precisamente nele não costuma ser possível. Por este motivo, há interesse em modelos simplificados que capturam a dinâmica do equipamento não necessitando de grande poder computacional. Neste contexto, o presente trabalho de conclusão de curso busca explorar técnicas matemáticas para a redução de dimensionalidade de modelos térmicos de elementos finitos, ou seja, deixando-os menos custosos computacionalmente, no contexto de equipamentos elétricos. A abordagem escolhida envolve a extração da estrutura matemática da implementação de elementos finitos, aproximação do espaço de todas as possíveis soluções do problema considerando a operação do equipamento e projeção do modelo nesse espaço reduzido. Esse método é bastante simples de implementar para modelos lineares, porém, não-linearidades precisam de tratamento especial. O método foi aplicado a um indutor monofásico resfriado a ar, para o qual foram realizadas análises de acurácia, complexidade e de tempo. Ganhos de tempo de simulações maiores que 95% foram obtidos ainda mantendo-se acurácia de  $\pm 2,5$  °C. As técnicas desenvolvidas são genéricas e podem ser aplicadas a quase qualquer modelo térmico de equipamento elétrico, desde que não inclua hidrodinâmica e que sejam possíveis algumas simplificações. Por fim, para auxiliar na geração das estruturas matemáticas necessárias, *softwares open-source* foram utilizados para implementação das técnicas apresentadas, sua característica crucial sendo que os mesmos permitem acesso a todas as fases da implementação de elementos finitos.

**Palavras-chave:** Redução de dimensionalidade. Método de elementos finitos. Modelo térmico. Indutor monofásico.



## ABSTRACT

Modeling electrical equipment in real time is of great interest in the context of industry 4.0 engineering solutions. Since engineering problems are usually in the form of partial differential equations, the most obvious way to solve them is by discretization often via the finite element method. However, this method tends to generate complex systems that are computationally expensive to solve. Even though embedded hardware is more powerful than ever, simulating the physical world accurately is a task that often far exceeds its capabilities. For this reason, simplified models that capture equipment dynamics while also being computationally undemanding are desirable. With that in mind, this thesis aims to explore a mathematical framework for reducing the dimensionality of thermal finite element models, i.e., making them less computationally expensive, in the context of electrical equipment. The selected approach involves extracting the mathematical structure of the finite element implementation, approximating the space of all possible solutions of the problem that arise from real world conditions and projecting the model into this reduced space. This method is fairly straightforward to implement for linear models, however, nonlinearities will need special treatment. The method was applied to a single-phase air-cooled inductor, for which accuracy, complexity and qualitative time analyses were carried out. Simulation times were reduced by more than 95%, maintaining a  $\pm 2, 5$  °C accuracy. The framework developed is generic and can be applied to almost any electrical equipment thermal model, provided it does not include hydrodynamics and that some simplifications are possible. Lastly, in order to aid in the generation of the necessary mathematical structures, open-source software was used to implement the presented techniques, the crucial feature of which being that they allow access to all stages of the finite element implementation.

**Keywords:** Dimensionality reduction. Finite element method. Thermal model. Single-phase inductor.





## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Gráfico 1 – Exemplificação do resultado da LX . . . . .	37
Gráfico 2 – Visualização da aproximação da Equação (40) . . . . .	43
Figura 1 – Seção transversal do indutor monofásico modelado . . . . .	48
Figura 2 – Visão tridimensional do equipamento modelado . . . . .	48
Gráfico 3 – Curva BH do aço . . . . .	49
Figura 3 – Indução no núcleo para 150 $A_{CC}$ ( $T$ ) . . . . .	49
Figura 4 – Malha de elementos finitos . . . . .	52
Figura 5 – Distribuição estática de temperatura no equipamento ( $^{\circ}\text{C}$ ) . . . . .	52
Gráfico 4 – Exemplo de corrente de entrada do modelo . . . . .	52
Gráfico 5 – Valores singulares . . . . .	52
Gráfico 6 – Espaço de soluções do problema . . . . .	53
Gráfico 7 – Aproximação pela Decomposição definida pelas Equações (7) e (8) (LX) do vetor de temperatura . . . . .	53
Gráfico 8 – Aproximação pela LX do vetor de indução no núcleo . . . . .	53
Gráfico 9 – Comparação entre resultado de elementos finitos e do modelo completo	56
Gráfico 10 – Diferença média entre as temperaturas de interesse dinâmicas . . . . .	56
Gráfico 11 – Tempo de simulação dos modelos dinâmicos . . . . .	56
Gráfico 12 – Comparação da solução dinâmica para diferentes números de compo- nentes . . . . .	56
Gráfico 13 – Diferença média no vetor de temperaturas estático . . . . .	57
Gráfico 14 – Diferença máxima no vetor de temperaturas estático . . . . .	57
Gráfico 15 – Diferença média entre as temperaturas de interesse estáticas . . . . .	57
Gráfico 16 – Diferença máxima entre as temperaturas de interesse estáticas . . . . .	57
Gráfico 17 – Tempo de simulação dos modelos estáticos . . . . .	57
Gráfico 18 – Complexidade interna dos modelos . . . . .	57
Gráfico 19 – Diferença média no vetor de temperaturas estático ( $I \approx$ nominal) . . .	58
Gráfico 20 – Diferença máxima no vetor de temperaturas estático ( $I \approx$ nominal) . .	58
Gráfico 21 – Diferença média entre as temperaturas de interesse estáticas ( $I \approx$ nominal) . . . . .	58
Gráfico 22 – Diferença máxima entre as temperaturas de interesse estáticas ( $I \approx$ nominal) . . . . .	58



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores da geometria do problema . . . . .	48
Tabela 2 – Parâmetros físicos do problema . . . . .	49
Tabela 3 – Parâmetros das perdas . . . . .	49



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACP	Análise de Componentes Principais
CC	Corrente Contínua
IoT	Internet of Things (internet das coisas)
LX	Decomposição definida pelas Equações (7) e (8)
MEF	Método de Elementos Finitos
PVI	Problema de Valor Inicial
PVIC	Problema de Valor Inicial e sobre o Contorno
RD	Redução de Dimensionalidade
RMS	Root Mean Square (eficaz)
SVD	Singular Value Decomposition (decomposição em valores singulares)
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso



## LISTA DE SÍMBOLOS

$x$	Variáveis de um Problema de Valor Inicial e Sobre o Contorno
$t$	Tempo [s]
$f$	Operador diferencial de um Problema de Valor Inicial e Sobre o Contorno
$\mathbf{x}_k$	Elemento do vetor $\mathbf{x}$ na linha $k$
$\mathbf{f}_k$	Saída $k$ da função $\mathbf{f}$
$\mathbf{x}$	Vetor de estados de um Problema de Valor Inicial
$\mathbf{f}$	Função derivada dos estados de um sistema
$\mathbf{A}$	Matriz de estado de um sistema linear
$\mathbf{B}$	Vetor de entradas de um sistema linear
$\mathbf{y}$	Vetor de estados com dimensão reduzida
$\mathbf{I}_k$	Matriz identidade de dimensão $k \times k$
$\mathbf{G}$	Matriz de transformação entre um vetor de estados reduzido e um completo
$\mathbf{M}$	Matriz de aproximação do espaço de soluções de um sistema
$\mathbf{U}$	Matriz de vetores singulares à esquerda de $\mathbf{M}$
$\Sigma$	Matriz de valores singulares de $\mathbf{M}$
$\mathbf{V}$	Matriz de vetores singulares à direita de $\mathbf{M}$
$\mathbf{V}_L$	Matriz com as primeiras $L$ colunas de $\mathbf{V}$
$\mathbf{x}^k$	Linha $\mathbf{x}$ da matriz $\mathbf{M}$
$\mathbf{U}_{kl}$	Elemento da matriz $\mathbf{U}$ na linha $k$ , coluna $l$
$\sigma_k$	Valor singular $k$
$\mathbf{V}_{kl}$	Elemento da matriz $\mathbf{V}$ na linha $k$ , coluna $l$
$e_{mm}$	Erro médio máximo da aproximação de $\mathbf{x}^k$ por $L$ componentes
$c_V$	Capacidade térmica volumétrica $\left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3\text{K}}\right]$
$T$	Temperatura [K]
$k$	Condutividade térmica $\left[\frac{\text{W}}{\text{mK}}\right]$
$\dot{q}_V$	Geração térmica volumétrica $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3}\right]$
$\dot{q}_F$	Perdas no núcleo $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3}\right]$
$\dot{q}_E$	Perdas nos enrolamentos para a temperatura de referência $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3}\right]$
$\alpha$	Coefficiente térmico da resistência de enrolamento $\left[\frac{1}{\text{K}}\right]$
$T_{ref}$	Temperatura de referência para a resistência dos enrolamentos [K]
$L^2(\Omega)$	Espaço de funções quadraticamente integráveis em $\Omega$
$v$	Função de teste
$H^1(\Omega)$	Espaço de Sobolev de funções com derivadas fracas em $L^2(\Omega)$
$\Omega$	Domínio do problema diferencial
$\partial\Omega$	Contorno de $\Omega$
$q$	Fluxo de calor $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$
$\hat{n}$	Vetor normal à $\partial\Omega$ apontando para fora

$q_c$	Densidade do fluxo de calor por convecção na fronteira do problema $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$
$h$	Coefficiente convectivo de transferência de calor $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}\right]$
$T_\infty^c$	Temperatura média do fluido que envolve o equipamento [K]
$F_{kl}$	Fator de forma: fração de energia radiante que deixa a superfície $k$ e atinge a superfície $l$
$q_r$	Densidade do fluxo de calor por radiação na fronteira do problema $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$
$\epsilon$	Emissividade de radiação [W]
$\sigma$	Constante de Stefan–Boltzmann $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}\right]$
$S_f^k$	Conjunto das superfícies da fronteira em que incide radiação da superfície $k$
$T_\infty^r$	Temperatura do ar longe do equipamento [K]
$A_k$	Área da superfície $k$ [m <sup>2</sup> ]
$E_k$	Energia radiante emitida pela superfície $k$
$S_f$	Conjunto das superfícies na fronteira do problema
$\partial\Omega_k$	Superfície $k$ da fronteira
$N_h$	Número de graus de liberdade em $V_h$
$V_h$	Espaço das funções teste do problema discretizado
$v_h$	Função base unitária de $V_h$
$T_h$	Temperatura discretizada [K]
$T_h^k$	Temperatura do grau de liberdade $k$ de $V_h$ [K]
$v_h^k$	Função base unitária do grau de liberdade $k$ de $V_h$
<b>C</b>	Matriz de capacidade térmica $\left[\frac{\text{J}}{\text{K}}\right]$
<b>T</b>	Vetor com as temperaturas de cada grau de liberdade [K]
<b>K</b>	Matriz de condutância térmica $\left[\frac{\text{W}}{\text{K}}\right]$
<b>Q<sup>sa</sup></b>	Vetor de geração térmica auxiliar [W]
<b>Q</b>	Matriz de geração térmica $\left[\frac{\text{W}}{\text{K}}\right]$
<b>H</b>	Matriz de convecção $\left[\frac{\text{W}}{\text{K}}\right]$
<b>F<sup>c</sup></b>	Vetor auxiliar de convecção [W]
<b>F<sup>R</sup></b>	Vetor de radiação completo [W]
<b>C<sub>kl</sub></b>	Elemento da matriz <b>C</b> na linha $k$ , coluna $l$ $\left[\frac{\text{J}}{\text{K}}\right]$
<b>K<sub>kl</sub></b>	Elemento da matriz <b>K</b> na linha $k$ , coluna $l$ $\left[\frac{\text{W}}{\text{K}}\right]$
<b>Q<sub>k</sub><sup>sa</sup></b>	Elemento do vetor <b>Q<sup>sa</sup></b> na linha $k$ [W]
<b>Q<sub>kl</sub></b>	Elemento da matriz <b>Q</b> na linha $k$ , coluna $l$ $\left[\frac{\text{W}}{\text{K}}\right]$
<b>H<sub>kl</sub></b>	Elemento da matriz <b>H</b> na linha $k$ , coluna $l$ $\left[\frac{\text{W}}{\text{K}}\right]$
<b>F<sub>k</sub><sup>c</sup></b>	Elemento do vetor <b>F<sup>c</sup></b> na linha $k$ [W]
<b>F<sub>k</sub><sup>R</sup></b>	Elemento do vetor <b>F<sup>R</sup></b> na linha $k$ [W]
<b>R</b>	Matriz de radiação $\left[\frac{\text{W}}{\text{K}^4}\right]$
<b>F<sup>r</sup></b>	Vetor auxiliar de radiação [W]
<b>F<sup>E</sup></b>	Vetor de radiação incidente [W]
<b>R<sub>kl</sub></b>	Elemento da matriz <b>R</b> na linha $k$ , coluna $l$ [W]



$\mathbf{F}_k^r$	Elemento do vetor $\mathbf{F}^r$ na linha $k$ [W]
$\mathbf{F}_k^E$	Elemento do vetor $\mathbf{F}^E$ na linha $k$ [W]
$\mathbf{E}^k$	Vetor de integração do fluxo de radiação da superfície $k$ $\left[\frac{\text{W}}{\text{K}^4}\right]$
$\mathbf{E}_k^l$	Elemento do vetor $\mathbf{E}^l$ na linha $k$ $\left[\frac{\text{W}}{\text{K}^4}\right]$
$\mathbf{R}^e$	Matriz de radiação incidente $\left[\frac{\text{W}}{\text{K}^4}\right]$
$\mathbf{R}_{kl}^e$	Elemento da matriz $\mathbf{R}^e$ na linha $k$ , coluna $l$ $\left[\frac{\text{W}}{\text{K}^4}\right]$
$\dot{q}_{Fh}$	Perdas no núcleo discretizadas $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3}\right]$
$\dot{q}_{Fh}^k$	Perda no núcleo no grau de liberdade $k$ de $V_h$ [K]
$\dot{q}_{Eh}$	Perdas nos enrolamentos para a temperatura de referência discretizadas $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3}\right]$
$\mathbf{q}_F$	Vetor com as perdas no núcleo em cada grau de liberdade $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3}\right]$
$\mathbf{e}$	Vetor com todas as entradas iguais a 1
$\mathbf{B}^V$	Indução nos graus de liberdade do núcleo [T]
$\mathbf{V}^C$	Matriz de volume do núcleo [m <sup>3</sup> ]
$\mathbf{p}_F$	Função que calcula as perdas no núcleo dado um vetor de induções
$\mathbf{q}_F^p$	Vetor das perdas no núcleo parciais $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3}\right]$
$\mathbf{B}^r$	Vetor da indução no núcleo reduzido [T]
$L_{stk}$	Profundidade do núcleo [mm]
$n_G$	Número de entreferros [mm]
$N$	Número de espiras [mm]
$\rho$	Resistividade do condutor do enrolamento [ $\Omega$ m]
$k_{pc}$	Coefficiente da característica resistência-frequência do enrolamento [s <sup>2</sup> ]
$I_f$	Harmônica da corrente na frequência $f$ [ $A_{\text{RMS}}$ ]
$A_w$	Área de seção do enrolamento [m <sup>2</sup> ]
$w_w$	Largura do enrolamento [mm]
$w_H$	Altura do enrolamento [mm]
$w_J$	Largura do condutor [mm]
$w_C$	Distância entre enrolamento e núcleo [mm]
$c$	Largura externa do núcleo [mm]
$g$	Comprimento do entreferro [mm]
$h_G$	Distância entre entreferros [mm]
$\beta_H$	Coefficiente de perdas histeréticas no núcleo na frequência nominal
$\beta_F$	Coefficiente de perdas parasíticas no núcleo $\left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{T}}\right]$
$\beta_S$	Coefficiente de perdas suplementares no núcleo
$T_0$	Período da frequência de operação do equipamento [s]
$\alpha_A$	Coefficiente exponencial quadrático das perdas histeréticas
$\alpha_B$	Coefficiente exponencial linear das perdas histeréticas
$\alpha_C$	Coefficiente exponencial constante das perdas histeréticas
$k_{AR}$	Condutividade térmica do ar $\left[\frac{\text{W}}{\text{mK}}\right]$
$g_R$	Aceleração da gravidade $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$

