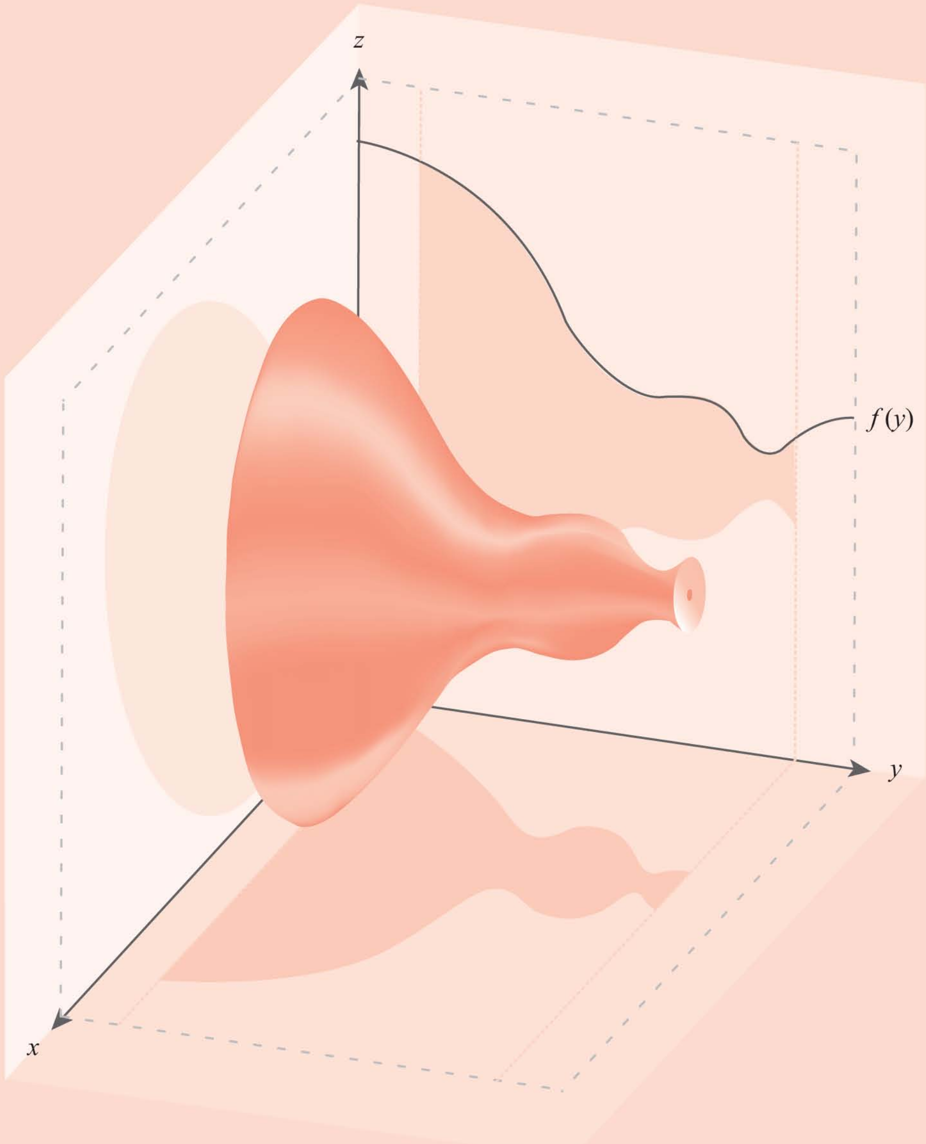
# Cálculo II

Silvia Martini de Holanda Janesch
Inder Jeet Taneja




Curso de Licenciatura em Física
na Modalidade à Distância

Universidade Federal de Santa Catarina

# Cálculo II

Inder Jeet Taneja
Silvia Martini de Holanda Janesch

2ª Edição - Revisada
Florianópolis, 2009

## Laboratório de Novas Tecnologias - LANTEC/CED

### Coordenação Pedagógica

**Coordenação Geral:** Andrea Lapa, Roseli Zen Cerny

**Núcleo de Formação**: Nilza Godoy Gomes

**Núcleo de Pesquisa e Avaliação:** Claudia Regina Flores

### Núcleo de Criação e Desenvolvimento de Materiais

### Design Gráfico

**Coordenação:** Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira

**Projeto Gráfico Original:** Diogo Henrique Ropelato, Marta Cristina Goulart Braga, Natal Anacleto Chicca Junior

**Redesenho do Projeto Gráfico:** Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira

**Diagramação:** Thiago Felipe Victorino

**Ilustrações:** Gil Prado

**Capa:** xxxxxx

### Design Instrucional

**Coordenação:** Juliana Machado

**Design Instrucional:** Elizandro Maurício Brick

**Revisão Gramatical:** Jane Maria Viana Cardoso



## Ficha Catalográfica

T164c Taneja, Inder Jeet
Cálculo II / Inder Jeet Taneja, Silvia Martini de Holanda Janesch. – 2. ed. – Florianópolis : UFSC/EAD/CED/CFM, 2009.
224 p.

ISBN 978-85-99379-79-0

1. Integral. 2. Derivada. 3. Funções de várias variáveis. I. Taneja, Inder Jeet. II. Janesch, Silvia. III Título.

CDU 51

Elaborada pela Bibliotecária Eleonora M. F. Vieira – CRB – 14/786

# Sumário

# Apresentação

*Caro estudante,*

Estamos iniciando a disciplina de Cálculo II!

O estudo dos conteúdos desta disciplina requer que você tenha noção de integral de função de uma variável, conteúdo já estudado na disciplina de Cálculo I.

Na primeira parte da disciplina de Cálculo II, estudaremos as técnicas de integração e utilizaremos estas ferramentas para resolver problemas de comprimento de arco, cálculo de área, cálculo de volume de sólido de revolução e suas aplicações na Física. Na segunda parte, estudaremos os conceitos de limite, continuidade, derivadas parciais e diferenciabilidade de funções de várias variáveis. Aplicaremos as derivadas parciais para resolver problemas de máximos e mínimos de funções com mais de uma variável. Além disso, estudaremos as integrais duplas e triplas e aplicaremos estes conceitos para resolver problemas de área, volume de sólido qualquer, centro de massa e momento de inércia de lâminas planas e de sólidos.

Esperamos que ao final da disciplina, você tenha condições de calcular e aplicar, com adequado desembaraço, integrais de funções de uma variável, integrais duplas e triplas. E que você detenha as noções básicas de funções de várias variáveis, especialmente os conceitos de derivadas parciais e máximos e mínimos de funções.

O texto deste material consiste em cinco capítulos. Os dois primeiros foram elaborados pelo professor Taneja e os demais são de responsabilidade da professora Janesch.

*Inder Jeet Taneja*
*Silvia Martini de Holanda Janesch*

# Capítulo 1

## Métodos de Integração

# Capítulo 1

## Métodos de Integração

*Neste capítulo estudaremos algumas técnicas de cálculo de integral. Essas técnicas ou métodos incluem os procedimentos de:*

*i) integração por partes;*

*ii) integração envolvendo funções trigonométricas;*

*iii) integração de funções racionais;*

*iv) integrais com expressões da forma* $\sqrt{ax^2+bx+c}$ *;*

*v) integrais impróprias.*

*Antes de iniciar nossos estudos, assumimos que você está familiarizado com algumas integrais padrões já estudadas no Cálculo I. Para facilitar o estudo, incluímos no final deste capítulo uma tabela de* ***integrais, derivadas*** *e* ***identidades trigonométricas****.*

## 1.1 Integração por partes

No Cálculo 1, estudamos como calcular integrais usando o método da substituição. Mas existem algumas integrais, tais como: $\int \ln x\, dx$, $\int x e^x dx$, $\int x^3 \cos x\, dx$, etc. que não podem ser resolvidas aplicando o método da substituição. Necessitamos de mais alguns conhecimentos. Neste caso, iniciaremos apresentando a técnica de *integração por partes.*

Sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções diferenciáveis num intervalo $[a,b]$. Então, usando a regra da derivação do produto, de duas maneiras diferentes podemos escrever

$$(uv)' = uv' + vu' ,$$

ou seja,

$$vu' = (uv)' - uv' .$$

Onde

$$u' = \frac{du}{dx} \text{ e } v' = \frac{dv}{dx}.$$

Integrando os dois membros da igualdade acima, temos

$$\int_a^b vu'dx = \int_a^b (vu)'dx - \int_a^b uv'dx,$$

ou,

$$\int_a^b vdu = uv\Big|_a^b - \int_a^b udv.$$

E para a integral indefinida, tem-se

$$\int vdu = uv - \int udv, \text{ ou seja, } \int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad (1)$$

A expressão (1) é conhecida como a fórmula de *integração por partes.* Quando aplicarmos esta fórmula para resolver a integral $\int f(x)dx$, devemos separar o integrando dado em duas partes, uma sendo $u$ e a outra, juntamente com $dx$, sendo $dv$. Por essa razão, o cálculo de integral utilizando a fórmula (1) é chamado integração por partes. Para escolher $u$ e $dv$, devemos lembrar que:

i) a parte escolhida como $dv$ deve ser facilmente integrável;

ii) $\int u\,dv$ deve ser mais simples que $\int v\,du$.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos:

**Exemplo 1.1.** Calcule a integral

$$\int x e^x dx.$$

**Solução:** Sejam $u = x$ e $dv = e^x dx$. Assim, teremos $du = dx$ e $v = e^x$. Aplicando a fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, obtemos

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + c.\end{aligned}$$

**Exemplo 1.2.** Calcule a integral

$$\int \ln x\,dx.$$

**Solução:** Sejam $u = \ln x$ e $dv = dx$. Assim, teremos $du = \frac{1}{x}dx$ e $v = x$. Aplicando a fórmula (1), obtemos

$$\begin{aligned}\int \ln x\, dx &= x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx\\ &= x\ln x - x + c.\end{aligned}$$

**Exemplo 1.3.** Encontre

$$\int arc\,\mathrm{tg}\, x\, dx.$$

**Solução:** Sejam $u = arc\,\mathrm{tg}\, x$ e $dv = dx$. Derivando a primeira expressão temos $\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x} \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x}$. Integrando a segunda expressão temos $v = x$. Logo,

$$\int arc\,\mathrm{tg}\, x\, dx = x\, arc\,\mathrm{tg}\, x - \int \frac{x}{1+x^2}dx.$$

Para calcular a integral $\int \frac{x}{1+x^2}dx$, utilizamos a substituição $t = 1+x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx$, então

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c, \text{ pois } 1+x^2 \text{ é sempre positivo.}$$

Portanto,

$$\int arc\,\mathrm{tg}\, x\, dx = x\, arc\,\mathrm{tg}\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

**Exemplo 1.4.** Calcule

$$\int x\ln x\, dx.$$

**Solução:** Sejam $u = \ln x$ e $dv = x\,dx$. Assim, teremos $du = \frac{1}{x}dx$ e $v = \frac{1}{2}x^2$. Logo,

$$\begin{aligned}\int x\ln x\, dx &= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx\\ &= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c\\ &= \frac{1}{4}x^2(2\ln(x) - 1) + c.\end{aligned}$$

**Exemplo 1.5.** Calcule

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx.$$

**Solução:** Sejam $u = e^x$ e $dv = \operatorname{sen} x\, dx$. Assim, teremos $du = e^x dx$ e $v = -\cos x$. Logo,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx. \qquad (2)$$

Observe que a integral do lado direito não é mais simples, porém como a derivada e a integral de um cosseno dá um seno, vamos aplicar novamente a integral por partes no membro de interesse para vermos se há alguma semelhança com a expressão obtida acima.

Considerando $\bar{u} = e^x$ e $d\bar{v} = \cos x\, dx$ temos $d\bar{u} = e^x dx$ e $\bar{v} = \operatorname{sen} x$. De (1), obtemos

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx. \qquad (3)$$

Substituindo (3) em (2), temos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + c.$$

Perceba que esse caso não se usa a integração por partes para conseguir transformar a integral em uma soma de duas funções mais simples. Nesse caso o uso desse método se deve ao fato de termos $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$ e $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)$ .

**Exemplo 1.6.** Encontre

$$\int \sec^3 x\, dx.$$

**Solução:** Podemos escrever

$$\int \sec^3 x\, dx = \int \sec^2 x \sec x\, dx.$$

Fazendo $u = \sec x$, temos que $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ , usando a regra do quociente das derivadas, $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{(f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x))}{g^2(x)}$ , obtemos $du = \sec x \operatorname{tg} x\, dx$ , $dv = \sec^2 x\, dx$ e $v = \operatorname{tg} x$ . Aplicando

a fórmula (1), obtemos

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\,dx &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x \operatorname{tg}^2 x\,dx\\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\,dx\\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int (\sec^3 x - \sec x)\,dx\\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx.\end{aligned}$$

Simplificando, obtemos

$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \operatorname{tg} x + \int \sec x\ dx\,.$$

Pela tabela de integração sabemos que

$$\int \sec x\ dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c\,.$$

Logo,

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c.$$

**Observação:** Estude bem este exemplo, pois será aplicado nos próximos capítulos freqüentemente.

## Lista de exercícios

Calcule as seguintes integrais usando o método de integração por partes:

1) $\int (x+1)\,e^x dx\,.$

2) $\int x\sqrt{1+x}\ dx\,.$

3) $\int x^2\ \operatorname{sen}\ x\ dx\,.$

4) $\int x^3 e^{2x} dx\,.$

5) $\int x \cos x\,dx\,.$

6) $\int x^2\sqrt{1-x}\ dx\,.$

A seguir, apresentaremos as diversas situações de cálculo de integrais envolvendo as funções trigonométricas.

# 1.2 Integrais envolvendo potências de seno e cosseno

Queremos determinar as integrais do tipo:

i) $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ ou $\int \cos^n x\,dx$, onde $n$ é um número inteiro positivo.

ii) $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \, dx$, onde $n$ e $m$ são números inteiros positivos.

Para calcular as integrais do tipo i) e ii), separamo-las em três casos distintos.

**Caso 1:** No item i), quando $n$ é inteiro *ímpar*. Neste caso, escrevemos as integrais da forma

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx = \int \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^{n-1} x \, dx.$$

Como $n-1$ é par, utilizaremos a identidade trigonométrica $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ para chegar a uma integral mais simples.

**Caso 2:** No item i), quando $n$ é inteiro *par*. Neste caso, para simplificar o integrando utilizaremos as identidades trigonométricas $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ e $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ para chegar a uma integral mais fácil de calcular.

**Caso 3:** Para resolvermos as integrais do item ii), utilizaremos os procedimentos dos *casos um* e *dois*. Se um dos expoentes, $m$ ou $n$, ou ambos, são ímpares, seguiremos o procedimento do *caso 1*, do contrário, utilizaremos o procedimento do *caso 2*, ou seja, quando os dois expoentes, $m$ e $n$, são pares, aplicaremos o *caso 2*.

A seguir, daremos alguns exemplos.

**Exemplo 1.7.** Calcule a integral

$$\int \operatorname{sen}^5 x \, dx.$$

**Solução:** Escrevemos

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x \, dx &= \int \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \operatorname{sen} x \, dx, \text{ pois } \operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x \\
&= \int \left(1-2\cos^2 x+\cos^4 x\right) \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \int \operatorname{sen} x \, dx - 2\int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx + \int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx. \quad (4)
\end{aligned}$$

Vamos calcular inicialmente as duas últimas integrais usando a substituição $u = \cos x$. Então, $du = -\text{sen } x\, dx$. Logo,

$$-2\int \cos^2 x \,\text{sen } x\, dx + \int \cos^4 x \,\text{sen } x\, dx$$

$$= 2\int u^2 du - \int u^4 du$$

$$= \frac{2u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c$$

$$= \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c_1. \tag{5}$$

Pela tabela de integração sabemos que:

$$\int \text{sen } x\, dx = -\cos x + c_2. \tag{6}$$

Juntando (5) e (6) e colocando em (4), temos

$$\int \text{sen}^5 x\, dx = -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c,$$

onde a constante $c = c_1 + c_2$.

**Exemplo 1.8.** Calcule a integral

$$\int \cos^4 4x\, dx.$$

**Solução:** Substituindo $4x = t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{4}$.

$$\int \cos^4 4x\, dx = \frac{1}{4}\int \cos^4 t\, dt$$

$$= \frac{1}{4}\int (\cos^2 t)^2 dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{16}\int \left[1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t\right] dt$$

$$= \frac{1}{16}\int \left[1 + 2\cos 2t + \left(\frac{1+\cos 4t}{2}\right)\right] dt$$

$$= \frac{1}{16}\int \left[\frac{2+4\cos 2t + 1 + \cos 4t}{2}\right] dt$$

$$= \frac{3}{32}t + \frac{1}{16}\text{sen } 2t + \frac{1}{128}\text{sen } 4t + c$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{16}\text{sen } 8x + \frac{1}{128}\text{sen } 16x + c.$$

**Exemplo 1.9.** Calcule a integral

$$\int \text{sen}^3 x \cos^2 x \, dx.$$

**Solução:** Utilizaremos o caso 1 para calcular esta integral.

$$\begin{aligned} I = \int \text{sen}^3 x \cos^2 x \, dx &= \int \text{sen}^2 x \,\text{sen}\, x \cos^2 x \, dx \\ &= \int \left(1 - \cos^2 x\right) \text{sen}\, x \cos^2 x \, dx \\ &= \int \cos^2 x \,\text{sen}\, x \, dx - \int \cos^4 x \,\text{sen}\, x \, dx. \end{aligned}$$

Substituindo $t = \cos x \Rightarrow dt = -\text{sen}\, x \, dx.$ Logo,

$$\begin{aligned} I &= -\int t^2 dt + \int t^4 dt \\ &= -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + c \\ &= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.10.** Calcule a integral

$$\int \text{sen}^2 2x \cos^4 2x \, dx .$$

**Solução:** Neste exemplo, utilizaremos o caso 1. Substituindo $t = 2x$, temos $dt = 2dx$. Logo,

$$\begin{aligned} \int \text{sen}^2 2x \cos^4 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int \text{sen}^2 t \cos^4 t \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right)^2 dt \\ &= \frac{1}{16} \int \left[1 + \cos 2t - \cos^2 2t - \cos^3 2t\right] dt \\ &= \frac{1}{16} \int \left[1 + \cos 2t - \left(\frac{1 + \cos 4t}{2}\right) - (1 - \text{sen}^2 2t)\cos 2t\right] dt \\ &= \frac{1}{32} \int \left[1 - \cos 4t + 2\text{sen}^2 2t \cos 2t\right] dt \\ &= \frac{1}{32} t - \frac{1}{128} \text{sen}\, 4t + \frac{1}{96} \text{sen}^3 2t + c \\ &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{128} \text{sen}\, 8x + \frac{1}{96} \text{sen}^3 4x + c \,. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.11.** Calcule

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \, dx.$$

**Solução:**

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)^4 dx \\
&= \frac{1}{16}\int \left(\operatorname{sen}^2 2x\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{16}\int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{64}\int \left[1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x\right] dx \\
&= \frac{1}{64}\int \left[1 - 2\cos 4x + \frac{1+\cos 8x}{2}\right] dx \\
&= \frac{3}{128}x - \frac{1}{128}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{1024}\operatorname{sen} 8x + c.
\end{aligned}$$

## Lista de exercícios

Resolva as integrais abaixo:

1) $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$.
2) $\int \cos^2 2x \operatorname{sen}^2 2x \, dx$.
3) $\int \operatorname{sen}^6 3x \, dx$.
4) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx$.
5) $\int \operatorname{tg} x \sec x \, dx$.
6) $\int \cos^5 4x \, dx$.

# 1.3 Fórmulas de redução ou recorrência

Às vezes é mais fácil usar as fórmulas de redução ou recorrência, principalmente, quando estão disponíveis ou quando estamos trabalhando com potências maiores. As fórmulas são dadas por:

$$\int \operatorname{sen}^n au \, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} au \cos au}{an} + \left(\frac{n-1}{n}\right)\int \operatorname{sen}^{n-2} au \, du,$$

$$\int \cos^n au \, du = \frac{\operatorname{sen} au \cos^{n-1} au}{an} + \left(\frac{n-1}{n}\right)\int \cos^{n-2} au \, du,$$

$$\int \text{tg}^n au\, du = \frac{tg^{n-1} au}{a(n-1)} - \int \text{tg}^{n-2} au\, du\,,$$

$$\int \text{cotg}^n au\, du = -\frac{\text{cotg}^{n-1} au}{a(n-1)} - \int \text{cotg}^{n-2} au\, du\,,$$

$$\int \sec^n au\, du = \frac{\sec^{n-2} au\, tg\, au}{a(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\int \sec^{n-2} au\, du\,,$$

e

$$\int \text{cosec}^n au\, du = -\frac{\text{cosec}^{n-2} au\, \text{cotg}\, au}{a(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\int \text{cosec}^{n-2} au\, du\,.$$

onde $n$ é um número inteiro positivo e $a > 0$.

As fórmulas dadas acima podem ser demonstradas utilizando a integração por partes.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de utilização destas fórmulas.

**Exemplo 1.12.** Utilize a fórmula de redução de cosseno para calcular

$$\int \cos^5 3x\, dx.$$

**Solução:** Neste caso, tem-se $n = 5$ e $a = 3$. Logo,

$$\begin{aligned}\int \cos^5 3x\, dx &= \frac{\cos^4 3x \,\text{sen}\, 3x}{15} + \frac{4}{5}\int \cos^3 3x\, dx \\ &= \frac{1}{15}\cos^4 3x\,\text{sen}\, 3x + \frac{4}{5}\,\frac{\cos^2 3x\,\text{sen}\, 3x}{9} + \frac{8}{15}\int \cos 3x\, dx \\ &= \frac{1}{15}\cos^4 3x\,\text{sen}\, 3x + \frac{4}{45}\cos^2 3x\,\text{sen}\, 3x + \frac{8}{45}\text{sen}\, 3x + c.\end{aligned}$$

**Exemplo 1.13.** Calcule

$$\int \text{sen}^6 4x\, dx.$$

**Solução:** Aplicando a fórmula de redução de seno, obtemos

$$\int \text{sen}^6 4x\, dx = -\frac{\text{sen}^5 4x \cos 4x}{24} + \frac{5}{6}\int \text{sen}^4 4x\, dx$$

$$= -\frac{\text{sen}^5 4x \cos 4x}{24} + \frac{5}{6}\left[\left(\frac{-\text{sen}^3 4x \cos 4x}{16}\right) + \frac{3}{4}\int \text{sen}^2 4x\, dx\right]$$

$$= -\frac{\text{sen}^5 4x \cos 4x}{24} - \frac{5}{96}\text{sen}^3 4x \cos 4x + \frac{5}{8}\left[-\frac{\text{sen } 4x \cos 4x}{8} + \frac{1}{2}\int dx\right]$$

$$= -\frac{\text{sen}^5 4x \cos 4x}{24} - \frac{5}{96}\text{sen}^3 4x \cos 4x - \frac{5}{64}\text{sen } 4x \cos 4x + \frac{5}{16}x + c.$$

### Lista de exercícios

Resolva as seguintes integrais, aplicando as fórmulas de redução:

1) $\int \text{sen}^4 2x\, dx$.

2) $\int \text{sen}^5 x\, dx$.

3) $\int \cos^6 x\, dx$.

4) $\int \cos^3 3x\, dx$.

5) $\int \text{tg}^6 5x\, dx$

6) $\int \sec^7 4x\, dx$

## 1.4 Integração com substituição trigonométrica

Muitas integrais podem ser calculadas por meio de substituições trigonométricas, principalmente, se o integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ ou $\sqrt{x^2 - a^2}$, $a > 0$. Essas situações são resolvidas aplicando substituições trigonométricas. Para compreender de onde vêm as substituições que devemos fazer, busque comparar as relações trigonométricas fundamentais $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ e $\text{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ com as expressões que queremos integrar . Veja a seguir.

i) Substituir $x = a \text{ sen } \theta$, no caso do integrando conter a expressão da forma $\sqrt{a^2 - x^2}$. Pois,

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2\text{sen}^2\theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \text{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} \\ &= a\cos\theta \;,\; a > 0\end{aligned}$$

Ao fazer uma substituição trigonométrica, admitimos que $\theta$ esteja no contradomínio da função trigonométrica inversa correspondente. Assim, para $x = a \text{ sen } \theta$, temos $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

ii) Substituir $x = a \text{ tg } \theta$ no caso do integrando conter uma expressão da forma $\sqrt{a^2 + x^2}$. Pois,

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2 + x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \text{tg}^2\theta} \\
&= \sqrt{a^2(1 - \text{tg}^2\theta)} = \sqrt{a^2 \sec^2\theta} \\
&= a \sec\theta, \quad a > 0
\end{aligned}$$

Assim, para $x = a \,\text{tg}\,\theta$, temos $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

iii) Substituir $x = a \sec \theta$ quando o integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{x^2 - a^2}$. Pois,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \sec^2\theta - a^2} \\
&= \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2 \text{tg}^2\,\theta} \\
&= a \,\text{tg}\,\theta, \quad a > 0
\end{aligned}$$

Assim, para $x = a \sec\theta$, temos $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Em todos os três tipos de situações, para voltar à variável inicial e dar a resposta final, usaremos a definição das funções trigonométricas com o auxilio de um triangulo retângulo. Vejamos alguns exemplos a seguir.

**Exemplo 1.14.** Calcule

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} dx.$$

**Solução:** Seja $x = 3 \text{ sen } \theta$, então $dx = 3 \cos \theta \, d\theta$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} dx &= \int \frac{\sqrt{9 - 9 \text{ sen}^2\theta}}{3 \text{ sen } \theta} 3 \cos \theta \, d\theta \\
&= 3\int \frac{\cos^2 \theta}{\text{sen } \theta} d\theta = 3\int \frac{1 - \text{sen}^2\theta}{\text{sen } \theta} d\theta \\
&= 3\int \left(\text{cosec } \theta - \text{sen } \theta\right) d\theta
\end{aligned}$$

$$= 3\ln|\text{cosec}\,\theta - \text{cotg}\,\theta| + 3\cos\theta + c.$$

Agora, $x = 3\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \dfrac{x}{3} \Rightarrow \text{cosec}\,\theta = \dfrac{3}{x}$, $\text{cotg}\,\theta = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}$

e $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{3}$.

Logo, $$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx = 3\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-x^2}}{x}\right| + \sqrt{9-x^2} + c.$$

**Exemplo 1.15**. Calcule a integral

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-4x^2}}dx.$$

**Solução:** Para aplicar substituição trigonométrica devemos simplificar a expressão $\sqrt{9-4x^2}$.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-4x^2}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x\right)^2}}dx.$$

Substituindo $x = \dfrac{3}{2}\text{sen}\,\theta$, então $dx = \dfrac{3}{2}\cos\theta\, d\theta$.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-4x^2}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{9}{4}\text{sen}^2\theta}{\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}}\frac{3}{2}\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{9}{8}\int \text{sen}^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{9}{8}\int\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= \frac{9}{16}\left[\theta - \frac{\text{sen}\,2\theta}{2}\right] + c$$

$$= \frac{9}{16}\theta - \frac{9}{16}\text{sen}\,\theta\cos\theta + c$$

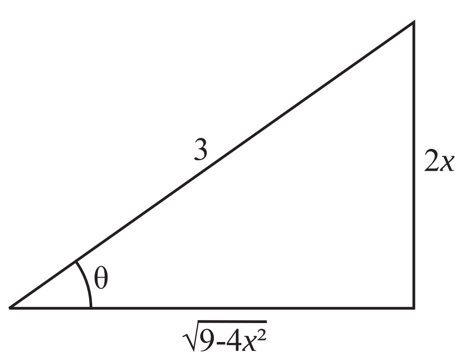


Figura 1.1

Temos os resultados em termos de $\theta$, mas, precisamos em termos de $x$. Sabemos que $x = \dfrac{3}{2}\text{sen}\,\theta \Rightarrow \dfrac{2x}{3} = \text{sen}\,\theta$. Sabendo também que $\text{sen}\,\theta$ é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, podemos construir a Figura 1.1.

Como $x = \frac{3}{2}\text{sen}\,\theta$, temos $\theta = arc\,\text{sen}\left(\frac{2x}{3}\right)$, $\text{sen}\,\theta = \frac{2x}{3}$ e $\cos\theta = \frac{\sqrt{9-4x^2}}{3}$.

Logo,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-4x^2}}dx = \frac{9}{16}arc\,\text{sen}\left(\frac{2x}{3}\right) - \frac{9}{16}\frac{2x}{9}\sqrt{9-4x^2} + c$$
$$= \frac{9}{16}arc\,\text{sen}\left(\frac{2x}{3}\right) - \frac{1}{8}x\sqrt{9-4x^2} + c.$$

**Exemplo 1.16.** Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}.$$

**Solução:** Substituindo $x = \sqrt{2}\,\text{tg}\,\theta$, então $dx = \sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta$.
Logo,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{\sqrt{2}\sec^2\theta}{\sqrt{2+2\,\text{tg}^2\theta}}d\theta$$
$$= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}d\theta = \int \sec\theta\, d\theta$$
$$= \ln|\sec\theta + \text{tg}\,\theta| + c.$$

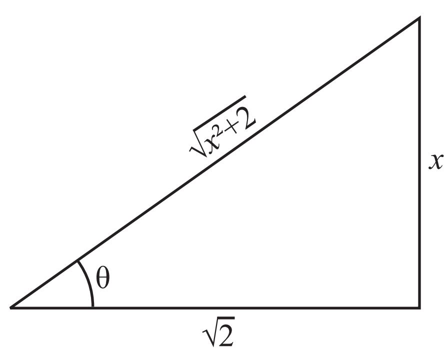



Figura 1.2

Como $x = \sqrt{2}\,\text{tg}\,\theta$, temos $\text{tg}\,\theta = \frac{x}{\sqrt{2}}$ e $\sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}}$. Logo,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}}\right| + c.$$

**Exemplo 1.17**. Calcule

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^{5/2}}\,dx.$$

**Solução:** Substituindo $x = 2\,\text{tg}\,\theta$, então $dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^{5/2}}\,dx &= \int \frac{4\,\text{tg}^2\theta}{\left(4\,\text{tg}^2\theta+4\right)^{5/2}}2\sec^2\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{\text{tg}^2\theta\sec^2\theta}{\sec^5\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{\text{tg}^2\theta}{\sec^3\theta}\,d\theta \\ &= \frac{1}{4}\int \text{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\frac{\text{sen}^3\theta}{3}+c.\end{aligned}$$

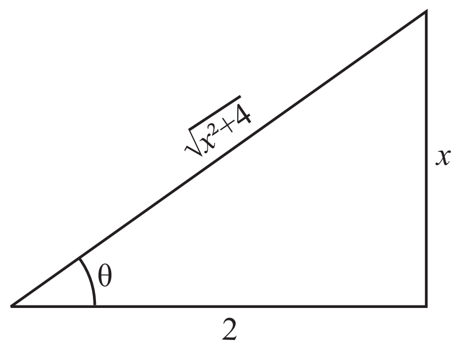


Figura 1.3

Como $\text{tg}\,\theta = \dfrac{x}{2} \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$, temos

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^{5/2}}\,dx = \frac{1}{12}\frac{x^3}{\left(x^2+4\right)^{3/2}}+c.$$

**Exemplo 1.18**. Calcule

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

**Solução:** Substituindo $x = 2\sec\theta$ temos $dx = 2\sec\theta\,\text{tg}\,\theta\,d\theta$. Logo,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{2\sec\theta\,\text{tg}\,\theta}{2\sec\theta\sqrt{4\sec^2\theta-4}}\,d\theta.$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\text{tg}\,\theta}{\text{tg}\,\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int d\theta = \frac{1}{2}\theta + c.$$

Como $x = 2\sec\theta \Rightarrow \theta = arc\sec\left(\frac{x}{2}\right)$, temos

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{2} arc\sec\left(\frac{x}{2}\right) + c.$$

**Exemplo 1.19.** Calcule

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{8x^2-2}}\,dx.$$

**Solução:** Podemos escrever

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{8x^2-2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{x^2}{\sqrt{4x^2-1}}\,dx.$$

Substituindo $2x = \sec\theta$ temos $dx = \frac{1}{2}\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\, d\theta$. Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{8x^2-2}}\,dx &= \frac{1}{8\sqrt{2}}\int \frac{\sec^2\theta\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}\,d\theta\\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}}\int \frac{\sec^2\theta\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta}{\mathrm{tg}\,\theta}\,d\theta\\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}}\int \sec^3\theta\, d\theta\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16\sqrt{2}}\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta + \frac{1}{16\sqrt{2}}\ln\left|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta\right| + c.$$

(ver Exemplo 1.6).

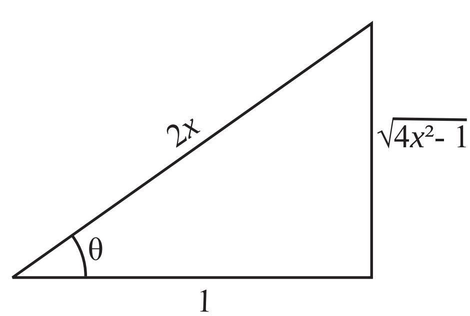



Figura 1.4

Como $\sec\theta = 2x \Rightarrow \mathrm{tg}\,\theta = \sqrt{4x^2-1}$, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{8x^2-2}}\,dx &= \frac{1}{16\sqrt{2}}2x\sqrt{4x^2-1} + \frac{1}{16\sqrt{2}}\ln\left|2x + \sqrt{4x^2-1}\right| + c\\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}}x\sqrt{4x^2-1} + \frac{1}{16\sqrt{2}}\ln\left|2x + \sqrt{4x^2-1}\right| + c.\end{aligned}$$

## Lista de exercícios

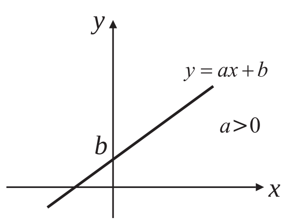
Calcule as seguintes integrais:

1) $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$.  2) $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}dx$.

3) $\int \dfrac{\sqrt{9-4x^2}}{x}dx$.  4) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}}$.

# 1.5 Integração das funções racionais por frações parciais

Você verá no estudo de geometria analítica que a equação $y=ax+b$ é a equação de uma reta, por isso $ax+b$ é chamado de fator linear.



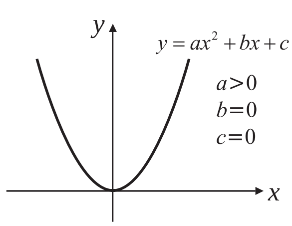

Um polinômio de grau $n$ é uma função da forma

$$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ são constantes e reais com $a_0 \neq 0$ e $n$ é um número inteiro não negativo.

Por exemplo, $4x^3-3x^2+2x-1$ é um polinômio de grau 3. Veja mais exemplos no livro de cálculo I.

$y=ax^2+bx+c$ é a equação de uma parábola e $ax^2+bx+c$ é chamado de fator quadrático por conter termo elevado ao quadrado.




Podemos expressar um polinômio como um produto de fatores lineares reais de forma $ax+b$ e fatores quadráticos reais-irredutíveis da forma $ax^2+bx+c$.

Uma função da forma $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)\neq 0$ são polinômios, é chamada de função racional. Tecnicamente, é possível escrever qualquer expressão $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ como uma soma de expressões racionais cujos denominadores envolvem potências de polinômios de grau não superior a $2$. Especificamente, se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e se o grau de $p(x)$ é inferior ao grau de $q(x)$, então podemos decompor a fração $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ da forma:

O grau de um polinômio é dado pelo seu maior expoente, por exemplo: $p_1(x)=x^5+3x^2$ tem grau 5 e $p_2(x)=5x^2-4$ tem grau 2.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = F_1 + F_2 + \ldots + F_n.$$

Sendo $F_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ da forma

$$\frac{A}{(a\,x + b)^n}\ ,\text{ou}\ \frac{B\,x + C}{(a\,x^2 + b\,x + c)^n}\,,$$

para $A, B$ e $C$ reais e $n$ inteiro positivo. Em que $a\,x^2 + b\,x + c$ é irredutível, no sentido de que a função expressa por este polinômio não assume valores de zero, ou seja, o polinômio tem **soluções complexas**. Para resolver as integrais de funções racionais, devemos adotar os seguintes passos:

Soluções complexas são possíveis resultados não reais de uma equação de grau $\geq 2$.
Por exemplo, a equação $x^2 + 9 = 0$ que tem raízes $x = \pm\sqrt{-9} = \pm 3\sqrt{-1} = \pm 3i$, onde $i$ é denominada unidade imaginária. Veja mais em ÁVILA, Geraldo. **Variáveis complexas** e aplicações. 3.ed Rio de Janeiro: LTC, 2000 ou busque por número complexo na wikipedia.

i) Se o grau de $p(x)$ é inferior ao grau de $q(x)$, escrevemos o polinômio $q(x)$ como produto de fatores lineares $a\,x + b$ e/ou fatores quadráticos irredutíveis da forma $a\,x^2 + b\,x + c$ e agrupamos os fatores repetidos de modo que $q(x)$ seja um produto de fatores da forma $(a\,x + b)^n$ e/ou $(a\,x^2 + b\,x + c)^n$ para $n$ inteiro positivo.

ii) Se o grau de $p(x)$ não é inferior ao grau de $q(x)$, usamos a divisão de polinômios para chegar à soma de um polinômio com uma função racional cujo numerador tem grau menor que o denominador para aplicar o procedimento do caso (i).

Ao fazer a decomposição de uma função racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ em frações simples, devemos sempre supor que $p(x)$ e $q(x)$ sejam primos entre si, isto é, não têm fatores irredutíveis em comum. Supomos também que o grau de $p(x)$ seja menor que o grau de $q(x)$; do contrário, devemos efetuar a divisão de $p(x)$ por $q(x)$, conforme item (ii), obtendo um quociente $Q(x)$ e um resto $r(x)$, de grau menor que o grau de $q(x)$. Então

$$\frac{p(x)}{q(x)} = Q(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

E agora é só lidar com a função $\frac{r(x)}{q(x)}$.

Segundo as orientações do passo (i), resolvemos a equação polinomial $q(x) = 0$ e encontramos as raízes. Analisaremos a seguir, através dos exemplos, cada situação separadamente.

**Caso 1:** Quando $q(x)$ tem raízes *reais* e *distintas*, então podemos escrever

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \ldots + \frac{A_n}{a_nx+b_n},$$

onde as frações são todas distintas e $a_i \neq 0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

**Exemplo 1.20.** Calcule a integral

$$\int \frac{2x+3}{x^2+x-6}\,dx.$$

**Solução:** Fatorando o polinômio $x^2+x-6$, temos

$$x^2+x-6 = (x-2)(x+3).$$

Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{2x+3}{x^2+x-6} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}\\ &= \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}\\ &= \frac{(A+B)x+3A-2B}{(x-2)(x+3)}.\end{aligned}$$

Comparando os numeradores dos dois lados, podemos escrever

$$2x+3 = (A+B)x+3A-2B \cdot$$

A equação acima fornece o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 3A-2B=3 \end{cases}$$

que tem a solução

$$A = \frac{7}{5} \text{ e } B = \frac{3}{5}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{x^2+x-6}\,dx &= \frac{7}{5}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{3}{5}\int \frac{dx}{x+3}\\ &= \frac{7}{5}\ln|x-2| + \frac{3}{5}\ln|x+3| + c.\end{aligned}$$

**Exemplo 1.21.** Determine

$$\int \frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} dx.$$

**Solução:** Temos

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x-1)(x+2).$$

Portanto, podemos escrever

$$\frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2},$$

onde $A$, $B$ e $C$ são constantes. Seguindo os passos do exemplo anterior, o que também já foi visto no pré-cálculo, a equação acima fornece a seguinte solução:

$$A = \frac{1}{2},\ B = -1 \text{ e } C = \frac{3}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x+2} \\ &= \frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x+2| + c.\end{aligned}$$

**Caso 2:** Quando $q(x)$ tem raízes *reais, distintas* ou *repetidas*.

Vamos supor que $n$ é o número de repetições do fator $ax+b$ na fatoração de $q(x)$. Então, neste caso, a decomposição em frações parciais contém uma soma de $n$ frações parciais da forma

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(ax+b)^n},$$

onde $A_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ é um número real. Vamos entender melhor este aspecto utilizando alguns exemplos.

**Exemplo 1.22.** Calcule

$$\int \frac{x^2 - 5x + 7}{(x-2)(x+3)^2} dx.$$

**Solução:** Escrevemos

$$\frac{x^2 - 5x + 7}{(x-2)(x+3)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{A(x+3)^2 + B(x-2)(x+3) + C(x-2)}{(x-2)(x+3)^2}$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (6A+B+C)x + (9A-6B-2C)}{(x-2)(x+3)^2}$$

Comparando os numeradores dos dois lados, podemos escrever

$$x^2 - 5x + 7 = (A+B)x^2 + (6A+B+C)x + (9A-6B-2C)$$

A equação acima fornece o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 6A+B+C=-5 \\ 9A-6B-2C=7 \end{cases},$$

que tem a solução

$$A = \frac{1}{25},\ B = \frac{24}{25} \ \text{ e } \ C = -\frac{31}{5}.$$

Logo,

$$\int \frac{x^2-5x+7}{(x-2)(x+3)^2}dx = \frac{1}{25}\int \frac{1}{x-2}dx + \frac{24}{25}\int \frac{dx}{x+3} - \frac{31}{5}\int \frac{1}{(x+3)^2}dx$$

$$= \frac{1}{25}\ln|x-2| + \frac{24}{25}\ln|x+3| + \frac{31}{5(x+3)} + c.$$

**Exemplo 1.23**. Calcule

$$\int \frac{x^2-2x+3}{x^3+2x^2+x}dx.$$

**Solução:** Escrevemos

$$\frac{x^2-2x+3}{x^3+2x^2+x} = \frac{x^2-2x+3}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{A(x+1)^2 + B\,x(x+1) + C\,x}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A}{x(x+1)^2}.$$

Comparando os numeradores dos dois lados, podemos escrever

$$x^2 - 2x + 3 = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A.$$

A equação acima fornece o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B+C=-2 \\ A=3 \end{cases}$$

que tem a solução:

$$A=3\,,\ B=-2 \text{ e } C=-6.$$

Logo,

$$\int \frac{x^2-2x+3}{x^3+2x^2+x}dx = 3\int\frac{dx}{x} - 2\int\frac{dx}{x+1} - 6\int\frac{dx}{(x+1)^2}$$
$$= 3\ln|x| - 2\ln|x+1| + \frac{6}{x+1} + c.$$

**Caso 3:** Quando $q(x)$ tem raízes *complexas* e/ou *complexas repetidas.*

Análogo ao *caso 2*, se $n$ é o número de repetições do fator irredutível $x^2+bx+c$, então neste caso a decomposição em frações parciais contém uma soma de $n$ frações parciais da forma

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2+bx+c)^n},$$

onde $A_k$ e $B_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$ são número reais, e o fator $x^2+bx+c$ é irredutível, ou seja, tem *raízes complexas*. Vimos acima que as *raízes complexas* nos levam a uma fração parcial da forma:

$$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c} \text{ ou } \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^2}.$$

Vamos analisar a integral

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}dx = \int\frac{Ax}{x^2+bx+c}dx + \int\frac{B}{x^2+bx+c}dx$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+b-b}{x^2+bx+c}dx + B\int \frac{dx}{x^2+bx+c}$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}dx + \left(B-\frac{A}{2}b\right)\int \frac{dx}{x^2+bx+c}$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}dx + \left(B-\frac{A}{2}b\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4}\right)}$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+bx+c\right| + \left(B-\frac{A}{2}b\right)\frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\, arc\ tg\, \frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}} + c.$$

**Exemplo 1.24.** Calcule

$$\int \frac{dx}{x^3+3x}.$$

**Solução:** Temos

$$\frac{1}{x^3+3x} = \frac{1}{x(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$$

$$= \frac{A(x^2+3)+(Bx+C)x}{x(x^2+3)}$$

$$= \frac{(A+B)x^2+Cx+3A}{x(x^2+3)},$$

que fornece o sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ 3A=1 \end{cases}$$

cuja solução é

$$A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3} \quad \text{e} \quad C=0.$$

Logo,

$$\int \frac{dx}{x^3+3x} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{3}\int \frac{x}{x^2+3}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{6}\int \frac{2x}{x^2+3}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2+3\right| + c$$

**Exemplo 1.25**. Calcule

$$\int \frac{dx}{x^3-8}.$$

**Solução:** Sabemos que $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, então podemos escrever

$$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$$

e

$$\frac{1}{x^3-8}=\frac{1}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4},$$ pois $x^2+2x+4$ é irredutível.

