

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E ELETRÔNICA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Otávio Falbo Egami

**Modelagem Térmica Analítica de um Indutor Monofásico**

Florianópolis

2022

Otávio Falbo Egami

## **Modelagem Térmica Analítica de um Indutor Monofásico**

Trabalho de Conclusão do Curso de Graduação em Engenharia Elétrica do Centro Tecnológico da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Mauricio Valencia Ferreira da Luz, Dr.

Florianópolis

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Egami, Otávio Falbo  
Modelagem térmica analítica de um indutor monofásico /  
Otávio Falbo Egami ; orientador, Mauricio Valencia  
Ferreira da Luz, 2022.  
63 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -  
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico,  
Graduação em Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

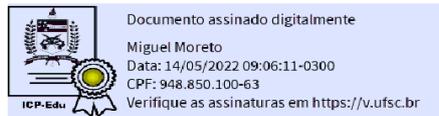
1. Engenharia Elétrica. 2. Modelo térmico analítico. 3.  
Rede térmica de parâmetros concentrados. 4. Indutor  
monofásico. I. Ferreira da Luz, Mauricio Valencia. II.  
Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em  
Engenharia Elétrica. III. Título.

Otávio Falbo Egami

## Modelagem Térmica Analítica de um Indutor Monofásico

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de “Bacharel em Engenharia Elétrica” e aceito, em sua forma final, pelo Curso de Graduação em Engenharia Elétrica.

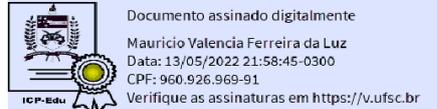
Florianópolis, 13 de maio de 2022.



---

Prof. Miguel Moreto, Dr.  
Coordenador do Curso de Graduação em Engenharia Elétrica

### Banca Examinadora:

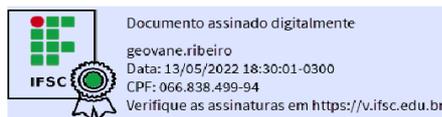


---

Prof. Mauricio Valencia Ferreira da Luz, Dr.  
Orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Angelo Alfredo Hafner, Dr.  
Universidade do Estado de Santa Catarina



---

Prof. Geovane Romeu Ribeiro.  
Instituto Federal de Santa Catarina

Este trabalho é dedicado aos meus queridos pais.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradecimentos aos meus familiares que sempre me apoiaram muito durante todo o percurso independente de tudo. Aos meus amigos e a minha companheira que me ajudam e me aconselham em momentos difíceis.

Às pessoas que me ajudaram na execução deste trabalho, especialmente ao Matheus Henrique Wagner pelo auxílio com as simulações do indutor monofásico nos softwares Gmsh/GetDP e por sempre estar disposto a ajudar. Agradeço, também, ao meu orientador que me ajudou durante todo esse percurso de trabalho e me inspira a ser um profissional e uma pessoa melhor.



## RESUMO

A busca pela otimização de equipamentos elétricos faz com que a modelagem térmica seja uma ferramenta essencial para o projetista, prevendo a distribuição da temperatura no interior do equipamento. Nesse contexto, este trabalho apresenta uma abordagem para a modelagem térmica analítica baseada na analogia entre circuitos elétricos e térmicos, possuindo como entrada as perdas no núcleo e no enrolamento, a temperatura ambiente, e os dados de geometria e materiais do equipamento. Esta abordagem começa com a divisão da geometria em volumes, que contém um nó, e a junção dos volumes formam uma rede térmica de parâmetros concentrados. Os modos de transferência de calor (condução, convecção e radiação) são modelados como resistências térmicas, as temperaturas como fontes de tensão e as perdas como fontes de corrente para o regime permanente e o regime transiente. O modelo em regime transiente ainda tem a adição de capacitâncias térmicas. O modelo térmico analítico é aplicado a um indutor monofásico a seco e os resultados são comparados com os resultados obtidos pelo método de elementos finitos em três dimensões (MEF-3D). O modelo analítico foi implementado em Matlab/Simulink e as simulações foram realizadas nos softwares Gmsh/GetDP. Para o regime permanente as diferenças percentuais dos resultados analíticos e MEF-3D se mantiveram abaixo de 4%. Para o regime transiente, a constante de tempo apresentou uma diferença percentual entre analítico e MEF-3D de no máximo 10% para todos os volumes.

**Palavras-chave:** Modelagem térmica. Modelo analítico. Método de elementos finitos. Indutor monofásico.

## ABSTRACT

The search for the optimization of electrical equipment makes thermal modelling an essential tool for the designer, predicting the temperature distribution inside the equipment. In this context, this work presents an approach to analytical thermal modeling based on the analogy between electrical and thermal circuits, having as input the losses in the core and windings, the ambient temperature, and the data of geometry and materials of the equipment. This approach starts with the division of the geometry into volumes, which contain a node, and the junction of the volumes forms a thermal network of lumped parameters. The heat transfer modes (conduction, convection, and radiation) are modeled as thermal resistances, temperatures as voltage sources, and losses as current sources for the steady-state and transient regimes. The transient model still has the addition of thermal capacitances. The analytical thermal model is applied to a dry type single-phase inductor and the results are compared with the results obtained by the finite element method in three dimensions (FEM-3D). The analytical model was implemented in Matlab/Simulink and the simulations were performed in the Gmsh/GetDP software. For the steady-state regime, the percentage differences between the analytical and FEM-3D results remained below 4%. For the transient regime, the time constant presented a maximum percentual difference of 10% between analytical and FEM-3D results for all volumes.

**Keywords:** Thermal modeling. Analytical model. Finite element method. Single-phase inductor.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Influência da temperatura na condutividade térmica. ....	18
Figura 2. Modelo MEF aplicado no Gmsh. ....	23
Figura 3. Malha gerada pelo Gmsh. ....	24
Figura 4. Representação de transferência de calor unidimensional.....	25
Figura 5. Representação unidimensional de uma resistência térmica de convecção.....	26
Figura 6. Placas paralelas com fluxo de calor. ....	28
Figura 7. Representação da resistência térmica de convecção e radiação.....	30
Figura 8. Queda de temperatura em uma interface.....	30
Figura 9. Fluxograma do algoritmo do RTPC.....	32
Figura 10. Geometria.....	33
Figura 11. Efeito da introdução do entreferro na curva B-H.....	35
Figura 12. Simetrias consideradas. ....	36
Figura 13. Visualizações de 1/4 da geometria.....	36
Figura 14. Separações das regiões.....	37
Figura 15. Divisão da geometria em volumes. ....	37
Figura 16. Especificação das nomenclaturas dos volumes.....	38
Figura 17. Especificação dos nós no núcleo.....	38
Figura 18. Modelo MEF e definição das regiões. ....	40
Figura 19. Curva BH do aço.....	41
Figura 20. Distribuição dos nós na geometria. ....	41
Figura 21. Resistência térmica de condução do nó 1 com o nó 2.....	42
Figura 22. Resistência térmica do nó 3 ao ambiente. ....	43
Figura 23. Representação da resistência térmica equivalente do nó 3 ao ambiente.....	43
Figura 24. Convergência da temperatura em 150A.....	47
Figura 25. Comparação MEF e RTPC, corrente nominal. ....	48
Figura 26. Comparações com MEF da perna central e entreferros para corrente nominal. ....	49
Figura 27. Temperatura no enrolamento (esquerda) e na perna externa (direita). ....	50



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Números adimensionais.....	28
Tabela 2. Parâmetros geométricos.....	34
Tabela 3. Parâmetros físicos.....	34
Tabela 4. Comparação entre coeficientes de convecção .....	39
Tabela 5. Perdas no indutor e nos nós, corrente nominal.....	40
Tabela 6. Comparação para 150 [A] (corrente nominal).....	45
Tabela 7. Comparação para 125 [A] (83,33% da corrente nominal).....	46
Tabela 8. Comparação para 100 [A] (66,67 % da corrente nominal).....	46
Tabela 9. Constantes de tempo.....	48



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

---

<i>MEF</i>	Método de elementos finitos
<i>RTPC</i>	Rede térmica de parâmetros concentrados

---



## LISTA DE SÍMBOLOS

$c_{p_f}$	Calor específico do fluido	[J/(kg · K)]
$h_{rad}$	Coefficiente de radiação	[W/(m <sup>2</sup> · K)]
$A, A_1, A_2$	Áreas da superfície	[m <sup>2</sup> ]
$A_c$	Área de seção transversal do núcleo	[cm <sup>2</sup> ]
$A_w$	Área de seção transversal do enrolamento	[m <sup>2</sup> ]
$B_m$	Indução máxima ao longo do tempo	[T]
$B_r$	Indução resultante [T]	[T]
$C_{th}$	Capacitância térmica	[J/(kg · °C)]
$E_g$	Energia gerada internamente no volume	[W]
$I_f$	Amplitude da harmônica da corrente na frequência $f$	[A]
$L_i$	Indutância	[H]
$P_c$	Perda no núcleo	[W/m <sup>3</sup> ]
$P_w$	Perda por efeito Joule no enrolamento	[W/m <sup>3</sup> ]
$Q_{cond}$	Taxa de transferência de calor por condução	[W]
$Q''_{cond}$	Fluxo de calor por condução	[W/m <sup>2</sup> ]
$Q_{conv}$	Taxa de transferência de calor por convecção	[W]
$Q''_{conv}$	Fluxo de calor por convecção	[W/m <sup>2</sup> ]
$Q_{rad}$	Taxa de transferência de calor por radiação	[W]
$Q''_{rad}$	Fluxo de calor por radiação	[W/m <sup>2</sup> ]
$R_{cond}$	Resistência térmica de condução	[K/W]
$R_{cont}$	Resistência térmica de contato	[K/W]
$R_{conv}$	Resistência térmica de convecção [K/W]	[K/W]
$R_{rad}$	Resistência térmica de radiação	[K/W]
$T_0$	Período fundamental da indução	
$T_\infty$	Temperatura do fluido	[K]
$T_\infty$	Temperatura do fluido	[K]
$T_s$	Temperatura na superfície	[K]
$T_{surr}$	Temperatura ao redor do volume	[K]
$c_p$	Calor específico	[J/(kg · K)]
$g_a$	Aceleração gravitacional	[m <sup>2</sup> /s]
$k_f$	Condutividade térmica do fluido	[W/(m · K)]
$k_{pc}$	Coefficiente da característica resistência-frequência no enrolamento	
$k_x, k_y, k_z$	Condutividade térmica na direção $(x, y, z)$	[W/(m · K)]
$l_g$	Espessura do entreferro	[cm]
$\dot{q}$	Geração interna	[W/m <sup>3</sup> ]

$\alpha_A$	Coefficiente exponencial quadrático das perdas histeréticas	
$\alpha_B$	Coefficiente exponencial linear das perdas histeréticas	
$\alpha_C$	Coefficiente exponencial constante das perdas histeréticas	
$\alpha_t$	Difusividade térmica []	[m <sup>2</sup> /s]
$\beta_F$	Coefficiente de perdas parasíticas no núcleo	
$\beta_H$	Coefficiente de perdas histeréticas no núcleo na frequência nominal	
$\beta_s$	Coefficiente de perdas suplementares no núcleo	
$\mu_0$	Permeabilidade magnética do núcleo	[H/m]
$\mu_c$	Permeabilidade do núcleo	
$\mu_f$	Viscosidade dinâmica do fluido	[kg/(m · s)]
$\rho_f$	Densidade do fluido	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma_r$	Constante de Stefan-Boltzmann.	
$\nabla T$	Gradiente de temperatura	[K/m]
$h$	Coefficiente de convecção	[W/(m <sup>2</sup> · K)]
$L$	Espessura do sólido	[m]
$MPL$	Comprimento do caminho magnético	[cm]
$N$	Número de espiras	
$Nu$	Número de Nusselt	
$Pr$	Número de Prandtl	
$Ra$	Número de Rayleigh	
$S$	Distância entre as duas superfícies	[m]
$T$	Temperatura na superfície	[K]
$f$	Frequência	[Hz]
$\beta$	Coefficiente de expansão térmica do fluido	[1/K]
$\nu$	Viscosidade cinemática	[m <sup>2</sup> /s]
$\rho_m$	Densidade do material	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho$	Resistividade do condutor	[( $\Omega \cdot m$ ) <sup>-1</sup> ]
$\tau$	Constante de tempo	[h]
$\epsilon$	Emissividade	
$\delta$	Tolerância definida para verificação da convergência	

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>15</b>
1.1	OBJETIVOS .....	16
1.2	ESTRUTURA DO TRABALHO .....	16
<b>2</b>	<b>TRANSFERÊNCIA E GERAÇÃO DE CALOR.....</b>	<b>17</b>
2.1	TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO .....	17
2.2	TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO .....	20
2.3	TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR RADIAÇÃO .....	20
2.4	PERDAS NO NÚCLEO .....	21
2.5	PERDAS POR EFEITO JOULE .....	22
2.6	OBTENÇÃO DAS PERDAS ATRAVÉS DO MEF.....	23
<b>3</b>	<b>MODELAGEM TÉRMICA COM PARÂMETROS CONCENTRADOS ....</b>	<b>25</b>
3.1	REPRESENTAÇÃO DA RESISTÊNCIA TÉRMICA DE CONDUÇÃO .....	25
3.2	REPRESENTAÇÃO DA RESISTÊNCIA TÉRMICA DE CONVECÇÃO .....	26
<b>3.2.1</b>	<b>Determinação do coeficiente de convecção.....</b>	<b>27</b>
3.3	REPRESENTAÇÃO DA RESISTÊNCIA TÉRMICA DE RADIAÇÃO .....	29
3.4	REPRESENTAÇÃO DA RESISTÊNCIA TÉRMICA DE CONTATO.....	30
3.5	REPRESENTAÇÃO DAS PERDAS .....	31
3.6	CONDUÇÃO TRANSIENTE .....	31
<b>4</b>	<b>ESTUDO DE CASO .....</b>	<b>33</b>
4.1	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA .....	36
4.2	CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	39
4.3	DEFINIÇÃO DAS PERDAS .....	40
4.4	DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS TÉRMICOS .....	41
<b>5</b>	<b>RESULTADOS .....</b>	<b>45</b>
5.1	RESULTADOS EM REGIME PERMANENTE .....	45
5.2	RESULTADOS EM REGIME TRANSIENTE .....	48

5.3	VARIAÇÃO DA CONDUTIVIDADE TÉRMICA EM Z.....	49
6	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>51</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>53</b>
	<b>APÊNDICE A – Exemplo de saída do script desenvolvido, 150A.....</b>	<b>55</b>
	<b>APÊNDICE B - Geometria completa implementada, plano XY.....</b>	<b>56</b>
	<b>APÊNDICE C - Geometria completa implementada, plano YZ.....</b>	<b>57</b>



## 1 INTRODUÇÃO

A busca pela otimização de equipamentos elétricos é uma das grandes preocupações na engenharia elétrica. O projeto ótimo dos equipamentos faz com que haja redução na utilização dos materiais e alta eficiência. Existe, também, a consciência de que não se tem aproveitado integralmente as capacidades dos materiais usados na construção de equipamentos, que por precaução utiliza de margens de segurança.