$\beta_{AR}$	Coeficiente de expansão térmica do ar $\left[\frac{1}{K}\right]$
$\nu_{AR}$	Viscosidade cinemática do ar $\left[\frac{m}{s^2}\right]$
$\alpha_{AR}$	Difusividade térmica do ar $\left[\frac{m^2}{s}\right]$

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>29</b>
1.1	OBJETIVOS . . . . .	30
1.2	METODOLOGIA . . . . .	30
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO . . . . .	31
<b>2</b>	<b>TEORIA</b> . . . . .	<b>33</b>
2.1	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DIFERENCIAIS . . . . .	33
2.2	REDUÇÃO DE DIMENSIONALIDADE . . . . .	33
<b>2.2.1</b>	<b>Cálculo da redundância e estimativa do erro</b> . . . . .	<b>35</b>
<b>2.2.2</b>	<b>Cálculo da redução não linear</b> . . . . .	<b>37</b>
2.3	O MODELO TÉRMICO . . . . .	38
<b>2.3.1</b>	<b>Formulação diferencial</b> . . . . .	<b>38</b>
<b>2.3.2</b>	<b>Formulação variacional</b> . . . . .	<b>38</b>
<b>2.3.3</b>	<b>Discretização</b> . . . . .	<b>40</b>
<b>2.3.4</b>	<b>Redução de dimensionalidade</b> . . . . .	<b>44</b>
<b>3</b>	<b>APLICAÇÃO</b> . . . . .	<b>47</b>
3.1	O PROBLEMA . . . . .	47
<b>3.1.1</b>	<b>Perdas</b> . . . . .	<b>47</b>
<b>3.1.2</b>	<b>Condições de contorno</b> . . . . .	<b>50</b>
3.2	TRATAMENTO NUMÉRICO . . . . .	51
3.3	ANÁLISES . . . . .	54
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>59</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>61</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Com os avanços recentes em tecnologia de *hardware* e *software*, soluções da indústria 4.0 nas diversas áreas da engenharia têm se tornado bastante comuns. Cada vez mais os engenheiros podem desenvolver ideias visando a conectividade de todas as partes de um sistema complexo, guiando-se por paradigmas como o da Internet of Things (internet das coisas) (IoT).

Uma das manifestações dessas novas tendências no contexto de engenharia elétrica é a ampliação do uso de modelos matemáticos de equipamentos para além da etapa de desenvolvimento, podendo eles também serem parte integrante do produto final. Aplicações que tiram proveito disso incluem o controle, diagnóstico e sensoriamento de equipamentos.

Como tecnologias embarcadas hoje já possuem poder computacional considerável, tem crescido o interesse por modelos detalhados de equipamentos que possam ser implementados em microcontroladores, sendo esses comumente utilizados na implementação de soluções da indústria 4.0.

Na maioria dos casos, implementar um modelo detalhado de equipamento elétrico envolve a utilização do Método de Elementos Finitos (MEF). Esse método permite transformar equações diferenciais parciais dinâmicas em um sistema de equações diferenciais ordinárias e, posteriormente, resolvê-las com grande acurácia.

Esse método porém, costuma gerar sistemas de equações muito extensos que requerem tempo de CPU elevado. Cada quantidade desconhecida do problema que deve ser calculada constitui um grau de liberdade, sendo quantidades da ordem de dezenas de milhares de graus de liberdade normais para um modelo de equipamento elétrico. Essa complexidade faz com que tais modelos sejam inadequados a sistemas de *hardware* embarcado com poder computacional limitado. Sendo assim, é necessário que haja uma diminuição de complexidade do sistema, ainda capturando a dinâmica do mesmo com precisão.

A complexidade de um modelo pode ser reduzida de várias formas, estratégias incluem o desenvolvimento de modelos analíticos, a linearização de fenômenos e até o uso de conhecimento empírico para simplificar as equações.

Uma outra estratégia consiste em identificar e eliminar a redundância no modelo de elementos finitos. Em outras palavras, encontrar correlações entre os graus de liberdade do sistema e projetá-los em um espaço reduzido. Essa redundância nos modelos tende a surgir dado que há várias restrições impostas a um modelo aplicado em equipamento, fazendo com que o espaço de soluções do mesmo seja muito menor que o espaço gerado por todos os graus de liberdade. Essa técnica é muitas vezes denominada Redução de Dimensionalidade (RD).

Neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) a abordagem selecionada para encontrar correlações entre os graus de liberdade de um sistema baseia-se na aplicação da

Singular Value Decomposition (decomposição em valores singulares) (SVD).

Métodos similares em partes ao implementado neste TCC são mencionados na literatura no contexto de cálculos de estresse mecânico em (HERNÁNDEZ; CAICEDO; FERRER, 2017) e (FARHAT *et al.*, 2014).

## 1.1 OBJETIVOS

O objetivo principal deste TCC é explorar a estrutura matemática necessária para reduzir a dimensionalidade de modelos térmicos de elementos finitos, visando uma diminuição considerável da complexidade computacional do modelo, sem sacrificar em muito sua acurácia.

Os métodos apresentados devem contemplar todas as etapas de simplificações e aproximações entre o modelo de elementos finitos elaborado e o modelo totalmente reduzido.

Também objetiva-se a aplicação das técnicas exploradas a um exemplo prático de equipamento elétrico. Essa implementação prática possibilita a realização de diversas análises, como a da quantidade de graus de liberdade reduzidos, perda de acurácia e ganho em tempo de simulação.

Um dos objetivos secundários do TCC é desenvolver métodos que fazem uso de técnicas já aplicadas ao MEF. O propósito disso é possibilitar uma implementação direta com o uso de ferramentas *open-source* bastante consolidadas como GetDP (GEUZAINÉ, 2007), Gmsh (GEUZAINÉ; REMACLE, 2009) e Octave, sem que seja necessário o desenvolvimento de *software* complexo. Ou seja, que as técnicas sejam simples, práticas e rápidas de implementar.

Por fim, objetiva-se que o método seja útil em simplificar modelos complicados mantendo-os acurados. Que seja genérico, podendo ser aplicado ao maior número de modelos possíveis, desde os idealizados até os que levem em consideração fenômenos não lineares mais complexos. Além de também contemplar qualquer modelo de equipamento desejado, desde que o mesmo possa ser implementado em elementos finitos e algumas possíveis simplificações sejam realizadas<sup>1</sup>.

## 1.2 METODOLOGIA

Primeiramente, realizou-se uma revisão bibliográfica sobre o tema do TCC, essa revisão se manteve durante o andamento do trabalho. Visando suprir uma demanda por modelos térmicos de equipamentos de baixo custo computacional, a etapa após revisão consistiu-se em analisar possíveis soluções para esse problema. Após muita reflexão, surgiu a ideia de juntar RD com MEF.

---

<sup>1</sup> O método também ainda não é capaz de lidar com hidrodinâmica.

O próximo passo do trabalho foi, então, a aplicação dessa ideia em modelos simplificados para evoluir o entendimento acerca do acoplamento entre RD e MEF. Estes modelos foram avançando até chegar-se a uma estrutura plenamente desenvolvida que permitisse a aplicação das técnicas a equipamentos elétricos. As partes lineares do problema foram bem diretas de tratar, já as não linearidades tiveram de ser cuidadosamente analisadas para chegar a uma forma que possibilitasse redução.

Após o desenvolvimento da ideia, buscou-se pelo tema na literatura, sendo somente possível encontrar dois artigos (já citados) que fazem algo bem parecido ao apresentado nesse TCC, porém no contexto de estresse mecânico.

Por fim, as técnicas matemáticas desenvolvidas foram aplicadas a um indutor monofásico refrigerado a ar. Estes modelos foram então submetidos a diversas simulações e análises para entender os ganhos de tempo e perdas de acurácia. As análises foram realizadas no *software* Octave, ficando para um trabalho futuro realizar análises de desempenho em *hardware* embarcado.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Este trabalho divide-se nos seguintes capítulos:

Capítulo 1: apresenta uma breve introdução do TCC.

Capítulo 2: apresenta a teoria dos métodos aplicados no TCC, descrevendo a estrutura desenvolvida para transformação de um modelo térmico de elementos finitos em um determinado sistema de matrizes específico e sua posterior redução de dimensionalidade.

Capítulo 3: apresenta a aplicação da teoria a um exemplo de equipamento elétrico, sendo escolhido nesse trabalho um indutor monofásico. Neste capítulo também são analisados ganhos de tempo e perdas de acurácia decorrentes da aplicação do método.

Capítulo 4: apresenta as conclusões finais do TCC e as sugestões para trabalhos futuros.





## 2 TEORIA

### 2.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DIFERENCIAIS

Um modelo físico de um equipamento elétrico costumeiramente consiste de equações diferenciais parciais, de uma geometria e da definição das propriedades dos seus materiais. Tais modelos podem normalmente ser expressos como um Problema de Valor Inicial e sobre o Contorno (PVIC) por uma relação como a da Equação (1):

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(t, x), \quad (1)$$

sendo que  $t$  representa o tempo,  $x$  uma variável distribuída no espaço,  $f$  um operador que relaciona a distribuição espacial de  $x$  (derivadas parciais), conjuntamente com possíveis excitações do modelo com dependência temporal<sup>1</sup>, e a derivada temporal de  $x$ . Como um exemplo, cita-se a equação do calor:  $\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u$ .

Na área de equipamentos, a Equação (1) raramente é resolvida de forma analítica, sendo conveniente aplicar técnicas de discretização como o MEF para resolvê-la. Uma forma de discretizar consiste em encontrar uma representação aproximada do sistema num espaço de estados. Nesse caso, chega-se a um sistema de  $n$  equações diferenciais ordinárias que aproxima a dinâmica do modelo por meio de um Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\frac{d[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]}{dt} = [\mathbf{f}_1(t, [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]), \dots, \mathbf{f}_n(t, [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n])], \quad (2)$$

sendo que  $\mathbf{x}_i$  é o componente  $i$  do vetor de estados  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{f}_i$  é uma função.

Se a representação no espaço de estados for linear e invariante no tempo,  $\mathbf{f}$  pode ser substituída por uma matriz  $\mathbf{A}$  e um vetor  $\mathbf{B}(t)$  da seguinte maneira (SILVEIRA, 2010):

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(t), \quad (3)$$

sendo  $\mathbf{A}$  chamada de matriz de estado do sistema e  $\mathbf{B}(t)$  o vetor de entradas.

### 2.2 REDUÇÃO DE DIMENSIONALIDADE

Caso o sistema definido na Equação (3) possua redundância, ou seja  $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$  e  $\mathbf{y}$  possui dimensão  $l < n^*$ , ele pode ser simplificado.

Será mostrado como encontrar a relação  $\mathbf{g}$  na Seção 2.2.1 de modo que ela possua as propriedades (sendo  $\mathbf{I}_l$  a matriz identidade de dimensão  $l$ ):

<sup>1</sup> Também podendo ser pensadas como entradas do modelo.

\* O vetor  $\mathbf{y}$  tem menos elementos que o  $\mathbf{x}$ .

- $\mathbf{g}(\mathbf{y})$  é linear, podendo ser representada por uma matriz  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times l}$  como  $\mathbf{G}\mathbf{y}$ ;
- $\mathbf{G}$  possui colunas ortonormais de modo que  $\mathbf{G}^T \mathbf{G} = \mathbf{I}_l^\dagger$ .

Para remover a redundância do sistema, basta substituir  $\mathbf{x}$  por  $\mathbf{G}\mathbf{y}$  na Equação (3) e realizar as devidas manipulações, resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{G}\mathbf{y}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{y} + \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{G}^T \frac{d\mathbf{G}\mathbf{y}}{dt} &= \mathbf{G}^T \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{y} + \mathbf{G}^T \mathbf{B}(t) \\ \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= \mathbf{G}^T \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{y} + \mathbf{G}^T \mathbf{B}(t), \end{aligned} \quad (4)$$

sendo a Equação (4) referente ao sistema reduzido, já que  $\mathbf{G}^T \mathbf{A}\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{l \times l}$  e  $\mathbf{G}^T \mathbf{B}(t) \in \mathbb{R}^l$ .

A RD realizada se refere a um caso sem perdas. Em modelos mais práticos, é mais fácil encontrar redundâncias do tipo  $\mathbf{x} \approx \mathbf{G}\mathbf{y}$ . Nesses casos, o mesmo procedimento pode ser aplicado, desde que as devidas relações de igualdade sejam substituídas por relações aproximadas.

Note que, enquanto  $\mathbf{G}^T \mathbf{A}\mathbf{G}$  só precisa ser calculada uma vez,  $\mathbf{G}^T \mathbf{B}(t)$  precisa ser calculada para cada instante de tempo, por conta da dependência temporal. Como  $\mathbf{B}(t) \in \mathbb{R}^n$ , esse cálculo pode ser custoso. A forma de reduzir a complexidade desse cálculo será apresentada a seguir.

Para efetuar a redução de  $\mathbf{B}(t)$  é necessário conhecimento da sua equação constituinte. Se ela for uma equação simples do tipo  $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}^V b(t)$ , sendo  $\mathbf{B}^V$  um vetor e  $b(t)$  um escalar, a redução ficaria:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{B}(t) = (\mathbf{G}^T \mathbf{B}^V) b(t), \quad (5)$$

notando que  $\mathbf{G}^T \mathbf{B}^V$  só precisa ser calculada uma vez.