O sistema obtido é

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-2B+C=0 \\ 4A-2C=1 \end{cases},$$

que fornece a solução

$$A=\frac{1}{12},\ B=-\frac{1}{12}\ \text{e}\ C=-\frac{1}{3}.$$

Logo,

$$\int \frac{dx}{x^3-8}=\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{-\frac{1}{12}x-\frac{1}{3}}{x^2+2x+4}dx$$

$$=\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{12}\int\frac{x+4}{x^2+2x+4}dx$$

$$=\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{24}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{24}\ln\left|x^2+2x+4\right|-\frac{1}{4\sqrt{3}}arc\ \mathrm{tg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+c.$$

**Exemplo 1.26.** Calcule a integral

$$\int \frac{2x^2-3x+1}{(x^2+2)^2}dx.$$

**Solução:** Escrevemos

$$\frac{2x^2-3x+1}{(x^2+2)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{(Ax+B)(x^2+2)+Cx+D}{(x^2+2)^2}$$

Utilizando o mesmo procedimento dos exemplos anteriores, obtemos

$$A=0\,,\ B=2\,,\ C=-3\,,\ D=-3.$$

Logo,

$$\int\frac{2x^2-3x+1}{(x^2+2)^2}dx=2\int\frac{dx}{x^2+2}+\int\frac{-3x-3}{(x^2+2)^2}dx$$

$$=2\int\frac{dx}{x^2+2}-\frac{3}{2}\int\frac{2x}{(x^2+2)^2}dx-3\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}. \quad (7)$$

Observe na expressão (7) que a primeira e a segunda integrais do segundo membro são imediatas, pois a primeira pode ser obtida diretamente da tabela de integração e a segunda pode ser calculada utilizando a substituição $x^2+2=t$.

Vamos calcular a terceira integral:

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}.$$

Para resolver esta integral utilizamos a substituição que vimos na seção 1.4.

Fazendo $x=\sqrt{2}\,\text{tg}\,\theta$, temos $dx=\sqrt{2}\sec^2\theta\,d\theta$. Então,

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}=\int\frac{\sqrt{2}\sec^2\theta}{2^2\sec^4\theta}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{1}{\sec^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\left[\theta+\frac{1}{2}\text{sen}\,2\theta\right].$$

Agora

$$x = \sqrt{2}\ \text{tg}\,\theta \ \Rightarrow \theta = arc\ \text{tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

e

$$\begin{aligned} \text{sen}\,2\theta &= 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \\ &= 2\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{2\sqrt{2}x}{x^2+2}. \end{aligned}$$

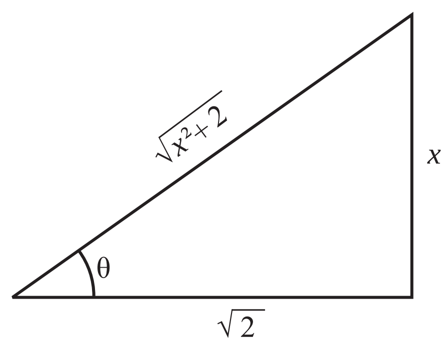



**Figura 1.5**

Logo,

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{8}arc\ \text{tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x}{4(x^2+2)}.$$

Finalmente, escrevendo a integral de cada expressão dada em (7), obtemos

$$\begin{aligned} \int\frac{2x^2-3x+1}{(x^2+2)^2}dx &= 2\int\frac{dx}{x^2+2} - \frac{3}{2}\int\frac{2x}{(x^2+2)^2}dx - 3\int\frac{dx}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}}arc\text{tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{3}{2}\frac{(x^2+2)^{-2+1}}{-2+1} \\ &\quad - 3\left[\frac{\sqrt{2}}{8}arc\ \text{tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x}{4(x^2+2)}\right] + c \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}}arc\text{tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3}{2(x^2+2)} \\ &\quad - \frac{3\sqrt{2}}{8}arc\ \text{tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{3x}{4(x^2+2)} + c \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{8}arc\text{tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3(2-x)}{4(x^2+2)} + c\,\cdot \end{aligned}$$

**Exemplo 1.27**. Calcule

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}.$$

**Solução:** Podemos escrever

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1+1)^2} = \int \frac{dx}{\left[(x+1)^2+1\right]^2}.$$

Substituindo

$$x+1 = \operatorname{tg}\theta, \text{ temos } x = -1+\operatorname{tg}\theta \text{ e } dx = \sec^2\theta\, d\theta,$$

que fornece

$$\begin{aligned} I = \int \frac{\sec^2\theta}{(\operatorname{tg}^2\theta+1)^2}d\theta &= \int \frac{d\theta}{\sec^2\theta} \\ &= \int \cos^2\theta\, d\theta \\ &= \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta \\ &= \left[\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]+c \\ &= \frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}2\operatorname{sen}\theta\cos\theta+c \\ &= \frac{1}{2}arc\operatorname{tg}(x+1)+\frac{x+1}{2(x^2+2x+2)}+c. \end{aligned}$$

## Lista de exercícios

Calcule as seguintes integrais:

1) $\int \frac{dx}{x(x-1)}$.

2) $\int \frac{dx}{x^2-9}$.

3) $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

4) $\int \frac{x^2-5x+1}{x(x-2)}dx$.

5) $\int \frac{x+1}{x^2+4x-5}dx$.

6) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$.

7) $\int \frac{x+1}{x^3+x^2+2x+2}dx$.

8) $\int \frac{2x+1}{2x^2+3x-2}dx$.

9) $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$.

10) $\int \frac{dx}{x^3+2x}$.

## 1.6 Integração de funções racionais de seno e cosseno

Quando temos integrais de funções racionais envolvendo funções trigonométricas de seno e cosseno, ou seja, o integrando tem uma expressão da forma $R(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$, onde $R$ representa função racional, neste caso utilizamos a substituição $z = tg\,\frac{\theta}{2}, \theta \in (-\pi, \pi)$.

Então, temos

$$\theta = 2\,arc\ \text{tg}\ z \ \text{ e } \ d\theta = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

Podemos escrever

$$\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}$$

Agora multiplicando e dividindo por $\cos\frac{\theta}{2}$, obtemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= 2\ \text{tg}\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{2\ \text{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2z}{1+z^2}$$

e

$$\cos\theta = \cos 2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

$$= \frac{2}{\sec^2\frac{\theta}{2}} - 1 = \frac{2}{1+\text{tg}^2\frac{\theta}{2}} - 1$$

$$= \frac{2}{1+z^2} - 1 = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Quando substituirmos $z = \text{tg}\,\frac{\theta}{2}$, teremos

$$d\theta = \frac{2dz}{1+z^2},\ \operatorname{sen}\theta = \frac{2z}{1+z^2} \ \text{ e } \ \cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}. \qquad (8)$$

A seguir apresentaremos alguns exemplos.

**Exemplo 1.28**. Calcule

$$\int \frac{1}{1+\text{sen}\,\theta+\cos\theta}\,d\theta.$$

**Solução:** Utilizando as substituições expressas em (8), obtemos

$$\int \frac{1}{1+\text{sen}\,\theta+\cos\theta}\,d\theta = \int \frac{\dfrac{2}{1+z^2}}{1+\dfrac{2z}{1+z^2}+\dfrac{1-z^2}{1+z^2}}\,dz$$

$$= \int \frac{2}{1+z^2+2z+1-z^2}\,dz$$

$$= \int \frac{1}{1+z}\,dz = \ln|1+z|+c$$

$$= \ln\left|1+\text{tg}\,\frac{\theta}{2}\right|+c.$$

**Exemplo 1.29**. Calcule

$$\int \frac{1-\cos\theta}{1+\text{sen}\,\theta}\,d\theta.$$

**Solução:** Utilizando as substituições expressas em (8), obtemos

$$\int \frac{1-\cos\theta}{1+\text{sen}\,\theta}\,d\theta = \int \frac{1-\dfrac{1-z^2}{1+z^2}}{1+\dfrac{2z}{1+z^2}}\,\frac{2}{1+z^2}\,dz$$

$$= \int \frac{1+z^2-1+z^2}{1+z^2+2z}\,\frac{2}{1+z^2}\,dz$$

$$= \int \frac{4z^2}{(1+z)^2(1+z^2)}\,dz.$$

Para resolver a integral $\int \frac{4z^2}{(1+z)^2(1+z^2)}\,dz$ utilizamos o processo de frações parciais estudado anteriormente. Assim, podemos escrever

$$\frac{4z^2}{(1+z)^2(1+z^2)} = \frac{A}{1+z}+\frac{B}{(1+z)^2}+\frac{Cz+D}{1+z^2}.$$

Resolvendo o sistema de equações resultante da identidade acima, obtemos $A=-2$, $B=2$, $C=2$ e $D=0$. Logo,

$$\int \frac{4z^2}{(1+z)^2(1+z^2)}dz = -\frac{2}{1+z} - 2\ln|1+z| + \ln|1+z^2| + c$$

Como $z = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, obtemos

$$\int \frac{1-\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}d\theta = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} - 2\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right| + \ln\left|1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right| + c\,.$$

**Exemplo 1.30**. Usando a substituição $z = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, demonstre que

$$\int \sec\theta\, d\theta = \ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\right| + c.$$

Mostre que este resultado é equivalente ao

$$\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + c.$$

**Solução:** Utilizando as substituições expressas em (8), obtemos

$$\begin{aligned}
\int \sec\theta\, d\theta &= \int \frac{1}{\cos\theta}d\theta = \int \frac{\frac{2}{1+z^2}}{\frac{1-z^2}{1+z^2}}\,dz \\
&= \int \frac{2}{1-z^2}dz = \int \frac{2}{(1-z)(1+z)}dz \\
&= \int \left[\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}\right]dz = \ln|1+z| - \ln|1-z| + c \\
&= \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + c = \ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\right| + c\,.
\end{aligned}$$

Vamos provar agora a equivalência, ou seja, queremos mostrar que:

$$\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} = \sec\theta + \operatorname{tg}\theta.$$

Podemos escrever

$$\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}=\frac{1+z}{1-z}=\frac{(1+z)(1+z)}{(1-z)(1+z)}$$

$$=\frac{1+2z+z^2}{1-z^2}=\frac{1+z^2}{1-z^2}+\frac{2z}{1-z^2}\,\frac{1+z^2}{1+z^2}$$

$$=\frac{1}{\frac{1-z^2}{1+z^2}}+\frac{\frac{2z}{1+z^2}}{\frac{1-z^2}{1+z^2}}=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \text{(utilizando (8))}$$

$$=\sec\theta+\operatorname{tg}\theta.$$

Logo,

$$\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}=\sec\theta+\operatorname{tg}\theta.$$

Portanto,

$$\int\sec\theta\,d\theta=\ln\left|\sec\theta+tg\;\theta\right|+c=\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\right|+c\,.$$

## Lista de exercícios

Calcule as seguintes integrais:

1) $\int\frac{\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}d\theta\,.$

2) $\int\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}d\theta\,.$

3) $\int\frac{1}{1+\operatorname{sen}\theta}d\theta\,.$

4) $\int\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}d\theta\,.$

## 1.7 Integrais que envolvem expressões do tipo $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Queremos calcular integrais em que o integrando tem uma expressão da forma $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Quando $a=0$, faremos mudança de variável $u=bx+c$, mas quando $a\neq 0$, calcularemos a integral completando quadrado:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c}=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}}\ .$$

Completado o quadrado, utilizamos uma substituição adequada. Veja alguns exemplos a seguir:

**Exemplo 1.31.** Calcule a integral

$$\int\frac{x}{\sqrt{2x^2-2x+1}}dx.$$

**Solução:** Inicialmente, completaremos o quadrado obtendo

$$\begin{aligned}2x^2-2x+1&=2\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+1\\&=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left[(2x-1)^2+1\right].\end{aligned}$$

Agora,

$$\int\frac{x}{\sqrt{2x^2-2x+1}}dx=\sqrt{2}\int\frac{x}{\sqrt{(2x-1)^2+1}}.$$

Substituindo $2x-1=y$, temos $dx=\dfrac{dy}{2}$.

Logo,

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{\sqrt{2x^2-2x+1}}dx&=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{y+1}{\sqrt{y^2+1}}dy\\&=\frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{2y}{\sqrt{y^2+1}}dy+\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}dy\\&=\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{(y^2+1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|y+\sqrt{y^2+1}\right|+c,\end{aligned}$$

onde a primeira integral é obtida fazendo a substituição $y^2+1=t$, e a segunda integral é obtida utilizando a tabela de integração. Assim,

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2-2x+1}}dx$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{y^2+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|y+\sqrt{y^2+1}\right| + c$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{(2x-1)^2+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|(2x-1)+\sqrt{(2x-1)^2+1}\right| + c$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{4x^2-4x+2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|(2x-1)+\sqrt{4x^2-4x+2}\right| + c$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2x^2-2x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|(2x-1)+\sqrt{2}\sqrt{2x^2-2x+1}\right| + c$$

**Exemplo 1.32.** Calcule a integral

$$\int \sqrt{x^2+2x+3}\,dx.$$

**Solução:** Temos

$$\int \sqrt{x^2+2x+3}\,dx = \int \sqrt{\left(x^2+2x+1\right)+2}\,dx$$
$$= \int \sqrt{(x+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\,dx.$$

Substituindo $x+1=\sqrt{2}\operatorname{tg}\theta$, temos $dx=\sqrt{2}\sec^2\theta\,d\theta$. Logo,

$$\int \sqrt{x^2+2x+3}\,dx = \sqrt{2}\int \sqrt{2\operatorname{tg}^2\theta+2}\,\sec^2\theta\,d\theta$$
$$= 2\int \sec\theta\sec^2\theta\,d\theta$$
$$= 2\int \sec^3\theta\,d\theta$$
$$= \sec\theta\operatorname{tg}\theta + \ln\left|\sec\theta+\operatorname{tg}\theta\right| + c \quad \text{(ver Exemplo 1.6)}$$
$$= \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{\sqrt{2}}+\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right| + c$$
$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+3} +$$
$$+\ln\left|\frac{(x+1)+\sqrt{x^2+2x+3}}{\sqrt{2}}\right| + c.$$

## Lista de exercícios

Calcule as seguintes integrais:

1) $\int \sqrt{2x^2 - 2x + 1}\, dx$.

2) $\int \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2x+1} dx$.

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x - 3}}$.

4) $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2 + 4x + 9}}$.

# 1.8 Integrais impróprias

Sabemos que toda função contínua num intervalo fechado é integrável nesse intervalo. Ou seja: se $f$ é uma função contínua em $[a,b]$ então existe $\int_a^b f(x)dx$. Quando $f$ não está definida num dos extremos do intervalo $[a,b]$, digamos no extremo $a$, mas existe $\int_t^b f(x)dx$ para todo $t \in (a,b)$, podemos definir $\int_a^b f(x)dx$ como sendo o limite $\lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx$ quando este limite existir. Para os outros casos a situação é análoga. Assim, esse tipo de integrais são conhecidas como *integrais impróprias*. A seguir apresentaremos a definição e o procedimento para calcular integrais impróprias. Analisaremos cada caso separadamente.

i) Dado $f:(a,b] \to \mathbb{R}$, se existe $\int_t^b f(x)dx$ para todo $t \in (a,b)$, definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx, \quad a < t < b,$$

quando este limite existe. Caso não exista, diremos que a integral $\int_a^b f(x)dx$ não existe ou não converge.

Graficamente,

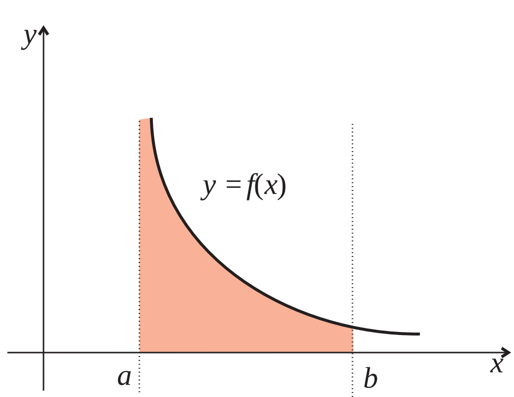



Figura 1.6

ii) Dado $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, se existe $\int_a^t f(x)dx$ para todo $t\in(a,b)$, definimos

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx\,,\quad a<t<b$$

quando este limite existir. Caso não exista, diremos que $\int_a^b f(x)dx$ não existe ou não converge.

Graficamente,

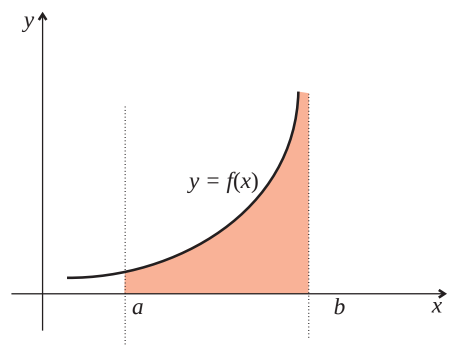



Figura 1.7

iii) Dado $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, escrevemos

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\,,\quad a<c<b$$

quando as duas integrais do 2º membro existem.

As integrais do segundo membro foram definidas em (i) e (ii), respectivamente.

iv) Quando $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é descontínua em algum $c\in(a,b)$, então escrevemos

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\,,\quad a<c<b$$

sempre que as integrais do 2º membro existam.

As integrais do segundo membro foram definidas em (ii) e (i), respectivamente.

v) Dada $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$, se existir $\int_t^b f(x)dx$ para todo $t\in(-\infty,b)$, definimos

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{b} f(x)dx\,, \quad -\infty < t < b$$

quando este limite existir. Se não existir, diremos que a integral $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ não existe ou não converge.

vi) Dada $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$, se existir $\int_{a}^{t} f(x)dx$ para todo $t\in[a,\infty)$, definimos

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_{a}^{t} f(x)dx\,, \quad a < t < \infty\,,$$

quando este limite existir. Se não existir, diremos que a integral $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ não existe ou não converge.

vii) Dada $f:(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}$, escrevemos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx\,, \quad -\infty < c < \infty$$

quando as duas integrais do 2º membro existirem.

As integrais do segundo membro foram definidas em v) e vi), respectivamente.

Quando uma integral imprópria existe, ou seja, o limite envolvido tem valor finito, dizemos que ela é *convergente* caso contrário, ela é *divergente*.

A seguir apresentaremos alguns exemplos.

**Exemplo 1.33.** Calcule, se existir,

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**Solução:** Observemos que a função $f(x)=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ não está definida no ponto $x=1$. Neste caso, calculamos o limite

$$\begin{aligned}\lim_{t\to1^-}\int_{0}^{t}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{t\to1^-} arc\ \text{sen}\ x\Big|_0^t \qquad\qquad (0<t<1)\\ &= \lim_{t\to1^-}\left(arc\ \text{sen}\ t - arc\ \text{sen}\ 0\right)\\ &= \lim_{t\to1^-} arc\ \text{sen}\ t = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Portanto, a integral converge e temos

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

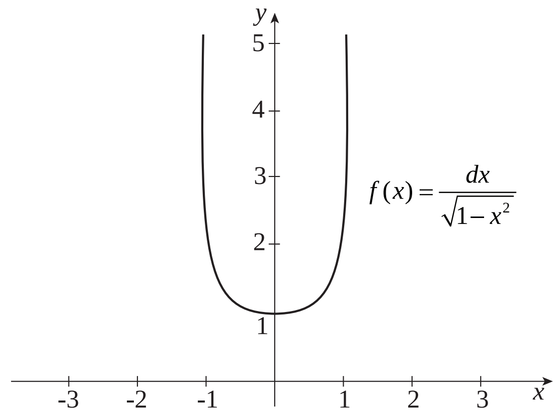



Figura 1.8

**Exemplo 1.34.** Calcule, se existir,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2}.$$

**Solução:** Observemos que a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ não está definida no ponto $x = 0$. Neste caso, calculamos o limite

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} \int_t^o \frac{dx}{x^2} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-1} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{t}\right) \\ &= \infty.\end{aligned}$$

Portanto, a integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ diverge ou não existe.

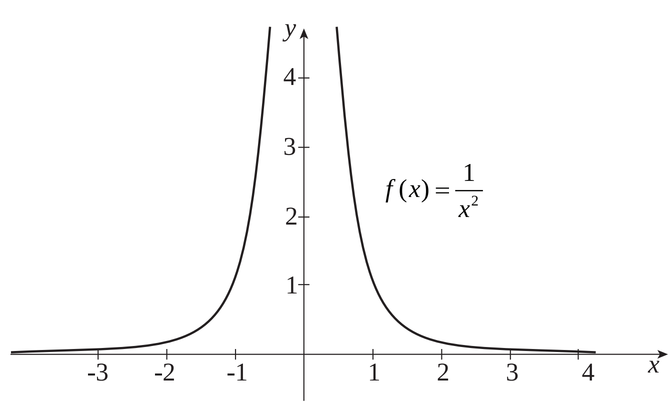



Figura 1.9

**Exemplo 1.35** Calcule, se existir,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,dx.$$

**Solução:** Observemos que $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}$ não está definida em $x=\dfrac{\pi}{2}$. Assim, calculamos o limite

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\int_0^t \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,dx = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\operatorname{sen} x)^{-1/2}\cos x\,dx$$

$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\left[\left.-\frac{(1-\operatorname{sen} x)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right|_0^t\right]$$

$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\left(-2\sqrt{1-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}+2\right)=2$$

Logo, a integral converge, e temos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,dx=2.$$

É importante sempre buscar a visualização do gráfico da função. Você pode acessar o endereço *http://fooplot.com* para plotar seus gráficos em 2D. Por exemplo, a função $y(x)=\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}}$ é escrita da seguinte forma: y=(cos(x))/(sqrt(1-sin(x))).

**Exemplo 1.36.** Determine, se existir,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx.$$

**Solução:** Observemos que $f(x)=\operatorname{tg} x$ não está definida em $x=\dfrac{\pi}{2}$ e tampouco em $x=-\dfrac{\pi}{2}$. Assim,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx=\int_{-\pi/2}^{0} \operatorname{tg} x\,dx+\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx,$$

se as integrais do segundo membro convergirem.

Temos

$$\lim_{t\to-\pi/2}\int_t^0 \operatorname{tg} x\,dx+\lim_{t\to\pi/2}\int_0^t \operatorname{tg} x\,dx$$

$$=\lim_{t\to-\pi/2}\left(-\ln|\cos x|\Big|_t^0\right)+\lim_{t\to\pi/2}\left(-\ln|\cos x|\Big|_0^t\right)$$

$$=\lim_{t\to-\pi/2}\left(-\ln 1+\ln|\cos t|\right)+\lim_{t\to\pi/2}\left(-\ln|\cos t|+\ln 1\right)$$

Observamos que calculando o primeiro limite obtemos o resultado

$\infty$, logo podemos concluir que a integral proposta não existe, ou seja, a integral é divergente.

**Exemplo 1.37.** Determine, se existir,

$$\int_0^4 \frac{dx}{x-2}.$$

**Solução:** Observemos que $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ não está contínua em $x=2$. Assim,

$$\int_0^4 \frac{dx}{x-2} = \int_0^2 \frac{dx}{x-2} + \int_2^4 \frac{dx}{x-2},$$

se as integrais do segundo membro convergirem.

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 2^-}\int_0^t \frac{dx}{x-2} + \lim_{t\to 2^+}\int_t^4 \frac{dx}{x-2} \\
&= \lim_{t\to 2^-} \ln|x-2|\Big|_0^t + \lim_{t\to 2^+} \ln|x-2|\Big|_t^4 \\
&= \lim_{t\to 2^-}\left(\ln|t-2| - \ln|-2|\right) + \lim_{t\to 2^+}\left(\ln|2| - \ln|t-2|\right).
\end{aligned}$$

Observamos que, calculando o primeiro limite, obtemos o resultado $\infty$. Logo, podemos concluir que a integral proposta não existe, ou seja, a integral é divergente.

**Exemplo 1.38.** Determine, se existir,

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx.$$

**Solução:** Calculamos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^x dx &= \lim_{t\to-\infty} e^x\Big|_t^0 \qquad\qquad (-\infty < t < 0) \\
&= \lim_{t\to-\infty}\left(1-e^t\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Logo, a integral converge, e temos

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = 1\cdot$$

**Exemplo 1.39.** Determine, se existir,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

**Solução:** Calculamos

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to\infty} \left.\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_1^t = \lim_{t\to\infty} \left.\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right|_1^t \qquad (1<t<\infty)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(2\sqrt{t}-2\right) = \infty .$$

Portanto, a integral diverge.

**Exemplo 1.40.** Calcule, se existir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

**Solução:** Escrevemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

e calculamos os limites:

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} arc\ \text{tg}\ x\Big|_t^0 + \lim_{t\to\infty} arc\ \text{tg}\ x\Big|_0^t$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Portanto, a integral converge e temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi .$$

## Lista de exercícios

Calcule, se existirem, as seguintes integrais impróprias. Indique se converge ou diverge:

1) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$.

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^2 \frac{2dx}{x^2+4}$.

4) $\displaystyle\int_{-1}^4 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$.

# 1.9 Tabela – derivadas, integrais e identidades trigonométricas

A seguir, apresentaremos tabela de derivadas, integrais e identidades trigonométricas.

- Derivadas

Sejam $u$ e $v$ funções deriváveis de $x$, e $n$ constante.

1) $y = u^n \quad \Rightarrow y' = n u^{n-1} u'$.

2) $y = u\,v \quad \Rightarrow y' = u'v + v'u$.

3) $y = \dfrac{u}{v} \quad \Rightarrow y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

4) $y = a^u \quad \Rightarrow y' = a^u (\ln a)\, u', \quad (a > 0,\ a \neq 1)$.

5) $y = e^u \quad \Rightarrow y' = e^u u'$.

6) $y = \log_a u \quad \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u} \log_a e$.

7) $y = \ln u \quad \Rightarrow y' = \dfrac{1}{u} u'$.

8) $y = u^v \quad \Rightarrow y' = v\, u^{v-1}\, u' + u^v (\ln u)\, v'$.

9) $y = \text{sen}\, u \quad \Rightarrow y' = u' \cos u$.

10) $y = \cos u \quad \Rightarrow y' = -u' \,\text{sen}\, u$.

11) $y = \text{tg}\, u \quad \Rightarrow y' = u' \sec^2 u$.

12) $y = \text{cotg}\, u \quad \Rightarrow y' = -u' \,\text{cosec}^2 u$.

13) $y = \sec u \quad \Rightarrow y' = u' \sec u \,\text{tg}\, u$.

14) $y = \text{cosec}\, u \quad \Rightarrow y' = -u' \,\text{cosec}\, u \,\text{cotg}\, u$.

15) $y = arc\,\text{sen}\, u \quad \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

16) $y = arc \cos u \qquad \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

17) $y = arc \operatorname{tg} u \qquad \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

18) $y = arc \cot g\, u \qquad \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$.

19) $y = arc \sec u, |u| \geq 1 \qquad \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$.

20) $y = arc \operatorname{cosec} u, |u| \geq 1 \qquad \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$.

- Identidades trigonométricas

1) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

2) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$.

3) $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$.

4) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

5) $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

6) $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

7) $2 \operatorname{sen} x \cos y = \operatorname{sen}(x-y) + sen(x+y)$.

8) $2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$.

9) $2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$.

10) $1 \pm \operatorname{sen} x = 1 \pm \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

- Integrais

1) $\int du = u + c$.

2) $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$.

3) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$ .

4) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c, \quad a > 0, \quad a \neq 1$ .

5) $\int e^u du = e^u + c$ .

6) $\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + c$ .

7) $\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + c$ .

8) $\int \operatorname{tg} u \, du = \ln|\sec u| + c$ .

9) $\int \operatorname{cotg} u \, du = \ln|\operatorname{sen} u| + c$ .

10) $\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + c$ .

11) $\int \operatorname{cosec} u \, du = \ln|\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u| + c$ .

12) $\int \sec u \operatorname{tg} u \, du = \sec u + c$ .

13) $\int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u \, du = -\operatorname{cosec} u + c$ .

14) $\int \sec^2 u \, du = \operatorname{tg} u + c$ .

15) $\int \operatorname{cosec}^2 u \, du = -\operatorname{cotg} u + c$ .

16) $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arc \operatorname{tg} \frac{u}{a} + c$ .

17) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c, \quad u^2 > a^2$ .

18) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + c$ .

19) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + c$ .

20) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arc \operatorname{sen} \frac{u}{a} + c, \quad u^2 < a^2$ .

21) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} arc \sec \left| \frac{u}{a} \right| + c \cdot$

- Fórmulas de recorrências

22) $\int \text{sen}^n au\, du = -\dfrac{\text{sen}^{n-1} au \cos au}{an} + \left(\dfrac{n-1}{n}\right) \int \text{sen}^{n-2} au\, du$ .

23) $\int \cos^n au\, du = \dfrac{\text{sen}\, au \cos^{n-1} au}{an} + \left(\dfrac{n-1}{n}\right) \int \cos^{n-2} au\, du$ .

24) $\int \text{tg}^n au\, du = \dfrac{tg^{n-1} au}{a(n-1)} - \int \text{tg}^{n-2} au\, du$ .

25) $\int \text{cotg}^n au\, du = -\dfrac{\text{cotg}^{n-1} au}{a(n-1)} - \int \text{cotg}^{n-2} au\, du$

26) $\int \sec^n au\, du = \dfrac{\sec^{n-2} au\, tg\, au}{a(n-1)} + \left(\dfrac{n-2}{n-1}\right) \int \sec^{n-2} au\, du$ .

27) $\int \text{cosec}^n au\, du = -\dfrac{\text{cosec}^{n-2} au\, \text{cotg}\, au}{a(n-1)} + \left(\dfrac{n-2}{n-1}\right) \int \text{cosec}^{n-2} au\, du$ .

# Resumo

Neste capítulo apresentamos várias técnicas de integração. Sabendo da familiarização do aluno com cálculo de integrais por substituição, estudado no Cálculo 1, iniciamos nosso estudo com integração por partes. Em seguida, apresentamos as técnicas de frações parciais, ilustrando várias situações diferentes. Ensinamos como calcular integrais envolvendo funções trigonométricas. Consideramos situações diferentes de funções trigonométricas, ou seja, resolvemos algumas integrais com substituições trigonométricas e outras com funções racionais trigonométricas. No final, apresentamos as integrais impróprias. Demos vários exemplos para ilustrar os assuntos apresentados e, no final de cada seção, fornecemos uma pequena lista de exercícios. Para facilitar, apresentamos no final deste capítulo uma tabela com derivadas, integrais e identidades trigonométricas usadas freqüentemente. A seguir, apresentamos as respostas dos exercícios propostos.

# Respostas

- Seção 1.1

1) $x e^x + c$ .

2) $\frac{2}{3} x \sqrt{(x+1)^3} - \frac{4}{15} \sqrt{(x+1)^5} + c$ .

3) $-x^2 \cos x + 2 \cos x + 2 x \operatorname{sen} x + c$ .

4) $\frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + \frac{3}{4} x e^{2x} - \frac{3}{8} e^{2x} + c$ .

5) $x \operatorname{sen} x + \cos x + c$ .

6) $-\frac{2}{3} x^2 (1-x)^{3/2} - \frac{8}{15} x(1-x)^{5/2} - \frac{16}{105} (1-x)^{7/2} + c$ .

- Seção 1.2

1) $\frac{1}{2}\left( x - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} \right) + c$ .

2) $\frac{1}{32}\left( 4x - \frac{\operatorname{sen}(8x)}{2} \right) + c$ .

3) $\frac{1}{48}\left( 15x - 4\operatorname{sen}(6x) + \frac{3\operatorname{sen}(12x)}{4} + \frac{\operatorname{sen}^3(6x)}{3} \right) + c$ .

4) $\frac{1}{4} \operatorname{sen}^4 x + c$ .

5) $\sec x + c$ .

6) $\frac{1}{4}\left( \frac{\operatorname{sen}^5(4x)}{5} - \frac{2\operatorname{sen}^3(4x)}{3} + \operatorname{sen}(4x) \right) + c$ .

- Seção 1.3

1) $-\frac{\operatorname{sen}^3(2x) \cdot \cos(2x)}{8} - \frac{3}{16} \operatorname{sen}(2x) \cdot \cos(2x) + \frac{3}{8} x + c$ .

2) $-\frac{1}{5} \operatorname{sen}^4 x \cos x - \frac{4}{15} \operatorname{sen}^2 x \cos x - \frac{8}{15} \cos x + c$ .

3) $\frac{1}{6}\cos^5 x \text{ sen } x + \frac{5}{24}\cos^3 x \text{ sen } x + \frac{5}{16}\cos x \text{ sen } x + \frac{5x}{16} + c$ .

4) $\frac{1}{9}\cos^2 3x \text{ sen } 3x + \frac{2}{9}\text{sen } 3x + c$ .

5) $\frac{1}{25}\text{tg}^5 5x - \frac{1}{15}\text{tg}^3 5x + \frac{1}{5}\text{tg}\, 5x - x + c$ .

6) Que é equivalente a

$$\frac{1}{24}\sec^5(4x)\cdot \text{tg}(4x) + \frac{5}{96}\sec^3(4x)\cdot \text{tg}(4x) + \frac{5}{64}\sec(4x)\cdot \text{tg}(4x)$$
$$+\frac{5}{64}\ln\left|\sec(4x) + \text{tg}(4x)\right| + c$$

- Seção 1.4

1) $-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + c$ .

2) $\frac{x\sqrt{x^2-4}}{2} + 2\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right| + c$ .

3) $\sqrt{9-4x^2} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{2x}\right| + c$ .

4) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+4x^2}-3}{2x}\right| + c$ .

- Seção 1.5

1) $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + c$ .

2) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + c$ .

3) $\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c$ .

4) $x - \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{5}{2}\ln|x-2| + c$ .

5) $\frac{2}{3}\ln|x+5| + \frac{1}{3}\ln|-1+x| + c$ .

6) $\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + \frac{1}{x+2} + c$.

7) $\frac{1}{2}\sqrt{2}\, arc\,\mathrm{tg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right) + c$.

8) $\frac{3}{5}\ln|x+2| + \frac{2}{5}\ln|2x-1| + c$.

9) $\frac{1}{x} + \ln\left|\frac{1-x}{x}\right| + c$.

10) $\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x^2+2| + c$.

- Seção 1.6

1) $-\theta - \dfrac{2}{\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1} + c$.

2) $-\ln\left|\mathrm{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 1\right| + 2\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| - \dfrac{1}{\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)} + c$.

3) $-\dfrac{2}{\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1} + c$.

4) $-\,\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \theta + c$.

- Seção 1.7

1) $\frac{1}{2\sqrt{2}}(2x-1)\sqrt{(2x-1)^2+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|(2x-1) + \sqrt{(2x-1)^2+1}\right| + c$.

2) $\frac{1}{4}\left[\sqrt{(2x+1)^2-1} - \mathrm{arc\,sec}(2x+1)\right]$.

3) $\ln\left|\frac{1}{2} + x + \sqrt{x^2+x-3}\right| + c$.

4) $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+4x+9} - \sqrt{5}}{x+2}\right| + c$.

- Seção 1.8

1) Diverge.

2) Diverge.

3) $\dfrac{3\pi}{4}$.

4) 6.

# Capítulo 2

## Aplicações da Integral

# Capítulo 2

## Aplicações da Integral

*No capítulo anterior, apresentamos algumas técnicas de cálculo da integral. No Cálculo 1, estudamos aplicações da integral definida em cálculo da área de uma região plana e limitada. Neste capítulo, estudaremos aplicações da integral definida em cálculo de volume do sólido de revolução e comprimento de arco de uma curva utilizando o sistema de coordenadas cartesianas. Introduziremos a noção de coordenadas polares e aplicaremos esta noção para calcular o comprimento do arco de uma curva e a área de uma região plana e limitada.*

## 2.1 Volume de sólido de revolução

O volume de um sólido desempenha um papel importante em muitos problemas nas ciências físicas, tais como: determinação de *centro de massa* e determinação de *momento de inércia*. Como é difícil determinar o volume de um sólido de forma irregular, começaremos com objetos que apresentam formas simples. Incluídos nesta categoria estão os sólidos de revolução estudados a seguir.

Um sólido de revolução é gerado pela rotação de uma região do plano, em torno de uma reta chamada *eixo de revolução*, contida no plano.

Seja $S$ o sólido gerado pela rotação da região do plano limitada por $y = f(x)$, o eixo $x$, $x = a$ e $x = b$ em torno do eixo $x$. Então o volume $V$ deste sólido é dado por

$$V = \pi \int_a^b \left( f(x) \right)^2 dx.$$

Podemos provar a fórmula acima utilizando argumentos semelhantes aos usados para calcular a área de uma região plana e limitada, mas daremos apenas uma noção intuitiva de onde pode vir essa fórmula.

O volume de um cilindro é dado por $V = \pi R^2 h$, onde $h$ é a altura. Se considerarmos o volume de um cilindro com uma altura infinitesimal, teremos $\frac{dV}{dh} = \pi R^2$, ou seja, $dV = \pi R^2 dh$. Obteremos o volume de um cilindro de altura $\overline{ab}$ calculando a integral $\int_a^b dV = \int_a^b \pi R^2 dh = \pi R^2 h\Big|_a^b$. O cálculo do volume de um sólido de revolução pode ser considerado como uma generalização dessa fórmula. Se compararmos a expressão acima com a figura 2.1, então podemos dizer que $h = x$ e $R = f(x)$, perceba que na figura não temos um raio constante, mas sim que varia com $x$. Para saber o volume de um sólido de revolução considerando uma variação pequena ao longo do eixo $x$, conforme as considerações feitas acima, teremos $dV = \pi(f(x))^2 dx$. Assim, para saber o volume de um sólido de revolução considerando um $x$ que vai de um ponto $a$ até um ponto $b$ obtemos a integral $\int_a^b dV = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$.

Graficamente,

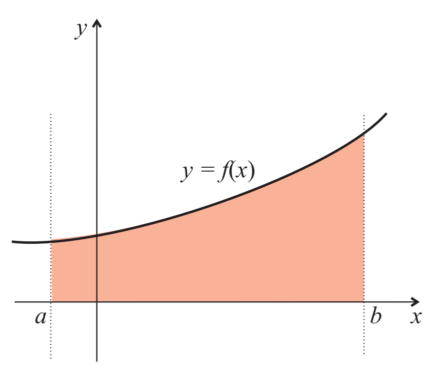



Figura 2.1

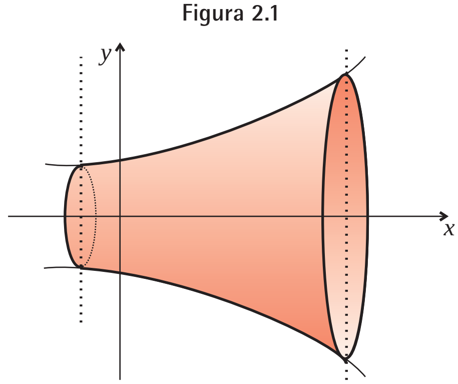



Figura 2.2

Analogamente, quando *o eixo de revolução* é o eixo $y$ e a fronteira da região plana é dada pela curva $x = g(y)$ e o eixo $y$ entre $y = c$

e $y = d$, então o volume $V$ do sólido de revolução é dado por

$$V = \pi \int_c^d \left(g\left(y\right)\right)^2 dy.$$

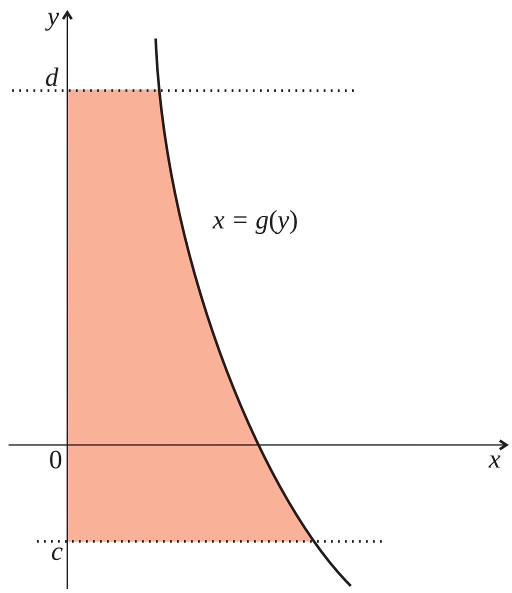



Figura 2.3

Sejam $f\left(x\right)$ e $g\left(x\right)$ funções contínuas no intervalo $\left[a,b\right]$, e suponhamos que $f\left(x\right) \geq g\left(x\right) \geq 0$ para todo $x \in \left[a,b\right]$. Então o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo $x$, da região limitada pelas curvas $y = f\left(x\right)$ e $y = g\left(x\right)$ e as retas $x = a$ e $x = b$ é dado por

$$V = \pi \int_a^b \left[\left(f\left(x\right)\right)^2 - \left(g\left(x\right)\right)^2\right] dx.$$

Graficamente,

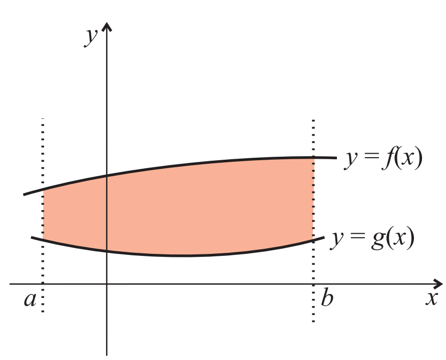



Figura 2.4

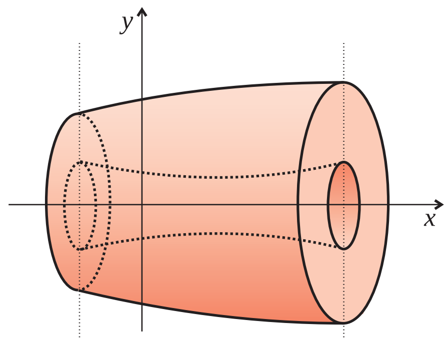



Figura 2.5

Não é necessário que os eixos de rotação sempre sejam os eixos dos $x$ ou dos $y$. Podemos calcular o volume considerando retas paralelas ao eixo $x$ ou eixo $y$ como eixo de rotação. Neste caso, as fórmulas de cálculo de volume são dadas por

$$V = \pi \int_a^b \left[ f(x) - L \right]^2 dx,$$

quando rotacionarmos a região plana limitada pela curva $y = f(x)$, a reta $y = L$ e as retas $x = a$ e $x = b$ em torno do eixo $y = L$.

