

Estudos recentes sobre frações no campo da História da Educação Matemática: avanços e desafios

Barbara Winiarski Diesel Novaes¹

Neuza Bertoni Pinto²


Resumo: O objetivo deste artigo é discutir avanços e desafios do tema frações, identificados em pesquisas da História da educação matemática. Para tanto, examinamos quinze estudos recentes, publicados em eventos científicos e periódicos especializados, no período de 2019 a 2020. Tomando como parâmetro a distinção entre “ensino matemático das frações” e “matemática do ensino de frações” (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021), as análises destacam avanços em estudos que apontaram transformações ocorridas na “matemática do ensino de frações” em diferentes períodos históricos. No campo da História da educação matemática, são ressaltados avanços decorrentes do uso de materiais estruturados para a matemática do ensino de frações, tal como os elaborados por Cuisenaire, dentre outros. Em relação aos desafios, verificou-se como mais proeminente o localizado no estudo de Valente (2020), ao recomendar a realização de pesquisas que contemplem análises de categorias como sequência, significado e graduação das frações, além dos exercícios e problemas envolvendo o tema e que são propostos aos alunos.


Palavras-chave: História da Educação Matemática. Frações. Matemática do Ensino de Frações.

Recent studies about fractions in the Mathematics Education History field: advances and challenges

Abstract: This article paper aims to discuss advances and challenges regarding the fractions subject, identified in studies in the mathematics education History field. To do so, fifteen recent studies published in scientific events and journals are examined, in the period from 2019 to 2020. Considering the distinction between “mathematical teaching of fractions” and “mathematics of teaching fractions” (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021), the analysis highlight advances in studies that have pointed out transformations in the “mathematics of teaching fractions” in different historical periods. In terms of advances in the mathematical education History field, those resulting from the use of structured materials for the mathematics of teaching fractions are highlighted, such as the materials created by Cuisenaire, among others. Regarding the challenges, the most prominent one was found in Valente’s study (2020), due to its recommendation about researching analysis of categories such as sequence, meaning and graduation of fractions, in addition to the related fractions’ exercises as well as problems proposed to students.

Keywords: Mathematics Education History. Fractions. Mathematics of Teaching Fractions.

¹ Doutora em Educação. Professora da Universidade Tecnológica Federal do Paraná e do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas da Universidade Federal do Paraná (UFPR). Paraná, Brasil. ✉ barbaraw@utfpr.edu.br  <https://orcid.org/0000-0002-7763-7777>

² Doutora em Educação. Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT). Mato Grosso, Brasil. ✉ neuzabertonip@gmail.com  <http://orcid.org/0000-0002-9224-3020>

Estudios recientes sobre fracciones en el campo de la Historia de la Educación Matemática: avances y desafíos

Resumen: El propósito de este artículo es discutir los avances y desafíos en el tema de las fracciones, identificados en la investigación en la Historia de la educación matemática. Así, son examinados quince estudios recientes publicados en eventos científicos y publicaciones periódicas, de 2019 a 2020. Tomando como parámetro la distinción entre “enseñanza matemática de fracciones” y “matemática de la enseñanza de fracciones” (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021), los análisis destacan avances en estudios que señalaran transformaciones ocurridas en la "matemática de la enseñanza de fracciones" en diferentes períodos históricos. En el campo de la Historia de la educación matemática, se destacan los avances resultantes del uso de materiales estructurados para la matemática de la enseñanza de fracciones, como los elaborados por Cuisenaire, entre otros. En relación con los desafíos, se encontró como más prominente aquel en el estudio de Valente (2020), al recomendar la realización de investigaciones que comprendan el análisis de categorías como secuencia, significado y graduación de fracciones, además de los ejercicios y problemas sobre el tema que se proponen a los estudiantes.

Palabras clave: Historia de la Educación Matemática. Fracciones. Matemática de la Enseñanza de Fracciones.

Introdução

Os saberes para ensinar frações têm sido um tema recorrente em estudos recentes sobre o saber profissional do professor que ensina matemática nos primeiros anos escolares. Especialmente os desenvolvidos em perspectiva histórica, em sua maioria vinculados a um projeto em curso no GHEMAT Brasil³, apresentam um expressivo crescimento no biênio (2019-2020). O interesse pela temática, possivelmente se deve à busca de melhor compreensão dos novos aportes teóricos advindos do grupo de pesquisadores da Universidade de Genebra/Suíça⁴, no que se refere aos conceitos que o grupo brasileiro tem mobilizado em suas pesquisas, ou seja, os saberes *a ensinar* e os saberes *para ensinar* que, uma vez articulados e objetivados, constituem os saberes profissionais da docência. Trata-se de saberes que passam por processos de decantação, “ganhando formas sistematizadas para se tornarem referência à formação de professores” (VALENTE, 2019, p. 17). No âmbito da História da educação matemática (Hem), esses saberes estão sendo mobilizados pelos pesquisadores do Ghemat Brasil a partir da *matemática a ensinar* e da *matemática para ensinar*, conceitos problematizados por Valente (2017).

Nesse contexto, as discussões sobre saberes para ensinar frações, na perspectiva

³ Projeto Temático: “A matemática na formação de professores e no ensino: processos e dinâmicas de produção de um saber profissional, 1890-1990”, financiado pela FAPESP e coordenado por Wagner Rodrigues Valente – GHEMAT Brasil.

⁴ Trata-se dos estudos realizados pela *Equipe de Recherche en Histoire Sociale de l'Éducation* (ERHISE), coordenado por Rita Hofstetter- *Université de Genève*.

da história da educação matemática, são acompanhadas de problematizações de métodos, rupturas e permanências em programas do ensino primário, assim como em livros didáticos e manuais pedagógicos que orientam professores em sua formação inicial. No campo da Educação Matemática, discussões em diferentes abordagens têm apontado problemas que ainda hoje permanecem sem solução em propostas curriculares e em livros didáticos, como indicam inúmeros estudos, dentre outros, os de Scheffer e Powell (2020); Graça, Ponte e Guerreiro (2021); Almeida e Ribeiro (2021) e Broetto e Santos-Wagner (2017).

