



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE AUTOMAÇÃO E  
SISTEMAS

Luiz Armando Barbosa Hage

**Estudo sobre Modelagem e Controle com Restrições de Manipulador Móvel  
não-Holonômico Planar**

Florianópolis  
2021

Luiz Armando Barbosa Hage

**Estudo sobre Modelagem e Controle com Restrições de Manipulador Móvel  
não-Holonômico Planar**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Automação e Sistemas.  
Orientador: Prof. Edson Roberto De Pieri, Dr.  
Coorientador: Prof. Ebrahim Samer El'Youssef, Dr.

Florianópolis  
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Hage, Luiz Armando Barbosa

Estudo sobre modelagem e controle com restrições de manipulador móvel não-holonômico planar / Luiz Armando Barbosa Hage ; orientador, Edson Roberto De Pieri, coorientador, Ebrahim Samer El'Youssef, 2021.

83 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Engenharia de Automação e Sistemas. 2. Manipulador móvel não-holonômico. 3. Governador de referência explícito. 4. Controle por dinâmica inversa. 5. Restrições. I. Pieri, Edson Roberto De. II. El'Youssef, Ebrahim Samer. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas. IV. Título.

Luiz Armando Barbosa Hage

**Estudo sobre Modelagem e Controle com Restrições de Manipulador Móvel  
não-Holonômico Planar**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca  
examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Edson Roberto De Pieri, Dr. Eng.

Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) - Campus Florianópolis

Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr. Eng.

Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) - Campus Florianópolis

Prof. Henrique Simas, Dr. Eng.

Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) - Campus Florianópolis

Prof. Daniel Martins Lima, Dr. Eng.

Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) - Campus Blumenau

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi  
julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Automação e Sistemas.

---

Coordenação do Programa de  
Pós-Graduação

---

Prof. Edson Roberto De Pieri, Dr.  
Orientador

Florianópolis, 2021.

Este trabalho é dedicado aos meus queridos pais, que,  
sem eles, nada disso seria possível.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, eu gostaria de agradecer aos meus pais, Luiz Alberto e Marly Barbosa, pois, sem a ajuda e apoio deles, eu não conseguiria chegar onde estou hoje e muito menos conseguiria terminar esta dissertação com os tempos difíceis que foram esses últimos dois anos.

Gostaria de agradecer pelos meus colegas de mestrado e pelo grupo "Mestrandos Anônimos", que fizeram os tempos de estudo massantes de mestrado ficarem mais leves e divertidos.

Por último, e não menos importantes, gostaria de agradecer ao Programa de Pós-Graduação de Automação e Sistemas, aos meus orientadores e ao grupo "Robotizando" por me conceder a oportunidade de dar os meus primeiros passos no mundo da robótica móvel, pela paciência e comprometimento com a educação.

*“O todo é maior do que a simples soma ...  
... de suas partes”  
(Aristóteles)*

## RESUMO

Os manipuladores móveis são uma classe de robôs que desempenham um papel essencial na logística dos armazéns de produtos, explorando locais inacessíveis e perigosos, e muito mais. No entanto, não é uma tarefa fácil controlá-los ou navegá-los. Eles possuem singularidades e não-linearidades e, enquanto em movimento, devem evitar obstáculos e áreas restritas. Uma vez que os manipuladores móveis são sistemas não-lineares com operações complexas, a literatura explora vários controladores para mover e controlar esses sistemas. No entanto, poucos trabalhos tratam o controle com restrições para manipuladores móveis. Esta dissertação apresenta uma estratégia de controle com restrição de movimento conhecida como *Explicit Reference Governor* (ERG) para um manipulador móvel planar não-holonômico com dois graus de liberdade (2-DOF). Em contraste com outras soluções para o problema de controle com restrição, o ERG fornece uma solução de baixo custo computacional aplicada diretamente ao sistema já controlado, tornando-o interessante para robôs móveis cujos recursos computacionais e energéticos são limitados. O ERG gera uma nova referência a um sistema pré-estabilizado conduzido ao valor desejado, ao passo que respeita as restrições impostas. Para a aplicação do sistema proposto, é fundamental modelar e pré-estabilizar o manipulador móvel que, por simplicidade, é controlado no seu espaço de trabalho por Controle de Dinâmica Inversa mais compensação dinâmica. A eficácia da proposta é estudada e confirmada utilizando resultados de simulação, nos quais são consideradas as restrições de movimento posicional no espaço de trabalho do robô e restrições por singularidade conhecidas.

**Palavras-chave:** Manipulador Móvel não-Holonômico. Governador de Referência Explícito. Modelagem. Controle por Dinâmica Inversa. Restrições.



## ABSTRACT

Mobile manipulators are a class of robots that play an essential role in logistics in product warehouses, exploring inaccessible and hazardous locations, and much more. However, it is not an easy task to control or navigate them. They have singularities and nonlinearities. And while in motion, they must avoid obstacles and restricted areas. Since mobile manipulators are non-linear systems with complex operations, the literature explores several controllers for moving and controlling the system. However, few works address motion constraints. This dissertation presents a constrained control strategy known as Explicit Reference Governor (ERG) for a planar nonholonomic mobile manipulator with two degrees of freedom (2-DOF). In contrast to other solutions to the constrained control problem, the ERG provides a computationally low-cost solution applied directly to the already controlled system, making them interesting for mobile robotic systems whose computational and energy resources are limited. The ERG generates a new reference to a pre-stabilized system driven to the desired value while respecting the constraints. For the application of the proposed system, it is fundamental to model and pre-stabilize the mobile manipulator that, for simplicity, is controlled in its workspace by Reverse Dynamics Control plus dynamics compensation. The proposal's effectiveness is studied and confirmed using simulation results in which positional motion constraints in the robot's workspace and known singularity constraints of the system are considered.

**Keywords:** Nonholonomic Mobile Manipulator. Explicit Reference Governor. Modeling. Inverse Dynamic Control. Constraints.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Kuka youBot - Representação de um manipulador móvel utilizado para pesquisa e educação - retirado de Bischoff <i>et al.</i> (2011). . . . .	19
Figura 2 – Robôs da indústria Pollux promovendo o transporte e logística de produtos. . . . .	20
Figura 3 – Base móvel e parâmetros cinemáticos . . . . .	24
Figura 4 – Manipulador móvel composto de base móvel sob rodas e manipulador de dois graus de liberdade - adaptado de White <i>et al.</i> (2007). . .	26
Figura 5 – Sistema no espaço irrestrito. . . . .	29
Figura 6 – Representação do Governador de Referência Explícito (Governador de Referência Explícito, do inglês <i>Explicit Reference Governor</i> (ERG))	33
Figura 7 – Representação interna do governador de referência explícito - Imagem modificada de Nicotra e Garone (2016b) . . . . .	35
Figura 8 – Interpretação Geométrica de $\Gamma$ - retirada de Nicotra e Garone (2016b)	39
Figura 9 – Representação da margem de dinâmica segura - retirado de Nicotra e Garone (2018) . . . . .	40
Figura 10 – Ilustração - Funções de Navegação, retirado de Pacheco e Costa (2002). . . . .	43
Figura 11 – Representação do algoritmo. . . . .	46
Figura 12 – Representação do sistema em malha fechada do manipulador móvel com controle por dinâmica inversa. . . . .	49
Figura 13 – Representação das restrições posicionais para o efetuador final . .	50
Figura 14 – Representação do manipulador móvel para descrição da restrição por singularidade. . . . .	51
Figura 15 – Representação das restrições por singularidade para o efetuador final	52
Figura 16 – Trajetórias dos manipuladores móveis referente à simulação 1 . . .	56
Figura 17 – Evolução do sinal de saída do ERG comparado à referência desejada relacionado à simulação 1 . . . . .	56
Figura 18 – Valores de $\rho(r, v)$ de saída do ERG referente à simulação 1 . . . . .	57
Figura 19 – Valor de $\Delta(x, v)$ de saída do ERG referente à simulação 1 . . . . .	57
Figura 20 – Torques de saída do sistema referente à simulação 1 . . . . .	58
Figura 21 – Valor de todos os $\Gamma(v)$ das restrições referente à simulação 1 . . . .	59
Figura 22 – Valor de saída da variável $\Gamma_x$ da simulação 1 . . . . .	59
Figura 23 – Evolução dos estados do sistema ( $q$ ) referentes à simulação 1 . . .	59
Figura 24 – Trajetórias dos manipuladores móveis referentes à simulação 2 . . .	60
Figura 25 – Evolução do sinal de saída do ERG comparado à referência desejada relacionado à simulação 2 . . . . .	60
Figura 26 – Valor de $\Delta(x, v)$ de saída do ERG referente à simulação 2 . . . . .	61

Figura 27 – Valor de saída da variável $\Gamma_x$ do ERG referente à simulação 2 . . . . .	61
Figura 28 – Valores de $\rho(r, v)$ de saída do ERG referente à simulação 2 . . . . .	62
Figura 29 – Evolução dos estados do sistema referentes à simulação 2 . . . . .	62
Figura 30 – Torques de saída do sistema referente à simulação 2 . . . . .	62
Figura 31 – Trajetória do manipulador móvel com referência fora da restrição de singularidade do braço retraído . . . . .	63
Figura 32 – Evolução do sinal de saída do ERG comparado à referência desejada relacionado à simulação 3 . . . . .	63
Figura 33 – Evolução temporal da distância entre o efetuador final e a base do braço robótico referente à simulação 3 . . . . .	64
Figura 34 – Valor de $\Delta(x, v)$ de saída do ERG referente à simulação 3 . . . . .	64
Figura 35 – Valor de $\Gamma_x(v)$ referente à simulação 3 . . . . .	65
Figura 36 – Valores de $\rho(r, v)$ de saída do ERG referente à simulação 3 . . . . .	65
Figura 37 – Evolução dos estados do sistema referentes à simulação 3 . . . . .	65
Figura 38 – Trajetória do manipulador móvel com referência fora da restrição de singularidade com braço estendido . . . . .	66
Figura 39 – Evolução do sinal de saída do ERG comparado à referência desejada relacionado à simulação 4 . . . . .	66
Figura 40 – Evolução temporal da distância entre o efetuador final e a base do braço robótico referente à simulação 4 . . . . .	67
Figura 41 – Valor de $\Delta(x, v)$ de saída do ERG referente à simulação 4 . . . . .	67
Figura 42 – Valor de $\Gamma_x(v)$ do ERG referente à simulação 4 . . . . .	68
Figura 43 – Valores de $\rho(r, v)$ de saída do ERG referente à simulação 4 . . . . .	68
Figura 44 – Evolução dos estados do sistema referentes à simulação 4 . . . . .	69
Figura 45 – Nomenclatura do Manipulador Móvel . . . . .	80

## LISTA DE QUADROS

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros da Base Móvel . . . . .	25
Tabela 2 – Parâmetros do Braço Robótico . . . . .	26
Tabela 3 – Ganhos de Controles Simulações . . . . .	55

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CDI	Controle por Dinâmica Inversa
DOF	Graus de Liberdade, do inglês <i>Degrees of Freedom</i>
ERG	Governador de Referência Explícito, do inglês <i>Explicit Reference Governor</i>
MM	Manipulador Móvel não-holonômico
MPC	Controle de Modelo Preditivo, do inglês <i>Model Predictive Control</i>
PD	Proporcional Derivativo
RG	Governador de Referência, do inglês <i>Reference Governor</i>
UAV	Veículo Aéreo não-Tripulado, do inglês <i>Unmanned Aerial Vehicle</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\rho(r, v)$	Campo de navegação
$\Delta(x, v)$	Margem de dinâmica segura
$\Gamma(v)$	Função limitante
$\Gamma_x$	Valor mais restritivo da função limitante
$P_c$	Posição do centro de massa da base
$b$	Distância da roda para o centro do MM
$d$	Distância da roda ao eixo de centro de massa
$q_a$	Estados da base móvel no espaço de configuração
$x_c$	Posição X do centro de massa do manipulador móvel
$y_c$	Posição Y do centro de massa do manipulador móvel
$\phi$	Ângulo de rotação da base móvel
$\theta_R$	Deslocamento angular da roda direita
$\theta_L$	Deslocamento angular da roda esquerda
$P_a$	Posição da base do braço robótico
$L_a$	Distância do centro de massa da base até $P_a$
$r_o$	Raio da roda
$m_w$	Massa da roda
$m_c$	Massa da base
$I_w$	Momento de inércia da roda
$I_c$	Momento de inércia da base
$\tau_R$	Entrada de Torque da roda direita
$\tau_L$	Entrada de Torque da roda esquerda
$L_1$	Tamanho do braço 1 (link 1)
$L_2$	Tamanho do braço 2 (link 2)
$L_{cm1}$	Distância do centro de massa do braço 1
$L_{cm2}$	Distância do centro de massa do braço 2
$m_1$	Massa do braço 1
$m_2$	Massa do braço 2
$I_1$	Momento de inércia do braço 1
$I_2$	Momento de inércia do braço 2
$\theta_1$	Deslocamento angular da junta 1 do braço robótico
$\theta_2$	Deslocamento angular da junta 2 do braço robótico
$\tau_1$	Entrada de Torque na junta rotativa 1
$\tau_2$	Entrada de Torque na junta rotativa 2
$q_b$	Estados do manipulador robótico no espaço de configuração
$q$	Estados do sistema no espaço de configuração
$A(q)$	Matriz de restrições não-holonômicas

$S(q)$	Matriz espaço nulo de $A(q)$
$z$	Estados do sistema no espaço irrestrito
$\lambda$	Vetor de multiplicadores de Lagrange
$\mathcal{L}(q, \dot{q})$	Lagrangiano
$\mathcal{K}(q, \dot{q})$	Energia cinética
$\mathcal{P}(q)$	Energia potencial
$M(q)$	Matriz de inércia no espaço de configuração
$C(q, \dot{q})$	Matriz de Coriolis e forças centrífugas no espaço de configuração
$G(q)$	Matriz de forças gravitacionais
$F$	Vetor de forças externas
$\tau_m$	Vetor de Torque de entrada no espaço de configuração
$E$	Matriz de ponderação de entrada de controle no espaço de configuração
$M_\theta$	Matriz de inércia no espaço irrestrito
$C_\theta$	Matriz de Coriolis e forças centrífugas no espaço irrestrito
$\tau_\theta$	Vetor de Torque de entrada no espaço irrestrito
$\dot{x}_b$	Velocidade da base na direção x
$\dot{y}_b$	Velocidade da base na direção y
$\dot{x}_{ee}$	Velocidade do efetuador final na direção x
$\dot{y}_{ee}$	Velocidade do efetuador final na direção y
$J_{ij}$	Vetor Jacobiano do braço robótico referente aos elos i e j
$x$	Estados do sistema no espaço de tarefa
$R_j$	Matriz de rotação
$J$	Jacobiano da base do braço até o efetuador final
$M_x$	Matriz de inércia no espaço de tarefa
$C_x$	Matriz de Coriolis e forças centrífugas no espaço de tarefa
$\tau_x$	Vetor de Torque de entrada no espaço de tarefa
$v$	Referência auxiliar
$r$	Referência desejada
$u$	Entrada de controle
$c(x, v)$	Restrições convexas
$r^*$	Projeção da referência desejada fora das restrições
$\delta$	Margem de segurança estática
$\hat{x}(t x, v)$	Predição da solução
$\bar{x}_v$	Ponto de equilíbrio referente à variável $v$
$V(x, v)$	Equação de Lyapunov do sistema realimentado
$d_i$	Valor da restrição
$k_\gamma$	Ganho da margem de dinâmica segura
$\underline{M}$	Valor mínimo da matriz de Inércia
$\lambda_1$	Menor autovalor da matriz de Inércia



$I_n$	Matriz identidade de tamanho $n$
$\mathcal{J}_G(v, q)$	Jacobiano da matriz gravitacional
$\Phi$	Valor mínimo do Jacobiano da matriz gravitacional
$c_1(v)$	Vetor que relaciona as coordenadas generalizadas do sistema com a restrição
$c_2(v)$	Vetor que relaciona a derivada das coordenadas generalizadas do sistema com a restrição
$\bar{x}_r$	Ponto de equilíbrio referente à variável $r$
$\rho_r(r, v)$	Termo de atração
$\rho_0(v)$	Termo de repulsão
$\eta$	Constante de suavização
$\zeta$	Margem de influência
$\xi$	Vetor de estado genérico
$e$	Vetor de erro
$K_d$	Ganho derivativo
$K_p$	Ganho proporcional
$a_x$	Nova entrada de controle
$\ddot{x}^d$	Vetor de aceleração desejada
$x^d$	Vetor de posição desejada
$\dot{x}^d$	Vetor de velocidade desejada
$c_{xi}$	Vetor que relaciona os estados do sistema com a restrição
$c_{gi}$	Vetor que relaciona a derivada dos estados do sistema com a restrição
$\alpha$	Ângulo auxiliar
$R$	Distância entre a base do braço robótico e o efetuador final
$\underline{M}_x$	Valor mínimo da matriz de Inércia no espaço de tarefa
$s_R$	Amortecimento da roda direita
$s_L$	Amortecimento da roda esquerda
$s_1$	Amortecimento da junta 1
$s_2$	Amortecimento da junta 2

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
1.1	OBJETIVOS	22
<b>1.1.1</b>	<b>Objetivo geral</b>	<b>22</b>
<b>1.1.2</b>	<b>Delimitações e Objetivos específicos</b>	<b>22</b>
1.2	ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	23
<b>2</b>	<b>MODELAGEM DO MANIPULADOR MÓVEL</b>	<b>24</b>
2.1	DESCRIÇÃO E MODELAGEM CINEMÁTICA DO MANIPULADOR MÓVEL	24
2.2	MODELO DINÂMICO NO ESPAÇO DE CONFIGURAÇÃO	27
2.3	MODELO DINÂMICO NO ESPAÇO IRRESTRITO	29
2.4	MODELO DINÂMICO NO ESPAÇO DE TAREFA	30
<b>2.4.1</b>	<b>Singularidade</b>	<b>31</b>
<b>3</b>	<b>GOVERNADOR DE REFERÊNCIA EXPLÍCITO</b>	<b>33</b>
3.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE ERG	34
3.2	CONCEITOS BÁSICOS DO ERG	34
3.3	MARGEM DE DINÂMICA SEGURA	36
<b>3.3.1</b>	<b>Definição</b>	<b>36</b>
<b>3.3.2</b>	<b>Cálculo da Margem de Segurança</b>	<b>37</b>
<b>3.3.3</b>	<b>Aplicação em Equações de Euler-Lagrange</b>	<b>40</b>
3.3.3.1	Valores Limiares Sub-ótimos para equação de Euler-Lagrange	41
3.4	CAMPO DE NAVEGAÇÃO	42
<b>3.4.1</b>	<b>Definição</b>	<b>43</b>
<b>3.4.2</b>	<b>Cálculo do Campo de Navegação</b>	<b>44</b>
3.5	ALGORITMO DO TRABALHO	45
<b>4</b>	<b>APLICAÇÃO DO ERG AO MANIPULADOR MÓVEL</b>	<b>47</b>
4.1	PRÉ-ESTABILIZAÇÃO: CONTROLE DE DINÂMICA INVERSA	47
<b>4.1.1</b>	<b>Controle de dinâmica inversa do MM</b>	<b>48</b>
4.2	RESTRICÇÕES DO SISTEMA	49
<b>4.2.1</b>	<b>Restrição Posicional</b>	<b>50</b>
<b>4.2.2</b>	<b>Restrições de Singularidade</b>	<b>51</b>
4.3	DETERMINAÇÃO DA MARGEM DE DINÂMICA SEGURA	53
4.4	DETERMINAÇÃO DO CAMPO DE NAVEGAÇÃO	54
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>55</b>
5.1	SIMULAÇÃO 1	55
5.2	SIMULAÇÃO 2	60
5.3	SIMULAÇÃO 3	63
5.4	SIMULAÇÃO 4	66

<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>70</b>
6.1	TRABALHO FUTUROS . . . . .	70
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>72</b>
	<b>APÊNDICE A – MODELAGEM CINEMÁTICA E MATRIZES DE EULER-</b>	
	<b>LAGRANGE</b> . . . . .	<b>78</b>
A.1	EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE . . . . .	78
A.2	MODELAGEM DO MANIPULADOR MÓVEL . . . . .	78
<b>A.2.1</b>	<b>Energia Cinética do Sistema</b> . . . . .	<b>79</b>
<b>A.2.2</b>	<b>Energia Potencial do Sistema</b> . . . . .	<b>81</b>
A.3	MATRIZES DA EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE . . . . .	81

## 1 INTRODUÇÃO

Os manipuladores móveis não-holonômicos (MM) são uma classe de robôs, e consistem em um ou mais manipuladores robóticos montados em uma plataforma móvel. Segundo Li e Ge (2019), os manipuladores móveis têm recebido muita atenção, desde o início da década de 1990, pelo seu amplo espaço de operação e mobilidade para realização de tarefas de manipulação e transporte em diferentes regiões onde estiver. Assim, eles se movem e alcançam lugares hostis aos seres humanos e realizam operações em um grande espaço ou longo alcance.

