

Cálculo III e IV

Marcos Henrique Santos Martins
Rosimary Pereira

$$\text{rot}(\vec{f}(p)) \neq \vec{0}$$



$$\text{rot}(\vec{f}) = \nabla \times \vec{f}$$

Curso de Licenciatura em Física
na Modalidade à Distância

Universidade Federal de Santa Catarina

Cálculo III e IV

Marcos Henrique Santos Martins
Rosimary Pereira

Florianópolis, 2010



Governo Federal
Presidência da República
Ministério da Educação
Secretaria de Ensino a Distância
Universidade Aberta do Brasil

Universidade Federal de Santa Catarina

Reitor: Alvaro Toubes Prata

Vice-Reitor: Carlos Alberto Justo da Silva

Secretário de Educação a Distância: Cícero Barbosa

Pró-Reitora de Ensino de Graduação: Yara Maria Rauh Müller

Pró-Reitora de Pesquisa e Extensão: Débora Peres Menezes

Pró-Reitor de Pós-Graduação: Maria Lúcia de Barros Camargo

Pró-Reitor de Desenvolvimento Humano e Social: Luiz Henrique Vieira Silva

Pró-Reitor de Infra-Estrutura: João Batista Furtuoso

Pró-Reitor de Assuntos Estudantis: Cláudio José Amante

Centro de Ciências da Educação: Wilson Schmidt

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas: Tarciso Antônio Grandi

Centro de Filosofia e Ciências Humanas: Roselane Neckel

Curso de Licenciatura em Física na Modalidade à Distância

Coordenação de Curso: Sônia Maria S. Corrêa de Souza Cruz

Coordenação de Tutoria: Rene B. Sander

Coordenação Pedagógica/CED: Roseli Zen Cerny

Coordenação de Ambientes Virtuais/CFM: Nereu Estanislau Burin

Comissão Editorial

Demétrio Delizoicov Neto

Frederico F. de Souza Cruz

Gerson Renzetti Ouriques

José André Angotti

Nilo Kühlkamp

Silvio Luiz Souza Cunha

Laboratório de Novas Tecnologias – LANTEC/CED

Coordenação Pedagógica

Coordenação Geral: Andrea Lapa, Roseli Zen Cerny

Núcleo de Formação: Nilza Godoy Gomes

Núcleo de Pesquisa e Avaliação: Claudia Regina Flores

Núcleo de Criação e Desenvolvimento de Materiais

Design Gráfico

Coordenação: Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira

Projeto Gráfico Original: Diogo Henrique Ropelato, Marta Cristina Goulart
Braga, Natal Anacleto Chicca Junior

Redesenho do Projeto Gráfico: Laura Martins Rodrigues,
Thiago Rocha Oliveira

Diagramação: Gregório Bacelar Lameira

Ilustrações: Grazielle S. Xavier, Kallani Maciel Bonelli, João Antônio
Amante Machado, Gregório Bacelar Lameira, Gabriel Nietzsche,
Rafael Naravan Kienen, Jean Menezes, Liane Lanzarin,
Amanda Cristina Woehl

Capa: Tarik Assis

Design Instrucional

Coordenação: Juliana Machado, Elizandro Maurício Brick

Design Instrucional: Elizandro Maurício Brick

Revisão Gramatical: Mirna Saidy

Copyright © 2010, Universidade Federal de Santa Catarina/CFM/CED/UFSC

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Coordenação Acadêmica do Curso de Licenciatura em Física na Modalidade à Distância.

Ficha Catalográfica

M386c Martins, Marcos Henrique Santos
Cálculo III e IV / Marcos Henrique Santos Martins, Rosimary
Pereira. – Florianópolis : UFSC/EAD/CED/CFM, 2010.
279 p.

ISBN 978-85-99379-96-7

1. Cálculo. 2. Cálculo vetorial. 3. Equações diferenciais.
I. Pereira, Rosimary. II. Título.

CDU: 517.1

3. Funções vetoriais de várias variáveis	87
3.1 Introdução	89
3.2 Funções vetoriais de várias variáveis.....	96
3.3 Limite e continuidade.....	96
3.4 Derivadas parciais.....	99
3.5 Interpretação geométrica da derivada	100
3.6 Derivadas parciais sucessivas.....	102
Resumo	104
Exercícios Propostos	104
Respostas.....	105
4. Campos escalares e campos vetoriais.....	107
4.1 Campos escalares e campos vetoriais	109
4.2 Representação geométrica de um campo vetorial.....	111
4.3 Derivada direcional e gradiente de campo escalar	114
4.3.1 Cálculo da $D_u f(P)$	115
4.4 Propriedade do vetor gradiente (o gradiente como direção de máxima variação).....	117
4.5 Derivada direcional de campo vetorial.....	118
4.6 Campos conservativos.....	120
Resumo	122
Exercícios Propostos	122
Respostas.....	125
5. Integrais de linha	127
5.1 Integral de linha de campo escalar.....	129
5.1.1 Cálculo da integral de linha de campo escalar no plano	131
5.1.2 Cálculo de integrais de linha de campo escalar no espaço	134
5.2 Integral de linha de campo vetorial	136
5.2.1 Independência do caminho	141
5.2.2 Teorema de Green.....	147
5.2.3 Teorema de Green para regiões com “buracos”	149
Resumo	152
Exercícios propostos	153
Respostas.....	155

8. Equações diferenciais ordinárias	
lineares de ordem n	251
8.1 Introdução	253
8.2 Dependência linear	255
8.3 Solução geral de uma equação linear homogênea de coeficientes constantes	257
8.4 Solução geral de uma ED linear não homogênea (ED (8.1))	261
8.4.1 Solução geral de uma ED linear não homogênea com coeficientes constantes	261
8.5 Equações diferenciais com coeficientes variáveis.....	268
8.5.1 Equação de Cauchy-Euler	269
Resumo	274
Exercícios propostos	275
Respostas.....	276
Referências	279

Apresentação

Neste livro-texto apresentamos duas partes importantes no estudo das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, que são: *cálculo vetorial e equações diferenciais ordinárias*.

Na primeira parte – Cálculo Vetorial, formada de 6 capítulos vamos considerar funções cujos valores (imagens) são vetores. Mostraremos como derivar e integrar tais funções. As relações entre as novas integrais, de linha e de superfície, com as integrais de uma variável, dupla e tripla já conhecidas são apresentadas nos três teoremas importantes do Cálculo Vetorial: Teorema de Grenn, Gauss e Stokes. Esse cálculo aproxima-se, então, do método puramente geométrico, observando a potência do cálculo algébrico.

Na segunda parte – Equações Diferenciais Ordinárias, formada de dois capítulos, apresentaremos a definição e métodos de resolução de uma equação diferencial ordinária.

Mostraremos ao longo desta parte que uma equação diferencial é um tipo de equação que envolve derivadas de uma função e que sua solução é esta função. É um assunto com aplicações em diversas áreas, ao qual daremos ênfase às suas aplicações na Física.

O conteúdo deste trabalho é importante tanto como complemento no estudo do Cálculo Diferencial e Integral como base para outras disciplinas do Curso de Física.

Esperamos assim contribuir para a construção do seu conhecimento.

Marcos Henrique Santos Martins

Rosimary Pereira

Capítulo 1

Funções vetoriais de uma variável

Capítulo 1

Funções vetoriais de uma variável

Os valores das funções consideradas até aqui são números reais. Neste capítulo introduziremos funções cujos valores são vetores. Exemplo de tal função com valor vetorial é a velocidade, no instante t , de um objeto que se move no espaço. As funções vetoriais são realmente importantes por suas aplicações à Física. As propriedades de limites, derivadas, continuidade e integral são análogas ao caso das funções reais de uma variável real. O presente material deve ser lido cuidadosamente, com o objetivo de apreciar a importância dos métodos vetoriais, aplicando-os aos mais variados fenômenos físicos que tratam do movimento de uma partícula no espaço.

1.1 Introdução

Definição 1.1. Seja $D \subset \mathbb{R}$. Uma função vetorial $\vec{F}(t)$ com domínio D é uma lei que associa a cada número $t \in D$ exatamente um vetor $\vec{F}(t)$.

Uma *função* é uma correspondência que associa a cada elemento de seu domínio exatamente um elemento de seu contradomínio. Se os valores da função são números reais, referimo-nos à função como uma *função com valores reais*, ou *função escalar*. Estudaremos aqui *funções com valores vetoriais*, denotadas por $\vec{F}(t)$; os valores dessas funções são *vetores*.

O contradomínio de $\vec{F}(t)$ consiste em todos os valores possíveis para t em D .

Na Figura 1.1, o domínio D é um intervalo fechado; entretanto, D pode ser *qualquer* conjunto de números reais. Esboçamos também o vetor posição $\vec{F}(t)$.

Adiante, não faremos distinção entre o vetor $\vec{F}(t)$ em \mathbb{R}^3 e seu vetor posição \overline{OP} . Assim, esboçar $\vec{F}(t)$ significará esboçar \overline{OP} .

Como as três componentes de $\vec{F}(t)$ são determinadas univocamente para cada $t \in D$, podemos escrever:

$$\vec{F}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$$

ou

$$\vec{F}(t) = ((f_1(t), f_2(t), f_3(t)))$$

em que f_1, f_2 e f_3 (chamadas componentes de \vec{F}) são funções escalares com domínio D , sendo $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ a **base canônica** de \mathbb{R}^3 .

Reveja a Seção 5.2 do livro de Geometria Analítica.

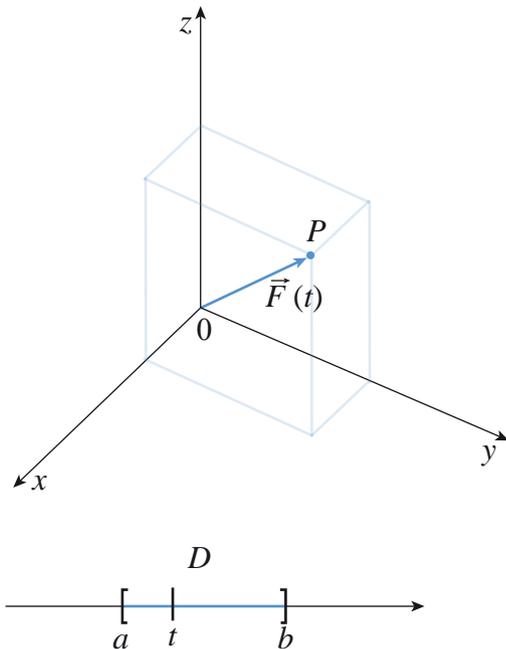


Figura 1.1

Observação 1.1. Se a função $\vec{F}(t)$ assume valores em \mathbb{R}^2 , escrevemos: $\vec{F}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j}$ ou $\vec{F}(t) = ((f_1(t), f_2(t)))$, em que $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^2 . Se a função $\vec{F}(t)$ assume valores em \mathbb{R}^4 , por exemplo, escrevemos $\vec{F}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k} + f_4(t)\vec{l}$ ou $\vec{F}(t) = ((f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)))$. Da mesma forma, se $\vec{F}(t)$ assume valores em \mathbb{R}^n , escrevemos $\vec{F}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + \dots + f_n(t)\vec{m}$ ou $\vec{F}(t) = ((f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)))$.

\mathbb{R}^4 – Quando você for estudar relatividade, irá considerar o espaço com *quatro dimensões*, sendo uma delas o tempo, que por hora será visto apenas como uma variável independente.

\mathbb{R}^n – Você já deve estar acostumado a ouvir falar em Teoria de Cordas – mais especificamente Teoria M. Esta, para dar conta de unificar a Mecânica Quântica com a Relatividade Geral, precisa considerar um espaço no \mathbb{R}^{11} .

Exemplo 1.1: Seja

$$\vec{F} : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{F}(t) = (t+1)\vec{i} + (t^2 - 4)\vec{j} + t^2\vec{k},$$

esboce $\vec{F}(1)$ e $\vec{F}(3)$.

Solução:

Fazendo $t = 1$ e $t = 3$ em $\vec{F}(t) = (t+1)\vec{i} + (t^2 - 4)\vec{j} + t^2\vec{k}$, obtemos:

$$\vec{F}(1) = (1+1)\vec{i} + ((1)^2 - 4)\vec{j} + (1)^2\vec{k} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 1\vec{k} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = (2, -3, 1)$$

e

$$\vec{F}(3) = (3+1)\vec{i} + ((3)^2 - 4)\vec{j} + (3)^2\vec{k} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 9\vec{k} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 9\vec{k} = (4, 5, 9).$$

A Figura 1.2 exibe esses vetores, em que $\overrightarrow{OP_1}$ representa a imagem da função vetorial $\vec{F}(t) = (t+1)\vec{i} + (t^2 - 4)\vec{j} + t^2\vec{k}$ para $t = 1$ e $\overrightarrow{OP_2}$, a imagem para $t = 3$. Como pode ser observado, a imagem de cada ponto t pela \vec{F} é um vetor $\vec{F}(t)$. Logo, o conjunto imagem de \vec{F} é um conjunto de vetores.

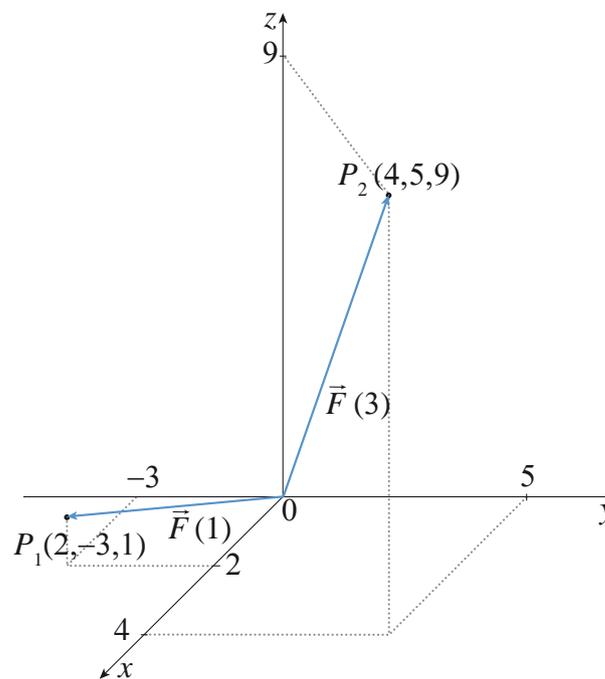


Figura 1.2

1.2 Curva associada a uma função vetorial

Observemos o seguinte exemplo.

Exemplo 1.2: Seja

$$\begin{aligned}\vec{G}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{G}(t) &= (9-4t)\vec{i} + (-4+6t)\vec{j} + (3+3t)\vec{k}.\end{aligned}$$

- Esboce $\vec{G}(0)$, $\vec{G}(1)$ e $\vec{G}(2)$.
- Descreva graficamente o conjunto imagem de $\vec{G}(t)$.

Solução:

- Fazendo $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$ em,

$$\vec{G}(t) = (9-4t)\vec{i} + (-4+6t)\vec{j} + (3+3t)\vec{k}$$

obtemos:

- $$\begin{aligned}\vec{G}(0) &= (9-4(0))\vec{i} + (-4+6(0))\vec{j} + (3+3(0))\vec{k} = \\ &= 9\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k} = (9, -4, 3);\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\vec{G}(1) &= (9-4(1))\vec{i} + (-4+6(1))\vec{j} + (3+3(1))\vec{k} = \\ &= 5\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} = (5, 2, 6);\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\vec{G}(2) &= (9-4(2))\vec{i} + (-4+6(2))\vec{j} + (3+3(2))\vec{k} = \\ &= \vec{i} + 8\vec{j} + 9\vec{k} = (1, 8, 9).\end{aligned}$$

A Figura 1.3 exibe esses vetores.

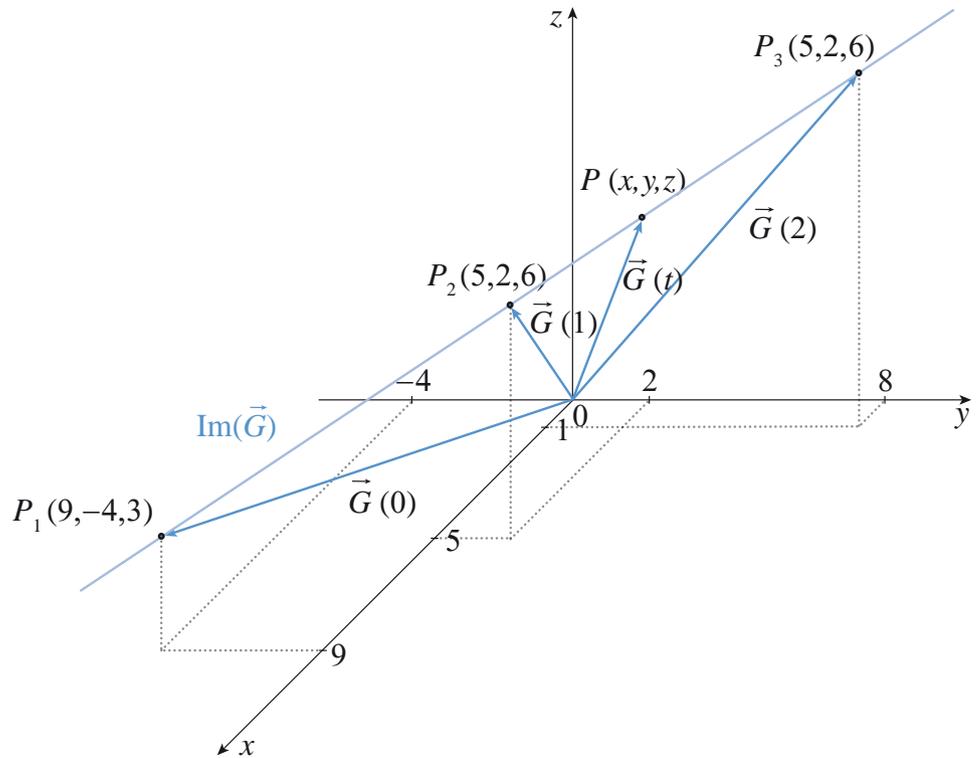


Figura 1.3

b) Se $P(x, y, z)$ é a extremidade de $\vec{G}(t)$, conforme indicado na Figura 1.3, então

$$\begin{cases} x(t) = 9 - 4t \\ y(t) = -4 + 6t, t \in \mathbb{R} \\ z(t) = 3 + 3t \end{cases}$$

são chamadas *equações paramétricas* da reta $\overline{P_1P_3}$, cujas extremidades dos vetores posição de $\vec{G}(t)$ são pontos pertencentes à reta $\overline{P_1P_3}$.

As extremidades de $\vec{G}(t)$ no Exemplo 1.2 determinam uma reta em um sistema coordenado xyz . Em geral, as extremidades de

$$\vec{F}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k},$$

em que as funções escalares f_1, f_2 e f_3 são contínuas em um intervalo I , definem uma *curva no espaço* (ou simplesmente *curva*), isto é, um conjunto C de ternos ordenados $(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. O gráfico de C consiste em todos os pontos $P(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$, em um sistema coordenado xyz , que correspondem aos ternos ordenados.

As equações

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t); t \in I \quad (1.1)$$

são equações paramétricas de C . Sendo C uma curva parametrizada pelas equações (1.1).

Genericamente, se $\vec{F}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função vetorial, então o conjunto de todos os pontos de \mathbb{R}^n que tem vetor posição $\vec{F}(t)$ para algum $t \in I$ é denominado curva associada à função \vec{F} ou simplesmente curva de \vec{F} .

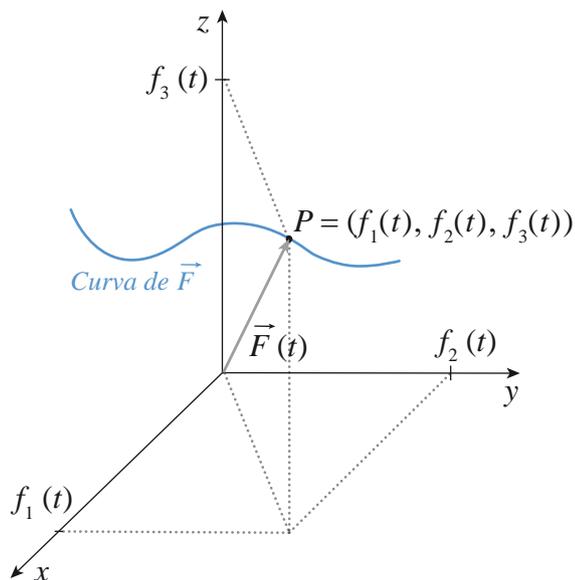


Figura 1.4

Exemplo 1.3: Seja

$$\begin{aligned} \vec{F}: [-2, 2] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \vec{F}(t) &= t\vec{i} + (t^2 + 1)\vec{j}. \end{aligned}$$

Esboce a curva representada pela função vetorial $\vec{F}(t)$.

Solução:

As equações paramétricas de C são: $x = t$, $y = t^2 + 1$; $-2 \leq t \leq 2$.

Para visualizar o gráfico, eliminamos o parâmetro da segunda equação e obtemos

$$y = x^2 + 1; -2 \leq x \leq 2,$$

que é uma parábola no plano $xy(\mathbb{R}^2)$, definida em $I = \text{Dom}(\vec{F}) = [-2, 2]$, conforme exibido na Figura 1.5.

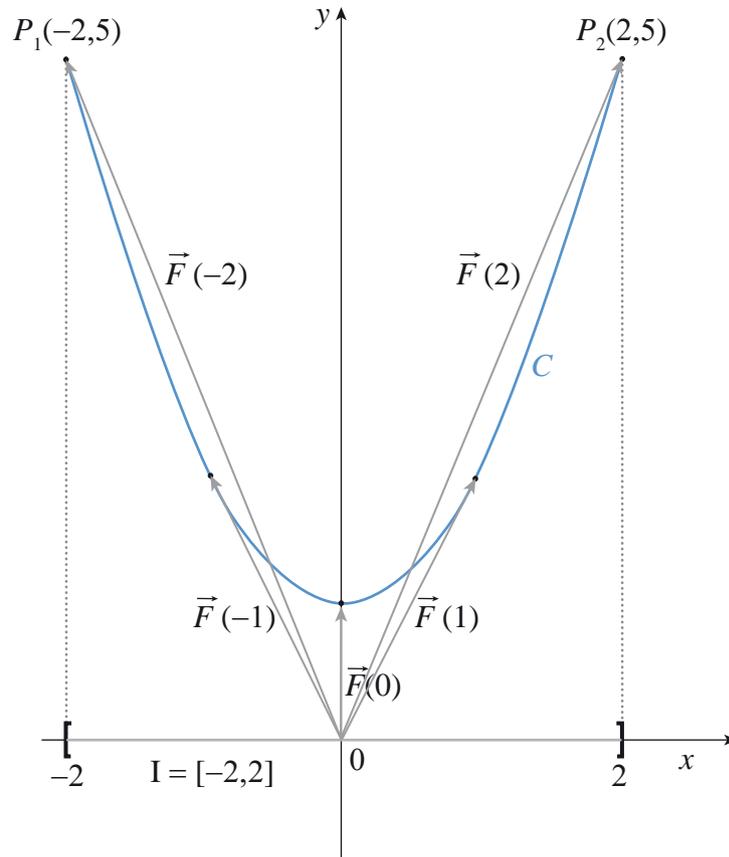


Figura 1.5

Observe na Figura 1.5 que $\vec{F}(0) = \vec{j}$ ou $(0,1)$; $\vec{F}(-1) = -\vec{i} + 2\vec{j}$ ou $(-1,2)$; $\vec{F}(1) = \vec{i} + 2\vec{j}$ ou $(1,2)$; $\vec{F}(-2) = -2\vec{i} + 5\vec{j}$ ou $(-2,5)$; $\vec{F}(2) = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ ou $(2,5)$ são alguns vetores posição de $\vec{F}(t)$.

Exemplo 1.4: Esboce a curva C representada pela função vetorial $\vec{F}(t) = (1-t)\vec{i} + 3t\vec{j}$; $t \in \mathbb{R}$.

Solução:

As equações paramétricas de C são:

$$x = 1 - t, \quad y = 3t; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para visualizar o gráfico, eliminamos o parâmetro t e obtemos:

$$x = 1 - t \Rightarrow t = 1 - x$$

$$y = 3t = 3(1 - x) = 3 - 3x; \quad x \in \mathbb{R},$$

que é uma reta no plano $xy(\mathbb{R}^2)$, definida em $I = \text{Dom}(\vec{F}) = \mathbb{R}$, conforme exibido na Figura 1.6.

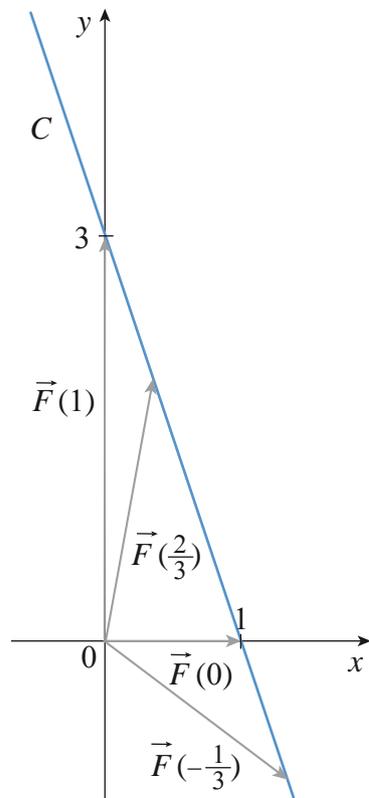


Figura 1.6

Observe na Figura 1.6 que

$$\vec{F}(0) = \vec{i} \text{ ou } (1, 0); \vec{F}(1) = 3\vec{j} \text{ ou } (0, 3);$$

$$\vec{F}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\vec{i} + 2\vec{j} \text{ ou } \left(\frac{1}{3}, 2\right); \vec{F}\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\vec{i} - \vec{j} \text{ ou } \left(\frac{4}{3}, -1\right)$$

são alguns vetores posição de $\vec{F}(t)$.

Exemplo 1.5: Esboce a curva C representada pela função vetorial

$$\begin{aligned} \vec{F} : [-2, 2] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{F}(t) &= t^2\vec{i} + t\vec{j} + 2\vec{k}. \end{aligned}$$

Solução:

As equações paramétricas de C são:

$$x = t^2, \quad y = t, \quad z = 2; \quad -2 \leq t \leq 2.$$

Eliminando o parâmetro t , obtemos:

$$x = y^2, \quad z = 2; \quad -2 \leq y \leq 2,$$

que é um "pedaço" da parábola $x = y^2$, no plano $z = 2$, do ponto $(4, -2, 2)$ ao ponto $(4, 2, 2)$, conforme exibido na Figura 1.7.

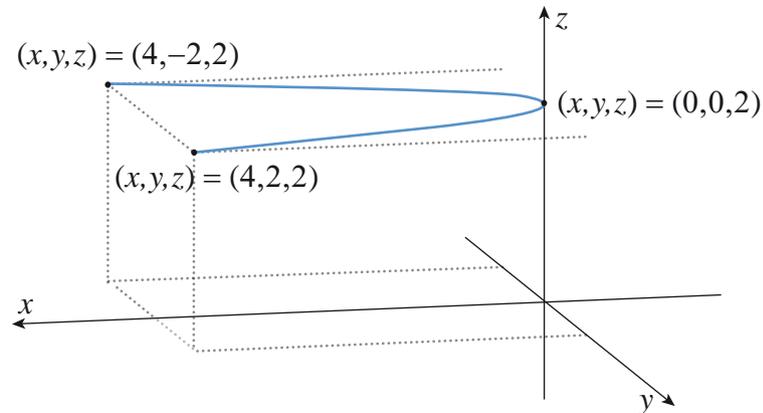


Figura 1.7

Exemplo 1.6: Esboce a curva C representada pela função vetorial $\vec{F}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}; t \geq 0$.

Solução:

As equações paramétricas de C são:

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3; \quad t \geq 0.$$

Como x, y e z são não negativos, C está no primeiro octante.

Eliminamos o parâmetro t das duas primeiras equações e obtemos:

$$y = x^2; \quad x \geq 0.$$

Isso implica que todo ponto $P(x, y, z)$ de C também pertence ao cilindro parabólico $y = x^2$.

Eliminamos agora o parâmetro t de $x = t$ e $z = t^3$ e obtemos:

$$z = x^3; \quad x \geq 0,$$

que é a equação de um cilindro de diretrizes paralelas ao eixo y . A curva C é a intersecção dos dois cilindros: $y = x^2$ e $z = x^3$, conforme exibido na Figura 1.8.

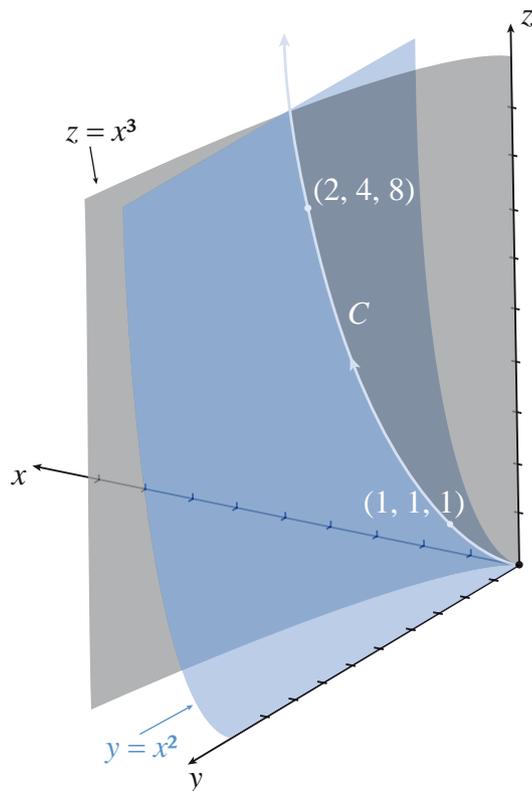


Figura 1.8

1.3 Aplicações

Suponhamos que uma partícula se move no plano ou no espaço, de modo que sua posição em cada instante t é dada pela extremidade do vetor $\vec{r}(t)$. Quando t varia em certo intervalo, a trajetória da partícula é a curva de \vec{r} .

Exemplo 1.7: O deslocamento de uma partícula é expresso por $\vec{F}(t) = t\vec{i} + (9-t)\vec{j} + (1-t^2)\vec{k}; t \geq 0$. Esboce a trajetória dessa partícula.

Solução:

As equações paramétricas de C são:

$$x = t, \quad y = 9 - t, \quad z = 1 - t^2; \quad t \geq 0.$$

Eliminamos o parâmetro t e obtemos:

$$x + y = 9 \quad \text{e} \quad z = 1 - x^2; \quad x \geq 0.$$

Portanto, a trajetória é a intersecção das superfícies $x + y = 9$ e $z = 1 - x^2$, como observamos na Figura 1.9.

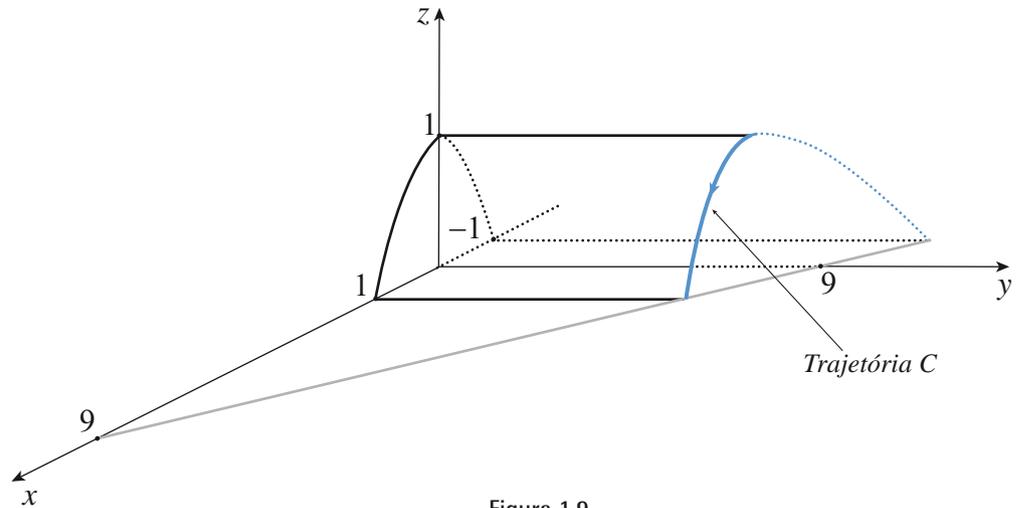


Figura 1.9

Exemplo 1.8: O deslocamento de uma partícula é expresso por $\vec{F}(t) = 2\cos t \vec{i} + 2\sin t \vec{j} + 4\vec{k}$; $t \in [0, 2\pi]$. Esboce a trajetória dessa partícula.

Solução:

As equações paramétricas de C são:

$$x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad z = 4; \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Temos: $x^2 + y^2 = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t = 4(\cos^2 t + \sin^2 t) = 4$. Portanto, a trajetória é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ com o plano $z = 4$, como observamos na Figura 1.10.

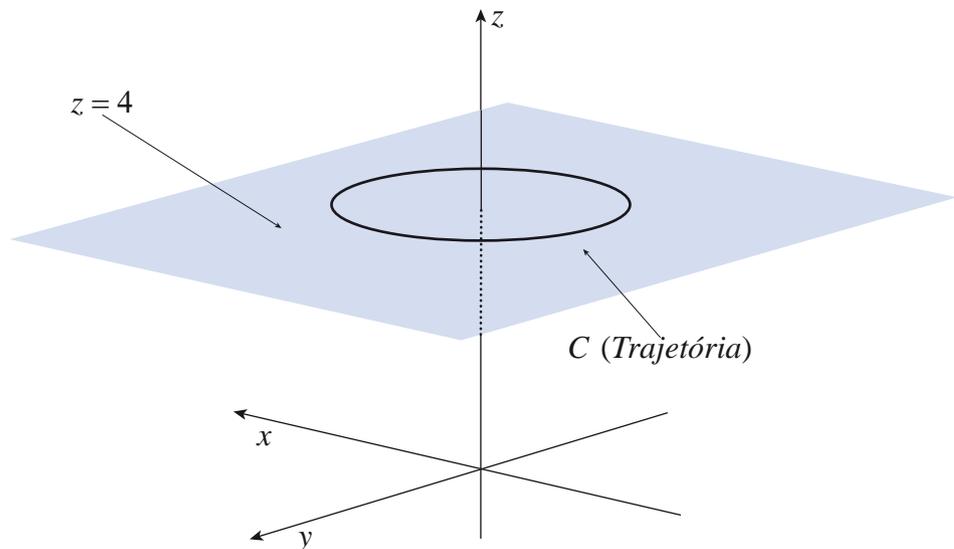


Figura 1.10

1.4 Operando com funções vetoriais

Sejam

$$\vec{F}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}, \quad t \in I \subset \mathbb{R} \text{ e}$$

$$\vec{G}(t) = g_1(t)\vec{i} + g_2(t)\vec{j} + g_3(t)\vec{k}, \quad t \in I \subset \mathbb{R}.$$

Seja $h(t)$ uma função escalar definida em $I \subset \mathbb{R}$. Então:

- i) A soma ou diferença das funções vetoriais \vec{F} e \vec{G} é definida como:

$$\vec{F}(t) \pm \vec{G}(t) = [f_1(t) \pm g_1(t)]\vec{i} + [f_2(t) \pm g_2(t)]\vec{j} + [f_3(t) \pm g_3(t)]\vec{k}, \quad t \in I,$$

que é uma função vetorial.

- ii) O produto da função escalar h pela função vetorial \vec{F} é definido como:

$$h(t)\vec{F}(t) = [h(t)f_1(t)]\vec{i} + [h(t)f_2(t)]\vec{j} + [h(t)f_3(t)]\vec{k}, \quad t \in I,$$

que é uma função vetorial.

- iii) O produto escalar de \vec{F} por \vec{G} é definido como:

$$\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t),$$

que é uma função escalar.

- iv) O produto vetorial de \vec{F} por \vec{G} é definido como:

$$\vec{F}(t) \times \vec{G}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix}$$

$$= (f_2 \cdot g_3 - f_3 \cdot g_2)\vec{i} + (f_3 \cdot g_1 - f_1 \cdot g_3)\vec{j} + (f_1 \cdot g_2 - f_2 \cdot g_1)\vec{k},$$

ou seja, $\vec{F}(t) \times \vec{G}(t)$ é uma função vetorial.

Exemplo 1.9: Sejam $\vec{F}(t) = t\vec{i} + 3t\vec{k}$; $\vec{G}(t) = \vec{i} - t^3\vec{j}$; $h(t) = \frac{1}{t}$. Determine:

- a) $\vec{F}(t) + 5\vec{G}(t)$
 b) $h(t)\vec{F}(t)$

Se atente para o fato de que ao utilizar

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix},$$

para calcular um produto vetorial, você não estará obtendo

um determinante, mesmo que operacionalmente você use a mesma lógica empregada para o cálculo de um. Nesse caso, o produto resultante da aplicação desse operador em dois vetores resultará em um novo vetor. Observe que não teria sentido apenas substituir \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} por números.

c) $\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)$

d) $\vec{F}(t) \times \vec{G}(t)$

Solução:

a) $\vec{F}(t) + 5\vec{G}(t) = t\vec{i} + 3t\vec{k} + 5(\vec{i} - t^3\vec{j}) = (t+5)\vec{i} - 5t^3\vec{j} + 3t\vec{k}$

b) $h(t)\vec{F}(t) = \frac{1}{t}(t\vec{i} + 3t\vec{k}) = \vec{i} + 3\vec{k}$

c) $\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = (t\vec{i} + 3t\vec{k}) \cdot (\vec{i} - t^3\vec{j}) = (t \cdot 1) + (0 \cdot (-t^3)) + (3t \cdot 0) = t$

d) $\vec{F}(t) \times \vec{G}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t & 0 & 3t \\ 1 & -t^3 & 0 \end{vmatrix} = 3t\vec{j} - t^4\vec{k} + 3t^4\vec{i} = 3t^4\vec{i} + 3t\vec{j} - t^4\vec{k}.$

Norma de um vetor é sinônimo de magnitude, ou tamanho do vetor.

Definição 1.2. Se \vec{F} é uma função vetorial, definimos a **norma** de \vec{F} como:

$$|\vec{F}(t)| = \sqrt{\vec{F}(t) \cdot \vec{F}(t)}.$$

Exemplo 1.10: Um ponto móvel move-se sobre uma curva plana, dada por $y = \sqrt{1+x^2}$, a partir do ponto $(0,1)$, onde se encontra no instante $t = \frac{1}{4}$, para a direita. A distância do ponto até a origem é proporcional ao tempo t . Encontre a função vetorial que descreve esse movimento.

Solução:

Seja $\vec{F}(t) = (x(t), y(t))$, $t \geq \frac{1}{4}$. Conforme os dados do problema, o caminho percorrido será a curva descrita por $y(t) = \sqrt{1+(x(t))^2}$, e a distância do ponto $(x(t), y(t))$ até o ponto $(0,0)$ é dada por $\sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2} = kt$ para algum $k > 0$. Como $\vec{F}\left(\frac{1}{4}\right) = (0,1)$, temos:

$$\sqrt{0^2 + 1^2} = k \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow k = 4.$$

$$\text{Então, } (x(t))^2 + 1 + (x(t))^2 = 16t^2 \Rightarrow x(t) = \sqrt{8t^2 - \frac{1}{2}}.$$

$$\text{Logo, } \vec{F}(t) = \left(\sqrt{8t^2 - \frac{1}{2}}, \sqrt{8t^2 + \frac{1}{2}} \right); t \geq \frac{1}{4}.$$

1.5 Limites de funções vetoriais

Seja \vec{F} uma função vetorial definida no intervalo I , exceto talvez no ponto $t_0 \in I$. Então:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \vec{u}$$

se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $|\vec{F}(t) - \vec{u}| < \varepsilon$ sempre que $0 < |t - t_0| < \delta$.

Observação 1.2. $|\vec{F}(t) - \vec{u}|$ representa a norma do vetor $\vec{F}(t) - \vec{u}$.

Em outras palavras, $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \vec{u}$ se, à medida que t se aproxima indefinidamente de t_0 , o vetor $\vec{F}(t)$ se aproxima de \vec{u} , em módulo, direção e sentido.

Teorema 1.1. Sejam $\vec{F}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Então, $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \vec{v}$ se, e somente se, $\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = v_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Observações:

1.3) O Teorema 1.1 diz que o cálculo de limites de funções vetoriais reduz-se ao cálculo dos limites das funções componentes.

1.4) Decorre do Teorema 1.1 que se $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \vec{u}$ e $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{G}(t) = \vec{v}$,

$\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = a$, sendo h uma função escalar, então:

$$\text{i) } \lim_{t \rightarrow t_0} [\vec{F}(t) \pm \vec{G}(t)] = \vec{u} \pm \vec{v};$$

$$\text{ii) } \lim_{t \rightarrow t_0} h(t)\vec{F}(t) = a\vec{u};$$

$$\text{iii) } \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = \vec{u} \cdot \vec{v};$$

$$\text{iv) } \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) \times \vec{G}(t) = \vec{u} \times \vec{v}.$$

Temos como exemplo o cálculo do seguinte limite:

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{2t-2}{t^3+3t^2-4t} \vec{i} + \sqrt{t} \vec{j} \right) = \left[\lim_{t \rightarrow 1} \frac{2(t-1)}{t(t-1)(t+4)} \right] \vec{i} + \left[\lim_{t \rightarrow 1} \sqrt{t} \right] \vec{j} = \frac{2}{5} \vec{i} + \vec{j} = \left(\frac{2}{5}, 1 \right).$$

Exemplo 1.11: Sejam $\vec{f}(t) = \operatorname{tg}(2t)\vec{i} + \sqrt{t^3}\vec{j} + (e^t - 1)\vec{k}$ e $h(t) = \frac{1}{t}$.
 Calcule $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) \cdot \vec{F}(t)$.

Solução:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} [h(t)\vec{F}(t)] &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} (\operatorname{tg}2t\vec{i} + \sqrt{t^3}\vec{j} + (e^t - 1)\vec{k}) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\operatorname{tg}2t}{t}\vec{i} + \frac{\sqrt{t^3}}{t}\vec{j} + \frac{(e^t - 1)}{t}\vec{k} \right) \right] \\ &= 2\vec{i} + \vec{k} \text{ ou } (2, 0, 1). \end{aligned}$$

Exemplo 1.12: Sejam $\vec{f}(t) = (t^2, 4e^{2t})$; $\vec{g}(t) = (6t, e^{-t})$. Calcule
 $\lim_{t \rightarrow 1} \vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)$.

Solução:

(1ª opção) $\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) = 6t^3 + 4e^t$. Logo,

$$\lim_{t \rightarrow 1} \vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) = \lim_{t \rightarrow 1} (6t^3 + 4e^t) = 6 + 4e.$$

(2ª opção) $\lim_{t \rightarrow 1} \vec{f}(t) = (1, 4e^2)$; $\lim_{t \rightarrow 1} \vec{g}(t) = (6, e^{-1})$.

Pela Observação 1.4, $\lim_{t \rightarrow 1} \vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) = (1, 4e^2) \cdot (6, e^{-1}) = 6 + 4e$.

1.6 Continuidade de funções vetoriais

Definição 1.3. A função \vec{F} , definida no intervalo I , é contínua no ponto $t_0 \in I$ se $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \vec{F}(t_0)$.

Decorre do Teorema 1.1 que uma função vetorial é contínua num ponto se, e somente se, *cada uma das suas componentes* for contínua neste ponto.

Exemplo 1.13: Seja

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} t^2\vec{i} + \cos t\vec{j} + \frac{\operatorname{sen} t}{t}\vec{k}, & \text{se } t \neq 0 \\ \vec{j}, & \text{se } t = 0 \end{cases}.$$

\vec{F} é contínua no ponto 0?

Solução:

Não, pois $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{F}(t) = \vec{j} + \vec{k}$ enquanto $\vec{F}(0) = \vec{j}$. Note que as duas primeiras funções componentes de \vec{F} são contínuas em 0, porém a terceira não, já que $\lim_{t \rightarrow 0} f_3(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen } t}{t} = 1$ (1º limite fundamental), mas $f_3(0) = 0$.

1.7 Derivada de uma função vetorial

Definição 1.4. A derivada da função \vec{F} é outra função vetorial definida por:

$$\vec{F}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t)}{\Delta t},$$

desde que o limite exista e seja finito.

Novamente, pelo Teorema 1.1, conclui-se que uma função vetorial é derivável em t_0 se, e somente se, *cada uma das funções componentes* o for.

1.7.1 Interpretação geométrica

Sejam \vec{F} derivável no intervalo I e C a curva descrita pelo vetor posição $\vec{F}(t)$ quando t percorre I .

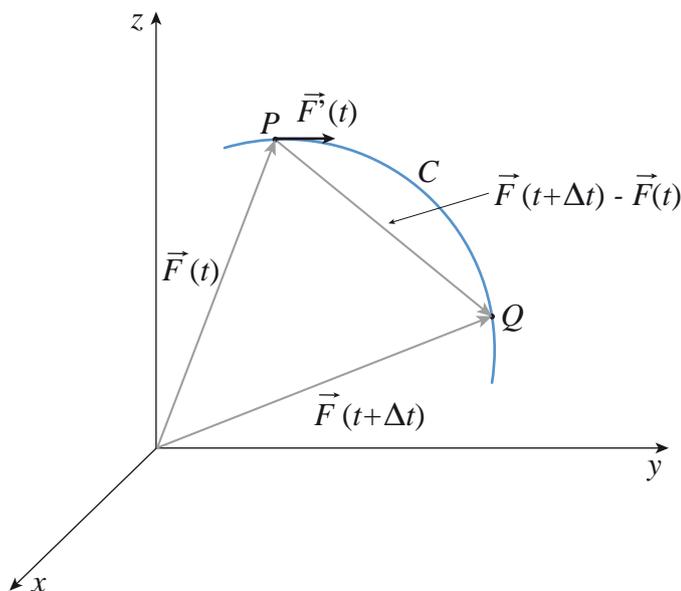


Figura 1.11

Sejam $t \in I$ e Δt , tais que $(t + \Delta t) \in I$. Sejam P e Q os pontos correspondentes aos vetores posição $\vec{F}(t)$ e $\vec{F}(t + \Delta t)$, respectivamente. Então, $\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t) = \vec{PQ}$.

Sendo Δt um escalar, o vetor $\frac{\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t)}{\Delta t}$ tem a mesma direção que \vec{PQ} . Se $\Delta t \rightarrow 0$, então $Q \rightarrow P$, e o vetor \vec{PQ} (sobre a reta secante à curva C por P) tende ao vetor $\vec{F}'(t)$ (sobre a reta tangente à curva C por P). Logo, se $\vec{F}'(t) \neq \vec{0}$, então $\vec{F}'(t)$ é um vetor tangente à curva C em P . Seu sentido é dado pelo sentido em que a curva é percorrida pela extremidade de $\vec{F}(t)$ quando t percorre I .

1.7.2 Cálculo das derivadas

Seja $\vec{F} = f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} + f_3 \vec{k}$. Então, ainda como consequência do Teorema 1.1, \vec{F} é derivável em t se, e somente se, for derivável em t para $i = 1, 2, 3$ e, nesse caso, $\vec{F}'(t) = f_1'(t) \vec{i} + f_2'(t) \vec{j} + f_3'(t) \vec{k}$. Basta, então, aplicar as regras de derivação para funções de uma variável.

Exemplo 1.14: Seja $\vec{F}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$; $t \in [0, 2\pi]$. Determine $\vec{F}'(t)$.

Solução:

$\vec{F}'(t) = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}$. Observe que $\vec{F}'(t)$ é um vetor tangente à curva de \vec{F} para todo $t \in [0, 2\pi]$. Veja:

$$\underbrace{\vec{F}(t) \cdot \vec{F}'(t)}_{\text{Produto Escalar}} = (\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) = -\cos t \sin t + \cos t \sin t = 0.$$

Exemplo 1.15: Seja $\vec{F}(t) = \sin^2(3t) \vec{i} - \cotg t^2 \vec{j} + \ln(\sec 2t) \vec{k}$. Determine $\vec{F}'(t)$.

Solução:

$$\vec{F}'(t) = (2 \cdot \sin(3t) \cdot \cos(3t) \cdot 3) \vec{i} - (-1 - \cotg^2 t^2) \cdot 2t \vec{j} + \frac{1}{\sec 2t} \cdot 2 \sin 2t \vec{k}$$

$$\vec{F}'(t) = (6 \cdot \sin(3t) \cdot \cos(3t), 2t + 2t \cotg^2 t^2, 2 \cdot \cos(2t) \cdot \sin(2t)).$$

1.7.3 Derivadas de ordem superior

Assim como calculamos $\vec{F}'(t)$, procedemos para calcular $\vec{F}''(t)$, $\vec{F}'''(t)$, etc.

Teorema 1.2. Sejam \vec{F} e \vec{G} funções vetoriais e h uma função escalar, todas deriváveis em t . Então:

- i) $[\vec{F}(t) + \vec{G}(t)]' = \vec{F}'(t) + \vec{G}'(t)$;
- ii) $[h(t)\vec{F}(t)]' = h(t)\vec{F}'(t) + h'(t)\vec{F}(t)$;
- iii) $[\underbrace{\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)}_{\text{Produto Escalar}}]' = \vec{F}'(t) \cdot \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \cdot \vec{G}'(t)$;
- iv) $[\underbrace{\vec{F}(t) \times \vec{G}(t)}_{\text{Produto Vetorial}}]' = \vec{F}'(t) \times \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \times \vec{G}'(t)$.

1.7.4 Interpretação física da derivada

Suponhamos que uma partícula descreve uma trajetória no espaço (ou no plano) e que $\vec{R}(t)$ é o seu vetor posição no instante t .

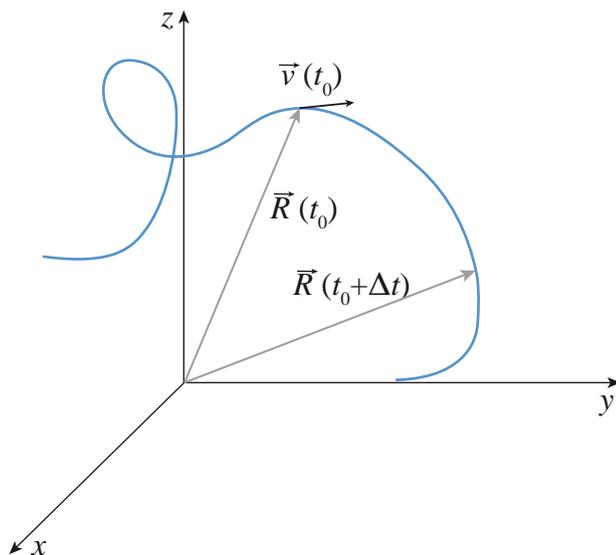


Figura 1.12

Definimos o vetor *velocidade instantânea* no tempo t_0 como:

$$\vec{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{R}(t_0 + \Delta t) - \vec{R}(t_0)}{\Delta t},$$

ou seja, $\vec{v}(t_0) = \vec{R}'(t_0)$, desde que \vec{R} seja derivável em t_0 .

Observe que o vetor velocidade é *tangente* à trajetória.

Observação 1.5. Ao módulo do vetor velocidade, $|\vec{v}(t_0)|$, chamamos velocidade escalar no instante t_0 . Aqui denotaremos apenas pela letra v .

Definimos o vetor *aceleração instantânea* no tempo t_0 como:

$$\vec{a}(t_0) = \vec{v}'(t_0) = \vec{R}''(t_0).$$

Observação 1.6. Ao módulo do vetor aceleração, $|\vec{a}(t_0)|$, chamamos *aceleração escalar* no instante t_0 . Aqui denotaremos apenas pela letra a .

Exemplo 1.16: Uma partícula move-se ao longo de uma curva e seu vetor posição no instante t é dado por $\vec{R}(t) = 4 \cos\left(\frac{t}{2}\right)\vec{i} + 4 \sin\left(\frac{t}{2}\right)\vec{j}$; $t \in [0, 4\pi]$. Se as unidades de tempo e espaço são segundo e metro, respectivamente, faça o que se pede.

- Determine o vetor velocidade e a velocidade escalar no tempo t qualquer.
- Calcule o vetor aceleração e a aceleração escalar no tempo t qualquer.
- Mostre que os vetores velocidade e aceleração são ortogonais.

Solução:

Inicialmente repare que a trajetória é uma circunferência com centro na origem e raio 4.

a)

$$\vec{v}(t) = \vec{R}'(t) = -2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\vec{i} + 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\vec{j};$$

$$|\vec{R}'(t)| = \sqrt{\left(-2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 + \left(2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{4\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)} = \sqrt{4} = 2.$$

Logo, $v = 2$ m/s (Velocidade escalar é constante em toda a trajetória.)

b)

$$\vec{a}(t) = \vec{R}''(t) = \vec{v}'(t) = -\cos\left(\frac{t}{2}\right)\vec{i} - \sin\left(\frac{t}{2}\right)\vec{j};$$

$$|\vec{a}'(t)| = \sqrt{\left(-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 + \left(-\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \sqrt{1} = 1$$

Logo, $a = 1 \text{ m/s}^2$ (Aceleração escalar constante.)

c) Em geometria analítica, foi visto que os vetores \vec{a} e \vec{b} são ortogonais se, e somente se, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Precisamos verificar o seguinte produto escalar:

$$\vec{R}'(t) \cdot \vec{R}''(t) = \vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = \left(-2\sin\left(\frac{t}{2}\right), \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) \cdot \left(-\cos\left(\frac{t}{2}\right), -\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) = 0.$$

Logo, $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$ são ortogonais, como representado na Figura 1.13.

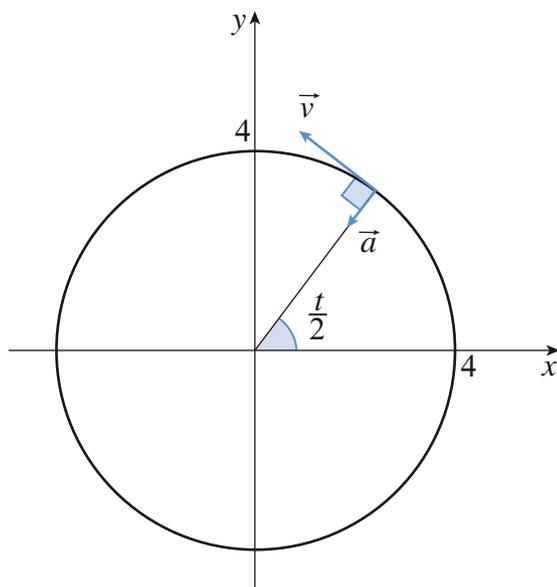


Figura 1.13

Exemplo 1.17: Um projétil de massa m é lançado ao ar de uma altura de y_0 metros, com velocidade inicial de v_0 m/s, segundo um ângulo de elevação de α radianos. Desprezando a resistência do ar e a rotação da Terra, determine:

- o vetor posição do projétil em cada instante;
- o vetor velocidade do projétil em cada instante.

Solução:

Sejam $\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ o vetor posição do projétil, $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$ os vetores velocidade e aceleração, respectivamente, no instante t . Então:

$$\vec{v}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} \text{ e } \vec{a}(t) = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j}.$$

O problema pede $\vec{R}(t)$ e $\vec{v}(t)$ em função de t , y_0 , v_0 , α . Pois bem, a única força que atua sobre o projétil é a força gravitacional, que tem intensidade " mg ", direção vertical, sentido para baixo. Representando-a por \vec{F} , temos:

$$\vec{F}(t) = -mg\vec{j} \text{ ou } (0, -mg) \text{ (}\vec{F} \text{ é constante!)}$$

Mas conforme a 2ª Lei de Newton, $\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t)$. Logo,

$$(0, -mg) = (m \cdot x''(t), m \cdot y''(t))$$

e, como $m \neq 0$, segue:

$$\begin{cases} x''(t) = 0 \Rightarrow x'(t) = k \text{ para algum } k \in \mathbb{R} \text{ e para } t \geq 0. \\ y''(t) = -g \Rightarrow y'(t) = -gt + c \text{ para algum } c \in \mathbb{R} \text{ e para } t \geq 0. \end{cases}$$

Precisamos determinar k e c :

Tomando $t = 0$, obtemos $x'(0) = k$ e $y'(0) = c$. Por outro lado,

$$(x'(0), y'(0)) = \vec{v}(0) = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha).$$

Dessas igualdades, segue que $k = v_0 \cos \alpha$ e $c = v_0 \sin \alpha$. Logo,

$$\vec{v}(t) = (x'(t)\vec{i}, y'(t)\vec{j}) = (v_0 \cos \alpha \vec{i}, -gt + v_0 \sin \alpha \vec{j})$$

ou

$$\vec{v}(t) = \underbrace{v_0 \cos \alpha \vec{i} + (-gt + v_0 \sin \alpha) \vec{j}}_{\text{Resposta item (b)}}$$

Para chegar a $\vec{R}(t)$, o caminho é quase o mesmo:

$$\begin{cases} x'(t) = v_0 \cos \alpha \Rightarrow x(t) = (v_0 \cos \alpha)t + k_1 \text{ para algum } k_1 \in \mathbb{R}. \\ y'(t) = -gt + v_0 \sin \alpha \Rightarrow y(t) = -\frac{gt^2}{2} + (v_0 \sin \alpha)t + c_1 \text{ para algum } c_1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Para achar k_1 e c_1 , façamos novamente $t = 0$:

$$x(0) = 0 \Rightarrow k_1 = 0;$$

$$y(0) = y_0 \Rightarrow c_1 = y_0.$$

Portanto,

$$\vec{R}(t) = \underbrace{[(v_0 \cos \alpha)t \vec{i} + \left(y_0 - \frac{gt^2}{2} + (v_0 \sin \alpha)t \right) \vec{j}]}_{\text{Resposta do item (a)}}. \text{ Veja a Figura 1.14a}$$

e a Figura 1.14b.

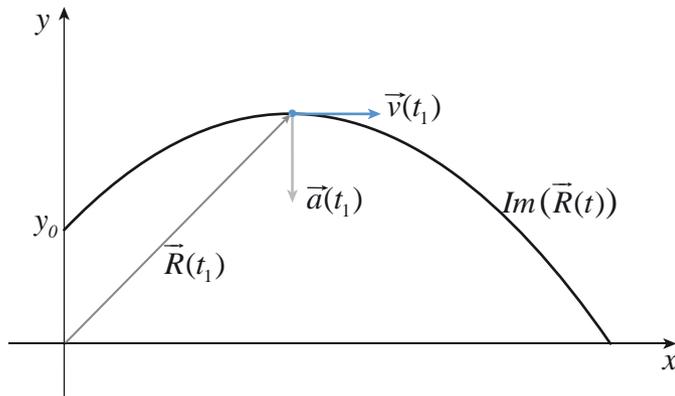


Figura 1.14a

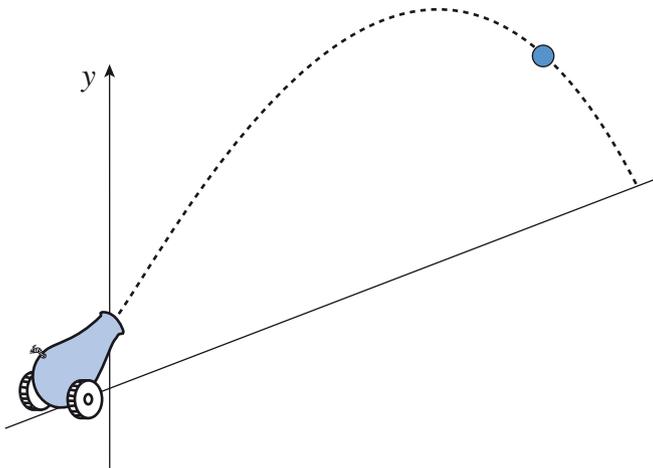


Figura 1.14b

Exemplo 1.18: Tomemos para o mesmo exemplo (anterior):

$$y_0 = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad}, \quad v_0 = 50 \text{ m/s}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2. \text{ Determine:}$$

- o alcance do projétil, isto é, o espaço entre o ponto de lançamento e o ponto em que atinge o solo;
- a altura máxima atingida;
- a velocidade escalar no momento em que cai no solo;
- a equação cartesiana da curva percorrida.