A abordagem baseada na analogia entre circuitos elétricos e térmicos é utilizada para a determinação de uma rede térmica de parâmetros concentrados (RTPC) que é apresentado, desenvolvido e aplicado em um indutor monofásico. Nessa abordagem as perdas são modeladas como fontes de corrente enquanto as transferências de calor são modeladas como resistências térmicas.

Determinar o número de nós é importante, porque com poucos nós a precisão e a capacidade de estimar a temperatura máxima pode ser comprometida, em contraste, com muitos nós a precisão aumenta, porém, a rede pode se tornar muito complexa e com tempo de simulação demorado (ALEXIS, et al., 2020).

O desenvolvimento da aplicação do RTPC pode ser visto em (MENDES, 2020) que aplica o modelo em um transformador monofásico do tipo *shell* e verifica experimentalmente o resultado das temperaturas. A consideração da dependência da temperatura no coeficiente de convecção e radiação são feitos em todas as superfícies que possuem geração interna de calor.

Em (MEJUTO, 2010) a modelagem de um gerador síncrono é apresentada. Neste estudo a consideração de planos para a implementação do RTPC é feita, tornando a análise da RTPC tridimensional. As considerações de perdas foram obtidas por meio do MEF e é considerado efeitos do fluxo de ar de forma diferenciada em diferentes planos do motor. Os resultados são verificados experimentalmente.

Em (ALEXIS, et al., 2020) é feito a modelagem térmica de um transformador de média frequência com uma metodologia adaptada para várias estruturas. Um estudo de caso é feito aplicando a RTPC em uma geometria do tipo *core*. Neste estudo, é considerado as perdas no dielétrico, além das perdas no núcleo e no enrolamento. A validação do modelo é feita por meio de simulações com o MEF.

## 1.1 OBJETIVOS

Os objetivos são: (a) apresentar uma metodologia para o desenvolvimento de uma rede térmica de parâmetros concentrados (RTPC) e aplicá-la em um equipamento elétrico (indutor monofásico); (b) implementar em um *software* de circuitos elétricos, desenvolvido no Matlab/Simulink 2019b devido as facilidades e familiaridade no uso; (c) comparar os resultados obtidos usando a RTPC com os resultados obtidos por meio do MEF a fim de validar o modelo RTPC; (d) verificar o efeito das laminações do núcleo na condutividade térmica.

## 1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

Com o intuito de cumprir os objetivos, o trabalho é dividido nos seguintes capítulos:

Capítulo 1: Introdução, objetivos e motivação;

Capítulo 2: São apresentados os conceitos sobre transferência de calor, perdas relacionadas ao indutor e uma breve apresentação do MEF;

Capítulo 3: Desenvolvimento do RTPC, mostrando a representação dos parâmetros térmicos envolvidos;

Capítulo 4: Estudo de caso para um indutor monofásico, aplicando os modelos RTPC e MEF;

Capítulo 5: Apresenta os resultados, comparando os resultados da RTPC com os obtidos com MEF;

Capítulo 6: São apresentadas as conclusões, os comentários e as considerações para estudos futuros.

## 2 TRANSFERÊNCIA E GERAÇÃO DE CALOR

Esse capítulo apresenta alguns conceitos necessários para descrever os fenômenos físicos que são envolvidos no processo de modelagem térmica analítica, com objetivo de facilitar o entendimento do estudo de caso que é desenvolvido no Capítulo 4. Além de apresentar conceitos e características sobre a transferência de calor e seus modos é apresentado, também, as perdas que atuam no indutor.

Segundo (INCROPERA, et al., 2011), quando existe o gradiente da temperatura em um meio estacionário é utilizado do termo ‘condução’ para descrever a transferência de calor que ocorre através desse meio. Para referenciar a transferência de calor que existe uma diferença de temperatura entre uma superfície e um fluido em movimento utiliza-se do termo ‘convecção’. Por último, refere-se a emissão de energia de um corpo na forma de ondas eletromagnéticas por ‘radiação’.

A Equação (1) tem como principal objetivo analisar o campo de temperatura dentro do sólido a partir das condições de contorno impostas pela Equação (2), obtida a partir da conservação de energia ao redor do volume.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho_m c_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

$$E_g - [h(T - T_\infty) + \epsilon \sigma (T^4 - T_{surr}^4)] A = \rho_m Vol c_p \frac{dT}{dt}, \quad (2)$$

sendo,  $k_x$  a condutividade térmica para a direção  $x$ ,  $k_y$  a condutividade térmica para a direção  $y$ ,  $k_z$  a condutividade térmica para a direção  $z$ , em  $[W/(m \cdot K)]$ , que é a propriedade física que mede a habilidade do material de conduzir calor,  $\dot{q}$  é a geração interna dentro do volume de controle considerado, em  $[W/m^3]$ ,  $\rho_m$  é a densidade, em  $[kg/m^3]$ ,  $c_p$  é o calor específico, dado em  $[J/(kg \cdot K)]$ ,  $h$  é o coeficiente de convecção,  $T$  é a temperatura, em  $[K]$ , na superfície  $A$  em  $[m^2]$ ,  $T_\infty$  é a temperatura do fluido e  $T_{surr}$  a temperatura no ambiente, em  $[K]$ .

O detalhamento mais exato pode ser visto em (INCROPERA, et al., 2011) e (ÇENGEL, 2020) que é utilizado como base para esse capítulo.

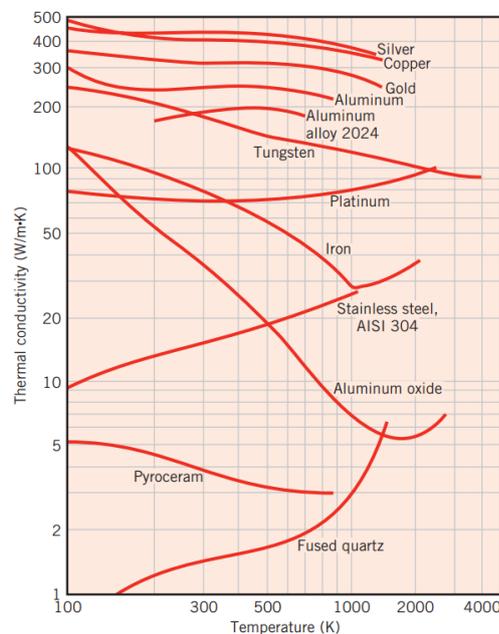
### 2.1 TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO

A transferência de calor por condução pode ser vista como a interação de partículas mais energéticas, que tem maior temperatura, com as menos energéticas, menor temperatura.

A equação do calor, em coordenadas retangulares é descrita pela Equação (1), que caracteriza a transferência de calor em três dimensões com geração interna ( $\dot{q}$ ) de calor em regime transiente. Comumente a representação da Equação (1) segue com a condutividade térmica ( $k$ ) dentro da derivada, isso se deve ao fato da dependência desse parâmetro com a temperatura e da sua distribuição espacial ( $x, y, z$ ) (ÇENGEL, 2020).

Deve-se notar que a condutividade térmica é um parâmetro que varia com a temperatura, conforme mostra a Figura 1.

Figura 1. Influência da temperatura na condutividade térmica.



Fonte: (INCROPERA, et al., 2011).

Ao considerar o meio isotrópico, condutividade térmica constante e igual a ( $k$ ), a Equação (1) pode ser expressa como Equação (3):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{\rho_m c_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3)$$

Nas análises de transferência de calor é vantajoso obter a temperatura nas superfícies e a taxa de transferência de calor através de um meio em regime permanente. Problemas desse tipo não necessitam envolver nenhum tipo de resolução de equação diferencial.

A taxa de transferência de calor por condução é dada pela Equação (4):

$$\vec{Q}_{cond} = -k A \vec{\nabla}T, \quad (4)$$

onde,  $\vec{Q}_{cond}$  é a taxa de transferência de calor por condução, em [W] e  $A$  é a área da superfície normal à direção a transferência de calor [m<sup>2</sup>].

A Lei de Fourier da condução térmica descreve o fluxo de calor por condução, como mostra a Equação (5) (ÇENGEL, 2020):

$$\vec{Q}''_{cond} = -k \vec{\nabla}T, \quad (5)$$

onde  $\vec{Q}''_{cond}$  é o fluxo de calor, em [W/m<sup>2</sup>],  $k$  é a condutividade térmica do material, em [W/(m · K)], que é a propriedade física que mede a habilidade do material de conduzir calor e  $\vec{\nabla}T$  é o gradiente da temperatura, em [K/m]. O sinal negativo se deve ao fato de que a transferência de calor por condução sempre ocorre da direção da maior temperatura para a menor (INCROPERA, et al., 2011) e o gradiente da temperatura se torna negativo quando a temperatura diminui conforme aumenta  $x$ .

Para materiais isotrópicos, isto é, com a condutividade térmica ( $k$ ) constante para todas as direções, pode-se reescrever a Equação (5) na Equação (6) (INCROPERA, et al., 2011):

$$\vec{Q}''_{cond} = -k \left( \vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (6)$$

onde  $\vec{i}$  é o vetor unitário na direção  $x$ ,  $\vec{j}$  é o vetor unitário na direção  $y$ ,  $\vec{k}$  é o vetor unitário na direção  $z$ .

Para materiais anisotrópicos, que possuem a condutividade térmica diferente em cada direção, é dada pela Equação (7):

$$\vec{Q}''_{cond} = - \left( \vec{i} k_x \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} k_y \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (7)$$

sendo,  $k_x$  a condutividade térmica para a direção  $x$ ,  $k_y$  a condutividade térmica para a direção  $y$ ,  $k_z$  a condutividade térmica para a direção  $z$ , todas com unidade de  $[W/(m \cdot K)]$ .

Segundo (PYTHONEN, 2008), a condutividade térmica de condutores diminui com o aumento da temperatura, enquanto em isolantes térmicos a condutividade aumenta com o aumento da temperatura.

## 2.2 TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO

A convecção é o modo de transferência de calor predominante entre um sólido e um fluido em movimento, onde existe a troca de energia com o fluido adjacente. Existem dois tipos de convecção, a natural e a forçada, o tipo é definido a partir da causa que colocou o fluido em movimento. A convecção natural ocorre devido a mudança da densidade causado pela alteração da temperatura do fluido e a convecção forçada devido a uma força externa, como por exemplo um exaustor.

A transferência de calor por convecção depende fortemente das propriedades do fluido, tais como a viscosidade dinâmica ( $\mu_f$ ) em  $[kg/(m \cdot s)]$ , condutividade térmica ( $k_f$ ) em  $[W/(m \cdot K)]$ , densidade ( $\rho_f$ ) em  $[kg/m^3]$ , calor específico ( $c_{p_f}$ ) em  $[J/(kg \cdot K)]$ , difusividade térmica ( $\alpha$ ) em  $[m^2/s]$ , viscosidade cinemática ( $\nu$ ) em  $[m^2/s]$  e do número do Prandtl ( $Pr$ ). Depende também da geometria e da rugosidade da superfície considerada, segundo (ÇENGEL, 2020). Todas essas correlações são levadas em conta na determinação do coeficiente de convecção ( $h$ ).

O fluxo de calor por convecção pode ser expresso pela equação de Newton do resfriamento, vista na Equação (8) (ÇENGEL, 2020):

$$Q''_{conv} = h (T_s - T_\infty), \quad (8)$$

onde  $h$  é o coeficiente de convecção, dado em  $[W/(m^2 \cdot K)]$ ,  $T_s$  é a temperatura na superfície, dado em  $[K]$  e  $T_\infty$  é a temperatura do fluido considerado suficientemente longe da superfície, dado em  $[K]$ .