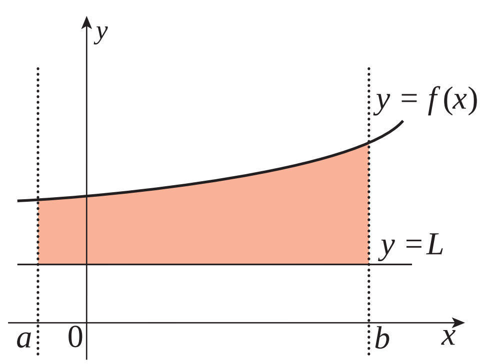



Figura 2.6

O volume é dado por

$$V = \pi \int_c^d \left[ g(y) - M \right]^2 \, dy,$$

quando rotacionarmos a região plana limitada por $x = g(x)$, a reta $x = M$ e as retas $y = c$ e $y = d$ em torno do eixo $x = M$.

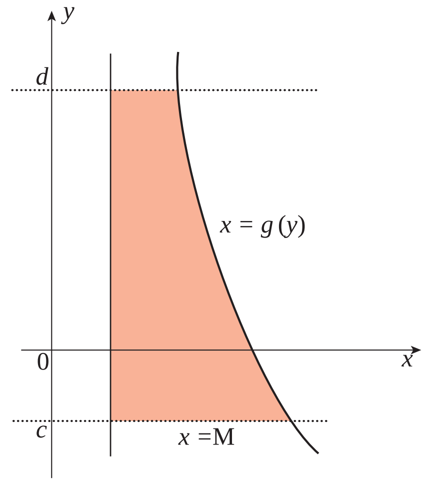



Figura 2.7

A seguir, apresentaremos exemplos de cálculo de volume de sólidos de revolução considerando diversas situações.

**Exemplo 2.1.** A região limitada pela curva $y = x^2$, o eixo $x$ e as retas $x = 1$ e $x = 2$ sofrem uma rotação em torno do eixo $x$. Encontre o volume do sólido de revolução gerado.

**Solução:** Temos

$$V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx = \pi\int_1^2 \left(x^2\right)^2 dx$$

$$= \pi \frac{x^5}{5}\bigg|_1^2 = \frac{\pi}{5}(32-1)$$

$$= \frac{31}{5}\pi \text{ unidades de volume (u.v.).}$$

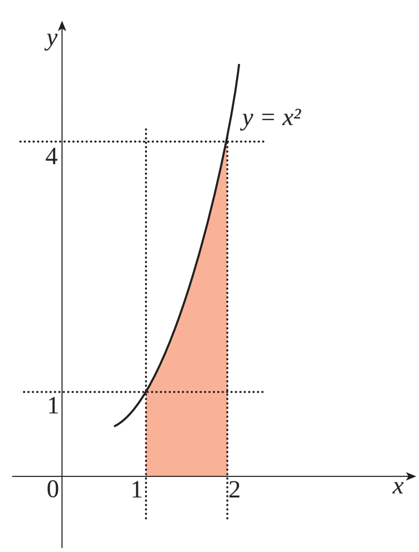



Figura 2.8

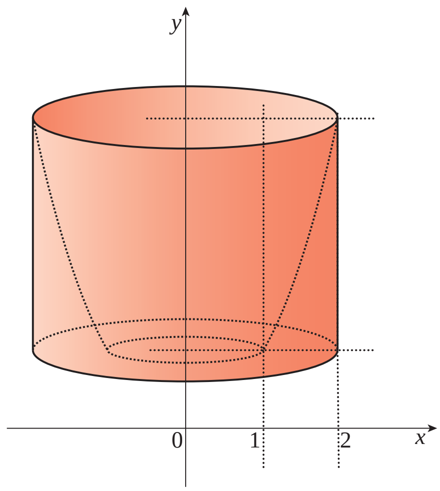



Figura 2.9

**Exemplo 2.2.** Calcule o volume do sólido que se obtém por rotação da região limitada por $y = x^3$, $y = 0$ e $x = 1$ em torno do eixo $y$ e da reta $y = 1$.

**Solução:** Inicialmente, construímos o gráfico das curvas dadas.

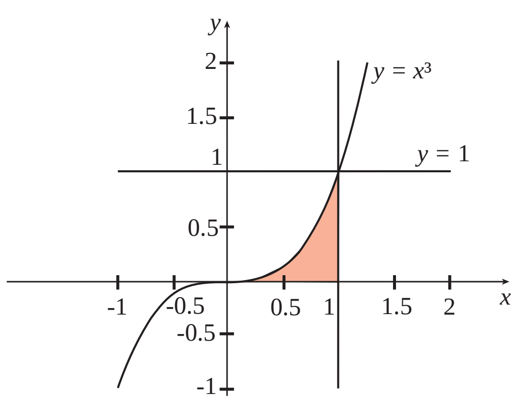



Figura 2.10

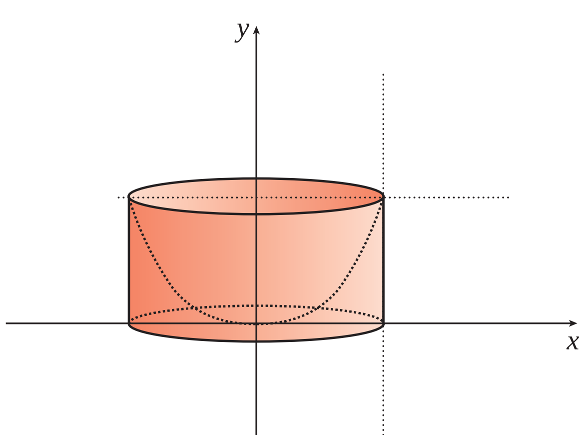



Figura 2.11

De $y = x^3$ temos $x = y^{1/3}$. Logo, o volume do sólido obtido pela revolução em torno do eixo $y$ é dado por

$$V = \pi\int_c^d \left(g\left(y\right)\right)^2 dy = \pi\int_0^1 y^{2/3} dy$$

$$= \frac{3\pi}{5} y^{5/3}\Big|_0^1 = \frac{3\pi}{5} \ u.v.$$

O volume do sólido obtido pela revolução em torno da reta $y = 1$ é dado por

$$V = \pi\int_a^b \left(f(x) - L\right)^2 dx = \pi\int_0^1 (x^3 - 1)^2 dx$$

$$= \pi\int_0^1 (x^6 - 2x^3 + 1)dx$$

$$= \pi\left(\frac{x^7}{7} - 2\frac{x^4}{4} + x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{9\pi}{14} \ u.v.$$

**Exemplo 2.3.** Calcule o volume do sólido que se obtém por rotação da região limitada por $x^2 = y - 2$, $2y - x - 2 = 0$, $x = 0$ e $x = 1$.

a) Em torno do eixo $x$;

b) Em torno do eixo $y = 3$.

**Solução:** Veja a Figura a seguir representando a região:

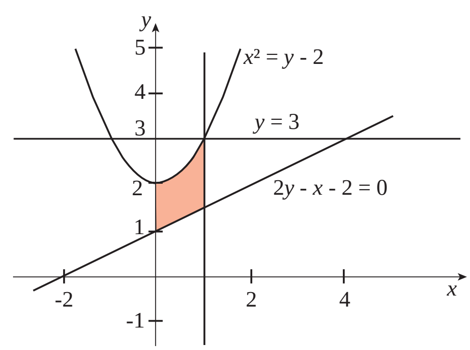



Figura 2.12

a) Volume do sólido em torno do eixo $x$. Neste caso, temos

$$V = \pi\int_a^b \left[\left(f\left(x\right)\right)^2 - \left(g\left(x\right)\right)^2\right]dx$$

$$= \pi\int_0^1 \left[\left(x^2 + 2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2\right]dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left( x^4 + \frac{15}{4} x^2 - x + 3 \right) dx$$

$$= \frac{79\pi}{20} \ u.v.$$

b) Volume do sólido em torno da reta $y = 3$. Neste caso, a reta $2y - x - 2 = 0$ é "maior" que a curva $x^2 = y - 2$ em relação ao eixo da rotação $y = 3$, conforme pode ser observado na figura 2.12.Portanto,

$$V = \pi \int_0^1 \left[ \left( 3 - \left( \frac{1}{2} x + 1 \right) \right)^2 - \left( 3 - (x^2 + 2) \right)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left[ \left( 2 - \frac{x}{2} \right)^2 - \left( 1 - x^2 \right)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left( -x^4 + \frac{9}{4} x^2 - 2x + 3 \right) dx$$

$$= \pi \left[ -\frac{x^5}{5} + \frac{9x^3}{4.3} - \frac{2x^2}{2} + 3x \right]_0^1$$

$$= \pi \left[ -\frac{1}{5} + \frac{3}{4} - 1 + 3 \right] = \frac{51\pi}{20} \ u.v.$$

**Exemplo 2.4**. Encontre o volume do sólido gerado pela rotação em torno da reta $x = -3$ da região limitada pelas duas parábolas $x = y - y^2$ e $x = y^2 - 3$.

**Solução:** Determinamos inicialmente as interseções das curvas dadas.

$$y - y^2 = y^2 - 3 \Rightarrow 2y^2 - y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{2} \text{ ou } y = -1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{4} \text{ ou } x = -2.$$

Logo, os pontos de interseção das duas curvas são $\left( -\frac{3}{4}, \frac{3}{2} \right)$ e $(-2, -1)$.

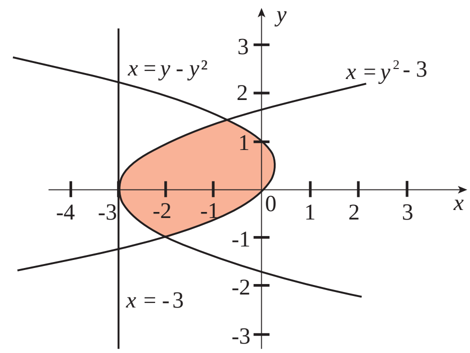



Figura 2.13

Aplicando a fórmula, obtemos

$$V = \pi\int_{-1}^{3/2}\left[\left(y - y^2 + 3\right)^2 - \left(y^2 - 3 + 3\right)^2\right]dy$$

$$= \pi\int_{-1}^{3/2}\left[\left(y - y^2 + 3\right)^2 - y^4\right]dy$$

$$= \pi\int_{-1}^{3/2}\left[-2y^3 - 5y^2 + 6y + 9\right]dy$$

$$= \pi\left[-\frac{y^4}{2} - \frac{5}{3}y^3 + 3y^2 + 9y\right]\Bigg|_{-1}^{3/2}$$

$$= \pi\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{81}{16}\right) - \frac{5}{3}\left(\frac{27}{8}\right) + 3\left(\frac{9}{4}\right) + 9\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$-\pi\left[-\frac{1}{2} + \frac{5}{3} + 3 - 9\right]$$

$$= \pi\left[-\frac{81}{32} - \frac{45}{8} + \frac{27}{4} + \frac{27}{2} - \frac{7}{6} + 6\right]$$

$$= \frac{1625\pi}{96} \quad u.v.$$

**Exemplo 2.5.** Calcule o volume gerado pela rotação da região limitada pela parábola $y = 4x - x^2$, as retas $y = 5$, $x = 0$ e $x = 4$ em torno da reta $y = 5$.

**Solução:** Conforme a Figura 2.12, $5 \geq 4x - x^2$.

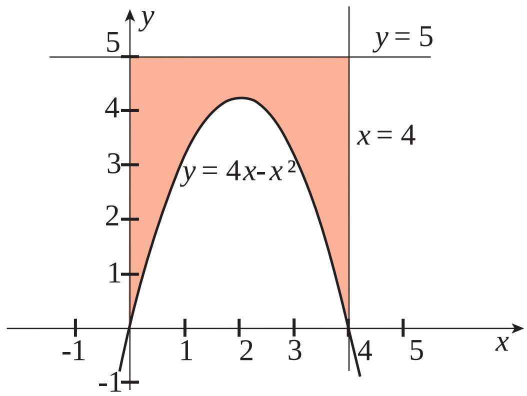



Figura 2.14

Logo,

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^4 \left(5-\left(4x-x^2\right)\right)^2 dx \\
&= \pi\int_0^4 \left[25+\left(4x-x^2\right)^2-10\left(4x-x^2\right)\right]dx \\
&= \pi\int_0^4 \left(x^4-8x^3+16x^2-40x+25\right)dx \\
&= \pi\left[\frac{x^5}{5}-2x^4+\frac{16}{3}x^3-20x^2+25x\right]\Bigg|_0^4 \\
&= \pi\left[\frac{1024}{5}-512+\frac{1664}{3}-320+100\right] \\
&= \frac{412}{15}\pi \text{ u.v.}
\end{aligned}
$$

## 2.1.1 Área de uma superfície de revolução

Observamos na seção anterior que, quando giramos uma região plana limitada por um eixo ou uma reta fixa, obtemos um *sólido de revolução*, mas também obtemos uma *superfície de revolução*. Podemos, então, calcular a *área desta superfície*.

Seja $y = f(x)$ equação da uma curva, onde $f$ e $f'$ são funções contínuas em $[a,b]$ e $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$. Á área de superfície de revolução $S$, gerada pela rotação da curva $y = f(x)$ ao redor do eixo $x$ (veja Figuras 2.1 e 2.2), é definida por

$$A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx\,.$$

Vamos considerar agora uma curva $x = g(y)$, $g(y) \geq 0$, $\forall y \in [c,d]$ em vez de $y = f(x)$. Se giramos esta curva em torno do eixo $y$

Veja como se obtém essas fórmulas no livro: GONÇALVES, Mirian Buss; FLEMMING, Diva Marília. **Calculo B:** funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície. 2. ed. rev. e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2007.

obtemos novamente uma superfície de revolução. A área desta superfície é dada por

$$A = 2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy.$$

**Exemplo 2.6.** Calcule a área da superfície de revolução gerada pela rotação em torno do eixo $x$ da curva $y^2 = 4x$ de $x = 0$ a $x = 1$.

**Solução:** É dado $y^2 = f(x) = 4x$. Derivando os dois lados obtemos, $2yy' = 4$, onde $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Isto implica que $y' = \dfrac{2}{y(x)}$. Vamos supor $y \geq 0$ o que assegura que $\sqrt{y^2} = y$. Logo, pela fórmula acima, temos a área dada por

$$A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$= 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+\left(y(x)'\right)^2}\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^1 y(x)\sqrt{1+\left(\frac{2}{y(x)}\right)^2}\,dx \text{, pois } y'(x) = \frac{2}{y(x)}$$

$$= 2\pi\int_0^1 y(x)\sqrt{\frac{y^2(x)+4}{y^2(x)}}\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^1 \frac{\cancel{y(x)}}{\cancel{y(x)}}\sqrt{y^2(x)+4}\,dx$$

$$= 4\pi\left.\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}\right|_0^1 = \frac{8\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) \text{ unidades de área (u.a.)}$$

**Exemplo 2.7.** Calcule a área da superfície de revolução gerada pela rotação, em torno do eixo $y$, da curva dada por $x = y^3$, $0 \leq y \leq 2$.

**Solução:** Aplicando a fórmula, obtemos

$$A = 2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^2 y^3\sqrt{1+\left(3y^2\right)^2}\,dy = 2\pi\int_0^2 y^3\sqrt{1+9y^4}\,dy \cdot$$

Vamos calcular a integral

$$\int y^3\sqrt{1+9y^4}\,dy \cdot$$

Substituindo $1+9y^4=t$, então $36y^3dy=dt$, ou seja, $y^3dy=\dfrac{dt}{36}$.

Logo,

$$\int y^3\sqrt{1+9y^4}\,dy=\frac{1}{36}\int\sqrt{t}\,dt$$

$$=\frac{1}{36}\frac{t^{3/2}}{3/2}=\frac{1}{54}\left(1+9y^4\right)^{3/2}.$$

Portanto,

$$A=2\pi\frac{1}{54}\left(1+9y^4\right)^{3/2}\Big|_0^2$$

$$=\frac{\pi}{27}\left(145\sqrt{145}-1\right)\text{ u.a.}$$

## Lista de exercícios

1) Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo $x$, de região limitada por:

   i) $y=2x+1,\quad x=0,\quad x=3$ e $y=0$.

   ii) $y=x^2+1,\quad x=1,\quad x=3$ e $y=0$.

2) Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo $y$, de região limitada por: $y=\ln x,\quad y=-1,\quad y=3$ e $x=0$.

3) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação em torno da reta $y=3$ da região limitada por: $y=1-x^2$, $x=-3$, $x=3$ e $y=3$.

4) Determine o volume do sólido obtido com a rotação da região limitada por $y=\sqrt{x}$ e pelas retas $y=3$ e $x=1$ em torno:

   i) do eixo $x$;

   ii) do eixo $y$.

5) Determine a área de revolução obtida com a rotação da região limitada pelas retas $y=2x,\quad y=0$ e $x=1$ em torno:

   i) do eixo $x$;

ii) do eixo $y$.

## 2.2 Comprimento de arco

A seguir, apresentaremos o comprimento de arco de uma curva plana em coordenadas cartesianas. Em coordenadas polares esses cálculos serão dados posteriormente. Seja $f$ uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$. Consideremos o gráfico da função $y = f(x)$.

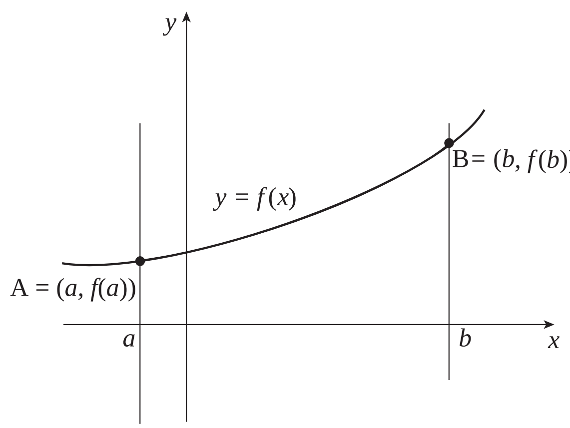



Figura 2.15

Sejam $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ dois pontos na curva $y = f(x)$. Seja $s$ o comprimento da curva $\widehat{AB}$ do gráfico da função $y = f(x)$. Então $s$ é dado por

$$s = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

A fórmula dada acima poderá ser obtida aplicando os argumentos semelhares aos usados no cálculo da área. Neste trabalho, excluiremos esses cálculos. A seguir, apresentaremos alguns exemplos.

**Exemplo 2.8**. Determine o comprimento de arco da curva $y = 2\sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$.

**Solução:** Temos

$$y = 2\sqrt{x} = 2x^{1/2} \Rightarrow y' = 2\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

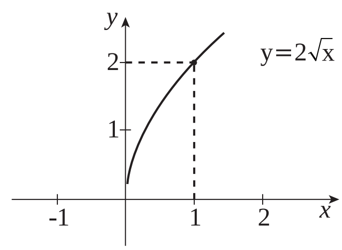



Figura 2.16

Logo,

$$s=\int_a^b \sqrt{1+\left(f\,'(x)\right)^2}\;dx$$

$$=\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\;dx$$

$$=\int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x}}\;dx.$$

Sabemos que $\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$ não tem integral imediata. Então a identidade trigonométrica mais próxima, de $\sqrt{x+1}$, é $1+\mathrm{tg}^2\theta$. Assim, substituímos $x$ por $\mathrm{tg}^2\theta$, então $dx=2\mathrm{tg}\,\theta\cdot\sec^2\theta d\theta$. Logo,

$$s=\int\sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\theta+1}{\mathrm{tg}^2\theta}}\;2\;\mathrm{tg}\;\theta\sec^2\theta\,d\theta$$

$$=2\int\frac{\sec\theta}{\mathrm{tg}\;\theta}\;\mathrm{tg}\;\theta\sec^2\theta\,d\theta$$

$$=2\int\sec^3\theta\,d\theta$$

$$=\sec\theta\;\mathrm{tg}\;\theta+\ln\left|\sec\theta+\mathrm{tg}\;\theta\right|.$$

(utilizando Exemplo 1.6 - capítulo 1)

Como $x=\mathrm{tg}^2\theta$ temos $\mathrm{tg}\;\theta=\sqrt{x}$.

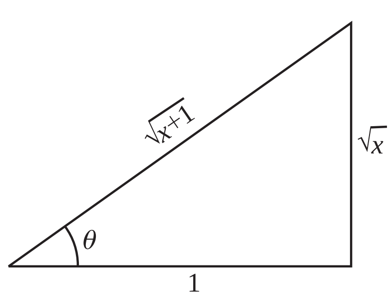



Figura 2.17

Portanto,

$$s = 2\left(\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x} + \ln\left|\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right|\right)\Big|_0^1$$
$$= 2\left[\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right] \ u.c.$$

**Exemplo 2.9.** Calcule o comprimento do arco da curva $24xy = x^4 + 48$ de $x = 2$ a $x = 4$.

**Solução:** Temos

$$24xy = x^4 + 48$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{24}x^3 + \frac{2}{x}$$
$$\Rightarrow y' = \frac{3x^2}{24} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^4-16}{8x^2}.$$

Agora,

$$s = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx \ = \int_2^4 \sqrt{1+\left(\frac{x^4-16}{8x^2}\right)^2}\,dx$$
$$= \int_2^4 \sqrt{1+\frac{1}{64x^4}\left(x^8+256-32x^4\right)}\,dx$$
$$= \int_2^4 \sqrt{\frac{x^8+32x^4+256}{64x^4}}\,dx = \int_2^4 \left(\frac{x^4+16}{8x^2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{8}\int_2^4 \left(x^2+16x^{-2}\right)dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{16}{x}\right]\Bigg|_2^4$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{64}{3}-4-\frac{8}{3}+8\right] = \frac{1}{8}\left[\frac{56}{3}+4\right] = \frac{17}{6} \ u.v.$$

**Exemplo 2.10.** Determine o comprimento de arco da curva $y = \ln x$ entre os limites $x = \sqrt{3}$ e $x = \sqrt{8}$.

**Solução:** Temos

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}.$$

Logo,

$$s = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,dx.$$

Inicialmente calculamos a integral $\int \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}dx$ sem utilização dos limites. Fazendo $x = \text{tg}\,\theta$ que fornece $dx = \sec^2\theta\, d\theta$, obtemos

$$
\begin{aligned}
s &= \int \sqrt{\frac{\text{tg}^2\theta + 1}{\text{tg}^2\theta}} \sec^2\theta\, d\theta \\
&= \int \frac{\sec\theta}{\text{tg}\,\theta} \sec^2\theta\, d\theta \\
&= \int \frac{\sec^3\theta}{\text{tg}\,\theta}\, d\theta \\
&= \int \frac{1}{\cos^3\theta \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}}\, d\theta \\
&= \int \text{cosec}\,\theta \sec^2\theta\, d\theta.
\end{aligned}
$$

A seguir, calculamos a integral $\int \text{cosec}\,\theta \sec^2\theta\, d\theta$ utilizando a técnica de *integração por partes.*

Tomando $u = \text{cosec}\,\theta$ e $dv = \int \sec^2\theta\, d\theta$, temos $du = -\text{cosec}\,\theta\, \text{cotg}\,\theta\, d\theta$ e $v = \text{tg}\,\theta$. Aplicando a fórmula de integração por partes dada no capítulo 1, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int \text{cosec}\,\theta \sec^2\theta\, d\theta &= \text{cosec}\,\theta\ \text{tg}\,\theta - \int \text{tg}\,\theta(-\text{cosec}\,\theta\ \text{cotg}\,\theta)d\theta \\
&= \text{cosec}\,\theta\ \text{tg}\,\theta + \int \text{cosec}\,\theta\, d\theta \\
&= \text{cosec}\,\theta\ \text{tg}\,\theta + \ln|\text{cosec}\,\theta - \text{cotg}\,\theta|.
\end{aligned}
$$

Agora $x = \text{tg}\,\theta$ implica que (usando trigonometria) $\text{cosec}\,\theta = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ e $\text{cotg}\,\theta = \frac{1}{x}$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}dx &= \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \frac{1}{x}\right| \\
&= \sqrt{x^2+1} + \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right|.
\end{aligned}
$$

Aplicando os limites de integração, obtemos

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,dx = \left(\sqrt{x^2+1} + \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}$$

$$= \sqrt{9} + \ln\left|\frac{\sqrt{9}-1}{\sqrt{8}}\right| - \sqrt{4} - \ln\left|\frac{\sqrt{4}-1}{\sqrt{3}}\right|$$

$$= 3 - 2 + \ln\left|\frac{\frac{2}{\sqrt{8}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right| = 1 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) \; u.c.$$

## Lista de exercícios

Determine o comprimento das curvas dadas por:

1) $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{4}\ln x, \quad 2 \le x \le 4$.
2) $y = x^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 4$.
3) $y^3 = 8x^2$ de $x = 1$ a $x = 8$.
4) $6xy = x^4 + 3$ de $x = 1$ a $x = 2$.

# 2.3 Coordenadas polares

No sistema de coordenadas cartesianas, o par ordenado $(a, b)$ denota o ponto cujas distâncias orientadas a partir dos eixos $y$ e $x$ são $a$ e $b$, respectivamente. A seguir, apresentaremos outra forma de representar um ponto no plano, conhecida como *coordenadas polares*. Para definirmos as coordenadas polares, primeiro escolhemos um ponto fixo $O$ no plano, chamado *pólo* ou *origem*, e uma semi-reta orientada, conhecida como *eixo polar*, com origem em $O$. Em seguida, consideramos um ponto arbitrário $P$ do plano, diferente de $O$. Então, o ponto $P$ pode ser localizado por meio de sua associação a um par coordenado polar $(r, \theta)$, no qual $r$ dá a distância orientada de $O$ a $P$ e o $\theta$ dá o ângulo orientado do eixo polar à semi-reta $OP$. Como de costume, $\theta$ é considerado positivo se o ângulo for descrito no sentido anti-horário do eixo polar para $OP$ e negativo no outro caso.

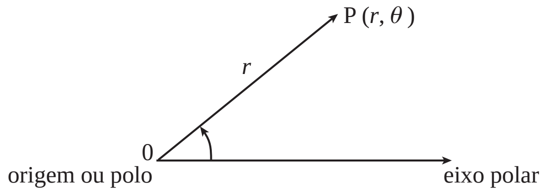



Figura 2.18

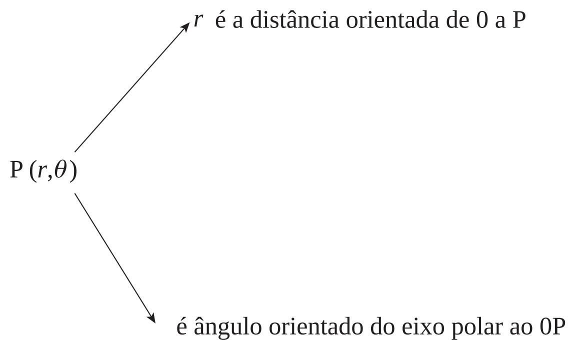



Figura 2.19

As coordenadas polares de um ponto não são únicas. Por exemplo, $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(2,-\frac{5\pi}{3}\right)$ e $\left(2,\frac{7\pi}{3}\right)$ representam o mesmo ponto. Veja a Figura 2.20:

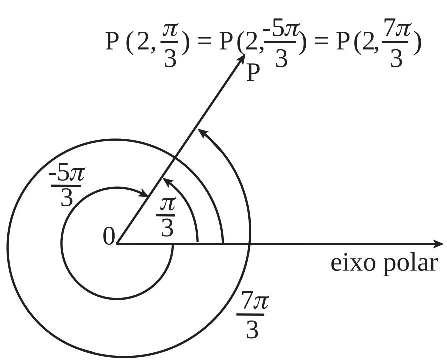



Figura 2.20

Podemos também representar os pontos no plano nos quais $r$ seja negativo. Por isso, falamos acima a palavra "**distância orientada**" ao definir $P(r,\theta)$. O ponto simétrico ao $P\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ em relação à origem é representado por $P'\left(-2,\frac{\pi}{3}\right)$. Veja a Figura 2.21:

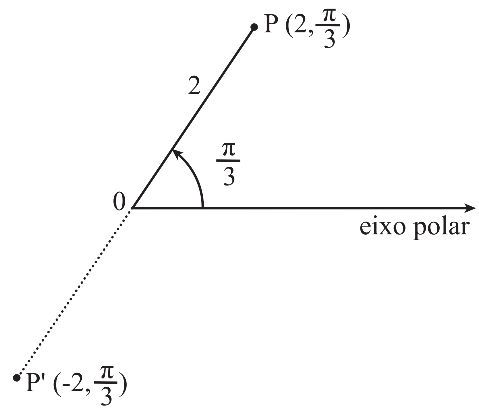



Figura 2.21

Assim, podemos dizer que coordenadas polares podem ter valores negativos de $r$ e de $\theta$.

O ponto $P'\left(-2,\frac{\pi}{3}\right)$ também pode ser representado por $P\left(2,\frac{4\pi}{3}\right)$, ou seja, $P'\left(-2,\frac{\pi}{3}\right)=P\left(2,\frac{4\pi}{3}\right)$.

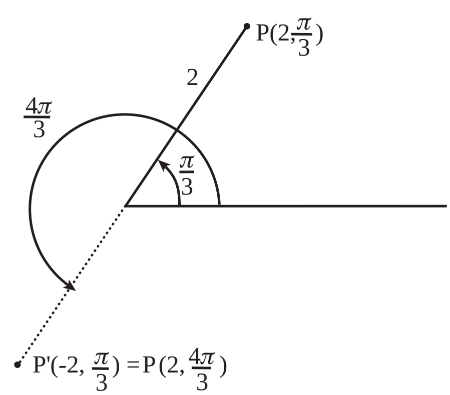



Figura 2.22

**Exemplo 2.11.** Mostre o ponto que tem coordenadas polares $P\left(3,-\frac{\pi}{6}\right)$. Encontre um outro conjunto de coordenadas polares deste ponto, para o qual:

a) $r<0$ e $0<\theta<2\pi$.

b) $r>0$ e $0<\theta<2\pi$.

c) $r < 0$ e $-2\pi < \theta < 0$.

**Solução:** Veja abaixo quatro figuras representando o mesmo ponto com diferentes coordenadas, conforme solicitado:

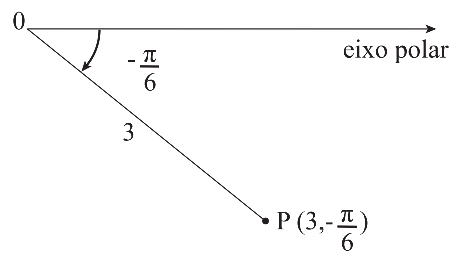



Figura 2.23

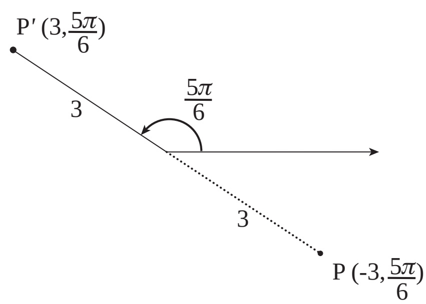



Figura 2.24

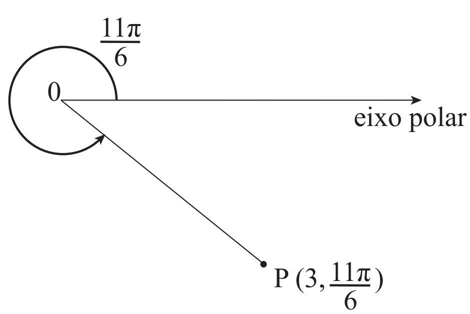



Figura 2.25

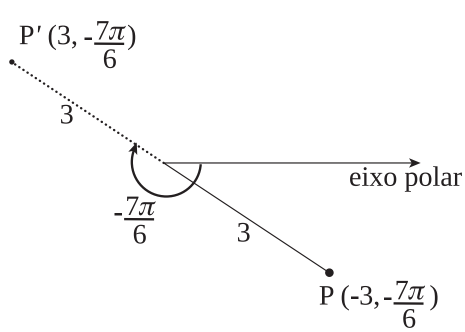



Figura 2.26

## 2.3.1 Gráfico de equações em coordenadas polares

Gráfico da função polar
$r(\theta) = 1 + \cos(\pm\theta)$

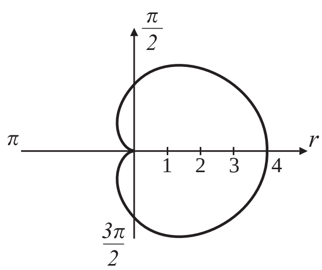



Gráfico da função polar
$r(\theta) = 1 - \operatorname{sen}(\theta) = 1 - \operatorname{sen}(\pi - \theta)$

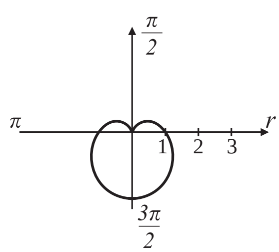
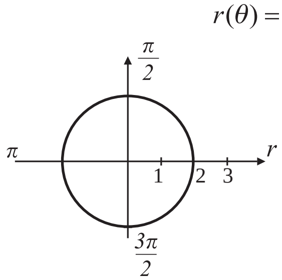



Gráfico da função polar
$r(\theta) = 2$




Para construir os gráficos das curvas dadas em coordenadas polares, é importante fazer algumas considerações, principalmente em relação à simetria da curva.

i) *Simetria em relação ao eixo polar*

Se o ponto $(r,\theta)$ for substituído na equação dada por $(r,-\theta)$ ou $(-r,\pi-\theta)$ e a equação continuar sendo a mesma, então neste caso dizemos que a curva é simétrica em relação ao eixo polar.

ii) *Simetria em relação ao eixo* $y$

Se o ponto $(r,\theta)$ for substituído na equação dada por $(r,\pi-\theta)$ ou $(-r,-\theta)$ e a equação permanecer a mesma, então dizemos que a curva dada é simétrica em relação ao eixo $\frac{\pi}{2}$, ou seja, o eixo $y$.

iii) *Simetria em relação à origem*

Se o ponto $(r,\theta)$ for substituído na equação dada por $(-r,\theta)$ ou $(r,\pi+\theta)$ e a equação permanecer a mesma, então dizemos que a curva dada é simétrica em relação à origem.

Também é importante encontrar os valores de $\theta$ para os quais a curva passa pelo pólo.

**Exemplo 2.12.** Teste as simetrias do gráfico de

$$r = 4\cos 2\theta\,.$$

**Solução:**

i) Substituir $(r,\theta)$ por $(r,-\theta)$,

$$\begin{aligned} r &= 4\cos 2\theta \\ &= 4\cos 2(-\theta) \end{aligned}$$

$= 4\cos 2\theta$, pois $\cos\theta = \cos(-\theta)$.

Logo, $r = 4\cos 2\theta$ é simétrica em relação ao eixo polar.

ii) Substituir $(r,\theta)$ por $(r,\pi-\theta)$,

$$r = 4\cos 2\theta = 4\cos 2(\pi-\theta)$$

$$= 4\cos(2\pi-2\theta) = 4\cos 2\theta.$$

Portanto, existe simetria em relação ao *eixo y*.

iii) *1ª Opção*: Substituir $(r,\theta)$ por $(-r,\theta)$,

$$r = 4\cos 2\theta$$

$$-r = 4\cos 2\theta. \text{ (Não vale)}$$

*2ª Opção*: Substituir $(r,\theta)$ por $(r,\pi+\theta)$,

$$r = 4\cos 2\theta = 4\cos 2(\pi+\theta)$$

$$= 4\cos(2\pi+2\theta)$$

$$= 4\cos 2\theta. \text{ (Vale)}$$

Portanto, existe simetria em relação ao *pólo*.

**Observação:** Nas três situações acima, temos duas possibilidades para cada uma. Para valer a simetria, é necessário satisfazer pelo menos uma das duas opções dadas.

**Exemplo 2.13**

Trace o gráfico da equação polar

$$r = 2(1+\cos\theta).$$

**Solução:** Sabemos que a função cosseno decresce de $+1$ a $-1$ quando $\theta$ varia de $0$ a $\pi$, portanto $r$ decrescerá de $4$ a zero neste intervalo. Também podemos observar que a curva $r = 2(1+\cos\theta)$ é simétrica em relação ao eixo polar, pois $\cos\theta = \cos(-\theta)$. Neste caso, é suficiente traçar a curva de $0$ a $\pi$, pois de $\pi$ a $2\pi$ ela será simétrica. Veja a tabela abaixo com alguns valores de $r$ e $\theta$.

| $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | 4 | $2+\sqrt{3}$ | $2+\sqrt{2}$ | 3 | 2 | 1 | $2-\sqrt{2}$ | $2-\sqrt{3}$ | 0 |

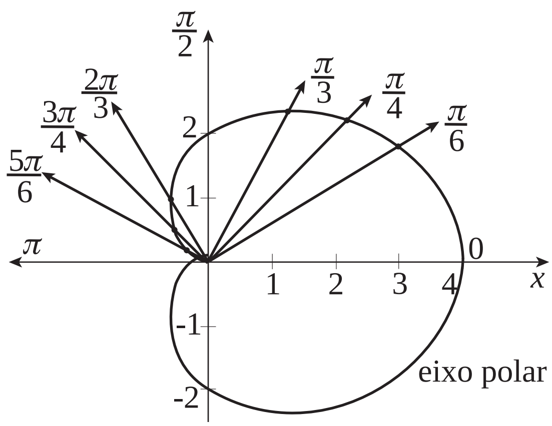



Figura 2.27

**Exemplo 2.14.** Trace o gráfico do Exemplo 2.12, ou seja, $r = 4\cos 2\theta$.

**Solução:** Observamos pelo Exemplo 2.12 que a curva é simétrica em relação ao eixo $x$ e ao eixo $y$. Portanto, é suficiente traçar de $0$ a $\frac{\pi}{2}$.

Em $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $r = 0 \Rightarrow 4\cos 2\theta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}$, ou seja, $\theta = \frac{\pi}{4}$. Isto quer dizer que, quando $\theta = \frac{\pi}{4}$ temos $r = 0$, ou seja, a curva passa pelo pólo quando $\theta = \frac{\pi}{4}$.

| $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | 4 | 2 | 0 | $-2$ | $-4$ |

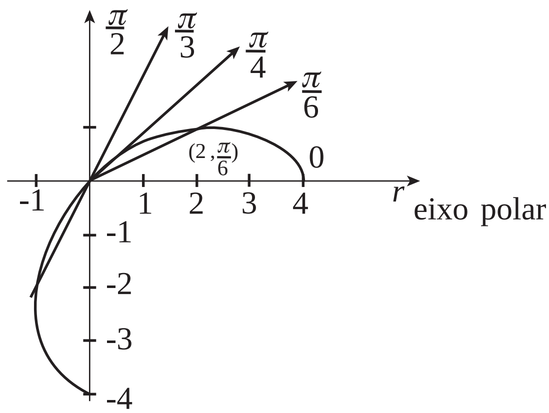



Figura 2.28

Pela simetria da curva em outros quadrantes, temos o resultado final.