A literatura sobre manipuladores móveis é vasta no que diz respeito a modelagem e desenvolvimento de sistemas de controle, e encontra-se uma ampla gama de aplicações incluindo serviços em fábricas, escritórios ou residências (Heping Chen *et al.* (2013) e Frankovsky *et al.* (2018)); patrulha, operações de resgate em um ambiente exigente ou perigoso, e explorações em espaços remotos (Zhong *et al.* (2012), Sun *et al.* (2018) e Pilaian e Gupta (2018)); motivos educativos e de pesquisa sobre manipuladores móveis, como os projetos do robô *Kuka youbot-A* (Bischoff *et al.* (2011) e Fei Chen *et al.* (2018)) entre outros robôs industriais (Giffthaler *et al.* (2017)). Na Figura 1, por exemplo, está a imagem de um manipulador móvel desenvolvido pela empresa Kuka e ele possui um braço com 5 graus de liberdade e rodas omnidirecionais. Já a Figura 2 mostra um manipulador móvel da empresa Pollux com base não-holonômica viabilizando o transporte de mercadorias de forma automatizada.



Figura 1 – Kuka youBot - Representação de um manipulador móvel utilizado para pesquisa e educação - retirado de Bischoff *et al.* (2011).

Os manipuladores móveis são classificados de acordo com número de graus de liberdade do seu braço, capacidade de carga, autonomia e característica de movimentação de sua base. Neste último quesito, temos bases robóticas holonômicas, que movem-se para qualquer direção em qualquer instante, ou não-holonômicas, que possuem limite de direção de movimento, ou seja, apesar de atingirem qualquer ponto do espaço, elas dependem de manobras para fazê-lo.

Esses sistemas combinam as vantagens complementares de mobilidade e manipulação que permitem estender o seu alcance operacional. Em contrapartida, encontra-se complexidade no desenvolvimento de modelagem matemática e projeto de sistemas de navegação e controle. As questões importantes a serem tratadas são não-linearidades, sub-atuação, acoplamento, incertezas no modelo, distúrbios externos e singularidade do sistema, além de restrições do sistema e em seu espaço de trabalho.



Figura 2 – Robôs da indústria Pollux promovendo o transporte e logística de produtos.

Diversos tipos de controle foram desenvolvidos para permitir a operação de manipuladores móveis. Um exemplo de controle seria utilizar um sistema de desacoplamento dinâmico por jacobiano estendido para a movimentação independente das componentes base e braço de um manipulador móvel não-holonômico (White *et al.* (2007, 2009)). No entanto, nota-se que neste trabalho não é abordado os problemas de distúrbios e incertezas na modelagem do sistema. Tal dificuldade é resolvida com um compensador dinâmico como a técnica de Controle por Modos Deslizantes Terminal (Galicki (2019)). Outros tipos controle que também resolvem os problemas de distúrbios e incertezas são os controles adaptativos (Boukattaya *et al.* (2018) e Brahmi *et al.* (2016)) e redes neurais (Lin e Goldenberg (2001), Xu *et al.* (2009) e Xiao *et al.* (2017)). Outros esquemas de controle que podem ser citados são algoritmos heurísticos para movimentação do Manipulador Móvel não-holonômico (MM) com trajetória otimizada (Burget *et al.* (2016), Avanzini *et al.* (2015) e Minniti *et al.* (2019)). Existem também o controle de múltiplos MMs para realização de uma tarefa em conjunto ou manter uma formação específica (Andaluz *et al.* (2011), Li e Su (2013), Dai e Liu (2016) e Thakar *et al.* (2018)).

A maioria dos sistemas de controle desenvolvidos não consideram as questões de singularidades e restrições no espaço de trabalho do robô, que entende-se como restrições no estado do sistema. De forma abrangente, na robótica, evitar singularidades e restrições no espaço de trabalho do robô é um requisito a ser considerado na

solução do problema de geração de trajetórias. Contudo, há técnicas de controle que conciliam restrições e objetivos de controle, resolvendo um problema de controle com restrições.

Atualmente, a solução mais popular encontrada para o problema de controle com restrição é o Controle de Modelo Preditivo, do inglês *Model Predictive Control* (MPC). Ele busca obter um sinal de controle que minimiza uma função objetivo a cada amostragem de tempo respeitando restrições do problema (Qin e Badgwell (2003), Camacho e Alba (2013) e Vazquez *et al.* (2014)). Apesar dele apresentar um ótimo desempenho comparado com outras soluções em termos de controle, ele é computacionalmente custoso (Nicotra e Garone (2016b)).

O controle com restrições em um sistema não-linear é um desafio constante relatado na literatura. Segundo Nicotra e Garone (2018), as soluções encontradas são classificadas com base nos requisitos de controle que o sistema deve atingir, como exemplo a robustez, eficiência computacional, rapidez do processamento, simplicidade de implementação e confiabilidade. Esses requisitos devem ser ponderados de acordo com a aplicação e, no caso do manipulador móvel, dispõe-se de um sistema com limitações computacionais e energéticas e a aplicação do controle preditivo tem seu desempenho consideravelmente afetado ao ponto de ser inviável.

Outras estratégias menos custosas computacionalmente têm como ideia principal manipular a referência de um sistema de controle em malha fechada de tal forma a manter seu estado dentro das restrições e este é o caso do Governador de Referência, do inglês *Reference Governor* (RG). O RG é uma estratégia de otimização para controle de restrições de sistemas pré-controlados que, em detrimento do desempenho, consegue gerar soluções computacionalmente mais leves. Ele é um controle mais simples que o MPC, porém perde desempenho quando utilizado em sistemas mais complexos (Bemporad (1998) e Gilbert e Kolmanovsky (2002)). O histórico e funcionamento do RG, assim como uma lista de artigos com sua utilização também são encontrados em *Surveys* (Garone *et al.* (2017)).

Uma solução que lida com restrições criando uma referência sub-ótima, porém obtida de forma analítica e, por consequência, possui bom desempenho computacional, trata-se do *Explicit Reference Governor* (ERG) (Nicotra e Garone (2016b)). O ERG é um governador de referência cuja principal característica é a capacidade de modificar a referência de um sistema previamente controlado de forma explícita, ou seja, ele é uma unidade de controle adicional incorporado entre a referência e o sistema de malha fechada, que gera uma referência auxiliar, próxima à referência desejada, que respeita as restrições impostas a ele.

A inovação do ERG é que ele provê uma solução analítica para o problema de restrição de entrada e de estado sem resolver um problema de otimização em tempo real. Para isso, ele faz uma aproximação com base em função de Lyapunov que

manipula a derivada da referência auxiliar, ao invés do valor atual, e impõe as restrições. Devido à sua expressão de forma fechada, o ERG é executado em uma larga gama de dispositivos e de fácil implementação, tornando-o adequado para aplicações com dinâmica rápida com recursos computacionais limitados (Nicotra e Garone (2018)).

Como o ERG é uma proposta de controle recente, os artigos encontrados sobre o assunto estão concentrados em ampliar a teoria do controle. Como exemplo tem-se a aplicação em sistemas com restrições variantes no tempo (Hosseinzadeh *et al.* (2020)); teoria do ERG aplicada a restrições côncavas (Hosseinzadeh e Garone (2019)), e com estudo de casos sobre a utilização em Veículo Aéreo não-Tripulado, do inglês *Unmanned Aerial Vehicle* (UAV) (Nicotra *et al.* (2017, 2015)); e recarga de baterias de lítio (Romagnoli *et al.* (2017) e Goldar *et al.* (2020)). No entanto, dentro do levantamento bibliográfico feito para este trabalho, não foram encontrados artigos com ERG aplicado a manipuladores móveis.

## 1.1 OBJETIVOS

Nesta seção, será tratado sobre os objetivos geral e específicos da dissertação.

### 1.1.1 Objetivo geral

Tratar o problema de deslocamento de um manipulador móvel não-holonômico sujeito a restrições no espaço de trabalho e singularidades utilizando o método conhecido como Governador de Referência Explícito.

### 1.1.2 Delimitações e Objetivos específicos

Para o desenvolvimento deste trabalho são assumidas as seguintes delimitações para o projeto do manipulador móvel:

- Considera-se como objeto de estudo um manipulador móvel não-holonômico com locomoção diferencial<sup>1</sup> e manipulador de dois graus de liberdade com juntas rotativas acoplado;
- Ele navega em um ambiente estruturado com mapa conhecido;
- A posição e orientação do robô são conhecidas;
- O robô é equipado com sensores capazes de medir todas as variáveis para o controle do mesmo;
- Existem posições e distâncias máximas e mínimas que restringem a movimentação do manipulador móvel;

<sup>1</sup> Entende-se por locomoção diferencial como a locomoção de uma base com duas rodas atuadas por motores independentes entre si, e uma roda de sustentação.

- O robô se encontra em um ambiente ideal e com a ausência de distúrbios e perturbações.

Os objetivos específicos desta pesquisa são:

- Obter o modelo matemático que descreva os comportamentos cinemáticos e dinâmicos do manipulador móvel.
- Desenvolver um sistema de controle com o objetivo de que o robô movimente sua base e manipulador em seu espaço de trabalho e respeite regiões limite e evite pontos de singularidade. O sistema é composto de duas partes:
  1. Sistema de controle de regulação. Nesta etapa, não são consideradas restrições e, por simplicidade, é utilizado a técnica de Dinâmica Inversa mais um controlador Proporcional Derivativo (PD);
  2. Governador de Referência Explícito, responsável por prover ao sistema a capacidade de evitar restrições.
- Verificar os resultados por meio de simulações e de testes de validação.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Este documento está dividido em:

- *Capítulo 2*, descreve a modelagem cinemática e dinâmica de um manipulador móvel não-holonômico disposto de um braço robótico com dois graus de liberdade;
- O *Capítulo 3* apresenta uma descrição sobre o ERG, seus conceitos básicos e sua aplicação em sistemas descritos pela equação de Euler-Lagrange.
- Após a descrição do governador de referência, o *Capítulo 4* segue com a implementação do ERG no manipulador móvel não-holonômico para o controle de movimentação com restrições posicionais e de singularidade aplicado ao efetuator final do sistema pré-controlado;
- Os resultados de simulação para apresentar as diferenças de comportamento do sistema com e sem a aplicação do ERG são exibidos no *Capítulo 5*, além de uma breve discussão sobre os resultados obtidos;
- E, por fim, no *Capítulo 6* conclui com a discussão sobre os resultados e trabalhos futuros.



## 2 MODELAGEM DO MANIPULADOR MÓVEL

Os modelos cinemáticos e dinâmicos de um sistema mecânico descrevem a evolução temporal da movimentação de corpos rígidos, dados o estado inicial e as entradas de torques em suas juntas e rodas. Esses modelos matemáticos são de interesse para a investigação do comportamento do robô, síntese e teste de sistemas de controle (Li e Ge (2019)). A depender da finalidade, desenvolve-se modelos mais ou menos detalhados. Como exemplo, o desenvolvimento de um simulador para teste, a riqueza de detalhes é importante, enquanto que para a síntese de controladores assume-se termos que representam incertezas de modelagem e construir um modelo mais simples e adequado ao desenvolvimento de controle.

Esta seção apresenta, de maneira compacta, a modelagem cinemática e dinâmica de um manipulador móvel (MM), de base não-holonômica com braço robótico planar com 2 Graus de Liberdade, do inglês *Degrees of Freedom* (DOF), com objetivo de servir ao desenvolvimento de um sistema de controle que visa controlar a posição do efetuador final do braço robótico e a base móvel no plano Cartesiano  $xy$ . O conteúdo aqui exposto tem como base os trabalhos de White (2006) e Boukattaya *et al.* (2011). Detalhes sobre a construção dos modelos são explicados no Apêndice A.

### 2.1 DESCRIÇÃO E MODELAGEM CINEMÁTICA DO MANIPULADOR MÓVEL

A descrição do manipulador móvel é dividida em duas etapas; a primeira concentra apenas a descrição da base, enquanto a segunda considera a adição do manipulador robótico.

A base do MM possui um corpo com centro de massa fixo  $P_c$  que determina a posição dela com relação ao sistema de coordenadas fixo, como apresentado na Figura 3. A base é atuada por duas rodas laterais de movimentação independente localizadas a uma distância  $b$  do centro. As rodas são colineares e a distância longitudinal entre seu eixo e o centro de massa tem valor  $d$ .

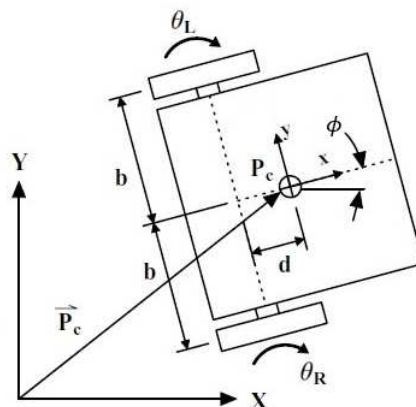


Figura 3 – Base móvel e parâmetros cinemáticos

A base é completamente descrita pelas variáveis de configuração, expressas pelo vetor de coordenadas generalizadas

$$q_a = \left[ x_c \ y_c \ \phi \ \theta_R \ \theta_L \right]^T, \quad (1)$$

sendo  $x_c$  e  $y_c$  a posição absoluta do centro de massa  $P_C$  do MM,  $\phi$  a angulação da rotação absoluta do MM e  $\theta_R$  e  $\theta_L$  os deslocamentos angulares das rodas direita e esquerda, respectivamente. A Tabela 1 apresenta os parâmetros cinemáticos correspondentes à base móvel.

A base é sujeita a três restrições não-holonômicas. As restrições da base ocorrem pelo comportamento das rodas. A primeira é a restrição de velocidade nula na direção transversal da base, descrita por

$$-\dot{x}_c \sin \phi + \dot{y}_c \cos \phi - \dot{\phi}d = 0, \quad (2)$$

e outras duas restrições relacionadas ao não-deslizamento e não-derrapagem de cada roda:

$$\dot{x}_c \cos \phi + \dot{y}_c \sin \phi + b\dot{\phi} = r\dot{\theta}_R; \quad (3)$$

$$\dot{x}_c \cos \phi + \dot{y}_c \sin \phi - b\dot{\phi} = r\dot{\theta}_L. \quad (4)$$

O MM planar possui um braço robótico de dois elos e duas juntas de revolução montados sobre a base móvel no ponto  $P_a$  há uma distância  $L_a$  do centro de massa  $P_C$ , conforme visto na Figura 4. Os parâmetros cinemáticos do braço robóticos estão descritos na Tabela 2.

Assume-se que o manipulador é completamente atuado, sem restrições de movimento dentro do seu espaço de atuação e opera apenas no plano horizontal.

Tabela 1 – Parâmetros da Base Móvel

Variável	Descrição	Valor	Unidade
$b$	Distância da roda ao centro do MM	0,182	m
$d$	Distância da roda ao eixo de centro de massa	0,166	m
$r_o$	Raio da roda	0,05	m
$m_w$	Massa da roda	0,159	kg
$m_c$	Massa da base	17,25	kg
$I_w$	Momento de inércia da roda	$2,0 \times 10^{-4}$	$kg.m^2$
$I_c$	Momento de inércia da base	0,297	$kg.m^2$
$P_C$	Posição do centro de massa da base	Variável	m
$x_c, y_c$	Posição absoluta do centro de massa	Variável	m
$\phi$	Ângulo de rotação da base móvel	Variável	rad
$\theta_R, \theta_L$	Deslocamento angular das rodas	Variável	rad
$\tau_R, \tau_L$	Entrada de Torque das rodas	Entrada	N.m

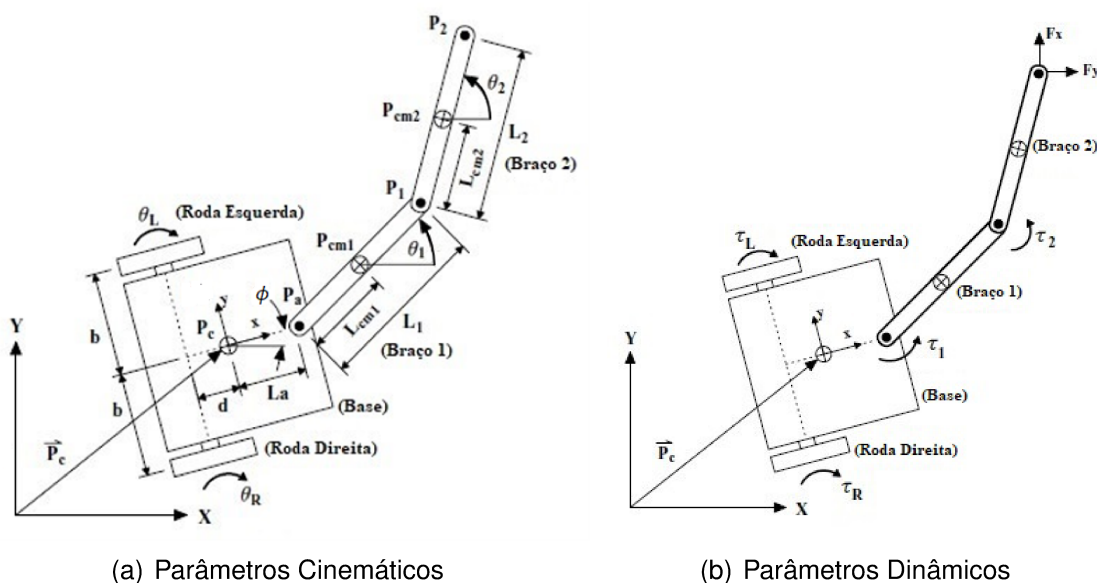


Figura 4 – Manipulador móvel composto de base móvel sob rodas e manipulador de dois graus de liberdade - adaptado de White *et al.* (2007).