No caso mais geral, além da equação de  $\mathbf{B}(t)$  ser mais complexa, ela pode ser composta de várias parcelas (somadas) que podem ou não conter não linearidades. Cada uma dessas parcelas pode ser tratada separadamente, sendo aqui abordado o tratamento de uma parcela não linear relevante ao contexto do TCC.

Neste trabalho serão encontradas não linearidades do tipo:  $\beta^\gamma$ , sendo  $\beta \in \mathbb{R}_+$  e  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Tais não linearidades aparecem tanto no vetor de entradas  $\mathbf{B}(t)$ , quanto na relação de estados  $\mathbf{A}\mathbf{x}$ . Nesta seção será apresentado como lidar com  $\mathbf{B}(t)$ , mas o método será aplicado à ambos os casos posteriormente.

Assim, considere um vetor de entradas dado por:

---

<sup>†</sup> Vale mencionar que, nesse caso,  $\mathbf{G}^T$  é a inversa de Moore–Penrose (PENROSE, 1955) ou pseudo-inversa de  $\mathbf{G}$ .

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}^M \left( \mathbf{b}^V(t) \right)^\gamma, \quad (6)$$

sendo  $\mathbf{B}^M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{b}^V(t) \in \mathbb{R}^n$  e  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

Será apresentado na Seção 2.2.1 como encontrar uma decomposição de  $\mathbf{b}^V(t)$  do tipo:

$$\mathbf{b}^V(t) \approx \underset{n \times 1}{\mathbf{L}} \underset{n \times m}{\mathbf{X}} \underset{m \times l}{\mathbf{b}^X(t)}, \quad (7)$$

sendo  $m, l < n$ , com a propriedade:

$$\left( \mathbf{LXb}^X(t) \right)^\gamma = \mathbf{L} \left( \mathbf{Xb}^X(t) \right)^\gamma. \quad (8)$$

Essa decomposição será denominada daqui em diante de LX.

Com isso, tem-se:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{B}(t) = \mathbf{G}^T \mathbf{B}^M \left( \mathbf{b}^V(t) \right)^\gamma = \mathbf{G}^T \mathbf{B}^M \mathbf{L} \left( \mathbf{Xb}^X(t) \right)^\gamma, \quad (9)$$

notando que a matriz  $\mathbf{G}^T \mathbf{B}^M \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{l \times m}$  só precisa ser calculada uma vez, tendo assim a Equação (6) sido reduzida de ordem  $n$  para ordem  $m$ .

### 2.2.1 Cálculo da redundância e estimativa do erro

Sabendo-se que na área de equipamentos elétricos existem restrições para as condições iniciais e entradas<sup>2</sup> de um equipamento, o espaço de soluções possíveis do modelo é muito menor que o espaço gerado por todos os seus graus de liberdade.

Para sistemas não lineares, uma base para esse espaço de soluções pode ser aproximada a partir da solução  $\mathbf{x}$  do sistema para diversas condições e entradas distintas que contemplem toda a variedade de circunstâncias de operação à que o equipamento estará sujeito.

De posse do espaço de soluções do sistema, a Análise de Componentes Principais (ACP) pode ser utilizada para encontrar correlações entre os graus de liberdade do mesmo, sendo possível assim identificar a redundância no sistema e possibilitando a sua projeção em uma base reduzida. Isso pode ser realizado a partir da organização dos vetores solução nas linhas de uma matriz  $\mathbf{M}$  e posterior aplicação da SVD, resultando em:

$$\mathbf{M} = \underset{m \times n}{\mathbf{U}} \underset{m \times m}{\mathbf{\Sigma}} \underset{m \times n}{\mathbf{V}^T}, \quad (10)$$

<sup>2</sup> Tensão, corrente ou alguma outra variável imposta sobre o equipamento.

sendo  $\Sigma$  diagonal retangular e  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  ortogonais (ABDI; WILLIAMS, 2010).

Assim, tem-se  $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{y}$  e a importância das componentes em  $\mathbf{y}$  ordenada de mais significativa a menos significativa. Ou seja, feita a escolha do número de componentes a serem mantidas ( $L$ ), pode-se aproximar  $\mathbf{x} \approx \mathbf{V}_L\mathbf{y}$ , sendo  $\mathbf{V}_L$  uma matriz com as primeiras  $L$  colunas de  $\mathbf{V}$ .

A matriz de transformação de redundância até agora denotada por  $\mathbf{G}$  é então  $\mathbf{V}_L$ . Cada  $\mathbf{x}^i$  (linha de  $\mathbf{M}$ ) construído a partir da SVD pode ser expresso pela equação:

$$\mathbf{x}^i = \sum_{j=1}^p \mathbf{U}_{ij}\sigma_j\mathbf{V}_{:j}, \quad (11)$$

sendo  $p = \min\{m, n\}$  e “:” denota todos os elementos de determinada dimensão de uma matriz.

Como  $\mathbf{U}_{ij} \leq 1$  e cada  $\mathbf{V}_{:j}$  é ortonormal aos outros, tem-se:

$$\left\| \sum_{j=1}^p \mathbf{U}_{ij}\sigma_j\mathbf{V}_{:j} \right\| \leq \left\| \sum_{j=1}^p \sigma_j\mathbf{V}_{:j} \right\| = \sqrt{\sum_{j=1}^p \sigma_j^2}. \quad (12)$$

Com isso, pode-se calcular o limite superior para a norma do erro decorrente da consideração de apenas  $L$  componentes:

$$\left\| \sum_{j=1}^p \mathbf{U}_{ij}\sigma_j\mathbf{V}_{:j} - \sum_{j=1}^L \mathbf{U}_{ij}\sigma_j\mathbf{V}_{:j} \right\| = \left\| \sum_{j=L+1}^p \mathbf{U}_{ij}\sigma_j\mathbf{V}_{:j} \right\| \leq \left\| \sum_{j=L+1}^p \sigma_j\mathbf{V}_{:j} \right\| = \sqrt{\sum_{j=L+1}^p \sigma_j^2}. \quad (13)$$

Uma equação para o erro médio máximo ( $e_{mm}$ ) em cada uma das  $n$  componentes de  $\mathbf{x}^i$  pode ser encontrada supondo uma distribuição uniforme do erro, dada por:

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n e_{mm}^2} = \sqrt{ne_{mm}^2} = \sqrt{n} e_{mm} = \sqrt{\sum_{j=L+1}^p \sigma_j^2}. \quad (14)$$

Esse erro médio é dado, então, pela Equação (15):

$$e_{mm} = \frac{\sqrt{\sum_{j=L+1}^p \sigma_j^2}}{\sqrt{n}}. \quad (15)$$

A Equação (15) foi encontrada de uma forma bastante simplificada e não considera outras aproximações que também serão implementadas pelo método. Sua validade será explorada na Seção 3.3.

### 2.2.2 Cálculo da redução não linear

O objetivo da LX é aproximar a base de um espaço vetorial por vetores de segmentos constantes, de forma que a diferença entre vetor original e aproximação fique abaixo de uma determinada tolerância.

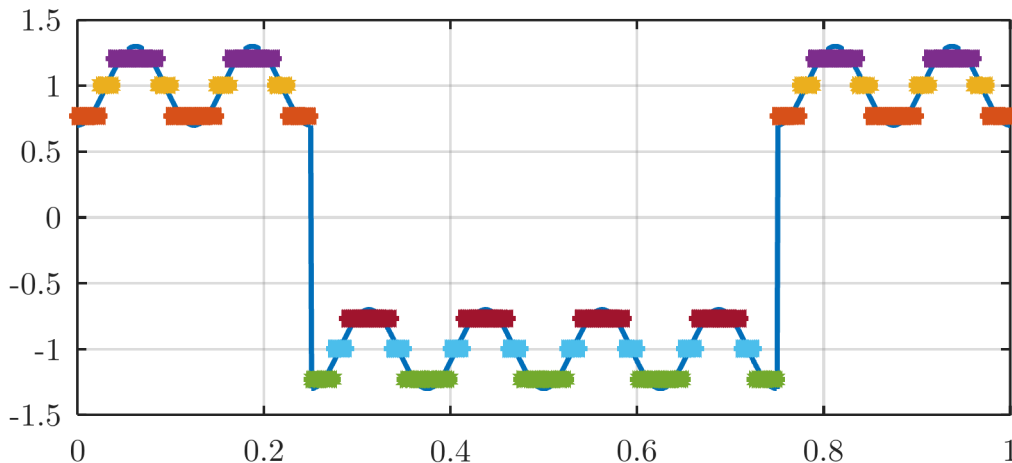
Assim, a combinação linear de vetores de base que geram um determinado vetor do espaço é dividida em duas partes: a combinação das amplitudes dos segmentos da base e o posicionamento de tais amplitudes.

A amplitude dos segmentos é encontrada através de uma combinação linear das componentes principais do espaço, de forma análoga ao processo já apresentado. Essa parte é realizada através da multiplicação de uma matriz  $\mathbf{X}$  por um vetor de componentes<sup>3</sup>  $\mathbf{b}$ . Tendo as amplitudes, uma matriz  $\mathbf{L}$  é utilizada para posicionar os segmentos nos locais adequados no vetor.

Como a matriz  $\mathbf{L}$  somente rearranja os valores calculados, fica garantida a propriedade definida na Equação (8).

Como um exemplo visual considere uma onda quadrada adicionada de uma senoide. A sua aproximação por segmentos constantes, porém não contínuos, é apresentada no Gráfico 1.

Gráfico 1 – Exemplificação do resultado da LX



Fonte: do autor.

Note que cada cor representa um componente diferente, cuja amplitude seria calculada pela matriz  $\mathbf{X}$  e o vetor  $\mathbf{b}$ , e cuja posição no vetor seria determinada pela matriz  $\mathbf{L}$ .

<sup>3</sup>  $\mathbf{b}^T(t)$ , na Equação (8).

## 2.3 O MODELO TÉRMICO

Esta seção apresenta o modelo térmico implementado neste TCC, partindo da sua equação física, passando por sua discretização e finalmente realizando a RD.

### 2.3.1 Formulação diferencial

A equação diferencial que rege o comportamento de sistemas termodinâmicos no contexto de equipamentos elétricos é:

$$c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q}_V, \quad (16)$$

sendo  $T(x, y, z, t)$  a distribuição de temperatura [K],  $c_V$  a capacidade térmica  $\left[\frac{\text{J}}{\text{mK}}\right]$ ,  $k$  a condutividade térmica  $\left[\frac{\text{W}}{\text{mK}}\right]$  e  $\dot{q}_V$  a geração térmica volumétrica  $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3}\right]$ .

A geração térmica é dada pelas perdas no núcleo ( $\dot{q}_F$ ) adicionadas das perdas a temperatura de referência nos enrolamentos ( $\dot{q}_E$ ) corrigidas pela temperatura atual, conforme Equação (17):

$$\dot{q}_V = \dot{q}_F(t) + \dot{q}_E(t)(1 + \alpha(T - T_{ref})), \quad (17)$$

sendo que  $\dot{q}_F$  varia espacialmente por conta da distribuição da indução no núcleo do equipamento e  $\dot{q}_E$  é espacialmente constante nos enrolamentos<sup>4</sup>. A variação da resistência do enrolamento com a temperatura é contabilizada pelo parâmetro  $\alpha$ . Ambas perdas podem variar no tempo, bastando uma variação nos valores Root Mean Square (eficaz) (RMS) de corrente e tensão no equipamento.

Caso a corrente no equipamento possua fortes componentes harmônicas, as perdas nos enrolamentos ainda podem ser corrigidas para considerar a variação de resistência com a frequência. Neste caso, o cálculo de perdas no núcleo também deve levar em consideração as harmônicas. Um exemplo implementando essas considerações é apresentado no Capítulo 3.

Para um determinado problema, além de sua geometria também é necessário especificar condições iniciais e de contorno para resolver a Equação (16). Tais condições implicam a imposição de uma temperatura inicial em todo o equipamento e a fixação de uma temperatura, um fluxo térmico ou uma combinação das duas na fronteira do problema.

### 2.3.2 Formulação variacional

A Equação (16) raramente possui solução analítica em casos reais, sendo necessária sua discretização para resolvê-la. Neste trabalho essa discretização é realizada através do

<sup>4</sup> Supondo uma distribuição uniforme de corrente.

MEF.

Para implementar o MEF é necessário encontrar uma formulação fraca da Equação (16). Isso pode ser alcançado realizando o produto escalar em  $L^2(\Omega)$  de cada termo da equação com funções de teste  $v \in H^1(\Omega)$  (SÚLI, 2019). Especificando então um problema variacional:

$$\int_{\Omega} c_v \frac{\partial T}{\partial t} v = \int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla T) v + \int_{\Omega} \dot{q}_v v, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad (18)$$

sendo os diferenciais de integração (omitidos) inferidos pelo domínio das integrais.

Para que o problema fique mais simétrico e também que apareçam termos relativos às condições de contorno, realiza-se a integração por partes do termo de condução utilizando a primeira identidade de Green (GREEN, 1828)<sup>5</sup>, resultando em:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla T) v = - \int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega} -q \cdot \hat{n} v, \quad (19)$$

tendo sido utilizado:  $q = -k \nabla T$  e sendo  $\hat{n}$  o vetor unitário normal à  $\partial\Omega$  apontando para fora da superfície.

Desta manipulação naturalmente surge a condição de contorno de Neumann, sendo ela o termo com a integral em  $\partial\Omega$ , representando o fluxo de calor entrando (sinal negativo) no domínio do problema.

Ao que concerne o escopo deste trabalho, modelagem de um equipamento elétrico, o fluxo de calor na fronteira do problema será dado por convecção e radiação térmicas. A representação de tais fenômenos constitui condições de contorno de Robin<sup>6</sup>, não lineares para o caso da radiação. Para o caso da convecção, considera-se a densidade de fluxo de calor ( $q_c$ ) proporcional (a menos de um *offset*) à temperatura na fronteira:

$$hT - q_c \cdot \hat{n} = hT_{\infty}^c, \quad (20)$$

sendo  $h$  o coeficiente convectivo de transferência de calor e  $T_{\infty}^c$  a temperatura média do fluido que envolve o equipamento.

Para a radiação, o calor radiado por uma superfície é proporcional à quarta potência da sua temperatura. Além do calor emitido, também deve-se levar em consideração a radiação recebida pela fronteira do problema. Isso é útil particularmente para o caso em que no problema considerado existam superfícies separadas por ar onde a radiação de uma atinge outra. A contabilização matemática disso é feita através dos fatores de forma ( $F_{kl}$ ), sendo que os mesmos indicam a razão entre a energia radiativa que sai de uma superfície ( $k$ ) e incide noutra ( $l$ ). Numa formulação mais detalhada também deve-se levar em conta

<sup>5</sup> A versão posteriormente generalizada a partir do teorema da divergência é utilizada.

