

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CAMPUS BLUMENAU  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

João Guilherme Voss

**A equação da onda e sua controvérsia**

Blumenau  
2022



João Guilherme Voss

## **A equação da onda e sua controvérsia**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática do Campus Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Vanderlinde da Silva

Blumenau

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Voss, João Guilherme

A equação da onda e sua controvérsia / João Guilherme  
Voss ; orientador, André Vanderlinde da Silva, 2022.  
65 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, , Programa de Pós-Graduação em , Florianópolis,  
2022.

Inclui referências.

1. . 2. Equação da onda. 3. História da Matemática. 4.  
Equações Diferenciais Parciais. 5. Conceito de função. I.  
Silva, André Vanderlinde da. II. Universidade Federal de  
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em . III. Título.

João Guilherme Voss

## **A equação da onda e sua controvérsia**

Este Trabalho Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Licenciado em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática.

Blumenau, 06 de março de 2022.

---

Prof. Dr. Júlio Faria Corrêa  
Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática

### **Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. André Vanderlinde da Silva  
Orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

---

Prof. Dr. Júlio Faria Corrêa  
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

---

Prof. Dr. Francis Félix da Córdova Puma  
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus pais, por todo o suporte financeiro e motivacional que me proporcionaram, por mais que na maioria das vezes não conseguissem compreender as coisas que estudava.

Aos meus amigos Tainá da Silva, Vantuir D. Junior, Elias K. Filho, Pedro A. T. Junior e Bruna G. Schimitz, que proporcionaram momentos que levarei para a vida.

Aos professores Luiz Rafael dos Santos e Felipe Vieira, que me permitiram participar de trabalhos de iniciação científica e de extensão. Se consegui redigir este trabalho e se possuo confiança em dar aulas é por causa destes momentos.

Ao meu orientador André Vanderlinde da Silva, por todo o apoio que recebi neste trabalho, por todos os momentos de incentivo, sejam em suas aulas ou em reuniões. Pela paciência e por acreditar que eu conseguiria produzir esta monografia.

À UFSC-Blumenau e a todo seu corpo docente que me permitiram realizar esta graduação com a capacidade de desenvolver meus conhecimentos e valores críticos.





## RESUMO

Esta monografia busca detalhar as controvérsias ocorridas no século XVIII sobre as possíveis soluções da equação da onda. Para tal, serão apresentadas as soluções propostas por quatro autores: d'Alembert, Euler, Bernoulli e Lagrange. Ainda será discorrido sobre as críticas que cada autor recebeu por sua solução, evidenciando as concepções matemáticas sobre funções e séries dos autores na época.

**Palavras-chave:** Equação da onda; História da Matemática; Equações diferenciais parciais; Conceito de função



## ABSTRACT

This monograph seeks to detail the controversies that occurred in the 18th century upon the possible solutions of the wave equation. To this end, solutions proposed by four authors will be presented: d'Alembert, Euler, Bernoulli and Lagrange. Also, the criticism that each author received for his solution will be discussed, evidencing the authors' mathematical conceptions about functions and series at the time.

**Keywords:** Wave equation; History of Mathematics; Partial differential equations; Function concept



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>AS SOLUÇÕES DE D'ALEMBERT E EULER, E A PRIMEIRA CONTROVÉRSIA</b>	<b>15</b>
2.1	D'ALEMBERT EM BUSCA DE UMA SOLUÇÃO	15
2.2	D'ALEMBERT E SUA SOLUÇÃO GERAL	18
2.3	EULER E A SUA SOLUÇÃO	20
2.4	EULER E AS NOVAS CLASSES DE FUNÇÕES	23
2.5	A PRIMEIRA CONTROVÉRSIA	26
<b>3</b>	<b>UMA SOLUÇÃO ESPECÍFICA DE EULER, BERNOULLI E A SEGUNDA CONTROVÉRSIA</b>	<b>29</b>
3.1	EULER E SUA SOLUÇÃO ESPECÍFICA PARA HARMÔNICOS	29
3.2	BERNOULLI E SUA SOLUÇÃO	30
3.3	A SEGUNDA CONTROVÉRSIA	32
<b>4</b>	<b>EQUAÇÃO DA ONDA - LAGRANGE</b>	<b>35</b>
4.1	LAGRANGE E SUA SOLUÇÃO	35
4.2	A SOLUÇÃO DE LAGRANGE E AS SÉRIES DE FOURIER	36
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>39</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>41</b>
	<b>APÊNDICE A – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA</b>	<b>43</b>
	<b>APÊNDICE B – DEDUÇÃO DA SOLUÇÃO DE LAGRANGE PELO MÉTODO DE FOURIER</b>	<b>47</b>
	<b>APÊNDICE C – ESTUDO DE ONDAS</b>	<b>53</b>
C.1	ONDAS TRANSVERSAIS	53
C.2	ONDAS ESTACIONÁRIAS	60
C.3	RESSONÂNCIA E HARMÔNICOS	63



## 1 INTRODUÇÃO

Embora isto não fosse algo premeditado ou mesmo que não tenha ocorrido de maneira linear, o século XVII começa a preparar as mudanças profundas que a Matemática sofreria no século seguinte. Se despreendendo do padrão euclidiano, uma nova filosofia surge com as ideias de diversos pensadores, entre eles, Gottfried Leibniz (1646 - 1716).

Dentro da geometria, começa-se a considerar que quanto menos limitações, mais profundo e geral é o estudo. Não caberia mais aos novos matemáticos fazer geometria apenas com régua e compasso. Começa aqui a noção da Matemática como uma arte da invenção, ao passo que bastaria denotar as ferramentas e o método utilizados para a construção de uma entidade geométrica.

Isso se intersecta com a filosofia de Leibniz: dada uma hipótese, ou uma construção, todas as suas propriedades podem ser deduzidas, por mais que isto não seja trivial em primeira instância. Isto é, todas suas verdades já se encontram presentes, bastam ser formalizadas pelo método rigoroso da demonstração.

O cerne desta concepção se consolida no cálculo infinitesimal, método este que trazia a representação das entidades matemáticas por meio do algebrismo. Isso se distancia do padrão de escrita euclidiano, fundamentado na construção da geometria pela abstração. E é por meio desta representação canônica à época que Isaac Newton (1642 - 1727) apresenta seu modelo de cálculo. Dois modelos de representação de uma mesma estrutura. Niccoló Guiccardini (1957 - ), estudioso da obra de Newton, expressa que os métodos empregados por Newton poderiam ser traduzidos aos algoritmos de Leibniz. Mas, na época, a comunidade matemática se dividiu entre o conservador e a inovação.

Os dois autores, com suas diferentes formas de exposição se debruçaram sobre vários entraves da Matemática da época, que agora poderiam ser resolvidos por seus novos métodos. Segundo [9], a busca de um algoritmo para encontrar tangentes e áreas inferiores a curvas somada ao desenvolvi-

mento do cálculo infinitesimal levam Leibniz a definir regras de derivação de diferentes curvas.

A novidade estava sobretudo em incluir novas curvas, expressas por equações envolvendo frações algébricas e irracionais. Leibniz demonstrou como esse novo cálculo permitia ir além dos métodos anteriores para encontrar tangentes, ao incluir curvas transcendentais que não podem ser reduzidas ao cálculo algébrico e que eram excluídas da geometria por Descartes (ROQUE, 2012, p.306).

Assim, uma equação algébrica deixa de ser vista apenas como uma regra de relação, mas também como uma forma de invenção e criação. Faz sentido que por esta nova compreensão passemos a buscar curvas que satisfaçam certas propriedades. Caso estejam relacionadas a suas taxas de variação, obtemos aí uma equação diferencial, por exemplo.

A busca de provar qual dos dois modelos seria o superior levou ao estudo de um grupo de problemas físicos, hoje tidos como clássicos. Entre eles, o problema da corda vibrante o qual passamos a enunciar seguidamente, baseado em [4]: um fio elástico uniforme é esticado entre dois pontos fixos, digamos  $A$  e  $B$ , distantes de medida  $l$ . O fio sofre uma leve vibração vertical. É imposto ao sistema a presença de eixo  $x$ , que passa por  $A$  e  $B$ , e do eixo  $y$ , reta vertical que é perpendicular ao eixo  $x$ . O objetivo primário é encontrar uma equação que descreva o movimento em termos de  $y$  como uma função da posição  $x$  e do tempo  $t$ , para em seguida resolvê-la para encontrar uma expressão explícita de  $y$  em função de  $x$  e  $t$ .

Este trabalho busca apresentar a controvérsia gerada pelas possíveis soluções da equação da onda, dadas por diferentes autores, com diferentes visões fundamentadas nos modelos tratados: d'Alembert, o matemático rigoroso; Euler e Lagrange, dois físicos matemáticos, denominação esta que começava a surgir na época; e Bernoulli, o físico. E nesse contexto, mesmo definições usuais à época seriam revistas. Vieram à tona questões relacionadas à convergência de séries, às relações físico-matemáticas e à própria teoria de funções. Uma controvérsia devidamente complexa.



## 2 AS SOLUÇÕES DE D’ALEMBERT E EULER, E A PRIMEIRA CONTROVÉRSIA

### 2.1 D’ALEMBERT EM BUSCA DE UMA SOLUÇÃO

Jean le Rond d’Alembert (1717 - 1783) foi um dos críticos do modelo do cálculo infinitesimal apresentado por Leibniz. Segundo o mesmo, o uso dos infinitesimais apenas simplifica uma demonstração, mas não trás o rigor necessário para a mesma. Esta repulsa ao uso de infinitesimais está presente em sua dedução da equação da onda, feita em seu artigo de 1747, “*Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration*”. Nesse artigo, d’Alembert trabalhou com a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(t, x), \quad (1)$$

em que  $y(t, x)$  é uma função desconhecida que depende do tempo  $t$  e da posição  $x$ . A dedução desta equação pode ser encontrada em apêndice A<sup>1</sup>.

Esta seção busca trazer o método utilizado por d’Alembert em seu artigo original para encontrar sua solução geral da eq. (1). A referência principal para esta seção é o livro [2]. Também serão utilizadas definições e teoremas auxiliares, baseados em [5] e [6].

Como primeiro passo, de maneira a simplificar a expressão, d’Alembert define

$$p = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (2)$$

Da eq. (2) segue que a eq. (1) pode ser escrita como

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3)$$

Além disso, o autor assume a necessidade de que  $y(t, x)$  seja de classe  $C^2$ , de forma que suas derivadas mistas sejam iguais<sup>2</sup>, isto é,

$$\frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x \partial t}.$$

<sup>1</sup> Note que a eq. (1) não está no seu formato conhecido atualmente. Veja o apêndice A para mais detalhes sobre o formato de eq. (1)

<sup>2</sup> Seja  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $A$  aberto. Se  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  for de classe  $C^2$  em  $A$ , segue que para todo

E usando eq. (2), temos

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (4)$$

Utilizando-se de  $p$  e  $q$ , d'Alembert define duas expressões<sup>3</sup>, aqui denotados como  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\alpha = p \cdot dx + q \cdot dt, \quad \beta = q \cdot dx + p \cdot dt.$$

Segue sem dificuldade<sup>4</sup> que  $\alpha = dy$ . Para  $\beta$ , vale uma análise mais detalhada. Pela igualdade na eq. (3), é garantida<sup>5</sup> a existência de uma função  $F(x, t)$  tal que  $dF = \beta$ . d'Alembert obtém a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} d(y + F) &= dy + dF = \alpha + \beta = (p \cdot dx + q \cdot dt) + (q \cdot dx + p \cdot dt) \\ &= (p + q) \cdot dx + (p + q) \cdot dt. \end{aligned}$$

Aqui busca-se verificar a existência de uma função  $m(t, x)$  tal que  $d(y + F)$  seja a diferencial da mesma. Utilizando a eq. (3) e a eq. (4), demonstra-se que:

$$\frac{\partial(p + q)}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(p + q)}{\partial x}.$$

---

ponto  $(x, y) \in A$ ,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}.$$

<sup>3</sup> Em linguagem moderna, dois funcionais lineares.