Scheffer e Powell (2020) analisam 56 estudos (dissertações, teses e artigos) referentes ao período de 2013 a 2019, indagando o papel das representações gráficas, dos materiais manipulativos e das tecnologias digitais, para aprender frações. Suas análises apontam reflexões práticas e teóricas sobre processos diferenciados em termos de cognição, interpretações semânticas e abordagens pedagógicas, a partir do uso de diferentes recursos didáticos como: materiais manipulativos e digitais relativos às frações. Também constata a presença de propostas que contemplam interpretações de parte-todo, de medida e de magnitude⁵ para frações, que consideramos um avanço nas práticas pedagógicas relacionadas à matemática do ensino de frações.

Graça, Ponte e Guerreiro (2021) analisam o uso de frações em problemas em quintos anos do ensino fundamental, inicialmente verificam uma apreensão limitada do conceito desse conteúdo, notadamente em relação ao significado de medidas, e observam, também, que a apropriação apresentada pelos alunos abrangeu apenas os significados parte-todo e operador (resolução procedimental). Por meio de estratégias direcionadas à superação das lacunas encontradas na aprendizagem, os autores contemplam dinâmicas e processos que possibilitam um avanço na compreensão do conceito de número racional ao abordar diferentes significados⁶ das frações.

Almeida e Ribeiro (2021) apresentam um capítulo no livro “Constituindo aprendizagens e saberes em contextos formativos para o desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática”, organizado por Biani, Longo e Lorenzato (2021) sobre o conhecimento especializado de frações considerado essencial no ensino e na formação inicial e contínua do professor da educação básica. Alguns aspectos desse conhecimento especializado, com foco na importância e no papel da unidade ao trabalhar frações, centralizam esta discussão, visando uma compreensão ampla e profunda da matemática

⁵ “Magnitude, para os autores, é considerada amplitude, extensão” (SCHEFFER e POWELL, 2020, p. 11).

⁶ O termo significado é polissêmico. Graça, Ponte e Guerreiro (2021) apresentam interpretações a partir do campo disciplinar, o que pode ser diferente em outras matrizes teóricas.

básica que precisam ensinar acerca deste conteúdo. Em destaque, neste capítulo, observa-se a metodologia que utiliza questões que desnaturalizam o conceito cristalizado pelo aluno para estabelecer um diálogo com os professores envolvendo tarefas escritas e orais que favoreçam a compreensão do sentido da fração como unidade. Em termos de avanço, este estudo ao tratar dos saberes especializados remete a preocupações atuais, trazidas pelos estudos históricos, acerca dos saberes profissionais para ensinar frações.

Os estudos de Broetto e Santos-Wagner (2017) realizam um diagnóstico dos conhecimentos referentes a números racionais e irracionais trazidos por ingressantes de um curso de Licenciatura em Matemática, que estão fundamentados em teorias da imagem e definição do conceito (David Tall e Shlomo Vinner), compreensão incipiente (Antônio Domingos), compreensão instrumental e relacional (Richard Skemp), além de exemplos protótipos (Rina Hershkowitz). Os resultados da intervenção realizada mostram que a apropriação dos referidos conceitos foi incipiente em relação a números racionais e irracionais. O estudo trata de uma intervenção necessária à superação das lacunas da aprendizagem de números reais, base para novos saberes profissionais.

De modo geral, as investigações têm dirigido o olhar ao que deveria ser ensinado sobre frações, no como e quando ensinar, nos materiais que poderiam auxiliar os alunos a uma melhor compreensão deste conteúdo. Assim, posicionamentos acerca da inutilidade do ensino de frações nos primeiros anos escolares, formas aligeiradas de tratar o tema, os frágeis usos da relação *parte e todo*, a ausência de compreensão de frações equivalentes, além da falta de criatividade em relação aos materiais utilizados no ensino desse conteúdo matemático, são aspectos que vêm sendo amplamente problematizados em estudos como os já citados.

Um novo olhar sobre a temática mostra, entretanto, que tratados epistemologicamente, os velhos problemas do ensino de frações podem ser compreendidos a partir de uma reflexão de André Chervel (1990), ao indagar “por que a escola ensina o que ensina?” (p. 190). Visto historicamente, tais problemas podem contribuir para desnaturalizar a velha representação da pedagogia, segundo Chervel (1990), a representação de uma pedagogia compreendida como um método capaz de adaptar o conteúdo à condição de ensinável, enquanto solução para transformar um saber científico em saber escolar.

Nessa perspectiva, para além da didática impregnada nos saberes para ensinar frações, há que se questionar os processos e dinâmicas que formalizaram a matemática do ensino desse conteúdo, como propõe o estudo de Morais, Bertini e Valente (2021) ao trazer

uma inédita contribuição à historiografia da educação matemática, ao distinguir o *ensino da matemática* da *matemática do ensino*.

A matemática do ensino, neste texto, é considerada como um saber resultante da produção histórica da cultura escolar. Por ensino da matemática, identificamos a expressão como sinônimo do desafio que o campo disciplinar matemático tem para ser transmitido na escola. Desse modo, com a matemática do ensino tem-se uma perspectiva diferente daquela do ensino de matemática. Esta última, reitera-se, preocupa-se em lançar olhar sobre mecanismos didáticos voltados para problemáticas postas pela transmissão de saberes dos campos disciplinares científicos para o interior do meio escolar (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 16).

Ao mostrar como a escola produz saberes próprios, portanto, uma produção da cultura escolar, no caso, uma matemática do ensino de frações, o referido livro objetivou caracterizar diferenças fundamentais entre um campo científico e um campo escolar.

No que toca aos saberes professados na escola, os estudos de Chervel dão contribuição relevante, pois contrapõem-se à ideia vigente de que a escola está reservado apenas o papel de ensinar o que os campos disciplinares produzem, elaboram, sistematizam. Os estudos de Chervel permitiram estabelecer diferenças epistemológicas fundamentais entre uma disciplina científica e uma disciplina escolar (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 15).

Amparada na cultura escolar, a matemática do ensino de frações se contrapõe à racionalidade de outras culturas que levam até mesmo à negação, que implica na supressão das frações do currículo dos anos iniciais.