Tabela 2 – Parâmetros do Braço Robótico

Variável	Descrição	Valor	Unidade
$L_1$	Tamanho do braço 1 (link 1)	0,514	m
$L_2$	Tamanho do braço 2 (link 2)	0,362	m
$L_{cm1}$	Distância do centro de massa do braço 1	0,252	m
$L_{cm2}$	Distância do centro de massa do braço 2	0,243	m
$P_a$	Posição da base do braço robótico	Variável	m
$L_a$	Distância do centro de massa da base até $P_a$	0,1	m
$m_1$	Massa do braço 1	2,56	kg
$m_2$	Massa do braço 2	1,07	kg
$I_1$	Momento de inércia do braço 1	0,148	$kg.m^2$
$I_2$	Momento de inércia do braço 2	0,0228	$kg.m^2$
$\theta_1, \theta_2$	Deslocamento angular das juntas do braço robótico	Variável	rad
$\tau_1, \tau_2$	Entrada de Torque nas juntas rotativas	Entrada	N.m

Para adicionar a movimentação do braço robótico ao modelo do MM, inclui-se duas coordenadas generalizadas referente às juntas de revolução dos elos

$$q_b = \left[ \theta_1 \quad \theta_2 \right]^T. \tag{5}$$

Dessa forma, o conjunto completo das coordenadas generalizadas estendidas, incluindo as variáveis do manipulador, são descritas por

$$q = \left[ q_a^T \quad q_b^T \right]^T = \left[ x_c \quad y_c \quad \phi \quad \theta_R \quad \theta_L \quad \theta_1 \quad \theta_2 \right]^T. \tag{6}$$

Considerando o vetor de coordenadas generalizadas  $q$ , escreve-se as restrições não-holonômicas na forma matricial

$$A(q)\dot{q} = 0, \quad (7)$$

que deve refletir as 3 restrições das equações (2), (3) e (4), que gera a matriz

$$A(q) = \begin{bmatrix} -\sin \phi & \cos \phi & -d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \phi & -\sin \phi & -b & r_o & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \phi & -\sin \phi & b & 0 & r_o & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

O conjunto de soluções para (7) está no espaço nulo de  $A(q)$ , denominado de matriz  $S(q)$ , de tal forma que  $A(q)S(q) = 0$ . Como consequência, para um vetor de velocidade permitidas dado por

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_R & \dot{\theta}_L & \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T, \quad (9)$$

descreve-se o comportamento cinemático do MM como

$$\dot{q} = S\dot{z}, \quad (10)$$

em que

$$S(q) = \begin{bmatrix} c(b \cos \phi - d \sin \phi) & c(b \cos \phi + d \sin \phi) & 0 & 0 \\ c(b \sin \phi + d \cos \phi) & c(b \sin \phi - d \cos \phi) & 0 & 0 \\ c & -c & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

no qual  $c = r_o/2b$ .

## 2.2 MODELO DINÂMICO NO ESPAÇO DE CONFIGURAÇÃO

Uma forma para construir a equação de movimento de sistemas mecânicos complexos, muito utilizada na literatura, é o emprego de Equações de Euler-Lagrange, por ser uma abordagem baseada em energia. No caso de sistemas com restrição, esta equação é descrita na forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + A^T(q)\lambda = F, \quad (12)$$

em que  $q$  é o vetor de coordenadas generalizadas, aqui chamadas de coordenadas de configuração,  $F$  representa forças externas não conservativas,  $A^T(q)\lambda$  representa forças restritivas sendo  $\lambda$  denominado vetor de multiplicadores de Lagrange, por fim,

$\mathcal{L}(q, \dot{q})$  é o lagrangiano definido como a diferença entre a energia cinética  $\mathcal{K}(q, \dot{q})$  e energia potencial  $\mathcal{P}(q)$

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{P}(q). \quad (13)$$

Para um sistema mecânico, temos que

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}, \quad (14)$$

em que  $M(q)$  é a matriz de inércia. A solução da Equação de Lagrange neste caso resulta na equação de movimento

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F - A(q)^T \lambda, \quad (15)$$

em que a matriz  $C(q, \dot{q})$  representa forças de Coriolis e centrífugas,  $G(q)$  simboliza as forças gravitacionais e  $F$  é o vetor de forças externas não conservativas. A matriz de inércia  $M(q)$  é consequência direta da construção da expressão da energia cinética, a matriz  $C(q, \dot{q})$  é calculada por meio dos símbolos de Christoffel e  $G(q)$  resulta da derivada da energia potencial na Equação de Euler-Lagrange,  $\frac{\partial \mathcal{P}(q)}{\partial q}$  (Spong e Vidyasagar (2008) e Kelly *et al.* (2006)).

A construção da equação de movimento do MM por meio da Equação de Euler-Lagrange demanda que seja calculado inicialmente o lagrangiano do sistema para, assim, calcular as matrizes que compõe a equação (15).

O MM é composto por 5 corpos rígidos distintos, sendo eles uma base móvel, duas rodas (esquerda e direita) e dois elos do braço; identificados como elo 1 e 2, cuja descrição no espaço é dada pelo vetor de coordenadas de configuração  $q$ , Equação (6). O acionamento é feito pelos torques nas rodas direita e esquerda, e nas juntas 1 e 2 do braço, respectivamente  $\tau_R$ ,  $\tau_L$ ,  $\tau_1$  e  $\tau_2$ . Estes torques compõem o vetor de torques de entrada do sistema

$$\tau_m = \begin{bmatrix} \tau_R & \tau_L & \tau_1 & \tau_2 \end{bmatrix}^T. \quad (16)$$

Devido ao braço e à base se movimentarem apenas no plano horizontal, sua energia potencial é nula, ou seja,  $\mathcal{P}(q) = 0$ . Isso implica em que a matriz de forças gravitacionais seja nula, isto é,  $G(q) = 0$ . A energia cinética  $\mathcal{K}(q, \dot{q})$  é dada pela soma das energias cinéticas de cada um dos corpos, que são descritas em função das coordenadas de configuração. Os detalhes da obtenção de  $\mathcal{K}(q, \dot{q})$ , assim como de  $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ , e o cálculo das matrizes  $M(q)$  e  $C(q, \dot{q})$ , são apresentados no Apêndice A.

Por fim, a equação de movimento do MM planar resulta em

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = E\tau_m - A^T(q)\lambda, \quad (17)$$

em que  $q \in \mathbb{R}^{1 \times 7}$  está definido em (6),  $\tau_m \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$  em (16),  $A(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 7}$  em (8),  $M(q) \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$  em (117),  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$  em (119),  $E \in \mathbb{R}^{7 \times 4}$  em (120). O vetor de

multiplicadores de Lagrange  $\lambda \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  não é trivial de se determinar, sendo necessário manipular o modelo de tal forma que se obtenha uma representação que não dependa dele, conforme pode ser visto na seção seguinte.

### 2.3 MODELO DINÂMICO NO ESPAÇO IRRESTRITO

Conforme mencionado, a aplicação da Equação de Euler-Lagrange na forma apresentada em (17) não é conveniente, pois o cálculo de  $\lambda$  é não-trivial. Para superar esta dificuldade, descreve-se a dinâmica do sistema por meio da variável

$$z = [\theta_R \ \theta_L \ \theta_1 \ \theta_2], \quad (18)$$

associado ao vetor de velocidades permitidas dado pela Equação (9). A representação matemática completa do MM é dada pela combinação da nova equação movimento, desenvolvida na sequência, com o modelo cinemático dado pela Equação (10).

Para determinar a nova equação de movimento, manipula-se (17) utilizando a matriz espaço-nulo de  $A(q)$  (Matriz  $S(q)$ ), de tal forma a descrever o comportamento dinâmico do sistema em um espaço irrestrito descrito por  $z$ , ao invés de descrevê-lo com variáveis que possuem restrição (White *et al.* (2007)).

Considere inicialmente a derivada temporal de (10) como

$$\ddot{q} = S\ddot{z} + \dot{S}\dot{z}. \quad (19)$$

Substituindo (10) e (19) em (17), e pré-multiplicando pela Matriz Espaço-nulo transposta ( $S^T$ ), e considerando o fato de que  $A(q)S(q) = S^T(q)A^T(q) = 0$ , tem-se a equação de movimento do sistema representada por

$$M_\theta \ddot{z} + C_\theta \dot{z} = \tau_\theta, \quad (20)$$

onde  $M_\theta = S^T M(q) S$ ,  $C_\theta = S^T (M(q) \dot{S} + C(q, \dot{q}) S)$  e  $\tau_\theta = S^T E \tau_m$  são matrizes de forças de atuação generalizadas independentes. Na Figura 5 é apresentado um diagrama de blocos referente ao modelo no espaço irrestrito.

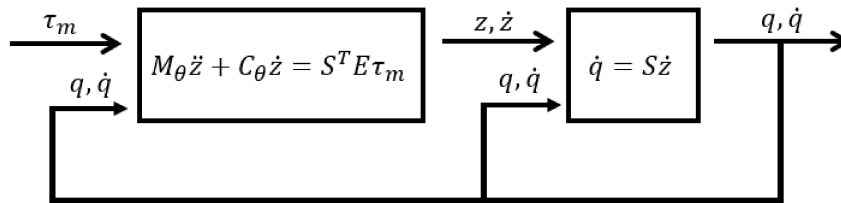


Figura 5 – Sistema no espaço irrestrito.

## 2.4 MODELO DINÂMICO NO ESPAÇO DE TAREFA

Com o objetivo de controlar a posição do efetuador final do braço robótico e a base móvel, considera-se a transformação do espaço de trabalho do MM de velocidade angular ( $\dot{z}$ ) para posição no plano Cartesiano  $xy$  (de forma similar como foi efetuada para a equação (20)). Para isso, determina-se o Jacobiano para a base móvel, assim como o Jacobiano para o efetuador final (Boukattaya *et al.* (2011)).

Para a plataforma móvel, a equação cinemática que relaciona a velocidade das rodas ( $\dot{\theta}_R, \dot{\theta}_L$ ) com a velocidade da base móvel no eixo Cartesiano  $xy$  ( $\dot{x}_b, \dot{y}_b$ ), tendo como referência a base do braço robótico no ponto  $P_a$ , é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(bC\phi - \beta S\phi) & c(bC\phi + \beta S\phi) \\ c(bS\phi + \beta C\phi) & c(bS\phi - \beta C\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_R \\ \dot{\theta}_L \end{bmatrix}, \quad (21)$$

onde  $c = r_o/2b$ ,  $\beta = (d + L_a)$  e os símbolos  $S\phi$  e  $C\phi$  são utilizados no lugar de seno e cosseno do ângulo  $\phi$ , respectivamente.

Como o braço robótico é posicionado sobre a extensão da base em (21), a velocidade linear do efetuador final ( $\dot{x}_{ee}, \dot{y}_{ee}$ ) fica

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{ee} \\ \dot{y}_{ee} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi \\ S\phi & C\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 + \dot{\phi} \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Os valores de  $J_{ij}$ , referente aos elementos do Jacobiano do braço robótico, possuem uma adaptação do projeto inicial de Boukattaya *et al.* (2011), pois a modelagem do MM, proposta na Seção 2.2, há diferenças sobre a modelagem feita por Boukattaya em sua pesquisa, mais precisamente na formulação preliminar dos ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Por esse motivo, os valores de  $J_{ij}$  são dados por  $J_{11} = -L_1 \sin \theta_1$ ,  $J_{12} = -L_2 \sin \theta_2$ ,  $J_{21} = L_1 \cos \theta_1$  e  $J_{22} = L_2 \cos \theta_2$ . Logo, combinando as equações (21) e (22), a equação que relaciona a mudança de variável no espaço de trabalho do MM de velocidade angular para posição no plano Cartesiano  $xy$  é dado por

$$\dot{x} = (R_j J_a) \dot{z} = J \dot{z}, \quad (23)$$

com:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{ee} \\ \dot{y}_{ee} \\ \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \end{bmatrix}; \quad R_j = \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C\phi & -S\phi \\ 0 & 0 & S\phi & C\phi \end{bmatrix}; \quad (24)$$

$$J_a = \begin{bmatrix} \frac{r_o}{2} + \frac{r_o}{2b} J_{11} & \frac{r_o}{2} - \frac{r_o}{2b} J_{11} & J_{11} & J_{12} \\ \frac{r_o}{2b} (d + L_a + J_{21}) & -\frac{r_o}{2b} (d + L_a + J_{21}) & J_{21} & J_{22} \\ \frac{r_o}{2} & \frac{r_o}{2} & 0 & 0 \\ \frac{(d+L_a)r_o}{2b} & -\frac{(d+L_a)r_o}{2b} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Isolando  $\dot{z}$ , obtém-se

$$\dot{z} = J^{-1} \dot{x}, \quad (26)$$

e a sua derivada expressa por

$$\ddot{z} = J^{-1} \ddot{x} - J^{-1} \dot{J} J^{-1} \dot{x}. \quad (27)$$

Finalmente, substituindo (26) e (27) em (20), e pré-multiplicando a equação resultante por  $J^{-T}$ , obtém-se a nova Equação dinâmica no espaço de trabalho segundo a forma

$$M_x \ddot{x} + C_x \dot{x} = \tau_x, \quad (28)$$

onde  $M_x = J^{-T} M_\theta J^{-1}$  é a matriz de inércia simétrica definida positiva,  $C_x = J^{-T} (C_\theta - M_\theta J^{-1} \dot{J}) J^{-1}$  e  $\tau_x = J^{-T} \tau_\theta$  são matrizes de forças de atuação generalizadas independentes.

Uma vez que a matriz Jacobiana possui a sua inversa presente no equacionamento, é indispensável uma explicação sobre singularidade e como ela afeta o robô.

### 2.4.1 Singularidade

A singularidade é um problema bastante comum em manipuladores robóticos, e tem origem em certas posições específicas de configuração que ocasiona na perda de posto da matriz Jacobiana do manipulador.

Segundo Tsai (1999), a matriz Jacobiana ( $J$ ) transforma a movimentação das juntas do manipulador em velocidades do efetuador final, assim temos a relação

$$\dot{q} = J^{-1} \dot{x}. \quad (29)$$

Esse é um problema conhecido como *cinemática inversa* em que, dados os valores das velocidades do efetuador final, é possível computar os valores das juntas. Em um problema de planejamento de trajetória, as velocidades do efetuador final são frequentemente dados conforme um caminho desejado na área de trabalho do efetuador, e essas velocidades são convertidas em movimentação de juntas. Dessa forma, é fundamental o conhecimento da transformação da inversa do Jacobiano do manipulador (29).

A matriz  $J^{-1}$  pode ser obtida pela formulação da matriz de cofatores de  $J$ , transpondo ela, e dividindo pelo próprio determinante de  $J$ . No entanto, para algumas configurações do manipulador, a matriz Jacobiana perde posto (ou seja, há uma redução do número de linhas ou de colunas linearmente independentes). Por consequência, uma vez que o manipulador se aproxima dessas configurações, o Jacobiano fica mal condicionado e se torna não-inversível. Sob tal condição, a solução numérica da equação (29) resulta em infinitas soluções de configurações de juntas.



O manipulador é dito estar em *configuração singular* quando o Jacobiano perde o posto completo. Isso significa que, na configuração singular, o manipulador perde um ou mais graus de liberdade, e ele não será capaz de se mover em uma das direções do espaço de trabalho.

As configurações de singularidade podem ser encontradas descobrindo qual conjunto de valores de  $q$  fazem o determinante do Jacobiano igualar-se a zero. Para um manipulador serial, como é o caso deste trabalho, a condição de singularidade depende somente da posição relativa das juntas.

Existem dois tipos de singularidades para o manipulador serial: a *singularidade de fronteira* e a *singularidade interna*. A singularidade de fronteira ocorre quando o efetuador final está no limite da sua área de trabalho, e ele ocorre tanto quando o efetuador final está em uma configuração totalmente estendido ou retraído, como também quando um de seus atuadores encontra o seu limite mecânico. A singularidade interna ocorre dentro dos limites da área de trabalho, e algumas condições a ocasionam. Como por exemplo, quando duas ou mais juntas se alinham.

Portanto, com a modelagem do manipulador móvel, as seções seguintes têm como objetivo adicionar um controlador para o seguimento de referência e o Governador de Referência Explícito para restringir o sistema.

### 3 GOVERNADOR DE REFERÊNCIA EXPLÍCITO

O governador de referência explícito (ERG, do inglês *Explicit Reference Governor*) é uma estrutura de controle adicionada a uma malha fechada já pré-estabilizada, como visto na Figura 6. Ele tem a premissa de modificar a referência do sistema para restringir sua operação dentro dos limites dados por características

- i) Internas: como saturação de atuadores, singularidades, entre outros; e
- ii) Externas: como obstáculos, ambientes com estruturas côncavas, espaços de trabalho reduzidos, etc.

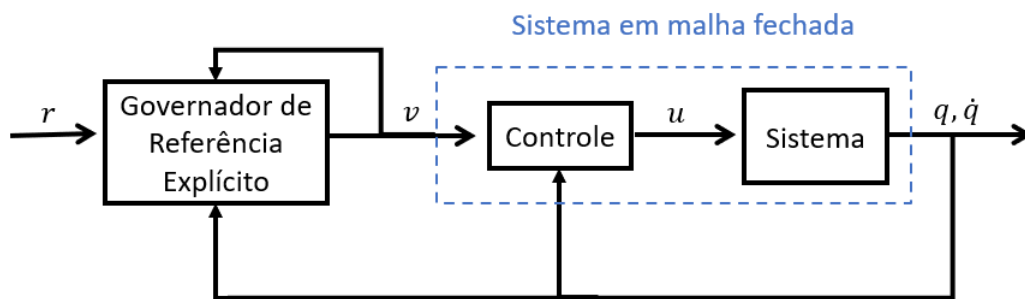


Figura 6 – Representação do Governador de Referência Explícito (ERG)

O primeiro ponto interessante sobre o ERG vem do fato de ser uma estratégia para restrição de sistemas não-lineares previamente estabilizados.

Além disso, como discutido no capítulo introdutório, sua aplicação em sistemas cujo poder computacional e energético são limitados é uma alternativa interessante frente às técnicas como o Controle Preditivo e algoritmos heurísticos, que podem ter seus desempenhos deteriorados ou mesmo ser inviável devido a estas limitações. Já o ERG, por meio de uma solução analítica, gera uma trajetória auxiliar que tende à trajetória desejada, prezando pelas restrições impostas. A solução pode ser ótima ou sub-ótima, como é visto no trabalho de Nicotra e Garone (2016b). No caso descrito neste trabalho, em que o manipulador móvel não-holonômico é descrito pela equação de Euler-Lagrange cuja matriz de inércia não é constante, a solução analítica é sub-ótima.

A principal diferença entre o Governador de Referência clássico e o ERG é que este manipula a derivada da referência ao invés da referência atual, possibilitando assim que o mesmo restrinja o sistema controlado sem a necessidade de resolver um problema de otimização (Nicotra e Garone (2016b)).

Na sequência, apresenta-se uma breve revisão sobre ERG, seus conceitos básicos e sua aplicação em sistemas descritos pela equação de Euler-Lagrange, em que a matriz de inércia depende dos estados do sistema e, portanto, não é constante.

### 3.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE ERG

Os primeiros artigos sobre o assunto (Nicotra e Garone (2015, 2016c)) utilizam o ERG sobre sistemas lineares e não-lineares com restrições convexas. Eles demonstram as partes integrantes do ERG, assim como exemplos de aplicação em um sistema do tipo integrador duplo, braço robótico e um exemplo real de um pêndulo invertido. Já Merckaert *et al.* (2018), o ERG é usado para um sistema de manipulador robótico com o intuito de limitar a movimentação no plano, com restrições de ângulo máximo e mínimo e obstáculos circulares conhecidos.