<sup>4</sup> Seja  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $(x_0, y_0)$ . A diferencial de  $F$  no ponto  $(x, y)$  é dada por

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy.$$

<sup>5</sup> Diz-se que  $w = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  é uma forma diferencial exata, isto é, existe  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  aberto tal que

$$dF = w = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

se

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y),$$

para todo  $(x, y) \in \Omega$ .

Segue que existe uma função  $m(t, x)$  tal que  $dm = d(y + F)$ . Daí,

$$\frac{\partial m}{\partial t} = p + q = \frac{\partial m}{\partial x}. \quad (5)$$

Considerando o vetor  $u^T = [1 \ -1]$ , a sequência de equivalências abaixo é verdadeira:

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\partial m}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \langle \nabla m, u \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}_u m = 0, \quad (6)$$

em que  $\mathcal{D}_u m$  denota a derivada da função  $m$  na direção do vetor  $u$ . Segue que  $\mathcal{D}_w m = 0$  para qualquer vetor  $w$  contido na reta  $t = -x$ , isto é, todo vetor  $w = su$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ . No caso geral, para retas do tipo  $t = -x + c_1$ , em que  $c_1 \in \mathbb{R}$ , obtém-se

$$m(t, x) = m(-x + c_1, x),$$

para todo  $x$  real. Como  $m$  é constante nesta direção, deduzido da eq. (6), escreve-se  $m(-x + c_1, x) = k_1$ , com  $c_1, k_1 \in \mathbb{R}$ . Destaca-se que  $k_1$  é independente dos valores de  $x$ , mas dependente de  $c_1$  na função. Desta forma, é possível definir uma função  $\phi(c_1)$  tal que

$$m(-x + c_1, x) = 2 \cdot \phi(c_1).$$

Por fim,

$$m(t, x) = m(-x + (t + x), x) = 2 \cdot \phi(t + x). \quad (7)$$

Concluída a dedução da função  $m$ , ainda deve-se estudar a expressão  $d(y - F)$ . Note que

$$\begin{aligned} d(y - F) &= dy - dF = \alpha - \beta = (p \cdot dx + q \cdot dt) - (q \cdot dx + p \cdot dt) \\ &= (p - q) \cdot dx + (q - p) \cdot dt. \end{aligned}$$

Novamente busca-se encontrar uma função  $n(t, x)$  tal que  $d(y - F)$  seja a diferencial desta. Repetindo os passos análogos da dedução anterior,

conclui-se<sup>6</sup> que

$$n(t, x) = 2 \cdot \psi(x - t). \quad (8)$$

Juntando eq. (7) e eq. (8), a solução pode ser apresentada como

$$y(t, x) = \frac{(y + F) + (y - F)}{2} = \frac{m(t, x) + n(t, x)}{2} = \phi(x + t) + \psi(x - t). \quad (9)$$

Cabe destacar que tal solução foi obtida considerando  $y$  em dadas condições. Isto é, as derivadas de segunda ordem existem e são contínuas. Em particular,  $y$  deve ser contínua e suave para garantir a existência da solução.

## 2.2 D'ALEMBERT E SUA SOLUÇÃO GERAL

Destaca-se que, embora a eq. (9) seja uma solução da eq. (1), ela pode ser simplificada com uma análise mais aprofundada, utilizando algumas condições. d'Alembert propõe as seguintes:

- As extremidades da corda estão fixas sobre o eixo das abscissas nos pontos  $x = 0$  e  $x = l$ , isto é, não sofrem variação de posição em qualquer momento da vibração. Em termos algébricos, isso significa que  $y(t, 0) = 0$  e  $y(t, l) = 0$ , para todo  $t \geq 0$ .

<sup>6</sup> Utilizando-se eq. (3) e eq. (4), deduz-se a seguinte igualdade:

$$\frac{\partial(p - q)}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(q - p)}{\partial x}.$$

Logo, existe uma função  $n(t, x)$  tal que  $dn = d(y - F)$ . Pelo mesmo argumento construído anteriormente,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = q - p = -(p - q) = -\frac{\partial n}{\partial x}.$$

Daí, considerando o vetor  $v^T = [1 \ 1]$ ,

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \langle \nabla m, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}_v m = 0.$$

Conclui-se que  $n(x - c_2, x) = k_2$ ,  $c_2, k_2 \in \mathbb{R}$  constante reais. Segue que é possível definir uma função  $2 \cdot \psi(c_2)$  de forma que  $n(x - c_2, x) = 2 \cdot \psi(c_2)$ . Por fim,

$$n(t, x) = m(x - (x - t), x) = 2 \cdot \psi(x - t).$$

- A corda está em repouso ao se iniciar o movimento, isto é, sua velocidade é nula no instante  $t = 0$ . Pode-se descrever isso como

$$\frac{\partial y}{\partial t}(0, x) = 0,$$

para todo  $x \in [0, l]$ .

- Para todo  $t' \geq 0$ , existem  $x \in [0, l]$  e  $t \geq 0$  tal que

$$t' = t - x$$

O objetivo é reduzir a eq. (9) à dependência de apenas uma função  $\phi$ . Utilizando a hipótese de que  $y(t', 0) = 0$ , obtém-se

$$\phi(t') + \psi(-t') = 0 \Leftrightarrow \phi(t') = -\psi(-t'). \quad (10)$$

Pela terceira hipótese, a eq. (10) pode ser escrita como

$$\phi(t - x) = -\psi(x - t) \Leftrightarrow \psi(x - t) = -\phi(t - x).$$

Desta forma, eq. (9) se reduz a solução geral de d'Alembert:

$$y(t, x) = \phi(t + x) - \phi(t - x). \quad (11)$$

Cabe destacar que  $y(t, x)$  está definida nas condições físicas do problema da corda vibrante, isto é,  $x \in [0, l]$ , e  $t \geq 0$ . Mas não é dessa forma que d'Alembert entende sua solução. A definição de função ainda estava sendo lapidada à época. Para o autor, uma função deveria ter como domínio a reta real, sempre que possível. E isso deve valer também para a função  $\phi$ . Logo, o problema físico apresentado é nada mais que uma restrição do domínio da função  $\phi$  para o intervalo  $[0, l]$ . Destaca-se que a própria noção de intervalo não estava bem definida.

Essa percepção de d'Alembert o leva a determinar mais características<sup>7</sup> da função  $\phi$ . Por exemplo,  $\phi$  tem periodicidade  $2l$  no tempo. Para provar tal afirmação, utiliza-se a hipótese de que  $y(t, l) = 0$ :

$$\phi(t + l) - \phi(t - l) = 0 \Leftrightarrow \phi(t + l) = \phi(t - l).$$

<sup>7</sup> Para a melhor compreensão dessas características e de conceitos físicos relacionados ao estudo das ondas, recomenda-se a leitura do apêndice C.1.

Além disso, a função  $\phi$  deve ser ímpar em relação a  $x$ . Pela segunda hipótese, decorre que

$$\phi'(0+x) - \phi'(0-x) = 0 \Leftrightarrow \phi'(x) = \phi'(-x).$$

Por integração, segue que

$$\phi(x) = -\phi(-x).$$

d'Alembert não decorre sobre como determinar a função  $\phi$  de maneira algébrica, encerrando sua dedução apenas com algumas características da mesma. Uma análise mais aprofundada indicaria que  $\phi$  possui uma relação direta com a forma inicial do fio, antes do movimento ser iniciado. Bastaria calcular  $y(0, x)$ . Não há indicações de que d'Alembert fez tal conexão.

### 2.3 EULER E A SUA SOLUÇÃO

Leonhard Euler (1707 - 1783) buscou reconstruir o cálculo infinitesimal de Leibniz na hoje chamada “análise algebrizada”, reduzindo os métodos de Leibniz à álgebra, que segundo Euler, seria a forma mais geral de se compreender um ente matemático. Tal interesse teria real impacto na sua interpretação da equação da onda.

Em termos práticos, Euler concorda com a dedução da equação apresentada por d'Alembert, bem como a solução apresentada pela eq. (9). A diferença é que Euler apresenta tanto a equação quanto a solução de modo mais geral. Cabe lembrar que a equação da onda tomada por d'Alembert eq. (9), possuía uma característica específica ao considerar  $a^2 = 1$ , condição apontada em [11]. A equação geral, obtida por Euler, cujo esboço da dedução está apresentada no apêndice A, é

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t, x) = a^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(t, x), \quad (12)$$

em que  $a^2 = \frac{T}{\sigma}$ , com  $T$  e  $\sigma$  são a tensão e a densidade linear do fio, respectivamente. Note que d'Alembert considerou em sua construção que

o termo constante,  $a$ , é unitário. No caso geral, é possível deduzir que a eq. (11) pode ser escrita como

$$y(t, x) = \phi(x + at) + \psi(x - at). \quad (13)$$

Enquanto d'Alembert exprime seus cálculos a partir de uma função arbitrária  $\phi$ , que obedece condições derivadas do problema, e tal dedução não está errada, Euler prova que a solução pode ser ainda mais geral, dependendo apenas da posição inicial da corda e de sua velocidade neste dado momento. Um esboço desta dedução segue abaixo.