No âmbito da História da educação matemática (Hem), lugar onde se concentram atuais estudos sobre a *matemática a ensinar* e a *matemática para ensinar*, este olhar histórico, que leva em conta o ponto de vista epistemológico da matemática escolar, estimula uma leitura de tais problemáticas e sugere visitar a matemática do ensino de frações em diferentes momentos históricos, considerando como procederam os autores da obra citada, além da longa permanência desse tema nos programas da matemática dos primeiros anos escolares, os problemas que ainda hoje permanecem sem solução em propostas curriculares e em livros didáticos. Como afirmam Moraes, Bertini e Valente (2021), diferentemente da *matemática do ensino*, produto da cultura escolar, o *ensino da matemática* está preocupado com os saberes científicos que entram na escola e necessitam de mecanismos didáticos para se tornarem ensináveis.

Nesse sentido, com o foco nos avanços e desafios da matemática do ensino de

frações como categoria de análise, buscamos problematizá-los no conjunto dos estudos históricos selecionados.

O ensino das frações em diferentes momentos históricos

Os estudos selecionados foram organizados cronologicamente em períodos, conforme vagas pedagógicas e temporalidade das fontes contempladas, ou seja, periodizações que remetem a importantes propostas de modernização do ensino primário brasileiro.

Do Tradicional ao Método Intuitivo: final do século XIX às primeiras décadas do século XX

Para essa primeira periodização, foram analisados cinco estudos históricos, conforme posto no Quadro 1. As fontes privilegiadas em quatro deles (VALENTE, 2020; NEVES; SANTOS, FRANÇA, 2020; MACIEL, 2020; LAUS, 2020) referem-se a livros didáticos e manuais pedagógicos com grande circulação no Brasil. Apenas um dos estudos (ALVES, 2020) utiliza revistas pedagógicas.

Quadro 1: Trabalhos da primeira periodização

Título do trabalho	Autor(es) / Ano	Periodização
A matemática do ensino e o ensino de matemática: as frações nos anos escolares, segunda metade do século XIX	Valente (2020)	segunda metade do século XIX
Um "novo" olhar sobre as frações segundo o manual Primeira Lições de Coisas	Neves, França e Santos (2020)	segunda metade do século XIX
Matemática para ensinar: uma interpretação do ensino de frações no manual de René Barreto (1912)	Maciel (2020)	início do século XX
História da educação matemática: O ensino de frações e números decimais no final do século XIX	Laus (2020)	final do século XIX
Ensino de frações antes ou depois dos decimais? Um estudo a partir de revistas pedagógicas	Alves (2020)	final do século XIX até meados do século XX

Fonte: Elaborado pelas Autoras

Valente (2020) busca caracterizar a *matemática do ensino* de frações na segunda metade do século XIX e mobiliza o conceito de cultura escolar, considerando a escola como produtora de saberes no seio dessa cultura. Pontua que essa matemática é algo distinto de *ensino da matemática* sendo “a primeira, produção histórica da cultura escolar; a segunda, expressão ligada à ideia de transmissão da produção do campo disciplinar matemático para o nível escolar” (VALENTE, 2020, p. 35). Dessa forma, analisa processos e dinâmicas de constituição dos saberes escolares, da matemática presente na escola, da matemática do ensino contemplando os livros didáticos como artefato cultural da escola, um elemento da cultura escolar. São analisadas duas obras bastante significativas, devido ao número de edições que tiveram, a partir da segunda metade do século XIX: o livro de Ascânio Ferraz da Motta, intitulado "Pequeno Curso de Arithmetica" para uso das escolas primárias e a obra de José Theodoro de Souza Lobo, "Primeira Arithmetica para Meninos". Alerta que, apesar de todos os avanços das pesquisas que o Gemat Brasil tem desenvolvido, não há estudos mais pontuais e ao mesmo tempo de maior profundidade que tomem um dado tema de ensino, analisando-o no seio de uma matemática do ensino. A sequência, o significado, a graduação e os exercícios e problemas em que um dado tema do ensino está enredado são categorias de análise utilizadas no trabalho. Segundo o autor, tais categorias permitem elaborar uma “anatomia epistemológica da matemática do ensino” (VALENTE, 2020, p. 37). Os resultados mostram a organização de uma matemática do ensino de frações que se altera em razão das necessidades de escolarização do sistema métrico decimal.

A pesquisa de Neves, França e Santos (2020) buscou indícios de uma pedagogia moderna *a e para* ensinar frações, no Manual “Primeiras Lições de Coisas” de Calkins, a partir de suas apropriações do método intuitivo. Sintetiza orientações pedagógicas por etapas: observar, classificar e generalizar e, ainda aborda a ideia de frações de partes iguais de objetos (maçãs, folha de papel), de números (contados de esferas) e de grandezas (comparação de retas paralelas divididas em metades e terços em forma de diagrama). Ressaltam características do método intuitivo nas lições: do concreto para o abstrato, do particular para o geral, da síntese para a análise, do conhecido para o desconhecido, das coisas para as palavras de forma prática e concreta. Pontuam sobre as permanências das ideias de Calkins (vestígios de apropriação) “no Ensino Fundamental I à medida que as atividades exploram a comparação entre grandezas, a composição e decomposição de figuras geométricas recortadas e a divisão em partes iguais e as relações numéricas” (NEVES; FRANÇA; SANTOS, 2020, p. 5).

Maciel (2020) investigou elementos que podem ser caracterizados como uma *matemática para ensinar*, a partir da interpretação das orientações emitidas por René Barreto para o ensino de frações, no seu manual “Série Graduada de Mathematica Elementar” (1912). A autora definiu uma metodologia para categorizar elementos do processo de objetivação de um conjunto de saberes que fundamentam a *expertise* profissional do professor. Os resultados apontam para uma *matemática para ensinar* que buscava romper com o ensino tradicional, pautado na ordem lógica e na escrita da aprendizagem inicial dos números. A matemática do ensino de frações passa a ser orientada pelo método analítico conduzido por exemplos que partiam do concreto ao abstrato, do todo às partes que levava o aluno a elaborar e a solucionar problemas orais.

Laus (2020) analisa como se dava o ensino de frações e de números decimais nos primeiros anos escolares, em finais do século XIX, por meio de três livros didáticos escritos e utilizados na época, visando assim entender: quais espaços ocupavam o ensino de frações e de números decimais nesse recorte histórico; o que os livros ensinavam primeiro, decimais ou frações; e, se havia concordância ou discordância entre os autores da época. Nos livros “Aritmética para meninos” (1879) de José T. Souza Lobo (5ª ed.) e “Aritmética prática” de Felipe Nery Collaço, 1888 (16ª ed.), as frações são ensinadas primeiro, e no livro “Aritmética escolar” (1891) de Ramon Roca Dordal, 1891 (1ª ed.), depois dos decimais. Uma explicação possível, nesta fase inicial da pesquisa, refere-se à constatação de que Lobo e Collaço regem seus escritos de acordo com a vaga tradicional. De outra parte, Dordal já apresenta vestígios do método intuitivo. Observando as divergências entre a ordem do ensino de frações e decimais e de método de ensino, a autora acredita no não consenso do que deve ser ensinado primeiro – não consenso esse que perdura até os dias de hoje.

