UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS BLUMENAU
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Elias Kemper Filho

Compacidade Fraca em Espaços Normados

Blumenau
2022

Elias Kemper Filho

Compacidade Fraca em Espaços Normados

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática do Campus Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Maicon José Benvenutti

Blumenau
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Filho, Elias
Compacidade Fraca em Espaços Normados / Elias Filho ; orientador, Maicon José Benvenutti, 2022.
105 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Graduação em Matemática, Blumenau, 2022.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Análise Funcional. 3. Topologia Fraca e Fraca-Estrela. 4. Espaços Normados. 5. Topologia Geral. I. José Benvenutti, Maicon. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Matemática. III. Título.

Elias Kemper Filho

Compacidade Fraca em
Espaços Normados

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Licenciado em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática.

Blumenau, 22 de fevereiro de 2022.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Julio Faria Correa
Data: 04/03/2022 10:02:31-0300
CPF: 045.818.289-37
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Júlio Faria Corrêa
Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática

Banca Examinadora:

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Maicon Jose Benvenutti
Data: 24/02/2022 16:47:00-0300
CPF: 041.968.189-27
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Maicon José Benvenutti
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Eleomar Cardoso Junior
Data: 25/02/2022 21:34:55-0300
CPF: 056.666.459-35
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Eleomar Cardoso Júnior
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Rafael dos Reis Abreu
Data: 01/03/2022 14:25:47-0300
CPF: 752.470.892-00
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Rafael dos Reis Abreu
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Esse trabalho é dedicado para aqueles que buscam desvendar os abismos do universo matemático, desejam ter uma compreensão assídua do conceito de infinito e prosseguir os estudos sobre matemática pura.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Maicon Benvenutti por toda colaboração neste trabalho, por me incentivar a buscar novos conhecimentos e por acreditar em mim.

À minha mãe e meu pai por todo suporte que me deram. Sem vossa ajuda seria impossível eu ter chegado tão longe.

Aos meus queridos amigos e colegas de classe Pedro, João e Taina que aguentaram firmes e fortes quase toda a jornada comigo.

À galerinha do meu primeiro ano: Nêssa, Kaven, Eder, Ueslei, Fábio, Nando, Duda, Alfredo. Devo a vocês por ter chegado onde estou pois graças aqueles momentos com vocês eu tive vontade de continuar no curso e hoje fazendo esse trabalho.

Ao colega Felipe Bernal por me servir de inspiração como universitário. Dedicado, inteligente e atento como nenhum outro.

À professora Gestine *in memoriam* e ao professor André por mostrarem o que realmente significa ser um educador e o lado humano da profissão.

Aos professores Eleomar e LR por serem exímios professores, seja pela didática excepcional, seja em tudo mesmo. Eu fico surpreso o quão bom pode ser suas aulas (shows para falar a verdade).

À Universidade Federal de Santa Catarina por ter dado condições de que este trabalho assim como a graduação fosse possível. E por fim, a todo corpo docente da UFSC Blumenau que foram os responsáveis por me guiar neste caminho do conhecimento.

"Não há assunto tão velho que não possa ser dito algo de novo sobre ele."
Fiódor Dostoiévski

"Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes."
Isaac Newton

RESUMO

Nesta monografia, exploraremos topologias que garantem a compacidade da bola fechada unitária em um espaço vetorial normado e tal que os operadores lineares de seu espaço dual permaneçam contínuos. Inicialmente, será introduzida uma abordagem sobre topologia geral, trazendo conceitos básicos para o entendimento dos assuntos sucessores. Em seguida, estudaremos exemplos de espaços vetoriais normados, operadores lineares contínuos e suas propriedades. Também apresentaremos os teoremas fundamentais da Análise Funcional e analisaremos a relação entre os espaços vetoriais normados e seus espaços biduais. Por fim, identificaremos a topologia fraca como a menor topologia tal que os operadores lineares do espaço dual permaneçam contínuos e, sob determinadas condições, mostraremos que a bola unitária fechada de um espaço vetorial normado é compacta nessa topologia.

Palavras-chave: Topologia Geral. Análise Funcional. Espaços Normados. Operadores Lineares Contínuos. Dual. Topologias Fracas. Compacidade.

ABSTRACT

In this monograph, we will explore topologies that guarantee the compactness of the closed unit ball in a normed vector space and such that the linear operators of its dual space remain continuous. Initially, an approach to general topology will be introduced, bringing basic concepts to the understanding of successor subjects. Next, we will study examples of normed vector spaces, continuous linear operators and their properties. We will also present the fundamental theorems of Functional Analysis and we will analyze the relationship between the normed vector spaces and their bidual spaces. Finally, we will identify the weak topology as the smallest topology such that the linear operators of the dual space remain continuous and, under certain conditions, we will show that the closed unit ball of a normed vector space is compact in this topology.

Keywords: General Topology. Functional Analysis. Normed Spaces. Continuous Linear Operators. Dual. Weak Topologies. Compactness

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Análise Funcional é uma área da matemática que mescla, entre outras coisas, Álgebra Linear em dimensão infinita e Análise num mesmo ambiente.

O objetivo desse trabalho é trazer os argumentos necessários para demonstrarmos o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki e uma consequência desse teorema. Esses resultados têm a ver com a topologia induzida num espaço vetorial normado E na qual garantem que o conjunto $B_E = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$, em que $\| \cdot \|_E$ é uma norma em E, é compacto sob determinadas condições. Para atender esse propósito, o trabalho está organizado da seguinte forma:

O Capítulo 2 está dedicado para o estudo de Topologia Geral. São analisados conceitos-chave da teoria como conjuntos abertos e fechados, convergência, continuidade e compacidade. O objetivo desse primeiro capítulo é dar as ferramentas necessárias para o estudo dos capítulos sucessores sem fazer um estudo exaustivo de Topologia.

O Capítulo 3 abrange os conhecimentos de espaços vetoriais dos quais é possível se definir uma norma e induzir uma topologia pela norma, tornando-os espaços vetoriais normados. São apresentados resultados que para espaços de dimensão finita são facilmente verificados, enquanto que para espaços de dimensão infinita deve-se ter um maior cuidado no tratamento. Posteriormente, ainda neste capítulo, estudamos os operadores lineares contínuos e suas propriedades. Notamos, em particular, que a linearidade dos operadores proporciona caracterizações que não se atrelam a funções quaisquer.

Ainda no Capítulo 3, abordamos os teoremas elementares da teoria de Análise Funcional, como o Teorema de Banach-Steinhaus e, em seguida, o Teorema de Extensão de Hahn-Banach com suas consequências. Ademais, analisamos que certos espaços vetoriais normados têm uma estrita relação entre seu espaço bidual, sendo possível enxergar os elementos de um espaço como elementos do bidual. No caso em que o espaço é reflexivo, verificamos que o espaço vetorial normado e seu bidual podem ser identificados via um isomorfismo isométrico.

O ponto de chegada desse trabalho se encontra ao final do Capítulo 4. Nesse capítulo estão abordadas as topologias fraca e fraca-estrela em espaços vetoriais normados e espaços duais, respectivamente. Essas topologias desempenha um papel importante para obtenção da compacidade de B_E para espaços de dimensão infinita. Além disso, verificamos que a topologia fraca mantém os funcionais do dual contínuos.

As principais referências estudadas para descrição do Capítulo 2 que dialoga sobre Topologia Geral são [7] e [9]. A fonte bibliográfica principal dessa monografia como um todo sobre Análise Funcional e para descrição do Capítulo 3 é [1]. O Capítulo 4 está baseado em [1] e [10]. Resultados auxiliares sobre Espaços Métricos são encontrados em [8] e de Análise Funcional em [3].

É preciso informar que os espaços vetoriais considerados nos resultados mencionados nesse trabalho podem ser explorados tanto sobre o corpo dos reais $\mathbb{R}$, quanto sobre o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Porém, para fins de abranger um público de formandos em Licenciatura em Matemática, optou-se definir os espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{R}$. Ademais, consideramos que o leitor já tenha conhecimentos prévios de Álgebra Linear e Análise Real. Caso o leitor não tenha tais conhecimentos, para um primeiro momento, as referências [2], [4] para Álgebra Linear e [5], [6] para Análise Real são ótimos livros para compreensão dos conceitos aqui abordados.

2 ELEMENTOS DE TOPOLOGIA

Segundo o prof. Elon em [7], uma das ideias mais importantes da Matemática é a de continuidade, a qual se acha estreitamente relacionada com os conceitos de convergência e limite. Dada uma aplicação $f : X \to Y$ definida num conjunto X e tomando valores num conjunto Y, diz-se que f é contínua no ponto $a \in X$ quando é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$, desde que se tome x suficientemente próximo de a. Analogamente, diz-se que uma sequência de pontos $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $n \in \mathbb{N}$, pertencentes a um conjunto X, converge para o ponto $a \in X$ quando é possível tornar x_n arbitrariamente próximo de a, desde que se tome n suficientemente grande.

Não obstante, as definições de continuidade e convergência não têm sentido em conjuntos quaisquer X e Y. Para que elas signifiquem algo, é fundamental que nos conjuntos em questão existam propriedades que permitam falar em "proximidade" de pontos. Tais conjuntos são chamados espaços topológicos. Neles, são definidas e tomam valores as funções contínuas. Chama-se Topologia a área da matemática que se ocupa do estudo dos espaços topológicos e das funções contínuas entre estes espaços.

Nesta dissertação, não se pretende alongar-se ao estudo de Topologia Geral. O objetivo desse capítulo é trazer as ferramentas necessárias para podermos compreender com clareza os conceitos abordados nos próximos capítulos. Entretanto, tem-se em mente que é necessário trazer exemplos intuitivos e demonstrações das proposições para que o leitor não fique confuso ou pense que as definições são meramente abstratas.

Começamos estudando uma das classes de conjuntos mais fundamentais da teoria: os espaços métricos. Depois, definimos o que são espaços topológicos e abordamos exemplos clássicos de topologia. Em seguida, tratamos sobre vizinhanças e bases, ferramentas úteis para determinar uma topologia. Analisamos o conceito de função contínua no contexto de espaços métricos e na sua forma generalizada em espaços topológicos quaisquer. Estudamos o conceito de redes, que é uma generalização do conceito de sequências. Doravante, analisaremos um tipo especial de topologia que é objeto de estudo no Capítulo 4, conhecida como topologia gerada por uma família de funções. Por fim, estudamos os conceitos básicos de compacidade.

2.1 ESPAÇOS MÉTRICOS

Definição 2.1.1. Seja M um conjunto não vazio. Dizemos que uma *métrica* em M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que associa cada par de pontos $x, y \in M$ a um número real $d(x, y)$, chamado de distância do ponto x ao ponto y, de tal modo que valem:
(a) Positividade: $d(x, y) > 0 \Leftrightarrow x \neq y, \forall x, y \in M$ e $d(x, x) = 0, \forall x \in M$;
(b) Simetria: $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in M$;
(c) Desigualdade triangular: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in M$.

Definição 2.1.2. Um *espaço métrico* é um par (M, d), formado por um conjunto M não vazio e uma métrica d em M.

Podemos definir uma métrica em qualquer conjunto não vazio como mostra o exemplo a seguir:

Exemplo 2.1.3. Considere X um conjunto não vazio. Se definirmos uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ como $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$ e $d(x, y) = 0$ se $x = y$, então obtemos uma métrica em X. De fato, é imediata a verificação dos itens (a) e (b) da Definição 2.1.1. Para desigualdade triangular, veja que se $d(x, z) = 0$ ela é imediata. Se $d(x, z) \neq 0$ tem-se que $d(x, y) + d(y, z) = 1$ se $x = y$ ou $y = z$ e $d(x, y) + d(y, z) = 2$ se $x \neq y$ e $z \neq y$. A métrica d é conhecida como a métrica *zero-um*. Portanto, (X, d) é um espaço métrico.

Exemplo 2.1.4. Seja $M = \mathbb{R}$. Seja a função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa $(x, y) \mapsto |x - y|$, em que $|\cdot|$ é o *valor absoluto* em $\mathbb{R}$. Para mostrar que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ é um espaço métrico, precisamos verificar que a função d satisfaz os itens da Definição 2.1.1. Tome $x, y, z \in \mathbb{R}$. É claro que $d(x, x) = 0$. De fato, $d(x, x) = |x - x| = |0| = 0$. Temos também que para $x \neq y$, $d(x, y) = |x - y|$, que é o valor absoluto da diferença $x - y$, ou seja, é um número positivo. Portanto $d(x, y) > 0$, se $x \neq y$. Ademais, $d(x, y) = |x - y| = |(-1)(y - x)| =$

$|-1||y-x| = |y-x| = d(y,x)$. Como sabemos, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, temos que $|a+b| \leq |a| + |b|$, sendo assim,

$$\begin{aligned} d(x,z) = |x-z| = |x+y-y-z| &= |(x-y)+(y-z)| \\ &\leq |x-y| + |y-z| \\ &= d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ é um espaço métrico. A métrica d é conhecida como *métrica usual* em $\mathbb{R}$.

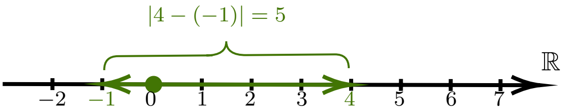

Figura 1 – Representação da métrica usual de $\mathbb{R}$.

Proposição 2.1.5. *Seja (M,d) um espaço métrico. Para quaisquer que sejam $x, y, z \in M$ tem-se $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$.*

Demonstração. Veja que $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \Rightarrow d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y)$ e que $d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) \Rightarrow d(y,z) - d(x,z) \leq d(x,y)$. Daí, das propriedades de módulo, segue que $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$. ■

Por simplicidade, chamamos o espaço métrico (M,d) por M, quando não houver ambiguidade de qual métrica trabalhamos.

Definição 2.1.6. Sejam A e B subconjuntos de M, a *distância entre A e B* é dada por

$$\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{d(x,y) : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$ [1]

Em particular, a *distância entre um ponto $x \in M$ e $A \subset M$* é dada por

$$\mathrm{dist}(x,A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}.$$

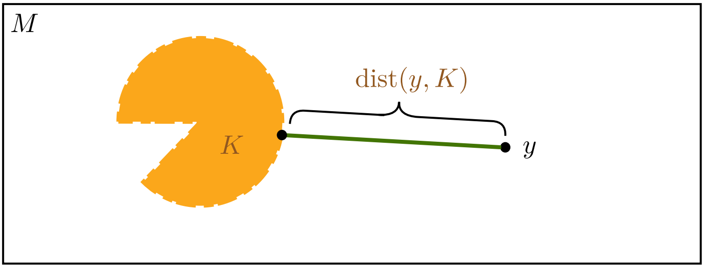

Figura 2 – Representação de $\operatorname{dist}(y, K)$.

Exemplo 2.1.7. Considere $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ e $A = (1, 2]$ o *intervalo semi-fechado* entre 1 e 2. Tem-se $d(1, A) = 0$. De fato, temos que $1 \leq a$ para todo $a \in A$. Além disso, seja $b > 1$. Considere o número real $a = \min\{2, \frac{1+b}{2}\}$. Então $a \in A$ e $1 < a < b$. Logo, 1 é o ínfimo de A.

Exemplo 2.1.8. Seja $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ em que cada M_i, $i = 1, \ldots, n$, é um espaço métrico com a métrica d_{M_i}. Então as funções d_1, d_2, d_∞ abaixo são métricas em M:

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_{M_i}(x_i, y_i)\}, \qquad d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_{M_i}(x_i, y_i),$$
$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_{M_i}(x_i, y_i)^2}.$$

O leitor pode verificar em [8, Exemplo 4, p. 3] que, de fato, d_1, d_2, d_∞ são métricas. Em particular, se considerarmos, para todo i, que $M_i = \mathbb{R}$, temos

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}, \qquad d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$
$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}.$$

[1] O ínfimo de um subconjunto A de $\mathbb{R}$ limitado inferiormente é definido como o número real $m = \inf A$ tal que
(i) Para todo $a \in A$, $m \leq a$;
(ii) Se $m < b$, então existe $a \in A$ tal que $a < b$.

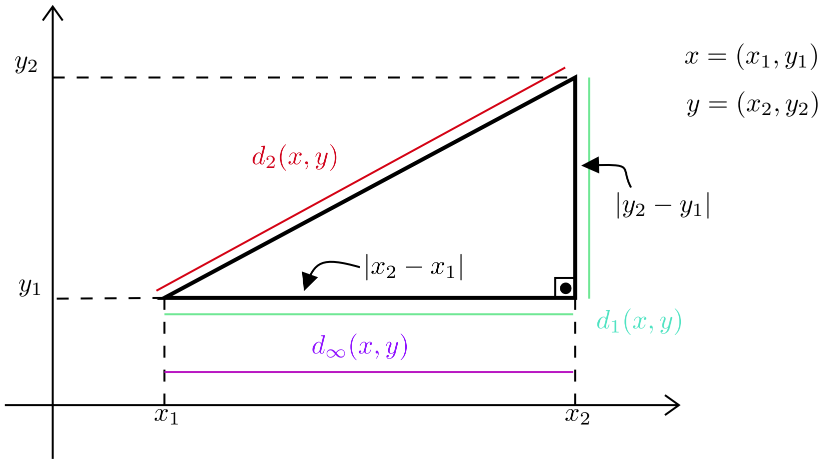

Figura 3 – Representação geométrica em $\mathbb{R}^2$ das métricas d_1, d_2 e d_∞. As métricas d_1, d_∞ e d_2 podem ser interpretadas, respectivamente, como a soma dos catetos, o maior cateto e a hipotenusa de um triângulo retângulo.

A próxima definição envolve o conceito de sequências. Através de sequência, podemos compreender a noção de proximidade ou convergência em espaços métricos.

Definição 2.1.9. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma *sequência* no espaço métrico M.

(a) A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge para* $x \in M$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $d(x_n, x) < \epsilon$. Neste caso, escrevemos $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(x_n, x\right) = 0$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ou $x_n \longrightarrow x$.

(b) A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é dita *convergente* se existe $x \in M$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Caso contrário é dita *divergente*.

(c) A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma *sequência de Cauchy* se, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > n_0$, então $d(x_n, x_m) < \epsilon$, ou, equivalentemente, $\lim\limits_{n,m\to\infty} d\left(x_n, x_m\right) = 0$.

(d) O espaço métrico (M, d) é um espaço métrico *completo* se toda sequência de Cauchy em M convergir para um elemento de M.

(e) Uma *subsequência* de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ restrita a um subconjunto $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $n_j > n_i$ se $j > i$.

É interessante destacar algumas propriedades a respeito de convergência de sequências:

Proposição 2.1.10. *Se uma sequência converge, qualquer subsequência desta converge para o mesmo ponto.*

Demonstração. Seja $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ uma subsequência de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Suponha que $x_n \longrightarrow x$, isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ implica $d(x_n, x) < \epsilon$. Como os índices da subsequência formam um subconjunto infinito $\mathbb{N}'$ de $\mathbb{N}$, tem-se que existe $k_0 \in \mathbb{N}'$ tal que $n_{k_0} > n_0$. Então, $n_k > n_{k_0}$ implica $n_k > n_0$ implica $d(x_{n_k}, x) < \epsilon$. Portanto, $x_{n_k} \longrightarrow x$. ■

Proposição 2.1.11. *Se uma sequência de Cauchy possui uma subsequência convergente, então a própria sequência de Cauchy converge para o mesmo ponto da subsequência.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy e $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ uma subsequência convergente. Dado $\epsilon > 0$, existe n_{i_1} tal que $n_k > n_{i_1}$ implica $d\left(x_{n_k}, x\right) < \frac{\epsilon}{2}$. Existe também n_{i_2} tal que $d\left(x_m, x_n\right) < \frac{\epsilon}{2}$ sempre que $m, n > n_{i_2}$. Seja $n_{i_0} = \max\left\{n_{i_1}, n_{i_2}\right\}$. Se $n > n_{i_0}$, podemos escolher $n_k > n_{i_0}$ e teremos $d\left(x_n, x\right) \leq d\left(x_n, x_{n_k}\right) + d\left(x_{n_k}, x\right) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Logo, $x_n \longrightarrow x$. ■

Exemplo 2.1.12. Considere o conjunto $\mathfrak{N} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ com a métrica usual de $\mathbb{R}$. Temos que a sequência $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de $\mathfrak{N}$, é de Cauchy e não é convergente, logo $\mathfrak{N}$ não é completo. Por outro lado, $\mathfrak{N} \cup \{0\}$ é completo pois além dessa sequência ser convergente, temos que qualquer outra sequência de Cauchy é convergente. De fato, qualquer sequência de Cauchy neste espaço ou é constante a partir de um certo termo e consequentemente convergente, ou possui uma subsequência que também pode ser vista como uma subsequência de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, que converge para 0.

Pelo exemplo anterior nem sempre podemos garantir que uma sequência de Cauchy é convergente. Mas a reciproca é sempre verdadeira:

Proposição 2.1.13. *Toda sequência convergente em um espaço métrico M é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Suponha que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convirja para $x \in M$. Daí, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m > n_0$ implica $d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2}$ e $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Logo, $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Portanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy. ■

Definição 2.1.14. Seja M um espaço métrico.
(a) Dados $a \in M$ e $r > 0$, o conjunto $B(a, r) = \{x \in M : d(x, a) < r\}$ é chamado de *bola aberta* com centro a e raio r.
(b) Um subconjunto $A \subset M$ é dito *aberto* se para cada $x \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset A$.

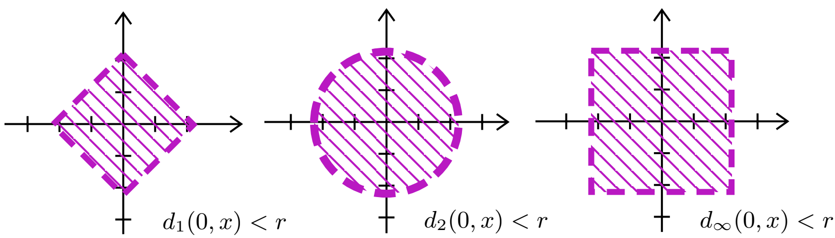

Figura 4 – Bolas abertas em $\mathbb{R}^2$ centralizadas na origem de raio r com as métricas d_1, d_2 e d_∞ do Exemplo 2.1.8.

Exemplo 2.1.15. A bola aberta $B(a, r)$ em qualquer espaço métrico M é um aberto de M. Com efeito, para cada $x \in B(a, r)$, temos que $d(x, a) < r$. Temos $r - d(x, a) > 0$, fazendo $r - d(x, a) > s > 0$ tem-se que a bola aberta $B(x, s)$ está contida em $B(a, r)$. De fato, se $y \in B(x, s)$ então $d(y, x) < r - d(x, a)$, daí

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < r - d(x, a) + d(x, a) = r.$$

Logo, $y \in B(a, r)$.

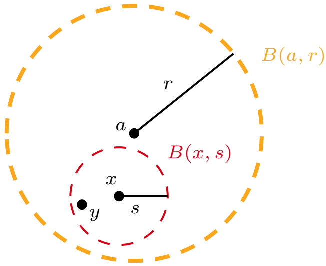

Figura 5 – Ideia da demonstração de que bolas abertas são conjuntos abertos.

Definição 2.1.16. Seja M um espaço métrico, dizemos que um subconjunto de M é um *conjunto limitado* se estiver contido numa bola aberta de M.

Exemplo 2.1.17. Conjuntos com número finito de elementos são limitados. Com efeito, seja $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Se tomarmos $r = \max\limits_{2 \leq i \leq n} [d(x_1, x_i)] + 1$ temos que $M \subset B(x_1, r)$.

2.2 ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

Definição 2.2.1. Uma *topologia* em um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X, chamados *conjuntos abertos*, satisfazendo as seguintes propriedades:
(a) Qualquer união de elementos de τ é um elemento de τ.
(b) Qualquer interseção finita de elementos de τ pertence a τ.
(c) X e $\emptyset$ pertencem a τ.

Neste caso dizemos que (X, τ) é um *espaço topológico*. Abreviamos (X, τ) para X quando não houver perigo de ambiguidade ou de imprecisão.

Os Exemplos 2.2.2, 2.2.3 e 2.2.5 a seguir são topologias clássicas da teoria de Topologia Geral. O Exemplo 2.2.6 é crucial para entendermos os conceitos dos próximos capítulos.

Exemplo 2.2.2. Considere X um conjunto qualquer e $\tau = \{\emptyset, X\}$. Então (X, τ) é um espaço topológico em que a topologia τ se chama *topologia caótica*.