Solução:

Nesse caso, para os valores fornecidos, $\vec{R}(t) = 25\sqrt{3}t\vec{i} + (25t - 5t^2)\vec{j}$.
Ao atingir o solo, $y(t) = 0$, ou seja, $25t - 5t^2 = 0 \Rightarrow t = 5\text{s}$.

a) O alcance é

$$x_{\max} = |\vec{R}(5) - \vec{R}(0)| = \sqrt{(25\sqrt{3} \cdot 5 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 125\sqrt{3} \cong 216 \text{ m.}$$

b) A altura máxima ocorre quando a velocidade vertical muda de sentido, ou seja, quando ela é igual a 0, isto é:

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow 25 - 10t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \text{ s.}$$

A altura máxima será então $y\left(\frac{5}{2}\right) = 25 \cdot \frac{5}{2} - 5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 31,25 \text{ m.}$

c) O impacto com o solo ocorre após 5 segundos. O vetor velocidade naquele instante é:

$$\vec{v}(5) = (25\sqrt{3}, -25).$$

A velocidade escalar é então $|\vec{v}(5)| = 50 \text{ m/s.}$

d) $\vec{R}(t) = 25\sqrt{3}t\vec{i} + (25t - 5t^2)\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Vamos eliminar t do sistema,

$$\begin{cases} x = 25\sqrt{3}t \\ y = 25t - 5t^2 \end{cases}$$

e achar uma relação entre x e y :

$$t = \frac{x}{25\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{25x}{25\sqrt{3}} - \frac{5x^2}{25^2 \cdot 3} \Rightarrow y = -\frac{x^2}{375} + \frac{x}{\sqrt{3}}. \text{ (Que é uma}$$

parábola.)

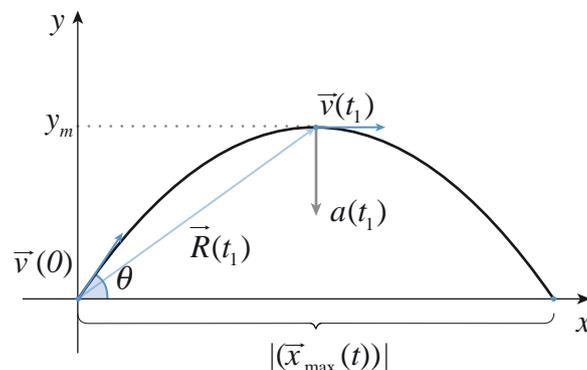


Figura 1.15

Exemplo 1.19: Uma partícula descreve uma trajetória cujo vetor posição é $\vec{R}(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right); t \geq 0$.

- Mostre que a partícula se movimenta sobre uma circunferência.
- Qual o sentido do percurso?
- Supondo que a partícula se movimenta “para sempre” (tempo infinito), ela conseguirá dar uma volta completa? Dará meia-volta?

Solução:

a) Lembrando que $x^2(t) + y^2(t) = 1$ corresponde a uma circunferência, verifique aqui que $x^2(t) + y^2(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^2 = 1$.

b) A partícula parte do ponto $(1, 0)$, pois $\vec{R}(0) = (1, 0)$. Escrevendo $\vec{R}(t) = (x(t), y(t))$, nota-se que para $t > 0$, $y(t) > 0$. Isso significa que a partícula nunca cruzará o eixo dos x , ou melhor, a trajetória está contida na semicircunferência superior. Olhando para

$$\vec{R}'(t) = (x'(t), y'(t)) = \left(\frac{-4t}{(1-t^2)^2}, \frac{2(1-t^2)}{(1-t^2)^2} \right),$$

vemos que $x'(t) < 0$ para $t > 0$. Isso nos faz concluir que o sentido de percurso é anti-horário.

c) Fazendo t tender a infinito, temos: $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{R}(t) = (-1, 0)$.

Então, a partícula parte de $(1, 0)$ e não dá sequer meia-volta, pois jamais atinge o ponto $(-1, 0)$, mas chega infinitamente próximo dele.

Resumo

Neste capítulo definimos as funções cujas imagens são vetores. Representamos graficamente estas funções, calculamos limites, analisamos a continuidade e calculamos derivadas dessas funções. Vimos que para uma partícula que se move no plano ou no espaço, de modo que sua posição em cada instante t é dada pela extremidade do vetor $\vec{F}(t)$ quando t varia em certo intervalo, tem trajetória dada pela curva de \vec{F} . Finalizamos o capítulo apresentando algumas aplicações das funções vetoriais, com ênfase no campo da Física.

Exercícios propostos

- 1) A posição de uma partícula no plano xy , no tempo t , é dada por $x(t) = e^t$, $y(t) = te^t$.
 - a) Escreva a função vetorial $\vec{f}(t)$ que descreve o movimento dessa partícula.
 - b) Onde se encontrará a partícula em $t = 0$ e em $t = 2$?

- 2) O movimento de um besouro que desliza sobre a superfície de uma lagoa pode ser expresso pela função vetorial $\vec{r}(t) = \frac{1 - \cos t}{m} \vec{i} + \left(2t + \frac{t - \operatorname{sen} t}{m} \right) \vec{j}$, onde m é a massa do besouro. Determine a posição do besouro no instante $t = 0$ e no $t = \pi$.

De 3 a 9, faça um esboço da curva dada pela função vetorial.

- 3) $\vec{f}(t) = 2t\vec{i} + (t^2 - 5)\vec{j}$; $t \in [-2, 3]$
- 4) $\vec{g}(t) = t^2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$; $t \in [0, 3]$
- 5) $\vec{h}(t) = 2\vec{i} + 5\cos t\vec{j} + 3\operatorname{sen} t\vec{k}$; $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$
- 6) $\vec{r}(\theta) = \operatorname{sen}^2\theta\vec{i} + \cos^2\theta\vec{j}$; $\theta \in \mathbb{R}$
- 7) $\vec{s}(t) = \cos^2\theta\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\vec{j}$; $\theta \in [0, 2\pi]$
- 8) $\vec{F}(t) = t\vec{i} + 2t\vec{j} + (9 - 9t^2)\vec{k}$; $-1 \leq t \leq 1$
- 9) $\vec{H}(t) = (9 - 3\operatorname{sen} t)\vec{i} + 3\cos t\vec{j} + 3\operatorname{sen} t\vec{k}$; $t \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2} \right]$
- 10) a) Seja $\vec{F}(t) = (1 - 2t)\vec{i} - (2 - 3t)\vec{j}$; $t \in \mathbb{R}$. Mostre que a curva definida por \vec{F} é uma reta.
 - b) Seja $\vec{G}(t) = (2 + t)\vec{i} - (1 - 2t)\vec{j} + 3t\vec{k}$; $t \in \mathbb{R}$. Mostre que a curva definida por \vec{G} é uma reta e determine o ponto em que ela fura o plano xz .

11) Uma partícula se desloca no espaço. Em cada instante t o seu

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + \frac{1}{t-2}\vec{j} + \vec{k}.$$

- Determine a posição da partícula no instante $t = 0$ e no $t = 1$.
- Esboce a trajetória da partícula.
- Quando t se aproxima de 2, o que ocorre com a posição da partícula?

12) Determine o domínio das funções vetoriais.

$$\text{a) } \vec{f}(t) = t^2\vec{i} + \sqrt{t-1}\vec{j} + \sqrt{5-t}\vec{k}$$

$$\text{b) } \vec{g}(t) = \left(\frac{t-2}{t+2}, \sin t, \ln(9-t^2) \right)$$

13) Sendo $\vec{f}(t) = t\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 3t^3\vec{k}$ e $\vec{g}(t) = 2t\vec{i} + \vec{j} - 3t^2\vec{k}$, calcule:

$$\text{a) } \lim_{t \rightarrow 1} \left[3\vec{f}(t) - \frac{1}{2}\vec{g}(t) \right]$$

$$\text{b) } \lim_{t \rightarrow 1} [\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)]$$

$$\text{c) } \lim_{t \rightarrow 1} [\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)]$$

14) V (verdadeiro) ou F (falso)? Justifique.

Seja $\vec{F} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função três vezes derivável em I .

$$\text{a) } (\vec{F}' \times \vec{F})' = \vec{F}'' \times \vec{F}$$

$$\text{b) } (\vec{F}' \times \vec{F})'' = \vec{F}''' \times \vec{F}$$

$$\text{c) } (\vec{F} \cdot \vec{F})'' = 2(\vec{F}' \cdot \vec{F})' + |\vec{F}'|^2$$

$$\text{d) } \text{Se } U(t) = |\vec{F}(t)|, \text{ então } \vec{F}(t) \cdot \vec{F}'(t) = U(t)U'(t).$$

15) Seja $\vec{u}(t) = \frac{t^2}{\sqrt[3]{t}}\vec{i} + \sqrt{6}\vec{j} + t \cos\left(\frac{1}{t}\right)\vec{k}$. Determine, se existir:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{u}(t) \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(t)}{t}.$$

- 16) Se a afirmação é verdadeira, prove-a. Caso contrário, dê um contraexemplo.

Afirmação: Seja $\vec{F}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$; $a \in I$. Se o $\lim_{t \rightarrow a} \vec{F}(t)$ existe, então

$$\lim_{t \rightarrow a} |\vec{F}(t)| = \left| \lim_{t \rightarrow a} \vec{F}(t) \right|.$$

- 17) Prove, usando o Teorema 1.1: Uma função vetorial $\vec{f}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é contínua num ponto se, e somente se, cada componente for contínua no ponto.

- 18) Verifique se \vec{f} é contínua em 7:

$$\vec{f}(t) = \begin{cases} t^2 \vec{i} + \frac{\sqrt[3]{t+1}-2}{t-7} \vec{j} + 2t \vec{k}, & \text{se } t \neq 7 \\ 49 \vec{i} + 14 \vec{k}, & \text{se } t = 7. \end{cases}$$

- 19) Seja $\vec{F}(t) = \frac{t}{2} \vec{i} + \sqrt{t+1} \vec{j} + (t+1) \vec{k}$ e C a curva de \vec{F} . Obtenha dois vetores unitários tangentes à C no ponto $(1, \sqrt{3}, 3)$.

- 20) A posição de uma partícula que se move no espaço, no instante $t \geq 0$, é dada por:

$$x(t) = 2t; \quad y(t) = 3; \quad z(t) = 4 - t^2.$$

- a) Escreva a função vetorial que descreve a trajetória da partícula.
- b) Faça um esboço da trajetória.
- c) Determine os vetores velocidade e aceleração da partícula, bem como a velocidade e aceleração escalar no instante $t = 2$.

- 21) Determine a derivada das seguintes funções vetoriais.

a) $\vec{g}(t) = \sin t \cos t \vec{i} + e^{-2t} \vec{j}$

b) $\vec{f}(t) = e^{-t} \vec{i} + e^{-2t} \vec{j} + \vec{k}$

c) $\vec{h}(t) = \ln t \vec{i} + t \vec{j} + t \vec{k}$

d) $\vec{w}(t) = \left(\frac{5t-2}{2t+1}, \ln(1-t^2), 5 \right)$

- 22) Seja $\vec{r}(t) = (t^3 + 2t)\vec{i} - 3e^{-2t}\vec{j} + 2\text{sen}(5t)\vec{k}$ uma função que descreve a posição de uma partícula. Calcule e dê um possível significado físico do que ocorre em cada situação abaixo quando $t = 0$.

a) $\frac{d\vec{r}}{dt}$

b) $\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$

c) $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

d) $\left| \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right|$

- 23) Determine os vetores velocidade e aceleração para qualquer instante t . Determine, ainda, o módulo desses vetores no instante dado.

a) $\vec{r}(t) = 2\cos t\vec{i} + 5\text{sen}t\vec{j} + 3\vec{k}; t = \frac{\pi}{4}$

b) $\vec{r}(t) = e^t\vec{i} + e^{-2t}\vec{j}; t = \ln 2$

- 24) A posição de uma partícula em movimento no plano, no tempo t , é dada por

$$x(t) = \frac{1}{2}(t-1) \text{ e } y(t) = \frac{1}{4}(t^2 - 2t + 1).$$

- a) Escreva a função vetorial $\vec{f}(t)$ que descreve o movimento desta partícula.
- b) Determine o vetor velocidade e o vetor aceleração.
- c) Esboce a trajetória da partícula e os vetores velocidade e aceleração no instante $t = 5$.
- 25) No instante t , a posição de uma partícula no espaço é dada por

$$x(t) = t^2, y(t) = 2\sqrt{t} \text{ e } z(t) = 4\sqrt{t^3}.$$

- a) Escreva a função vetorial que nos dá a trajetória da partícula.
- b) Determine um vetor tangente à trajetória da partícula no ponto $P(1, 2, 4)$.
- c) Determine a posição, a velocidade e a aceleração da partícula para $t = 4$.

- 26) Prove a afirmação: Se uma partícula se move com velocidade escalar constante, os vetores velocidade e aceleração são ortogonais.

Respostas

1. a) $\vec{f}(t) = e^t \vec{i} + te^t \vec{j}$ b) $(1, 0); (e^2, 2e^2)$

2. $\vec{r}(0) = \vec{0}, \vec{r}(\pi) = \frac{2}{m} \vec{i} + \left(2\pi + \frac{\pi}{m}\right) \vec{j}$

11. a) $\left(0, -\frac{1}{2}, 1\right); (1, -1, 1)$

c) A partícula tende para uma posição infinita.

12. a) $\{t \in \mathbb{R} / 1 \leq t \leq 5\}$ b) $\{t \in \mathbb{R} / -3 < t < 3, t \neq -2\}$

13. a) $\left(2, \frac{1}{2}, \frac{21}{2}\right)$ b) -5 c) $(-9, 9, -3)$

19. $\pm \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

21. a) $(-3 \cos^2(t) \operatorname{sen}(t), \sec^2(t), 2 \operatorname{sen}(t) \cos(t))$ b) $(-e^{-t}, -2e^{-2t}, 0)$

c) $\left(\frac{1}{t}, 1, 1\right)$ d) $\left(\frac{9}{(2t+1)^2}, -\frac{2t}{1-t^2}, 0\right)$

22. a) $(2, 6, 10)$: vetor velocidade em $t = 0$

b) $2\sqrt{35}$: velocidade escalar

c) $(0, -12, 0)$: vetor aceleração em $t = 0$

d) 12 : aceleração escalar

$$23. \text{ a) } \vec{v}(t) = (-2\sin t, 5\cos t), \quad \left| \vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| = \sqrt{\frac{29}{2}}; \quad \vec{a}(t) = (-2\cos t, -5\sin t),$$

$$\left| \vec{a}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| = \sqrt{\frac{29}{2}}$$

$$\text{ b) } \vec{v}(t) = (e^t, -2e^{-2t}), \quad \left| \vec{v}(\ln 2) \right| = \frac{\sqrt{17}}{2}; \quad \vec{a}(t) = (e^t, 4e^{-2t}), \quad \left| \vec{a}(\ln 2) \right| = \sqrt{5}$$

$$24. \text{ a) } \left(\frac{1}{2}(t-1), \frac{1}{4}(t^2 - 2t + 1) \right) \quad \text{ b) } \vec{v}(t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(t-1) \right), \quad \vec{a}(t) = \left(0, \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{ c) } \vec{v}(5) = \left(\frac{1}{2}, 2 \right), \quad \vec{a}(5) = \left(0, \frac{1}{2} \right)$$

$$25. \text{ a) } (t^2, 2\sqrt{t}, 4\sqrt{t^3}) \quad \text{ b) } (2, 1, 6)$$

$$\text{ c) } (16, 4, 32); \left(8, \frac{1}{2}, 12 \right); \left(2, -\frac{1}{16}, \frac{3}{2} \right)$$

Capítulo 2

Curvas

Capítulo 2

Curvas

O conceito de curva é mais geral do que o de gráfico de uma função, pois, uma curva pode interceptar a si própria no formato de um oito, ser fechada (como é o caso de círculos e elipses) ou desenvolver-se em espiral em torno de um ponto. Primeiramente, as curvas que estudaremos neste capítulo estão situadas em um plano xy e gozam da propriedade de que as coordenadas x e y de um ponto arbitrário P da curva podem expressar-se como funções de uma variável t , chamada parâmetro. A razão da escolha da letra t é que, em muitas aplicações, esta variável denota o tempo e P representa um objeto em movimento que está na posição (x, y) no instante t . Adiante, estenderemos os conceitos para o estudo de curvas no espaço. Também empregaremos tal representação para definir velocidade, aceleração e outras definições associadas ao movimento.

2.1 Introdução

Se f e g são funções contínuas de t em um intervalo I , então o conjunto de pares ordenados $(f(t), g(t))$ é uma *curva plana* C . As equações $x = f(t)$ e $y = g(t)$ são as *equações paramétricas* de C , e t é o *parâmetro*.

O conjunto dos pontos do plano da forma $(x, y) = (f(t), g(t))$ é chamado de gráfico da curva C . Para tornar mais simples o que se segue, não faremos distinção entre a curva e o seu gráfico. Ao esboçar uma curva descrita por um par de equações paramétricas, continuamos a colocar os pontos do gráfico no plano xy . Cada ponto da curva, de coordenadas (x, y) , é determinado por um valor do parâmetro t . Ao colocar os pontos do plano utilizando valores crescentes de t , a curva é percorrida em uma certa direção. Essa é a *orientação* da curva (conforme veremos adiante).

Analogamente, se f , g e h são funções contínuas de t em um intervalo I , então o conjunto de ternas ordenadas $(f(t), g(t), h(t))$ é uma curva C no espaço tridimensional. As equações $x = f(t)$, $y = g(t)$ e $z = h(t)$ são as equações paramétricas de C , e t é o parâmetro.

Muitas vezes, em situações de aplicações, uma curva pode representar a trajetória de uma partícula no plano ou no espaço. Nesse caso, é necessário representar as coordenadas da curva em função de um parâmetro, ou seja, as coordenadas x, y e z são representadas por meio de funções escalares $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, respectivamente, em que $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são funções contínuas do parâmetro t , definidas para $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$. Essa representação é chamada de **representação paramétrica da curva**, ou simplesmente *caminho*.

Por outro lado, dada uma curva, podemos imaginá-la como uma trajetória e escrever as coordenadas de seus pontos em função de um parâmetro t . Tais funções, juntamente com seus domínios comuns, são denominadas *equações paramétricas da curva*. Nesse caso, as equações $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ determinam, em cada instante t , a posição do ponto P ao se deslocar sobre a curva C .

Exemplo 2.1: Aristóteles trabalha no Aeroporto Internacional Hercílio Luz, em Florianópolis. Sua função é controlar o tráfego aéreo na região próxima ao aeroporto onde, devido ao grande número de decolagens e aterrissagens, o risco de colisão é muito grande. Durante um único turno de trabalho, Aristóteles deve analisar centenas de trajetórias percorridas pelos aeroplanos que aparecem na tela do radar, à sua frente. Se os cursos de dois aviões se aproximam perigosamente, Aristóteles deve avisar a um deles para alterar a sua rota. Para desempenhar sua tarefa com sucesso, Aristóteles necessita conhecer, com precisão, a rota percorrida por cada avião e o instante em que esses passam em cada ponto dos percursos. A tela do radar com que Aristóteles trabalha monitora uma área de 3600 km^2 ao redor do aeroporto e mostra uma espécie de mapa cartesiano da região: a imagem que aparece na tela é uma janela de $[-30, 30]$ por $[-30, 30]$, com a torre de controle na origem, conforme mostra a Figura 2.1a e a Figura 2.1b.

As representações paramétricas de uma curva podem ser compreendidas como representações vetoriais, pois a partir delas pode-se determinar a posição do ponto de uma curva no sistema de coordenadas ao qual a função foi parametrizada. Uma função é uma correspondência que associa a cada elemento de seu domínio D exatamente um elemento de seu contradomínio E . Se essa função está *representada parametricamente*, então D é o conjunto de todos os números reais que podem ser assumidos pelo parâmetro t e E é o conjunto formado por todos os vetores possíveis $r(t)$ para $t \in D$. Assim, o conjunto imagem dessa função é o conjunto $I \subset E$ formado por *todos os vetores* que estão em correspondência com algum elemento $t \in D$.

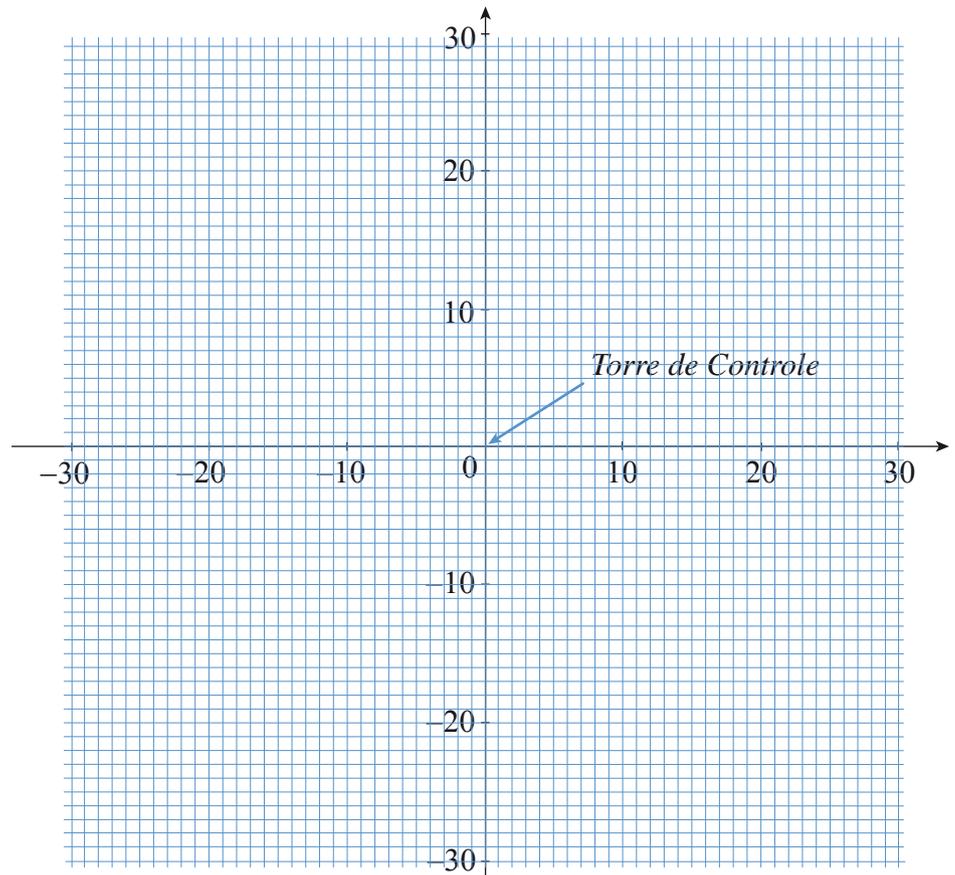


Figura 2.1a

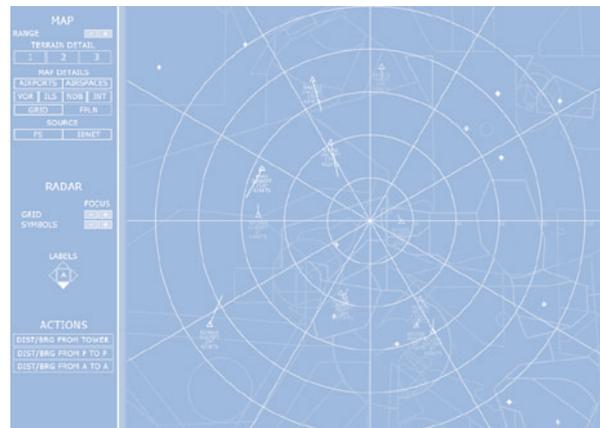


Figura 2.1b

Para simplificar o problema, vamos considerar que cada avião viaja em linha reta com velocidade constante. (Na realidade, Aristóteles deve lidar com mudanças na velocidade, seja na magnitude ou na direção). A tabela a seguir mostra as coordenadas (posição) de três aviões no momento em que começa o monitoramento, isto é, no momento em que a imagem aparece na tela ($t = 0$) e um minuto mais tarde ($t = 1$).

	Coordenadas em $t = 0$	Coordenadas em $t = 1$
Avião A	$(-12, -30)$	$(-7, -22)$
Avião B	$(-9, 30)$	$(-6, 21)$
Avião C	$(30, -8)$	$(15, -24)$

O que pedimos a seguir tem como objetivo ajudá-lo a analisar e explorar os dados fornecidos na tabela anterior.

- a) Deduza a equação cartesiana que descreve a rota seguida pelo avião A.

Solução:

Os aviões descrevem um movimento retilíneo. Devemos, então, determinar a equação cartesiana da reta descrita pelo avião A. A equação da reta é do tipo: $y = ax + b$.

No intervalo de tempo de 1 minuto, o avião A passa do ponto $(-12, -30)$ para o ponto $(-7, -22)$.

Temos o sistema:

$$\begin{cases} -30 = -12a + b \\ -22 = -7a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{5} \\ b = -\frac{54}{5} \end{cases}$$

Portanto, a equação cartesiana que descreve a rota seguida pelo avião A é:

$$y = \frac{8}{5}x - \frac{54}{5}$$

- b) Em algum instante do percurso, o avião A passa diretamente sobre a torre de controle? Justifique a sua resposta.

Solução:

A torre de controle fica localizada no ponto $(0, 0)$. Se fizermos $x = 0$ na equação cartesiana, obtemos:

$$y = \frac{8}{5}x - \frac{54}{5}$$

$$y = \frac{8}{5}(0) - \frac{54}{5}$$

$$y = -\frac{54}{5}.$$

Como podemos verificar no cálculo anterior, o avião A passa pelo eixo das ordenadas no ponto $\left(0, -\frac{54}{5}\right)$. Assim, podemos concluir que não passa por $(0,0)$, onde se encontra a torre de controle.

- c) Quais são as coordenadas do avião A quando a sua imagem desaparece da tela do radar?

Solução:

Veja o gráfico da reta que descreve a rota seguida pelo avião A.

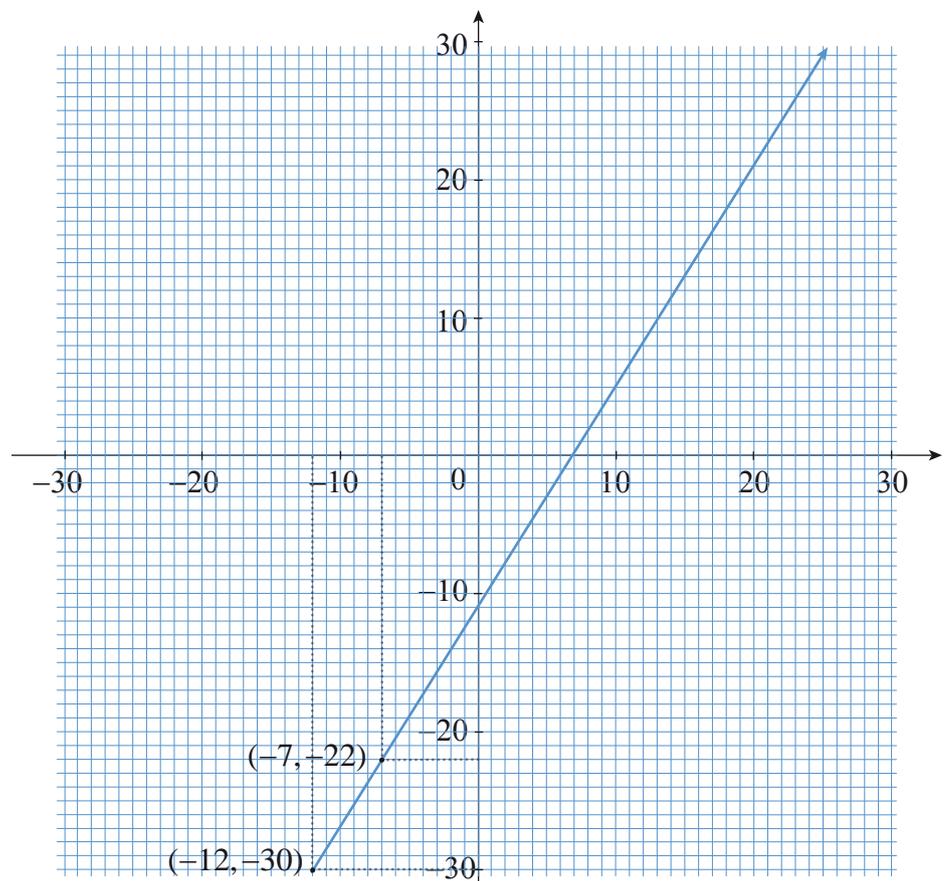


Figura 2.2

A imagem do avião aparece na tela do radar no ponto de coordenadas $(-12, -30)$ e desaparece no ponto de coordenadas $\left(\frac{51}{2}, 30\right)$. Essa observação pode ser confirmada algebricamente, calculando-se na equação $y = \frac{8}{5}x - \frac{54}{5}$ o valor de x , quando $y = 30$.

- d) Para Aristóteles, é muito importante saber a posição do avião, em cada instante. Usando a equação que você deduziu no item (a), é possível saber a posição (coordenadas) do avião A, 3 minutos após o início do monitoramento? É possível saber quanto tempo leva para a imagem deste avião desaparecer da tela do radar?

Solução:

A equação deduzida no item (a) não permite relacionar a posição do avião com o tempo transcorrido.

- e) A tabela seguinte mostra as coordenadas x e y do avião A, em cada instante de tempo indicado. Sabendo que o avião se desloca com velocidade constante, complete esta tabela.

t	x	y
0	-12	-30
1	-7	-22
2		
3		
4		
5		

Solução:

Pelos dados da tabela e levando em consideração que o avião se desloca sobre a reta $y = \frac{8}{5}x - \frac{54}{5}$ com velocidade constante, podemos deduzir que, a cada minuto transcorrido, o movimento do avião resulta num deslocamento de 5 km na direção x (para leste) e 8 km na direção y (para norte). A partir desses dados, podemos completar a tabela dada como é mostrado a seguir. Repare que todos os pontos (x, y) dessa tabela pertencem à reta que descreve a rota seguida pelo avião.

t	x	y
0	-12	-30
1	-7	-22
2	-2	-14
3	3	-6
4	8	2
5	13	10

- f) Use a tabela obtida no item anterior para expressar a coordenada x do avião como uma função afim do tempo.

Solução:

Pelos dados apresentados, é possível deduzir que $x(t) = -12 + 5t$.

- g) Use a tabela obtida no item anterior, para expressar a coordenada y do avião como uma função afim do tempo.

Solução:

Pelos dados apresentados, é possível deduzir que $y(t) = -30 + 8t$.

- h) Use as equações obtidas nos dois itens anteriores para achar a posição (coordenadas) do avião, decorridos 3 minutos após o início do monitoramento.

Solução:

Substituindo-se $t = 3$ nas equações deduzidas nos dois itens anteriores ou, simplesmente, olhando a tabela completa no item (e), é possível afirmar que, 3 minutos após o início do monitoramento, o avião estará sobrevoando o ponto de coordenadas $(3, -6)$. Essas coordenadas significam que, neste instante, o avião estará sobrevoando um ponto localizado 3 km a leste e 6 km ao sul da torre de controle.

- i) Quanto tempo leva para que a imagem deste avião desapareça da tela do radar?

Solução:

Pelo item (c), sabemos que a imagem do avião desaparecerá da tela do radar quando ele atingir o ponto de coordenadas $\left(\frac{51}{2}, 30\right)$. Usando ou a equação obtida no item (f) ou a equação obtida no item (g), é possível calcular em que instante o avião sobrevoará este ponto.

Para isso, basta resolver qualquer uma das equações: $\frac{51}{2} = -12 + 5t$ ou $30 = -30 + 8t$. Em qualquer dos casos, o resultado encontrado é $t = \frac{15}{2} = 7,5$ minutos, que é o tempo necessário para que a imagem do avião atravessasse a tela do radar.

- j) Repita a análise feita acima para os outros dois aviões e decida se é necessário que algum deles altere a sua rota.

Solução:

Pela análise feita anteriormente, podemos concluir que a rota de um dos aviões deverá ser alterada se as retas que descrevem o movimento de cada um deles se cruzarem num mesmo instante, durante o trajeto. As equações cartesianas das retas que descrevem a trajetória dos aviões B e C são, respectivamente, $y = -3x + 3$ e $y = \frac{16}{15}x - 40$. Veja na Figura 2.3 os gráficos dessas equações traçados no plano cartesiano.

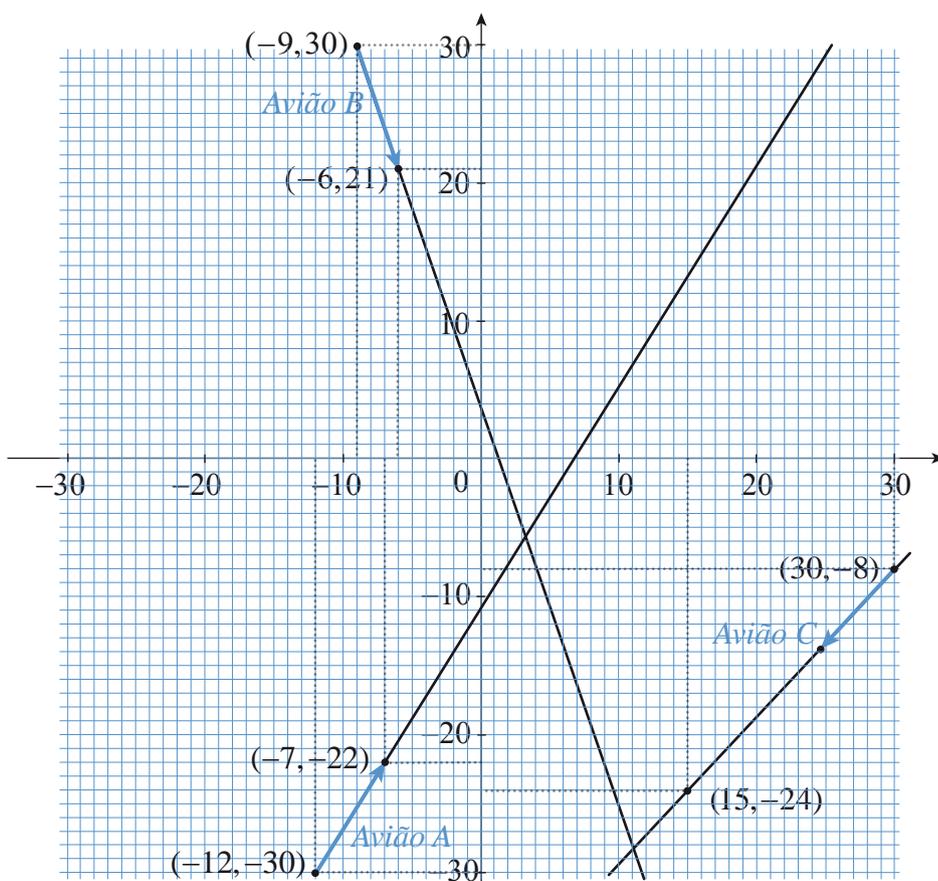


Figura 2.3

Apesar de a reta que representa o curso seguido pelo avião B cruzar as outras duas, não é possível deduzir, a partir das equações cartesianas deste movimento, se os aviões colidirão ou não. Para obter esta informação, é necessário também conhecer em que instante cada avião passa pelo ponto de interseção das duas rotas. A interseção das rotas seguidas pelos aviões A e B se dá no ponto de coordenadas $(3, -6)$. Para chegar a essa conclusão, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{8}{5}x - \frac{54}{5} \\ y = -3x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -6 \end{cases}$$

Para decidir se o avião B precisa alterar o seu curso, é necessário saber em que instante os dois aviões sobrevoarão este ponto. Para o avião A, isso se dará 3 minutos após o início do monitoramento; para o avião B, 4 minutos após o início do monitoramento, quando o avião A já estará sobrevoando o ponto $(8, 2)$. Portanto, nesse caso, não há risco de colisão.

As equações $x(t) = -12 + 5t$ e $y(t) = -30 + 8t$, obtidas no exemplo anterior, são exemplos de equações paramétricas. Na maior parte dos problemas práticos, t representa o tempo. Nesse caso, as equações paramétricas descrevem a trajetória de um objeto que se move em um plano, fornecendo, em cada instante de tempo t , as coordenadas (x, y) desse objeto.

O domínio de um conjunto de funções paramétricas é constituído pelos valores do parâmetro t , que pertencem ao intervalo durante o qual o movimento se processa, e a sua imagem (os valores correspondentes de x e y) é um subconjunto do plano cartesiano.

No exemplo estudado no exercício anterior, o domínio das equações paramétricas $x(t) = -12 + 5t$ e $y(t) = -30 + 8t$, deduzidas nos itens (f) e (g), pode ser entendido como o intervalo $\left[0, \frac{15}{2}\right]$, isto é, os valores de t compreendidos entre 0 e 7,5 minutos. Esse domínio representa o intervalo de tempo desde que se começa a monitorar o movimento dos aviões até o instante em que a imagem sai da tela. A imagem é definida pelos valores de x e y , tais que $-12 \leq x \leq \frac{51}{2}$ e $-30 \leq y \leq 30$, e corresponde a um retângulo no plano definido por

$$\left[-12, \frac{51}{2}\right] \times [-30, 30].$$

O gráfico dessas equações, isto é, a trajetória seguida pelo avião enquanto monitorado, é um segmento de reta.

Quando descrevemos um movimento por meio de equações paramétricas, expressamos x e y como funções de t . Assim, t é a variável independente de ambas as funções. Conseqüentemente, a frase “domínio das funções paramétricas” se refere a valores de t e “imagem das funções paramétricas” se refere a valores de x e y . Ao considerarmos a equação em x e y correspondente a este movimento, a variável independente passa a ser x , e a imagem os valores correspondentes de y . Essa situação é resumida no quadro abaixo.

Modelo	Função (Funções)	Domínio	Imagem
Paramétrico	$x(t) = -12 + 5t$ $y(t) = -30 + 8t$	$0 \leq t \leq \frac{15}{2}$	$-12 \leq x \leq \frac{51}{2}$ $-30 \leq y \leq 30$
Cartesiano	$y = \frac{8}{5}x - \frac{54}{5}$	$-12 \leq x \leq \frac{51}{2}$	$-30 \leq y \leq 30$

As equações cartesianas e as equações paramétricas deduzidas no exercício anterior funcionam como modelos analíticos (algébricos) para a trajetória dos aviões e apresentam vantagens e desvantagens, dependendo da informação que queremos obter. É útil e importante saber deduzir os dois tipos de equações a partir de uma situação problema e obter uma a partir da outra. As equações paramétricas envolvem uma variável extra, em geral o tempo, e, à primeira vista, por envolver mais do que uma equação, parecem ser mais complicadas do que a (única) equação cartesiana para descrever o movimento em questão.

No entanto, como já vimos, equações paramétricas permitem relacionar a posição do objeto, por exemplo, com tempo transcorrido, o que a equação cartesiana não permite. Além disso, eliminando o parâmetro, a partir das equações paramétricas, podemos reconstruir

o modelo cartesiano, e assim obter todas as informações fornecidas somente pela equação cartesiana, como a declividade da trajetória seguida. O exemplo a seguir mostra como isso pode ser feito.

Exemplo 2.2 (Eliminando o parâmetro): As equações paramétricas que descrevem a trajetória seguida pelo avião A no exemplo anteriormente estudado são dadas por $x(t) = -12 + 5t$ e $y(t) = -30 + 8t$. Obtenha a equação cartesiana desse movimento.

Solução:

Para obtermos a equação cartesiana, a partir das equações paramétricas, basta resolvermos a equação $x(t) = -12 + 5t$ para t e, a seguir, substituir o resultado obtido na segunda $y(t) = -30 + 8t$.

Da primeira equação obtemos $t = \frac{x+12}{5}$. Substituindo este resultado

na segunda equação temos $y = \frac{8}{5}x - \frac{54}{5}$, que é a equação cartesiana obtida no item (a) do Exemplo 2.1.

Esse fato vem comprovar que os dois modelos descrevem a mesma trajetória.

2.2 Representação paramétrica de curvas

A seguir daremos a parametrização de algumas curvas consideradas importantes, tendo em vista a sua utilização em muitos problemas práticos.

2.2.1 Parametrização de uma reta

Uma reta no espaço 2-D (plano) ou 3-D (espaço) pode ser determinada especificando-se um ponto sobre a reta e um vetor não nulo paralelo à reta. Nas Figuras 2.4a e 2.4b mostramos como obter as equações paramétricas da reta que passa por um ponto P_0 e é paralela ao vetor não nulo \vec{v} .

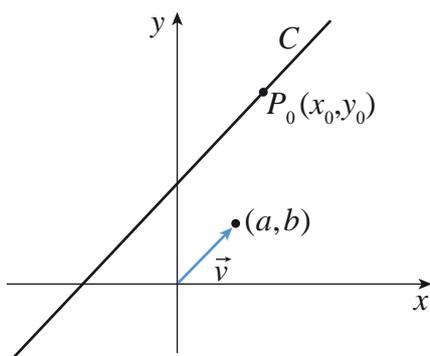


Figura 2.4a

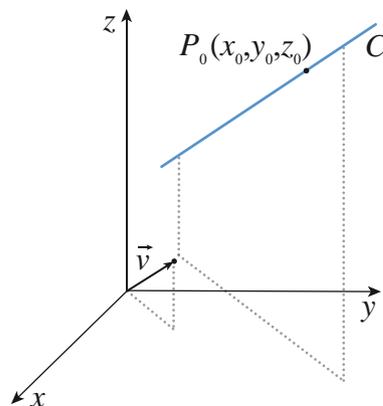


Figura 2.4b

- i) A reta no plano que passa no ponto $P_0(x_0, y_0)$ e é paralela ao vetor não nulo $\vec{v} = (a, b) = a\vec{i} + b\vec{j}$ tem as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sua representação vetorial é dada por:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (x_0 + at, y_0 + bt).$$

- ii) A reta no espaço que passa no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vetor não nulo $\vec{v} = (a, b, c) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ tem as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z(t) = z_0 + ct \end{cases}$$

Sua representação vetorial é dada por:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct).$$

Exemplo 2.3: Determine uma representação paramétrica da reta:

- a) que passa em $(4, 2)$ e é paralela a $\vec{v} = -\vec{i} + 5\vec{j}$.

Solução:

De acordo com (a), $x_0 = 4$, $y_0 = 2$, $a = -1$ e $b = 5$, obtemos:

$$\begin{cases} x(t) = 4 - t \\ y(t) = 2 + 5t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- b) que passa em $(1, 2, -3)$ e é paralela a $\vec{v} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$.

Solução:

De acordo com (b), $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = -3$, $a = 4$, $b = 5$ e $c = -7$, obtemos:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 4t \\ y(t) = 2 + 5t \\ z(t) = -3 - 7t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

c) que passa na origem e é paralela a $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Solução:

De acordo com (c), $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ e $a = b = c = 1$, obtemos:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \\ z(t) = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.4: Encontre as equações paramétricas para a reta no plano de equação $y = 2x + 1$.

Solução:

Podemos tomar $x = t$ e $y = 2t + 1$, $t \in \mathbb{R}$. É claro que, se quisermos somente o segmento de reta com extremos nos pontos $(0, 1)$ e $(2, 5)$, tomamos $t \in [0, 2]$ (ou $0 \leq t \leq 2$). Note que existe uma infinidade de representações paramétricas para a reta $y = 2x + 1$. Por exemplo, $x = -t^3 + 5$, $y = 2(-t^3 + 5) + 1 = -2t^3 + 11$; $t \in \mathbb{R}$ é outra parametrização para a reta dada. Se tomarmos $x = t^2$, $y = 2t^2 - 1$; $t \in \mathbb{R}$, não vamos obter a reta toda, pois, nesse caso, x nunca assume valores negativos (Verifique!).

2.2.2 Parametrização de uma circunferência

A circunferência com centro (x_0, y_0) e raio r tem equação cartesiana dada por $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Tomando

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos(t) \\ y = y_0 + r \sin(t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi \text{ (Figura 2.5),}$$

vemos que x e y tomados dessa forma satisfazem a equação $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

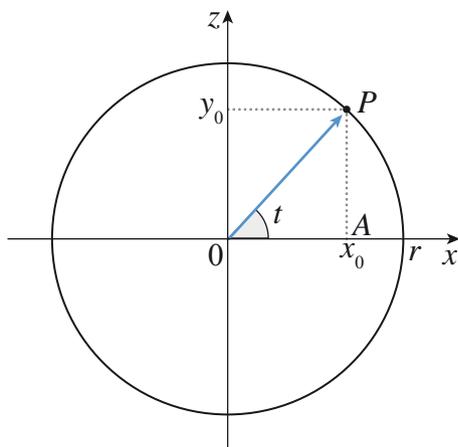


Figura 2.5

Também, se (x, y) é um ponto da circunferência, então

$$\left(\frac{x-x_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{r}\right)^2 = 1.$$

Logo, existe $t \in [0, 2\pi]$, tal que

$$\cos(t) = \left(\frac{x-x_0}{r}\right) \text{ e } \sin(t) = \left(\frac{y-y_0}{r}\right).$$

Assim,

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos(t), & t \in [0, 2\pi], \\ y = y_0 + r \sin(t) \end{cases}$$

é uma parametrização para a circunferência dada e sua representação vetorial é dada por: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (x_0 + r \cos(t), y_0 + r \sin(t))$.

Exemplo 2.5: Obtenha as equações paramétricas da circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$, no plano $z = 3$.

Solução:

Para encontrarmos o centro e o raio da circunferência dada, devemos primeiramente completar o quadrado da equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$. Assim,

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$$

é a equação cartesiana da circunferência dada, onde vemos que se trata de uma circunferência com centro em $(3, 2)$ e raio 3, localizada no plano $z = 3$.

Temos, então, as seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + r \cos(t) \\ y(t) = y_0 + r \sin(t) \\ z(t) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = 3 + 3\cos(t) \\ y(t) = 2 + 3\sin(t), 0 \leq t \leq 2\pi. \\ z(t) = 3 \end{cases}$$

A Figura 2.6 ilustra esse exemplo:

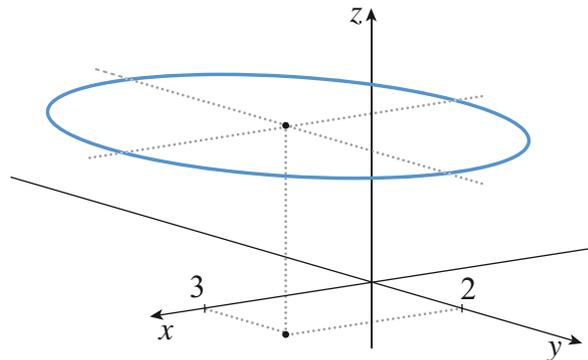


Figura 2.6

A velocidade angular ω é definida por $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, ou

seja, a taxa de variação temporal do ângulo θ com o tempo. Com as equações paramétricas

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos(\omega t) \text{ e} \\ y(t) &= a \sin(\omega t) \end{aligned}$$

descrevendo a projeção da posição da partícula no plano xy , temos que

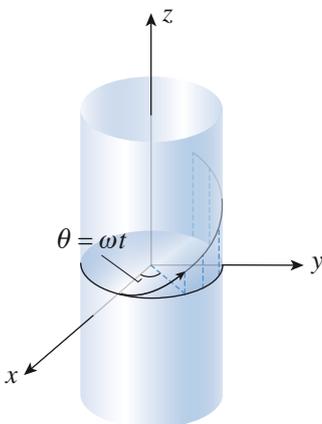
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \omega dt = d\theta$$

$$\Rightarrow \omega(t - t_0) = \theta - \theta_0$$

$$\Rightarrow \omega \Delta t = \Delta \theta$$

ou simplesmente $\omega t = \theta$ conforme a figura abaixo.



Para a elipse de equação $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1$, procedendo como no caso da circunferência, tomando $\cos(t) = \left(\frac{x-x_0}{a}\right)$ e $\sin(t) = \left(\frac{y-y_0}{b}\right)$, isto é, $x = x_0 + a \cos(t)$, $y = y_0 + b \sin(t)$; $0 \leq t \leq 2\pi$, obtemos uma representação paramétrica.

Para a hipérbole de equação $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1$, como $\operatorname{cosec}^2(t) - \cotg^2(t) = 1$, basta tomar $\operatorname{cosec}(t) = \left(\frac{x-x_0}{a}\right)$ e $\cotg(t) = \left(\frac{y-y_0}{b}\right)$, isto é, $x = x_0 + a \operatorname{cosec}(t)$, $y = y_0 + b \cotg(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ para obter uma representação paramétrica.

Suponha que as equações paramétricas que descrevem a trajetória de uma partícula são $x(t) = a \cos(\omega t)$, $y(t) = a \sin(\omega t)$ e $z(t) = bt$, com a , b e ω todos positivos. Para descrevermos a trajetória do ponto em termos geométricos, primeiramente imagine que o ponto móvel está sobre o cilindro (reto) que se prolonga indefinidamente nas duas direções, acima e abaixo do círculo $x^2 + y^2 = a^2$ no plano xy .

As equações paramétricas dadas, de x e y , revelam que a projeção do ponto no plano xy se move em sentido anti-horário sobre o círculo $x^2 + y^2 = a^2$ com velocidade angular ω .

Ao mesmo tempo, com $z(t) = bt$, o ponto também está se elevando com velocidade vertical b . Sua trajetória sobre o cilindro é uma espiral chamada *hélice circular*, conforme ilustra a Figura 2.7.

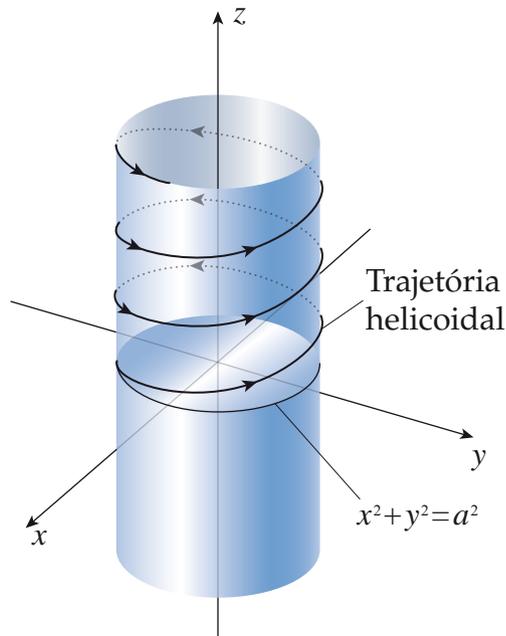


Figura 2.7

Observação 2.1. A hélice circular acima pode ser a descrição da trajetória de uma partícula carregada com uma carga q , com velocidade inicial \vec{v} (e componente $v_z > 0$), em um campo magnético \vec{B} constante, paralelo ao eixo z , no sentido de z positivo para z negativo. Essa partícula estará sujeita a uma força $\vec{F} = (q\vec{v}) \times \vec{B}$, que apontará para o centro “do cilindro”.

Observação 2.2. Se quisermos, partindo de equações paramétricas, encontrar a equação cartesiana da curva, devemos eliminar o parâmetro. Para isso, “isolamos” o parâmetro em uma das equações e o substituímos na outra equação.

Observação 2.3. Se o parâmetro t é eliminado nas equações paramétricas, pode acontecer que a eliminação do parâmetro resulte numa equação cartesiana, cujo gráfico contenha mais pontos que o gráfico definido pelas equações vetoriais.

Exemplo 2.6: Ache a equação cartesiana da curva descrita pela função vetorial $\vec{f}(t) = (x(t), y(t))$ definida pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Solução:

Eliminando o parâmetro t , vem: $y = x$. (Verifique!)

Observe e compare os dois gráficos esboçados na Figura 2.8:

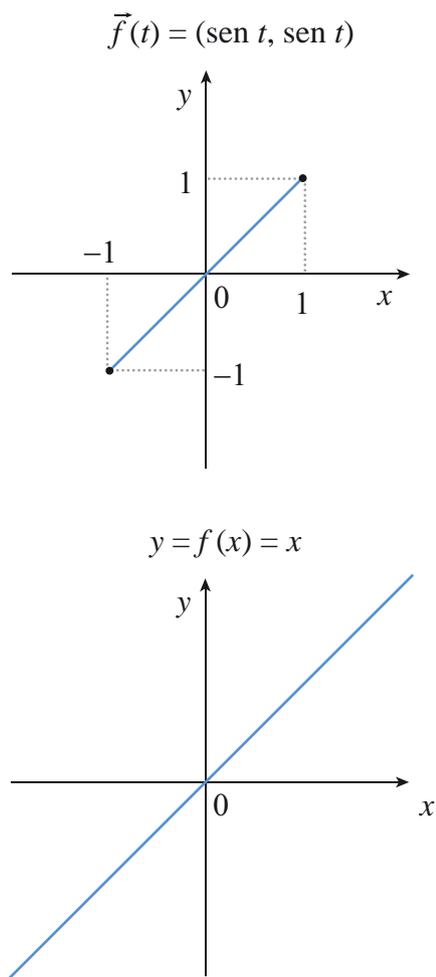


Figura 2.8

Quadro resumo – parmetrizações (algumas curvas)

Curva	Equação (Cartesiana)	Equações (Paramétricas)	Figura	Equação (Vetorial)
Reta	$y = ax + b$	Reta que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e tem a direção do vetor $v = (a, b)$: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$		$\vec{F}(t) = (x_0 + at)\vec{i} + (y_0 + bt)\vec{j}$
Circunferência	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$	Circunferência com centro em (x_0, y_0) e raio r : $\begin{cases} x = x_0 + r \cos(t) \\ y = y_0 + r \sin(t) \end{cases}$		$\vec{F}(t) = (x_0 + r \cos(t))\vec{i} + (y_0 + r \sin(t))\vec{j}$ $0 \leq t \leq 2\pi$
Elipse	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	Elipse com centro em (x_0, y_0) : $\begin{cases} x = x_0 + a \cos(t) \\ y = y_0 + b \sin(t) \end{cases}$		$\vec{F}(t) = (x_0 + a \cos(t))\vec{i} + (y_0 + b \sin(t))\vec{j}$ $0 \leq t \leq 2\pi$
Hipérbole	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	Hipérbole com centro em (x_0, y_0) : $\begin{cases} x = x_0 + a \operatorname{cosec}(t) \\ y = y_0 + b \operatorname{cotg}(t) \end{cases}$		$\vec{F}(t) = (x_0 + a \operatorname{cosec}(t))\vec{i} + (y_0 + b \operatorname{cotg}(t))\vec{j}$ $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$
Hélice Circular	Trajatória sobre o cilindro reto: $x^2 + y^2 = a^2$	Hélice desenvolvida sobre o cilindro (reto) $x^2 + y^2 = a^2$: $\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = b \sin(t) \\ z = t \end{cases}$		$\vec{F}(t) = (a \cos(t))\vec{i} + (b \sin(t))\vec{j} + t\vec{k}$ $t \in \mathbb{R}$

2.2.3 Parametrização de outras curvas

O gráfico de uma equação $y = f(x)$, em que f é uma função, costuma chamar-se curva plana. Já vimos que esta curva pode também ser representada por uma equação vetorial $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t))$. A intersecção de duas superfícies representa, em geral, uma curva no plano ou no espaço. Observe os dois exemplos a seguir.

Exemplo 2.7: Determine a equação vetorial que representa a curva obtida pelas intersecções do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $y + z = 2$.

Solução:

A Figura 2.9 mostra como o plano intercepta o cilindro, e a Figura 2.10 mostra que a curva de intersecção C é uma elipse.

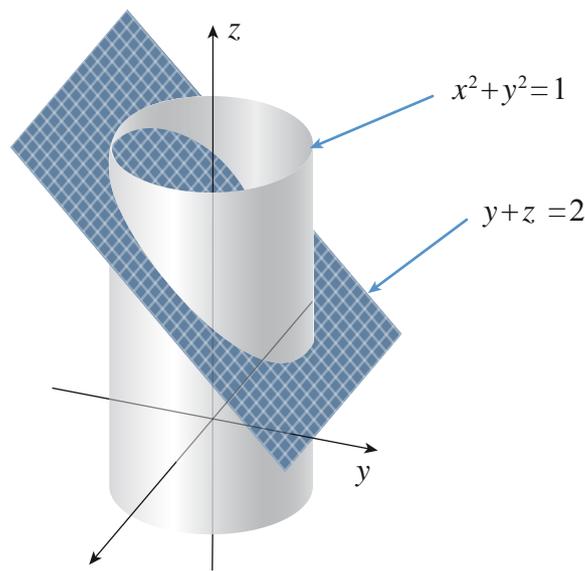


Figura 2.9

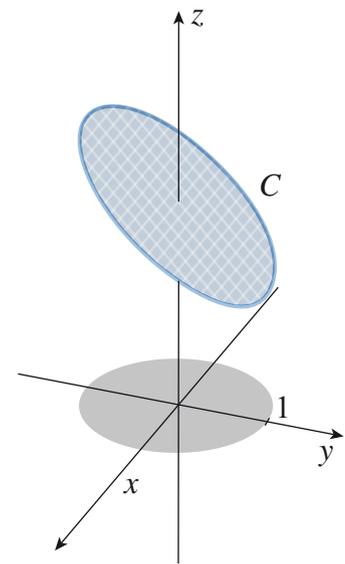


Figura 2.10

A projecção de C sobre o plano xy é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. Assim, podemos escrever:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + r \cos(t) \\ y(t) = y_0 + r \sin(t) \\ z(t) = 2 - y(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = 2 - \sin(t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Logo, a equação vetorial correspondente é:

$$\vec{r}(t) = (\cos(t))\vec{i} + (\sin(t))\vec{j} + (2 - \sin(t))\vec{k}; 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Exemplo 2.8: Determine a equação vetorial para $y = 5x + 3$ no plano $z = 2$.

Solução:

A curva C que queremos parametrizar é a intersecção dos planos $y = 5x + 3$ e $z = 2$. Observe a Figura 2.11.

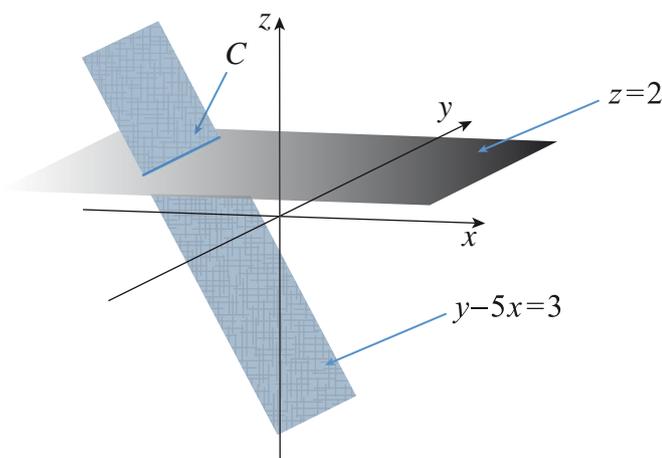


Figura 2.11

Fazemos:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 5t + 3 \\ z(t) = 2 \end{cases}$$

e, então,

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + (5t + 3)\vec{j} + 2\vec{k}; t \in \mathbb{R}.$$

Observamos que essa parametrização não é única. Também poderíamos ter feito, por exemplo,

$$\begin{cases} x(t) = 2t + 1 \\ y(t) = 5(2t + 1) + 3, \text{ e então, } \vec{r}(t) = (2t + 1)\vec{i} + (10t + 8)\vec{j} + 2\vec{k}; t \in \mathbb{R}. \\ z(t) = 2 \end{cases}$$

2.3 Curvas planas (características)

Por questão de simplicidade, vamos nos referir às curvas planas como *curvas*. O gráfico da curva C é o conjunto de todos os pontos $P(t) = (f(t), g(t))$ de um sistema de coordenadas retangulares que correspondem aos pares ordenados. Cada $P(t)$ é um ponto da curva.