<sup>6</sup> Combinação linear de condições de Dirichlet e Neumann.

a radiação refletida pelas superfícies, que neste trabalho foi desconsiderada. Dessa forma, a densidade do fluxo de radiação térmica na fronteira ( $q_r$ ) obedece, para cada superfície  $k$ :

$$\epsilon\sigma T^4 - q \cdot \hat{n} = \left(1 - \sum_{l \in S_f^k} F_{kl}\right) \epsilon\sigma T_\infty^4 + \sum_{l \in S_f^k} \frac{F_{kl}}{A_l} E_l, \quad (21)$$

sendo  $\epsilon$  a emissividade de radiação,  $\sigma$  a constante de Stefan-Boltzmann,  $S_f^k$  o conjunto das superfícies da fronteira em que incide radiação da superfície  $k$ ,  $A_l$  a área da superfície  $l$ ,  $E_l$  a energia radiante emitida pela superfície  $l$  e  $T_\infty^r$  a temperatura do ar longe do equipamento.

Incorporando as Equações (19) a (21) à formulação do problema (Equação (18)), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c_v \frac{\partial T}{\partial t} v = & - \int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \dot{q}_v v - \int_{\partial\Omega} h(T - T_\infty^c) v \\ & - \sum_{k \in S_f} \int_{\partial\Omega_k} \epsilon\sigma \left( T^4 - T_\infty^r{}^4 + \sum_{l \in S_f^k} F_{kl} \left( T_\infty^r{}^4 - \frac{E_l}{\epsilon\sigma A_l} \right) \right) v, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{aligned} \quad (22)$$

sendo:

$$E_l = \int_{\partial\Omega_l} \epsilon\sigma T^4. \quad (23)$$

### 2.3.3 Discretização

Após a geração de uma malha de elementos finitos com  $N_h$  nós, pode-se escolher um espaço discreto de funções teste  $V_h \subset \Omega$ , com  $N_h$  graus de liberdade, no qual é possível encontrar uma aproximação para a solução do problema. Sem perda de generalidade, as funções teste  $v_h \in V_h$  podem ser tomadas como base unitária de  $V_h$ . Dessa forma, a temperatura pode ser espacialmente discretizada<sup>7</sup> como:

$$T_h = \sum_{i=1}^{N_h} T_h^i v_h^i, \quad (24)$$

sendo  $T_h$  a temperatura discretizada,  $T_h^i$  a temperatura do grau de liberdade  $i$  e  $v_h^i$  a função base unitária do grau de liberdade  $i$ .

Incorporando a Equação (24) a cada termo da formulação, tem-se:

<sup>7</sup> Continua contínua no tempo.



$$\int_{\Omega} c_V \frac{\partial T}{\partial t} v \Rightarrow \int_{\Omega} c_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{i=1}^{N_h} T_h^i v_h^i \right) v_h^j = \sum_{i=1}^{N_h} \frac{dT_h^i}{dt} \int_{\Omega} c_V v_h^i v_h^j, \quad (25)$$

$$\int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla v \Rightarrow \int_{\Omega} k \nabla \left( \sum_{i=1}^{N_h} T_h^i v_h^i \right) \cdot \nabla v_h^j = \sum_{i=1}^{N_h} T_h^i \int_{\Omega} k \nabla v_h^i \cdot \nabla v_h^j, \quad (26)$$

$$\int_{\partial\Omega} h(T - T_{\infty}^c) v \Rightarrow \int_{\partial\Omega} h \left( \sum_{i=1}^{N_h} T_h^i v_h^i - T_{\infty}^c \right) v_h^j = \sum_{i=1}^{N_h} T_h^i \int_{\partial\Omega} h v_h^i v_h^j - \int_{\partial\Omega} h T_{\infty}^c v_h^j, \quad (27)$$

$$\sum_{k \in S_f} \int_{\partial\Omega_k} \epsilon \sigma \left( T^4 - T_{\infty}^r{}^4 + \sum_{l \in S_f^k} F_{kl} \left( T_{\infty}^r{}^4 - \frac{E_l}{\epsilon \sigma A_l} \right) \right) v \Rightarrow \quad (28)$$

$$\sum_{k \in S_f} \int_{\partial\Omega_k} \epsilon \sigma \left( \left( \sum_{i=1}^{N_h} T_h^i v_h^i \right)^4 - T_{\infty}^r{}^4 + \sum_{l \in S_f^k} F_{kl} \left( T_{\infty}^r{}^4 - \frac{E_l}{\epsilon \sigma A_l} \right) \right) v_h^j,$$

$$\int_{\partial\Omega_l} \epsilon \sigma T^4 \Rightarrow \int_{\partial\Omega_l} \epsilon \sigma \left( \sum_{i=1}^{N_h} T_h^i v_h^i \right)^4, \quad (29)$$

$$\int_{\Omega} \dot{q}_V v \Rightarrow \int_{\Omega} [\dot{q}_F(t) + \dot{q}_E(t)(1 - \alpha T_{ref})] v_h^j + \int_{\Omega} \alpha \dot{q}_E(t) \left( \sum_{i=1}^{N_h} T_h^i v_h^i \right) v_h^j \Rightarrow \quad (30)$$

$$\int_{\Omega} [\dot{q}_F(t) + \dot{q}_E(t)(1 - \alpha T_{ref})] v_h^j + \alpha \dot{q}_E(t) \sum_{i=1}^{N_h} T_h^i \int_{\Omega} v_h^i v_h^j.$$

<sup>8</sup>A formulação discreta fica então:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_h} \frac{dT_h^i}{dt} \int_{\Omega} c_V v_h^i v_h^j &= - \sum_{i=1}^{N_h} T_h^i \int_{\Omega} k \nabla v_h^i \cdot \nabla v_h^j \\ &+ \int_{\Omega} [\dot{q}_F(t) + \dot{q}_E(t)(1 - \alpha T_{ref})] v_h^j + \alpha \dot{q}_E(t) \sum_{i=1}^{N_h} T_h^i \int_{\Omega} v_h^i v_h^j \\ &- \sum_{i=1}^{N_h} T_h^i \int_{\partial\Omega} h v_h^i v_h^j + \int_{\partial\Omega} h T_{\infty}^c v_h^j \\ &- \sum_{k \in S_f} \int_{\partial\Omega_k} \epsilon \sigma \left( \left( \sum_{i=1}^{N_h} T_h^i v_h^i \right)^4 - T_{\infty}^r{}^4 + \sum_{l \in S_f^k} F_{kl} \left( T_{\infty}^r{}^4 - \frac{E_l}{\epsilon \sigma A_l} \right) \right) v_h^j \end{aligned} \quad \text{para } j = 1, \dots, N_h. \quad (31)$$

O Sistema de Equações (31) pode ser representado em forma matricial:

$$\mathbf{C} \frac{d\mathbf{T}}{dt} = -\mathbf{K}\mathbf{T} + \mathbf{Q}^{sa}(t) + \alpha \dot{q}_E(t) \mathbf{Q}\mathbf{T} - \mathbf{H}\mathbf{T} + \mathbf{F}^c - \mathbf{F}^R, \quad (32)$$

<sup>8</sup> Vale lembrar que  $\dot{q}_E$  é uma distribuição constante no enrolamento e por isso sai da integral.

sendo  $\mathbf{T}$  um vetor com as temperaturas em cada grau de liberdade e os elementos de cada matriz/vetor especificados por:

$$\mathbf{C}_{ij} = \mathbf{C}_{ji} = \int_{\Omega} c_v v_h^i v_h^j, \quad (33)$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{K}_{ji} = \int_{\Omega} k \nabla v_h^i \cdot \nabla v_h^j, \quad (34)$$

$$\mathbf{Q}_j^{sa}(t) = \int_{\Omega} [\dot{q}_F(t) + \dot{q}_E(t)(1 - \alpha T_{ref})] v_h^j, \quad (35)$$

$$\mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{Q}_{ji} = \int_{\Omega} v_h^i v_h^j, \quad (36)$$

$$\mathbf{H}_{ij} = \mathbf{H}_{ji} = \int_{\partial\Omega} h v_h^i v_h^j, \quad (37)$$

$$\mathbf{F}_j^c = \int_{\partial\Omega} h T_{\infty}^c v_h^j, \quad (38)$$

$$\mathbf{F}_j^R = \sum_{k \in S_f} \int_{\partial\Omega_k} \epsilon \sigma \left( \left( \sum_{i=1}^{N_h} T_h^i v_h^i \right)^4 - T_{\infty}^r{}^4 + \sum_{l \in S_f^k} F_{kl} \left( T_{\infty}^r{}^4 - \frac{E_l}{\epsilon \sigma A_l} \right) \right) v_h^j. \quad (39)$$

O termo  $\mathbf{F}^R$  também pode ser escrito em forma matricial como  $\mathbf{A}(\mathbf{T})\mathbf{T} - \mathbf{B}(\mathbf{T})$ . A dependência com o vetor de temperaturas aparece por conta da não linearidade da equação de radiação. Conforme visto na Seção 2.2, é necessário que as matrizes e vetores do problema sejam constantes para aplicação da RD. Assim, a seguinte aproximação é realizada, considerando somente a superfície  $\partial\Omega_k$ :

$$\left( \sum_{i=1}^{N_h} T_h^i v_h^i \right)_{\partial\Omega_k}^4 v_h^j \approx \left( \sum_{i=1}^{N_h} T_h^{i4} v_h^i \right)_{\partial\Omega_k} v_h^j = \left( \sum_{i=1}^{N_h} T_h^{i4} v_h^i v_h^j \right)_{\partial\Omega_k}. \quad (40)$$

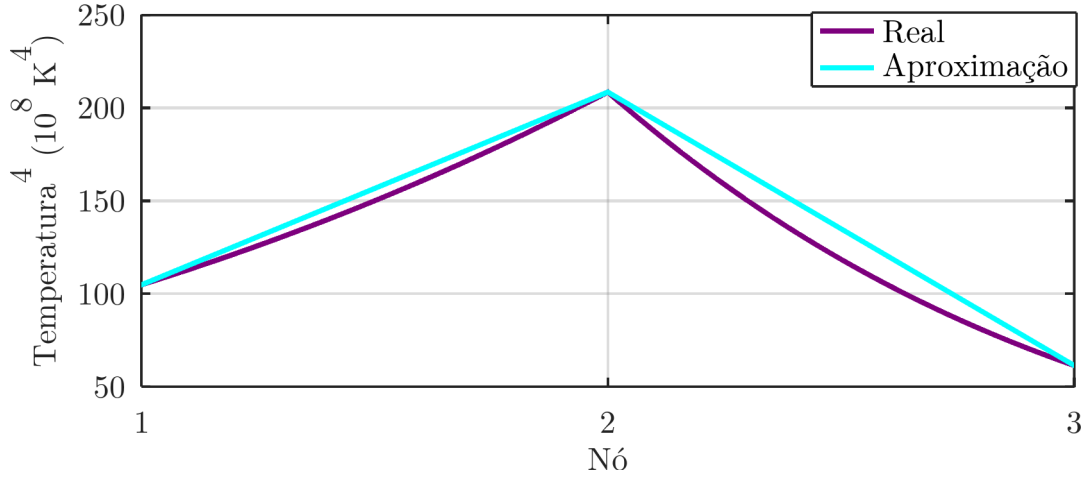
Essa aproximação é válida desde que os nós da malha na fronteira geometricamente próximos tenham temperaturas próximas, ou seja, desde que a temperatura no contorno do problema varie de forma suave.

Explicação: considera-se o caso unidimensional, por simplicidade, com três nós possuindo temperaturas de 320, 380 e 280 K (variações exageradamente bruscas). A distribuição da quarta potência da temperatura real e a aproximação da Equação (40) são apresentadas no Gráfico 2. Pode-se perceber que, quanto menor a diferença de temperatura entre os nós, mais válida é a Equação (40).

Por fim, o termo fica:

$$\mathbf{F}^R \approx \mathbf{R}\mathbf{T}^4 - \mathbf{F}^r - \mathbf{F}^E, \quad (41)$$

Gráfico 2 – Visualização da aproximação da Equação (40)



Fonte: do autor.

sendo:

$$\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{R}_{ji} = \int_{\partial\Omega} \epsilon \sigma v_h^i v_h^j, \quad (42)$$

$$\mathbf{F}_j^r = \int_{\partial\Omega} \epsilon \sigma \left( 1 - \sum_{l \in S_f^k} F_{kl} \right) T_\infty^4 v_h^j, \quad (43)$$

$$\mathbf{F}_j^E = \sum_{k \in S_f} \int_{\partial\Omega_k} \sum_{l \in S_f^k} F_{kl} \frac{E_l}{A_l} v_h^j = \sum_{k \in S_f} \sum_{l \in S_f^k} F_{kl} \frac{E_l}{A_l} \int_{\partial\Omega_k} v_h^j. \quad (44)$$

Utilizando-se a Equação (40), pode-se simplificar  $E_l$ :

$$E_l = \int_{\partial\Omega_l} \epsilon \sigma \left( \sum_{i=1}^{N_h} T_h^i v_h^i \right)^4 \approx \int_{\partial\Omega_l} \epsilon \sigma \sum_{i=1}^{N_h} T_h^{i4} v_h^i = \sum_{i=1}^{N_h} T_h^{i4} \int_{\partial\Omega_l} \epsilon \sigma v_h^i = \mathbf{E}^l \cdot \mathbf{T}^4, \quad (45)$$

sendo  $\mathbf{E}^l$  um vetor com entradas dadas por:

$$\mathbf{E}_i^l = \int_{\partial\Omega_l} \epsilon \sigma v_h^i; \quad (46)$$

e também será utilizada posteriormente a matriz  $\mathbf{R}^e$ , sendo definida por:

$$\mathbf{R}_{ji}^e = \sum_{k \in S_f} \sum_{l \in S_f^k} F_{kl} \frac{\mathbf{E}_i^l}{A_l} \int_{\partial\Omega_k} v_h^j. \quad (47)$$

Ainda resta simplificar a geração térmica. Aplicando o mesmo procedimento de discretização da temperatura, tem-se:

$$\dot{q}_{Fh}(t) = \sum_{i=1}^{N_h} \dot{q}_{Fh}^i(t) v_h^i, \quad (48)$$

$$\dot{q}_{Eh}(t) = \dot{q}_E(t) \sum_{i=1}^{N_h} v_h^i. \quad (49)$$

Então:

$$\mathbf{Q}_j^{sa}(t) = \int_{\Omega} [\dot{q}_F(t) + \dot{q}_E(t)(1 - \alpha T_{ref})] v_h^j = \mathbf{Q}_j: [\mathbf{q}_F + \dot{q}_E(t)(1 - \alpha T_{ref}) \mathbf{e}], \quad (50)$$

sendo  $\mathbf{Q}_j$ : a linha  $j$  de  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{q}_F(t)$  um vetor com as perdas no núcleo em cada grau de liberdade e  $\mathbf{e}$  um vetor com valor 1 em cada entrada.