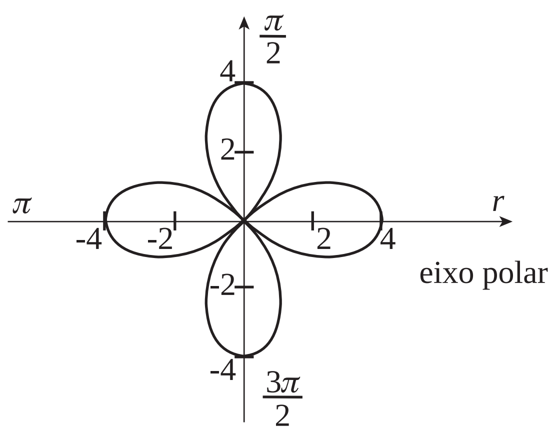



Figura 2.29

- **Algumas curvas polares**

a) Circunferências

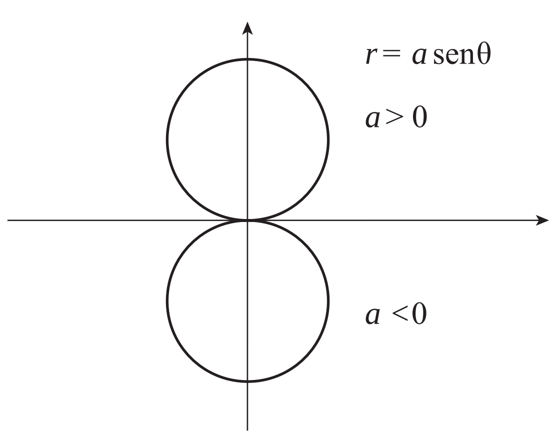



Figura 2.30

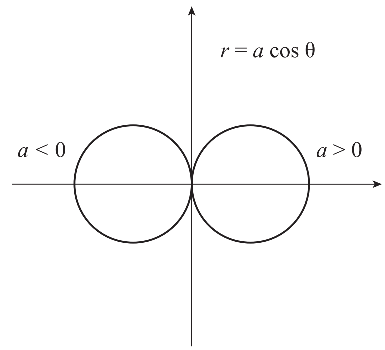



Figura 2.31

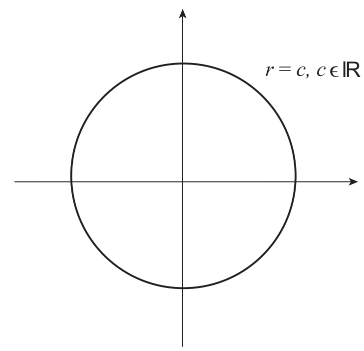



Figura 2.32

b) Espiral

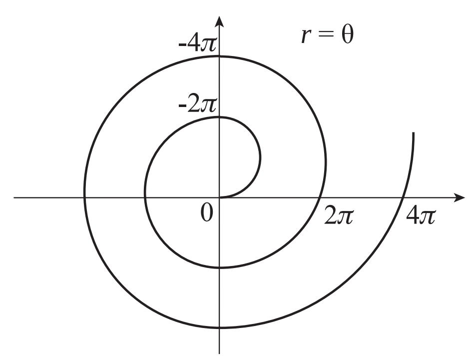



Figura 2.33

c) Retas

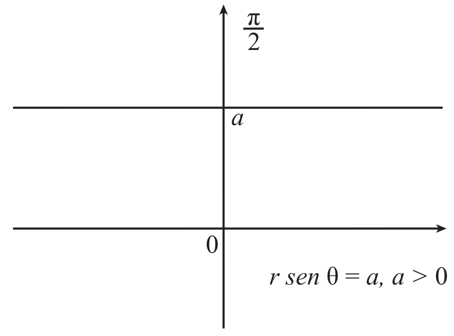



Figura 2.34

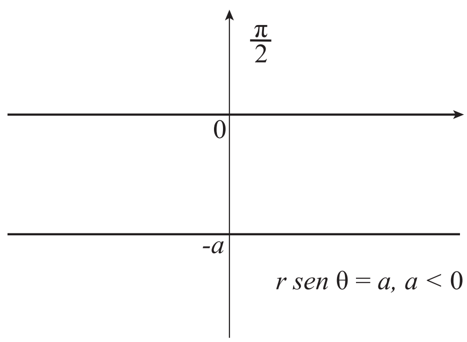



Figura 2.35

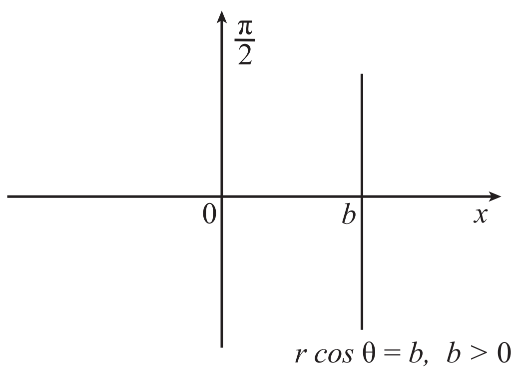



Figura 2.36

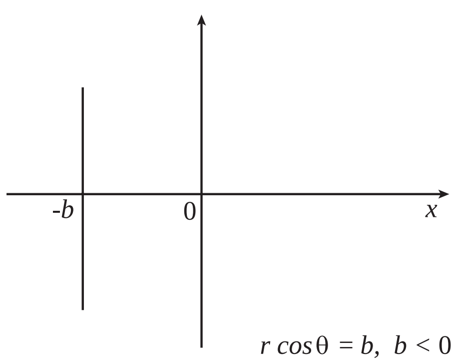



Figura 2.37

## 2.3.2 Relação entre coordenadas cartesianas retangulares e polares

As coordenadas cartesianas retangulares de um ponto $P(x, y)$ e as coordenadas polares deste mesmo ponto $P(r, \theta)$ estão relacionadas da seguinte forma:

i) $x = r \cos \theta,\ y = r \operatorname{sen} \theta.$

ii) $r^2 = x^2 + y^2.$

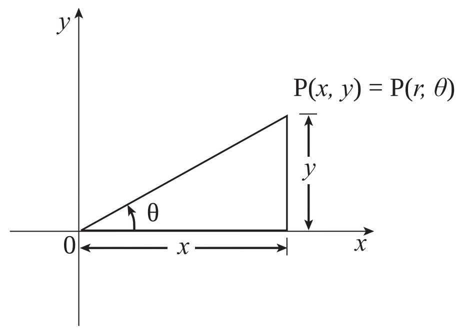



Figura 2.38

**Observação.** Se $r < 0$, ou seja, $|r| = -r$ e $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, pela Figura 2.37 vemos que:

$$\cos\theta = \frac{-x}{|r|} = \frac{-x}{-r} = \frac{x}{r} \text{ e } \operatorname{sen}\theta = \frac{-y}{|r|} = \frac{-y}{-r} = \frac{y}{r},$$

o que assegura $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, também neste caso. Para os outros valores de $\theta$ a situação é análoga.

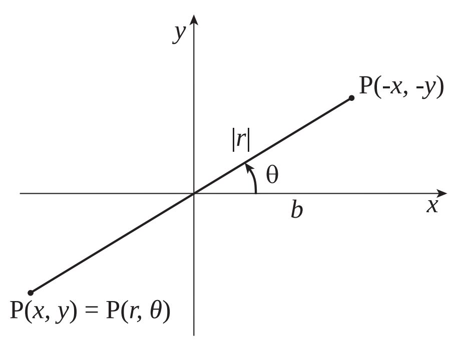



Figura 2.39

Portanto, podemos dizer que as fórmulas $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$ são válidas para qualquer $r$, seja ele positivo ou negativo. Se $r = 0$, então o ponto é o pólo, independente do valor de $\theta$.

A seguir, daremos exemplos de transformação de equações de um sistema de coordenadas para outro.

**Exemplo 2.15.** Transforme as equações dadas em coordenadas cartesianas:

i) $r\cos\theta = 3$.

ii) $r^2 = 3\operatorname{sen} 2\theta$.

**Solução:**

i) $r\cos\theta = 3 \Rightarrow x = 3$, pois $x = r\cos\theta$.

ii) Sabemos que $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$.

Logo,

$r^2 = 3\text{sen}2\theta = 6\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$, onde utilizamos a identidade trigonométrica $\text{sen}2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$, então:

$r^2 = 6\dfrac{y}{r}\dfrac{x}{r},\ \ r \neq 0$

$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 6xy$

ou, $x^4 + y^4 + 2xy\left(xy - 3\right) = 0$.

**Exemplo 2.16.** Encontre uma equação polar que tenha o mesmo gráfico da equação em $x$ e $y$:

i) $x^2 + \left(y - 2\right)^2 = 4$.

ii) $xy = 4$.

**Solução:**

i) Temos

$$x^2 + \left(y - 2\right)^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 4y$$

$$r^2 = 4r\,\text{sen}\,\theta$$

ou, $r = 4\,\text{sen}\,\theta$, $r \neq 0$.

ii) Temos

$$xy = 4$$

$$r^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta = 4$$

Como $\text{sen}2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \Rightarrow \text{sen}\,\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}\text{sen}2\theta$, portanto

$r^2\dfrac{1}{2}\text{sen}2\theta = 4$

ou, $r^2 \text{sen } 2\theta = 8$.

## Lista de exercícios

a) Transforme as equações cartesianas em equações polares:

1) $x^2 = y$.
2) $x^2 - y^2 = 3$.
3) $x^2 + y^2 = 9$.
4) $x^2 + xy + y^2 = 3$.

b) Transforme as equações polares em equações cartesianas:

1) $r \text{ sen } \theta = 0$.
2) $r = 4 \text{ cosec } \theta$.
3) $r(\cos\theta + sen\,\theta) = 1$.
4) $r^2 = 4\,r \text{ sen } \theta$.

## 2.3.3 Comprimento de arco de uma curva em coordenadas polares

A fórmula em coordenadas polares para o *comprimento de arco* de uma curva $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, é dada por

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

A seguir, apresentaremos alguns exemplos.

**Exemplo 2.17.** Encontre o comprimento da cardióide $r = 1 - \cos\theta$.

**Solução:** Observamos que a curva $r = 1 - \cos\theta$ é simétrica em relação ao eixo polar, pois $\cos(-\theta) = \cos\theta$. Veja a Figura 2.38:

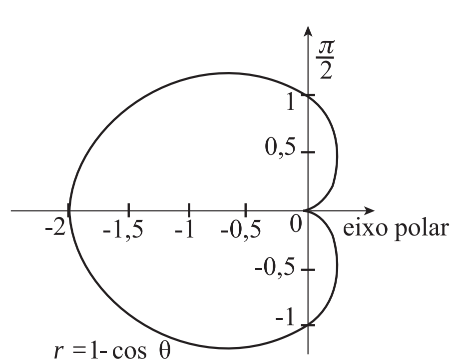



Figura 2.40

É suficiente calcular o comprimento do arco de $0$ a $\pi$ e multiplicá-lo por 2, em vez calculá-lo de $0$ a $2\pi$:

$$s = 2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = 2\int_0^{\pi}\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\text{sen}^2\theta}\;d\theta$$

Aplicando a identidade trigonométrica $\dfrac{1-\cos\theta}{2} = \text{sen}^2\dfrac{\theta}{2}$, então podemos escrever

$$= 4\int_0^{\pi}\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta = 4(-2)\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = -8(0-1)$$

$= 8$ unidades de comprimento ($u.c.$)

**Exemplo 2.18.** Encontre o comprimento da curva

$$r = \sqrt{1+\text{sen }2\theta}, \quad 0 \le \theta \le \pi\sqrt{2}.$$

**Solução:** De $r = \sqrt{1+\text{sen }2\theta}$ temos

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{2}(1+\text{sen }2\theta)^{\frac{1}{2}-1}\,2\cos 2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{1+\text{sen }2\theta}}.$$

Logo,

$$s = \int_0^{\pi\sqrt{2}}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi\sqrt{2}}\sqrt{1+\text{sen }2\theta+\frac{\cos^2 2\theta}{1+\text{sen }2\theta}}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(1+\text{sen }2\theta)^2+\cos^2 2\theta}{1+\text{sen }2\theta}}\,d\theta = \int_0^{\pi\sqrt{2}}\sqrt{2}\;d\theta$$

$$= \sqrt{2}\,\theta\Big|_0^{\pi\sqrt{2}} = 2\pi \text{ u.c.}$$

**Exemplo 2.19.** Encontre o comprimento da espiral

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\theta}, \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

**Solução:** Temos

$$s = \int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\theta}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1}{2}e^{2\theta} + \frac{1}{2}e^{2\theta}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} e^{\theta} d\theta = e^{\theta}\Big|_0^{\pi} = e^{\pi} - 1 \text{ u.c.}$$

## Lista de exercícios

Determine o comprimento das curvas dadas por:

1) $r = -1 + \cos\theta$.

2) $r = 2\,\text{sen}\,\theta + 2\cos\theta$, $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$.

3) $r = \sqrt{1 + \cos 2\theta}$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$.

4) $r = a\,\text{sen}\,\theta$, $a > 0$.

5) $r = a\cos\theta$, $a > 0$.

6) $r = a$, $a > 0$.

## 2.3.4 Área de uma região plana em coordenadas polares

A área de uma região plana limitada pela curva $r = f(\theta)$, e por duas semi-retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$, com origem no pólo, é dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left[f(\theta)\right]^2 d\theta.$$

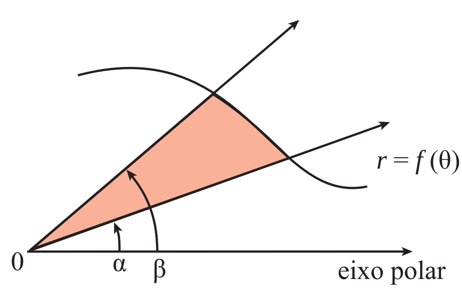



Figura 2.41

**Exemplo 2.20.** Encontre a área da região no plano limitada pela cardióide

$$r = 1 - \cos\theta.$$

**Solução:** Como a curva dada é simétrica em relação ao eixo polar, então é suficiente calcular a área de $0$ a $\pi$ em vez de $0$ a $2\pi$, e depois dobrar o valor obtido.

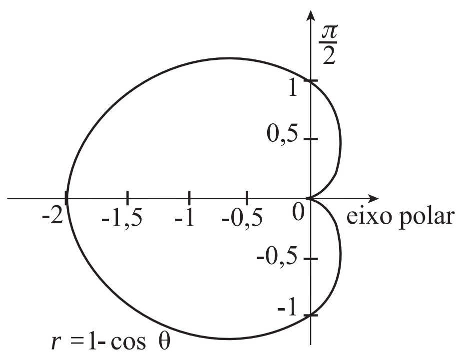



Figura 2.42

$$A = 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta = \int_0^{\pi}\left(1+\cos^2\theta - 2\cos\theta\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left[1+\frac{1+\cos 2\theta}{2} - 2\cos\theta\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta - 2\cos\theta\right]d\theta$$

$$= \left[\frac{3}{2}\theta + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} - 2\operatorname{sen}\theta\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{3}{2}\pi \text{ unidades de área } (u.a.)$$

**Exemplo 2.21.** Calcule a área no interior do círculo $r = 3\cos\theta$ e exterior à cardióide $r = 1+\cos\theta$.

**Solução.** Primeiramente, encontramos os pontos de interseção entre as duas curvas.

$$1+\cos\theta = 3\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \theta = -\frac{\pi}{3}$$

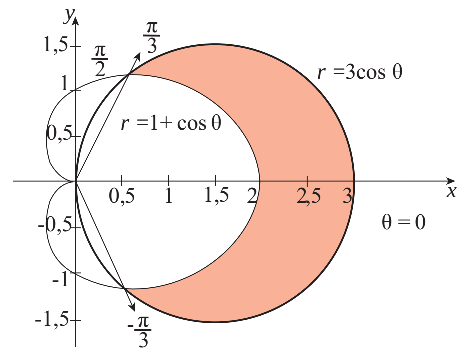



Figura 2.43

Pela simetria de duas curvas em relação ao eixo polar é suficiente calcular a área de $0$ a $\frac{\pi}{3}$ em vez de $-\frac{\pi}{3}$ a $\frac{\pi}{3}$, e depois dobrar o valor.

Logo,

$$
\begin{aligned}
A &= 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\left[(3\cos\theta)^2 - (1+\cos\theta)^2\right]d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3}\left(9\cos^2\theta - 1 - \cos^2\theta - 2\cos\theta\right)d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3}\left(8\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1\right)d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3}\left[8\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) - 1 - 2\cos\theta\right]d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3}\left[3 - 2\cos\theta + 4\cos 2\theta\right]d\theta \\
&= \left[3\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\,\mathrm{sen}\,2\theta\right]\Big|_0^{\pi/3} \\
&= \pi \;\; u.a.
\end{aligned}
$$

**Exemplo 2.22.** Encontre a área total da lemniscata

$$r^2 = 2\cos 2\theta.$$

**Solução:** Observamos pela Figura 2.42, que a curva é simétrica em relação ao pólo e ao eixo polar.

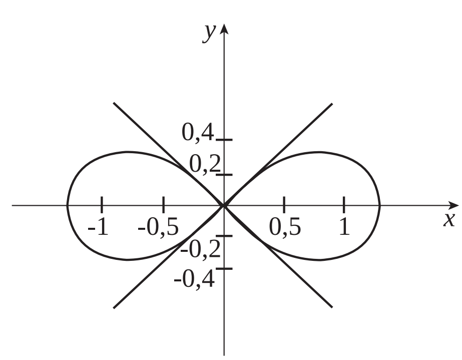



Figura 2.44

Portanto, é suficiente calcular a área de $0$ a $\dfrac{\pi}{4}$ e depois multiplicá-la por 4:

$$\begin{aligned} A &= 4\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 2\cos 2\theta\, d\theta \\ &= 4\left[\frac{\text{sen } 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} \\ &= 2 \;\; u.a. \end{aligned}$$

## Lista de exercícios

1) Calcule a área da região do plano limitado pela curva:

   i) $r = 1 - \cos\theta$.

   ii) $r = 2 \text{ sen } 2\theta$.

   iii) $r = 3(1 + \text{sen } \theta)$.

2) Encontre a área das seguintes regiões limitadas:

   i) Interior ao círculo $r = 3 \text{ sen } \theta$ e exterior a $r = 1 + \text{sen } \theta$.

   ii) Interior ao círculo $r = 1$ e exterior a $r = 1 - \cos\theta$.

# Resumo

Neste capítulo apresentamos algumas aplicações das integrais. Iniciamos nosso estudo com cálculo de volume de sólido de revolução e comprimento de arco, utilizando o sistema de coordenadas cartesianas. Introduzimos as coordenadas polares, apresentamos sua relação com coordenadas cartesianas e explicamos como construir gráficos em coordenadas polares. Apresentamos, também, o cálculo de comprimento de arco em coordenadas polares e explicamos como calcular a área de uma região limitada do plano em coordenadas polares. Demos vários exemplos para ilustrar os assuntos apresentados e no final de cada seção, fornecemos uma pequena lista de exercícios.

# Respostas

- **Seção 2.1.3**

1) i) $57\pi$ *u.v.*; ii) $\frac{1016}{15}\pi$ *u.v.*

2) $\frac{\pi}{2}\left(e^6 - \frac{1}{e^2}\right)$ *u.v.*;

3) $\frac{966}{5}\pi$ *u.v.*

4) i) $32\pi$ $u.v.$; ii) $\frac{242}{5}\pi$ $u.v.$

5) i) $2\sqrt{5}\pi$ *u.a.*; ii) $\sqrt{5}\pi$ $u.c.$

- **Seção 2.2.1**

1) $6+\frac{1}{4}\ln 2 = 6{,}173$ *u.c.*

2) $\frac{8}{27}\left[10\sqrt{10}-1\right] = 9{,}073$ *u.c.*

3) $\frac{1}{27}(52\sqrt{52}\pi - 125)$ $u.c$

4) $\frac{17}{12} = 1{,}416$ *u.c.*

- **Seção 2.3.2.1**

a) 1) $r\cos^2\theta - \text{sen}\,\theta = 0$.

2) $r^2\cos 2\theta = 3$.

3) $r^2 = 9$.

4) $r^2(1+\frac{\text{sen}\,2\theta}{2}) = 3$.

b) 1) $y = 0$.

2) $y = 4$.

3) $x + y = 1$.

4) $x^2 + y^2 = 4y$.

- **Seção 2.3.3.1**

1) 8 *u.c.*

2) $\sqrt{2}\pi$ *u.c.*

3) $\sqrt{2}\pi$ *u.c.*

4) $a\pi$ *u.c.*

5) $a\pi$ $u.c.$ 6) $2a\pi$ $u.c.$

- **Seção 2.3.4.1**

1) i) $\frac{3}{2}\pi$ $u.a.$; ii) $2\pi$ $u.a.$; iii) $\frac{27}{2}\pi$ $u.a.$
2) i) $\pi$ $u.a.$; ii). $2-\frac{\pi}{4}$.

# Capítulo 3

## Funções de várias variáveis

# Capítulo 3

## Funções de várias variáveis

*Até agora trabalhamos com funções que envolviam uma única variável. Entretanto, em vários problemas reais, encontramos funções com duas ou mais variáveis independentes, por exemplo:*

*i) A área* $A$ *de um triângulo de base* $b$ *e altura* $h$ *é dada por* $A = \frac{bh}{2}$. *Para cada par de valores* $b$ *e* $h$ *existe um valor correspondente para a área* $A$. *Dizemos que a área é uma função de duas variáveis,* $b$ *e* $h$*, e escrevemos* $A(b,h) = \frac{bh}{2}$.

*ii) O volume* $V$ *de um cone é dado por* $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$, *onde* $r$ *é o raio da base do cone e* $h$ *é a altura.* $V$ *é uma função de duas variáveis,* $r$ *e* $h$, *e indicamos* $V(r,h) = \frac{\pi}{3} r^2 h$.

*iii) O montante* $M$ *de um capital* $C$ *aplicado à taxa* $i\,\%$ *por período, durante* $n$ *períodos é dado por* $M = C(1+i)^n$. *Aqui,* $M$ *é uma função de três variáveis,* $C$, $i$ *e* $n$, *e escrevemos* $M(C,i,n) = C(1+i)^n$.

*iv) A equação de estado de um gás ideal é dada por* $p = \frac{nRT}{V}$, *onde* $p$ *é pressão,* $V$ *é o volume,* $n$ *é massa gasosa em moles,* $R$ *é constante dos gases ideais, e* $T$ *é a temperatura. Para cada quádrupla de valores* $n$, $R$, $T$ *e* $V$, *a fórmula acima produz um valor para* $p$, *ou seja,* $p$ *é uma função de quatro variáveis* $n$, $R$, $T$ *e* $V$.

*v) Uma fábrica de alimentos usa n ingredientes diferentes para produzir um determinado alimento, sendo $c_i$ o custo por unidade do $i$-ésimo ingrediente. Se são necessárias $x_i$ unidades do $i$-ésimo ingrediente, então o custo total $C$ para produzir o alimento é uma função de $n$ variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ dada por:*

$$C(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n.$$

Para apresentar a definição de função de várias variáveis, precisamos considerar pontos no espaço $n$-dimensional $\mathbb{R}^n$. Lembramos que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ é o conjunto de todas as $n$-uplas ordenadas de números reais. Cada $n$-upla ordenada $(x_1, x_2, ..., x_n)$ é um ponto do $\mathbb{R}^n$.

## 3.1 Funções de n variáveis reais

**Definição 3.1** Seja $A$ um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Uma função real $f$ de $n$ variáveis reais, definida em $A$, é uma relação entre $A$ e $\mathbb{R}$ que associa a cada ponto $(x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ um único valor real $z$, denotado por $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Escrevemos: $f : A \to \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

As variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ são variáveis independentes, e $z$ é a variável dependente.

O conjunto $A$ é denominado domínio da função $f$, e é denotado por $D(f)$.

O conjunto de todos os valores possíveis de $f$ é chamado imagem de $f$, e é denotado por $\text{Im}(f)$. Assim,

$$\begin{aligned}\text{Im}(f) &= \{f(x_1, x_2, ..., x_n) \mid (x_1, x_2, ..., x_n) \in A\} \\ &= \{z \in \mathbb{R} \mid z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \ \textit{com} \ (x_1, x_2, ..., x_n) \in A\}.\end{aligned}$$

**Exemplo 3.1.** Determine o domínio e a imagem das seguintes funções:

a) $f(x,y)=\sqrt{x+y-2}$;
b) $g(x,y)=\sqrt{36-x^2-y^2}$;
c) $z=2x+3y-4$.

**Solução:**

a) A função $f$ é uma função de duas variáveis. O domínio da $f$ é o conjunto de todos os pontos $(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ para os quais $f(x,y)=\sqrt{x+y-2}$ é um número real. Neste caso, a função está definida se o radicando for não-negativo. Assim, o domínio da função $f$ é

$$D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\geq 2\}.$$

E a imagem da $f$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f)&=\{z\in\mathbb{R} \mid z=\sqrt{x+y-2}\ \ com\ \ (x,y)\in D(f)\}\\&=[0,+\infty).\end{aligned}$$

b) O domínio da $g$ é

$$D(g)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 36\}.$$

A imagem da $g$ é

$$\operatorname{Im}(g)=\{z\in\mathbb{R} \mid z=\sqrt{36-x^2-y^2}\ \ com\ (x,y)\in D(g)\}.$$

Temos $z\geq 0$ e vale a relação $36-x^2-y^2\leq 36$. Assim, $0\leq\sqrt{36-x^2-y^2}\leq 6$. Portanto, $\operatorname{Im}(g)=[0,6]$.

c) O domínio da função $z=2x+3y-4$ é todo o espaço $\mathbb{R}^2$, ou seja, $D(z)=\mathbb{R}^2$.

Os valores possíveis de $z$ formam a imagem da função. Neste caso, $\operatorname{Im}(z)=\mathbb{R}$.

**Exemplo 3.2.** Determine o domínio da função $g(x,y,z)=\dfrac{1}{2x+y+z-4}$ e calcule $g(2,1,1)$.

**Solução:** O domínio da função $g$ é

$$D(g)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+y+z\neq 4\}.$$

E

$$g(2,1,1)=\frac{1}{4+1+1-4}=\frac{1}{2}.$$

**Exemplo 3.3.** Determine e represente graficamente o domínio das seguintes funções:

a) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

b) $g(x,y)=\ln(x^2-y)$;

c) $h(x,y,z)=\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$;

d) $m(x,y)=\sqrt{y-x}+\sqrt{1-y}$.

**Solução:**

a) A função $f$ é uma função de duas variáveis. O domínio da $f$ é o conjunto de pontos do $\mathbb{R}^2$ tais que $1-x^2-y^2>0$ ou $x^2+y^2<1$. Assim,

$$D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}.$$

A Figura 3.1 mostra a região do $\mathbb{R}^2$ que representa graficamente o domínio da $f$.

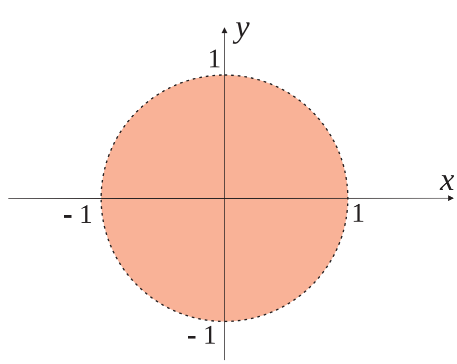



Figura 3.1

b) A função $g$ é uma função de duas variáveis. Assim, o domínio da $g$ é um subconjunto do $\mathbb{R}^2$. Para a expressão da $g$ fornecer um número real, precisamos ter

$$x^2 - y > 0 \qquad \text{ou} \qquad y < x^2.$$

Assim,

$$D(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x^2\}.$$

A representação gráfica do domínio é apresentada na Figura 3.2.

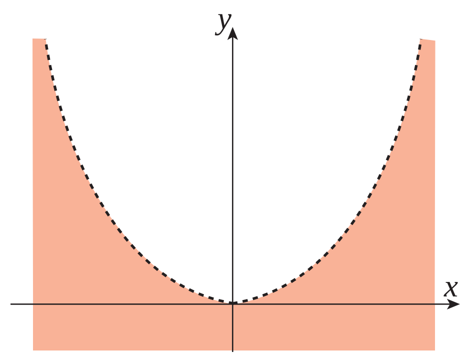



Figura 3.2

c) O domínio da $h$ é

$$\begin{aligned} D(h) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2^2\}. \end{aligned}$$

Geometricamente, o domínio de $h$ representa o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ pertencentes à esfera de centro na origem e de raio 2, e os pontos da região do espaço limitado pela esfera, como mostra a Figura 3.3.

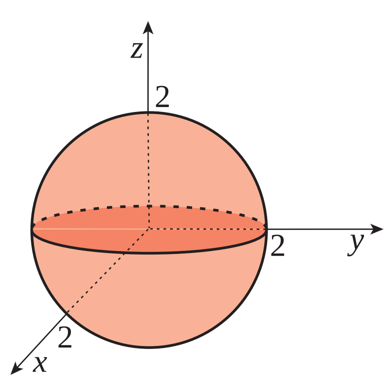



Figura 3.3

d) A função $m$ é uma função de duas variáveis. O domínio da $m$ é o conjunto de pontos do $\mathbb{R}^2$ tais que

$$y - x \geq 0 \text{ e } 1 - y \geq 0,$$

ou seja,

$$y \geq x \text{ e } y \leq 1$$

Assim,

$$D(m) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x \text{ e } y \leq 1\}$$

A representação gráfica do domínio é apresentada na Figura 3.4.

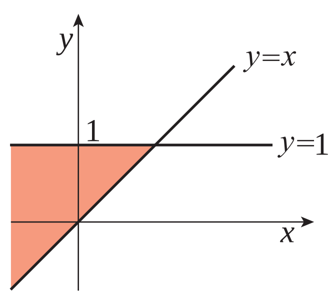



Figura 3.4

**Exemplo 3.4.** Dada a função $f(x, y, z) = 2x^2 + y - 3z$,

a) determine o domínio;

b) encontre a imagem da $f$;

c) calcule $f(-1, 2, -5)$;

d) calcule $f(x + \Delta x, y, z)$.

**Solução:**

a) O domínio da $f$ é $\mathbb{R}^3$.

b) A imagem da $f$ é $\mathbb{R}$.

c) $f(-1, 2, -5) = 2 \cdot (-1)^2 + 2 - 3 \cdot (-5) = 19.$

d) $f(x + \Delta x, y, z) = 2(x + \Delta x)^2 + y - 3z$

$$= 2(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + y - 3z$$

$$= 2x^2 + y - 3z + 4x\Delta x + 2\Delta x^2.$$

**Definição 3.2** Sejam $f$ uma função de uma variável real e $g$ uma função de $n$ variáveis reais. A função composta de $f$ com $g$, denotada por $f \circ g$, é a função de $n$ variáveis definida por

$$(f \circ g)(x_1, x_2, ..., x_n) = f\left(g(x_1, x_2, ..., x_n)\right).$$

O domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os pontos $(x_1, x_2, ..., x_n)$ no domínio de $g$ tais que $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ está no domínio de $f$. Simbolicamente, escrevemos:

$$D(f \circ g) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in D(g) \mid g(x_1, x_2, ..., x_n) \in D(f)\}.$$

**Exemplo 3.5.** Dadas as funções $f(t) = t^2$ e $g(x, y) = x - y$,

a) determine $(f \circ g)$;

b) encontre o domínio da $f \circ g$;

c) calcule $(f \circ g)(1, -2)$ e $(f \circ g)(x^2, y^2)$.

**Solução:**

a) $(f \circ g)(x, y) = f\left(g(x, y)\right) = f(x - y) = (x - y)^2$.

b) O domínio da $f$ é $D(f) = \mathbb{R}$. O domínio da $g$ é $D(g) = \mathbb{R}^2$. Assim, o domínio de $f \circ g$ é o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ tal que $g(x, y) \in D(f)$, ou seja, os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x - y \in \mathbb{R}$. Logo, $D(f \circ g) = \mathbb{R}^2$.

c) $(f \circ g)(1, -2) = (1 - (-2))^2 = 9$ e $(f \circ g)(y^2, x^2) = (y^2 - x^2)^2$.

**Exemplo 3.6.** Dadas as funções $g(s) = \ln s$ e $f(x, y, z) = x^2 + y + z$,

a) encontre $g \circ f$;

b) apresente o domínio $g \circ f$.

**Solução:**

a) A função composta

$$(g \circ f)(x, y, z) = g\left(f(x, y, z)\right) = g\left(x^2 + y + z\right) = \ln\left(x^2 + y + z\right).$$

b) O domínio da $g$ é $D(g)=(0,+\infty)$. O domínio da $f$ é $D(f)=\mathbb{R}^3$. Assim, o domínio $g\circ f$ é o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^3$, tais que $f(x,y,z)\in(0,+\infty)$, isto é, os pontos de $\mathbb{R}^3$ tais que $x^2+y+z>0$. Logo,

$$D(g\circ f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y+z>0\}.$$

**Exemplo 3.7.** Considere as funções $f(t)=\operatorname{arcsen} t$ e $g(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Determine $f\circ g$ e $D(f\circ g)$.

**Solução:**

$$(f\circ g)(x,y)=f(g(x,y))=f(\sqrt{1-x^2-y^2})$$

$$=\operatorname{arcsen}\ \sqrt{1-x^2-y^2}.$$

O domínio da função composta $f\circ g$ é

$$D(f\circ g)=\{(x,y)\in D(g) \mid g(x,y)\in D(f)\}.$$

Temos que o domínio da $g$ é

$$D(g)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\},$$

a imagem da $g$ é $\operatorname{Im}(g)=[0,1]$, e o domínio da $f$ é $D(f)=[-1,1]$.

Como $\operatorname{Im}(g)\subset D(f)$, segue que

$$D(f\circ g)=D(g)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}.$$

## Lista de exercícios

1) Expresse como função de três variáveis o volume de um paralelepípedo reto-retângulo de base de lados $x$ e $y$, e altura $z$.

2) Determine o domínio e o conjunto imagem das seguintes funções:

   a) $f(x,y)=3x+2y+3$;

   b) $z=\sqrt{x^2+y^2-4}$.

3) Faça uma representação gráfica do domínio das funções:

a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}$;

b) $g(x,y)=\ln(x+y)$.

4) Considere as funções $f(t)=\sqrt{t}$, $g(x,y)=1-(x-1)^2-(y-2)^2$ e encontre $f\circ g$, $D(f\circ g)$ e $(f\circ g)=(3/4,2)$.

5) Uma função polinomial de duas variáveis $x, y$ é uma função $f$ tal que $f(x,y)$ é a soma de termos da forma $cx^n y^m$, onde $c$ é um número real e $n$ e $m$ são inteiros não negativos. O grau da função polinomial é determinado pela maior soma dos expoentes de $x$ e $y$ que aparecem em qualquer termo. Determine o grau das seguintes funções polinomiais:

a) f (x, y) $=x^2y+2x+1$ e $g(x,y)=x^5+x^4y^2+x^3y+3$;

b) defina função racional de duas variáveis usando o conceito de função racional de uma variável;

c) dê um exemplo de função racional de duas variáveis e determine o seu domínio.

## 3.2 Gráficos e curvas de nível

Como no estudo das funções de uma variável, podemos definir o gráfico de uma função de várias variáveis.

**Definição 3.3** Seja $f$ uma função de $n$ variáveis. O gráfico de $f$ é o conjunto de pontos do espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$graf(f)=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n,f(x_1,x_2,\ldots,x_n))\in\mathbb{R}^{n+1}\mid(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D(f)\}.$$

No caso em que $n=1$, o gráfico de uma função $f$ de uma variável é uma curva $C$ com equação $y=f(x_1)$.

Quando $n=2$, o gráfico de uma função $f$ é uma superfície $S$ com equação $z=f(x_1,x_2)$.

Quando $n=3$, não podemos esboçar o gráfico da função $f$, pois ele está no espaço tetradimensional.

**Exemplo 3.8.** Esboce o gráfico da função $f(x, y) = 3 - 2x - 3y$.

**Solução:** Para esboçar o gráfico de uma função, temos que conhecer o domínio desta função. O domínio da função $f$ é $D(f) = \mathbb{R}^2$ e o gráfico da função $f$ é o conjunto

$$graf\,(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3 - 2x - 3y\}.$$

Geometricamente, o gráfico de $f$ representa um plano.

Se na equação $z = 3 - 2x - 3y$ fizermos:

$x = 0$ e $y = 0$, vem $z = 3$

$x = 0$ e $z = 0$, vem $y = 1$

$y = 0$ e $z = 0$, vem $x = \dfrac{3}{2}$.

Obtemos assim, os pontos $A_1 = (0, 0, 3)$, $A_2 = (0, 1, 0)$ e $A_3 = (\frac{3}{2}, 0, 0)$ nos quais o plano intercepta os eixos coordenados. A porção do gráfico que está no primeiro octante está esboçada na Figura 3.5.

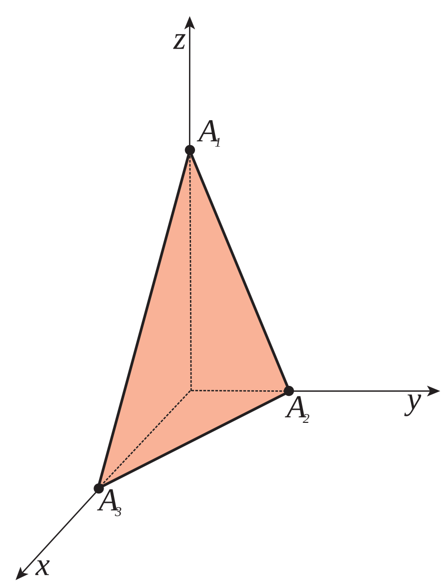



Figura 3.5

**Exemplo 3.9.** Trace um esboço do gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

**Solução:** O domínio da função é

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\},$$

e a imagem é $\operatorname{Im}(f) = [0, 4]$.

O gráfico da função é a superfície que tem equação $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. Elevando ao quadrado ambos os lados da equação e passando as variáveis para o primeiro membro, temos

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16.$$

A equação acima representa geometricamente a esfera com centro na origem e raio igual a 4. Mas, como $z \geq 0$, o gráfico de $f$ é o hemisfério superior da esfera.

A Figura 3.6 mostra um esboço do gráfico da $f$.

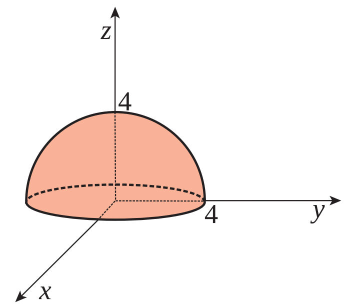



Figura 3.6

Se fosse pedido o gráfico da função $g(x,y) = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$, este seria o hemisfério inferior da esfera (ver Figura 3.7).

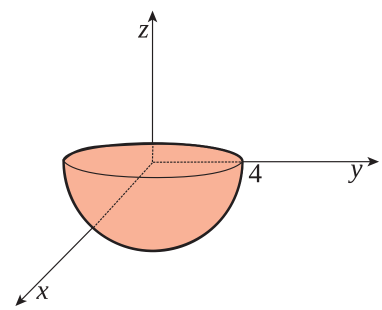



Figura 3.7

**Exemplo 3.10.** Esboce o gráfico da função $f(x,y) = x^2 + y^2$.

**Solução:** O domínio da função é

$$D(f) = \mathbb{R}^2,$$

e a imagem é

$$\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty).$$

O gráfico de $f$ é a superfície que tem equação $z = x^2 + y^2$, que representa um parabolóide circular ao longo do eixo dos $z$. A Figura 3.8 ilustra este exemplo.

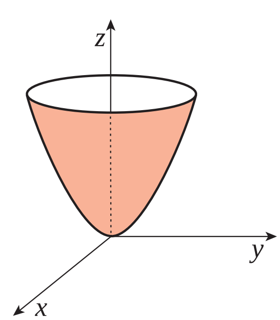



Figura 3.8

Note que o traço (interseção de uma superfície com um plano) da superfície $z = x^2 + y^2$ no plano xy $(z = 0)$ é a origem $(0, 0, 0)$ e os seus traços nos planos xz $(y = 0)$ e yz $(x = 0)$ são as parábolas $\begin{cases} z = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$, respectivamente.

Outra maneira conveniente de visualizar geometricamente uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$ consiste em representar, no plano xy, as chamadas curvas de nível de $f$.

**Definição 3.4** Seja $k$ um número real. Uma curva de nível, $C_k$, de uma função $f$ de duas variáveis é o conjunto de todos os pontos $(x, y) \in D(f)$, tais que $f(x, y) = k$, ou seja,

$$C_k = \{(x, y) \in D(f);\ f(x, y) = k\}.$$

Note que a curva de nível $f(x, y) = k$ é o traço do gráfico da função $f$ no plano $z = k$ projetado no plano xy.

**Exemplo 3.11.** Desenhe as curvas de nível da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ para $k = 0, 1, 4$ e $9$.

**Solução:** As curvas de nível são

$$C_k : x^2 + y^2 = k, \text{ onde } k \geq 0.$$

Para $k > 0$, as curvas de nível correspondem a uma família de circunferências com centro na origem e raio igual a $\sqrt{k}$. A curva de nível correspondente a $k = 0$ é o ponto $(0,0)$.

As curvas de nível para $k = 0, 1, 4$ e $9$ são mostradas na Figura 3.9.

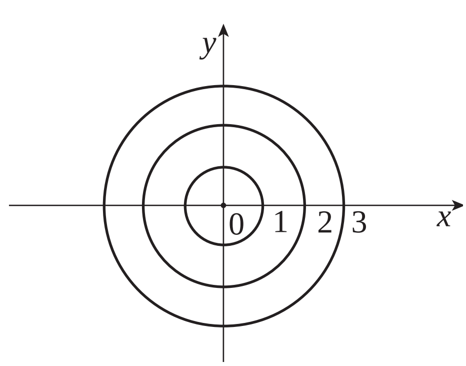



Figura 3.9

**Exemplo 3.12**. Desenhe as curvas de nível da função $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$ para $k = 0, 1,$ e $2$.

**Solução:** As curvas de nível são

$$C_k : \sqrt{4 - x^2 - 4y^2} = k \quad \text{ou} \quad x^2 + 4y^2 = 4 - k^2,$$

que correspondem a uma família de elipse com centro na origem e eixo maior sobre o eixo dos $x$, quando $-2 < k < 2$.

Para $k = 0$, temos a curva $x^2 + 4y^2 = 4$ ou $\dfrac{x^2}{2^2} + y^2 = 1$.

Para $k = 1$, temos $x^2 + 4y^2 = 3$ ou $\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$.

Para $k = 2$, temos $x^2 + 4y^2 = 0$, ou seja, a origem $(0,0)$.

A Figura 3.10 ilustra este exemplo.

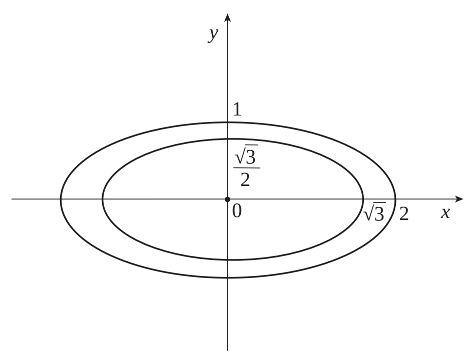



**Figura 3.10**

Quando consideramos várias curvas de nível de uma dada função $f$, podemos ter uma idéia do gráfico dessa função. Às vezes, porém, somente este procedimento pode causar dificuldade para esboçar o gráfico corretamente. Um outro recurso útil para visualizar a forma do gráfico consiste em determinar a interseção deste com os planos coordenados *yz* e *xz*. (A interseção do gráfico com o plano $xy$ é a curva de nível $z = 0$).

**Exemplo 3.13.** Trace algumas curvas de nível e esboce o gráfico da função $f(x, y) = 1 - x^2$.

**Solução:** O domínio da função é $D(f) = \mathbb{R}^2$ e $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 1]$.

As curvas de nível da $f$ são

$$1-x^2=k,\ \text{ou}\ \ x^2=1-k,\ \text{ou ainda}\ |x|=\sqrt{1-k}\ \text{para}\ \ k\le 1,$$

que correspondem a uma família de retas paralelas ao eixo $y$ (ver Figura 3.11).

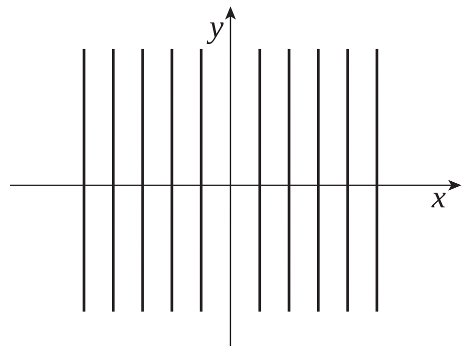



Figura 3.11

A interseção do gráfico de $f$ com o plano $yz$ é a reta $\begin{cases} z=1 \\ x=0 \end{cases}$.

A interseção do gráfico de $f$ com o plano $xz$ é a parábola $\begin{cases} z=1-x^2 \\ y=0 \end{cases}$, de concavidade voltada para baixo. As interseções do gráfico com os planos paralelos ao plano $xz$ são também parábolas. (Com o plano $y=k$ a interseção é a parábola $\begin{cases} z=1-x^2 \\ y=k \end{cases}$). Com estas informações, podemos visualizar o gráfico de $f$, que está esboçado na Figura 3.12.

Quando trabalhamos com função de três variáveis, não podemos desenhar o gráfico da função. Porém, podemos ter algum conhecimento de $f$ desenhando suas superfícies de nível, que são as superfícies com equação $f(x,y,z)=k$, onde $k$ é um número pertencente à imagem de $f$. Na Física, a função $f$ pode ser uma função potencial, dando o valor da energia potencial em cada ponto do espaço. As superfícies de nível são chamadas superfícies equipotenciais. A função $f$ pode representar a distribuição de temperatura. Neste caso, as superfícies de nível são chamadas superfícies isotermas.