## 2.3 TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR RADIAÇÃO

É o processo pelo qual a transferência de calor ocorre por meio de ondas eletromagnéticas a partir de uma superfície (ÇENGEL, 2020). Isso se deve ao fato de elétrons na superfície do material vibrarem por causa da quantidade de energia armazenada neles. Logo, a temperatura absoluta do corpo determina a quantidade de radiação que é emitida (MEJUTO,

2010). Nota-se que a radiação não necessita de um meio para a ocorrência do fenômeno, visto que ocorre por meio de ondas eletromagnéticas, diferente da condução e convecção (PYTHONEN, 2008).

A Equação (9) expressa a diferença entre a energia térmica emitida e absorvida por radiação (ÇENGEL, 2020):

$$Q''_{rad} = \sigma_r \epsilon (T_1^4 - T_2^4), \quad (9)$$

onde,  $\sigma_r$  é a constante de Stefan-Boltzmann ( $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ [W/(m}^2 \cdot \text{°C}^4)]$ ),  $\epsilon$  é a emissividade, com  $0 \leq \epsilon \leq 1$  e  $T_1$  e  $T_2$  são as temperaturas absolutas nas superfícies consideradas, em [K].

Para várias aplicações é conveniente expressar a Equação (9) na forma da Equação (10) com a Equação (11) (ÇENGEL, 2020):

$$Q_{rad} = h_{rad} A (T_1 - T_2), \quad (10)$$

$$h_{rad} = \epsilon \sigma \frac{(T_1^4 - T_2^4)}{(T_1 - T_2)}, \quad (11)$$

onde,  $Q_{rad}$  é a taxa de transferência de calor por radiação [W] e  $h_{rad}$  é o coeficiente de transferência de calor por radiação. Segundo (INCROPERA, et al., 2011), o coeficiente ( $h_{rad}$ ) depende fortemente da temperatura enquanto o coeficiente de convecção ( $h$ ) é, geralmente, menos dependente.

Superfícies que simultaneamente transferem calor por convecção e radiação são descritas conforme a Equação (12):

$$Q = Q_{conv} + Q_{rad} = h A (T_s - T_\infty) + \epsilon A \sigma (T_1^4 - T_2^4). \quad (12)$$

Segundo (ÇENGEL, 2020), a radiação é normalmente significativa quando relativo à condução ou convecção natural, mas é negligenciável quando relacionado a convecção forçada, especialmente se as superfícies envolvidas possuem baixa emissividade e moderadas.

## 2.4 PERDAS NO NÚCLEO

As perdas no núcleo estão relacionadas ao fenômeno de magnetização em materiais ferromagnéticos. Ocorre devido as correntes parasitas que circulam no material do núcleo que

são originadas por causa das tensões que aparecem no núcleo devido a indução magnética, causando o efeito Joule (GRAHAM, 1982). Uma grande parte da contribuição nas perdas à vazio vem das perdas por histerese, que são originadas pela magnetização e desmagnetização dos domínios, devido ao campo magnético alternante (Ld., 2006).

A outra parte, segundo (JÚNIOR, 2012), são correntes parasitas, que são correntes induzidas no núcleo devido à ação do campo magnético alternante que atravessa o núcleo, descrita pela Lei de indução de Faraday. Com o intuito de reduzir essa perda, a produção do núcleo é feita com laminações de material ferromagnético com uma camada isolante entre cada laminação, ou também é utilizado material com alta resistência elétrica, material com porcentagem de silício ao material ferromagnético.

Para a distribuição das perdas no núcleo é utilizado da Equação (13) (WAGNER, 2022):

$$P_c = \beta_h B_m^{\alpha_A B_m^2 + \alpha_B B_m + \alpha_C} + \beta_F \int_T^{T+T_0} \left( \frac{\partial B_r}{\partial t} \right)^2 dt + \beta_S \int_T^{T+T_0} \left( \frac{\partial B_r}{\partial t} \right)^{1,5} dt, \quad (13)$$

sendo,  $B_m$  a indução máxima ao longo do tempo [T],  $T_0$  é o período fundamental da indução e  $B_r$  a indução resultante.

## 2.5 PERDAS POR EFEITO JOULE

Para as perdas resistivas, dominante no enrolamento, o fenômeno é quantificado é a variação da sua resistência com a frequência e a distribuição das perdas é dada pela Equação (14) (WAGNER, 2022):

$$P_w = \sum_f \rho (1 + k_{pc} f^2) \left( \frac{N I_f}{A_w} \right)^2, \quad (14)$$

onde  $f$  é a frequência, em [Hz],  $\rho$  é a resistividade do condutor  $[(\Omega \cdot m)^{-1}]$ ,  $k_{pc}$  o coeficiente da característica resistência-frequência do enrolamento,  $I_f$  a amplitude da harmônica da corrente na frequência  $f$ , em [A], e  $A_w$  a seção transversal do enrolamento, em [m<sup>2</sup>].

As perdas no núcleo e no enrolamento são as entradas principais do modelo analítico térmico. Neste trabalho as perdas foram obtidas por meio do método de elementos finitos (MEF) com o auxílio do software Gmsh/GetDP que é abordado na Seção 2.6.

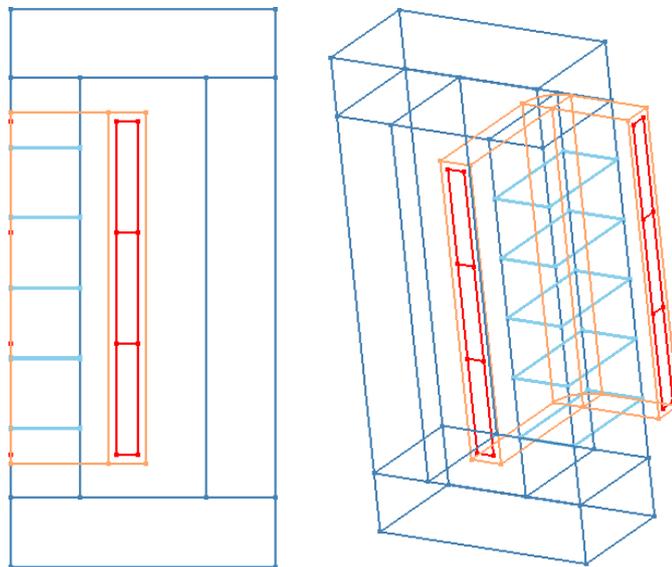
## 2.6 OBTENÇÃO DAS PERDAS ATRAVÉS DO MEF

Deve ficar claro que o trabalho possui o foco no desenvolvimento da resolução do modelo analítico térmico que possui como entradas as perdas no núcleo e do enrolamento. Com finalidade de obtenção dessas perdas o modelo de (WAGNER, 2022) é utilizado. Esse modelo usa o *software open-source* Gmsh que é um gerador de malhas de elementos finitos com um *build-in* CAD e um pós processador interno utilizado em conjunto com o GetDP, que é um *solver* de elementos finitos.

O método numérico requer alta precisão e requer alto processamento computacional. O método de elementos finitos (MEF) é uma técnica de métodos numéricos desenvolvida para resolver problemas relacionados a fenômenos físicos e descritos por equações diferenciais (DECHAUMPHAI, 2018).

A Figura 2 mostra o modelo tridimensional simulado no Gmsh, por (WAGNER, 2022). Os valores obtidos das perdas, que são entradas no modelo RTPC, é obtido através do MEF.

Figura 2. Modelo MEF aplicado no Gmsh.

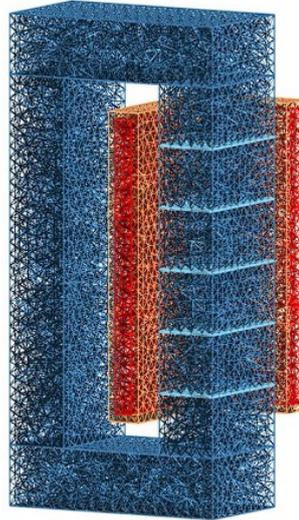


Fonte: (WAGNER, 2022)

As mesmas condições de contorno que foram aplicadas no método de elementos finitos (MEF), foram aplicados na rede térmica de parâmetros concentrados (RTPC).

A Figura 3 mostra a malha gerada pelo Gmsh, na qual foi utilizado para o MEF. Este modelo possui alta precisão e é utilizado como referência para comparação dos resultados.

Figura 3. Malha gerada pelo Gmsh.



Fonte: (WAGNER, 2022).

A malha possui 9817 nós e por meio deste modelo, de (WAGNER, 2022), foi retirado alguns parâmetros físicos para estimativa de temperatura.

### 3 MODELAGEM TÉRMICA COM PARÂMETROS CONCENTRADOS

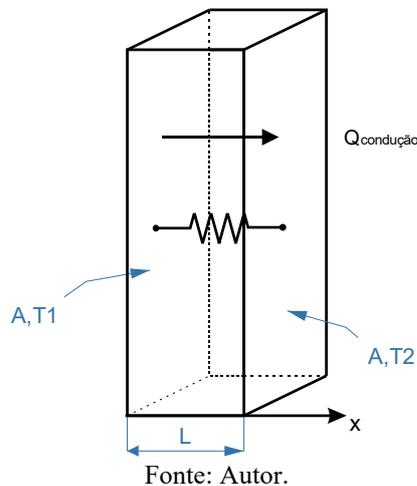
Este capítulo apresenta as representações dos parâmetros térmicos usados neste trabalho. Apresenta-se uma representação, com elementos ideais, que contabiliza de forma global diversos processos térmicos presentes em uma configuração mais complexa. Essa representação constituída de resistências térmicas, capacitores térmicos, fontes de tensão (representando a temperaturas dos nós) e fontes de corrente (representando as perdas dos nós).

O desenvolvimento das equações apresentadas no Capítulo 2 para a forma de resistências térmicas são apresentadas nas próximas seções. O objetivo desse capítulo é determinar as resistências térmicas e os parâmetros térmicos a fim de aplicá-las no estudo de caso.

#### 3.1 REPRESENTAÇÃO DA RESISTÊNCIA TÉRMICA DE CONDUÇÃO

Considere o processo de condução de calor unidimensional, como mostrado na Figura 4, onde é possível notar um sólido de espessura ( $L$ ) com duas temperaturas diferentes ( $T_1, T_2$ ) em duas superfícies de áreas iguais ( $A$ ).

Figura 4. Representação de transferência de calor unidimensional.



Aplicando a Equação (4) para condução de calor na parede plana pode ser expressa Equação (15):

$$Q_{cond} = -k A \frac{dT}{dx}. \quad (15)$$

Que pode ser rearranjado para a Equação (16):

$$Q_{cond} = \frac{k A}{L} (T_1 - T_2), \quad (16)$$

onde,  $Q_{cond}$  é a taxa de transferência de calor por condução, em [W],  $k$  é a condutividade térmica, [W/(m · K)],  $A$  é a área de secção transversal, em [m<sup>2</sup>],  $L$  é o comprimento considerado entre as superfícies, em [m], normal a  $Q_{cond}$ .  $T_1$  e  $T_2$  são as temperaturas nas superfícies 1 e 2, em [K].

A representação em resistência térmica dada pela Equação (17):

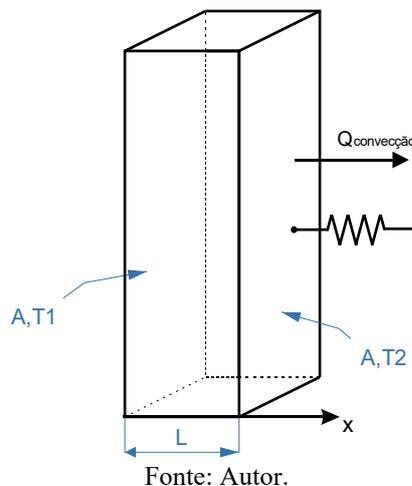
$$R_{cond} = \frac{T_1 - T_2}{Q_{cond}} = \frac{L}{k A}, \quad (17)$$

onde  $R_{cond}$  é a resistência térmica de condução, em [K/W],  $k$  é a condutividade térmica do material, em [W/(m · K)] e  $A$  é a área de seção normal a condução, em [m<sup>2</sup>].

### 3.2 REPRESENTAÇÃO DA RESISTÊNCIA TÉRMICA DE CONVECÇÃO

A convecção a partir de uma superfície sólida, como na Figura 5, é descrita pela lei de Newton do resfriamento, segundo a Equação (18).

Figura 5. Representação unidimensional de uma resistência térmica de convecção.



$$Q_{conv} = h A (T_s - T_{inf}), \quad (18)$$

onde  $T_s - T_{inf}$  é o gradiente da temperatura entre a superfície e o fluido. Essa equação pode ser reorganizada como mostra Equação (19):

$$Q_{conv} = \frac{T_s - T_{inf}}{R_{conv}}, \quad (19)$$

$$R_{conv} = \frac{T_s - T_{inf}}{Q_{conv}} = \frac{1}{h A}, \quad (20)$$

onde,  $R_{conv}$  é a resistência térmica de convecção [ $^{\circ}\text{C}/\text{W}$ ] e  $h$  o coeficiente de transferência de calor por convecção, dado em [ $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})$ ]. A Equação (19) é válida para qualquer superfície desde que o coeficiente de convecção seja constante (ÇENGEL, 2020).

### 3.2.1 Determinação do coeficiente de convecção

Para determinar o valor de  $h$  algumas considerações e correlações são utilizadas, uma vez que este parâmetro possui grande dependência com o tipo de convecção. O valor do coeficiente de convecção é afetado por muitos parâmetros, tais como a geometria, o tamanho, a fronteira sólido-fluido, as características do fluxo do fluido e do material do fluido. A adimensionalização e combinação das equações e variáveis é feita para a redução do número total de variáveis, chamados de números adimensionais.