Usaremos indistintamente as expressões “curva” e “gráfico de uma curva”. Convém imaginar o ponto $P(t)$ traçando, ou descrevendo, a curva C quando t varia no intervalo I . Isso é especialmente verdadeiro nas aplicações em que $P(t)$ é a posição de uma partícula que se move em um determinado instante t .

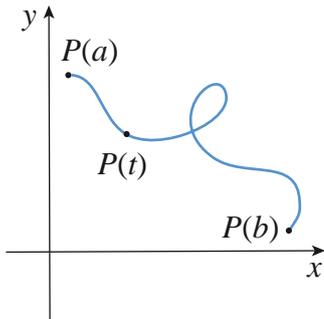


Figura 2.12a

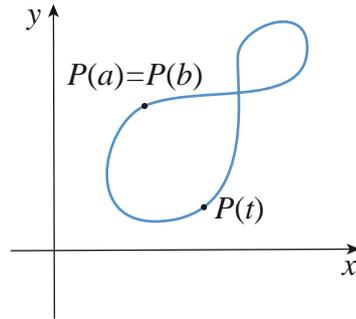


Figura 2.12b

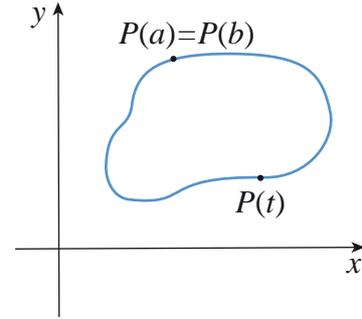


Figura 2.12c

As Figuras 2.12a, 2.12b e 2.12c dão o gráfico de várias curvas, para o caso em que I é o intervalo fechado $[a, b]$. Se, como Figura 2.12a, $P(a) \neq P(b)$, então $P(a)$ e $P(b)$ são chamados *pontos extremos de C* . Note-se que a curva ilustrada na Figura 2.12a se intercepta, no sentido de que dois valores distintos de t originam o mesmo ponto. Se $P(a) = P(b)$, conforme ilustrado na Figura 2.12b, então a curva C é uma *curva fechada*. Se $P(a) = P(b)$ e C não se intercepta em nenhum outro ponto, conforme ilustrado na Figura 2.12c, então C é uma *curva fechada simples*.

Se C é a curva conforme a Figura 2.12c, então as equações,

$$x = f(t) \text{ e } y = g(t)$$

em que t pertence a I , são as equações paramétricas de C ; t é o parâmetro. Ao variar t em I , o ponto $P(x, y)$ descreve a curva. Às vezes é possível eliminar o parâmetro e obter uma equação de C envolvendo apenas as variáveis x e y (conforme já foi visto).

A continuidade de f e g implica que uma pequena variação de t acarreta uma pequena variação na posição do ponto $(f(t), g(t))$ de C . Pode-se utilizar esse fato para se obter um esboço do gráfico, marcando diversos pontos e ligando-os na ordem dos t crescentes, conforme ilustrado no Exemplo 2.9.

Exemplo 2.9: Descreva a curva $C = \{(2t, t^2 - 1) \mid -1 \leq t \leq 2\}$ e esboce o gráfico.

Solução:

Neste exemplo $f(t) = 2t$, $g(t) = t^2 - 1$, e as equações paramétricas de C são:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}, \text{ onde } -1 \leq t \leq 2.$$

Podemos utilizar essas equações para tabular as coordenadas de alguns pontos $P(x, y)$ de C :

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3

Grafando esses pontos e utilizando a continuidade de f e g , obtemos o esboço a seguir:

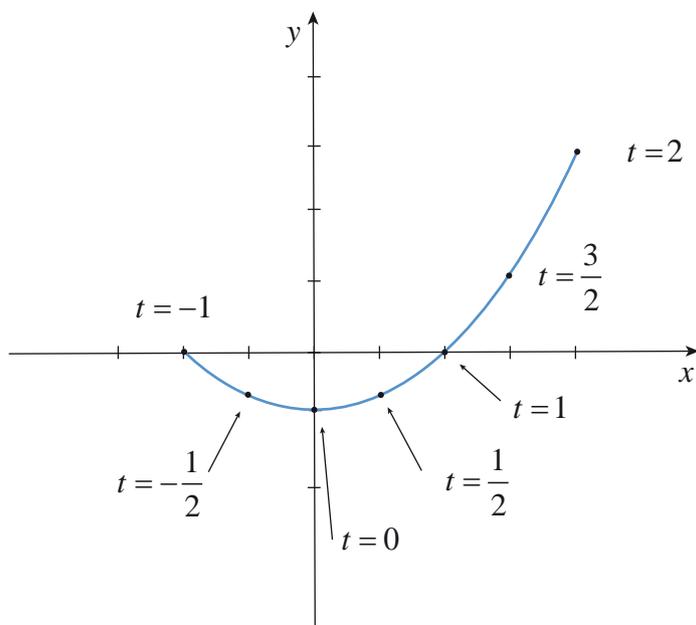


Figura 2.13

Pode-se obter uma descrição precisa do gráfico eliminando-se o parâmetro. Para ilustrar, resolvendo-se a primeira equação paramétrica

em relação a t , obtemos $t = \frac{x}{2}$. Levando este valor de t na segunda equação, vem: $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1$ ou $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$.

O gráfico da última equação é uma parábola com eixo vertical e vértice no ponto $(0, -1)$. A curva C é a parte da parábola exibida no último gráfico (Figura 2.13).

As equações paramétricas de uma curva não são únicas. A curva C desse exemplo também pode ser dada por:

$$C = \left\{ \left(t, \frac{1}{4}t^2 - 1 \right) / -2 \leq t \leq 4 \right\}$$

$$C = \left\{ \left(t^3, \frac{1}{4}t^6 - 1 \right) / \sqrt[3]{-2} \leq t \leq \sqrt[3]{4} \right\}$$

ou por várias outras expressões.

Exemplo 2.10: Descreva o gráfico da curva C de equações paramétricas:

$$x = \cos(t), \quad y = \sin(t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Solução:

Eliminando o parâmetro, vem $x^2 + y^2 = 1$. Logo, os pontos de C estão sobre a circunferência unitária de centro na origem. Quando t aumenta de 0 a 2π , $P(t)$ parte do ponto $A = (1, 0)$ e percorre a circunferência uma vez no sentido anti-horário. Veja a Figura 2.14. Nesse exemplo, o parâmetro t pode ser interpretado geometricamente como o comprimento do arco de A a P .

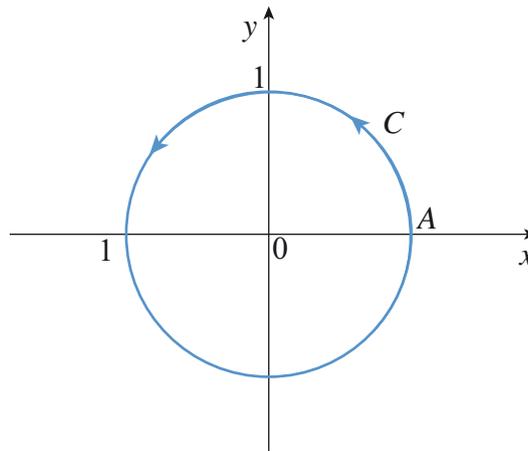


Figura 2.14

Se uma curva C é descrita por uma equação $y = f(x)$, em que f é uma função contínua, então uma forma simples de obter equações paramétricas consiste em fazer

$$x = t, \quad y = f(t)$$

em que t está no domínio de f . Por exemplo, se $y = x^3$, então as equações paramétricas são:

$$x = t, \quad y = t^3; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Podemos usar muitas substituições diferentes para x , desde que, ao variar t em um intervalo, x tome todos os valores do domínio de f . Assim, o gráfico de $y = x^3$ também é dado por

$$x = \sqrt[3]{t}, \quad y = t; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Note-se, entretanto, que as equações paramétricas $x = \sin(t)$, $y = \sin^3(t)$; $t \in \mathbb{R}$ dão apenas a parte do gráfico de $y = x^3$ que está entre $(-1, -1)$ e $(1, 1)$.

Exemplo 2.11: Determine equações paramétricas da reta que passa por (x, y) e tem coeficiente angular “ m ”.

Solução:

Uma equação da reta é $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Fazendo $x = t$, então $y - y_0 = m(t - x_0)$ e as equações paramétricas da reta são

$$x = t, \quad y = y_0 + m(t - x_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

De modo análogo, podemos achar equações paramétricas mais simples fazendo $x - x_0 = t$. Nesse caso, $y - y_0 = mt$ e, assim, a reta é dada parametricamente por

$$x = x_0 + t, \quad y = y_0 + mt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Naturalmente, há muitas outras maneiras de representar parametricamente uma reta.

2.4 Curvas suaves

Suponhamos uma curva C dada parametricamente por $x = f(t)$, $y = g(t)$, t pertencente a um intervalo I . Diremos que C é uma *Curva Suave (ou Regular)* se as derivadas f' e g' forem contínuas em I e se não se anularem simultaneamente (exceto, possivelmente, nos pontos extremos de I). A curva C diz-se *Parcialmente Suave (ou Suave por Partes)* se pudermos particionar o intervalo I em subintervalos, tais que C seja suave em cada subintervalo. O gráfico de uma curva suave não tem “bicos”. As curvas dos Exemplos 2.9 a 2.10 são suaves.

Exemplo 2.12: Determine se a parábola semicúbica $\vec{r}(t) = (1+t^3, t^2)$ é suave por partes.

Solução:

Como

$$\vec{r}'(t) = (3t^2, 2t),$$

temos $\vec{r}'(0) = (0, 0) = \vec{0}$, e então a curva não é suave. O ponto correspondente a $t = 0$ é $(1, 0)$, e podemos perceber na representação gráfica da Figura 2.15, que existe um bico agudo chamado cuspide, em $(1, 0)$. Qualquer curva com esse comportamento – uma mudança abrupta de direção – não é suave.

Contudo, como a semicúbica pode ser decomposta em um número finito de partes suaves, então ela é suave por partes.

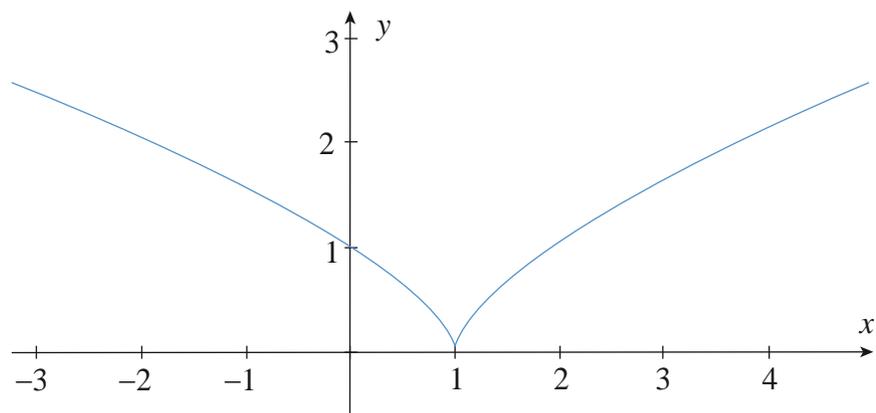


Figura 2.15

2.5 Orientação de uma curva

Seja C a curva da função vetorial $\vec{f}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$; $t \in [a, b]$.

Definimos o sentido positivo de C como sendo aquele em que a curva é traçada quando o parâmetro t varia de a até b . O sentido oposto é chamado sentido negativo de C , que representamos por $-C$.

Como podemos inverter o sentido de C ? Se $\vec{F}(t)$ representa C ; $t \in [a, b]$, qual é a função \vec{G} cuja curva contém os mesmos pontos de C , porém com orientação contrária? Seja o intervalo $[a, b]$ e seja $t \in [a, b]$. Chamemos de x a diferença $t - a$ [$x = t - a$] quando t percorre o intervalo no sentido de a para b . Para a orientação contrária, ou seja, quando t percorre o intervalo no sentido de b para a tomemos x tal que $x = b - t$. Assim, podemos escrever:

$$b - x = b - (t - a) = a + b - t.$$

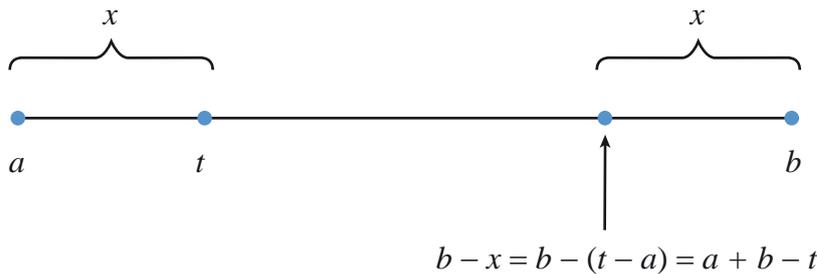


Figura 2.16

Para que isso ocorra, devemos ter:

$$\vec{G}(a+x) = \vec{F}(b-x) = \vec{F}(a+b-t)$$

para $0 \leq x \leq b-a$, ou seja,

$$\vec{G}(t) = \vec{F}(a+b-t).$$

Quer dizer, se

$$\vec{F}(t) = (x(t), y(t), z(t)); t \in [a, b]$$

representa C , então

$$\vec{G}(t) = (x(a+b-t), y(a+b-t), z(a+b-t)); t \in [a, b] \text{ representa } -C.$$

Exemplo 2.13:

- a) Obtenha uma parametrização para o segmento de reta que liga o ponto $(13,1,12)$ ao ponto $(-15,15,-23)$.
- b) Obtenha uma parametrização que inverte o sentido do item anterior $(-C)$.

Solução:

a) Temos o vetor direção: $\vec{v} = (13,1,12) - (-15,15,-23) = (28,-14,35)$.
Sendo $P = (13,1,12)$,

temos:

$$\begin{cases} x = 13 - 28t \\ y = 1 + 14t \\ z = 12 - 35t \end{cases}, t \in [0,1]$$

b) Para obter $-C$, determinamos:

$$\begin{cases} x(a+b-t) = x(1+0-t) = x(1-t) = 13 - 28(1-t) = -15 + 28t \\ y(a+b-t) = y(1+0-t) = y(1-t) = 1 + 14(1-t) = 15 - 14t \\ z(a+b-t) = z(1+0-t) = z(1-t) = 12 - 35(1-t) = 1 + 14t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -15 + 28t \\ y = 15 - 14t \\ z = 1 + 14t \end{cases}, t \in [0,1].$$

Exemplo 2.14: Tome a parametrização

$$\begin{cases} x = r \cos(t) \\ y = r \sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi],$$

da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, no sentido anti-horário, para obter uma parametrização da mesma circunferência no sentido horário.

Solução:

Para obtermos a parametrização no sentido horário $(-C)$, determinamos:

$$\begin{cases} x = x(0 + 2\pi - t) = r \cos(2\pi - t) = r \cos(t) \\ y = y(0 + 2\pi - t) = r \sin(2\pi - t) = -r \sin(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r \cos(t) \\ y = -r \sin(t) \end{cases}; t \in [0, 2\pi].$$

Observação 2.4: Toda função \vec{r} fornece uma parametrização para a curva que representa e vice-versa. Se

$$\vec{F}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}; t \in [a, b],$$

então:

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t); & t \in [a, b] \\ z = f_3(t) \end{cases}$$

é uma parametrização da curva de \vec{F} .

2.6 Reta tangente

Na Seção 1.7, vimos que a derivada da função vetorial \vec{r} é outra função vetorial definida por:

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

desde que o limite exista e seja finito.

Já na Seção 1.7.1, vimos o significado geométrico dessa definição. Observe a Figura 2.17.

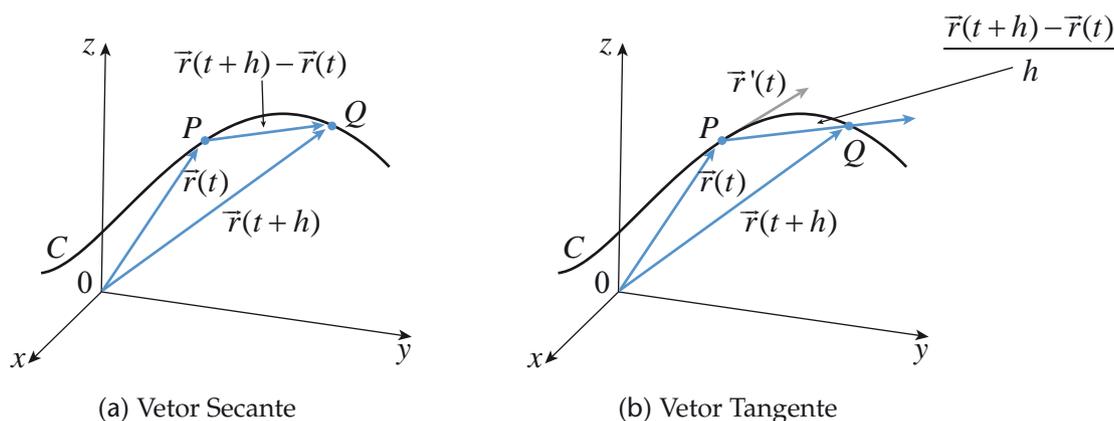


Figura 2.17

Se os pontos P e Q têm vetores de posição $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t+h)$, então \overline{PQ} representa o vetor $\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)$, que pode ser visto como o vetor

secante. Se $h > 0$, o múltiplo escalar $\left(\frac{1}{h}\right)(\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t))$ tem a mesma direção e o mesmo sentido que $\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)$. Quando $h \rightarrow 0$,

parece que esse vetor se aproxima de um vetor que está sobre a reta tangente. Por essa razão, dizemos que o vetor $\vec{r}'(t)$ é chamado vetor tangente à curva definida por \vec{r} no ponto P , desde que exista $\vec{r}'(t)$ e $\vec{r}'(t) \neq 0$. A reta tangente à C em P é definida como a reta que passa por P e é paralela ao vetor $\vec{r}'(t)$.

Concluimos que o vetor $\vec{r}'(t)$ é tangente à curva C . Assim, definimos como vetor tangente unitário à curva C o vetor dado por:

$$\vec{u}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}.$$

Exemplo 2.15:

- a) Determine a derivada de $\vec{r}(t) = (1+t^3)\vec{i} + te^{-t}\vec{j} + 2\text{sen}(2t)\vec{k}$.
- b) Encontre um vetor tangente unitário no ponto em que $t = 0$.

Solução:

- a) Diferenciando cada componente de \vec{r} , obtemos:

$$\vec{r}'(t) = 3t^2\vec{i} + (1-t)e^{-t}\vec{j} + 4\cos(2t)\vec{k}.$$

- b) Como $\vec{r}'(0) = \vec{j} + 4\vec{k}$ e $|\vec{r}'(0)| = \sqrt{17}$, o vetor tangente unitário no ponto $(1,0,0)$ é:

$$\vec{u}(0) = \frac{\vec{r}'(0)}{|\vec{r}'(0)|} = \frac{\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{17}}\vec{k}.$$

Exemplo 2.16: Para a curva $\vec{r}(t) = \sqrt{t}\vec{i} + (2-t)\vec{j}$, determine $\vec{r}'(t)$ e desenhe o vetor de posição $\vec{r}(1)$ e o vetor $\vec{r}'(1)$.

Solução:

Temos

$$\vec{r}'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\vec{i} - \vec{j} \text{ e } \vec{r}'(1) = \frac{1}{2}\vec{i} - \vec{j}.$$

A curva é plana, e a eliminação do parâmetro da equação $x = \sqrt{t}$, $y = 2 - t$ nos dá $y = 2 - x^2$, $x \geq 0$. Na Figura 2.18, desenhamos o vetor de posição $\vec{r}(1) = \vec{i} + \vec{j}$, começando na origem, e o vetor tangente $\vec{r}'(1)$, começando no ponto correspondente $(1,1)$.

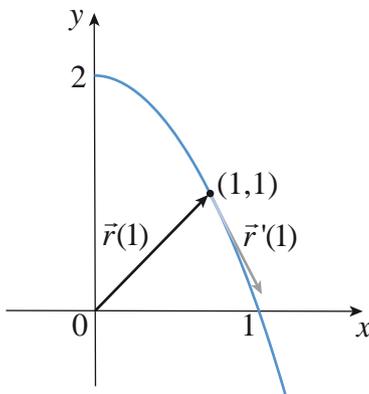


Figura 2.18

2.7 Comprimento de arco

Já temos uma ideia de como usar equações paramétricas para descrever a trajetória de uma partícula movendo-se no plano. Vamos desenvolver agora uma fórmula para determinar a distância percorrida pela partícula ao longo da trajetória.

Lembre-se de que, no Cálculo II, quando você estudou as Aplicações da Integral, trabalhou com a fórmula do comprimento de arco de uma curva C dada por $y = h(x)$ no intervalo $[x_0, x_1]$, ou seja, com a fórmula:

$$\ell = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [h'(x)]^2} \, dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx.$$

No caso da curva C estar representada parametricamente por $x = f(t)$ e $y = g(t)$, o teorema abaixo apresenta a forma como calcular o comprimento de arco da curva C , em que $a \leq t \leq b$.

Teorema 2.1: Se uma curva suave C parametrizada por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$, não tem autointersecções (exceto possivelmente, nos extremos do intervalo), então o comprimento do arco C ao longo do intervalo é dado por

$$\ell = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, dt = \int_a^b |\vec{r}'(t)| \, dt$$

Observação 2.5: Se a curva C é suave por partes, seu comprimento é dado por

$$\ell = \int_a^{t_1} |\vec{r}'(t)| \, dt + \int_{t_1}^{t_2} |\vec{r}'(t)| \, dt + \cdots + \int_{t_{n-1}}^b |\vec{r}'(t)| \, dt,$$

em que $[a, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, b]$ são os subintervalos de $[a, b]$ nos quais a curva C é suave.

Analogamente, se C é uma curva suave no espaço dada por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $a \leq t \leq b$, então o comprimento de arco de C nesse intervalo é dado por

$$\ell = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \, dt = \int_a^b |\vec{r}'(t)| \, dt.$$

Lembre-se de que
 $|\vec{F}(t)| = \sqrt{\vec{F}(t) \cdot \vec{F}(t)}$,
 conforme vimos na Seção 1.4.

Exemplo 2.17: Encontre o comprimento da hélice circular $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ do ponto $A(1,0,0)$ a $B(-1,0,\pi)$.

Solução:

Temos que: $\vec{r}'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2}.$$

Para $A(1,0,0)$, temos $t = 0$ e para $B(-1,0,\pi)$, temos $t = \pi$. (Verifique!)

Assim, vem:

$$\ell = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt = \int_0^\pi \sqrt{2} dt = \pi\sqrt{2} \text{ u.c.}$$

Exemplo 2.18: Encontre o comprimento de arco de uma curva no espaço dada por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\vec{j} + \frac{1}{2}t^2\vec{k}$ de $t = 0$ até $t = 2$.

Solução:

Usando

$$x(t) = t, y(t) = \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} \text{ e } z(t) = \frac{1}{2}t^2,$$

obtemos

$$x'(t) = 1, \quad y'(t) = 2t^{\frac{1}{2}} \text{ e } z'(t) = t.$$

Portanto, o comprimento de arco de $t = 0$ até $t = 2$ é dado por:

$$\begin{aligned} \ell &= \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt = \\ &= \int_0^2 \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{1 + 4t + t^2} dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{(t+2)^2 - 3} dt \\ &= \left[\frac{t+2}{2} \sqrt{(t+2)^2 - 3} - \frac{3}{2} \ln \left| (t+2) + \sqrt{(t+2)^2 - 3} \right| \right]_0^2 \\ &= 2\sqrt{13} - \frac{3}{2} \ln(4 + \sqrt{13}) - 1 + \frac{3}{2} \ln 3 \\ &\approx 4,816 \text{ u.c.} \end{aligned}$$

Lembre-se da Seção 1.7 do livro de Cálculo II - Integrais que envolvem expressões do tipo $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

Observe a seguir a Figura 2.19, que elucida esse exemplo.

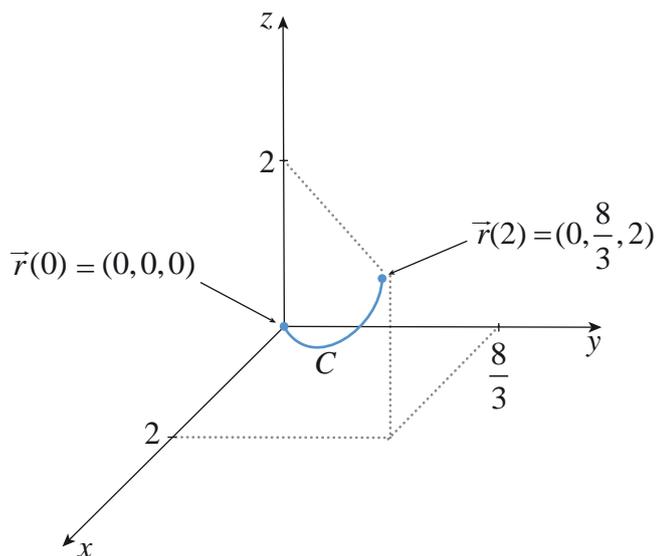


Figura 2.19

Observação 2.6. A fórmula para o comprimento de arco é independente do parâmetro utilizado para representar C . Para ilustrar isso, tente usar a função com valores vetoriais

$$\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + \frac{4}{3} t^3 \vec{j} + \frac{1}{2} t^4 \vec{k}$$

para representar a curva do Exemplo 2.18. Depois, encontre o comprimento de arco de $t = 0$ até $t = \sqrt{2}$ e compare seu resultado com o obtido no Exemplo 2.18.

2.8 Função comprimento de arco

Na integral $\ell = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$, se substituirmos o limite superior “ b ” por um limite variável “ t ”, $t \in [a, b]$, a integral se transforma em uma função de “ t ”. Assim,

$$s = s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t^*)| dt^*$$

é chamada função comprimento de arco e mede o comprimento de arco de C no intervalo $[a, t]$.

Exemplo 2.19: Encontre a função comprimento de arco da hélice circular $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$.

Solução:

No Exemplo 2.17, calculamos o comprimento de arco desta hélice do ponto $A(1, 0, 0)$ ao ponto $B(-1, 0, \pi)$.

Temos, então: $\vec{r}'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2}.$$

Assim, $s = s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t^*)| dt^* = \int_0^t \sqrt{2} dt^* = \sqrt{2}t$ é a função comprimento de arco da referida hélice.

2.9 Reparametrização de curvas por comprimento de arco

Como sabemos, uma curva (ou função) pode ser parametrizada de vários modos. Seguidamente é conveniente que a parametrização seja feita tendo por parâmetro o comprimento do arco. Veja como fazê-lo.

Seja C uma curva suave ou parcialmente suave, parametrizada por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, com t variando em um intervalo I .

Fixando um número real t_0 no intervalo I , obtemos sobre C um ponto P_0 , tal que $\vec{r}(t_0) = \overrightarrow{OP_0}$. O ponto P_0 serve como ponto de referência e, a partir dele, tomamos um sentido ao longo de C como sentido positivo e o outro como negativo.

Assim, se P é um ponto da curva, tal que $\overrightarrow{OP} = \vec{r}(t)$, o comprimento s do arco $\widehat{P_0P}$ fica orientado: com sinal positivo se P estiver no sentido positivo de C em relação a P_0 ; com sinal negativo se P estiver no sentido negativo. Veja a Figura 2.20.

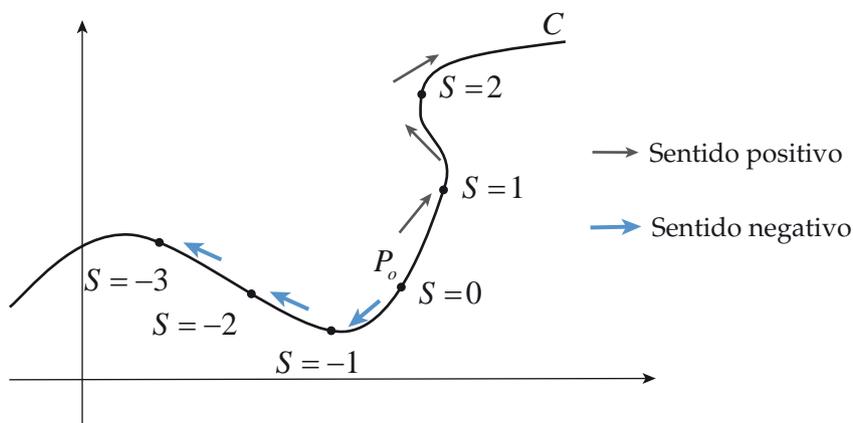


Figura 2.20

Vimos, na seção anterior, que a integral $s = s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t^*)| dt^*$ define uma função de t chamada função comprimento de arco e mede o comprimento orientado de arco sobre C no intervalo $[a, t]$.

Assim, para cada valor de $s = s(t)$ com $t \in I$, encontramos um único ponto de C , o que nos permite obter uma parametrização para \vec{r} por comprimento de arco. Basta encontrarmos a função inversa $t = t(s)$ da função $s = s(t)$ (isolando a variável t em $s = s(t)$ e encontrando o intervalo que é sua imagem) e substituímos em $\vec{r}(t)$, ou seja,

$$\vec{r}(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s)), z(t(s))), \quad 0 \leq s \leq \ell.$$

Então,

$$\vec{R}(s) = \vec{r}(t(s)) = (x(s), y(s), z(s)), \quad 0 \leq s \leq \ell$$

é uma parametrização para a curva C em função do parâmetro comprimento de arco s . Dizemos, então, que fizemos uma reparametrização da curva C por comprimento de arco.

Exemplo 2.20: Reparametrize por comprimento de arco a circunferência dada por $C: \vec{r}(t) = (a \cos(t), a \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solução:

Temos: $\vec{r}'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t))$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{a^2 (\sin^2(t) + \cos^2(t))} = a.$$

A função comprimento de arco é dada por

$$s = s(t) = \int_0^t |\vec{r}'(t^*)| dt^* = \int_0^t a dt^* = [at^*]_0^t = at.$$

Daí,

$$s = at \Rightarrow t = t(s) = \frac{s}{a}, \text{ com } s \in [0, 2a\pi].$$

Logo,

$$\vec{R}(s) = \vec{r}(t(s)) = \vec{r}\left(\frac{s}{a}\right) = \left(a \cos\left(\frac{s}{a}\right), a \sin\left(\frac{s}{a}\right) \right), s \in [0, 2a\pi],$$

é a reparametrização procurada.

Exemplo 2.21: Reparametrize por comprimento de arco a hélice circular do Exemplo 2.17.

Solução:

Temos: $C: \vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in [0, \pi]$ (Verifique!)

$$\vec{r}'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2} \quad \text{- Conforme foi calculado no Exemplo 2.17.}$$

Então, $s = s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t^*)| dt^* = \int_0^t \sqrt{2} dt^* = \sqrt{2} t$ é a função comprimento de arco da referida hélice (conforme foi calculado no Exemplo 2.19).

De $s = \sqrt{2} t$ vem $t = t(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} s$, para $s \in [0, \sqrt{2} \pi]$.

$$\text{Logo, } \vec{R}(s) = \vec{r}(t(s)) = \vec{r}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} s\right) = \left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} s\right), \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} s\right), \frac{\sqrt{2}}{2} s \right),$$

$s \in [0, \sqrt{2} \pi]$, é a reparametrização por comprimento de arco para a hélice dada.

Resumo

Neste capítulo, apresentamos algumas curvas planas representando-as através de suas equações cartesianas e suas respectivas representações paramétricas. Vimos como esboçar graficamente essas curvas e estendemos nosso estudo para o espaço tridimensional. Classificamos as curvas em Curva Suave (ou Regular) e Suave por Partes. Vimos como examinar a orientação dada a uma curva e tam-

bém como determinar a reta tangente à C em P (P pertence à C). Calculamos o comprimento de arco e parametrizamos a curva pela função comprimento de arco.

Exercícios Propostos

De 1 a 5, parametrize a curva dada por sua equação cartesiana.

1) $2x^2 + 2y^2 + 5x + 2y - 3 = 0$

2) $5x^2 + 2y - 79 = 0$

3) $2x + 3z = 6; y = 2$

4) $y = 2\sqrt{x}; z = 9$

5) $x = e^y; z = e^x$

6) Parametrize o segmento de reta do ponto $(1, 8, 9)$ ao ponto $(2, 27, 2)$.

7) Em que pontos sobre a curva, cuja representação paramétrica é: $\begin{cases} x = t^3 + 4t \\ y = 6t^2, t \in \mathbb{R} \end{cases}$, a reta tangente à curva é paralela à reta:

$$\begin{cases} x = -7t \\ y = 12t - 5, t \in \mathbb{R} \end{cases} ?$$

Nos exercícios 8 e 9, dê a equação cartesiana da curva e faça um esboço da mesma.

8) $\begin{cases} x = 2 + 4\sin t \\ y = 3 - 2\cos t, t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$

9) $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 + 4 \\ z = 2; -\infty < t < +\infty \end{cases}$

- 10) Encontre os pontos em que a curva dada por $\vec{r}(t) = (t^2 - 1)\vec{i} + (t^2 + 1)\vec{j} + 3t\vec{k}; t \in \mathbb{R}$ fura o plano $3x - 2y - z + 7 = 0$.
- 11) Verifique se a curva dada pela representação vetorial a seguir é suave (regular).
- a) $\vec{r}(t) = (t^2 - 1)\vec{i} + (t^2 + 1)\vec{j} + 3t\vec{k}; t \in \mathbb{R}$
- b) $\vec{s}(t) = (e^{3t+4\cos t}, t + 2\sin t); t \in \mathbb{R}$
- 12) Quantas voltas completas em torno do eixo z dá a hélice $\vec{r}(t) = \left(a \cos t, a \sin t, \frac{2}{10}t \right); (a > 0)$, em uma distância de 10 unidades, medidas ao longo do eixo z ?
- 13) Certa curva é dada por: $\vec{r}(t) = (2 + \cos t)\vec{i} + (3 + \sin t)\vec{j} + 2t\vec{k}; t \in [0, 3\pi]$. Faça um esboço dela e obtenha uma parametrização da curva com orientação contrária.
- 14) Uma curva C tem equações paramétricas: $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 - 3t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$

Mostre que existem 2 (duas) retas tangentes à C no ponto $(3, 0)$ e dê as suas equações na forma $y = ax + b$.

- a) Encontre os pontos de C em que a reta tangente à C é horizontal e aqueles em que a a reta tangente à C é vertical.
- b) Sendo $\vec{F}(t) = (t^2, t^3 - 3t); t \in \mathbb{R}$, analise o vetor $\vec{F}'(t)$ e verifique se o sentido positivo de C é aquele assinalado a Figura 2.33.

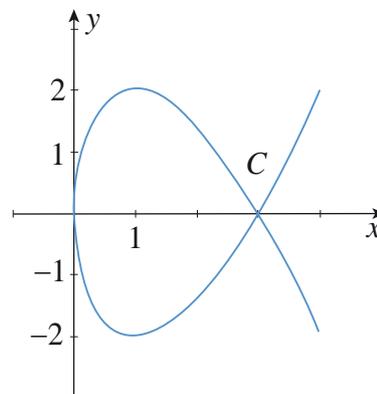


Figura 2.33

De 15 a 18, determine o comprimento de arco da curva.

$$15) \vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t), 0 \leq t \leq 1$$

$$16) x = t^3, y = t^2, 1 \leq t \leq 3$$

$$17) \vec{r}(t) = (2 \cos t, 4t, 2 \operatorname{sen} t), \text{ de } P_0(2, 0, 0) \text{ a } P_1(0, 2\pi, 2)$$

$$18) \vec{r}(t) = (3t + 1)\vec{i} + (t + 2)\vec{j}, \text{ para } t \in [0, 1]$$

De 19 a 21, escreva a função comprimento de arco.

$$19) \vec{r}(t) = \left(\operatorname{sen} \frac{t}{2}, \cos \frac{t}{2}, 2t \right)$$

$$20) \vec{r}(t) = (t, t^2)$$

$$21) \vec{r}(t) = \left(\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t, \frac{3}{4} \cos 2t \right)$$

De 22 a 25, reparametrize pelo comprimento de arco a curva.

$$22) \vec{r}(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \operatorname{sen} t), t \in [0, 2\pi]$$

$$23) \vec{r}(t) = (3t - 1, t + 2)$$

$$24) \vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t)$$

$$25) x = 2 \cos t, y = 4t, z = 2 \operatorname{sen} t; t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$

De 26 a 28, verifique se a curva está parametrizada pelo comprimento de arco.

$$26) \vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), t \geq 0$$

$$27) \vec{r}(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{7}}, \sqrt{\frac{6}{7}} s \right), s \geq 0$$

$$28) \vec{q}(s) = \left(a \cos \left(\frac{s}{c} \right), a \operatorname{sen} \left(\frac{s}{c} \right), b \left(\frac{s}{c} \right) \right), \text{ em que } c^2 = a^2 + b^2$$

De 29 a 32, encontre o vetor tangente unitário à curva, no ponto indicado.

$$29) \vec{r}(t) = (t \cos(2t), t \sin(2t)), t \in [0, \infty); t = \frac{\pi}{2}$$

$$30) \vec{r}(t) = t\vec{i} + (t^2 + 1)\vec{j}, t \in [0, 4]; P_0(2, 5)$$

$$31) \vec{r}(t) = (t, 2t^2, 3t^3); P_0(1, 2, 3)$$

$$32) \vec{r}(t) = (e^t + 1, e^{-t} - 1, t); P_0(2, 0, 0)$$

33) Uma partícula se move ao longo da curva C , dada por $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + t^3\vec{j} + \vec{k}$.

- Determine os vetores velocidade e aceleração.
- Determine a velocidade escalar.
- Verifique se os vetores velocidade e aceleração são ortogonais.

Respostas

$$1. \vec{r}(t) = \left(-\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{53}}{4} \cos t, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{53}}{4} \sin t \right), t \in [0, 2\pi]$$

$$2. \vec{r}(t) = \left(t, \frac{79}{2} - \frac{5}{2}t^2 \right), t \in \mathbb{R}$$

$$3. \vec{r}(t) = \left(t, 2, 2 - \frac{2}{3}t \right), t \in \mathbb{R}$$

$$4. \vec{r}(t) = (t, 2\sqrt{t}, 9), t \in [0, +\infty)$$

$$5. \vec{r}(t) = (t, \ln t, e^t), t \in (0, +\infty)$$

$$6. \vec{r}(t) = (1+t, 8+19t, 9-7t), t \in [0, 1]$$

$$7. (-5, 6) \text{ e } \left(-\frac{208}{27}, \frac{32}{3} \right)$$

$$8. \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

$$9. y = x^2 - 2x + 5$$

10. $\vec{r}(1) = (0, 2, 3)$ e $\vec{r}(2) = (3, 5, 6)$

11. a) Não é regular.

b) É regular.

12. 7 voltas.

14. b) $(0, -3)$

15. $\sqrt{3}(e-1)$

16. $\frac{1}{27}(85\sqrt{85} - 13\sqrt{13})$

17. $\sqrt{5}p$

18. $2\sqrt{10}$

19. $s(t) = \frac{\sqrt{17}}{2}t$

20. $s(t) = \frac{1}{2} \left[t\sqrt{1-4t^2} + \frac{1}{2} \ln \left| 2t + \sqrt{1+4t^2} \right| \right]$

21. $s(t) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{sen}^2 t$

22. $\left(\sqrt{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \text{sen} \frac{s}{\sqrt{2}} \right), s \in [0, 2\sqrt{2}\pi]$

23. $\left(\frac{3s}{\sqrt{10}} - 1, \frac{s}{\sqrt{10}} + 2 \right)$

24. $\left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cos \left(\ln \frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right), \frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \text{sen} \left(\ln \frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right), \frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right)$

25. $\left(2 \cos \frac{s}{2\sqrt{5}}, \frac{2s}{\sqrt{5}}, 2 \text{sen} \frac{s}{2\sqrt{5}} \right), 0 \leq s \leq \sqrt{5}\pi$

26. Sim.

27. Sim.

28. Sim.

$$29. \left(-\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}, -\frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}} \right)$$

$$30. \left(\frac{\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17} \right)$$

$$31. \left(\frac{\sqrt{2}}{14}, \frac{2\sqrt{2}}{7}, \frac{9\sqrt{2}}{14} \right)$$

$$32. \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

33. a) $(2t, 3t^2, 0)$ e $(2, 6t, 0)$

b) $t\sqrt{4+9t^2}$

c) Não são ortogonais.

Capítulo 3

Funções vetoriais de várias variáveis

Capítulo 3

Funções vetoriais de várias variáveis

Neste capítulo, estenderemos o que foi visto no Capítulo 1 (Funções Vetoriais de Uma Variável) para Funções Vetoriais de Várias Variáveis, interpretando e calculando limites e derivadas, bem como os interpretando geometricamente. Inicialmente, vamos definir alguns conceitos preliminares, como: conjunto aberto, conjunto fechado, vizinhança, domínios conexos e simplesmente conexos. Após, definiremos uma Função Vetorial de Várias Variáveis mostrando em seguida alguns exemplos que envolvem cálculo de limites e derivadas parciais, tanto de primeira ordem como derivadas sucessivas, ou seja, de ordem superior.

3.1 Introdução

Primeiramente, veremos algumas definições que facilitarão a compreensão dos tópicos a serem vistos posteriormente.

Definição 3.1. Sejam $P_0 \in \mathbb{R}^2$ e “ r ” um número real positivo. Chama-se *bola aberta* de centro P_0 e raio r , e representa-se por $B(P_0, r)$ o conjunto dos pontos P , tal que a distância de P a P_0 é menor que r , ou seja,

$$B(P_0, r) = \{P \in \mathbb{R}^2 / d(P, P_0) < r\}.$$

Observação 3.1. Analogamente, definimos a bola aberta em \mathbb{R}^3 . Geometricamente, em \mathbb{R}^3 , $B(P_0, r)$ representa o interior de uma esfera com centro em $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e raio r . Já em \mathbb{R}^2 , é o interior de um círculo com centro em $P_0(x_0, y_0)$ e raio r .

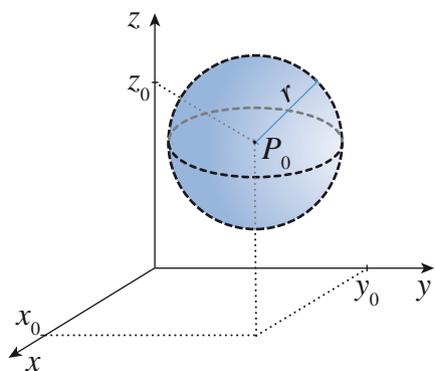


Figura 3.1a

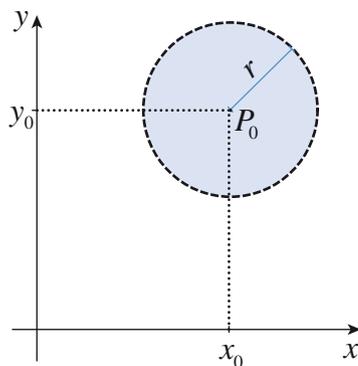


Figura 3.1b

Definição 3.2. Sejam $P_0 \in \mathbb{R}^3$ e “ r ” um número real positivo. Chama-se bola fechada de centro P_0 e raio r , e representa-se por $B[P_0, r]$ o conjunto dos pontos P , tal que a distância de P a P_0 é menor ou igual a r , ou seja,

$$B[P_0, r] = \{P \in \mathbb{R}^3 / d(P, P_0) \leq r\}.$$

Observação 3.2. Analogamente, definimos a bola fechada em \mathbb{R}^2 .

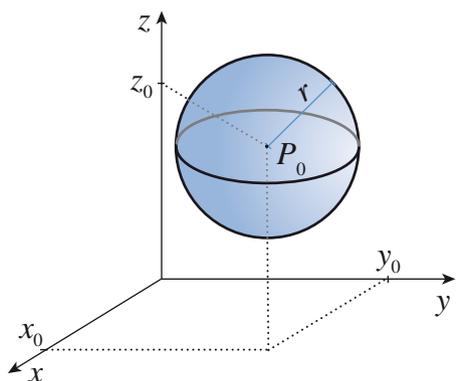


Figura 3.2a

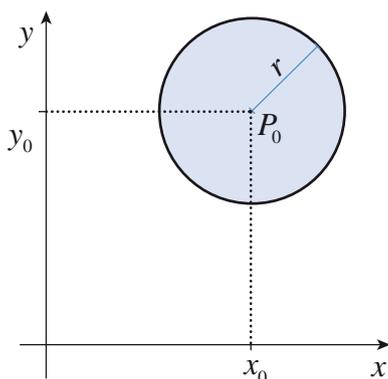


Figura 3.2b

Exemplo 3.1: Em \mathbb{R}^2 , uma bola aberta de centro num ponto (x_1, y_1) e raio a será o conjunto dos pontos (x, y) , tais que $d((x, y), (x_1, y_1)) = \|(x, y) - (x_1, y_1)\| < a \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} < a$, isto é, representa o interior do círculo de centro (x_1, y_1) e raio a .

Definição 3.3. Vizinhança de um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ é qualquer subconjunto de \mathbb{R}^2 que contenha uma bola aberta de centro em P , isto é, o subconjunto V é uma vizinhança de P se $B(P, r) \subset V$, para algum $r > 0$. Analogamente, definimos vizinhança de um ponto $P \in \mathbb{R}^3$.

Note-se que qualquer bola aberta é vizinhança do seu próprio centro e facilmente se mostra que é vizinhança de qualquer um dos seus pontos.

Exemplo 3.2: Verifique se os conjuntos

$$V_1 = \left\{ (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \geq 0 \text{ e } y_1 \geq \frac{1}{2} \right\},$$

$$V_2 = \{ (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (y_1 - 1)^2} \leq 2 \},$$

$$V_3 = \left\{ (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{1}{2}\right)^2} \leq 2 \right\},$$

$$V_4 = \{ (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \geq 1 \text{ e } y_1 \geq 1 \};$$

$$V_5 = \{ (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \leq \sqrt{2} \}$$

são vizinhança do ponto $A = (1,1)$.

Solução:

Para dizermos se os conjuntos V_1 , V_2 , V_3 , V_4 e V_5 , representados respectivamente pelas Figuras 3.3a até Figura 3.3e, são vizinhanças do ponto A , precisamos verificar se esses conjuntos contêm uma bola aberta centrada em A .

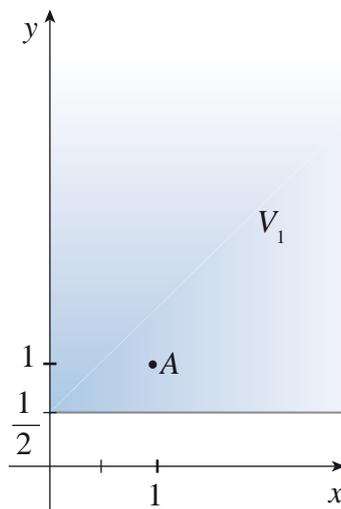


Figura 3.3a

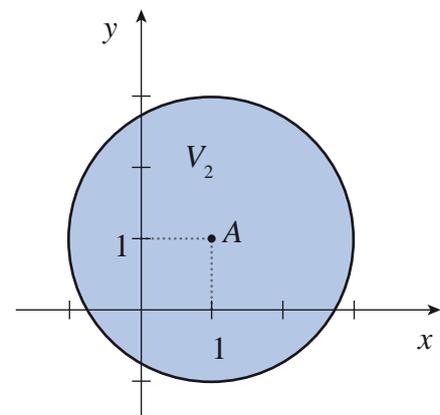


Figura 3.3b

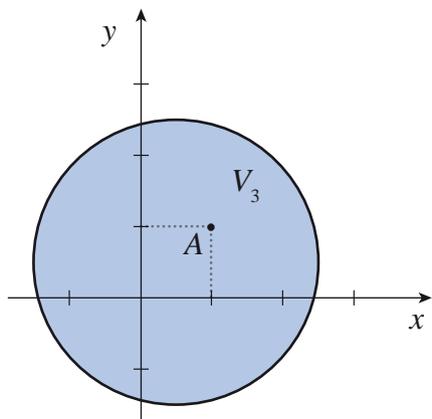


Figura 3.3c

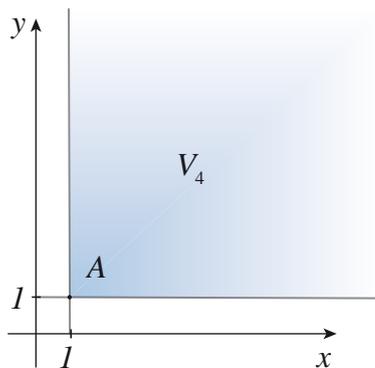


Figura 3.3d

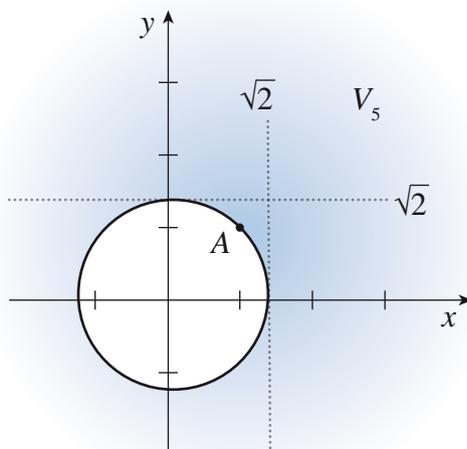


Figura 3.3e

Os conjuntos V_1 , V_2 e V_3 são vizinhança de A , pois contêm uma bola aberta centrada em A (a bola aberta $B\left((1,1), \frac{1}{4}\right)$, por exemplo). No entanto, os conjuntos V_4 e V_5 já não são vizinhanças de A .

Definição 3.4. Seja S um subconjunto de \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$). Um ponto $A \in S$ diz-se *ponto interior* de S se existir uma bola aberta centrada em A e contida em S . Um ponto diz-se *ponto exterior* ao conjunto S se for interior ao seu complementar.

Definição 3.5. No caso de um ponto não ser interior nem exterior ao conjunto S , esse ponto chama-se *ponto de fronteira* de S .

Definição 3.6. O conjunto de todos os pontos interiores de um conjunto S designa-se por *interior* de S e representa-se por " $\text{int } S$ ".

O conjunto dos pontos exteriores de S designa-se por *exterior* de S e representa-se por " $ext S$ ". " $fr S$ " representa o conjunto dos pontos de fronteira de S , que se designa por *fronteira* de S .

Exemplo 3.3: Verifique se o ponto $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ é ponto interior, exterior ou de fronteira do conjunto

$$S = \{(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 / x_1 \geq 0 \text{ e } y_1 \geq 0 \text{ e } z_1 \geq 0\}.$$

Solução:

Tomamos, por exemplo, a bola $B\left(P, \frac{1}{4}\right)$, esta que está contida em S .

Os pontos de S , tais que $(0, x_2, x_3)$, com x_2 e x_3 maiores do que zero, são pontos de fronteira de S , já que não são pontos interiores nem de S , nem do seu complementar.

Exemplo 3.4: Verifique se há pontos interiores ao conjunto

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 = 2x_1\}.$$

Solução:

Este conjunto não tem pontos interiores. Suponha (com vista a um absurdo) que $(s, 2s)$ é ponto interior de S . Então, para certo

$r = r_0$, $B((s, 2s), r_0) \subset S$. Mas $\left(s + \frac{r_0}{2}, 2s - \frac{r_0}{2}\right) \in B((s, 2s), r_0)$ e $\left(s + \frac{r_0}{2}, 2s - \frac{r_0}{2}\right) \notin S$, o que é absurdo. Este fato mostra que S não

pode ter pontos interiores. Por outro lado, o conjunto dos pontos exteriores de S é $ext S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 \neq 2x_1\}$, já que todos esses pontos são interiores ao complementar de S .

Podemos facilmente mostrar que: Se $S \subset \mathbb{R}^n$, então,

$$int S \subset S, \quad ext S \subset \mathbb{R}^n - S \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^n = int S \cup ext S \cup fr S.$$

Definição 3.7. Se todos os pontos de um conjunto forem pontos interiores, o conjunto diz-se *conjunto aberto*.

Observação 3.3. Um conjunto S é um conjunto aberto se, e somente se, S coincide com o seu interior.

Definição 3.8. Um conjunto diz-se *conjunto fechado* se o seu complementar for um conjunto aberto.

Exemplo 3.5: Todas as bolas abertas são conjuntos abertos, pois $B(A, r) = \text{int } B(A, r)$.

Exemplo 3.6: Seja $V = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 > 0 \text{ e } x_2 > \frac{1}{2} \right\}$. Esse conjunto é aberto, pois só tem pontos interiores.

Exemplo 3.7: O conjunto $V = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq \frac{1}{2} \right\}$ não é aberto, já que, por exemplo, $(0, 1)$ não é ponto interior de V .

Exemplo 3.8: Seja $V = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 = 2x_1 \right\}$. Esse conjunto não é aberto, pois tem pelo menos um ponto que não é ponto interior, por exemplo, o ponto $(1, 2)$. Nesse caso, V é um conjunto fechado, pois o seu complementar é aberto.

Definição 3.9. Um conjunto aberto no plano ou no espaço é denominado domínio D .

Definição 3.10. Um domínio D é conexo se quaisquer dois pontos de D podem ser ligados por uma **linha poligonal** inteiramente contida no domínio D .

Definição 3.11. Um domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ é *simplesmente conexo* (não apresenta buracos) quando toda curva fechada simples de D circunda somente pontos de D .

Definição 3.12. Um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$ é *simplesmente conexo* quando qualquer curva fechada simples de D pode ser reduzida de maneira contínua a um ponto qualquer de D sem sair de D .

As Figuras 3.4a a 3.4e mostram conjuntos conexos do plano. Na Figura 3.4a, Figura 3.4b e Figura 3.4c temos *domínios simplesmente conexos*. Já na Figura 3.4d e Figura 3.4e, os domínios não são simplesmente conexos.

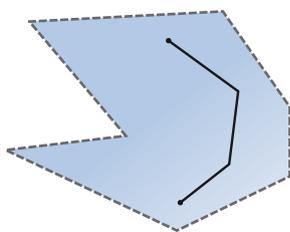


Figura 3.4a

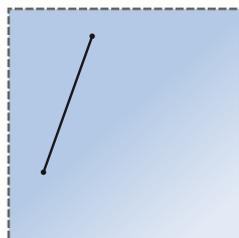


Figura 3.4b

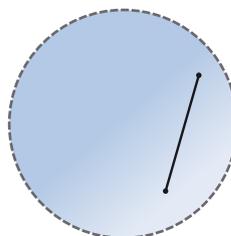


Figura 3.4c

Uma linha poligonal aberta é formada por segmentos de reta consecutivos e não colineares, ou seja, segmentos de reta que não estão alinhados na mesma reta e que não se fecham.

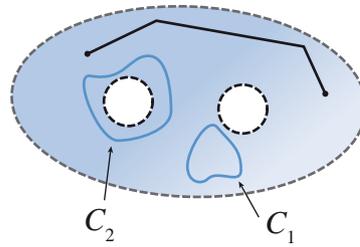


Figura 3.4d

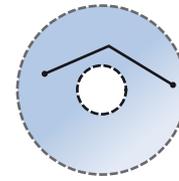


Figura 3.4e

Você pode notar que a curva C_1 circunda apenas pontos contidos em D e, se for reduzida a um ponto, permanecerá em D , o que não ocorre com a curva C_2 .

As Figuras 3.5a, 3.5b e 3.5c mostram domínios conexos em \mathbb{R}^3 :

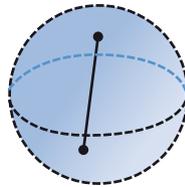


Figura 3.5a

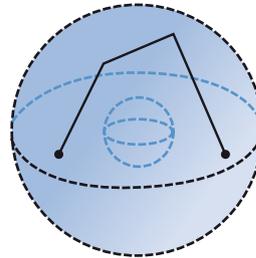


Figura 3.5b

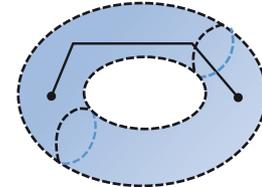


Figura 3.5c

Os domínios representados na Figura 3.5a e na Figura 3.5b são simplesmente conexos. Já o domínio representado na Figura 3.5c não é simplesmente conexo.

Exemplo 3.9: O domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4 \leq x^2 + y^2 < 9\}$ é simplesmente conexo? Por quê?

Solução:

Conforme a representação gráfica de D na Figura 3.6 e a Definição 3.10, percebemos que D é conexo.

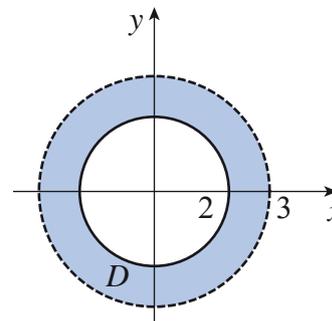


Figura 3.6

Contudo, da Definição 3.11 podemos afirmar que D não é simplesmente conexo.

3.2 Funções vetoriais de várias variáveis

Definição 3.13. Chamamos de função vetorial das variáveis x e y a função definida em $D \subset \mathbb{R}^2$, que associa a cada par ordenado $(x, y) \in D$ o vetor definido por:

$$\vec{f}(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j},$$

em que f_1 e f_2 (chamadas componentes ou funções coordenadas) são funções escalares definidas em D .

Analogamente, se \vec{f} é definida em $D \subset \mathbb{R}^3$, então:

$$\vec{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k}.$$

Exemplo 3.10: Encontre o domínio das funções

$$\vec{f}(x, y, z) = (x+1)z\vec{i} + x(y-1)\vec{j} + 2\sqrt{xz}\vec{k} \text{ e}$$

$$\vec{g}(x, y) = x^2(y-1)\vec{i} + \sqrt{1-y^2}\vec{j}.$$

Solução:

Temos que $\vec{f}(x, y, z) = (x+1)z\vec{i} + x(y-1)\vec{j} + 2\sqrt{xz}\vec{k}$ é uma função vetorial definida em todos os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tais que $xz \geq 0$. Já $\vec{g}(x, y) = x^2(y-1)\vec{i} + \sqrt{1-y^2}\vec{j}$ é uma função vetorial que está definida em todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tais que $1-y^2 \geq 0$.

3.3 Limite e continuidade

Definição 3.14. Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, $P_0(x_0, y_0) \in D$ e \vec{r}_0 seu vetor posição. Seja \vec{f} uma função vetorial definida em D , exceto talvez em \vec{r}_0 . Seja $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ um vetor constante. Se \vec{r} é o vetor posição do ponto $P(x, y)$, dizemos que

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \vec{f}(x, y) = \vec{a}$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $|\vec{f}(x, y) - \vec{a}| < \varepsilon$ sempre que $0 < |\vec{r} - \vec{r}_0| < \delta$.