Tem-se, ainda, a aplicação do ERG para testes em sistemas com restrições variantes no tempo (Hosseinzadeh *et al.* (2020)); restrições côncavas (Hosseinzadeh e Garone (2019)); sistemas com atraso linear (Nicotra *et al.* (2018)); e sistema não-linear com ERG robusto (Nicotra e Garone (2016a)).

O artigo de Nicotra e Garone (2018) define as restrições de sistemas não-lineares em diferentes situações, como trabalhar com robustez e incertezas paramétricas no ERG e alguns casos onde modificações no ERG são possíveis dadas condições iniciais de projeto. Além do mais, apresenta dois exemplos sobre utilizações do ERG em veículos aéreos não-tripulados (UAVs, do inglês *Unmanned Aerial Vehicle*), sendo eles a limitação de ângulo máximo de um avião e controle de trajetória, e simulação numérica para controle de restrição de um UAV.

Há artigos sobre controle e restrição de movimento de UAVs e aeromodelos (Nicotra *et al.* (2017)); restrições de múltiplos UAVs de forma distribuída (Nicotra *et al.* (2015)); controle de restrições de UAV por ERG Robusto (Nicotra *et al.* (2016)); e recarga de baterias de lítio com restrições não-lineares e sua fundamentação teórica (Romagnoli *et al.* (2017) e Goldar *et al.* (2020)). Além disso, há artigos com utilizações pontuais sobre controle de posição de um objeto sob restrições em uma matriz ortogonal ( $SO(3)$ ) para evitar uma singularidade conhecida na representação angular de Euler-Lagrange (Nakano *et al.* (2018)); controle posicional para um modelo de nave espacial com ERG para adicionar restrições na saturação e restrições não-lineares (Nicotra *et al.* (2019)); e controle de guia de um míssil utilizando ERG para restrições com observador de distúrbios também são encontrados na literatura.

As seções seguintes apresentam a estrutura do ERG, quais as principais características na formulação do controle e quais os requisitos do sistema para aplicá-lo. Para mais detalhes sobre propriedades dinâmicas e outros métodos para restringir o sistema, recomenda-se a leitura de Nicotra e Garone (2016b).

### 3.2 CONCEITOS BÁSICOS DO ERG

O Governador de Referência Explícito é aplicado a sistemas pré-estabilizados, como é ilustrado na Figura 7.

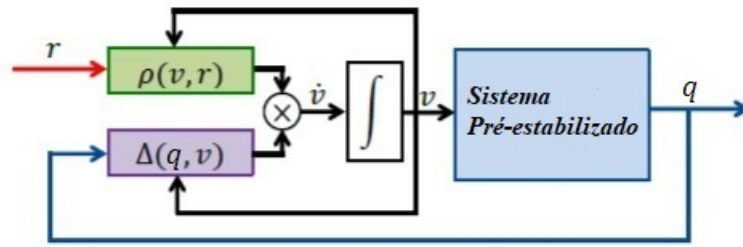


Figura 7 – Representação interna do governador de referência explícito - Imagem modificada de Nicotra e Garone (2016b)

Seu objetivo é gerar uma trajetória  $(v(t))$  com base nos estados do sistema  $(x)$  e na trajetória desejada  $(r(t))$  que tenda para esta e respeite as restrições do sistema pré-estabilizado. A solução é gerada de forma analítica, sem a necessidade de otimização em tempo real.

A formulação do ERG é dada da seguinte forma:

**Definição 3.1 (Lei de Restrições)** *Dado um sistema não-linear*

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (30)$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}^m$  e uma referência auxiliar  $v \in \mathbb{R}^p$ . Dado uma lei de controle que pré-estabiliza o sistema

$$u = g(x, v), \quad (31)$$

sujeito a restrições convexas

$$c(x, v) \geq 0, \quad (32)$$

sendo que a lei de controle é independente das restrições e, dado um  $x(0), v(0)$  satisfazendo  $c(x(0), v(0)) \geq 0$ , deve-se encontrar um sinal de referência auxiliar  $v(t)$ , tal que:

- Para qualquer sinal contínuo  $r(t) \in \mathbb{R}^p$ , as restrições sempre sejam satisfeitas, ou seja,  $c(x(t), v(t)) \geq 0, \forall t \geq 0$ ;
- Para qualquer referencial constante  $r(t)$ , satisfazendo  $c(x, r(t)) \geq 0$ , a aplicação da referência auxiliar  $v(t)$  assintoticamente tenda a  $r(t)$ ;
- Para qualquer referência constante  $r(t) \in \mathbb{R}^p$ , a aplicação da referência auxiliar  $v(t)$  assintoticamente tenda a  $r^*$ , uma vez que  $r(t)$  não seja possível de ser alcançada pelo impedimento das restrições  $c(x, v)$ , satisfaça:

$$\begin{cases} \min \|r - r^*\|; \\ \text{sujeito a } c(x_{r^*}, r^*) \geq \delta. \end{cases} \quad (33)$$

Sendo  $r^*$  a projeção admissível da referência desejada  $(r(t))$  e o escalar  $\delta$  é um valor suficientemente pequeno e positivo que caracteriza a distância final entre  $r(t)$  e  $r^*$ .

Desta forma, com a adição da referência auxiliar  $v(t)$  em um sistema pré-controlado, é possível resolver o problema de desvio de restrições previamente conhecidas modificando o referencial do sistema.

O ERG é dividido em duas partes essenciais: a Margem de Dinâmica Segura  $(\Delta(x, v))$  e o Campo de Navegação  $(\rho(r, v))$ . A multiplicação delas gera a derivada da referência auxiliar, assim como demonstrado na equação a seguir.

$$\dot{v} = \Delta(x, v)\rho(r, v) \quad (34)$$

A Margem de Dinâmica Segura manipula o módulo da referência modificada, sendo ela a medida que reflete a distância entre o estado atual do sistema e as restrições a serem evitadas. Já o Campo de Navegação se traduz na direção que deve ser seguida para que a referência atual encontre com a referência desejada sem passar pelas restrições.

Nas seções seguintes estão detalhadas as variáveis  $\Delta(x, v)$  e  $\rho(r, v)$  para sistemas dinâmicos representados pela equação de Euler-Lagrange. Para maiores detalhes e provas das proposições declaradas, recomenda-se consultar o trabalho de Nicotra e Garone (2016b).

### 3.3 MARGEM DE DINÂMICA SEGURA

Esta seção apresenta, de forma compacta, como implementar a Margem de Dinâmica Segura em sistemas dinâmicos não-lineares, descritos pela formulação de Euler-Lagrange. Leva-se em conta apenas a parte essencial para o entendimento da aplicação no sistema do Manipulador Móvel não-holonômico (MM). Para mais detalhes sobre a aplicação em outros sistemas, recomenda-se a leitura da tese de Nicotra e Garone (2016b).

A Margem de Dinâmica Segura  $(\Delta(x, v))$ , conceitualmente, representa a medida que reflete a distância entre as restrições e o estado atual do sistema, dada uma referência auxiliar  $v$  (Nicotra e Garone (2016b)). Desta maneira, quantifica a segurança do movimento do sistema em relação ao não descumprimento de restrições.

#### 3.3.1 Definição

Esta subseção apresenta a definição geral do termo  $\Delta(x, v)$ , identificando as condições suficientes para a sua implementação no ERG (Nicotra e Garone (2018)).

**Definição 3.2 (Margem de Dinâmica Segura)** *Dado um sistema em malha fechada (30) sujeito a restrições (32). Seja  $\hat{x}(t|x, v)$  a solução de:*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}, v) \\ \hat{x}(0) = x. \end{cases} \quad (35)$$

*Dado uma referência auxiliar  $v$  que satisfaça<sup>2</sup>*

$$c(\bar{x}_v, v) \geq 0, \quad (36)$$

*Uma função contínua  $\Delta : \mathcal{R}^p \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  é uma margem de dinâmica segura se:*

- $\Delta(x, v) > 0 \Rightarrow c(\hat{x}(t|x, v), v) > 0, \forall t \geq 0;$
- $\Delta(x, v) \geq 0 \Rightarrow c(\hat{x}(t|x, v), v) \geq 0, \forall t \geq 0;$
- $\Delta(x, v) = 0 \Rightarrow \Delta(\hat{x}(t|x, v), v) \geq 0, \forall t \geq 0;$
- $\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0$  tal que  $c(\bar{x}_v, v) \geq \delta \Rightarrow \Delta(\bar{x}_v, v) \geq \epsilon.$

As três primeiras propriedades da Definição 3.2 dizem respeito à, dado uma referência contínua  $v$ ,  $\Delta(x, v)$  ser a distância entre os estados do sistema  $x(t)$  e as restrições (36). A última propriedade afirma que, caso  $v$  esteja estritamente contida nas restrições, o valor de  $\Delta(x_v, v)$  é estritamente positivo em regime permanente.

### 3.3.2 Cálculo da Margem de Segurança

O foco desta subseção é identificar as bases para geração de uma margem de dinâmica segura adequada  $\Delta(x, v)$  para os casos que se conhece uma função de Lyapunov para o sistema em malha fechada  $V(x, v)$ .

O Governador de Referência Explícito baseia-se na ideia da utilização de conjuntos de nível de funções de Lyapunov para evitar a necessidade de prever explicitamente  $\hat{x}(t|x, v)$ . Logo, considerando um sistema pré-estabilizado (30) e, dado uma referência contínua  $v$ , qualquer função de Lyapunov  $V(x, v)$ , continuamente parametrizada em  $v$ , que satisfaça as condições de estabilidade:

$$\begin{cases} V(\bar{x}_v, v) = 0; \\ V(x, v) > 0; \\ \dot{V}(x, v) \leq 0; \end{cases} \quad (37)$$

define um conjunto que contém as predições  $\hat{x}(t|x, v)$ . Assim é possível definir uma função limitante  $\Gamma(v)$  para  $V(x, v)$  que reflete a condição com respeito às restrições.

<sup>2</sup> Entende-se por  $\bar{x}_\beta$  como o ponto de equilíbrio referente à variável  $\beta$ .

**Definição 3.3 (Função Limitante  $\Gamma(v)$ )** Dado uma função de Lyapunov  $V(x, v)$  que satisfaça (37), uma função contínua  $\Gamma : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^+$  é um valor limiar para valores de restrição (32) caso:

- $V(x, v) < \Gamma(v) \Rightarrow c(x, v) > 0$ ;
- $V(x, v) \leq \Gamma(v) \Rightarrow c(x, v) \geq 0$ ;
- $\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 : c(\bar{x}_v, v) \geq \delta \Rightarrow \Gamma(v) \geq \epsilon$ .

A definição 3.3 afirma que um conjunto referente à função de Lyapunov  $\{x : V(x, v) \leq \Gamma(v)\}$ , está inteiramente contida nas restrições  $c(x, v) \geq 0$ , sendo o suficiente para garantir a satisfação das restrições, uma vez que a trajetória  $\hat{x}(t|x, v)$  está necessariamente contida no conjunto  $\{x : V(x, v) \leq \Gamma(v)\}$ .

A função limitante  $\Gamma(v)$  não é única. Além disso, ela determina o quanto conservativo será a Margem de Dinâmica Segura (Nicotra e Garone (2016b)). A escolha ótima desta função é dado por:

$$\begin{cases} \Gamma(v) = \max_x V(x, v), \text{ tal que} \\ \max_x V(x, v) \Rightarrow c(x, v) \geq 0, \end{cases} \quad (38)$$

o que representa o maior conjunto de valores que não viola as restrições. No entanto, ocorre uma dificuldade na otimização em (38), pelo fato de restrições do tipo  $A \Rightarrow B$  serem difíceis de resolver (Nicotra e Garone (2016b)). Logo, é mais conveniente escrever a equação anterior da seguinte forma:

$$\begin{cases} \Gamma(v) = \min_x V(x, v), \\ \text{sujeito a } c(x, v) \leq 0. \end{cases} \quad (39)$$

Esta formulação equivale a encontrar o menor valor de  $\{V(x, v) \leq \Gamma(v)\}$  que possua uma interseção não nula com  $\{x : c(x, v) < 0\}$ , ou seja

$$\{x : V(x, v) \leq \Gamma(v)\} \cap \{x : c(x, v) < 0\} \neq \emptyset,$$

assim como representado na Figura 8.

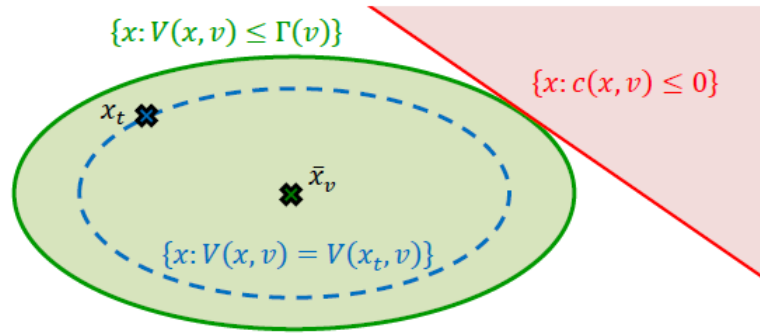
As proposições a seguir identificam os casos em que o problema de otimização admite solução ótima analiticamente.

**Proposição 3.1 (Lyapunov Elipsoidal e Restrições Lineares)** Dado a seguinte função de Lyapunov:

$$V(x, v) \geq (x - \bar{x}_v)^T P(v) (x - \bar{x}_v), \quad (40)$$

com  $P(v) > 0$  e restrição linear

$$c(x, v) = a^T x + b \geq 0, \quad (41)$$


 Figura 8 – Interpretação Geométrica de  $\Gamma$  - retirada de Nicotra e Garone (2016b)

a solução para o problema de otimização expresso em (39) é dada por

$$\Gamma(v) = \frac{(a^T \bar{x}_v + b)^2}{a^T P^{-1} a}. \quad (42)$$

A proposição acima promove uma expressão analítica ótima para a obtenção de  $\Gamma(v)$ . Para os casos onde não é factível encontrar um valor ótimo analiticamente, há a possibilidade de se obter um valor sub-ótimo para  $\Gamma(v)$ , visto que o ERG é implementado utilizando quaisquer valores de  $\Gamma(v)$ , uma vez que a expressão

$$V(x, v) \leq \Gamma(v) \Rightarrow c(x, v) \geq 0 \quad (43)$$

seja assegurada. Sendo assim, a próxima proposição provê situações em que  $\Gamma(v)$  possui valores sub-ótimos para contemplar uma maior variedade de classes de restrições de funções de Lyapunov.

**Proposição 3.2 (Lyapunov não-Elipsoidal e Restrições não-Lineares)** *Fornecendo uma função de Lyapunov  $V(x, v)$  e restrições  $c(x, v) \geq 0$ , existe uma matriz  $P(v) \geq 0$  na qual*

$$V(x, v) \geq (x - \bar{x}_v)^T P(v) (x - \bar{x}_v), \quad \forall v, \quad (44)$$

com  $c(x, v)$  sendo um vetor contínuo de mesmo tamanho da referência  $r(t)$ , que sinaliza quais as referências que devem ser restritas e  $d_i$  é uma constante do valor da restrição  $i$ , de tal forma que:

$$\begin{aligned} c(v)^T x + d_j \geq 0 &\Rightarrow c(x, v) \geq 0; \\ c(\bar{x}_v, v) \geq \alpha &\Rightarrow c(v)^T x + d_j \geq \alpha, \end{aligned} \quad (45)$$

com  $\alpha \geq 0$ . Dessa forma,  $\Gamma(v)$  é escrito segundo

$$\Gamma(v) = \frac{(c^T(v) \bar{x}_v + d)^2}{c^T(v) P^{-1} c(v)}. \quad (46)$$

Logo,

$$V(x, v) \leq \Gamma(v) \Rightarrow c(x, v) \geq 0,$$

e existe um  $\epsilon > 0$  tal que  $c(\bar{x}_v, v) \geq \alpha \Rightarrow \Gamma(v) \geq \epsilon$ .



A proposição 3.2 estende a classe de sistemas não-lineares no qual o ERG atua na restrição  $e$ , com ela, restringi-se a movimentação do manipulador móvel não-holonômico. Como resultado, uma margem de dinâmica segura adequada é

$$\Delta(x, v) = k_\gamma(\Gamma(v) - V(x, v)), \quad (47)$$

onde  $V(x, v)$  é a função de Lyapunov do sistema pré-estabilizado,  $\Gamma(v)$  corresponde ao maior conjunto invariante do sistema contido nas restrições (32) e com  $k_\gamma > 0$  sendo um valor positivo escalar de alto valor, assim como representada na Figura 9.

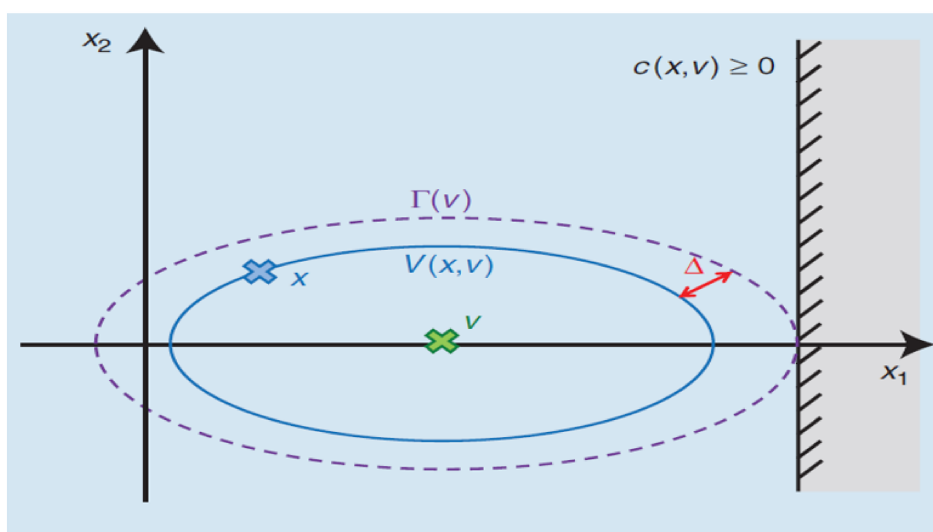


Figura 9 – Representação da margem de dinâmica segura - retirado de Nicotra e Garone (2018)

**Observação 3.1** No caso de múltiplas restrições  $c_i(x, v)$ , é atribuído um valor geral para margem de dinâmica segura, na qual este valor é o valor mais restritivo dentre as  $i$  restrições, ou seja,

$$\Delta(x, v) = \min\{\Delta_i(x, v)\},$$

onde cada  $\Delta_i(x, v)$  está associado a uma restrição  $c_i(x, v)$  diferente.

A subseção a seguir explica como projetar a margem de dinâmica segura para sistemas descritos pela equação de Euler-Lagrange.

### 3.3.3 Aplicação em Equações de Euler-Lagrange

As equações de Euler-Lagrange são frequentemente utilizadas para construir a equação de movimento de sistemas não lineares significativos em aplicações de engenharia.

Como o Manipulador Móvel não-holonômico é descrito por uma equação de Euler-Lagrange, apresenta-se a formulação do ERG para o caso do sistema proposto.