O número de Rayleigh para um fluido está associado com os fluxos conduzidos por empuxo, quando o número é mais baixo que o valor crítico do fluido, a principal forma de transferência de calor é pela condução, e quando o valor excede o valor crítico do fluido, a principal é a convecção.

O número de Nusselt ( $Nu$ ) representa a relação entre a quantidade de transferência de calor por convecção e condução na superfície. Quanto maior o número de Nusselt mais efetivo é a convecção, e quando  $Nu = 1$ , isso representa que a transferência de calor é puramente condutiva.

A Tabela 1 mostra as correlações utilizadas para a determinação dos coeficientes de convecção para dutos verticais, como Figura 6.

Tabela 1. Números adimensionais.

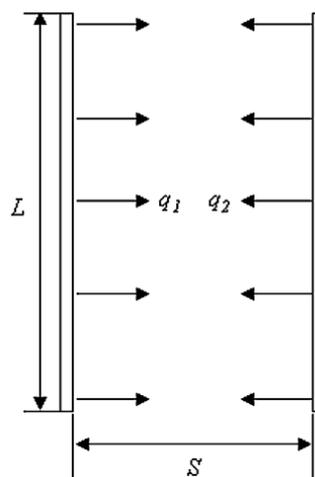
Adimensional	Interpretação	Equacionamento
Número de Rayleigh	Fluxo associado com empuxo	$Ra = \frac{g_a \beta \Delta T L^3}{\nu \alpha_t}$ (21)
Número de Nusselt	Relação de transferência de calor por condução e convecção	$Nu = \frac{h L}{k} = 0,204 \left[ Ra \left( \frac{S}{L} \right) \right]^{1/2}$ (22)

Fonte: Adaptado (LEE, 2010).

onde  $\nu$  é a viscosidade cinética do fluido [ $\text{m}^2/\text{s}$ ],  $S$  é a distância entre as superfícies [m],  $L$  é o comprimento da superfície [m],  $\beta$  é o coeficiente de expansão térmica do fluido [ $1/\text{K}$ ],  $g_a$  é a aceleração gravitacional [ $\text{m}/\text{s}^2$ ],  $\Delta T$  é a diferença de temperatura entre a superfície e o fluido [ $^\circ\text{C}$ ],  $k$  é a condutividade térmica do fluido [ $\text{W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ ] e  $h$  é o coeficiente de convecção [ $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ ].

Segundo (LEE, 2010) esta consideração é válida apenas para os casos em que  $S/L \rightarrow 0$  que acontece no duto entre a perna central e o enrolamento, onde  $S$  é a distância entre as duas superfícies, em [m], e  $L$  é o comprimento da superfície, em [m].

Figura 6. Placas paralelas com fluxo de calor.



Fonte: (LEE, 2010).

### 3.3 REPRESENTAÇÃO DA RESISTÊNCIA TÉRMICA DE RADIAÇÃO

Os efeitos da radiação podem ser significativos e, portanto, devem ser considerados no modelo. A taxa de transferência de calor por radiação é definida pela Equação (23) (ÇENGEL, 2020):

$$Q_{rad} = \epsilon \sigma A (T_1^4 - T_2^4), \quad (23)$$

onde  $\epsilon$  é a emissividade,  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann  $5,67 \cdot 10^{-8}$  [W/(m<sup>2</sup> · K<sup>4</sup>)],  $A$  é a área da superfície normal a direção da transferência de calor, em [m<sup>2</sup>], e  $T_1$ ,  $T_2$  são as temperaturas nas superfícies consideradas [K]. Deve-se notar que as temperaturas utilizadas para o cálculo devem ser em kelvin.

Para a representação em parâmetros concentrados a equação pode ser reescrita como uma resistência térmica definida como:

$$Q_{rad} = \frac{T_1 - T_2}{R_{rad}}, \quad (24)$$

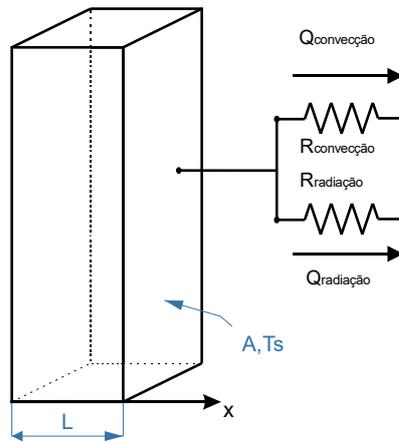
onde,  $R_{rad}$  é definida pela Equação (25) e Equação (26) (ÇENGEL, 2020):

$$R_{rad} = \frac{T_1 - T_2}{Q_{rad}} = \frac{1}{h_{rad} A}, \quad (25)$$

$$h_{rad} = \epsilon \sigma \frac{T_1^4 - T_2^4}{T_1 - T_2}. \quad (26)$$

A superfície que é influenciada por convecção e radiação deve ser representada com as resistências térmicas em paralelo, como mostra a Figura 7, visto que o acontecimento desses dois fenômenos ocorre simultaneamente na mesma superfície, também descrito pela Equação (12).

Figura 7. Representação da resistência térmica de convecção e radiação.

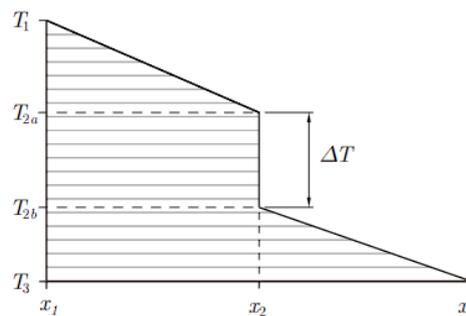


Fonte: Autor.

### 3.4 REPRESENTAÇÃO DA RESISTÊNCIA TÉRMICA DE CONTATO

A consideração da resistência térmica de contato ocorre quando quaisquer dois materiais são colocados juntos formando uma interface. A partir do momento que a transferência de calor chega em regime permanente, há uma queda de temperatura relacionada com a interface, que define a resistência de contato (YOVANOVICH, 2003). O perfil da temperatura e numa interface pode ser vista na Figura 8.

Figura 8. Queda de temperatura em uma interface.



Fonte: (HASSELSTRÖM, 2012).

Segundo (HASSELSTRÖM, 2012) a resistência de entreferrós pequenos é assumida como condução e não convecção, devido a pequena escala do comprimento dos entreferrós em relação a geometria e é descrita pela Equação (27):

$$R_{cont} = \frac{\Delta T}{Q_{cond}}, \quad (27)$$

onde,  $R_{cont}$  é a resistência térmica de contato [K/W].

### 3.5 REPRESENTAÇÃO DAS PERDAS

Na analogia entre os sistemas térmico-elétrico (SWIFT, 2001) o modelo utiliza de fontes de corrente para a representação de perdas no núcleo e no enrolamento. Enquanto fontes de tensão representam pontos de temperatura fixas, utilizados para a definição da temperatura ambiente no circuito.

### 3.6 CONDUÇÃO TRANSIENTE

Para a obtenção de resultados transientes, capacitâncias térmicas devem ser adicionadas em cada nó que possui geração interna. A Equação (28) determina o calor da capacitância:

$$C_{th} = \rho_m V c_p, \quad (28)$$

onde,  $\rho_m$  é a densidade do material, em [kg/m<sup>3</sup>],  $V$  é o volume, em [m<sup>3</sup>] e  $c_p$  é o calor específico do material, em [J/(kg · °C)].

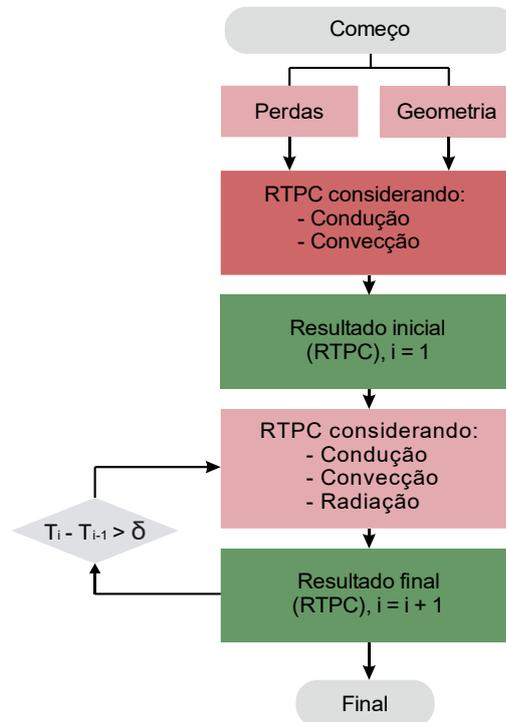
A constante de tempo é determinada pela Equação (29):

$$\tau = R_{th} C_{th}, \quad (29)$$

onde  $\tau$  é a constante de tempo [h], calculada pelo produto da resistência térmica  $R_{th}$ , dado em [K/W], que pode ser de condução ou de convecção (dependendo da natureza da transferência de calor considerado), com a capacitância  $C_{th}$  em [J/K], calculada pela Equação (28).

A Figura 9 expõe de forma metodológica o processo feito para a obtenção das temperaturas finais (saídas) a partir das perdas e dos parâmetros geométricos e físicos (entradas).

Figura 9. Fluxograma do algoritmo do RTPC.



Fonte: Autor.

Visto que o coeficiente de radiação é dependente da diferença da temperatura elevado a quarta, uma primeira iteração é feita apenas considerando a condução e a convecção. O resultado desta simulação inicial é utilizado como condição inicial para os coeficientes de radiação e adicionado ao modelo completo, considerando condução, convecção e radiação. Caso a diferença entre a temperatura atual e a temperatura anterior seja maior que a tolerância, definido por ( $\delta$ ), as temperaturas atuais são utilizadas como entrada até que a diferença entre as temperaturas seja menor que a tolerância.

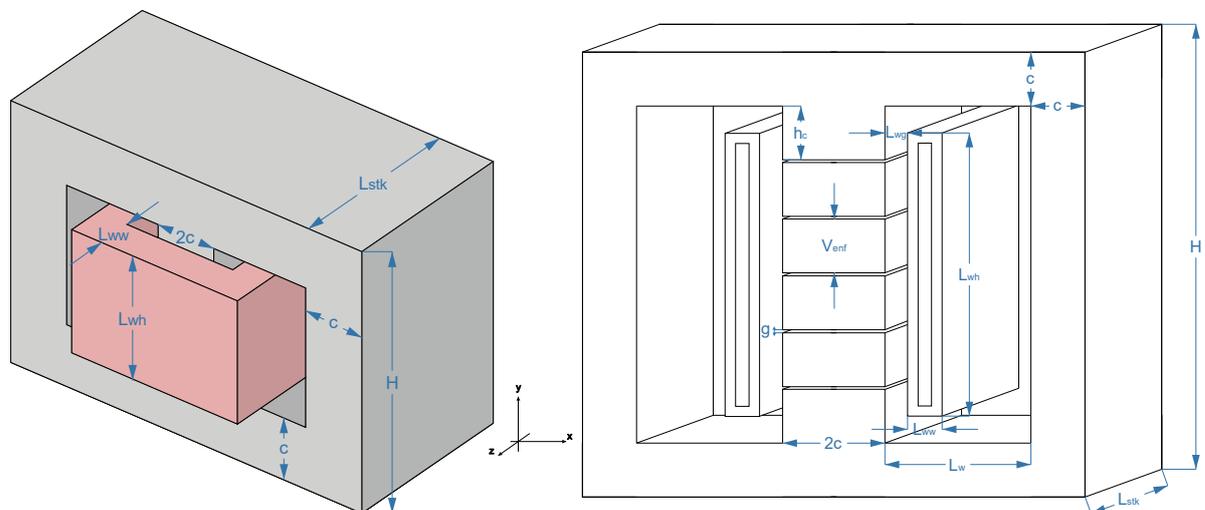
#### 4 ESTUDO DE CASO

Considerando a teoria mostrada nas seções anteriores, um estudo de caso foi escolhido para a aplicação do conhecimento apresentado. Este capítulo apresenta algumas considerações iniciais relacionadas à simetria, condições de contorno e definição das perdas.

O estudo foi conduzido no *software* Matlab/Simulink. Esta escolha foi feita devido a facilidade em se alterar os valores individuais de cada resistência térmica e seus parâmetros por meio de *scripts* no Matlab, assim como a boa capacidade de representação ilustrativa do Simulink. No entanto, deve-se notar que qualquer simulador de circuitos elétricos pode ser utilizado para a obtenção dos resultados visto que a modelagem analítica é baseada na analogia entre circuitos elétricos e térmicos.

Para o estudo de caso é considerado um indutor monofásico utilizado para compor um filtro LC. Tal filtro é um circuito adicional composto por indutores, capacitores e resistores colocados entre os terminais de saída de um inversor e os terminais de entrada de um motor. O principal motivo desse filtro é suavizar correntes e tensões do motor fornecidos pelo inversor e eliminar harmônicos de alta frequência indesejados devido à alta frequência de comutação de transistores (WAGNER, 2022). A geometria do indutor é mostrada na Figura 10 no qual é aplicado o modelo térmico analítico nas três direções ( $x, y, z$ ) definindo uma rede tridimensional de nós. A resistência térmica representa os três tipos de transferência de calor: a condução, a convecção e a radiação (MEJUTO, 2010). Os dados geométricos são mostrados na Tabela 2 e os parâmetros físicos considerados na Tabela 3. O entreferro possui a cota ( $g$ ) e que o material do enrolamento é alumínio e as lâminas do núcleo são compostas de aço.