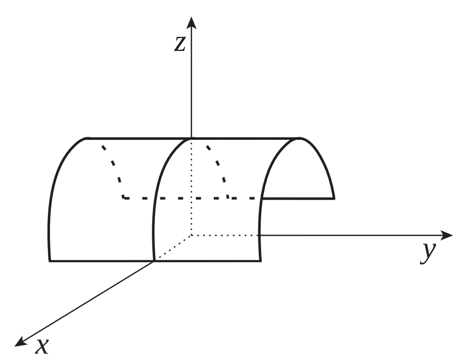



Figura 3.12

**Exemplo 3.14.** Determine as superfícies de nível da função $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

**Solução:** As superfícies de nível da função $f$ são

$$x^2 + y^2 + z^2 = k \text{, onde } k \geq 0.$$

Para $k > 0$, as superfícies de nível constituem uma família de esferas com centro na origem e raio $\sqrt{k}$. A superfície de nível correspondente a $k = 0$ é o ponto $(0, 0, 0)$. A Figura 3.13 ilustra o exemplo.

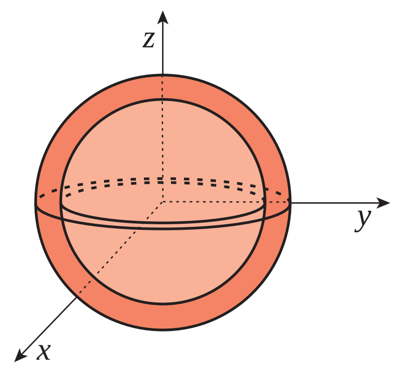



**Figura 3.13**

## Lista de exercícios

1) Faça um esboço das curvas de nível $C_k$ para valores de $k$ dados.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 9 \qquad k = -4, -2, -1$ e $0$;

b) $f(x, y) = y^2 - x \qquad k = 0, 1, 2$ e $3$.

2) Desenhe algumas curvas de nível e esboce o gráfico da função.

a) $f(x, y) = x + y - 1$;

b) $z = 25 - x^2 - y^2$.

3) A temperatura em um ponto $(x, y)$ de uma placa de metal plana é $t$ graus e $t = 2x^2 + y^2$. Trace as isotermas para $t = 6, 3, 1$ e $0$.

# 3.3 Limite e continuidade

Nesta seção, vamos estender os conceitos de limite e continuidade às funções de várias variáveis. Para isso, vamos precisar dos conceitos de distância entre dois pontos, bola aberta e ponto de acumulação.

### 3.3.1 Distância entre dois pontos, bola aberta e ponto de acumulação

**Definição 3.5** Sejam $P=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ e $A=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ pontos em $\mathbb{R}^n$. A distância entre $P$ e $A$, denotada por $\|P-A\|$, é dada por

$$\|P-A\|=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2}\ .$$

**Exemplo 3.15.** Dados os pontos $P=(1,\ -2,\ 3)$ e $A=(3,\ 1,\ -2)$ em $\mathbb{R}^3$, encontre $\|P-A\|$.

**Solução:**

$$\|P-A\|=\sqrt{(1-3)^2+(-2-1)^2+(3-(-2))^2}=\sqrt{38}\ u.c.$$

**Definição 3.6** Sejam $A=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ e $r>0$ um número real. A bola aberta de centro em $A$ e raio $r$, que indicaremos por $B(A;r)$, é definida como sendo o conjunto de todos os pontos $P=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, tais que $\|P-A\|<r$, ou seja:

$$B(A;r)=\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n;\ \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2}<r\right\}.$$

**Exemplo 3.16.**

a) Em $\mathbb{R}$, a bola aberta $B(a;r)$ é o intervalo aberto $(a-r,a+r)$.

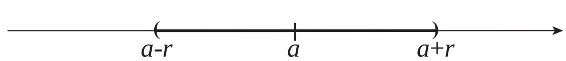



Figura 3.14

b) Em $\mathbb{R}^2$, a bola aberta $B((a_1,a_2);r)$ representa o conjunto dos pontos internos à circunferência de centro em $(a_1,a_2)$ e raio $r$.

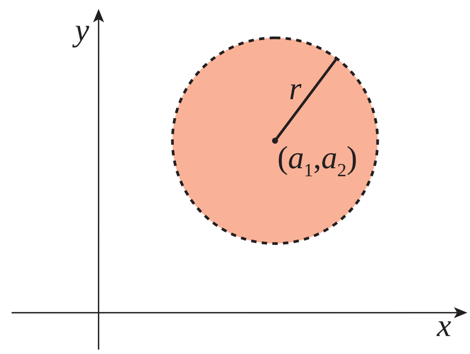



Figura 3.15

c) Em $\mathbb{R}^3$, a bola aberta $B\left(\left(a_1,a_2,a_3\right);r\right)$ representa os pontos internos à esfera com centro em $\left(a_1,a_2,a_3\right)$ e raio $r$.

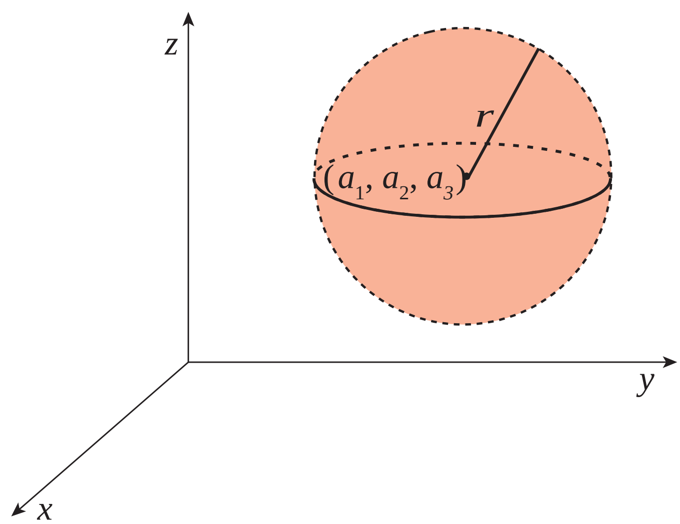



Figura 3.16

**Definição 3.7** Seja $S$ um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Um ponto $A$ é um ponto de acumulação de $S$, se toda bola aberta de centro em $A$ possui uma infinidade de pontos de $S$.

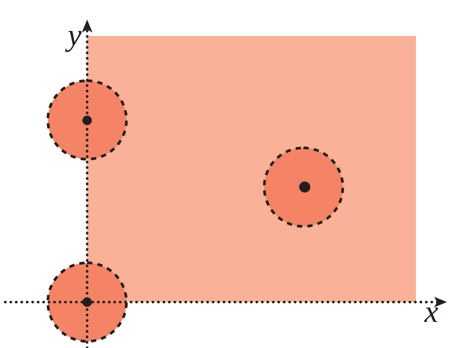



Figura 3.17

**Exemplo 3.17.** Seja $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0 \quad \text{e} \quad y>0\right\}$. Temos que todos os pontos pertencentes a $S$ são pontos de acumulação de $S$. Ainda, os pontos $(0,y)$ com $y\geq 0$ e $(x,0)$ com $x>0$ são pontos de acumulação de $S$ e não pertencem a $S$. (Ver Figura 3.17).

**Exemplo 3.18.** Seja $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N};\ 1\leq x\leq 5 \ \text{ e } \ 1\leq y\leq 4\right\}$. Este conjunto não possui ponto de acumulação, pois para qualquer ponto $P=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, a bola aberta de centro $P$ e raio $r<1$ não contém uma infinidade de pontos de $S$.

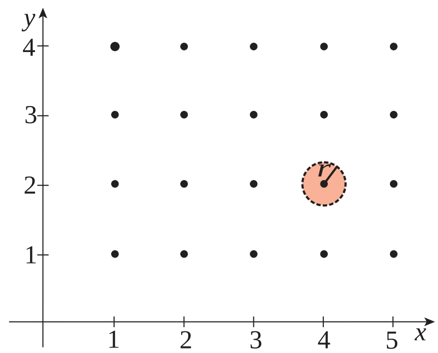



Figura 3.18

## 3.3.2 Limite de funções

**Definição 3.8** Sejam $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função, e $A$ um ponto de acumulação de $S$. Dizemos que o limite de $f(X)$ quando $X$ se aproxima de $A$ é um número real $L$, e escrevemos

$$\lim_{X \to A} f(X) = L$$

se, dado $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$|f(X) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } X \in S \text{ e } 0 < \|X - A\| < \delta.$$

O estudo de funções de três ou mais variáveis $(n \geq 3)$ difere pouco do estudo de funções de duas variáveis. Desta forma, por simplicidade de apresentação, no restante deste capítulo vamos estudar as funções de duas variáveis. Começaremos reescrevendo a definição de limite de funções de duas variáveis.

**Definição 3.9** Sejam $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e $(a,b)$ um ponto de acumulação de $S$. Dizemos que o limite de $f(x,y)$ quando $(x,y)$ se aproxima de $(a,b)$ é um número real $L$, e escrevemos

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = L,$$

se, dado $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } (x,y) \in S \text{ e } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta.$$

Em palavras, dizer que o limite da $f(x,y)$ é $L$ quando $(x,y)$ se aproxima de $(a,b)$ significa que podemos obter valores de

$f(x,y)$ tão próximos de $L$ quanto desejarmos, desde que tomemos $(x,y) \in D(f)$ suficientemente próximo de $(a,b)$, com $(x,y) \neq (a,b)$.

A definição de limite de função pode ser reformulada em termos de bolas. Assim, escrever $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, significa que dado um intervalo pequeno em torno de $L$ $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, podemos determinar uma bola $B((a,b);\delta)$, $\delta > 0$, tal que $f$ leva todos os pontos de $B((a,b);\delta)$, com possível exceção do ponto $(a,b)$, no intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

A Figura 3.19 ilustra a definição de limite para funções de duas variáveis.

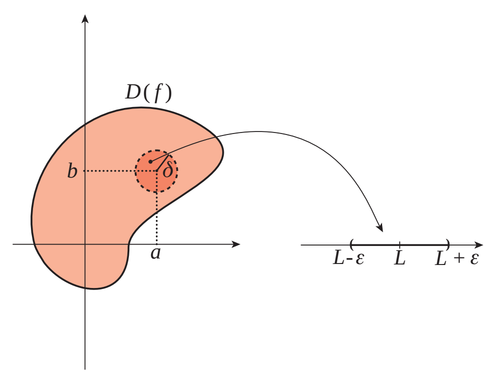



Figura 3.19

**Exemplo 3.19.** Usando a definição de limite, mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} (4x-3y) = 5$.

> **Solução:** Dado $\varepsilon > 0$, devemos encontrar $\delta > 0$ tal que
>
> $|(4x-3y)-5| < \varepsilon$ sempre que $0 < \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} < \delta$.
>
> Usando a desigualdade triangular, podemos escrever
>
> $$\begin{aligned} |(4x-3y)-5| &= |(4x-8)-(3y-3)| \\ &\leq 4|x-2| + 3|y-1|. \end{aligned}$$
>
> Como $|x-2| \leq \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$ e $|y-1| \leq \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$, temos
>
> $4|x-2| + 3|y-1| < 4\delta + 3\delta$ sempre que

$$0 < \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} < \delta.$$

Assim, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$, temos

$$|(4x-3y)-5| \le 4|x-2| + 3|y-1| < 4\frac{\varepsilon}{7} + 3\frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$$

sempre que $0 < \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} < \delta$.

Portanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} (4x-3y) = 5$.

A demonstração do Exemplo 3.20 pode ser facilmente adaptada para mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (cx+d) = ca+d \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} (cy+d) = cb+d, \qquad (1)$$

onde $c$ e $d$ são números reais quaisquer.

Para função de uma variável, quando escrevemos $x \to a$, existem duas formas possíveis para $x$ se aproximar de $a$, pela direita ou pela esquerda. Para funções de duas variáveis, quando escrevemos $(x,y) \to (a,b)$, existe uma infinidade de maneiras de $(x,y) \in D(f)$ se aproximar de $(a,b)$.

No caso de funções de uma variável, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe se e somente se $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ existirem e forem iguais. Para funções de duas variáveis, a Definição 3.9 diz que para existir $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ é necessário que $f(x,y)$ se aproxime do mesmo valor limite, independente da forma como $(x,y)$, ponto do domínio da função, se aproxima de $(a,b)$. Assim, se tivermos dois caminhos diferentes para $(x,y)$ se aproximar de $(a,b)$ tais que $f(x,y)$ tenha limites diferentes através destes caminhos, então o $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não vai existir. Este fato é apresentado no teorema a seguir.

**Teorema 3.1** Sejam $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis, $S_1$ e $S_2$ subconjuntos de $S$ e $(a,b)$ um ponto de acumulação de $S_1$ e $S_2$. Se $f(x,y)$ tem limites diferentes quando $(x,y)$ tende $(a,b)$ através dos pontos de $S_1$ e $S_2$ então $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não existe.

**Demonstração:** Vamos supor que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe, e é igual a $L \in \mathbb{R}$.

Da Definição 3.9, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$(x,y) \in S \text{ e } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \quad \Rightarrow \left| f(x,y) - L \right| < \varepsilon .$$

Como $S_1 \subset S$,

$$(x,y) \in S_1 \; e \quad 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

$$\Rightarrow \quad \left| f(x,y) - L \right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Da mesma forma, de $S_2 \subset S$, temos que

$$(x,y) \in S_2 \; e \quad 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

$$\Rightarrow \quad \left| f(x,y) - L \right| < \varepsilon. \tag{3}$$

De (2) e (3) temos que o limite de $f(x,y)$ é igual a $L$ quando $(x,y)$ se aproxima de $(a,b)$ tanto através de pontos de $S_1$ como de $S_2$. Mas isto contradiz a hipótese de que $f(x,y)$ tem limites diferentes quando $(x,y)$ se aproxima de $(a,b)$ por pontos de $S_1$ e por pontos de $S_2$.

Portanto,

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não existe.

A notação $\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ (x,y)\in S_1}} f(x,y)$ indica o limite da $f(x,y)$ quando $(x,y)$ tende para $(a,b)$, com $(x,y)$ restrito ao conjunto $S_1$.

**Exemplo 3.20.** Dada a função $f(x,y) = \dfrac{xy}{5x^2 + y^2}$, mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

**Solução:** Para mostrar que o limite não existe, vamos usar o Teorema 3.1. Tomaremos dois caminhos (conjuntos) diferentes para aproximar $(x,y)$ de $(0,0)$ e mostraremos que os limites são diferentes.

Seja $S_1 = \{(x,y) \in D(f) \mid y = 0\}$ o conjunto dos pontos do domínio da $f$ que estão sobre o eixo $x$. Então,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_1}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{5x^2+0} = 0\,.$$

Seja $S_2 = \{(x,y)\in D(f)\,|\, x = y\}$ o conjunto dos pontos do domínio da $f$ que estão sobre a reta $y = x$. Então

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{5x^2+x^2} = \frac{1}{6}.$$

Como

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_1}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_2}} f(x,y),$$

segue que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

**Exemplo 3.21.** Considere a função $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}$. Verifique se o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe.

**Solução:** Seja $S_1 = \{(x,y)\in D(f)\,|\, y = 0\}$. Então

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_1}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{2x(0)^2}{x^2+0^2} = 0\,.$$

Seja $S_2 = \{(x,y)\in D(f)\,|\, x = 2y\}$. Então

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_2}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(2y,y)$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{2(2y)y^2}{(2y)^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{4y^3}{5y^2} = 0.$$

Neste exemplo, dois caminhos diferentes levaram ao mesmo resultado. Não podemos concluir que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Vamos considerar um terceiro caminho, o conjunto $S_3 = \{(x,y)\in D(f)\,|\, y = x^2\}$. Temos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_3}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{2x(x^2)^2}{x^2+(x^2)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^5}{x^2+x^4} = 0.$$

Para três caminhos distintos tivemos o mesmo valor para o limite da $f(x,y)$ quando $(x,y)$ tende a $(0,0)$. Isto nos leva a suspeitar que o limite existe e é zero. Afirmamos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2} = 0$. Agora, vamos prová-lo.

Da definição de limite, dado $\varepsilon > 0$, devemos encontrar $\delta > 0$ tal que
$\left|\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$ sempre que $(x,y) \in D(f)$ e $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$,
ou seja,

$\dfrac{2|x|y^2}{x^2+y^2} < \varepsilon$ sempre que $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$.

Como $y^2 \leq x^2 + y^2$ e $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, temos

$$\frac{2|x|y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{2|x|\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = 2|x| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

Assim, tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ temos

$$\left|\frac{2xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{2|x|y^2}{x^2+y^2} \leq 2\sqrt{x^2+y^2} < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sempre que $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$. Portanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2} = 0$.

### 3.3.3 Propriedades dos limites de funções de duas variáveis

No que segue, apresentamos as propriedades dos limites de funções de duas variáveis sem demonstrá-las.

**Teorema 3.2** Se $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$, e $c \in \mathbb{R}$ então:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y) \pm g(x,y)\right] = L \pm M$;

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} c\, f(x,y) = c\,L$;

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \cdot g(x,y) = L \cdot M$;

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L}{M}$, desde que $M \neq 0$.

**Teorema 3.3** Se $g$ é uma função de duas variáveis tal que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=c$ e $f$ é uma função de uma variável contínua em $c$, então $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (f\circ g)(x,y)=f(c)$,
ou

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(g(x,y)) = f(\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)).$$

**Exemplo 3.22.** Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} \ln(xy+3x)$.

**Solução:** Aplicando os Teoremas 3.3 e 3.2 e a observação (1) feita após o Exemplo 3.19 temos:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(2,3)} \ln(xy,3x) &= \ln(\lim_{(x,y)\to(2,3)}(xy+3x))\\ &= \ln(\lim_{(x,y)\to(2,3)} x\cdot \lim_{(x,y)\to(2,3)} y + \lim_{(x,y)\to(2,3)} 3x)\\ &= \ln(2.3+6)\\ &= \ln 12.\end{aligned}$$

**Exemplo 3.23.** Calcule os limites.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{x+4y}{2x^2+3xy}$.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^3-x^2y}{x^2-y^2}$.

**Solução:**

a)

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x+4y}{2x^2+3xy} = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)}(x+4y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)}(2x^2+3xy)} = \frac{2+4\cdot(-1)}{2\cdot 2^2+3\cdot 2\cdot(-1)} = -1.$$

b) Temos $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)}(x^3-x^2y)=0$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)}(x^2-y^2)=0$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Para resolver o limite, fatora-se o numerador e denominador fazendo as simplificações possíveis.

Então,

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^3-x^2y}{x^2-y^2} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2}{x+y} = \frac{2^2}{2+2} = 1$$

Dizer que uma função real $g$ de duas variáveis é limitada significa que existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $|g(x,y)| \leq k$ para todo $(x,y) \in D(g)$.

**Teorema 3.4** Se $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$ e $g$ é uma função real de duas variáveis limitada em $D(g) \cap B((a,b);r)$ para $r > 0$, então

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\cdot g(x,y) = 0.$$

**Exemplo 3.24.** Verifique se o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}$ existe.

**Solução:** Vamos considerar as funções $f(x,y) = y$ e $g(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$. Podemos escrever

$$\frac{y^3}{x^2+y^2} = f(x,y)\cdot g(x,y).$$

Temos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y = 0,$ e $|g(x,y)| = \dfrac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$, ou seja, $g$ é limitada. Logo, pelo Teorema 3.4 temos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} = 0.$

Outra forma de mostrar que a função $g$ é limitada é usar coordenadas polares. Fazendo

$$x = r\cos\theta \text{ e } y = r\operatorname{sen}\theta,$$

Temos

$$|g(x,y)| = \left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{r^2\cos^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta}\right| = \left|\frac{r^2\cos^2\theta}{r^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}\right|$$

$$= |\cos^2\theta| \leq 1 \text{ para todo } (x,y) \neq (0,0).$$

Logo, $g$ é limitada.

## Lista de exercícios

1) Use a definição de limite para mostrar que $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} (3x+2y) = 8.$

2) Calcule os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \left(4x^3+2x^2y-y^2+2\right);$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{x^2y-2x^2-4y+8}{xy-y}.$

3) Mostre que os seguintes limites não existem.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{8x^2y^2}{x^4+y^4}$;

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{2x^2+y^4}$.

4) Calcule o limite, se existir, ou mostre que ele não existe.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)} (x+4y+xy)$;

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-2xy}{x^3+y^2}$;

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{3+yx}{x-y+2}$;

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y^2+2yx^3}{(y^2+x^2)^2}$;

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-3)} \dfrac{x^2y^4-9}{x^3y+3x}$.

## 3.3.4 Continuidade de funções

**Definição 3.10** Sejam $f: S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função, e $(a,b) \in S$ um ponto de acumulação de $S$. Dizemos que $f$ é contínua no ponto $(a,b)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Quando $f$ não é contínua no ponto $(a,b)$, dizemos que $f$ é descontínua em $(a,b)$.

Dizemos que $f$ é contínua, se $f$ for contínua em todos os pontos do domínio.

**Exemplo 3.25.** Considere a função de duas variáveis $f(x,y) = 3x + y^2$.

a) Mostre que $f$ é contínua no ponto $(2,3)$;

b) Mostre que $f$ é contínua.

**Solução:**

a) Pelas propriedades de limite

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(2,3)} \left(3x+y^2\right) = 3\cdot 2+3^2 = 15 = f(2,3).$$

Logo, $f$ é contínua no ponto $(2,3)$.

b) Seja $(a,b)\in D(f)=\mathbb{R}^2$. Temos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(3x+y^2\right) = 3a+b^2 = f(a,b).$$

Como $(a,b)$ é um ponto qualquer, segue que $f$ é contínua.

**Exemplo 3.26.** Seja a função definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{5x^2+y^2},\ se\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0,\ se\ (x,y)=(0,0). \end{cases}.$$

Verifique se $f$ é contínua em $(0,0)$.

**Solução:** Vimos no Exemplo 3.20 que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{5x^2+y^2} \text{ não existe.}$$

Logo, $f$ é descontínua em $(0,0)$.

**Teorema 3.5** Sejam $f$ e $g$ funções contínuas no ponto $(a,b)$. Então

a) $f+g$ é contínua em $(a,b)$;

b) $f-g$ é contínua em $(a,b)$;

c) $f\cdot g$ é contínua em $(a,b)$;

d) $\dfrac{f}{g}$ é contínua em $(a,b)$, desde que $g(a,b)\neq 0$.

A demonstração do Teorema 3.5 é uma aplicação direta das propriedades dos limites de funções.

**Teorema 3.6**

a) Uma função polinomial de duas variáveis é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

b) Uma função racional de duas variáveis é contínua em todos os pontos de seu domínio.

**Demonstração:**

a) Basta notar que uma função polinomial é soma de produtos das funções contínuas $f(x,y)=x$, $g(x,y)=y$ e $h(x,y)=c$, onde $c\in\mathbb{R}$ (ver Exercício 3.5 da Seção 3.1.1). Aplicando os itens (a) e (c) do Teorema 3.5 repetidas vezes, temos o resultado desejado.

b) Uma função racional é o quociente de duas funções polinomiais. Como funções polinomiais são funções contínuas, segue do item (d) do Teorema 3.5 que uma função racional é uma função contínua.

**Exemplo 3.27.** Considere as funções $f(x,y)=4x^3+3xy+2$ e $g(x,y)=\dfrac{4x^2-3x+y}{x^2+y^2-1}$.

a) $f$ é contínua? Justifique.

b) $g$ é contínua? Justifique.

**Solução:**

a) $f$ é contínua em $\mathbb{R}^2$, pois $f$ é uma função polinomial.

b) $g$ é contínua em todos os pontos de seu domínio, pois é uma função racional.

**Teorema 3.7** Sejam $f$ uma função de uma variável e $g$ uma função de duas variáveis. Se $g$ é contínua em $(a,b)$ e $f$ é contínua em $g(a,b)$, então a função composta $f\circ g$ é contínua em $(a,b)$.

**Exemplo 3.28.** Considere a função $h(x,y)=\operatorname{sen}(x+y)$. Analise a continuidade da $h$.

**Solução:** A função $h(x,y)=\operatorname{sen}(x+y)$ é a composta da função $f(t)=\operatorname{sen} t$ com a função $g(x,y)=x+y$. A função $g$ é contínua em $\mathbb{R}^2$, pois é uma função polinomial e a função $f$ é contínua em $\mathbb{R}$. Portanto, pelo Teorema 3.7 temos $h$ contínua em $\mathbb{R}^2$.

## Lista de exercícios

1) Determine o conjunto dos pontos de continuidade de $f$.

a) $f(x,y) = 4x^2 + y^2 + 3$;

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}, \; se\; (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \; se\; (x,y) = (0,0). \end{cases}$

2) Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, \; se\; (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \; se\; (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

$f$ é contínua em $(0,0)$? Justifique.

3) Analise a continuidade das funções abaixo:

a) $f(x,y) = \begin{cases} x+y, \; se\; (x,y) \neq (0,0) \\ 1, \; se\; (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

b) $g(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-1}$.

4) Esboce a região de continuidade das seguintes funções:

a) $f(x,y) = e^{x+y-2}$;

b) $g(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$.

# Resumo

Os principais assuntos estudados neste capítulo foram:

- definição de função de várias variáveis;
- domínio e imagem de função, e representação gráfica do domínio;
- gráficos e curvas de nível;
- o conceito e cálculo de limite de função de várias variáveis;
- definição de função contínua e suas propriedades. É importante saber analisar se uma função é contínua ou não.

# Respostas

- Seção 3.1.1

1) $V(x,y,z) = xyz$.

2) a) $D(f) = \mathbb{R}^2$; $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$;

b) $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 2^2\}$; $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$.

4) a) $(f \circ g)(x,y) = \sqrt{1 - (x-1)^2 - (y-2)^2}$;

b) $D(f \circ g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$;

c) $(f \circ g)(\frac{3}{4}, 2) = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

5) a) $3$; $6$.

- Seção 3.3.3.1

2) a) 1; b) 0.

4) a) $-10$; b) Não existe; c) $5$; d) Não existe; e) 0; f) -6.

- Seção 3.3.4.1

1) a) $\mathbb{R}^2$; b) $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

2) Sim.

# Capítulo 4

## Derivadas parciais e máximos e mínimos de funções de várias variáveis

# Capítulo 4

## Derivadas parciais e máximos e mínimos de funções de várias variáveis

*Neste capítulo, discutiremos a noção de diferenciabilidade de funções de várias variáveis e veremos como aplicar as derivadas parciais para encontrar pontos de máximos e mínimos de funções de mais de uma variável. Iniciamos definindo a derivada parcial de uma função de duas variáveis.*

## 4.1 Derivada parcial

**Definição 4.1** Sejam $f$ uma função de duas variáveis, $x$ e $y$, e $S = \{(x,y) \in D(f); (x,y) \text{ é ponto de acumulação de } D(f)\}$. A derivada parcial de $f$ em relação a $x$ é a função denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, tal que o seu valor em qualquer ponto $(x,y) \in S$ é dado por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}, \tag{1}$$

se o limite existir.

Analogamente, a derivada parcial de $f$ em relação a $y$ é a função, denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, tal que o seu valor em qualquer ponto $(x,y) \in S$ é dado por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}, \tag{2}$$

se o limite existir.

Outras notações para a função derivada parcial de $f$ em relação a $x$ são $D_x f$, $D_1 f$, $f_1$, $f_x$.

De forma semelhante, as notações $D_y f$, $D_2 f$, $f_2$, $f_y$ representam a função derivada parcial de $f$ em relação a $y$.

As notações $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $D_1 f(x,y)$, $D_x f(x,y)$, $f_x(x,y)$ representam o valor da função derivada parcial de $f$ em relação a $x$ no ponto $(x,y)$. Analogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $D_2 f(x,y)$, $D_y f(x,y)$, $f_y(x,y)$, representam o valor da derivada parcial de $f$ em relação a $y$ no ponto $(x,y)$.

As notações $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são também usadas para indicar $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, respectivamente.

Se $z = f(x,y)$, escrevemos $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ para indicar $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Seja $(a,b)$ um ponto do domínio da $f$. As funções derivadas parciais de $f$ no ponto $(a,b)$ podem ser escritas como:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a}, \text{ se o limite existir} \quad (3)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b}, \text{ se o limite existir.} \quad (4)$$

**Exemplo 4.1.** Considere a função $f(x,y) = 2x^2 - 3xy$. Determine $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

**Solução:**

i) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)^2 - 3(x+h)y - \left(2x^2 - 3xy\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\left[x^2 + 2xh + (h)^2\right] - 3xy - 3hy - 2x^2 + 3xy}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4xh + 2(h)^2 - 3hy}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (4x + 2h - 3y)$$

$$= 4x - 3y$$

ii) $$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 - 3x(y+h) - (2x^2 - 3xy)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 - 3xy - 3xh - 2x^2 + 3xy}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} -3x$$

$$= -3x.$$

**Exemplo 4.2.** Considere a função $f(x, y) = 3x + y - 7$.

a) Encontre $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$ usando (1);

b) Encontre $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1)$ usando (4).

**Solução:**

a) $$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h, 2) - f(1, 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(1+h) + 2 - 7 - (3 + 2 - 7)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3 + 3h - 5 + 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h}$$

$$= 3.$$

b) $$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = \lim_{y \to 1} \frac{f(2, y) - f(2, 1)}{y - 1}$$

$$= \lim_{y \to 1} \frac{3 \cdot 2 + y - 7 - (3 \cdot 2 + 1 - 7)}{y - 1}$$

$$= \lim_{y \to 1} \frac{y - 1}{y - 1}$$

$$= 1.$$

Seja $f$ uma função de duas variáveis $x$ e $y$. Suponha que deixamos somente $x$ variar e que mantemos fixo o valor de $y$, digamos $y = k$, onde $k$ é uma constante. Neste caso, estamos com uma função de uma única variável $x$, ou seja, $g(x) = f(x,k)$. Observando a Definição 4.1, temos que a derivada parcial da $f$ em relação a $x$ é a derivada da função $g$ de uma única variável obtida mantendo-se fixo o valor de $y$. Analogamente, a derivada parcial de $f$ em relação a $y$ é a derivada da função $h(y) = f(k,y)$ de uma única variável, $y$, obtida mantendo fixo o valor de $x$. Olhando desta maneira, para calcular a $\frac{\partial f}{\partial x}$, vamos considerar $y$ como uma constante e derivar $f$ com relação a $x$, e para calcular $\frac{\partial f}{\partial y}$, vamos olhar $x$ como constante e derivar $f$ com relação a $y$.

**Exemplo 4.3.** Encontre as derivadas parciais das funções seguintes:

a) $f(x,y) = 4x^3 + 3xy + 5y^2 + 3$;

b) $f(x,y) = \cos\left(3x + y^2\right)$.

**Solução:**

a) $D_1 f(x,y) = 12x^2 + 3y$ e $D_2 f(x,y) = 3x + 10y$.

b) $D_1 f(x,y) = -3\operatorname{sen}\left(3x + y^2\right)$ e $D_2 f(x,y) = -2y\operatorname{sen}\left(3x + y^2\right)$.

**Exemplo 4.4.** Considere a função $z = xy^2 e^{x+y}$. Encontre $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

**Solução:**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^{x+y} + xy^2 e^{x+y} = y^2 e^{x+y}(1+x) \text{ e}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2yx e^{x+y} + xy^2 e^{x+y} = xy e^{x+y}(2+y).$$

## 4.1.1 Interpretação geométrica das derivadas parciais

Seja $f$ uma função de duas variáveis. O gráfico de $f$ é uma superfície $S$ de equação $z = f(x,y)$.

Se $f(a,b)=c$ então o ponto $P(a,b,c)$ é um ponto de $S$. Fazendo a interseção do plano $y=b$ com a superfície $S$, temos a curva $C_1$ (ver Figura 4.1) dada pelas equações

$$y=b \text{ e } z=f(x,y).$$

A curva $C_1$ é o gráfico da função $g(x)=f(x,b)$, e a derivada da $g'(a)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ representa a inclinação da reta tangente à curva $C_1$ no ponto $(a,b,c)$.

De modo semelhante, a inclinação da reta tangente à curva $C_2$ (interseção da superfície $S$ com o plano $x=a$) no ponto $(a,b,c)$ é a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$. (Ver Figura 4.2)

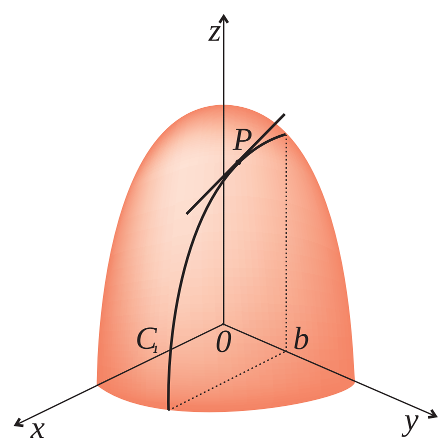



Figura 4.1

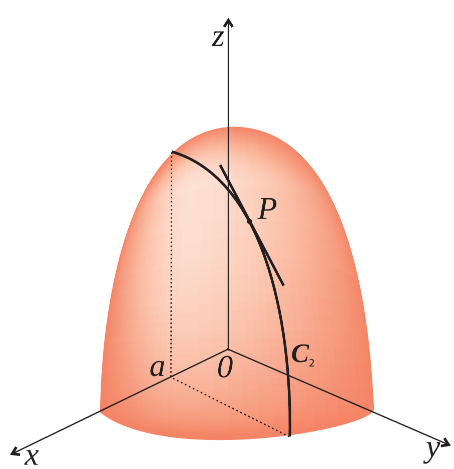



Figura 4.2

Os conceitos de derivadas parciais estudados para função de duas variáveis se estendem de modo natural às funções de mais de duas variáveis.

**Definição 4.2** Sejam $f$ uma função de $n$ variáveis, $x_1, x_2, ..., x_n$, e $S = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D(f);\ (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ é ponto de acumulação de $D(f)\}$. A derivada parcial de $f$ em relação a $x_i$ é a função denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, tal que o seu valor em qualquer ponto $(x_1, x_2, ..., x_n) \in S$ é dado por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{h_i}$$

se este limite existir.

## Lista de exercícios

1) Seja $f(x, y) = 3x^2 + 2xy - 2$. Usando a definição de derivada parcial, encontre:

a) $D_1 f(x, y)$;

b) $f_y(5, 1)$.

2) Calcule as derivadas parciais das funções:

a) $z = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$;

b) $z = \dfrac{x^2 y}{x^2 + 2y^2}$.

3) Verifique que a função $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & se\ (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x, y) = (0,0) \end{cases}$ admite derivadas parciais em $(0,0)$, mas não é contínua neste ponto.

# 4.2 Diferenciabilidade

Nesta seção, vamos estender o conceito de diferenciabilidade de função de uma variável às funções de duas variáveis. Para isto, escreveremos a definição de diferenciabilidade de função de uma variável de modo conveniente, para que possamos generalizar a definição.

Considere uma função $f$ de uma variável real. Dizer que $f$ é diferenciável (derivável) em $t=a$ significa que o $\lim\limits_{t \to a} \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ existe, isto é, é um número real. Em outras palavras, $f$ é diferenciável em $a$ quando existe um número real denotado por $f'(a)$, tal que

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a} = f'(a).$$

Podemos reescrever este limite da seguinte forma:

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t)-f(a)-f'(a)(t-a)}{t-a} = 0,$$

que é equivalente a

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t)-\left[f(a)+f'(a)(t-a)\right]}{|t-a|} = 0.$$

Assim, $f$ é diferenciável em $a$ se existir um número real, $f'(a)$, tal que

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t)-\left[f(a)+f'(a)(t-a)\right]}{|t-a|} = 0.$$

Agora temos condições de apresentar o conceito de diferenciabilidade de função de duas variáveis.

**Definição 4.3** Sejam $f$ uma função de duas variáveis e $(a,b) \in D(f)$, um ponto de acumulação de $D(f)$. Dizemos que $f$ é diferenciável no ponto $(a,b)$, se as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ existem e se

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} \frac{f(x,y)-\left[f(a,b)+\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)\right]}{\left\|(x,y)-(a,b)\right\|} = 0,$$

onde $\left\|(x,y)-(a,b)\right\| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$.

Quando $f$ é diferenciável em todos os pontos de seu domínio, dizemos que $f$ é diferenciável.

**Exemplo 4.5.** Mostre que $f(x,y)=2x+3y$ é diferenciável.

> **Solução:** Seja $(a,b)\in D(f)=\mathbb{R}^2$. Para mostrar que $f$ é diferenciável em $(a,b)$ devemos mostrar que $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ existem e que o limite da Definição 4.3 é zero.
>
> A função $f$ tem derivadas parciais em $(a,b)$e são dadas por
> $$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=3.$$
>
> Agora,
> $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-\left[f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)\right]}{\|(x,y)-(a,b)\|}=$$
> $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{2x+3y-\left[2a+3b+2(x-a)+3(y-b)\right]}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0.$$
>
> Como $(a,b)$ é um ponto qualquer em $\mathbb{R}^2$, temos que $f$ é diferenciável.

Vimos para função de uma variável que, se $f$ é derivável em um ponto $t=a$, então $f$ é contínua neste ponto. Este resultado continua válido para funções de duas variáveis.

**Teorema 4.1** Se $f$ é diferenciável em $(a,b)\in D(f)$ então $f$ é contínua em $(a,b)$.

**Exemplo 4.6.** Considere a função

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{5x^2+y^2}, & se\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & se\ (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$ $f$ é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

> **Solução:** Mostramos que $f$ é descontínua no ponto $(0,0)$ (Exemplo 3.26), portanto $f$ não é diferenciável em $(0,0)$.

Nem sempre é fácil usar a Definição 4.3 para verificar a diferenciabilidade de uma função. O próximo teorema fornece uma condição suficiente para que uma função seja diferenciável.

**Teorema 4.2** Sejam $f$ uma função de duas variáveis e $(a,b) \in D(f)$. Se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ existem na bola aberta $B\big((a,b);r\big)$ e são contínuas em $(a,b)$, então $f$ é diferenciável em $(a,b)$.

**Exemplo 4.7.** Verifique se as funções abaixo são diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$.

a) $f(x,y) = 3x^2y + 4xy^2$;

b) $h(x,y) = e^{x+y}$.

**Solução:**

a) A função $f$ tem derivadas parciais em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ e são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy + 4y^2 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 8xy.$$

As derivadas parciais são contínuas, pois são funções polinomiais. Portanto, $f$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

b) A função $h$ tem derivadas parciais em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$. Estas são dadas por

$$\frac{\partial h}{\partial x} = e^{x+y} \text{ e } \frac{\partial h}{\partial y} = e^{x+y}.$$

Como as funções derivadas parciais são contínuas em $\mathbb{R}^2$, temos $h$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

## 4.3 Diferencial

Quando estudamos funções de uma variável, $y = f(x)$, definimos a diferencial de $y$ como sendo $dy = f'(x)\Delta x$. Dessa definição decorre que a diferencial de $y = x$ é igual ao acréscimo da variável independente, ou seja, $dx = \Delta x$. Vimos que para $\Delta x$ pequeno, a diferencial de $y$ fornece uma boa aproximação para o acréscimo $\Delta y$ da variável dependente. Nesta seção, vamos definir a diferencial de uma função de duas variáveis $z = f(x,y)$, e veremos que esta representa uma boa aproximação para o acréscimo da variável $z$ quando os acréscimos das variáveis independentes são pequenos.

**Definição 4.4** Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável. A diferencial de $f$ em $(x, y) \in D(f)$, denotada por $df$ ou $dz$, é dada por

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy, \tag{5}$$

ou, usando a notação clássica,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

onde $dx$ e $dy$ são as diferenciais das variáveis independentes $x$ e $y$ respectivamente.

A diferencial $dz$ também é chamada de *diferencial total* de $f(x, y)$.

Se tomarmos $dx = \Delta x = x - a$ e $dy = \Delta y = y - b$ na expressão (5), a diferencial da $f$ no ponto $(a, b)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$df(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

Comparando esta igualdade com a Definição 4.3, vemos que quando $\Delta x$ e $\Delta y$ se aproximam de zero $(x \to a \quad e \quad y \to b)$ teremos $\Delta z = f(x, y) - f(a, b)$ se aproximando da $df(a, b)$, ou seja, de $dz$. Portanto, para valores pequenos de $\Delta x = dx$ e $\Delta y = dy$ a diferencial em $z$ fornece uma boa aproximação para $\Delta z$.

**Exemplo 4.8.** Calcule a diferencial de $f(x, y) = x^2 + y^2$ no ponto $(1, 2)$.

**Solução:** A diferencial de $f$ no ponto $(1, 2)$ é dada por

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)dy.$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4$, temos $dz = 2dx + 4dy$.

**Exemplo 4.9.** Considere a função $z = f(x, y) = 7x + 3y^2$.

a) Determine a diferencial total $dz$.

b) Calcule $\Delta z$ e $dz$, se $x$ variar de $2$ para $2{,}05$ e $y$ variar de $1$ para $0{,}98$. Determine $\Delta z - dz$.

**Solução:**

a) A diferencial total é

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$
$$dz = 7dx + 6ydy.$$

b) O ponto $(a,b) = (2,1)$, $dx = \Delta x = 0{,}05$ e $dy = \Delta y = -0{,}02$.

O incremento de $z$ é

$$\Delta z = f(2{,}05; 0{,}98) - f(2,1)$$
$$\Delta z = 7(2{,}05) + 3(0{,}98)^2 - (7 \cdot 2 + 3 \cdot 1^2)$$
$$= 0{,}2312,$$

e a diferencial total é

$$dz = 7(0{,}05) - 6 \cdot 1(0{,}02) = 0{,}23.$$

Portanto,

$$\Delta z - dz = 0{,}0012.$$

**Exemplo 4.10.** Use diferencial para encontrar um valor aproximado para a expressão

$$(0{,}995)^4 + (2{,}001)^3.$$

**Solução:** A expressão da qual queremos determinar um valor aproximado é do tipo $x^4 + y^3$. Assim, vamos considerar a função

$$z = f(x,y) = x^4 + y^3.$$

Queremos encontrar $f(x+\Delta x, y+\Delta y) = (x+\Delta x)^4 + (y+\Delta y)^3$ onde

$x = 1$, $y = 2$, $dx = \Delta x = -0{,}005$ e $dy = \Delta y = 0{,}001$.

Como $dz \cong \Delta z$ temos $f(x+\Delta x, y+\Delta y) \cong f(x,y) + dz$.

Calculando $f(1,2)=1+8=9$ e $dz=\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)dy$ temos

$$dz=4\cdot 1^3(-0,005)+3\cdot 2^2(0,001)=-0,008.$$

Segue que

$$(0,995)^4+(2,001)^3\cong 9-0,008=8,992.$$

Os conceitos de diferenciabilidade e diferencial apresentados para funções de duas variáveis se estendem de modo natural às funções com mais de duas variáveis. Deixamos a cargo do aluno escrever estas definições para funções com $n$ variáveis.