### 3.3.3.1 Valores Limiares Sub-ótimos para equação de Euler-Lagrange

Esta subseção provê a estratégia adotada para o caso de um valor limiar sub-ótimo dado uma equação de Euler-Lagrange em malha fechada na forma

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = -G(v, q) - D(q, \dot{q}, v), \quad (48)$$

sendo  $M(q)$  a matriz de Inércia,  $C(q, \dot{q})$  é a matriz de Coriolis,  $G(v, q)$  representa a matriz gravitacional e  $D(q, \dot{q}, v)$  traduz-se na matriz de atrito do sistema. E, segundo Nicotra e Garone (2016b), dado uma referência  $v$ , uma representação possível da função de Lyapunov para esta equação é

$$V(q, \dot{q}, v) = \int_v^q G(v, \xi)^T d\xi + \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}. \quad (49)$$

Desta forma, a próxima proposição fornece uma formulação sub-ótima para o problema (43), para quaisquer valores que a Matriz de Inércia  $M(q)$  possa alcançar.

**Proposição 3.3** *Dada uma função de Lyapunov (49), sabendo que a Matriz de Inércia do sistema possui valores máximos e mínimos, deve-se encontrar uma formulação para o problema (43) para quaisquer valores de  $M(q)$ . Desse modo,*

$$M(q) \geq \underline{M}, \quad \forall q, \quad (50)$$

com  $\underline{M} > 0$  sendo o valor mínimo encontrado para a matriz de Inércia  $M(q)$ . Então, se  $c(q, \dot{q}, v)$  é uma função convexa, o problema de otimização:

$$\begin{cases} \Gamma(v) = \min_{q, \dot{q}} \int_v^q G(v, \xi)^T d\xi + \frac{1}{2} \dot{q}^T \underline{M} \dot{q}; \\ \text{sujeito a } c(q, \dot{q}, v) \leq 0, \end{cases} \quad (51)$$

é convexo, e a solução será

$$V(x, v) \leq \Gamma(v) \Rightarrow c(x, v) \geq 0.$$

A proposição 3.3 pode ser aplicada na maioria dos sistemas descritos pela equação de Euler-Lagrange pré-estabilizados. Além disso, a condição (50) é satisfeita escolhendo

$$\underline{M} = \min_q \{\lambda_1(M(q))\} I_n, \quad (52)$$

onde  $\lambda_1(M(q))$  é o menor autovalor da matriz de Inércia  $M(q)$  e  $I_n$  é uma matriz identidade de tamanho  $n$ .

**Proposição 3.4** *Dado uma função de Lyapunov (49), satisfazendo (50) e*

$$\mathcal{J}_G(v, q) \geq \underline{\Phi}(v), \quad \forall v, q, \quad (53)$$

sendo  $\mathcal{J}_G(v, q)$  o Jacobiano do vetor  $G(v, q)$  referente aos estados  $q$  e com  $\underline{\Phi}(v) > 0, \forall v$ . Então, dados  $c_1(v), c_2(v)$  e  $d_j$ , tais que:

$$\begin{aligned} c_1(v)^T q + c_2(v)^T \dot{q} + d_j \geq 0 &\Rightarrow c(q, \dot{q}, v) \geq 0; \\ c(v, v, 0) \geq \delta &\Rightarrow c(q, \dot{q}, v) \geq \delta, \end{aligned} \quad (54)$$

sendo  $c_1(v)$  a variável relacionada com as coordenadas generalizadas do sistema pré-controlado que recebem a restrição,  $c_2(v)$  a variável relacionada com as derivadas das coordenadas generalizadas do sistema pré-controlado que recebem a restrição, e  $d_j$  é o valor correspondente da restrição implementada. O valor limiar é

$$\Gamma(v) = \frac{1}{2} \frac{(c_1(v)^T v + d_j)^2}{c_1(v)^T \underline{\Phi}^{-1} c_1(v) + c_2(v)^T \underline{M}^{-1} c_2(v)}, \quad (55)$$

tal que

$$V(x, v) \leq \Gamma(v) \Rightarrow c(x, v) \geq 0.$$

Por fim, utilizando as condições (50), (53) e dado uma função de Lyapunov do tipo (49), a função de Lyapunov possui um valor mínimo, tal que

$$V(q, \dot{q}, v) \geq \frac{1}{2} (q - v)^T \underline{\Phi} (q - v) + \frac{1}{2} \dot{q}^T \underline{M} \dot{q}. \quad (56)$$

**Observação 3.2** Um dos problemas encontrados na formulação do ERG para sistemas robóticos está associado com a questão da variável  $\Delta(x, v)$  obter um valor negativo.

Como explicado anteriormente, a função limitante  $\Gamma(v)$  não é única, e valores maiores ou menores para ela determinam o quanto conservativo será a margem de dinâmica segura perante as  $i$  restrições. Os valores de  $\Gamma(v)$  para o manipulador móvel são valores algébricos fixos, caso as restrições sejam também fixas, ou variáveis, caso as restrições variem de acordo com os estados do sistema. No entanto, com a movimentação do sistema, há a possibilidade da função de Lyapunov escolhida ultrapassar o valor mínimo encontrado por  $\Gamma(v)$ , o que resulta em um valor de  $\Delta < 0$ , como pode ser visto na equação (47), e este valor de  $\Delta(x, v)$  desestabiliza o sistema.

Para assegurar que  $\Delta \geq 0$ , o artigo de Merckaert et al. (2018) utiliza um valor mínimo para o cálculo de  $\Delta(x, v)$ , sendo este igual à

$$\Delta(x, v) = \max\{k_\gamma(\Gamma(v) - V(x, v)), 0\}.$$

### 3.4 CAMPO DE NAVEGAÇÃO

O Campo de Navegação tem como base o Método das Funções de Navegação que consiste em reproduzir um campo potencial composto por vetores unitários, os quais possuem propriedades de atração e repulsão, que guiam o robô interligando a

referência atual ( $v$ ) com a referência desejada ( $r(t)$ ), sem passar pelas restrições e obstáculos conhecidos, como representado na Figura 10. Este método é uma escolha de simples implementação e rápida convergência para gerar o campo de navegação (Nicotra e Garone (2016b)).

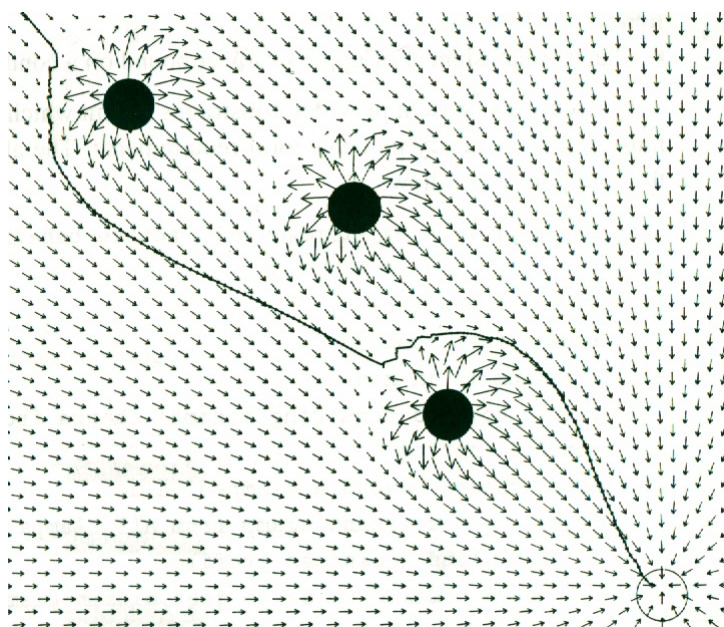


Figura 10 – Ilustração - Funções de Navegação, retirado de Pacheco e Costa (2002).

O objetivo desta seção é expor, de forma compacta, a metodologia utilizada e como se adiciona as restrições de interesse.

### 3.4.1 Definição

A definição do termo  $\rho(r, v)$  se dá por meio da identificação das condições suficientes que asseguram o comportamento correto sobre o ERG (Nicotra e Garone (2016b)).

**Definição 3.4 (Campo de Navegação)** Dadas as restrições

$$c(x, v) \geq 0, \quad (57)$$

uma função contínua é um Campo de Navegação com margem  $\delta > 0$  se, para qualquer condição inicial  $v(0)$  tal que  $c(\bar{x}_v(0), v(0)) \geq \delta$ , o sistema

$$\dot{v} = \rho(r, v), \quad (58)$$

é tal que:

- $\|\rho(r, v)\|$  é limitado em qualquer domínio limitado;
- Para qualquer referência  $r(t)$  contínua por partes, tal que<sup>2</sup>  $c(\bar{x}_r, r) \geq \delta$ , a referência aplicada é admissível para o estado permanente; e

<sup>2</sup> Entende-se por  $\bar{x}_\beta$  como o ponto de equilíbrio referente à variável  $\beta$ .

- Qualquer referência constante  $r(t)$ , que implique em  $c(\bar{x}_r, r) \geq \delta$ , é assintoticamente estável.

Além do mais, o Campo de Navegação possui duas outras propriedades relacionadas a criar uma projeção da referência ( $r^*$ ), caso a referência desejada seja inacessível pelas restrições, sendo elas:

- Para qualquer referência contínua por partes  $r \in \mathbb{R}^p$ , a referência aplicada é admissível para o estado permanente, quer dizer,  $c(\bar{x}_v, v(t)) \geq \delta, \forall t \geq 0$ ;
- Para qualquer referência contínua  $r \in \mathbb{R}^p$ , sua projeção  $r^*$  admissível para o estado permanente que satisfaz (33), reescrita abaixo, é assintoticamente estável.

$$\begin{cases} \min \|r - r^*\|; \\ \text{sujeito a } c(\bar{x}_{r^*}, r^*) \geq \delta, \end{cases} \quad (59)$$

e o escalar  $\delta > 0$  será referido como a margem de segurança estática.

### 3.4.2 Cálculo do Campo de Navegação

Segundo Garone e Nicotra (2016), o campo de navegação é designado separadamente entre dois termos:

$$\rho(r, v) = \rho_r(r, v) + \rho_0(v), \quad (60)$$

sendo  $\rho_r(r, v)$  o termo de atração, que gera um campo vetorial que aponta para a referência desejada, e  $\rho_0(v)$  o termo de repulsão, que gera um campo vetorial em direção contrária das restrições à medida que a referência atual se aproxima delas.

Para o termo de atração ( $\rho_r(r, v)$ ) é conveniente a escolha de uma função suave com norma menor ou igual a 1, pois os requerimentos presentes nas definições de Funções de Navegação descritos na seção acima seriam atendidos. Logo, escolhe-se a função

$$\rho_r(r, v) = \frac{r - v}{\max\{\|r - v\|, \eta\}}, \quad (61)$$

o qual, dado uma constante de suavização  $\eta > 0$ , além de evitar problemas numéricos, a equação anterior possui norma unitária e, continuamente, tende a zero à medida que  $v$  tende a  $r(t)$ .

Já para os casos de proximidade das restrições, adiciona-se um termo de repulsão ( $\rho_0(v)$ ), o qual gera vetores na direção oposta às restrições. Para que ele impeça a trajetória auxiliar de encontrar uma restrição, o termo de repulsão deve possuir módulo igual ao termo de atração (unitário) à medida que as restrições se aproximem da referência atual adicionado à uma margem de segurança ( $\delta$ ), ou seja,

$$c(\bar{x}_v, v) = \delta. \quad (62)$$

Define-se também uma margem de influência para o termo de repulsão ( $\zeta$ ), de modo que o termo de repulsão seja zero, caso a referência esteja longe das restrições. Em vista disso, no caso de um número  $k$  de margens seguras independentes com  $\delta_k > 0$  e margens de influência  $\zeta_k > \delta_k$ , o termo de repulsão é descrito segundo a equação

$$\rho_0(v) = \sum_{k=1}^n \max \left\{ \frac{\zeta_k - (c_k^T v + d_k)}{\zeta_k - \delta_k}, 0 \right\} c_k, \quad (63)$$

e os termos  $\delta_k$  e  $\zeta_k$  são constantes positivas com  $\zeta_k > \delta_k$ .

Um problema encontrado desta formulação relaciona-se ao caso do sistema encontrar múltiplas restrições ao mesmo tempo. Isso ocasiona em múltiplas repulsões e pode ocasionar uma anormalidade na trajetória do sistema. Dessa forma, recomenda-se o planejamento prévio das restrições para que seja improvável a ocorrência de múltiplas restrições simultaneamente e isto também é um ponto a ser considerado para melhorias futuras do projeto do ERG (Nicotra e Garone (2016b)).

### 3.5 ALGORITMO DO TRABALHO

Nesta seção é apresentado uma lista para a implementação do ERG no manipulador móvel não-holonômico de forma rápida. O algoritmo para a adicionar o ERG ao manipulador móvel seguem com os seguintes passos:

1. Modelagem do sistema;
2. Controle em malha fechada do sistema;
3. Construir o ERG:  $\dot{v} = \Delta(x, v)\rho(r, v)$ , que requer as seguintes etapas;
  - 3.1. Estudar e escrever expressões matemáticas que representem as restrições às quais o sistema está sujeito ( $c(x, v) \geq 0$ );
  - 3.2. Construir uma função de Lyapunov que represente o sistema em malha fechada  $V(x, v)$ ;
  - 3.3. Definir  $\Gamma(v)$  a partir de  $V(x, v)$ ;
  - 3.4. Calcular o  $\Delta(x, v) = k_\gamma(\Gamma(v) - V(x, v))$ ;
  - 3.5. Calcular  $\rho(r, v)$ .

A seguir, é apresentado um diagrama de blocos demonstrando os passos do algoritmo.

Desse modo, o ERG é implementado utilizando a Margem de Dinâmica Segura (47) e a Campo de Navegação (60). O capítulo seguinte demonstra a aplicação do ERG ao manipulador móvel não-holonômico.

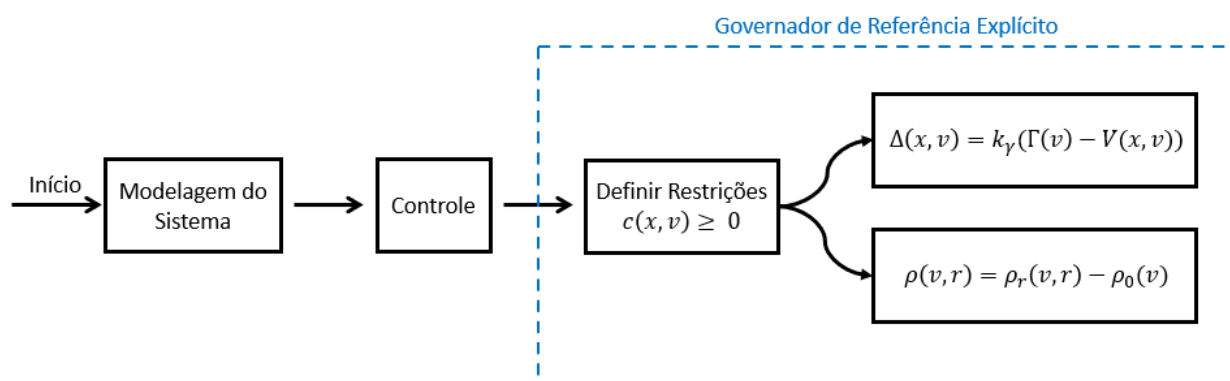


Figura 11 – Representação do algoritmo.

## 4 APLICAÇÃO DO ERG AO MANIPULADOR MÓVEL

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver uma estrutura de controle que permita ao manipulador móvel de base não-holonômica com braço de dois graus de liberdade se deslocar de um ponto a outro, mantendo-se dentro de suas restrições. Considera-se aqui restrições de singularidade e do seu espaço de trabalho, por entender que em uma escala de prioridades para o funcionamento do robô, essas restrições devem receber a atenção inicial.

A solução a ser desenvolvida baseia-se no controle com restrição ERG, como descrito no capítulo anterior. Sua característica de geração de uma solução analítica com baixo custo computacional de aplicação o torna uma solução interessante para sistemas com baixo poder computacional e limitação energética, como é o caso de muitos manipuladores móveis (MM). A aplicação do ERG ao MM pressupõem as seguintes etapas:

1. Pré-estabilização do sistema. Como o foco deste trabalho não é o desempenho do controle, opta-se um controle clássico de dinâmica inversa com um PD;
2. Definição e descrição matemática das restrições do sistema;
3. Determinação da Margem de Dinâmica Segura;
4. Determinação do Campo de Navegação.

Dessa forma, as seções seguintes apresentam o desenvolvimento de cada uma dessas etapas.

### 4.1 PRÉ-ESTABILIZAÇÃO: CONTROLE DE DINÂMICA INVERSA

O primeiro passo a ser cumprido para aplicação do ERG ao manipulador móvel é a sua pré-estabilização. Na literatura há uma vasta gama de trabalhos que tratam desse tema; aqui, por simplicidade, escolheu-se o controle de dinâmica inversa com PD, haja visto que o foco não é o desempenho da malha de controle e sim lidar com as restrições de funcionamento do robô.

O Controle por Dinâmica Inversa (CDI) é uma das técnicas não-lineares clássicas aplicadas a manipuladores fixos, e facilmente adaptável para manipuladores móveis (Spong e Vidyasagar (2008)). Também conhecido por Controle por Torque Computado, ele tem por objetivo linearizar as dinâmicas do robô.

A base do CDI é a técnica de controle de realimentação linearizante, na qual, dado um sistema

$$\dot{\xi} = f(\xi, u),$$



em que  $\xi \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  é vetor de entrada, o objetivo é determinar

$$u = f(\xi, v),$$

tal que o sistema em malha fechada seja linear com a nova entrada de controle  $v \in \mathbb{R}^m$ , que é projetada para estabilizar e garantir o desempenho para o sistema.

Para um sistema mecânico cuja equação de movimento é formulada por Euler-Lagrange

$$M(\xi)\ddot{\xi} + C(\xi, \dot{\xi})\dot{\xi} = B(\xi)\tau,$$

em que  $\xi \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de coordenadas generalizadas,  $\tau \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de entrada,  $M(\xi)$ ,  $C(\xi, \dot{\xi})$  e  $B(\xi)$  são, respectivamente, as matrizes de inércia, de forças Coriolis e centrífugas, e de entrada. A aplicação do CDI tem por objetivo determinar

$$\tau = f(\xi, v),$$

tal que o sistema em malha fechada seja linear e tenha  $v \in \mathbb{R}^n$  como nova entrada de controle, ou seja, tem-se como resultado da malha fechada

$$\ddot{\xi} = v.$$

A nova entrada de controle  $v$  é sintetizada utilizando alguma técnica de controle linear, para a garantia de estabilidade e desempenho. Neste caso, o controlador proporcional derivativo (PD) é usado com frequência por se tratar de sistema duplo integrador. Assim, dadas as referências desejadas  $\xi^d$ ,  $\dot{\xi}^d$  e  $\ddot{\xi}^d$ , defini-se o vetor de erro como

$$e = \xi^d - \xi,$$

e determinar

$$v = \ddot{\xi}^d + K_d \dot{e} + K_p e,$$

que implica na malha fechada

$$\ddot{e} + K_d \dot{e} + K_p e = 0.$$

As matrizes de ganhos  $K_d$  e  $K_p$  devem ser positivas, e são ajustadas por alocação de polos.