Exemplo 2.2.3. Considere X um conjunto qualquer e $\tau = \mathcal{P}$, em que $\mathcal{P}$ é o conjunto das partes de X. Então (X, τ) é um espaço topológico em que a topologia τ se chama *topologia discreta*.

Exemplo 2.2.4. Seja X um espaço topológico e $(\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de topologias em X. Então $\tau = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \tau_\lambda$ é uma topologia em X. Com efeito, os três itens da Definição 2.2.1 são verificados:
(a) Como $X, \emptyset \in \tau_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$, segue que $X, \emptyset \in \tau$.
(b) Seja $(A_i)_{i\in I}$ uma coleção de conjuntos tal que $A_i \in \tau$, para cada $i \in I$. Então $A_i \in \tau_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$ e $i \in I$. Daí, $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \tau_\lambda$, para cada $\lambda \in \Lambda$. Portanto, $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \tau$.
(c) Seja $A_1, A_2 \in \tau$, então para cada $\lambda \in \Lambda$ têm-se $A_1 \cap A_2 \in \tau_\lambda$, daí $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

No Capítulo 4 está verificado duas topologias especiais que são interseções de topologias.

Exemplo 2.2.5. Seja X um conjunto infinito. Consideremos a coleção τ formada pelo conjunto vazio $\emptyset$ e os complementares dos subconjuntos finitos de X. Fazendo uso das relações $X \setminus \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (X \setminus A_\lambda)$ e $X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n) = (X \setminus A_1) \cap \cdots \cap (X \setminus A_n)$, verifica-se que τ é uma topologia em X. Essa topologia é conhecida como *topologia co-finita*.

Exemplo 2.2.6. Os conjuntos abertos do item (b) da Definição 2.1.14 formam uma topologia τ_d no espaço métrico (M, d) e chamamos esta de *topologia induzida pela métrica d*. Com efeito, precisamos verificar os três itens da Definição 2.2.1:
(a) Para mostrar que $\emptyset$ é aberto basta notar que um subconjunto $X \subset M$ só deixa de ser aberto quando existe um ponto $x \in X$ tal que nenhuma bola de

centro x está contida em X. Como não existe $x \in \emptyset$, o conjunto vazio não viola a condição que define os abertos, logo $\emptyset$ é aberto. Ademais, é evidente que M é aberto.
(b) Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família qualquer de subconjuntos abertos de M. Sendo $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, mostremos que A é aberto. Dado $x \in A$, existe um índice $\lambda \in \Lambda$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe uma bola $B(x, \epsilon)$ contida em A_λ. Logo, $B(x, \epsilon) \subset A$.
(c) Sejam $A_1, \ldots, A_n$ abertos em M. Seja $x \in A_1 \cap \ldots \cap A_n$. Para cada $i = 1, \ldots, n$ existe uma bola aberta $B\left(x, \epsilon_i\right)$ contida em A_i. Tomemos $\epsilon = \min\left\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\right\}$. Então $\epsilon > 0$ e $B(x, \epsilon) \subset B\left(x, \epsilon_i\right) \subset A_i$ para cada i. Logo $B(x, \epsilon) \subset A_1 \cap \cdots \cap A_n$.
Ou seja, todo espaço métrico tem uma estrutura natural de espaço topológico com a topologia τ_d.

Definição 2.2.7. Diremos que τ é *mais fina* do que $\widetilde{\tau}$ ou que $\widetilde{\tau}$ é *menos fina* do que τ quando $\widetilde{\tau} \subset \tau$, isto é, quando todo aberto segundo $\widetilde{\tau}$ for necessariamente aberto segundo τ.

Segue da definição acima que toda topologia τ em X é mais fina que a topologia caótica e menos fina que a topologia discreta.

Definição 2.2.8. Um espaço topológico X é um *espaço de Hausdorff* se para todos $x, y \in X$, $x \neq y$, existem abertos $U \ni x$ e $V \ni y$ tais que $U \cap V = \emptyset$.

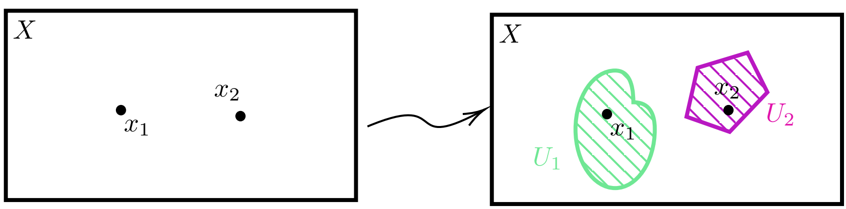

Figura 6 – Num espaço Hausdorff, com $x \neq y$, obtemos U_1 e U_2 abertos que são disjuntos e contêm x_1 e x_2, respectivamente.

Exemplo 2.2.9. Todo espaço métrico M é um espaço de Hausdorff. De acordo com o Exemplo 2.1.15 bolas abertas são abertos em M, então podemos tomar dois pontos $a, b \in M$, $a \neq b$ e raios $r > 0$, $s > 0$ tais que $r+s \leq d(a,b)$. Daí, as bolas abertas $B(a,r)$ e $B(b,s)$ são disjuntas, pois caso contrário se existir algum ponto $x \in B(a,r) \cap B(b,s)$, teríamos $d(a,x) < r$ e $d(b,x) < s$. Daí $d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < r + s \leq d(a,b)$, gerando um absurdo.

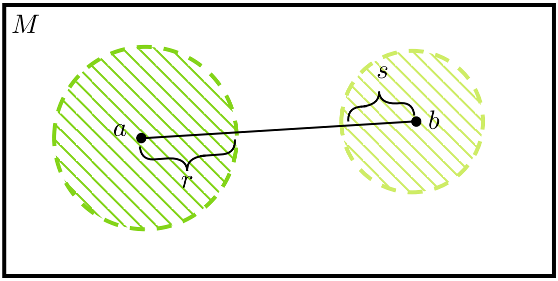

Figura 7 – Duas bolas abertas disjuntas.

Observação 2.2.10. Se o espaço topológico X não for Hausdorff, automaticamente temos que X não pode ser um espaço métrico pelo exemplo anterior. Um exemplo bem simples de topologia não Hausdorff é a topologia caótica para um conjunto com mais de um elemento.

Apesar de existirem espaços topológicos nos quais sejam possíveis de se obter uma topologia não induzida por uma métrica, e portanto não é possível obter uma noção de convergência através de uma "distância", ainda é possível definir o limite de uma sequência como mostra a definição a seguir.

Definição 2.2.11. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no espaço topológico X *converge para* $x \in X$ e escrevemos $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ ou $x_n \longrightarrow x$, quando, para todo aberto A contendo o ponto x, for possível obter um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ implique $x_n \in A$. Dizemos que x é o *limite* da sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Em Cálculo, aprendemos que o limite, quando existe, de uma função real é único. Em Análise Real verificamos também que o limite de uma sequência é único, desde que exista. Em verdade, essa propriedade é consequência de um resultado mais geral como se verifica a seguir:

Proposição 2.2.12. *Num espaço de Hausdorff X, uma sequência convergente possui um único limite.*

Demonstração. Considere uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente no espaço de Hausdorff X, digamos que convirja para x. Suponha por absurdo que haja $y \in X$, $y \neq x$ e tal que $x_n \longrightarrow y$. Por X ser Hausdorff existem abertos V, W que contêm x, y, respectivamente e tais que $V \cap W = \emptyset$. Pela definição de limite, à partir de um índice n_0 os elementos x_n estarão em V e $x_n \notin W$, o que contradiz a convergência para y. ■

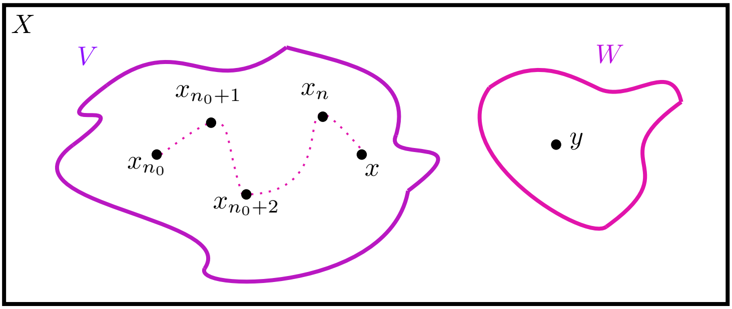

Figura 8 – Convergência num espaço de Hausdorff.

Corolário 2.2.13. *Toda sequência convergente num espaço métrico M admite limite único.*

Exemplo 2.2.14. Considere $\mathbb{N}$ com a topologia τ do Exemplo 2.2.5. Neste caso, um subconjunto A de $\mathbb{N}$ é aberto se, e somente se, existe um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ implique $n \in A$. Tome a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de $(\mathbb{N}, \tau)$ definida por $x_n = n$. Verificamos que dado qualquer $c \in \mathbb{N}$ tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} n = c$. Para tanto, considere um aberto $A \ni c$. Pela definição de abertos de τ existirá um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ teremos $x_n = n \in A$, o que acarreta $x_n \longrightarrow c$, seja qual for $c \in \mathbb{N}$. Temos, pela Proposição 2.2.12, que τ não é Hausdorff.

Definição 2.2.15. Um subconjunto F de um espaço topológico X é chamado de conjunto *fechado* se seu complementar for aberto, isto é, $X \backslash F \in \tau$.

Proposição 2.2.16. *Em um espaço topológico X valem as seguintes propriedades:*

(a) Os conjuntos $\emptyset$ e X são fechados;
(b) A interseção $F = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ de uma família arbitrária $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos fechados $F_\lambda \subset X$ é um subconjunto fechado de X;
(c) a reunião $F = F_1 \cup \cdots \cup F_n$ finita de conjuntos fechados $F_1, \ldots, F_n \subset X$ é um subconjunto fechado de X.

Demonstração. (a) Como $X \backslash X = \emptyset$ e $X \backslash \emptyset = X$, segue que X e $\emptyset$ são fechados.
(b) Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de subconjuntos de X tal que $A_\lambda = X \backslash F_\lambda$. Cada A_λ é aberto em X. Logo, $A = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é também aberto. Como $F = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} (X \backslash A_\lambda) = X \backslash \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = X \backslash A$, segue-se que F é fechado.
(c) Os conjuntos $A_1 = X \backslash F_1, \ldots, A_n = X \backslash F_n$ são abertos. Logo, $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ é aberto e $F = F_1 \cup \cdots \cup F_n = (X \backslash A_1) \cup \cdots \cup (X \backslash A_n) = X \backslash (A_1 \cap \ldots \cap A_n)$ é fechado. ■

Exemplo 2.2.17. Num espaço de Hausdorff X, $\{x\}$ é um subconjunto fechado de X, para todo $x \in X$. Com efeito, para cada $y \in X \backslash \{x\}$, existem abertos A, B_y tais que $x \in A$, $y \in B_y$ e $A \cap B_y = \emptyset$. Em particular, $y \in B_y \subset X \backslash \{x\}$. Tomando $\bigcup\limits_{y \in X \backslash \{x\}} B_y = X \backslash \{x\}$ temos que $X \backslash \{x\}$ é uma reunião de abertos. Portanto, $X \backslash \{x\}$ é aberto. Consequentemente $\{x\}$ é fechado em X. Segue-se que todo subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ é fechado.

Definição 2.2.18. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $E \subset X$.
(a) O *interior* de E é o conjunto $\operatorname{int}(E) = \bigcup\{A \subset X : A$ é aberto e $A \subset E\}$.
(b) O *fecho* de E é o conjunto $\overline{E} = \bigcap\{F \subset X : F$ é fechado e $E \subset F\}$.

Observação 2.2.19. (a) A Definição 2.2.18(a) é equivalente à seguinte sentença: seja X um espaço topológico e $E \subset X$. Dizemos que $x \in X$ é um *ponto interior* a E se existe um aberto $A \subset E$ tal que $x \in A$. O conjunto $\operatorname{int}(E)$ dos pontos interiores de E é chamado de interior de E. Em [7, Proposição 12, p. 74] o leitor pode confirmar que, de fato, são asserções equivalentes.
(b) A Definição 2.2.18(b) é equivalente à seguinte sentença: seja X um espaço topológico e $E \subset X$. Dizemos que $x \in X$ é um *ponto aderente* a E se todo aberto A que contém x também contém algum ponto de E. O conjunto $\overline{E}$ dos pontos aderentes de E é chamado fecho de E. O leitor pode verificar [7, Proposição 18, p. 81] para comprovar que de fato as definições são equivalentes.

Proposição 2.2.20. *Sejam (X, τ) um espaço topológico, $x \in X$ e $A, B \subset X$. Então*
(a) $\operatorname{int}(A)$ *é um conjunto aberto e* $\overline{A}$ *é um conjunto fechado,*
(b) A *é aberto se, e somente se,* $A = \operatorname{int}(A)$*,*
(c) A *é fechado se, e somente se,* $A = \overline{A}$*,*
(d) *Se* $A \subset B$*, então* $\overline{A} \subset \overline{B}$*,*
(e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$*.*

Demonstração. (a) Por definição, $\operatorname{int}(A)$ é uma reunião de abertos, consequentemente $\operatorname{int}(A)$ é aberto. Do mesmo modo, pela Proposição 2.2.16, $\overline{A}$ é fechado por ser interseção de fechados.
(b) De um lado, veja que $\operatorname{int}(A) \subset A$, por definição. Se A for um aberto, então pela definição de $\operatorname{int}(A)$ temos $A \subset \operatorname{int}(A)$. Logo, $A = \operatorname{int}(A)$. Reciprocamente, suponha que $A = \operatorname{int}(A)$. Pelo item (a), A é aberto.
(c) De um lado, veja que $A \subset \overline{A}$, por definição. Se A é um fechado, então pela definição de $\overline{A}$ temos $\overline{A} \subset A$. Logo, $A = \overline{A}$. Reciprocamente, suponha

que $A = \overline{A}$. Pelo item (a), A é fechado.
(d) De $A \subset B \subset \overline{B}$ temos $A \subset \overline{B}$. Além disso, $\overline{B}$ é um fechado que contém A, disso segue que $\overline{A} \subset \overline{B}$.
(e) Como $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$, segue que $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ e $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ pelo item (d). Logo $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Por outro lado $\overline{A} \cup \overline{B}$ é um fechado contendo $A \cup B$. Logo $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. ■

A próxima proposição desempenha uma aplicação importante na determinação de conjuntos fechados.

Proposição 2.2.21. *Seja S um subconjunto de um espaço topológico X. Para que $x \in \overline{S}$ em X é suficiente que exista uma sequência de pontos $x_n \in S$ com $x_n \longrightarrow x$. Se X for um espaço métrico a condição é necessária.*

Demonstração. Seja $x_n \longrightarrow x$, com $x_n \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, qualquer aberto V de x contém pontos de S, pois $x_n \in V$ para n suficientemente grande. Pela Observação 2.2.19(b), x é um ponto aderente de S e, consequentemente, $x \in \overline{S}$. Reciprocamente, se $x \in \overline{S}$ e X espaço métrico, então, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escolher um ponto $x_n \in S$ na bola aberta $B(x, 1/n)$. Obtemos assim uma sequência de pontos $x_n \in S$, com $d(x, x_n) < 1/n$. Portanto, $x_n \longrightarrow x$. ■

Observação 2.2.22. Existem espaços topológicos em que é possível obter um subconjunto S e um $x \in \overline{S}$ de forma que x não seja limite de sequências de S. Pela proposição acima, estes espaços topológicos não são metrizáveis no sentido que não existe uma métrica que forneça a topologia considerada. Um exemplo é o conjunto $\mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ das funções reais $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ munido de uma topologia chamada "topologia da convergência simples". Foge do escopo desse trabalho tal verificação, entretanto, para os leitores interessados, veja [7, Exemplo 23, p. 128].

Definição 2.2.23. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. A coleção $\tau_A := \{B \cap A : B \in \tau\}$ é uma topologia em A, chamada topologia relativa ou topologia em A induzida por τ. Com esta topologia, dizemos que A é um *subespaço* de X.

Proposição 2.2.24. *Seja Y um subespaço de um espaço topológico X. Então:*

(a) *$A \subset Y$ é aberto em Y se, e somente se, $A = B \cap Y$ para algum B aberto em X.*
(b) *$F \subset Y$ é fechado em Y se, e somente se, $F = K \cap Y$ para algum K fechado em X.*
(c) *Se $S \subset Y$, então o fecho de S em Y coincide com $Y \cap \overline{S}$, sendo $\overline{S}$ o fecho de S em X.*

Demonstração. (a) É a própria Definição 2.2.23.
(b) F fechado em $Y \Leftrightarrow Y \backslash F$ é aberto em $Y \Leftrightarrow$ pelo item (a) $Y \backslash F = A \cap Y$, para algum A aberto de X. Pela definição de fechado em X, existe K fechado de X tal que $A = X \backslash K$. Como, por igualdade de conjuntos, $F = Y \cap K$, temos o resultado.
(c) Segue imediatamente do item (b) pelo fato de $\overline{S}$ ser o menor fechado de X que contém S. De fato, isto implica que $Y \cap \overline{S}$ é o menor fechado de Y que contém S. ∎

2.3 VIZINHANÇAS DE UM PONTO E BASE TOPOLÓGICA

Definição 2.3.1. Uma *vizinhança* de um elemento x do espaço topológico X é um subconjunto U de X que contém um aberto V contendo x, isto é, $x \in V \subset U$. A coleção $\mathcal{U}_x$ de todas as vizinhanças de x é chamada de *sistema de vizinhanças* de x.

Observação 2.3.2. Seja X um espaço topológico e $x \in X$. Todo aberto $A \subset X$ que contém x é uma vizinhança de x. É imediato da Definição 2.3.1 que se $\mathcal{C}$ é uma vizinhança de x em X, então $x \in \operatorname{int}(\mathcal{C})$.

Exemplo 2.3.3. Considere o espaço métrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ e o conjunto $\mathcal{V} = (a, b] \cup \{c\}$ com $c > b$. Se $x \in (a, b)$ então $\mathcal{V}$ é uma vizinhança de x. Entretanto, se $x = b$ ou $x = c$ ou $x \notin \mathcal{V}$, então $\mathcal{V}$ não é vizinhança de x.

Definição 2.3.4. Uma *base de vizinhanças* de um elemento x de um espaço topológico X é uma subcoleção $\mathcal{B}_x$ de $\mathcal{U}_x$ tal que cada $U \in \mathcal{U}_x$ contém algum aberto $V \in \mathcal{B}_x$. Neste caso, $\mathcal{U}_x$ está determinado por $\mathcal{B}_x$ da seguinte forma:

$$\mathcal{U}_x = \{U \subset X : V \subset U \text{ para algum } V \in \mathcal{B}_x\}.$$

Os elementos de $\mathcal{B}_x$ são chamados de vizinhanças básicas de x.

Exemplo 2.3.5. Considere M um espaço métrico. Todo ponto x possui uma base de vizinhanças de bolas abertas $B(x, \frac{1}{n})$, de centro x e raio $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. De fato, sendo V uma vizinhança de x, temos que $x \in \mathrm{int}(V)$. Como $\mathrm{int}(V)$ é um aberto, temos que $B(x, \epsilon) \subset \mathrm{int}(V)$, para algum $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Podemos escolher $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal modo que $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Assim, $B(x, \frac{1}{n_0}) \subset B(x, \epsilon)$. Definindo, $\mathcal{B}_x = \{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$, temos que $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x.

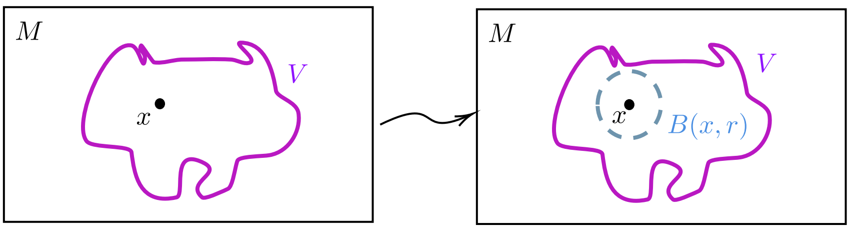

Figura 9 – Bola aberta $B(x, r)$ contida numa vizinhança V de x.

Definição 2.3.6. Uma *base topológica*, ou simplesmente *base*, do espaço topológico (X, τ) é uma subcoleção $\mathcal{B}$ de τ tal que todo conjunto aberto pode ser escrito como uma união de elementos de $\mathcal{B}$.

Exemplo 2.3.7. As bolas abertas de um espaço métrico M formam uma base para M. Com efeito, como bolas abertas são subconjuntos abertos de

M, pelo Exemplo 2.1.15, toda reunião de bolas abertas é um aberto de M. Além disso, se $A \subset M$ for aberto, para cada $x \in A$ existe uma bola aberta B_x com $\{x\} \subset B_x \subset A$. Logo, $A \subset \bigcup_{x \in A} B_x \subset A$, o que mostra ser $A = \bigcup_{x \in A} B_x$, uma reunião de bolas abertas.

Proposição 2.3.8. *Uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos abertos do espaço topológico X é uma base para X se, e somente se, para todo aberto $A \subset X$ e todo $x \in A$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ uma base para X e A aberto. Logo, podemos escrever $A = \bigcup_{i \in I} B_i$, para certos $B_i \in \mathcal{B}$. Dado $x \in A$, existe $i_0 \in I$ tal que $x \in B_{i_0} \subset A$. Reciprocamente, suponha que para todo aberto A de X e $x \in A$, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset A$. Logo, $A = \bigcup_{x \in A} B_x$. Portanto, $\mathcal{B}$ é uma base para X. ∎

Corolário 2.3.9. *Uma coleção $\mathcal{B}$ de abertos do espaço topológico X é uma base para X se, e somente se, $\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ é uma base de vizinhanças de cada $x \in X$.*

Demonstração. Segue imediatamente da Proposição 2.3.8. ∎

O próximo resultado mostra que a partir de uma determinada coleção de conjuntos podemos formar uma topologia para um conjunto X.

Teorema 2.3.10. *Seja $\mathcal{B}$ uma coleção de subconjuntos de um conjunto X tais que valem as seguintes propriedades:*

(a) *Para cada $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$;*
(b) *Se $x \in B_1 \cap B_2$, onde $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, então existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.*

Então $\mathcal{B}$ é uma base de uma topologia em X. Neste caso, os abertos são precisamente as uniões dos elementos de $\mathcal{B}$ mais o conjunto vazio.

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ uma coleção com as propriedades acima. Consideremos a coleção τ de todos os subconjuntos $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ de X, que se exprimem como uma reunião de conjuntos $B_\lambda \in \mathcal{B}$, e mais o conjunto vazio $\emptyset$. Em virtude de (a), a reunião de todos os $B \in \mathcal{B}$ é X, logo, $X \in \tau$. Pela própria definição de τ, é claro que a reunião de uma família qualquer de elementos de τ ainda pertence a τ. Finalmente, se $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ e $A' = \bigcup_{\mu \in \Lambda} B_\mu$ pertencem a τ, então $A \cap A' = \bigcup_{\lambda, \mu \in \Lambda} (B_\lambda \cap B_\mu)$. A propriedade (b) diz que cada $B_\lambda \cap B_\mu$ é reunião de conjuntos pertencentes a $\mathcal{B}$. Logo, $A \cap A'$ é reunião de conjuntos pertencentes a $\mathcal{B}$. Assim, verifica-se que τ é uma topologia em X, que admite $\mathcal{B}$ como base. ■

Algumas considerações sobre vizinhanças e base num subespaço Y de um espaço topológico X são interessantes:

- Se $x \in Y$, então $V \subset X$ é uma vizinhança de x em Y se, e somente se, $V = U \cap Y$ para alguma vizinhança U de x em X.
- Se $x \in Y$ e $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças para x em X, então $\{B \cap Y : B \in \mathcal{B}_x\}$ é uma base de vizinhanças para x em Y.
- Se $\mathcal{B}$ é uma base de X, então $\{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ é base de Y.

A verificação dos três itens acima é imediata ao analisarmos as definições de subespaço, de vizinhança e de base.

2.4 FUNÇÕES CONTÍNUAS

Comecemos definindo funções contínuas entre espaços métricos:

Definição 2.4.1. Sejam $f : M \to N$ uma aplicação de um espaço métrico M num espaço métrico N e a um ponto de M. Diz-se que f é *contínua no ponto a* quando, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d_M(x, a) < \delta$ implique

$d_N(f(x), f(a)) < \epsilon$. Uma função f é dita *contínua* se for contínua em todos os pontos $a \in M$.