Fazendo  $\mathbf{q}(t) = [\mathbf{q}_F(t) + \dot{q}_E(t)(1 - \alpha T_{ref}) \mathbf{e}]$ , as equações ficam:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \frac{d\mathbf{T}}{dt} &= -\mathbf{K}\mathbf{T} + \alpha \dot{q}_E(t) \mathbf{Q}\mathbf{T} + \mathbf{Q}\mathbf{q}(t) - \mathbf{H}\mathbf{T} + \mathbf{F}^c - \mathbf{R}\mathbf{T}^4 + \mathbf{F}^r + \mathbf{R}^e \mathbf{T}^4 \\ &= \mathbf{Q}\mathbf{q}(t) + \mathbf{F}^c + \mathbf{F}^r + (\alpha \dot{q}_E(t) \mathbf{Q} - \mathbf{K} - \mathbf{H})\mathbf{T} + (\mathbf{R}^e - \mathbf{R})\mathbf{T}^4. \end{aligned} \quad (51)$$

Podem haver variáveis de interesse no problema, como por exemplo a temperatura média de determinadas regiões. Esse tipo de variável de interesse é expressa por uma integral volumétrica de temperatura, que pode ser transformada em uma equação matricial do tipo  $y = \mathbf{D}\mathbf{T}$  usando o mesmo procedimento empregado nesta seção. Qualquer variável de interesse que pode ser expressa por uma combinação linear dos graus de liberdade do problema pode ser extraída dessa maneira.

### 2.3.4 Redução de dimensionalidade

A Equação (51) já está em um formato que possibilita a aplicação da RD. O procedimento necessário consiste em primeiramente resolvê-la para diversas condições representativas da operação do equipamento, aproximando assim o espaço de soluções do sistema.

Feito isso, a SVD deve ser aplicada para encontrar as amplitudes dos seus valores singulares, que ajudam na tomada de decisão de quantos componentes serão necessários manter, e a base reduzida do espaço ( $\mathbf{V}_L$ ).

A primeira etapa de redução pode então ser realizada conforme Equação (4), sendo  $\mathbf{T} \approx \mathbf{V}_L \mathbf{y}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{y}}{dt} &= \mathbf{V}_L^T \mathbf{C}^{-1} \left( \mathbf{Q}\mathbf{q}(t) + \mathbf{F}^c + \mathbf{F}^r + (\alpha\dot{q}_E(t)\mathbf{Q} - \mathbf{K} - \mathbf{H})\mathbf{V}_L \mathbf{y} + (\mathbf{R}^e - \mathbf{R})(\mathbf{V}_L \mathbf{y})^4 \right) \\
&= \mathbf{V}_L^T \mathbf{C}^{-1} \left( (1 - \dot{q}_E(t)\alpha T_{ref})\mathbf{Q}\mathbf{e} + \mathbf{F}^c + \mathbf{F}^r \right) \\
&\quad + \mathbf{V}_L^T \mathbf{C}^{-1} (\alpha\dot{q}_E(t)\mathbf{Q} - \mathbf{K} - \mathbf{H})\mathbf{V}_L \mathbf{y} \\
&\quad + \mathbf{V}_L^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{R}^e - \mathbf{R})(\mathbf{V}_L \mathbf{y})^4 \\
&\quad + \mathbf{V}_L^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Q}\mathbf{q}_F(t).
\end{aligned} \tag{52}$$

O vetor  $\mathbf{q}_F(t)$  possui algumas parcelas e será calculado a partir da indução resultante nos graus de liberdade do núcleo  $\mathbf{B}^V$ , pela matriz de volume do núcleo  $\mathbf{V}^C$  e a função  $\mathbf{p}_F$ . O cálculo da indução em si será realizado com base na corrente de entrada do modelo e será mais detalhado na Seção 3.1.1. Cada parcela do vetor  $\mathbf{q}_F(t)$  é do tipo:

$$\mathbf{q}_F^p(t) = \mathbf{V}^C \left( \mathbf{p}_F \left( \mathbf{B}^V(t) \right) \right)^\gamma, \tag{53}$$

sendo  $\mathbf{q}_F^p$  uma parcela das perdas e  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

A segunda etapa corresponde à redução dos vetores  $\mathbf{q}_F^p(t)$  e  $(\mathbf{V}_L \mathbf{y})^4$ , que é realizada através da LX. Primeiramente é necessário encontrar as componentes principais do espaço de  $\mathbf{B}^V$  e reduzi-lo para  $\mathbf{B}^r$ . E então, obtém-se:

$$(\mathbf{V}_L \mathbf{y})^4 \approx \mathbf{L}_T (\mathbf{X}_T \mathbf{y})^4 \tag{54}$$

$$\mathbf{q}_F^p(t) \approx \mathbf{V}^C \mathbf{L}_q \left( \mathbf{p}_F (\mathbf{X}_q \mathbf{B}^r(t)) \right)^\gamma. \tag{55}$$

Vale notar que a função  $\mathbf{p}_F$  é pontual (a saída  $i$  é calculada a partir de somente a entrada  $i$ ), o que garante que a Equação (53) pode ser reduzida à Equação (55).

Assim, o modelo reduzido fica:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{y}}{dt} &= \mathbf{V}_L^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{Q}\mathbf{e} + \mathbf{F}^c + \mathbf{F}^r) - \alpha\dot{q}_E(t) T_{ref} \mathbf{V}_L^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Q}\mathbf{e} \\
&\quad + \left( \alpha\dot{q}_E(t) \mathbf{V}_L^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Q}\mathbf{V}_L - \mathbf{V}_L^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{K} + \mathbf{H})\mathbf{V}_L \right) \mathbf{y} \\
&\quad + \mathbf{V}_L^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{R}^e - \mathbf{R}) \mathbf{L}_T (\mathbf{X}_T \mathbf{y})^4 \\
&\quad + \mathbf{V}_L^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Q}\mathbf{V}^C \mathbf{L}_q \sum \left( \mathbf{p}_F (\mathbf{X}_q \mathbf{B}^r(t)) \right)^\gamma.
\end{aligned} \tag{56}$$



### 3 APLICAÇÃO

#### 3.1 O PROBLEMA

O método apresentado no Capítulo 2 foi aplicado ao modelo térmico de um indutor monofásico utilizado para compor um filtro LC. Tal filtro é um circuito adicional composto por indutores, capacitores e resistores colocados entre os terminais de saída de um inversor e os terminais de entrada de um motor. O principal objetivo desse filtro é suavizar correntes e tensões do motor fornecidos pelo inversor e eliminar harmônicos de alta frequência indesejados devidos à alta frequência de comutação de transistores. Na saída do filtro, a tensão tem forma senoidal (GUZINSKI, 2008). Esse indutor possui núcleo de aço com indutância de 1,84 mH e seu sistema de refrigeração é o próprio ar (a seco).

Uma visão bidimensional da geometria do indutor é apresentada na Figura 1 e os valores da geometria são encontrados na Tabela 1. Os valores  $L_{stk}$ ,  $n_G$  e  $N$  representam a profundidade do núcleo, o número de entreferros e o número de espiras do enrolamento, respectivamente.

Dada a simetria do problema, somente um quarto do equipamento precisa ser modelado. Uma visualização tridimensional da geometria construída é apresentada na Figura 2a. As regiões de interesse (onde deseja-se conhecer a temperatura média) são apresentadas na Figura 2b.

Considera-se a corrente no enrolamento como entrada do problema e as temperaturas médias nas regiões de interesse como as saídas.

Os valores de parâmetros físicos do problema são apresentados na Tabela 2, esses são obtidos considerando alumínio como condutor nos enrolamentos, resina epóxi como isolador e um núcleo de aço. A curva BH do aço é encontrada na Gráfico 3.

##### 3.1.1 Perdas

Considerando que em muitas aplicações a corrente no indutor pode ter conteúdo harmônico significativo, o cálculo das grandezas afetadas diretamente por ela (perdas nos enrolamentos e no núcleo) deve levar isso em consideração.

No caso do enrolamento, o fenômeno a ser quantificado é a variação da sua resistência com a frequência. A distribuição de perdas à temperatura de referência podem ser expressas por:

$$\dot{q}_E = \sum_f \rho \left(1 + k_{pc} f^2\right) \left(\frac{NI_f}{A_w}\right)^2 \quad [\text{W/m}^3], \quad (57)$$

sendo  $f$  a frequência,  $\rho$  a resistividade do condutor,  $k_{pc}$  o coeficiente da característica resistência-frequência do enrolamento,  $I_f$  a amplitude da harmônica de corrente na frequência  $f$  e  $A_w$  a seção transversal do enrolamento.

Figura 1 – Seção transversal do indutor monofásico modelado

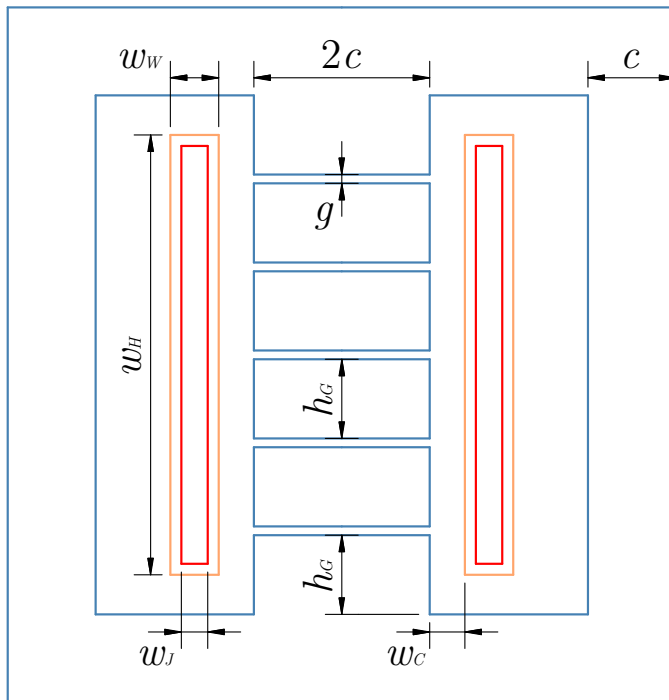


Tabela 1 – Valores da geometria do problema

Símbolo	Valor
$w_w$	27,5 mm
$w_H$	255 mm
$w_J$	15 mm
$w_C$	20 mm
$c$	100 mm
$g$	1 mm
$h_G$	50 mm
$L_{stk}$	200 mm
$n_G$	5
$N$	50

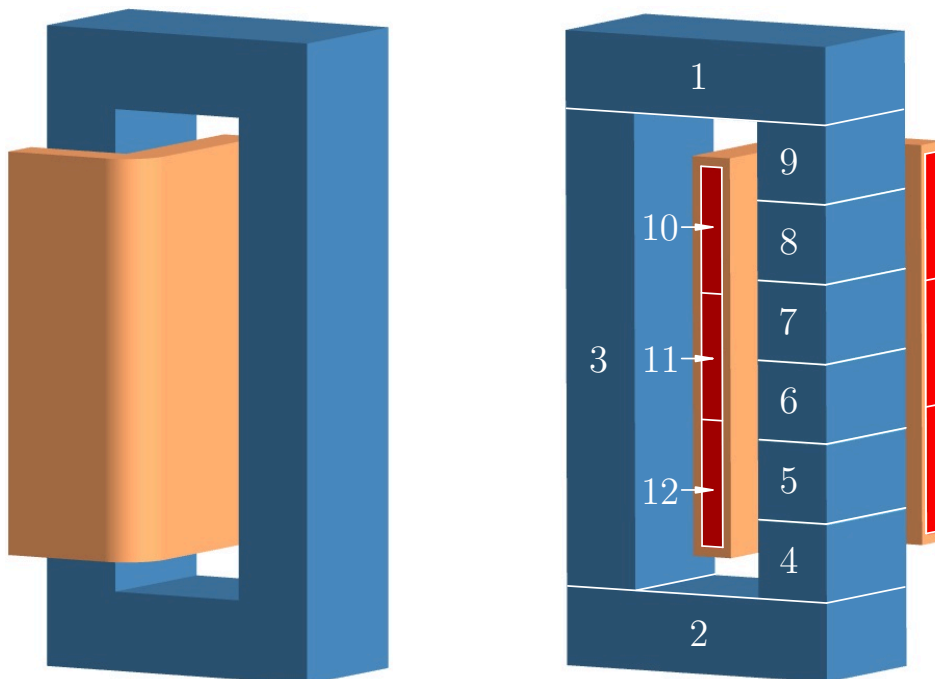
Fonte: do autor.

Fonte: do autor.

Figura 2 – Visão tridimensional do equipamento modelado

(a) 1/4 da geometria do indutor

(b) Regiões de interesse do problema



Fonte: do autor.

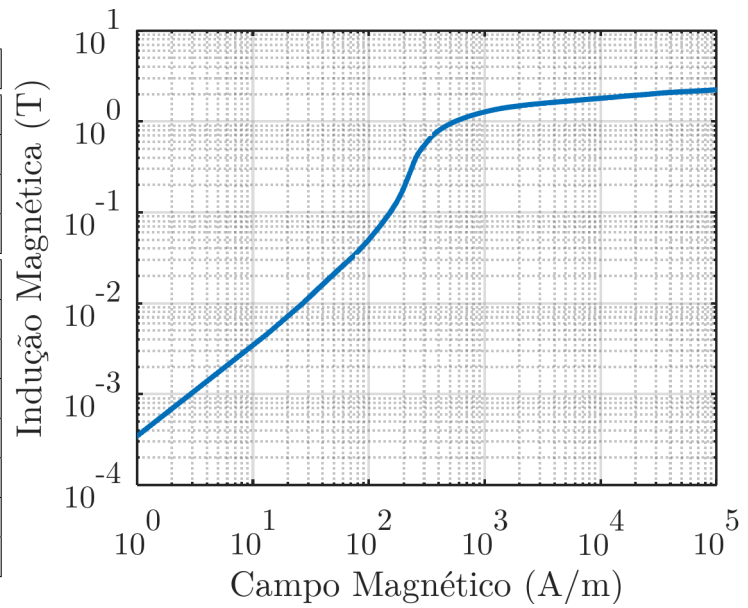
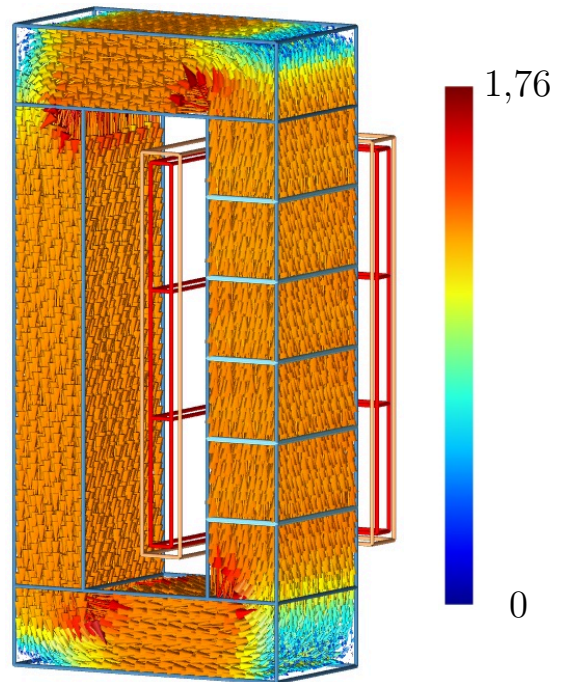


Tabela 2 – Parâmetros físicos do problema

Símbolo	Valor
Elétricos	
$\alpha$	255 1/K
$\rho^{\text{condutor}}$	20 n $\Omega$ ·m
$1/\rho^{\text{isolador}}$	0 S/m
Térmicos	
$k^{\text{condutor}}$	387 W/(m·K)
$k^{\text{isolador}}$	0,85 W/(m·K)
$k^{\text{núcleo}}$	20 W/(m·K)
$c_V^{\text{condutor}}$	3449,6 kJ/(m·K)
$c_V^{\text{isolador}}$	1890 kJ/(m·K)
$c_V^{\text{núcleo}}$	3595,5 kJ/(m·K)
$\epsilon$	0,9

Fonte: do autor.