Alves (2020), assim como Laus (2020), analisa a sequência dos ensinamentos de aritmética, considerando as frações ordinárias e os números decimais, após selecionar artigos de revistas pedagógicas de diferentes épocas: “A Eschola Publica” (1894), a “Revista da Sociedade de Educação” (1924) e a “Revista Atualidades Pedagógicas” (1954). O ensino de frações aparece anterior ao ensino de números decimais em todas as revistas analisadas, mesmo que a forma de tratar o tema tenha justificativas diversas. Constatação que aponta para uma estabilidade do saber profissional, ao longo do tempo, relativamente ao trabalho docente com esse conteúdo escolar.

Do Método Intuitivo à Escola Ativa: 1920 - 1950

Esse período marca as transformações do método intuitivo e a introdução da Pedagogia Científica de base estatística. Em relação às fontes constituídas, os estudos (quadro 2) desse período mostram uma variedade destas: cadernos, planos de aula, livros didáticos e documentos oficiais para fins de cotejamento com documentação escolar.

Quadro 2: Trabalhos da segunda periodização

Título do trabalho	Autor(es) / Ano	Periodização
As frações nas edições da Segunda Aritmética da Série Concórdia	Kuhn (2019)	década de 1940
Práticas matemáticas inscritas em cadernos escolares: o caso das frações	Silva, Machado e Flores (2020)	décadas de 1930 e 1940
Frações nas escolas primárias de Santa Catarina: um olhar sobre planos de aula da década de 1940	Zuin (2020)	década de 1940
Manuais preparatórios para os exames de admissão ao ginásio: uma análise sobre a fração	Neves (2019)	décadas de 1940, 1950 e 1960 ⁷

Fonte: Elaborado pelas Autoras

Kuhn (2019) analisa frações nas edições da “Segunda Aritmética da Série Concórdia” (1940) editada pela Igreja Luterana - Casa Publicadora Concórdia de Porto Alegre. Ao contemplar a cultura escolar, o autor verificou que nas diferentes edições da obra mencionada foi priorizado o significado das frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ (visualização da divisão de uma linguiça, uma maçã, um bolo, um queijo) e a fração de um número (bolinhas) pelo método de ensino intuitivo, seguido de exercícios para o desenvolvimento de habilidades de cálculo mental e escrito de acordo com o nível dos alunos. Por fim, a aplicação prática do conhecimento matemático formalizado. Os problemas exploram as ideias de fração, parte-todo e quociente, que, ao relacioná-las a diferentes contextos, articulando-as em unidades dos sistemas de medidas e operações comerciais, mostram consonância com as orientações pedagógicas da época. Verifica-se que o livro traz

⁷ Período de consolidação das ideias da Pedagogia Científica de base estatística e após os anos de 1950, o impacto sofrido com a incorporação das ideias piagetianas viabilizadas pelo Movimento da Matemática Moderna.

representações geométricas retangulares para desenvolver a ideia de equivalência de frações, e explora as classes de equivalência das frações $1/2$, $1/3$ e $1/5$. Apresenta exercícios envolvendo a elaboração de notas de compras, relacionadas com números fracionários e números decimais. Destaca, na obra de Lindemann (1888) *Amerikanisch-Lutherische Schul-Praxis* (Práticas escolares para os luteranos americanos), editada pela Editora Concórdia de *Sant Louis* (Estados Unidos), orientações pedagógicas para o ensino da Matemática nas escolas missourianas que tiveram ressonâncias nas escolas paroquiais luteranas gaúchas. As frações estão contextualizadas com práticas socioculturais, desenvolvidas nas comunidades em que as escolas paroquiais luteranas estavam inseridas, associadas com unidades dos sistemas de medidas e operações comerciais, como a abordagem de atividades relacionadas à agricultura e à economia

Utilizando teorizações de Michel Foucault (conceitos de dispositivos, monumentos e práticas discursivas) para nortear os preceitos teórico-metodológicos da pesquisa, Silva, Machado e Flores (2020) objetivaram identificar e analisar práticas matemáticas inscritas em cadernos escolares de uma escola mista estadual do município de Antônio Carlos (SC), nas décadas de 1930 e 1940. Os resultados da pesquisa indicam práticas matemáticas desenvolvidas nessa escola seguindo programas oficiais catarinenses da época, com soluções rápidas e sucintas, voltadas às tarefas do contexto da roça (como economias e gastos, medição de terrenos). Os cadernos trazem evidências de ensino das frações distanciadas da relação número e medida, envolvendo a ideia de parte-todo com total ausência de inscrições que demonstrem o uso da fração como divisão, quociente, razão, etc.

Zuin (2020) apresenta uma descrição e análise de planos de aula de Aritmética, relativamente ao ensino de frações, elaborados por docentes de quatro escolas do Estado de Santa Catarina, nos anos 1941 e 1942. O intuito da investigação foi verificar se as propostas de condução das aulas para o 3º e 4º anos do ensino primário contemplavam os princípios do ensino intuitivo e do escolanovismo e se os planejamentos dos docentes atendiam às prescrições da legislação escolar. Neste sentido, a autora detecta um contraste entre as finalidades de objetivo (normativas) e as finalidades reais (práticas) concernentes ao referido tópico. As análises dos planos de aula indicaram que aspectos do ensino intuitivo, do método ativo e das prescrições legislativas eram considerados, porém outros eram negligenciados, tais como trabalhos em grupo, jogos ou atividades extraclases, como estava prescrito no decreto n.714, de 1939, que contemplava, em Santa Catarina, os

princípios fundamentais da Escola Nova.