O autor considera a posição inicial da corda, isto é,  $U(x) = y(0, x)$ , a forma da corda antes do sistema entrar em movimento. Portanto, nesse caso, a eq. (13) é dada por

$$U(x) = y(0, x) = \phi(x) + \psi(x).$$

Além disso, considera a velocidade  $V(x)$  da corda no instante  $t = 0$ , de forma a obter:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{\partial y}{\partial t}(0, x) = \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) (0, x) \\ &= \left( \frac{d\phi}{d(x+at)} \cdot \frac{\partial(x+at)}{\partial t} + \frac{d\psi}{d(x-at)} \cdot \frac{\partial(x-at)}{\partial t} \right) (0, x) \\ &= \left( a \cdot \frac{d\phi}{d(x+at)} - a \cdot \frac{d\psi}{d(x-at)} \right) (x, 0) = a \cdot \frac{d\phi}{dx} - a \cdot \frac{d\psi}{dx}. \end{aligned}$$

Derivando  $U$  em relação a  $x$ , obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dx} &= \frac{d\phi}{dx} + \frac{d\psi}{dx}; \\ V(x) &= a \cdot \frac{d\phi}{dx} - a \cdot \frac{d\psi}{dx}. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira linha por  $a$  e somando com a segunda, segue que

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dU}{dx} + \frac{1}{2a} \cdot V(x). \quad (14)$$

Substituindo a eq. (14) na primeira equação, obtém-se

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dU}{dx} - \frac{1}{2a} \cdot V(x). \quad (15)$$

Considerando que  $\phi$  e  $\psi$  são funções dependentes da posição, integrase a eq. (14) e a eq. (15), de 0 até  $x$ , em que  $x \in [0, l]$ , obtendo

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \cdot U(x) + \frac{1}{2a} \cdot \int_0^x V(s)ds + \phi(0) - \frac{1}{2} \cdot U(0),$$

e

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \cdot U(x) - \frac{1}{2a} \cdot \int_0^x V(s)ds + \psi(0) - \frac{1}{2} \cdot U(0),$$

de forma que a solução geral  $y(t, x)$  é expressa como

$$\begin{aligned} y(t, x) &= \phi(x + at) + \psi(x - at) \\ &= \frac{1}{2} \cdot U(x + at) + \frac{1}{2a} \cdot \int_0^{x+at} V(s)ds + \phi(0) - \frac{1}{2} \cdot U(0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot U(x - at) + \frac{1}{2a} \cdot \int_0^{x-at} V(s)ds + \psi(0) - \frac{1}{2} \cdot U(0) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (U(x + at) + U(x - at)) + \frac{1}{2a} \cdot \left( \int_0^{x+at} V(s)ds + \int_{x-at}^0 V(s)ds \right) \\ &\quad + (\phi(0) + \psi(0)) - U(0) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (U(x + at) + U(x - at)) + \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} V(s)ds + U(0) - U(0) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (U(x + at) + U(x - at)) + \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} V(s)ds. \end{aligned} \tag{16}$$

A grande novidade da eq. (16) é o fato desta solução estar em dependência da forma inicial da corda e de sua velocidade neste momento. Em comparação, a eq. (11), solução de d'Alembert, estava relacionada com uma função  $\phi$  desconhecida, e que obedeceria certas condições. Para d'Alembert, como matemático, sua dedução poderia já ser suficiente. Mas a preocupação física de Euler, com suas condições iniciais, abriria um novo campo para discussão das soluções consideradas.



## 2.4 EULER E AS NOVAS CLASSES DE FUNÇÕES

Aqui cabe fazer uma pausa nos cálculos para apresentar uma dificuldade histórica: qual era o conceito de função dos matemáticos do século XVIII?

A passagem de foco da geometria para o algebrismo se deu a partir de estudos sobre as leis de variação, influenciados diretamente pela Física. A partir daí fica evidente que a noção do conceito já começava a surgir. Porém isto só foi formalizado no século XIX. Antes disso, várias definições foram propostas por diferentes estudiosos. Ainda no século XVII Leibniz já havia definido as noções de variável e constante, apresentando sua própria noção de função a partir destes conceitos: funções são “quantidades formadas a partir de quantidades indeterminadas e constantes”(ROQUE, 2012, p.321).

Outro destaque se dá para a definição dada por Johann Bernoulli (1667 - 1748) em seu artigo de 1718, “*Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isoperimètres*”: “Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta, de um modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes” (ROQUE, 2012, p.321).

Até então a noção de função é dada pela união de variáveis e constantes em uma expressão. Isso deixa de fora, em um primeiro momento, expressões de curvas transcendentais, como as trigonométricas, exponenciais e logaritmos. É através da análise algebrizada que essas expressões passam a ser vistas como séries de potências infinitas. Um dos expoentes desta área foi o próprio Euler que, em 1748, traz a definição mais geral de função até aquele momento, embarcando na mesma as expressões transcendentais, através de suas expansões: “Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes” (ROQUE, 2012, p.321).

E é Euler que inicia a controvérsia sobre a equação da onda. Menos conservador, apoiador do cálculo de Leibniz, e com base na Física, o autor viria a considerar novas classes de funções como soluções, o que reestruturaria o conceito de função da época. E o grande destaque da nova solução

apresentada pelo autor era a importância assumida pela posição inicial da onda, a função denotada na seção anterior por  $U(x)$ .

Lembre que d'Alembert assumia a necessidade de que a função  $y(t, x)$  fosse duas vezes diferenciável. Por consequência, a curva inicial  $y(0, x)$  também o seria. Cabe destacar que d'Alembert não tomava grande preocupação com as implicações físicas de tal assunção.

Euler considera a solução de d'Alembert limitada. Ora, seria possível modelar a forma inicial do fio a mão, para em seguida deixá-lo iniciar o movimento. Uma forma inicial possível do fio seria a corda friccionada (veja fig. 1). Este caso não está contido nas soluções de d'Alembert, pois não existe a derivada no ponto  $P$  em destaque. Porém, é uma situação que faz sentido físico.

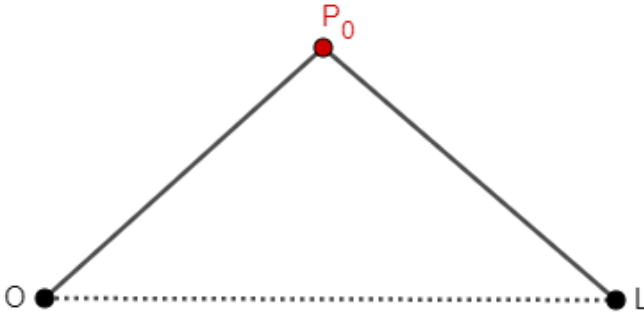


Figura 1 – A corda friccionada

Por este pensamento, Euler nomeia novos tipos de funções, neste caso como sinônimo a curvas. Cabe destacar que os termos utilizados pelo autor não são os mesmos usados atualmente. O primeiro grupo, são as curvas “contínuas” (veja fig. 2), hoje chamadas de curvas **diferenciáveis**.

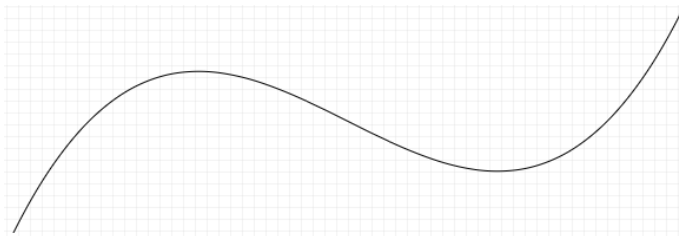


Figura 2 – Um exemplo de curva "contínua"

No segundo grupo, estão as “descontínuas” (veja fig. 3), hoje chamadas de **contínuas**. Este segundo caso abre a possibilidade de uma função possuir “bicos”, pontos onde a derivada não existe. Euler se preocupou apenas com o formato assumido por tais curvas, não se preocupando em defini-las algebricamente, como uma função por partes.

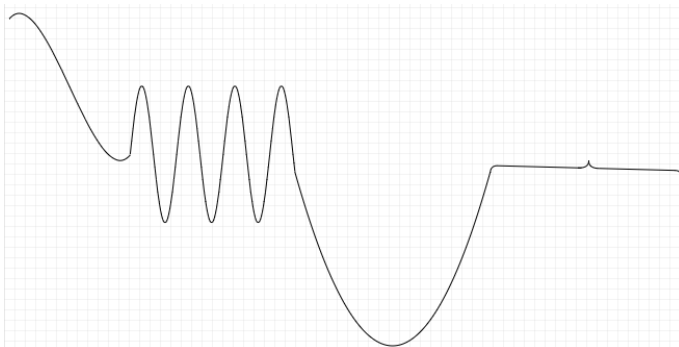


Figura 3 – Um exemplo de curva "descontínua"

Por fim, Euler ainda considera a existência de curvas moldadas a mão e que não podem ser representadas algebricamente. A consideração destes três grupos como soluções da equação da onda se configura como um retorno à geometria, não se preocupando se a curva pode ser expressa algebricamente, nem mesmo se esta representação é única.

## 2.5 A PRIMEIRA CONTROVÉRSIA

Muitas das críticas de d'Alembert à solução de Euler se dão em como o primeiro percebia a equação da onda. Em particular quais eram os princípios necessários para derivação e integração de funções. d'Alembert acreditava que tais operações não podem ser feitas levemente, isto é, não seria possível assumir que a derivada de uma função exista sem ser mostrada explicitamente. O mesmo valendo para a primitiva.

Ora, nem todas as funções possuem as propriedades necessárias que garantem tais existências. d'Alembert encara essa limitação ao assumir que as funções em uma cadeia de derivadas e integrações possuam as propriedades necessárias para essa sequência valha: tais funções devem ser diferenciáveis. E ele não está errado!

Mas, como visto, o conceito de função da época ainda não havia adotado a noção de intervalos. Nem mesmo Euler, ao definir suas curvas “descontínuas”, as definiu em sua forma algébrica, com uma regra algébrica para cada intervalo. Cabe destacar que uma curva pode possuir pontos de descontinuidade (no sentido moderno) e ainda possuir intervalos em que é diferenciável. Na noção de d'Alembert, suas curvas teriam que ser diferenciáveis sobre toda a reta real, pois eram onde suas funções estavam definidas. Caso houvesse algum ponto de descontinuidade (no sentido moderno), essa função não poderia ser derivada (ou integrada). E essa noção continua valendo para sua solução da equação da onda. Enquanto seria apenas necessário assumir que  $\phi$ , definida no intervalo  $[0, L]$ , fosse duas vezes diferenciável, d'Alembert assume que o mesmo deve valer para  $F$ , que é a extensão de  $\phi$  para a reta real por meio da periodicidade algébrica.

As soluções apresentadas por d'Alembert e Euler já traziam contradições entre si. Enquanto d'Alembert, em seu formalismo matemático, assumia que a função solução da equação da onda fosse ímpar, periódica e duas vezes diferenciável em todo ponto, Euler, em sua interpretação física, assume que a solução pode ser mais geral, sendo necessário apenas que seja uma curva, com suas pontas fixas.

Em 1761, d'Alembert publica sua principal objeção a Euler. Em um primeiro momento, questiona como seria possível a corda friccionada (veja fig. 1) ser uma solução inicial. Se  $P_0$  é o ponto do fio sobre o qual a corda é friccionada, e  $U$  é a função que descreve o fio no tempo  $t = 0$ , então,  $\frac{\partial U}{\partial x}(P_{0+}) \neq \frac{\partial U}{\partial x}(P_{0-})$ . Segue que  $\frac{\partial U}{\partial x}(P_0)$  não existe. Mas o rigor matemático de d'Alembert impõe que a equação da onda deve valer para todo ponto do fio em todo tempo.

Cabe destacar que Euler era um matemático do infinitesimal. A própria dedução da equação da onda decorre por meio deste método. E mesmo d'Alembert pressupunha a necessidade de "pequenos" deslocamentos do fio para que a equação esteja bem definida. A resposta de Euler às críticas recebidas, que estão em artigos de 1762 e 1765, é simples e vaga. Se há um erro, ele é quase nada, por ser infinitesimalmente pequeno, e isso se aplica para a corda friccionada. Ora, se o deslocamento é pequeno, uma pequena região do fio ao redor de  $P$  difere apenas infinitesimalmente de uma função "contínua", ou diferenciável na notação moderna, como d'Alembert requeria. O matemático rigoroso ainda não se dá por convencido.



### 3 UMA SOLUÇÃO ESPECÍFICA DE EULER, BERNOULLI E A SEGUNDA CONTROVÉRSIA

#### 3.1 EULER E SUA SOLUÇÃO ESPECÍFICA PARA HARMÔNICOS

A noção de harmônicos<sup>1</sup> já era estudada à época de Euler, sendo considerados soluções específicas para a equação da onda. Da mesma forma, o princípio da superposição também era conhecido por Euler. É através deste conceito que o autor busca representar uma solução geral para este conjunto de funções.