#### 4.1.1 Controle de dinâmica inversa do MM

Dado o manipulador móvel cujo modelo no espaço de tarefa é descrito pela Equação (28) e reescrito abaixo:

$$M_X \ddot{x} + C_X \dot{x} = \tau_X, \quad (64)$$

determina-se

$$\tau_X = J^{-T} S^T E \tau_m = M_X a_X + C_X \dot{x}, \quad (65)$$

e, combinando (64) e (65), obtém-se

$$\ddot{x} = a_x, \quad (66)$$

sendo que  $a_x$  representa a nova entrada do sistema, definida como

$$a_x = \ddot{x}^d + K_d \dot{e} - K_p e, \quad (67)$$

em que  $K_p$  e  $K_d$  são matrizes positivas diagonais e o vetor de erro como

$$e = x^d - x.$$

Os vetores de posição  $x^d$ , velocidade  $\dot{x}^d$  e aceleração  $\ddot{x}^d$  são as referências desejadas para o sistema. A dinâmica de erro do sistema resultante é dada por

$$\ddot{e} + K_p e + K_d \dot{e} = 0. \quad (68)$$

Desta forma, retornando à Equação (65), utiliza-se a formulação de controle

$$a_x = \ddot{x}^d + K_p(x^d - x) + K_d(\dot{x}^d - \dot{x}). \quad (69)$$

Apesar da facilidade de implementação, o CDI apresenta problemas com o aumento da complexidade do projeto. Por exemplo, há a obrigatoriedade do conhecimento dos parâmetros exatos do modelo, além de ser indispensável a medição exata da posição, velocidade e aceleração do sistema por meio de sensores. A matriz de Coriolis e forças centrífugas é simplesmente compensada na entrada de controle, e erros na modelagem do sistema podem causar instabilidades. A Figura 12 representa o sistema do MM com o controle CDI. Neste trabalho, por simplicidade, assume-se que o sistema e as variáveis são conhecidas.

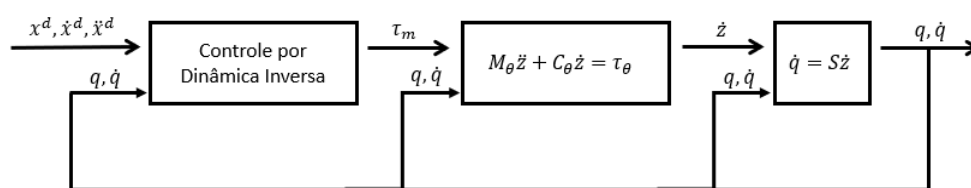


Figura 12 – Representação do sistema em malha fechada do manipulador móvel com controle por dinâmica inversa.

O próximo passo, descrito na seção seguinte, é determinar as restrições, as quais o MM está sujeito.

## 4.2 RESTRIÇÕES DO SISTEMA

Este trabalho tem como foco as restrições de posição e singularidade do braço do MM. A seguir, essas restrições são formuladas matematicamente e, por simplicidade, será considerada a restrição na coordenada  $y$  do efetuador final, contudo esse resultado pode ser estendido sem grande complexidade.

### 4.2.1 Restrição Posicional

A primeira restrição será realizada no eixo  $y$  do efetuador final, no valor de  $\|\dot{y}_{ee}\| < 1$ , assim como representado na figura a seguir.

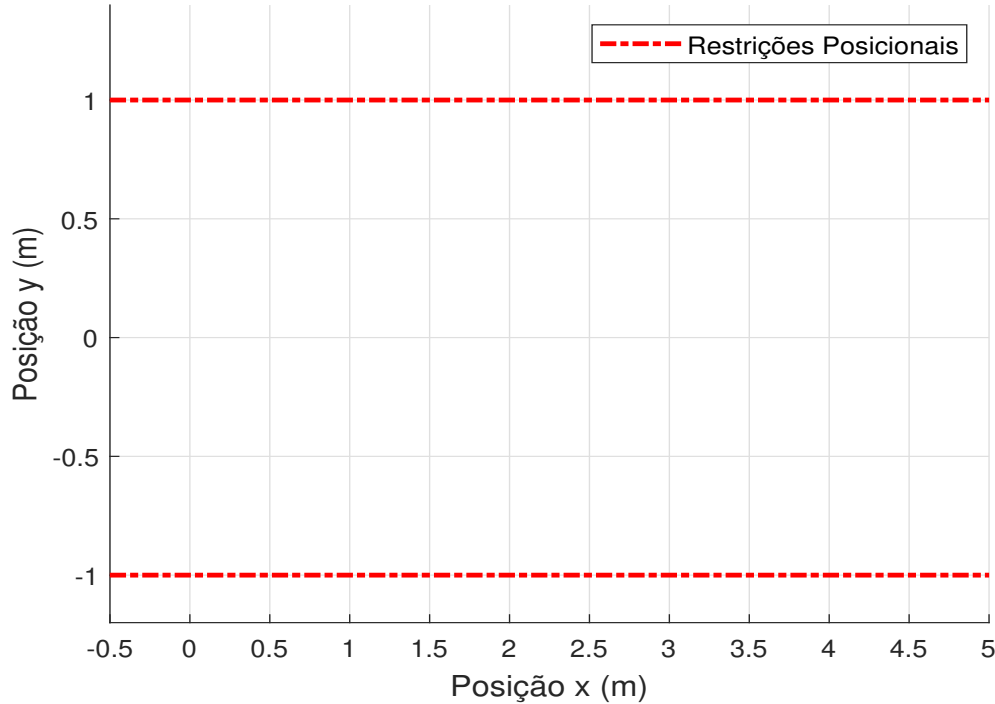


Figura 13 – Representação das restrições posicionais para o efetuador final

Assim como demonstrado na equação (54), e reescrito em formato ilustrativo abaixo, as restrições posicionais são descritas da seguinte forma:

$$\begin{cases} -c_{xi}(v)^T x - c_{gi}(v)^T \dot{x} \geq d_i(v) & \Rightarrow \text{Para restrição de valor máximo;} \\ c_{xi}(v)^T x + c_{gi}(v)^T \dot{x} \geq -d_i(v) & \Rightarrow \text{Para restrição de valor mínimo,} \end{cases} \quad (70)$$

com  $c_{xi}(v)$  representando o vetor que pondera os elementos dos estados do sistema que recebem as restrições,  $c_{gi}(v)$  representa o vetor que pondera os elementos das restrições das derivada dos estados do sistema e  $d_i(v)$  o valor da restrição.

Diante disso, os parâmetros das restrições no eixo  $y$  do efetuador são escritas da seguinte forma:

$$c_{x1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad c_{g1} = 0_{4 \times 1}, \quad d_{\max} = 1; \quad (71)$$

$$c_{x2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad c_{g2} = 0_{4 \times 1}, \quad d_{\min} = 1. \quad (72)$$

Com as equações (71) e (72) representando a restrição do efetuador final de valor 1 e -1, respectivamente. Como a restrição é puramente posicional, as variáveis representados por  $c_{gi}$  são vetores nulos.

### 4.2.2 Restrições de Singularidade

A segunda restrição tem como finalidade evitar singularidades conhecidas que ocorrem no manipulador robótico do MM, ou seja, nos casos onde o braço robótico fica alinhado, seja estendido ou retraído. Como se trata de um braço com movimentação no plano as singularidades ocorrem no momento em que:

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2; \\ \theta_1 = \pi + \theta_2. \end{cases} \quad (73)$$

Como as restrições são feitas sobre os estados do sistema controlado ( $x$ ), esta restrição deve ser feita de forma indireta, uma vez que o sistema foi controlado no espaço de tarefa e a singularidade ocorre com as variáveis no espaço de configuração. Em vista disso, é possível substituir a representação angular das restrições por uma representação da distância entre o efetuador final do MM e a base do braço robótico, assim como demonstrado na Figura 14.

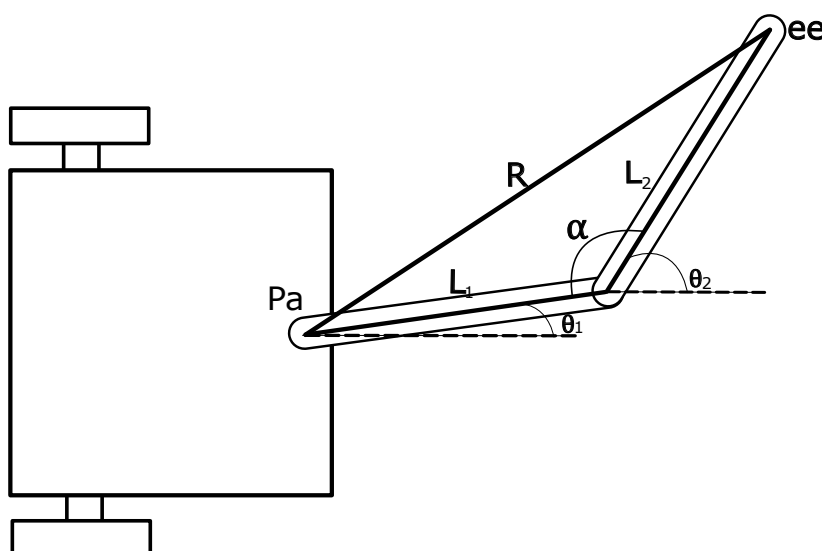


Figura 14 – Representação do manipulador móvel para descrição da restrição por singularidade.

Sendo  $\alpha$  uma variável auxiliar na qual  $\alpha = \pi - (\theta_2 - \theta_1)$  e  $R$  a distância entre o efetuador final do MM e a base do braço robótico. Para garantir que os valores de singularidade não ocorram, estabeleceu-se valores máximos e mínimos de  $\alpha$  como

$$15^\circ < \alpha < 165^\circ,$$

e, utilizando da lei dos cossenos, encontra-se os valores máximos e mínimos que a variável  $R$  deve possuir, sendo eles 0,2 metros para o valor mínimo e 0,86 metros para o valor máximo.

Além disso, como apresentado na equação (62), uma margem de segurança estática é adicionada para garantir o cumprimento da restrição. Então, um valor de

$\delta = 0,1$  metros é adicionado sobre todas as restrições implementadas e este valor é adicionado na fórmula do campo de navegação, o qual será determinado nas próximas subseções. Assim sendo, as restrições por singularidade são escritas segundo as equações (74) e (75) e interpretadas segundo a Figura 15:

$$\left\| \left[ \begin{array}{cc} \dot{x}_{ee} & \dot{y}_{ee} \end{array} \right]^T - \left[ \begin{array}{cc} \dot{x}_b & \dot{y}_b \end{array} \right]^T \right\| > 0,2, \quad (74)$$

$$\left\| \left[ \begin{array}{cc} \dot{x}_{ee} & \dot{y}_{ee} \end{array} \right]^T - \left[ \begin{array}{cc} \dot{x}_b & \dot{y}_b \end{array} \right]^T \right\| < 0,86. \quad (75)$$

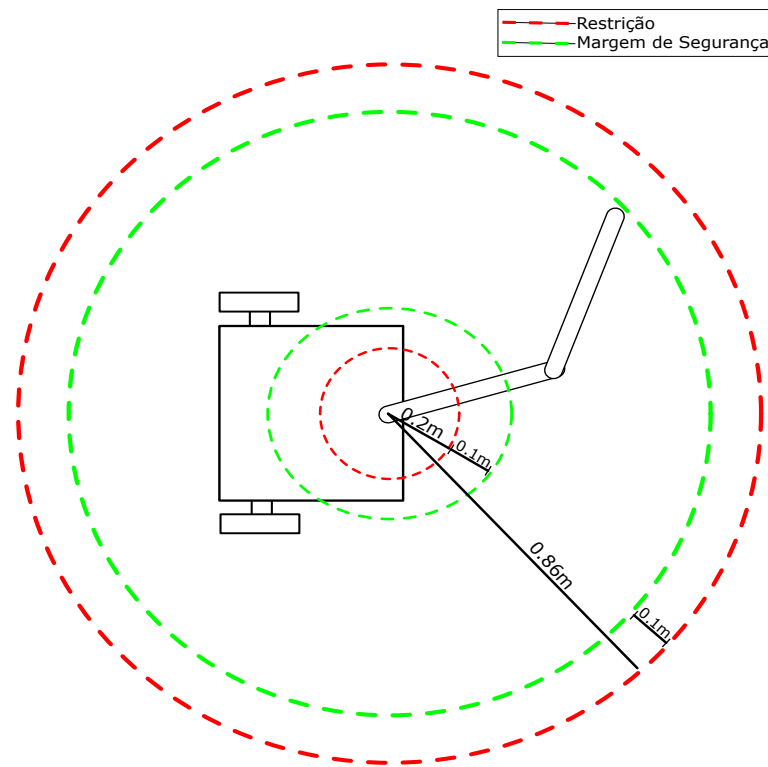


Figura 15 – Representação das restrições por singularidade para o efetuador final

Em resumo, o objetivo do ERG sobre as restrições de singularidade é manter a distância do efetuador final e a base do manipulador entre os círculos pontilhados em verde, como demonstrado na figura acima.

Dessa forma, utilizando a formulação apresentada em (70) e confrontando com as fórmulas obtidas em (74) e (75), os valores das restrições de singularidade ficam:

$$c_{sing1} = \left\| \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right] x \right\|, \quad c_{g1} = 0_{4 \times 1}, \quad d_{sing1} = -0,2; \quad (76)$$

$$c_{sing2} = - \left\| \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right] x \right\|, \quad c_{g2} = 0_{4 \times 1}, \quad d_{sing2} = 0,86. \quad (77)$$

Percebe-se que as duas matrizes (77) e (76) possuem uma matriz interna multiplicada com os estados do sistema no espaço de tarefa ( $x$ ). Esse procedimento é necessário para encontrar a formulação das restrições por singularidade. E, de forma análoga ao caso das restrições posicionais, ocorre mudanças nos sinais para compensar a desigualdade presente na equação (54).

### 4.3 DETERMINAÇÃO DA MARGEM DE DINÂMICA SEGURA

Como foi abordado na Subseção 3.3.3.1, para o caso do manipulador móvel não-holonômico, o valor da matriz de Inércia no espaço de tarefa ( $M_x$ ) se modifica com a variação de suas variáveis internas. Para garantir que  $\Gamma(v)$  contemple quaisquer valores de  $M_x$ , deve-se encontrar o valor mínimo da matriz de Inércia no espaço de tarefa ( $\underline{M}_x$ ).

De acordo com a proposição 3.3, a equação de Lyapunov para esse sistema possui um valor mínimo conhecido (56). Logo, utiliza-se a formulação de  $\Gamma(v)$

$$\Gamma(v) = \frac{1}{2} \frac{(c_{xi}^T v + d_j)^2}{c_{xi}^T \underline{\Phi}^{-1} c_{xi} + c_{gi}^T \underline{M}^{-1} c_{gi}}, \quad (78)$$

sendo  $\underline{M}$  o menor valor da matriz de inércia e  $\underline{\Phi}$  o menor valor que regula as variáveis de estado do sistema. Segundo a mesma proposição, para uma função controlada por compensação PD, uma aproximação adequada para o parâmetro  $\underline{\Phi}$  seria

$$\underline{\Phi} = K_p, \quad (79)$$

e  $\underline{M}$  pode ser encontrado via método iterativo. Variando os valores dos ângulos constituintes da matriz de Inércia ( $\phi, \theta_1, \theta_2$ ) entre  $90^\circ$  e  $-90^\circ$  e calculando a norma 2 da matriz resultante, o valor mínimo encontrado para a matriz  $\underline{M}_x$  foi de

$$\underline{M}_x = \begin{bmatrix} 2,2455 & 3,7801 & 0,0796 & 1,5634 \\ 3,7801 & 9,6317 & 0,1969 & 0,0819 \\ 0,0796 & 0,1969 & 18,9483 & -0,0076 \\ 1,5634 & 0,0819 & -0,0076 & 18,2268 \end{bmatrix}. \quad (80)$$

Dessa forma, substituindo as funções (79) e (80) em (56) e ajustando os parâmetros para o sistema do MM (28), a função de Lyapunov fica

$$V_x(x, \dot{x}, v) \geq \frac{1}{2} (x - v)^T K_p (x - v) + \frac{1}{2} \dot{x}^T \underline{M}_x \dot{x}, \quad (81)$$

e a equação (78) se torna

$$\Gamma(v) = \frac{1}{2} \frac{(c_{xi}^T v + d_j)^2}{c_{xi}^T K_p^{-1} c_{xi} + c_{gi}^T \underline{M}_x^{-1} c_{gi}}. \quad (82)$$

Com a equação (82), substitui-se os valores de  $c_{xi}$  e  $c_{gi}$  pelas equações de restrições posicionais (71) e (72) e restrições de singularidade (76) e (77) descritas anteriormente. Consequentemente, obtêm-se quatro  $\Gamma(v)$  diferentes relativos a cada uma das restrições e, sobre elas, o valor mais restritivo será utilizado para restringir a movimentação do efetuador final, ou seja,

$$\Gamma_x = \min \Gamma(v). \quad (83)$$

Por fim, substituindo (81) e (83) na equação que descreve a Margem de Dinâmica Segura (47), obtêm-se

$$\Delta(x, v) = k_\gamma (\Gamma_x(v) - V_x(x, v)), \quad (84)$$

com  $k_\gamma$  um escalar positivo de grande valor.

#### 4.4 DETERMINAÇÃO DO CAMPO DE NAVEGAÇÃO

Como as restrições implementadas ao MM (71), (72), (74) e (75) são convexas, utiliza-se a equação presente na Subseção 3.4.2 sobre aplicação do Campo de Navegação ( $\rho$ ), que é dada pela equação (60) e reescrita abaixo:

$$\rho(r, v) = \rho_r(r, v) + \rho_0(v), \quad (85)$$

onde  $\rho_r(r, v)$  é a termo de atração e  $\rho_0(v)$  o termo de repulsão que constituem o campo de navegação. Eles são vetores unitários com a mesma dimensão do vetor de estado do sistema responsáveis por direcionar o MM em direção à referência desejada, e desviando ou evitando as restrições. Esses termos são descritos pelas equações (61) e (63) e repetidas abaixo:

$$\rho_r(r, v) = \frac{r - v}{\max\{\|r - v\|, \eta\}}; \quad (86)$$

$$\rho_0(v) = \sum_{k=1}^n \max \left\{ \frac{\zeta_k - (c_k^T v + d_k)}{\zeta_k - \delta_k}, 0 \right\} c_k, \quad (87)$$

com  $\delta_k$  e  $\zeta_k$  sendo a margem de segurança e a margem de influência da restrição, respectivamente, como descrito nas equações (62) e (63). As duas equações possuem módulo igual a 1 e, naturalmente,  $\rho(r, v)$  tende a zero por dois motivos: ou o sistema encontra a posição de referência desejada ou o sistema encontra uma restrição que seja impossível transpor, então o termo de repulsão anula o termo de atração. Quando o segundo caso acontece, ele gera um novo valor de referência, a qual é a referência auxiliar  $v$  para que o sistema siga.

Na próxima seção serão apresentados os resultados e discussões a cerca das restrições aplicadas.

## 5 RESULTADOS

Com o intuito de demonstrar o correto funcionamento e desempenho da aplicação do ERG ao manipulador móvel, são estudados quatro cenários nos quais se comparam os resultados obtidos pelo manipulador móvel (MM) com e sem o ERG.

O primeiro cenário é uma simulação simples para o estudo do deslocamento do robô de uma posição inicial para uma posição dentro do seu espaço de trabalho, ou seja, sem que haja restrição. No segundo cenário, compara-se o desempenho dos sistemas com e sem o ERG, quando o MM é demandado a se deslocar de uma posição inicial para uma posição final fora do sua área de trabalho, neste caso, infringindo a restrição de posição do efetuador final, definida com proposito de teste como  $\|\dot{y}_{ee}\| < 1$ .