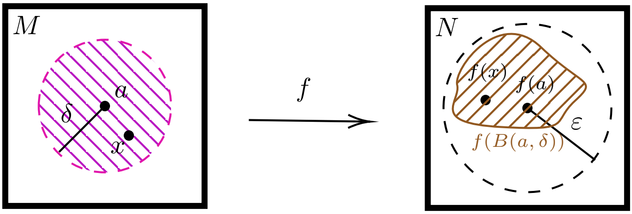

Figura 10 – Diagrama de uma função contínua f entre espaços métricos.

Em outras palavras, f é contínua em a se para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\epsilon)$, ou, de forma equivalente, $B(a,\delta) \subset f^{-1}(B(f(a),\epsilon))$, sendo $f^{-1}(X) := \{x \in M : f(x) \in X\}$, com $X \subset N$.

Exemplo 2.4.2. Uma classe muito importante de funções contínuas é a de *contrações fracas*, isto é, dados $x, y \in M$ tem-se que $d_N(f(x), f(y)) \leq d_M(x, y)$. Com efeito, dados $\epsilon > 0$ e $x, y \in M$ com $d_M(x, y) < \delta$ e tomando $\delta = \epsilon$ temos $d_N(f(x), f(y)) \leq d_M(x, y) < \delta = \epsilon$. Em particular, se fixarmos y temos que f é contínua no ponto y. Vejamos alguns exemplos de contrações fracas:

(a) As aplicações *constantes* $f : M \to N$, com $f(x) = c \in N$ para todo $x \in M$.

(b) As *imersões isométricas*: dado qualquer $x, y \in M$ tem-se que $d_M(x, y) = d_N(f(x), f(y))$. Em particular, quando a imersão isométrica for sobrejetora, a chamamos de *isometria*.

(c) As *inclusões* $i : X \to M$, onde X é um subespaço de M e $i(x) = x$ para todo $x \in X$.

(d) Seja $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ com alguma das métricas do Exemplo 2.1.8. As *projeções* $p_i : M \to M_i$, $1 \leq i \leq n$, de um produto cartesiano de espaços métricos em um de seus fatores. A i-ésima projeção é definida por $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Escolhendo uma das métricas citadas temos que as projeções são contrações fracas em M.

(e) A métrica $d : M \times M \to \mathbb{R}$, de um espaço métrico M, é uma contração fraca do espaço métrico $M \times M$ no espaço métrico $\mathbb{R}$. Desde que tomemos em $M \times M$ a métrica $d_{M\times M}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2)$. Daí,

$$\begin{aligned}|d(x_1, x_2) - d(y_1, y_2)| &= |d(x_1, x_2) - d(y_1, x_2) + d(y_1, x_2) - d(y_1, y_2)| \\ &\leq |d(x_1, x_2) - d(y_1, x_2)| + |d(y_1, x_2) - d(y_1, y_2)| \\ &\leq d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2) \\ &= d_{M\times M}((x_1, x_2), (y_1, y_2))\end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade decorre da desigualdade triangular e a segunda da Proposição 2.1.5.

Definição 2.4.3. Diz-se que uma função $f : M \to N$ entre espaços métricos é *uniformemente contínua* se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_N(f(x), f(y)) < \epsilon$ sempre que $x, y \in M$ e $d_M(x, y) < \delta$.

Uma função uniformemente contínua é contínua. De fato, tomando $a \in M$ e dado $\varepsilon > 0$ quaisquer tem-se que, para um determinado $\delta > 0$, $d_M(x, a) < \delta$ implique $d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Por outro lado, nem toda função contínua é uniformemente contínua. O leitor pode verificar que a função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ é um exemplo em [5, 21, p. 165].

Definição 2.4.4. Diz-se que uma função $f : M \to N$ entre espaços métricos é *lipschitziana* se existe uma constante $L > 0$ tal que $d_N(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_M(x, y)$ para todos $x, y \in M$.

Em particular, quando $L \in (0, 1]$ temos que uma função lipschitziana f é uma contração fraca. No caso geral, podemos constar que f é uniformemente contínua. Tomando $\delta = \epsilon/L$, tem-se que para $d_M(x, y) < \delta$, com $x, y \in M$, implica $d_N(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_M(x, y) < L \cdot \epsilon/L = \epsilon$.

Essas duas últimas definições têm maior destaque a partir da Seção 3.3. Mas, como as funções uniformemente contínuas e lipschitzianas são classes de funções muito importantes em espaços métricos, as destacamos previamente aqui.

A próxima definição é uma generalização do conceito de funções contínuas para espaços topológicos quaisquer.

Definição 2.4.5. Uma função $f : X \to Y$ entre espaços topológicos é *contínua* se $f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}$ for aberto em X para todo aberto A em Y.

Vejamos que a Definição 2.4.5 é equivalente à Definição 2.4.1 no contexto de espaços métricos. Com efeito, seja f contínua pela Definição 2.4.1 e $A' \subset N$ um aberto. Mostremos que $A = f^{-1}(A')$ é aberto em M. De fato, para cada ponto $a \in A$, $f(a) \in A'$. Sendo A' aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(f(a), \epsilon) \subset A'$. Sendo f contínua no ponto a, existe um $\delta > 0$ tal que $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \boldsymbol{\epsilon}) \subset A'$. Mas $f(B(a, \delta)) \subset A'$ significa que $B(a, \delta) \subset f^{-1}(A') = A$. Logo, A é um aberto pois, contendo um ponto a, contém também uma bola $B(a, \delta)$. Reciprocamente, suponha que f é contínua de acordo com a Definição 2.4.5. Seja $a \in M$ um ponto qualquer. Mostramos que f é contínua no ponto a. Ora, toda bola $B(f(a), \epsilon) = A'$ é um aberto de N contendo $f(a)$. Logo, $A = f^{-1}(A')$ é um aberto de M contendo a. Portanto, existe uma bola $B(a, \delta) \subset A$, isto é, $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon)$.

A equivalência entre as Definições 2.4.1 e 2.4.5 para espaços métricos nos diz que o conhecimento dos subconjuntos abertos determina todas as aplicações contínuas. Dessa forma, definir para espaços topológicos mais gerais a continuidade a partir da Definição 2.4.5 se faz muito conveniente.

Exemplo 2.4.6. Considere S um conjunto não vazio qualquer e X um espaço topológico. Seja $f : S \to X$. A coleção τ das imagens inversas $f^{-1}(A)$ dos abertos $A \subset X$ pela aplicação f é uma topologia em S, conforme resulta imediatamente das relações $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda) = f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)$ e $f^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(A_n) = f^{-1}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$. A topologia τ chama-se a *topologia induzida em S pela aplicação $f : S \to X$*. Notemos que f é contínua nessa topologia, contudo, se removermos algum elemento de τ, f

perde a continuidade. Isso nos diz que τ é a topologia menos fina tal que f é contínua.

A próxima proposição faz uma caracterização da função identidade com a inclusão de topologias.

Proposição 2.4.7. *Sejam $\tau, \widetilde{\tau}$ duas topologias de um conjunto não vazio X. Para que τ seja mais fina do que $\widetilde{\tau}$ é necessário e suficiente que a aplicação identidade $i : (X, \tau) \to (X, \widetilde{\tau})$ seja contínua.*

Demonstração. Suponha que $\widetilde{\tau} \subset \tau$. Seja $A \subset (X, \widetilde{\tau})$ aberto, tem-se então que $i^{-1}(A) = A \subset X$ aberto em (X, τ) pois $A \in \widetilde{\tau} \subset \tau$. Logo, i é contínua. Reciprocamente, seja $i : (X, \tau) \to (X, \widetilde{\tau})$ contínua, então dado um $A \in \widetilde{\tau}$ tem-se que $i^{-1}(A) = A \subset X$ aberto em (X, τ), ou seja, $A \in \tau$. ∎

Proposição 2.4.8. *Sejam X, Y espaços topológicos. Então, $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}(F)$ é fechado em X, para todo fechado F em Y.*

Demonstração. Seja $f : X \to Y$ contínua. Dado $F' \subset Y$ fechado, $Y \backslash F'$ é aberto em Y. Logo, $f^{-1}(Y \backslash F') = X \backslash f^{-1}(F')$ é aberto e portanto $f^{-1}(F')$ é fechado em X. Reciprocamente, se a imagem inversa de cada fechado em Y for um fechado em X, dado um aberto $A' \subset Y$, $f^{-1}(Y \backslash A') = X \backslash f^{-1}(A')$ é fechado em X, donde $f^{-1}(A')$ é aberto. Logo, f é contínua. ∎

Proposição 2.4.9. *Sejam M, N espaços métricos. Então, $f : M \to N$ é contínua se, e somente se, $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ em N para toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em M tal que $x_n \longrightarrow x \in M$.*

Demonstração. Seja f contínua no ponto a. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d_M(x, a) < \delta$ implica $d_N(f(x), f(a)) < \epsilon$. Se $x_n \longrightarrow a$, existe n_0 tal que $n > n_0$ implica $d(x_n, a) < \delta$. Logo, $n > n_0$ implica $d(f(x_n), f(a)) < \epsilon$. Portanto, $f(x_n) \longrightarrow f(a)$. Reciprocamente, se f não for contínua no ponto a, existe $\epsilon > 0$ tal que, qualquer que seja $\delta > 0$, há sempre pontos $x \in M$ tais que $d_M(x, a) < \delta$ mas $d_N(f(x), f(a)) \geq \epsilon$. Tomando δ sucessivamente igual a $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ obtemos os pontos $x_1, x_2, x_3, \ldots$ tais que $d(x_n, a) < 1/n$ e $d(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon$. Em suma, supondo que f não é contínua no ponto a, é possível obter uma sequência (x_n) convergindo para a e tal que $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ não converge para $f(a)$. ■

Observação 2.4.10. A necessidade de que $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ para que f seja contínua se estabelece para quaisquer espaços topológicos X, Y. Por outro lado, a recíproca é falsa dependendo dos espaços X e Y. Mais precisamente, se cada ponto $x \in X$ possuir um sistema de vizinhanças enumeráveis e Y for espaço de Hausdorff, então a condição é suficiente [7, Proposição 5*, p. 128].

Proposição 2.4.11. *Se f: $X \to Y$ e $g: Y \to Z$ são funções contínuas entre espaços topológicos, então a função composta $g \circ f : X \to Z$ é contínua.*

Demonstração. Sendo g contínua, temos que dado um aberto U em Z acarreta $g^{-1}(U)$ ser aberto em Y. Por sua vez, como f é contínua e $g^{-1}(U)$ ser aberto em Y, temos que $f^{-1}(g^{-1}(U))$ é aberto em X. Ou seja, $f^{-1} \circ g^{-1}(U) = (g \circ f)^{-1}(U)$ é aberto em X. ■

Em particular, para espaços métricos M, N, K, a composição de duas funções contínuas $f : M \to N$ e $g : N \to K$ também é uma função contínua e se valida pelas seguintes implicações: $d_M(x, a) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(a)) < \lambda \Rightarrow d_K(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon$.

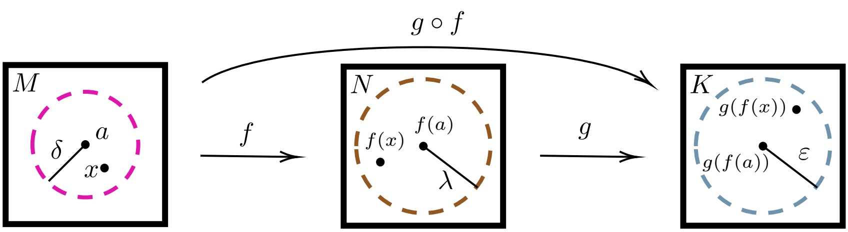

Figura 11 – Diagrama de função composta contínua $g \circ f$ para espaços métricos.

Corolário 2.4.12. *Se A for subespaço do espaço topológico X e a função $f : X \to Y$ for contínua, então a restrição de f a A, $f|_A : A \to Y$, é contínua.*

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "f\circ i"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Basta verificar que $f|_A = f \circ i$, em que $i : A \to X$ é a função inclusão e é claramente contínua. ■

Definição 2.4.13. Um *homeomorfismo* entre os espaços topológicos X e Y é uma função $f : X \to Y$ que é contínua, bijetora e tem inversa contínua.

Exemplo 2.4.14. Toda isometria $f : M \to N$ é um homeomorfismo entre dois espaços métricos M e N. De fato, pelo Exemplo 2.4.2 f é contínua e, por definição de isometria, sobrejetora. Note também que f é injetora, pois, se $f(x) = f(y)$, então $0 = d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y)$ se, e somente se, $x = y$. Além disso, f^{-1} é uma isometria. De fato, temos que $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$, para todo $y \in N$. Daí, sendo $f : M \to N$ uma isometria, segue que

$$d_N(y_1, y_2) = d_N(f(f^{-1}(y_1)), f(f^{-1}(y_2))) = d_M(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2))$$

para quaisquer que sejam $y_1, y_2 \in N$. Portanto, f^{-1} é uma isometria e, consequentemente, contínua pelo Exemplo 2.4.2. Outra propriedade interessante de uma isometria é que ela preserva a completude entre espaços métricos. Com efeito, suponha que M seja completo e exista uma isometria $f : M \to N$. Considere uma sequência de Cauchy $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ em N. Como $f^{-1} : N \to M$ é uma isometria, temos que, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n > n_0$ ocorre $d_M(f^{-1}(y_m), f^{-1}(y_n)) = d_N(y_m, y_n) < \epsilon$. Segue que a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left(f^{-1}(y_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em M, consequentemente existe $x \in M$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Seja $f(x) = y$, temos que $y_n \longrightarrow y$. De fato, $d_N(y_n, y) = d_M(f^{-1}(y_n), f^{-1}(y)) = d_M(x_n, x) < \epsilon$, sempre que $n > n_0$.

Observação 2.4.15. Uma reformulação interessante de função contínua a partir do conceito de vizinhanças é a seguinte: sejam X, Y espaços topológicos. f é contínua quando para todo $x \in X$ e toda vizinhança U de $f(x)$ em Y existe uma vizinhança V de x em X tal que $f(V) \subset U$.

2.5 REDES

Em espaços métricos, o conceito de convergência é geralmente atribuído a utilização de sequências. Contudo, quando queremos trabalhar com espaços topológicos quaisquer, acabamos tendo alguns problemas como a impossibilidade de caracterizar propriedades topológicas através de sequências. Por exemplo, as Proposições 2.2.21 e 2.4.9 não são válidas para espaços topológicos quaisquer.

Para contornar esse problema, abordaremos um conceito de convergência em que o objeto é uma rede, que é uma generalização do conceito de sequências.

Definição 2.5.1. Um conjunto *dirigido* é um par $(\Lambda, \preceq)$ em que $\preceq$ é uma *direção* no conjunto Λ, isto é, é uma relação em Λ tal que:
(a) $\lambda \preceq \lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$;
(b) Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$, $\lambda_1 \preceq \lambda_2$ e $\lambda_2 \preceq \lambda_3$, então $\lambda_1 \preceq \lambda_3$;
(c) Para todos $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, existe $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que $\lambda_1 \preceq \lambda_3$ e $\lambda_2 \preceq \lambda_3$.

Definição 2.5.2. Uma *rede* em um conjunto X é uma função $P : \Lambda \to X$, em que Λ é um conjunto dirigido. Usualmente se denota $P(\lambda)$ por x_λ, e neste caso nos referimos à rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Exemplo 2.5.3. Considere $\Lambda = \mathbb{N}$ e $P : \mathbb{N} \to X$ uma função. Considerando a ordem $\preceq$ no conjunto Λ como a boa ordenação $\leq$ dos naturais, temos que P é uma rede, ou seja, toda sequência é uma rede.

Definição 2.5.4. Dizemos que a rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ no espaço topológico X *converge para* $x \in X$, e, neste caso, escrevemos $x_\lambda \longrightarrow x$, se para cada vizinhança U de x existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$ para todo $\lambda \succeq \lambda_0$.

Exemplo 2.5.5. Sejam X um espaço topológico, $x \in X$ e $\mathcal{B}_x$ uma base de vizinhanças de x. A relação de continência invertida $U_1 \preceq U_2 \iff U_2 \subset U_1$ torna $\mathcal{B}_x$ um conjunto dirigido. Escolhendo $x_U \in U$, para cada $U \in \mathcal{B}_x$, temos uma rede $(x_U)_{U \in \mathcal{B}_x}$ em X que converge para x.

Para comprovar o benefício de se utilizar redes, os itens da proposição a seguir garantem que redes descrevem a topologia de um espaço topológico.

Proposição 2.5.6. *Sejam X, Y espaços topológicos, $S \subset X$ e $x \in X$.*
(a) (Unicidade do limite) *X é um espaço de Hausdorff se, e somente se, toda rede em X converge para, no máximo, um ponto.*
(b) *$x \in \overline{S}$ se, e somente se, existe uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ em S tal que $x_\lambda \longrightarrow x$.*
(c) (Caracterização de fechados) *S é fechado se, e somente se, para toda rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ em S com $x_\lambda \longrightarrow x$, tem-se $x \in S$.*
(d) *Uma função $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, $f(x_\lambda) \longrightarrow f(x)$ para toda rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ em X tal que $x_\lambda \longrightarrow x \in X$.*

Demonstração. (a) Se X for um espaço de Hausdorff, então pontos distintos x e y possuem abertos U, V disjuntos, respectivamente, que os contém. Suponha que uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ convirja para x. Então, a partir de um índice $\lambda_0 \in \Lambda$ acarreta que para todo $\lambda \succeq \lambda_0$ temos $x_\lambda \in U$ e $x_\lambda \notin V$, segue que uma rede não pode convergir para dois pontos distintos. Reciprocamente, suponha que X não for Hausdorff. Então existem dois pontos distintos x e y tais que $V \cap W \neq \emptyset$, para quaisquer que sejam as vizinhanças V, W de x, y respectivamente. Consideremos os sistemas de vizinhanças $\mathcal{U}_x$ de x e $\mathcal{V}_y$ de y, e a direção, em $\mathcal{U}_x \times \mathcal{V}_y$, dada por $(U_1, V_1) \preceq (U_2, V_2) \Leftrightarrow U_2 \subset U_1$ e $V_2 \subset V_1$. Definamos a rede $P : \mathcal{U}_x \times \mathcal{V}_y \to X$ por $P(U, V) = x_{U,V}$, com $x_{U,V}$ um ponto escolhido em $U \cap V$. Provamos, em seguida, que essa rede converge para x e y, concomitantemente. De fato, dadas as vizinhanças arbitrárias U_0 de x e V_0 de y, para $(U, V) \succeq (U_0, V_0)$, teremos $x_{U,V} \in U \cap V \subset U_0 \cap V_0$, ou seja, $x_{U,V} \longrightarrow x$ e $x_{U,V} \longrightarrow y$.
(b) A suficiência foi verificada na Proposição 2.2.21. Para garantir a necessidade, seja $a \in \overline{S}$. Para cada vizinhança U de a, tomemos $x_U \in U \cap S$. A

rede $(x_U)_{U\in\mathcal{B}_x}$, com a direção descrita no Exemplo 2.5.5, converge para a.
(c) Consequência imediata do item (b) e da Proposição 2.2.20(c).
(d) Se f é contínua em x,[2] então dada uma vizinhança V de $f(x)$, existe uma vizinhança U de A com $f(U) \subset V$. Desde que $x_\lambda \longrightarrow x$, existe λ_0 tal que se $\lambda \succeq \lambda_0$, então $x_\lambda \in U$. Logo, $f(x_\lambda) \in V$. Então, $f(x_\lambda) \longrightarrow f(x)$. Reciprocamente, se f não for contínua em x, então existirá uma vizinhança V de $f(x)$ com a seguinte propriedade: para cada vizinhança U de x, existe $x_U \in U$ tal que $f(x_U)$ não está em V. Considere a rede $(x_U)_{U\in\mathcal{B}_x}$. Por construção, x_U converge para x, enquanto que $(f(x_U))_{U\in\mathcal{B}_x} \not\longrightarrow f(x)$. ■

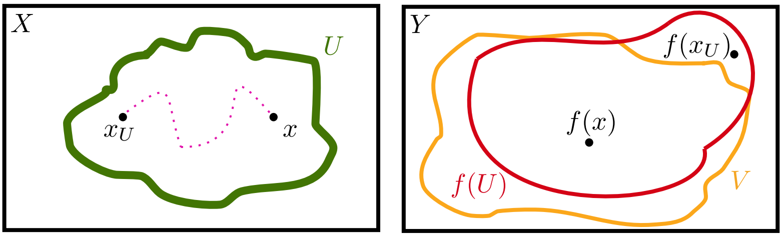

Figura 12 – Ideia da demonstração da reciproca da Proposição 2.5.6(d).

2.6 TOPOLOGIA GERADA POR UMA FAMÍLIA DE FUNÇÕES

No Exemplo 2.4.6 verificamos a topologia induzida em um conjunto S por uma função $f : S \to X$, em que X é um espaço topológico. Essa topologia tem a propriedade de ser a topologia menos fina tal que uma função f seja contínua nesse espaço. Veremos agora que essa mesma ideia pode ser aplicada para uma família de funções $(f_i)_{i\in I}$, com $f_i : X \to Y_i$ e Y_i é um espaço topológico, para cada $i \in I$.

[2] Dizer-se que f é *contínua no ponto* x do espaço topológico X é afirmar que para cada aberto $B \subset Y$, com $f(x) \in B$, existe um aberto $A \subset X$, com $x \in A$, tal que $f(A) \subset B$. O leitor pode verificar em [7, Proposição 8, p. 63] que f ser contínua e ser contínua em todo ponto x são asserções equivalentes.

Sejam X um conjunto não vazio, $(Y_i)_{i\in I}$ uma família de espaços topológicos e $(f_i)_{i\in I}$ uma família de funções $f_i : X \longrightarrow Y_i$ para cada $i \in I$. A ideia é definir em X a topologia menos fina que torna todas as funções f_i contínuas. Para isso, considere, para cada $i \in I$ e cada aberto A_i em Y_i, o conjunto

$$f_i^{-1}(A_i) = \{x \in X : f_i(x) \in A_i\}.$$

Seja $\mathcal{B}$ a família dos subconjuntos de X que podem ser escritos como interseções finitas de conjuntos da forma $f_i^{-1}(A_i)$. Consideremos o conjunto τ das uniões dos elementos de $\mathcal{B}$. A proposição a seguir deixa claro que τ é uma topologia:

Proposição 2.6.1. *A família $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia τ em X, em que os elementos de τ são uniões de elementos de $\mathcal{B}$.*

Demonstração. Podemos utilizar os itens do Teorema 2.3.10 para mostrar que $\mathcal{B}$ é de fato uma base para τ.
(a) Dado $x \in X$, considere um aberto $V_i \subset Y_i$ que contém $f_i(x)$. Assim, $f^{-1}(V_i)$ contém x e $f_i^{-1}(V_i) \in \mathcal{B}$ pela definição de $\mathcal{B}$.
(b) Considere $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$. Pela definição de $\mathcal{B}$ temos que existem abertos $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ e $A_{j_1}, \ldots, A_{j_m}$ de $Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_n}$ e $Y_{j_1}, \ldots, Y_{j_m}$, respectivamente, tais que $B_1 = f_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap \cdots \cap f_{i_n}^{-1}(A_{i_n})$ e $B_2 = f_{j_1}^{-1}(A_{j_1}) \cap \cdots \cap f_{j_m}^{-1}(A_{j_m})$. Como a interseção de duas interseções finitas é uma interseção finita, temos que $B = B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. Consequentemente $x \in B \subset B_1 \cap B_2$. ■

Definição 2.6.2. A topologia τ da Proposição 2.6.1 é chamada de *topologia gerada pela família de funções $(f_i)_{i\in I}$*.

As propriedades da próxima proposição abrangem grande parte do que foi estudado anteriormente. Esses resultados são de grande valia quando introduzimos o estudo de topologias fracas em espaços vetoriais normados, tema do Capítulo 4. Ademais, é interessante verificar que, neste momento, estamos estudando essa topologia em espaços topológicos Y_i arbitrários. Isso significa dizer, com exceção do item (g), que os resultados a seguir não dependem de qual topologia estivermos trabalhando em cada Y_i.