Gráfico 3 – Curva BH do aço

Fonte: exemplos de modelos do ONELAB (GEUZAINÉ; HENROTTE *et al.*, 2013): indutor.Figura 3 – Indução no núcleo para 150 A<sub>CC</sub> (T)

Fonte: do autor.

Tabela 3 – Parâmetros das perdas

Símbolo	Valor
$k_{pc}$	0,05 s <sup>2</sup>
$\beta_H$	1377
$\beta_F$	91,8 mJ/(m <sup>3</sup> ·T)
$\beta_S$	0,765
$T_0$	16,67 ms

Fonte: do autor.

Já para a distribuição de perdas no núcleo, utiliza-se a equação (HAJIPOUR *et al.*, 2011):

$$\dot{q}_F = \beta_H B_m^{\alpha_A} B_m^{2+\alpha_B} + \beta_F \int_T^{T+T_0} \left( \frac{\partial B_r}{\partial t} \right)^2 dt + \beta_S \int_T^{T+T_0} \left( \frac{\partial B_r}{\partial t} \right)^{1,5} dt \quad [\text{W/m}^3], \quad (58)$$

sendo  $B_m$  a indução máxima ao longo do tempo,  $T_0$  o período fundamental da indução,  $B_r$  a indução resultante e os demais parâmetros obtidos experimentalmente. Os valores utilizados para esses parâmetros são encontrados na Tabela 3.

Nota-se que ao discretizar as derivadas e integrais da Equação (58), a função resultante é do mesmo tipo da Equação (53), sendo possível aplicar a LX à mesma.

Também pode-se perceber que para calcular as perdas é preciso encontrar a dependência da distribuição de indução no núcleo com a corrente. Para isso, foi simulado um modelo magnetostático de elementos finitos do equipamento para vários valores de corrente de entrada em Corrente Contínua (CC). Um dos resultados para a indução no núcleo pode ser visualizado na Figura 3. A partir dos resultados dessas simulações, a indução no núcleo pode ser encontrada para correntes dentro dos valores simulados por meio de interpolação.

A curva BH do aço utilizada é apresentada no Gráfico 3.

### 3.1.2 Condições de contorno

Para finalizar a especificação do problema é necessário apresentar a definição das condições de contorno.

Primeiramente, nas superfícies de simetria, onde são feitos os cortes do modelo em um quarto, o fluxo de calor é zero. Nas demais, são definidos fluxos de convecção e radiação, cuja implementação depende da superfície.

Para a convecção nas superfícies entre núcleo e bobina, o coeficiente de convecção depende da altura  $y$  e do fluxo de convecção  $q''$  de acordo com a equação (LEE *et al.*, 2010):

$$h(y, q'') = 0,204 \frac{k_{AR}}{L} \sqrt{\frac{g_R \beta_{AR} q'' L^4 S}{k_{AR} \nu_{AR} \alpha_{AR} y}} \quad [\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})], \quad (59)$$

sendo  $k_{AR}$  a condutividade térmica do ar,  $L$  a altura da superfície,  $g_R$  a aceleração da gravidade,  $\beta_{AR}$  o coeficiente de expansão térmica do ar,  $\nu_{AR}$  a viscosidade cinemática do ar,  $\alpha_{AR}$  a difusividade térmica do ar e  $S$  a distância entre o núcleo e a bobina.

Essa definição de coeficiente de convecção é não linear, já que depende do próprio fluxo de convecção. Ainda é possível aplicar a redução de dimensionalidade utilizando essa definição porém sai do escopo desse trabalho. Neste estudo, a Equação (59) foi linearizada, sendo substituída a variável  $q''$  pelo fluxo térmico de convecção à condição nominal (corrente senoidal de 150 A<sub>RMS</sub>). Nas demais superfícies foi utilizado  $h = 5$ .

Para a radiação nas superfícies em face a outra superfície<sup>1</sup>, os fatores de forma foram calculados por meio de uma simplificação da equação (VIEW... , 2022):

$$F_{kl} = \frac{1}{A_k} \int_{A_k} \int_{A_l} \frac{\cos \theta_k \cos \theta_l}{\pi s^2} dA_l dA_k, \quad (60)$$

sendo  $A_i$  a área da superfície  $i$ ,  $\theta_i$  o ângulo entre o normal da superfície  $i$  e uma linha reta entre os diferenciais das duas superfícies e  $s$  a distância entre as superfícies.

Para as demais superfícies foi considerada apenas radiação ao ar livre.

## 3.2 TRATAMENTO NUMÉRICO

O primeiro passo para implementar o método descrito nesse trabalho é a geração de uma malha de elementos finitos para o problema. A mesma foi realizada utilizando-se o *software* Gmsh e pode ser visualizada na Figura 4, tendo ficado com 9817 nós.

Após geração da malha, é necessário o cálculo das matrizes e vetores sem dependência temporal da Equação (51)<sup>2</sup>. Para isso utilizou-se o *software* GetDP.

Para poder avaliar o erro decorrente da aplicação da Equação (40), a formulação variacional do problema foi resolvida na malha de elementos finitos utilizando o GetDP para uma entrada de corrente senoidal de 150 A<sub>RMS</sub>. Essa simulação também foi utilizada para encontrar o fluxo térmico de convecção em regime da Equação (59). A distribuição de temperatura no equipamento encontrada é apresentada na Figura 5.

Para aproximar o espaço de soluções do problema, o modelo da Equação (51) foi simulado para diversas condições. Simulações dinâmicas foram realizadas com corrente senoidal de 50, 75, 100, 125 e 150 A<sub>RMS</sub>, utilizando como condição inicial a temperatura ambiente em todos os nós (25 °C). Também diversas simulações estáticas foram realizadas utilizando correntes com perturbações harmônicas, variando-se as amplitudes tanto da componente principal, quanto das harmônicas. A geração de corrente harmônica foi realizada por meio da adição de ruído aleatório nas frequências ímpares até a 19<sup>a</sup> (um exemplo é encontrado no Gráfico 4). O espaço de soluções gerado é apresentado no Gráfico 6.

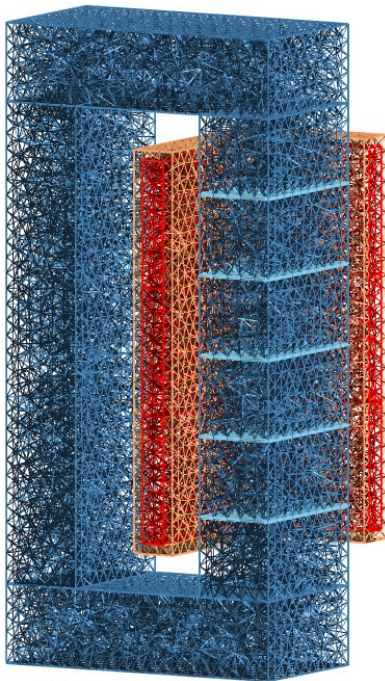
De posse do espaço de soluções, pode-se aplicar a SVD no mesmo. Os valores singulares calculados são apresentados no Gráfico 5.

Os resultados da LX calculada com tolerância de 0,1 para a temperatura e a indução no núcleo são encontrados nos Gráficos 7 e 8. O vetor de temperatura exibido foi selecionado aleatoriamente do espaço de soluções. Já o da indução no núcleo condiz a uma corrente de 220 A. Ambas decomposições apresentadas foram calculadas considerando 4 componentes principais, o que gera matrizes  $\mathbf{X}$  com 127 linhas no caso da temperatura e 175 linhas no caso da indução.

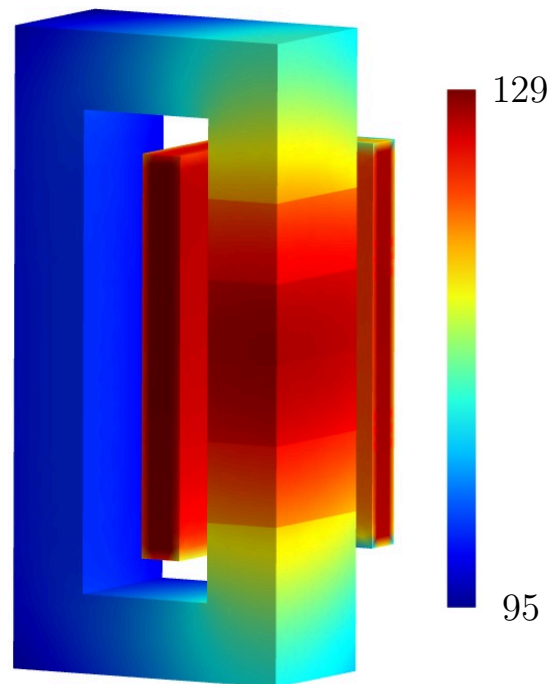
<sup>1</sup> Nesse problema cada superfície “vê”, no máximo, uma outra superfície.

<sup>2</sup> As grandezas com dependência temporal necessárias para cálculo do vetor  $\mathbf{q}_F(t)$  foram extraídas anteriormente conforme Seção 3.1.1.

Figura 4 – Malha de elementos finitos



Fonte: do autor.

Figura 5 – Distribuição estática de temperatura no equipamento ( $^{\circ}\text{C}$ )

Fonte: do autor.

Gráfico 4 – Exemplo de corrente de entrada do modelo

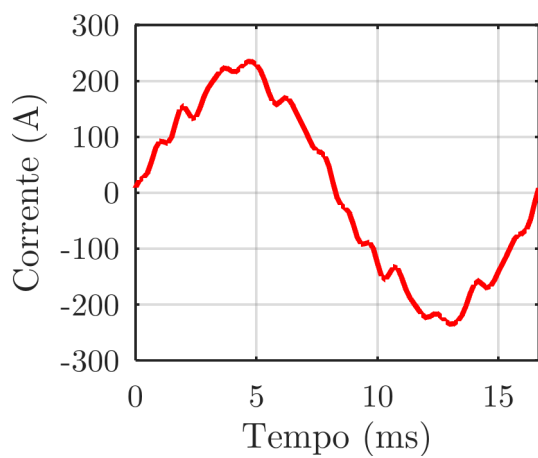
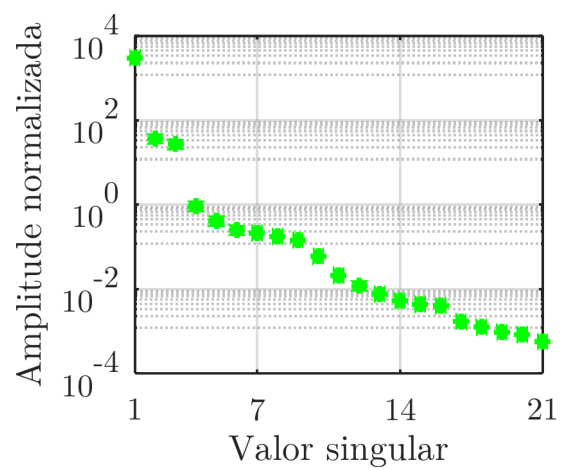


Gráfico 5 – Valores singulares



Fonte: do autor.