Considera-se um fio inextensível e finito, de comprimento  $L$ , com suas extremidades fixas nos pontos  $x = 0$  e  $x = L$ . Considera-se um harmônico na forma de uma onda estacionária,

$$y(t, x) = 2y_m \sin(kx) \cos(\omega t).$$

Sem perda de generalidade, assume-se  $2y_m = A$ ,  $A \in \mathbb{R}$ . Usando a eq. (39), obtém-se a seguinte expressão:

$$y(t, x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right) \cos(\omega t). \quad (17)$$

Como deduzido na eq. (46), cada harmônico que atua sobre o mesmo fio possuirá comprimento de onda distinto do outro. Sem perda de generalidade, considere o  $n$ -ésimo harmônico, com comprimento de onda

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}. \quad (18)$$

Pelas eq. (40), eq. (41) e eq. (43), a velocidade desta onda será  $v = \lambda_n \cdot f_n = \lambda_n \cdot \frac{\omega}{2\pi}$ , com  $f_n$  sendo a frequência desta onda. Juntando as duas últimas equações,

$$\frac{2\pi \cdot v_n}{\omega} = \lambda_n = \frac{2L}{n}.$$

---

<sup>1</sup> Este capítulo possui grande suporte em deduções físicas sobre o problema da corda vibrante, como conceitos de frequência, período e comprimento de onda. Para melhor compreensão destas definições, recomenda-se a leitura do apêndice C, no qual são apresentadas as definições e deduções necessárias sobre o conceito de harmônicos.

Segue que, neste caso,  $\omega$  pode ser expresso como

$$\omega = n \cdot \frac{\pi v}{L}. \quad (19)$$

Substituindo a eq. (18) e a eq. (19) na eq. (20), obtém-se a função que descreve o  $n$ -ésimo harmônico:

$$y_n(t, x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right).$$

Pelo princípio da superposição, existe um conjunto infinito de ondas que podem ser geradas ao se combinar diferentes harmônicos (e seus múltiplos, de forma matemática) sobre um mesmo fio. Euler apresenta a solução geral para este conjunto através da seguinte série:

$$y(t, x) = \sum A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right), \quad (20)$$

em que a posição inicial da fio é descrita por

$$y(0, x) = \sum A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Embora busque representar todas as possíveis combinações entre harmônicos, Euler não explica se esta série representa uma soma de termos finitos ou infinitos. E é essa abertura que permite que Daniel Bernoulli tenha espaço para criar suas teorias sobre a convergência da mesma.

### 3.2 BERNOULLI E SUA SOLUÇÃO

Daniel Bernoulli (1700 - 1782), filho do matemático Johann Bernoulli, teve destaque em seus trabalhos sobre elasticidade e hidrodinâmica, recebendo prêmios por seus estudos sobre o segundo tema. Seu texto “Hydrodynamica” de 1738 ainda é considerado um dos maiores do gênero.

E após ler o artigo de Euler sobre a corda vibrante, Bernoulli também teceu comentários em seu artigo de 1753 sobre qual seria a solução mais geral do problema. Bernoulli já havia descrito os modos harmônicos assumidos por um fio e sabia que a sobreposição dos mesmos gerava novas ondas que



passam pelo fio em questão. Fisicamente, seria possível sobrepor o harmônico fundamental do fio com um harmônico mais agudo, obtendo um determinado som. O que motiva Bernoulli é a recíproca dessa afirmação. Dado um som, qual seria a combinação de harmônicos utilizada para produzi-lo?

Euler já havia apresentado sua solução específica para harmônicos pela eq. (20) em 1749, baseada na superposição de ondas. Ainda não indicou se tal série trigonométrica seria finita ou infinita. Considerando a proposta física de Bernoulli, se o movimento do fio descrito por esta equação gerar um determinado som, seria possível determinar os coeficientes da mesma, pois seria gerada por uma combinação de harmônicos. Entretanto, Bernoulli não declara uma maneira de realizar tal feito, nem verifica se esta solução seria única.

Assumindo a existência de infinitos harmônicos, o autor propõe que a melhor forma de exprimir o movimento de uma dada curva seria por

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right), \quad (21)$$

em que bastaria “escolher” os coeficientes de forma que a série convirja para alguma função desejada. Nas palavras de Bernoulli,

Deve-se destacar que a corda AB não realiza apenas vibrações como a frequência fundamental, ou o segundo harmônico, ou o terceiro, assim por diante até o infinito, mas também produz uma combinação destas vibrações, qualquer combinação, de forma que todas as novas curvas dadas por d’Alembert e Euler são apenas combinações das vibrações de Taylor (KLINE, 1972, p. 509, tradução nossa).

Brook Taylor (1685 - 1731) já havia introduzido uma solução trinta anos antes de d’Alembert, dada simplesmente por

$$y = K \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right).$$

E nota-se que a posição inicial da corda na solução apresentada por Bernoulli, na eq. (21), quando  $t = 0$ , é

$$y(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (22)$$

isto é, uma combinação do conjunto de soluções dado por Taylor. O que Bernoulli ainda propõe é que a eq. (21), por se tratar de uma série infinita, pode vir a representar qualquer função que seja solução da equação da onda, bastando apenas escolher os coeficientes necessários para garantir a convergência. Bernoulli não apresenta qualquer demonstração matemática que prove tal generalidade, recebendo diversas críticas por isso.

### 3.3 A SEGUNDA CONTROVÉRSIA

No mesmo ano de 1753, Euler publica um novo artigo, em parte, criticando a solução encontrada por Bernoulli. Euler não acreditava na generalidade da solução inicial, no tempo  $t = 0$ . Um dos problemas apresentados ocorre com as curvas “descontínuas” de Euler. Enquanto a eq. (22) é infinitamente derivável, para todo  $x$  real, tais curvas definidas por Euler possuem pontos onde a derivada não está definida. Logo, a eq. (22) não seria geral o suficiente para incluir esse conjunto de curvas.

Euler ainda comenta sobre propriedades inerentes à solução inicial da eq. (22): ela é ímpar e periódica. O primeiro argumento decorre do fato de que seno é uma função ímpar, e a soma de funções ímpares também é uma função ímpar. Segue que a eq. (22) é uma função ímpar. Porém, nem todas as curvas iniciais consideradas por Euler são ímpares, por exemplo, uma curva qualquer desenhada a mão. Este argumento parece desafiar a generalidade da solução. O mesmo ocorre para a periodicidade. A curva inicial seria periódica, por se tratar de uma soma de senos, mas nem todas as curvas assumidas por Euler possuem tal característica.

Os dois últimos argumentos, embora bem estruturados, possuem um erro sutil, não tratado por nenhum dos participantes da controvérsia a época, e apontado por [4] e [7]. A curva inicial  $U(0, x)$  está definida sobre o intervalo  $(0, L)$ . Todo o resto da reta real não importa para a análise, sendo apenas uma extensão da curva definida pelo intervalo. Como o intervalo onde a função está definida possui apenas valores positivos, segue que  $U(0, x)$  é ímpar ou par, ou nenhuma das anteriores, a partir de como esta extensão é

feita, pois esta definição é dada ao se comparar valores de  $f(x)$  e  $f(-x)$ .

O mesmo vale para a periodicidade, que deve valer apenas para o intervalo  $(0, L)$ . Como a eq. (22) possui periodicidade  $L$ , pois  $y(0, 0) = y(0, L) = 0$ , uma série deste tipo poderia representar uma dada curva inicial neste intervalo, pois os pontos  $x = 0$  e  $x = L$  estariam sobre o eixo das abcissas. Enquanto  $y(0, x)$  possui a periodicidade algébrica da função seno, ela é irrelevante fora do intervalo considerado, bastando apenas verificar o que ocorre em  $[0, L]$ .

Se Euler quisesse ser ainda mais geral, para uma curva que independe da forma algébrica, como uma curva desenhada a mão, não seria possível definir uma periodicidade algébrica para a mesma. Se a mesma curva está definida sobre o intervalo, como seria possível considerar uma expansão para a reta? É aí que entra a periodicidade geométrica. Isto é, a curva formada sobre  $(0, L)$  é deslocada repetidamente para os intervalos da forma  $(n \cdot L, (n + 1) \cdot L)$ ,  $n$  inteiro.

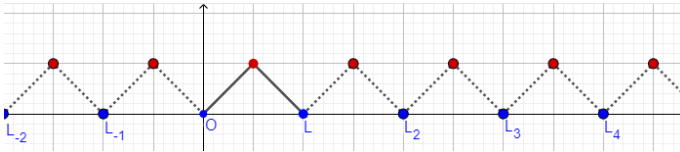


Figura 4 – Periodicidade geométrica de uma curva friccionada

Um exemplo de repetição geométrica está na fig. 4, onde considera-se  $L_i = i \cdot L$ . A curva inicial, definida no intervalo  $[0, L]$ , se repete a cada intervalo de mesmo tamanho, com a forma da curva permanecendo inalterada.

Na busca de verificar a generalidade da solução de Bernoulli, Euler deixou escapar um argumento que permitiria tal identificação: a velocidade inicial da eq. (21) é 0:

$$\frac{\partial y}{\partial t}(0, x) = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi v_n}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi v \cdot 0}{L}\right) = 0.$$

Segue que a solução de Bernoulli está adequada apenas para quando a

velocidade inicial da curva é nula, sendo menos geral do que a solução proposta por Euler.

Não apenas Euler, mas também d'Alembert questiona a solução de Bernoulli. Seu maior entrave com a mesma se dá no campo físico. Embora pareça contraintuitivo nos dias de hoje, d'Alembert não assume que uma vibração sobre o fio possa ser expressa como a soma de harmônicos. Isto é, o autor questiona o princípio da superposição. Tal afirmação se daria na observação de que cada movimento do fio possui uma única frequência. Por outro lado, a representação do mesmo movimento por uma série trigonométrica indicaria a existência de uma multiplicidade de frequências para a mesma vibração.

## 4 EQUAÇÃO DA ONDA - LAGRANGE

### 4.1 LAGRANGE E SUA SOLUÇÃO

Embora o debate mais acirrado tenha ocorrido entre os três participantes já citados, um quarto membro buscou encontrar uma solução que agradasse a todos. E é assim que o jovem Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) trata o problema em seu artigo de 1759, tratando sobre a propagação do som.

Revisando a dedução da solução já apresentada por seus antecessores, o autor endossa a solução de Euler como sendo a mais geral, devido a sua inclusão de novas curvas, ao mesmo tempo que nega a solução de Bernoulli, pelo princípio (incorreto) da periodicidade já tratado na seção anterior. A grande novidade é que Lagrange parece dar ouvidos às críticas de d'Alembert em relação ao uso descuidado de infinitesimais por Euler em sua solução. O que Lagrange buscou fazer em seguida foi apresentar uma dedução da solução de Euler sem o auxílio de infinitesimais.

Lagrange refaz a dedução da equação da onda apresentada por d'Alembert, mas busca primeiro resolver as  $n$  equações da forma da eq. (29) para depois encontrar uma solução geral para o caso do fio contínuo. Enfim, o autor encontra sua solução, fazendo o número de massas discretas tender ao infinito ao aplicar uma integração no intervalo  $[0, L]$ , enquanto o somatório indica a soma de infinitos harmônicos:

$$y(t, x) = \left( \frac{2}{L} \int_0^L U(x) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l} + \left( \frac{2}{\pi a} \int_0^L V(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi at}{l}, \quad (23)$$

na qual  $U(x) = y(0, x)$  é a posição inicial do fio, e  $V(x) = \frac{\partial y}{\partial t}(0, x)$  é velocidade inicial da mesma corda. Uma dedução desta solução, utilizando instrumentos posteriores a época de Lagrange, pode ser encontrada no apêndice B.