Proposição 2.6.3. *Seja τ a topologia em X gerada pela família de funções $(f_i)_{i\in I}$. Então:*

(a) *Para cada $i \in I$ a função $f_i : X \to Y_i$ é contínua.*
(b) *τ é a menor topologia em X tal que vale (a).*
(c) *τ é a interseção de todas as topologias em X em relação às quais todas as f_i são contínuas.*
(d) *Para cada $x \in X$, os conjuntos da forma $f_{i_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f_{i_n}^{-1}(U_n)$ onde $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_n \in I$ e U_j é vizinhança de $f_{i_j}(x)$, $j = 1, \ldots, n$, constituem uma base de vizinhanças para x.*
(e) *Seja $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em X. Então $x_\lambda \longrightarrow x$ em (X, τ) se, e somente se, $f_i(x_\lambda) \longrightarrow f_i(x)$ em Y_i para todo $i \in I$.*
(f) *Sejam Z um espaço topológico e $f : Z \to (X, \tau)$. Então f é contínua se, e somente se, $f_i \circ f : Z \to Y_i$ é contínua para todo $i \in I$.*
(g) *Suponha que todos os Y_i sejam espaços de Hausdorff. Então a topologia τ é de Hausdorff se, e somente se, a família $(f_i)_{i\in I}$ separa pontos de x, isto é, para todos $x, y \in X, x \neq y$, existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$.*

Demonstração. (a) Considere um aberto B_i de Y_i, seja qual for $i \in I$, então $f_i^{-1}(B_i)$ é aberto em X por definição, logo f_i é contínua.
(b) Seja $\widetilde{\tau}$ uma topologia em X tal que todas as funções f_i sejam contínuas. Dado A_i aberto de Y_i, temos que $f_i^{-1}(A_i)$ está em $\widetilde{\tau}$. Pela propriedade de interseção finita de topologia, temos que todos os elementos de $\mathcal{B}$, como descritos na Proposição 2.6.1, estão em $\widetilde{\tau}$. Pela propriedade de união arbitrária em topologia, temos que todos conjuntos que são uma união arbitrária de elementos de $\mathcal{B}$ estão em $\widetilde{\tau}$. Logo, pela Proposição 2.6.1, $\tau \subset \widetilde{\tau}$.
(c) Segue do item (b) e do fato que a interseção de topologias ser uma topologia (veja Exemplo 2.2.4).
(d) Seja $x \in X$ e $\mathcal{U}_x$ a coleção de todas as vizinhanças de x. Seja $\mathcal{B}_x$ a coleção dos conjuntos da forma $W = f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap f_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$ em que $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_n \in I$ e U_j é vizinhança de $f_{i_j}(x)$, $j = 1, \ldots, n$. Seja $V \in \mathcal{U}_x$.

Logo,

$$V = \bigcup_{i\in I}\left[\bigcap_{t=i_1}^{i_n} f_t^{-1}(U_t)\right]_i \cup A,$$

em que U_t são vizinhanças de $f_t(x)$ e $A \subset X$ é um conjunto arbitrário. Daí, conclui-se que $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x, pois $W \subset V$.

(e) A ida foi estabelecida na Proposição 2.5.6(d). Reciprocamente, suponha que $f_i\,(x_\lambda) \longrightarrow f_i(x)$ em Y_i, para todo $i \in I$. Seja U aberto de X que contém x, então existem $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$ abertos de $Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_k}$, respectivamente, que contêm $f(x)$ tal que a interseção $f^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap f^{-1}(U_{i_k})$ está contido em U. Pela noção de convergência, e finitude $i_1, \ldots, i_k$, existe λ_0 tal que se $\lambda \succeq \lambda_0$, então $f(x_\lambda)$ está na interseção $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}$. Daí,

$$x_\lambda \in f^{-1}(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}) = f^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap f^{-1}(U_{i_k}).$$

Portanto, x_λ está em U. Pela arbitrariedade de U, temos que $x_\lambda \longrightarrow x$.

(f) A ida segue da Proposição 2.4.11. Reciprocamente, suponha $f_i \circ f$: $Z \longrightarrow Y_i$ contínua, para todo $i \in I$. Então, dado $B_i \in Y_i$ aberto, temos que $f^{-1} \circ f_i^{-1}(B_i) = f^{-1}(f_i^{-1}(B_i))$ é aberto em Z, para cada $i \in I$. Queremos que dado um $A \subset X$ aberto, $f^{-1}(A)$ seja aberto em Z. Como os abertos de X são da forma $\displaystyle\bigcup_{i\in I}\left[\bigcap_{t=i_1}^{i_n} f_t^{-1}(B_t)\right]_i$, temos que

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}\left[\bigcap_{t=i_1}^{i_n} f_t^{-1}(B_t)\right]_i\right) &= \bigcup_{i\in I} f^{-1}\left(\left[\bigcap_{t=i_1}^{i_n} f_t^{-1}(B_t)\right]_i\right) \\ &= \bigcup_{i\in I}\left[\bigcap_{t=i_1}^{i_n} f^{-1}\left(f_t^{-1}(B_t)\right)\right]_i \end{aligned}$$

é um aberto em Z pois é a união de uma interseção finita de abertos em Z. Consequentemente f é contínua.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[ur, "f_i"] \arrow[r, "f\circ f_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

(g) Suponha que $(f_i)_{i\in I}$ separe pontos. Logo, para $x \neq y$ tem-se, para algum $i \in I$, que $f_i(x) \neq f_i(y)$. Tome-se dois abertos U e V com $f_i(x) \in U$ e $f_i(y) \in V$ tais que $U \cap V = \emptyset$. Isto é possível pois Y_i é Hausdorff. Disso segue que $f_i^{-1}(U)$ e $f_i^{-1}(V)$ são abertos em E. Temos que $x \in f_i^{-1}(U)$ e $y \in f_i^{-1}(V)$. Observa-se que $f_i^{-1}(U) \cap f_i^{-1}(V) = f_i^{-1}(U \cap V) = f_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Segue que τ é Hausdorff. Reciprocamente, suponha que existam $x, y \in X$ tais que $f_i(x) = f_i(y)$ para todo $i \in I$. Seja U aberto em X que contenha x. Logo, existem $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$ abertos em $Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_k}$, respectivamente, tais que cada U_{i_j} contenha $f_{i_j}(x)$ e a interseção $f^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap f^{-1}(U_{i_k})$ está contido em U. Desde que $f_i(x) = f_i(y)$ para todo $i \in I$, temos y está na interseção $f^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap f^{-1}(U_{i_k})$. Logo y está em U. Portanto, concluímos que todo aberto que contém x também deve conter y. Isto nos diz que τ não é Hausdorff. ■

Observação 2.6.4. Na Proposição 2.6.3(e) utilizamos redes. Como não podemos garantir que a topologia gerada por uma família de funções é metrizável, isto é, uma topologia induzida por uma métrica, ou que possa ser uma topologia descrita através de sequências, não podemos fazer caracterizações a partir de sequências. Ao efetivarmos o uso de redes, podemos garantir que determinadas propriedades sejam obtidas, enquanto que para sequências não é possível. A Proposição 2.5.6 evidência essa necessidade.

2.7 COMPACIDADE

Definição 2.7.1. Um subconjunto K do espaço topológico X é dito *compacto* se para toda família $(A_i)_{i\in I}$ de abertos em X tal que $K \subset \bigcup_{i\in I} A_i$, existem $n \in \mathbb{N}$ e $i_1, \ldots, i_n \in I$ tais que $K \subset (A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n})$.[3] Além disso, se $K = X$, dizemos que K é um *espaço compacto*.

[3] A família $(A_i)_{i\in I}$ é chamada de *cobertura aberta* de K. Uma *subcobertura finita* da cobertura $(A_i)_{i\in I}$ é uma família $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k})$ tal que $A_{i_n} \in (A_i)_{i\in I}$, $1 \leq n \leq k$.

Exemplo 2.7.2. O exemplo mais comum de conjunto compacto é o intervalo $[a, b]$, $a < b$, do corpo dos reais $\mathbb{R}$ com a topologia usual.[4] Além disso, um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, K é fechado e limitado. Esse fato é, na verdade, o Teorema de Borel-Lebesgue, que pode ser verificado em [5, Teorema 10, p. 125].

Proposição 2.7.3. *Sejam K um espaço topológico e $F \subset K$. Se K é compacto e F é fechado, então F é compacto.*

Demonstração. Seja $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma cobertura aberta de F, daí $F \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. A família que consiste dos U_λ, $\lambda \in \Lambda$, e mais o conjunto $U = K\backslash F$, é uma cobertura aberta de K. Como K é compacto, existe uma cobertura finita $(U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n}, U)$ com $K = U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_n} \cup U$. Como nenhum ponto de F pode pertencer a U, tem-se necessariamente $F \subset U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_n}$, o que prova a compacidade de F. ∎

Proposição 2.7.4. *Sejam X espaço topológico e $K \subset X$. Se X for Hausdorff e K for compacto, então K é fechado.*

Demonstração. Seja $x \in X\backslash K$. Devemos obter um aberto $A \subset X$ tal que $x \in A$ e $A \cap K = \emptyset$. Pela definição de espaço de Hausdorff, para cada $y \in K$ existem abertos A_y contendo x, e B_y contendo y, tais que $A_y \cap B_y = \emptyset$. Obtém-se deste modo uma cobertura aberta $(B_y)_{y\in K}$ de K, $K \subset \bigcup_{y\in K} B_y$, da qual se pode extrair uma subcobertura finita $K \subset B_{y_1} \cup \dots \cup B_{y_n}$. Correspondentemente, definimos $A = A_{y_1} \cap \dots \cap A_{y_n}$. Vê-se que A é um aberto contendo x e nenhum ponto de A pode pertencer a K. ∎

Proposição 2.7.5. *Seja M um espaço métrico e $K \subset M$ compacto, então K é limitado.*

Demonstração. Considere a família $\mathcal{B} = (B(x_\lambda, r_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ de bolas abertas de centro x_λ e raio r_λ tais que $x_\lambda \in K$. Claramente $\mathcal{B}$ é uma cobertura

[4] A topologia usual do corpo dos reais $\mathbb{R}$ é a topologia que tem como base os intervalos abertos (a, b), com $a, b \in \mathbb{R}$.

aberta de K. Como K é compacto, existe um número finito de índices $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tais que $K \subset B(x_{\lambda_1}, r_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup B(x_{\lambda_k}, r_{\lambda_k})$. Seja $r = r_{\lambda_1} + \max_{2 \leq i \leq k} [d(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_i}) + r_{\lambda_i}]$. Temos que $K \subset B(x_{\lambda_1}, r)$. Portanto, K é limitado. ■

Definição 2.7.6. Sejam X espaço topológico e $K \subset X$. Se toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em K admitir uma subsequência convergente para um elemento de K, dizemos que K é *sequencialmente compacto.*

A próxima proposição desempenha um papel importante na determinação de um espaço ser compacto quando estivermos trabalhando na Seção 3.2 com espaços vetoriais normados de dimensão infinita.

Proposição 2.7.7. *Sejam X espaço topológico e $K \subset X$. Se X for um espaço métrico, então K é compacto se, e somente se, K for sequencialmente compacto.*

Demonstração. Seja K compacto e seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de elementos de K. Defina para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n := \{x_k : k \geq n\}$. Seja F_n o fecho de E_n. Mostremos, inicialmente, que $K \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) \neq \emptyset$. Suponha, por absurdo, que $K \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) = \emptyset$. Então $K \subset X \backslash \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X \backslash F_n$. Como os $X \backslash F_n$ são abertos, isso diz que $\{X \backslash F_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma cobertura aberta de K. Como K é compacto, existe uma quantidade finita de índices $n_1, \ldots, n_j$, com $n_1 < n_2 < \ldots < n_j$, tal que $K \subset X \backslash F_{n_1} \cup \cdots \cup X \backslash F_{n_j}$. Porém, como $X \backslash F_{n_1} \cup \cdots \cup X \backslash F_{n_j} \subset X \backslash F_{n_j}$, isso implica que $K \cap E_{n_j} \subset K \cap F_{n_j} = \emptyset$, que é uma contradição, já que $E_{n_j} \subset K$. Já que $K \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \right)$ é não-vazio, podemos tomar um ponto a nesse conjunto. Logo, $a \in K$ assim como $a \in F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como F_n é o fecho de E_n, pela Proposição 2.2.21 existe uma sequência de pontos de E_n que converge para a na métrica d. Isto prova que existe uma subsequência da sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge para $a \in K$, provando que K é sequencialmente compacto. Reciprocamente, seja $(U_i)_{i \in I}$

uma cobertura aberta de M. Afirmemos primeiramente que existe $r > 0$ tal que, para cada $y \in M$, é possível encontrar $i \in I$ de modo que $B(y, r) \subset U_i$. Suponhamos que não. Nesse caso, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in M$ de forma que $B\left(y_n, \frac{1}{n}\right) \cap (M \backslash U_i) \neq \emptyset$, para todo $i \in I$. Por hipótese, existem uma subsequência $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ e $b \in M$ tais que $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = b$. Desde que $(U_i)_{i\in I}$ é cobertura de abertos para M e $b \in M$, existe i_0 e $\epsilon > 0$ tal que $B(b, \epsilon) \subset U_{i_0}$. Note que existe $j \in \mathbb{N}$, com $\frac{1}{n_j} < \frac{\epsilon}{2}$, tal que $d(y_{n_k}, b) < \frac{\epsilon}{2}$ sempre que $n_k \in \mathbb{N}'$ e $k \geq j$. Portanto, seguem imediatamente as inclusões $B\left(y_{n_j}, \frac{1}{n_j}\right) \subset B(b, \epsilon) \subset U_{i_0}$, o que é um absurdo. Agora, afirmemos em seguida que, dado $s > 0$, existem $j \in \mathbb{N}$ e $y_1, \ldots, y_j \in M$ tais que $M = B(y_1, s) \cup \cdots \cup B(y_j, s)$. Então, suponha que não. Tomemos $b_1 \in M$. Assim, $M \neq B(b_1, s)$ e podemos encontrar $b_2 \in M$ tal que $d(b_2, b_1) \geq s$. Analogamente, $M \neq B(b_1, s) \cup B(b_2, s)$ donde existe $b_3 \in M$ tal que $d(b_3, b_1) \geq s$ e $d(b_3, b_2) \geq s$. Prosseguindo dessa forma, definimos indutivamente uma sequência $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ em M satisfazendo $d(b_m, b_n) \geq s$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, com $m \neq n$. Logo, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ não possui subsequências convergentes, já que estas não são sequências de Cauchy. No entanto, isto contradiz que M é sequencialmente compacto. Mostremos, por fim, que M é compacto. De fato, aplicando a segunda afirmação com o número real $r > 0$ obtido da primeira afirmação, sabemos que existem $j \in \mathbb{N}$ e $y_1, \ldots, y_j \in M$ tais que $M = B(y_1, r) \cup \cdots \cup B(y_j, r)$. Da primeira afirmação, para cada $k \in \{1, \ldots, j\}$, existe $i_k \in I$ de modo que $B(y_k, r) \subset U_{i_k}$. Logo, $M = B(y_1, r) \cup \cdots \cup B(y_j, r) \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}$. Portanto, M é compacto. ■

Observação 2.7.8. A proposição anterior não vale para espaços topológicos quaisquer. Tanto a necessidade quanto a suficiência não são cumpridas em determinadas topologias. Para o leitor interessado que deseje encontrar contra-exemplos vide [5, Observação 2, p. 193].

Proposição 2.7.9. *Sejam X, Y espaços topológicos e $K \subset X$. Se $f : X \to Y$ for contínua e K for compacto em X, então $f(K)$ é compacto em Y.*

Demonstração. Seja $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma cobertura aberta de $f(K)$, assim $f(K) \subset$

$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$. Sendo f contínua, os conjuntos $f^{-1}(V_\lambda)$ constituem uma cobertura aberta do compacto K, da qual se pode extrair uma subcobertura finita $(f^{-1}(V_{\lambda_1}), \ldots, f^{-1}(V_{\lambda_n}))$ com $K \subset f^{-1}(V_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{\lambda_n})$. Segue-se que $f(K) \subset V_{\lambda_1} \cup \cdots \cup V_{\lambda_n}$, o que estabelece a compacidade de $f(K)$. ■

A proposição a seguir assegura que a noção de conjuntos compactos não se altera quando trabalhamos em um espaço topológico X ou em um subespaço de X.

Proposição 2.7.10. *Sejam X espaço topológico e Y subespaço de X. $K \subset Y$ é compacto em Y se, e somente se, K é compacto em X.*

Demonstração. Seja $(U_i)_{i \in I}$ uma cobertura de aberta de X. Logo $(U_i \cap Y)_{i \in I}$ é uma cobertura de abertos de Y. Como K é compacto em Y, existe uma subcobertura finita $(U_{i_1} \cap Y, \ldots, U_{i_k} \cap Y)$ que cobre K. Como K está em Y, $(U_{i_1}, \ldots, U_{i_k})$ é subcobertura finita de $(U_i)_{i \in I}$ em X. Reciprocamente, seja $(V_i)_{i \in I}$ uma cobertura de abertos de K em Y. Então $V_i = U_i \cap Y$ em que, para cada $i \in I$, U_i é aberto de X. É claro que $(U_i)_{i \in I}$ é cobertura de abertos de K em X. Como K é compacto em X, existe uma subcobertura finita $(U_{i_1}, \ldots, U_{i_k})$ que cobre K. Como $K \subset Y$ temos que $(V_{i_1}, \ldots, V_{i_k})$ é cobertura finita de abertos de K em Y. ■

Corolário 2.7.11. *Sejam X espaço topológico e $K \subset X$. Se $F \subset K$, F é fechado em X e K é compacto, então F é compacto em X.*

Demonstração. Aplique as Proposições 2.7.3 e 2.7.10. ■

Visto que apresentamos algumas das propriedades mais elementares de espaços compactos, podemos enunciar um dos teoremas mais importantes de Topologia: o Teorema de Tychonoff. Esse teorema afirma que dado uma família de conjuntos compactos $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, então o produtório $\prod_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$, com a topologia produto, que será definida logo adiante, também será um espaço compacto. Esse teorema necessita de uma ferramenta matemática chamada

Lema de Zorn. Como o "estilo" de demonstrações que envolvem este lema possui um juízo diferente ao que estamos acostumados e foge do escopo do trabalho não demonstramos tal resultado. Porém, como esse teorema é necessário para o objeto desse trabalho, deixamos citado uma referência para verificação.

Comecemos, primeiramente, definindo o conjunto produto cartesiano generalizado:

Definição 2.7.12. Seja $(X_i)_{i\in I}$ uma família não vazia de conjuntos. Chamaremos de *produto cartesiano da família* $(X_i)_{i\in I}$ o conjunto de funções

$$\prod_{i\in I} X_i = \left\{ x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i : x(i) \in X_i \text{ para cada } i \in I \right\}.$$

Escrevemos x_i em lugar de $x(i)$ para cada $x \in \prod\limits_{i\in I} X_i$ e $i \in I$. Para cada $j \in I$ a projeção π_j é definida por

$$\pi_j : x \in \prod_{i\in I} X_i \to x_j \in X_j.$$

Cada $x \in \prod\limits_{i\in I} X_i$ é usualmente denotado por $(x_i)_{i\in I}$. Em [9, Proposição 9.3, p. 23] o leitor pode verificar que o conjunto $\prod\limits_{i\in I} X_i$ é não vazio.

Proposição 2.7.13. *Seja $(X_i)_{i\in I}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios, e seja $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$. Seja $\mathcal{B}$ a família de todos os produtos $\prod\limits_{i\in I} U_i$ tais que $(U_i)_{i\in I}$ satisfaz as seguintes condições:*
(a) *U_i é aberto em X_i para cada $i \in I$;*
(b) *Existe $J \subset I$, J finito, com $U_i = X_i$ para cada $i \in I\backslash J$.*
Então $\mathcal{B}$ é base para uma topologia em X, chamada de topologia produto.

Demonstração. É fácil verificar que $\mathcal{B}$ satisfaz as condições (a) e (b) do Teorema 2.3.10. É conveniente observar que cada $U \in \mathcal{B}$ pode ser escrito na forma

$$U = \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j).$$

$\blacksquare$

Proposição 2.7.14. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios, e seja $X = \prod_{i \in I} X_i$. A topologia produto é a topologia menos fina em X tal que todas as projeções $\pi_j : X \to X_j$ são contínuas.*

Demonstração. Seja τ_p a topologia produto. Se U_j for aberto em X_j, então $\pi_j^{-1}(U_j)$ pertence ao conjunto $\mathcal{B}$ que foi definido na Proposição 2.7.13, e é portanto aberto em (X, τ_p). Logo $\pi_j : X \to X_j$ é contínua para cada $j \in I$. Seja τ uma topologia em X tal que $\pi_j : (X, \tau) \to X_j$ é contínua para cada $j \in I$. Provaremos que $\tau_p \subset \tau$. Para isso basta provar que para cada $U \in \mathcal{B}$, temos que $U \in \tau$. Se $U \in \mathcal{B}$, então $U = \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j)$ com J finito e U_j aberto em X_j, para cada $j \in J$. Desde que $\pi_j^{-1}(U_j)$ é aberto em (X, τ) para cada $j \in J$, U é aberto em (X, τ). $\blacksquare$

Teorema 2.7.15 (Teorema de Tychonoff)**.** *Seja $(X_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ uma família de espaços topológicos. Então o produto cartesiano generalizado $\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ é compacto na topologia produto se, e somente se, X_α é compacto, para todo $\alpha \in \Gamma$.*

Demonstração. Vide [7, Proposição 11, p. 256]. $\blacksquare$

3 ESPAÇOS NORMADOS

Em *espaços vetoriais* sobre um corpo $\mathbb{K}$, temos a operação soma entre seus elementos e a operação produto de seus elementos por escalares de $\mathbb{K}$. Vimos no capítulo anterior que em espaços métricos podemos calcular a distância entre dois de seus elementos. Um *espaço vetorial normado* é a estrutura matemática na qual podemos aproveitar esses dois conceitos em um mesmo âmbito. Neste trabalho, investigamos os casos em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Partimos no estudo de uma classe especial de funções: normas. Verificamos que normas definem uma métrica em um espaço vetorial. Definimos os espaços de Banach e analisamos alguns exemplos. Em seguida, retomamos o conceito de compacidade para espaços vetoriais normados e examinamos alguns resultados singulares que diferenciam caracterizações entre espaços vetoriais de dimensão finita e dimensão infinita. Prosseguindo, analisamos o Teorema de Banach-Steinhaus que faz uma ponte entre convergência simples e uniforme e o Teorema de Hahn-Banach que é um resultado que possibilita diversas aplicações para espaços vetoriais. Ao final, estudamos os espaços reflexivos, esses espaços garantem uma isometria linear entre o espaço E e seu bidual E''.

3.1 NORMAS E ESPAÇOS DE BANACH

Seja $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais. Os elementos de $\mathbb{R}$ são chamados de escalares. Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma função

$$\|\cdot\|_E : E \to \mathbb{R}$$

é uma *norma* se as seguintes propriedades estiverem satisfeitas:

(a) Positividade: $\|x\|_E \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\|_E = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

(b) Módulo escalar: $\|ax\|_E = |a| \cdot \|x\|_E$ para todo escalar a e todo $x \in E$;

(c) Desigualdade triangular: $\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$ para quaisquer $x, y \in E$.

A grande vantagem de se trabalhar com uma norma em um espaço vetorial é que podemos ter a noção de tamanho de vetor, que vai além da ideia de apenas distar dois elementos de um conjunto como visto na abordagem de espaços métricos.

Exemplo 3.1.1. Considere $E = \mathbb{R}$. A função módulo, ou valor absoluto, que associa
$$a \in \mathbb{R} \mapsto |a| \in \mathbb{R}$$
satisfaz as condições de norma. O número $|a - b|$ é interpretado como a distância entre a e b.

Um espaço vetorial munido de uma norma é chamado de *espaço vetorial normado*, ou simplesmente *espaço normado*. Assim como no caso do corpo dos escalares, um espaço normado é um espaço métrico com a métrica dada por
$$d(x, y) = \|x - y\|_E \ .$$
Em [10, Proposição 1.10, p. 6] o leitor pode verificar que d é uma métrica. Neste caso dizemos que a métrica d é induzida pela norma $\|\cdot\|_E$. Portanto, toda a teoria de espaços métricos do capítulo anterior se aplica aos espaços normados.