Gráfico 6 – Espaço de soluções do problema

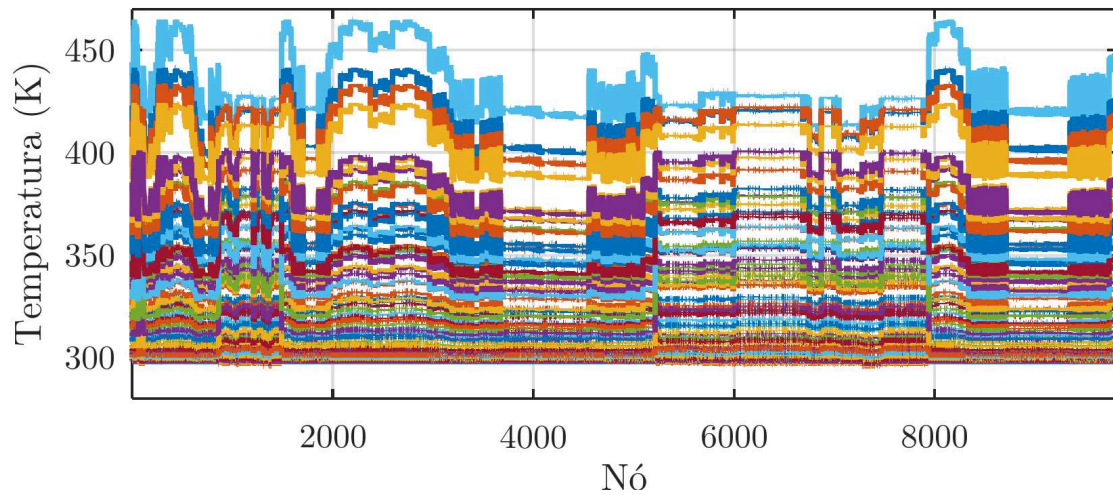


Gráfico 7 – Aproximação pela LX do vetor de temperatura

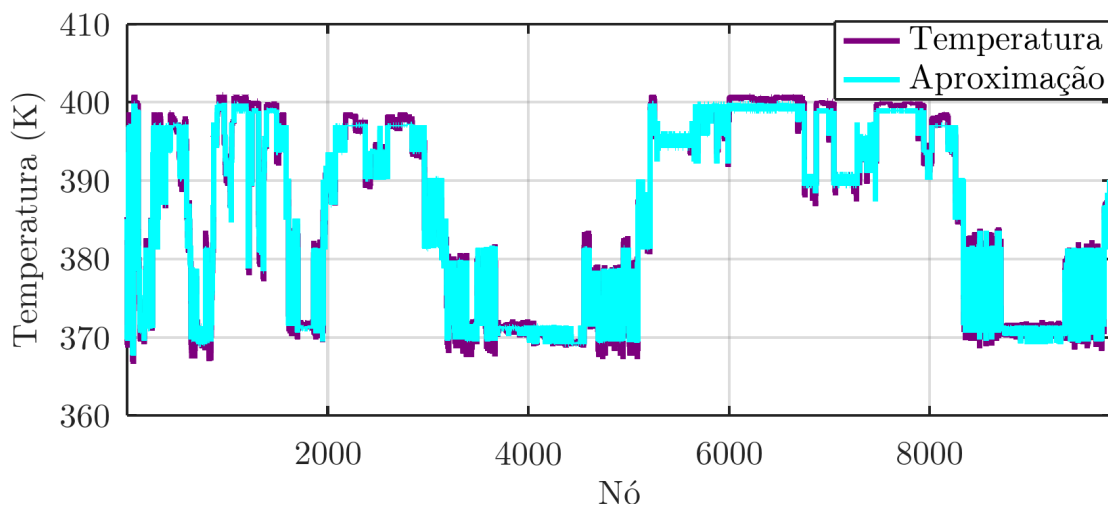
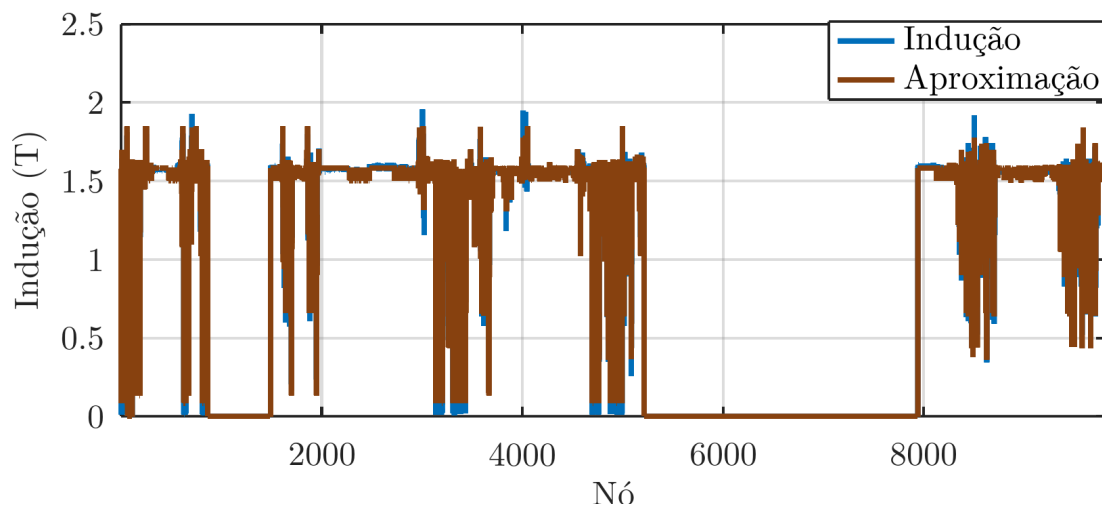


Gráfico 8 – Aproximação pela LX do vetor de indução no núcleo



Fonte: do autor.

### 3.3 ANÁLISES

Nesta seção são analisadas as técnicas propostas ao longo deste trabalho, sendo apresentados ganhos em tempo de simulação, perdas de acurácia e diminuição de complexidade oriundos da implementação do método. Todas as simulações foram executadas no Ubuntu 20.04 LTS, com um processador AMD Ryzen 5 3500U com 8 *threads*, *boost* de 3,7 GHz e com 9 GB de memória RAM.

A primeira aproximação a ser analisada é a aplicação da Equação (40). Para isso, compara-se o resultado de temperatura nos nós da simulação de elementos finitos com o modelo extraído porém não reduzido (denominado modelo completo daqui em diante) apresentado na Equação (51).

Os resultados da simulação de elementos finitos e do modelo completo são apresentados no Gráfico 9. A norma média da diferença ficou em 0,24 °C e a diferença absoluta máxima ficou em 0,43 °C, o que sugere que a Equação (51) é válida.

O tempo da simulação estática de elementos finitos ficou em cerca de 7 min, enquanto o do modelo completo ficou abaixo de 6 segundos, um ganho de 98,5%. Essa grande diferença se dá, pois a simulação de elementos finitos deve recalcular várias matrizes a cada iteração do problema, além de não ter sido possível definir a jacobiana de todas as partes do modelo no GetDP, o que aumenta o número de iterações necessárias para convergência.

A partir do modelo completo há uma escolha a ser feita quanto ao número de componentes principais a manter. As seguintes análises apresentam como algumas quantidades de interesse (acurácia dos resultados, tempo de simulação) variam para diferentes escolhas entre 2 e 10 componentes.

Para realizar as análises foram feitas simulações estáticas e dinâmicas contemplando correntes desde zero até a nominal, com e sem conteúdo harmônico. As comparações foram realizadas entre o modelo completo e o reduzido. Os resultados apresentados são as médias de todas as simulações. Para cada número de componentes, foram realizadas 5 simulações dinâmicas e 25 simulações estáticas. A condição inicial utilizada foi temperatura ambiente em todo o equipamento.

Para resolução das simulações estáticas foi implementada uma rotina em Octave utilizando o método de Newton. Para as dinâmicas foi utilizada a rotina de resolução de sistemas de equações diferenciais *lsode*<sup>3</sup>.

Começando com as simulações dinâmicas, a variação da diferença absoluta média entre as temperaturas médias nas regiões de interesse com o número de componentes principais é apresentada no Gráfico 10. Para modelos considerando 5 componentes ou mais, essa diferença ficou abaixo de 1,5 °C, porém, para números menores ela aumentou.

---

<sup>3</sup> Nota-se que, a linguagem Octave não é focada em altas velocidades de execução, portanto, uma implementação em C, por exemplo, poderia render tempos de simulação com ordens de grandeza menores dos que os aqui apresentados.

Como exemplo, a temperatura na região 7 para uma corrente de 140 A<sub>RMS</sub> traçada ao longo do tempo para a simulação completa e os modelos considerando somente alguns componentes é apresentada no Gráfico 12.

A simulação dinâmica do modelo completo por um período de 10 h leva cerca de 30 min. Esse tempo é diminuído em ao menos 98% considerando os modelos reduzidos. A variação dos tempos de simulação com o número de componentes são apresentadas no Gráfico 11.

Passando para as simulações estáticas, o Gráfico 13 apresenta a norma média da diferença entre o modelo completo e o reduzido, além da estimativa realizada por meio da Equação (15). A norma média da diferença ficou elevada para o caso com até 4 componentes, mas já a partir de 5 ela ficou abaixo de 2,5 °C, sendo esse um valor aceitável.

Nota-se que a estimativa de erro da Equação (15) subestima o mesmo para poucos componentes (até 4 nesse caso), porém, a partir de 4 componentes ela trás resultados considerados satisfatórios. Vale lembrar que a abordagem para dedução da Equação (15) é muito simplista e não leva em conta várias das fontes de erro do problema, como as reduções dos vetores de temperatura e indução no núcleo por meio da LX.

O Gráfico 14 apresenta a diferença absoluta máxima entre os valores de temperatura calculados pelo modelo completo e o reduzido em função do número de componentes. Aqui também percebe-se uma melhora nos resultados a partir de 5 componentes.

Os Gráficos 15 e 16 são análogos aos Gráficos 13 e 14, porém aplicados às temperaturas médias nas regiões de interesse do problema.

O tempo de solução do modelo completo é de em média 5,6 s, levando 4 iterações do método de Newton para o pior caso (corrente nominal). Já os modelos reduzidos precisam de 5 iterações para o pior caso, tendo um ganho de tempo em média de 99,9%, conforme Gráfico 17.

O Gráfico 18 apresenta o número de linhas das matrizes  $\mathbf{X}_T$  e  $\mathbf{X}_q$ . Por mais que esses números aumentem com o número de componentes principais consideradas, eles somente representam relações algébricas entre as variáveis do problema, acrescentando pouca complexidade quando comparadas à complexidade advinda de um estado do sistema. Assim, o principal custo que isso incorre é a necessidade de um pouco mais de memória no *hardware* em que o modelo é executado.

Por fim, também notou-se que as diferenças de temperatura são maiores quanto mais distante a corrente for da nominal. Para ilustrar isso, os mesmos gráficos de diferença foram traçados considerando somente correntes entre 120 e 150 A<sub>RMS</sub>, sendo eles o 19, 20, 21 e o 22.

Gráfico 9 – Comparação entre resultado de elementos finitos e do modelo completo

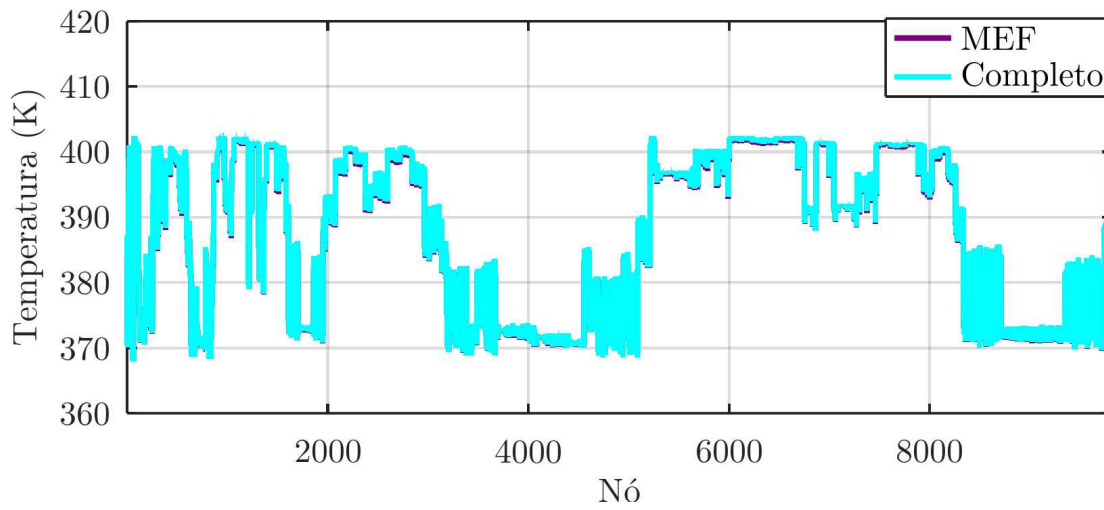


Gráfico 10 – Diferença média entre as temperaturas de interesse dinâmicas

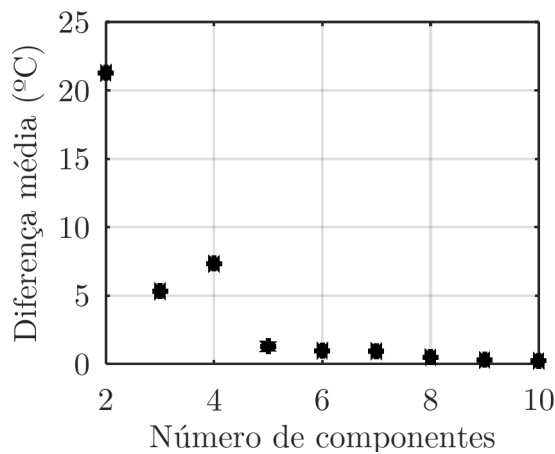


Gráfico 11 – Tempo de simulação dos modelos dinâmicos

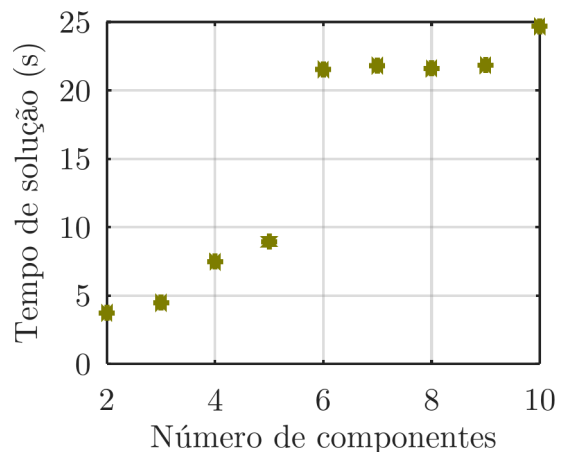
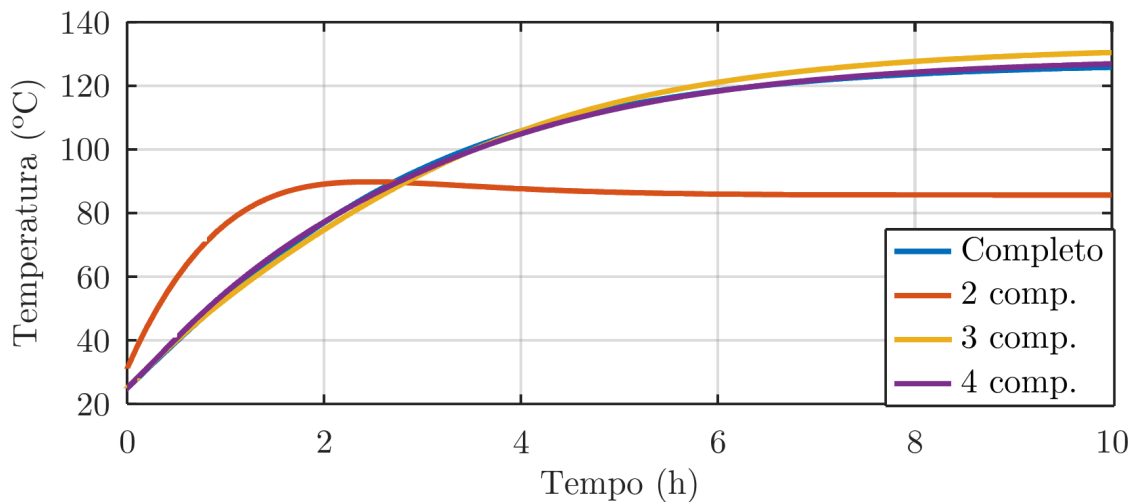


Gráfico 12 – Comparação da solução dinâmica para diferentes números de componentes



Fonte: do autor.