## Lista de exercícios

1) Usando a definição de diferenciabilidade de função, mostre que a função $f(x,y)=xy$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

2) Usando o Teorema 4.2, verifique que as funções abaixo são diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$.

a) $f(x,y)=4x^3y^2+3x+5$; b) $f=(x,y)=\operatorname{sen}(x+y^2)$.

3) Calcular a diferencial das seguintes funções:

a) $z=xe^{xy}$; b) $f(x,y,z)=x^2+\ln y-z^2$.

4) Encontre um valor aproximado para a expressão $\left(1,01e^{0,015}\right)^7$.

5) Mostre que, se $f(x,y)$ é diferenciável em $(a,b)$ então $f$ é contínua em $(a,b)$.

# 4.4 Regra da cadeia

A regra da cadeia para funções de uma variável é usada para calcular a derivada de funções compostas. Nesta seção, vamos apresentar a regra da cadeia para funções de várias variáveis. Inicialmente, consideramos dois casos específicos de composição de funções de duas variáveis e, em seguida, apresentamos a regra da cadeia generalizada.

**Teorema 4.3** (Regra da cadeia – caso 1) Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de $x$ e $y$, onde $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são funções diferenciáveis de $t$. Então a função $z = f(x(t), y(t))$ é uma função diferenciável de $t$ e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

**Exemplo 4.11.** Sejam $z = f(x, y) = \ln(3x^2 + y)$, $x = (t+1)$ e $y = 5t$.

a) Determine $\frac{dz}{dt}$ usando a regra da cadeia;

b) Calcule a função composta $z = f(x(t), y(t))$ e $\frac{dz}{dt}$.

**Solução:**

a) Aplicando a regra da cadeia

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{6x}{3x^2 + y} \cdot 1 + \frac{1}{3x^2 + y} \cdot 5.$$

Substituindo $x = (t+1)$ e $y = 5t$ na expressão acima temos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{6(t+1) + 5}{3(t+1)^2 + 5t},$$

ou seja,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{6t + 11}{3(t+1)^2 + 5t}.$$

b) A função composta é

$$z = f(x(t), y(t)) = f((t+1), 5t) = \ln(3(t+1)^2 + 5t)$$

A derivada de $z$ em relação a $t$ (calculada a partir desta expressão) é

$$\frac{dz}{dt} = \frac{3 \cdot 2(t+1) + 5}{3(t+1)^2 + 5t} = \frac{6t + 11}{3(t+1)^2 + 5t}.$$

**Exemplo 4.12.** Sejam $z = x^2 + 2xy + y^2$, $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$. Determine $\frac{dz}{dt}$.

**Solução:** Usando a regra da cadeia

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= (2x+2y)(-\text{sen}\, t) + (2x+2y)(\cos t)$$
$$= (2x+2y)(\cos t - \text{sen}\, t)$$
$$= 2(\cos t + \text{sen}\, t)(\cos t - \text{sen}\, t),$$

ou seja,

$$\frac{dz}{dt} = 2\left(\cos^2 t - \text{sen}^2\, t\right).$$

**Teorema 4.4** (Regra da cadeia – caso 2) Suponha que $z = f(u,v)$ seja uma função diferenciável de $u$ e $v$, onde $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$ são funções diferenciáveis de $x$ e de $y$. Então $z = f(u(x,y), v(x,y))$ é uma função de $x$ e $y$, e

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

**Exemplo 4.13.** Se $z = f(u,v) = e^u \cos v$, onde $u = xy$ e $v = x + y^2$, determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ usando a regra da cadeia.

**Solução:**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= (e^u \cdot \cos v)y - e^u \cdot \text{sen}\, v \cdot 1$$

$$= e^{xy}\left[y \cdot \cos(x+y^2) - \text{sen}\,(x+y^2)\right]$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= (e^u \cdot \cos v)x - (\text{sen}\, v) \cdot e^u \cdot 2y$$

$$= e^{xy}\left[x\cos(x+y^2) - 2y\,\text{sen}\,(x+y^2)\right].$$

**Observação:** A notação $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ não pode ser considerada como a razão de $\partial z$ e $\partial x$, pois nenhum destes símbolos isoladamente tem um significado próprio.

**Teorema 4.5** (Regra da cadeia generalizada) Suponha que $w = f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ seja uma função diferenciável de $n$ variáveis $u_1, u_2, \ldots, u_n$, onde cada $u_j$ é uma função diferenciável de $m$ variáveis, $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Então $w$ é uma função de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ e

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial x_i}, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, m.$$

**Exemplo 4.14.** Suponha que todas as funções sejam diferenciáveis

$$w = f(x, y, z),\ x = x(r, \theta, \gamma),\ y = y(r, \theta, \gamma) \text{ e } z = z(r, \theta, \gamma).$$

Determine $\dfrac{\partial w}{\partial r}$, $\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial \gamma}$.

**Solução:** Aplicando o Teorema 4.5 temos

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \gamma} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma}.$$

## 4.5 Derivação implícita

Vimos no estudo das funções de uma variável que uma equação do tipo $F(x, y) = 0$, onde $F(x, y)$ é uma expressão envolvendo $x$ e $y$ pode definir, implicitamente, uma ou mais funções, sendo $x$ a variável e $y$ a função, ou seja, $y = f(x)$. Nesta seção, vamos estudar a derivação (derivação parcial) de funções dadas de forma implícita. Consideraremos duas situações específicas.

**1ª Situação:** Suponhamos que a função $y = f(x)$ seja definida implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$. Se $f$ e $F$ são funções diferenciáveis e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \neq 0$, então podemos encontrar a derivada $\frac{dy}{dx}$ derivando ambos os lados da equação $F(x,y)=0$ em relação a $x$. Usando a regra da cadeia (caso 1) temos,

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

Como $\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))\neq 0$ e $\frac{dx}{dx}=1$, segue

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \qquad (6)$$

Para obter a fórmula (6), assumimos que a equação $F(x,y)=0$ define $y$ implicitamente em função de $x$. O Teorema da Função Implícita, demonstrado em cursos mais avançados, fornece condições segundo as quais essa hipótese é válida. Uma versão deste teorema diz:

Se $F$ é definida numa bola aberta contendo $(a,b)$, onde $F(a,b)=0, \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$ e $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ são funções contínuas nessa bola, então a equação $F(x,y)=0$ define $y$ como uma função de $x$ perto do ponto $(a,b)$, e a derivada dessa função é dada pela fórmula (6).

**Exemplo 4.15.** Supondo que a função $y=f(x)$ é definida implicitamente pela equação $\ln(xy)+3x=3y$, determine sua derivada $\frac{dy}{dx}$.

**Solução:** A equação dada pode ser escrita da seguinte forma:

$$F(x,y)=\ln(xy)+3x-3y=0.$$

Temos $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{y}{xy}+3$ e $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{x}{xy}-3$. Aplicando a fórmula (6) obtemos

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\left(\frac{3xy+y}{xy}\right)}{\frac{-3xy+x}{xy}}$$

$$= \frac{3xy + y}{3xy - x}.$$

**Exemplo 4.16.** Mostre que a equação $F(x, y) = x^2 y + \text{sen}\, y = 0$ define implicitamente uma função derivável $y = f(x)$.

**Solução:** Temos $F(x, y) = x^2 y + \text{sen}\, y$, função definida em $\mathbb{R}^2$, com $F(0,0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + \cos y$ contínuas em $\mathbb{R}^2$, e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Então pelo Teorema da Função Implícita, a equação $F(x, y) = 0$ define uma função derivável $y = f(x)$.

**2ª Situação:** Suponhamos que a função $z = f(x, y)$ seja dada implicitamente pela equação $F(x, y, z) = 0$. Se $f$ e $F$ são funções diferenciáveis e $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y)) \neq 0$, podemos aplicar a regra da cadeia para obter as $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$. Derivando os dois membros da equação $F(x, y, z) = 0$ em relação a $x$, temos

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Mas $\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$ e $\frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$, portanto

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

De modo semelhante, obtém-se

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Como no caso anterior, estamos assumindo que a equação $F(x, y, z) = 0$ define $z$ implicitamente como função de $x$ e $y$. Uma outra versão do Teorema da Função Implícita fornece as condições para que a hipótese seja válida.

**Exemplo 4.17.** Suponha que a função diferenciável $z = f(x, y)$ seja definida pela equação $xy + ze^z = 0$. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

**Solução:** Seja $F(x, y, z) = xy + ze^z = 0$.

Como $\dfrac{\partial F}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = x$ e $\dfrac{\partial F}{\partial z} = e^z + ze^z$, segue que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{e^z(1+z)} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x}{e^z(1+z)}.$$

## Lista de exercícios

1) Considere as funções $f(x, y) = 4y - 3x^2$, $x(t) = t^3 - 1$ e $y(t) = 1 - t^3$.

a) Calcule a função composta $z = f(x(t), y(t))$.

b) Encontre $\dfrac{dz}{dt}$ usando o item (a).

c) Encontre $\dfrac{dz}{dt}$ usando a regra da cadeia.

2) Use a regra da cadeia para determinar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, sabendo que $z = u^2 + v^2$, $u = x^2 - y^2$ e $v = e^{2xy}$.

3) Determine a derivada da função implícita $f$ tal que $y = f(x)$ está definida pela equação $x^4 - y + 4xy^3 - 78 = 0$.

4) Se $x^3 - xy + 4xz - 5 = 0$, calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ usando a regra de derivação de função implícita.

# 4.6 Gradiente e jacobiano

Nesta seção, vamos definir o gradiente de uma função, a matriz jacobiana e o determinante jacobiano. O gradiente de uma função aparece em diversas aplicações matemáticas. Usá-lo-emos no estudo de máximos e mínimos de funções de várias variáveis. O determinante jacobiano vai surgir quando estivermos estudando mudanças de variáveis em integrais duplas e triplas.

**Definição 4.5** Seja $z = f(x, y)$ uma função que admite derivadas parciais no ponto $(a, b)$. O gradiente de $f$ no ponto $(a, b)$, denotado por $\nabla f(a,b)$, é um vetor cujos componentes são as derivadas parciais de $f$ nesse ponto, ou seja,

$$\nabla f(a,b) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \right).$$

Quando trabalhamos com um ponto genérico $(x,y)$, escrevemos $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$. O símbolo $\nabla f$ é lido como *"gradiente de $f$ "*.

Estendemos a definição para funções com $n$ variáveis. Se $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, então o gradiente da $f$ em um ponto arbitrário é $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

**Exemplo 4.18.** Determine o gradiente da função $g(x,y,z) = xyz^2$ em um ponto$(x,y,z)$.

**Solução:**

$$\nabla g(x,y,z) = (yz^2, xz^2, 2xyz) \quad \text{ou} \quad \nabla g = (yz^2, xz^2, 2xyz).$$

**Definição 4.6** Sejam $f_1, f_2, ..., f_n$ funções de $m$ variáveis $x_1, x_2, ..., x_m$ que admitem derivadas parciais no ponto $A = (a_1, a_2, ..., a_m)$. A matriz formada pelas derivadas parciais no ponto $A$

$$J(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(A) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(A) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(A) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(A) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(A) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(A) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(A) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(A) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(A) \end{pmatrix},$$

é chamada de matriz jacobiana de $f_1, f_2, \cdots, f_n$ em relação a $x_1, x_2, \cdots, x_m$ no ponto $A$.

Se $n = m$, então podemos calcular o determinante da matriz jacobiana. Definimos o determinante jacobiano de $f_1, f_2, ..., f_n$ em relação a $x_1, x_2, ..., x_n$, denotado por $\frac{\partial(f_1, f_2, ..., f_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}$, como sendo o determinante da matriz jacobiana.

Observe que as linhas da matriz jacobiana no ponto $A$ são os gradientes das funções $f_1, f_2, ..., f_n$ no ponto $A$.

**Exemplo 4.19.** Sejam $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$. Determine a matriz jacobiana de $x$ e $y$ em relação a $r$ e $\theta$ no ponto $(1, \pi)$ e calcule o determinante jacobiano em um ponto arbitrário $(r, \theta)$.

**Solução:** Temos $x = x(r,\theta)$ e $y = y(r,\theta)$. A matriz jacobiana em um ponto arbitrário $(r,\theta)$ é

$$J(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Quando $r = 1$ e $\theta = \pi$ temos

$$J(1,\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

O determinante jacobiano é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

**Exemplo 4.20.** Sejam $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$ e $z = z$. Encontre $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}$.

**Solução:**

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

## 4.7 Derivadas parciais sucessivas e Teorema de Schwarz

Se $z = f(x,y)$ é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ são funções de duas variáveis. A partir destas funções podemos considerar suas derivadas parciais $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$, $(f_y)_y$, chamadas derivadas parciais de segunda ordem de $f$.

Notações:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = D_{11}f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = D_{12}f = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = D_{21}f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = D_{22}f = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Destacamos que a notação $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ significa que derivamos primeiro em relação a $x$ e depois em relação a $y$. A notação $f_{yx}$ indica que derivamos primeiro em relação a $y$ e depois em relação a $x$.

As definições das derivadas parciais de ordem superior são similares.

**Exemplo 4.20.** Dada a função $f(x,y) = x^3y + 4x^2y^3$, calcule:

a) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$; b) $f_{xx}$ ; c) $D_{121}f$ ; d) $f_{xxy}$.

**Solução:**

a) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y + 8xy^3\right) = 3x^2 + 24xy^2$.

b) $f_x = 3x^2y + 8xy^3$ e $f_{xx} = 6xy + 8y^3$.

c) $D_1 f = 3x^2y + 8xy^3$, $D_{12}f = 3x^2 + 24xy^2$ e $D_{121}f = 6x + 24y^2$.

d) $f_{xxy} = 6x + 24y^2$.

**Exemplo 4.21.** Considere a função $f(x,y) = e^{3x}\ \text{sen}\ y$. Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

**Solução:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3e^{3x}\ \text{sen}\ y \ \text{ e } \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3e^{3x} \cos y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{3x} \cos y \ \text{ e } \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3e^{3x} \cos y.$$

Observando o Exemplo 4.21, vemos que as derivadas parciais mistas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ são iguais. Isto significa que, para esta função, a ordem de derivação não importa. Na verdade, esta propriedade é satisfeita pela maioria das funções que aparecem na prática. Existem, porém, funções onde as derivadas mistas são diferentes (ver Exercício 6 desta seção). O próximo teorema fornecerá condições que garantirão que as derivadas parciais mistas sejam iguais.

**Teorema 4.6** (Teorema de Schwarz) Suponhamos que $f$ seja uma função de duas variáveis, $x$ e $y$, definida em bola aberta $B$ com derivadas parciais de segunda ordem contínuas em $B$. Então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \text{ para todo } (a,b) \in B.$$

Como conseqüência do teorema acima, se a função $z = f(x,y)$ tem todas as derivadas parciais contínuas em uma bola aberta, então a ordem da derivação não altera o resultado. Por exemplo:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}.$$

## Lista de exercícios

1) Considere a função $f(x,y,z) = x \operatorname{sen} yz + y \operatorname{sen} xz$. Calcule $\nabla f(x,y,z)$.

2) Considere as funções $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $g(x,y) = e^{xy}$. Determine a matriz jacobiana de $f$ e $g$ em relação a $x$ e $y$, $J(x,y)$. Calcule o determinante jacobiano em um ponto arbitrário $(x,y)$.

3) Calcule as derivadas parciais de segunda ordem da função $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 + y)$ e verifique que $f_{xy} = f_{yx}$.

4) Considere a função $f(x,y,z) = \cos(x + y + z)$. Calcule $f_{123}$ e $f_{321}$.

5) Verifique que $x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, onde $f(x,y) = (x+y)e^{\frac{x}{y}}$.

6) Considere a função

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & se\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=1$.

## 4.8 Máximos e mínimos de funções de várias variáveis

Vimos que uma das aplicações da derivada de funções de uma variável é o estudo de máximos e mínimos de funções. Nesta seção, vamos ampliar a teoria de máximos e mínimos a funções com duas variáveis. Destacamos que todo o estudo pode ser feito para funções com mais de duas variáveis.

**Definição 4.7** Seja $z=f(x,y)$ uma função de duas variáveis. Dizemos que o ponto $(a,b)\in D(f)$ é:

i) um ponto de máximo absoluto (ou global) de $f$ se $f(a,b)\geq f(x,y)$ para todo $(x,y)\in D(f)$;

ii) um ponto de mínimo absoluto (ou global) de $f$ se $f(a,b)\leq f(x,y)$ para todo $(x,y)\in D(f)$.

O número $f(a,b)$ é o valor máximo de $f$ ou valor mínimo de $f$, conforme o ponto $(a,b)$ é um ponto de máximo absoluto ou de mínimo absoluto de $f$.

**Definição 4.8** Seja $z=f(x,y)$ uma função de duas variáveis. Dizemos que o ponto $(a,b)\in D(f)$ é:

i) um ponto de máximo local de $f$ se existir $\delta>0$ tal que $f(a,b)\geq f(x,y)$ para todo $(x,y)\in D(f)\cap B((a,b);\delta)$;

ii) um ponto de mínimo local de $f$ se existir $\delta>0$ tal que $f(a,b)\leq f(x,y)$ para todo $(x,y)\in D(f)\cap B((a,b);\delta)$.

A Figura 4.3 ilustra as definições acima.

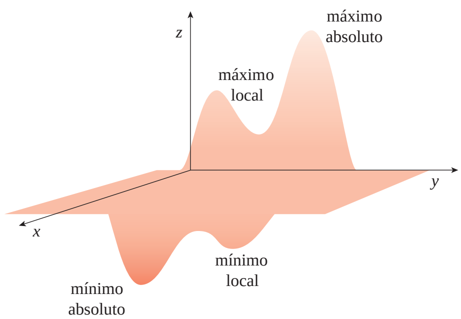



Figura 4.3

**Exemplo 4.22.** Considere a função $f$ definida por

$$f(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^2-1.$$

O ponto $(1,2)$ é ponto de mínimo global de $f$, pois $f(1,2)\leq f(x,y)$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

A Figura 4.4 ilustra o Exemplo.

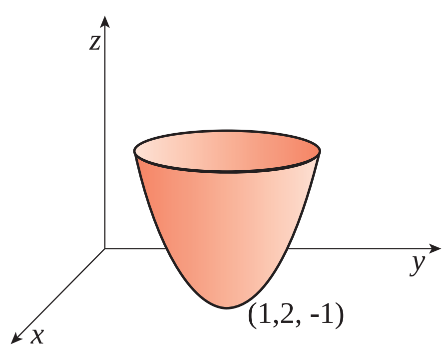



Figura 4.4

**Exemplo 4.23.** Seja $f$ a função definida em $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y)=-x^2-y^2$. O ponto $(0,0)$ é um ponto de máximo global de $f$, pois $f(x,y)=-x^2-y^2\leq 0$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ e $f(0,0)=0$, logo $f(x,y)\leq f(0,0)$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

**Exemplo 4.24.** Considere a função $f$ definida em $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y)=x\,y$. O ponto $(0,0)$ não é um ponto de máximo nem ponto de mínimo de $f$, pois para qualquer bola aberta $B((0,0);\delta)$ temos:

a) $f(x,y)>f(0,0)=0$ se $(x,y)$ é um ponto da $B((0,0);\delta)$ situado no primeiro ou terceiro quadrante;

b) $f(x,y) < f(0,0)$ se $(x,y)$ é um ponto da $B((0,0);\delta)$ situado no segundo ou quarto quadrante.

Portanto, não existe uma bola aberta $B((0,0);\delta)$ tal que $f(0,0) \le f(x,y)$ ou $f(0,0) \ge f(x,y)$ para todo $(x,y) \in B((0,0);\delta)$.

Vimos que se uma função $f$ de uma variável é derivável em um ponto $a$, e $a$ é um ponto de máximo ou mínimo local de $f$, então $f'(a) = 0$. O próximo teorema é uma extensão deste resultado às funções de duas variáveis.

**Teorema 4.7** (Condição necessária). Seja $z = f(x,y)$ uma função definida na bola aberta $B((a,b);r)$. Se $f$ tem um máximo ou mínimo local em $(a,b)$ e as derivadas parciais de primeira ordem existem em $(a,b)$, então $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

**Demonstração:** Suponhamos que $(a,b)$ seja um ponto de máximo local de $f$. Então, o ponto $a$ é ponto de máximo da função $g$, definida por $g(x) = f(x,b)$, de onde resulta que $g'(a) = 0$. Como $g'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, segue que $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$. De forma análoga, mostra-se que $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

□

**Definição 4.9** Um ponto $(a,b)$ é denominado ponto crítico de $f$ se as derivadas parciais de primeira ordem de $f$ em $(a,b)$ forem ambas nulas ou se $f$ não for diferenciável em $(a,b)$.

Observação: Um ponto crítico que não é um ponto de máximo nem de mínimo é chamado de ponto de sela. Pelo Exemplo 2.24, a função $f(x,y) = xy$ tem ponto de sela em (0,0).

**Exemplo 4.25.** Determine os pontos críticos de $f(x,y) = x^2 + y^2$.

**Solução:** Como $f$ tem derivadas parciais em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$, para determinar os pontos críticos de $f$ basta resolver o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}, \text{ ou seja, } \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}.$$

A única solução deste sistema é o ponto $(0,0)$. Portanto, a função tem $(0,0)$ como único ponto crítico.

**Exemplo 4.26.** Determine os pontos críticos da função $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$.

**Solução:** A função $f$ é uma função polinomial. Assim, suas derivadas parciais existem para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Para encontrar os pontos críticos, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}, \text{ ou seja, } \begin{cases} 2x + y = -3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, obtemos $(x,y) = (-3,3)$ como única solução. Logo, $(-3,3)$ é o único ponto crítico de $f$.

O Teorema 4.7 fornece condições para identificar os pontos críticos de uma função $f$. Agora, precisamos saber, entre os pontos críticos, quais são pontos de máximo ou mínimo. O próximo teorema fornece condições que nos auxiliam na identificação dos pontos críticos. O resultado é análogo ao critério da segunda derivada para função de uma variável.

**Teorema 4.8** Seja $z = f(x,y)$ uma função tal que suas derivadas parciais de segunda ordem sejam contínuas em uma bola aberta $B((a,b);r)$, e suponhamos que $(a,b)$ seja um ponto crítico de $f$. Seja $H(x,y)$ o determinante

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix}.$$

i) Se $H(a,b) > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$, então $(a,b)$ é um ponto de mínimo local de $f$.

ii) Se $H(a,b) > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, então $(a,b)$ é um ponto de máximo local de $f$.

iii) Se $H(a,b) < 0$, então $(a,b)$ é ponto de sela.

iv) Se $H(a,b)=0$, nada se pode afirmar.

**Exemplo 4.27.** Considere a função $f(x,y)=x^2+xy+y^2+3x-3y+4$. Determine, caso existam, os pontos de máximo local e os pontos de mínimo local da função.

**Solução:** Vimos no Exemplo 4.26 que o ponto $(-3,3)$ é o único ponto crítico de $f$. Para classificá-lo vamos usar o Teorema 4.8. Para isto, precisamos calcular as derivadas parciais de segunda ordem. Temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=1, \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2.$$

Assim,

$$H(-3,3)=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3.$$

Como $H(-3,3)=3>0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3,3)=2>0$, segue que $(-3,3)$ é um ponto de mínimo local de $f$.

**Exemplo 4.28.** Dada a função $f(x,y)=x^3+y^3+3xy$, encontre os pontos de máximo e mínimo locais, caso existam.

**Solução:** Vamos determinar inicialmente os pontos críticos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases}, \text{ ou seja, } \begin{cases} 3x^2+3y=0 \\ 3x+3y^2=0 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, temos os pontos críticos $(0,0)$ e $(-1,-1)$.

Calculando as derivadas de segunda ordem e $H(x,y)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=6y$$

e

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{vmatrix}=36xy-9.$$

Vamos analisar o ponto $(0,0)$.

Temos $H(0,0)=-9<0$. Assim, $(0,0)$ é um ponto de sela.

Agora, vamos analisar o ponto $(-1,-1)$.

Temos $H(-1,-1)=36-9=27>0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1)=-6<0$, logo $(-1,-1)$ é um ponto de máximo local de $f$.

Portanto, a função $f$ tem um máximo local em $(-1,-1)$ enquanto $(0,0)$ é um ponto de sela de $f$.

**Exemplo 4.29.** Mostre que a área total de um paralelepípedo retangular de volume dado $V$ é mínima quando o sólido é um cubo.

**Solução:** A função que representa a área total do paralelepípedo é

$$f(x,y,z)=2xy+2yz+2xz.$$

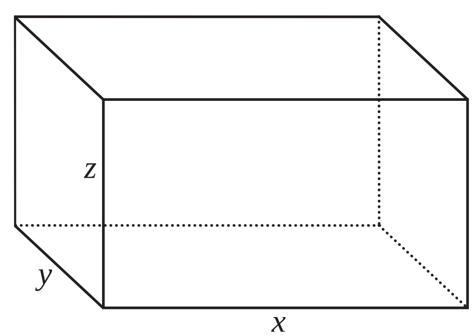



Figura 4.5

O volume $(\mathrm{V}=\text{constante})$ é dado por $V=x\,y\,z$ e $x,y,z>0$. Assim, a função que expressa a área total pode ser escrita da seguinte forma:

$$g(x,y)=2xy+\frac{2V}{x}+\frac{2V}{y}.$$

Agora, vamos encontrar os pontos de mínimo da função $g$.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial g}{\partial y}=0\end{cases}\text{, ou seja, }\quad \begin{cases}2y-\dfrac{2V}{x^2}=0\\[2mm] 2x-\dfrac{2V}{y^2}=0\end{cases}.$$

Resolvendo o sistema e observando que $x,y\neq 0$, temos $x=\sqrt[3]{V}$ e $y=\sqrt[3]{V}$.

Segue que o único ponto crítico é $(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V})$.

Calculando as derivadas parciais de segunda ordem e $H(x,y)$, obtemos:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=\frac{4V}{x^3},\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y)=2,\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)=2,\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=\frac{4V}{y^3}$$

e

$$H(x,y)=\begin{vmatrix}\frac{4V}{x^3} & 2\\ 2 & \frac{4V}{y^3}\end{vmatrix}=\frac{16V^2}{(xy)^3}-4.$$

Como $H(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V})=16-4=12>0$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V})=\frac{4V}{3}>0$, temos que $(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V})$ é ponto de mínimo relativo. Pela natureza física do problema, o ponto $(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V})$ é um ponto de mínimo absoluto.

Para $x=\sqrt[3]{V}$ e $y=\sqrt[3]{V}$ segue que $z=\frac{V}{xy}=\frac{V}{\sqrt[3]{V}\sqrt[3]{V}}=\sqrt[3]{V}$.

Portanto, o paralelepípedo retangular que possui menor área total é o cubo.

## Lista de exercícios

1) Determine, caso existam, os pontos de máximo local e os pontos de mínimo local das funções dadas por:

a) $f(x,y)=-(x-4)^2-(y-2)^2$.

b) $f(x,y)=4x^2-5y^2+2xy+4x-8y+10$.

c) $f(x,y)=3xy^2+x^3-3x$.

2) Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com $12\,m^2$ de papelão. Determine o volume máximo de tal caixa.

# 4.9 Máximos e mínimos de funções com restrições

Na seção anterior, vimos como determinar máximos e mínimos de funções cujas variáveis estavam livres, ou seja, não havia restrição alguma sobre as variáveis. Vimos também o Exemplo 4.29, que trata de minimizar uma função com três variáveis, $f(x,y,z)$, onde as variáveis estão restritas a uma condição do tipo $g(x,y,z)=0 \quad (V-xyz=0)$. Para resolvê-lo, transformamos o problema com três variáveis e uma "restrição" em um problema "irrestrito" com duas variáveis e aplicamos a teoria de minimização (irrestrita) vista na Seção 4.8.

Nesta seção, vamos tratar de máximos e mínimos de funções com restrições a partir das quais não podemos (ou não queremos) explicitar uma variável em função das outras. Para resolver problemas desta natureza empregaremos o método dos multiplicadores de Lagrange que será estabelecido no teorema abaixo. Inicialmente, vamos considerar o problema de otimização com apenas uma restrição de igualdade, especificamente, o problema de minimizar (ou maximizar) $f(x,y,z)$ sujeita a $g(x,y,z)=0$.

**Teorema 4.9** Seja $f(x,y,z)$ uma função diferenciável em $D(f)$. Seja $g(x,y,z)$ uma função com derivadas parciais contínuas em $D(f)$ tal que $\nabla g(x,y,z)\neq(0,0,0)$ para todo $(x,y,z)\in S$, onde $S=\{(x,y,z)\in D(f)\,|\,g(x,y,z)=0\}$. Se $(a,b,c)\in S$ é ponto de máximo ou mínimo local de $f$ em $S$ então existe um número real $\lambda$ tal que

$$\nabla f(a,b,c)+\lambda\nabla g(a,b,c)=0.$$

O número $\lambda$ é chamado multiplicador de Lagrange.

Observando o Teorema 4.9, temos que se $(a,b,c)$ é um ponto de máximo ou de mínimo local de $f$, sujeita à restrição $g(x,y,z)=0$, então $(a,b,c,\lambda)$ é um possível ponto de máximo ou mínimo da função

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z),$$

denominada de função de Lagrange. Assim, para se determinar os possíveis pontos $(x,y,z)$ de máximo ou mínimo da função $f(x,y,z)$ restrita a $g(x,y,z)=0$ pelo método de Lagrange, basta determinar os possíveis pontos de máximo ou mínimo $(x,y,z,\lambda)$ da função lagrangena, isto é, resolver o sistema,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \qquad \text{ou seja,} \qquad \begin{cases} \nabla f(x,y,z) + \lambda \nabla g(x,y,z) = \vec{0}, \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

onde $\vec{0}$ representa o vetor nulo, neste caso, $\vec{0} = (0,0,0)$.

Note que os pontos obtidos na resolução do sistema $(7)$ são candidatos a extremos da função $f$. Assim, para classificá-los em máximo ou mínimo, precisamos de outros meios, como por exemplo, argumentos geométricos.

**Exemplo 4.30.** Determine, caso existam, os possíveis pontos de máximo ou mínimo da função dada por $f(x,y) = 4xy$, sabendo-se que $x^2 + y^2 = 1$.

**Solução:** Neste caso, $f(x,y) = 4xy$ e $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. A função lagrangeana associada ao problema é

$$L(x,y,\lambda) = 4xy + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right),$$

e o sistema que devemos resolver é

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) = \vec{0} \\ g(x,y) = 0 \end{cases}, \text{ ou seja, } \begin{cases} 4y + 2x\lambda = 0 \\ 4x + 2y\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, encontramos os seguintes pontos:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2\right), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -2\right) \text{ e } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right).$$

Portanto, os possíveis pontos de máximo ou de mínimo são:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ e } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

**Exemplo 4.31.** Determine o ponto do plano $x+4y+3z=2$ que está mais próximo do ponto $(1,-1,-1)$.

**Solução:** A distância de um ponto $(x,y,z)$ ao ponto $(1,-1,-1)$ é dada por

$$d=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2}.$$

Como $d$ será um mínimo quando $d^2$ for um mínimo, podemos formular o problema solicitado da seguinte forma:

$$\text{minimizar } f(x,y,z)=(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$$

$$\text{sujeita a } g(x,y,z)=x+4y+3z-2=0.$$

Assim, aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases}\nabla f(x,y,z)+\lambda\nabla g(x,y,z)=\vec{0}\\ g(x,y,z)=0\end{cases}, \text{ ou seja, } \begin{cases}2(x-1)+\lambda=0\\ 2(y+1)+4\lambda=0\\ 2(z+1)+3\lambda=0\\ x+4y+3z-2=0\end{cases}.$$

A solução do sistema é $\left(\dfrac{17}{13},\dfrac{3}{13},\dfrac{-1}{13},\dfrac{-8}{13}\right)$.

O ponto $\left(\dfrac{17}{13},\dfrac{3}{13},\dfrac{-1}{13}\right)$ é um candidato a extremo. Por inspeção, verifica-se que é o ponto do plano que está mais próximo do ponto $(1,-1,-1)$, e a distância é

$$d=\sqrt{\left(1-\frac{17}{13}\right)^2+\left(\frac{3}{13}+1\right)^2+\left(\frac{-1}{13}+1\right)^2}=\frac{4}{13}\sqrt{26}.$$

O método dos multiplicadores de Lagrange pode ser aplicado em problemas com várias restrições, para isso devemos usar vários multiplicadores. Em particular, se o problema for minimizar ou maximizar a função $f(x,y,z)$ sujeita às restrições $g(x,y,z)=0$ e $h(x,y,z)=0$, então a função lagrangeana associada é

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+\lambda_1 g(x,y,z)+\lambda_2 h(x,y,z).$$

E o sistema que deverá ser resolvido é

$$\begin{cases}\nabla f(x,y,z)+\lambda_1\nabla g(x,y,z)+\lambda_2\nabla h(x,y,z)=\vec{0}\\ g(x,y,z)=0\\ h(x,y,z)=0.\end{cases}$$

## Lista de exercícios

1) Determine os possíveis pontos de máximo ou mínimo da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeita a $x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0$.

2) Determine a distância mínima entre o ponto $(0,1)$ e a curva $x^2 = 4y$.

3) Determine o valor máximo da função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na curva da interseção do plano $x - y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

# Resumo

Os principais assuntos estudados neste capítulo foram:

- Definições de derivadas parciais e diferenciabilidade de função.
- O Teorema 4.2, que fornece uma condição suficiente para a diferenciabilidade de função.
- O conceito de diferencial, que pode ser usado como aproximação para o acréscimo da variável dependente.
- Derivação de função composta (regra da cadeia) e derivação de função dada de forma implícita.
- Aplicação das derivadas parciais para determinar os pontos de máximos e mínimos de funções.

# Respostas

- **Seção 4.1.2**

1) a) $D_1 f(x,y) = 6x + 2y$;  b) $f_y(5,1) = 10$.

2) a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2xy^3$;

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 - 4y$.

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4xy^3}{\left(x^2+2y^2\right)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^4 - 2x^2y^2}{\left(x^2+2y^2\right)^2}$

- **Seção 4.3.1**

3) a) $dz = \left(e^{xy} + xy\, e^{xy}\right)dx + \left(x^2\, e^{xy}\right)dy$;

b) Escrevendo $w = f(x,y,z)$ $dw = 2xdx + \frac{1}{y}dy - 2zdz$.

4) $1{,}175$.

- **Seção 4.5.1**

1) a) $z = -3t^6 + 2t^3 + 1$; b) $\frac{dz}{dt} = -18t^5 + 6t^2$.

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x\left(x^2 - y^2\right) + 4y\, e^{4xy}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = -4y\left(x^2 - y^2\right) + 4x\, e^{4xy}$.

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{-4x^3 + 4y^3}{12xy^2 - 1}$.

4) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-3x^2 - y + 4z}{4x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{4}$.

- **Seção 4.7.1**

1) $\nabla f(x,y,z) = (\text{sen } yz + yz \cos xz \text{ , } xz \cos yz + \text{sen } xz \text{ , } xy \cos yz + xy \cos xz)$

2) $J(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y e^x & x e^y \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = 2(x^2 e^y - y^2 e^x)$.

3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \cos(x^2+y) - 4x^2 \text{ sen } (x^2+y)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\text{sen } (x^2+y)$;

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2x \text{ sen } (x^2+y)$

4) $f_{123} = \text{sen } (x+y+z)$.

- **Seção 4.8.1**

1) a) $(4, 2)$ é ponto de máximo.

b) $\left(-\dfrac{2}{7}, -\dfrac{6}{7}\right)$ é um ponto de sela.

c) $(0, 1)$ e $(0, -1)$ é um ponto de sela; $(1, 0)$ é um ponto de mínimo local; $(-1, 0)$ é um ponto de máximo local.

2) O volume máximo é $4m^3$.

- **Seção 4.9.1**

1) $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $\left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e $\left(0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

2) +1.

3) O valor máximo de $f$ é $3+\sqrt{29}$.

# Capítulo 5

## Integrais múltiplas

# Capítulo 5

## Integrais múltiplas

*Neste capítulo, vamos estudar as integrais duplas e triplas, que consistem numa extensão do conceito de integral definida para as funções de duas e três variáveis, respectivamente. Usaremos estes conceitos para resolver problemas que envolvem cálculos de área, volume, centro de massa e momento de inércia.*

## 5.1 Integral dupla

**Definição 5.1** Seja $z = f(x, y)$ uma função definida numa região $R$ do plano $xy$, fechada e limitada. Subdividimos $R$ em retângulos, traçando retas paralelas aos eixos $x$ e $y$. Numeramos os retângulos no interior de $R$ de 1 até $n$ e escolhemos um ponto arbitrário $(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$ em cada retângulo $R_i$. Em seguida, formamos a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_i)\Delta A_i\,, \tag{1}$$

onde $\Delta A_i$ é a área do retângulo $R_i$. (Ver Figura 5.1 (a))

Suponhamos que mais retas paralelas aos eixos dos $x$ e dos $y$ sejam traçadas, tornando as dimensões dos retângulos cada vez menores, fazendo isso de tal maneira que a diagonal máxima dos retângulos $R_i$ tenda a zero quando $n$ tender a infinito. Se

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_i)\Delta A_i$$

existir, este número será chamado integral dupla de $f(x, y)$ sobre a região $R$, e escrevemos

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_i)\Delta A_i = \iint_R f(x, y)\,dA.$$

Outras notações para a integral dupla:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \text{ e } \iint_R f(x,y)\,dy\,dx.$$

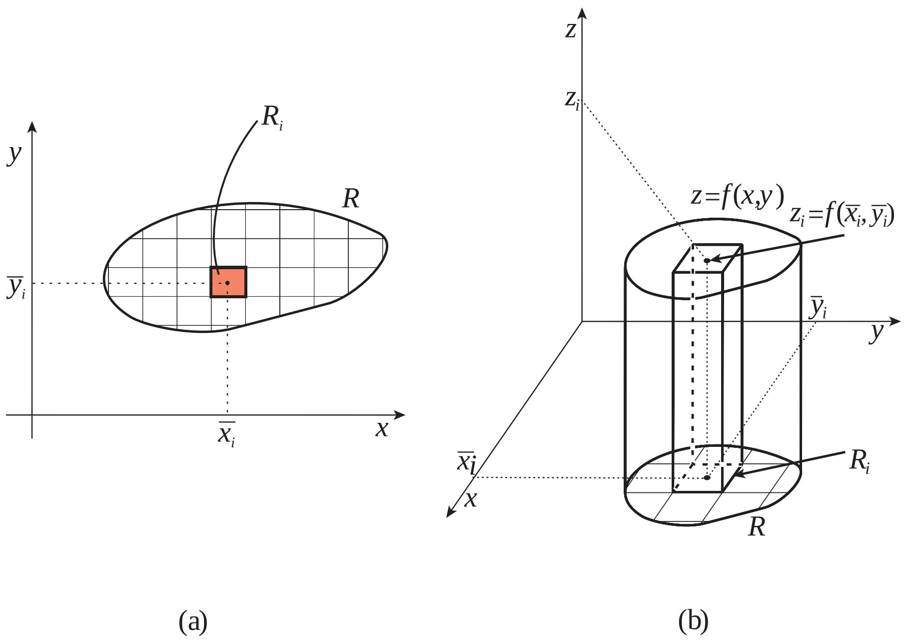



Figura 5.1

- Interpretação geométrica da integral dupla

Suponhamos que $f(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in R$. Observando a Figura 5.1 (b), temos que o número $f(\overline{x}_i, \overline{y}_i)\Delta A_i$ representa o volume do prisma cuja base é o retângulo $R_i$ e a altura, $f(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$. A soma $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_i)\Delta A_i$ fornece uma aproximação para o volume do sólido mostrado na Figura 5.1 (b). Quanto menor for área $\Delta A_i$ de cada retângulo $R_i$, melhor será a aproximação. Assim, quando $f(x,y) \geq 0$ sobre $R$, a $\iint_R f(x,y)\,dA$ representa o volume do sólido limitado acima pelo gráfico de $f$, abaixo pela região $R$ e lateralmente pelo cilindro vertical de base $R$.

Várias propriedades da integral dupla são análogas às propriedades da integral definida de uma função de uma variável. No que segue, listamos as que são mais usadas no cálculo de integrais. Admitiremos que todas as integrais existam.

- Propriedades da integral dupla

1) $\iint_R c\,f(x,y)\,dA = c\iint_R f(x,y)\,dA$, onde $c$ é uma constante.

2) $\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \iint_R g(x,y)\,dA$.

3) $\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA$, onde $R$ é composta de duas sub-regiões, $R_1$ e $R_2$, que não têm pontos em comum, exceto os pontos de suas fronteiras. (Ver Figura 5.2)

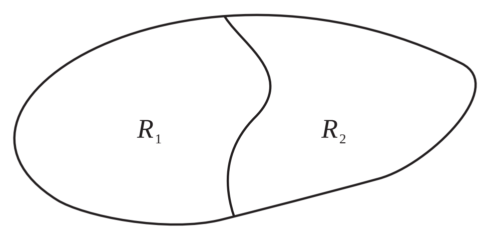



Figura 5.2

As demonstrações das propriedades acima seguem diretamente da definição de integral dupla e das propriedades de limites de funções.

## 5.1.1 Cálculo das integrais duplas

Quando estudamos a integral definida de uma função de uma variável, vimos que calcular a integral pela definição é trabalhoso. No caso da integral dupla, tentar obter a integral pela definição é ainda mais complicado. O procedimento prático que se utiliza é fazer duas integrações simples. O desenvolvimento rigoroso deste método é estudado em cursos mais avançados. No que segue, indicamos como tratar o cálculo de integral dupla em que a região $R$ é retangular, e o caso em que $R$ é uma região plana qualquer.

Se a região $R$ é um retângulo, digamos $R=[a,b]\times[c,d]$ (ver Figura 5.3), então a integral dupla é calculada da seguinte forma:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy$$
$$= \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx.$$

Ao calcular a "integral interna" na primeira igualdade, $x$ é a variável de integração e $y$ é considerada uma constante. Assim, efetivamos primeiro uma integração simples em $x$ e depois em $y$. Na segunda igualdade, ocorre o inverso.