Lagrange afirma que a eq. (23) valida os argumentos de Euler de que a curva inicial do sistema, e sua velocidade, podem ser tão gerais quanto se queira, pois o mesmo se distanciou da utilização de infinitesimais em sua dedução. Mas isso não é bem verdade. Uma rigorosa demonstração deste método implicaria na necessidade de restrições a estas curvas.

## 4.2 A SOLUÇÃO DE LAGRANGE E AS SÉRIES DE FOURIER

Teria Lagrange se descuidado e deixado passar um importante resultado matemático? Sua solução, a eq. (23), possui uma característica interessante. Considere  $t = 0$  na eq. (23):

$$\begin{aligned} y(0, x) &= \left( \frac{2}{L} \int_0^L U(x) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi a \cdot 0}{l} \\ &+ \left( \frac{2}{\pi a} \int_0^L V(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi a \cdot 0}{l} \\ &= \left( \frac{2}{L} \int_0^L U(x) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{L} \int_0^L U(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \end{aligned}$$

isto é,

$$y(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{L} \int_0^L U(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (24)$$

Nota-se que a eq. (24) é uma série de Fourier<sup>1</sup> ímpar, aplicada em  $U(x)$ . As séries de Fourier são utilizadas de forma a aproximar valores das funções às quais as séries convergem, método muito utilizado desde sua definição em 1807 por Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830). Mas por quais motivos Lagrange não teria as definido antes, se estava tão perto?

Uma possibilidade é que a preocupação de Lagrange estava em encontrar uma solução para o problema físico da corda vibrante, diretamente

<sup>1</sup> Recomenda-se a leitura da seção 10.2 de [3] para uma compreensão geral deste conceito.

relacionada com a propagação do som. Por outro lado, a eq. (24) é um teorema da análise matemática. Não estaria dentro do escopo de Lagrange obter este resultado.

Ainda relacionado a esta possibilidade está o fato de que para obter a série de Fourier, deve-se intercalar os termos de integração e de somatório. Esta mudança já era sabida aos matemáticos da época. Mas Lagrange considera a integração da série como o passo de levar o fio do caso de massas discretas ao caso contínuo, possuindo uma interpretação física. Por outro lado, uma série infinita de integrais não seria uma interpretação lógica do problema físico que o autor buscava.

Por fim, ainda pode-se destacar que a eq. (24) é um caso específico da eq. (22), a solução inicial de Bernoulli, com coeficientes da forma

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L U(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Lagrange tendeu a rejeitar a solução de Bernoulli, devido ao argumento (incorreto) da periodicidade. Isso levaria Lagrange a ignorar soluções descritas por séries.





## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta monografia foi possível a verificação de diversos momentos nos quais a Matemática e seus princípios foram questionados. Isso decorre da noção de que a mesma não é um ente fixo e onisciente, mas sim que é construída por nós, e que seu significado é fluido conforme o período histórico que se escolhe analisar. A própria matemática algebrizada, legado de Leibniz, passou por diversas transformações até que seu sistema axiomático fosse forjado no século XIX.

O plano de fundo da controvérsia da equação da onda estava na legitimidade dos métodos de Leibniz e Newton. Qual dos dois modelos seria o superior? Até onde é possível o uso desmedido de infinitesimais? Como uma série infinita tende a uma função dada por uma única expressão? Ora, uma demonstração que utilizasse quantidades infinitamente pequenas poderia ser de pouco valor para um matemático do cânone newtoniano.

O século XVIII não foi um grande período de formalização, mas sim de invenção. Entre erros e acertos, estes julgados baseados em princípios atuais, os matemáticos estudiosos da equação da onda mudaram os entendimentos de conceitos, como funções e convergência das mesmas, abrindo espaço para que novas definições e demonstrações fossem feitas.

d'Alembert, o matemático rigoroso, foi o pioneiro a apresentar uma solução tão geral e correta. Mesmo assim, sua crença na delimitação do conceito de função da época impediu que fosse ainda mais inovador. Mas é aí que Euler, o físico matemático, consegue o sucesso. Com sua liberdade do uso de infinitesimais, evidencia novas propriedades inerentes da solução, bem como expande o conceito de função. Só não vai mais além por não definir funções descritas por partes, o que também o faz criticar muito severamente a solução de Bernoulli. O físico estava correto em seu uso do princípio da superposição, apenas falhava em não apresentar qualquer suporte matemático. E Lagrange, outro físico matemático, reconhece inconsistências e busca apresentar uma solução independente de limitações, e que provasse que Euler estava correto, embora ao se aplicar um maior

rigor, sua solução também não alcançaria seu potencial.

É o debate sobre o conceito de função entre d'Alembert e Euler que leva Fourier, muitos anos depois, a estabelecer oficialmente a análise algebrizada. Finalmente as funções dadas por intervalos seriam bem definidas no século XIX. A própria discussão sobre a convergência da solução de Bernoulli está contida no problema das séries de Fourier, resultado que Lagrange esteve próximo de obter. Para quais funções as séries de Fourier convergem seria também uma discussão para o mesmo século.

É neste século, com o distanciamento necessário, que foi possível responder: Qual dos quatro principais participantes da controvérsia estava correto? A resposta é acompanhada pelo estudo de outro clássico problema físico, a dispersão de calor, também descrita por uma equação diferencial parcial. Por meio deste estudo Fourier estabelece suas séries, e por meio delas as novas funções descritas por Euler podem ser representadas. A generalidade de seu argumento finalmente havia sido provada.

Embora esta reviravolta não tenha sido explorada neste trabalho, ela é citada em algumas das leituras complementares realizadas. O estudo das séries de Fourier e suas implicações na história da Matemática, bem como a análise da equação da dispersão do calor poderiam se tornar temas de pesquisas decorrentes deste projeto.

## REFERÊNCIAS

- [1] Aline de Araújo Maia. *A equação da onda*. Trabalho de conclusão de curso. João Pessoa, 2017.
- [2] W. W. Rouse Ball. *A short account of the history of mathematics*. Dover publications, 2010.
- [3] William E Boyce, Richard C DiPrima e Douglas B Meade. *Elementary differential equations*. John Wiley & Sons, 2017.
- [4] Ivor Grattan-Guinness. *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*. Colonial Press Inc, 1972.
- [5] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um curso de cálculo, vol. 2*. Grupo Gen-LTC, 2000.
- [6] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um curso de cálculo, vol. 3*. Grupo Gen-LTC, 2001.
- [7] Morris Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times: Volume 2*. Vol. 2. Oxford university press, 1990.
- [8] Robert Resnick, David Halliday e Jearl Walker. *Fundamentals of Physics, Vol. 1*. John Wiley, 1988.
- [9] Tatiana Roque. *História da matemática*. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012.
- [10] Brian S Thomson. *Symmetric properties of real functions*. CRC Press, 2020.

- [11] Gerald F. Wheeler e William P. Crummett. “The vibrating string controversy”. Em: *American Journal of Physics* 55.1 (1987), pp. 33–37. DOI: [10.1119/1.15311](https://doi.org/10.1119/1.15311). eprint: <https://doi.org/10.1119/1.15311>. Disp. em: <https://doi.org/10.1119/1.15311>.

## APÊNDICE A – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA

Esta dedução está baseada no capítulo 22 de [7]. Começam-se as manipulações matemáticas considerando um conjunto de  $n$  miçangas de formato desprezível, todas de mesma massa  $m$ , distribuídas de maneira igualitária ao longo de um fio de comprimento  $l$ , estendido, sem perda de generalidade, sobre o eixo das abscissas, com suas pontas fixas (Figura 5). Considerando-se que a  $n$ -ésima massa se encontra na posição  $x = l$  e que não exista uma massa no ponto  $x = 0$ , a distância entre cada uma das miçangas será de  $\frac{l}{n}$ . Assim, a posição  $x_k$  da  $k$ -ésima massa, distribuídas ao longo de  $0 < x < l$ , será  $x_k = k \cdot \frac{l}{n}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

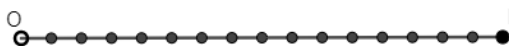


Figura 5 – Fio fixo e suas massas

Considere que este fio sofra uma leve perturbação, de modo que as miçangas se movam verticalmente. Segue que as mesmas não estão mais necessariamente sobre o eixo  $x$ , mas sim sobre o plano  $xy$ . Assumindo que o único deslocamento da  $k$ -ésima massa é vertical, isto é, paralelo ao eixo das ordenadas, a posição  $z_k$  da mesma no plano pode ser descrita como  $z_k^T = [x_k \ y_k]$ , com  $y_k$  determinado pelo deslocamento.

Olhemos para a massa de posição  $z_k$  e as forças verticais que atuam sobre ela ao longo do movimento.

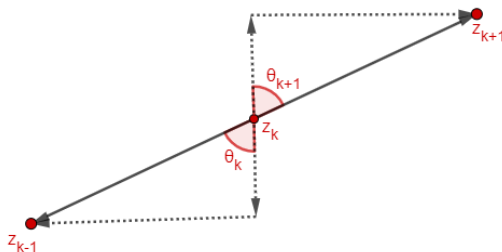


Figura 6 – Forças que agem sobre a massa  $z_k$

Considere os vetores  $T_1^T = z_k - z_{k-1}$  e  $T_2^T = z_k - z_{k+1}$ , com  $y_{k-1}$ ,  $y_k$  e  $y_{k+1}$  as ordenadas, respectivamente, de  $z_{k-1}$ ,  $z_k$  e  $z_{k+1}$ . Considerando  $T_1 = |T_1^T|$  e  $T_2 = |T_2^T|$ , a soma das forças verticais atuantes na  $k$ -ésima massa pode ser representada da seguinte forma:

$$F_{y_k} = T_2 \cdot (\cos \phi_{k+1}) - T_1 \cdot (\cos \phi_k). \quad (25)$$

Considera-se que as duas forças paralelas ao eixo das abcissas, as forças horizontais, devem ser iguais, de forma que o deslocamento horizontal da massa seja nulo. Também considera-se que a perturbação sofrida pelo fio é pequena, fazendo com que o deslocamento vertical da massa seja tão pequeno quanto se queira. Uma leve inclinação de uso de infinitesimais. O que importa é que dada esta afirmação, a medida de  $|\vec{T}_1|$  e  $|\vec{T}_2|$  se confunde com  $x_{k+1} - x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{l}{n}$ .