O que torna compatíveis as estruturas algébrica e topológica de um espaço normado é o fato de que, em um espaço normado, as operações algébricas de soma de vetores e multiplicação de vetor por escalar são funções contínuas. Com efeito, considerando que a norma de $E \times E$ seja dada por $\|(x, y)\|_{E\times E} = \|x\|_E + \|y\|_E$, temos
$$\|(x + y) - (a + b)\|_E \leq \|x - a\|_E + \|y - b\|_E = \|(x, y) - (a, b)\|_{E\times E}$$
para quaisquer $x, y, a, b \in E$. Daí, a adição $\alpha : (x, y) \in E \times E \to x + y \in E$ é uma contração fraca de $E \times E$ em E e, portanto, é contínua. Para verificar a continuidade da multiplicação por escalares $m : (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \to \lambda x \in E$, sejam $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$ fixados arbitrariamente. Dado $\varepsilon > 0$, escolhamos $\delta_1 = \varepsilon/3(\|x_0\|_E + 1)$ e $\delta_2 = \varepsilon/3(|\lambda_0| + 1)$. Então, como $\lambda x - \lambda_0 x_0 =$

$(\lambda-\lambda_0)(x-x_0)+\lambda_0(x-x_0)+(\lambda-\lambda_0)x_0$, temos $\|m(\lambda,x)-m(\lambda_0,x_0)\|_E \leq |\lambda-\lambda_0|\|x-x_0\|_E+|\lambda_0|\|x-x_0\|_E+|\lambda-\lambda_0|\|x_0\|_E$. Logo, se $|\lambda-\lambda_0|<\delta_1$ e $\|x-x_0\|_E<\delta_2$, então

$$|\lambda-\lambda_0|\|x_0\|_E<\delta_1\|x_0\|_E=\varepsilon\|x_0\|_E/3(\|x_0\|_E+1)<\varepsilon/3;$$
$$|\lambda_0|\|x-x_0\|_E<\delta_2|\lambda_0|=\varepsilon|\lambda_0|/3(|\lambda_0|+1)<\varepsilon/3;$$
$$|\lambda-\lambda_0|\|x-x_0\|_E<\delta_1\delta_2=\varepsilon^2/9(\|x_0\|_E+1)(|\lambda_0|+1)<\varepsilon^2/9<\varepsilon^2/3.$$

Não há perda de generalidade em supor $\varepsilon<1$, daí $\varepsilon^2<\varepsilon$. Logo, $|\lambda-\lambda_0|\|x-x_0\|_E<\varepsilon/3$, o que dá $\|m(\lambda,x)-m(\lambda_0,x_0)\|_E<\varepsilon$, provando a continuidade de m.

Além dos itens (a), (b) e (c) citados acima, a norma usufrui da propriedade de continuidade em E:

Proposição 3.1.2. *Seja E um espaço normado, então a norma $\|\cdot\|_E$ é uma função contínua.*

Demonstração. Seja $x\in E$, perceba que $\|x\|_E=\|x-y+y\|_E\leq\|x-y\|_E+\|y\|_E$, ou seja, $\|x\|_E-\|y\|_E\leq\|x-y\|_E$. Por outro lado, $\|y\|_E=\|y-x+x\|_E\leq\|y-x\|_E+\|x\|_E=\|x-y\|_E+\|x\|_E$, ou seja, $\|y\|_E-\|x\|_E\leq\|x-y\|_E$. Portanto, $|\|x\|_E-\|y\|_E|\leq\|x-y\|_E$. Logo, $\|\cdot\|_E$ é lipschitziana e, consequentemente, contínua. ■

Definição 3.1.3. Um espaço normado E é chamado *espaço de Banach* quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.

Exemplo 3.1.4. Em cursos de análise real se verifica que $(\mathbb{R},|\cdot|)$ é um espaço de Banach. Pode-se encontrar uma demonstração em [5, Teorema 13, p. 88].

A proposição abaixo evidencia a importância dos subespaços fechados de um espaço de Banach.

Proposição 3.1.5. *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E. Então F é um espaço de Banach, com a norma induzida de E se, e somente se, F é fechado em E.*

Demonstração. Suponha F Banach e tome $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em F tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e $x \in E$. Então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em F, e portanto convergente pois F é completo por hipótese. Existe então $y \in F$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. Da unicidade do limite, pelo Corolário 2.2.13, temos $x = y \in F$, provando que F é fechado em E. Reciprocamente, suponha F fechado em E e seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em F. Logo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E, e portanto existe $x \in E$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Como F é fechado segue que $x \in F$ pela Proposição 2.2.21, o que prova que F é completo. ■

Observação 3.1.6. Enfatizamos que, diferentemente do conceito de "subespaço" utilizado para descrever subconjuntos com uma topologia induzida de um espaço topológico, o termo *subespaço* doravante será utilizado para referirmos a um subespaço vetorial de um espaço vetorial. Perceba que os conceitos diferem por uma questão algébrica.

Exemplo 3.1.7. Seja X um conjunto não vazio. Considere uma função

$$f : X \to \mathbb{R}.$$

Dizemos que f é uma função limitada quando existe um número real $K_f > 0$, de modo que, para todo $x \in X$, $|f(x)| \leq K_f$. A notação $B(X, \mathbb{R})$, ou simplesmente $B(X)$, representa o conjunto de todas as funções reais limitadas.

Vale a pena lembrar que a soma de funções limitadas e o produto de um escalar por uma função limitada são também funções limitadas. De fato, seja $f, g \in B(X)$, de modo que $\forall x \in X$, $|f(x)| \leq K_f$ e $|g(x)| \leq K_g$, com $K_f, K_g \in \mathbb{R}$. Note que:

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq K_f + K_g.$$

Definindo $K_{f+g} := K_f + K_g$ vemos que $|(f+g)(x)| \leq K_f + K_g = K_{f+g}$, segue que a função $f + g$ é limitada. Além disso, dado um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in B(X)$ tem-se

$$|\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot |f(x)| \leq |\lambda| \cdot K_f.$$

Definindo $K_{\lambda f} := |\lambda| \cdot K_f$ temos que $|\lambda f(x)| \leq |\lambda| \cdot K_f = K_{\lambda f}$, segue que a função λf é limitada. Portanto, $B(X)$ é um espaço vetorial. Podemos ainda definir uma norma nesse espaço, para $f, g \in B(X)$ seja

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$[1]

É fácil ver que os axiomas (a) e (b) de norma são cumpridos. Para garantir a desigualdade triangular usamos a desigualdade triangular do valor absoluto de números reais. Daí

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_\infty = \sup_{x \in X} |(f+g)(x)| &= \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \\
&\leq \sup_{x \in X} [|f(x)| + |g(x)|] \\
&\leq \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Sendo assim, $\|\cdot\|_\infty$ torna $B(X)$ num espaço normado.

Por fim, mostraremos que $B(X)$ é Banach com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Com efeito, seja $(f_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $B(X)$. Para cada $x \in X$, temos

$$|f_m(x) - f_n(x)| = |(f_m - f_n)(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty.$$

Portanto, $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Sendo $\mathbb{R}$ completo, existe o limite $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ em $\mathbb{R}$. Isto define uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}$ para a qual a sequência de aplicações f_n converge pontualmente para f, isto é, para cada x em X tem-se que $f_n(x)$ converge para $f(x)$ em $\mathbb{R}$. Vamos mostrar que a convergência é uniforme,[2] isto é,

[1] O supremo de um subconjunto A de $\mathbb{R}$ limitado superiormente é definido como o número real $m = \sup A$ tal que:
(i) Para todo $a \in A$, $a \leq m$;
(ii) Se $b < m$, então existe $a \in A$ tal que $b < a$.

[2] No espaço $B(X)$ a convergência uniforme é equivalente à definição de convergência de sequências em $B(X)$ (para mais detalhes vide [7, Proposição 10, p. 119]). Denotamos $f_n \xrightarrow{u} f$ para dizer que $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge uniformemente para f.

dado $\varepsilon > 0$, é possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$. Tomemos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. Desde que f_n é de Cauchy em $B(X)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica $\|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$. Portanto, $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in X$. Assim, se $n > n_0$, temos $|f(x) - f_n(x)| = \lim\limits_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$, seja qual for $x \in X$. Logo, $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Em particular $\|f - f_n\|_\infty < \infty$, donde $f \in B(X)$ e, como queríamos demonstrar, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ no espaço $B(X)$.

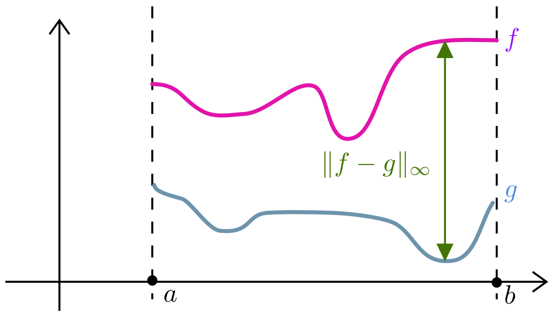

Figura 13 – Representação da norma do supremo em $B([a,b],\mathbb{R})$.

Observação 3.1.8. No Exemplo 3.1.7, se em vez do contradomínio $\mathbb{R}$ tivéssemos um espaço métrico completo M qualquer e, em vez de considerar uma norma, considerássemos a métrica $d(f,g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$, o espaço $B(X, M)$ das funções limitadas, ou de forma equivalente o espaço tal que $f \in B(X, M)$ e $f(X)$ é limitado em M, continuaria sendo completo. Pode-se verificar uma demonstração totalmente análoga à desenvolvida acima em [7, Proposição 7, p. 152].

Exemplo 3.1.9. Como $[a,b]$ é compacto em $\mathbb{R}$, o conjunto $C[a,b]$ de todas as funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ é um subespaço vetorial do espaço de Banach $B[a,b]$, e portanto é um espaço normado com a norma induzida de $B[a,b]$

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\} = \max\{|f(x)| : x \in [a,b]\}.$$

Ademais, $C[a,b]$ é um espaço de Banach. De fato, pela Proposição 3.1.5 basta provar que $C[a,b]$ é um subespaço fechado de $B[a,b]$. Para tanto, observe que se $f_n \longrightarrow f$ em $C[a,b]$, então $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente para f. Segue que f é contínua por ser o limite uniforme de funções contínuas. Com efeito, tome $c \in [a,b]$. Tome $\varepsilon > 0$. Como $f_n \xrightarrow{u} f$ em $[a,b]$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ sempre que $n > n_0$ e $x \in [a,b]$. Pelo fato da função f_{n_0+1} ser contínua em c, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_{n_0+1}(x) - f_{n_0+1}(c)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

se $x \in [a,b]$ e $|x-c| < \delta$. Daí,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| \leq &\, |f(x) - f_{n_0+1}(x)| \\ &+ |f_{n_0+1}(x) - f_{n_0+1}(c)| + |f_{n_0+1}(c) - f(c)| < \varepsilon \end{aligned}$$

se $x \in [a,b]$ e $|x-c| < \delta$. Como $c \in [a,b]$ foi tomado de modo arbitrário, segue que f é contínua.

Aprende-se no Cálculo que se f e g são diferenciáveis, então $(f+g)$ é uma função diferenciável e $(f+g)' = f' + g'$ e se $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f)' = \lambda f'$. Em nossa linguagem isso significa que o conjunto de todas as funções diferenciáveis possui uma estrutura natural de espaço vetorial. O próximo exemplo revela que o espaço das funções continuamente diferenciáveis é um espaço normado.

Exemplo 3.1.10. Definimos o espaço das funções continuamente diferenciáveis por:

$$C^1[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ é diferenciável em } [a,b] \text{ e } f' \in C[a,b]\}.$$

De forma usual, nos extremos do intervalo consideramos os limites laterais correspondentes. Como vimos acima, $C^1[a,b]$ é subespaço vetorial de $C[a,b]$. Entretanto, $C^1[a,b]$ não é fechado em $C[a,b]$, e portanto, pela Proposição 3.1.5, não é completo na norma $\|\cdot\|_\infty$. Para o leitor interessado em consultar essa afirmação vide [1, Exemplo 2.4.4, p. 44]. Vejamos que a norma

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

faz de $C^1[a,b]$ um espaço normado e de Banach. Com efeito, como f, f' são contínuas, então $\|f\|_{C^1} = 0$ se e somente se $f = f' = 0$. Tem-se que

$$\begin{aligned}\|\lambda f\|_{C^1} = \|\lambda f\|_\infty + \|\lambda f'\|_\infty &= |\lambda|\|f\|_\infty + |\lambda|\|f'\|_\infty \\ &= |\lambda|(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty) = |\lambda|\|f\|_{C^1}.\end{aligned}$$

E também

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{C^1} &= \|f+g\|_\infty + \|(f+g)'\|_\infty = \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty \\ &\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty \\ &= (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty) + (\|g\|_\infty + \|g'\|_\infty) = \|f\|_{C^1} + \|g\|_{C^1}.\end{aligned}$$

Agora, provemos que $\big(C^1[a,b], \|\cdot\|_{C^1}\big)$ é completo. De fato, dada uma sequência de Cauchy $(f_n)_{n=1}^\infty$ em $\big(C^1[a,b], \|\cdot\|_{C^1}\big)$, como $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{C^1}$ e $\|f'\|_\infty \leq \|f\|_{C^1}$, segue que as sequências $(f_n)_{n=1}^\infty$ e $(f_n')_{n=1}^\infty$ são de Cauchy em $C[a,b]$. Do Exemplo 3.1.9 sabemos que $C[a,b]$ é completo, logo existem $f, g \in C[a,b]$ tais que $f_n \longrightarrow f$ e $f_n' \longrightarrow g$ uniformemente. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo podemos escrever

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t)dt$$

para todos $x \in [a,b]$ e $n \in \mathbb{N}$. Tomando o limite quando $n \longrightarrow \infty$ concluímos que $f \in C^1[a,b]$ e que $f' = g$. Segue que $f_n \longrightarrow f$ em $C^1[a,b]$.

Exemplo 3.1.11. No Exemplo 2.1.8, contemplamos três métricas para o espaço $\mathbb{R}^n$. Na realidade, essas métricas são normas em $\mathbb{R}^n$, o tornando um espaço normado. Com efeito, sejam $e_1, \ldots, e_n$ vetores canônicos de $\mathbb{R}^n$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, existem únicos $a_1, \ldots, a_n$ tais que $x = \sum\limits_{i=1}^n a_i e_i$. Verifica-se sem dificuldade que as seguintes funções $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ são normas em $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= |a_1| + \cdots + |a_n|; \\ \|x\|_2 &= \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}; \\ \|x\|_\infty &= \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}.\end{aligned}$$

Definição 3.1.12. Seja E um espaço vetorial, dizemos que as normas $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ em E são *equivalentes* se existem $C_1, C_2 > 0$ tais que $C_1\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C_2\|x\|_a$ para todo $x \in E$.

Exemplo 3.1.13. As normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ definidas no Exemplo 3.1.11 são equivalentes duas a duas no espaço $\mathbb{R}^n$. Verifiquemos, por exemplo, que vale $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$:

Seja $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Provemos primeiro que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$. Considere x_k tal que $|x_k| = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$. Segue que

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = |x_k| = \sqrt{|x_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \|x\|_2 .$$

Agora, mostremos $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$. Para todo $j = 1, \ldots, n$, temos que $|x_j| \leq \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$, logo

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \leq \sqrt{n \cdot \max_{1\leq i\leq n} |x_i|^2} = \sqrt{n} \cdot \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

Portanto, $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes.

Em relação ao exemplo que acabamos de ver, temos que todo espaço normado de dimensão finita é completo. Comprovamos esse fato utilizando os seguintes resultados:

Proposição 3.1.14. *Duas normas quaisquer no espaço $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.*

Demonstração. Vide [6, Teorema 8, p. 19]. ■

Lema 3.1.15. *Sejam $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes de um espaço normado E e $\|\cdot\|_E$ uma norma qualquer de E. Então existe uma constante $c > 0$, que depende do conjunto B, tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \frac{1}{c} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|_E$$

para quaisquer escalares $a_1, \ldots, a_n$.

Demonstração. Pela Proposição 3.1.14 dadas duas normas $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ em $\mathbb{R}^n$, existe uma constante $c > 0$ tal que $\|x\|_a \leq c\|x\|_b$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Considere a correspondência

$$(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \|\,(a_1, \ldots, a_n)\,\|_{N} = \left\|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right\|_{E} \in \mathbb{R}.$$

Esta correspondência $\|\cdot\|_{N}$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$. Com efeito, a verificação do item (a) de norma segue pois, de um lado, $0 \mapsto \left\|\sum_{j=1}^{n} 0x_j\right\|_{E} = \|0\| = 0$ e, de outro lado, $\left\|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right\|_{E} = 0$ se, e somente se, $a_i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, e consequentemente $(a_1, \ldots, a_n) = 0$. O item (b) é garantido já que

$$\begin{aligned}\|\lambda \cdot (a_1, \ldots, a_n)\|_{N} = \|(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)\|_{N} &= \left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda a_j x_j\right\|_{E} = \left\|\lambda \sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right\|_{E} \\ &= |\lambda| \left\|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right\|_{E} = |\lambda| \|(a_1, \ldots, a_n)\|_{N}.\end{aligned}$$

É fácil ver que o item (c) é cumprido. De fato, considere os vetores canônicos e_j de $\mathbb{R}^n$ e a_j, b_j escalares, $j = 1, \ldots, n$. Note que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_j e_j + \sum_{i=1}^{n} b_j e_j\right\|_{N} = \left\|\sum_{i=1}^{n}(a_j + b_j)e_j\right\|_{N} &= \left\|\sum_{i=1}^{n}(a_j + b_j)x_j\right\|_{E} \\ = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_j x_j + \sum_{i=1}^{n} b_j x_j\right\|_{E} &\leq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_j x_j\right\|_{E} + \left\|\sum_{i=1}^{n} b_j x_j\right\|_{E} \\ &= \left\|\sum_{i=1}^{n} a_j e_j\right\|_{N} + \left\|\sum_{i=1}^{n} b_j e_j\right\|_{N}.\end{aligned}$$

Segue que $\|\cdot\|_{N}$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$. Logo, o resultado segue pois a expressão $\|(a_1, \ldots, a_n)\|_1 = |a_1| + \cdots + |a_n|$ também é uma norma em $\mathbb{R}^n$. ∎

Teorema 3.1.16. *Todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach. Consequentemente, todo subespaço de dimensão finita de um espaço normado E é fechado em E.*

Demonstração. Sejam E um espaço normado de dimensão n e $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ uma base normalizada em E, isto é, os vetores têm norma 1. Dada uma sequência de Cauchy $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ em E, para cada $k \in \mathbb{N}$ existem únicos escalares $a_1^k, \ldots, a_n^k$ tais que $x_k = a_1^k\beta_1 + \cdots + a_n^k\beta_n$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k - x_m\|_E < c \cdot \varepsilon$ sempre que $k, m \geq n_0$, onde c é a constante do Lema 3.1.15 para o conjunto linearmente independente $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Segue que

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j^k - a_j^m| \leq \frac{1}{c} \left\| \sum_{j=1}^{n} (a_j^k - a_j^m)\beta_j \right\|_E = \frac{1}{c} \|x_k - x_m\|_E < \varepsilon$$

sempre que $k, m \geq n_0$. Daí, para cada $j = 1, \ldots, n$, a sequência de escalares $\left(a_j^k\right)_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy, portanto convergente. Digamos $b_j = \lim\limits_{k\to\infty} a_j^k$, $j = 1, \ldots, n$. Nesse caso temos $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \left|a_j^k - b_j\right| = 0$. Definindo $x = b_1\beta_1 + \cdots + b_n\beta_n$ temos $x \in E$ e

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\|_E = \lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} (a_j^k - b_j)\beta_j \right\|_E \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |a_j^k - b_j| = 0,$$

provando que $x_k \longrightarrow x$ e completando a demonstração de que E é Banach. A segunda afirmação segue da primeira e da Proposição 3.1.5. ∎

Observação 3.1.17. Observemos que se E for um espaço vetorial de dimensão finita n então, do mesmo jeito que para $\mathbb{R}^n$, podemos garantir que normas são equivalentes em E, uma vez que é sempre possível associar uma norma de E como uma norma de $\mathbb{R}^n$ adotando a correspondência $\|\cdot\|_N$ vista no Lema 3.1.15.

Exemplo 3.1.18. Seja c_0 o conjunto de todas as sequências de escalares que convergem para zero, ou seja,

$$c_0 = \left\{(a_k)_{k=1}^{\infty} : a_k \in \mathbb{R} \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ e } a_k \longrightarrow 0\right\}.$$

É claro que c_0 é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências (operações coordenada a coordenada). A expressão

$$\|(a_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup\{|a_k| : k \in \mathbb{N}\}$$

torna c_0 um espaço normado. Além disso, c_0 é um espaço de Banach. Temos ainda que o espaço c_{00} definido por

$$c_{00} = \{(a_k)_{k=1}^{\infty} \in c_0 : \text{ existe } k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_k = 0 \text{ para todo } k \geq k_0\}$$

é um subespaço de c_0. Esse espaço é incompleto pela norma $\|\cdot\|_{\infty}$. O leitor pode verificar em [1, Exemplo 1.1.7, p. 6] as afirmações desse exemplo.

Exemplo 3.1.19. Considere para cada número real $p \geq 1$, definimos

$$\ell_p = \left\{(a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{R} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty\right\}$$

como o *espaço das sequências p-somáveis*. Considere a função $\|\cdot\|_p : \ell_p \to \mathbb{R}$ definida como

$$\left\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\|\cdot\|_p$ define uma norma em ℓ_p. Os itens (a) e (b) de norma são facilmente verificados. O leitor pode verificar em [10, p. 24] que $\|\cdot\|_p$ cumpre a desigualdade triangular. Ademais, em [3, 2.2–3, p. 61] o leitor pode analisar que ℓ_p é espaço de Banach.

Exemplo 3.1.20. Para $p = \infty$, definimos ℓ_{∞} como o *espaços das sequências limitadas* de escalares, ou seja:

$$\ell_{\infty} = \left\{(a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{R} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| < \infty\right\}.$$

Podemos concluir que ℓ_∞ é um espaço de Banach com as operações usuais de funções e com a norma

$$\left\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_\infty = \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\}$$

notando que $\ell_\infty = B(\mathbb{N})$. O fato de toda sequência convergente ser limitada implica que c_0 é subespaço de ℓ_∞, e por ser Banach, c_0 é subespaço fechado de ℓ_∞ pela Proposição 3.1.5.

3.2 CONJUNTOS COMPACTOS EM ESPAÇOS NORMADOS

A compacidade, além de ser um dos objetos topológicos mais importantes, desempenha papel crucial na Análise. Por exemplo, na análise real estudamos o Teorema de Weierstrass que garante que toda função contínua $f : K \to \mathbb{R}$ definida em um compacto K é limitada e assume máximo e mínimo.

O grande diferencial agora é que a compacidade no contexto da Análise Funcional traz uma divisão entre espaços de dimensões finita e infinita. Mais adiante verificamos que a bola unitária fechada em um espaço normado de dimensão finita é sempre compacta, mas que em dimensão infinita, pelo contrário, nunca é compacta. Para suprir esse entrave da não compacidade da bola unitária em dimensão infinita, estudamos no Capítulo 4 as topologias fraca e fraca-estrela, que, por terem menos abertos, facilitam a ocorrência de conjuntos compactos.

Como vimos na Seção 2.7, um subconjunto K de um espaço topológico X é compacto se toda cobertura aberta de K admite subcobertura finita. Em espaços métricos (em particular para espaços normados) vale a seguinte caracterização: um subconjunto K de um espaço métrico é compacto se, e somente se, for sequencialmente compacto, isto é, toda sequência formada por elementos de K admite uma subsequência que converge para um elemento de K, conforme provado na Proposição 2.7.7.

Proposição 3.2.1. *Seja E um espaço normado de dimensão finita e $K \subset E$.*

Então, K é compacto em E se, e somente se, K for um conjunto limitado e fechado.