Observação 3.4. $0 < |\vec{r} - \vec{r}_0| < \delta$ representa o interior (exceto P_0) de um círculo de raio δ e centro em P_0 . Geometricamente, dada qualquer bola $B(A, \varepsilon)$ de raio ε e centro em $A(a_1, a_2)$, existe uma bola $B(P_0, \delta)$ de raio δ e centro em $P_0(x_0, y_0)$, tal que os pontos $B(P_0, \delta)$ (exceto talvez em P_0) são levados por \vec{f} em pontos de $B(A, \varepsilon)$. Assim, a direção, o sentido e o comprimento de $\vec{f}(x, y)$ tendem para a direção, o comprimento e o sentido de \vec{a} quando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

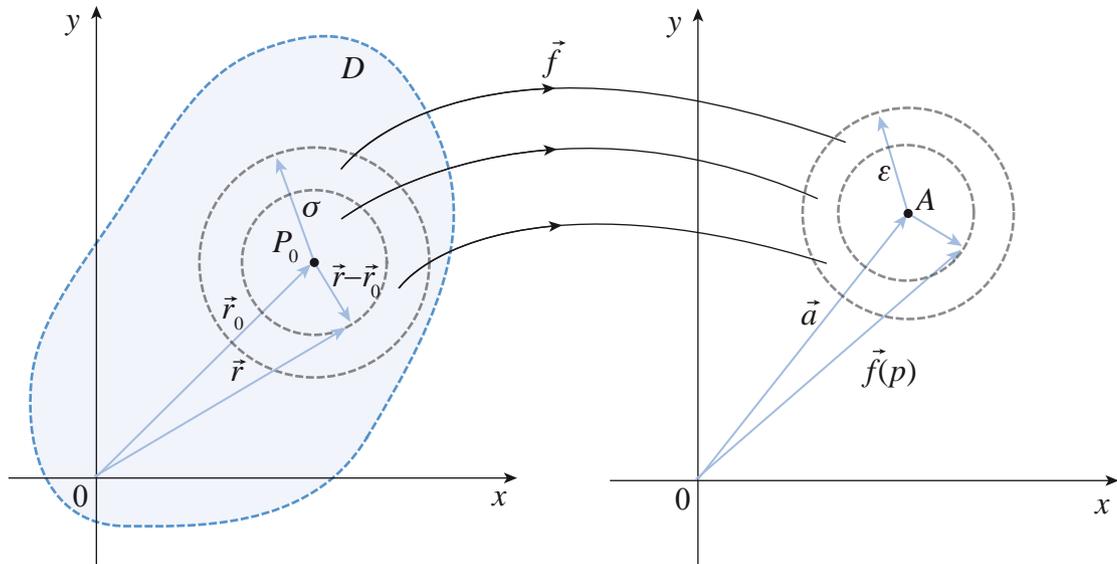


Figura 3.7

De forma análoga às funções vetoriais de uma variável, se

$$\vec{f}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

e

$$\vec{a} = (a_1, a_2),$$

temos

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \vec{f}(x, y) = \vec{a} \Leftrightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f_i(x, y) = a_i, \text{ para } i = 1, 2.$$

Observações 3.5.

- 1) As propriedades dos limites são análogas às propriedades vistas para funções vetoriais de uma variável (veja Seção 1.5).
- 2) Analogamente, definimos o limite para uma função

$$\vec{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k},$$

definida em um aberto $D \subset \mathbb{R}^3$.

Exemplo 3.11:

- a) Calcule o limite de $\vec{g}(x, y) = (y+1)\vec{i} - (x^2 - 2)\vec{j}$ quando \vec{r} tende a $\vec{0}$.

Solução:

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{0}} \vec{g}(x, y) = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{0}} ((y+1)\vec{i} - (x^2 - 2)\vec{j}) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (y+1)\vec{i} - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 - 2)\vec{j} = (1, -2)$$

- b) Calcule o limite de $\vec{f}(x, y, z) = \left(ye^{x^2+1}, \frac{x^2-1}{y(x^2+1)}, 3x^3yz \right)$ quando \vec{r} tende a $\vec{0}$.

Solução:

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{0}} \vec{f}(x, y, z) &= \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,-2,0)} \left(ye^{x^2+1}, \frac{x^2-1}{y(x^2+1)}, 3x^3yz \right) \\ &= \left(\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,-2,0)} ye^{x^2+1}, \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,-2,0)} \frac{x^2-1}{y(x^2+1)}, \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,-2,0)} 3x^3yz \right) \\ &= (-2e^2, 0, 0). \end{aligned}$$

Definição 3.15. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto. A função \vec{f} , definida num domínio D , é *contínua* no ponto $P_0(x_0, y_0) \in D$ se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \vec{f}(x, y) = \vec{f}(x_0, y_0).$$

Se \vec{f} é contínua em cada ponto do domínio D , dizemos que \vec{f} é contínua em D .

Observações 3.6.

- 1) De forma análoga às funções vetoriais de uma variável, temos que \vec{f} é contínua em D se, e somente se, as suas funções componentes (escalares) são contínuas em D .
- 2) Analogamente, definimos a continuidade para uma função

$$\vec{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k},$$

definida em $D \subset \mathbb{R}^3$.

Exemplo 3.12:

- a) Verifique se a função vetorial $\vec{f}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$ é contínua em todo o seu domínio.

Solução:

Como as funções componentes de \vec{f} são contínuas, então \vec{f} também é contínua em todo o seu domínio, ou seja, em todos os plano do \mathbb{R}^2 .

b) Verifique se a função vetorial

$$\vec{h}(x, y, z) = ye^{x^2+1}\vec{i} + \frac{x^2-1}{y(x^2+1)}\vec{j} + 3x^3yz\vec{k}$$

é contínua.

Solução:

Como as funções componentes de \vec{h} são contínuas, então \vec{h} também é contínua em todos os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tais que $y \neq 0$.

3.4 Derivadas parciais

Definição 3.16. Seja \vec{f} uma função vetorial definida num domínio $D \subset \mathbb{R}^3$. As derivadas parciais de \vec{f} em relação a x , y ou a z , indicadas por $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}$, $\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}$, $\frac{\partial \vec{f}}{\partial z}$, são definidas respectivamente por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(x + \Delta x, y, z) - \vec{f}(x, y, z)}{\Delta x}, \\ \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(x, y + \Delta y, z) - \vec{f}(x, y, z)}{\Delta y} \text{ e} \\ \frac{\partial \vec{f}}{\partial z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(x, y, z + \Delta z) - \vec{f}(x, y, z)}{\Delta z},\end{aligned}$$

para todo (x, y, z) , tal que os limites existem.

Se $\vec{f}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$, então

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_3}{\partial x} \right); \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) \text{ e} \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial z} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_3}{\partial z} \right).$$

Exemplo 3.13:

a) Seja $\vec{f}(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{y}, xyz, -5yz \right)$. Calcule $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}$, $\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}$ e $\frac{\partial \vec{f}}{\partial z}$.

Solução:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \left(\frac{2x}{y}, yz, 0 \right); \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \left(-\frac{x^2}{y^2}, xz, -5z \right) \text{ e}$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial z} = (0, xy, -5y).$$

b) Dada a função $\vec{r}(u, v) = ue^{u+v}\vec{i} + (u+v)^2\vec{j}$, determine $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ no ponto (1,2) e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ no ponto (-1,2).

Solução:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (e^{u+v} + ue^{u+v}, 2(u+v)) \Rightarrow \text{no ponto (1,2), temos}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(1,2) = (2e^3, 6).$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (ue^{u+v}, 2(u+v)) \Rightarrow \text{no ponto (-1,2), temos}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(-1,2) = (e, 2).$$

3.5 Interpretação geométrica da derivada

Seja $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$ uma função vetorial contínua. Se todas as variáveis, exceto uma que pode ser tomada como parâmetro, permanecem fixas, então \vec{f} descreve uma curva no espaço. Se $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}(P_0) \neq \vec{0}$, a derivada parcial de \vec{f} em relação à variável x é um *vetor tangente* à curva definida por $\vec{f}(x, y_0, z_0)$ no ponto P_0 . Analogamente, se $\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}(P_0) \neq \vec{0}$, a derivada parcial de \vec{f} em relação à variável y é um *vetor tangente* à curva dada por $\vec{f}(x_0, y, z_0)$ no ponto P_0 e, se

$\frac{\partial \vec{f}}{\partial z}(P_0) \neq \vec{0}$, a derivada parcial de \vec{f} em relação à variável z é um vetor tangente à curva dada por $\vec{f}(x_0, y_0, z)$ no ponto P_0 .

Observe a representação gráfica (Figura 3.8), que ilustra geometricamente as derivadas parciais para uma função vetorial de duas variáveis.

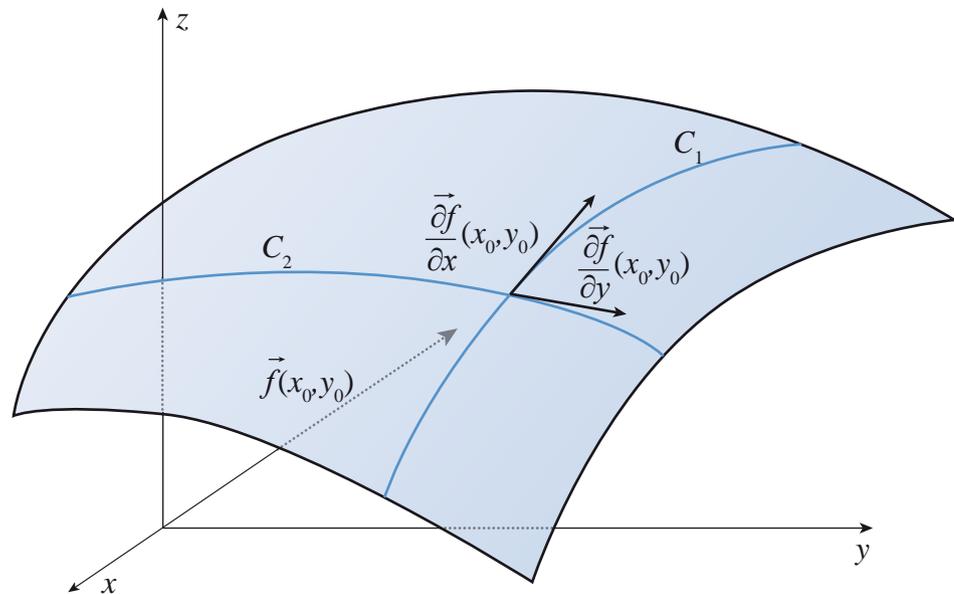


Figura 3.8

Exemplo 3.14:

- a) Seja a função vetorial $\vec{f}(x, y, z) = (y, z\cos(x), z\sin(x))$. Descreva a curva obtida fazendo $y = 0$ e $z = 3$. Represente nesta curva a derivada parcial $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}$ no ponto $P_0\left(\frac{\pi}{6}, 0, 3\right)$.

Solução:

Para $y = 0$ e $z = 3$ (fixos), temos:

$$\vec{f}(x, 0, 3) = \vec{g}(x) = (0, 3\cos(x), 3\sin(x)).$$

Observemos que $\vec{g}(x) = (0, 3\cos(x), 3\sin(x))$ descreve uma circunferência no plano yz , em que a variável x pode ser interpretada como o parâmetro t (veja a parametrização da circunferência na Seção 2.2.2).

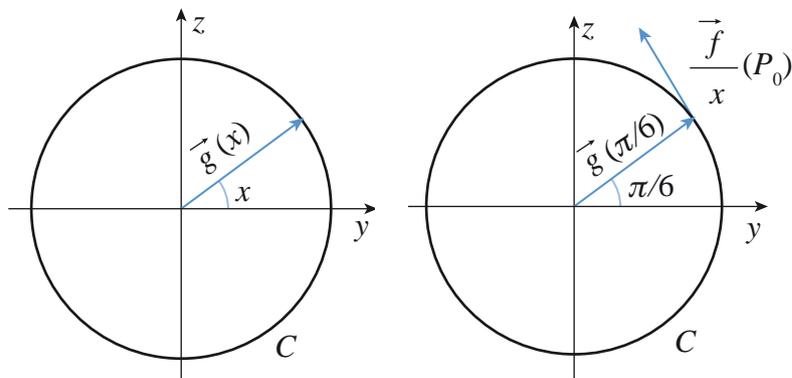


Figura 3.9

Por outro lado, temos:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = (0, -z \operatorname{sen}(x), z \operatorname{cos}(x)).$$

Assim,

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}(P_0) = \left(0, -\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

Por outro lado, temos:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u} = (\operatorname{cos} v, \operatorname{sen} v, -2u)$$

e

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial v} = (-u \operatorname{sen} v, u \operatorname{cos} v, 0).$$

Assim,

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u} \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2} \right)$$

e

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial v} \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right) = (-1, 1, 0).$$

3.6 Derivadas parciais sucessivas

Seja $\vec{f}(x, y)$. Se as derivadas parciais dessa função vetorial existem, elas são também funções vetoriais. Assim, as derivadas parciais de segunda ordem de \vec{f} são indicadas por:

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \right); \quad \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \right); \quad \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \right)$$

e

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \right).$$

Analogamente, obtêm-se as derivadas parciais de ordem $n \geq 3$.

Exemplo 3.15:

- a) Seja $\bar{f}(x, y, z) = (e^{xy}, y^2 + xz, x^2 yz)$. Determine $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x \partial y}$ no ponto $P_0(-1, 1, -1)$.

Solução:

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (ye^{xy}, z, 2xyz) = (e^{xy} + xye^{xy}, 0, 2xz) \Rightarrow \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial y \partial x}(-1, 1, -1) = (0, 1, 2)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (xe^{xy}, 0, x^2 z) = (e^{xy} + xye^{xy}, 0, 2xz) \Rightarrow \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x \partial y}(-1, 1, -1) = (0, 1, 2)$$

- b) Seja $\bar{f}(x, y, z) = (\sin(xy), \cos(yz), e^{xyz})$. Determine $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x \partial y}$.

Solução:

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (y \cos(xy), 0, yze^{xyz}) = (0, 0, ye^{xyz} + xy^2 ze^{xyz})$$

$$\frac{\partial^3 \bar{f}}{\partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial z \partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (0, 0, ye^{xyz} + xy^2 ze^{xyz}) = (0, 0, 3xyz e^{xyz} + x^2 y^2 z^2 e^{xyz} + e^{xyz})$$

Teorema de Schwarz: Seja $\bar{f} = \bar{f}(x, y)$. Suponha que \bar{f} esteja definida sobre uma bola aberta $B((x_0, y_0), r)$ e que $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial y \partial x}$ e

$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x \partial y}$ também estejam definidas em B . Então, se $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x \partial y}$ são

contínuas em B , temos $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.

Observação 3.7. O Teorema de Schwarz também é válido, com as hipóteses adequadas, para funções de três ou mais variáveis.

Resumo

Neste capítulo, apresentamos as Funções Vetoriais de Várias Variáveis. Iniciamos definindo bola aberta, bola fechada, vizinhança de um ponto, ponto interior, ponto exterior, ponto de fronteira, conjunto aberto e conjunto fechado. Apresentamos a definição de domínio conexo e simplesmente conexo. Calculamos limite de funções vetoriais de várias variáveis e analisamos a continuidade dessas funções, bem como calculamos as suas derivadas parciais, quando existem. Verificamos que a derivada parcial de \vec{f} em relação à variável x é um *vetor tangente* à curva definida por $\vec{f}(x, y_0, z_0)$ no ponto P_0 . Analogamente, a derivada parcial de \vec{f} em relação à variável y é um *vetor tangente* à curva dada por $\vec{f}(x_0, y, z_0)$ no ponto P_0 e a derivada parcial de \vec{f} em relação à variável z é um *vetor tangente* à curva dada por $\vec{f}(x_0, y_0, z)$ no ponto P_0 . Finalizamos o capítulo calculando derivadas parciais sucessivas de funções vetoriais.

Exercícios Propostos

1) Verifique quais dos conjuntos abaixo são conexos.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x^2 + 5y^2 \leq 10\}$

b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x^2 + 9y^2 + z^2 \geq 18\}$

2) Determine o domínio das seguintes funções vetoriais.

a) $\vec{f}(x, y, z) = x\vec{i} + y\sqrt{z}\vec{j} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}\vec{k}$

b) $\vec{g}(x, y, z) = (x^2 + y^2)\vec{i} + x\sqrt{y}\vec{j} + xy\vec{k}$

c) $\vec{h}(x, y) = \frac{1}{x}\vec{i} + xy\vec{j}$

d) $\vec{p}(x, y, z) = \sqrt{2 - x^2 - y^2}\vec{i} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\vec{j} + z\vec{k}$

3) Determine os seguintes limites.

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} \sqrt{2 - x^2 - y^2}\vec{i} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}\vec{j}$

b) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}, 2\right)} \frac{\text{sen } 2x\vec{i} + \cos y\vec{j} + (xy + z)\vec{k}}{x}$

$$c) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \left(\frac{x^2-1}{x-1} \right) \vec{i} + \cos \left(\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x-y}} \right) \vec{j}$$

$$d) \lim_{(x,y,z) \rightarrow \left(0,1,\frac{\pi}{4}\right)} \frac{x}{y} \operatorname{sen} \left(\frac{y}{x} \right) \vec{i} + \cos(x) \vec{j} + \operatorname{tg}(yz) \vec{k}$$

4) Faça uma análise da continuidade das seguintes funções.

$$a) \vec{f}(x, y, z) = \begin{cases} x\vec{i} + y \operatorname{sen} y \vec{j} + xz^2 \operatorname{sen} \frac{1}{z} \vec{k}, & \text{se } z \neq 0 \\ x\vec{i} + y \operatorname{sen} y \vec{j}, & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

$$b) \vec{f}(x, y, z) = \frac{x+y}{x-y} \vec{i} + x^2 \vec{j} + \sqrt{z} \vec{k}$$

5) Calcule as derivadas parciais de 1ª ordem das seguintes funções.

$$a) \vec{f}(x, y, z) = zx \vec{i} + yz^2 \vec{j} + \sqrt{4-x^2-y^2} \vec{k}$$

$$b) \vec{g}(x, y, z) = \frac{x}{y} \operatorname{sen} \left(\frac{y}{x} \right) \vec{i} + \cos(x) \vec{j} + \operatorname{tg}(yz) \vec{k}$$

$$c) \vec{h}(x, y, z) = e^{-2x} \vec{i} + e^{xy} \vec{j} + e^{-xyz} \vec{k}$$

$$d) \vec{p}(x, y) = x\sqrt{y} \vec{i} + (x-y) \ln y \vec{j}$$

6) Considere a função $\vec{f}(x, y, z) = z^2 \vec{i} + y \cos(x) \vec{j} + y \operatorname{sen}(x) \vec{k}$.

a) Descreva a curva obtida quando fazemos $y = 2$ e $z = \sqrt{2}$.

b) Represente nesta curva a derivada parcial $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}$ no ponto $P\left(\frac{\pi}{2}, 1, \sqrt{2}\right)$.

Respostas

1. a) É conexo.

b) É conexo.

2. a) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } z \geq 0\}$

b) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y \geq 0\}$

c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0\}$

d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$

3. a) \vec{i}

b) $2\vec{i} + 2\vec{k}$

c) $2\vec{i}$

d) $\vec{j} + \vec{k}$

4. a) É contínua em \mathbb{R}^3 .

b) É contínua em todo o domínio de \vec{f} , ou seja, em $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \neq y \text{ e } z \geq 0\}$.

5. a)

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \left(z, 0, -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \right); \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \left(0, z^2, -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \right); \frac{\partial \vec{f}}{\partial z} = (x, 2yz, 0)$$

b)

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial x} = \frac{x \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) - y \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)}{xy} \vec{i} - \operatorname{sen} x \vec{j}; \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} = \frac{y \cos\left(\frac{y}{x}\right) - x \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)}{y^2} \vec{i} + \frac{z}{\cos^2(yz)} \vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial z} = \frac{y}{\cos^2(yz)} \vec{k}$$

c)

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial x} = -2e^{-2x} \vec{i} + ye^{xy} \vec{j} - yze^{-xyz} \vec{k}; \frac{\partial \vec{h}}{\partial y} = xe^{xy} \vec{j} - xze^{-xyz} \vec{k}; \frac{\partial \vec{h}}{\partial z} = -xye^{-xyz} \vec{k}$$

d) $\frac{\partial \vec{p}}{\partial x} = \sqrt{y} \vec{i} + \ln y \vec{j}; \frac{\partial \vec{p}}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}} \vec{i} + \left(\frac{x-y}{y} - \ln y \right) \vec{j}$

6. a) É uma circunferência no plano $x = 2$.

Capítulo 4

Campos escalares e campos vetoriais

Capítulo 4

Campos escalares e campos vetoriais

Neste capítulo, aplicaremos métodos vistos nos capítulos anteriores a novos conceitos, obtendo resultados que encontram muitas aplicações no ramo da Física. Abordaremos os campos vetoriais. As principais aplicações envolvem campos de velocidade e campos de força, sejam de sólidos, líquidos ou gases – assim chamados porque a cada partícula da substância associamos um vetor velocidade ou um vetor força. De importância primordial são os campos vetoriais conservativos, porque incluem os campos gravitacionais e eletromagnéticos (campos de quadrado inverso).

4.1 Campos escalares e campos vetoriais

Dada uma região D do espaço, podemos associar a cada ponto de D uma grandeza escalar (temperatura, pressão, densidade, distância...) ou uma grandeza vetorial (força, velocidade, aceleração, posição, deslocamento...). Dizemos, então, que está definido sobre D um campo escalar ou um campo vetorial, respectivamente. Geralmente identificamos um campo escalar ou vetorial com a função escalar ou vetorial que o define.

Definição 4.1. Seja f uma função escalar definida em uma região D contida no \mathbb{R}^2 ou no \mathbb{R}^3 . A região D , juntamente com as grandezas escalares, imagem de cada ponto de D pela f , é chamada *campo escalar*. Dizemos também que f define um *campo escalar* sobre D .

Seguem alguns exemplos de campos escalares

- Se D é um sólido no espaço e d é a densidade em cada ponto $(x, y, z) \in D$, d define um campo escalar em D .
- Uma piscina P na forma de um paralelepípedo com base quadrangular de lado medindo 3 m e de altura medindo 1,8 m está cheia. Cada partícula da água em P está sujeita a uma pressão que é proporcional à distância desta partícula até a superfície da água. Desta forma, definimos uma função escalar p da água de P em \mathbb{R} obtendo, conseqüentemente, um campo escalar. Como exercício, usando coordenadas cartesianas escreva a função p e caracterize seu domínio.
- D é uma chapa metálica na forma de círculo com raio r cuja temperatura em cada um de seus pontos é inversamente proporcional a uma unidade somada com sua distância até o centro do círculo. Isso define uma função escalar T (que associa a cada ponto da chapa a sua temperatura) e um campo escalar. Escreva a função T e o seu domínio.

Definição 4.2. Seja \vec{f} uma função vetorial definida numa região D contida no \mathbb{R}^2 ou no \mathbb{R}^3 . A região D , juntamente com as grandezas vetoriais, imagem de cada ponto de D pela \vec{f} , é chamada *campo vetorial*. Dizemos também que \vec{f} define um *campo vetorial* sobre D .

Seguem alguns exemplos de campos vetoriais

- Consideremos a função vetorial \vec{V} que associa a cada ponto da atmosfera terrestre D a velocidade do vento neste ponto. \vec{V} define um campo vetorial em D , chamado campo de velocidade.
- Consideremos D como o espaço ocupado pela água em um riacho. A função que associa a velocidade de cada partícula de D em certo instante também define um campo de velocidade em D .
- Pela Lei da Gravitação Universal de Newton, a Terra exerce uma força de atração para o seu centro sobre qualquer corpo em sua atmosfera. A função que associa essa força a cada ponto da atmosfera D define um campo vetorial em D chamado campo de força. No caso, esse campo de força é o campo gravitacional da Terra.

4.2 Representação geométrica de um campo vetorial

A função vetorial dada por $\vec{f}(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$ define um campo vetorial no \mathbb{R}^2 . Para representá-lo, introduzimos um sistema de coordenadas no plano xOy e selecionamos alguns pontos (x, y) do plano e desenhamos os vetores a eles associados com a origem do vetor no próprio ponto. É conveniente lembrar que os vetores de um campo vetorial são infinitos e que não podemos representar todos. Assim, a seleção dos pontos deve ser tal que nos dê informações sobre o comportamento do campo em geral.

Exemplo 4.1: Considere os campos vetoriais $\vec{r}(x, y) = (x, y)$ e $\vec{v}(x, y) = (-y, x)$. Analise-os e dê uma possível interpretação física.

Solução:

Podemos começar produzindo uma tabela com alguns pontos do domínio de \vec{r} e \vec{v} e as suas respectivas imagens.

(x, y)	(1,1)	(-1,1)	(-1,-1)	(1,-1)	(3,3)	(-3,3)	(-3,-3)	(3,-3)
$\vec{r}(x, y)$	(1,1)	(-1,1)	(-1,-1)	(1,-1)	(3,3)	(-3,3)	(-3,-3)	(3,-3)
$\vec{v}(x, y)$	(-1,1)	(-1,-1)	(1,-1)	(1,1)	(-3,3)	(-3,-3)	(3,-3)	(3,3)

Reveja a definição de equipolência na Seção 4.2 do livro de Geometria Analítica.

Na Figura 4.1a e na 4.1b representamos os campos vetoriais \vec{r} e \vec{v} respectivamente. Note que na Figura 4.1b usamos a propriedade de [equipolência](#) para deslocar a representação do campo vetorial da origem para o ponto em que está aplicado o campo.

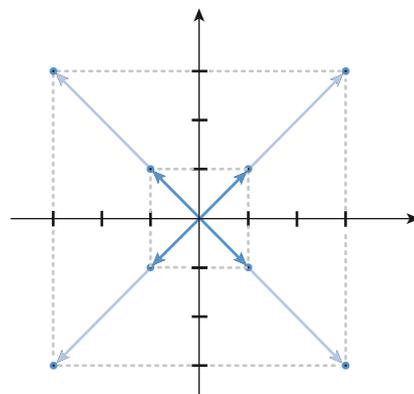


Figura 4.1a

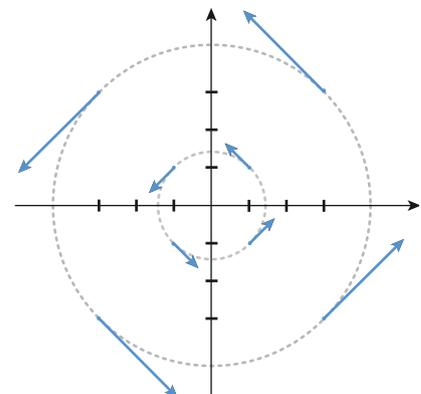


Figura 4.1b

Os vetores deste campo vetorial podem representar um campo de velocidade de uma roda em movimento conforme a Figura 4.2.



Figura 4.2

Seja $\vec{r}(x, y) = (x, y)$ a função vetorial que nos dá o vetor posição do ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $\vec{r}(x, y)$ e $\vec{v}(x, y)$ são ortogonais em cada ponto (x, y) , pois o produto escalar desses vetores é nulo conforme segue:

$$(x, y) \cdot (-y, x) = (-xy + xy) = 0.$$

Observação 4.1. Na Figura 4.3a, temos uma representação da função vetorial $\vec{v}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$. Representação similar pode ser produzida com o auxílio de *softwares* como o *Maple*.

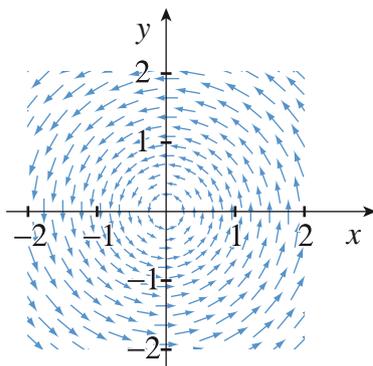


Figura 4.3a

Na Figura 4.3b, temos não apenas uma representação, mas um mapeamento físico de um campo vetorial. Perceba que as linhas de campo magnético são mapeadas pelo pó de ferro próximo ao imã, e as bússolas indicam a direção e também o sentido desse campo.

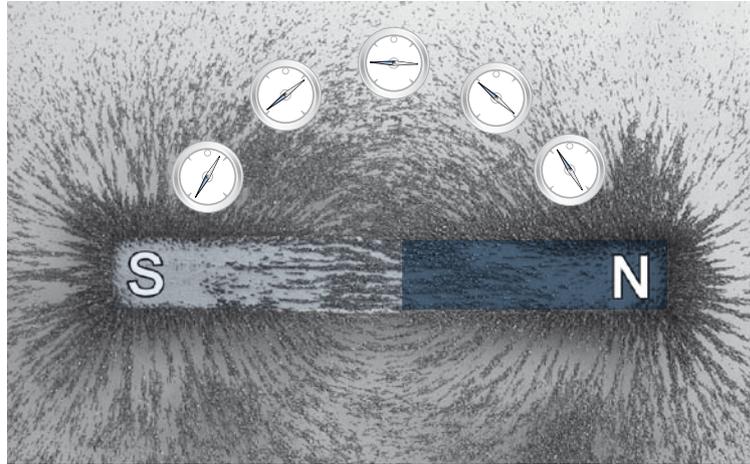


Figura 4.3b

Seguidamente é conveniente indicar campos vetoriais usando a notação do vetor através da função vetorial que fornece o vetor posição de um ponto no plano ou no espaço.

Exemplo 4.2: Da Lei da Gravitação Universal de Newton, se uma partícula de massa m_0 está localizada na origem de um sistema coordenado xyz , então a força exercida sobre uma partícula de massa m localizada em $P(x, y, z)$ é

$$\vec{F}(x, y, z) = -G \frac{m_0 m}{|\vec{r}|^2} \vec{u}, \quad (4.1)$$

em que G é a constante gravitacional, \vec{r} é o vetor que dá a distância entre m_0 e m e $\vec{u} = \left(\frac{1}{|\vec{r}|} \right) \vec{r}$ é um vetor unitário que indica a direção da força. Um campo vetorial desta forma é chamado *campo de quadrado inverso*.

Já a Lei de Coulomb diz que uma carga elétrica pontual Q , que esteja situada na origem, exercerá sobre uma carga pontual q , localizada em $P(x, y, z)$, uma força

$$\vec{F}(x, y, z) = c \frac{Qq}{|\vec{r}|^2} \vec{u},$$

sendo c uma constante, \vec{r} e \vec{u} tendo o mesmo significado físico de (4.1). Note que a Lei de Coulomb tem a mesma forma da Lei da Gravitação Universal de Newton.

Observação 4.2. A Figura 4.4 ilustra alguns vetores de campos vetoriais quadrados inversos para $c < 0$.

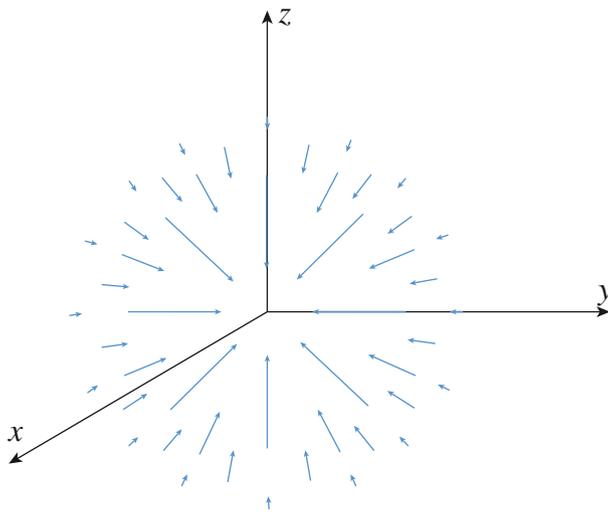


Figura 4.4

4.3 Derivada direcional e gradiente de campo escalar

Definição 4.3. Seja f uma função escalar (de duas ou mais variáveis). O gradiente de f , denotado por “ ∇f ”, é um vetor definido por

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)), \text{ para } \mathbb{R}^2 \text{ e}$$

$$\nabla f(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)), \text{ para } \mathbb{R}^3.$$

Lembre que $f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$

Exemplo 4.3:

- a) Seja a função $f(x, y) = xe^y + y^2e^x$. Encontre o campo gradiente de f .

Solução:

Para obtermos o gradiente de um campo escalar, basta aplicar o operador ∇ à respectiva função, como segue:

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (e^y + y^2e^x, xe^y + 2ye^x).$$

- b) Seja a função $f(x, y, z) = 3x^2y - z\text{sen}(x) + y^2\text{cos}(z)$. Encontre o campo gradiente de f .

Solução:

Seguindo o mesmo raciocínio do Exemplo 4.3a, temos:

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) \\ &= (6xy - z \cos(x), 3x^2 + 2y \cos(z), -\sin(x) - y^2 \sin(z))\end{aligned}$$

- c) Seja a função $g(x, y) = 3x + 2y$. Encontre o campo gradiente de g .

Solução:

Seguindo o mesmo raciocínio do Exemplo 4.3a e do 4.3b, temos:

$$\nabla g(x, y) = (g_x(x, y), g_y(x, y)) = (3, 2),$$

que está definido por uma função vetorial constante e cuja representação está esboçada na Figura 4.5.

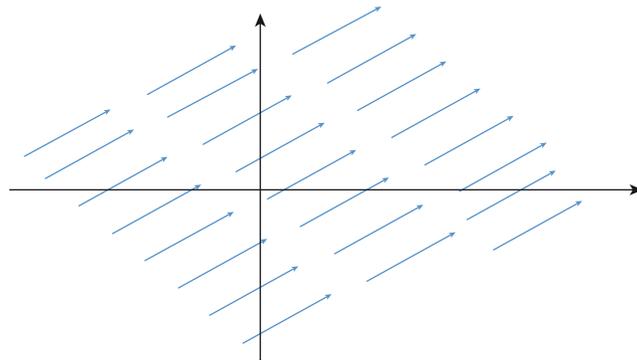


Figura 4.5

Definição 4.4. Seja f um campo escalar diferenciável numa vizinhança do ponto $P \in \mathbb{R}^3$ e seja \vec{u} um vetor unitário qualquer de \mathbb{R}^3 . A derivada direcional de f na direção de \vec{u} é definida como:

$$D_{\vec{u}}f(P) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P + t\vec{u}) - f(P)}{t},$$

se esse limite existir e for finito.

Observação 4.3. $D_{\vec{u}}f(P)$ é a taxa de variação de f em P , na direção de \vec{u} .

4.3.1 Cálculo da $D_{\vec{u}}f(P)$

Teorema 4.1. Seja f um campo escalar diferenciável numa vizinhança do ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ e seja $\vec{u} = (a, b, c)$ um vetor unitário.

Então,

$$D_{\vec{u}}f(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P) \cdot a_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(P) \cdot b + \frac{\partial f}{\partial z}(P) \cdot c.$$

$$D_{\vec{u}}f(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(P) \cdot b + \frac{\partial f}{\partial z}(P) \cdot c = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial z}(P) \right) \cdot (a, b, c) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$$

Assim, temos que $D_{\vec{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$.

Observação 4.4. $D_{\vec{u}}f(P)$ fornece o coeficiente angular da reta “ T ” tangente à curva intersecção do gráfico de f com o plano vertical na direção do vetor \vec{u} . Veja a Figura 4.6.

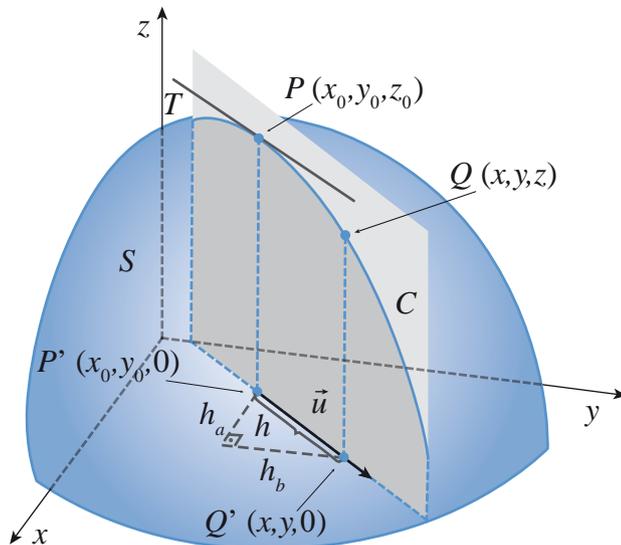


Figura 4.6

Exemplo 4.4: Seja $f(x, y) = x^2 + y^3$. Encontre a derivada direcional de f no ponto $(-1, 3)$ na direção do vetor $(1, 2)$.

Solução:

Em primeiro lugar, o vetor $(1, 2)$ não é unitário. Devemos, então, tomar o seu versor:

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

$$\text{Então, } \frac{\partial f}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(P) = -2; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 27.$$

$$\text{Logo, } D_{\vec{u}}f(P) = \frac{52}{\sqrt{5}}.$$

Verifique se tomando

$f(x, y, z) = (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2$, $P = (2, -1, 2)$ e $\vec{u} = (2, -1, 2)$,
então teríamos $D_u f(P) = 12$.

Observação 4.5. Seja f um campo escalar diferenciável numa vizinhança do ponto $Q(x_0, y_0)$ do \mathbb{R}^2 . Definimos analogamente,

$$D_u f(Q) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(Q + t\vec{u}) - f(Q)}{t},$$

sendo \vec{u} um vetor unitário de \mathbb{R}^2 .

Também de maneira análoga, calcula-se $D_u f(Q)$:

Se $\vec{u} = (a, b)$, então

$$D_u f(Q) = \frac{\partial f}{\partial x}(Q) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(Q) \cdot b.$$

4.4 Propriedade do vetor gradiente (o gradiente como direção de máxima variação)

Seja θ a medida do ângulo entre os vetores ∇f e \vec{u} (unitário). Então,

$$\nabla f \cdot \vec{u} = |\nabla f| |\vec{u}| \cos(\theta)$$

Como $D_u f = \nabla f \cdot \vec{u}$, segue que $D_u f = |\nabla f| |\vec{u}| \cos(\theta)$.

$D_u f$ será máxima quando $\cos(\theta) = 1$, isto é, quando \vec{u} estiver na direção e no sentido de ∇f .

O vetor gradiente de uma função aponta na direção e no sentido em que a função tem a taxa máxima de variação, que é $|\nabla f|$.

Exemplo 4.5: A temperatura em cada ponto (x, y) de uma placa retangular situada no plano xy é determinada por $T(x, y) = x^2 + y^2$.

- a) Ache a taxa de variação da temperatura no ponto $P(3,4)$ na direção e no sentido do vetor $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Solução:

Tomando o gradiente da função temperatura, temos:

$$\nabla T(x, y) = (2x, 2y)$$

$$D_u T(x, y) = (\nabla T(x, y)) \cdot \vec{u} = (2x, 2y) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x + \sqrt{3}y$$

$$D_u T(P) = 3 + 4\sqrt{3} \cong 9,93.$$

A taxa de variação da temperatura no ponto P na direção e no sentido do vetor $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ é aproximadamente 9,93.

- b) Ache a direção e o sentido em que a taxa de variação da temperatura no ponto $Q(-3,1)$ é máxima. E qual essa taxa máxima?

Solução:

$$\nabla T(Q) = (-6, 2)$$

A taxa de variação da temperatura no ponto Q é máxima na direção e no sentido do vetor $\nabla T(Q) = (-6, 2)$. A taxa máxima é dada por $|\nabla T(Q)| = 2\sqrt{10}$.

4.5 Derivada direcional de campo vetorial

Definição 4.5. Sejam $\vec{f}(x, y, z)$ um campo vetorial, um ponto $P \in \mathbb{R}^3$ e uma direção em P , dada por um vetor unitário \vec{u} . A *derivada direcional* de \vec{f} na direção de \vec{u} é definida como:

$$D_u \vec{f}(P) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(P + t\vec{u}) - \vec{f}(P)}{t},$$

se este limite existir e for finito.

Considerando as componentes escalares, f_1 , f_2 e f_3 de \vec{f} , pois

$$\vec{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k},$$

vem:

$$D_u \vec{f}(P) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(P + t\vec{u}) - \vec{f}(P)}{t}$$

$$= \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(P + t\vec{u}) - f_1(P)}{t} \right) \vec{i} + \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_2(P + t\vec{u}) - f_2(P)}{t} \right) \vec{j} + \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_3(P + t\vec{u}) - f_3(P)}{t} \right) \vec{k}.$$

Assim, concluímos que a derivada direcional de \vec{f} em um ponto P existe se, e somente se, existem as derivadas direcionais das funções escalares f_1, f_2 e f_3 .

Exemplo 4.6: Encontre a derivada direcional em $P(-2,1)$, do campo vetorial radial $\vec{f}(x, y) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$, na direção do vetor $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$.

Solução:

Como \vec{a} não é um vetor unitário, determinamos:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

Temos:

- $f_1 = 2x; \nabla f_1(-2,1) = 2\vec{i}$
- $f_2 = 2y; \nabla f_2(-2,1) = 2\vec{j}$.

Assim, vem:

$$D_u \vec{f}(-2,1) = [\vec{u} \cdot \nabla f_1(-2,1)]\vec{i} + [\vec{u} \cdot \nabla f_2(-2,1)]\vec{j}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} \right) \cdot 2\vec{i} \right] \vec{i} + \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} \right) \cdot 2\vec{j} \right] \vec{j}$$

$$= \sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}.$$

“Velocidade”, nesse caso, poderia ser pensando como a velocidade de uma partícula que flutua no fluido ou ainda como a quantidade de fluido que passa pelo ponto por unidade de tempo

Observação 4.6. Considere um fluido movendo-se em uma região D , em regime estacionário, isto é, a “velocidade” em qualquer ponto $P(x, y, z)$ é independente do tempo. Então, a cada ponto está associado um vetor $\vec{v}(x, y, z)$, que é a “velocidade” do fluido em P (Figura 4.7).

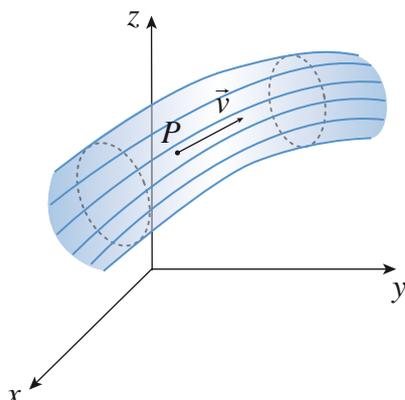


Figura 4.7

A derivada direcional de \vec{v} em P , em uma direção dada \vec{a} , expressa a variação da “velocidade” do fluido, em P , na direção \vec{a} .

4.6 Campos conservativos

Definição 4.6. Um campo vetorial \vec{F} é *conservativo* numa região D do \mathbb{R}^2 ou do \mathbb{R}^3 se $\vec{F} = \nabla f$, para alguma função escalar f definida em D . Nesse caso, a função f é chamada *função potencial* de \vec{F} na região D , e a imagem de um ponto pertencente à D pela f é o potencial neste ponto.

Observação 4.7. Na Física encontram-se, muitas vezes, campos vetoriais que se podem escrever como o gradiente de um campo escalar. Denominam-se estes campos como *campos conservativos*. Exemplos de campos conservativos são o campo gravitacional e o campo elétrico.

Exemplo 4.7: O campo vetorial dado por

$$\vec{F}(x, y) = 2x\vec{i} + y\vec{j}$$

é um campo conservativo, pois existe uma função escalar,

$$f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2,$$

tal que,

$$\nabla f(x, y) = 2x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{F}(x, y).$$

Mas, como verificar se um campo vetorial é conservativo?

Por enquanto, para saber se um campo vetorial dado é conservativo, temos que verificar se ele possui uma função potencial.

Por exemplo, seja $\vec{F}(x, y, z) = (10xz + y \operatorname{sen}(xy), x \operatorname{sen}(xy), 5x^2)$, \vec{F} será conservativo se encontrarmos uma função escalar f tal que,

$$\vec{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)).$$

Assim,

$$f_x(x, y, z) = 10xz + y \operatorname{sen}(xy) \quad (4.2)$$

$$f_y(x, y, z) = x \operatorname{sen}(xy) \quad (4.3)$$

$$f_z(x, y, z) = 5x^2. \quad (4.4)$$

Daí, integrando (4.2) em relação a x , temos:

$$f(x, y, z) = \int f_x(x, y, z) dx = \int [10xz + y \operatorname{sen}(xy)] dx = 5x^2z - \cos(xy) + C_1,$$

em que C_1 é uma constante em relação a x . Porém, C_1 pode depender de y ou z , isto é, $C_1 = g(y, z)$ e, portanto,

$$f(x, y, z) = 5x^2z - \cos(xy) + g(y, z). \quad (4.5)$$

Derivando (4.5) em relação a y e comparando com (4.3), temos:

$$x \operatorname{sen}(xy) + g_y(y, z) = f_y(x, y, z) = x \operatorname{sen}(xy) \Rightarrow g_y(y, z) = 0.$$

Daí,

$$g(y, z) = \int g_y(y, z) dy = \int 0 dy = C_2,$$

em que C_2 é constante em relação a x e a y . Porém, C_2 pode depender de z , ou seja, $C_2 = h(z)$ e $g(y, z) = h(z)$, que substituindo em (4.5) vem:

$$f(x, y, z) = 5x^2z - \cos(xy) + h(z). \quad (4.6)$$

Derivando (4.6) em relação a z e comparando com (4.4), temos:

$$5x^2 + h_z(z) = f_z(x, y, z) = 5x^2 \Rightarrow h_z(z) = 0 \Rightarrow h_z(z) = \int h_z(z) dz = \int 0 dz = C.$$

Substituindo em (4.6), obtemos a função potencial

$$f(x, y, z) = 5x^2z - \cos(xy) + C \text{ para } \vec{F}.$$

Logo, \vec{F} é um campo conservativo.

Afirmação: “Todo campo vetorial quadrado inverso é conservativo.”

Como exercício, mostre a afirmação acima, considerando \vec{F} um campo vetorial quadrado inverso no \mathbb{R}^2 .

Resumo

Neste capítulo, definimos campo escalar e campo vetorial. Definimos e calculamos o vetor gradiente de uma função escalar f (de duas ou mais variáveis). Verificamos que o vetor gradiente de uma função aponta na direção e no sentido em que a função tem a taxa máxima de variação. Também definimos e calculamos a derivada direcional de f na direção de um vetor \vec{u} unitário qualquer. Apresentamos como identificar se um campo vetorial \vec{F} é ou não conservativo. Para os campos *conservativos*, determinamos a *função potencial* de \vec{F} . Mostramos exemplos na área da Física em que se encontram campos conservativos, como o campo gravitacional e o campo elétrico (campos de quadrado inverso).

Exercícios Propostos

- 1) Represente graficamente os seguintes campos vetoriais.
 - a) $\vec{f}(x, y) = (x^2 + y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j}$
 - b) $\vec{g}(x, y) = (x - y)\vec{i} + (x + y)\vec{j}$
 - c) $\vec{h}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$

- 2) Suponhamos que a temperatura em um ponto (x, y, z) do espaço é dada por $x^2 + y^2 + z^2$. Uma partícula P se move de modo que no tempo t a sua posição é dada por (t, t^2, t^3) .
 - a) Identifique a função escalar que nos dá a temperatura em um ponto qualquer do espaço.
 - b) Identifique a função vetorial que descreverá o movimento da partícula P .

- c) Determine a temperatura no ponto ocupado pela partícula em $t = \frac{1}{2}$.
- 3) Determine o gradiente dos seguintes campos escalares.
- a) $f(x, y, z) = xy + xz + yz$
- b) $g(x, y, z) = \sqrt{xyz}$
- c) $h(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$
- 4) Calcule a derivada direcional da função $f(x, y) = e^{x+y}$ na direção do vetor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ no ponto $P(0, 1)$.
- 5) Determine a derivada direcional da função $f(x, y)$ no ponto P e na direção indicada pelo ângulo θ .
- a) $f(x, y) = x^2 y^3 - y^4$, $P(2, 1)$, $\theta = \frac{\pi}{3}$
- b) $f(x, y) = \sqrt{5x} y$, $P(1, 4)$, $\theta = -\frac{\pi}{6}$
- 6) Calcule, usando a definição, a derivada direcional no ponto e direção indicados
- a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $P(1, 2)$, na direção de $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$.
- b) $f(x, y) = 2x + 3y$, $P(-1, 2)$, na direção da reta $y = 2x$.
- c) $f(x, y, z) = 2x + 3y - z$, $P(1, 1, -1)$, na direção do eixo positivo dos y .
- 7) Se a poluição P , em cada ponto, é dada por $P(x, y, z) = \frac{100}{1 + x^2 + 3y^2 + z}$ (%), determine o sentido que se deve seguir, a partir de $S(2, 1, 3)$, para alcançar os pontos mais despoluídos. Qual a velocidade de despoluição nesta direção?
- 8) Calcule a velocidade com que cresce a temperatura $T(x, y, z) = 40 - 2x + y^2$ quando se desloca na direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$:
- a) a partir de um ponto qualquer.

- b) a partir do ponto $P(1, 4, 2)$.
- c) A partir do ponto $P(1, 4, 2)$, em que direção esta temperatura mais cresce? Qual esta velocidade de crescimento?
- 9) Represente geometricamente o campo gradiente definido pela função dada:
- a) $u(x, y, z) = -\frac{1}{6}(x^2 + y^2 + z^2)$
- b) $u(x, y) = 2x + 4y$
- 10) Seja $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$. Represente geometricamente $\nabla f(x_0, y_0)$, sendo (x_0, y_0) dado por:
- a) $(1, 1)$
- b) $(-1, 1)$
- c) $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$
- 11) Encontre a derivada direcional em P dos campos vetoriais dados, na direção do vetor $\vec{v} = (2, -1, 1)$.
- a) $\vec{f}(x, y, z) = 2x\vec{i} + 5y\vec{j} + 4\vec{k}$; $P(1, 1, 2)$
- b) $\vec{g}(x, y, z) = e^{x+y}\vec{i} + e^{x-y}\vec{j} + 2\vec{k}$; $P(1, 1, 0)$
- 12) Seja $\vec{v}(x, y, z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2\vec{k}$ o campo de velocidade de um fluido em movimento. Determine a variação de \vec{v} no ponto $P(1, 1, 2)$, na direção do vetor $-\vec{k}$.
- 13) Verifique se os seguintes campos vetoriais são conservativos em algum domínio. Em caso afirmativo, encontre uma função potencial.
- a) $\vec{f}(x, y) = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$
- b) $\vec{g}(x, y) = xe^{x^2y}(2y\vec{i} + x\vec{j})$
- c) $\vec{h}(x, y) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2 + y^2}$
- d) $\vec{t}(x, y) = e^x(\cos y\vec{i} + \sin y\vec{j})$
- e) $\vec{p}(x, y, z) = \sin y\vec{i} - \cos x\vec{j} + \vec{k}$

$$f) \vec{q}(x, y, z) = e^z (y\vec{i} + x\vec{j} + xy\vec{k})$$

$$g) \vec{m}(x, y, z) = \frac{1}{y}\vec{i} - \frac{x}{y^2}\vec{j} + (2z-1)\vec{k}$$

Respostas

$$2. a) f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$b) \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$$

$$c) \frac{21}{64} \text{ unidades de temperatura}$$

$$3. a) \nabla f(x, y, z) = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$$

$$b) \nabla g(x, y, z) = \frac{yz}{2\sqrt{xyz}}\vec{i} + \frac{xz}{2\sqrt{xyz}}\vec{j} + \frac{xy}{2\sqrt{xyz}}\vec{k}$$

$$c) \nabla h(x, y, z) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} + \vec{k}$$

$$4. \sqrt{2}e$$

$$5. a) 2 + 4\sqrt{3}$$

$$b) \sqrt{15} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$6. a) -\sqrt{2}$$

$$b) \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

$$c) 3$$

7. Sentido do vetor: $(4, 6, 1)$; velocidade $v = \frac{100\sqrt{53}}{121}$ unidades de velocidade

$$8. a) \frac{-4-6y}{\sqrt{38}}$$

$$b) \frac{-28}{\sqrt{38}}$$

c) Direção do vetor $(-1, 4, 0)$; velocidade: $2\sqrt{17}$ unidades de velocidade

11. a) $\frac{2\sqrt{6}}{3}\vec{i} - \frac{5\sqrt{6}}{6}\vec{j}$

b) $\frac{e^2}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{6}}\vec{j}$

12. $\vec{0}$

13. a) Conservativo: $f(x, y) = x^2y + C$ (C : constante).

b) Conservativo: $g(x, y) = e^{x^2y} + C$.

c) Conservativo: $h(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + C$.

d) Não conservativo.

e) Não conservativo.

f) Conservativo: $q(x, y, z) = xye^z + C$.

g) Conservativo: $m(x, y, z) = \frac{x}{y} + z^2 - z + C$.

Capítulo 5

Integrais de linha

Capítulo 5

Integrais de linha

As integrais de linha são também chamadas integrais curvilíneas. Neste capítulo, vamos apresentar as integrais de linha de campo escalar e de campo vetorial. A integral de linha constitui uma generalização da integral definida de uma função sobre um intervalo fechado. Vamos calcular a integral definida de uma função sobre uma curva qualquer ou uma linha qualquer que pode ser plana ou espacial, por isso é chamada de integral de linha.

5.1 Integral de linha de campo escalar

Definição 5.1. Seja C uma curva suave, orientada, com ponto inicial A e ponto terminal B .

Seja $f(x, y)$ um campo escalar definido em cada ponto de C .

Dividimos C em n pequenos arcos pelos pontos

$$A = P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_i, \dots, P_n = B.$$

Denotamos por Δs_i o comprimento do arco $P_{i-1}P_i$.

Em cada arco $P_{i-1}P_i$, escolhemos um ponto $Q_i = (x_i^*, y_i^*)$. Veja a Figura 5.1.

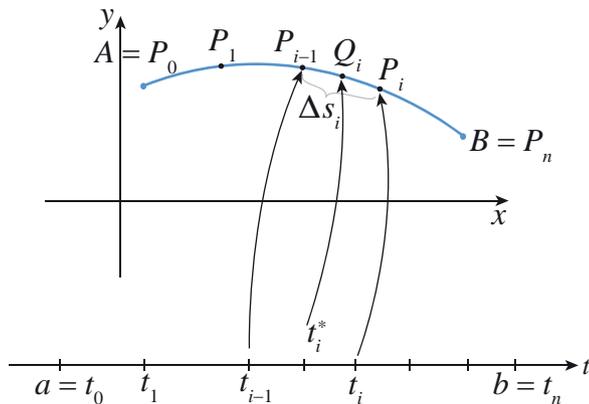


Figura 5.1

A integral de linha de f ao longo de C , de A até B , denotada por

$\int_C f(x, y) ds$, é definida por

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(Q_i) \Delta s_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i. \quad (5.1)$$

Observações:

- 1) O valor da integral de linha não depende da parametrização da curva, desde que cada ponto da curva seja atingido uma única vez quando " t " cresce da " a " para " b ".
- 2) Como para as integrais de funções de uma variável real, podemos interpretar a integral de linha de uma função positiva como uma área. De fato, se $f(x, y) \geq 0$, $\int_C f(x, y) ds$ representa a área de um lado da "cerca" ou "cortina" cuja base é C e cuja altura acima do ponto (x, y) é $f(x, y)$. Veja a Figura 5.2.

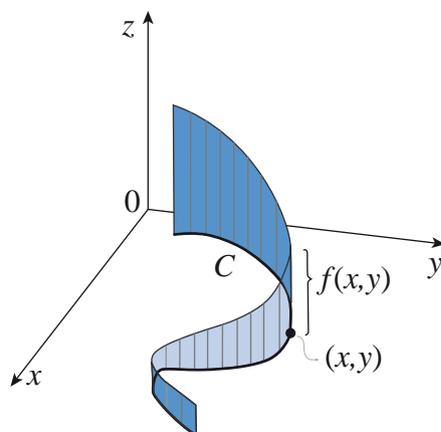


Figura 5.2

5.1.1 Cálculo da integral de linha de campo escalar no plano

1º Caso: A curva C é definida na forma vetorial $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.

O comprimento do arco $P_{i-1}P_i$ é $\Delta s_i = \sqrt{(x'(t_i^*))^2 + (y'(t_i^*))^2} \Delta t_i$.

Para algum t_i^* no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, o ponto $Q_i = (x_i^*, y_i^*)$ tem como vetor posição o vetor $\vec{r}(t_i^*) = (x(t_i^*)\hat{i}, (y(t_i^*)\hat{j})$.

Assim, a equação (5.1) pode ser escrita na forma

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x(t_i^*), y(t_i^*)) \sqrt{(x'(t_i^*))^2 + (y'(t_i^*))^2} \Delta t_i. \quad (5.2)$$

O resultado em (5.2) é reconhecido como limite de uma soma de Riemann.

Portanto,

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad (5.3)$$

ou

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt. \quad (5.4)$$

Exemplo 5.1: Calcule $\int_C (2 + x^2 y) ds$, em que C é a metade superior do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$.

Solução:

A curva C é ilustrada na Figura 5.3.

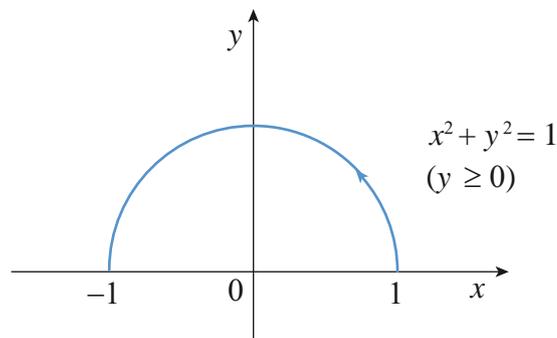


Figura 5.3

As equações paramétricas de C são $x = \cos(t)$ e $y = \text{sen}(t)$ para $0 \leq t \leq \pi$, pois C é a metade superior do círculo $x^2 + y^2 = 1$.

Então,

$$\begin{aligned} \int_C (2 + x^2 y) ds &= \int_0^\pi (2 + \cos^2(t) \text{sen}(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2(t) \text{sen}(t)) \sqrt{\text{sen}^2(t) + \cos^2(t)} dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2(t) \text{sen}(t)) dt \\ &= \left[2t - \frac{\cos^3(t)}{3} \right]_0^\pi \\ &= 2\pi + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Suponha agora que C seja uma curva suave por partes, ou seja, C é a união de um número finito de curvas suaves C_1, C_2, \dots, C_n , em que (como mostra a Figura 5.4) o ponto terminal de C_{i-1} é o ponto inicial de C_i . Então, definimos a integral de f ao longo de C como a soma das integrais de f ao longo de cada trecho suave de C .

Nesse caso,

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds + \dots + \int_{C_n} f(x, y) ds.$$

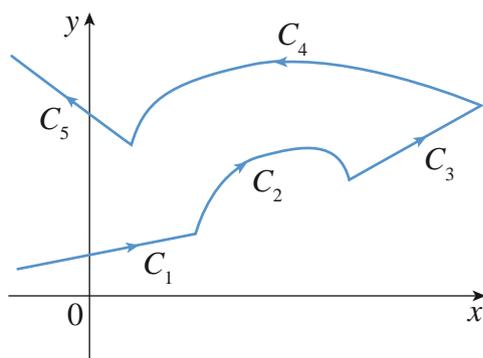


Figura 5.4

2º Caso: A curva C é definida por uma função explícita.

Se a curva C for definida por uma função explícita $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, podemos utilizar x como parâmetro na equação (5.3).

$$\text{Assim, } \int_C g(x, y) ds = \int_a^b g(x, f(x)) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

A integral $\int_C f(x, y) ds$ também pode ser representada por

$$\int_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy].$$

Nesse caso, podemos parametrizar a curva C e resolver a integral na variável t ou escrever a integral na variável x ou na variável y e resolvê-la.