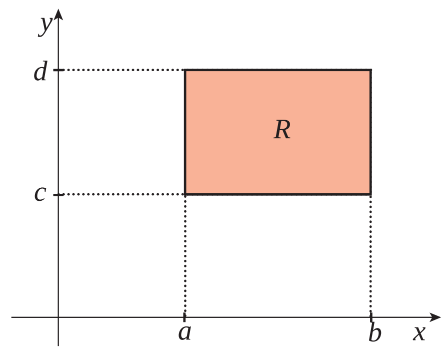



Figura 5.3

**Exemplo 5.1.** Calcule a integral dupla $\iint_R 3xy^2 dA$ sendo $R = [0, 1] \times [1, 2]$.

**Solução:**

$$\iint_R 3xy^2 dA = \int_1^2 \left[ \int_0^1 3xy^2 dx \right] dy$$

$$= \int_1^2 \left[ \frac{3x^2 y^2}{2} \Bigg|_0^1 \right] dy$$

$$= \int_1^2 \frac{3}{2} y^2 dy$$

$$= \frac{1}{2} y^3 \Big|_1^2 = \frac{7}{2}.$$

**Exemplo 5.2.** Calcule a integral $\iint_R x \operatorname{sen}(xy)\, dA$, onde $R = [0, \pi] \times [0, 1]$.

**Solução:**

$$\iint_R x \operatorname{sen} xy\, dA = \int_0^\pi \left[ \int_0^1 x \operatorname{sen}(xy)\, dy \right] dx$$

$$= \int_0^\pi \left[ x \left( -\frac{1}{x} \cos(xy) \right) \Bigg|_0^1 \right] dx$$

$$= \int_0^\pi -(\cos x - 1) dx$$

$$= \left(-\operatorname{sen} x + x\right)\Big|_0^{\pi} = \pi\,.$$

No caso em que a região $R$ é descrita por

$$R:\begin{cases} a \le x \le b \\ g(x) \le y \le h(x) \end{cases} \qquad \text{(Ver Figura 5.4)}$$

com $g$ e $h$ sendo funções contínuas em $[a,b]$, então a integral dupla é calculada da seguinte forma:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\right]dx.$$

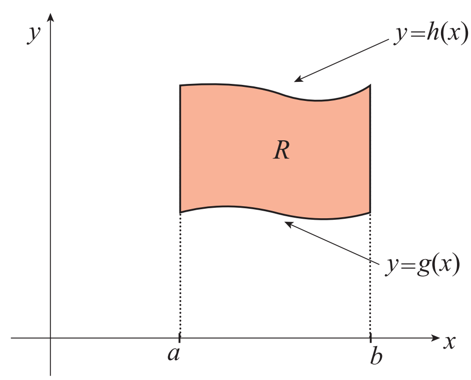



Figura 5.4

De maneira análoga, se $R$ for descrita por

$$R:\begin{cases} c \le y \le d \\ p(y) \le x \le q(y) \end{cases} \qquad \text{(Ver Figura 5.5)}$$

com $p$ e $q$ funções contínuas em $[c,d]$, então

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dx\right]dy.$$

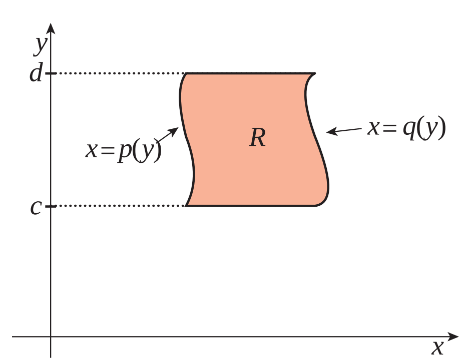



Figura 5.5

**Exemplo 5.3.** Calcule $\iint\limits_R \left(x^2+y^2\right)dA$, onde $R$ é a região limitada pelas retas $y=x$, $y=2x$ e $x=1$.

**Solução:** A região $R$ é descrita por

$$R:\begin{cases}0\le x\le 1\\ x\le y\le 2x\end{cases}.$$ (Ver Figura 5.6)

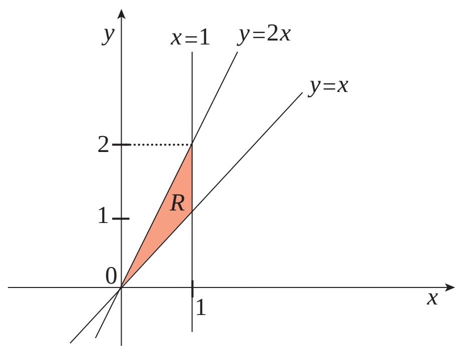



Figura 5.6

Temos

$$\begin{aligned}\iint\limits_R \left(x^2+y^2\right)dA &= \int_0^1\left[\int_x^{2x}\left(x^2+y^2\right)dy\right]dx\\ &= \int_0^1\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_x^{2x}dx\\ &= \int_0^1 \frac{10}{3}x^3dx\\ &= \frac{10}{3}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1=\frac{5}{6}.\end{aligned}$$

**Exemplo 5.4.** Calcule a integral dupla $\iint\limits_R (y+1)\,dA$, onde $R$ é a região do primeiro quadrante limitada por $y^2=x$, $y=-x+2$ e $y=0$.

**Solução:** A região $R$ está esboçada na Figura 5.7 é descrita por

$$R:\begin{cases}0\le y\le 1\\ y^2\le x\le 2-y\end{cases}.$$

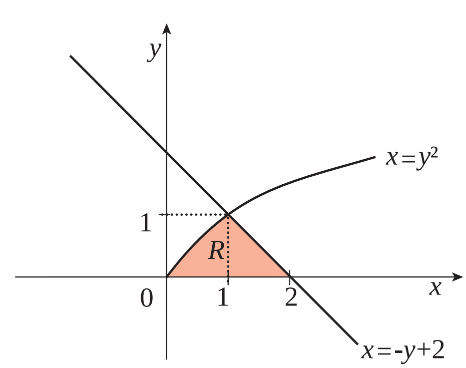



Figura 5.7

Temos

$$\iint_R (y+1)\,dA = \int_0^1 \left[ \int_{y^2}^{2-y} (y+1)\,dx \right] dy$$

$$= \int_0^1 \left[ (yx+x)\Big|_{y^2}^{2-y} \right] dy$$

$$= \int_0^1 \left( y - 2y^2 - y^3 + 2 \right) dy$$

$$= \left( \frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + 2y \right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{19}{12}.$$

**Exemplo 5.5.** Calcule a integral $\iint_R 2xy\,dA$, onde $R$ é o triângulo limitado pelas retas $y=0$, $y=x$, e a reta $x+y=2$.

**Solução:** A região $R$ é mostrada na Figura 5.8. $R$ é decomposta em $R_1$ e $R_2$, onde $R_1$ e $R_2$ são descritas por:

$$R_1 : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases} \qquad \text{e} \qquad R_2 : \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2-x \end{cases}.$$

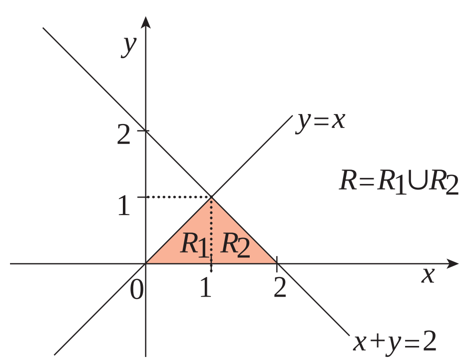



Figura 5.8

Assim,

$$\iint_R 2xy\,dA = \iint_{R_1} 2xy\,dA + \iint_{R_2} 2xy\,dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^x 2xy\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} 2xy\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 2x \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^x dx + \int_1^2 2x \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{2-x} dx$$

$$= \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 x(2-x)^2\, dx$$

$$= \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 + \int_1^2 \left(4x - 4x^2 + x^3\right) dx$$

$$= \frac{1}{4} + \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_1^2$$

$$= \frac{2}{3}.$$

Outra maneira de calcular a $\iint\limits_R 2xy\, dA$ é expressar a região $R$ da seguinte maneira:

$$R: \begin{cases} y \le x \le 2-y \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}.$$

$$\iint\limits_R 2xy\, dA = \int_0^1 \int_y^{2-y} 2xy\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left. 2\frac{x^2}{2} y \right|_y^{2-y} dy$$

$$= \int_0^1 \left[(2-y)^2 y - y^3\right] dy$$

$$= \int_0^1 \left(4y - 4y^2\right) dy$$

$$= \left.\left(\frac{4y^2}{2} - \frac{4y^3}{3}\right)\right|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

## 5.1.2 Inversão da ordem de integração

Às vezes, para calcular uma integral dupla, torna-se necessário inverter a ordem de integração para que as integrais possam ser obtidas por meio de funções elementares.

**Exemplo 5.6.** Calcule a integral $\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^2 e^{-x^2} dx\, dy$.

**Solução:** Não é possível obter algebricamente a integral com a ordem de integração dada, pois a função $f(x) = e^{-x^2}$ não tem primitiva entre as funções elementares. Assim, para calculá-la temos que trocar a ordem de integração. A região de integração está esboçada na Figura 5.9.

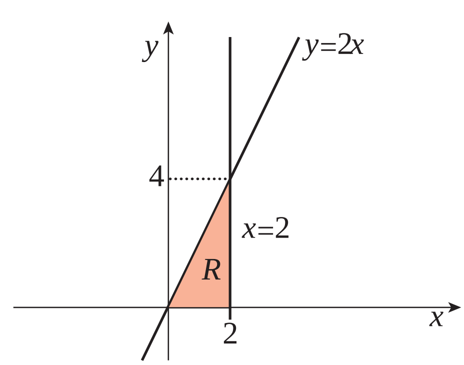


Figura 5.9

A região $R$ está descrita por

$$R: \begin{cases} \dfrac{y}{2} \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}.$$

Podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$R:\begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le 2x\end{cases}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^4\int_{\frac{y}{2}}^2 e^{-x^2}dx\,dy &= \int_0^2\int_0^{2x} e^{-x^2}dy\,dx\\ &=\int_0^2 e^{-x^2}y\Big|_0^{2x}dx\\ &=\int_0^2 2x\,e^{-x^2}dx\\ &=-e^{-x^2}\Big|_0^2\\ &=1-e^{-4}.\end{aligned}$$

**Exemplo 5.7.** Calcule a integral $\int_0^3\int_{y^2}^9 y\cos x^2dx\,dy$ trocando a ordem de integração.

**Solução:** A região de integração é apresentada na Figura 5.10.

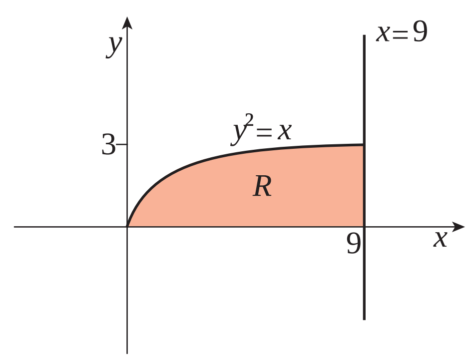



**Figura 5.10**

Podemos escrever $R$ da seguinte forma:

$$R:\begin{cases}0\le x\le 9\\ 0\le y\le \sqrt{x}\end{cases}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^3\int_{y^2}^9 y\cos x^2dx\,dy &= \int_0^9\int_0^{\sqrt{x}} y\cos x^2dy\,dx\\ &=\int_0^9 \frac{y^2}{2}\cos x^2\Big|_0^{\sqrt{x}}dx\\ &=\int_0^9\frac{x}{2}\cos x^2dx\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{sen} x^2 \Big|_0^9 = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 81.$$

### 5.1.3 Mudança de variáveis em integral dupla

Podemos estender a técnica de mudança de variável estudada para função de uma variável às funções de duas variáveis. O objetivo é simplificar o cálculo da integral.

Para a integral dupla

$$I = \iint_R f(x, y)\,dx\,dy\,,$$

introduzimos novas variáveis de integração fazendo

$$x = x(u,v) \qquad \text{e} \qquad y = y(u,v),$$

de modo que a integral dupla sobre a região $R$ do plano $xy$ seja transformada em uma integral dupla sobre uma região $R'$ do plano $uv$.

A integral $I$ pode ser calculada da seguinte forma:

$$I = \iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{R'} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv\,, \quad (2)$$

onde $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u,v)}$ é o determinante da matriz jacobiana de $x$ e $y$ em relação a $u$ e $v$, ou seja, $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$.

A fórmula (2) é demonstrada em cursos mais avançados. Aqui, limitar-nos-emos apenas em aplicá-la.

- Coordenadas polares

Uma mudança de variável muito usada é a mudança para coordenadas polares. Neste caso,

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\,\text{sen}\,\theta\,.$$

O determinante jacobiano é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Então,

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R'} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta\,, \qquad (3)$$

onde $R'$ é a região $R$ descrita em coordenadas polares.

**Exemplo 5.8.** Calcule $\iint_R e^{-x^2-y^2}dx\,dy$, onde $R$ é a região limitada pelo semicírculo $x = \sqrt{a^2 - y^2}$ e o eixo $y$.

**Solução:** A região $R$ é apresentada na Figura 5.11.

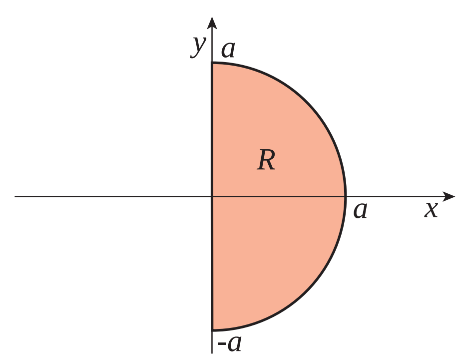



Figura 5.11

Para calcular a integral, vamos usar coordenadas polares.

Fazendo $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, então a região $R'$ do plano $r\theta$, que corresponde à região $R$ do plano $xy$, é dada por:

$$R': \begin{cases} 0 \le r \le a \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Assim, pela fórmula (3) temos

$$\iint_R e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a e^{-r^2}r\,dr\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{r^2}\Big|_0^a\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}(e^{-a^2} - 1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}(1 - e^{-a^2}).$$

**Exemplo 5.9.** Calcular $\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dA$, onde R é a região do primeiro quadrante que é externa à curva $x^2 + y^2 = 4$ e interna à curva $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

**Solução:** A Figura 5.12 ilustra a região $R$.

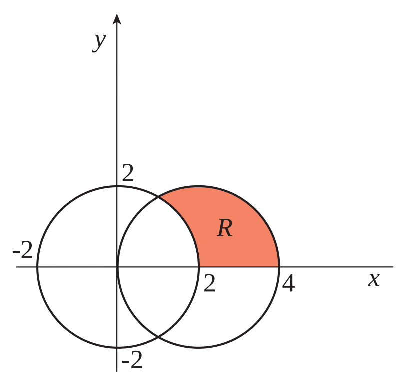



**Figura 5.12**

Vamos usar coordenadas polares para calcular a integral.

Em coordenadas polares,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = r^2$$

Então a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ tem equação polar $r = 2$ e a circunferência $(x-2)^2 + y^2 = 4$, que é equivalente a $x^2 + y^2 = 4x$ e tem equação $r = 4\cos\theta$.

Para descrever $R$ em coordenadas polares devemos observar a variação de $r$ e $\theta$.

Temos,

$$R': \begin{cases} 2 \le r \le 4\cos\theta \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Note que $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ é obtido resolvendo o sistema $\begin{cases} r = 4\cos\theta \\ r = 2 \end{cases}$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dA &= \int_0^{\pi/3}\int_2^{4\cos\theta} \frac{1}{\sqrt{r^2}} r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3}\int_2^{4\cos\theta} dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3} r\Big|_2^{4\cos\theta} d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3} (4\cos\theta - 2)\,d\theta \\
&= (4\operatorname{sen}\theta - 2\theta)\Big|_0^{\pi/3} \\
&= 4\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3} \\
&= \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - \pi).
\end{aligned}$$

**Exemplo 5.10.** Calcule a integral $\iint_R \dfrac{y}{x^2+y^2}dx\,dy$, sendo $R$ o anel delimitado por $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$.

**Solução:** A Figura 5.13 indica a região $R$.

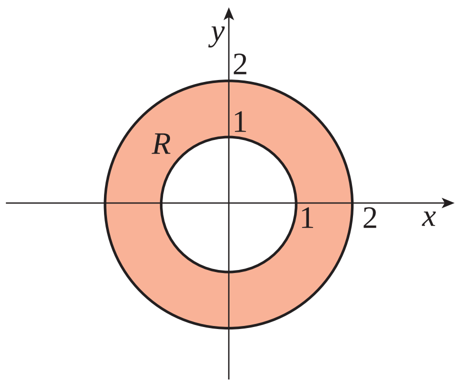



Figura 5.13

Vamos usar coordenadas polares para calcular a integral.

Fazendo $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$ temos

$$R': \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1 \le r \le 2 \end{cases}.$$

Assim,

$$\iint_R \frac{y}{x^2+y^2}dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \frac{r\,\text{sen}\,\theta}{r^2} r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} r\,\text{sen}\,\theta\Big|_1^2\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \text{sen}\,\theta\,d\theta$$
$$= -\cos\theta\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

## Lista de exercícios

1) Calcule as integrais $\iint_R f(x,y)dx\,dy$ sendo:

a) $f(x,y) = x\cos(xy)$ $e$ $R$ o retângulo $0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.

b) $f(x,y) = x$ $e$ $R$ a região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$.

2) Esboce a região de integração e calcule a integral trocando a ordem de integração.

a) $\int_0^1\int_x^1 \frac{\text{sen}\,y}{y}dy\,dx$.

b) $\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}dx\,dy$.

3) Use coordenadas polares para calcular as seguintes integrais.

a) $\iint_R e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$, onde $R$ é o círculo de centro na origem e de raio igual a 3.

b) $\iint_R \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$, onde $R$ está no primeiro quadrante e é limitada pela circunferência $x^2+y^2=a^2$.

# 5.2 Aplicações das integrais duplas

Nesta seção, vamos estudar algumas aplicações das integrais duplas.

## 5.2.1 Cálculo de volume

Vimos que se $f(x,y) \ge 0$ para todo $(x,y) \in R$, então o volume $V$

do sólido delimitado inferiormente pela região $R$, superiormente pela superfície $z = f(x, y)$ e lateralmente pelo cilindro vertical de base $R$ é dado por $V = \iint_R f(x, y)\,dA$.

**Exemplo 5.11.** Calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $2x + 3y + z = 6$.

**Solução:** O volume do sólido é

$$V = \iint_R (6 - 2x - 3y)\,dA,$$

onde $R$ é a região mostrada na Figura 5.14.

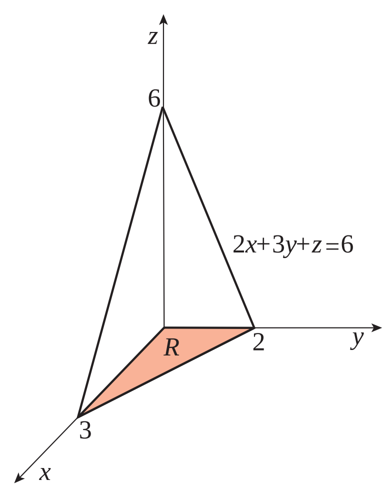



Figura 5.14

Portanto,

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^3 \int_0^{-\frac{2}{3}x+2} (6 - 2x - 3y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^3 \left( 6y - 2xy - \frac{3y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{-\frac{2}{3}x+2} dx \\
&= \int_0^3 \left[ (6 - 2x)\left( \frac{-2x}{3} + 2 \right) - \frac{3}{2}\left( \frac{-2x}{3} + 2 \right)^2 \right] dx \\
&= \int_0^3 \left[ -4x + 12 + \frac{4}{3}x^2 - 4x - \frac{3}{2}\left( \frac{4x^2}{9} - \frac{8}{3}x + 4 \right) \right] dx \\
&= \int_0^3 \left( -4x + 6 + \frac{2}{3}x^2 \right) dx \\
&= \left( \frac{-4x^2}{2} + 6x + \frac{2x^3}{9} \right)\Bigg|_0^3
\end{aligned}
$$

$$= 6 \text{ u.v.}$$

**Exemplo 5.12.** Determine o volume do sólido que está abaixo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima da região limitada por $y = x^2$ e $x = y^2$.

**Solução:** O volume do sólido é

$$V = \iint_R (x^2 + y^2)\, dA,$$

onde $R$ é mostrada na Figura 5.15.

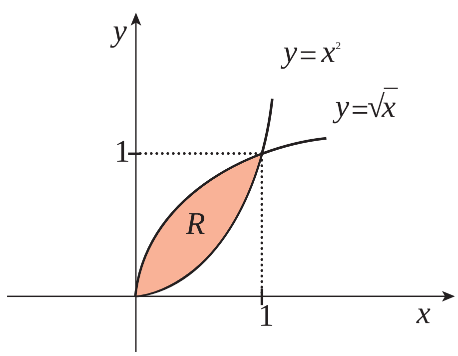



Figura 5.15

Portanto,

$$V = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 \left( x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx$$

$$= \left( \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{15} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{6}{35} \text{ u.v.}$$

**Exemplo 5.13.** Calcule o volume do sólido delimitado superiormente pelo gráfico de $z = xy$, inferiormente pela região $R$ delimitada por $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2x$, $y = -x + 3$ e lateralmente pelo cilindro vertical cuja base é $R$.

**Solução:** A integral dupla que fornece o volume do sólido é

$$V=\iint_R xy\,dA,$$

onde $R=R_1\cup R_2$ é o triângulo da Figura 5.16.

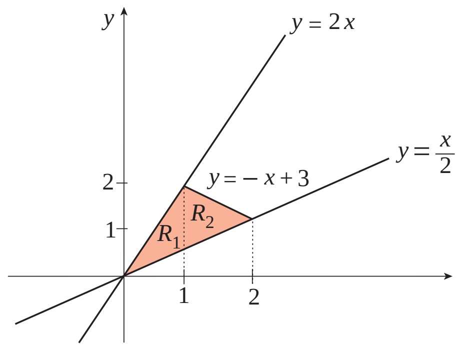



Figura 5.16

Temos que $V=\iint_R xy\,dA=\iint_{R_1} xy\,dA+\iint_{R_2} xy\,dA$,

onde

$$R_1:\begin{cases}0\le x\le 1\\ \dfrac{x}{2}\le y\le 2x\end{cases} \quad \text{e} \quad R_2:\begin{cases}1\le x\le 2\\ \dfrac{x}{2}\le y\le -x+3\end{cases}.$$

Calculando

$$\begin{aligned}\iint_{R_1} xy\,dA&=\int_0^1\left[\int_{\frac{x}{2}}^{2x} xy\,dy\right]dx\\&=\int_0^1 \left.\frac{xy^2}{2}\right|_{\frac{x}{2}}^{2x} dx\\&=\int_0^1 \frac{15}{8}x^3dx\\&=\left.\frac{15}{8}\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{15}{32}.\end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}\iint_{R_2} xy\,dA&=\int_1^2\left[\int_{\frac{x}{2}}^{-x+3} xy\,dy\right]dx,\\&=\int_1^2 \left.\frac{xy^2}{2}\right|_{\frac{x}{2}}^{(-x+3)} dx\\&=\int_1^2\left(\frac{x(-x+3)^2}{2}-\frac{x}{2}\cdot\frac{x^2}{4}\right)dx\\&=\int_1^2\left(\frac{3x^3}{8}-3x^2+\frac{9x}{2}\right)dx\end{aligned}$$

$$= \left( \frac{3x^4}{32} - \frac{3x^3}{3} + \frac{9x^2}{4} \right) \Bigg|_1^2 = \frac{37}{32}.$$

Portanto, o volume é $V = \frac{15}{32} + \frac{37}{32} = \frac{13}{8}$ u.v.

**Observação 5.1** Se $f(x, y) \leq 0$ para todo $(x, y) \in R$ (ver Figura 5.17), então o volume do sólido limitado acima pela região $R$, abaixo pelo gráfico de $f$ e lateralmente pelo cilindro de base $R$ é dado por:

$$V = \left| \iint_R f(x, y) dA \right|.$$

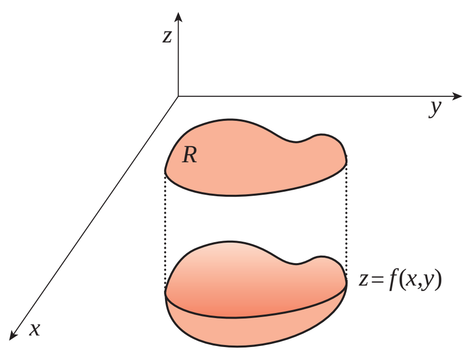



Figura 5.17

**Observação 5.2** Se o sólido $S$ for limitado superiormente pela superfície $z = f(x, y)$ e inferiormente pela superfície $z = g(x, y)$ com $f(x, y) \geq g(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in R$ onde $R$ é uma região do plano $xy$ contida na interseção $\mathrm{D}(f) \cap \mathrm{D}(g)$ (ver Figura 5.18) então o volume de $S$ é dado por:

$$V = \iint_R \left( f(x, y) - g(x, y) \right) dA. \tag{4}$$

A fórmula (4) continua válida, não apenas quando $f(x, y)$ e $g(x, y)$ são não negativas, mas também quando $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo $(x, y) \in R$.

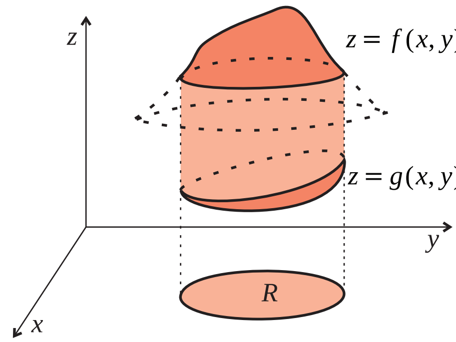



Figura 5.18

**Exemplo 5.14.** Calcule o volume do sólido delimitado pelo plano $z=0$ e pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}-4$.

**Solução:** A Figura 5.19 indica o sólido e a região $R$ de integração.

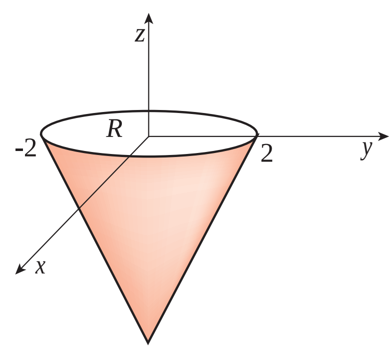



Figura 5.19

Note, temos $f\left(x,y\right)\leq 0$ para todo $\left(x,y\right)\in R$. Assim,

$$V=\left|\iint_R f(x,y)dA\right|.$$

A região de integração $R$ é descrita pela circunferência $x^2+y^2=4$. Escrevendo esta região em coordenadas polares, temos

$$R':\begin{cases}0\leq\theta\leq 2\pi\\ 0\leq r\leq 2\end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}V&=\left|\iint_R f(x,y)dA\right|\\ &=\left|\iint_R\left[\sqrt{x^2+y^2}-4\right]dx\,dy\right|\end{aligned}$$

$$= \left| \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r-4)r \, dr \, d\theta \right|$$

$$= \left| \int_0^{2\pi} \left( \frac{r^3}{3} - \frac{4r^2}{2} \right) \Bigg|_0^2 dr \, d\theta \right|$$

$$= \left| -\int_0^{2\pi} \frac{16}{3} d\theta \right|$$

$$= \frac{32\pi}{3} \text{ u. v.}$$

**Exemplo 5.15.** Determine o volume do sólido delimitado pelos parabolóides $z = 9 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + y^2$.

**Solução:** A Figura 5.20 (a) ilustra o sólido limitado por $z = 9 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + y^2$.

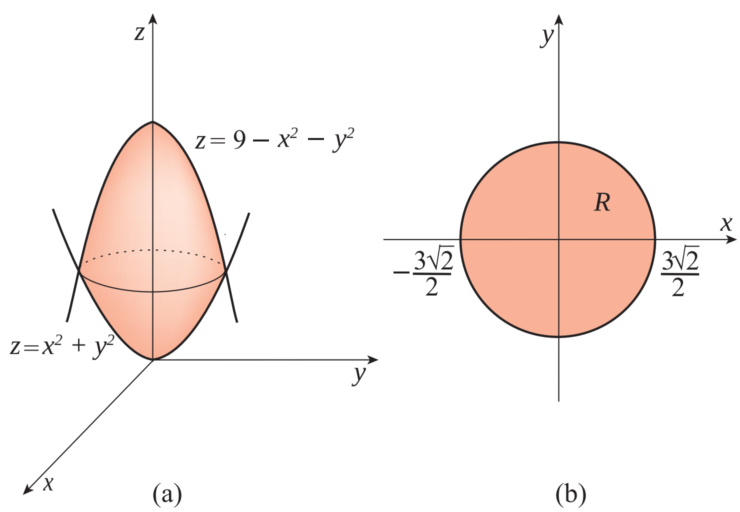



Figura 5.20

Pela Observação 5.2 temos

$$V = \iint_R \left[ 9 - x^2 - y^2 - \left( x^2 + y^2 \right) \right] dA$$

onde $R$ é a região do plano $xy$ limitada pela projeção da interseção das superfícies no plano $xy$. Calculando a interseção

$$\begin{cases} z = 9 - x^2 - y^2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{9}{2},$$

$R$ é a região circular ilustrada na Figura 5.20 (b). Vamos usar coordenadas polares para encontrar o volume. Assim,

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \int_0^{2\pi} \left(9 - r^2 - r^2\right) r \, d\theta \, dr \\
&= \int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \int_0^{2\pi} \left(9r - 2r^3\right) d\theta \, dr \\
&= \int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left(9\theta r - 2r^3\theta\right)\Big|_0^{2\pi} dr \\
&= \int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left(18\pi r - 4\pi r^3\right) dr \\
&= \left(18\pi \frac{r^2}{2} - \frac{4\pi r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \\
&= \frac{81\pi}{4} \text{ u. v.}
\end{aligned}
$$

## 5.2.2 Cálculo de área

Na expressão $V = \iint\limits_R f(x, y) \, dA$, se $f(x, y) = 1$ então $\iint\limits_R dA$ fornece a área da região $R$.

**Exemplo 5.16.** Calcule a área da região $R$ limitada no primeiro quadrante pelas curvas $y^2 = x^3$ e $y = x$.

**Solução:** A região $R$ está esboçada na Figura 5.21.

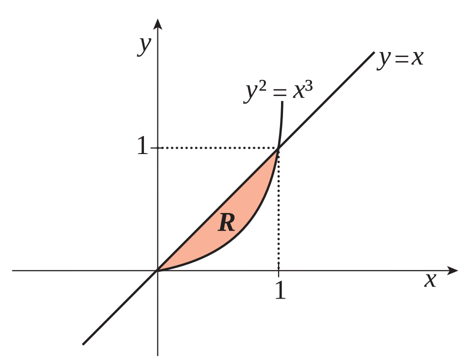



Figura 5.21

$$
\begin{aligned}
A &= \iint\limits_R dA \\
&= \int_0^1 \int_{\sqrt{x^3}}^{x} dy \, dx \\
&= \int_0^1 (x - x^{\frac{3}{2}}) \, dx \\
&= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{10} \text{ u. a.}$$

**Exemplo 5.17.** Calcule a área da região $R$ limitada pela parábola $y = 6x - x^2$ e pela reta $y = x$.

**Solução:** A Figura 5.22 mostra a região $R$.

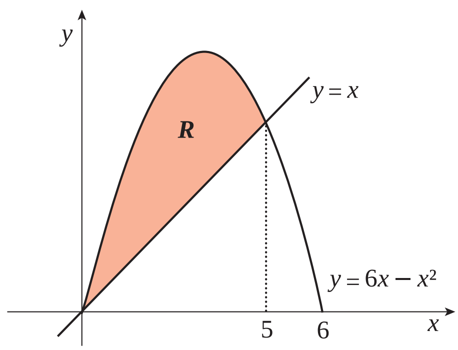



Figura 5.22

$$A = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} dy\, dx$$

$$= \int_0^5 y \Big|_x^{6x-x^2} dx$$

$$= \int_0^5 (6x - x^2 - x)\, dx$$

$$= \int_0^5 (5x - x^2)\, dx$$

$$= \frac{125}{6} \text{u.a.}$$

**Exemplo 5.18.** Calcule a área da região $R$ limitada pela curva $x^2 + y^2 = a^2$.

**Solução:** A região $R$ é ilustrada na Figura 5.23.

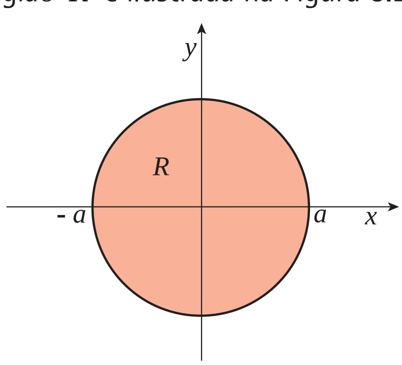



Figura 5.23

Vamos calcular a área usando coordenadas polares. Assim,

$$A=\int_0^a\int_0^{2\pi} r\,d\theta\,dr$$

$$=\int_0^a r\,2\pi\,dr$$

$$=\left.\frac{r^2}{2}2\pi\right|_0^a$$

$$=\pi a^2 \text{ u. a.}$$

### 5.2.3 Cálculos de massa, centro de massa e momento de inércia

As integrais de funções de uma variável podem ser usadas para determinar massa, centro de massa e momento de inércia de uma barra homogênea. Com o auxílio de integrais duplas, podemos encontrar massa, centro de massa e momento de inércia de uma lâmina plana.

- **Centro de massa**

Suponhamos uma lâmina com a forma de uma região fechada $R$ no plano $xy$. Seja $\rho(x,y)$ a medida da densidade de massa por unidade de área da lâmina em um ponto qualquer $(x,y)$ de $R$, onde $\rho$ é uma função contínua em $R$. Mostra-se que a medida $M$ da massa da lâmina é dada por

$$M=\iint_R \rho(x,y)dA,$$

e o centro de massa $(\bar{x},\bar{y})$ é dado por

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M} \qquad \text{e} \qquad \bar{y}=\frac{M_x}{M}$$

onde:

$M_x=\iint_R y\rho(x,y)\,dA$ é o momento de massa em relação ao eixo $x$, e

$M_y=\iint_R x\rho(x,y)\,dA$ é o momento de massa em relação ao eixo $y$.

- **Momento de inércia**

O momento de inércia $I_x$ em relação ao eixo $x$ é dado por

$$I_x = \iint_R y^2 \rho(x, y)\, dA.$$

O momento de inércia $I_y$ em relação ao eixo $y$ é dado por

$$I_y = \iint_R x^2 \rho(x, y)\, dA, \text{ e}$$

O momento de inércia em relação à origem ou momento de inércia polar é dado por

$$I_0 = \iint_R \left(x^2 + y^2\right) \rho(x, y)\, dA.$$

**Exemplo 5.19** Uma lâmina tem a forma da região retangular limitada pelas retas $x = 3$ e $y = 2$ e os eixos coordenados. Encontre a massa e o centro de massa da lâmina, sabendo que a densidade de massa por unidade de área em um ponto qualquer é dada por $\rho(x, y) = xy^2 kg/m^2$.

**Solução:** A lâmina está desenhada na Figura 5.24.

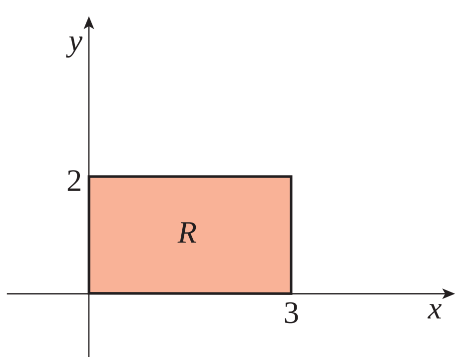



Figura 5.24

A massa da lâmina é

$$\begin{aligned} M &= \iint_R \rho(x, y)\, dA \\ &= \int_0^3 \int_0^2 xy^2 dy\, dx \\ &= \int_0^3 x \frac{y^3}{3}\Big|_0^2 dx \\ &= \frac{8}{3} \int_0^3 x\, dx \end{aligned}$$

$$= 2^2 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^3 = 18\ kg\ m.$$

Os momentos de massa em relação aos eixos são:

$$M_x = \iint_R x y^3 dA$$

$$= \int_0^3 \int_0^2 x\, y^3 dy dx$$

$$= \int_0^3 x \left. \frac{y^4}{4} \right|_0^2 dx$$

$$= 2^2 \int_0^3 x\, dx$$

$$= 2^2 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^3 = 18\, \text{kg}\, m$$

e

$$M_y = \iint_R x^2 y^2 dA$$

$$= \int_0^3 \int_0^2 x^2 y^2 dy dx$$

$$= \int_0^3 \left. \frac{x^2 y^3}{3} \right|_0^2 dx$$

$$= \int_0^3 \frac{8}{3} x^2\, dx$$

$$= \left. \frac{8}{9} x^3 \right|_0^3 = 24\, \text{kg}\, m.$$

Assim,

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = 2 \qquad \text{e} \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{3}{2}.$$

Portanto, o centro de massa está no ponto $\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

**Exemplo 5.20.** Calcule o momento de inércia em relação ao eixo dos $y$ de uma lâmina que tem a forma da região plana delimitada pelas parábolas $y = 2x - x^2$ e $y = 3x^2 - 6x$. Sua densidade de massa por unidade de área é constante, ou seja, $\rho(x, y) = c\ kg/m^2$.

**Solução:** A lâmina está desenhada na Figura 5.25.

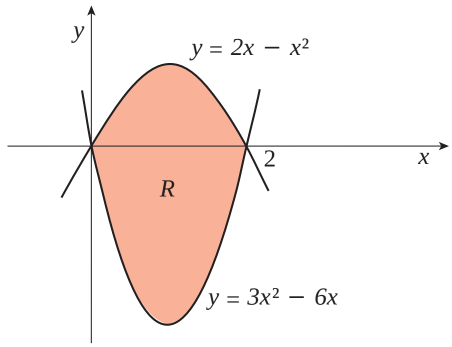



Figura 5.25

Temos

$$
\begin{aligned}
I_y &= \iint_R x^2 \rho(x,y)\, dA \\
&= \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} x^2 c\, dy dx \\
&= \int_0^2 x^2 c y \Big|_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dx \\
&= \int_0^2 cx^2 \left[2x - x^2 - 3x^2 + 6x\right] dx \\
&= \int_0^2 cx^2 \left[8x - 4x^2\right] dx \\
&= 8c\int_0^2 x^3 dx - 4c\int_0^2 x^4 dx \\
&= 8c\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 - 4c\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 \\
&= \frac{32}{5} c \,\mathrm{kg}\,\mathrm{m}^2.
\end{aligned}
$$

**Exemplo 5.21.** Uma lâmina ocupa parte do disco $x^2 + y^2 \leq 1$ do primeiro quadrante. Determine o centro de massa se a densidade em qualquer ponto for proporcional à distância do ponto ao eixo $x$.

**Solução:** A Figura 5.26 ilustra a forma da lâmina.

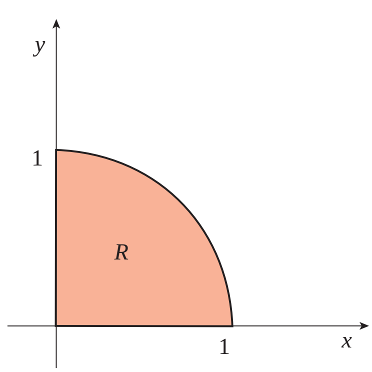



Figura 5.26

A densidade da lâmina no ponto $(x, y)$ é $\rho(x, y) = ky$, onde $k$ é constante.

A massa da lâmina é

$$M = \iint_R \rho(x, y)dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} ky\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} kr(\cos\theta)\, r\, d\theta\, dr \qquad \text{(em coordenadas polares)}$$

$$= k\int_0^1 r^2 \operatorname{sen}\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr$$

$$= k\int_0^1 r^2 dr$$

$$= k\frac{r^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{k}{3} \text{ u.m. (unidades de massa).}$$

Os momentos de massa em relação aos eixos são:

$$M_x = \iint_R ky^2 dA$$

$$M_x = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} kr^2(\cos^2\theta)\, r\, d\theta\, dr \qquad \text{(em coordenadas polares)}$$

$$= \int_0^1 kr^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^1 kr^3 \left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta + 1)d\theta\right] dr$$

$$= \int_0^1 \frac{kr^3}{2}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta + \theta\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr$$

$$= \int_0^1 \frac{kr^3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} dr$$

$$= \frac{k\pi}{4}\int_0^1 r^3 dr$$

$$= \frac{k\pi r^4}{16}\Big|_0^1 = \frac{k\pi}{16} \text{u.m.},$$

e

$$M_y = \iint_R kyx\,dA$$

$$M_y = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} k(r\cos\theta)(r\operatorname{sen}\theta)\, r\, d\theta\, dr \quad \text{(em coordenadas polares)}$$

$$= \int_0^1 kr^3 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta\right] dr$$

$$= \int_0^1 kr^3 \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^1 r^3 dr$$

$$= \frac{kr^4}{8}\Big|_0^1 = \frac{k}{8}\text{u.m.}$$

Logo,

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{3}{8} \qquad \text{e} \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{3\pi}{16}.$$

Portanto, o centro de massa está no ponto $\left(\frac{3}{8}, \frac{3\pi}{16}\right)$.

## Lista de exercícios

1) Calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $6x + 3y + 2z = 6$.

2) Calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ e $x + y + z = 3$.

3) Calcule a área da região $R$ delimitada por $x = y^2 + 1$ e $x + y = 3$.

4) Calcule a área da região $R$ delimitada por $y = 6 + x$, $y = x^3$ e $x = -2y$.

5) Determine a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região do primeiro quadrante limitada pela parábola $y = x^2$ e pela reta $y = 1$ sendo $\rho(x, y) = xy$.

6) Uma lâmina com densidade $\rho(x, y) = \rho$ ocupa um quadrado de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(a, a)$ e $(0, a)$. Determine os momentos de inércia $I_x$ e $I_y$.

# 5.3 Integrais triplas

A integral tripla é uma extensão natural da integral dupla. Assim, o estudo das integrais triplas é semelhante ao das integrais duplas.

**Definição 5.2** Seja $w = f(x, y, z)$ uma função definida em uma região limitada e fechada $S$ do espaço tridimensional. Subdividimos $S$ por planos paralelos aos 3 planos coordenados, obtendo $n$

paralelepípedos no interior de $S$. Numeramos estes paralelepípedos de 1 até $n$ e escolhemos em cada paralelepípedo $S_i$ um ponto $(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)$, sendo $\Delta V_i$ o volume de $S_i$. Em seguida formamos a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)\Delta V_i .$$

Suponhamos que mais planos paralelos aos planos coordenados sejam traçados, de modo que as dimensões dos paralelepípedos se tornem cada vez menores, e a maior aresta dos paralelepípedos $S_i$ tenda a zero quando $n \to +\infty$.