Demonstração. Conjuntos compactos em espaços topológicos de Hausdorff são fechados pela Proposição 2.7.4, consequentemente conjuntos compactos são fechados em espaços normados. Além disso, pela Proposição 2.7.5 compactos em espaços métricos são sempre limitados. Resta provar que todo conjunto limitado e fechado $K \subset E$ é compacto. Suponha que $\dim E = n$ e seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base normalizada de E. Por espaços normados serem espaços métricos, é suficiente mostrar que K é sequencialmente compacto. Seja $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ uma sequência em K. Para cada m, existem escalares $a_1^{(m)}, \ldots, a_n^{(m)}$ tais que $x_m = \sum_{j=1}^{n} a_j^{(m)} e_j$. Como K é limitado, existe $L > 0$ tal que $\|x_m\|_E \leq L$ para todo m. Consideremos em $\mathbb{R}^n$ a norma da soma $\|\cdot\|_1$. Pelo Lema 3.1.15, existe $c > 0$ tal que

$$L \geq \|x_m\|_E = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j^{(m)} e_j \right\|_E \geq c \left(\sum_{j=1}^{n} \left| a_j^{(m)} \right| \right) = c \cdot \left\| \left(a_1^{(m)}, \ldots, a_n^{(m)} \right) \right\|_1$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Assim a sequência $\left(\left(a_1^{(m)}, \ldots, a_n^{(m)} \right) \right)_{m=1}^{\infty}$ é limitada em $\mathbb{R}^n$. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass para $\mathbb{R}^n$,[3] esta sequência possui uma subsequência $\left(\left(a_1^{(m_k)}, \ldots, a_n^{(m_k)} \right) \right)_{k=1}^{\infty}$ que converge para um certo $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. De

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j^{(m_k)} e_j - \sum_{j=1}^{n} b_j e_j \right\|_E &= \left\| \sum_{j=1}^{n} \left[a_j^{(m_k)} e_j - b_j e_j \right] \right\|_E \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \left| a_j^{(m_k)} - b_j \right| \\ &= \left\| \left(a_1^{(m_k)}, \ldots, a_n^{(m_k)} \right) - b \right\|_1 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

[3] O Teorema de Bolzano-Weirstrass para $\mathbb{R}^n$ afirma que toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente, vide [6, Teorema 5, p. 17].

concluímos que $\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = \sum_{j=1}^{n} b_j e_j$. Por K ser fechado, sabemos que $\sum_{j=1}^{n} b_j e_j \in K$ pela Proposição 2.2.21. ■

Definição 3.2.2. Seja E um espaço normado. O conjunto

$$B_E = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$$

é chamado de *bola unitária fechada* de E.

Corolário 3.2.3. *A bola unitária fechada em um espaço normado de dimensão finita é compacta.*

O resultado a seguir desempenha um papel fundamental para mostrar que a bola unitária fechada em espaços normados de dimensão infinita nunca é compacta.

Lema 3.2.4 (Lema de Riesz)**.** *Seja M um subespaço fechado próprio de um espaço normado E e seja θ um número real tal que $0 < \theta < 1$. Então existe $y \in E \backslash M$ tal que $\|y\|_E = 1$ e $\|y - x\|_E \geq \theta$ para todo x em M.*

Demonstração. Seja $y_0 \in E \backslash M$ e considere o número

$$d = \operatorname{dist}(y_0, M) := \inf_{x \in M} \|y_0 - x\|_E .$$

Como M é fechado e $y_0 \notin M$, temos $d > 0$. De fato, supondo $d = 0$, existiria uma sequência de elementos de M convergindo para y_0 e, nesse caso, teríamos $y_0 \in M$, pois M é fechado. Seja $\theta \in (0, 1)$. Como $\frac{d}{\theta} > d$, podemos escolher $x_0 \in M$ tal que

$$\|y_0 - x_0\|_E \leq \frac{d}{\theta}.$$

Vejamos que, escolhendo

$$y = \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|_E},$$

as condições requeridas estão satisfeitas. De fato, y tem norma 1 e $y \notin M$, pois, caso contrário, teríamos $\|y_0 - x_0\|_E \cdot y \in M$ e

$$\|y_0 - x_0\|_E \cdot y + x_0 = \|y_0 - x_0\|_E \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|_E} + x_0 = y_0,$$

que implica $y_0 \in M$ pelo fechamento da soma em M, o que não ocorre. Seja $x \in M$. Como M é subespaço vetorial, $\left(x_0 + \|y_0 - x_0\|_E\, x\right) \in M$. Portanto, $d \leq \left\|y_0 - \left(x_0 + \|y_0 - x_0\|_E \cdot x\right)\right\|_E$. Por fim,

$$\begin{aligned} \|y - x\|_E = \left\| \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|_E} - x \right\|_E &= \frac{\left\|y_0 - \left(x_0 + \|y_0 - x_0\|_E \cdot x\right)\right\|_E}{\|y_0 - x_0\|_E} \\ &\geq \frac{d}{\|y_0 - x_0\|_E} \geq \theta. \end{aligned}$$

■

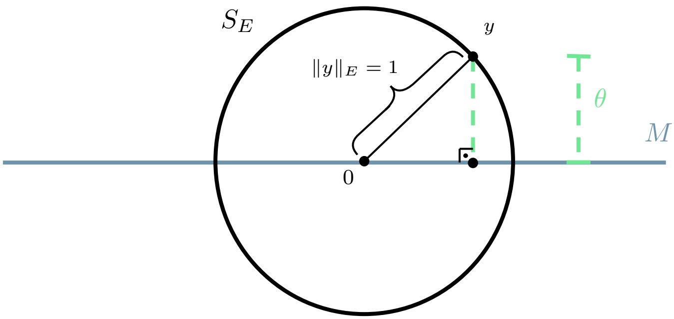

Figura 14 – Representação geométrica do Lema de Riesz. $S_E = \{x \in E : \|x\|_E = 1\}$ é a esfera unitária de E.

Teorema 3.2.5. *Um espaço normado E tem dimensão finita se, e somente se, a bola unitária fechada de E é compacta.*

Demonstração. O Corolário 3.2.3 garante uma das implicações. Resta-nos provar que se a bola é compacta, então o espaço tem dimensão finita. Suponha que E tenha dimensão infinita. Tome $x_1 \in E$ com norma 1. Como

$\dim E = \infty$, subespaço $[x_1]$ gerado por x_1 é um subespaço próprio de E. Por ter dimensão finita, $[x_1]$ é subespaço fechado de E pelo Teorema 3.1.16. Pelo Lema de Riesz, com $\theta = \frac{1}{2}$, existe $x_2 \in E \backslash [x_1]$ de norma 1 tal que

$$\|x_2 - x_1\|_{_E} \geq \frac{1}{2}\ .$$

Aplicando novamente o argumento para o subespaço $[x_1, x_2]$ gerado por $\{x_1, x_2\}$, que continua sendo um subespaço fechado próprio pelas mesmas razões, existe $x_3 \in E \backslash [x_1, x_2]$ de norma 1 tal que

$$\|x_3 - x_j\|_{_E} \geq \frac{1}{2} \text{ para } j = 1, 2\ .$$

Podemos continuar esse procedimento indefinidamente pois em todas as etapas teremos um subespaço de dimensão finita de E, logo fechado e próprio. Procedendo dessa forma, construímos uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em B_E tal que

$$\|x_m - x_n\|_{_E} \geq \frac{1}{2},$$

sempre que $m \neq n$. Assim, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em B_E que não possui subsequência convergente, o que impede que B_E seja compacta. ■

Exemplo 3.2.6. Apesar das bolas fechadas não serem compactas em espaços normados de dimensão infinita, isto não implica que não existam conjuntos compactos sofisticados. Um bom exemplo é o Cubo de Hilbert. Esse conjunto é um subespaço C de ℓ_2 com a propriedade de que $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in C$ tem-se $0 \leq x_i \leq \frac{1}{i}$, com $i \in \mathbb{N}$. O leitor pode verificar em [7, Proposição 9, p. 229] que, de fato, C é compacto.

3.3 OPERADORES LINEARES CONTÍNUOS

Como verificamos na Seção 3.1, os espaços normados gozam das propriedades de um espaço métrico, uma vez que a norma induzida se constitui como uma métrica. Além disso, a estrutura de espaço vetorial faz com que os espaços normados possam ser algebrizados. Essa estrutura nos permite introduzir o conceito de *operadores lineares contínuos*.

Definimos, primeiramente, um tipo especial de funções entre espaços normados comumente visto em cursos de Álgebra Linear e Cálculo: *operadores lineares*. Esses operadores são funções que associam um elemento do espaço normado E com um elemento do espaço normado F e possuem as seguintes características:

- $T(x+y) = T(x) + T(y)$, para quaisquer $x, y \in E$;
- $T(\lambda x) = \lambda T(x)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e qualquer x em E.

Seguindo a Definição 2.4.1, dizemos que o operador linear é *contínuo* se, dados $x_0 \in E$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\|_E < \delta$ implique $\|T(x) - T(x_0)\|_F < \varepsilon$, com $x \in E$. A nomenclatura "operador linear" é usual em Análise Funcional, ao passo que em Álgebra Linear essas funções são conhecidas como "transformações lineares".

No estudo de Álgebra Linear é verificado que o espaço $L(E, F)$ dos operadores lineares de E em F é na verdade um espaço vetorial com as operações usuais de função. Em particular, quando o contradomínio for o corpo dos escalares, temos o dual algébrico $E^* := L(E, \mathbb{R})$.

Ao levarmos em conta a continuidade, denotamos o conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F por $\mathcal{L}(E, F)$. Como soma de funções contínuas e produto de escalar e função contínua são funções contínuas, temos que $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais de funções. Quando F for o corpo dos escalares, escrevemos E' no lugar de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, chamamos esse espaço de *dual topológico* de E, ou simplesmente *dual* de E, e dizemos que seus elementos são *funcionais lineares contínuos*. Essa distinção entre $L(E, F)$ e $\mathcal{L}(E, F)$ está claro no decorrer do texto, visto que o foco é o estudo dos operadores lineares contínuos.

Por conseguinte, dizemos que dois espaços normados E e F são topologicamente isomorfos, ou simplesmente isomorfos, se existir um operador linear contínuo bijetor $T : E \to F$ cujo operador linear inverso $T^{-1} : F \to E$[4]

[4] Para todo operador linear bijetor T, seu operador inverso T^{-1} é linear, vide [2, Proposição, p. 91].

é também contínuo. Tal operador T é chamado de isomorfismo topológico (homeomorfismo), ou simplesmente isomorfismo. No contexto de espaços normados, é preferível a nomenclatura isomorfismo já que homeomorfismos são para contextos mais gerais de espaços topológicos.

Na Seção 2.4 verificamos duas classes de funções contínuas entre espaços métricos chamadas lipschitziana e uniformemente contínua. Podemos descrevê-las no contexto de espaços normados:

- A função f é *uniformemente contínua* se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon$ sempre que $x, y \in M$ e $\|x - y\|_E < \delta$;

- A função f é *lipschitziana* se existe uma constante $L > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\|_F \leq L \cdot \|x - y\|_E$ para todos $x, y \in E$.

O conceito de função contínua, dentro de um contexto mais amplo de espaços métricos, não é equivalente a ser uniformemente contínua ou lipschitziana. Entretanto, se a função que estivermos trabalhando for um operador linear contínuo, todos essas definições se tornam equivalentes como verificamos no teorema a seguir. Ademais, conferimos outras equivalências úteis que utilizamos no decorrer do texto.

Teorema 3.3.1. *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{R}$ e $T : E \to F$ linear. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *T é lipschitziano;*

(b) *T é uniformemente contínuo;*

(c) *T é contínuo;*

(d) *T é contínuo em algum ponto de E;*

(e) *T é contínuo na origem;*

(f) $\sup\{\|T(x)\|_F : x \in E$ *e* $\|x\|_E \leq 1\} < \infty$*;*

(g) *Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E$ para todo $x \in E$.*

Demonstração. As implicações (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (d) são válidas no contexto de espaços métricos (consequentemente vale para espaços normados) e não dependem da linearidade de T.

(d) $\Longrightarrow$ (e) Suponha T contínuo no ponto $x_0 \in E$. Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\|_F < \varepsilon$ sempre que $\|x - x_0\|_E < \delta$. Tome $x \in E$ tal que $\|x - 0\|_E = \|x\|_E < \delta$ Então $\|(x + x_0) - x_0\|_E = \|x\|_E < \delta$. Portanto

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(0)\|_F &= \|T(x) - 0\|_F = \|T(x)\|_F \\ &= \|T(x) + T(x_0) - T(x_0)\|_F \\ &= \|T(x + x_0) - T(x_0)\|_F < \varepsilon, \end{aligned}$$

provando que T é contínuo na origem.
(e) $\Longrightarrow$ (f) Da continuidade de T na origem, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(0)\|_F = \|T(x)\|_F < 1$ sempre que $\|x - 0\|_E = \|x\|_E < \delta$. Se $\|x\|_E \leq 1$, então $\|\frac{\delta}{2}x\|_E < \delta$, e portanto $\frac{\delta}{2}\|T(x)\|_F = \|T(\frac{\delta}{2}x)\|_F < 1$. Pelas propriedade de supremo, garantimos que $\sup\{\|T(x)\|_F : x \in E \text{ e } \|x\|_E \leq 1\} \leq \frac{2}{\delta} < \infty$.
(f) $\Longrightarrow$ (g) Para $x \in E$, $x \neq 0$, temos

$$\frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \leq \sup\{\|T(y)\|_F : \|y\|_E \leq 1\}.$$

Tomando $C = \sup\{\|T(y)\|_F : \|y\|_E \leq 1\}$, para todo $x \neq 0$ se confere o resultado. Para $x = 0$ o resultado é imediato.
(g) $\Longrightarrow$ (a) Dados $x_1, x_2 \in E$,

$$\|T(x_1) - T(x_2)\|_F = \|T(x_1 - x_2)\|_F \leq C\|x_1 - x_2\|_E,$$

e portanto T é lipschitziano com a constante C. ∎

Corolário 3.3.2. *Seja $T : E \to F$ um operador linear bijetor entre espaços normados. Então T é um isomorfismo se, e somente, se existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que $C_1\|x\|_E \leq \|T(x)\|_F \leq C_2\|x\|_E$ para todo $x \in E$.*

Demonstração. É fácil ver que a afirmação $C_1\|x\|_E \leq \|T(x)\|_F \leq C_2\|x\|_E$ é equivalente à $C_1\|T^{-1}(y)\|_E \leq \|y\|_F \leq C_2\|T^{-1}(y)\|_E$ em que C_1, C_2 são constantes, $T^{-1}(y) = x$ e $y = T(x)$, com $y \in F$. Isto garante a continuidade de T^{-1} pelo teorema anterior. Por outro lado, se T e T^{-1} são contínuas, é imediato, pelo Teorema 3.3.1, que existam constantes C_1, C_2 tais que

$\|T^{-1}(y)\|_E \leq \frac{1}{C_1}\|y\|_F \Leftrightarrow C_1\|x\|_E \leq \|T(x)\|_F$ em que $T^{-1}(y) = x$ e $y = T(x)$, e $\|T(x)\|_F \leq C_2\|x\|_E$. Portanto, $C_1\|x\|_E \leq \|T(x)\|_F \leq C_2\|x\|_E$. ∎

Observação 3.3.3. Pela Definição 3.1.12 e Corolário 3.3.2, duas normas $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ em E são equivalentes, se e somente se, a função identidade $i : (E, \|\cdot\|_a) \to (E\|\cdot\|_b)$ é um isomorfismo. Mais geralmente, em um espaço métrico M dizemos que duas métricas d_1, d_2 são equivalentes se as topologias τ_{d_1}, τ_{d_2} são iguais. Em [7, Seção 4, p. 48] o leitor pode verificar que a definição de normas equivalentes implica que as topologias $\tau_{\|\cdot\|_a}$ e $\tau_{\|\cdot\|_b}$ são iguais, em que as topologias $\tau_{\|\cdot\|_a}$ e $\tau_{\|\cdot\|_b}$ são induzidas pelas métricas $d_a(x,y) = \|x-y\|_a$ e $d_b(x,y) = \|x-y\|_b$, respectivamente.

A condição (f) do Teorema 3.3.1 nos dá a possibilidade de induzir uma norma $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ para o espaço $\mathcal{L}(E,F)$ dos operadores lineares contínuos de E em F:

Proposição 3.3.4. *Sejam E e F espaços normados.*
(a) *A expressão*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_F : x \in E \ e \ \|x\|_E \leq 1\}$$

define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E,F)$.
(b) $\|T(x)\|_F \leq \|T\| \cdot \|x\|_E$, *para todos $T \in \mathcal{L}(E,F)$ e $x \in E$.*
(c) *Se F for Banach, então $\mathcal{L}(E,F)$ também é Banach.*

Demonstração. (a) Utilizando argumentos totalmente análogos do Exemplo 3.1.7, apenas considerando que $\{\|T(x)\|_F : x \in B_E\} \subset \mathbb{R}$ e as propriedades de norma, segue a afirmação.
(b) Por definição $\|T(y)\|_F \leq \|T\|$ sempre que $\|y\|_E \leq 1$. Considere $x \in E$, $x \neq 0$ e $\widetilde{x} = \frac{x}{\|x\|_E}$. Segue que $\|\widetilde{x}\|_E \leq 1$ e $\|T(\widetilde{x})\|_F \leq \|T\|$. Daí,

$$\frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \|T(\widetilde{x})\|_F \leq \|T\|,$$

o que garante $\|T(x)\|_F \leq \|T\| \cdot \|x\|_E$, para todo $T \in \mathcal{L}(E,F)$ e $x \in E$.
(c) Seja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E,F)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe

$n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$ sempre que $n, m \geq n_0$. Logo,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_{_F} = \|\left(T_n - T_m\right)(x)\|_{_F} \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|_{_E} \leq \varepsilon\|x\|_{_E} \quad (1)$$

para todos $x \in E$ e $n, m \geq n_0$. Segue que para cada $x \in E$, a sequência $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em F, logo convergente pois F é Banach. Podemos então definir

$$T : E \to F \ , \ T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x).$$

Temos que T é linear. Com efeito, sejam $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrários. Como $T_n(x + \lambda y) = T_n(x) + \lambda T_n(y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\|T_n(x + \lambda y) - T(x + \lambda y)\|_{_F} \longrightarrow 0$$

e

$$\begin{aligned}\|T_n(x + \lambda y) - T(x) - \lambda T(y)\|_{_F} &= \|T_n(x) + \lambda T_n(y) - T(x) - \lambda T(y)\|_{_F} \\ &= \|T_n(x) - T(x) + \lambda T_n(y) - \lambda T(y)\|_{_F} \\ &\leq \|T_n(x) - T(x)\|_{_F} + |\lambda|\|T_n(y) - T(y)\|_{_F} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Como o limite é único, segue que $T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y)$, isto é, T é linear. Fazendo $m \longrightarrow \infty$ em (1) obtemos

$$\|(T_n - T)(x)\|_{_F} = \|T_n(x) - T(x)\|_{_F} \leq \varepsilon\|x\|_{_E} \quad (2)$$

para todos $x \in E$ e $n \geq n_0$. Em particular,

$$\|(T_{n_0} - T)(x)\|_{_F} = \|T_{n_0}(x) - T(x)\|_{_F} \leq \varepsilon\|x\|_{_E}$$

para todo $x \in E$, o que nos garante que $(T - T_{n_0}) \in \mathcal{L}(E, F)$. Portanto $T = (T - T_{n_0}) + T_{n_0} \in \mathcal{L}(E, F)$. De (2) segue que $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$, e assim segue que $T_n \longrightarrow T$ em $\mathcal{L}(E, F)$. ■

A proposição anterior nos mostra que uma norma para o espaço dual E' do espaço normado E é dada por

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$$

para todo funcional $\varphi \in E'$. Da Proposição 3.3.4(c) e por $\mathbb{R}$ ser um espaço de Banach temos:

Corolário 3.3.5. *O dual E' de qualquer espaço normado E é um espaço de Banach.*

Exemplo 3.3.6. O operador linear identidade $I : E \to E$ é claramente contínuo. Além disso, possui norma 1. Com efeito, seja $\|x\| \leq 1$, $\|I\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|I(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|x\| = 1$.

Exemplo 3.3.7. Todo operador linear cujo domínio é um espaço normado de dimensão finita é contínuo. Com efeito, sejam E, F espaços normados, E de dimensão finita. Sendo $x \in E$, tem-se $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ em que $a_i \in \mathbb{R}$ e e_i são vetores normalizados, isto é, vetores de norma igual a 1, e que formam uma base de E. Seja $T : E \to F$ linear. É suficiente mostrar que T é contínua na origem. Primeiro, considere que a norma em E seja dada por $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$. Considere e_k tal que $\|T(e_k)\|_F = \max_{1\leq i\leq n} \|T(e_i)\|_F$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, se tomarmos $\delta > 0$ tal que $\delta = \varepsilon/\|T(e_k)\|_F$, vemos que

$$\|x\|_1 = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\|_1 < \delta$$

implica

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|_F = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i T(e_i)\right\|_F \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \|T(e_i)\|_F &\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \|T(e_k)\|_F \\
&< \frac{\varepsilon}{\|T(e_k)\|_F} \|T(e_k)\|_F < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que T é contínua em $x = 0$, segundo a norma $\|\cdot\|_1$. Pelo Teorema 3.3.1, T é contínuo. Por outro lado, como argumentado na Observação 3.1.17, qualquer norma $\|\cdot\|_E$ é equivalente a $\|\cdot\|_1$ em E e, pela Observação 3.3.3, métricas equivalentes (e portanto normas equivalentes) não alteram a Topologia, isto é, os abertos de $\tau_{\|\cdot\|_1}$ e $\tau_{\|\cdot\|_E}$ são iguais. Logo, T é contínua em E.

Diferentemente do que ocorre em espaços normados de dimensão finita, os operadores lineares perdem a garantia da continuidade quando seu domínio passa a ser um espaço de dimensão infinita. Um exemplo clássico de Álgebra Linear é o caso:

Exemplo 3.3.8. Considere o subconjunto $\mathcal{P}[0,1]$ de $C[0,1]$ formado pelas funções polinomiais. É claro que $\mathcal{P}[0,1]$ é um subespaço vetorial de $C[0,1]$. Logo, é um espaço normado com a norma $\|\cdot\|_\infty$ herdada de $C[0,1]$. O operador derivação

$$D : \mathcal{P}[0,1] \to \mathcal{P}[0,1] \ , \ D(f) = f' = \text{ derivada de } f$$

é linear. Suponha que D seja contínuo. Nesse caso existe $C > 0$ tal que $\|D(f)\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$, para todo polinômio $f \in \mathcal{P}[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tome $f_n \in \mathcal{P}[0,1]$ a função dada por $f_n(t) = t^n$. Então

$$n = \|f_n'\|_\infty = \|D\left(f_n\right)\|_\infty \leq C\left\|f_n\right\|_\infty = C \cdot \max_{t\in[0,1]} |t^n| = C$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e isso configura uma contradição. Logo, D não é contínuo.

Vejamos um exemplo em que o operador linear é bijetor e contínuo, mas seu inverso não é contínuo.

Exemplo 3.3.9. Seja $T : c_{00} \to c_{00}$ o operador linear dado por $T\left((a_n)_{n=1}^\infty\right) = \left(a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \ldots\right)$. É imediato que T é linear e bijetor. Para verificar que é contínuo note que

$$\begin{aligned} \|T\| = \sup_{\|(a_k)_{k=1}^\infty\|_\infty \leq 1} \|T((a_k)_{k=1}^\infty)\|_\infty &= \sup_{\|(a_k)_{k=1}^\infty\|_\infty \leq 1} \left\| \left(\frac{a_k}{k}\right)_{k=1}^\infty \right\|_\infty \\ &\leq \sup_{\|(a_k)_{k=1}^\infty\|_\infty \leq 1} \|(a_k)_{k=1}^\infty\|_\infty = 1. \end{aligned}$$

Logo, T é contínuo. Por outro lado, o operador inverso $T^{-1}\left((a_n)_{n=1}^\infty\right) = (a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots)$ não é contínuo. Com efeito, se T^{-1} fosse contínuo existiria $C > 0$ tal que $\|T^{-1}(x)\|_\infty \leq C\|x\|_\infty$ para todo $x \in c_{00}$. Considere a sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em que n-éssimo termo é dado por $x_n = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, \ldots)$. Têm-se que $x_n \in c_{00}$ e $\|x_n\|_\infty = 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Segue que $\sqrt{n} = \|T^{-1}(x_n)\|_\infty \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é impossível.

3.4 TEOREMAS ELEMENTARES DE ESPAÇOS NORMADOS

Essa seção aborda teoremas clássicos da teoria de Análise Funcional. Para alguns resultados, apenas citamos referências para que o leitor possa verificar as demonstrações, uma vez que foge do escopo desse trabalho.

Comecemos essa seção com o Teorema de Banach-Steinahaus. Esse teorema garante que uma família de operadores lineares contínuos definida num espaço de Banach é uniformemente limitada sempre que for pontualmente limitada.

Teorema 3.4.1 (Teorema de Banach-Steinhaus)**.** *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_i)_{i\in I}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(E,F)$ satisfazendo a condição de que para cada $x \in E$ existe $C_x > 0$ tal que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F < C_x.$$

Então, $\sup\limits_{i\in I} \|T_i\| < \infty$.