O estudo de Neves (2019) buscou reunir indícios sobre como era ensinada a representação de fração em manuais preparatórios para admissão ao ginásio (de 1931 a 1969): “Manual de admissão” (1942) de Cecil Thiré e J. B. Mello e Souza ; “Exercícios de aritmética para o curso de admissão” (1954) de Ary Quintella e Newton O’Reilly (colaborador); “Programa de admissão – nôvo, com matemática moderna” (1968) de Aroldo de Azevedo, Domingos Paschoal Cegalla, Joaquim Silva e Osvaldo Sangiorgi. O significado de operador multiplicativo foi discutido apenas no manual que teve a colaboração de Sangiorgi, quando foi abordada a ideia de um singular e um plural no conjunto dos números fracionários. Quanto à fração como número, Thiré comparou as frações com números inteiros usando apenas a representação de fração na forma n/m , enquanto Sangiorgi utilizou ilustrações pictóricas e esquemas de resolução de problemas. Os construtos de medida e de fração como quociente não foram explorados nos manuais analisados. Dessa forma, o estudo mostra diferenças no ensino das frações, entre estes manuais, indicando os que se restringiram apenas a uma preparação técnica e memorística dos alunos para o exame de admissão e os que procuravam explicar a fração de maneira ilustrada e detalhada por meio de desenhos e estratégias para a resolução de problemas.

Da Escola Nova Renovada ao Movimento da Matemática Moderna: 1950 - 1980

A década de 1930 a 1970, período em que as ideias do ensino ativo são renovadas, representa um momento de alteração de princípios e inovações de práticas pedagógicas, valendo-se de métodos e processos mais apropriados aos interesses e à compreensão da criança, com possibilidades de um ensino mais efetivo, considerando a participação ativa da criança nos processos de ensino e aprendizagem.

Neste período, os estudos (quadro 3) destacam materiais didáticos referentes à transição de uma matemática do ensino de frações que utiliza recursos para ensinar novos saberes, a partir, por exemplo, do flanelógrafo, folhas de papéis, quadro de equivalência de frações, filme sanfonado, discos de frações, aos materiais estruturados tais como os “blocofração” e material Cuisenaire.

Quadro 3: Trabalhos da terceira periodização

Título do trabalho	Autor(es) / Ano	Periodização
A análise de um material para o ensino de frações: um filme de 1955	Souza, Fischer, Lima e Severo (2019)	década de 1950
Saberes Para Ensinar Frações no Livro: O Ensino de Aritmética pela Compreensão	Jandrey, Dias e Santos (2020)	década de 1960
Saberes para ensinar frações equivalentes em livros didáticos e manuais pedagógicos (1960 – 1970)	Marques, Novaes (2019)	décadas de 1960 e 1970
Transformações nos saberes para ensinar frações no curso primário relacionadas ao uso de materiais escolares (1930-1970 ⁸)	Novaes, Berticelli e Pinto (2020b)	décadas de 1930 e 1960
Ensinar fração: algumas considerações das produções de Bezerra	Domingues, Gregório e Costa (2020)	década de 1960
A descoberta das frações equivalentes e o material Cuisenaire	Novaes e Niérri (2020)	década de 1960

Fonte: Elaborado pelas Autoras

O artigo de Souza *et al.* (2019) comenta um filme elaborado no Instituto de Educação General Flores da Cunha, no ano de 1955. Trata-se de um documento encontrado no acervo do Laboratório de Matemática do Instituto, sendo um conjunto de imagens coladas lado a lado, na forma de “sanfona”, todos com gravuras sobre frações diárias na vida da criança. A atividade foi realizada por alunas do Curso de Administração Escolar, na cadeira de Metodologia da Matemática, por orientação da professora Odila Barros Xavier. São feitos comentários sobre as ilustrações de frações ordinárias no filme, ou seja, como a fração pode aparecer em variadas situações na vida cotidiana (frações na moda, nas lojas, no armazém, no açougue, na cozinha, na leitaria, na fiabreria, na merenda, na livraria, no

⁸ No mesmo ano as autoras (NOVAES; BERTICELLI; PINTO, 2020a) publicaram “*Guidelines on the Use of Teaching Materials for Teaching Fractions in the Brazilian Primary Course (1930-1970)*” na revista *Pedagogical Research* (<https://doi.org/10.29333/pr/8221>).

brinquedo, entre outros). A finalidade da pesquisa foi mostrar como materiais didáticos sobre as frações, desde a década de 1950, já abordavam os possíveis contextos na vida diária. Nesse sentido, considera-se que o material poderia ser tomado como sugestão, com adaptações para ser utilizado na atualidade.

Com o objetivo de verificar saberes para ensinar frações presentes no livro “O ensino de aritmética pela compreensão” de Grossnickle e Brueckner (1965), Jandrey, Dias e Santos (2020) destacam o uso de flanelógrafos, de discos de frações e quadros de equivalência para o ensino de frações ordinárias. Orienta que haja uma gradação do ensino das operações de adição e de subtração de frações. As operações com denominadores diferentes deveriam ocorrer, a partir da quinta série, com o uso de materiais didáticos. O livro foi traduzido para o português com a colaboração do setor de Recurso Técnico da Aliança - Agência Norte-Americana para o desenvolvimento Internacional - USAID. Ancorado em princípios da Escola Nova, o manual pedagógico orienta os professores a tratarem as operações com as frações acompanhadas de um material exploratório e concreto para levar o aluno a descobrir os princípios das operações com frações ordinárias.

Com o propósito de olhar a matemática do ensino das frações equivalentes (MARQUES; NOVAES, 2019), estas autoras analisam manuais escolares de grande circulação no Brasil, na época final de 1960 e início de 1970. Foram analisados “Matemática na escola primária moderna” (1968) de Norma Cunha Osório e Rizza de Araujo Pôrto, o livro didático e Guia do professor “Vamos aprender matemática - quarta série” (1971) de Norma Cunha Osório, Rizza de Araujo Pôrto e Nair Tulha Evangelista e o Guia do professor “Vamos aprender matemática - terceira série” (1972) de Norma Cunha Osório, Rizza de Araújo Pôrto. O manual de Rizza e Porto (1968) é dividido em seis estágios (Estágio Preliminar, Estágio 1, Estágio 2, Estágio 3, Estágio 4 e Estágio 5) que são as cinco séries, mais o estágio preliminar. Apresentam a matéria distribuída, gradativamente, pelos estágios, obedecendo a uma sequência lógica dos assuntos. O conteúdo de frações equivalentes tem início no Estágio 3, em que a criança chega ao conceito em questão, comparando frações por meio de classes de equivalência. Muitas e variadas atividades são disponibilizadas às crianças para que seja compreendido o motivo de determinadas frações serem equivalentes. No Estágio 4 é abordado o conceito de simplificação de frações. Concluem que apesar do livro enfatizar a importância da criança compreender os conceitos básicos das frações, ainda é recorrente a ênfase das regras e algoritmos para ensinar a equivalência de frações.