Para o terceiro e quarto cenários, demonstra-se a atuação do ERG na restrição de singularidade quando o braço robótico do manipulador móvel se encontra estendido e retraído, respectivamente. Por conta disso, ocorre erros de simulação no MM sem o ERG, visto que estas simulações provocam valores de singularidade do sistema. Logo, para ambos os casos, será apresentado o percurso do MM apenas com o ERG.

Os estados iniciais do MM são  $q = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\pi/4 \ \pi/2]^T$  para iniciar numa posição inicial dentro das restrições propostas. Os parâmetros do MM para simulação são os mesmos do artigo de White *et al.* (2007) e são encontrados no Apêndice A, na Tabela A.2.

Com relação aos ganhos do sistema, os ganhos  $K_p$  e  $K_d$  são os mesmos do sistema desenvolvido no trabalho de Boukattaya *et al.* (2011), os termos  $k_\gamma$  e  $\eta$  possuem valores assumidos com base em outros artigos sobre ERG, e  $\delta$  e  $\zeta$  são os valores considerados para a segurança da não violação das restrições do sistema. Na Tabela 3, encontram-se o valor dos ganhos dos controladores para as simulações.

Tabela 3 – Ganhos de Controles Simulações

$K_p$	$K_d$	$k_\gamma$	$\eta$	$\delta$	$\zeta$
$36 \times I_{4 \times 4}$	$12 \times I_{4 \times 4}$	$10^3$	$10^{-1}$	0,1	0,2

### 5.1 SIMULAÇÃO 1

A primeira simulação tem como objetivo avaliar como o ERG opera sem a interferência das restrições. Portanto, considera-se uma posição de referência desejada afastada das restrições e, em vista disso, a posição de interesse é alocada em  $[5 \ 0 \ 8]^T$  para o efetuador final e  $[5 \ 0 \ 3]^T$  para a base. Dessa forma, o MM encontra-se em uma posição final onde a distância entre as posições do efetuador final e da base será igual a 0,5, valor que se encontra entre as restrições de singularidade, e abaixo da linha de restrição posicional superior de valor igual a 1 no eixo y imposto ao efetuador.



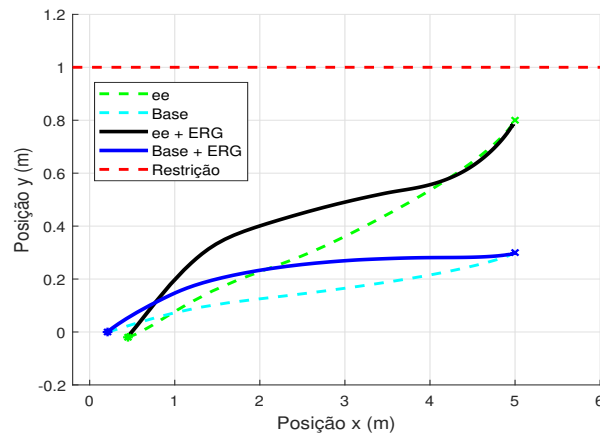
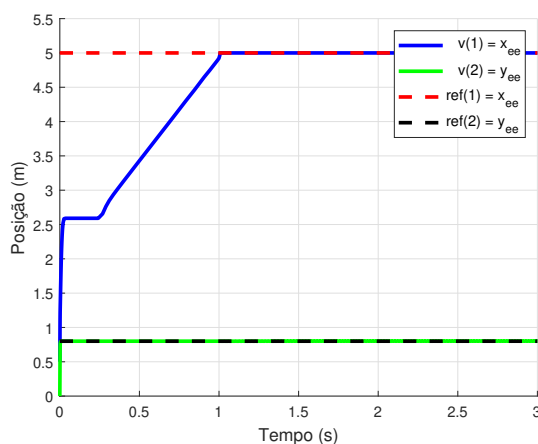


Figura 16 – Trajetórias dos manipuladores móveis referente à simulação 1

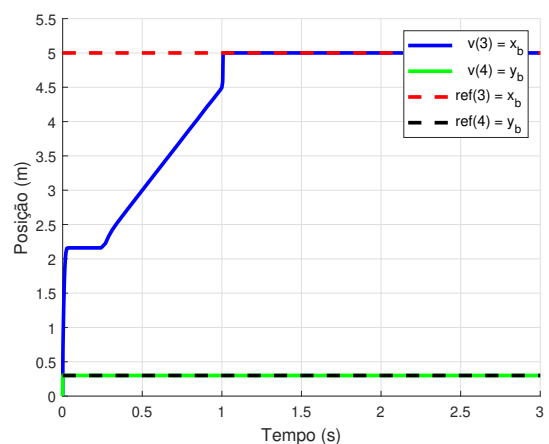
Logo, foram ajustados os ganhos do ERG de acordo com a Tabela 3 e encontrou-se o resultado demonstrado na Figura 16.

Nota-se que, para os ganhos encontrados, os resultados de simulação com e sem o ERG são semelhantes quando se trata de uma posição dentro das restrições aplicadas, divergindo pouco ao longo da trajetória. Isso ocorre porque o ERG possui uma dinâmica interna do próprio sistema que converge à referência auxiliar que ele gera até a referência desejada, caso não haja restrições no meio do caminho, como demonstra as figuras 17(a) e 17(b).

Além do mais, como a referência não se encontra dentro da margem de influência ( $\zeta$ ), o ERG entrega uma referência auxiliar ao sistema igual à referência desejada. Outras propriedades do ERG relatadas neste teste são as relações de  $\rho(r, v)$  e  $\Delta(x, v)$ , como demonstradas nas Figuras 18 e 19, respectivamente.



(a) Referência do efetuador final



(b) Referência da base móvel

Figura 17 – Evolução do sinal de saída do ERG comparado à referência desejada relacionado à simulação 1

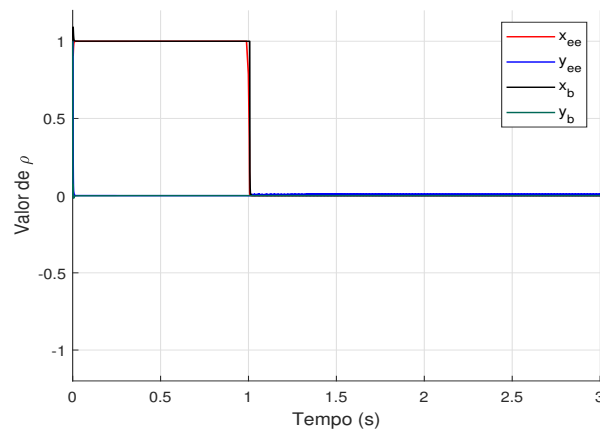


Figura 18 – Valores de  $\rho(r, v)$  de saída do ERG referente à simulação 1

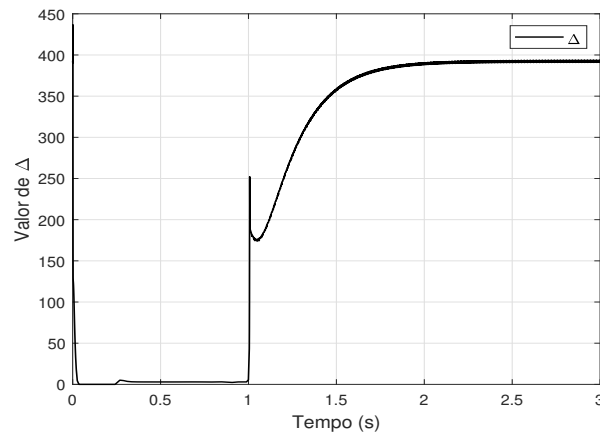


Figura 19 – Valor de  $\Delta(x, v)$  de saída do ERG referente à simulação 1

Para a variável  $\rho(r, v)$ , percebe-se que os valores convergem para zero decorridos 1 segundo de simulação. Como foi explicado na Subseção 4.4, isso indica que o ERG encontra a referência desejada neste momento e conserva o valor de  $v$  neste ponto.

Quanto a variável  $\Delta(x, v)$ , constata-se que ela possui valor baixo até 1 segundo de simulação, aumentando em seguida de forma exponencial até se estabilizar após 1,5 segundos de simulação no valor de 400. Isso ocorre porque a função de Lyapunov do sistema encontra valores muito altos no começo da movimentação do robô, interferindo na fórmula de  $\Delta(x, v)$ , presente na equação (47).

Os valores da função de Lyapunov do sistema são altos devido ao controle do sistema ser um PD e desta forma, o robô tenta chegar o mais rápido possível à referência desejada. Assim, o sistema do MM requisita valores altos de torque no começo da simulação e estes reduzem, conseqüentemente, quando o sistema se aproxima do valor de referência desejado. Isso é observado no gráfico referente às entradas de torque do sistema na Figura 20. O valor alto de  $\Delta(x, v)$  no final da simulação indica o distanciamento do manipulador das regiões de restrição.

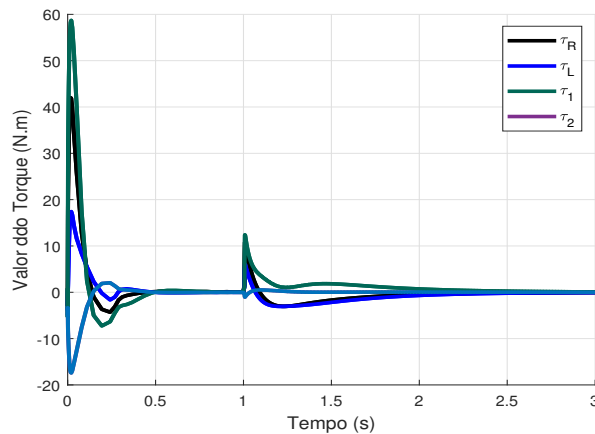


Figura 20 – Torques de saída do sistema referente à simulação 1

A Figura 21 exibe todos os valores da variável  $\Gamma(v)$  relativos às restrições declaradas. Uma característica deste gráfico relaciona-se às restrições posicionais de valor 1 e -1. Nota-se que o valor de  $\Gamma(v)$  referente à restrição de valor 1 ( $\Gamma_{pos1}$ ) está mais próximo de zero em relação à restrição de valor -1 ( $\Gamma_{pos-1}$ ), do que está próximo de 60. Esse gráfico demonstra como o  $\Gamma(v)$  interage com as restrições e também como ele representa, de certa forma, a distância entre o sistema e as suas restrições.

Como  $\Gamma_x(v)$  representa o valor mais restritivo entre todos os  $\Gamma(v)$ , como descrito em (83), o valor desta variável para esta simulação 1 é apresentada pela Figura 22. Comparando esta figura com a anterior, nota-se que ela é uma combinação entre o  $\Gamma_{estendido}$ , no começo da simulação, e do  $\Gamma_{retraído}$  ao final dela.

As figuras 23(a) e 23(b) apresentam como os estados do sistema se dispõem com o passar do tempo de simulação, ressaltando que a singularidade do MM ocorre quando  $\theta_1$  e  $\theta_2$  forem iguais ou tiverem uma diferença de  $\pi$  radianos, assim como evidenciado na equação (73).

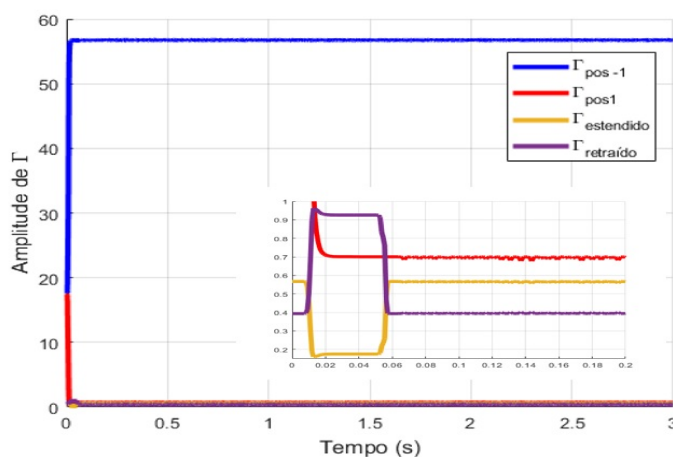


Figura 21 – Valor de todos os  $\Gamma(v)$  das restrições referente à simulação 1

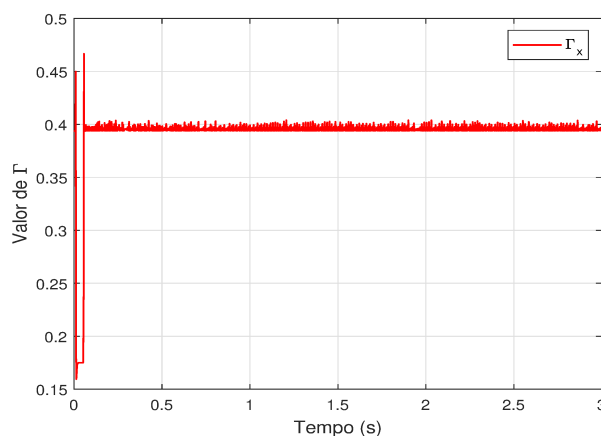
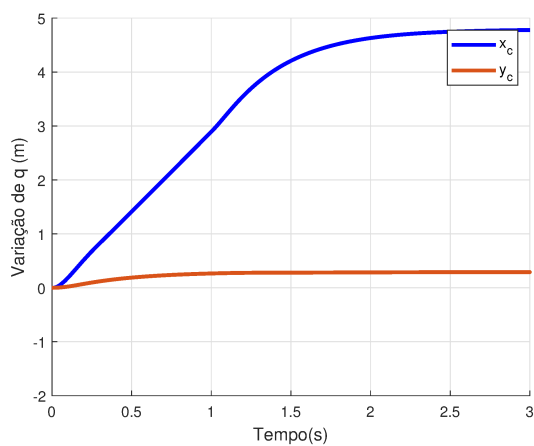
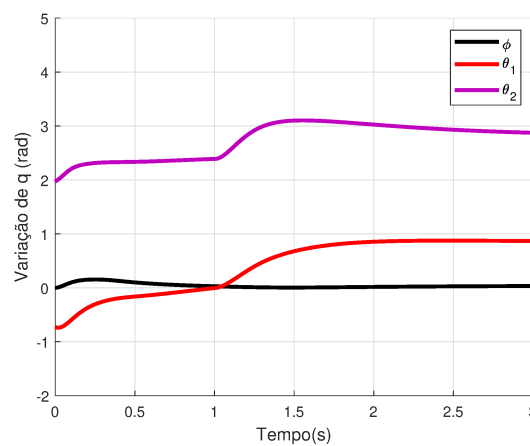


Figura 22 – Valor de saída da variável  $\Gamma_x$  da simulação 1



(a) Estados do sistema  $x_c$  e  $y_c$



(b) Estados do sistema  $\phi$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$

Figura 23 – Evolução dos estados do sistema ( $q$ ) referentes à simulação 1

## 5.2 SIMULAÇÃO 2

Para a segunda simulação, a referência se situa em  $[5 \ 1, 2]^T$  para o efetuador final e  $[5 \ 0, 5]^T$  para a base e, portanto, fora da região permitida, como mostra a Figura 24.

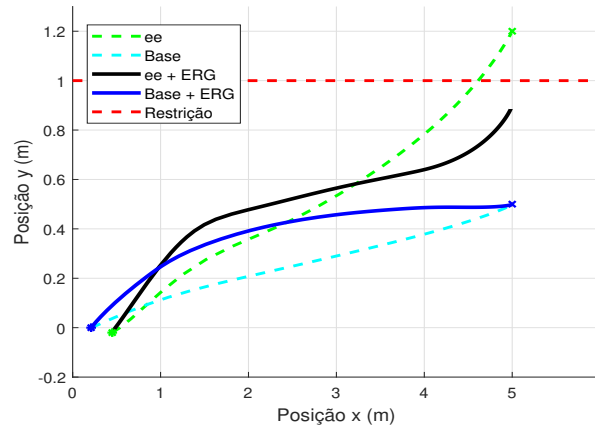
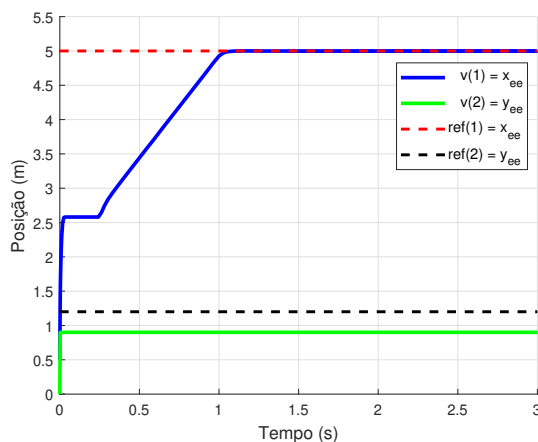
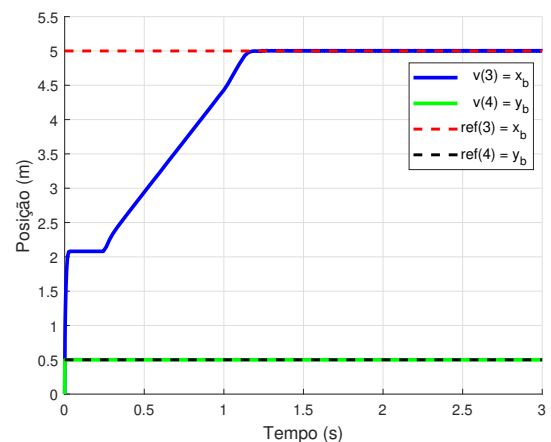


Figura 24 – Trajetórias dos manipuladores móveis referentes à simulação 2

Ao observar o comportamento mostrado na Figura 24, é possível observar que o MM sem o ERG encontra o ponto de referência desrespeitando as restrições. No entanto, mesmo com a referência de  $\dot{y}_{ee} = 1, 2$ , o MM com o ERG impede que o efetuador final atinja a referência desejada, criando uma projeção admissível da referência desejada que respeita as restrições impostas, como demonstrado na Equação (33). Nota-se também que, ao se aproximar da região de repulsão ( $\dot{y}_{ee} = 0, 9$ ), estabiliza e impede a passagem do efetuador final, como também é observado na Figura 25(a).



(a) Referência do efetuador final



(b) Referência da base móvel

Figura 25 – Evolução do sinal de saída do ERG comparado à referência desejada relacionado à simulação 2

Verificando o gráfico de  $\Delta(x, v)$  desta simulação na Figura 26, observa-se que o valor é menor do que o valor encontrado na simulação anterior; essa redução também é observada no valor encontrado de  $\Gamma_x(v)$ , como indica a Figura 27. Isso deve-se à proximidade do sistema robótico da restrição posicional.

Ainda é possível que o efetuator final do MM alcance um ponto mais próximo da restrição posicional, mas é impedido pela ação do termo de repulsão do campo de navegação ( $\rho_r(r, v)$ ), como pode ser visto na Figura 28.