Exemplo 5.2: Calcule $\int_C xy dx + x^2 dy$, em que C é dada por $y = x^3$, $-1 \leq x \leq 2$.

Solução:

A curva C é ilustrada na Figura 5.5.

Como C está definida pela função explícita $y = x^3$, podemos utilizar x como parâmetro.

Usando $dy = 3x^2 dx$, temos:

$$\begin{aligned} \int_C xy dx + x^2 dy &= \int_{-1}^2 x \underbrace{x^3}_y dx + x^2 (\underbrace{3x^2}_{dy} dx) \\ &= \int_{-1}^2 4x^4 dx \\ &= \frac{4}{5} x^5 \Big|_{-1}^2 = \frac{132}{5}. \end{aligned}$$

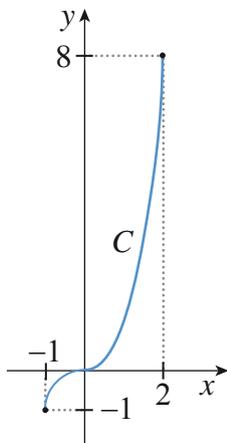


Figura 5.5

Exemplo 5.3: Calcule $\int_C y^2 dx - x^2 dy$, em que C é formada pelo arco de parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ seguido pelo segmento de reta horizontal de $(1,1)$ a $(3,1)$

A curva C está indicada na Figura 5.6.

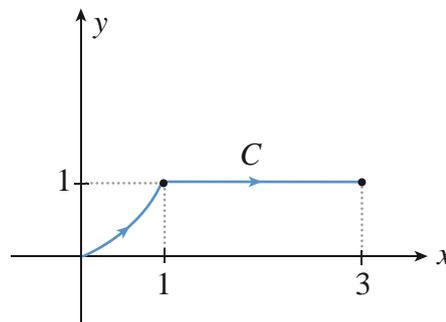


Figura 5.6

Solução:

Como C é suave por partes, expressamos a integral dada no exemplo como uma soma de integrais.

Simbolicamente, escrevemos

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2},$$

em que C_1 é o arco da parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ e C_2 é o segmento de reta de equação $y = 1$ de $(1,1)$ a $(1,3)$.

- Cálculo da integral sobre C_1 :

Utilizando x como parâmetro, temos $dy = 2x dx$.

$$\begin{aligned} \text{Assim, } \int_{C_1} y^2 dx - x^2 dy &= \int_0^1 x^4 dx - x^2 2x dx \\ &= \int_0^1 (x^4 - 2x^3) dx \\ &= \left(\frac{x^5}{5} - 2 \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = -\frac{3}{10}. \end{aligned}$$

- Cálculo da integral sobre C_2 :

Utilizando x como parâmetro e como $y = 1$, temos que $dy = 0$.

$$\text{Assim, } \int_{C_2} y^2 dx - x^2 dy = \int_1^3 1 dx - x^2 0 = \int_1^3 dx = x \Big|_1^3 = 2.$$

$$\text{Logo, } \int_C y^2 dx - x^2 dy = -\frac{3}{10} + 2 = \frac{17}{10}.$$

5.1.2 Cálculo de integrais de linha de campo escalar no espaço

Suponhamos agora que C seja uma curva espacial suave dada pelas equações paramétricas $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$; $a \leq t \leq b$ ou pela equação vetorial $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

Se f é uma função de três variáveis que é contínua em " C ", então definimos a integral de linha de f ao longo de C (com relação ao comprimento de arco) de modo semelhante ao feito para curvas planas.

$$\begin{aligned} \text{Assim, } \int_C f(x, y, z) ds &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta s \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Compactamente

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \left| \vec{r}'(t) \right| dt.$$

Para o caso especial quando $f(x, y, z) = 1$, temos

$$\int_C ds = \int_a^b \left| \vec{r}'(t) \right| dt = L,$$

em que L é o comprimento da curva C .

Como nas integrais de linha no plano, podemos calcular integrais de linha no espaço da forma

$$\int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

escrevendo x , y , z , dx , dy e dz em termos do parâmetro " t " ou escolhendo uma das variáveis, x , y ou z , como variável de integração.

Exemplo 5.4: Calcule $\int_C y \operatorname{sen}(z) ds$, em que C é a hélice circular dada pelas equações: $x = \cos(t)$; $y = \operatorname{sen}(t)$; $z = t$; $0 \leq t \leq 2\pi$.

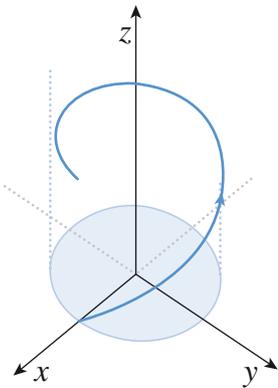


Figura 5.7

Solução:

$$\begin{aligned} \int_C y \operatorname{sen}(z) ds &= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t) \operatorname{sen}(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t) \sqrt{(-\operatorname{sen}(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t) dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(t - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

A Figura 5.7 ilustra a curva C .

Exemplo 5.5: Calcule a integral $\int_C y dx + z dy + x dz$, em que C é a curva definida pelas equações paramétricas $x = t$, $y = t^2$ e $z = t^3$ para $0 \leq t \leq 1$.

Solução:

$$\begin{aligned} \int_C y dx + z dy + x dz &= \int_0^1 t^2 \frac{dt}{dx} + t^3 \frac{2t dt}{dy} + t \frac{3t^2 dt}{dz} \\ &= \int_0^1 (t^2 + 2t^4 + 3t^3) dt \\ &= \left(\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^5}{5} + 3\frac{t^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{89}{60}. \end{aligned}$$

5.2 Integral de linha de campo vetorial

Definição 5.2. Seja \vec{f} um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva suave C definida por $\vec{r}(t)$; $a \leq t \leq b$.

A integral de linha de \vec{f} sobre C , denotada por $\int_C \vec{f} d\vec{r}$, é definida por

$$\int_C \vec{f} d\vec{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{f}(\vec{r}(t_i)) \cdot \vec{r}'(t_i) \Delta t_i.$$

A hipótese de continuidade garante que o limite sempre vai existir.

Assim,

$$\int_C \vec{f} d\vec{r} = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt. \quad (5.5)$$

Poderíamos atribuir algum significado físico para uma integral de linha de campo vetorial?

Suponhamos um campo vetorial $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$ atuando em cada ponto de uma curva suave C definida por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $a \leq t \leq b$, que varia tanto em magnitude quanto em direção. Veja a Figura 5.8.

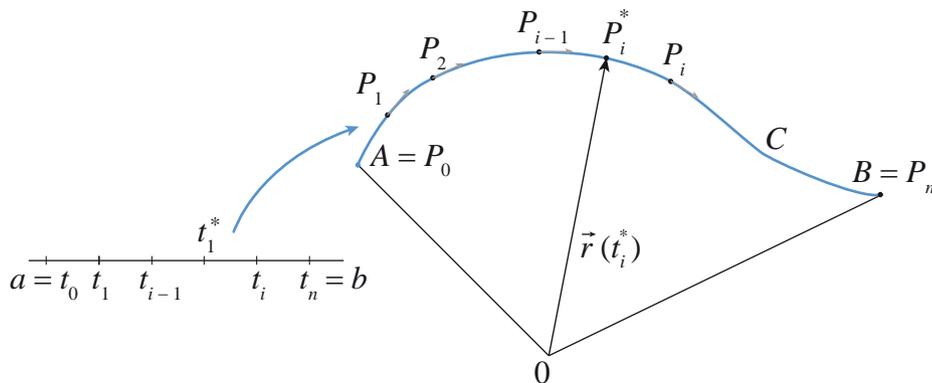


Figura 5.8

Poderíamos pensar em uma situação física na qual a trajetória de uma partícula submetida à força \vec{f} seria a curva C , que vai de A para B .

Sabemos que, se a partícula se desloca de A para B ao longo de uma linha reta, então o trabalho w feito por uma força constante \vec{f} é $w = \vec{f} \cdot \overline{AB}$, ou seja, é o produto escalar do vetor força \vec{f} pelo vetor \overline{AB} deslocamento.

Podemos usar essa informação para determinar o trabalho feito por \vec{f} ao longo da curva C .

Como mostra a Figura 5.8, a curva C foi dividida em subarcos $P_{i-1}P_i$ com comprimento Δs_i .

Destacamos da Figura 5.8 o arco $P_{i-1}P_i$ para melhorar o entendimento.

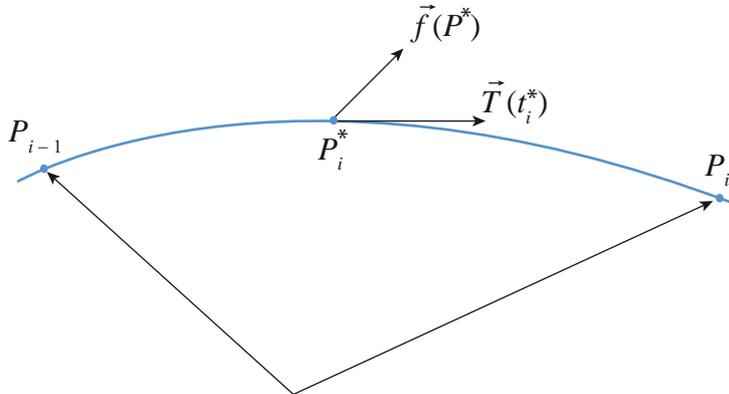


Figura 5.9

Seja $P_i^* = (x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ um ponto qualquer do arco $P_{i-1}P_i$ correspondendo ao valor do parâmetro

Como Δs_i é pequeno, o movimento da partícula de P_{i-1} para P_i em C se processa aproximadamente na direção de $\vec{T}(t_i^*)$, vetor tangente, unitário, a P_i^* .

Então, o trabalho w_i feito pela força \vec{f} para deslocar a partícula de P_{i-1} para P_i é

$$w_i = \vec{f}(P_i^*) \cdot (\Delta s_i \vec{T}(t_i^*))$$

e o trabalho w total executado para deslocar a partícula ao longo de C de A para B é

$$\begin{aligned} w &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \vec{f}(P_i^*) \cdot \vec{T}(t_i^*) \Delta s_i \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \vec{f}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \vec{T}(t_i^*) \Delta s_i. \end{aligned}$$

O trabalho w é o limite de uma soma de Riemann, então

$$w = \int_a^b \vec{f}(x, y, z) \cdot \vec{T} ds. \quad (5.6)$$

Se C é definida pela equação vetorial $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $a \leq t \leq b$, então $\vec{r}(t_i^*)$ é o vetor posição do ponto P_i^* , e o vetor tangente, unitário em P_i^* , é dado por $\frac{\vec{r}'(t_i^*)}{|\vec{r}'(t_i^*)|}$. Da equação (5.4), podemos escrever a equação (5.6) como

$$w = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} |\vec{r}'(t)| dt$$

$$w = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \vec{r}'(t) dt \quad (5.7)$$

Portanto, a integral de linha $\int_C \vec{f} d\vec{r}$ definida em (5.5) nos dá o **trabalho** realizado por uma força \vec{f} para deslocar uma partícula ao longo de uma curva.

Esta não é a única interpretação física possível para integrais de campos vetoriais conforme veremos no próximo capítulo.

Exemplo 5.6: Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{f}(x, y) = y\vec{i} + x\vec{j}$ newtons (N), ao longo da curva C , definida por $y = \ln x$ metros (m), do marco (1,0) m para o marco (e,1) m.

Solução:

Fazendo $x = t$, obtemos as equações paramétricas de C , dadas por $x = t$ e $y = \ln t$.

A equação vetorial de C é $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \ln t \vec{j}$, $1 \leq t \leq e$.

$$w = \int_1^e \vec{f}(\vec{r}(t)) \vec{r}'(t) dt$$

Como $\vec{f}(\vec{r}(t)) = \ln t \vec{i} + t \vec{j}$, $\vec{r}'(t) = \vec{i} + \frac{1}{t} \vec{j}$ e $\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = \ln t + 1$, temos

$$w = \int_1^e (\ln t + 1) dt$$

$$= (t \ln t - t) \Big|_1^e = 1 \text{ Nm.}$$

Exemplo 5.7: Calcule $\int_C \vec{f} d\vec{r}$ para $\vec{f}(x, y, z) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ ao longo da curva dada por $\vec{r}(t) = t^3\vec{i} + t^2\vec{j} + t\vec{k}$ para $1 \leq t \leq 3$.

Solução:

$$\int_C \vec{f} d\vec{r} = \int_1^3 \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

Como $\vec{f}(\vec{r}(t)) = t^2 t \vec{i} + t^3 t \vec{j} + t^3 t^2 \vec{k} = t^3 \vec{i} + t^4 \vec{j} + t^5 \vec{k}$,

$$\vec{r}'(t) = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + \vec{k} \text{ e}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(t))\vec{r}'(t) = 3t^5 + 2t^5 + t^5 = 6t^5, \text{ temos que}$$

$$\int_C \vec{f} d\vec{r} = \int_1^3 6t^5 dt = 6 \frac{t^6}{6} \Big|_1^3 = t^6 \Big|_1^3 = 728 .$$

Exemplo 5.8: Calcule $\int_C \vec{f} d\vec{r}$ para $\vec{f}(x, y) = 2xy\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$, sendo C o segmento de reta que vai da origem ao ponto $A(1,1)$.

Solução:

Primeiro vamos parametrizar C .

O vetor diretor de C é o vetor $\vec{OA} = (1,1)$, em que $O = (0,0)$.

Então, C pode ser definida pela equação vetorial $\vec{r}(t) = (0,0) + \vec{OA} t$, de onde temos que

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} \text{ para } 0 \leq t \leq 1.$$

Para $t = 0$, temos o ponto $O = (0,0)$ e para $t = 1$, temos o ponto $A(1,1)$.

Assim,

$$\int_C \vec{f} d\vec{r} = \int_0^1 \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt.$$

Como

$$\vec{f}(\vec{r}(t)) = 2t^2\vec{i} + 2t^2\vec{j}, \vec{r}'(t) = \vec{i} + \vec{j}$$

e

$$\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = 2t^2 + 2t^2 = 4t^2,$$

segue que

$$\int_C \vec{f} d\vec{r} = \int_0^1 4t^2 dt = 4 \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

Teorema 5.1 (Teorema Fundamental para Integrais de Linha). Seja C uma curva suave dada pela função vetorial $\vec{r}(t)$; $a \leq t \leq b$.

Seja U uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇U é contínuo em C . Então,

$$\int_C \nabla U d\vec{r} = U(\vec{r}(b)) - U(\vec{r}(a)).$$

O teorema nos diz que, para calcular a integral de linha de um campo vetorial conservativo ∇U sobre C , basta apenas o valor de U nos pontos terminais de C .

Demonstração:

Sejam $U = U(x, y, z)$ e $C : \{\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}; a \leq t \leq b\}$.

Então,

$$\begin{aligned} \int \nabla U d\vec{r} &= \int_a^b \nabla U \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d(U(\vec{r}(t)))}{dt} dt \\ &= U(\vec{r}(t)) \Big|_a^b = U(\vec{r}(b)) - U(\vec{r}(a)). \end{aligned}$$

Observação. Seja C um caminho unindo o ponto A ao ponto B . Se o ponto A tem $\vec{r}(a)$ como vetor posição e o ponto B tem $\vec{r}(b)$ como vetor posição, então:

$$\int_a^b \nabla U d\vec{r} = U(B) - U(A).$$

Exemplo 5.9: Calcule $\int_C \vec{f} d\vec{r}$ usando o Teorema Fundamental, em que $\vec{f}(x, y) = y\vec{i} + (x + 2y)\vec{j}$ e C é a semicircunferência, indicada na Figura 5.10, que começa em $(0,1)$ e termina em $(2,1)$.

Solução:

Veja a Figura 5.10, que representa a curva C .

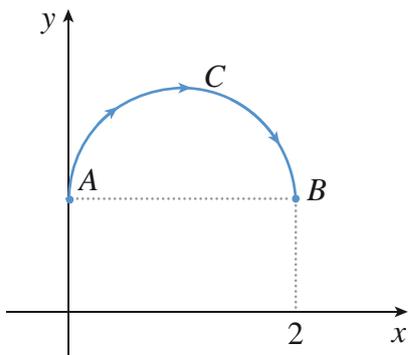


Figura 5.10

Alguns livros de Física chamam esse teorema de Teorema Trabalho-Energia $w = \Delta U$. Nesse caso, temos uma relação entre a variação da energia potencial gravitacional $\Delta U = U(B) - U(A)$, a função força gravitacional que é dada por ∇U e, como vimos anteriormente, o trabalho $w = \int_a^b \nabla U \cdot d\vec{r}$. Interpretando de uma forma geral, o gradiente de um campo escalar U representa a taxa de variação desse campo em uma determinada direção, assim, a integração dessa taxa de variação nos fornecerá a variação total.

Devemos encontrar, se possível, uma função $\phi(x, y)$, tal que $\nabla\phi(x, y) = \vec{f}(x, y)$.

$$\text{Já vimos que } \nabla\phi(x, y) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) = (y, (x+2y)).$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = y \Rightarrow \phi(x, y) = \int y dx = yx + c(y)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x + c'(y) = x + 2y \Rightarrow c'(y) = 2y \Rightarrow c(y) = y^2 + c.$$

Segue que $\phi(x, y) = yx + y^2 + c$.

$$\text{Assim, } \int_C \vec{f} d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A) = (2+1) - (0+1) = 2.$$

Exemplo 5.10: Calcule $\int_C \vec{f} d\vec{r}$ usando o Teorema Fundamental, em que $\vec{f}(x, y) = e^{2y}\vec{i} + (1+2xe^{2y})\vec{j}$ e C é definida por $\vec{r}(t) = te^t\vec{i} + (1+t)\vec{j}$; $0 \leq t \leq 1$.

Solução:

Devemos encontrar, se possível, uma função $\phi(x, y)$, tal que $\nabla\phi(x, y) = \vec{f}(x, y)$.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = e^{2y} \text{ e } \frac{\partial\phi}{\partial y} = 2e^{2y}x + c'(y) = 1 + 2xe^{2y}.$$

Segue que $c'(y) = 1 \Rightarrow c(y) = y + c$ e $\phi(x, y) = e^{2y}x + y + c$.

Então,

$$\int_C \vec{f} d\vec{r} = \phi(\vec{r}(1)) - \phi(\vec{r}(0)) = \phi(e, 2) - \phi(0, 1) = (e^5 + 2) - (1) = e^5 + 1.$$

$$\text{Logo, } \int_C \vec{f} d\vec{r} = e^5 + 1.$$

5.2.1 Independência do caminho

O valor de uma integral de linha geralmente depende da curva ou do caminho entre dois pontos A e B . Entretanto, há exceções.

Existem integrais de linha que são independentes do caminho entre A e B .

Exemplo 5.11: Calcule $\int_C ydx + xdy$, em que C :

a) é o segmento de reta que vai do ponto $(0,0)$ ao ponto $(1,1)$.

Solução:

C é definida na forma explícita pela equação $y = x$.

Utilizando x como parâmetro, temos $dy = dx$

$$\begin{aligned}\int_C ydx + xdy &= \int_0^1 xdx + xdx \\ &= \int_0^1 2xdx = 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 1.\end{aligned}$$

b) C é definida pela equação $y = x^3$, do ponto $(0,0)$ ao ponto $(1,1)$.

Solução:

Utilizando x como parâmetro, temos $dy = 3x^2 dx$

$$\begin{aligned}\int_C ydx + xdy &= \int_0^1 x^3 dx + x3x^2 dx \\ &= \int_0^1 4x^3 dx = 4 \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = 1.\end{aligned}$$

Concluimos que a integral $\int_C ydx + xdy$ tem o mesmo valor em cada caminho entre $(0,0)$ e $(1,1)$.

Nesse caso, é chamada integral independente do caminho.

A seguir vamos apresentar alguns resultados que garantem que uma integral é independente do caminho.

Teorema 5.2. A integral $\int_C \vec{f} d\vec{r}$ é independente do caminho em D se, e somente se, $\int_C \vec{f} d\vec{r} = 0$ para todo caminho fechado C em D .

Demonstração:

Sejam C_1 e C_2 dois caminhos quaisquer que unem os pontos A e B . Veja a Figura 5.11. Então, $C = C_1 \cup (-C_2)$ é um caminho fechado.

i) $\int_C \vec{f} d\vec{r}$ é independente do caminho $\Rightarrow \int_C \vec{f} d\vec{r} = 0$ (curva C fechada).

Esse teorema pode ser interpretado fisicamente da seguinte forma: Para dizermos que o trabalho realizado por uma determinada força independe do caminho, então o trabalho realizado por essa força deve ser nulo no deslocamento de uma partícula por qualquer caminho que retorne ao ponto inicial.

Por hipótese $\int_{C_1} \vec{f} d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{f} d\vec{r}$, então

$$\int_C \vec{f} d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{f} d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{f} d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{f} d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{f} d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{f} d\vec{r} - \int_{C_1} \vec{f} d\vec{r} = 0.$$

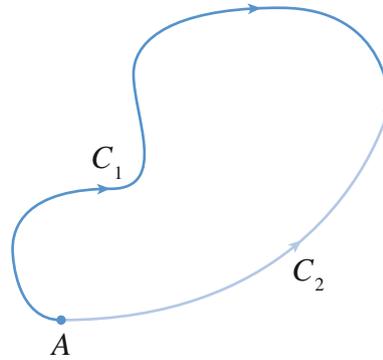


Figura 5.11

Observação: Se "C" é uma curva fechada, representa-se a $\int_C \vec{f} d\vec{r}$ por $\oint_C \vec{f} d\vec{r}$.

ii) Temos $\oint_C \vec{f} d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int_C \vec{f} d\vec{r}$ é independente do caminho.

$$0 = \int_C \vec{f} d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{f} d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{f} d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{f} d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{f} d\vec{r}$$

Logo, $\int_{C_1} \vec{f} d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{f} d\vec{r}$ e, então, $\int_C \vec{f} d\vec{r}$ é independente do caminho.

Reveja a Definição 3.7 no
Capítulo 3.

Teorema 5.3. Se \vec{f} é um campo vetorial contínuo e em um domínio conexo D são equivalentes as três afirmativas que seguem:

- i) \vec{f} é o gradiente de uma função ϕ em D , ou seja, \vec{f} é conservativo em D .
- ii) A integral de linha de \vec{f} é independente do caminho de integração D .
- iii) A integral de linha de \vec{f} ao redor de todo caminho fechado simples em D é igual a zero.

Exemplo 5.12: Mostre que a integral

$\int_C (2y^2 - 12x^3y^3)dx + (4xy - 9x^4y^2)dy$ é independente do caminho e calcule essa integral, sendo C qualquer caminho de (1,1) a (3,2).

Solução:

$$\int_C \bar{f} d\bar{r} = \int_C f_1 dx + f_2 dy,$$

em que

$$\bar{f} = (f_1, f_2).$$

Nesse caso, $\bar{f}(x, y) = (2y^2 - 12x^3y^3)\bar{i} + (4xy - 9x^4y^2)\bar{j}$, $D(\bar{f}) = \mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo (não contém buracos).

Verificando se o campo \bar{f} é conservativo:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 4y - 36x^3y^2; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 4y - 36x^3y^2;$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \Rightarrow \bar{f} \text{ é conservativo.}$$

Então, existe uma função $\phi(x, y)$, tal que $\nabla\phi(x, y) = \bar{f}(x, y)$.

Portanto, pelo Teorema 5.3, $\int_C (2y^2 - 12x^3y^3)dx + (4xy - 9x^4y^2)dy$ é independente do caminho em \mathbb{R}^2 .

Vamos encontrar a função $\phi(x, y)$ e usar o Teorema Fundamental para integrais de linha.

$$\nabla\phi(x, y) = \bar{f}(x, y) \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x} = 2y^2 - 12x^3y^3 \text{ e } \frac{\partial\phi}{\partial y} = 4xy - 9x^4y^2.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} = 2y^2 - 12x^3y^3 &\Rightarrow \phi(x, y) = \int (2y^2 - 12x^3y^3)dx \\ &= 2y^2x - 3x^4y^3 + c(y) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 4xy - 9x^4y^2 + c'(y) = 4xy - 9x^4y^2.$$

Então, $c'(y) = 0$ e $c(y) = k$ (constante).

Assim, $\phi(x, y) = (2y^2x - 3x^4y^3) + k$ e

$$\int_C (2y^2 - 12x^3y^3)dx + (4xy - 9x^4y^2)dy = \phi(3, 2) - \phi(1, 1) = 1920 + 1 = 1921.$$

Exemplo 5.13: Mostre que

$$\int_C (y + yz)dx + (x + 3z^3 + xz)dy + (9yz^2 + xy - 1)dz$$

é independente do caminho entre os pontos $(1, 1, 1)$ e $(2, 1, 4)$ e calcule a integral.

Solução:

O campo vetorial nesse exemplo é

$$\bar{f}(x, y, z) = (y + yz, x + 3z^3 + xz, 9yz^2 + xy - 1).$$

$D(\bar{f}) = \mathbb{R}^3$ é simplesmente conexo.

Seendo $f_1 = y + yz$, $f_2 = x + 3z^3 + xz$ e $f_3 = 9yz^2 + xy - 1$, segue que

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 1 + z, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = y, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 1 + z,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = 9z^2 + x, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y} = 9z^2 + x.$$

Como $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x}$, $\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y}$ e $D(\bar{f})$ é simplesmente conexo, temos que \bar{f} é um campo conservativo.

Portanto, existe uma função $\phi(x, y, z)$, tal que

$$\nabla\phi(x, y, z) = \bar{f}(x, y, z).$$

Vamos encontrar a função $\phi(x, y, z)$ e aplicar o Teorema Fundamental para integrais de linha para calcular a integral indicada no exemplo.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = f_1 = y + yz \Rightarrow$$

$$\phi(x, y, z) = \int (y + yz)dx$$

$$\phi(x, y, z) = (y + yz)x + c(y, z) \quad (*)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = (1 + z)x + \frac{\partial c}{\partial y}(y, z) = f_2 = x + 3z^3 + xz$$

$$\frac{\partial c}{\partial y}(y, z) = 3z^3$$

$$c(y, z) = 3 \int z^3 dy = 3z^3 y + c(z). \quad (**)$$

Substituindo (**) em (*), temos

$$\phi(x, y, z) = (y + yz)x + 3z^3y + c(z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = yx + 9z^2y + c'(z) = f_3 = 9yz^2 + xy - 1$$

$$c'(z) = -1 \Rightarrow c(z) = -z + c.$$

Assim, $\phi(x, y, z) = (y + yz)x + 9z^3y - z + c$

$$\int_C (y + yz)dx + (x + 3z^3 + xz)dy + (9yz^2 + xy - 1)dz = \phi(2, 1, 4) - \phi(1, 1, 1) = 198 - 4 = 194.$$

Exemplo 5.14: Verifique se $\oint_C \vec{f} d\vec{r}$ é independente do caminho para

$$\vec{f} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$
 e calcule a integral considerando C com

sendo a circunferência centrada na origem e com raio $r = 2$, no sentido anti-horário.

Solução:

$D(\vec{f}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\}$ e C é definida pela equação $x^2 + y^2 = 4$. C está sempre contida num domínio que contém a origem. Veja a Figura 5.12.

As funções $f_1 = \frac{y}{x^2 + y^2}$ e $f_2 = -\frac{x}{x^2 + y^2}$ não são contínuas num

domínio que contém a origem. Nesse caso, não podemos aplicar o Teorema 5.3.

Vamos parametrizar C e calcular a integral indicada pela definição

$$\oint_C \vec{f} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

$$C : \{\vec{r}(t) = 4\cos(t)\vec{i} + 4\sin(t)\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.\}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(t)) = \left(\frac{\sin(t)}{4}, -\frac{\cos(t)}{4} \right)$$

$$\vec{r}'(t) = -4\sin(t)\vec{i} + 4\cos(t)\vec{j}$$

$$\int_C \vec{f} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin^2(t) - \cos^2(t)) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -(\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} dt = -t \Big|_0^{2\pi} = -2\pi.$$

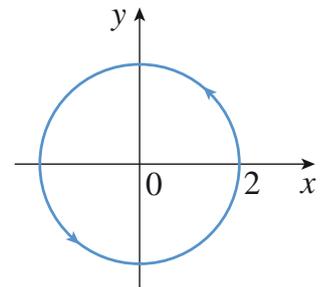


Figura 5.12

Como $\oint_C \vec{f} d\vec{r} \neq 0$, temos que $\oint_C \vec{f} d\vec{r}$ é dependente do caminho em um domínio que contém a origem (foi usada a negação do Teorema 5.3).

Exemplo 5.15: Calcule $\oint_C (2xy + 4)dx + (x^2 + y^2)dy + 2zydz$, sendo C definida por $\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + \pi\vec{k}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solução:

Temos que $D(f) = \mathbb{R}^3$, ou seja, o domínio é simplesmente conexo.

Do enunciado temos $f_1 = 2xy + 4$, $f_2 = x^2 + y^2$, $f_3 = 2zy$, assim:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_3}{\partial y} = 2z.$$

são contínuas no domínio de f .

Como $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_3}{\partial x}$ e $\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y}$, temos que \vec{f} é conservativo.

Portanto, se \vec{f} é conservativo, pelo Teorema 5.3,

$$\oint_C (2xy + 4)dx + (x^2 + y^2)dy + (2zy)dz = 0.$$

5.2.2 Teorema de Green

Um dos teoremas mais importantes no cálculo vetorial relaciona uma integral de linha em termo de uma curva fechada simples, suave por partes, a uma integral dupla sobre a região limitada pela curva.

Teorema 5.4 (Teorema de Green). Suponha que C seja uma curva fechada simples, suave por partes, limitada em uma região R . Se

f_1 , f_2 , $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ e $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ forem contínuas em R , então,

$$\oint_C f_1 dx + f_2 dy = \iint_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA.$$

Exemplo 5.16: Calcule $\oint_C (x^2 - y^2)dx + (2y - x)dy$ aplicando o Teore-

ma de Green, em que C consiste no contorno da região, no primeiro quadrante, que está limitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = x^3$.

Solução:

C é uma curva suave por partes. Veja a Figura 5.13.

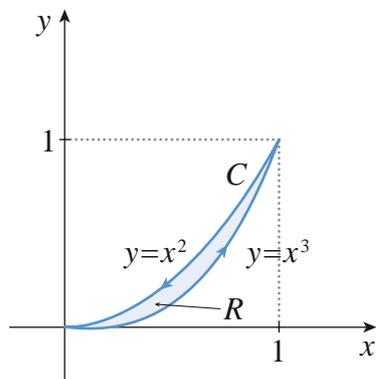


Figura 5.13

$$R = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 \leq y \leq x^2 \end{cases}$$

Como as funções $f_1 = x^2 - y^2$, $f_2 = 2y - x$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = -2y$ e $\frac{\partial f_2}{\partial x} = -1$ são contínuas, podemos aplicar o Teorema de Green para calcular a integral indicada.

$$\begin{aligned} \oint_C (x^2 - y^2)dx + (2y - x)dy &= \iint_R (-1 + 2y)dA \\ &= \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (-1 + 2y)dydx \\ &= \int_0^1 \left(-y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^3}^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 [(-x^2 + x^4) - (-x^3 + x^6)]dx \\ &= \int_0^1 [-x^2 + x^4 + x^3 - x^6]dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = -\frac{11}{420}. \end{aligned}$$

Corolário 5.1 (Corolário do Teorema de Green). A área A da região R delimitada pela curva fechada simples, suave por partes, C é dada por

$$A = \oint_C xdy \quad \text{ou} \quad A = \oint_C -ydx.$$

Demonstração:

Sejam R e C como no Teorema de Green.

$$\text{Se } \vec{f} = x\vec{j}, \text{ então } \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial x} = 1 \text{ e } \oint_C xdy = \iint_R 1dA = A.$$

$$\text{Se } \vec{f} = -y\vec{i}, \text{ então } \frac{\partial f_1}{\partial y} = -1, \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \text{ e } \oint_C -ydx = \iint_R 1dA = A.$$

Exemplo 5.17: Seja C o contorno da região R que está limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4x$. Calcule a área de R aplicando o Teorema de Green.

Solução:

A curva C é a união das curvas C_1 , definida por $y = x^2$, e C_2 , definida por $y = 4x$.

Veja a Figura 5.14.

$$A = \oint_C -ydx = \int_{C_1} -ydx + \int_{C_2} -ydx$$

Para C_1 , temos:

$$\int_{C_1} -ydx = \int_0^4 -x^2 dx = -\frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = -\frac{64}{3}.$$

Para C_2 , temos:

$$\int_{C_2} -ydx = \int_0^4 -4x dx = 4 \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 32$$

$$A = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{32}{3}.$$

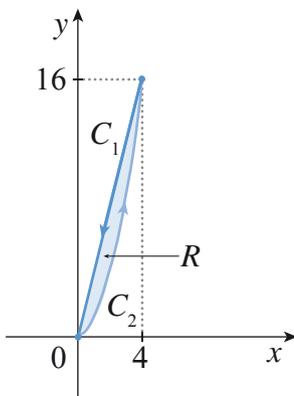


Figura 5.14

5.2.3 Teorema de Green para regiões com "buracos"

Seja R uma região com "buracos", isto é, uma região limitada entre duas ou mais curvas fechadas simples, suaves por parte.

Sejam C a curva definida por $C = C_1 \cup C_2$ e R a região delimitada pelas curvas C_1 e C_2 (veja a Figura 5.15a). A curva C_1 está orientada no sentido anti-horário e C_2 está orientada no sentido horário. Dessa forma, a região R permanece à esquerda quando percorremos a curva C .

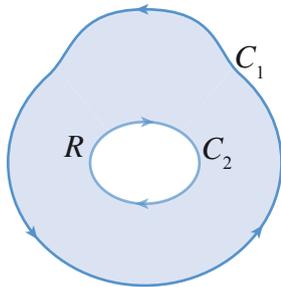


Figura 5.15a

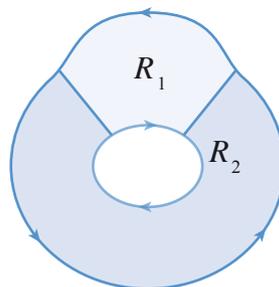


Figura 5.15b

Aplicando o Teorema de Green a cada uma das regiões, conforme a Figura 5.15b, temos

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA &= \iint_{R_1} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA + \iint_{R_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA \\ &= \oint_{C_1} f_1 dx + f_2 dy + \oint_{C_2} f_1 dx + f_2 dy \\ &= \oint_C f_1 dx + f_2 dy. \end{aligned}$$

Esse resultado é válido, pois as integrais de linhas opostas, ao longo dos dois cortes, se cancelam.

Exemplo 5.18: Calcule $\oint_C (4x^2 - y^3)dx + (x^3 + y^2)dy$ aplicando o Teore-

ma de Green, em que C é a região delimitada pelas curvas $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Solução:

Seja R a região delimitada pelas curvas $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Veja a Figura 5.16.

Como as funções $f_1 = 4x^2 - y^3$, $f_2 = x^3 + y^2$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 3x^2$ e $\frac{\partial f_1}{\partial y} = -3y^2$ são contínuas em R , podemos aplicar o Teorema de Green.

$$\begin{aligned} I &= \oint_C (x^2 - y^3)dx + (x^3 + y^2)dy = \iint_R (3x^2 - (-3y^2))dA \\ &= \iint_R (3x^2 + 3y^2)dA. \end{aligned}$$

Vamos calcular I em coordenadas polares.

Em coordenadas polares, R é definida por $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $1 \leq r \leq 2$.

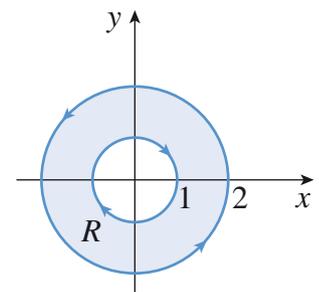


Figura 5.16

Assim,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 (3r^2 \cos^2(\theta) + 3r^2 \sin^2(\theta)) r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 [3r^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) r] dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 3r^3 dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left. \frac{3r^4}{4} \right|_1^2 d\theta \\
 \int_0^{2\pi} \frac{45}{4} d\theta &= \frac{45}{4} \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{45\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 5.19: Suponha que C seja uma curva fechada simples, suave por partes, envolvendo a origem.

Mostre que $\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 2\pi$ e que essa integral é zero se C não envolve a origem.

Solução:

1º) Considere C uma curva fechada simples, suave por partes, que não envolve a origem.

As funções $f_1 = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $f_2 = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$

e $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ são contínuas na região R , delimitada por C .

Então, $\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \iint_R 0 dA = 0$.

2º) Considere C uma curva fechada simples, suave por partes, contendo a origem.

Nesse caso, envolvemos a origem em um círculo C_a de raio a que esteja inteiramente contido em C . Veja a Figura 5.17.

Seja R a região delimitada entre C e C_a .

Aplicando o Teorema de Green sobre R , temos que

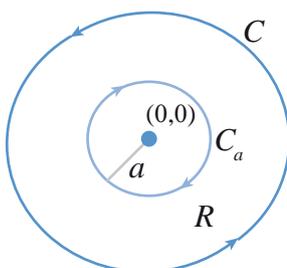


Figura 5.17

$$\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy + \oint_{C_a} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \iint_R 0 dA = 0.$$

$$\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = -\oint_{C_a} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \quad (***)$$

Parametrizando C_a e resolvendo a integral do 2º lado da igualdade (***), temos que

$$\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 2\pi.$$

Consequência do Exemplo 5.19. Sejam C_1 e C_2 dois caminhos fechados simples, suaves por partes, que não se interceptam e que tenham a mesma orientação anti-horária.

Supor que $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ na região R contida entre C_1 e C_2 , então

$$\oint_{C_1} f_1 dx + f_2 dy = \oint_{C_2} f_1 dx + f_2 dy.$$

Isso quer dizer que, em muitos casos, podemos substituir um caminho fechado complicado por um caminho fechado simples, satisfazendo as condições anteriormente citadas.

Resumo

Neste capítulo, foi apresentada a definição de integral de linha de campo escalar e de campo vetorial.

Após algumas observações e teoremas, que facilitam o cálculo de uma integral de linha, foi apresentado o Teorema de Green, um dos importantes teoremas do Cálculo Vetorial.

Lembre-se de que o Teorema de Green relaciona uma integral de linha ao longo de uma curva fechada C com uma integral dupla sobre a região delimitada por esta curva.

Exercícios propostos

Calcule a integral de linha indicada sobre a curva dada.

- 1) $\int_C (x^2 + xy)dx + (y^2 - xy)dy$, sendo C o segmento de reta que une a origem ao ponto $(2,2)$.
- 2) $\int_C ydx + xdy$, sendo C a curva definida por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$ para $0 \leq t \leq 1$.
- 3) $\int_C 2xyds$, sendo C o arco da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ de $(2,0)$ a $(1, \sqrt{3})$.
- 4) $\int_C 2xydx + (6y^2 - xz)dy + 10zdz$, sendo C constituída pelos segmentos de reta da origem ao ponto $(0,0,1)$, de $(0,0,1)$ ao ponto $(0,1,1)$ e de $(0,1,1)$ a $(1,1,1)$.
- 5) $\int_C (xy + x^2)dx + x^2dy$, sendo C o arco da parábola $y = 2x^2$, da origem ao ponto $(1,2)$.
- 6) $\int_C xzds$, em que C é a intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ como o plano $x = y$.
- 7) Determine o trabalho realizado pela força $\vec{f}(x, y) = (x + 2y)\vec{i} + (6y - 2x)\vec{j}$ que atua sobre uma partícula que percorre uma vez, no sentido anti-horário, as extremidades do triângulo de vértices $(1,1)$, $(3,1)$, $(3,2)$.
- 8) Determine o trabalho realizado por uma força constante $\vec{f}(x, y) = a\vec{i} + b\vec{j}$ que atua sobre uma partícula que percorre uma vez, no sentido anti-horário, o círculo descrito por $x^2 + y^2 = 9$.
- 9) Calcule $\int_C \vec{f} d\vec{r}$ para:
 - a) $\vec{f}(x, y) = (x, y)$, sendo C a curva dada por $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + t^3\vec{j}$, $t \in [-1, 1]$.

b) $\vec{f}(x, y, z) = (y, -x, z)$, sendo C a curva dada por $x = \sin(t)$, $y = \cos(t)$, $z = 2t$ para $0 \leq t \leq \pi$.

c) $\vec{f}(x, y) = (x^2y, xz)$, sendo C o arco de parábola $x = y^2$ do ponto $(0,0)$ ao ponto $(4,2)$.

10) Mostre que as integrais são independentes do caminho e determine seus valores.

a) $\int_{(0,0)}^{(2,2)} x^2 dx + y^2 dy$

b) $\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} (2x \sin(z) dx + (z^3 - e^y) dy + (x^2 \cos(z) + 3yz^2) dz)$

c) $\int_{(1,1,\ln 3)}^{2,2,\ln 3} e^{2z} dx + 3y^{2dy} + 2xe^{2z} dz$

11) Use o Teorema de Green para calcular as integrais:

a) $\oint_C y^2 dx + (2x - 3y) dy$, em que C é o círculo $x^2 + y^2 = 9$.

b) $\oint_C (y + e^x) dx + (2x^2 + \cos(y)) dy$, em que C é a fronteira do triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ e $(2,0)$.

c) $\oint_C \frac{1}{3} y^3 dx + (xy + xy^3) dy$, em que C é o contorno da região no primeiro quadrante, determinada pelos gráficos $y = 0$, $x = y^2$ e $x = 1 - y^2$.

d) $\oint_C (x + y) dx + xy dy$, em que C é a curva fechada determinada pelo eixo dos x , pela reta $x = 2$ e pela curva $4y = x^3$.

12) Ache a área da região indicada aplicando o corolário do Teorema de Green.

a) A região delimitada por $y = x^2$ e $y = x^3$.

b) A região delimitada pela hipocicloide de equações paramétricas $x = \cos^3(t)$, $y = \sin^3(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

- c) A região que tem por fronteira o quadrilátero com vértices $(0,0)$, $(4,0)$, $(3,2)$ e $(1,1)$.
- d) A região delimitada pela elipse $x = 6\cos(\theta)$ e $y = 2\sin(\theta)$.

Respostas

1. $\frac{16}{3}$

2. 1

3. 6

4. 8

5. $\frac{11}{6}$

6. 0

7. -4

8. 0

9. a) $\frac{6}{5}$ b) $\pi + 2\pi^2$ c) $\frac{284}{7}$

10. a) $\frac{16}{3}$ b) $\sin(3) - \sin(1) - e^2 + e + 53$ c) 16

11. a) 18π b) 3 c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{4}$

12. a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{3\pi}{8}$ c) $\frac{2}{5}(2\sqrt{2}-1)$ d) 12π

Capítulo 6

Integrais de superfície

Capítulo 6

Integrais de superfície

Neste capítulo, apresentaremos a definição de integral de superfície de campo escalar e de campo vetorial.

Se o campo vetorial representa a velocidade da corrente de um fluido, sua integral de superfície nos dá a qual taxa o fluido está passando através da superfície. Essa taxa é chamada fluxo do fluido através da superfície.

Como no cálculo de integrais de linha, precisamos de vários resultados, que serão apresentados em teoremas e observações, para o cálculo de uma integral de superfície.

Finalizamos este capítulo com dois teoremas importantes no Cálculo Vetorial, que são: Teorema de Stokes e Teorema de Gauss.

6.1 Introdução

Uma integral de superfície é, para as superfícies no espaço, o que uma integral curvilínea é para as curvas no plano.

Em muitos problemas, a superfície é definida na forma vetorial $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$, em que (u, v) pertence a uma região R .

As equações $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$ são as equações paramétricas da superfície.

Antes de iniciarmos o cálculo da integral de superfície, vamos apresentar a parametrização de algumas superfícies.

6.2 Parametrização de algumas superfícies

Seja R uma região limitada, fechada, conexa do \mathbb{R}^3 . Sejam $x(u,v)$, $y(u,v)$ e $z(u,v)$ funções reais contínuas e definidas em R .

Considere S uma superfície definida pela equação vetorial $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$, com $(u,v) \in R$.

Cada ponto de S tem como vetor posição o vetor $\vec{r}(u,v)$. Veja a Figura 6.1.

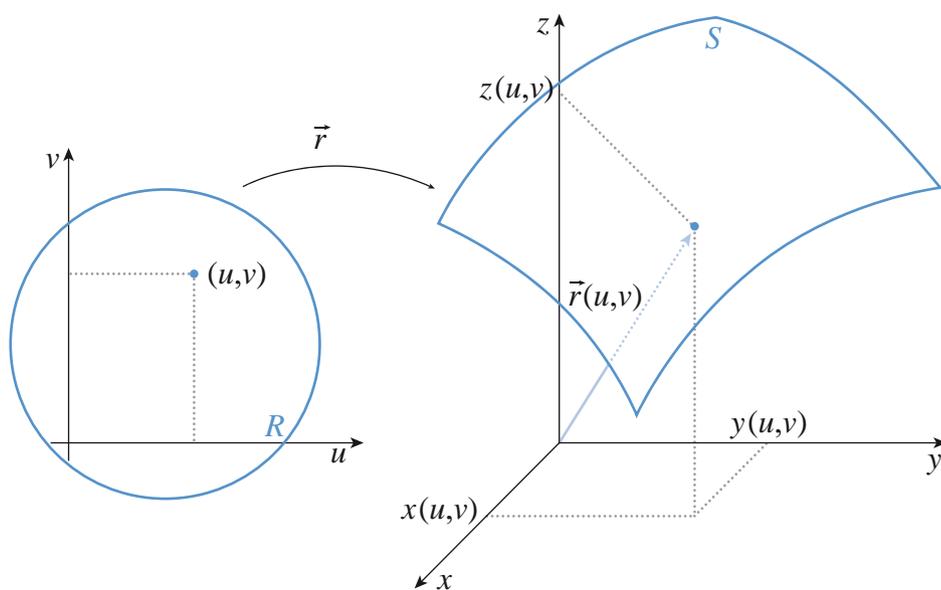


Figura 6.1

Exemplo 6.1: Parametrize a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$).

Solução:

Nesse caso, tomamos

$$\begin{cases} x = a \cdot \text{sen}(v) \cdot \cos(u) \\ y = a \cdot \text{sen}(v) \cdot \text{sen}(u), \text{ com } 0 \leq u \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}. \\ z = a \cdot \cos(v) \end{cases}$$

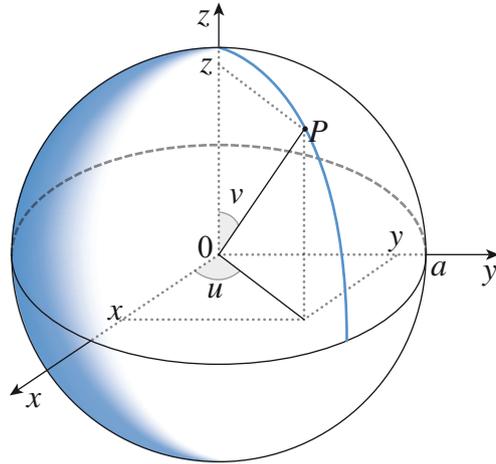


Figura 6.2

Exemplo 6.2: Parametrize o cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$).

Solução:

Tomamos

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos(u) \\ y = a \cdot \text{sen}(u), \text{ com } 0 \leq u \leq 2\pi \text{ e } v \in (-\infty, +\infty). \\ z = v \end{cases}$$

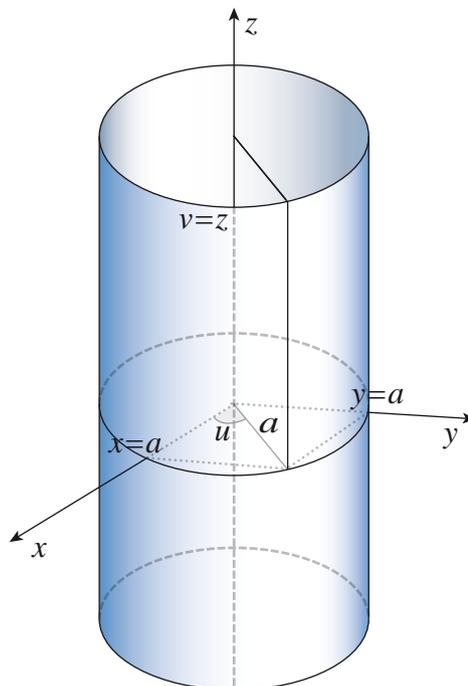


Figura 6.3

Exemplo 6.3: Parametrize o parabolóide $z = ax^2 + ay^2$ ($a > 0$).

Solução:

Tomamos

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = au^2 + av^2 \end{cases}, \text{ com } u, v \in \mathbb{R}.$$

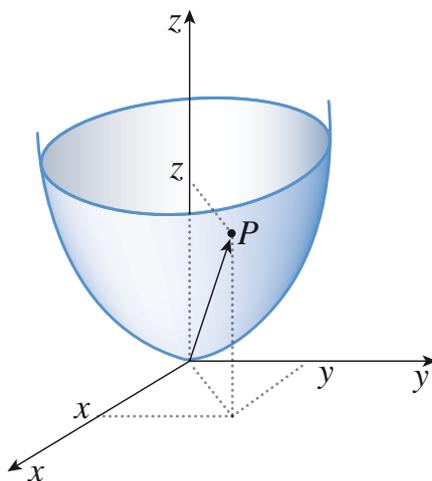


Figura 6.4

Observação 6.1. Se a superfície S for o gráfico de uma função $z = z(x, y)$, definida em uma região R do plano xy , as variáveis x e y sempre podem ser tomadas como parâmetros.

Uma parametrização para essa superfície é dada por $\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x, y)\vec{k}$, com $(x, y) \in R$.

A região R é a projeção de S sobre o plano xy .

Exemplo 6.4: Ache uma parametrização para a superfície S , sendo esta o parabolóide definido por $z = x^2 + y^2$ para $z \leq 4$.

Solução:

Uma parametrização de S é dada por $\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$, com $(x, y) \in R$, em que R é o círculo definido por $x^2 + y^2 \leq 4$.

Veja a Figura 6.5.

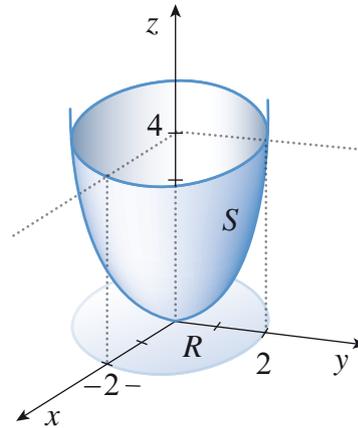


Figura 6.5

6.3 Integral de superfície de campo escalar

Quando falamos em *superfícies suaves*, estamos nos referindo a superfícies contínuas em uma determinada região R , ou seja, que estejam definidas para todos os pontos de uma região R e que não contenham picos.

Definição 6.1. Sejam S uma *superfície suave* e f um campo escalar definido e limitado sobre S .

Dividimos S em retalhos com área ΔS_{ij} .

Seja P_{ij}^* um ponto de cada retalho sobre S . Veja a Figura 6.6.

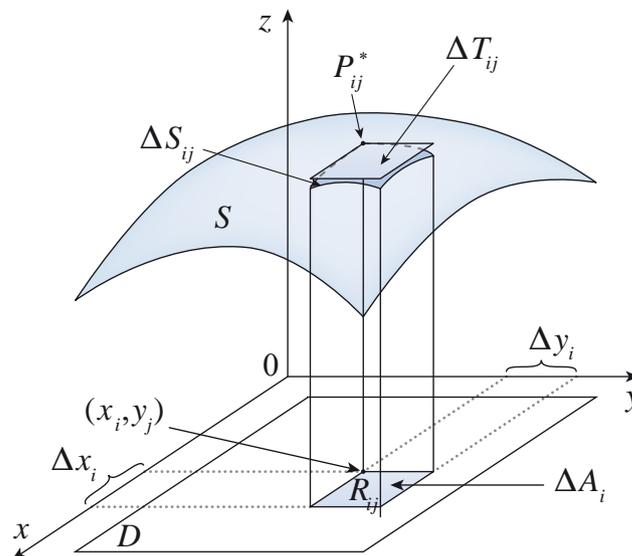


Figura 6.6

A integral de superfície de f sobre S , denotada por $\iint_S f(x, y, z) dS$, é definida por

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{m, n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(P_{ij}^*) \cdot \Delta S_{ij}. \quad (6.1)$$

A expressão ΔS_{ij} depende de como a superfície S é definida, na forma explícita $z = g(x, y)$ ou na forma vetorial $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$.

6.3.1 Integral de superfície de campo escalar com S definida na forma explícita

Seja S definida na forma explícita $z = g(x, y)$.

O retalho S_{ij} está diretamente acima do retângulo R_{ij} e o ponto

$$P_{ij}^* = (x_i^*, y_i^*, z(x_i^*, y_i^*)).$$

O plano tangente à S em P_{ij}^* é uma aproximação de S perto do ponto P_{ij}^* .

A área T_{ij} da parte desse plano tangente (um paralelogramo) que está diretamente acima de R_{ij} é uma aproximação de ΔS_{ij} .

$$\text{Assim, } \Delta S_{ij} \approx \Delta T_{ij} = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_i^*, y_i^*)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x_i^*, y_i^*)\right)^2 + 1} \cdot \Delta A_{ij}.$$

Se f é contínua sobre S e g tem derivadas parciais contínuas, então

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{m, n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(P_{ij}^*) \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_i^*, y_i^*)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x_i^*, y_i^*)\right)^2 + 1} \cdot \Delta A_{ij}$$

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_R f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \cdot dA,$$

em que R é a projeção de S sobre o plano xy .

Exemplo 6.5: Calcule $\iint_S x^2 y z dS$, em que S é a porção do plano $z = 1 + 2x + 3y$, definida para todos os pontos que estão dentro do retângulo, definido por $0 \leq x \leq 3$ e $0 \leq y \leq 2$.

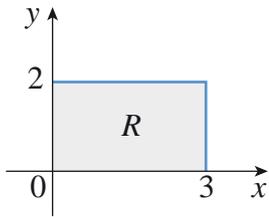


Figura 6.7

Solução:

S está definida na forma explícita $z = 1 + 2x + 3y$. R é a projeção de S sobre o plano xy , que, nesse exemplo, é o retângulo definido por $0 \leq x \leq 3$ e $0 \leq y \leq 2$. Veja a Figura 6.7.

$$R: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases} \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 y z \, dS &= \iint_R x^2 y (1 + 2x + 3y) \sqrt{1 + 4 + 9} \, dA \\ &= \sqrt{14} \int_0^3 \int_0^2 (x^2 y + 2x^3 y + 3x^2 y^2) \, dy \, dx \\ &= \sqrt{14} \int_0^3 \left(x^2 \frac{y^2}{2} + 2x^3 \frac{y^2}{2} + 3x^2 \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^2 \, dx \\ &= \sqrt{14} \int_0^3 (2x^2 + 4x^3 + 8x^2) \, dx \\ &= \sqrt{14} \int_0^3 (10x^2 + 4x^3) \, dx \\ &= 171\sqrt{14}. \end{aligned}$$

Exemplo 6.6: Calcule $\iint_S y^2 z^2 \, dS$, sendo S a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que fica entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.

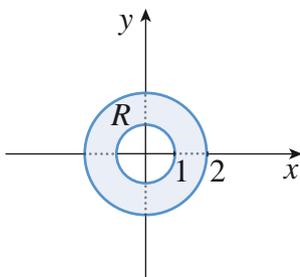


Figura 6.8

Solução:

Para $z = 1$, temos $1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x^2 + y^2 = 1$.

Para $z = 2$, temos $2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Assim, R , que é a projeção de S sobre o plano xy , é definida por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}. \text{ Veja a Figura 6.8.}$$

Como R é uma região circular, vamos resolver o exemplo em coordenadas polares.

$$\text{Então, } R: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1 \leq r \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\iint_S y^2 z^2 dS &= \iint_R y^2 (\sqrt{x^2 + y^2})^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^2 r r^2 \sin^2(\theta) r^2 \sqrt{1 + \frac{r^2 \cos^2(\theta)}{r^2} + \frac{r^2 \sin^2(\theta)}{r^2}} dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^5 \sin^2(\theta) \sqrt{2} dr d\theta \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \cdot \frac{r^6}{6} \Big|_1^2 d\theta \\
&= \frac{63\sqrt{2}}{6} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \\
&= \frac{63\sqrt{2}}{6} \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{63\sqrt{2}}{6} (\pi - 0) \\
&= \frac{63\sqrt{2}}{6} \pi \\
&= \frac{21\sqrt{2}}{2} \pi.
\end{aligned}$$

6.3.2 Integral de superfície de campo escalar com a superfície S definida na forma vetorial

Seja S uma superfície definida na forma vetorial

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k},$$

com $(u, v) \in R$.

Dividimos S em retalhos S_{ij} com área ΔS_{ij} .

Como já foi comentado, a área ΔS_{ij} pode ser aproximada pela área T_{ij} , que é a área da porção do plano tangente à S em P_{ij} . Veja a Figura 6.9.

Suponha que $\vec{r}(u_i^*, v_j^*)$ seja o vetor posição do ponto P_{ij}^* .

Os vetores $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_i^*, v_j^*)$ e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_i^*, v_j^*)$ são tangentes à S em P_{ij}^* . Conforme pode ser observado na Figura 6.9.

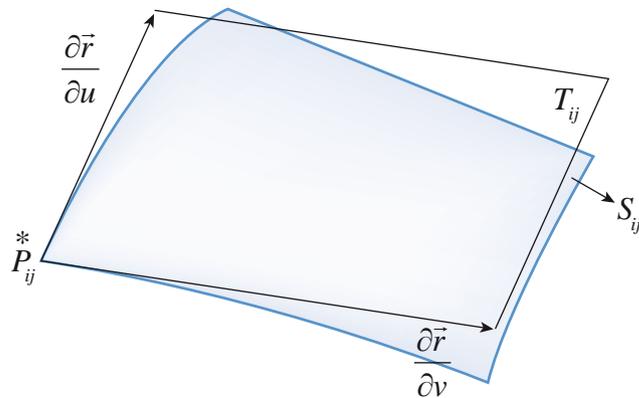


Figura 6.9

Agora vamos definir a área T_{ij} como sendo a área do paralelogramo definida pelos vetores $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_i^*, v_j^*) \cdot \Delta u$ e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_i^*, v_j^*) \cdot \Delta v$.

$$\begin{aligned} \text{Então, } T_{ij} &= \left| \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_i^*, v_j^*) \Delta u \right) \times \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_i^*, v_j^*) \Delta v \right) \right| \\ T_{ij} &= \left| \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_i^*, v_j^*) \right) \times \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_i^*, v_j^*) \right) \right| \Delta u \cdot \Delta v \quad (6.2) \\ \Delta S_{ij} &\approx T_{ij}. \end{aligned}$$

Substituindo (6.2) em (6.1), encontramos a definição de integral de superfície para S na forma vetorial, que é dada por

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS &= \lim_{m, n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\vec{r}(u_i^*, v_j^*)) \cdot \left| \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_i^*, v_j^*) \right) \times \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_i^*, v_j^*) \right) \right| \Delta u \cdot \Delta v \\ \iint_S f(x, y, z) dS &= \iint_R f(\vec{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \cdot du dv \\ &= \iint_R f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \cdot du dv. \end{aligned}$$

Exemplo 6.7: Calcule $\iint_S \sqrt{1+x^2+y^2} dS$, em que S é a superfície da equação vetorial $\vec{r}(u, v) = u \cos(v) \vec{i} + u \sin(v) \vec{j} + v \vec{k}$ com $0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq \pi$.