Os estudos de Novaes, Berticelli e Pinto (2020b) investigaram as transformações nos saberes para ensinar frações no curso primário, relacionadas ao uso de materiais didáticos, no período de 1930 a 1970 por meio de análises em manuais pedagógicos: “Das frações dobrando e rasgando papel”, de José Ferraz de Campos (1933); “Metodologia da Matemática”, de Irene de Albuquerque (1958) e “Frações na escola elementar” e “Ver, sentir e descobrir a Aritmética”, de Rizza de Araújo Porto (1967; 1968).

Das frações "dobrando e rasgando papel", problematizadas por Campos (1933), destaca-se a importância da criança trabalhar com os materiais didáticos que auxiliem a comprovar propriedades, deduzir regras e compreender as frações, antes de se chegar à abstração. O manual traz sugestões que visam articular a ciência de referência (matemática) às ciências da educação, ao deslocar a atenção do ensino para a aprendizagem, em respeito à criança, aos seus interesses e atividades. Assim, o manual analisado trabalha com a ideia de que o material concreto é indispensável ao ensino das frações. Critica o uso de materiais que não levam a criança a estabelecer relações com seu cotidiano e a outras matérias do ensino primário. No manual de Albuquerque (1958), destacam-se recomendações do uso de materiais atribuindo ao aluno, a busca das regras envolvidas nos cálculos com frações, valendo-se de um processo de "redescoberta" em sintonia com seu modo de "ver, sentir, agir e pensar". Para tanto sugere o "quadro de equivalências de frações", pois considera importante o conceito de equivalência para a apropriação do conhecimento sobre frações. Em relação aos dois manuais de Porto (1967 e 1968), nota-se uma recorrente afirmação sobre a relevância do uso de materiais didáticos para o ensino de frações, permeando todas as séries do curso primário.

Buscando elucidar orientações didáticas e pedagógicas, recomendadas pelo Professor Manoel Jairo Bezerra para o ensino de fração, o estudo de Domingues, Gregório e Costa (2020), "*MATEMÁTICA A ENSINAR E MATEMÁTICA PARA ENSINAR FRAÇÃO: algumas considerações das produções de Bezerra*", analisa o Caderno MEC de Matemática, de 1968; o artigo Blocofração, publicado em 1962, pela Revista do Ensino, RS, n.86, p.29-32 e o Guia Metodológico do Caderno MEC (1970). Fontes estas que tratam do material Blocofração, indicado para o curso primário e primeira série dos cursos de grau médio. Bezerra entendia como material didático, "todo recurso sensorial usado pelo professor ou pelo aluno, durante a aprendizagem" (BEZERRA, 1970, p.23, *apud* DOMINGUES; GREGÓRIO; COSTA, 2020, p. 6). Composto de blocos de madeira (cubos, paralelepípedos, de tamanhos e cores diversas), o material, segundo Bezerra, oferece

vários benefícios ao professor e aluno, dentre eles, a otimização do tempo da aprendizagem, o maior interesse dos alunos e a padronização da instrução. Comentando sobre as orientações dadas por Bezerra acerca do uso do material, os autores mostram exemplos de atividades por ele propostas e que trazem questionamentos sobre os blocos contidos na caixa Blocofrações, além de questões sobre frações próprias, impróprias, números mistos, dentre os múltiplos conteúdos relacionados a frações, abordados por Bezerra. Numa das atividades propostas, discute a simplificação de frações, explorando este conceito pela comparação de peças de cores iguais e diferentes, e relaciona-as ao conceito de frações equivalentes. Dentre as funções do material, indicadas por Bezerra, os autores destacam: auxiliar o professor a tornar mais atraente o ensino de frações; ilustrar uma forma de acabar com o medo da Matemática, facilitar o domínio pelo aluno de operações que internalizadas formam estruturas para a construção do rigor dedutivo necessário para o domínio do conteúdo.

Por meio da análise do livro “Didática das Matemáticas Elementares” do argentino Angel Diego Márquez, publicado em espanhol em 1962 e traduzido para o português em 1967, o estudo de Novaes e Niérri (2020) objetivou analisar uma proposta para ensinar frações equivalentes por meio das barras de Cuisenaire. O estudo aponta que o educador e sua obra foram vetores da circulação do Método Cuisenaire no Brasil, durante o período da matemática moderna, ancorados nos fundamentos psicopedagógicos de Jean Piaget sobre a gênese do número e as estruturas-mãe (algébricas, topológicas e de ordem). Por meio do material estruturado a criança, de forma rápida e eficaz, adquire os mecanismos das operações matemáticas fundamentais, partindo do concreto pensado sem comprometer o rigor dedutivo, e passa a ter consciência de uma álgebra de conjuntos e estruturas fundamentais. O número é percebido como uma grandeza contínua, desta forma com novas racionalidades. As frações são concebidas como operadores e o material é utilizado como meio de comprovação e suporte para a compreensão, levando a criança à descoberta das frações equivalentes por meio de tentativa e erro.

De acordo com Morais, Bertini e Valente (2021, p. 71), *a matemática do ensino de frações tradicional* é verbalístico e tem por finalidade instruir o estudante, proporcionar-lhe a destreza do cálculo para bem utilizá-lo no mundo fora da escola. A implantação do sistema métrico decimal nos programas de Aritmética foi a grande necessidade a ser atendida para instruir a população para a vida.

Na segunda periodização, os avanços da psicologia contribuem para mudanças

importantes no papel da escola, na relação professor e aluno e, principalmente, na matemática do ensino de frações. Para além da concepção da criança como um adulto em miniatura, seu desenvolvimento passa a ser considerado no processo de ensino, pois, com outra finalidade, a escola se torna a própria vida. O fazer e a ação do aluno substituem o papel anterior voltado à memorização dos conteúdos ensinados pelo professor. As atividades com frações são experienciadas pela criança, agora sujeito e ator no processo ensino e aprendizagem. As frações ganham espaço no cotidiano da criança com uma nova aritmética fundamentada em testes que sinalizam o seu nível de desenvolvimento.