Pela afirmação anterior, assume-se que  $T_1 = T_2 = T$ ,  $\cos \phi_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{\frac{l}{n}}$  e  $\cos \phi_{k+1} = \frac{y_{k+1} - y_k}{\frac{l}{n}}$ . Assim, pode-se escrever eq. (25) como

$$F_{y_k} = T \left( \left( \frac{y_{k+1} - y_k}{\frac{l}{n}} \right) - \left( \frac{y_k - y_{k-1}}{\frac{l}{n}} \right) \right). \quad (26)$$

Utilizando a segunda Lei de Newton, isto é, força é igual ao produto da massa pela aceleração, e sabendo que aceleração é a segunda derivada da função posição em relação ao tempo, segue que

$$F_{y_k} = m \cdot \frac{d^2 y_k}{dt^2}. \quad (27)$$

Juntando a eq. (26) e a eq. (27), obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} = \frac{nT}{lm} (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}). \quad (28)$$

Seja  $M$  a massa total do sistema, isto é, a soma de todas as  $n$  massas discretas  $m$ , de forma que  $M = n \cdot m$ , e definindo a variável positiva  $a^2 = \frac{lT}{M}$ , podemos escrever a eq. (28) como

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} = \left( \frac{na}{l} \right)^2 (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}). \quad (29)$$

Enfim, a eq. (29) descreve a posição de um ponto do fio no plano ao longo do tempo. Este resultado pode ser generalizado para se obter uma equação diferencial parcial. Passa-se do caso discreto ao contínuo assumindo que a distância entre as massas dispostas no fio seja cada vez menor, de maneira que  $\frac{l}{n}$  se torna um elemento infinitesimal de  $x$ , que tende a 0, ao passo que a soma das massas discretas passa a se confundir cada vez mais com a massa de um fio contínuo. Aqui considera-se a densidade constante do fio como  $\sigma$ , valor ao qual  $M/l$  tende quando a distância entre as massas diminui. Portanto, no caso contínuo, tem-se  $a^2 = \frac{T}{\sigma}$ . Considera-se a função solução variável no tempo, mas também no espaço. Assim, pode-se fazer as seguintes substituições na eq. (29):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t, x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( a^2 \left( \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\Delta x^2} \right) \right). \quad (30)$$

Enfim<sup>1</sup> é obtida a equação da onda:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t, x) = a^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(t, x). \quad (31)$$

---

<sup>1</sup> Para verificar a igualdade entre eq. (30) e eq. (31), recomenda a leitura da seção 1.4 de [10].





## APÊNDICE B – DEDUÇÃO DA SOLUÇÃO DE LAGRANGE PELO MÉTODO DE FOURIER

Esta solução está baseada em [1], que utiliza o método de Fourier, e é dada ao se considerar um problema de valores iniciais e de fronteira, no qual os pontos 0 e  $L$  estão sobre o eixo das abcissas, e  $f(x)$  e  $g(x)$  são a forma inicial e a velocidade inicial do fio, respectivamente:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t, x) = a^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(t, x), & \text{em } 0 \leq x \leq L, t \geq 0; \\ y(t, 0) = y(t, L) = 0, & \text{para } t \geq 0; \\ y(0, x) = f(x) \text{ e } \frac{\partial y}{\partial t}(0, x) = g(x), & \text{para } 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

O método da dedução se dá ao utilizar a separação de variáveis<sup>1</sup>, isto é, assumir que  $y$  pode ser escrita como  $y(t, x) = F(x) \cdot G(t)$ ,  $F$  e  $G$  funções dependentes de uma única variável. Aplicando a expressão na equação da onda, obtém-se:

$$F(x) \cdot G''(t) = a^2 \cdot F''(x) \cdot G(t), \quad (32)$$

com  $F''(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x)$ , e  $G''(t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t)$ .

Busca-se considerar uma solução diferente da trivial, isto é,  $y(t, x) \neq 0$ . Segue que  $F(x) \neq 0$  e  $G(t) \neq 0$ . Logo, eq. (32) pode ser escrita como

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{a^2 G(t)}. \quad (33)$$

Esta equação permite identificar que o lado esquerdo da mesma depende apenas da variável  $x$ , enquanto o direito depende apenas de  $t$ . Mas como uma expressão dependente apenas de  $x$  pode ser igual a uma outra expressão dependente apenas de outra variável  $t$ ? Ora, a igualdade entre os termos valerá apenas se os dois lados forem iguais a um termo constante, um parâmetro, que será denotado aqui por  $\sigma$ . Assim, a eq. (33) se torna

$$\frac{F''}{F} = \frac{G''}{a^2 G} = \sigma,$$

<sup>1</sup> Recomenda-se a leitura da seção 10.5 de [3] para uma melhor compreensão da utilização deste método.

de forma que as duas equações abaixo são verdadeiras:

$$\begin{aligned} F'' - \sigma F &= 0; \\ G'' - a^2 \sigma G &= 0. \end{aligned}$$

Cabe agora aplicar as condições de fronteira, isto é,  $y(t, 0) = 0$ , e  $y(t, L) = 0$ . Da primeira,  $F(0) \cdot G(t) = 0$ , e da segunda  $F(L) \cdot G(t) = 0$ . Como  $G(t) \neq 0$ , segue o seguinte problema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} F'' - \sigma F = 0; \\ F(0) = F(L) = 0. \end{cases}$$

As soluções  $F$  deste problema já são conhecidas pelos métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias. Porém, como será visto, alguns casos não serão considerados devido as condições de fronteira, e a necessidade de considerar  $F$  identicamente não-nula.

De maneira simples, o problema de considerar  $f'' - \lambda f = 0$  possui solução geral da forma

$$f(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} - c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad (34)$$

com  $c_1$  e  $c_2$  constantes reais a serem determinadas pelas condições de fronteira. A grande dificuldade aqui está em identificar os valores de  $\lambda$  que satisfaçam as condições já colocadas, particularmente o caso de que  $f$  não deve ser identicamente nula. Em outras palavras, isto é um problema de autovalores.

Voltando para a dedução, deve-se encontrar os valores de  $\sigma$  tal que todas as condições do problema sejam satisfeitas. A solução geral da eq. (34) indica a necessidade de considerar  $\sigma$  em três casos distintos.

Primeiro, considera-se  $\sigma > 0$ . Neste caso, a solução geral de eq. (34) é simplesmente expressa como

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} - c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}, \quad (35)$$

$c_1, c_2$  constantes reais. Aplicando as condições de fronteira, isto é,  $F(0) = 0$  e  $F(l) = 0$ ,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0; \\ c_1 e^{\sqrt{\sigma}L} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}L} = 0. \end{cases}$$

Da primeira linha deste sistema,  $c_2 = -c_1$ . Fazendo esta substituição na segunda linha, conclui-se que  $c_1 \cdot (e^{\sqrt{\sigma}L} - e^{-\sqrt{\sigma}L}) = 0$ . Como  $e^{\sqrt{\sigma}L} - e^{-\sqrt{\sigma}L} = 0$ , segue que  $c_1 = 0$ . Mas se isso acontece,  $c_2 = -c_1 = 0$ . Assim sendo, eq. (35) é identicamente nula. Logo, este caso não pode ocorrer.

Segundo, considera-se  $\sigma = 0$ . A EDO  $F'' - \sigma F = 0$  se reduz para  $F'' = 0$ . Por integração, a solução é dada por

$$F(x) = c_1 \cdot x + c_2,$$

$c_1, c_2$  constantes reais. Aplicando as condições de fronteira,

$$\begin{cases} c_2 = 0; \\ c_1 \cdot L + c_2 = 0. \end{cases}$$

Da primeira linha,  $c_2 = 0$ . Aplicando essa condição na segunda linha,  $c_1 \cdot L = 0$ , o que implica  $c_1 = 0$ . Segue que esse caso também implica que  $F(x)$  ser identicamente nula.

Terceiro,  $\sigma < 0$ . Neste caso, escreve-se  $\sigma = -\lambda^2$ ,  $\lambda \neq 0$ , o que garante a negatividade de  $\sigma$ . A EDO então, é expressa como  $F'' + \lambda^2 F = 0$ . A solução geral deste caso é expressa como

$$F(x) = c_1 \cdot \cos(\lambda x) + c_2 \cdot \sin(\lambda x), \quad (36)$$

$c_1, c_2$  constantes reais. Aplicando as condições de fronteira, obtém-se

$$\begin{cases} c_1 = 0; \\ c_1 \cdot \cos(\lambda L) + c_2 \cdot \sin(\lambda L) = 0. \end{cases}$$

Da primeira linha  $c_1 = 0$ . Aplicando esta condição na segunda linha,  $c_2 \cdot \sin(\lambda L) = 0$ . Ora, se  $c_2 = 0$ ,  $F$  é identicamente nula. Necessita-se então,

que  $\sin(\lambda L) = 0$ . Esta condição ocorre para quando  $\lambda L = n \cdot \pi$ ,  $n$  inteiro não-nulo. Enfim, o conjunto de autovalores de  $\sigma$  deve ter a seguinte forma:

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2},$$

$n \in \mathbb{N}$ . Da mesma forma, as autofunções devem ser da forma

$$F_n(x) = c_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

$n \in \mathbb{N}$ .

Já foram determinadas as funções  $F_n$  e os valores  $\sigma_n$ . Basta descobrir as funções que satisfazem  $G'' - a^2\sigma_n G = 0$ . Neste caso, escreve-se  $\sigma_n = -\lambda_n^2$ , de forma a obter a EDO  $G'' + (a\lambda_n)^2 G = 0$ . As soluções desta equação são da forma

$$G_n(t) = k_1 \cdot \cos(a\lambda_n t) + k_2 \cdot \sin(a\lambda_n t),$$

$n \in \mathbb{N}$ . Como mostrado anteriormente,  $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$ , e as soluções de  $G$  são

$$G_n(t) = k_{1_n} \cdot \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + k_{2_n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right).$$

Fazendo  $a_n = c_n \cdot k_{1_n}$  e  $a_n = c_n \cdot k_{2_n}$ , a  $n$ -ésima solução  $y_n(t, x)$  é

$$\begin{aligned} y_n(t, x) &= F_n(x) \cdot G_n(t) \\ &= a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right), \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$ .

Pelo princípio da superposição, a solução mais geral é dada pela soma de todas as demais soluções:

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right),$$

bastando apenas calcular os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ . E para fazer isso, cabe o auxílio do formato inicial do fio e de sua velocidade neste instante.

Como estabelecido no início desta seção, supõe-se que a forma inicial da corda possa ser expressa por uma função  $f$  tal que  $y(0, x) = f(x)$ . Mas

$$\begin{aligned} y(0, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi a \cdot 0}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi a \cdot 0}{L}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \end{aligned}$$

isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x).$$

O que está se assumindo é que a série converge para a função  $f$ . Pelo método de Fourier, os coeficientes  $a_n$  são da forma

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (37)$$

A grande dificuldade é que  $f(x)$  não está definida no intervalo  $[-L, 0)$ , usado na integral. Mas, como  $f(0) = f(L) = 0$ , é possível estender  $f(x)$  para todo  $x$  real, de forma que a função seja ímpar e possua período de  $2L$ . Desta forma, eq. (37) se reduz a

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Para determinar os coeficientes  $b_n$  utiliza-se a velocidade inicial do fio, isto é,  $g$  tal que  $\frac{\partial y}{\partial t}(0, x) = g(x)$ . Daí,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t}(0, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} -a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi c \cdot 0}{L}\right) \frac{n\pi c}{L} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi c \cdot 0}{L}\right) \frac{n\pi c}{L} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{n\pi c}{L}. \end{aligned}$$

Assume-se que essa série resultante convirja para a função  $g$ , de forma que

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{n\pi c}{L}.$$

Analogamente ao método de Fourier anterior, como  $g(0) = g(L) = 0$ , pode-se estender  $g(x)$  para a reta real, de maneira que seja ímpar e com período  $2L$ . Assim, os coeficientes  $b_n$  estão de acordo com a seguinte igualdade:

$$\frac{n\pi c}{L} b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Basta isolar  $b_n$  de forma a obter

$$b_n = \frac{2}{\pi c} \int_0^L g(x) \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Enfim, a solução encontrada pelo método de Fourier é

$$\begin{aligned} y(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{\pi c} \int_0^L g(x) \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right). \end{aligned}$$

Em particular, a solução de Lagrange é escrita invertendo os termos de integração e os somatórios, obtendo

$$\begin{aligned} y(t, x) &= \left( \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \\ &+ \left( \frac{2}{\pi c} \int_0^L g(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right). \end{aligned}$$

## APÊNDICE C – ESTUDO DE ONDAS

### C.1 ONDAS TRANSVERSAIS

O objetivo desta seção, baseada fortemente no capítulo 16 de [8], é introduzir conceitos básicos de ondulatória que virão a ser explorados pelos autores tratados neste trabalho, que se debruçaram sobre o problema de encontrar funções que descrevessem o formato de um fio vibrando a partir da posição de uma partícula sobre este fio e do tempo.