Solução:

O campo escalar aplicado em cada ponto de S é definido por $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \sqrt{1+u^2 \cos^2(v) + u^2 \sin^2(v)} = \sqrt{1+u^2}$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \operatorname{sen}(v)\vec{i} - \cos(v)\vec{j} + u\vec{k}.$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{1+u^2}$$

$$\begin{aligned} \iint_S \sqrt{1+x^2+y^2} dS &= \int_0^1 \int_0^\pi \sqrt{1+u^2} \cdot \sqrt{1+u^2} dv du \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi (1+u^2) dv du \\ &= \int_0^1 (1+u^2)\pi du \\ &= \left(\pi u + \frac{u^3 \pi}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Podemos usar da integral de superfície, por exemplo, para o cálculo da massa de uma lâmina.

Suponha que uma lâmina é muito fina, de modo que possa ser considerada uma superfície S do \mathbb{R}^3 .

Suponha que o campo $\rho(x, y, z)$ representa a densidade superficial (massa por unidade de área) no ponto (x, y, z) .

Então, a massa da lâmina será dada por:

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) dS$$

Exemplo 6.8: Uma lâmina tem a forma da parte do plano $z = 2y + 1$ recortado pelo cilindro $x^2 + (y - 2)^2 = 4$. A densidade em cada ponto é proporcional à distância do ponto ao plano xy . Sabendo que no ponto em que a lâmina toca o eixo z a densidade superficial é 3 g/cm^2 , calcule a massa da lâmina.

Solução:

S é o gráfico da função $z(x, y) = 2y + 1$, com

$$(x, y) \in R = \{(x, y) \mid x^2 + (y - 1)^2 \leq 4\}.$$

Por sua vez, $f(x, y, z) = kz$ e $\rho(0, 0, 1) = 3$. Logo, $k = 3$.

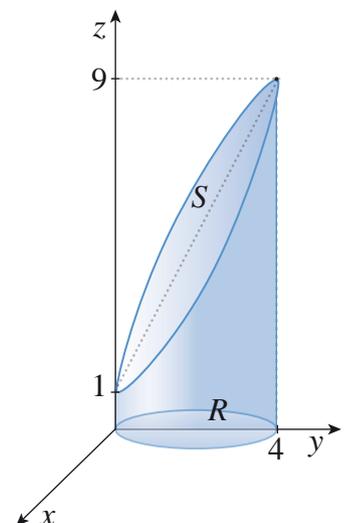


Figura 6.10

$$\begin{aligned}
m &= \iint_S 3z \, ds = \iint_R 3(2y+1)\sqrt{1+0+4} \, dA \\
&= 3\sqrt{5} \int_0^\pi \int_0^{4\sin(\theta)} (2 \cdot r \cdot \sin(\theta) + 1) r \, dr \, d\theta \quad (\text{em coordenadas polares}) \\
&= 60\sqrt{5\pi} \text{ g.}
\end{aligned}$$

6.4 Integral de superfície de campo vetorial

Para um bom entendimento da definição e do cálculo da integral de superfície de um campo vetorial, precisamos examinar o conceito de superfície orientável e a definição de um vetor especial chamado vetor normal a uma superfície.

6.4.1 Vetor normal a uma superfície S

Seja S definida por $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$, com $(u, v) \in R$.

Se os vetores $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ são linearmente independentes, então eles determinam um plano, chamado plano tangente à superfície S num ponto P .

O vetor normal à S , denotado por $\vec{n}(u, v)$, é um vetor ortogonal ao plano tangente determinado pelos vetores $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ e é definido por

$$\vec{n}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}.$$

6.4.2 Superfície orientável

Podemos pensar em uma superfície S orientável como uma superfície que possui dois lados. Sabemos que uma superfície esférica tem o lado interno e o externo e que uma superfície plana horizontal tem o lado de cima e o de baixo.

Em cada ponto P de S temos dois vetores unitários normais $\vec{n}(P)$ ou $-\vec{n}(P)$. Se for possível escolher um desses vetores de maneira contínua em toda a superfície, dizemos que S é orientável. Veja a Figura 6.11a e 6.11b.

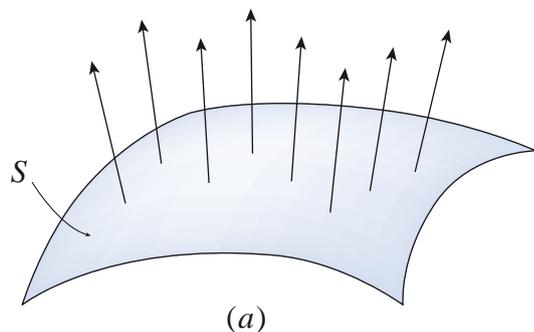


Figura 6.11a

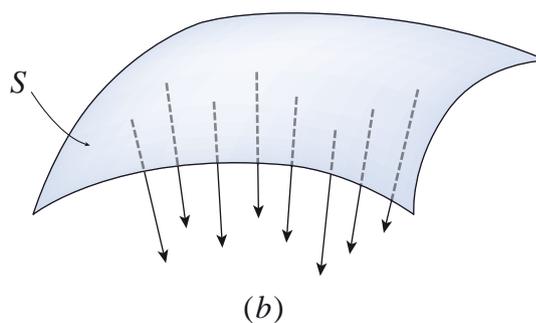


Figura 6.11b

No caso representado pela Figura 6.11a, S tem orientação para cima, pois todos os vetores normais unitários estão direcionados para cima, isto é, tem componentes k positivos.

Já no caso representado pela Figura 6.11b, S tem orientação para baixo, pois todos os vetores normais unitários estão direcionados para baixo, isto é, tem componentes k negativos.

Se S é uma superfície fechada, então suas orientações são para fora (Figura 6.12a) ou para dentro (Figura 6.12b).

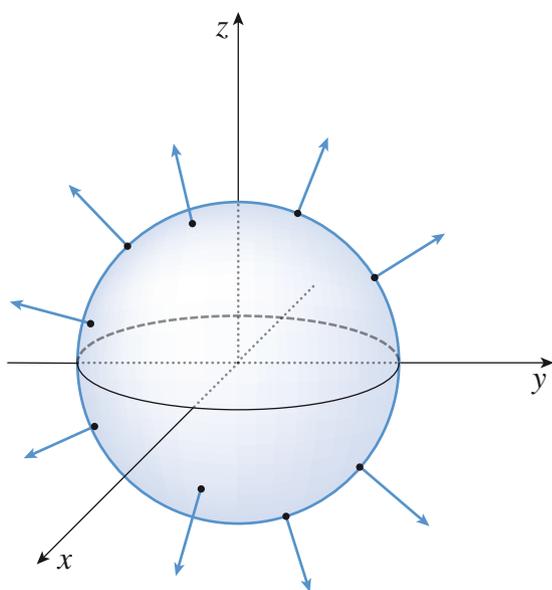


Figura 6.12a

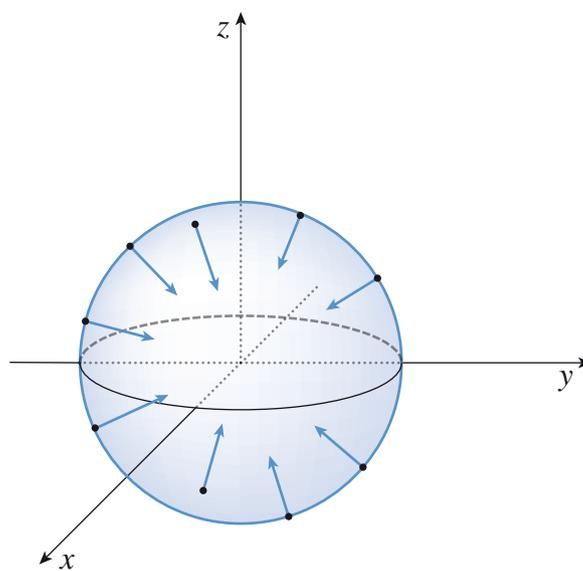


Figura 6.12b

Augusto Ferdinand Möbius (1790–1868) foi um matemático alemão que concebeu a fita que leva o seu nome, uma superfície bidimensional, mas que possui apenas um lado (Figura 6.13).

Um exemplo de uma superfície não orientável é a **fita de Möbius**, pois, se um vetor normal unitário \vec{n} começar em $P \in S$ e se mover uma vez em torno da fita na curva C , terminará no “lado oposto” da fita em P e apontará no sentido oposto. Você pode imaginar um inseto caminhando sobre a fita. Se ele começar em P , conforme a Figura 6.13, após uma volta completa o inseto estará sobre o ponto P do outro lado da fita e isso foi possível sem atravessá-la.

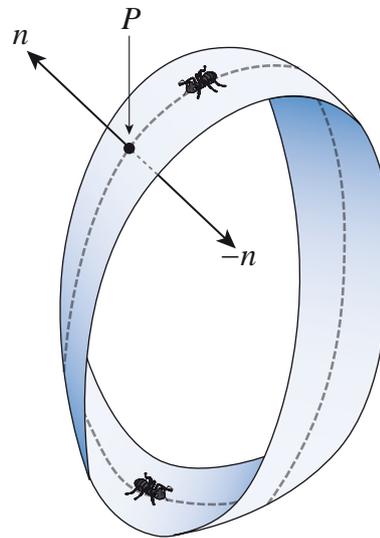


Figura 6.13

Definição 6.2. Seja S uma superfície suave, dada por $\vec{r}(u, v)$ e seja $\vec{n} = \vec{n}(u, v)$ um vetor unitário, normal à S .

Seja o campo vetorial \vec{f} definido sobre S . A integral de superfície de \vec{f} sobre S , denotada por $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS$, é definida por

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS = \iint_R \vec{f}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| dA.$$

6.4.3 Interpretações físicas para integral de superfície

Uma integral de superfície pode ser entendida como um fluxo ϕ , ou seja, um campo vetorial através de uma superfície. Contudo, o conceito de fluxo pode possuir muitos significados físicos: o fluxo de calor; de campo elétrico; de campo magnético; de “velocidade”. Cada um dos fluxos citados tem um significado e uma definição

particular, porém há algo em comum entre eles que vamos ver antes de explorar especificamente cada um. Nos livros de Física, é comum encontrar a definição genérica de fluxo como

$$\phi = \iint_S \vec{f} \cdot d\vec{A} \quad \text{ou} \quad \phi = \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} \, dA$$

Sendo \vec{f} um campo vetorial qualquer que atravessa um elemento de área dA de uma superfície orientável S , conforme a representação da Figura 6.14a. Perceba que se \vec{f} e \vec{n} forem perpendiculares, teremos como integrando $\vec{f} \cdot \vec{n} = f \cdot n \cdot \cos(90^\circ) = 0$, ou seja, o fluxo de \vec{f} através de S é nulo. Veja a Figura 6.14b.

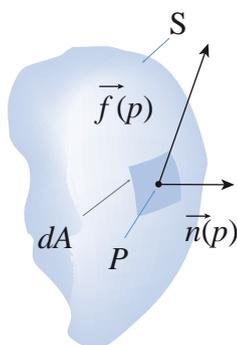


Figura 6.14a

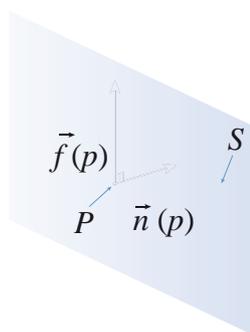


Figura 6.14b

Observe que a unidade de medida de um fluxo sempre será dada em termos da unidade do campo vetorial multiplicada por unidade de área. Vamos a alguns exemplos:

- 1) Consideremos o campo de vetores que representa a “velocidade” da corrente de um fluido, ou seja, a taxa de variação temporal de volume de um fluido. A integral de superfície desse campo vetorial nos dá a taxa de fluido, volume por tempo, que está passando através de uma superfície. Essa taxa é chamada fluxo de velocidade. Imagine uma rede de pescar esticada que é atravessada por uma corrente de água. Suponha que queremos medir a taxa da corrente de água através da rede, isto é, o volume do fluido que passa pela superfície por unidade de tempo. Esse volume que passa por uma superfície por unidade de tempo, fluxo, pode ser obtido com a integral de superfície, desde que tenhamos o campo de “velocidade” do fluido.

- 2) Seja $\vec{f} = \rho\vec{v}$, em que ρ é a densidade de um fluido e \vec{v} o campo de “velocidade” do fluido através de S . S é uma superfície imaginária que não implica a passagem do líquido como uma rede de pescar numa corrente de água.
- 3) A integral $\iint_S \rho\vec{v} \cdot \vec{n} dS$ é interpretada fisicamente como a taxa de massa que escoia através de S na direção do vetor \vec{n} .
- 4) Seja \vec{E} um campo elétrico.
- 5) A integral $\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$ é chamada fluxo elétrico através da superfície S .
- 6) Seja \vec{B} um campo magnético.
- 7) A integral $\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$ é chamada fluxo magnético através da superfície S .
- 8) Considere que $u(x, y, z)$ represente a temperatura em um ponto (x, y, z) de um corpo.

O campo vetorial $\vec{f} = -k\nabla u$ define o fluxo de calor, em que k é uma constante determinada experimentalmente, chamada condutividade da substância. O fluxo de calor da superfície S do corpo é dada pela integral $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS = -k \iint_S \nabla u \cdot \vec{n} dS$.

6.4.4 Cálculo da integral de superfície de campo vetorial

- i) Seja S definida por $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$; $(u, v) \in R$.

Seja \vec{n}_1 o vetor normal unitário de S dado por

$$\vec{n}_1(u, v) = \frac{\left[\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \right]}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|}.$$

Podemos ter $\vec{n} = +\vec{n}_1$ ou $\vec{n} = -\vec{n}_1$, dependendo do problema.

Assim,

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS &= \pm \iint_R \vec{f}(\vec{r}(u, v)) \cdot \frac{\begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \\ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \end{pmatrix}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| dA \\ &= \pm \iint_R \vec{f}(\vec{r}(u, v)) \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) dA.\end{aligned}$$

Observação 6.2: Usa-se o sinal de (+) quando o lado S escolhido para a integração for o lado do qual emana o vetor normal unitário \vec{n} . Em caso contrário, usa-se o sinal (-).

ii) Seja S definida por $z = z(x, y)$, $(x, y) \in R$.

Faça $F(x, y, z) = z - z(x, y)$.

Nesse caso, $\vec{n}_1 = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$ e $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS = \pm \iint_R \vec{f}(x, y, z(x, y)) \nabla F dA$.

Exemplo 6.9: Encontre o fluxo elétrico ϕ através da superfície exterior S cortada no cilindro $y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ pelos planos $x = 0$ e $x = 1$. Considere $\vec{E} = (yz\vec{j} + z^2\vec{k})$ newton-coulomb (N.C) e as unidades de distância em metros (m).

Solução:

Vamos parametrizar a equação do cilindro e calcular a integral na forma paramétrica. Veja a Figura 6.14.

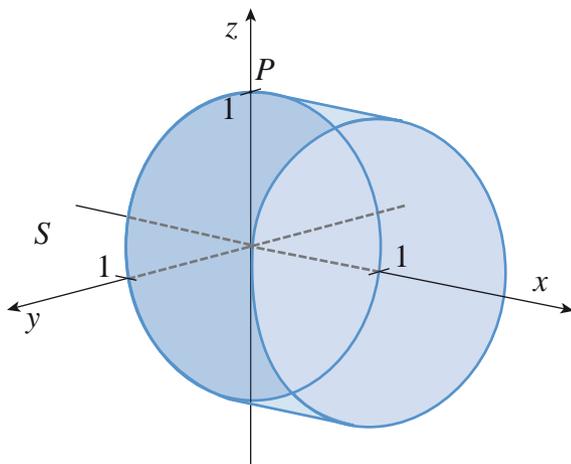


Figura 6.15

$$S : \{ \vec{r}(u, v) = v\vec{i} + \cos(u)\vec{j} + \sin(u)\vec{k}, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq u \leq 2\pi \}.$$

$$\vec{E}(\vec{r}(u, v)) = (0, \cos(u) \cdot \sin(u), \sin^2(u))$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (0, -\sin(u), \cos(u)), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{n}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (0, \cos(u), \sin(u)).$$

$$\text{Então, } \phi = \pm \iint_S (0, \cos(u) \cdot \sin(u), \sin^2(u)) \cdot (0, \cos(u), \sin(u)) du dv.$$

Escolhemos um ponto P qualquer de fácil localização para verificar se o vetor \vec{n} aplicado no ponto P aponta para o exterior ou interior de S . (Deve ser feito em cada exercício.)

Seja $P = (0, 0, 1) \in S$.

Precisamos encontrar os valores de u e v para os quais

$$\vec{r}(u, v) = (0, 0, 1).$$

$$v = 0, \cos(u) = 0 \text{ e } \sin(u) = 1 \Rightarrow v = 0 \text{ e } u = \frac{\pi}{2}.$$

Assim, $\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ é o vetor posição de P e o vetor normal unitário nesse ponto é $\vec{n}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = (0, 0, 1)$.

Como \vec{n}_1 aponta para fora da superfície e a parte de integração é a parte externa de S , então $\vec{n} = \vec{n}_1$ e

$$\phi = \iint_S (\cos^2(u)\sin(u) + \sin^3(u)) du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\cos^2(u)\sin(u) + \sin^3(u)) dv du = 0 \text{ N.C.m}^2.$$

Exemplo 6.10: Calcule $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS$, com $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, z)$; sendo S a superfície exterior (\vec{n} apontando para o exterior) da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; ($a > 0$).

Solução:

A representação vetorial de S é

$$\vec{r}(u, v) = (a \cos(u) \cos(v), a \sin(u) \cos(v), a \sin(v)); 0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\vec{n}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (a^2 \cos(u) \cos^2(v), a^2 \sin(u) \cos^2(v), a^2 \sin(v) \cos(v)).$$

Fazendo $u=0$ e $v=0$, encontramos um ponto P de S que tem como vetor posição $\vec{r}(0,0) = (a,0,0)$ e $\vec{n}_1(0,0)$ é dado por $\vec{n}_1(0,0) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(0,0) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(0,0) = (a^2, 0, 0)$, que aponta para o exterior da esfera, quando colocado com a origem em $(a,0,0)$.

Por ser uma superfície orientável, isso acontece em qualquer outro ponto da esfera.

Logo,

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S + \iint_R \left[(a \cos(u) \cos(v), a \sin(u) \cos(v), a \sin(v)) \cdot (a^2 \cos(u) \cos^2(v), a^2 \sin(u) \cos^2(v), a^2 \sin(v) \cos(v)) \right] dA$$

Sendo R o retângulo $0 \leq u \leq 2\pi; -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} \, dS = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^3 \cos(v) \, dv \, du = 4\pi a^3.$$

Exemplo 6.11: Calcule $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} \, dS$, sendo $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, 2z)$ e S a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ interna do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, com a normal apontando para fora. Veja a Figura 6.15.

Solução:

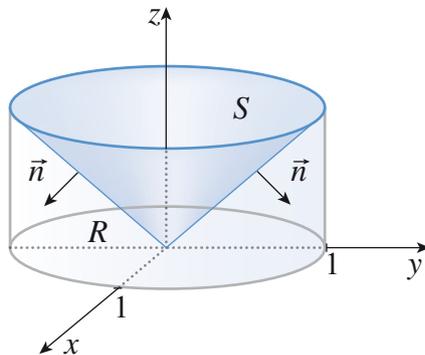


Figura 6.16

Como \vec{f} é definido em coordenadas cartesianas, segue que

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} \, dS = \pm \iint_R \vec{f}(x, y, z(x, y)) \cdot \vec{n}_1 \cdot dA,$$

em que $n_1 = \nabla F$ e $\vec{f}(x, y, z(x, y)) = (x, y, 2\sqrt{x^2 + y^2})$

Faça $F = z - z(x, y)$.

$$F = z - \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{n}_1 = \nabla F = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right).$$

Seja $P = (0, 1, 1)$ um ponto de S escolhido aleatoriamente.

$\vec{n}_1(P) = \nabla F(P) = (0, -1, 1)$, $\vec{n}_1(P)$ aponta para dentro de S .

Como esse sentido de $\vec{n}_1(P)$ é contrário do exigido no exercício, faça $\vec{n} = -\vec{n}_1$ para qualquer ponto de S .

Então,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS &= - \iint_R (x, y, 2\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right) dA \\ &= - \iint_R \left(-\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2\sqrt{x^2 + y^2} \right) dA \quad (6.3) \\ &= - \iint_R \left(\frac{-(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2\sqrt{x^2 + y^2} \right) dA \end{aligned}$$

A região R é delimitada pelo cilindro dado e é definida por $x^2 + y^2 \leq 1$.

Como R é uma região circular, vamos resolver a integral (6.3) em coordenadas polares.

Assim, R é definida por $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 1$.

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(-\frac{r^2}{r} + 2r \right) r dr d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-r^2 + 2r^2) dr d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 dr d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3} \Big|_0^1 d\theta \\ &= - \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = - \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Exemplo 6.12: Um fluido atravessa a superfície S delimitada pelo triângulo de vértices $(4,0,0)$, $(0,4,0)$, $(0,0,4)$, no sentido de cima para baixo, com vetor “velocidade” $\vec{v} = (x\hat{i}, y\hat{j}, z\hat{k}) \frac{l}{s}$. Calcule o fluxo ϕ em que atravessa S .

Solução:

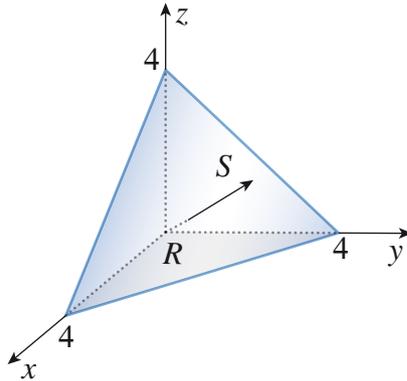


Figura 6.17

Trata-se de calcular o fluxo ϕ que é dado por $\phi = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$.

S pode ser representada explicitamente por:

$$z = 4 - x - y; \quad (x, y) \in R = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 4 - x\}.$$

A coordenada "z" do vetor normal é negativa, em virtude do sentido dado pelo enunciado.

$$\begin{aligned} \text{Logo, } \phi &= \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = - \iint_R (-x(-1) - y(-1) + 4 - x - y) dA \\ &= -4 \iint_R dA \\ &= (-4) \times \text{Área de } R \\ &= -32 \frac{l \cdot m^2}{s}. \end{aligned}$$

Interpretação: O sinal de "(-)" deve-se ao fato de o fluxo *não* ocorrer no sentido de cima para baixo, mas de baixo para cima. Basta observar o vetor \vec{v} . A quantidade de líquido que atravessa S é de 32 litros por segundo.

Observação 6.3. Se $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$, a integral $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS$ é, às vezes, representada por:

$$\iint_S (f_1 dydz + f_2 dzdx + f_3 dxdy).$$

Nesse caso, estamos nos referindo à "velocidade" não como a taxa com que um corpo se desloca no espaço

$$v^* = \frac{dr(t)}{dt}, \text{ mas como}$$

o volume de escoamento por unidade de tempo

$$v = \frac{dV(t)}{dt}.$$

Exemplo 6.13: Calcule $\iint_S (x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy)$, sendo S a superfície exterior do sólido delimitado pelas superfícies $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ e $z = 3$.

Solução:

S é uma superfície suave por partes: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, em que:

$$\begin{cases} S_1 : x^2 + y^2 = 4 \\ S_2 : z = 0 \\ S_3 : z = 3 \end{cases}$$

Sendo $\vec{f}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$, temos:

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \vec{f} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{f} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_3} \vec{f} \cdot \vec{n} dS.$$

1º) Uma parametrização de S_1 é:

$$(2\cos(u), 2\sin(u), v); \quad 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 3.$$

$$\text{Então, } \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (2\cos(u), 2\sin(u), 0).$$

Como o sentido dado no enunciado é de dentro para fora, que corresponde ao sentido do vetor $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$, temos

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{f} \cdot \vec{n} ds &= + \iint_R [(8\cos^3(u), 8\sin^3(u), v^3) \cdot (2\cos(u), 2\sin(u), 0)] dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (16\cos^4(u) + 16\sin^4(u)) = 72\pi. \end{aligned}$$

2º) Representação de $S_2 : z = 0$; $R : x^2 + y^2 \leq 4$. Então:

$$\iint_{S_2} \vec{f} \cdot \vec{n} ds = - \iint_R 0 dA = 0.$$

3º) Representação de $S_3 : z = 3$; $R : x^2 + y^2 \leq 4$. Então:

$$\iint_{S_3} \vec{f} \cdot \vec{n} ds = + \iint_R 27 dA = 108\pi.$$

$$\text{Logo, } \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} ds = \iint_{S_1} \vec{f} \cdot \vec{n} ds + \iint_{S_2} \vec{f} \cdot \vec{n} ds + \iint_{S_3} \vec{f} \cdot \vec{n} ds = 180\pi.$$

6.5 Divergência e rotacional

Vamos definir duas operações para campos vetoriais que estão relacionadas com fluxo e rotação e, dessa forma, caracterizam-se como ferramentas para o estudo de fenômenos físicos.

Considere $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ um campo vetorial e nãbla “ ∇ ” o operador vetorial $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$.

Definição 6.3. O divergente é um *escalar*, calculado a partir de um *campo vetorial* em um ponto definido por

$$\text{div}(\vec{f}) = \nabla \cdot \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (f_1, f_2, f_3) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right).$$

Se \vec{f} representa o campo elétrico ou o campo de “**velocidade**” de um fluido, então o $\text{div}(\vec{f})$ diz respeito à orientação do fluxo de campo elétrico ou de velocidades. No primeiro caso, podemos entender o divergente como a taxa de variação do fluxo, ou seja, como varia o fluxo de campo elétrico em cada ponto. No segundo caso, o $\text{div}(\vec{f})$ pode ser entendido como a taxa de variação da densidade do fluido.

Nesse caso, quando falamos em “velocidade”, estamos nos referindo à taxa com que a massa de água se desloca no tempo, conforme o caso 2) das interpretações físicas para integral de linha.

Se $\text{div}(\vec{f}) > 0 \Rightarrow$ o fluido se expande ou o fluxo é direcionado para fora (se considerarmos uma superfície fechada envolvendo uma carga elétrica).

Se $\text{div}(\vec{f}) < 0 \Rightarrow$ o fluido se comprime ou o fluxo é direcionado para dentro.

Se $\text{div}(\vec{f}) = 0 \Rightarrow$ o fluido é incompressível ou o fluxo resultante é nulo (considerando ainda uma superfície que envolve uma carga).

Definição 6.4. O rotacional é um *vetor* calculado a partir de um *campo vetorial* em um ponto definido por

$$\text{rot}(\vec{f}) = \nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Se \vec{f} descreve um campo de velocidade que é evidenciado por partículas que flutuam em um fluido, seja P um ponto do espaço em que \vec{f} esteja definida. Então, se o $\text{rot}(\vec{f}(p)) \neq 0$, partículas próximas de P tendem a sofrer rotação em torno de um eixo imaginário na direção e no sentido de $\text{rot}(\vec{f}(p))$. Se $\text{rot}(\vec{f}(p)) = 0$ em todo ponto P , então não há formação de redemoinhos (o fluxo é irrotacional).

6.6 Teorema da divergência (Teorema de Gauss)

Seja T um sólido no espaço, limitado por uma superfície orientada S . Se \vec{n} é a normal unitária exterior à S e se $\vec{f}(x, y, z)$ é uma função vetorial contínua que possui derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio que contém T , então

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS = \iiint_T \text{div}(\vec{f}) dV.$$

Esse teorema nos diz que a integral da densidade do fluxo através de uma região sólida é igual à integral de fluxo da borda da região.

Exemplo 6.14: Sejam $\vec{f}(x, y, z) = x^2 y \vec{i} + y^2 z \vec{j} + xz \vec{k}$ e S o cubo no 1º octante limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x=1$, $y=1$, $z=1$. Vamos determinar o fluxo de \vec{f} através de S .

Solução:

O fluxo de \vec{f} é dado pela integral $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS$.

Aplicando o Teorema da Divergência, podemos calcular o fluxo como sendo a integral $\iiint_T \text{div}(\vec{f}) dV$.

$$\text{div}(\vec{f}) = 2xy + 2y + x$$

O sólido T é definido por
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Então, o fluxo

$$= \iiint_T (2xy + 2y + x) dx dy dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2xy + 2y + x) dx dy dz = 2 \quad \text{unidades de fluxo.}$$

Exemplo 6.15: Calcule o fluxo de saída do campo $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{k}$ através da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Solução:

Seja S a esfera e T a região envolvida por S . Pelo Teorema da Divergência, temos

$$\phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_T \operatorname{div}(\vec{F}) dV = \iiint_T dV = \text{volume de } T = \frac{4}{3}\pi a^3 \text{ uni-}$$

dades de fluxo. Confira esse resultado.

6.7 Teorema de Stokes

Seja S uma superfície orientada, suave por partes, delimitada por uma curva C fechada simples, suave por partes. Então, se \vec{f} é um campo vetorial contínuo com derivadas parciais de primeira ordem contínuas num domínio que contém $S \cup C$,

$$\oint_C \vec{f} d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}(\vec{f}) \cdot \vec{n} dS,$$

em que a integração ao longo de C é efetuada no sentido positivo determinado pela orientação de S .

Observações:

- 1) O Teorema de Stokes é uma generalização para 3 dimensões do Teorema de Green. Relaciona uma integral de linha ao longo de uma curva fechada simples C em \mathbb{R}^3 , com uma integral de superfície sobre uma superfície orientada, da qual C é o contorno (fronteira).
- 2) O Teorema de Stokes é, geralmente, a alternativa preferida para calcular o trabalho ao longo de curvas suaves por partes com seções múltiplas, uma vez que elimina a necessidade de calcular uma integral para cada parte.
- 3) Se S_1 e S_2 forem superfícies com orientações diferentes, mas que tenham a mesma curva de fronteira C com orientação positiva, então temos que:

$$\iint_{S_1} \operatorname{rot}(\vec{f}) \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} \operatorname{rot}(\vec{f}) \cdot \vec{n} dS.$$

Exemplo 6.16: Vamos aplicar o Teorema de Stokes para calcular a integral $\iint_S \text{rot}(\vec{f}) dS$, em que $\vec{f} = (x, y, z) = (yz, xz, xy)$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy .

Solução:

Para achar a curva fronteira C , resolvemos o sistema formado pelas equações $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 1$, que resulta $z^2 = 3$.

Assim, $z = \sqrt{3}$ (uma vez que $z > 0$).

Então, C é a circunferência dada pelas equações $x^2 + y^2 = 1$ e $z = \sqrt{3}$.

A equação vetorial de C é: $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), \sqrt{3})$; $0 \leq t \leq 2\pi$.

Então, $\vec{r}'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$.

Temos também, $\vec{f}(\vec{r}(t)) = (\sqrt{3}\sin(t), \sqrt{3}\cos(t), \cos(t)\sin(t))$.

Portanto, pelo Teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot}(\vec{f}) ds &= \int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{3} \cos(t)\sin(t) + \sqrt{3} \sin(t)\cos(t)) dt \\ &= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} 0 dt = 0. \end{aligned}$$

Exemplo 6.17: Utilizando o Teorema de Stokes, calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$ sendo $\vec{f}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$, em que C é a curva de intersecção do plano $y + z = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$, no sentido anti-horário.

Solução:

Se $f(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$, então $\text{rot}(\vec{f}) = (0, 0, 1 + 2y)$.

A orientação de C dada corresponde a uma orientação para cima da superfície dada. Veja a Figura 6.17.

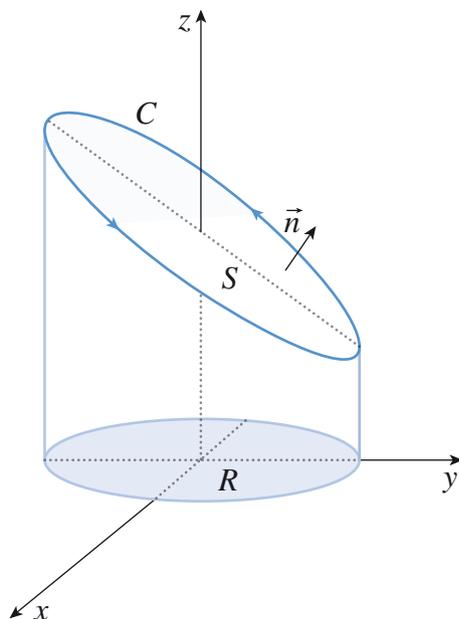


Figura 6.18

Assim, se $F(x, y, z) = y + z - 2$, então $\vec{n} = \nabla F(x, y, z) = (0, 1, 1)$.

Para todo ponto de S , \vec{n} aponta para cima.

$$\begin{aligned}
 \int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot}(\vec{f}) \cdot \vec{n} dS \\
 &= \iint_R (0, 0, 1 + 2y) \cdot (0, 1, 1) dA \\
 &= \iint_R (1 + 2y) dA. \tag{6.4}
 \end{aligned}$$

A região R é definida por $x^2 + y^2 \leq 1$.

Como R é uma região circular, vamos calcular a integral (6.4) em coordenadas polares.

$$\begin{aligned}
 \int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \text{sen}(\theta)) r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{2r^3}{3} \text{sen}(\theta) \right) \Big|_0^1 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \text{sen}(\theta) \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{3} \cos(\theta) \Big|_0^{2\pi} = \pi.
 \end{aligned}$$

Resumo

Neste capítulo, para o cálculo de integral de superfície, você teve que aplicar seus conhecimentos de vetor ortogonal, vetor unitário, integral dupla e integral tripla adquiridos em outras disciplinas, pois uma integral de superfície se transforma numa integral dupla. Em algumas situações, é conveniente aplicar o Teorema de Stokes.

Viu que, em condições especiais, ainda podemos relacionar uma integral de superfície com uma integral tripla aplicando o Teorema de Gauss.

Esses dois teoremas são de grande importância no Cálculo Vetorial e em aplicações físicas que irão aparecer em disciplinas específicas do curso.

Exercícios Propostos

- 1) Calcule a integral $\iint_S f(x, y, z) dS$, em que $f(x, y, z) = x$ e S é a porção do cilindro $z = 2 - x^2$, no primeiro octante, limitada por $x = 0$, $y = 0$, $y = 4$ e $z = 0$.
- 2) Calcule a integral $\iint_S xz^3 dS$, em que S é o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
- 3) Calcule a integral $\iint_S xy dS$, em que S é a porção do parabolóide $2z = 4 - x^2 - y^2$ dentro de $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$.
- 4) Calcule $\iint_S (3z^2 + 4yz) dS$, em que S é a parte do plano $x + 2y + 3z = 6$ no primeiro quadrante.
- 5) Calcule $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, em que S é a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

6) Calcule o fluxo do campo de vetores \vec{f} através da superfície S , indicados abaixo.

- $\vec{f} = (x-y)\vec{i} + 3\vec{j} + 3x\vec{k}$ e S é a parte do plano $z = x + y$ acima do retângulo $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$, orientada para cima.
- $\vec{f} = 3x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ é parte da superfície $z = -2x - 4y + 1$ acima do triângulo no plano xy com vértices $(0,0)$, $(0,2)$ e $(1,0)$, orientada para cima.
- $\vec{f} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$ e S é o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ para $0 \leq z \leq 6$, orientada para cima.
- $\vec{f} = z^2\vec{i} + x\vec{j} - 3z\vec{k}$ para fora e S é a superfície cortada do cilindro $z = 4 - y^2$ pelos planos $x = 0$, $x = 1$ e $z = 0$.
- $\vec{f} = 3\vec{k}$ através da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ no primeiro octante no sentido oposto à origem.
- $\vec{f} = xy\vec{i} - z\vec{k}$ para fora, através do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$.

7) Utilize o Teorema de Stokes para calcular a integral $\int_C \vec{f} d\vec{r}$, em

que $\vec{f} = (2x - y)\vec{i} + (x - 4y)\vec{j}$ e C é o círculo de raio 10 centrado na origem no plano xy , orientado em sentido horário.

8) Utilize o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \vec{f} d\vec{r}$. Considere C orientada no sentido anti-horário para:

- $\vec{f} = z(2z + x)\vec{i} + (y - z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$, C o triângulo com vértices $(1,0,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,1)$.
- $\vec{f} = y^3\vec{i} - x^3\vec{j} + z^3\vec{k}$, C a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ no plano $x + y + z = 1$.

9) Utilize o Teorema de Stokes para calcular $\iint_S \text{rot}(\vec{f}) \cdot \vec{n} dS$, nos

exercícios a seguir. Considere que a superfície S esteja orientada para cima.

- $\vec{f} = 6yz\vec{i} + 5x\vec{j} + yze^{x^2}\vec{k}$; S a porção do parabolóide $z = \frac{1}{4}x^2 + y^2$ para $0 \leq z \leq 4$.

- b) $\vec{f} = 3x^2\vec{i} + 8x^3y\vec{j} + 3x^2\vec{k}$; S a porção do plano $z = x$ que se situa dentro do cilindro retangular definido pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 2$.
- 10) Utilize o Teorema da Divergência para obter o fluxo para fora $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS$ do campo vetorial \vec{f} indicado.
- a) $\vec{f} = 3x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$; D a região limitada pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
- b) $\vec{f} = y^2\vec{i} + z^3\vec{j} + (z-1)^2\vec{k}$; D a região limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e os planos $z = 1$, $z = 5$.
- c) $\vec{f} = 3x^2y^2\vec{i} + y\vec{j} - 6zxy^2\vec{k}$; D a região limitada pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 2y$.

Respostas

1. $\frac{26}{3}$.
2. 0.
3. $16\sqrt{2}$.
4. $12\sqrt{14}$.
5. $\frac{2048\pi}{3}$.
6. a) 6.
b) $\frac{7}{3}$.
c) 1296π .
- d) -32.
- e) $\frac{\pi a^3}{3}$.
- f) $\frac{2\pi}{3}$.

7. -200π .

8. a) $\frac{3}{2} 8$.

b) $-\frac{3\pi}{2}$.

9. a) -152π .

b) 112.

10. a) $\frac{12a^5\pi}{5}$.

b) 256π .

c) $\frac{\pi}{2}$.

Capítulo 7

Equações diferenciais de 1ª ordem

Capítulo 7

Equações diferenciais de 1ª ordem

A Teoria das Equações Diferenciais é objeto de intensa atividade de pesquisa, pois apresenta aspectos puramente matemáticos e uma multiplicidade de aplicações, além de ter diversas ramificações. Neste capítulo, abordaremos especificamente as equações diferenciais ordinárias (equações que só apresentam derivadas ordinárias – em relação a uma variável). Daremos inicialmente uma breve introdução sobre a teoria das equações diferenciais. Faremos um estudo das equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, classificando-as e mostrando métodos para a solução dessas. Desenvolveremos posteriormente o estudo das equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem utilizando exemplos de aplicações no campo da Física.

7.1 Noções gerais de equações diferenciais

Uma *equação diferencial* (ED) é uma equação em que a incógnita é uma função, e a equação envolve termos na função e suas derivadas.

Muitas das leis gerais da natureza – em Física, Química, Biologia e Astronomia – têm sua expressão mais natural na linguagem das equações diferenciais. Mesmo em Matemática são muitas suas aplicações, especialmente em Geometria. Também encontramos aplicações nas Engenharias, na Economia e em muitos outros campos da Ciência.

É fácil entender a razão dessa ampla utilização das equações diferenciais. Recordemos que, se $y = f(x)$ é uma função dada, então sua derivada $\frac{dy}{dx}$ pode ser interpretada como a taxa de variação

de y em relação a x . Num processo natural, as variáveis envolvidas e suas taxas de variação estão em conexão umas com as outras pelo significado dos princípios científicos básicos que regem os processos. Quando essa conexão é expressa em símbolos matemáticos, o resultado é, muitas vezes, uma equação diferencial.

O exemplo seguinte ilustra essa observação. De acordo com a Segunda Lei do Movimento de Newton, a aceleração “ a ” de um corpo de massa constante “ m ” é proporcional à força resultante “ F_R ” atuando sobre ele, tendo $\frac{1}{m}$ como a constante de proporcionalidade, de

tal modo que $a = \frac{F_R}{m}$ ou

$$ma = F_R. \quad (7.1)$$

Suponhamos, por um momento, que um corpo de massa constante “ m ” cai livremente sob a influência exclusiva da gravidade. Nesse caso, a única força atuante nele é “ mg ”, em que “ g ” é a aceleração da gravidade. Se “ y ” é a altura do corpo a partir do solo, então sua aceleração é $\frac{d^2y}{dt^2}$ e (7.1) se torna

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg \quad \text{ou} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g. \quad (7.2)$$

Se considerarmos que o ar exerce uma força de resistência proporcional à velocidade, então a força resultante atuando sobre o corpo é

$F_R = mg - k \left(\frac{dy}{dt} \right)$ e (7.1) se torna

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg - k \left(\frac{dy}{dt} \right). \quad (7.3)$$

As equações (7.2) e (7.3) são equações diferenciais, que expressam as características principais do processo físico em estudo.

7.2 Classificação das equações diferenciais

As equações diferenciais podem ser classificadas por *tipo*, *ordem*, *grau* ou *linearidade*.

1) *Tipo*: a ED pode ser ordinária ou parcial.

Observe as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{dy}{dt} = -ky \quad (7.4)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky \quad (7.5)$$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2} \quad (7.6)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad (7.7)$$

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + p(p+1)y = 0 \quad (7.8)$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0 \quad (7.9)$$

É importante que você consiga identificar em cada uma das equações anteriores quais são as variáveis dependentes e as respectivas variáveis independentes. No entanto, tenha claro que nos exemplos anteriores as letras “ k ”, “ m ” e “ p ” representam constantes.

Uma *equação diferencial ordinária* (EDO) é aquela na qual há só uma variável independente, de modo que todas as derivadas que ocorrem nela são derivadas ordinárias.

Cada uma das equações anteriores (de 7.2 até 7.9) é uma equação diferencial ordinária.

Uma *equação diferencial parcial* (EDP) é aquela que tem mais de uma variável independente, de modo que as derivadas que ocorrem são derivadas parciais.

Por exemplo, se $w = f(x, y, z, t)$ é uma função do tempo e das três coordenadas cartesianas de um ponto no espaço, então as seguintes equações são equações diferenciais parciais:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (7.10)$$

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (7.11)$$

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (7.12)$$

Essas equações, chamadas *equação de Laplace*, *equação do calor* e *equação da onda*, respectivamente, também são clássicas. Cada uma delas é muito importante na Física Teórica, e seu estudo tem estimulado o desenvolvimento de muitas ideias importantes na própria Matemática. Em geral, as **equações diferenciais parciais** aparecem na Física do meio contínuo – em problemas envolvendo campos elétricos, dinâmica dos fluidos, difusão e movimentos de onda. Sua teoria é muito diferente das equações diferenciais ordinárias e, em vários aspectos, é muito mais difícil.

Para um estudo sucinto de equações diferenciais parciais, inclusive da equação da onda, veja, por exemplo, **Advanced calculus**, de Kaplan, Capítulo 10

Neste curso, restringiremos nossos estudos às equações diferenciais ordinárias.

- 2) *Ordem*: a ordem da ED é dada pela ordem da derivada de mais alta ordem.

Exemplos:

- $\frac{dy}{dt} = -ky^2$ é uma ED de 1ª ordem;
- $\frac{d^3 y}{dx^3} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ é uma ED de 3ª ordem.

- 3) *Grau*: o grau da ED é o expoente da maior potência da derivada de ordem mais alta, após a eliminação das frações e radicais contendo a variável dependente e suas derivadas constantes na equação.

Exemplos:

- $\frac{d^2 y}{dt^2} + 3y^2 = 0$ é uma ED de grau 1;
- $\left(x \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^5 + x \frac{dy}{dx} - x^6 y = 0$ é uma ED de grau 5.

4) *Linearidade*: a ED pode ser *linear* ou *não linear*.

Uma ED é chamada de *linear* quando pode ser escrita na forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

As equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

- i) A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau; isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1.
- ii) Cada coeficiente depende apenas da variável independente x .

Uma equação que não é linear é chamada *não linear*.

Observe as equações seguintes.

- a) $x dy + y dx = 0$
- b) $y'' - 2y' + y = 0$
- c) $x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + 5y = e^x$
- d) $y''' - 3y^2 - 2y = x^2$
- e) $xy''' + 5(1+x^2)y' - e^x y = x^3$
- f) $y'' - 3y' + 4y^3 = x^2$
- g) $xy'' - y'y^2 + y^2 = 1$
- h) $y'' - 3(y')^3 + 4y = x^3$
- i) $yy'' - 2y' = x$
- j) $\frac{d^3 y}{dx^3} + y^2 = 0$

Nos exemplos anteriores, as equações de “a” até “e” são equações lineares, pois em todos os termos de cada uma das equações a variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau (a potência de cada termo envolvendo y é 1) e cada um dos seus coeficientes depende apenas da variável independente x . No entanto, as equações de “f” até “j” são equações não lineares. Observe:

potência $\neq 1$

f) $y'' - 3y' + 4y^3 = x^2$

potência $\neq 1$
coeficiente depende de y

g) $xy'' - y'y^2 + y^2 = 1$

potência $\neq 1$
coeficiente depende de y

h) $xy'' - y'y^2 + y^2 = 1$

coeficiente depende de y

i) $yy'' - 2y' = x$

potência $\neq 1$

j) $\frac{d^3 y}{dx^3} + y^2 = 0$

Observação 7.1. Esta classificação em linear ou não linear é importante por causa dos métodos de resolução. As equações diferenciais lineares são mais simples de resolver que as não lineares.

Exemplo 7.1: Classifique as seguintes equações quanto ao tipo, ordem, grau e linearidade.

a) $\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{y}{\frac{d^3 y}{dx^3}} = 1$

b) $\frac{dy}{dx} = -3x$

c) $\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2}$

d) $\frac{d^2 y}{dt^2} + 6y = 0$

e) $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{d^2 y}{dx^2} - (x^2 - c^2)y = 0$

f) $y + x \frac{dy}{dx} = x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$

$$g) \left(x - \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - y \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(1 + \frac{d^4 y}{dx^4} \right)^5$$

$$h) (xy)dy - (1 + x^2)dx = 0$$

Solução: Nos exemplos dados:

a) é uma EDO de 3ª ordem, 2º grau, não linear;

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{y}{\frac{d^3 y}{dx^3}} = 1 \Rightarrow \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)^2 - y = \frac{d^3 y}{dx^3}.$$

b) é uma EDO de 1ª ordem, 1º grau, linear;

c) é uma EDO de 1ª ordem, 1º grau, linear;

d) é uma EDO de 2ª ordem, 1º grau, linear;

e) é uma EDO de 2ª ordem, 1º grau, linear;

f) é uma EDO de 1ª ordem, 2º grau, não linear;

g) é uma EDO de 4ª ordem, 5º grau, não linear;

h) é uma EDO de 1ª ordem, 1º grau, não linear.

7.3 Solução de uma equação diferencial

Uma função $y = f(x)$ é uma solução de uma ED se a equação é satisfeita quando y e suas derivadas são substituídas na equação. Neste contexto, qualquer função $y = f(x)$ definida em algum intervalo I , que, quando substituída na ED, reduz a equação a uma identidade, é chamada de solução para a ED.

Exemplo 7.2: Determine se as funções dadas são soluções da ED

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0.$$

a) $y = \text{sen } x$

b) $y = e^{2x}$

c) $y = 4e^{-x}$

d) $y = Ce^x$

Solução:a) Como $y = \sin x$, $y' = \cos x$ e $y'' = -\sin x$, vem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = -\sin x - \sin x = -2\sin x \neq 0$$

Portanto, a função $y = \sin x$ não é solução da ED dada.b) Como $y = e^{2x}$, $y' = 2e^{2x}$ e $y'' = 4e^{2x}$, vem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 4e^{2x} - e^{2x} = 3e^{2x} \neq 0$$

Portanto, a função $y = e^{2x}$ não é solução da ED dada.c) Como $y = 4e^{-x}$, $y' = -4e^{-x}$ e $y'' = 4e^{-x}$, vem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 4e^{-x} - 4e^{-x} = 0$$

Portanto, a função $y = 4e^{-x}$ é uma solução da ED dada.d) Como $y = Ce^x$, $y' = Ce^x$ e $y'' = Ce^x$, vem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = Ce^x - Ce^x = 0$$

Portanto, a função $y = Ce^x$ é uma solução da ED dada para qualquer valor de C .

Observação 7.2. Mais adiante (Capítulo 8) veremos que a função $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$ é solução da ED $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ e será chamada de solução geral.

Exemplo 7.3: A função $y = e^{t^2} + t - 1$ é uma solução da ED $y' - 2ty = 1 - 2t^2 + 2t$.

Solução:

De fato,

$$y = e^{t^2} + t - 1, y' = 2te^{t^2} + 1 \text{ e}$$

$$y' - 2ty = 2te^{t^2} + 1 - 2t(e^{t^2} + t - 1) = -2t^2 + 2t + 1.$$

7.3.1. Tipos de soluções

- **Solução geral:** é a solução da ED que contém tantas constantes arbitrárias quantas forem as unidades da ordem da equação. Assim, se a ED é de ordem 1, a solução geral terá uma constante arbitrária, se for de ordem 2, deverá conter duas constantes arbitrárias, e assim sucessivamente.

Exemplo 7.4: A função $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$ é solução geral da ED $y'' - y = 0$ (ordem 2). Note que na função há duas constantes arbitrárias (C_1 e C_2).

Solução:

De fato, $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$, $y' = C_1e^x - C_2e^{-x}$, $y'' = C_1e^x + C_2e^{-x}$ e

$$y'' - y = C_1e^x + C_2e^{-x} - (C_1e^x + C_2e^{-x}) = 0.$$

Exemplo 7.5: A função $y = -\frac{3}{2}x^2 + C$ é solução geral da ED $y' = -3x$ (ordem 1). Note que na função há apenas uma constante arbitrária (C).

Solução:

De fato, $y = -\frac{3}{2}x^2 + C$ e $y' = -3x$ (ED).

- **Solução particular:** é a solução da ED deduzida da solução geral, atribuindo-se valores particulares às constantes arbitrárias.

Exemplo 7.6: Atribuindo valores à constante da função $y = -\frac{3}{2}x^2 + C$, que é solução geral da ED $y' = -3x$ (conforme mostrado no Exemplo 7.5), obtemos uma solução particular para cada valor atribuído a C . Observe:

Solução:

Para $C = -2$: $y = -\frac{3}{2}x^2 - 2$ é uma solução particular da ED $y' = -3x$;

Para $C = 0$: $y = -\frac{3}{2}x^2$ é outra solução particular da ED $y' = -3x$;

Para $C = 1$: $y = -\frac{3}{2}x^2 + 1$ é outra solução particular da ED $y' = -3x$;

Para $C = p$: $y = -\frac{3}{2}x^2 + p$ é outra solução particular da ED $y' = -3x$.

Geometricamente, a solução geral de uma ED de 1ª ordem representa uma família de curvas conhecidas como *curvas-solução*, uma para cada valor da constante arbitrária.

- **Solução singular:** é a solução da ED que não pode, porém, ser obtida da solução geral.

Exemplo 7.7: A função $y(x) = \frac{x^2}{4}$ é solução singular da ED $(y')^2 - xy' + y = 0$, que tem solução geral $y(x) = cx - c^2$. No entanto, não foi obtida da solução geral. Observe:

Solução:

De fato,

$$y(x) = \frac{x^2}{4}, y' = \frac{1}{2}x \text{ e}$$

$$(y')^2 - xy' + y = 0 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - x\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 = 0.$$

Por outro lado,

$$y(x) = cx - c^2, y' = c \text{ e}$$

$$(y')^2 - xy' + y = c^2 - x(c) + cx - c^2 = c^2 - cx + cx - c^2 = 0.$$

Assim, apenas alguns tipos de ED apresentam solução singular. Veremos mais detalhadamente cada tipo de solução em nosso estudo sobre EDO.

Antes de nos dedicarmos a achar soluções para as EDOs, vamos procurar responder a três perguntas importantes sobre soluções para uma EDO:

- 1) Dada uma equação diferencial, será que ela tem solução?
- 2) Se tiver solução, será que essa solução é única?

Em geral, uma integral elíptica é qualquer integral da forma $\int R(x, y) dx$, onde $R(x, y)$ é uma função racional de duas variáveis x , y e onde y é a raiz quadrada de um polinômio de 3º ou 4º grau em x . O nome "integral elíptica" é usado porque uma integral desse tipo aparece no problema de achar o comprimento de uma elipse. No século XIX, foi finalmente provado pelo grande matemático francês Liouville e seus discípulos que o problema de resolver essas integrais em termos de funções elementares não é meramente difícil – é, na verdade, impossível.

3) Existe uma solução que satisfaz a alguma condição especial?

Como resposta à primeira das perguntas anteriores, primeiramente alertamos que descobrir uma solução para uma ED é algo "similar" ao cálculo de uma integral, e nós sabemos que existem integrais que não possuem primitivas, como é o caso das **integrais elípticas**. Dessa forma, não é de se esperar que todas as equações diferenciais possuam soluções.

Quanto à resposta para a segunda pergunta, veremos que é possível que uma ED possa ter mais de uma solução. Aqui é conveniente outro questionamento: Sob que condição(ões) uma ED apresenta uma única solução? E esse questionamento é mais importante do que se possa imaginar, em especial para os físicos. Neste contexto, existe o Teorema de Existência e Unicidade de solução, que nos garante resposta no que tange à existência de uma única solução, desde que a equação tenha algumas características. (O tratamento desse teorema foge dos objetivos desta disciplina.)

Teorema 7.1. (Existência de uma única solução)

Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, que contém o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se $f(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em R , então existe um intervalo I centrado em x_0 e uma única função $y = f(x)$ definida em I que satisfaz o problema de valor inicial. (**Equações diferenciais**, de Zill, Capítulo 2, Teorema 2.1).

A próxima seção deixa claro o que é um problema de valor inicial, ao mesmo tempo em que fornece uma resposta à terceira pergunta, pois mostrará soluções de EDs que satisfazem condições especiais.

7.4 Problema de valor inicial (PVI)

Frequentemente, em aplicações, é preciso encontrar uma solução particular que satisfaça uma *condição inicial* da forma $y(x_0) = y_0$. Quer dizer, procura-se a função $y = f(x)$ que é uma solução e que satisfaça $f(x_0) = y_0$. A este tipo de problema chamamos Problema de Valor Inicial (PVI).

Exemplo 7.8: Sejam as funções $y_1 = \sqrt{x^2 + c}$ e $y_2 = -\sqrt{x^2 + c}$. Ambas satisfazem a ED $y' = \frac{x}{y}$; $y \neq 0$.

No entanto, apenas $y_1 = \sqrt{x^2 + c}$ satisfaz a condição seguinte: $y(3) = -2$.

Solução: De fato, y_1 e y_2 satisfazem a ED, pois:

$$y_1 = \sqrt{x^2 + c}, y_1' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + c}} \Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + c}} = \frac{x}{y_1} \quad \text{e}$$

$$y_2 = -\sqrt{x^2 + c}, y_2' = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + c}} \Rightarrow \frac{dy_2}{dx} = \frac{x}{-\sqrt{x^2 + c}} = \frac{x}{y_2}$$

Observe a representação gráfica (Figura 7.1), que indica algumas curvas que caracterizam soluções particulares distintas de y_1 e y_2 .

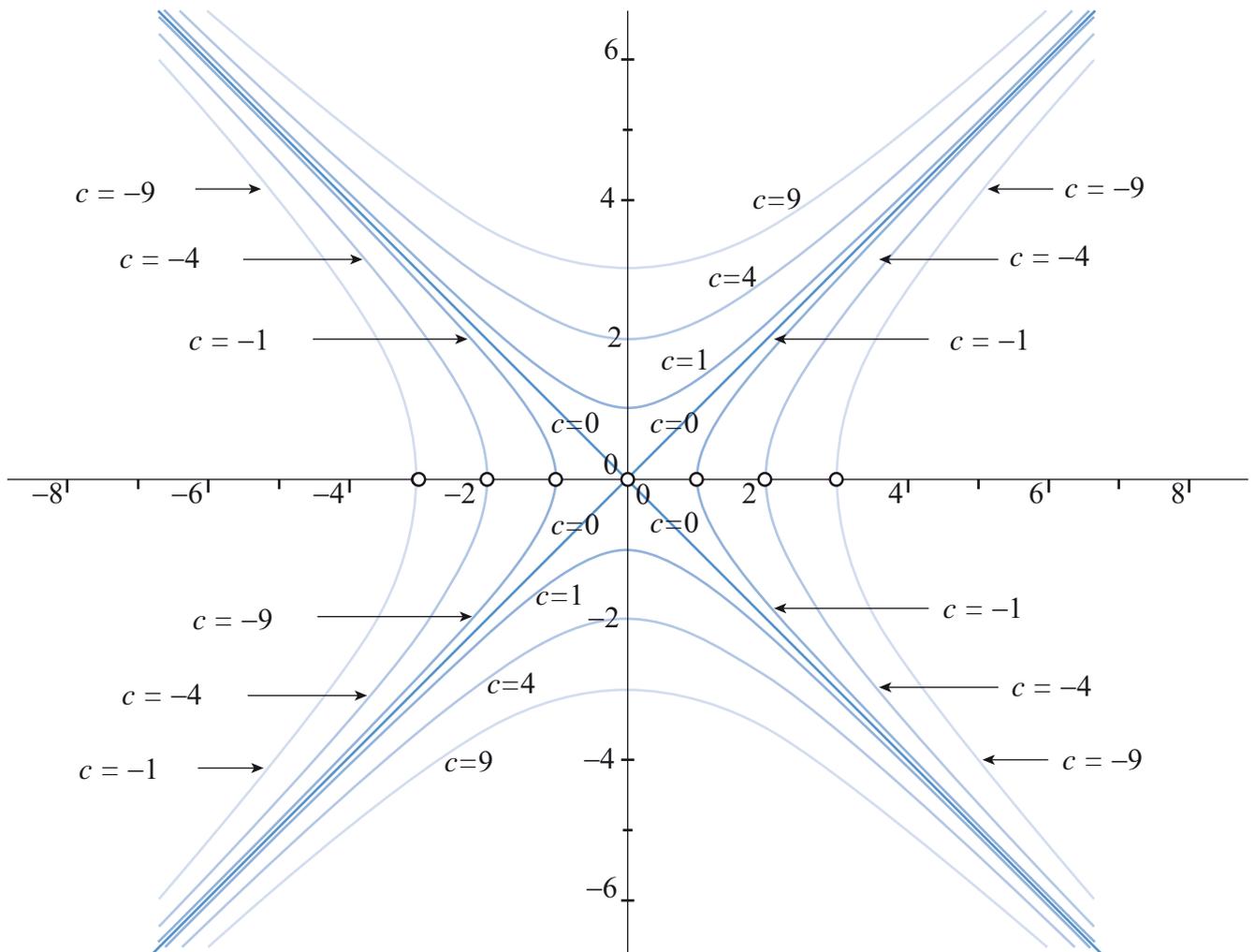


Figura 7.1

Note que nenhuma curva corta o eixo x , pois $y \neq 0$.

- Para $c = 1$, temos 2 soluções: $y_1(x) = \sqrt{x^2 + 1}$; $x \in \mathbb{R}$ e $y_2(x) = -\sqrt{x^2 + 1}$; $x \in \mathbb{R}$.

- Para $c = -1$, temos 4 soluções: $y_1(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $x \in (1, +\infty)$; $y_2(x) = -\sqrt{x^2 - 1}$; $x \in (1, +\infty)$; $y_3(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $x \in (-\infty, -1)$ e $y_4(x) = -\sqrt{x^2 - 1}$; $x \in (-\infty, -1)$.