Quando existir

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)\Delta V_i , \tag{5}$$

este número será chamado a integral tripla de $f$ em $S$ e denotado por

$$\iiint_S f(x,y,z)dV \quad \text{ou} \quad \iiint_S f(x,y,z)dx\,dy\,dz .$$

### 5.3.1 Cálculo das integrais triplas

No caso de integrais triplas, encontramos o valor da integral fazendo três integrações sucessivas. Se a região $S$ é um paralelepípedo, digamos, $S = [a,b]\times[c,d]\times[e,f]$, (ver Figura 5.27) então

$$\iiint_S f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)dz\,dy\,dx .$$

A integral indica que primeiro integramos em relação a $z$, em seguida integramos em relação a $y$ e, finalmente, em relação a $x$. Existem cinco outras ordens possíveis de integração, todas fornecendo o mesmo resultado. Por exemplo,

$$\iiint_S f(x,y,z)dV = \int_e^f \int_a^b \int_c^d f(x,y,z)dy\,dx\,dz .$$

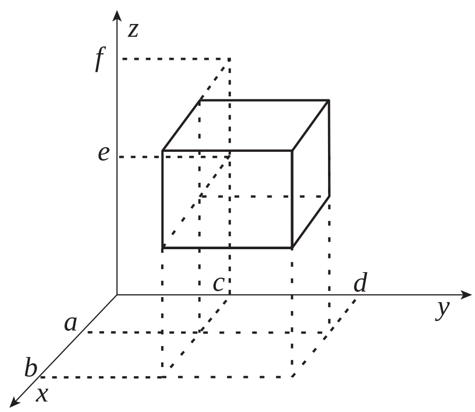



Figura 5.27

No caso em que $S$ é a região do espaço limitada pelos planos $x = a$ e $x = b$, pelos cilindros $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$ e pelas superfícies $z = f_1(x, y)$ e $z = f_2(x, y)$, sendo $g_1(x) \leq g_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$ e $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$ para todo $(x, y) \in R$ onde $R$ é a região do plano $xy$ limitada por $x = a$, $x = b$, $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$, como mostra a Figura 5.28, então

$$\iiint_S f(x, y, z) dV = \iint_R \left[ \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dx\, dy$$
$$= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z) dz\, dy\, dx.$$

Note que a região $R$ é a projeção de $S$ no plano $xy$.

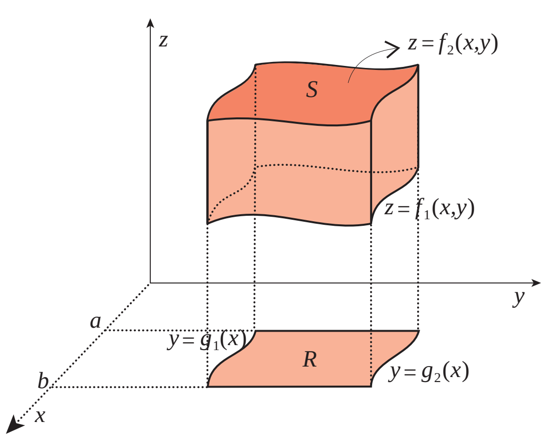



Figura 5.28

**Exemplo 5.22.** Calcule a integral tripla $\iiint_S x^2 y \, dV$, onde $S$ é caixa retangular dada por

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

**Solução:** O sólido pode ser visualizado na Figura 5.29.

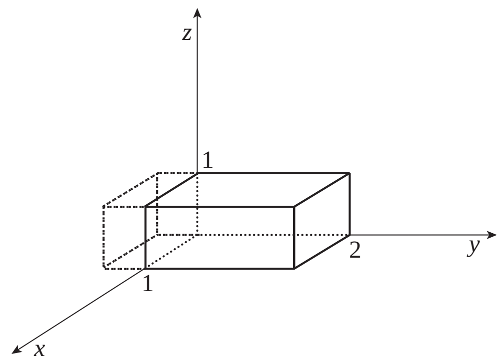



**Figura 5.29**

A integral é

$$\begin{aligned}
\iiint_S x^2 y \, dV &= \int_0^1 \int_{-1}^2 \int_0^1 x^2 y \, dz \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \int_{-1}^2 x^2 y \, z \Big|_0^1 \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \int_{-1}^2 x^2 y \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^2 y^2}{2} \Big|_{-1}^2 \, dx \\
&= \int_0^1 \frac{3}{2} x^2 dx \\
&= \frac{x^3}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

**Exemplo 5.23.** Calcule a integral tripla $\iiint_S y \, dV$, se $S$ é a região limitada pelo tetraedro formado pelo plano $12x + 20y + 15z = 60$ e os planos coordenados.

**Solução:** O tetraedro $S$ está mostrado na Figura 5.30 (a) e sua projeção no plano $xy$ está ilustrada na Figura 5.30 (b).

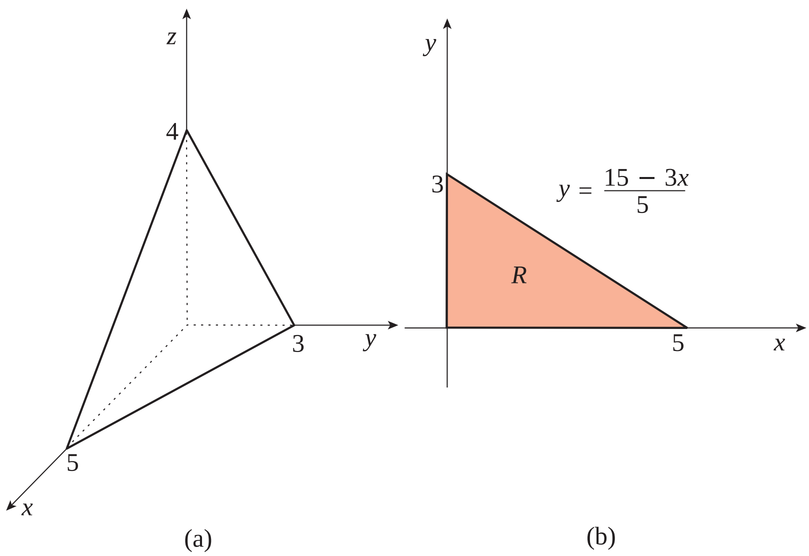



Figura 5.30

A região $R$ pode ser descrita da seguinte forma:

$$R:\begin{cases} 0 \le x \le 5 \\ 0 \le y \le \dfrac{15-3x}{5} \end{cases}.$$

Portanto,

$$\iiint_S y\, dV = \int_0^5 \int_0^{\frac{15-3x}{5}} \int_0^{4-\frac{4}{5}x-\frac{4}{3}y} y\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^5 \int_0^{\frac{15-3x}{5}} y\, z \Big|_0^{4-\frac{4}{5}x-\frac{4}{3}y} dy\, dx$$

$$= \int_0^5 \int_0^{\frac{15-3x}{5}} y\left[4-\frac{4}{5}x-\frac{4}{3}y\right] dy\, dx$$

$$= \int_0^5 \int_0^{3-\frac{3x}{5}} \left[4y-\frac{4}{5}x\, y-\frac{4}{3}y^2\right] dy\, dx$$

$$= \int_0^5 \left[2y^2-\frac{2}{5}x\, y^2-\frac{4}{9}y^3\right]\Bigg|_0^{3-\frac{3x}{5}} dx$$

$$= 2\int_0^5 \left(3-\frac{3x}{5}\right)^2 dx - \frac{2}{5}\int_0^5 x\left(3-\frac{3x}{5}\right)^2 dx - \frac{4}{9}\int_0^5 \left(3-\frac{3x}{5}\right)^3 dx$$

$$= \frac{15}{2}.$$

**Exemplo 5.24.** Calcule $\iiint_S \sqrt{y^2+z^2}\, dV$, onde $S$ é a região limitada pelo parabolóide $x = y^2 + z^2$ e pelo plano $x = 4$.

**Solução:** O sólido $S$ pode ser visualizado na Figura 5.31 (a), e a projeção de $S$ no plano $yz$ está ilustrada na Figura 5.31 (b).

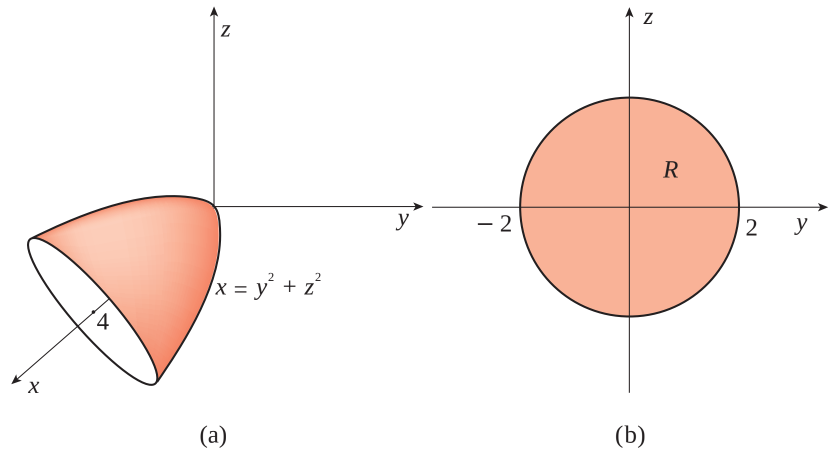



Figura 5.31

Assim,

$$\iiint_S \sqrt{y^2+z^2}\,dV = \iint_R \int_{y^2+z^2}^{4} \sqrt{y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_R \left(4-y^2-z^2\right)\sqrt{y^2+z^2}\,dy\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(4-r^2\right) r\cdot r\,dr\,d\theta \text{ (coordenadas polares)}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(4r^2-r^4\right)dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{4r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{64}{15}\,d\theta = \frac{128\pi}{15}.$$

**Exemplo 5.25.** Calcule $\iiint_S dV$, onde $S$ é o sólido no primeiro octante delimitado pelo cilindro $z=1-x^2$ e pelo plano $y=1-x$.

**Solução:** O sólido $S$ é mostrado na Figura 5.32 (a) e sua projeção no plano $xy$ está ilustrada na Figura 5.32 (b).

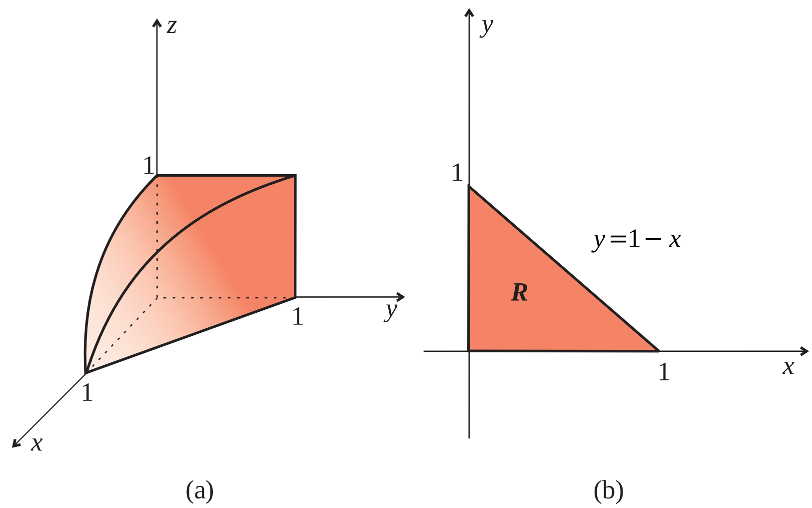



Figura 5.32

Assim,

$$\iiint_S dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x^2} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} z\Big|_0^{1-x^2} dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(1-x^2\right) dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(1-x^2\right) y\Big|_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(1-x-x^2+x^3\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(1-x-x^2+x^3\right) dx$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{5}{12}.$$

## 5.3.2 Mudança de variáveis em integrais Triplas

Na Seção 5.1.2 estudamos mudança de variáveis em integrais duplas. De forma análoga ao que foi feito para a integral dupla, podemos introduzir novas variáveis de integração fazendo

$$x = x(u,v,w), \quad y = y(u,v,w), \quad z = z(u,v,w).$$

Assim, a integral tripla definida sobre uma região $S$ do espaço $xyz$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\iiint_{S'} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw, \qquad (6)$$

onde $S'$ é a região no espaço $uvw$, e $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ é o determinante jacobiano de $x$, $y$, $z$ em relação $u$, $v$, $w$.

No Capítulo 2, estudamos o sistema de coordenadas polares, que descreve de forma mais simples determinadas curvas do plano. Em três dimensões, temos dois sistemas de coordenadas semelhantes às coordenadas polares, que fornecem uma descrição mais simples de algumas superfícies e sólidos que aparecem usualmente. No que segue, descrevemos os sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas que serão usados para calcular integrais triplas.

- **Coordenadas cilíndricas**

No sistema de coordenadas cilíndricas, um ponto $P$ no espaço tridimensional é representado pela tripla ordenada $(r,\theta,z)$, onde $r$ e $\theta$ são as coordenadas polares da projeção de $P$ sobre o plano $xy$ e $z$ é a distância do plano $xy$ ao ponto $P$. (Ver Figura 5.33).

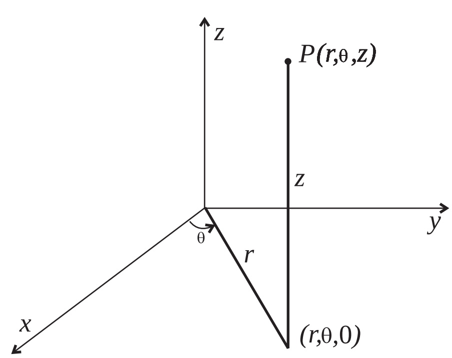



Figura 5.33

A relação entre as coordenadas cilíndricas e cartesianas é dada por

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad z = z\,.$$

Agora, para calcular a integral tripla, vamos fazer a mudança de variáveis usando $(6)$ e as relações acima. Temos

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cdot$$

Portanto,

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{S'} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz\,, \qquad (7)$$

onde $S'$ é a região $S$ descrita em coordenadas cilíndricas.

- Coordenadas esféricas

As coordenadas esféricas $(\rho,\theta,\phi)$ de um ponto $P$ do espaço são mostradas na Figura 5.34, onde $\rho$ é a distância da origem a $P$, $\theta$ é o mesmo ângulo que em coordenadas cilíndricas, e $\phi$ é o ângulo entre o semi-eixo positivo $z$ e o segmento de reta $OP$. Observe que

$$\rho \geq 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

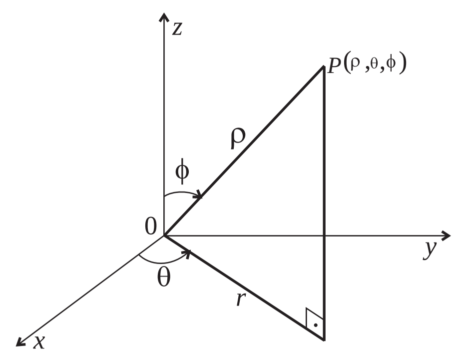


Figura 5.34

As relações entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas esféricas podem ser obtidas da Figura 5.35. (Note que na Figura 5.35 colocamos o sistema de coordenadas cartesianas e o sistema de coordenadas esféricas juntos).

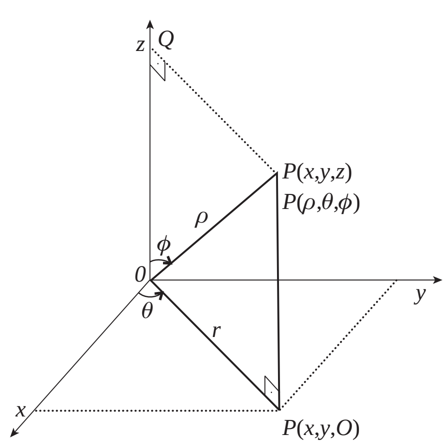


Figura 5.35

Dos triângulos $OPQ$ e $OPP'$ temos

$$z = \rho\cos\phi \quad \text{e} \quad r = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,.$$

Mas $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Combinando essas relações, temos

$$x = \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta \qquad y = \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta \qquad z = \rho\cos\phi, \tag{8}$$

que são as relações entre as coordenadas esféricas e as coordenadas cartesianas.

Vamos passar a integral tripla de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas. Usando as relações $(8)$ e $(6)$ e o fato $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| = \rho^2\,\text{sen}\,\phi$,

temos

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\iiint_{S'} f(\rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta,$$

onde $S'$ corresponde à região $S$ em coordenadas esféricas.

**Exemplo 5.26.** Calcule $\iiint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dV$, onde $S$ é a região limitada por $z = x^2+y^2-4$ e $z = 4-x^2-y^2$.

**Solução:** O sólido $S$ está mostrado na Figura 5.36 (a) e sua projeção no plano $xy$ está ilustrada na Figura 5.36 (b).

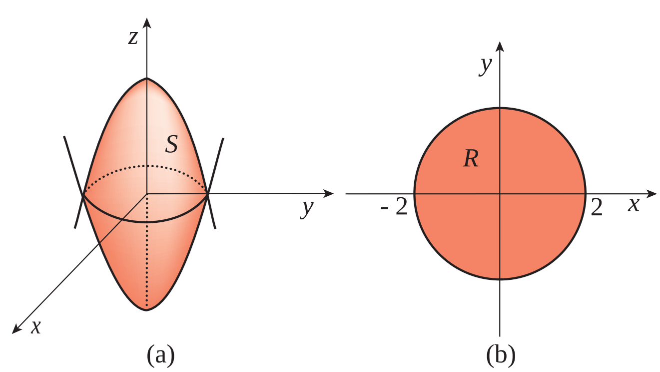



Figura 5.36

Assim,

$$I = \iiint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2-4}^{4-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx.$$

Podemos expressar a integral $I$ usando coordenadas cilíndricas. O sólido $S$ é delimitado inferiormente e superiormente pelos respectivos parabolóides $z = x^2 + y^2 - 4$ e $z = 4 - x^2 - y^2$, que em coordenadas cilíndricas são descritos por

$$z = r^2 - 4 \quad \text{e} \quad z = 4 - r^2.$$

A região $R$ escrita em coordenadas polares é dada por

$$R': \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2-4}^{4-r^2} r \cdot r \, dz \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 z \Big|_{r^2-4}^{4-r^2} dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2(-2r^2+8) dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[-2r^4 + 8r^2\right] dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-2r^5}{5} + \frac{8r^3}{3}\right]\Bigg|_0^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{128}{15} d\theta \\
&= \frac{256\pi}{15}.
\end{aligned}$$

**Exemplo 5.27.** Calcule a $\iiint\limits_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dV$, onde $S$ é a região delimitada pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

**Solução:** O sólido $S$ pode ser visualizado na Figura 5.37.

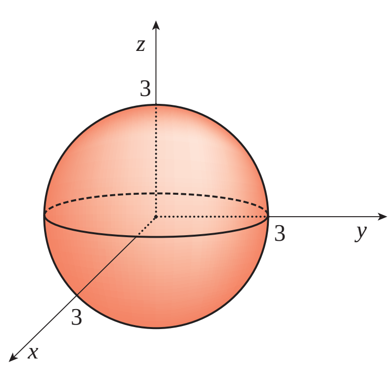



Figura 5.37

Para calcular a integral, vamos usar coordenadas esféricas. A equação da esfera $x^2+y^2+z^2=9$ em coordenadas esféricas é dada por $\rho=3$. A descrição do sólido $S$ em coordenadas esféricas é

$$S':\begin{cases}0\le\rho\le 3\\ 0\le\theta\le 2\pi.\\ 0\le\phi\le\pi\end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\iiint_S \left(x^2+y^2+z^2\right)dV &= \int_0^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\rho^2(\rho^2\text{sen}\phi)\,d\phi\,d\theta\,d\rho\\ &= \int_0^3\int_0^{2\pi}\left[-\cos\phi\right]\Big|_0^{\pi}\rho^4 d\theta\,d\rho\\ &= \int_0^3\int_0^{2\pi}2\rho^4 d\theta\,d\rho\\ &= \int_0^3 2\rho^4\theta\Big|_0^{2\pi}d\rho\\ &= \int_0^3 4\pi\rho^4 d\rho\\ &= \frac{972\pi}{5}.\end{aligned}$$

**Exemplo 5.28.** Usando coordenadas cilíndricas, calcule a $\iiint_S\sqrt{x^2+y^2}\,dV$, onde $S$ é a região contida no cilindro $x^2+y^2=16$ e pelos planos $z=-5$ e $z=4$.

**Solução:** A Figura 5.38 ilustra a região $S$.

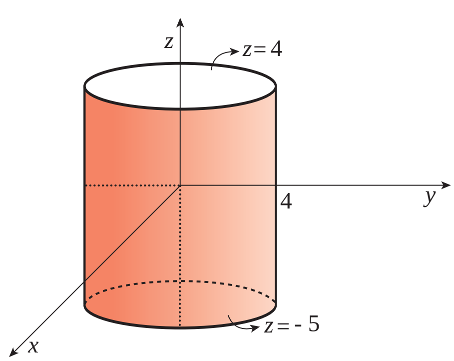



Figura 5.38

A região de integração em coordenadas cilíndricas é dada por:

$$S':\begin{cases}0\le r\le 4\\ 0\le\theta\le 2\pi.\\ -5\le z\le 4\end{cases}$$

Portanto,

$$\iiint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dV = \int_0^4\int_0^{2\pi}\int_{-5}^{4} r\cdot r\,dz\,d\theta\,dr$$

$$= \int_0^4\int_0^{2\pi} r^2 z\Big|_{-5}^{4}\,d\theta\,dr$$

$$= \int_0^4 9r^2\int_0^{2\pi} d\theta\,dr$$

$$= 18\pi\int_0^4 r^2 dr = 384\pi.$$

**Exemplo 5.29.** Usando coordenadas esféricas, calcule $\iiint_S z\,dV$, onde $S$ está contida entre as esferas $x^2+y^2+z^2=1$ e $x^2+y^2+z^2=4$ no primeiro octante.

**Solução:** A região $S$ descrita em coordenadas esféricas é

$$S':\begin{cases} 1\le\rho\le 2 \\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}. \\ 0\le\phi\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Assim,

$$\iiint_S z\,dV = \int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho\cos\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta\,d\rho$$

$$= \int_1^2 \rho^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\phi\operatorname{sen}\phi\,d\phi\right]d\theta\,d\rho$$

$$= \int_1^2 \rho^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2\phi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\,d\rho$$

$$= \int_1^2 \rho^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\,d\theta\,d\rho$$

$$= \int_1^2 \frac{\pi\rho^3}{4}\,d\rho$$

$$= \frac{15\pi}{16}.$$

## Lista de exercícios

1) Calcule as seguintes integrais triplas:

a) $\iiint\limits_S x\,y\,z\,dV$, onde $S$ é o paralelepípedo $[1,\ 2]\times[0,1]\times[1,3]$.

b) $\iiint\limits_S (x\,z+3z)\,dV$, onde $S$ é a região limitada pelo cilindro $x^2+z^2=9$ e os planos $x+y=3$, e $z=0$ e $y=0$ acima do plano $x\,y$.

2) Usando coordenadas cilíndricas, calcule

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}\left(x^2+y^2\right)dz\,dy\,dx\,.$$

3) Utilize coordenadas esféricas para calcular $\iiint\limits_S \left(x^2+y^2+z^2\right)dV$,

sendo $S$ a região interior ao cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e à esfera $x^2+y^2+z^2=9$.

# 5.4 Aplicações das integrais triplas

Nesta seção, apresentaremos algumas aplicações das integrais triplas.

## 5.4.1 Cálculo de volume

Vimos que a integral dupla pode ser interpretada como a medida da área de uma região plana $R$, quando $f\left(x,y\right)=1$ para todo $\left(x,y\right)\in R$. No caso tridimensional, se $f\left(x,y,z\right)=1$ para todo $\left(x,y,z\right)\in S$, então a integral tripla

$$\iiint\limits_S dV=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i$$

fornece a medida do volume da região $S$.

**Exemplo 5.30.** Calcule o volume do sólido $S$ delimitado pelos planos $x=1,\ \ y=0,\ \ \ y=2$, $z=0$ e pela superfície $z=x^2$.

**Solução:** O sólido $S$ está mostrado na Figura 5.39 (a) e sua projeção sobre o plano $x\,y$ pode ser visualizada na Figura 5.39 (b).

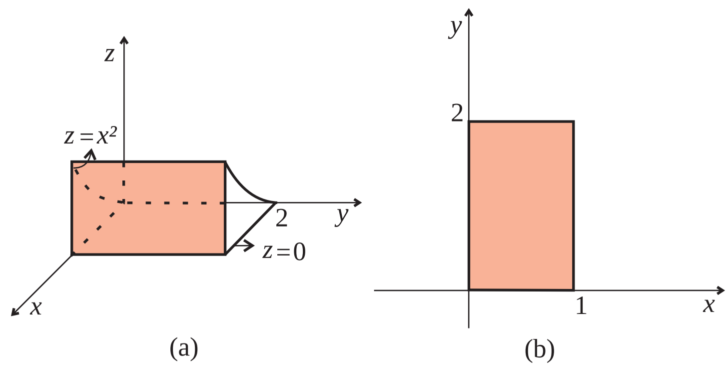



Figura 5.39

Assim,

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_S dV \\
&= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{x^2} dz\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^2 x^2 dy\, dx \\
&= \int_0^1 x^2 y \Big|_0^2 dx \\
&= 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \text{u.v.}
\end{aligned}
$$

**Exemplo 5.31.** Use integral tripla para calcular o volume do sólido acima do plano $xy$ delimitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

**Solução:** O sólido $S$ pode ser visualizado na Figura 5.40 (a) e sua projeção sobre o plano $xy$, na Figura 5.40 (b).

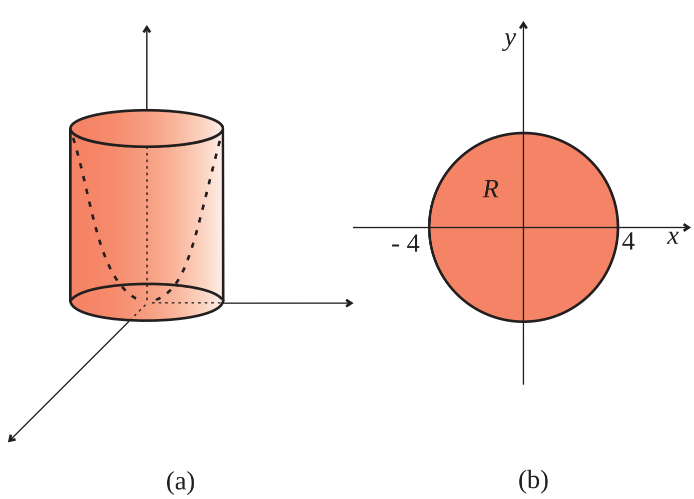



Figura 5.40

Para calcular $V = \iiint_S dV$, vamos usar coordenadas cilíndricas para descrever $S$. A equação do parabolóide $z = x^2 + y^2$ em coordenadas cilíndricas é dada por $z = r^2$. Assim,

$$S': \begin{cases} 0 \le r \le 4 \\ 0 \le \theta \le 2\pi. \\ 0 \le z \le r^2 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_0^{r^2} r\, dz\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^4 r^3 dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 64\, d\theta \\ &= 128\pi \text{ u.v.} \end{aligned}$$

**Exemplo 5.32.** Calcule o volume do sólido $S$ que está contido no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 2$ e acima do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$.

**Solução:** Em coordenadas cilíndricas, o cilindro é $r = 1$ e o parabolóide é $z = 1 - r^2$.

A Figura 5.41 ilustra o sólido $S$. A descrição da região $S$ em coordenadas cilíndricas é dada por:

$$S': \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1 - r^2 \le z \le 2 \end{cases}.$$

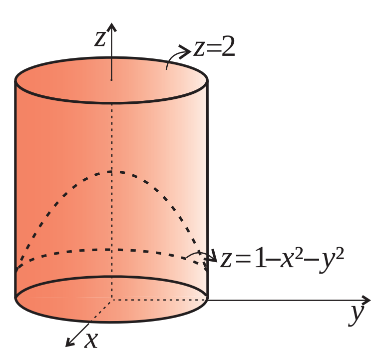



Figura 5.41

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-r^2}^2 r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\left[2-(1-r^2)\right]dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r+r^3)\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{3}{4}d\theta \\
&= \frac{3\pi}{2} \text{ u.v.}
\end{aligned}
$$

**Exemplo 5.33.** Utilizando coordenadas esféricas, determine o volume do sólido $S$ que está acima do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e abaixo da esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

**Solução:** A região $S$ é mostrada na Figura 5.42.

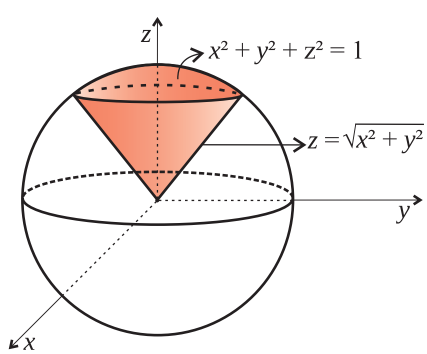



Figura 5.42

Em coordenadas esféricas, a esfera $x^2+y^2+z^2=1$ tem equação $\rho=1$. O cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\rho\cos\phi=\sqrt{(\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta)^2+(\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}=\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,,$$

ou seja, $\cos\phi=\mathrm{sen}\,\phi$, ou $\phi=\dfrac{\pi}{4}$. Assim, a região de integração em coordenadas esféricas é dada por:

$$S':\begin{cases}0\le\rho\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi.\\ 0\le\phi\le\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi d\theta d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 (-\cos\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta d\rho \\ &= \frac{(2-\sqrt{2})}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta d\rho \\ &= (2-\sqrt{2})\pi \int_0^1 \rho^2 d\rho \\ &= \pi \frac{(2-\sqrt{2})}{3} \text{ u.v.} \end{aligned}$$

**Exemplo 5.34.** Calcule o volume do sólido $S$ que corresponde à região interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e exterior ao cone $x^2 + y^2 = z^2$.

**Solução:** O sólido $S$ pode ser visualizado na Figura 5.43.

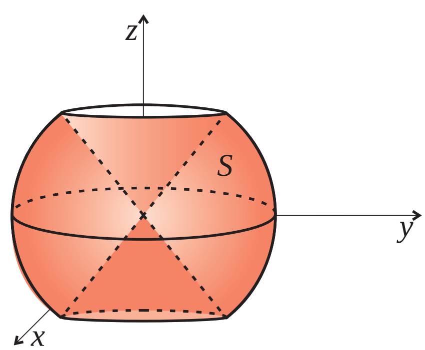



Figura 5.43

Em coordenadas esféricas, a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ tem equação $\rho = 3$, o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ tem equação $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ tem equação $\phi = \frac{3\pi}{4}$.

A descrição do sólido $S$ em coordenadas esféricas é

$$S': \begin{cases} 0 \le \rho \le 3 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ \frac{\pi}{4} \le \phi \le \frac{3\pi}{4} \end{cases}.$$

Portanto,

$$V = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi d\theta d\rho$$

$$= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \rho^2 \left(-\cos\phi\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta\, d\rho$$

$$= \sqrt{2} \int_0^3 \int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta\, d\rho$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \int_0^3 \rho^2 d\theta$$

$$= 18\sqrt{2}\,\pi \ \text{u.v.}$$

## 5.4.2 Cálculos de massa, centro de massa e momento de inércia

As aplicações de integrais duplas exploradas na Seção 5.1.3 podem ser estendidas para integrais triplas. Por exemplo, se a função densidade de um objeto sólido que ocupa a região $S$ é $\rho(x, y, z)$, então a sua massa é

$$M = \iiint_S \rho(x, y, z) dV ,$$

e seu centro de massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ é dado por

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M},$$

onde

$$M_{yz} = \iiint_S x\rho(x, y, z) dV, \quad M_{xz} = \iiint_S y\rho(x, y, z) dV \ \text{ e}$$

$$M_{xy} = \iiint_s z\rho(x, y, z) dV .$$

Os momentos de inércia em relação aos três eixos coordenados são

$$I_x = \iiint_s (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) dV, \quad I_y = \iiint_s (x^2 + z^2)\rho(x, y, z) dV \quad \text{e}$$

$$I_z = \iiint_s (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) dV \ .$$

**Exemplo 5.35.** Calcule a massa do sólido limitado pelas superfícies $z = 4 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + y^2$, considerando a densidade da massa igual a $4 kg/m^3$.

**Solução:** O sólido $S$ é apresentado na Figura 5.44 (a) e sua projeção no plano $xy$ é dada na Figura 5.44 (b).

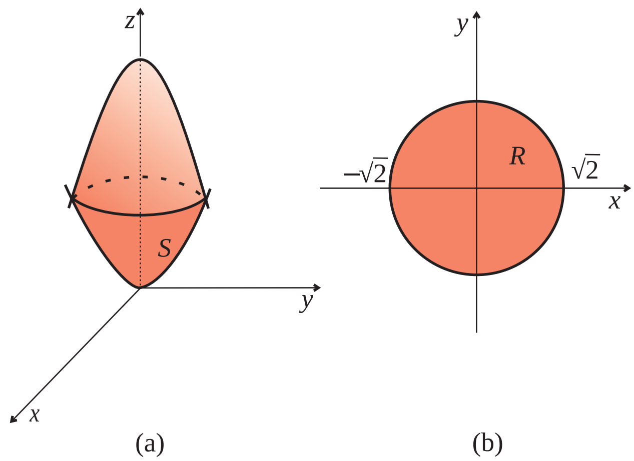



Figura 5.44

Em coordenadas cilíndricas o parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ tem equação $z = 4 - r^2$ e o parabolóide $z = x^2 + y^2$ tem equação $z = r^2$. Assim, podemos descrever a região $S$ em coordenadas cilíndricas da seguinte forma:

$$S': \begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{2} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ r^2 \le z \le 4 - r^2 \end{cases}.$$

Temos $\rho(x, y, z) = 4$. Portanto,

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^{4-r^2} 4r\, dz\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} 4r\, z \Big|_{r^2}^{4-r^2} dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (16r - 8r^3) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 8\, d\theta = 16\pi \text{ kg}. \end{aligned}$$

**Exemplo 5.36.** Encontre o momento de inércia em relação ao eixo $z$ do sólido homogêneo limitado pelo cilindro $r = 5$, o cone $z = r$ e o plano $xy$. A densidade da massa por unidade de volume em qualquer ponto é $c\ kg/m^3$.

**Solução:** O sólido pode ser visualizado na Figura 5.45.

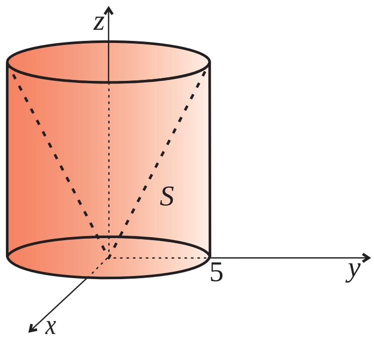



Figura 5.45

Temos $\rho(x,y,z)=c$. Assim $I_z=\iiint\limits_S c(x^2+y^2)dV$.

A região $S$ descrita em coordenadas cilíndricas é

$$S':\begin{cases}0\le r\le 5\\ 0\le\theta\le 2\pi.\\ 0\le z\le r\end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}I_z&=\int_0^5\int_0^{2\pi}\int_0^r (cr)r^2\,dz\,d\theta\,dr\\&=\int_0^5\int_0^{2\pi} cr^4\,d\theta\,dr\\&=\int_0^5 2\pi cr^4 dr\\&=1250\pi c\ \text{kg m}^2.\end{aligned}$$

**Exemplo 5.37.** Determine a massa e centro de massa do cubo dado por $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$ com função densidade dada por $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

**Solução:** O cubo é mostrado na Figura 5.46.

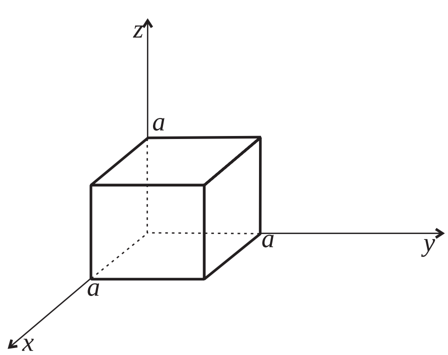



Figura 5.46

A massa do cubo é

$$M = \int_0^a \int_0^a \int_0^a (x^2 + y^2 + z^2)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^a \int_0^a \left( (x^2 + y^2)a + \frac{a^3}{3} \right) dy\, dx$$

$$= \int_0^a \left( x^2 a^2 + \frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3} \right) dx$$

$$= a^5 \text{ u.m.}$$

Calculando os momentos de massa $M_{yz}, M_{xz}$ e $M_{yz}$:

$$M_{yz} = \int_0^a \int_0^a \int_0^a x(x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^a \int_0^a \left( \frac{a^4}{4} + (y^2 + z^2)\frac{a^2}{2} \right) dy\, dz$$

$$= \int_0^a \left( \frac{a^5}{4} + \frac{a^5}{6} + \frac{a^3}{2} z^2 \right) dz$$

$$= \frac{7}{12} a^6,$$

$$M_{xz} = \int_0^a \int_0^a \int_0^a y(x^2 + y^2 + z^2)\, dy\, dx\, dz$$

$$= \frac{7}{12} a^6,$$

e

$$M_{xy} = \int_0^a \int_0^a \int_0^a z(x^2 + y^2 + z^2)\, dz\, dx\, dy$$

$$= \frac{7}{12} a^6.$$

Portanto, as coordenadas do centro de massa são

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{7}{12} a, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{7}{12} a \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{7}{12} a.$$

## Lista de exercícios

1) Determine o volume do tetraedro $S$ limitado pelos planos $2x + 2y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.

2) Encontre o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 25$, o plano $x + y + z = 8$ e pelo plano $xy$.

3) Calcule o volume da esfera de raio $a$

a) usando coordenadas cilíndricas

b) usando coordenadas esféricas.

4) Encontre o volume do sólido $S$ limitado pelo plano $xy$, pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

5) Use integral tripla para determinar os volumes das seguintes regiões, no espaço tridimensional:

a) limitada acima pelo plano $z = 1$ e abaixo pela metade superior de $z^2 = x^2 + y^2$;

b) limitada acima e abaixo por $z^2 = x^2 + y^2$ e nos lados por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

c) limitada acima por $z = x^2 + y^2$, abaixo por $z = 0$, e nos lados por $x^2 + y^2 = 1$;

d) limitada acima por $z = x$ e abaixo por $z = x^2 + y^2$.

6) Calcule a massa e o centro de massa do sólido $S$ delimitado por $2x + y + z = 1$ e pelos planos coordenados, sabendo que a densidade de massa em $P(x, y, z)$ é proporcional à distância até o plano $xy$.

7) Um sólido $S$ está contido no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 4$ e acima do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$. A densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro. Determine a massa de $S$.

# Resumo

Os principais tópicos estudados neste capítulo foram:

- definições e cálculos de integrais duplas e triplas;
- cálculo de integral dupla usando coordenadas polares;
- cálculo de integrais triplas usando coordenadas cilíndricas e esféricas;
- aplicações de integrais duplas e triplas em cálculo de volume, centro de massa e momento de inércia.

# Respostas

- Seção 5.1.4

1) a) $\frac{4}{\pi}$;    b) $\frac{1}{12}$.

2) a) $1-\cos 1$;    b) $\frac{(e^{-9}-1)}{6}$.

3) a) $\pi(1-e^{-9})$;    b) $\frac{\pi a^3}{6}$.

- Seção 5.1.4.1

1) 1 u. v.

2) $3\pi$ u.v.

3) $\frac{9}{2}$ u.a.

4) 22 u.a.

5) $\frac{1}{6}$;  $\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{4}\right)$.

6) $\rho\frac{a^4}{3}$;  $\rho\frac{a^4}{3}$.

- Seção 5.3.4

1) a) $3$; b) $\frac{648}{5}$.

2) $\frac{16\pi}{5}$.

3) $243\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{5}$.

- Seção 5.4.3

1) $\frac{1}{3}$ u.v.

2) $200\pi$ u.v.

3) $\frac{4}{3}\pi a^3$ u.v.

4) $\frac{\pi a^4}{2}$ u.v.

5) a) $\frac{\pi}{3}$ u.v.; b) $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$ u.v.; c) $\frac{\pi}{2}$ u.v. ; d) $\frac{\pi}{32}$ u.v.

6) $\frac{k}{48}$ u.m.; $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{6}{15}\right)$.

7) $\frac{12\pi k}{5}$ u.m.

# Bibliografia Comentada


1) GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. *Cálculo A:* Funções, Limite, Derivação, Integração. 6. ed. São Paulo: Makron Books do Brasil, 2006.

Este livro aborda as técnicas de integração e aplicações da integral definida estudadas nos capítulos 1 e 2 deste texto. A linguagem utilizada pelas autoras é simples e de fácil compreensão.

2) GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. *Cálculo B:* Funções de Várias Variáveis, Integrais Duplas e Triplas. 2. ed. São Paulo: Makron Books do Brasil, 2007.

Este livro trata dos conteúdos de funções de várias variáveis e integrais duplas e triplas. Quase todos os teoremas são demonstrados. É rico em exemplos e possui amplas listas de exercícios com respostas.

3) LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*. 3. ed. São Paulo: Harbra Ltda, 1994. v. 1

4) LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*. 3. ed. São Paulo: Harbra Ltda, 2000. v. 2

Os assuntos tratados no volume I são os de limite, derivada e integral de funções de uma variável. O estudo de funções de várias variáveis é feito no volume II. Vários exemplos e exercícios são apresentados. Estes livros são considerados clássicos nos cursos de Cálculo.

5) KÜHLKAMP, N. *Cálculo 3*. ed. Florianópolis: UFSC, 2006.

O livro traz os conteúdos estudados nos capítulos 1 e 2 deste material. O texto é rico em aplicações e exemplos resolvidos de forma clara e detalhada.

6) STEWART, J. *Cálculo I*. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2008. v. 1 e 2.

O volume I trata do estudo de funções de uma variável, e o Volume II de funções de várias variáveis. Estes textos possuem um equilíbrio entre a apresentação formal do cálculo elementar e o enfoque computacional.

7) SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1995. v. 1 e 2

Estes livros contemplam todo o conteúdo estudado neste texto. Várias figuras são apresentadas e facilitam a visualização espacial dos conceitos relacionados às funções de duas variáveis.

8) TANEJA, I. J. *Maple V:* Uma Abordagem Computacional no Ensino de Cálculo. Florianópolis: UFSC, 1997.

Este texto mostra como utilizar o *software* Maple para resolver problemas relacionados com conteúdos explorados nas disciplinas de cálculo. Várias aplicações envolvendo o cálculo de integrais são apresentadas.

9) THOMAS, G. B. *Cálculo*. 10. ed. São Paulo: Pearson Educação do Brasil, 2003. v. 1 e 2.

Estes livros abordam todo o conteúdo apresentado nesta disciplina. São livros recentes e bem elaborados. Trazem vários exemplos e amplas listas de exercícios.

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

## Cálculo II

Os conteúdos abordados neste livro podem ser divididos em duas partes: a primeira trata das técnicas de integração de funções de uma variável e de aplicações de integral definida. Nas técnicas de integração abordamos integração por partes, substituição envolvendo funções trigonométricas, integração de funções trigonométricas e o método das frações parciais. Trabalhamos também com integrais impróprias. A segunda parte faz um estudo sobre funções de várias variáveis. Os conceitos de limite, continuidade, diferenciabilidade e integral definida de funções de uma variável são estendidos para funções de várias variáveis.

9 788599 379790