Gráfico 13 – Diferença média no vetor de temperaturas estático

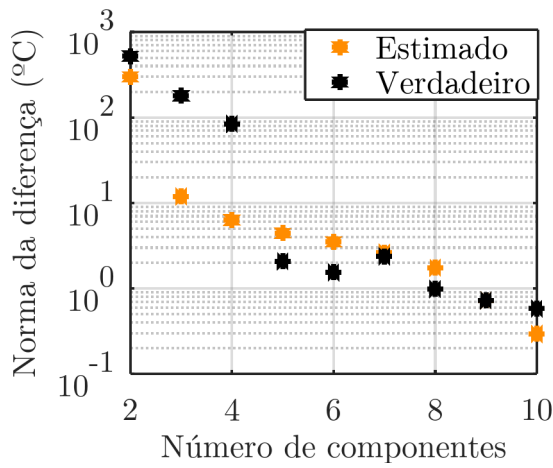


Gráfico 14 – Diferença máxima no vetor de temperaturas estático

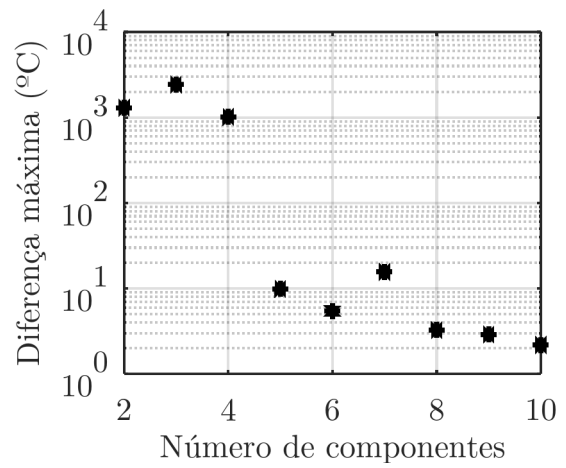


Gráfico 15 – Diferença média entre as temperaturas de interesse estáticas

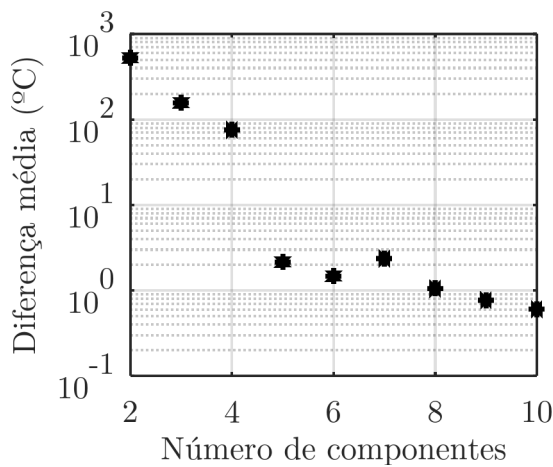


Gráfico 16 – Diferença máxima entre as temperaturas de interesse estáticas

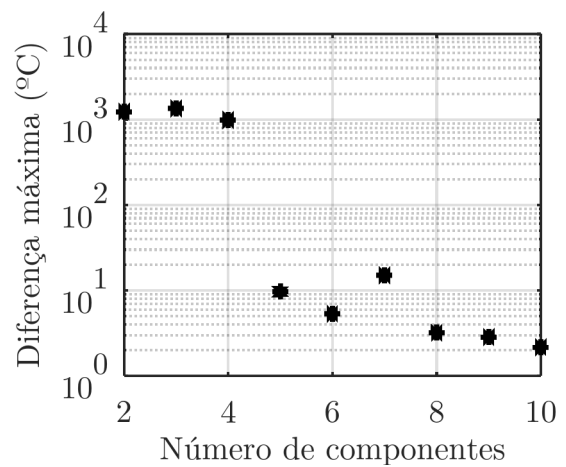


Gráfico 17 – Tempo de simulação dos modelos estáticos

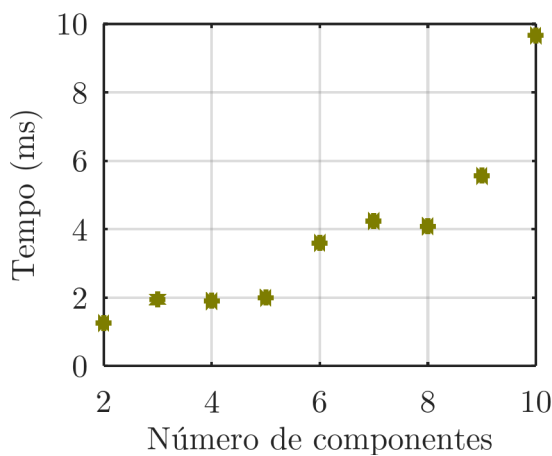
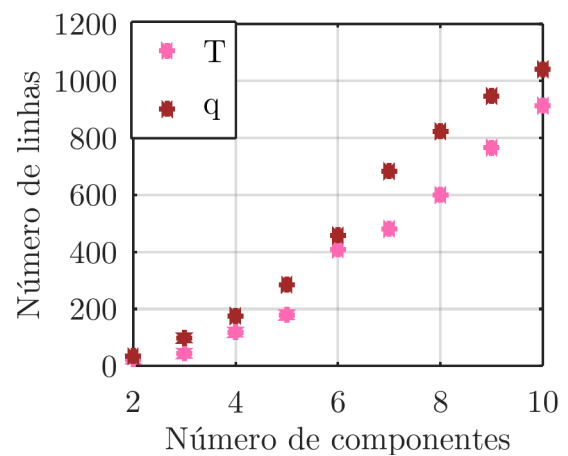
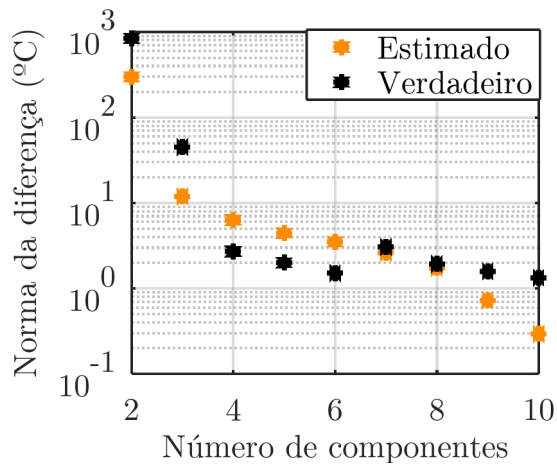
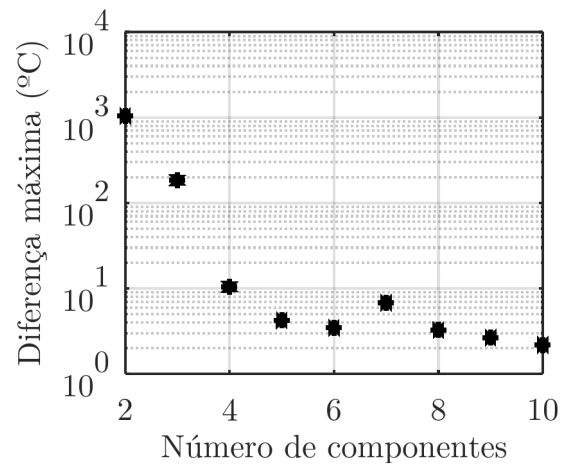
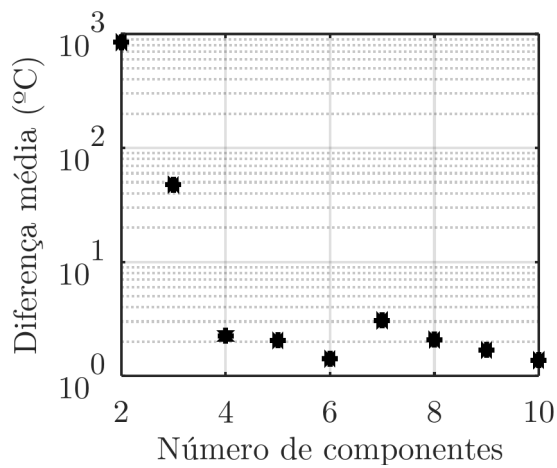
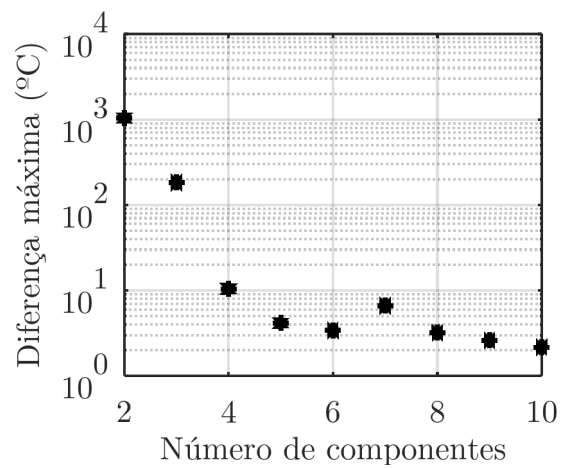


Gráfico 18 – Complexidade interna dos modelos



Fonte: do autor.

Gráfico 19 – Diferença média no vetor de temperaturas estático ( $I \approx$  nominal)Gráfico 20 – Diferença máxima no vetor de temperaturas estático ( $I \approx$  nominal)Gráfico 21 – Diferença média entre as temperaturas de interesse estáticas ( $I \approx$  nominal)Gráfico 22 – Diferença máxima entre as temperaturas de interesse estáticas ( $I \approx$  nominal)

Fonte: do autor.

## 4 CONCLUSÃO

Neste trabalho uma estrutura matemática foi explorada para redução de dimensionalidade de modelos térmicos de elementos finitos.

A partir de algumas aproximações é possível abstrair completamente o modelo de elementos finitos das integrais que geram o mesmo, transformando-o num puro problema de álgebra matricial. Após isso, aproxima-se o espaço de possíveis soluções do problema em questão e, com o auxílio da SVD, encontra-se um espaço reduzido no qual projeta-se o modelo.

Projetar as partes lineares do problema é tão simples como multiplicar algumas matrizes. Já as não linearidades precisam ser tratadas caso a caso, sendo apresentado um método para tratar o tipo de não linearidade encontrado no modelo térmico.

Visando-se averiguar desempenho e acurácia do método, o mesmo foi aplicado a um indutor monofásico refrigerado a ar. Os modelos gerados foram submetidos a diversas condições de operação, fornecendo dados para comparação. Foram realizadas comparações entre o modelo reduzido, o extraído a partir de algumas aproximações e o de elementos finitos. Notou-se que não é necessário um elevado número de componentes para obter uma diferença média de  $2,5\text{ }^{\circ}\text{C}$  entre modelos, com um ganho de tempo de simulação da ordem de 99%.

O tempo de simulação estática do modelo de elementos finitos ficou em cerca de 7 min, enquanto os modelos completo (Equação (51)) e reduzido (Equação (56)) tiveram tempos da ordem de segundos e milissegundos, respectivamente. As diferenças médias a partir de 5 componentes principais ficaram abaixo de  $2,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

As simulações dinâmicas tiveram resultados semelhantes, levando o modelo completo cerca de 30 min e o reduzido alguns segundos para simular. As diferenças médias a partir de 5 componentes principais ficaram abaixo de  $1,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

As ideias desse TCC não são restritas somente a problemas térmicos. As técnicas apresentadas podem ser adaptadas também a outros sistemas gerados pelo MEF. Sendo assim, o método aqui descrito oferece uma solução genérica para a simplificação de modelos complexos de equipamentos os quais deseja-se rodar em *hardware* limitado.

Em trabalhos futuros pode-se: expandir o método para modelos hidro termodinâmicos, possibilitando a modelagem de equipamentos refrigerados à óleo; adaptar o método para outras classes de problemas, como eletromagnéticos; implementar os modelos reduzidos em microcontroladores e realizar análises de desempenho; e implementar um sensor virtual completo que utilize um modelo reduzido.



## REFERÊNCIAS

- ABDI, H.; WILLIAMS, L.J. Principal component analysis. **WIREs Computational Statistics**, v. 2, n. 4, p. 433–459, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1002/wics.101>. Disponível em: <https://wires.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/wics.101>.
- FARHAT, C. *et al.* Dimensional reduction of nonlinear finite element dynamic models with finite rotations and energy-based mesh sampling and weighting for computational efficiency. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 98, n. 9, p. 625–662, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.4668>. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.4668>.
- GEUZAINÉ, C. GetDP: a general finite-element solver for the de Rham complex. **PAMM**, v. 7, n. 1, p. 1010603–1010604, 2007. DOI: <https://doi.org/10.1002/pamm.200700750>. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/pamm.200700750>.
- GEUZAINÉ, C.; HENROTTE, F. *et al.* Onelab: open numerical engineering laboratory. *In: COLLOQUE National en Calcul des Structures (CSMA)*, Date: 2013/05/13-2013/05/17, Location: Giens, Var, France. [*S.l.: s.n.*], 2013.
- GEUZAINÉ, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 79, n. 11, p. 1309–1331, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.2579>. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.2579>.
- GREEN, G. **An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism**. Nottingham: Impresso para o author por T. Wheelhouse, 1828. p. 10.
- GUZINSKI, J. Closed loop control of AC drive with LC filter. *In: 2008 13th International Power Electronics and Motion Control Conference*. [*S.l.: s.n.*], 2008. P. 994–1001. DOI: [10.1109/EPEPEMC.2008.4635397](https://doi.org/10.1109/EPEPEMC.2008.4635397).
- HAIPOUR, E. *et al.* Power Transformer No-Load Loss Prediction with FEM Modeling and Building Factor Optimization. **Journal of Electromagnetic Analysis and Applications**, v. 3, n. 10, p. 430–438, 2011. DOI: [10.4236/jemaa.2011.310068](https://doi.org/10.4236/jemaa.2011.310068).
- HERNÁNDEZ, J.A.; CAICEDO, M.A.; FERRER, A. Dimensional hyper-reduction of nonlinear finite element models via empirical cubature. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 313, p. 687–722, 2017. ISSN 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.10.022>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578251631355X>.

LEE, M. *et al.* Temperature distribution in foil winding for ventilated dry-type power transformers. **Electric Power Systems Research**, v. 80, n. 9, p. 1065–1073, 2010. ISSN 0378-7796. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2010.01.013>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378779610000404>.

PENROSE, R. A generalized inverse for matrices. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, Cambridge University Press, v. 51, n. 3, p. 406–413, 1955. DOI: 10.1017/S0305004100030401.

SILVEIRA, H. M. **Fundamentos de Controle - EEL7531**: Notas de Aula - Parte Linear. 6. ed. Florianópolis: [s.n.], ago. 2010. Apostila da disciplina de Fundamentos de Controle do Departamento de Engenharia Elétrica e Eletrônica da Universidade Federal de Santa Catarina.

SÜLI, E. **Lecture Notes on Finite Element Methods for Partial Differential Equations**. Oxford: [s.n.], fev. 2019. Mathematical Institute, University of Oxford.

VIEW factors. *In*: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. [S.l.]: Wikimedia, 2022. Disponível em: [https://en.wikipedia.org/wiki/View\\_factor](https://en.wikipedia.org/wiki/View_factor). Acesso em: 14 mar. 2022.