- Para $c = 0$, temos também 4 soluções: $y_1(x) = x$; $x > 0$; $y_2(x) = x$; $x > 0$; $y_3(x) = -x$; $x > 0$ e $y_4(x) = -x$; $x < 0$.

Observação 7.3. O esboço gráfico anterior tem como objetivo apenas dar uma ideia da infinidade de soluções particulares possíveis.

Voltemos à condição $y(3) = -2$:

- Temos a solução geral: $y = \pm\sqrt{x^2 + c}$.

- Foi dado na questão: $y(3) = -2$.

- Assim: $y(3) = -2 \Leftrightarrow -\sqrt{3^2 + c} = -2 \Leftrightarrow 9 + c = 4 \Leftrightarrow c = -5$.

Então, $y = \pm\sqrt{x^2 - 5}$. Como $y(3) = -2 < 0$, a solução do problema é: $y = -\sqrt{x^2 - 5}$, definida em $(\sqrt{5}, +\infty)$.

Exemplo 7.9: A função $y = e^{\frac{x^2}{2} + c}$ (solução geral) satisfaz a ED $\frac{dy}{dx} = xy$.

Determinemos $y = f(x)$ que satisfaça a condição inicial: $f(1) = 1$.

Solução: De fato, $y = e^{\frac{x^2}{2} + c}$ satisfaz a ED, pois:

$$y = e^{\frac{x^2}{2} + c}, y' = xe^{\frac{x^2}{2} + c} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = xe^{\frac{x^2}{2} + c} = xy$$

Temos um PVI. Determinemos agora o valor da constante C , sabendo que $f(1) = 1$:

$$f(1) = e^{\frac{1^2}{2} + C} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Então, $y = e^{\frac{x^2-1}{2}}$ é a solução do problema de valor inicial dado.

7.5 Equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem

Definição 7.1. As equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem são equações que podem ser escritas como:

$$F(t, y, y') = 0$$

Vamos estudar equações de 1ª ordem que podem ser escritas na forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

Uma *solução* de uma equação diferencial em um intervalo I é uma função $y(t)$ derivável definida no intervalo I que satisfaça a equação neste intervalo.

7.5.1 Equações diferenciais lineares

As equações lineares de 1ª ordem são equações que podem ser escritas como:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$$

- Se $p(t) = 0$

Se $p(t) = 0$, a equação anterior fica $\frac{dy}{dt} = q(t)$ e para resolvê-la integramos ambos os lados da equação. Assim, a solução geral desta equação é dada por:

$$\int \frac{dy}{dt} = \int q(t) dt \Rightarrow y(t) = \int q(t) dt + C$$

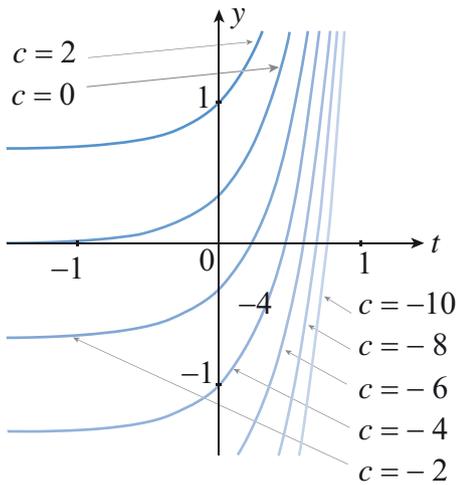


Figura 7.2

Observação 7.4: Na resolução de uma ED, você terá frequentemente que utilizar, digamos, integração por partes, frações parciais ou possivelmente uma substituição. Será proveitoso gastar algum tempo na revisão de algumas técnicas de integração (Cálculo II).

Exemplo 7.10: A equação $\frac{dy}{dt} = e^{3t}$ é uma ED linear (com $p(t) = 0$ e $q(t) = e^{3t}$) e pode ser resolvida por integração direta obtendo $y(t) = \int e^{3t} dt = \frac{e^{3t}}{3} + c$, que é a solução geral da equação diferencial dada.

Observe na Figura 7.2 a representação gráfica de algumas soluções particulares.

Exemplo 7.11: Calcular a solução geral da equação $\frac{dy}{dt} = \text{sen}(2t)$.

Solução: A equação $\frac{dy}{dt} = \text{sen}(2t)$ é uma ED linear (com $p(t) = 0$ e $q(t) = \text{sen}(2t)$) e pode ser resolvida por integração direta, obtendo

$$y(t) = \int \text{sen}(2t) dt = -\frac{\cos(2t)}{2} + c,$$

que é a solução geral da equação diferencial dada.

O próximo exemplo consiste na solução de um PVI.

Exemplo 7.12: Calcule a solução da equação $y' - (x^2 + x) = 0$, que satisfaça $y(1) = 1$.

Solução: A equação $y' - (x^2 + x) = 0$ pode ser escrita da forma $\frac{dy}{dx} = x^2 + x$, que é uma ED linear (com $p(x) = 0$ e $q(x) = x^2 + x$), e pode ser resolvida por integração direta, obtendo

$$y(x) = \int (x^2 + x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c,$$

que é a solução geral da equação diferencial dada.

Como a equação deve satisfazer $y(1) = 1$, vem:

$$y(1) = \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{6}$$

Portanto, $y(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{6}$ é a solução do problema de valor inicial dado.

- **Caso Geral**

Considere a ED $\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$. Vamos definir uma função auxiliar $u(t)$ de forma que, ao multiplicarmos a equação por esta função $u(t)$, a equação resultante seja do tipo $\frac{dy}{dt} = q(t)$, a qual já vimos como resolver.

Considere a função $u(t) = e^{\int p(t)dt}$. Essa função é chamada *fator integrante da função linear* (adiante mostraremos porque essa função deve ter esta forma).

Primeiramente, observe que:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= e^{\int p(t)dt} \frac{d}{dt} \left(\int p(t) dt \right) \\ &= e^{\int p(t)dt} p(t) \\ &= u(t)p(t) \end{aligned} \quad (*)$$

Multiplicando-se ambos os membros de $\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$ por $u(t)$, temos:

$$u(t) \frac{dy}{dt} + u(t)p(t)y = u(t)q(t)$$

Por (*), vem:

$$u(t) \frac{dy}{dt} + \frac{du}{dt} y = u(t)q(t)$$

Como o lado esquerdo desta última equação é a derivada de um produto, podemos escrever:

$$\frac{d}{dt}(u(t)y(t)) = u(t)q(t),$$

que é uma equação do tipo $\frac{dy}{dt} = q(t)$ cuja solução é dada por:

$$u(t)y(t) = \int u(t)q(t) dt + c \quad (**)$$

Como $u(t) \neq 0$, dividimos (**) por $u(t)$, obtendo:

$$y(t) = \frac{1}{u(t)} \left(\int u(t)q(t) dt + c \right)$$

Observe agora como se chega ao fator integrante $u(t) = e^{\int p(t) dt}$.

O fator integrante $u(t)$ deve ser uma função que satisfaz a ED

$\frac{du}{dt} = p(t)u(t)$. Supondo $u(t) \neq 0$, vem:

$$\frac{du}{dt} \times \frac{1}{u(t)} = p(t)u(t) \times \frac{1}{u(t)} \Rightarrow \frac{1}{u(t)} \frac{du}{dt} = p(t),$$

que pode ser escrita como:

$$\frac{d}{du} (\ln|u(t)|) \frac{du}{dt} = p(t).$$

Pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{d}{dt} (\ln|u(t)|) = p(t),$$

que é uma equação do tipo $\frac{dy}{dt} = q(t)$ e, portanto, pode ser resolvida integrando-se ambos os membros da equação. Assim:

$$\ln|u(t)| = \int p(t) dt + c_1.$$

Aplicando-se a exponencial a ambos os membros, obtemos:

$$u(t) = \pm e^{c_1} e^{\int p(t) dt} = c e^{\int p(t) dt}.$$

Como estamos interessados em apenas um fator integrante, podemos tomar $c = 1$ e obtemos:

$$u(t) = e^{\int p(t) dt}.$$

Exemplo 7.13: Ache a solução geral da equação $\frac{dy}{dx} + y = e^x$.

Solução: Na equação $\frac{dy}{dx} + y = e^x$ (linear), temos: $\begin{cases} p(x) = 1 \\ q(x) = e^x \end{cases}$

Determinemos o fator integrante $u(x) = e^{\int p(x) dx}$:

$$u(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\int 1 dx} = e^x$$

Assim, temos:

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} \left(\int u(x)q(x) dx + c \right)$$

$$y(x) = \frac{1}{e^x} \left(\int e^x \cdot e^x dx + c \right)$$

$$y(x) = \frac{1}{e^x} \left(\int e^{2x} dx + c \right)$$

$$y(x) = \frac{1}{e^x} \left(\frac{e^{2x}}{2} + c \right)$$

$$y(x) = \frac{e^x}{2} + ce^{-x}$$

Logo, a solução geral da ED $\frac{dy}{dx} + y = e^x$ é a função $f(x) = \frac{e^x}{2} + ce^{-x}$.

Exemplo 7.14: Encontre a solução geral da equação $x \frac{dy}{dx} - 3y = x^2$.

Solução: A ED pode ser escrita na forma $\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x$, em que

$$\begin{cases} p(x) = -\frac{3}{x} \\ q(x) = x \end{cases}$$

Assim, o fator integrante é $u(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln|x|} = \frac{1}{x^3}$.

Dessa forma, temos:

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} \left(\int u(x)q(x) dx + c \right)$$

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{x^3}} \left[\int \frac{1}{x^3} x dx + c \right]$$

$$y(x) = x^3 \left[\int x^{-2} dx + c \right]$$

$$y(x) = x^3 \left[-\frac{1}{x} + c \right]$$

$$y(x) = -x^2 + cx^3$$

Logo, a solução geral da ED $x \frac{dy}{dx} - 3y = x^2$ é a função

$$y = f(x) = -x^2 + cx^3.$$

Exemplo 7.15: Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} + 2ty = t, \quad y(0) = -3.$$

Solução: Na equação $\frac{dy}{dt} + 2ty = t$ (linear), temos: $\begin{cases} p(t) = 2t \\ q(t) = t \end{cases}$

Determinemos o fator integrante $u(t) = e^{\int p(t)dt}$:

$$u(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int 2t dt} = e^{t^2}$$

Assim, temos:

$$y(t) = \frac{1}{u(t)} \left(\int u(t)q(t) dt + c \right)$$

$$y(t) = \frac{1}{e^{t^2}} \left(\int e^{t^2} \cdot t dt + c \right)$$

$$y(t) = \frac{1}{e^{t^2}} \left(\int te^{t^2} dt + c \right)$$

$$y(t) = \frac{1}{e^{t^2}} \left(\frac{e^{t^2}}{2} + c \right)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} + ce^{-t^2}$$

A condição $\frac{dy}{dt} + 2ty = t$ e $y(0) = -3$ nos fornece o valor de c :

$$y(0) = \frac{1}{2} + ce^{-0^2} = -3 \Rightarrow c = -\frac{7}{2}$$

Logo, a solução para o problema de valor inicial é a função

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}e^{-t^2}.$$

7.5.2 Equações diferenciais de variáveis separáveis

Uma equação diferencial de 1ª ordem de *variáveis separáveis* pode ser resolvida por integração, quando for possível reunir todos os termos em “ y ” com “ dy ” e todos os termos em “ x ” com “ dx ”, isto é, se for possível escrever a equação diferencial sob a forma:

$$f(y) dy + g(x) dx = 0$$

Então, a solução geral será dada por:

$$\int f(y) dy + \int g(x) dx = c,$$

em que “ c ” é uma constante arbitrária.

Exemplo 7.16: Ache a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$(x+1)\frac{dy}{dx} = x(y^2 + 1).$$

Solução:

Reescrevemos a equação em sua forma diferencial separando as variáveis e integrando:

$$\begin{aligned} (x+1)\frac{dy}{dx} = x(y^2 + 1) &\Rightarrow \frac{dy}{y^2 + 1} = \frac{x}{x+1} dx \\ \int \frac{dy}{y^2 + 1} &= \int \frac{x}{x+1} dx \\ \text{arc tg } y &= x - \ln|x+1| + c \end{aligned}$$

Logo, a solução da ED dada é a função $y = \text{tg} [x - \ln|x+1| + c]$.

Exemplo 7.17: Ache a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Solução:

Reescrevemos a equação em sua forma diferencial separando as variáveis e integrando:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = y &\Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \\ \int \frac{dy}{y} &= \int dx \\ \ln|y| &= x + c \end{aligned}$$

Da definição de logaritmo, obtemos:

$$y = e^{x+c}$$

Logo, a solução da ED dada é a função $y = e^{x+c}$.

Exemplo 7.18: Ache a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y}.$$

Solução:

Reescrevemos a equação em sua forma diferencial separando as variáveis e integrando:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} = e^x \cdot e^{-y} \Rightarrow e^y dy = e^x dx$$

$$e^y dy - e^x dx = 0$$

$$\int e^y dy - \int e^x dx = 0$$

$$e^y - e^x = c$$

$$e^y = e^x + c$$

$$y = \ln(e^x + c)$$

Logo, a solução da ED dada é a função $y = \ln(e^x + c)$.

Exemplo 7.19: Ache a solução da equação $\frac{dy}{dx} + xy^2 = 0$ que satisfaça $y(1) = 3$.

Solução:

Reescrevemos a equação em sua forma diferencial separando as variáveis e integrando:

$$\frac{dy}{dx} + xy^2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} + x dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y^2} + \int x dx = 0$$

$$-\frac{1}{y} + \frac{x^2}{2} = c$$

$$\frac{-2 + x^2 y}{2y} = c$$

$$-2 + x^2 y = 2yc$$

$$x^2 y - 2yc = 2$$

$$y(x^2 - 2c) = 2$$

$$y = \frac{2}{x^2 - 2c}$$

Fazendo $k = 2c$, vem: $y = \frac{2}{x^2 - k}$.

Logo, a solução geral da ED dada é a função $y = \frac{2}{x^2 - k}$.

No entanto, aqui se trata de um PVI, pois a solução da equação deve satisfazer $y(1) = 3$. Assim:

$$y(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{2}{1^2 - k} = 3 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}.$$

Logo, a solução do PVI é a função $y = \frac{2}{x^2 - \frac{1}{3}} = \frac{6}{3x^2 - 1}$.

Exemplo 7.20: Ache a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Solução:

Reescrevemos a equação em sua forma diferencial separando as variáveis e integrando:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \\ \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} &= 0 \\ \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x} &= 0 \\ \ln|y| - \ln|x| &= c \\ \ln\left|\frac{y}{x}\right| &= c \\ \frac{y}{x} &= e^c \\ y &= e^c x \end{aligned}$$

Logo, a solução da ED dada é a função $y = e^c x$.

Exemplo 7.21: Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, y(4) = 3.$$

Solução:

Reescrevemos a equação em sua forma diferencial separando as variáveis e integrando:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \\ ydy + xdx &= 0 \\ \int y dy + \int x dx &= 0 \\ \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} &= c \\ y^2 + x^2 &= 2c \\ y^2 + x^2 &= k^2 \quad [k = 2c]\end{aligned}$$

Esta solução (geral) representa uma família de circunferências concêntricas. No entanto, aqui se trata de um PVI, pois a solução da equação deve satisfazer $y(4) = 3$. Assim:

$$4^2 + 3^2 = 25 = k^2$$

Logo, o problema de valor inicial determina $x^2 + y^2 = 25$. Em vista do Teorema 7.1, podemos concluir que esta é a única circunferência que passa pelo ponto $(4, 3)$.

7.5.3 Equações diferenciais homogêneas

Antes de considerar o conceito de *equação diferencial homogênea* e seu método de solução, precisamos primeiro examinar a natureza de uma *função homogênea*. Começamos com a definição desse conceito.

- **Função Homogênea**

Se uma função f satisfaz

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y),$$

para algum número real n , então dizemos que f é uma *função homogênea de grau n* .

Exemplo 7.22

a) $f(x, y) = x^2 - 3xy + 5y^2$ é uma função homogênea de grau 2.

De fato,

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^2 - 3(\lambda x)(\lambda y) + 5(\lambda y)^2 \\ &= \lambda^2 x^2 - 3\lambda^2 xy + 5\lambda^2 y^2 \\ &= \lambda^2 (x^2 - 3xy + 5y^2) \\ &= \lambda^2 f(x, y) \end{aligned}$$

b) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ é uma função homogênea de grau $\frac{2}{3}$.

De fato,

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \sqrt[3]{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} \\ &= \sqrt[3]{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} \\ &= \sqrt[3]{\lambda^2 (x^2 + y^2)} \\ &= \lambda^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{x^2 + y^2} \\ &= \lambda^{\frac{2}{3}} f(x, y) \end{aligned}$$

c) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 1$ não é uma função homogênea.

De fato,

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= x^3 + y^3 + 1 \\ &= (\lambda x)^3 + (\lambda y)^3 + 1 \\ &= \lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3 + 1 \\ &= \lambda^3 (x^3 + y^3) + 1 \\ &\neq \lambda^3 f(x, y) \end{aligned}$$

d) $f(x, y) = \frac{x}{2y} + 4$ é uma função homogênea de grau 0.

De fato,

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \frac{\lambda x}{2\lambda y} + 4 \\ &= \frac{x}{2y} + 4 \\ &= \lambda^0 \left(\frac{x}{2y} + 4 \right) \\ &= \lambda^0 f(x, y) \end{aligned}$$

- **Equação Homogênea**

Uma equação diferencial da forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

é chamada de *equação diferencial homogênea* se ambos os coeficientes M e N são funções homogêneas de mesmo grau, ou seja, $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ é homogênea se

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n M(x, y)$$

e

$$N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n N(x, y).$$

Uma equação diferencial homogênea $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ pode ser resolvida por meio de uma substituição algébrica. Especificamente, a substituição $y = ux$ ou $x = vy$, em que u e v são as novas variáveis independentes, transformará a equação em uma equação diferencial de 1ª ordem separável. Para ver isso, seja $y = ux$; então, sua diferencial é $dy = u dx + x du$.

Substituindo $y = ux$ e $dy = u dx + x du$ em $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, vem:

$$M(x, ux)dx + N(x, ux)[u dx + x du] = 0.$$

Pela homogeneidade das funções, podemos escrever:

$$x^n M(\lambda, u)dx + x^n N(\lambda, u)[u dx + x du] = 0$$

ou

$$[M(\lambda, u) + uN(\lambda, u)]dx + xN(\lambda, u)d = 0.$$

Assim,

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(\lambda, u) du}{M(\lambda, u) + uN(\lambda, u)} = 0. \quad (*)$$

Após termos resolvido (*), a solução da equação original poderá ser obtida substituindo-se u por $\frac{y}{x}$ (retornando à variável original).

Observação 7.5. A fórmula anterior não deve ser memorizada. O melhor é repetir o processo sempre que for necessário. A substituição $x = vy$ também leva a uma equação separável e sua verificação é deixada a cargo do leitor.

Exemplo 7.23: Ache a solução geral da equação:

$$(x^2 + y^2)dx + 2xy dy = 0.$$

Solução:

Na ED dada, temos:

$$\begin{cases} M(x, y) = (x^2 + y^2) \\ N(x, y) = 2xy. \end{cases}$$

Vamos verificar se M e N são funções homogêneas de mesmo grau.

$$M(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 = \lambda^2(x^2 + y^2) = \lambda^2 M(x, y)$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = 2(\lambda x)(\lambda y) = 2\lambda^2 xy = \lambda^2(2xy) = \lambda^2 N(x, y)$$

Então, M e N são funções homogêneas de mesmo grau. Neste caso, de grau 2, e, portanto, a ED é homogênea.

Fazendo $y = vx$ e $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} = v dx + x dv$ (observe a regra da cadeia), transformamos a ED (homogênea) numa ED de variáveis separáveis, como segue:

$$(x^2 + v^2 x^2)dx + 2x^2 v(v dx + x dv) = 0.$$

Aplicando a propriedade distributiva e colocando o termo em evidência, temos:

$$\begin{aligned} x^2 dx + v^2 x^2 dx + 2x^2 v^2 dx + 2x^3 v dv &= 0 \\ x^2(1 + 3v^2) dx + 2x^3 v dv &= 0 \\ x^2[(1 + 3v^2) dx + 2xv dv] &= 0 \\ (1 + 3v^2) dx + 2xv dv &= 0 \\ \frac{dx}{2x} + \frac{v}{1 + 3v^2} dv &= 0, \end{aligned}$$

que é uma ED de variáveis separáveis. Assim, vem:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{2x} + \frac{v}{1+3v^2} dv = 0 &\Rightarrow \int \frac{dx}{2x} + \int \frac{v}{1+3v^2} dv = 0 \\ \int \frac{dx}{2x} &= -\int \frac{v}{1+3v^2} dv \\ \frac{1}{2} \ln|x| &= -\frac{1}{6} \ln(1+3v^2) + c \\ \ln|x| + \frac{1}{3} \ln(1+3v^2) &= c \\ 3 \ln|x| + \ln(1+3v^2) &= 3c \\ \ln|x^3(1+3v^2)| &= 3c \\ x^3(1+3v^2) &= e^{3c} \\ x^3(1+3v^2) &= k \quad [k = e^{3c}] \end{aligned}$$

Em termos de "x" e "y", a solução será:

$$\begin{aligned} x^3(1+3v^2) &= k \\ x^3 \left(1 + 3 \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right) &= k \\ x(x^2 + 3y^2) &= k \end{aligned}$$

Logo, a solução da ED dada é a função $x(x^2 + 3y^2) = k$.

Exemplo 7.24: Ache a solução geral da equação:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{x}.$$

Solução:

Na ED dada, temos:

$$\begin{cases} M(x, y) = y + x \\ N(x, y) = -x \end{cases}.$$

Vamos verificar se M e N são funções homogêneas de mesmo grau.

$$\begin{aligned} M(\lambda x, \lambda y) &= \lambda y + \lambda x = \lambda(y+x) = \lambda M(x, y) \\ N(\lambda x, \lambda y) &= \lambda(-x) = \lambda N(x, y) \end{aligned}$$

Então, M e N são funções homogêneas de mesmo grau. Neste caso, de grau 1, e, portanto, a ED é homogênea.

Fazendo $y = vx$ e $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$ (observe a regra da cadeia), transformamos a ED (homogênea) numa ED de variáveis separáveis, como segue:

$$\begin{aligned}v + x \frac{dv}{dx} &= \frac{vx + x}{x} \\v + x \frac{dv}{dx} &= \frac{x(v+1)}{x} \\v + x \frac{dv}{dx} &= v + 1 \\x \frac{dv}{dx} &= 1 \\\frac{dx}{x} - dv &= 0,\end{aligned}$$

que é uma ED de variáveis separáveis. Assim, vem:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{x} - dv = 0 &\Rightarrow \int \frac{dx}{x} - \int dv = 0 \\&\ln|x| - v = c \\&\ln|x| = v + c\end{aligned}$$

Em termos de "x" e "y", a solução será:

$$\begin{aligned}\ln|x| &= v + c \\\ln|x| &= \frac{y}{x} + c \\\ln|x| &= \frac{y + cx}{x} \\x \ln|x| &= y + cx \\y &= x(\ln x - c) \\y &= x(\ln x + \ln k^{-1}) [c = \ln k^{-1}] \\y &= x \ln(k^{-1}x) \\y &= x \ln(\rho x) [\rho = k^{-1}]\end{aligned}$$

Logo, a solução da ED dada é a função $y = x \ln(\rho x)$.

Exemplo 7.25: Ache a solução geral da equação:

$$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0.$$

Solução:

Na ED dada, temos

$$\begin{cases} M(x, y) = x^2 + y^2 \\ N(x, y) = x^2 - xy \end{cases} .$$

Vamos verificar se M e N são funções homogêneas de mesmo grau.

$$M(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 = \lambda^2(x^2 + y^2) = \lambda^2 M(x, y)$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - (\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2(x^2 - xy) = \lambda^2 N(x, y)$$

Então, M e N são funções homogêneas de mesmo grau. Neste caso, de grau 2, e, portanto, a ED é homogênea.

Fazendo $y = ux$ e $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} \Rightarrow dy = u dx + x du$ (observe a regra da cadeia), transformamos a ED (homogênea) numa ED de variáveis separáveis, como segue:

$$\begin{aligned} (x^2 + u^2 x^2) dx + (x^2 - ux^2)[u dx + x du] &= 0 \\ x^2 dx + \cancel{x^2 u^2 dx} + x^2 u dx + x^3 du - \cancel{u^2 x^2 dx} - ux^3 du &= 0 \\ x^2(1+u) dx + x^3(1-u) du &= 0 \\ \frac{dx}{x} + \frac{1-u}{1+u} du &= 0, \end{aligned}$$

que é uma ED de variáveis separáveis. Assim, vem:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} + \frac{1-u}{1+u} du = 0 &\Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{1-u}{1+u} du = 0 \\ \int \frac{dx}{x} - \int du + 2 \int \frac{du}{1+u} &= 0 \\ \ln|x| - u + 2 \ln|1+u| &= c \\ \ln|x| - u + 2 \ln|1+u| &= \ln|c| \end{aligned}$$

Em termos de "x" e "y", a solução será:

$$\begin{aligned} \ln|x| - u + 2 \ln|1+u| &= \ln|c| \\ \ln|x| - \frac{y}{x} + 2 \ln\left|1 + \frac{y}{x}\right| &= \ln|c| \end{aligned}$$

Usando as propriedades do logaritmo, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \ln|x| - \frac{y}{x} + 2 \ln \left| 1 + \frac{y}{x} \right| &= \ln|c| \\ \ln|x| - \frac{y}{x} + 2 \ln \left| \frac{x+y}{x} \right| &= \ln|c| \\ \ln|x| + \ln \left(\frac{x+y}{x} \right)^2 &= \ln|c| + \frac{y}{x} \\ \ln \left(\frac{x(x+y)^2}{x^2} \right) &= \ln c + \frac{y}{x} \\ \ln \left(\frac{(x+y)^2}{x} \right) &= e^{\ln c + \frac{y}{x}} \\ \frac{(x+y)^2}{x} &= e^{\ln c} e^{\frac{y}{x}} \\ (x+y)^2 &= cxe^{\frac{y}{x}} \end{aligned}$$

Logo, a solução da ED dada é a função $(x+y)^2 = cxe^{\frac{y}{x}}$.

7.5.4 Equações diferenciais exatas

As equações exatas são equações que podem ser escritas na forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (7.13)$$

em que as funções $M(x, y)$ e $N(x, y)$ satisfazem

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (7.14)$$

em um retângulo da forma $\{(t, y) \subset \mathbb{R}^2 / \alpha < t < \beta, \gamma < y < \theta\}$, em que

$M(x, y), N(x, y), \frac{\partial M}{\partial y}$ e $\frac{\partial N}{\partial x}$ são contínuas.

Se $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, então vamos mostrar que existe uma função $U(x, y)$, tal que

$$M(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{e} \quad N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (7.15)$$

Substituindo-se esses valores de $M(x, y)$ e de $N(x, y)$ em (7.13), obtemos:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (7.16)$$

Mas pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}(U(x, y(x))) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

Então, (7.16) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx}(U(x, y(x))) = 0. \quad (7.17)$$

A equação (7.17) é do tipo $\frac{dY}{dx} = q(x)$, em que $Y(x) = U(x, y(x))$ e $f(x) = 0$.

Assim, a solução geral de (7.17) é, portanto, solução geral de (7.13), dada por

$$U(x, y(x)) = C. \quad (7.18)$$

Vamos agora ver como encontrar a função $U(x, y)$:

- Integrando-se a 1ª equação de (7.15) em relação a x , obtemos

$$U(x, y) = \int M(x, y) dx + h(y), \quad (7.19)$$

em que $h(y)$ é uma função a ser determinada.

- $U(x, y)$ dada por (7.19) é solução da 1ª equação de (7.15), pois derivando a equação (7.19) em relação a x obtemos a 1ª equação de (7.15).
- Substituindo-se a função encontrada em (7.19) na 2ª equação de (7.15), obtemos

$$N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) + \frac{dh}{dy} = \int \frac{\partial M}{\partial y} dx + \frac{dh}{dy}.$$

Daí obtemos uma equação diferencial para $h(y)$:

$$\frac{dh}{dy} = N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx. \quad (7.20)$$

- Se a equação (7.13) é exata, o lado esquerdo de (8) não depende de x , pois, usando (7.14), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

A equação (7.20) é do tipo $\frac{dZ}{dy} = f(y)$, em que $Z(y) = h(y)$ e $f(y) = N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx$. Assim, uma solução é dada por

$$h(y) = \int N(x, y) dy - \int \left(\int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy.$$

- Substituindo-se esse valor de $h(y)$ em (7.19), obtemos

$$U(x, y) = \int M(x, y) dx + \int N(x, y) dy - \int \left(\int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy.$$

- Portanto, a solução geral da equação exata

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

é por (7.18),

$$U(x, y) = \int M(x, y) dx + \int N(x, y) dy - \int \left(\int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy = C.$$

Observação 7.6. A fórmula anterior não deve ser memorizada. O melhor é repetir o processo sempre que for necessário. O que fizemos aqui foi mostrar o caminho a ser seguido para resolver uma equação exata.

Exemplo 7.26

- a) $2xy dx + (x^2 - 1) dy = 0$ é uma equação exata.

De fato,

$$\left. \begin{array}{l} M(x, y) = 2xy \\ N(x, y) = x^2 - 1 \end{array} \right\} \frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

- b) $(e^{2y} - y \cos xy) dx + (2xe^{2y} - x \cos xy + 2y) dy = 0$ é uma equação exata.

De fato,

$$\left. \begin{array}{l} M(x, y) = e^{2y} - y \cos xy \\ N(x, y) = 2xe^{2y} - x \cos xy + 2y \end{array} \right\} \frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} - \cos xy + (xy) \operatorname{sen} xy = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

c) $\left(1 + \frac{y}{x}\right)dx + \ln x dy = 0$ é uma equação exata.

De fato,

$$\left. \begin{array}{l} M(x, y) = 1 + \frac{y}{x} \\ N(x, y) = \ln x \end{array} \right\} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

d) $(x + y)dx + x \ln x dy = 0$ não é uma equação exata.

De fato,

$$\left. \begin{array}{l} M(x, y) = x + y \\ N(x, y) = x \ln x \end{array} \right\} \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq (\ln x + 1) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Exemplo 7.27: Ache a solução da equação $(x^2 - y^2)dx - 2xy dy = 0$.

Solução:

Temos

$$\left. \begin{array}{l} M(x, y) = x^2 - y^2 \\ N(x, y) = -2xy \end{array} \right\} \frac{\partial M}{\partial y} = -2y = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, temos que a ED é exata. Portanto, existe uma função $U(x, y)$, tal que $M(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}$ e $N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$. Assim:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int M(x, y) dx + \int N(x, y) dy - \int \left(\int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy = C \\ &= \int (x^2 - y^2) dx - \int 2xy dy + \int (\int 2y dx) dy = C \\ &= \frac{x^3}{3} - xy^2 - xy^2 + \int 2xy dy = C \\ &= \frac{x^3}{3} - xy^2 - xy^2 + xy^2 = C \\ &= \frac{x^3}{3} - xy^2 = C \end{aligned}$$

Logo, $\frac{1}{3}x^3 - xy^2 = C$ é solução da ED dada.

Exemplo 7.28: Ache a solução da equação

$$(x^3 + y^2) dx + (2xy + \cos y) dy = 0.$$

Solução:

Temos

$$\left. \begin{array}{l} M(x, y) = x^3 + y^2 \\ N(x, y) = 2xy + \cos y \end{array} \right\} \frac{\partial M}{\partial y} = 2y = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, temos que a ED é exata. Portanto, existe uma fun-

ção $U(x, y)$, tal que $M(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}$ e $N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$. Assim:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int M(x, y) dx + \int N(x, y) dy - \int \left(\int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy = C \\ &= \int (x^2 - y^2) dx - \int 2xy dy + \int (\int 2y dx) dy = C \\ &= \frac{x^3}{3} - xy^2 - xy^2 + \int 2xy dy = C \\ &= \frac{x^3}{3} - xy^2 - xy^2 + xy^2 = C \\ &= \frac{x^3}{3} - xy^2 = C \end{aligned}$$

Logo, $\frac{1}{4}x^4 + xy^2 + \sin y = C$ é solução da ED dada.

Exemplo 7.29: Ache a solução da equação $2xy dx + (x^2 - 1) dy = 0$.

Solução:

Temos

$$\left. \begin{array}{l} M(x, y) = 2xy \\ N(x, y) = x^2 - 1 \end{array} \right\} \frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, temos que a ED é exata. Portanto, existe uma fun-

ção $U(x, y)$, tal que $M(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}$ e $N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$. Assim:

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \int M(x, y) dx + \int N(x, y) dy - \int \left(\int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy = C \\
 &= \int 2xy dx + \int (x^2 - 1) dy - \int \left(\int 2x dx \right) dy = C \\
 &= x^2 y + x^2 y - y - \int x^2 dy = C \\
 &= x^2 y + x^2 y - y - x^2 y = C \\
 &= x^2 y - y = C
 \end{aligned}$$

Logo, $xy^2 - y = C$ é solução da ED dada.

Exemplo 7.30: Ache a solução da equação $\left(1 + \frac{y}{x}\right) dx + \ln x dy = 0$.

Solução:

Temos

$$\left. \begin{aligned}
 M(x, y) &= 1 + \frac{y}{x} \\
 N(x, y) &= \ln x
 \end{aligned} \right\} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, temos que a ED é exata. Portanto, existe uma função

$U(x, y)$, tal que $M(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}$ e $N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$. Assim:

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \int M(x, y) dx + \int N(x, y) dy - \int \left(\int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy = C \\
 &= \int \left(1 + \frac{y}{x} \right) dx + \int \ln x dy - \int \left(\int \frac{1}{x} dx \right) dy = C \\
 &= x + y \ln x + y \ln x - \int \ln x dy = C \\
 &= x + y \ln x + y \ln x - y \ln x = C \\
 &= x + y \ln x = C
 \end{aligned}$$

Logo, $x + y \ln x = C$ é solução da ED dada.

- **Fator Integrante**

Considere uma ED da forma $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$. Se $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$,

a equação *não é exata*. Quando multiplicamos uma equação da forma $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ que não é exata por uma função $u(x, y)$

de forma que a nova equação seja exata, chamamos a função $u(x, y)$ de *fator integrante para a equação exata*.

Exemplo 7.31: Verifique se a equação

$$\left(-\frac{2xy^2}{1+2x^2} - 1 - 2x^2 \right) dx + 2y(1+x^2) dy = 0 \text{ é exata.}$$

Solução:

Para esta equação, temos

$$\left. \begin{array}{l} M(x, y) = -\frac{2xy^2}{1+2x^2} - 1 - 2x^2 \\ N(x, y) = 2y(1+x^2) \end{array} \right\} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{-4xy}{1+2x^2} \neq 2y = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, temos que a ED não é exata. No entanto, se multi-

plicarmos a ED por $u(x) = \frac{1}{1+2x^2}$, obtemos:

$$\left(-\frac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} - 1 \right) dx + \frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2} dy = 0,$$

que é uma ED exata, pois:

$$\left. \begin{array}{l} M(x, y) = -\frac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} - 1 \\ N(x, y) = \frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2} \end{array} \right\} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{-4xy}{(1+2x^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Quando a equação tem um fator integrante que depende apenas de uma das variáveis x ou y , podemos determiná-la da forma como é mostrada no exemplo a seguir.

Exemplo 7.32: Considere a equação

$$\left(-\frac{2xy^2}{1+2x^2} - 1 - 2x^2 \right) dx + 2y(1+x^2) dy = 0$$

e ache o fator de integração para que ela se torne uma ED exata, visto que já mostramos no Exemplo 7.31 que esta ED não é exata.

Solução:

Vamos supor, apenas, que exista uma função $u(x)$, tal que, ao multi-

plicarmos a ED por $u(x)$, a nova equação seja exata. Então,

$$\frac{\partial}{\partial y}(uM) = \frac{\partial}{\partial x}(uN),$$

ou seja,

$$\frac{du}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} u.$$

Assim, reciprocamente, se

$$\frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)}$$

é uma função apenas de x , então uma solução da ED

$$\frac{du}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} u$$

é um fator integrante para a ED

$$\left(-\frac{2xy^2}{1+2x^2} - 1 - 2x^2 \right) dx + 2y(1+x^2) dy = 0.$$

Para a equação

$$\left(-\frac{2xy^2}{1+2x^2} - 1 - 2x^2 \right) dx + 2y(1+x^2) dy = 0,$$

temos que

$$\frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)} = \frac{-4xy}{1+2x^2} - 4xy = \frac{-4xy}{1+2x^2}.$$

Assim, a equação $\frac{du}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} u$ torna-se

$$\frac{du}{dx} = -\frac{4x}{1+2x^2} u,$$

que é uma equação separável que deve satisfazer o fator integrante

$u(x)$ para a equação $\left(-\frac{2xy^2}{1+2x^2}-1-2x^2\right)dx + 2y(1+x^2)dy = 0$.

Multiplicando a equação $\frac{du}{dx} = -\frac{4x}{1+2x^2}u$ por $\frac{1}{u}$, obtemos

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = -\frac{4x}{1+2x^2}.$$

Como $\frac{1}{u} = \frac{d}{du}(\ln |u|)$, então pela regra da cadeia

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(\ln |u|) \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln |u|) = -\frac{4x}{1+2x^2}$$

ou

$$\frac{d}{dx}(\ln |u|) = -\frac{4x}{1+2x^2}.$$

Integrando-se, obtemos

$$\ln |u(x)| = \int -\frac{4x}{1+2x^2} dx = -\ln |1+x^2| + C_1.$$

Usando propriedades do logaritmo, vem:

$$\ln |u(x)(1+x^2)| = C_1.$$

Aplicando-se a exponencial, obtemos a solução geral para a equação

$$\frac{du}{dx} = -\frac{4x}{1+2x^2}u:$$

$$u(x) = \frac{\pm e^{C_1}}{1+2x^2} = \frac{C}{1+2x^2},$$

que inclui o fator integrante usado no Exemplo 7.31.

Exemplo 7.33: Ache a solução da equação

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0.$$

Solução:

Para esta equação, temos

$$\left. \begin{array}{l} M(x, y) = 3xy + y^2 \\ N(x, y) = x^2 + xy \end{array} \right\} \frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y \neq 2x + y = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, temos que a ED não é exata.

Determinemos

$$\frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)} = \frac{3x + 2y - 2x - y}{x^2 + xy} = \frac{x + y}{x^2 + xy} = \frac{x + y}{x(x + y)} = \frac{1}{x}.$$

Assim,

$$\frac{du}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} u = \frac{1}{x} u.$$

Multiplicando a equação $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} u$ por $\frac{1}{u}$, obtemos

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Como $\frac{1}{u} = \frac{d}{du}(\ln |u|)$, então pela regra da cadeia

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(\ln |u|) \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln |u|) = \frac{1}{x}$$

ou

$$\frac{d}{dx}(\ln |u|) = \frac{1}{x}.$$

Integrando-se, obtemos

$$\ln |u(x)| = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C_1.$$

Então, $u(x) = x$ é a função fator integrante da ED dada.

Multiplicando a ED dada pelo fator integrante $u(x) = x$, a transformamos numa ED exata. Observe:

$$\begin{aligned} x \cdot (3xy + y^2) dx + x \cdot (x^2 + xy) dy &= 0 \\ (3x^2 y + xy^2) dx + (x^3 + x^2 y) dy &= 0 \end{aligned}$$

em que:

$$\left. \begin{aligned} M(x, y) &= 3x^2y + xy^2 \\ N(x, y) &= x^3 + x^2y \end{aligned} \right\} \frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2xy = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Assim, vem:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int M(x, y) dx + \int N(x, y) dy - \int \left(\int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy = C \\ &= \int (3x^2y + xy^2) dx + \int (x^3 + x^2y) dy - \int \left(\int (3x^2 + 2xy) dx \right) dy = C \\ &= x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 - \int (x^3 + x^2y) dy = C \\ &= x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y - \frac{1}{2}x^2y^2 = C \\ &= x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = C \end{aligned}$$

Logo, $x^3y + x^2y^2 = C$ é solução da ED dada.

Exemplo 7.34: Ache a solução geral da equação $2y^2 dx + 3xy dy = 0$.

Solução:

Para esta equação, temos

$$\left. \begin{aligned} M(x, y) &= 2y^2 \\ N(x, y) &= 3xy \end{aligned} \right\} \frac{\partial M}{\partial y} = 4y \neq 3y = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, temos que a ED não é exata.

Determinemos

$$\frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)} = \frac{4y - 3y}{3xy} = \frac{y}{3xy} = \frac{1}{3x}.$$

Assim,

$$\frac{du}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} u = \frac{1}{3x} u.$$

Multiplicando a equação $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} u$ por $\frac{1}{u}$, obtemos

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{1}{3x}.$$

Como $\frac{1}{u} = \frac{d}{du}(\ln |u|)$, então pela regra da cadeia

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(\ln |u|) \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln |u|) = \frac{1}{3x}$$

ou

$$\frac{d}{dx}(\ln |u|) = \frac{1}{3x}$$

Integrando-se, obtemos

$$\ln |u(x)| = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{3} \ln |x| + C_1.$$

Então, $u(x) = \sqrt[3]{x}$ é a função fator integrante da ED dada.

Multiplicando a ED dada pelo fator integrante $u(x) = x^{\frac{1}{3}}$, a transformamos numa ED exata. Observe:

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{3}} \cdot (2y^2) dx + x^{\frac{1}{3}} \cdot (3xy) dy &= 0 \\ 2x^{\frac{1}{3}} y^2 dx + 3x^{\frac{4}{3}} y dy &= 0 \end{aligned}$$

em que:

$$\left. \begin{aligned} M(x, y) &= 2x^{\frac{1}{3}} y^2 \\ N(x, y) &= 3x^{\frac{4}{3}} y \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 4x^{\frac{1}{3}} y = \frac{\partial N}{\partial x} \end{aligned}$$

Assim, vem:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int M(x, y) dx + \int N(x, y) dy - \int \left(\int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy = C \\ &= \int 2x^{\frac{1}{3}} y^2 dx + \int 3x^{\frac{4}{3}} y dy - \int \left(\int 4x^{\frac{1}{3}} y dx \right) dy = C \\ &= \frac{3}{2} x^{\frac{4}{3}} y^2 + \frac{3}{2} x^{\frac{4}{3}} y^2 - 3 \int x^{\frac{4}{3}} y dy = C \\ &= \frac{3}{2} x^{\frac{4}{3}} y^2 + \frac{3}{2} x^{\frac{4}{3}} y^2 - \frac{3}{2} x^{\frac{4}{3}} y^2 = C \\ &= \frac{3}{2} x^{\frac{4}{3}} y^2 = C \end{aligned}$$

Logo, $\frac{3}{2} x^{\frac{4}{3}} y^2 = C$ é solução da ED dada.

Observação 7.7. Às vezes a função fator integrante é do tipo $u = u(y)$. Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 7.35: Resolva a equação $xy \, dx + (2x^2 + 3y^2 - 20) \, dy = 0$.

Solução:

Para esta equação, temos

$$\left. \begin{array}{l} M(x, y) = xy \\ N(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 20 \end{array} \right\} \frac{\partial M}{\partial y} = x \neq 4x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, temos que a ED não é exata.

Determinemos

$$\frac{\frac{\partial N(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial x}}{M(x, y)} = \frac{4x - x}{xy} = \frac{3x}{xy} = \frac{3}{y}.$$

Assim,

$$\frac{du}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}}{M} u = \frac{3}{y} u.$$

Multiplicando a equação $\frac{du}{dy} = \frac{3}{y} u$ por $\frac{1}{u}$, obtemos

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dy} = \frac{3}{y}.$$

Como $\frac{1}{u} = \frac{d}{du}(\ln |u|)$, então pela regra da cadeia

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dy} = \frac{d}{du}(\ln |u|) \frac{du}{dy} = \frac{d}{dy}(\ln |u|) = \frac{3}{y}$$

ou

$$\frac{d}{dy}(\ln |u|) = \frac{3}{y}$$

Integrando-se, obtemos

$$\ln |u(y)| = 3 \int \frac{dy}{y} = 3 \ln |y| + C_1.$$

Então, $u(y) = y^3$ é a função fator integrante da ED dada.

Multiplicando a ED dada pelo fator integrante $u(y) = y^3$, a transformamos numa ED exata. Observe:

$$\begin{aligned} y^3 \cdot (xy) dx + y^3 \cdot (2x^2 + 3y^2 - 20) dy &= 0 \\ xy^4 dx + (2x^2 y^3 + 3y^5 - 20y^3) dy &= 0 \end{aligned}$$

em que:

$$\left. \begin{aligned} M(x, y) &= xy^4 \\ N(x, y) &= 2x^2 y^3 + 3y^5 - 20y^3 \end{aligned} \right\} \frac{\partial M}{\partial y} = 4xy^3 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Assim, vem:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int M(x, y) dx + \int N(x, y) dy - \int \left(\int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy = C \\ &= \int xy^4 dx + \int (2x^2 y^3 + 3y^5 - 20y^3) dy - \int (\int 4xy^3 dx) dy = C \\ &= \frac{1}{2} x^2 y^4 + \frac{1}{2} x^2 y^4 + \frac{1}{2} y^6 - 5y^4 - 2 \int x^2 y^3 dy = C \\ &= \frac{1}{2} x^2 y^4 + \frac{1}{2} x^2 y^4 + \frac{1}{2} y^6 - 5y^4 - \frac{1}{2} x^2 y^4 = C \\ &= \frac{1}{2} x^2 y^4 + \frac{1}{6} y^6 - 5y^4 = C \end{aligned}$$

Logo, $\frac{1}{2} x^2 y^4 + \frac{1}{6} y^6 - 5y^4 = C$ é solução da ED dada.

Exemplo 7.36: Resolva a equação $y dx + (2xy - e^{-2y}) dy = 0$.

Solução:

Tente resolver esta ED você mesmo. Para isso, siga os seguintes passos:

1º passo: Verifique se a ED dada é exata. (Não é.)

2º passo: Encontre o fator integrante $u = u(y) = \frac{e^{2y}}{y}$.

3º passo: Multiplique a ED dada por $u = \frac{e^{2y}}{y}$.

4º passo: Resolva a nova ED, que deverá ser exata.

Resposta: A solução geral é $e^{2y} x - \ln y = c$. (Confira!)

7.6 Aplicações das equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem

As equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, embora sejam as mais simples EDOs, são indispensáveis para a resolução de vários problemas em Física e nas mais diversas áreas. A seguir abordaremos exemplos que evidenciam como as EDOs são importantes para resolver problemas de queda livre (Figura 7.3), quedas amortecidas (Figura 7.4), circuitos, entre outros.

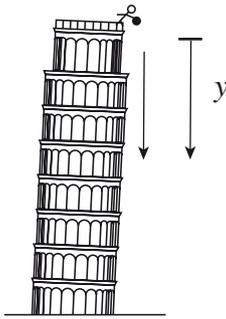


Figura 7.3



Figura 7.4

Exemplo 7.37: Sendo a corrente elétrica expressa por $i(t) = -\frac{dQ}{dt}$, em que Q é a carga e t , o tempo. Se a função que descreve a corrente que percorre um fio é $i(t) = 3e^{-2t}$, determine qual será a carga total que irá passar por uma secção transversal ao fio no primeiro segundo.

Solução: Temos, nesse caso, um problema envolvendo uma ED separável, pois podemos separar a variável independente da variável dependente. Assim:

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} \quad \text{ou} \quad i(t)dt = dQ.$$

Como $i(t) = 3e^{-2t}$ (unidades de corrente), então:

$$dQ = 3e^{-2t} dt$$

Integrando de $t = 0$ a $t = 2$, temos:

$$\int_{t_0}^t dQ = \int_0^2 3e^{-2t} dt$$

$$Q_t - Q_{t_0} = -\frac{3}{2}e^{-2t} \Big|_0^2 .$$

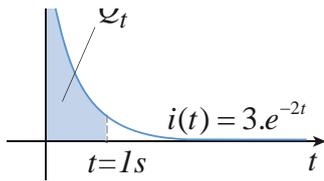


Figura 7.5

Como no tempo $t=0$ a carga que passa pelo fio é nula, $Q_{t_0} = 0$, então:

$$Q_t = -\frac{3}{2}e^{-4} - \left(-\frac{3}{2}e^0\right)$$

$$Q_t = -\frac{3}{2}e^{-4} + \frac{3}{2} \text{ unidades de carga.}$$

Na Figura 7.5, a área em azul representa a carga total que passou pelo fio em 1s, e a curva em azul claro representa a corrente elétrica em função do tempo.

Exemplo 7.38: (Descarga de um capacitor) Seja um capacitor de capacitância C carregado e ligado a um circuito, conforme a Figura 7.6a e a Figura 7.6b, que possui uma chave S (inicialmente desligada) e uma resistência R . Determine:

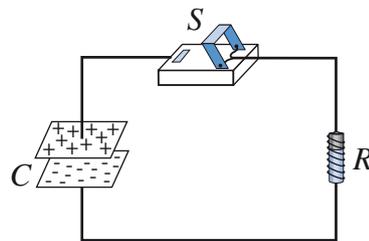


Figura 7.6a

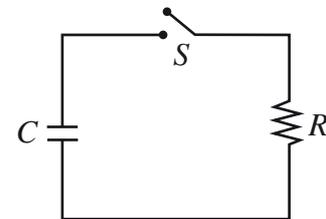


Figura 7.6b

- i) Como varia a carga do capacitor em função do tempo?
- ii) Como varia a corrente em função do tempo a partir do momento que fechamos a chave?

Observação 7.8. Lembre que da Lei de Kirchhoff a variação de potencial (ΔV) deve ser igual a zero ao percorrer um circuito fechado. Lembre, também, que a diferença de potencial ΔV_C entre os terminais do capacitor é dada por $\Delta V_C = \frac{Q}{C}$, em que Q é a carga; e que a queda de potencial devido ao resistor é dada por $\Delta V_R = Ri$, em que i é a corrente elétrica $i(t) = -\frac{dQ}{dt}$.

Solução:

- i. Usando a Lei de Kirchhoff para circuitos descritos na Figura 7.6b, temos que $\Delta V_C - \Delta V_R = 0$, em que $\Delta V_C = \frac{Q}{C}$ e $\Delta V_R = Ri = -R\frac{dQ}{dt}$.

Logo,

$$\frac{Q}{C} - \left(-R \frac{dQ}{dt} \right) = 0$$

$$\frac{Q}{C} = -R \frac{dQ}{dt} \quad \text{ou}$$

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC} dt.$$

Tomando a integral desde a carga Q_0 (inicial) até a carga final Q :

$$\int_{Q_0}^Q \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC} \int_{t_0}^t dt$$

$$\ln \frac{Q}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Q_0 é a constante arbitrária que, nesse caso, é a carga inicial do capacitor.

ii. Temos que a corrente elétrica é dada por

$$i(t) = -\frac{dQ}{dt}.$$

Logo,

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d(Q_0 e^{-\frac{t}{RC}})}{dt}$$

$$I(t) = -\left(-\frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$I(t) = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Perceba, na Figura 7.7, que a corrente cai exponencialmente com o tempo.

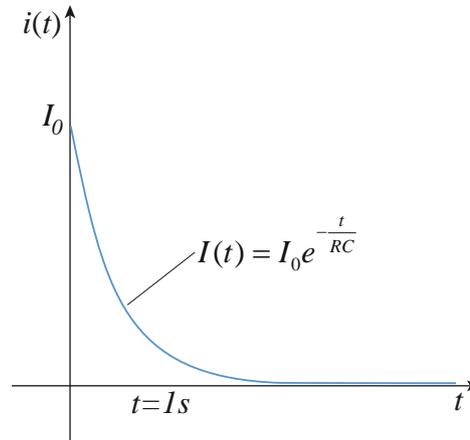


Figura 7.7

Exemplo 7.39: Um paraquedista com o seu paraquedas pesa 70 kg e salta de uma altura de 1.400 metros (Figura 7.8a). O paraquedas abre automaticamente após 5 segundos de queda, conforme a Figura 7.8b. Sabe-se que a velocidade limite é de 5 m/s. Determine:

- a) a velocidade que o paraquedista atinge no momento que o paraquedas abre;
- b) o tempo que demora para a velocidade chegar a 5,1 m/s;
- c) a altura em função do tempo.

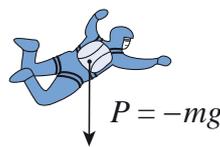


Figura 7.8a

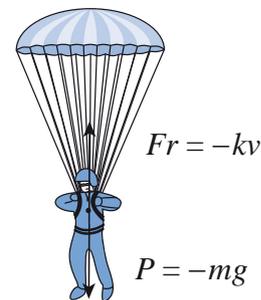


Figura 7.8b

Solução:

a) Vamos convencionar que o sentido positivo é para cima e que a origem está na superfície da Terra.

Até o momento em que o paraquedas abre, a velocidade é a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = P - mg \\ v(0) = 0 \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -10 \\ v(0) = 0 \end{cases} ,$$

o que leva à solução:

$$v(t) = -10t .$$

Quando o paraquedas abre, a velocidade é então de

$$v(5) = -50 \text{ m/s} .$$

b) Até este momento, a altura do paraquedista em função do tempo é a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = v(\ell) = -10\ell \\ h(0) = 1400 \end{cases} ,$$

cujas solução é

$$h(\ell) = 1400 - 5\ell^2 .$$

Assim, até o momento que o paraquedas abre, o paraquedista caiu

$$1400 - h(5) = 125 \text{ m} .$$

Daí em diante a velocidade do paraquedista é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = -mg - kv \\ v(5) = -50 \end{cases} .$$

A força de resistência é igual a $-kv$. O sinal "negativo" com uma constante positiva indica que a força de resistência é no sentido contrário ao da velocidade. Observe que a velocidade é negativa, o que faz com que a força de resistência seja positiva, ou seja, para cima, como convencionamos no início.

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = -10 - \frac{k}{70}v = -10 - Kv; K = \frac{k}{70} \\ v(5) = -50 \end{cases}$$

Resolvendo a equação:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -10 - Kv \\ \frac{1}{10 + Kv} \frac{dv}{dt} &= -1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{K} \ln|10 + Kv| \right) &= -1 \\ \ln|10 + Kv| &= -Kt + C_1 \\ 10 + Kv &= \pm e^{C_1} e^{-Kt} \\ v(t) &= -\frac{10}{K} + C e^{-Kt}\end{aligned}$$

A velocidade limite é de -5 m/s, logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = -\frac{10}{K} = -5 \Rightarrow K = 2.$$

Substituindo-se $t = 5$ e $v = -50$ em $v(t) = -\frac{10}{K} + C e^{-Kt}$, vem:

$$-50 = -5 + C e^{-5K} \Rightarrow C = -45 e^{5K},$$

ou seja, a solução do problema de valor inicial é:

$$v(t) = -5 - 45 e^{-2(t-5)}.$$

Substituindo-se $v = -5,1$ (v é negativa porque é para baixo), obtemos:

$$-5,1 = -5 - 45 e^{-2(t-5)} \Rightarrow t - 5 = \frac{\ln(450)}{2} \approx 3 \text{ segundos,}$$

ou seja, 3 segundos depois do paraquedas aberto, a velocidade já é de 5,1 m/s.

c) Depois que o paraquedas abre, a altura em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = v(t) = -5 - 45 e^{-2(t-5)} \\ h(5) = 1400 - 125 = 1275 \end{cases}.$$

A solução geral da equação é

$$h(t) = -5(t-5) + \frac{45}{2} e^{-2(t-5)} + C.$$

Substituindo-se $t = 5$ e $h = 1275$, obtemos $C = \frac{2505}{2}$. Assim, a solução deste problema de valor inicial é:

$$h(t) = \frac{2505}{2} - 5(t-5) + \frac{45}{2}e^{-2(t-5)} \text{ para } t > 5.$$

Exemplo 7.40: Ache a equação da curva no plano xy que satisfaz o caso em que a inclinação da reta tangente à curva, em qualquer ponto da curva, é igual à metade da inclinação da reta que liga a origem ao referido ponto.

Solução:

Observe primeiramente a Figura 7.9.

Vamos achar a equação diferencial que descreve a situação:

- Inclinação da reta tangente t : y' .
- Inclinação da reta tangente que passa por O e por P : $\text{tg } \alpha = \frac{y}{x}$.

Portanto, $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x}$, ou seja, $y' = \frac{y}{2x}$ é a equação diferencial obtida.

A solução é:

$$y^2 = cx; \quad c \in \mathbb{R} (x \neq 0). \quad (\text{Verifique!})$$

Exemplo 7.41: Foram encontrados restos mortais numa certa região. Verificou-se no laboratório que a porcentagem relativa de isótopos de carbono 14 encontrados era de 0,12% (Isto é o quociente entre a população atual e a população original de isótopos multiplicada por 100). Calcule o tempo de antiguidade desses restos. Considere que, depois de 100.000 anos, o carbono restante é apenas 4×10^{-6} do carbono 14 existente inicialmente.

Solução:

Suponhamos que o tamanho da população de isótopos satisfaça a equação diferencial

$$p'(t) = -rp(t).$$

Então, a solução da equação acima é dada por

$$p(t) = ce^{-rt}. \quad (\text{Verifique!})$$

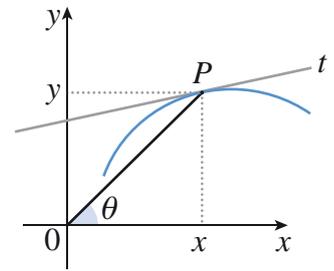


Figura 7.9

Note que quando $t = 0$, então se verifica que $p(0) = c$. Assim, temos que a população atual pode ser expressa em função da população original da seguinte forma

$$p(t) = p(0)e^{-rt}.$$

Como depois de 100.000 anos apenas restam 4×10^{-6} vezes a quantidade original do isótopo, temos que

$$p(100.000) = 4 \times 10^{-6} p(0).$$

Substituindo na equação acima, temos que

$$4 \times 10^{-6} p(0) = p(0)e^{-100.000r} \Rightarrow 4 \times 10^{-6} = e^{-100.000r}.$$

De onde segue que

$$\ln(4 \times 10^{-6}) = -100.000r \Rightarrow r = 0,0001243.$$

Portanto, a equação é dada por

$$p(t) = p(0)e^{-100.000r}. \quad (*)$$

Por outro lado, como a porcentagem relativa de isótopos era de 0,12%, isso significa que

$$100 \frac{p(t)}{p(0)} = 0,12 \Rightarrow \frac{p(t)}{p(0)} = 0,0012.$$

Usando a equação (*), encontramos

$$\frac{p(t)}{p(0)} = e^{-0,0001243t} \Rightarrow 0,0012 = e^{-0,0001243t}$$

Tomando logaritmos, temos que

$$\ln(0,0012) = -0,0001243t \Rightarrow -6,725 = -0,0001243t.$$

De onde encontramos que o tempo é dado por

$$t = \frac{6,725}{0,0001243} = 54233,87.$$

Portanto, os restos mortais são de mais de 54 mil anos atrás.

Exemplo 7.42: No tempo $t = 0$, um tanque contém 2 kg de sal dissolvidos em 20 ℓ de água. Assuma que água contendo 0,1 kg de sal por litro está entrando no tanque com uma velocidade de 3 ℓ /minuto e que a água bem misturada está saindo do tanque com a mesma velocidade, conforme representa a Figura 7.10. Calcule a expressão que defina a quantidade de sal no tanque em cada instante de tempo.