Demonstração. Vide [1, Teorema 2.3.2, p. 38]. ■

O exemplo a seguir mostra a necessidade da completude do domínio no enunciado do Teorema de Banach-Steinhaus.

Exemplo 3.4.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o funcional linear contínuo

$$\varphi_n : c_{00} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_n\left((a_j)_{j=1}^{\infty}\right) = na_n.$$

É fácil ver que $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \subset (c_{00})'$ e $\|\varphi_n\| = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dada uma sequência $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in c_{00}$ tomando j_0 tal que $a_j = 0$ para todo $j \geq j_0$, segue que $\varphi_n\left((a_j)_{j=1}^{\infty}\right) = 0$ para todo $n \geq j_0$. Assim, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(x)| < \infty$ para todo $x \in c_{00}$, entretanto $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\| = \infty$.

O Teorema de Banach-Steinhaus tem uma funcionalidade para o estudo da convergência fraca-estrela, tema da Seção 4.2.

Prosseguindo, abordamos o Teorema de Hahn-Banach que explora a existência de uma extensão para funcionais lineares e no qual tem como ponto principal que o funcional linear a ser estendido e a extensão são majorados pelo mesmo funcional sublinear. Existem diferentes versões do Teorema de Hahn-Banach em formas de corolários nos quais se diferenciam no espaço em que é definido funcional linear e, também, quanto à generalidade do teorema.

A essência do Teorema de Hahn-Banach, em sua versão para espaços normados, é que funcionais lineares contínuos definidos em um subespaço G de um espaço normado E podem ser estendidos a todo o espaço E preservando linearidade, continuidade e até mesmo o valor da norma.

O Teorema de Hahn-Banach na sua forma mais geral necessita do Lema de Zorn como ferramenta técnica de verificação. Assim, como foi designado para o Teorema de Tychonoff, não está demonstrado o teorema, mas citamos uma referência. Por outro lado, esse teorema é fundamental para obtermos meios necessários para os resultados que analisamos doravante.

Neste teorema de extensão, consideramos que o objeto a ser estendido é um funcional linear φ o qual é definido em um subespaço G de E e, ainda, deve satisfazer uma limitação estabelecida em termos de um funcional sublinear.

Definição 3.4.3. Um *funcional sublinear* no espaço vetorial E é uma aplicação $p : E \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{ e } \quad p(\alpha x) = \alpha p(x)$$

para todo $\alpha \geq 0$ escalar e para todos $x, y \in E$.

Teorema 3.4.4 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sejam E um espaço vetorial, G um subespaço de E e $p : E \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear. Se $\varphi : G \to \mathbb{R}$ for um funcional linear satisfazendo $\varphi(x) \leq p(x)$, para todo $x \in G$, então existe um funcional linear $\widetilde{\varphi} : E \to \mathbb{R}$ satisfazendo $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in G$, e $\widetilde{\varphi}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$. Dizemos que $\widetilde{\varphi}$ é a extensão de φ.*

Demonstração. Veja [1, Teorema 3.1.1, p. 56]. ■

Observação 3.4.5. É interessante notar que o teorema acima é muito abrangente: não se requisita a continuidade do funcional linear, mas apenas que exista um funcional sublinear p como definido acima e um funcional linear φ que cumpra as condições do teorema.

Tem-se, então, a versão para espaços normados:

Teorema 3.4.6 (Teorema de Hahn-Banach para espaços normados)**.** *Seja G um subespaço de um espaço normado E e seja $\varphi : G \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi} : E \to \mathbb{R}$ cuja restrição a G coincide com φ e $\|\widetilde{\varphi}\|_{E'} = \|\varphi\|_{G'}$.*

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 3.4.4 com $p(x) = \|\varphi\|_{G'} \cdot \|x\|_E$. Seja $\widetilde{\varphi}$ uma extensão de φ para E. Assim, como $\widetilde{\varphi}(x) \leq \|\varphi\|_{G'} \cdot \|x\|_E$ e $-\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi}(-x) \leq \|\varphi\|_{G'} \cdot \|-x\|_E = \|\varphi\|_{G'} \cdot \|x\|_E$ temos que $|\widetilde{\varphi}(x)| \leq \|\varphi\|_{G'} \cdot \|x\|_E$, ou seja, $\widetilde{\varphi}$ é contínuo e, pela definição de norma de operadores, $\|\widetilde{\varphi}\|_{E'} \leq \|\varphi\|_{G'}$. Por outro lado, como $\widetilde{\varphi}$ é extensão de φ, temos $\|\widetilde{\varphi}\|_{E'} \geq \|\varphi\|_{G'}$, ou seja, $\|\widetilde{\varphi}\|_{E'} = \|\varphi\|_{G'}$. ■

Corolário 3.4.7. *Seja E um espaço normado. Para todo $x_0 \in E, x_0 \neq 0$, existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|_E$.*

Demonstração. Considere $G = [x_0]$ e $\varphi \in G'$ definido por $\varphi(ax_0) = a\|x_0\|_E$. É claro que $\|\varphi\|_{G'} = 1$. Pelo Teorema 3.4.6 existe uma extensão $\widetilde{\varphi}$ de φ tal que $\|\widetilde{\varphi}\|_{E'} = \|\varphi\|_{G'}$. É imediato que $\widetilde{\varphi}(x_0) = \|x_0\|_E$. ■

A próxima consequência do Teorema de Hahn-Banach será um alicerce para obtenção de resultados ao longo da dissertação.

Corolário 3.4.8. *Sejam E um espaço normado, $E \neq \{0\}$, e $x \in E$. Então*

$$\|x\|_E = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\}$$

e o supremo é atingido.

Demonstração. Para cada funcional $\varphi \in E', \|\varphi\| \leq 1$, é imediato que $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\|_E \leq \|x\|_E$. Isso mostra que o supremo é menor ou igual a $\|x\|_E$. O fato do supremo ser atingido é garantido pelo Corolário 3.4.7. ■

3.5 ESPAÇOS REFLEXIVOS

Do Corolário 3.3.5 sabemos que o espaço dual E' do espaço normado E é um espaço de Banach. Consideremos, então, o dual $(E')' = E''$ do dual E', também conhecido como *bidual* de E. Na proposição a seguir, vemos que é possível, através do Teorema de Hahn-Banach, induzir um isomorfismo isométrico entre o espaço normado E e um subconjunto de seu bidual E''.

Um operador linear $T : E \to F$ que é uma isometria é chamado de *isometria linear*. Um isomorfismo que é também uma isometria é chamado de *isomorfismo isométrico*, e nesse caso dizemos que os espaços são *isomorfos isometricamente*.

Proposição 3.5.1. *Para todo espaço normado E, o operador linear*

$$J_E : E \to J_E(E) \subset E''$$
$$x \mapsto J_E(x) = J_E^x$$

em que $J_E^x(\varphi) = \varphi(x)$ para todos $x \in E$ e $\varphi \in E'$ é uma isometria linear, chamado de mergulho canônico de E em E''.

Demonstração. Verifiquemos a linearidade de J_E. Considere $x, y \in E$. Assim temos que $x + \lambda y \in E$, com $\lambda \in \mathbb{R}$. Daí, $J_E(x + \lambda y) = J_E^{x+\lambda y}$ e, dado $\varphi \in E'$, temos

$$J_E^{x+\lambda y}(\varphi) = \varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \lambda\varphi(y) = J_E^x(\varphi) + \lambda J_E^y(\varphi).$$

Como φ é arbitrário, segue que J_E é linear. Precisamos garantir que $J_E(x) \in E''$. Mas isto é óbvio pois $|J_E^x(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq C\|\varphi\|$, em que $C = \|x\|_E$. Agora, para cada $x \in E$, de

$$\|J_E^x\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |J_E^x(\varphi)| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| = \|x\|_E$$

onde a última igualdade segue do Corolário 3.4.8, concluímos que J_E é uma isometria linear. ■

Observação 3.5.2. Como E e $J_E(E)$ são isomorfos isometricamente, é usual identificar ambos os espaços simplesmente como E. Ou seja, em um contexto em que E seja visto como subespaço de E'', estamos cometendo o abuso de notação de escrever E onde deveríamos ter escrito $J_E(E)$.

Para que o mergulho canônico J_E de E no seu bidual E'' seja um isomorfismo isométrico falta apenas que seja sobrejetor. Essa propriedade caracteriza uma classe importante de espaços normados:

Definição 3.5.3. Um espaço normado E é dito *reflexivo* se o mergulho canônico $J_E : E \to E''$ for sobrejetor, ou seja, $J_E(E) = E''$. Neste caso J_E é um isomorfismo isométrico.

Proposição 3.5.4. *Todo espaço normado reflexivo é um espaco de Banach.*

Demonstração. Um espaço normado reflexivo é isomorfo isometricamente ao seu bidual, que é Banach por ser um espaço dual pelo Corolário 3.3.5. Daí, segue do Exemplo 2.4.14 que E é espaço de Banach. ■

Exemplo 3.5.5. Espaços normados de dimensão finita são reflexivos. De fato, se E tem dimensão finita n, sabemos da Álgebra Linear que seu dual algébrico E^* também tem dimensão n e, pelo Exemplo 3.3.7 — considerando $\mathbb{R}$ como contradomínio —, o dual algébrico coincide com o dual topológico. Repetindo o argumento resulta que E'' também tem dimensão n e segue facilmente que J_E é sobrejetora, e portanto E é reflexivo.

Exemplo 3.5.6. Pela Proposição 3.5.4 espaços normados incompletos não são reflexivos. O espaço c_{00}, por exemplo, não é reflexivo.

Exemplo 3.5.7. Os espaços das sequências p-somáveis ℓ_p para $1 < p < \infty$ são espaços reflexivos. Os espaços c_0, ℓ_1 e ℓ_∞ não são reflexivos. Para o leitor interessado em verificar essas afirmações veja [1, Seção 4.3, p. 89].

Uma aplicação do Teorema de Hahn-Banach e do Teorema de Banach-Steinhaus utilizando o mergulho canônico assegura que, se a imagem $\varphi(B)$ de um conjunto $B \subset E$, para qualquer $\varphi \in E'$, for limitada, então B é limitado como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 3.5.8. Seja B um conjunto de um espaço normado E tal que $\varphi(B)$ é limitado para todo $\varphi \in E'$. Nessas condições B é limitado. Com efeito, considerando o mergulho canônico $J_E : E \to E''$ temos que, dado $\varphi \in E'$ e $x \in E$, $J_E^x(\varphi) = \varphi(x)$. Então, fixado $\varphi \in E'$, existe $C_\varphi > 0$ tal que

$$\sup_{x \in B} |J_E^x(\varphi)| = \sup_{x \in B} |\varphi(x)| < C_\varphi.$$

Como E' é espaço de Banach, pelo Teorema 3.4.1 existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{x \in B} \|J_E^x\|_{E''} < C.$$

Daí, para todo $\varphi \in E'$ com $\|\varphi\|_{E'} \leq 1$ e para qualquer $x \in B$

$$|J_E^x(\varphi)| = |\varphi(x)| < C.$$

Fixado $x \in B$, pelo Corolário 3.4.8,

$$\|x\|_E = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} \leq C.$$

Portanto, $\|x\|_E \leq C$, para todo $x \in B$. Segue que B é limitado.

4 TOPOLOGIAS FRACAS EM ESPAÇOS NORMADOS

No Teorema 3.2.5 provamos que a bola unitária fechada de um espaço normado de dimensão infinita não é compacta. Este contraste com a dimensão finita indica que a existência de compactos que não estão contidos em subespaços de dimensão finita é uma questão delicada. Na Observação 3.2.6 apontamos a existência de um conjunto compacto não trivial em ℓ_2. As bolas fechadas, infelizmente, não o são na topologia da norma para espaços de dimensão infinita.

Para contornar o problema da falta de compacidade na topologia da norma, buscamos uma nova topologia, menos fina que a topologia da norma, e de tal forma que o conjunto considerado torne-se compacto. Ademais, nesta nova topologia ainda é necessário que certas propriedades permaneçam válidas. A ideia é que quanto menos abertos tiver um espaço, maior a quantidade de subconjuntos compactos, pois menores são as opções de coberturas por abertos. Neste processo de escolher topologias menos finas que a da norma, é preciso prestar atenção na questão da continuidade das funções, em especial dos funcionais lineares. É interessante, sob o ponto de vista de vários aspectos, que os elementos de E' permaneçam contínuos nesta nova topologia em E. Como vimos na Proposição 2.6.3, podemos considerar esta topologia como sendo a menos fina que mantém todos os elementos de E' contínuos. Esta é a topologia gerada por E' e é chamada de topologia fraca em E.

Iniciamos a discussão sobre topologia fraca no âmbito de espaços normados. Em seguida, vemos uma topologia conhecida como topologia fraca-estrela, definida no dual de um espaço normado. Por fim, examinamos de perto a compacidade nessas topologias e constatamos que a reflexividade de espaços normados tem um papel essencial para estabelecer a compacidade na topologia fraca.

4.1 TOPOLOGIA FRACA

Apliquemos a construção da Seção 2.6 a um espaço normado E. As funções que queremos manter contínuas são os funcionais lineares contínuos $\varphi \in E'$.

Definição 4.1.1. A *topologia fraca* no espaço normado E, denotada por $\sigma(E, E')$, é a topologia gerada pelos funcionais lineares contínuos $\varphi \in E'$.

Definição 4.1.2. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E. Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para $x \in E$ na topologia fraca dizemos que a sequência *converge fracamente* e escrevemos $x_n \xrightarrow{w} x$.

As primeiras propriedades da topologia fraca seguem imediatamente da construção realizada na Seção 2.6:

Proposição 4.1.3. *Seja E um espaço normado. Então:*
(a) *Funcionais lineares contínuos são fracamente contínuos, isto é, para todo $\varphi \in E'$, $\varphi : (E, \sigma(E, E')) \to \mathbb{R}$ é contínuo.*
(b) *Para cada $x_0 \in E$, os conjuntos da forma*

$$V_{J,\varepsilon} = \{x \in E : |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| < \varepsilon \text{ para todo } i \in J\}$$

onde J é um conjunto finito, $\varphi_i \in E'$ para todo $i \in J$ e $\varepsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças abertas de x_0 para a topologia fraca.
(c) *Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E. Então $x_n \xrightarrow{w} x$ se, e somente se, $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E'$.*
(d) *$(E, \sigma(E, E'))$ é um espaço de Hausdorff.*
(e) *Sejam Z um espaço topológico e $f : Z \to (E, \sigma(E, E'))$ uma função. Então f é contínua se, e somente se, $\varphi \circ f : Z \to \mathbb{R}$ é contínua para todo $\varphi \in E'$.*

Demonstração. (a) Segue imediatamente da definição de $\sigma(E, E')$ e da Proposição 2.6.3(a).
(b) Seja U uma vizinhança de x_0 na topologia fraca. Pela Proposição 2.6.3(d)

existem um conjunto finito J, funcionais $\varphi_j \in E'$ e abertos V_j em $\mathbb{R}$ contendo $\varphi_j(x_0)$, $j \in J$, tais que $\bigcap_{j\in J} \varphi_j^{-1}(V_j)$ é um aberto da topologia fraca contendo x_0 e contido em U. Como J é finito e $\varphi_j(x_0) \in V_j$ para todo $j \in J$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\varphi_j(x_0), \varepsilon) \subset V_j$ para todo $j \in J$. Disso segue que

$$\begin{aligned} V_{J,\varepsilon} &= \{x \in E : |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| < \varepsilon \text{ para todo } j \in J\} \\ &= \bigcap_{j\in J} \varphi_j^{-1}(B(\varphi_j(x_0), \varepsilon)) \subset \bigcap_{j\in J} \varphi_j^{-1}(V_j) \subset U \end{aligned}$$

e portanto os conjuntos da forma $V_{J,\varepsilon}$ formam uma base de vizinhanças abertas de x_0 para a topologia fraca.
(c) Pelo Exemplo 2.5.3 vimos que uma sequência é uma rede quando a direção da rede é a ordenação do conjunto $\mathbb{N}$. Daí, segue imediatamente da definição de $\sigma(E, E')$ e da Proposição 2.6.3(e) o resultado.
(d) Considere $x, y \in E$, $x \neq y$. Pelo Corolário 3.4.8 existe $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\|_{E'} = 1$ e $\varphi(x - y) = \|x - y\|_E$. Como $\|x - y\|_E \neq 0$ segue que

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x - y) = \|x - y\|_E \Longrightarrow \varphi(x) = \|x - y\|_E + \varphi(y) \neq \varphi(y).$$

Ou seja, E' separa pontos de E. O resultado segue então da Proposição 2.6.3(g) que $\sigma(E, E')$ é Hausdorff.
(e) Segue imediatamente da definição de $\sigma(E, E')$ e da Proposição 2.6.3(f). ■

Corolário 4.1.4. *Em um espaço normado E, se $x_n \longrightarrow x$ então $x_n \xrightarrow{w} x$.*

Demonstração. Se $x_n \longrightarrow x$, da continuidade dos funcionais de E' segue que $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E'$. Da Proposição 4.1.3(c) segue que $x_n \xrightarrow{w} x$. ■

Observação 4.1.5. É interessante informar que a convergência fraca não implica convergência da norma, em [1, Exemplo 6.2.4, p. 145] o leitor pode verificar que existe uma sequência em c_0 que converge na topologia fraca, mas não pela norma.

Apesar de sequências fracamente convergentes não serem necessariamente convergentes pela norma, é garantido que são limitadas:

Proposição 4.1.6. *Seja E um espaço normado.*
(a) *Se $x_n \xrightarrow{w} x$ em E, então a sequência $(\|x_n\|_E)_{n=1}^{\infty}$ é limitada*[1] *e $\|x\|_E \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_E$.*[2]
(b) *Se $x_n \xrightarrow{w} x$ em E e $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ em E', então $\varphi_n(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. (a) Para todo $\varphi \in E'$, $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ pela Proposição 4.1.3(c). Daí, a sequência $(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é limitada para todo $\varphi \in E'$. Pelo Exemplo 3.5.8, segue que o conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado em E. De $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ e $|\varphi(x_n)| \leq \|\varphi\| \|x_n\|_E$, segue que

$$\begin{aligned}|\varphi(x)| = \lim_{n\to\infty} |\varphi(x_n)| = \liminf_{n\to\infty} |\varphi(x_n)| &\leq \liminf_{n\to\infty} \|\varphi\| \, \|x_n\|_E \\ &= \|\varphi\| \cdot \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_E .\end{aligned}$$

Do Corolário 3.4.8 segue que

$$\|x\|_E = \sup_{\|\varphi\|\leq 1} |\varphi(x)| \leq \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \left(\|\varphi\| \cdot \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_E \right) = \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_E .$$

(b) Pelo item (a), existe $C > 0$ tal que $\|x_n\|_E \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$, das convergências $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ e $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$, existe um número natural n_0 tal que

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{E'} < \frac{\varepsilon}{2C} \text{ e } |\varphi(x_n) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Daí,

$$\begin{aligned}|\varphi_n(x_n) - \varphi(x)| &= |\varphi_n(x_n) - \varphi(x_n) + \varphi(x_n) - \varphi(x)| \\ &= |(\varphi_n - \varphi)(x_n) + \varphi(x_n - x)| \\ &\leq |(\varphi_n - \varphi)(x_n)| + |\varphi(x_n - x)| \\ &\leq \|\varphi_n - \varphi\|_{E'} \cdot \|x_n\|_E + |\varphi(x_n) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2C} C + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

[1] Uma sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reais é dita limitada se existe $C > 0$ tal que $|y_n| < C$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
[2] O limite inferior de uma sequência limitada de números reais $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é o menor elemento dos valores de aderência da sequência e é denotado por $\liminf\limits_{n\to\infty} y_n$.

para todo $n \geq n_0$. Isso prova que $\varphi_n(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$. ■

Pela Observação 4.1.5, temos que a topologia da norma em c_0 não coincide com a topologia fraca. Verificamos na proposição a seguir que, mais geralmente, este processo de enfraquecimento de uma topologia só faz sentido quando estivermos trabalhando com espaços de dimensão infinita.

Proposição 4.1.7. *Seja E um espaco normado.*

(a) *A topologia fraca está contida na topologia da norma.*

(b) *As topologias da norma e fraca coincidem se, e somente se, E tem dimensão finita.*

Demonstração. (a) Os funcionais $\varphi \in E'$ são contínuos na topologia da norma $\tau_{\|\cdot\|}$ e, pela definição de topologia fraca $\sigma(E, E')$ e a Proposição 2.6.3(c), a topologia fraca é a interseção de todas as topologias em E que mantêm contínuos esses funcionais lineares. Consequentemente, $\sigma(E, E') \subset \tau_{\|\cdot\|}$.

(b) Suponha que E tenha dimensão finita. Do item (a), deduzimos que todo aberto da topologia fraca é também aberto da topologia da norma. Precisamos demonstrar que os abertos da topologia da norma também são abertos da topologia fraca. Sejam então U um aberto não-vazio da topologia da norma e $x_0 \in U$. Para demonstrar que U é aberto na topologia fraca é suficiente, pela Observação 2.2.19(a) e Proposição 2.2.20(b), mostrar que x_0 é ponto interior de U para a topologia fraca. Ou seja, precisamos encontrar um aberto V na topologia fraca contendo x_0 e contido em U. Para isso, escolha $r > 0$ suficientemente pequeno de modo que $B(x_0, r) \subset U$ e fixe uma base normalizada $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E. Para cada $j = 1, \ldots, n$, considere o funcional

$$\varphi_j : E \to \mathbb{R}, \quad x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \mapsto \varphi_j(x) = a_j.$$

É claro que cada φ_j é linear. Além disso, seguindo o Exemplo 3.3.7, os funcionais lineares também são contínuos pois E tem dimensão finita. Pela

Proposição 4.1.3(b) temos que o conjunto

$$V=\left\{x\in E:|\varphi_j(x)-\varphi_j\left(x_0\right)|<\frac{r}{2n},j=1,\ldots,n\right\}$$

é um aberto na topologia fraca e contém x_0. Assim, dado $x=\sum_{j=1}^{n}a_je_j\in V$, escrevendo $x_0=\sum_{j=1}^{n}\widetilde{a}_je_j$, temos que

$$\begin{aligned}\|x-x_0\|_E=\left\|\sum_{j=1}^{n}\left(a_j-\widetilde{a}_j\right)e_j\right\|_E &\leq\sum_{j=1}^{n}|a_j-\widetilde{a}_j|=\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j\left(x-x_0\right)|\\ &\leq\sum_{j=1}^{n}\frac{r}{2n}=\frac{r}{2}<r.\end{aligned}$$

Logo $V\subset B\left(x_0,r\right)\subset U$, como queríamos. Agora, suponha que E tenha dimensão infinita. Seja $S=\{x\in E:\|x\|_E=1\}$ a esfera unitária de E. Pela continuidade da norma na topologia da norma, temos que S é fechado na topologia da norma. É suficiente mostrar que S não é fechado na topologia fraca. De fato, mostramos que o conjunto $\{x\in E:\|x\|_E<1\}$ está contido no fecho de S na topologia fraca. Seja $x_0\in E$ tal que $\|x_0\|_E<1$ e seja V um aberto na topologia fraca contendo x_0. Pela Observação 2.2.19(b), para mostrar que x_0 pertence ao fecho de S na topologia fraca, basta mostrar que $S\cap V\neq\emptyset$. É razoável considerar V apenas como sendo um aberto da base de vizinhanças de x_0. Neste caso, existem $\varepsilon>0$ e funcionais $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ em E' tais que

$$V=\left\{x\in E:|\varphi_i(x)-\varphi_i\left(x_0\right)|<\varepsilon,\ i=1,\ldots,n\right\}.$$

Vejamos que existe $y_0\in E\backslash\{0\}$ tal que $\varphi_i\left(y_0\right)=0$ para todo $i=1,\ldots,n$. Com efeito, se não fosse o caso, o operador linear

$$T:E\to\mathbb{R}^n,\quad T(z)=(\varphi_1(z),\ldots,\varphi_n(z))$$

seria injetor, mas isso não ocorre pois E tem dimensão infinita. Podemos então considerar a função $f(t)=\|x_0+ty_0\|_E$ para todo $t\in\mathbb{R}$. Como f é contínua, $f(0)=\|x_0\|<1$ e $\lim_{t\to\infty}f(t)=\infty$, o Teorema do Valor Intermediário garante a existência de um número real t_0 tal que $\|x_0 + t_0 y_0\| = f(t_0) = 1$. Assim, $x_0 + t_0 y_0 \in S$. Ademais,

$$\begin{aligned} |\varphi_i(x_0 + t_0 y_0) - \varphi_i(x_0)| &= |\varphi_i(x_0) + t_0 \varphi_i(y_0) - \varphi_i(x_0)| \\ &= |t_0 \varphi_i(y_0)| = 0 < \varepsilon, \end{aligned}$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. Daí, $x_0 + t_0 y_0 \in V$. Logo, $x_0 + t_0 y_0 \in S \cap V$. ■

4.2 TOPOLOGIA FRACA-ESTRELA

Vimos anteriormente que podemos definir uma topologia em um espaço normado E a partir dos funcionais de seu dual E'. O mesmo processo pode ser repetido ao dual E' com os funcionais de E''. Acontece que se considerarmos os funcionais do mergulho canônico $J_E(E) \subset E''$, verificamos que será proveitoso reduzirmos os elementos de E'' para $J_E(E)$. Assim, podemos obter uma topologia em E' induzida pelos elementos de $J_E(E)$. Essa topologia é conhecida como a topologia fraca-estrela.