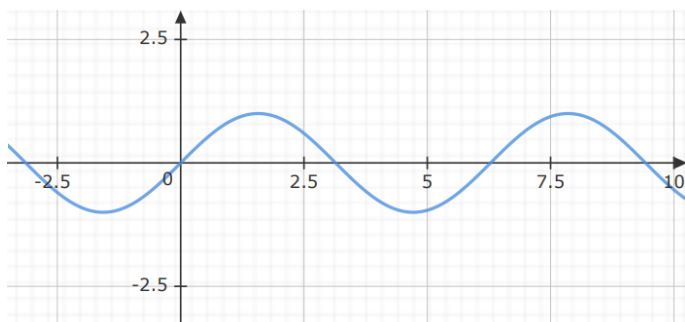
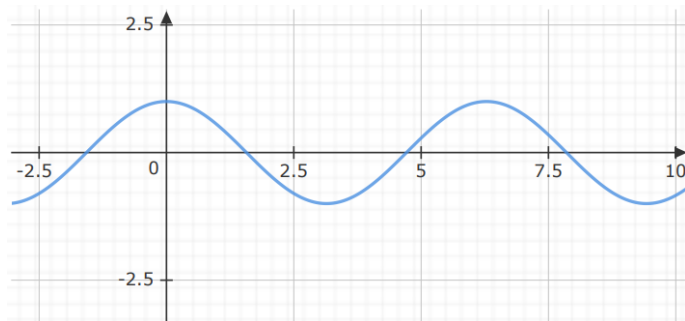
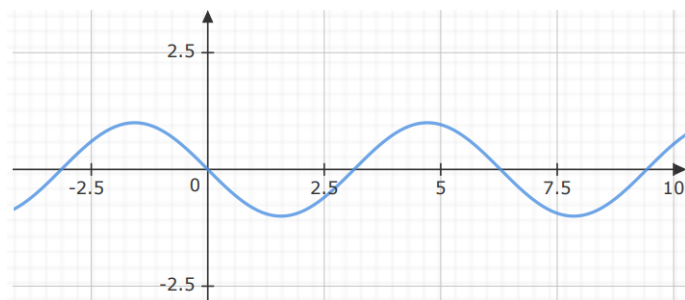
Para melhor análise, neste capítulo será considerado um fio inextensível, tão grande quanto necessário, cujo comprimento tende ao infinito. A dedução da equação e seus estudos qualitativos é feita no apêndice A.

Segue que o objetivo é encontrar uma função  $y$  tal que  $y = y(t, x)$  que descreva o formato do fio. Aqui, busca-se investigar um conjunto de soluções específicas tido como geral nos dias de hoje. O caso em que  $y$  pode ser representada por funções sinusoidais. Busca-se fazer uma construção para o conceito de ondas estacionárias. Seja então

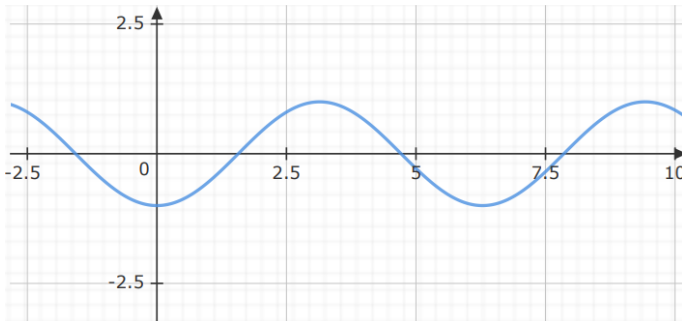
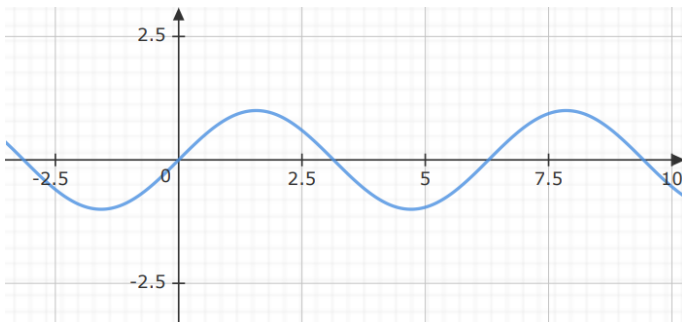
$$y(t, x) = y_m \sin(kx - \omega t). \quad (38)$$

Diz-se que  $y(t, x)$  é o deslocamento,  $y_m$  é a amplitude,  $\sin(kx - \omega t)$  é o termo oscilante,  $kx - \omega t$  é a fase,  $k$  é o número angular da onda,  $\omega$  é a frequência angular,  $x$  é a posição, e  $t$  é o tempo. Cada um destes termos e suas implicações no formato da onda serão tratados adiante.

É possível verificar a direção de uma onda transversal. Por exemplo, na fig. 7, observa-se um “vale” localizado na posição  $x = \frac{3\pi}{2}$ . Supondo que este ponto está fixo sobre a onda, observa-se que o mesmo “vale” se desloca para as posições  $x = \pi$  na fig. 8,  $x = \frac{\pi}{2}$  na fig. 9 e  $x = 0$  na fig. 10, respectivamente, caracterizando um deslocamento desta onda para a esquerda ao longo do tempo. Por fim, na fig. 11 o mesmo “vale” está na posição  $x = \frac{-\pi}{2}$ . Esta observação indica a existência de um período  $T$  para esta onda. Isto será tratado mais a frente.

Figura 7 – Exemplo de onda em  $t = 0$ Figura 8 – Onda em  $t = \frac{T}{4}$ Figura 9 – Onda em  $t = \frac{T}{2}$



Figura 10 – Onda em  $t = \frac{3T}{4}$ Figura 11 – Onda em  $t = T$ 

Cabe notar que o movimento horizontal destacado é feito pela onda, e não pelo fio. Se analisado um ponto específico do fio, é possível verificar que seu deslocamento é apenas vertical. Por exemplo, se fixado o ponto do fio  $x = 0$ , verifica-se nas imagens acima que seu deslocamento se dá apenas sobre o eixo das ordenadas. Para qualquer outro ponto do fio, o deslocamento também será vertical. Isto é, o fio se move paralelamente ao eixo  $y$ .

A amplitude  $y_m$  de uma onda é o maior deslocamento vertical dado pela eq. (38). Como a função seno varia entre os valores de  $-1$  e  $1$ , existe um par  $(t, x)$  tal que  $y(t, x)$  assume maior valor, que é  $y_m$ . Sem perda de

generalidade, compreende-se que  $y_m$  é uma constante positiva, por ser uma magnitude.

A fase  $kx - \omega t$  é o argumento da função seno da eq. (38). Conforme o par  $(t, x)$  se altera, o deslocamento  $y(t, x)$  varia entre os valores de  $y_m$  e  $-y_m$ . Isto é, a fase gera os “picos” e “vales” observáveis nas figuras anteriores. Desta forma, a fase é responsável pela oscilação da onda, enquanto a amplitude determina os pontos extremos.

**Definição C.1.** O comprimento  $\lambda$  de uma onda é a menor distância entre as repetições do formato da mesma.

Por exemplo, em fig. 7, se fixado o ponto  $x = 0$  é observável que o mesmo formato aparece no ponto  $x = 2\pi$ . Desta forma, o comprimento desta onda será de  $2\pi$ .

No caso geral, o comprimento da onda possui relação direta com o número angular da onda. Como  $\lambda$  está relacionada apenas com a variável  $x$ , fixa-se o tempo  $t = 0$  para uma análise mais aprofundada:

$$y(0, x) = y_m \sin(kx).$$

Por definição de comprimento de onda,  $y(0, x) = y(0, x + \lambda)$ , para todo  $x$ . Então

$$y_m \sin(kx) = y_m \sin(kx + k\lambda).$$

Sabe-se que para  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\sin a = \sin(a + b)$  se, e somente se,  $b$  for múltiplo inteiro de  $2\pi$ . Segue que  $k\lambda = 2\pi \cdot n$ ,  $n$  inteiro. Como  $\lambda$  deve ser a menor distância não nula tal que uma repetição ocorra,  $n$  deve ser 1. Assim,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (39)$$

**Definição C.2.** O período de oscilação  $T$  é o menor tempo que cada elemento do fio leva para completar uma oscilação completa.

Por exemplo, a partir da fig. 7, é possível observar a oscilação no ponto  $x = 0$ . Começando em  $y = 0$ , o ponto do fio sobe, assumindo um pico

em determinado momento, desce, intersecta o eixo das abscissa, assumindo um vale em determinado tempo, retornando a posição  $y = 0$ . Após essa oscilação, o descrito acima se repete. O tempo decorrido dessa oscilação é o período desta onda.

Para o caso geral, o período possui relação direta com a frequência angular. Como o período é o mesmo para qualquer ponto do fio, considera-se para análise o ponto na posição  $x = 0$ . Daí,

$$y(t, 0) = y_m \sin(-\omega t) = -y_m \sin(\omega t).$$

Por definição de período,  $y(t, 0) = y(t + T, 0)$ , para todo  $t$ . Segue que

$$-y_m \sin(\omega t) = -y_m \sin(\omega t + \omega T).$$

Pelo mesmo argumento utilizado anteriormente,  $\omega T$  deve ser múltiplo inteiro de  $2\pi$ , isto é,  $\omega T = 2\pi \cdot n$ ,  $n$  inteiro. Como  $T$  deve ser o menor possível não-nulo,  $n$  deve ser 1. Enfim,

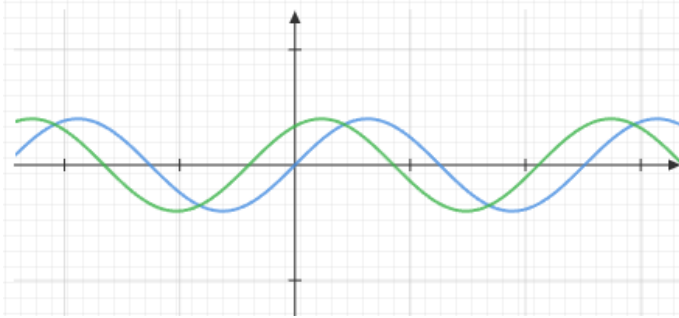
$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (40)$$

**Definição C.3.** A frequência  $f$  de uma onda é dada pela relação

$$f = \frac{1}{T}. \quad (41)$$

Também é possível determinar a velocidade da onda. De maneira geral, considera-se a velocidade de um sistema pela razão de infinitesimais  $\frac{dx}{dt}$ . Busca-se encontrar uma expressão que contenha tal expressão.