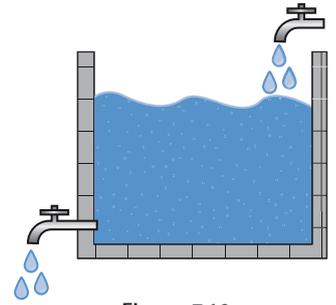


Figura 7.10

Solução: Denotemos por $p(t)$ a quantidade de sal, medida em quilogramas que se encontra no tanque no instante t . A taxa de variação da quantidade de sal será igual à quantidade do sal que está entrando no tanque menos a que está saindo no mesmo instante. Repare que o sal está completamente dissolvido na água. Assim, para cada litro de água, teremos uma quantidade igual a $\frac{p(t)}{20}$ kg de sal. Como está saindo 3 litros de água por minuto, a quantidade de sal que está saindo será igual a $\frac{3p(t)}{20}$ kg de sal.

Portanto, a taxa de variação de sal no tanque será igual a $3 \times 0,1 - 3 \frac{p(t)}{20}$. Assim, teremos que

$$\frac{dp}{dt} = 3 \times 0,1 - 3 \frac{p(t)}{20} = \frac{3}{20}(2 - p).$$

Esta é uma equação linear de 1ª ordem. Portanto, podemos escrever

$$\frac{dp}{2-p} = \frac{3}{20} dt \Rightarrow \int \frac{dp}{2-p} = \int \frac{3}{20} dt \Rightarrow \ln(2-p) = -\frac{3}{20}(t+c).$$

De onde segue que

$$2-p = C_1 e^{-\frac{3}{20}t} \Rightarrow p = 2 - C_1 e^{-\frac{3}{20}t}.$$

Como a quantidade original de sal é igual a 2 kg, temos que

$$p(0) = 2 \Rightarrow 2 = 2 - C_1 e^{-\frac{3}{20} \cdot 0}.$$

De onde concluímos que $C_1 = 0$. Portanto,

$$p(t) = 2, \forall t > 0.$$

Isso quer dizer que a concentração de sal sempre será a mesma, pois originalmente no tanque tínhamos $\frac{2 \text{ kg}}{20 \ell} = 0,1 \text{ kg} / \ell$. Como a água está entrando com a mesma concentração, então a concentração no tanque permanecerá sempre a mesma.



$$T = 25^{\circ}\text{C}$$

$$q(0) = 95^{\circ}\text{C}$$

Figura 7.11

Exemplo 7.43: Suponha que a temperatura de uma xícara de chá segue a Lei de Resfriamento de Newton. Se o chá está a uma temperatura de 95°C , e um minuto depois a temperatura baixou para 70°C num quarto onde a temperatura é de 25°C , determine o tempo que demorará a xícara de chá para atingir a temperatura de 30°C .

Solução:

Para resolver esse problema, utilizamos a Lei de Resfriamento de Newton, que estabelece que a taxa da variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura do corpo com o meio ambiente.

Assim, temos que $q(t)$ denota a temperatura da xícara no tempo t . Então, temos que ela deve satisfazer a seguinte equação:

$$\frac{dq}{dt} = -k(q - T), \quad (*)$$

em que T denota a temperatura do meio.

Nosso problema consiste em determinar esses valores. A equação (*) é uma equação diferencial de 1ª ordem, que pode ser resolvida utilizando o método de separação de variáveis. Assim temos que

$$\frac{dq}{q - T} = -k dt \Rightarrow \int \frac{dq}{q - T} = -k \int dt.$$

De onde segue que

$$\ln(q - T) = -kt + C,$$

ou

$$q = T + C_1 e^{-kt},$$

em que $C_1 = e^c$. Das condições do problema sabemos que o chá inicialmente está à temperatura de 95°C , portanto temos que $q(0) = 95$, e que a temperatura do quarto é 25°C . Assim,

$$95 = 25 + C_1 \Rightarrow C_1 = 70.$$

Após 1 minuto, a temperatura baixou para 70°C . Assim, temos que $q(1) = 70$. Como $T = 25$, temos,

$$70 = 25 + C_1 e^{-k} \Rightarrow 45 = C_1 e^{-k}.$$

Substituindo o valor de C_1 , segue que

$$45 = 70e^{-k} \Rightarrow e^{-k} = \frac{9}{14} \Rightarrow k = -\ln \frac{9}{14} \approx 0,442.$$

Assim, a temperatura da xícara está dada por

$$q(t) = 25 + 70e^{-0,442t}.$$

Finalmente, para conhecer o tempo que demorará a xícara para atingir a temperatura de 30°C , fazemos $q = 30$, de onde temos:

$$30 = 25 + 70e^{-0,442t} \Rightarrow 5 = 70e^{-0,442t}$$

Portanto,

$$\frac{1}{14} = e^{-0,442t} \Rightarrow -\ln(14) = -0,442t \Rightarrow t = \frac{\ln(14)}{0,442} \approx 5,97 \text{ minutos.}$$

Assim, a xícara levará aproximadamente 6 minutos para atingir a temperatura de 30°C .

Exemplo 7.44: Observe o circuito (Figura 7.12).

Este circuito consta dos seguintes elementos:

- 1) Uma fonte de força eletromotriz (ε) que produz uma corrente de $I(t)$ ampères e uma força eletromotriz de $\varepsilon(t)$ volts.
- 2) Uma resistência (R) que se opõe à passagem da corrente, produzindo uma queda ε_R na amplitude da força eletromotriz. Pela Lei de Ohm, $\varepsilon_R = R \cdot I$.
- 3) Uma bobina de indutância (L), que produz uma queda na amplitude da força eletromotriz: $\varepsilon_L = L \cdot \frac{dI}{dt}$.

Uma das leis de Kirchhoff estabelece que $\varepsilon_R + \varepsilon_L = \varepsilon$, ou seja,

$$L \cdot \frac{dI}{dt} + R \cdot I = \varepsilon(t),$$

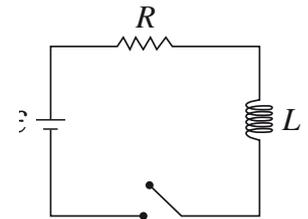


Figura 7.12

que é uma equação diferencial linear de 1ª ordem, cuja solução, $I(t)$, fornece a intensidade da corrente no tempo t .

Suponhamos que, no circuito anteriormente descrito, a resistência vale R ohms e a indutância L henry. Se uma bateria fornece uma força eletromotriz constante ε e a corrente inicial é $I(0) = 0$, determine:

- a função $I(t)$;
- a intensidade da corrente após 1 segundo;
- o valor limite de I quando t se torna muito grande.

Solução:

a) A equação diferencial anterior deve, em primeiro lugar, ser escrita na sua forma padrão:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{\varepsilon}{L}$$

Temos:

- Fator Integrante: $\varphi(t) = e^{\int \frac{R}{L} dt} = e^{\frac{R}{L}t}$
- Multiplicando: $e^{\frac{R}{L}t} \cdot I' + e^{\frac{R}{L}t} \cdot \frac{R}{L}I = e^{\frac{R}{L}t} \cdot \frac{\varepsilon}{L}$

Assim, vem:

$$\left(e^{\frac{R}{L}t} \cdot I \right)' = \frac{\varepsilon}{L} e^{\frac{R}{L}t} \Rightarrow e^{\frac{R}{L}t} \cdot I = \frac{\varepsilon}{L} \cdot \frac{L}{R} \cdot e^{\frac{R}{L}t} + c.$$

Logo,

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

b) Se $t = 1$, $I(1) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}} \right)$ (unidades de corrente).

c) $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \frac{\varepsilon}{R}$.

Resumo

Uma *equação diferencial* é uma equação que envolve uma ou mais derivadas, ou diferenciais de uma função. As equações diferenciais podem ser classificadas pelo *tipo* (ordinárias ou parciais), pela *ordem* (aquela da derivada de ordem mais elevada, na equação) ou pelo *grau* (o expoente da maior potência da derivada de ordem mais alta). Uma *solução* de uma equação diferencial em um intervalo I é uma função $y(t)$ definida no intervalo I que satisfaça a equação neste intervalo. Podemos ter a *solução geral* (é a solução da ED que contém tantas constantes arbitrárias quantas forem as unidades da ordem da equação), a *solução particular* (é a solução da ED deduzida da solução geral, atribuindo-se valores particulares às constantes arbitrárias) ou a *solução singular* (é a solução da ED que não pode, porém, ser obtida da solução geral). Frequentemente, em aplicações, é preciso encontrar uma solução particular que satisfaça uma *condição inicial* da forma $y(x_0) = y_0$. A esse tipo de problema chamamos *Problema de Valor Inicial* (PVI). As *equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem* são equações que podem ser escritas como $F(t, y, y') = 0$. Estudamos equações de 1ª ordem da forma $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$. Vimos técnicas para resolver equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem (de variáveis separáveis, homogêneas, exatas e lineares). Finalizamos o capítulo apresentando algumas aplicações das EDOs de 1ª ordem, com ênfase no campo da Física.

Exercícios propostos

- 1) Classifique as equações abaixo quanto ao tipo, à ordem e o grau.

a) $yy' + t = 0$

b) $x^2 y'' + bxy' + cy = 0$

- 2) Determine qual ou quais das funções

$z_1(x) = x^2$, $z_2(x) = x^3$ e $z_3(x) = e^{-x}$ é (são) solução(ões) da equação $(x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0$.

- 3) Determine os valores de r para os quais a função $y(t)$ é solução da equação dada.

$$a) y(t) = \frac{r}{t^2 - 3} \quad e \quad y' + ty^2 = 0 \quad b) y(t) = \frac{r}{t^2 + 1} \quad e \quad y' - 2ty^2 = 0$$

4) Resolva os problemas de valor inicial:

$$a) \begin{cases} y' + (1 - 2x)y = xe^{-x} \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} y' - \cos(ty) = te^{t^2 + \sin t} \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad c) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{3y^2-3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

5) Resolva as seguintes equações diferenciais:

$$a) 2xy - \operatorname{sen} x + (x^2 + e^y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad b) y^2 + \cos x + (2xy + e^y) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$c) 2xy^2 + \cos x + \left(2x^2y - \frac{1}{y^2} \right) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$d) y' = \frac{x^2}{y}$$

$$e) y' = (3x^2 + 4x + 2)(3y - 4)$$

$$f) \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1 + 2y}$$

$$g) \frac{dp}{dt} = p - p^2$$

$$h) y' = \frac{9x^2 + 3xy + 7y^2}{6x^2 + 5xy}$$

$$i) y' = \frac{9y^2 + 2xy}{x^2}$$

$$j) y' = \frac{9x + 3y}{7x + 6y}$$

$$k) y' - y = 1 + x^2$$

$$l) y' + x^2y = 2x^2$$

$$m) y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$$

$$n) y' + 3x^5y = 2x^{11}$$

$$o) y' + \frac{y}{x} = \operatorname{sen} x$$

6) Encontre um fator integrante $u(y)$ para a equação

$$xy + (2x^2 + 3y^2 - 20) \frac{dy}{dx} = 0 \text{ de forma a transformá-la numa ED}$$

exata e resolva a ED.

7) Encontre um fator integrante $u(x)$ para a equação

$$2y^2 + \frac{2y}{x} + \left(2xy + 2 + \frac{y}{x} \right) \frac{dy}{dx} = 0 \text{ de forma a transformá-la numa}$$

ED exata e resolva a ED.

8) Calcule a solução geral da ED $y' + 3y = 0$.

9) Considere a ED $\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0$.

- a) Mostre que se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da ED, então $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ também é solução da ED.
- b) Mostre que se $y_1(t)$ é solução da ED, então $y(t) = cy_1(t)$ também é solução da ED.
- 10) Encontre a equação diferencial de 1ª ordem que tem como solução a função:
- a) $f(t) = 3e^{4t}$ b) $g(t) = e^{t^2} + t - 1$
- 11) Um corpo de massa 10 kg é abandonado a certa altura. Sabe-se que as únicas forças atuando sobre ele são o seu peso e uma força de resistência proporcional à velocidade. Admitindo-se que 1 segundo após ter sido abandonado a sua velocidade é de 10 m/s, determine a velocidade no instante t (suponha a aceleração da gravidade igual a 10 m/s²).
- 12) A reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$, no ponto (x, y) , intercepta o eixo Oy no ponto de ordenada xy . Determine f sabendo que $f(1) = 1$.
- 13) Um objeto aquecido a 100°C é colocado em um quarto a uma temperatura ambiente de 20°C; um minuto após, a temperatura do objeto passa a 90°C. Admitindo (Lei de Resfriamento de Newton) que a temperatura $T = T(t)$ do objeto esteja variando a uma taxa proporcional à diferença entre a temperatura do objeto e a do quarto, isto é,
- $$\frac{dT}{dt} = \alpha(T - 20) \quad (\alpha \text{ constante}),$$
- determine a temperatura do objeto no instante t (suponha t dado em minutos).
- 14) Um material radioativo se desintegra a uma taxa $\frac{dm}{dt}$ proporcional a m , em que $m = m(t)$ é a quantidade de matéria no instante t . Supondo que a quantidade inicial (em $t = 0$) de matéria seja m_0 e que 10 anos após já tenha se desintegrado $\frac{1}{3}$ da quantidade inicial, calcule o tempo necessário para que metade da quantidade inicial de desintegre.

- 15) Uma partícula desloca-se sobre o eixo $0x$ com aceleração proporcional à velocidade. Admitindo-se que $v(0) = 3, v(1) = 2$ e $x(0) = 0$, determine a posição da partícula no instante t .

Respostas

- EDO de 1ª ordem e 1º grau
 - EDO de 2ª ordem e 1º grau
- $z_1(x) = x^2$ e $z_2(x) = x^3$ não são soluções da equação e $z_3(x) = e^{-x}$ é solução da equação.
- $r = 0$ ou $r = 2$
 - $r = 0$ ou $r = -1$
- $y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{5}{2}e^{x^2-x}$
 - $y(t) = e^{t-t^3} + e^{-t^3}$
 - $y^3 - 3y - x^2 - x = 0$
- $U(x, y) = x^2y + \cos x + e^y = C$
 - $U(x, y) = xy^2 + \text{sen } x + e^y = C$
 - $U(x, y) = x^2y^2 + \text{sen } x + \ln |y| = C$
 - $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{3}x^3 + C$
 - $\frac{1}{3}\ln(3y-4) = x^3 + 2x^2 + 2x + C$
 - $y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{c-x^2}$
 - $p = \frac{Ce^t}{1+Ce^t}$
 - $\frac{39}{8\sqrt{3,94}} \arctg\left(\frac{z-0,75}{\sqrt{3,94}}\right) + \frac{5}{4}\ln(|9-3z+2z^2|) = \ln(Cx)$
 - $y = \frac{Cx^2}{1-Cx}$

$$j) \frac{5}{12\sqrt{1,39}} \ln \left(\frac{y+0,33x-\sqrt{1,39x}}{y+0,33x+\sqrt{1,39x}} \right) - \left(\frac{1}{2} \right) \ln \left(\left| 9 - 3\frac{y}{x} - 6\frac{y^2}{x^2} \right| \right) = \ln(Cx)$$

$$k) y = 3 - 2x + x^2 + Ce^x$$

$$l) y = \frac{2}{3} + Ce^{-\frac{1}{3}x^3}$$

$$m) y = 1 + \frac{C}{x}$$

$$n) y = \frac{2}{3}x^6 - \frac{4}{3} + Ce^{-\frac{x^6}{2}}$$

$$o) y = \cos x + \frac{\text{sen } x}{x} + \frac{C}{x}$$

$$6. \phi(y) = y^3$$

$$7. u(x) = x; \quad x^2y^2 + 2xy + \frac{y^2}{2} = C$$

$$8. y = Ce^{-3x}$$

9. Demonstre.

$$10. a) y = Ce^{-3x}$$

$$b) y' - 2ty = 1 - 2t^2 + 2t$$

11. A queda do corpo é regida pela equação $m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - \alpha v$ ou $10 \frac{dv}{dt} = 100 - \alpha v$ e sabe-se que $v(0) = 0$ e $v(1) = 10$. Tem-se:

$$v(t) = \frac{100}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{10}} \right), \text{ em que } \alpha \text{ é a raiz da equação } \alpha = 10 \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{10}} \right).$$

$$12. y = xe^{1-x}$$

$$13. T = 80 \left(\frac{7}{8} \right)^t + 20$$

$$14. \frac{10 \ln 2}{\ln 3 - \ln 2} \cong 17 \text{ anos}$$

$$15. x(t) = \frac{3}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1), \text{ onde } \alpha = \ln \frac{2}{3}.$$

Capítulo 8

Equações diferenciais
ordinárias lineares
de ordem n

Capítulo 8

Equações diferenciais ordinárias lineares de ordem n

Neste capítulo, vamos encontrar soluções para Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de ordem n , com n maior ou igual a 2. Veremos que nossa habilidade para resolver uma Equação Diferencial Linear de ordem n ($n \geq 2$) depende de nossa habilidade de resolver equações polinomiais de grau n .

8.1 Introdução

Uma equação diferencial ordinária (EDO) de ordem n pode ser subclassificada como sendo linear ou não linear. Por exemplo, as equações:

$$1) y''' - 3y'' - 2y = x^2;$$

$$2) xy''' + 5(1 + x^2)y' - e^x y = x^3;$$

$$3) y''' - 2(x^2 - 1)y = x^4;$$

$$4) \frac{dy}{dt} + 3t = 0;$$

(i)

$$5) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2xy = 1 - 2x^2 + 2x;$$

$$6) y'' - y' = 1 + x^2$$

são exemplos de equações diferenciais lineares.

Enquanto as equações:

$$1) y'' - 3y' + 4y^3 = x^2;$$

$$2) xy'' - y'y^2 + y^2 = 1;$$

$$3) y'' - 3(y')^3 + 4y = x^3;$$

$$4) \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 3t^2 = 0; \quad (\text{ii})$$

$$5) \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + xy = 1 - 2x^2;$$

$$6) (y'')^2 - (y')^3 = x$$

são exemplos de equações não lineares.

Observando detalhadamente as equações do grupo (i), verificamos que em todos os termos da equação aparecem somente expressões lineares em "y" e suas derivadas. Portanto, essas equações são chamadas de equações lineares. Enquanto que no grupo (ii) já aparecem expressões não lineares, em "y", por exemplo, termos cúbicos ou quadráticos em algumas de suas derivadas. Portanto, as equações do grupo (ii) são chamadas de equações não lineares. É importante salientar que para análise quanto à linearidade de uma equação não interessam as expressões na variável independente (nos nossos exemplos, na variável "x" ou "t").

Não abordamos o assunto equação diferencial (ED) de ordem n , não linear, pois não existem regras ou métodos pelos quais sua solução possa ser exibida em termos de funções elementares ou outros tipos. Em geral, EDs não lineares são resolvidas através de métodos computacionais.

As equações diferenciais lineares de ordem n são da forma

$$P_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_0(x)y = r(x), \quad (8.1)$$

em que $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), r(x)$ dependem apenas de x ou são constantes. As funções P_0, P_1, \dots, P_n são chamadas de coeficientes da equação.

Se $r(x) \equiv 0$, a ED (8.1) se torna

$$P_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_0(x)y = 0 \quad (8.2)$$

e é chamada de equação diferencial homogênea de ordem n .

8.2 Dependência linear

Teorema 8.1. Se y_1, y_2, \dots, y_n são soluções da ED (8.2), então a combinação linear $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$, em que C_1, C_2, \dots, C_n são constantes arbitrárias, é também uma solução da ED (8.2).

Exemplo 8.1: Seja a ED $y'' + y = 0$. As funções $y_1 = \cos(x)$ e $y_2 = \sin(x)$ são soluções da ED dada. Mostre que $y = \cos(x) + \sin(x)$ também é solução da ED dada.

Solução:

De $y = \cos(x) + \sin(x)$ temos $y'' = -\cos(x) - \sin(x)$.

A função $y = \cos(x) + \sin(x)$ é solução da ED, pois

$$y'' + y = (-\cos(x) - \sin(x)) + (\cos(x) + \sin(x)) = 0.$$

O seguinte teorema proporciona condição suficiente para a independência linear de " n " funções em um intervalo. Supomos que cada função seja diferenciável pelo menos " $n-1$ " vezes.

Teorema 8.2. (Critério para Independência Linear de Funções) Suponha que $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ sejam diferenciáveis pelo menos " $n-1$ " vezes. Se o determinante

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

for diferente de zero em pelo menos um ponto do intervalo I , então as funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ serão linearmente independentes (LI) no intervalo I .

Observação 8.1. O determinante do teorema acima é denotado por $W(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ e é chamado *Wronskiano* das funções.

Corolário 8.1. Se $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ possuem pelo menos " $n-1$ " derivadas e são linearmente dependentes (LD) em I , então $W = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = 0$ para todo x no intervalo.

Exemplo 8.2: Confira se as funções $f_1(x) = \text{sen}^2(x)$ e $f_2(x) = 1 - \cos(2x)$ são LD ou LI em \mathbb{R} .

Solução:

Temos o Wronskiano das funções, dado por:

$$\begin{aligned} W(\text{sen}^2(x), 1 - \cos(2x)) &= \begin{vmatrix} \text{sen}^2(x) & 1 - \cos(2x) \\ 2\text{sen}(x)\cos(x) & 2\text{sen}(2x) \end{vmatrix} \\ &= (2\text{sen}(2x)) \cdot (\text{sen}^2(x)) - (2\text{sen}(x)\cos(x)) \cdot (1 - \cos(2x)) \\ &= 2\text{sen}(2x)\text{sen}^2(x) - 2\text{sen}(x)\cos(x) + 2\text{sen}(x)\cos(x)\cos(2x) \\ &= 2\text{sen}(2x)\text{sen}^2(x) - 2\text{sen}(x)\cos(x) + 2\text{sen}(x)\cos(x)(\cos^2(x) - \text{sen}^2(x)) \\ &= 2\text{sen}(2x)\text{sen}^2(x) - 2\text{sen}(x)\cos(x) + 2\text{sen}(x)\cos^3(x) - 2\text{sen}^3(x)\cos(x) \\ &= 2\text{sen}(2x)\text{sen}^2(x) - \text{sen}(2x) + 2\text{sen}(x)\cos(x)(\cos^2(x) - \text{sen}^2(x)) \\ &= \text{sen}(2x)(2\text{sen}^2(x) - 1) + \text{sen}(2x)(\cos^2(x) - \text{sen}^2(x)) \\ &= \text{sen}(2x)(2\text{sen}^2(x) - 1 + \cos^2(x) - \text{sen}^2(x)) \\ &= \text{sen}(2x)(\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) - 1) \\ &= \text{sen}(2x)(1 - 1) \\ &= \text{sen}(2x) \cdot (0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Foram aplicadas as identidades trigonométricas

$$\text{sen}(2x) = 2\text{sen}(x)\cos(x);$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \text{sen}^2(x) \text{ e}$$

$$\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

para simplificar a expressão do Wronskiano.

Assim, $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são linearmente dependentes em \mathbb{R} , pois

$$W(\text{sen}^2(x), 1 - \cos(2x)) = 0 \text{ para todo número real.}$$

Exemplo 8.3: As funções $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = xe^x$ e $f_3(x) = x^2e^x$ são linearmente independentes? Se sim, em que intervalo do eixo x ?

Solução:

Para saber se as funções são linearmente independentes, tomamos o Wronskiano das funções:

$$W(e^x, xe^x, x^2e^x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & xe^x + e^x & x^2e^x + 2xe^x \\ e^x & xe^x + 2e^x & x^2e^x + 4xe^x + 2e^x \end{vmatrix} = 2e^{3x}.$$

Logo, as funções $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ são LI, pois o Wronskiano dessas funções não se anula em ponto algum.

8.3 Solução geral de uma equação linear homogênea de coeficientes constantes

Considere a equação diferencial

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0, \quad (8.3)$$

em que a_0, a_2, \dots, a_{n-1} são constantes dadas.

Sejam y_1, y_2, \dots, y_n n soluções LI da ED (8.3) em um intervalo I .

A solução geral da ED (8.3) no intervalo I é definida por $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$, em que C_1, C_2, \dots, C_n são constantes arbitrárias.

Começamos nosso estudo com uma ED linear homogênea de ordem 2 com coeficientes constantes dada por

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0, \quad (8.4)$$

em que a e b são constantes.

Supomos que

$$y = e^{\lambda x} \quad (8.5)$$

possa ser solução da ED (8.4) se λ for escolhido adequadamente.

Substituindo (8.5) e suas derivadas na ED (8.4), obtemos

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

Como $e^{\lambda x} \neq 0$, $y = e^{\lambda x}$ é uma solução para a ED (8.4) se λ for uma raiz da equação

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \quad (8.6)$$

A equação (8.6) é chamada equação característica da ED (8.4).

Dependendo da natureza das raízes da equação (8.6) temos um tipo de solução geral para a ED (8.4).

A equação (8.6) pode ter:

1) Raízes reais distintas

Sejam λ_1 e λ_2 essas raízes.

As soluções $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ são soluções LI da ED (8.4), pois $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $W(y_1, y_2) \neq 0$.

A solução geral da ED (8.4) é $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$.

Para $n \geq 2$, $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$ é a solução geral da ED (8.3), em que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são as raízes reais distintas da equação característica correspondente à ED (8.3).

Exemplo 8.4: Encontre a solução geral da ED $y'' + y - 2 = 0$.

Solução:

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ é a equação característica da ED dada e admite como raízes $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$.

Portanto, a solução geral da ED dada é $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

Exemplo 8.5: Encontre a solução geral da ED $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$.

Solução:

$\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0$ é a equação característica da ED dada e admite como raízes $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ e $\lambda_4 = -2$.

Portanto, a solução geral da ED dada é

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}.$$

2) Raízes reais e iguais

Seja $y_1 = e^{\lambda x}$ uma solução para a ED (8.4).

Vamos supor que $y_2 = u(x)y_1$ seja outra solução para a ED (8.4), LI com y_1 .

Como a equação (8.6) tem uma única raiz, segue que $\lambda = -\frac{b}{2a}$, pois $\Delta = 0$.

Substituindo y_2 e suas derivadas na ED (8.4), encontramos a função $u(x) = x$.

Nesse caso, a solução geral da ED (8.4) é dada por $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$. Verifique.

Para $n \geq 2$, se λ é uma raiz de multiplicidade k da equação característica da ED (8.3), então a parte da solução geral para a ED (8.3) correspondente à raiz λ é

$$C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} + C_3 x^2 e^{\lambda x} + \dots + C_k x^{k-1} e^{\lambda x}.$$

Exemplo 8.6: Encontre a solução geral da ED $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Solução:

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ é a equação característica da ED dada e admite como raízes $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

Logo, $y = C_1 x e^{-2x} + C_2 e^{-2x}$ é a solução geral da ED dada.

Exemplo 8.7: Encontre a solução geral da ED $y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0$.

Solução:

$\lambda^4 + \lambda^3 - 3\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$ é a equação característica da ED dada.

Resolvendo a equação característica, encontramos as raízes $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$.

Observamos que -1 é uma raiz de multiplicidade 3, pois se repete 3 vezes. Assim, a solução geral da ED dada é $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x} + C_4 x^2 e^{-x}$.

3) Raízes complexas conjugadas

Sejam $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$ raízes da equação (8.6).

A solução da ED (8.4) é dada por

$$y = C_1 e^{(a+bi)x} + C_2 e^{(a-bi)x} = C_1 e^{ax} e^{ibx} + C_2 e^{ax} e^{-ibx}$$

$$y = e^{ax} [C_1 e^{ibx} + C_2 e^{-ibx}].$$

Usando a fórmula de Euler ($e^{iz} = \cos(z) + i \operatorname{sen}(z)$), temos

$$(e^{ibx} = \cos(bx) + i \operatorname{sen}(bx))$$

e

$$(e^{-ibx} = \cos(bx) - i \operatorname{sen}(bx)).$$

Assim,

$$y = e^{ax} [(C_1 + C_2) \cos(bx) + i(C_1 - C_2) \operatorname{sen}(bx)]. \quad (8.6a)$$

Finalmente, ao introduzirmos novas constantes arbitrárias $A = C_1 + C_2$ e $B = i(C_1 - C_2)$, a equação (8.6a) assumirá a forma

$$y = e^{ax} [A \cos(bx) + B \operatorname{sen}(bx)].$$

Para $n \geq 2$, se $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$ são raízes complexas da equação característica correspondente à ED (8.3), então $e^{ax} [A \cos(bx) + B \operatorname{sen}(bx)]$ é a parte da solução geral da ED (8.3) relacionada com as raízes complexas.

Exemplo 8.8: Encontre a solução geral da ED $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Solução:

$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ é a equação característica da ED dada e admite como raízes $\lambda_1 = -1 + i$ e $\lambda_2 = -1 - i$.

Logo, $y = e^{-x} (A \cos(x) + B \operatorname{sen}(x))$ é a solução da ED dada.

Exemplo 8.9: Encontre a solução geral da ED $y'' + 4y = 0$.

Solução:

$\lambda^2 + 4 = 0$ admite como raízes $\lambda_1 = 2i$ e $\lambda_2 = -2i$.

$y = A\cos(2x) + B\sin(2x)$ é a solução da ED dada, pois a parte real das raízes complexas é igual a zero.

8.4 Solução geral de uma ED linear não homogênea (ED (8.1))

Sejam y_p uma solução dada da ED (8.1) em um intervalo I e y_h a solução geral da ED linear homogênea, ED (8.2) associada à ED (8.1) no intervalo I .

A solução geral da ED (8.1) é definida por

$$y = y_h + y_p.$$

Qualquer solução y_p que satisfaça a ED (8.1) é chamada solução particular da ED (8.1).

Vamos apresentar a seguir alguns métodos para determinar a y_p que dependem se os coeficientes $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ são constantes ou não.

8.4.1 Solução geral de uma ED linear não homogênea com coeficientes constantes

Uma ED linear não homogênea com coeficientes constantes é da forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + y = r(x). \quad (8.7)$$

A ED linear homogênea associada à ED (8.7) é da forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + y = 0. \quad (8.8)$$

1º Método: Método dos coeficientes a determinar

O cálculo de uma solução particular em geral não é uma tarefa fácil. O método de coeficientes a determinar se aplica quando o lado direito da ED (8.7) é uma das seguintes funções:

Ce^{kx} , $Asen(\alpha x)$, $Acos(\beta x)$, $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ou combinação delas.

As funções anteriores têm em comum que as derivadas delas pertencem à mesma classe de funções, isto é, derivadas de funções exponenciais são funções exponenciais, assim como derivadas de funções "sen(x) e cos(x)" recaem sempre em combinações de senos e cossenos. Finalmente, derivadas de polinômios são também polinômios (de ordem inferior).

O objetivo desse método é construir uma função tendo como ideia que ela está na classe de funções exponenciais, polinomiais ou na classe de senos e cossenos.

1º Caso: $r(x)$ é um polinômio de grau m

Nesse caso, y_p é um polinômio de grau $m + p$, em que m é o grau de $r(x)$ e p é a ordem da menor derivada que aparece na ED.

Exemplo 8.10: Encontre a solução particular da ED $y'' + 3y' + y = x + 1$.

Solução:

Note que o segundo membro da equação é um polinômio. Portanto, uma solução particular deve ser um polinômio e, neste caso, um polinômio de grau 1, isto é, $y = ax + b$.

Calculando as derivadas de 1ª e 2ª ordem de y , temos $y' = a$, $y'' = 0$ e substituindo-as na ED dada, encontramos $3a + ax + b = x + 1$, de onde concluímos que $a = 1$ e $b = -2$.

Logo, uma solução particular é dada por $y = x - 2$.

Exemplo 8.11: Encontre a solução particular da ED $3y'' + 2y' = x^2 + 1$.

Solução:

Uma solução particular da ED dada é da forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Substituindo y com suas derivadas na ED dada, temos

$$3(6ax + 2b) + 2(3ax^2 + 2bx + c) = x^2 + 1 \Rightarrow 6ax^2 + (18a + 4b)x + (6b + 2c) = x^2 + 1.$$

Segue que $a = \frac{1}{6}, b = -\frac{1}{3}, c = \frac{11}{4}$ e $d \in \mathbb{R}$.

Portanto, uma solução particular é dada por $y = \frac{x^3}{6} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{4}x$,
fazendo $d = 0$.

2º Caso: $r(x) = ce^{kx}$

Nesse caso, uma solução particular é dada por $y_p = Ax^h e^{kx}$, em que h é a multiplicidade de k como raiz da equação característica correspondente à ED.

Exemplo 8.12: Encontre a solução particular da ED $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$.

Solução:

A equação característica da ED dada é $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ cujas raízes são 4 e -1 , de multiplicidade 1 cada raiz.

Como $r(x) = e^{-x}$, a constante é $k = -1$ e é uma raiz da equação característica, a solução particular da ED tem a forma $y_p = Axe^{-x}$.

Substituindo y_p e suas derivadas na ED dada, encontramos $A = -\frac{1}{5}$.

Assim, $y_p = -\frac{1}{5}xe^{-x}$.

3º Caso: $r(x) = C \operatorname{sen}(kx)$ ou $r(x) = C \operatorname{cos}(kx)$

Nesse caso, $y_p = x^h (A \operatorname{cos}(kx) + B \operatorname{sen}(kx))$, em que h é a multiplicidade de k como raiz da equação característica correspondente à ED.

Exemplo 8.13: Encontre a solução particular da ED

$$y'' + y' + y = \operatorname{cos}(3x).$$

Solução:

A equação característica da ED dada é $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ cujas raízes são

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ e } \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

Como $r(x) = \operatorname{cos}(3x)$ e a constante $k = 3$ não é raiz da equação característica, então, a solução particular da ED tem a forma

$$y_p = A \operatorname{cos}(3x) + B \operatorname{sen}(3x).$$

Substituindo y_p e suas derivadas na ED dada, encontramos

$$(-9B - 3A + B)\text{sen}(3x) + (-9A + 3B + A)\text{cos}(3x) = \text{cos}(3x).$$

Segue que

$$(-8B - 3A)\text{sen}(3x) + (-8A + 3B + A)\text{cos}(3x) = \text{cos}(3x) \Rightarrow -8B - 3A = 0, \quad -8A + 3B = 1.$$

Portanto,

$$B = \frac{3}{73}, \quad A = -\frac{8}{73}.$$

A solução particular é

$$y_p = -\frac{8}{73}\text{cos}(3x) + \frac{3}{73}\text{sen}(3x).$$

Exemplo 8.14: Encontre a solução geral da ED $y'' + 4y = x^2 + 3e^x$ satisfazendo $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$.

Solução:

Neste exercício temos um problema de valor inicial (PVI) para uma ED de ordem 2.

Vamos resolvê-lo de maneira análoga demonstrada no Capítulo 7 para uma ED de 1ª ordem.

Vamos encontrar a solução geral y e depois substituir $y(0)$ e $y'(0)$ pelos valores indicados.

A ED dada é uma ED linear não homogênea com coeficientes constantes. O lado direito da ED é uma combinação linear das funções x^2 e e^x .

Neste exercício, temos que resolver um problema de valor inicial, pois há duas condições: $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$.

A solução geral da ED dada é $y = y_h + y_p$, como já mencionado anteriormente.

Primeiro vamos encontrar a y_h , solução homogênea associada à ED dada, depois a y_p , solução particular da ED dada, e por último resolveremos o problema de valor inicial.

A ED homogênea associada à ED dada: $y'' + 4y = 0$.

Equação característica: $\lambda^2 + 4 = 0$.

Como as raízes da equação característica são $-2i$ e $+2i$, segue que

$$y_n = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

A solução y_p é dada por $y_p = ax^2 + bx + c + de^x$.

Substituindo y_p e suas derivadas (y'_p e y''_p) na ED dada, temos que

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = 0, \quad c = -\frac{1}{8} \quad \text{e} \quad d = \frac{3}{5}.$$

Assim,

$$y_p = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^x.$$

A solução geral da ED dada é

$$y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^x.$$

Essa solução tem que satisfazer as condições $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$.

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{19}{40}$$

$$y'(0) = 2 \Rightarrow C_2 = \frac{7}{10}$$

Portanto, a solução para a ED deste exemplo é

$$y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^x.$$

2º Método: Método de Variação dos Parâmetros

Existe um método geral para encontrar a solução particular de uma equação não homogênea uma vez conhecida a solução geral da equação homogênea associada. Esse método é conhecido como o método de variação dos parâmetros.

Vamos iniciar nosso estudo com uma ED linear não homogênea de ordem 2, como segue:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = r(x). \quad (8.9)$$

Seja

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0 \quad (8.10)$$

a ED linear homogênea associada à ED (8.9).

Seja $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ a solução geral da ED (8.10), em que y_1, y_2 são soluções LI da ED (8.10).

Esse método consiste em substituir as constantes C_1 e C_2 na solução geral da ED (8.10) pelas funções $v_1 = v_1(x)$ e $v_2 = v_2(x)$, de modo que $y_p = v_1y_1 + v_2y_2$ satisfaça a ED (8.9).

Para determinarmos v_1, v_2 , duas condições são necessárias. Uma condição sobre v_1, v_2 e que y_p deva satisfazer a ED (8.9) e uma segunda condição imposta arbitrariamente e que será escolhida de modo a facilitar os cálculos.

Temos assim que:

$$y_p = v_1y_1 + v_2y_2$$

$$y'_p = v_1y'_1 + v'_1y_1 + v_2y'_2 + v'_2y_2$$

$$\mathbf{1^a \text{ condição: } } v'_1y_1 + v'_2y_2 = 0 \text{ (condição arbitrária)} \quad (8.11)$$

$$y'_p = v_1y'_1 + v_2y'_2$$

$$y''_p = v_1y''_1 + v_2y''_2 + v'_1y'_1 + v'_2y'_2.$$

Ao substituírmos essas expressões no primeiro membro da equação (8.9), vamos obter:

$$v_1 \left[\frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{dy_1}{dx} + by_1 \right] + v_2 \left[\frac{d^2y_2}{dx^2} + \frac{dy_2}{dx} + by_2 \right] + v'_1y'_1 + v'_2y'_2 = r(x).$$

Os dois termos dentro dos colchetes são nulos, pois y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea associada, ED (8.10). Assim, temos a 2ª condição.

$$\mathbf{2^a \text{ condição: } } v'_1y'_1 + v'_2y'_2 = r(x). \quad (8.12)$$

As equações (8.11) e (8.12) constituem um sistema de equações lineares cujas incógnitas são v'_1 e v'_2 .

Resolvendo o sistema, encontraremos as funções v'_1 e v'_2 . Integrando as funções v'_1 e v'_2 em termos da variável x , encontraremos as funções v_1 e v_2 e finalmente a solução particular da ED (8.9).

Exemplo 8.15: Encontre a solução geral da ED $y'' + 2y' - 3y = 6$.

Solução:

A ED homogênea associada à ED dada é $y'' + 2y' - 3y = 0$.

Resolvendo a equação característica da ED homogênea, encontramos as soluções LI desta, que são $y_1(x) = e^{-3x}$ e $y_2(x) = e^x$.

Portanto, a solução geral da homogênea é $y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$.

Resolvendo a ED dada no exemplo pelo método de variação de parâmetros, temos sua solução particular que é:

$$y_p = v_1 e^{-3x} + v_2 e^x \quad \text{e} \quad \begin{cases} v'_1 e^{-3x} + v'_2 e^x = 0 \\ v'_1 (-3e^{-3x}) + v'_2 e^x = 6 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema acima pela Regra de Cramer.

Sejam

$$w = \begin{vmatrix} e^{-3x} & e^x \\ -3e^{-3x} & e^x \end{vmatrix} = 4e^{-2x}, \quad w_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^x \\ 6 & e^x \end{vmatrix} = -6e^x \quad \text{e}$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} e^{-3x} & 0 \\ -3e^{-3x} & 6 \end{vmatrix} = 6e^{-3x}$$

$$v'_1 = \frac{w_1}{w} = -\frac{3}{2}e^{3x} \quad v'_2 = \frac{w_2}{w} = \frac{3}{2}e^{-x}$$

Então,

$$v_1 = \int -\frac{3}{2}e^{3x} dx = -\frac{1}{2}e^{3x} \quad \text{e}$$

$$v_2 = \int \frac{3}{2}e^{-x} dx = -\frac{3}{2}e^{-x}.$$

A solução particular da ED dada é

$$y_p = \left(-\frac{1}{2}e^{3x}\right)e^{-3x} + \left(-\frac{3}{2}e^{-x}\right)e^x$$

$$y_p = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} = -2.$$

E a solução geral é: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x - 2$.

8.5 Equações diferenciais com coeficientes variáveis

Até agora temos resolvido equações diferenciais lineares de ordem 2 ou mais alta somente quando estas possuem coeficientes constantes. Em aplicações, equações lineares de ordem superior com coeficientes não constantes (variáveis) são igualmente importantes, se não mais. Por exemplo, se quisermos encontrar a temperatura ou o potencial " u " na região compreendida entre duas esferas concêntricas, como mostrado na Figura 8.1, então sob certas circunstâncias temos de resolver a equação diferencial

$$r \frac{d^2 u}{dr^2} + 2 \frac{du}{dr} = 0,$$

em que a variável $r > 0$ representa a distância radial medida a partir do centro das esferas, conforme a Figura 8.1.

Equações diferenciais com coeficientes variáveis, tais como

$$\begin{aligned} x^2 y'' + xy' + (x^2 - y^2)y &= 0, \\ (1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y &= 0 \text{ e} \\ y'' - 2xy' + 2ny &= 0, \end{aligned}$$

ocorrem em aplicações como problema de potencial, distribuição de temperatura e fenômeno vibratório, para mecânica quântica.

Equações com coeficientes variáveis não podem ser resolvidas com a mesma facilidade com que resolvemos equações diferenciais com coeficientes constantes.

Na verdade, não podemos esperar que a solução, mesmo de uma equação simples como $y'' - 2xy = 0$, possa ser expressa em termos de funções elementares construídas com potências de " x ", senos, cossenos, logaritmos e exponenciais.

O melhor que podemos fazer em relação à equação $y'' - 2xy = 0$ é encontrar uma solução na forma de uma série infinita.

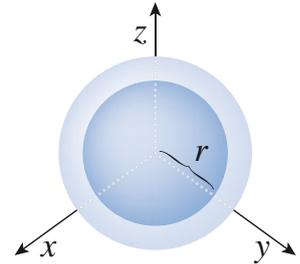


Figura 8.1

Há um tipo de equação diferencial com coeficientes variáveis, chamada equação de Cauchy-Euler, cuja solução geral pode ser escrita em termos de funções elementares.

8.5.1 Equação de Cauchy-Euler

Qualquer equação diferencial da forma

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = r(x),$$

em que a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 são constantes, é chamada de *equação de Cauchy-Euler*, ou *equação equidimensional*.

A característica desse tipo de equação diferencial é que o grau de cada coeficiente monomial coincide com a ordem de derivação:

$$a_n \overbrace{x^n \frac{d^n y}{dx^n}}^{\text{grau: } n; \text{ ordem: } n} + a_{n-1} \overbrace{x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}}^{\text{grau: } n-1; \text{ ordem: } n-1} + \dots$$

Somente para efeitos de discussão, concentraremos nossa atenção na resolução para a equação homogênea de 2ª ordem

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0.$$

A solução para equações de ordem superior é análoga. Podemos resolver a equação não homogênea

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = g(x)$$

pelo método da variação dos parâmetros.

Método de Soluções: Tentaremos uma solução da forma $y = x^m$, em que "m" deve ser determinado. A primeira e a segunda derivadas são, respectivamente,

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} \quad \text{e} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}.$$

Consequentemente, a ED (8.13) torna-se:

$$\begin{aligned} ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy &= ax^2 m \cdot (m-1)x^{m-2} + bxm \cdot x^{m-1} + c \cdot x^m \\ &= am(m-1)x^m + bmx^m + cx^m = x^m [am(m-1) + bm + c] = 0. \end{aligned}$$

Logo, $y = x^m$ será uma solução para a ED (8.13) quando " m " for uma solução para a equação auxiliar

$$am(m-1) + bm + c = 0, \quad (8.14)$$

que é equivalente a

$$am^2 + (b-a)m + c = 0.$$

Há três casos distintos a serem considerados, dependendo das raízes dessa equação (8.14), a saber: raízes reais e distintas, reais e iguais ou complexas conjugadas.

1º Caso: Raízes Reais e Distintas

Sejam " m_1 " e " m_2 " as raízes reais de (8.14) com $m_1 \neq m_2$. Então, $y_1 = x^{m_1}$ e $y_2 = x^{m_2}$ formam um conjunto de soluções, e a solução geral de (8.13) é:

$$y = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2}$$

2º Caso: Raízes Reais e Iguais

Se as raízes da equação (8.14) forem iguais, isto é, $m_1 = m_2$, então obtemos somente uma solução, a saber, $y = x^{m_1}$.

Ora, quando as raízes da equação quadrática $am^2 + (b-a)m + c = 0$ são iguais, o discriminante (Δ) dos coeficientes é necessariamente nulo. Segue-se dessa fórmula quadrática que a raiz é $m_1 = \frac{-(b-a)}{2a}$.

Agora, podemos construir uma segunda solução y_2 usando o se-

guinte $y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2(x)} dx$.

Primeiro escrevemos a equação de Cauchy-Euler na forma

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{b}{ax} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{c}{ax^2} = 0$$

e fazemos a identificação $P(x) = \frac{b}{ax}$.

Logo,

$$y_2 = x^{m_1} \int \frac{e^{-\int \frac{b}{ax} dx}}{(x^{m_1})^2} dx = x^{m_1} \int \frac{e^{-\frac{b}{ax} \ln x}}{x^{2m_1}} dx = x^{m_1} \int \left(x^{-\frac{b}{a}} \cdot x^{-2m_1} \right) dx = x^{m_1} \int \left(x^{-\frac{b}{a}} \cdot x^{-\frac{(b-a)}{a}} \right) dx = x^{m_1} \int \frac{dx}{x} = x^{m_1} \ln x.$$

$\underbrace{e^{-\frac{b}{ax} \ln x}}_{e^{-\ln x \cdot \frac{b}{ax}} = x^{-\frac{b}{a}}} \quad \underbrace{x^{-2m_1}}_{-2m_1 = \frac{b-a}{a}}$

A solução geral da ED (8.13) é, portanto, $y = C_1 x^{m_1} + (C_2 x^{m_1}) \ln x$.

3ª Caso: Raízes Complexas Conjugadas

Se as raízes da equação (8.14) são complexas conjugadas $m_1 = \alpha + \beta i$ e $m_2 = \alpha - \beta i$, com α e $\beta > 0$ reais, então, uma solução é:

$$y = C_1 x^{\alpha + i\beta} + C_2 x^{\alpha - i\beta}.$$

Mas, como no caso das equações com coeficientes constantes, quando as raízes da equação auxiliar são complexas, queremos escrever a solução em termos de funções reais somente. Notamos a identidade: $x^{i\beta} = (e^{\ln x})^{i\beta} = e^{i\beta \ln x}$, a qual, pela fórmula de Euler, é o mesmo que $x^{i\beta} = \cos(\beta \ln x) + i \operatorname{isen}(\beta \ln x)$.

Analogamente, temos $x^{-i\beta} = \cos(\beta \ln x) - i \operatorname{isen}(\beta \ln x)$. Somando e substituindo os dois últimos resultados, temos, respectivamente,

$$x^{i\beta} + x^{-i\beta} = 2\cos(\beta \ln x)$$

$$x^{i\beta} - x^{-i\beta} = 2i \operatorname{isen}(\beta \ln x)$$

Como $y = C_1 x^{\alpha + i\beta} + C_2 x^{\alpha - i\beta}$ é uma solução de $ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$, para qualquer valor das constantes C_1 e C_2 , vemos que:

$$y_1 = x^\alpha (x^{i\beta} + x^{-i\beta}), \quad [C_1 = C_2 = 1] \text{ e}$$

$$y_2 = x^\alpha (x^{i\beta} - x^{-i\beta}), \quad [C_1 = C_2 = -1].$$

Ou

$$y_1 = 2x^\alpha [\cos(\beta \ln x)] \quad \text{e}$$

$$y_2 = 2ix^\alpha [\text{sen}(\beta \ln x)]$$

são também soluções. Como

$$W = (x^\alpha \cos(\beta \ln x), x^\alpha \text{sen}(\beta \ln x)) = \beta x^{2\alpha-1} \neq 0, \quad \beta > 0,$$

no intervalo $(0, \infty)$, concluímos que

$$y_1 = x^\alpha \cos(\beta \ln x) \quad \text{e} \quad y_2 = x^\alpha \text{sen}(\beta \ln x)$$

constituem um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial. Logo, a solução geral da ED (8.13) é

$$y = x^\alpha [C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \text{sen}(\beta \ln x)].$$

Exemplo 8.16: Encontre a solução geral da ED $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - 4y = 0$.

Solução:

Em vez de simplesmente memorizar a equação (8.14), é preferível supor que $y = x^m$ seja a solução para entender a origem e a diferença entre essa nova forma de equação auxiliar e a obtida antes (associada y_h).

Derivando $y = x^m$ duas vezes, encontramos

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

e substituindo na ED dada, temos

$$\begin{aligned} x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - 4y &= x^2 m(m-1)x^{m-2} - 2xm \cdot x^{m-2} - 4x^m \\ &= x^m [m(m-1) - 2m - 4] = x^m (m^2 - 3m - 4) = 0 \\ m^2 - 3m - 4 &= 0, \quad \Rightarrow m_1 = -1 \quad \text{e} \quad m_2 = 4. \end{aligned}$$

Logo (pelo 1º caso), temos que a solução geral da ED dada é $y = C_1 x^{-1} + C_2 x^4$.

Exemplo 8.17: Encontre a solução geral da ED $4x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 8x \frac{dy}{dx} + y = 0$.

Solução:

A substituição $y = x^m$ implica

$$4x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 8x \frac{dy}{dx} + y = x^m [4m(m-1) + 8m + 1] = x^m (4m^2 + 4m + 1) = 0$$

$$4m^2 + 4m + 1 = 0 \Rightarrow (2m + 1)^2 = 0.$$

Como $m_1 = m_2 = -\frac{1}{2}$, a solução geral (2º caso) da ED dada é

$$y = C_1 x^{-\frac{1}{2}} + C_2 x^{-\frac{1}{2}} \ln x.$$

Observação: Para equações de ordem superior, se m_1 for uma raiz de multiplicidade " k ", então pode ser mostrado que x^{m_1} ; $x^{m_1} \ln x$; $x^{m_1} (\ln x)^2$; ...; $x^{m_1} (\ln x)^{k-1}$ são " k " soluções LI. A solução geral para a ED deve, portanto, conter uma combinação linear dessas " k " soluções.

Exemplo 8.18: Encontre a solução geral da ED $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + 3y = 0$, em que $y(1) = 1$ e $y'(1) = -5$.

Solução:

Temos

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + 3y = x^m [m(m-1) + 3m + 3] = x^m (m^2 + 2m + 3) = 0.$$

Quando $m^2 + 2m + 3 = 0$, pela fórmula quadrática, encontramos

$$m_1 = -1 + \sqrt{2}i \text{ e } m_2 = -1 - \sqrt{2}i.$$

Se fizermos as identificações $\alpha = -1$ e $\beta = \sqrt{2}$, veremos que a solução para a ED é:

$$y = x^{-1} [C_1 \cos(\sqrt{2} \ln x) + C_2 \sin(\sqrt{2} \ln x)].$$

Usando as condições do PVI: $y(1) = 1$ e $y'(1) = -5$ na solução acima, vem $C_1 = 1$; $C_2 = -2\sqrt{2}$. Logo, a solução do PVI é:

$$y = x^{-1} [\cos(\sqrt{2} \ln x) - 2\sqrt{2} \sin(\sqrt{2} \ln x)].$$

Método Alternativo de Solução:

Qualquer ED de Cauchy-Euler pode ser reduzida a uma equação com coeficientes constantes por meio da substituição $x = e^t$.

O próximo exemplo ilustra esse método.

Exemplo 8.19: Encontre a solução geral da ED $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = \ln x$.

Solução:

Com a substituição $x = e^t$ ou $t = \ln x$, temos que:

$$\text{i) } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt} \quad (\text{regra da cadeia}).$$

ii)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) + \frac{dy}{dt} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x} \right) + \frac{dy}{dt} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right).$$

$$\text{Substituindo na ED dada e simplificando, } \frac{d^2 y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} + y = t.$$

Como essa última equação tem coeficientes constantes, sua equação característica é:

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m - 1)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 1.$$

$$\text{Logo, } y_h = C_1 e^t + C_2 t e^t.$$

Pelo método dos coeficientes a determinar, tentamos uma solução particular da forma $y_p = A + Bt$.

Essa suposição conduz a $-2B + A + Bt = t$. Assim, $A = 2$ e $B = 1$.

$$\text{Usando } y = y_h + y_p, \text{ obtemos } y = C_1 e^t + C_2 t e^t + 2 + t.$$

A solução geral para a ED original no intervalo $(0, \infty)$ e na variável "x" é:

$$y = C_1 x + C_2 x \ln x + 2 + \ln x.$$

Resumo

Neste capítulo, apresentamos vários métodos para resolver uma equação diferencial linear homogênea ou não, de grau maior ou igual a 2 com coeficientes constantes. Lembramos que para as equações diferenciais homogêneas, basta resolver uma equação

polinomial chamada “equação característica” da equação diferencial dada para encontrarmos sua solução geral e que para as não homogêneas podemos aplicar dois métodos: método dos coeficientes a determinar x e método de variação de parâmetros. Neste método, temos que resolver um sistema para encontrar a solução geral da equação diferencial dada.

Apresentamos também um tipo especial de equação diferencial linear com coeficientes não constantes, que são as equações de Cauchy-Euler que tem uma forma diferente de resolução comparando com as equações diferenciais de coeficientes constantes.

Exercícios propostos

- 1) Mostre que $y(x) = x^3$ é solução da ED $2xy'' - xy' - 9y = 0$.
- 2) Determine qual ou quais das funções $z_1(x) = x^2$, $z_2(x) = x^3$ e $z_3 = e^{-x}$ é(são) solução(ões) da ED $(x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0$.
- 3) Determine a solução geral das equações diferenciais.
 - a) $y'' + y' + y = 0$
 - b) $y'' + 4y' + 4y = 0$
 - c) $y'' + 3y' + 2y = 0$
 - d) $y^{(3)} + 2y'' - 2y' - y = 0$
 - e) $y^{(4)} + 3y^{(3)} + 3y'' + y' = 0$
 - f) $4y'' + 12y' + 9y = 0$
 - g) $y^{(3)} - y'' + y' - y = 0$
 - h) $y^{(3)} + 3y'' - 4y' - 12y = 0$
- 4) Determine a solução geral das seguintes EDs:
 - a) $y'' + 3y' + y = x + 1$
 - b) $y'' + y' + y = \cos(3x)$
 - c) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$

- d) $y'' + 2y' + y = t^2$ com $y(0) = y'(0) = 0$
 e) $y'' + y' - 2y = t^2 + 3$ com $y(0) = y'(0) = 0$
 f) $y''' + 4y' = x$
 g) $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$
 h) $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$ com $y(0) = 1, y'(0) = 0$
 i) $y'' + y = \operatorname{tg}(x)$
 j) $y'' + 4y' = x^2 + 3e^x$

5) Resolva as seguintes equações:

- a) $x^2 y'' - xy' + 2y = 3x$
 b) $x^2 y'' + 3xy' + 3y = 0$ com $y(1) = 1$ e $y'(1) = -5$
 c) $x^2 y'' - 2xy' - 4y = 0$
 d) $4x^2 y'' + 8xy' + y = 0$
 e) $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x^4 e^x$
 f) $x^2 y'' - xy' + y = \ln x$

Respostas

2. $z_1(x) = x^2$ e $z_2(x) = x^3$ não são soluções da ED e $z_3 = e^{-x}$ é solução da ED.

3. a) $y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

b) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$

c) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

d) $y = C_1 e^x + C_2 e^{\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)x} + C_3 e^{\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)x}$

e) $y = C_1 + C_2 t y + C_3 e^{-2t} + C_4 t e^{-2t}$

f) $y = C_1 e^{\frac{3}{2}x} + C_2 x e^{\frac{3}{2}x}$

$$\text{g) } y = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + C_3 e^x$$

$$\text{h) } y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-3x}$$

$$4. \text{ a) } y = C_1 e^{\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)x} + C_2 e^{\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)x}$$

$$\text{b) } y = C_1 e^{\frac{1}{2} \cos(\sqrt{3})x} + C_2 e^{\frac{1}{2} \sin(\sqrt{3})x} - \frac{8}{73} \cos(3x) + \frac{3}{73} (3x)$$

$$\text{c) } y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^2 e^x$$

$$\text{d) } y = -4e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t}{2}\right) + 4e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t}{2}\right) + (t-2)^2$$

$$\text{e) } y = \frac{12}{25} e^{-t} + \frac{6}{5} t e^{-t} - \frac{12}{25} \cos(2t) - \frac{9}{25} \sin(2t)$$

$$\text{f) } y = C_1 + C_2 \cos(2x) + C_3 \sin(2x) + \frac{1}{8} x^2$$

$$\text{g) } y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + e^x$$

$$\text{h) } y = \frac{6}{25} e^x + \frac{19}{25} e^{-x} - \frac{1}{5} x e^{-x}$$

$$\text{i) } y = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) - \cos(x) \ln |\sec(x) + \tan(x)|$$

$$\text{j) } y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5} e^x$$

$$5. \text{ a) } y = x(C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)) + 3x$$

$$\text{b) } y = \frac{1}{x} (C_1 \cos(\sqrt{2} \ln x) + C_2 \sin(\sqrt{2} \ln x))$$

$$\text{c) } y = C_1 x^{-1} + C_2 x^4$$

$$\text{d) } y = C_1 x^{\frac{1}{2}} + C_2 x^{\frac{1}{2}} \ln x$$

$$\text{e) } y = C_1 x + C_2 x^3 + 2x^2 e^x - 2x e^x$$

$$\text{f) } y = C_1 x + C_2 x \ln x + 2 + \ln x$$

Referências

- ABUNAHMAN, Sérgio A. **Equações diferenciais**. Rio de Janeiro: EDC, 1994.
- ANTON, H. **Cálculo um novo horizonte**. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000. v. 2.
- ÁVILA, G. **Cálculo 3: funções de várias variáveis**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1983.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C., **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- CARMO, M. P. do. **Elementos de geometria diferencial**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1971.
- EDWARDS, C. H. JR.; PENNEY, D. E. **Cálculo com geometria analítica**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999. v. 2.
- FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **Lições de física de Feynman: edição definitiva**. Porto Alegre: Bookman, 2008. v.1 e v.2.
- FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo C**. 3. ed. São Paulo: Makron Books, 2000.
- GUIDORIZZI, H. **Um curso de cálculo**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1997. v. 2.
- PISKUNOV, N. **Cálculo diferencial e integral**. Porto: Edições Lopes da Silva, 1990. v. 2.
- STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. v. 2.
- SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1995. v. 2.
- ZILL, D. G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**. São Paulo: Makron Books, 2000.
- _____. _____. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1997. v. 3.

$$\iint_T \operatorname{div}(\vec{f}) dV$$



UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA



UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

Governo
Federal

$$= \iint_S \operatorname{rot}(\vec{f}) \cdot \vec{n} dS$$

Cálculo III e IV

Este livro aborda dois assuntos importantes para alunos de Ciências Exatas que são: Cálculo Vetorial e Equações Diferenciais Ordinárias. Na parte de Cálculo Vetorial, são destacados os três teoremas importantes: teorema de Green, de

Gauss e de Stokes além da teoria necessária para um bom entendimento de função vetorial. Na parte de Equações Diferenciais Ordinárias, são destacados alguns tipos de equações diferenciais e métodos de resolução para essas equações.



$$\operatorname{rot}(\vec{f}) = \nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \vec{k}$$