Figura 10. Geometria.



Fonte: Autor.

Tabela 2. Parâmetros geométricos.

<b>Cota</b>	<b>Valor [mm]</b>
<i>c</i>	100,00
<i>L<sub>stk</sub></i>	200,00
<i>L<sub>ww</sub></i>	2,75
<i>L<sub>wh</sub></i>	255,00
<i>H</i>	505,00
<i>H<sub>w</sub></i>	305,00
<i>L<sub>w</sub></i>	90,00
<i>L<sub>wc</sub></i>	20,00
<i>L<sub>wj</sub></i>	15,00
<i>g</i>	1,00

Fonte: Autor.

Os parâmetros físicos utilizados para a simulação no Gmsh e no Simulink podem ser vistos na Tabela 3. Para a simulação no Gmsh não foi considerada a condutividade na direção *z*, consideração que também será levada ao modelo RTPC.

O material do núcleo é o aço, os fios do enrolamento são constituídos de alumínio com isolamento de resina epóxi, no entreferro foi considerado o mesmo material, todos os dados são especificados na Tabela 3.

Tabela 3. Parâmetros físicos.

<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>
Condutividade térmica do núcleo, direção <i>x</i> , <i>y</i> , <i>z</i>	20,00 [W/(m·K)]
Condutividade térmica de contato do isolamento	0,85 [W/(m·K)]
Condutividade térmica de contato do entreferro	0,85 [W/(m·K)]
Condutividade térmica do enrolamento	386,00 [W/(m·K)]
Coefficiente de convecção inicial	5,00 [W/(m <sup>2</sup> ·K)]
Emissividade	0,90
Resistividade do alumínio	$2 \cdot 10^{-4}$ [(Ohm·cm) <sup>-1</sup> ]
Constante de Boltzmann	$5,67 \cdot 10^{-8}$
Frequência	60,00 [Hz]
Corrente eficaz	150,00 [A]
Coefficiente de convecção (Entre Perna central e Enrolamento – direção <i>x</i> )	77,76 [W/(m <sup>2</sup> ·K)]
Coefficiente de convecção (Entre Perna central e Enrolamento – direção <i>z</i> )	122,47 [W/(m <sup>2</sup> ·K)]

Fonte: Autor.

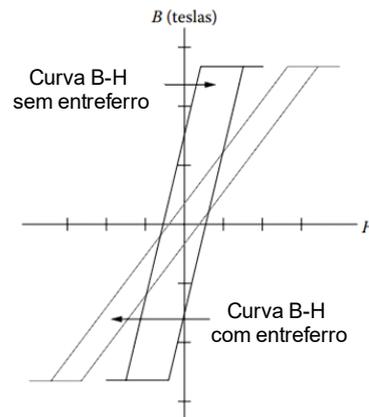
Com os parâmetros geométricos e físicos definidos, a indutância pode ser calculada segundo a Equação (30) (GOMES, 2019):

$$L_i = \frac{\mu_0 N^2 A_c}{l_g + \left(\frac{MPL}{\mu_m}\right)}, \quad (30)$$

onde,  $L_i$  é a indutância [H],  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética no vácuo [H/m],  $\mu_m$  é a permeabilidade magnética do núcleo [H/m],  $N$  é o número de espiras,  $A_c$  é a área de seção transversal do núcleo [cm<sup>2</sup>],  $l_g$  é a espessura do entreferro [cm] e  $MPL$  é o comprimento do caminho magnético [cm].

Sem a presença do entreferro, a indutância fica completamente proporcional a permeabilidade do núcleo (parâmetro extremamente dependente da temperatura, do ponto de operação, pressão tensão de excitação e frequência) (MCLYMAN, 2011), como mostra a curva sem entreferro na Figura 11.

Figura 11. Efeito da introdução do entreferro na curva B-H.



Fonte: Adaptado (MCLYMAN, 2011).

Ao introduzir entreferros, de espessura ( $g$ ), no caminho percorrido pelo fluxo magnético, dois efeitos são esperados: redução da permeabilidade e estabilização.

Com a adição do entreferro a permeabilidade magnética fica dependente do espaçamento do entreferro, aumentando o controle em relação ao design do projeto (GOMES, 2019) como mostra a Equação (31) (GOMES, 2019):

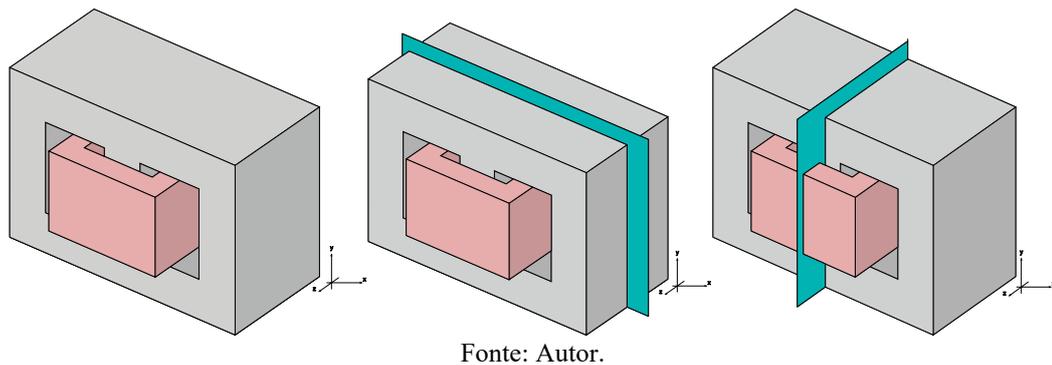
$$l_g = \frac{\mu_0 N^2 A_c}{L} - \frac{MPL}{\mu_c}. \quad (31)$$

A indutância calculada através da Equação (30) possui aproximadamente 1,75 [mH].

#### 4.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

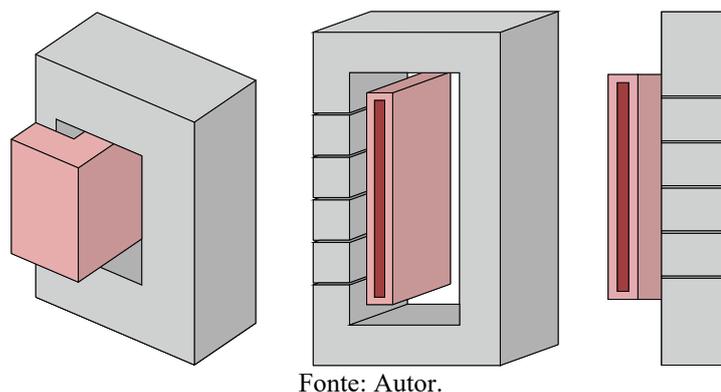
Um estudo de caso é aplicado para a geometria como mostra a Figura 12, onde pode ser observado a simetria no eixo XY e YZ, como mostra a Figura 12. Portanto, a análise considerada será aplicada em apenas um quarto da peça completa. O modelo foi avaliado com correntes eficazes de, 66,67% (100 A), 83,33% (125 A), 100,00% (150 A).

Figura 12. Simetrias consideradas.



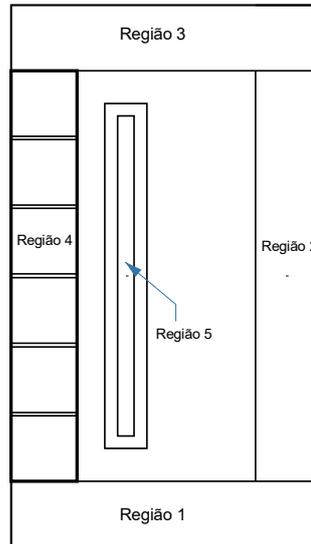
A geometria final considerando os cortes das simetrias pode ser observado na Figura 13, representando  $\frac{1}{4}$  da geometria total. Isso deve ser levado em conta na contabilização das perdas totais.

Figura 13. Visualizações de 1/4 da geometria.



As regiões, mostradas na Figura 14, possuem nomes técnicos e serão utilizados em alguns momentos. Na ordem crescente de regiões tem-se respectivamente, jugo inferior, perna externa, jugo superior, perna central e enrolamento.

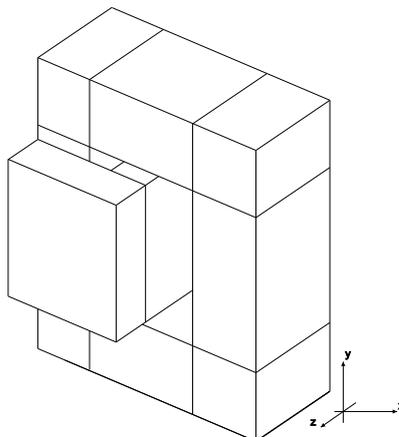
Figura 14. Separações das regiões.



Fonte: Autor.

Para a obtenção do modelo analítico, a geometria analisada é dividida em vários volumes, como é mostrado na Figura 15, onde é mostrado a geometria dividida em dez volumes. Isso é feito para facilitar a visualização da divisão dos nós e suas conexões.

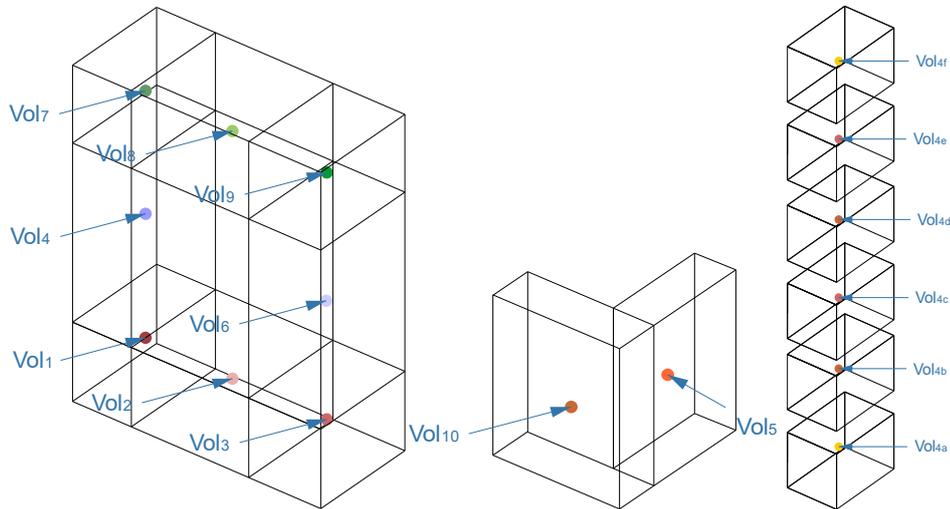
Figura 15. Divisão da geometria em volumes.



Fonte: Autor.

A divisão dos volumes é feita conforme mostra a Figura 16. Tal divisão é útil com a nomenclatura usual e a utilizada por (WAGNER, 2022), que é usada como referência.

Figura 16. Especificação das nomenclaturas dos volumes.

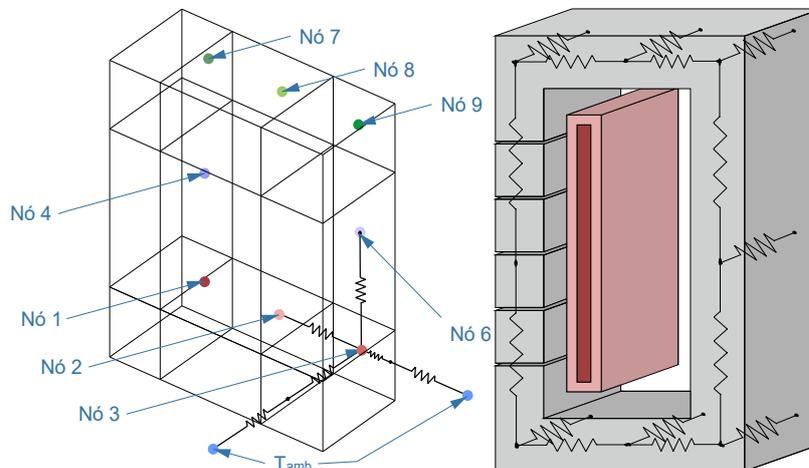


Fonte: Autor.

Em cada volume é considerado um único ponto. Com exceção da perna central onde possui os entreferros, denominado por  $Vol_4$ . As perdas são consideradas uniformes dentro de cada volume.

O detalhamento e a nomenclatura de cada variável envolvendo a perna central também pode ser vista. A especificação de cada nó e o posicionamento considerado, pode ser visto na Figura 17.

Figura 17. Especificação dos nós no núcleo.



Fonte: Autor.

O circuito térmico modelado possui 14 nós no mesmo plano, alguns podem ser vistos na Figura 17, onde são mostradas apenas 8 das representações de algumas conexões entre nós de forma genérica.

Apenas um nó foi detalhadamente interligado, onde nota-se que a influência da convecção ocorrerá apenas em um lado devido a simetria considerada. Logo, nos lados que possuem simetria é considerada uma condição de contorno adiabática, isto é, fluxo de calor através da superfície é nulo.

#### 4.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO

A definição das condições de contorno é necessária para a obtenção de uma única solução de equações diferenciais, como a Equação (1).