As análises apontam que a maior parte desses estudos, ao que indicam os quadros relativos à periodização, refere-se ao tempo da Escola Ativa, década de 1930 a 1970 (segunda e terceira periodizações), momento de uma expressiva renovação na matemática do ensino (*matemática a ensinar*) articulada à matemática da formação (*matemática para ensinar*), tanto pela consolidação do ideário da "escola sob medida", como da incorporação, nas décadas de 1960 e 1970, das ideias vindas do Movimento da Matemática Moderna. Nessa abordagem, a graduação do ensino das frações propõe atividades concretas aos alunos, com exploração de materiais estruturados fundamentados em etapas do processo de desenvolvimento cognitivo infantil.

Considerações finais

Retomando à questão que orientou este artigo, “que avanços e desafios são sinalizados nos recentes estudos sobre frações nos primeiros anos escolares”, observa-se que os estudos analisados indicam preocupação dos autores com a matemática do ensino de frações, em diferentes períodos históricos, tempos que ficaram marcados por diversificadas vagas pedagógicas: ensino tradicional, Escola Nova, Movimento da Matemática Moderna.

Dentre os 15 estudos analisados sobressai o avanço presente no estudo de Valente (2020) que recorre à epistemologia para mostrar, em manuais didáticos do século XIX, a distinção entre “o ensino de frações”- que se vale de suporte didático para transmitir saberes de frações, originários do campo disciplinar da ciência matemática, portanto, um saber produzido longe das lides escolares – e a “matemática do ensino das frações” - produto da cultura escolar, ou seja, um saber elaborado no meio escolar.

Ao notar a ausência de estudos históricos da “matemática do ensino” no âmbito do GHEMAT Brasil, o autor propõe um desafio, o de mobilizar categorias de análise nela

envolvidas, como a sequência, a graduação, os exercícios e problemas do conteúdo em questão. Tais análises permitem situar as dinâmicas que, colocadas em relação à *matemática a ensinar* e à *matemática para ensinar*, dão visibilidade à articulação de dois campos disciplinares (matemática e educação), processo indispensável na produção um novo saber - a matemática do ensino - um saber objetivado e em condições de ser ensinado a alunos dos anos iniciais.

Avanços dessa natureza pertinentes às frações em manuais didáticos, em finais do século XIX, também são percebidos nos estudos de Lauss (2020); Alves (2020); Maciel (2020); Neves, França e Santos (2020), ao mobilizarem categorias de análise que permitiram compreender processos levados a efeito pelos autores dos manuais para tratar da matemática do ensino de frações em finais do século XIX, um ensino centrado no professor, na transmissão de saberes aos alunos, com aulas expositivas e incentivos para a memorização.

Diversificando o documental mobilizado nas análises, os estudos de Silva, Machado e Flores (2020); Zuin (2020); Souza *et al.* (2019); Marques e Novaes (2019) ao constituírem suas fontes com cadernos escolares, planos de aula, materiais didáticos, documentos oficiais, dentre outros, apontam para o protagonismo dos materiais escolares no período que abrange a consolidação da Escola Nova, especialmente o momento de uma Escola Ativa renovada e a penetração das ideias piagetianas e dos fundamentos do Movimento da Matemática Moderna.

Em relação aos materiais didáticos, o estudo de Novaes, Berticelli e Pinto (2020b) apresenta avanço nas pesquisas sobre frações nos primeiros anos escolares, ao evidenciar que, à medida que diminui o uso de materiais manipuláveis e são introduzidos gráficos, diagramas, quadros de equivalência, oriundos da Pedagogia Científica, na vertente da Psicologia Experimental, ocorrem transformações nos saberes para ensinar frações, marcando em tempos de ensino renovado, a transição do concreto manipulado ao concreto pensado, como indicam os manuais pedagógicos de Irene de Albuquerque e Rizza de Araújo Porto.

Nos estudos analisados, um desafio pode ser notado no período do escolanovismo, face à profusão de materiais didáticos para ensinar frações, apontando para a importância de saber usá-los, adequadamente, como parte de um conjunto de saberes produzidos pela cultura escolar, para o professor ensinar matemática na escola primária, no período do escolanovismo. Nota-se que, nos anos iniciais do curso primário (1^a e 2^a séries), há uma preocupação maior dos autores dos manuais com o uso de materiais para ensinar frações,

ao dispor uma variedade de modos de aprender com o auxílio de diferentes materiais didáticos. Estes parecem funcionar como mediadores do processo de aprendizagem no que se refere à relação concreto/abstrato envolvida na apropriação do conhecimento matemático.

Nas séries finais, o uso de materiais vai diminuindo e esses são substituídos por diagramas, gráficos, desenhos, quadros de equivalência, em atendimento às finalidades propedêuticas de uma escola preocupada em preparar o aluno para os Exames de Admissão, em vistas de seu ingresso no ensino secundário. Uma dimensão dos saberes profissionais para ensinar que expressa as contribuições fortemente disseminadas pela Pedagogia Científica advinda da Psicologia Experimental aponta para uma notória transformação requerida para ensinar frações nos primeiros anos escolares.

Nessa renovação os materiais didáticos para o ensino passam a ocupar um lugar de destaque nos saberes da *matemática a ensinar* e na *matemática para ensinar* frações na escola primária, tornam-se saberes objetivados e adequados tanto para a formação de professores como para o ensino da matemática nos primeiros anos escolares, desnaturalizando, com isso, a cultura do secundário anteriormente incorporada nesse processo da formação e do ensino.

Por último, vale também sinalizar desafios como a adoção na formação de novos saberes para ensinar frações, saberes decorrentes de um conhecimento especializado sobre o conteúdo em questão, resultante da articulação do campo disciplinar com o campo profissional, e que possam deixar marcas, nos registros dos alunos, de uma matemática apropriada para ensinar, ou seja, de um saber profissional para ensinar frações.

Referências

ALMEIDA, A. R.; RIBEIRO, M. Conhecimento especializado do professor no âmbito das frações: uma discussão sobre a importância da unidade. In: BIANI, T. P.; LONGO, C. A. C.; LORENZATO, S. (org.) **Constituindo aprendizagens e saberes em contextos formativos para o desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática**. Campinas, SP: Editora FE - Unicamp, 2021, p. 47-73.