Considera-se um deslocamento positivo da onda, como o observado na figura abaixo, onde a onda verde se desloca para a azul:



Nota-se que não há um deslocamento horizontal dos pontos do fio, apenas da onda. Se um ponto da onda mantém seu mesmo deslocamento vertical conforme se move horizontalmente, decorre que a fase da eq. (38) deve se manter constante, isto é,

$$kx - \omega t = c, \quad (42)$$

$c \in \mathbb{R}$ . Derivando esta equação em relação a  $t$ , obtém-se

$$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0.$$

**Definição C.4.** A velocidade  $v$  de uma onda é dada pela expressão

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k},$$

sendo a razão da frequência angular pelo número angular da onda.

Utilizando a eq. (39), a eq. (40) e a eq. (41), é possível generalizar ainda mais a velocidade da onda:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \quad (43)$$

A eq. (42) garante o deslocamento positivo da onda, isto é, a onda se move para o lado direito do eixo das abcissas. Quanto maior o tempo, maior deve ser a abscissa relativa a um ponto da onda, de forma a garantir a igualdade assumida. Logo, a eq. (38) representa ondas deste tipo.

Segue que para obter uma onda que possua deslocamento negativo, isto é, que se mova para o lado esquerdo do eixo  $x$ , deve-se substituir  $t$  na eq. (42) por  $-t$ , obtendo  $kx + \omega t$ . Neste caso, quanto maior o tempo, menor deve ser a abcissa referente a um ponto da onda. Uma função  $y(t, x) = y_m \sin(kx + \omega t)$  representa ondas deste tipo.

## C.2 ONDAS ESTACIONÁRIAS

**Definição C.5.** Sejam duas ondas,  $y_1(t, x)$  e  $y_2(t, x)$ , atuando sobre um mesmo fio. Se em dado tempo e posição, as duas ondas se encontrarem, o princípio da superposição garante que a onda resultante será da forma

$$y(t, x) = y_1(t, x) + y_2(t, x). \quad (44)$$

**Definição C.6.** Se duas ondas sinusoidais,  $y_1(t, x)$  e  $y_2(t, x)$ , de mesma amplitude, comprimento de onda e período, viajam em direções opostas em um fio esticado, suas interferências produzem uma onda estacionária. Isto é, se  $y_1(t, x) = y_m \sin(kx - \omega t)$  e  $y_2(t, x) = y_m \sin(kx + \omega t)$ ,

$$\begin{aligned} y(t, x) &= y_1(t, x) + y_2(t, x) \\ &= y_m (\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)) \\ &= 2y_m \sin(kx) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (45)$$

é uma onda estacionária.

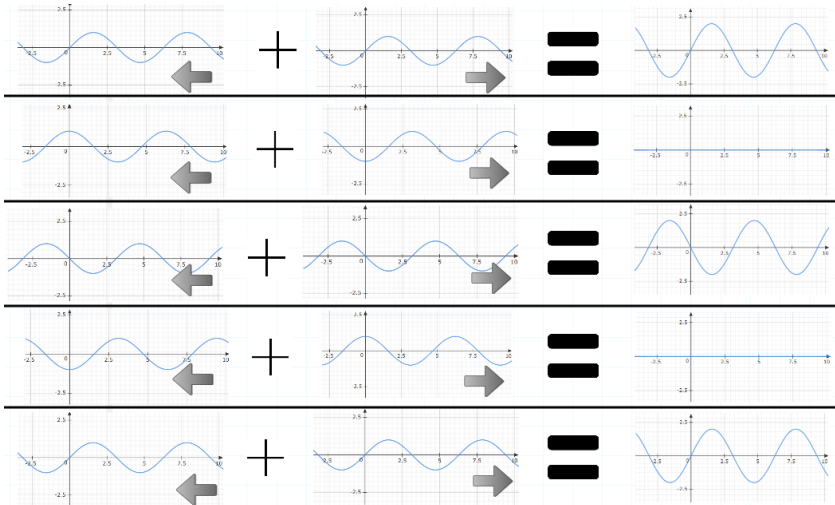


Figura 12 – Onda estacionária ao longo de seu período

A [fig. 12](#) caracteriza um exemplo de onda estacionária. A primeira coluna se trata de uma onda transversal, em diferentes momentos de seu período, com direção negativa, isto é, se dirige para a esquerda do eixo das abcissas. A segunda coluna representa uma onda de mesma amplitude, comprimento de onda e período da anterior, nos mesmos momentos de seu período, com a diferença de se movimentar positivamente, isto é, se dirige para a direita do eixo  $x$ . A terceira coluna apresenta a onda resultante da sobreposição das duas primeiras. Por definição, esta nova onda é estacionária. Cabe verificar como ela se comporta nos diferentes momentos representados nos quadros.

Considera-se a primeira linha no tempo  $t = 0$ . Neste momento as figuras das duas primeiras colunas são iguais, isto é, os pontos de mesma amplitude são os mesmos para as duas figuras. Realizando a soma da sobreposição, os pontos de máximo e mínimo da figura resultante serão os mesmos que os das figuras anteriores, com a magnitude máxima do deslocamento do fio sendo o dobro do deslocamento anterior. O mesmo ocorre para a terceira e a quinta linha, nos momentos  $t = \frac{T}{2}$  e  $t = T$ , respectivamente, com  $T$  sendo o período das duas primeiras ondas.

A segunda linha se encontra no tempo  $t = \frac{T}{4}$ . Aqui os picos da primeira figura estão alinhados com os vales da segunda, bem como os vales da primeira estão alinhados com os picos da segunda. Realizando a soma da sobreposição a onda resultante terá  $y\left(\frac{t}{4}, x\right) = 0$ , para todo  $x$ . O mesmo pode ser observado na quarta linha, no momento  $t = \frac{3T}{4}$ .

A terceira coluna apresenta o movimento básico de uma onda estacionária ao longo de todo um período. Como o próprio nome da onda sugere, este tipo de onda não possui movimentação ao longo do eixo das abcissas. Também são observáveis pontos de destaque deste fio.

**Definição C.7.** Os pontos  $x$  de uma onda estacionária que nunca se movem, isto é,  $y(t, x) = 0$  para todo  $t$ , são chamados de nós.

**Definição C.8.** Os pontos  $x$  de uma onda estacionária que assumem o valor da máxima amplitude em algum momento são chamados de anti-nós.

Estes pontos sempre assumem o valor de máximo ou de mínimo da onda em dado momento.

Enquanto nas ondas transversais cada ponto do fio possuía mesma amplitude, isto é, todos pontos alcançam o valor  $y_m$  em algum momento, isso não é verdade para as ondas estacionárias, onde a mesma varia com a posição. Isso é evidente pela existência de nós e anti-nós, que apresentam a mínima e a máxima amplitude possível no sistema.

**Definição C.9.** A amplitude uma onda estacionária da forma  $y(t, x) = 2y_m \sin(kx) \cos(\omega t)$  é dada pela magnitude da expressão variável  $2y_m \sin(kx)$ .

Para identificar todos os nós de uma onda estacionária, deve-se então verificar os valores para os quais  $2y_m \sin(kx) = 0$ . Isto só ocorre quando  $kx = \pi \cdot n$ ,  $n$  inteiro. Usando a eq. (39), segue que os nós são da forma

$$x = n \cdot \frac{\lambda}{2}.$$

Cabe identificar todos os anti-nós. A máxima amplitude ocorre para todo  $kx$  que gera  $\sin(kx) = 1$  ou  $\sin(kx) = -1$ . Segue que  $kx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$ ,  $n$  inteiro. Usando a eq. (39), os anti-nós são da forma

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda}{2}.$$



### C.3 RESSONÂNCIA E HARMÔNICOS

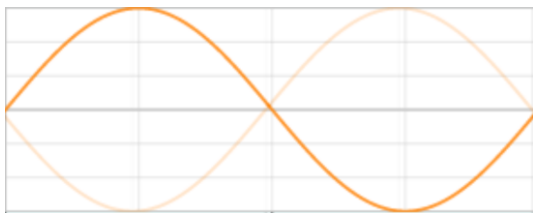
Até agora, considerou-se um fio de comprimento indefinido, tão grande quando necessário, sem que fosse preciso se preocupar com suas pontas fixas, estudando as vibrações que passam pelo mesmo. Mas quando se considera um fio finito, com suas pontas fixas, é possível observar o fenômeno da ressonância. Sem perda de generalidade, considera-se de agora em diante que o fio está fixo nos pontos  $x = 0$  e  $x = L$ ,  $L$  um número real positivo.

Suponha uma sequência de vibrações de formato sinusoidal, com mesmo comprimento de onda, período e frequência, que passam por um fio fixo, digamos, da esquerda para a direita. Ao alcançar o ponto mais a direita, a onda rebate, fazendo o caminho oposto, para a esquerda. Esta é o processo de ressonância. Em determinado momento esta onda se encontra com outra vibração que segue para a direita. Pela construção das mesmas, o resultado deste encontro será uma onda estacionária.

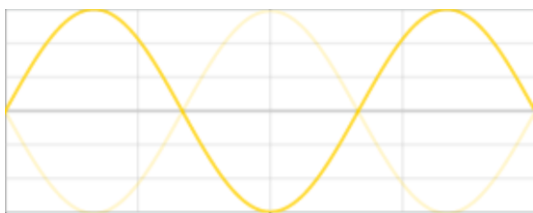
Este processo de ressonância gera curvas tidas como especiais, chamadas de harmônicos. O primeiro harmônico (figura abaixo) caracteriza-se em um único arco variando entre acima e abaixo do eixo formado pelo fio em repouso.



Neste caso o comprimento  $L$  do fio é metade do comprimento  $\lambda$  da onda que passa pelo mesmo, podendo-se escrever  $L = \frac{\lambda}{2}$ . Os nós desta onda são as extremidades,  $x = 0$  e  $x = L$ , com um anti-nó,  $x = \frac{L}{2}$ .



O segundo harmônico (figura acima) se apresenta como dois arcos, um acima e o outro abaixo do eixo formado pelo fio em repouso. Assim sendo, o comprimento da onda é o mesmo que o comprimento do fio. Logo  $L = \lambda = \frac{2\lambda}{2}$ . Os três nós desta onda são as extremidades e o ponto médio do fio,  $x = 0$ ,  $x = \frac{L}{2}$  e  $x = L$ , enquanto os anti-nós são os pontos médios dos intervalos formados pelos pontos anteriores,  $x = \frac{L}{4}$  e  $x = \frac{3L}{4}$ .



O terceiro harmônico (figura acima) consiste em três arcos alternando entre acima e abaixo do eixo formado entre o fio em repouso. Segue que o tamanho do fio corresponde a um comprimento e meio da onda, isto é,  $L = \frac{3\lambda}{2}$ . Segue que os nós deste harmônicos são  $x = 0$ ,  $x = \frac{L}{4}$ ,  $x = \frac{3L}{4}$  e  $x = L$ . Os anti-nós são os pontos  $x = \frac{L}{6}$ ,  $x = \frac{L}{2}$  e  $x = \frac{5L}{6}$ .

De maneira geral, o comprimento de onda de dado harmônico é

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \quad (46)$$

para  $n = 1, 2, 3, \dots$ . O primeiro harmônico ocorre se, e somente se,  $n = 1$ , o segundo quando  $n = 2$ , e assim por diante.

Utilizando a eq. (41) e a eq. (46), deduz-se as frequências necessárias

para produzir tais harmônicos:

$$f = \frac{v}{\lambda} = n \cdot \frac{v}{2L},$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$