Todas as superfícies possuem condição inicial de temperatura em 25 °C, os coeficientes de convecção possuem valor de 5 [W/(m<sup>2</sup> · K)], com exceção das superfícies entre a perna central e o enrolamento, onde é utilizado nas equações mostradas na Seção 3.2.1, com valores de 311 [W/(m<sup>2</sup> · K)] na superfície do núcleo e 291 [W/(m<sup>2</sup> · K)] na superfície do enrolamento, na direção *x*, e 223 [W/(m<sup>2</sup> · K)] na superfície do núcleo e 267 [W/(m<sup>2</sup> · K)] na superfície do enrolamento, na direção *z*, que foram obtidos conforme mostrados em (LEE, 2010). Como mencionado a dependência do coeficiente de convecção não varia muito conforme a temperatura e, por isso, foi considerado os valores obtidos no MEF com o intuito de se manter o maior número de parâmetros iguais. Para verificação da diferença, foi aplicado a mesma técnica com os valores obtidos do RTPC e pode ser visto na Tabela 4.

Tabela 4. Comparação entre coeficientes de convecção.

<b>Parâmetro</b> [W/(m <sup>2</sup> · K)]	<b>(WAGNER, 2022)</b>	<b>Autor</b>
$h_{c_x}$	311	315
$h_{c_z}$	223	214
$h_{w_x}$	291	288
$h_{w_z}$	267	196

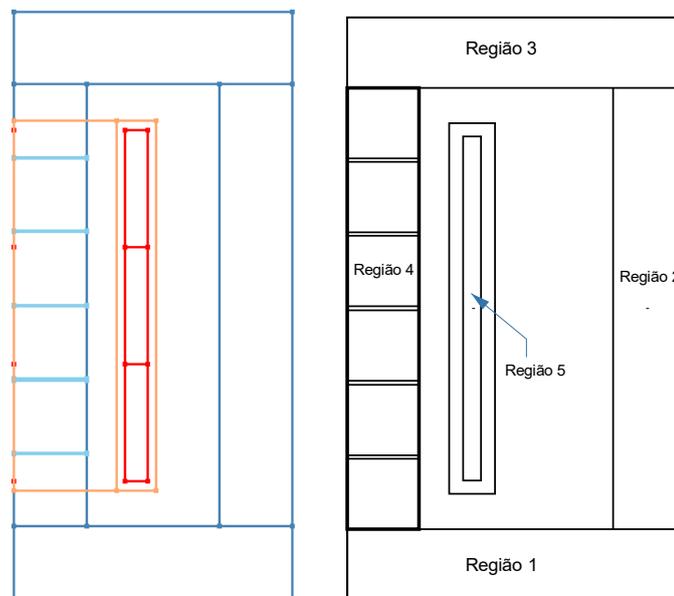
Fonte: Autor.

Já os efeitos da radiação são considerados em todas as superfícies, sendo a maioria irradiando para o ambiente e os efeitos da radiação entre superfície-superfície são considerados entre o enrolamento e as regiões que o envolvem.

#### 4.3 DEFINIÇÃO DAS PERDAS

A Tabela 5 expõe os valores das perdas obtidas através do MEF, a obtenção dos valores finais para ser considerado em cada nó deve ser dividido pelo número de simetria e pelo número de nós dentro de cada volume. Como a perda no enrolamento (região 5 da Figura 18) foi considerada uniforme, no MEF, o valor considerado nos nós do enrolamento no modelo RTPC é a média da perda no MEF.

Figura 18. Modelo MEF e definição das regiões.



Fonte: Adaptado (WAGNER, 2022).

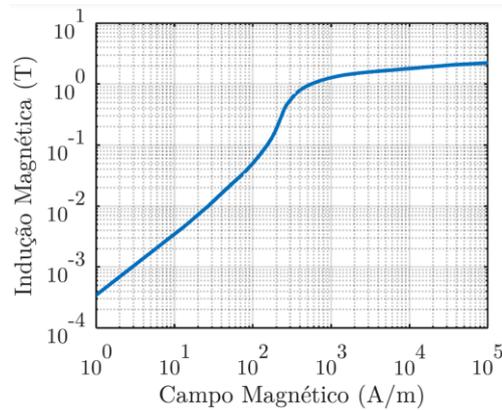
Tabela 5. Perdas no indutor e nos nós, corrente nominal.

<b>Região</b>	<b>Perda completa [W]</b>	<b>¼ das perdas [W]</b>	<b>Nós</b>	<b>Perda em cada nó [W]</b>
1	99,89	24,93	3	8,32
2	182,85	45,71	1	45,72
3	102,34	25,59	3	8,53
4	180,46	45,12	6	45,12
5	244,92	61,23	2	30,62

Fonte: Autor.

A curva BH do núcleo de aço selecionado é apresentada na Figura 19.

Figura 19. Curva BH do aço.

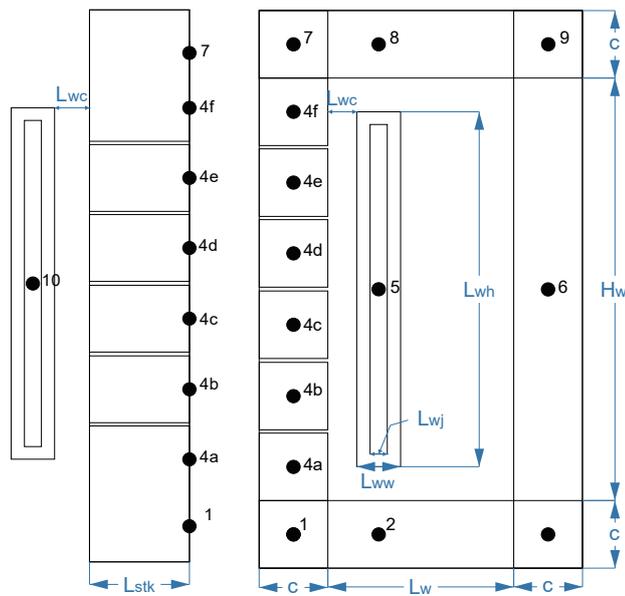


Fonte: (WAGNER, 2022).

#### 4.4 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS TÉRMICOS

Uma representação de cálculos será apresentada, escolhendo um nó que envolva cada um dos fenômenos, com o intuito de mostrar o desenvolvimento e a obtenção dos valores. Na Figura 20 pode-se observar a distribuição dos nós utilizada para os resultados obtidos na Seção 4 e também as cotas envolvendo a geometria.

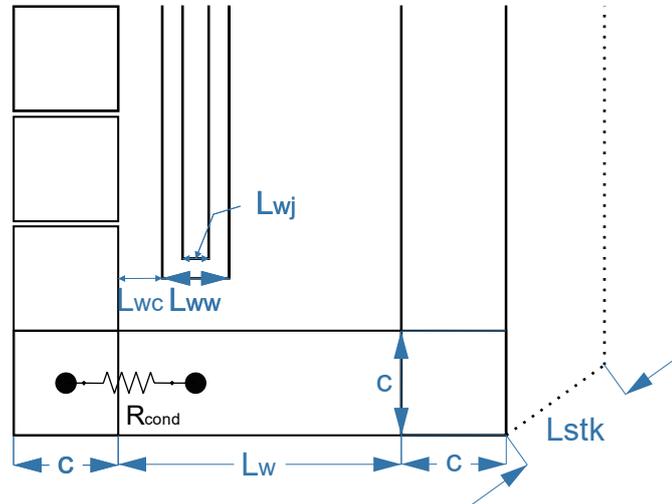
Figura 20. Distribuição dos nós na geometria.



Fonte: Autor.

Para a determinação da resistência térmica de condução entre os nós 1 e 2 a representação pode ser observada na Figura 21.

Figura 21. Resistência térmica de condução do nó 1 com o nó 2.



Fonte: Autor.

A resistência térmica  $R_{cond}$ , pode ser calculada com mostra as Equações (32) e (33):

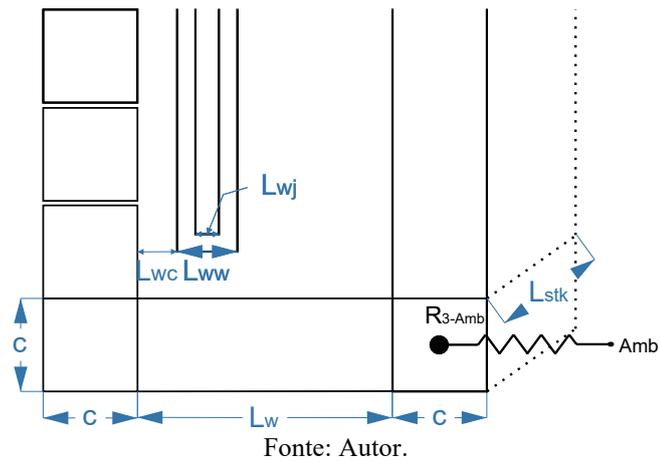
$$R_{cond} = \frac{L}{k A}, \quad (32)$$

$$R_{cond} = \frac{\left(\frac{c}{2} + L_{wc} + \frac{L_{ww}}{2}\right)}{k_{core} (c L_{stk})}, \quad (33)$$

onde  $L$  é a distância entre os dois nós, e os outros parâmetros tais como  $c$ ,  $L_{wc}$ ,  $L_{ww}$ ,  $L_{stk}$  e  $k_{core}$  são mostrados na Tabela 2.

Para a demonstração da representação da resistência de convecção é escolhido o nó 3, que é mostrado na Figura 22.

Figura 22. Resistência térmica do nó 3 ao ambiente.



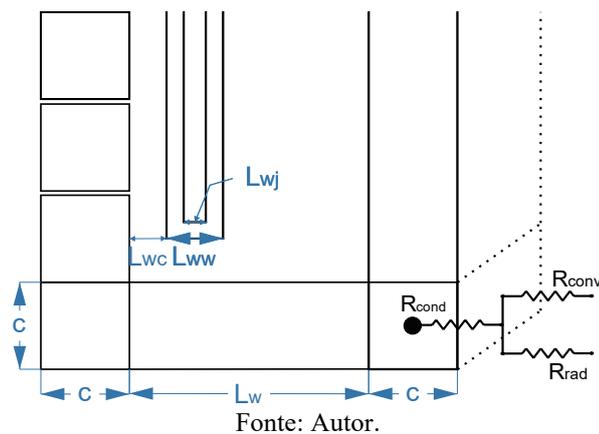
Então, considerando os efeitos da condução e convecção temos,

$$R_{3-Amb} = R_1 + R_2 , \quad (34)$$

$$R_1 = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)}{k_{core} c L_{stk}} + \frac{1}{h c L_{stk}} . \quad (35)$$

Notando que a representação completa, ao considerar a radiação deve ser como mostra a Figura 23 determinada a partir da Equação (35).

Figura 23. Representação da resistência térmica equivalente do nó 3 ao ambiente.



A Equação (36) demonstra a resistência térmica equivalente do nó 3 ao ambiente, considerando os três meios de transferência de calor.

$$R_{3-Amb} = R_{cond} + R_{conv} || R_{rad} = \frac{L}{k A} + \frac{1}{h A} || \frac{1}{h_{rad} A} . \quad (36)$$

Nota-se que o termo  $||$  representa o paralelo das resistências, como mostra a Equação (37):

$$R_{||} = R_1 || R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} . \quad (37)$$

## 5 RESULTADOS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos da RTPC, por meio do *software* Matlab/Simulink 2019b, e comparado com os resultados obtidos do MEF, por meio do *software* Gmsh/GetDP. Os resultados em regime permanente são apresentados em tabelas, mostrando a diferença percentual entre os resultados do RTPC e MEF. Os resultados em regime transiente são mostrados em gráficos e comparam-se as constantes de tempo entre modelos.

### 5.1 RESULTADOS EM REGIME PERMANENTE

Para facilitar a visualização das temperaturas médias dos volumes, subdividiu-se a geometria em regiões como mostra a Figura 14.

Compara-se os resultados estáticos obtidos no Gmsh/GetDP para correntes de 100 [A], 125 [A] e 150 [A] com o modelo RTPC.

Para a corrente nominal, 150 [A], pode-se observar como mostra a Tabela 6, com diferença percentual máxima de 1,71 % na perna externa.

Tabela 6. Comparação para 150 [A] (corrente nominal).

Região	Nó	Temperatura [°C]			Diferença [%]
		Pontual [°C] (RTPC)	Média [°C] (RTPC)	Média [°C] (MEF)	
	1	104,59			
1	2	97,02	97,42	103,08	1,50
	3	90,65			
4	4	122,09	122,09	121,21	-0,22
5	5	122,41	121,85	127,59	1,29
	10	121,29			
2	6	104,87	97,60	104,03	1,71
	7	97,21			
3	8	90,72	94,12	98,98	1,31
	9	94,12			

Fonte: Autor.

Considerando 125 [A], tem-se os valores da Tabela 7, onde pode-se notar uma diferença percentual maior que 2 % na perna externa.

Tabela 7. Comparação para 125 [A] (83,33% da corrente nominal).

Região	Nó	Temperatura [°C]			Diferença [%]
		Pontual [°C] (RTPC)	Média [°C] (RTPC)	Média [°C] (MEF)	
	1	94,78			
1	2	87,88	88,24	92,08	1,05
	3	82,05			
4	4	110,57	110,57	108,04	-0,66
5	5	112,32	112,32	121,57	2,34
	10	111,39			
2	6	94,98	84,69	88,76	1,13
	7	125,00			
3	8	82,08	88,35	92,97	1,26
	9	84,69			

Fonte: Autor.