Definição 4.2.1. A *topologia fraca-estrela* no dual E' do espaço normado E, denotada por $\sigma(E', E)$, é a topologia em E' gerada pelas funções pertencentes ao conjunto $J_E(E) = \{J_E^x \in E'' : x \in E\}$, isto é, pelas funções $\varphi \in E' \mapsto J_E^x(\varphi) = \varphi(x) \in \mathbb{R}$, onde $x \in E$.

Definição 4.2.2. Quando uma sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ em E' converge para $\varphi \in E'$ na topologia fraca-estrela dizemos que a sequência *converge fracamente-estrela*, e escrevemos $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$.

Como verificado no caso da topologia fraca, as seguintes propriedades da topologia fraca-estrela seguem da Proposição 2.6.3:

Proposição 4.2.3. *Seja E um espaço normado. Então:*
(a) *Para todo $x \in E$, $J_E^x : (E', \sigma(E', E)) \to \mathbb{R}$ é contínuo.*
(b) *Para cada $\varphi_0 \in E'$, os conjuntos da forma*

$$W_{J,\varepsilon} = \{\varphi \in E' : |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \varepsilon \text{ para todo } i \in J\},$$

onde J é um conjunto finito, $x_i \in E$ para todo $i \in J$ e $\varepsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças abertas de φ_0 para a topologia fraca-estrela.
(c) Seja $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ *uma sequência em E'. Então $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ se, e somente se, $\varphi_n(x) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $x \in E$.*
(d) $(E', \sigma(E', E))$ *é um espaço de Hausdorff.*
(e) *Sejam Z um espaço topológico e $f : Z \to (E', \sigma(E', E))$. Então f é contínua se, e somente se, $J_E^x \circ f : Z \to \mathbb{R}$ é contínua para todo $x \in E$.*

Demonstração. (a) Segue imediatamente da definição de $\sigma(E', E)$ e da Proposição 2.6.3(a).
(b) Seja U uma vizinhança de φ_0 na topologia fraca-estrela. Pela Proposição 2.6.3(d) existem um conjunto finito R, funcionais $J_E^{x_r} \in J_E(E)$ e abertos V_r em $\mathbb{R}$ contendo $J_E^{x_r}(\varphi_0)$, $r \in R$, tais que $\bigcap\limits_{r \in R} J_E^{x_r -1}(V_r)$ é um aberto da topologia fraca-estrela contendo φ_0 e contido em U. Como R é finito e $J_E^{x_r}(\varphi_0) \in V_r$ para todo $r \in R$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(J_E^{x_r}(\varphi_0), \varepsilon) \subset V_r$ para todo $r \in R$. Disso segue que

$$\begin{aligned} W_{J,\varepsilon} &= \{\varphi \in E' : |\varphi(x_r) - \varphi_0(x_r)| < \varepsilon \text{ para todo } r \in R\} \\ &= \{\varphi \in E' : |J_E^{x_r}(\varphi) - J_E^{x_r}(\varphi_0)| < \varepsilon \text{ para todo } r \in R\} \\ &= \bigcap_{r \in R} J_E^{x_r -1}(B(J_E^{x_r}(\varphi_0), \varepsilon)) \subset \bigcap_{r \in R} J_E^{x_r -1}(V_r) \subset U, \end{aligned}$$

e portanto os conjuntos da forma $W_{J,\varepsilon}$ formam uma base de vizinhanças abertas de φ_0 para a topologia fraca-estrela.
(c) Considerando que, em particular, uma sequência é uma rede quando o conjunto dos índices da rede é $\mathbb{N}$ com a direção do Exemplo 2.5.3, segue imediatamente da definição de $\sigma(E', E)$ e da Proposição 2.6.3(e) o resultado.
(d) Seja $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Logo, existe $x \in E$ tal que $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$. Daí, considere $J_E^x \in J_E(E)$. Segue que $J_E^x(\varphi_1) = \varphi_1(x) \neq \varphi_2(x) = J_E^x(\varphi_2)$. Segue da Proposição 2.6.3(g) que $\sigma(E', E)$ é de Hausdorff.
(e) Segue imediatamente da definição de $\sigma(E, E')$ e da Proposição 2.6.3(f). ■

Com relação à convergência fraca-estrela de sequências temos:

Proposição 4.2.4. *Seja E um espaço normado.*
(a) *Se $\varphi_n \xrightarrow{w} \varphi$ em E', então $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$.*
(b) *Se E for Banach e $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ em E' então a sequência $\left(\|\varphi_n\|_{E'}\right)_{n=1}^{\infty}$ é limitada e $\|\varphi\|_{E'} \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_{E'}$.*
(c) *Se E for Banach, $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ em E' e $x_n \longrightarrow x$ em E, então $\varphi_n(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. (a) Seja $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E'. Pela Proposição 4.1.3(c), se $\varphi_n \xrightarrow{w} \varphi$, então $f(\varphi_n) \longrightarrow f(\varphi)$ para todo $f \in E''$. Em particular, desde que $J_E(E) \subset E''$, então vale para os funcionais $J_E^x \in J_E(E)$, com $x \in E$. Note que $J_E^x(\varphi_n) \longrightarrow J_E^x(\varphi)$ se, e somente se, $\varphi_n(x) \longrightarrow \varphi(x)$, para todo $x \in E$, o resultado segue da Proposição 4.2.3(c).
(b) Seja $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E'. Se $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$, então, pela Proposição 4.2.3(c), $\varphi_n(x) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $x \in E$. Isto nos garante que $(\varphi_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência limitada.[3] Pelo Teorema 3.4.1, temos que a sequência $\left(\|\varphi_n\|_{E'}\right)_{n=1}^{\infty}$ é limitada. Além disso, de $\varphi_n(x) \longrightarrow \varphi(x)$ e $|\varphi_n(x)| \leq \|\varphi_n\|_{E'} \|x\|_E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$|\varphi(x)| = \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(x)| = \liminf_{n\to\infty} |\varphi_n(x)| \leq \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_{E'} \|x\|_E.$$

Tomando o supremo dos valores de φ para os vetores $x \in E$ com norma $\|x\|_E \leq 1$, obtemos $\|\varphi\|_{E'} \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_{E'}$.
(c) Pelo item (b) existe $C > 0$ tal que $\|\varphi_n\|_{E'} \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ademais, dado $\varepsilon > 0$, das convergências $\varphi_n(x) \longrightarrow \varphi(x)$ e $x_n \longrightarrow x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $\|x_n - x\|_E < \frac{\varepsilon}{2C}$, para todo $n \geq n_0$. Daí,

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x_n) - \varphi(x)| &= |\varphi_n(x_n) - \varphi_n(x) + \varphi_n(x) - \varphi(x)| \\ &\leq |\varphi_n(x_n - x)| + |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \\ &\leq \|\varphi_n\|_{E'} \|x_n - x\|_E + |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < C\frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

[3] Uma sequência convergente de números reais é limitada, vide [5, Teorema 3, p. 76].

Observação 4.2.5. É interessante informar que a convergência fraca-estrela não implica convergência fraca, em [1, Exemplo 6.3.4, p. 153] o leitor pode verificar que existe uma sequência em ℓ_1 que converge na topologia fraca-estrela, mas não converge fracamente.

Denotando por $(E', \sigma(E', E))'$ o espaço formado pelos funcionais lineares de E' que são contínuos na topologia fraca-estrela $\sigma(E', E)$ temos, pela Proposição 4.2.3(a), que $J_E(E) \subset (E', \sigma(E', E))'$. Para verificarmos a inclusão inversa precisamos de um resultado complementar da Álgebra Linear:

Lema 4.2.6. *Sejam E um espaço vetorial e $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ funcionais lineares em E tais que $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i) \subset \ker(\varphi)$. Então, existem escalares $a_1, \ldots, a_n$ tais que $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i$.*

Demonstração. Considere os operadores lineares

$$T : E \to \mathbb{R}^n, \quad T(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \text{ e}$$
$$U : T(E) \to \mathbb{R}, \quad U((\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))) = \varphi(x).$$

O operador U é bem definido: se $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) = (\varphi_1(y), \ldots, \varphi_n(y))$, então $(\varphi_1(x-y), \ldots, \varphi_n(x-y)) = (0, \ldots, 0)$. Neste caso, $(x-y) \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i)$. Isso implica que $(x-y) \in \ker(\varphi)$ e portanto $\varphi(x) = \varphi(y)$. A linearidade de U é trivial. Seja $\widetilde{U} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma extensão linear de U, com $\widetilde{U}(v) = U(v)$ para $v \in T(E)$. Da representação matricial das transformações lineares entre espaços de dimensão finita existem escalares $a_1, \ldots, a_n$ tais que

$$\widetilde{U}(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j z_j \text{ para todos } z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}.$$

Em particular,

$$\varphi(x) = U(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) = \widetilde{U}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) = \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j(x),$$

para todo $x \in E$. ∎

A proposição a seguir garante que os funcionais em E'' que são contínuos em E' na topologia fraca-estrela são aqueles que pertencem a $J_E(E)$.

Proposição 4.2.7. *Sejam E um espaço normado e $f : (E', \sigma(E', E)) \to \mathbb{R}$ um funcional linear e contínuo. Então existe $x \in E$ tal que $f = J_E^x$. Equivalentemente, $(E', \sigma(E', E))' = J_E(E)$.*

Demonstração. Sendo f é contínuo na topologia fraca-estrela $\sigma(E', E)$ e $f(0) = 0$, existe uma vizinhança V da origem em E' na topologia fraca-estrela tal que $|f(\varphi)| < 1$ para todo funcional $\varphi \in V$. Da Proposição 4.2.3(b), podemos tomar V da forma

$$V = \{\varphi \in E' : |\varphi(x_i)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\},$$

onde $\varepsilon > 0$ e $x_1, \ldots, x_n \in E$. Se $J_E^{x_i}(\varphi) = \varphi(x_i) = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$, temos que $\varphi \in V$. Neste caso, para todo natural k é verdade que $(k\varphi)(x_i) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, e, portanto, $k\varphi \in V$. Isso implica que $|f(k\varphi)| < 1$, ou seja, $|f(\varphi)| < \frac{1}{k}$ para todo k natural. Portanto, $f(\varphi) = 0$. Provamos que $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(J_E^{x_i}) \subset \ker(f)$. Pelo Lema 4.2.6 existem escalares $a_1, \ldots, a_n$ tais que
$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i J_E^{x_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i J_E(x_i) = J_E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right).$$ ∎

De modo análogo ao que realizamos na Proposição 4.1.7, estabelecemos na próxima proposição uma relação entre as topologias fraca e fraca-estrela. Fica claro, nessa proposição e na próxima seção, a relevância da reflexividade de um espaço normado.

Proposição 4.2.8. *Seja E um espaço normado.*
(a) *Em E', a topologia fraca-estrela $\sigma(E', E)$ está contida na topologia fraca $\sigma(E', E'')$.*
(b) *As topologias fraca $\sigma(E', E'')$ e fraca-estrela $\sigma(E', E)$ coincidem em E' se, e somente se, E é reflexivo.*

Demonstração. (a) A topologia fraca $\sigma(E', E'')$ mantém contínuos todos os funcionais de E''. Em particular mantém contínuos os funcionais da forma J_E^x com $x \in E$. Como a topologia fraca-estrela $\sigma(E', E)$ é a menor topologia que mantém esses últimos funcionais contínuos, segue que $\sigma(E', E) \subset \sigma(E', E'')$.
(b) Se E for reflexivo, então para todo $f \in E''$ temos que existe $x \in E$ tal que $f = J_E^x$. Como $\sigma(E', E)$ é a menor topologia que perpetua todos os funcionais de $J_E(E)$ contínuos, e $E'' = J_E(E)$ segue que $\sigma(E', E) = \sigma(E', E'')$. Reciprocamente, suponha que E não seja reflexivo. Então existe $f \in E''$, $f \notin J_E(E)$. Temos que f é contínuo na norma de E', e portanto é contínuo na topologia fraca $\sigma(E', E'')$ pela Proposição 4.1.3(a). Mas pela Proposição 4.2.7 sabemos que f não é contínuo na topologia fraca-estrela $\sigma(E', E)$, o que prova que as duas topologias não coincidem. ∎

4.3 COMPACIDADE FRACA

Estudamos nessa seção a possibilidade de obtermos a compacidade da bola fechada unitária $B_E = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$ de um espaço normado E a partir das topologias fraca e fraca-estrela. O primeiro passo é verificarmos esses resultados para a topologia fraca-estrela pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki. Posteriormente analisamos que, para a topologia fraca de E, a reflexividade é um divisor de águas para sabermos se a bola B_E é compacta na topologia fraca.

Para a compreensão do teorema abaixo, reveja a Definição 2.7.12 de produto cartesiano generalizado de conjuntos e a Proposição 2.7.13 que define a topologia produto num produto cartesiano de uma família de espaços topológicos. Além disso, fazemos uso do Teorema de Tychonoff.

Teorema 4.3.1 (Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *Para todo espaço normado E, a bola $B_{E'}$ é compacta na topologia fraca-estrela de E'.*

Demonstração. Considere o produto cartesiano generalizado $Y := \prod_{x \in E} \mathbb{R}$ com a topologia produto. Os elementos de Y têm a forma $\omega = (\omega_x)_{x \in E}$ com

$\omega_x \in \mathbb{R}$, para todo $x \in E$. Para cada $x \in E$, considere a projeção da x-ésima coordenada definida por

$$\pi_x : Y \to \mathbb{R}, \quad \pi_x(\omega) = \omega_x$$

Pela Proposição 2.7.14, a topologia produto é a menor topologia em Y que torna contínuas as projeções π_x, $x \in E$. Em outras palavras, a topologia produto é a topologia induzida pela família de projeções $(\pi_x)_{x\in E}$. Considere a função

$$\Phi : (E', \sigma(E', E)) \to Y, \quad \Phi(\varphi) = (\varphi(x))_{x\in E}.$$

Para cada $x \in E$, $\pi_x \circ \Phi = J_E^x$, que é contínua na topologia fraca-estrela. Daí, pela Proposição 2.6.3(f), concluímos que Φ é contínua. É claro que Φ é injetora, pois dado $\varphi_1 \neq \varphi_2$ em E', temos que existe $x \in E$ tal que $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$. Logo, na x-ésima coordenada de $(\varphi_1(x))_{x\in E}$ e $(\varphi_2(x))_{x\in E}$ os valores são distintos. Daí $(\varphi_1(x))_{x\in E} \neq (\varphi_2(x))_{x\in E}$. Para provar que Φ é um homeomorfismo sobre sua imagem, falta mostrar que $\Phi^{-1} : \Phi(E') \to (E', \sigma(E', E))$ é contínua. Para isso, seja $x \in E$. De

$$J_E^x \circ \Phi^{-1}\left((\varphi(y))_{y\in E}\right) = J_E^x(\varphi) = \varphi(x),$$

concluímos que $J_E^x \circ \Phi^{-1}$ é a restrição de π_x a $\Phi(E')$, e portanto contínua. Assim, $J_E^x \circ \Phi^{-1}$ é contínua, para todo $x \in E$. Isto nos permite garantir, pela Proposição 4.2.3(e), que Φ^{-1} é contínua. Provamos então que $\Phi : (E', \sigma(E', E)) \to \Phi(E')$ é um homeomorfismo. Em particular, $(B_{E'}, \sigma(E', E))$ é homeomorfo a $\Phi(B_{E'})$ com a topologia produto. Pela Proposição 2.7.9, basta então provar que $\Phi(B_{E'})$ é compacto em $\Phi(E')$ na topologia produto. Pela Proposição 2.7.10, é suficiente mostrar que $\Phi(B_{E'})$ é compacto em Y. Como $|\varphi(x)| \leq \|x\|_E$, para todos $x \in E$ e $\varphi \in B_{E'}$, $\Phi(B_{E'}) \subset \prod\limits_{x\in E} [-\|x\|_E, \|x\|_E]$. Cada intervalo fechado $[-\|x\|_E, \|x\|_E]$ é compacto em $\mathbb{R}$. Logo, $\prod\limits_{x\in E} [-\|x\|_E, \|x\|_E]$ é compacto em Y pelo Teorema 2.7.15. Pela Proposição 2.7.3, resta provar que $\Phi(B_{E'})$ é fechado em Y. Para isso, considere uma rede $(\Phi(\varphi_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ em $\Phi(B_{E'})$ que converge na topologia produto para $\omega = (\omega_x)_{x\in E} \in Y$. Pelas Proposições 2.6.3(e) e 2.7.14 temos que

$$\varphi_\lambda(x) = \pi_x\left((\varphi_\lambda(x))_{x\in E}\right) = \pi_x(\Phi(\varphi_\lambda)) \xrightarrow{\lambda} \pi_x(\omega) = \omega_x,$$

para todo $x \in E$. Definamos

$$\varphi : E \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \omega_x.$$

A linearidade de φ segue da seguinte caracterização:

$$\begin{aligned} \omega_{x+\alpha y} \xleftarrow{\lambda} \varphi_\lambda(x+\alpha y) &= \varphi_\lambda(x) + \alpha\varphi_\lambda(y) \\ &= \varphi_\lambda(x) + \alpha\varphi_\lambda(y) \xrightarrow{\lambda} \omega_x + \alpha\omega_y \end{aligned} \tag{3}$$

em que (3) se refere a convergência da rede na topologia usual de $\mathbb{R}$. Agora, para verificarmos a continuidade de φ, veja que, como $|\varphi_\lambda(x)| \leq \|x\|_E$ para todo λ e todo $x \in E$, da continuidade do módulo segue que

$$|\varphi(x)| = |\omega_x| \xleftarrow{\lambda} |\varphi_\lambda(x)| \leq \|x\|_E,$$

para todo $x \in E$. Isso prova que $\varphi \in B_{E'}$. É claro que $\omega = \Phi(\varphi) \in \Phi(B_{E'})$. Portanto, pela Proposição 2.5.6(c), $\Phi(B_{E'})$ é fechado. ■

Doravante, constatamos que é possível obter compacidade da bola unitária fechada B_E na topologia fraca de um espaço normado E, desde que esse espaço seja reflexivo. Esse resultado é decorrente do Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki e do seguinte Lema:

Lema 4.3.2. *Seja E um espaço de Banach. O mergulho canônico J_E é um homeomorfismo de $(E, \sigma(E, E'))$ sobre sua imagem $J_E(E)$ com a topologia induzida pela topologia fraca-estrela de E''. Isto é, a função*

$$J_E : (E, \sigma(E, E')) \to J_E(E) \subset (E'', \sigma(E'', E'))$$

é um homeomorfismo.

Demonstração. É evidente que a função é bijetora. A propriedade de ser contínua e ter inversa contínua segue do fato de que, para toda rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ em E,

$$\begin{aligned} x_\lambda \xrightarrow{w} x \text{ em } E &\iff \varphi\,(x_\lambda) \longrightarrow \varphi(x) \text{ para todo funcional } \varphi \in E' \\ &\iff J_E^{x_\lambda}(\varphi) \longrightarrow J_E^{x}(\varphi) \text{ para todo funcional } \varphi \in E' \\ &\iff J_E^{x_\lambda} \xrightarrow{w^*} J_E^{x} \text{ em } E'' \\ &\iff J_E^{x_\lambda} \xrightarrow{w^*} J_E^{x} \text{ em } J_E(E). \end{aligned}$$

A primeira equivalência decorre da Proposição 4.1.3(c) para a topologia fraca; a segunda é trivial; a terceira decorre da Proposição 4.2.3(c) para a topologia fraca-estrela; a última vem do fato de que em $J_E(E)$ estamos considerando a topologia induzida pela topologia fraca-estrela de E''. ■

Teorema 4.3.3. *Para todo espaço reflexivo E, a bola B_E é compacta na topologia fraca $\sigma\,(E, E')$.*

Demonstração. Por E ser reflexivo, $J_E(E) = E''$. Temos que

$$J_E : (E, \sigma\,(E, E')) \to (E'', \sigma\,(E'', E'))$$

é um homeomorfismo pelo Lema 4.3.2. Pelo Teorema 4.3.1 constatamos que $B_{E''}$ é compacta na topologia $\sigma\,(E'', E')$. Portanto, $B_E = J_E^{-1}\,(B_{E''})$ é compacta na topologia $\sigma\,(E, E')$ pela Proposição 2.7.9. ■

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho pudemos constatar que os conceitos de topologia geral se fazem muito úteis para obtenção de resultados dentro do contexto de espaços normados. Vimos que a continuidade dos operadores lineares depende da topologia trabalhada e que podemos aplicar o processo de enfraquecimento de uma topologia para outra tal que permaneça propriedades interessantes. Estudamos resultados e conceitos não explorados em diversos cursos de graduação e nos quais são vistos em cursos de mestrado e doutorado.

Originalmente, esta monografia possuía $\frac{3}{2}$ a mais de conteúdos do que atualmente, foi necessário escolher a dedo quais resultados permaneceriam e quais seriam omitidos. Pelo fato do ponto de chegada desse trabalho ser teoremas que envolvam compacidade em espaços normados, foi crucial a dedicação de análise de conteúdos necessários para chegar ao propósito. Pode-se dizer que esse processo de verificação contribui para um amadurecimento matemático do formando em como elaborar os problemas e resultados. Um exemplo de conteúdo que foi removido são os Espaços Separáveis, esses espaços são espaços métricos e possuem a propriedade de que o espaço contém um subconjunto denso e enumerável. As aplicações desses espaços são imensas, desde de poder determinar se um espaço é reflexivo ou não, até determinar que $(B_E, \sigma(E, E'))$ é metrizável, se E' for separável. Também estudamos majoritariamente os exemplos de espaços de sequências, mas ainda existem os espaços de funções que são mais sofisticados que $C[a, b]$. Tais espaços necessitam da Teoria de Medida e Integração, teoria na qual é possível integrar determinadas funções que não são possíveis para integral de Riemann.

A produção deste trabalho viabilizou um contato mais aprofundado com os conceitos estudados nas disciplinas de Análise na Reta I e II do Curso de Licenciatura em Matemática da UFSC - Campus Blumenau. Todos os conteúdos abordados neste trabalho podem ser usados como ferramenta para estudar diversos outros assuntos em matemática avançada. Ademais, podemos prosseguir estudando outros temas interessantes assim como os abordados na monografia, como os Espaços de Hilbert, Teoria Espectral, Espaços Vetoriais Topológicos ou outras consequências do Teorema de Hahn-Banach como o Teorema da Aplicação Aberta ou Teorema do Gráfico Fechado.

REFERÊNCIAS

[1] Geraldo Botelho, Daniel Pellegrino e Eduardo Teixeira. *Fundamentos de Análise Funcional*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[2] Flávio Ulhoa Coelho e Mary Lilian Lourenço. *Curso de Álgebra Linear*. 2ª ed. São Paulo: EdUSP, 2005.

[3] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley Sons, 1978.

[4] Elon Lages Lima. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[5] Elon Lages Lima. *Curso de Análise*. Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[6] Elon Lages Lima. *Curso de Análise*. Vol. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[7] Elon Lages Lima. *Elementos de Topologia Geral*. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

[8] Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[9] Jorge Mujica. *Notas de Topologia Geral*. IMECC - UNICAMP, 2005.

[10] Cecília de Souza Fernandez e Luiz Alberto Viana da Silva. *Sobre a Noção de Compacidade*. Universidade Federal Fluminense, 2014.