ALVES, L. O ensino de frações: antes ou depois dos decimais? Um estudo a partir de revistas pedagógicas. **ACERVO - Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP**, v. 2, n. 2, p. 81-96, 29 set. 2020.

BIANI, T. P.; LONGO, C. A. C.; LORENZATO, S. (org.) **Constituindo aprendizagens e saberes em contextos formativos para o desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática**. Campinas, SP: Editora FE - Unicamp, 2021.

BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. DOS. Conhecimentos relativos a Números Racionais e Irracionais de uma aluna ingressante na Licenciatura em Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 8, n. 1, p. 67-82, 7 abr. 2017.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, Porto Alegre, v. 2, p. 177-229, 1990.

JANDREY, F. D.; DIAS, L. S.; SANTOS, E. S. C. Saberes Para Ensinar Frações no Livro: O Ensino de Aritmética pela Compreensão. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2020, Natal. **Anais do 5º ENAPHEM**. História da educação matemática: panoramas curriculares e circulação do conhecimento, Natal: UFRN, 2020, p. 1-5.

GRAÇA, S. I.; PONTE, J. P.; GUERREIRO, A.. Quando As Frações Não São Apenas Partes de Um Todo...! **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 23, n. 1, p. 683-712, 2021.

DOMINGUES, J. M.; GREGÓRIO, J. M. C.; COSTA, D. A. Matemática a ensinar e matemática para ensinar fração: algumas considerações das produções de Bezerra. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**, v.10, n. 3, 2020.

KUHN, M. C. As frações nas edições da Segunda Aritmética da Série Concórdia. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, 2019, Campo Grande. **Anais do 4º ENAPHEM**. Formação de Professores: história, cultura e política, Campo Grande: UFMS, 2019, p. 1-13.

LAUS, L. A História da educação matemática: O ensino de frações e números decimais no final do século XIX. **ACERVO - Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP**, v. 2, n. 2, p. 97-112, 29 set. 2020.

MACIEL, V. B. MATEMÁTICA PARA ENSINAR: uma interpretação do ensino de frações no manual de René Barreto (1912). In: XVIII Seminário Temático: Os *experts* e a sistematização da matemática para o ensino e formação de professores, 2020, Cuiabá. **Anais do XVIII Seminário Temático: Os experts e a sistematização da matemática para o ensino e formação de professores**. Cuiabá: UNIC, 2020, p.1-18.

MARQUES, M. E. B.; NOVAES, B. W. D. Saberes para ensinar frações equivalentes em livros didáticos e manuais pedagógicos (1960 - 1970). In: XXIV Seminário de Iniciação Científica da UTFPR, 2019, Pato Branco. **Anais do XXIV SICITE**. Curitiba: UTFPR, 2019. v. 1. p. 1-6.

MORAIS, R. S.; BERTINI, L. F.; VALENTE, Wagner Rodrigues. **A MATEMÁTICA DO ENSINO DE FRAÇÕES: do século XIX a BNCC**. 1. ed. São Paulo: L F Editorial, 2021. v. 1. 90p.

NEVES, K. R. MANUAIS PREPARATÓRIOS PARA OS EXAMES DE ADMISSÃO AO GINÁSIO: uma análise sobre a fração. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 5, n. 1, 26 maio 2019.

NEVES, K. R. C.; FRANÇA, D. M.; SANTOS, E. S. C. DOS. Um "novo" olhar sobre as frações segundo o manual Primeiras Lições de Coisas. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2020, Natal. **Anais do 5º ENAPHEM**. História da educação matemática: panoramas curriculares e circulação do

conhecimento, Natal: UFRN, 2020, p. 1-5.

NOVAES, B. W. D.; BERTICELLI, D. G. D.; PINTO, N. B. Guidelines on the Use of Teaching Materials for Teaching Fractions in the Brazilian Primary Course (1930-1970). **PEDAGOGICAL RES.** 2020a;5(3), em0065. <https://doi.org/10.29333/pr/8221>

NOVAES, B. W. D.; BERTICELLI, D. G. D.; PINTO, N. B. Transformações nos saberes para ensinar frações no curso primário relacionadas ao uso de materiais escolares (1930-1970). ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2020, Natal. **Anais do 5º ENAPHEM.** História da educação matemática: panoramas curriculares e circulação do conhecimento, Natal: UFRN, 2020b, p. 1-5.

NOVAES, B. W. D.; NIERRI, A. M. A descoberta das frações equivalentes e o material Cuisenaire. ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2020, Natal. **Anais do 5º ENAPHEM.** História da educação matemática: panoramas curriculares e circulação do conhecimento, Natal: UFRN, 2020, p. 1-5.

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações na educação básica: o que revelam as pesquisas publicadas no Brasil de 2013 a 2019. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 9, n. 1, p. 8-37, 17 ago. 2020.

SILVA, F. F. M.; MACHADO, R. B.; FLORES, Claudia R.. Práticas Matemáticas Inscritas em Cadernos Escolares: o caso das frações. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, p. 751-778, 2020.

SOUZA, J.; FISCHER, M. C. B.; LIMA, C. F.; SEVERO, A. S.. A ANÁLISE DE UM MATERIAL PARA O ENSINO DE FRAÇÕES: UM FILME DE 1955. In: XVII Seminário Temático Materiais Didáticos e História da Educação Matemática, 2019, Aracaju. **Anais do XVII Seminário Temático**, 2019.

VALENTE, W. R. A matemática a ensinar e a matemática para ensinar: os saberes para o educador matemático. In: HOFSTETTER, R.; VALENTE, W. R. (Org.) **Saberes em (trans) formação: tema central da formação de professores.** 1 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, p. 201-226.

VALENTE, W.R. Saber objetivado e formação de professores: reflexões pedagógico-epistemológicas. **Revista História da Educação (Online)**, v.23: e 7747, p. 1-22, 2019.

VALENTE, W. R. A matemática do ensino e o ensino de matemática: as frações nos primeiros anos escolares, segunda metade do século XIX. **Historia de la Educación**, v. 39, p. 31-44, 2020.

ZUIN, E. FRAÇÕES NAS ESCOLAS PRIMÁRIAS DE SANTA CATARINA: um olhar sobre planos de aula da década de 1940. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 6, n. 2, 1 set. 2020.