A Tabela 8 mostra a resposta em regime do modelo. Pode-se notar que a diferença percentual da temperatura média do enrolamento (Região 5) aumenta e a temperatura média do modelo RTPC subavalia os resultados do MEF, exceto as temperaturas da perna central.

Tabela 8. Comparação para 100 [A] (66,67 % da corrente nominal).

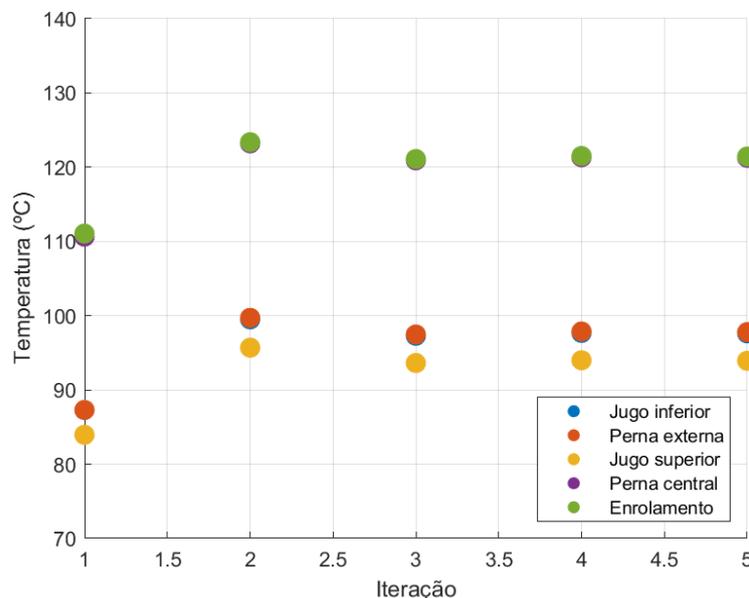
Região	Nó	Temperatura [°C]			Diferença [%]
		Pontual [°C] (RTPC)	Média [°C] (RTPC)	Média [°C] (MEF)	
	1	83,51			
1	2	77,32	77,64	79,21	0,45
	3	72,08			
4	4	97,43	97,43	92,76	-1,28
5	5	100,77	100,41	114,99	3,66
	10	100,05			
2	6	83,62	73,75	76,76	0,86
	7	77,34			
3	8	72,06	77,67	80,04	0,67
	9	73,75			

Fonte: Autor.

Os resultados mostrados nas Tabela 6, Tabela 7 e Tabela 8 são as temperaturas em regime permanente obtidos pelo RTPC e comparado com o MEF, na qual com diferença percentual se manteve abaixo de 4 % com os resultados apresentados.

A convergência dos resultados pode ser observada na Figura 24, onde é mostrado as temperaturas médias em cada região com corrente nominal. Nota-se que a primeira iteração possui baixas temperaturas devido ao fato de que é considerado apenas os efeitos das perdas no núcleo em temperatura ambiente e o modelo sem o efeito da radiação, visto que o coeficiente de radiação depende da temperatura. A segunda iteração é mais alta devido ao fato de que as perdas no enrolamento e as resistências térmicas de convecção são adicionadas no modelo, como todas as perdas são consideradas e apenas a condução e a convecção são os meios de dissipar calor, a temperatura média final é muito mais alta quando comparado com o MEF. A partir dessa iteração, todos os elementos estão implementados, resistências térmicas de condução, convecção e radiação, as perdas no núcleo e no enrolamento e todas as interações com o ambiente.

Figura 24. Convergência da temperatura em 150A.

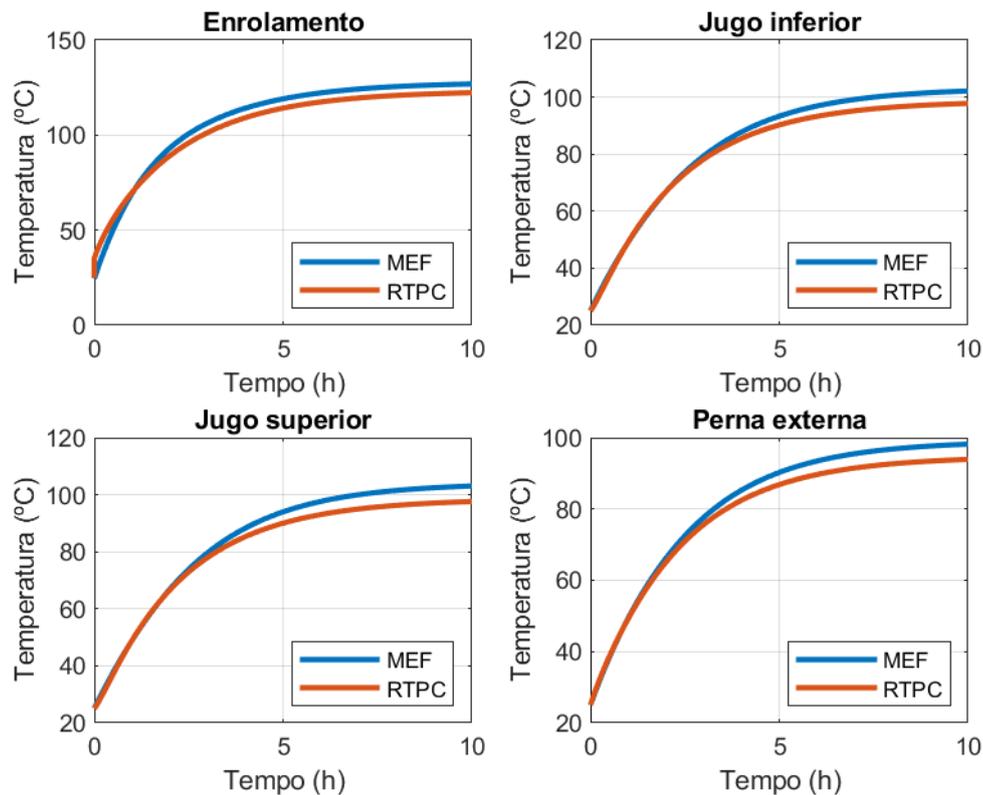


Fonte: Autor.

## 5.2 RESULTADOS EM REGIME TRANSIENTE

Para o regime transiente, pode-se notar uma divergência na temperatura inicial do enrolamento. Apesar de ser considerado uma temperatura inicial de 25 [°C], a temperatura se eleva como um degrau para aproximadamente 40 [°C], como pode ser visto na Figura 25.

Figura 25. Comparação MEF e RTPC, corrente nominal.



Fonte: Autor.

A Tabela 9 destaca os valores da constante de tempo ( $\tau$ ), na qual pode-se notar que o enrolamento possui um  $\tau$  menor que do núcleo, isto é, o enrolamento tende a esquentar mais rapidamente que o núcleo.

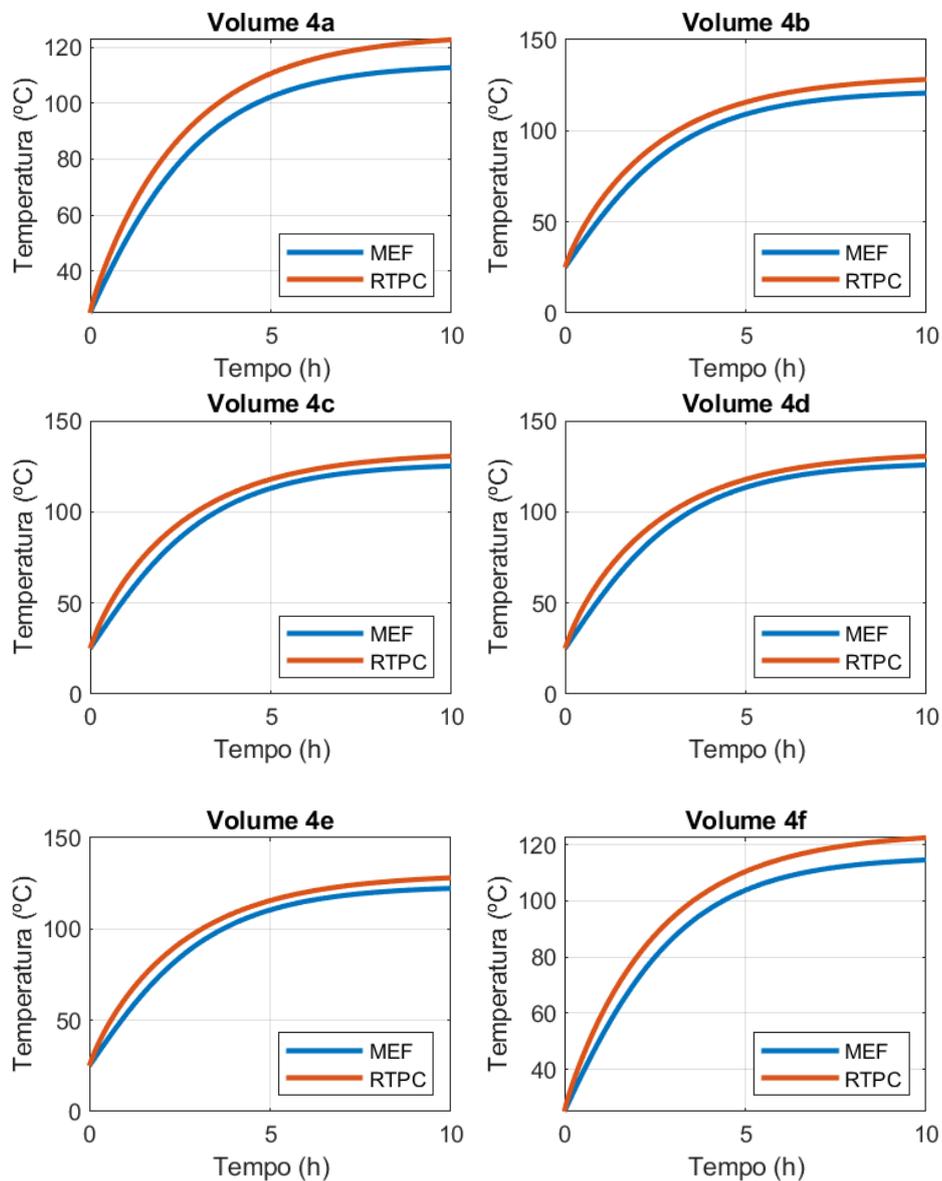
Tabela 9. Constantes de tempo.

Parâmetro	Valor (RPTC)	Valor (MEF)	Diferença [%]
Constante de tempo (Enrolamento)	1,32	1,41	6,38
Constante de tempo (Jugo inferior)	1,72	1,92	10,42
Constante de tempo (Jugo superior)	1,72	1,92	10,42
Constante de tempo (Perna externa)	1,72	1,72	0

Fonte: Autor.

O regime transiente para os volumes das pernas centrais, definidas pela Figura 16, pode ser observado na Figura 26.

Figura 26. Comparações com MEF da perna central e entreferros para corrente nominal.



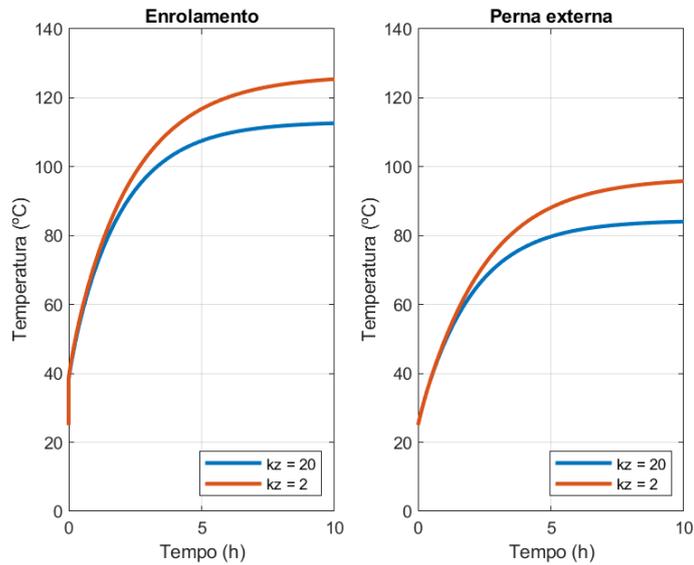
Fonte: Autor.

### 5.3 VARIAÇÃO DA CONDUTIVIDADE TÉRMICA EM Z

Considerando o efeito das laminações na condutividade térmica, alterando seu valor na direção do eixo z, espera-se um aumento da temperatura em geral como pode ser observado

na Figura 27, onde é mostrado o transiente da temperatura no enrolamento e na perna externa simulando para diferentes valores de ( $k_z$ ).

Figura 27. Temperatura no enrolamento (esquerda) e na perna externa (direita).



Fonte: Autor.

As considerações na condutividade térmica na direção das laminações aparecem em algumas referências como em (MENDES, 2020) que considera um valor de até 20 vezes menor que o valor da condutividade nas outras direções, estudo que foi verificado experimentalmente com um transformador de potência a seco. Em (CHEN, 2018) é considerado um valor 10 vezes menor.

## 6 CONCLUSÃO

A rede de parâmetros concentrados, baseada na teoria fundamental da transferência de calor, exposto e analisado no presente trabalho, é utilizado para a modelagem térmica de um circuito magnético. A analogia com componentes elétricos se mostra uma ferramenta útil, visto a familiaridade com a representação. A verificação dos resultados foi realizada por meio da comparação com o método de elementos (MEF) em regime permanente e em regime transiente.

Através da análise da Tabela 6, Tabela 7 e Tabela 8 pode ser notado que o RTPC mantém a diferença percentual de 4 % em comparação com o MEF. Verifica-se um aumento da diferença percentual da temperatura no enrolamento quando é reduzido a corrente considerada que passa pelo mesmo.

As constantes de tempo possuem uma diferença percentual de 10 % em comparação com o MEF, como observado na Figura 25 e na Figura 26. Nota-se que o modelo RTPC subavalia as temperaturas para todas as regiões exceto a perna central.

Nota-se que fabricação do núcleo em laminações é uma ótima solução para a redução das perdas por correntes parasitas, porém, a partir da Figura 27 nota-se que a mesma consideração tende a elevar a temperatura do núcleo devido a redução da condutividade térmica na direção normal as laminações.

Analisando-se os resultados, verificou-se a validade do modelo RTPC por meio da comparação com o MEF. A solução foi obtida por meio do Simulink/Matlab e todos os pontos de temperatura estão explicitados no Apêndice A. A implementação completa do circuito no Simulink pode ser vista no Apêndice B e no Apêndice C.

A comparação com resultados experimentais não foi realizada devido as dificuldades de realizar as medições. Como sugestões para trabalhos futuros, citam-se: avaliação experimental para a continuação do estudo verificando os parâmetros físicos, a constante de tempo do núcleo e do enrolamento e o comportamento em regime permanente.

No estudo ainda pode ser ampliado o número de nós para a verificação do impacto na precisão dos resultados e analisando o *trade-off* entre quantidade de nós e a precisão. Assim como a verificação de outros tipos de núcleo e avaliação de sensibilidade nos parâmetros envolvidos.

A implementação de uma interface mais amigável para iteração com o usuário, também se faz de interesse, colocando como entrada os dados geométricos necessários para definir os nós, que são os parâmetros usuais de medidas de um indutor, além das perdas no

núcleo e no enrolamento assim como foi feito para a apresentação dos resultados e organização dos dados, apresentado no Apêndice A.

## REFERÊNCIAS

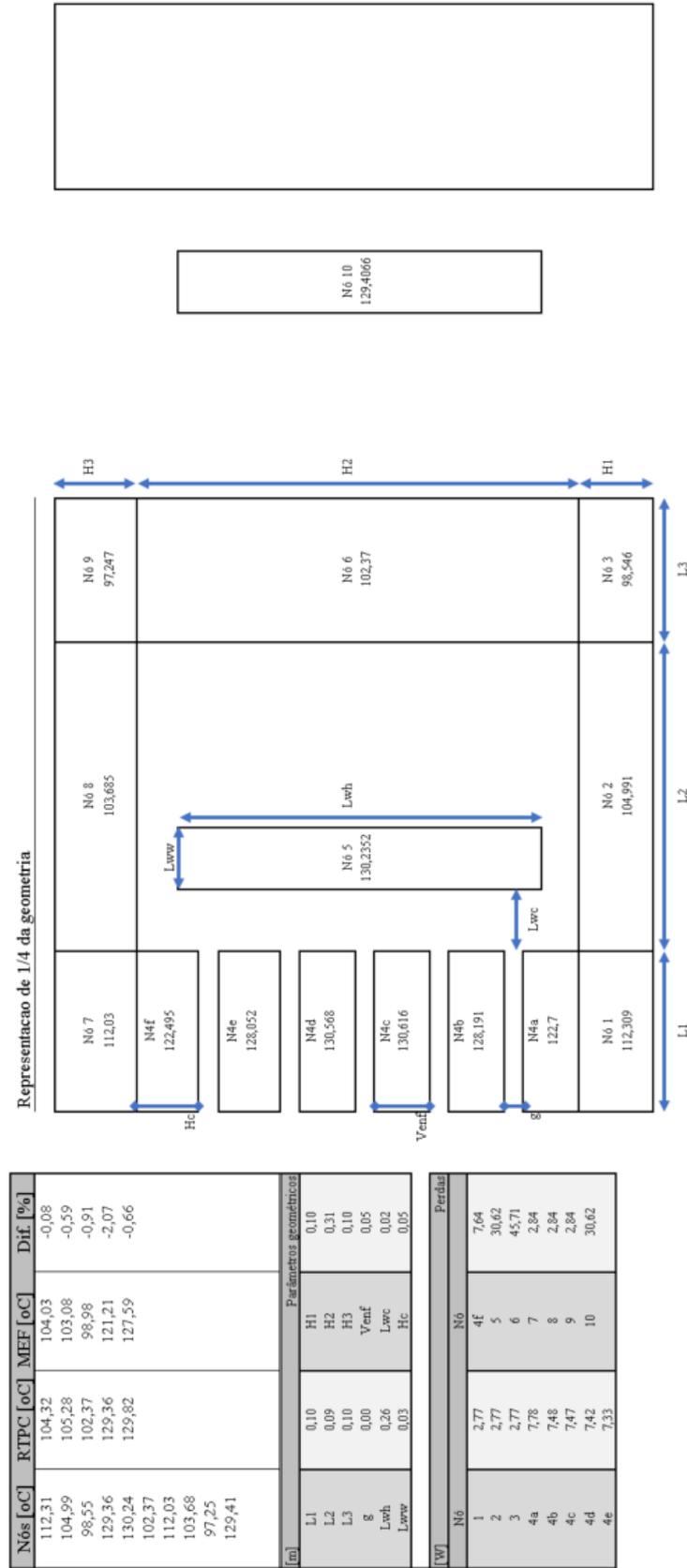
- ALEXIS Fouineau e MARIE Raulet** A medium frequency transformer design tool with methodologies adapted to various structures [Artigo] // Fifteenth International Conference on Ecological Vehicles and Renewable Energies. - 2020.
- ÇENGEL Yunus** Heat and mass transfer, Fundamentals & Applications [Livro]. - [s.l.] : McGraw-Hill Education, 2020. - Ed. 6.
- CHEN Qixu** Lumped-parameter thermal analysis and experimental validation of interior IPMSM for electric vehicle [Artigo] // The Korean Institute of Electrical Engineers. - 2018. - doi: <https://doi.org/10.5370/JEET.2018.13.6.2276>.
- DECHAUMPHAI P.** Finite element analysis with ANSYS Workbench [Artigo] // Alpha Scienci International LTD. - 2018.
- GOMES Luís** Projeto e desenvolvimento de indutores de núcleo EI [Artigo]. - 2019.
- GRAHAM C. D.** Physical origin of losses in conducting ferromagnetic materials [Artigo]. - 1982.
- HASSELSTRÖM Albin** Thermal contact conductance in bolted joints [Artigo] // Chalmers University of Technology. - 2012.
- INCROPERA Frank e DeWEITT David** Fundamentals of heat and mass transfer [Livro]. - [s.l.] : John Wiley & Sons, Inc, 2011. - ed. 7.
- JÚNIOR José Prof.** USP e Disciplinas, Conversão Eletromecânica de energia [Online]. - 2012. - 25 de Abril de 2022. - ([edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4098271/mod\\_resource/content/1/Aula05\\_perdas.pdf](http://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4098271/mod_resource/content/1/Aula05_perdas.pdf)).
- Ld. Devki Energy Consultancy Pvt.** Practice Manual Transformers [Relatório]. - 2006.
- LEE Moonhee** Temperature distribution in foil winding for ventilated dry-type power transformers [Artigo] // Electric Power Systems Research. - 2010. - Vol. 80.
- MCLYMAN Colonel Wm. T.** Transformer and inductor design handbook [Livro]. - [s.l.] : CRC Press, 2011. - 4.
- MEJUTO Carlos** Improved lumped parameter thermal modelling of synchronous generators [Artigo] // University of Edinburgh. - University of Edinburgh : [s.n.], 2010.
- MENDES Gabriel** Coupled electromagnetic and thermal analysis of electric machines [Artigo] // Universidade Tecnológica Federal do Paraná. - 2020.
- PYTHONEN Juha** Design of rotating electrical machines [Livro]. - [s.l.] : John Wiley & Sons, Ltd., 2008.

**SWIFT Glenn** A fundamental approach to transformer thermal modeling - Part I: Theory and equivalent circuit [Artigo] // IEEE Transactions on Power Delivery. - 2001. - No. 2 : Vol. 16.

**WAGNER Matheus** Redução de dimensionalidade [Artigo] // Universidade Federal de Santa Catarina. - 2022.

**YOVANOVICH M.** Review of thermal conductance models for joints incorporating enhancement materials [Artigo] // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. - 2003. - No. 1 : Vol. 17.

APÊNDICE A – Exemplo de saída do script desenvolvido, 150A.



Nós [oC]	RTPC [oC]	MEF [oC]	Dif. [%]
112,31	104,32	104,03	-0,08
104,99	105,28	103,08	-0,59
98,55	102,37	98,98	-0,91
129,36	129,36	121,21	-2,07
130,24	129,82	127,59	-0,66
102,37			
112,03			
103,68			
97,25			
129,41			

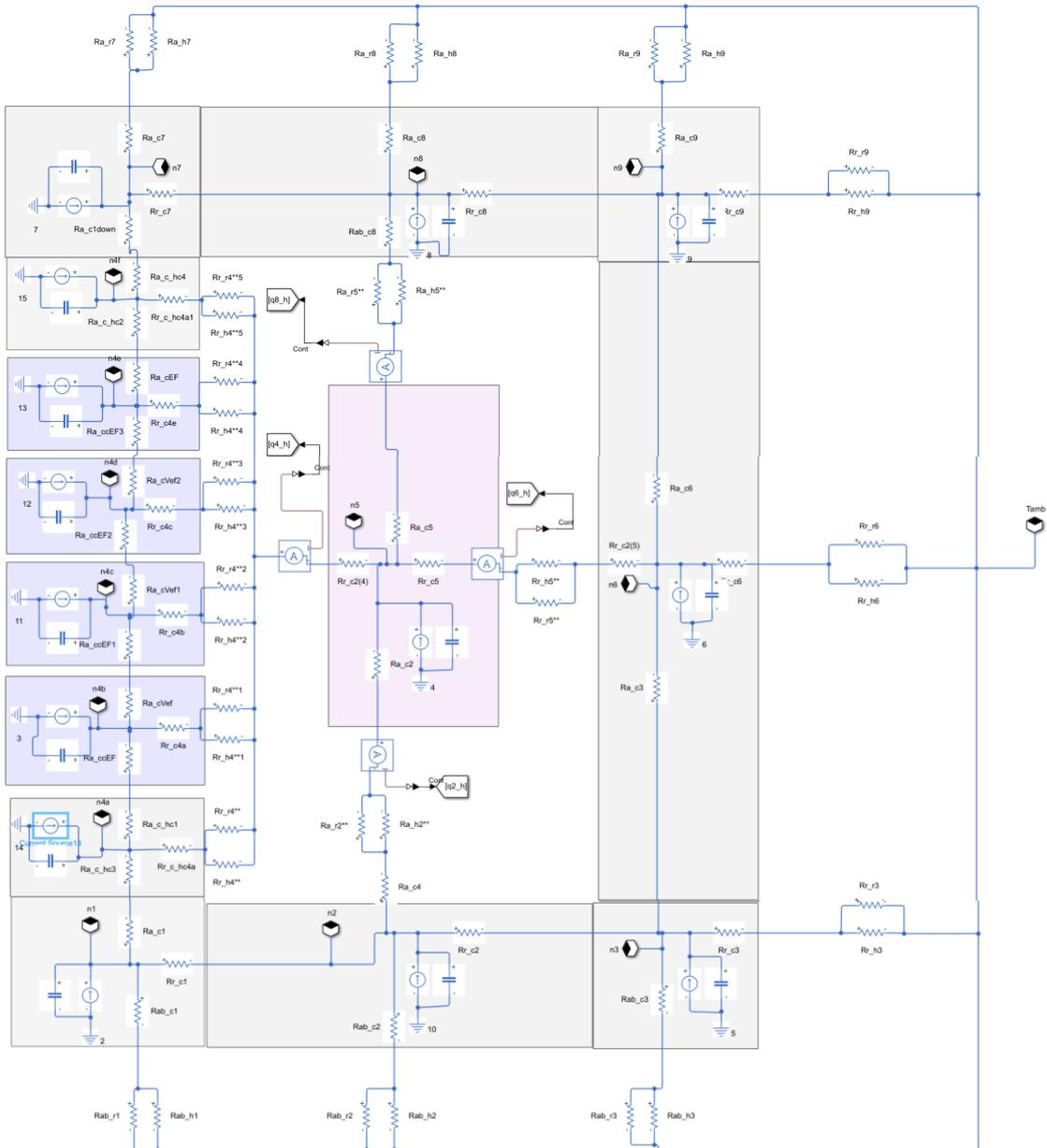
  

Parâmetros geométricos			
[m]			
L1	0,10	H1	0,10
L2	0,09	H2	0,31
L3	0,10	H3	0,10
g	0,00	Ventf	0,05
Lwh	0,26	Lwc	0,02
Lww	0,03	Hc	0,05

Perdas			
[W]	Nó		
1	2,77	4f	7,64
2	2,77	5	30,62
3	2,77	6	45,71
4a	7,78	7	2,84
4b	7,48	8	2,84
4c	7,47	9	2,84
4d	7,42	10	30,62
4e	7,33		

## APÊNDICE B - Geometria completa implementada, plano XY.



## APÊNDICE C - Geometria completa implementada, plano YZ.