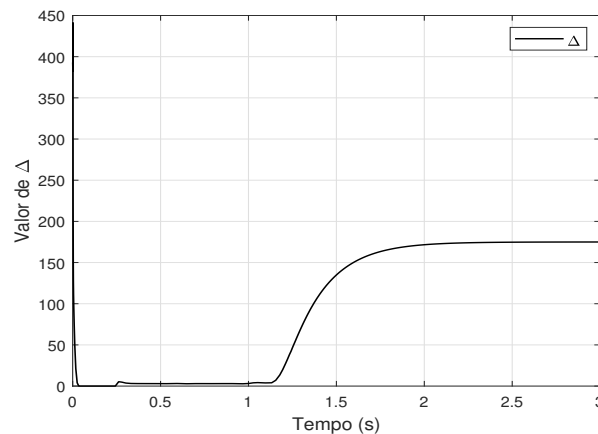


Figura 26 – Valor de  $\Delta(x, v)$  de saída do ERG referente à simulação 2

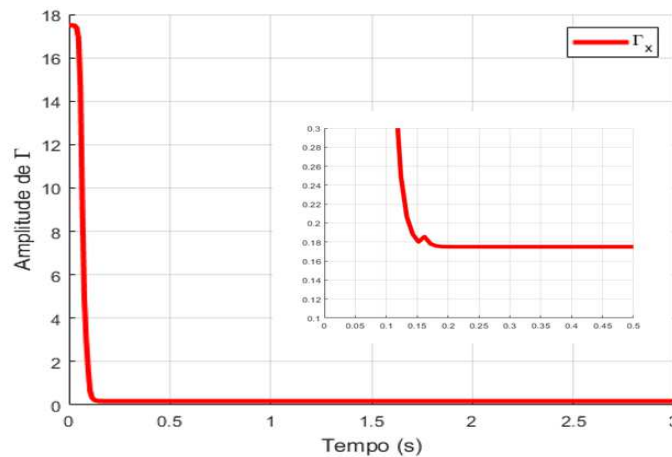


Figura 27 – Valor de saída da variável  $\Gamma_x$  do ERG referente à simulação 2

Na Figura 28, verifica-se que o valor de  $\rho(r, v)$  zera após 1,2 segundos de simulação, pois o termo de repulsão  $\rho_r(r, v)$  anula o termo de atração  $\rho_0(v)$  ao chegar próximo da restrição.

As Figuras 29(a) e 29(b) apresentam como os estados do sistema se dispõem com o tempo, já a Figura 30 expõe a entrada dos torques do sistema para a movimentação do MM.

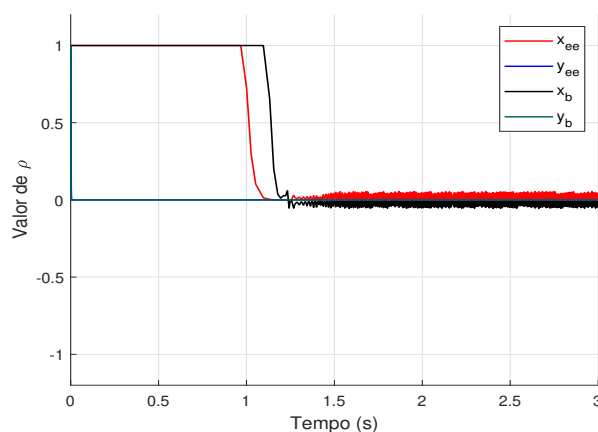
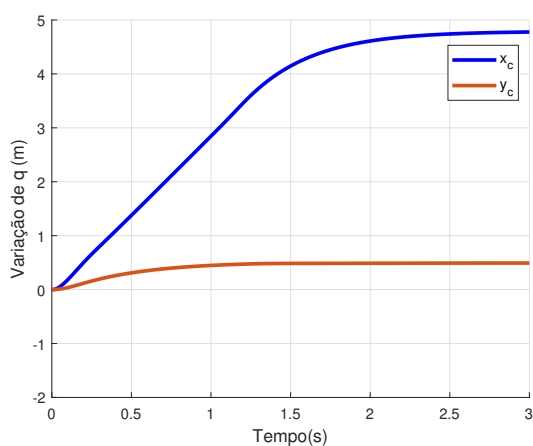
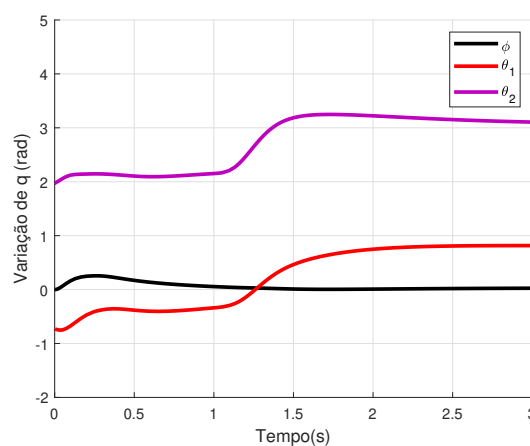


Figura 28 – Valores de  $\rho(r, v)$  de saída do ERG referente à simulação 2



(a) Estados do sistema  $x_c$  e  $y_c$



(b) Estados do sistema  $\phi, \theta_1$  e  $\theta_2$

Figura 29 – Evolução dos estados do sistema referentes à simulação 2

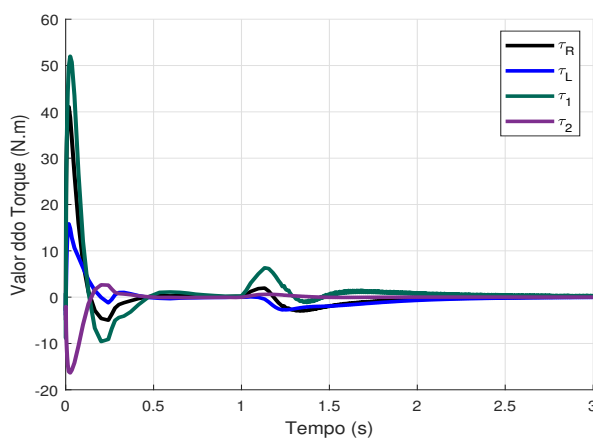


Figura 30 – Torques de saída do sistema referente à simulação 2

### 5.3 SIMULAÇÃO 3

Para a terceira simulação será avaliada a restrição de singularidade do braço retraído, para isso, propõe-se uma simulação com referência situada em  $[5 \ 0, \ 7]^T$  para o efetuador final e  $[5 \ 0, \ 5]^T$  para a base, no que se traduz em uma trajetória em que ocorre a violação da restrição de singularidade por retração do braço robótico no término da mesma, momento no qual a distância entre o efetuador final e a base do braço será igual a 0,2 metros, valor limiar da restrição por retração, assim como exposto em (74). Aplicando esta trajetória ao MM com ERG, foram observadas as trajetórias, como visto na Figura 31.

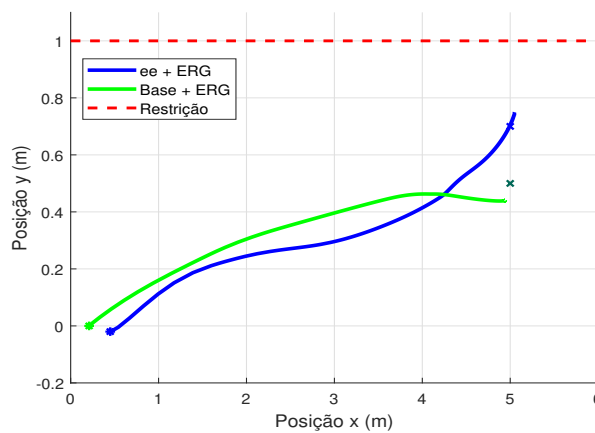
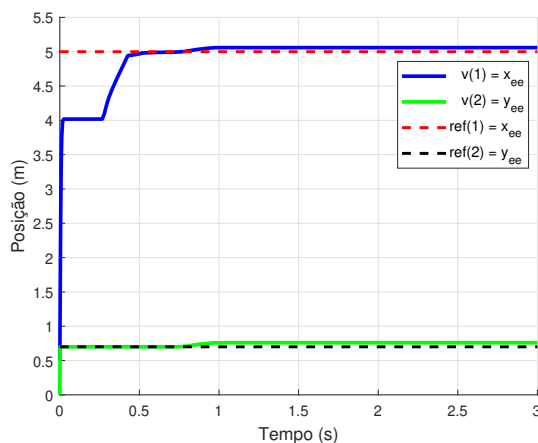
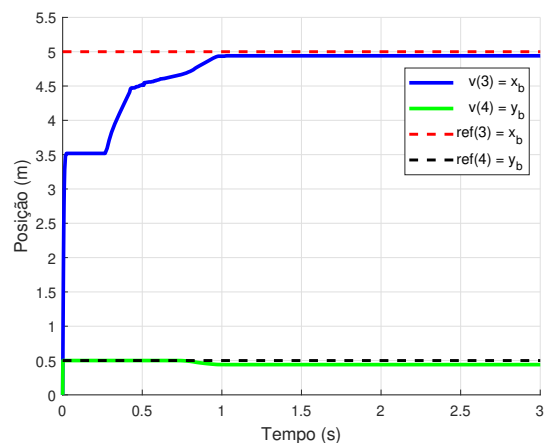


Figura 31 – Trajetória do manipulador móvel com referência fora da restrição de singularidade do braço retraído



(a) Referência do efetuador final



(b) Referência da base móvel

Figura 32 – Evolução do sinal de saída do ERG comparado à referência desejada relacionado à simulação 3

Como resultado, o MM estabiliza a sua posição em  $[4, \ 94 \ 0, \ 44]^T$  para a base e  $[5, \ 05 \ 0, \ 75]^T$  para o efetuador final, como consta nas Figuras 32(a) e 32(b). Diante



desses resultados, o MM entrega um módulo entre os valores do efetuador e da base de, aproximadamente, 0,33 metros, preservando assim as restrições impostas pelo ERG; além de adicionar uma margem de segurança relativo à variável  $\delta$ . Isso é visto no gráfico da distância entre o efetuador e a base do braço com o tempo na Figura 33.

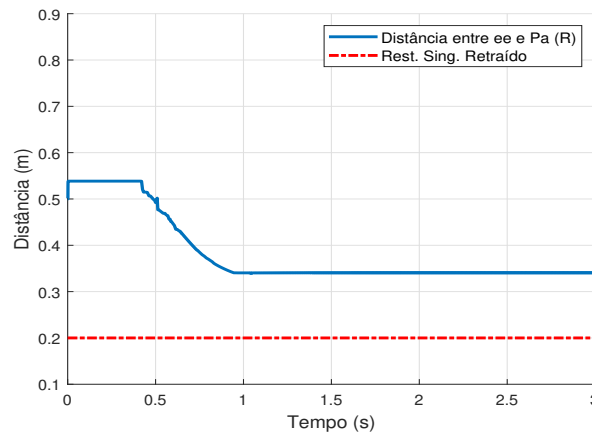


Figura 33 – Evolução temporal da distância entre o efetuador final e a base do braço robótico referente à simulação 3

Verificando a evolução no tempo de  $\Delta(x, v)$  e  $\Gamma_x(v)$  nas Figuras 34 e 35, respectivamente, verifica-se que a redução da distância entre referência com a restrição por singularidade é perceptível no gráfico de  $\Gamma_x(v)$ , uma vez que seu valor se aproxima de zero, demonstrando que a referência auxiliar encontra o um valor entre a posição desejada e as restrições, e permanece nesta posição. Nesse mesmo tempo, a Figura 33 estabiliza o valor da distância entre centros.

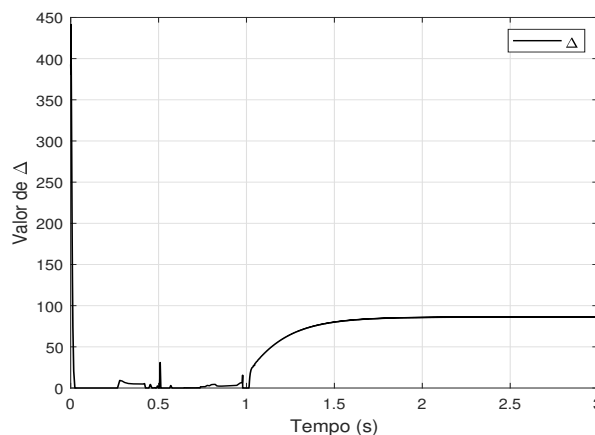


Figura 34 – Valor de  $\Delta(x, v)$  de saída do ERG referente à simulação 3

A Figura 36 apresenta o valor de  $\rho(r, v)$  do sistema, demonstrando que após 1,2 segundos os parâmetros de  $\rho(r, v)$  convergem para zero. As Figuras 37(a) e 37(b) expõem a evolução dos estados do sistema.

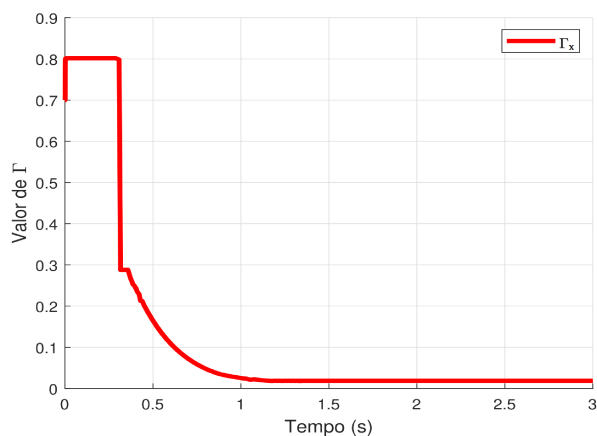


Figura 35 – Valor de  $\Gamma_x(v)$  referente à simulação 3

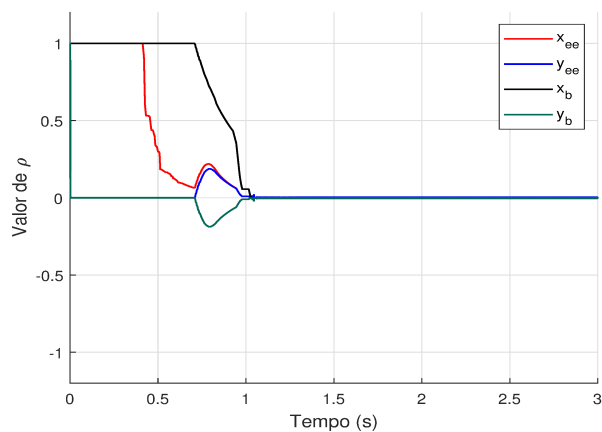
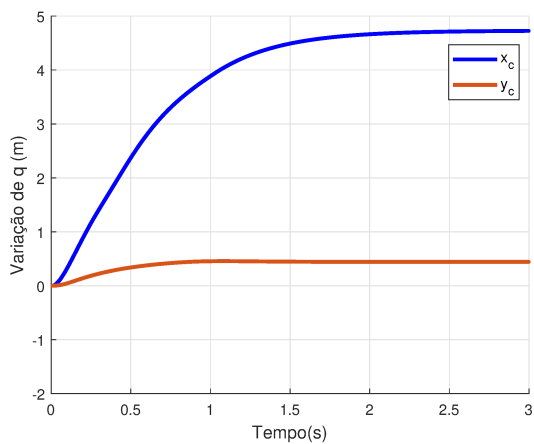
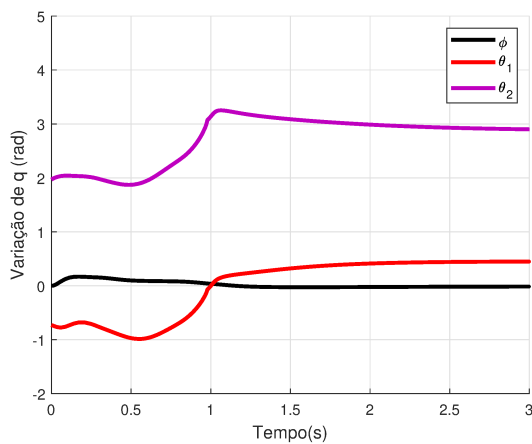


Figura 36 – Valores de  $\rho(r, v)$  de saída do ERG referente à simulação 3



(a) Estados do sistema  $x_c$  e  $y_c$



(b) Estados do sistema  $\phi$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$

Figura 37 – Evolução dos estados do sistema referentes à simulação 3

### 5.4 SIMULAÇÃO 4

Na quarta simulação, avalia-se a restrição de singularidade para o braço estendido, submetendo o MM à referência final situada em  $[2 \ 0, 8]^T$  para o efetuador final e  $[1 \ 0, 6]^T$  para a base, no que se traduz em uma configuração, em que ocorre a violação da restrição ao término da mesma, momento no qual a distância entre o efetuador final e a base do braço é igual a 1,02 metros, valor acima do permitido da restrição por extensão do braço, assim como exibido em (75). Aplicando as restrições ao ERG, foram observados os resultados apresentados na Figura 38.

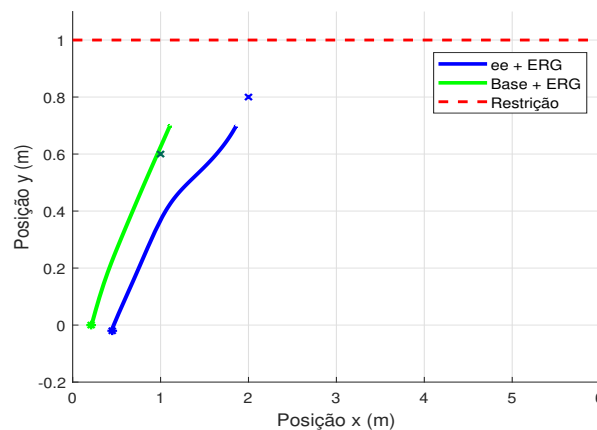
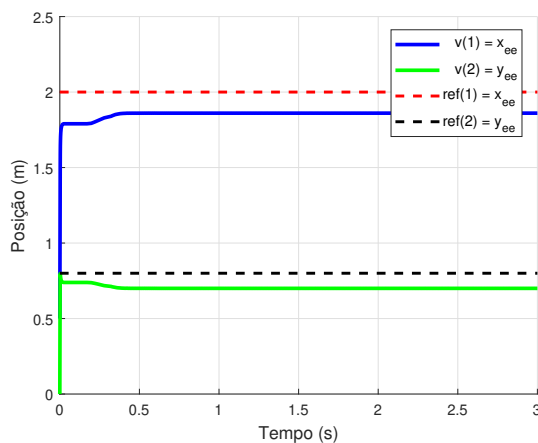
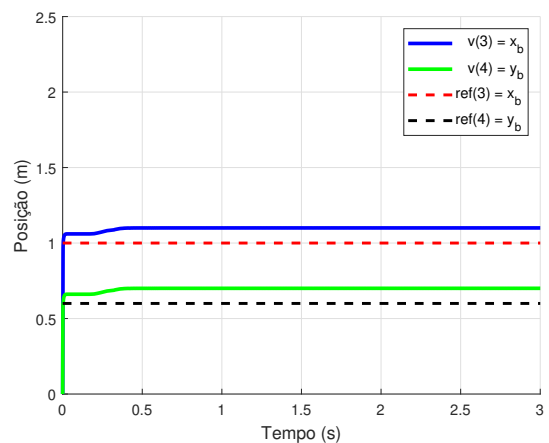


Figura 38 – Trajetória do manipulador móvel com referência fora da restrição de singularidade com braço estendido



(a) Referência do efetuador final



(b) Referência da base móvel

Figura 39 – Evolução do sinal de saída do ERG comparado à referência desejada relacionado à simulação 4

Como resultado, o MM encontra uma posição final de  $[1, 85 \ 0, 69]^T$  para a posição do efetuador final e  $[1, 10 \ 0, 70]^T$  para a base, como apresentados nas Figuras 39(a) e 39(b). Esse valor se traduz no módulo da distância entre base e o efetuador

final de 0,76, um valor menor de restrição estabelecida na equação (77), assim como visto na Figura (40).

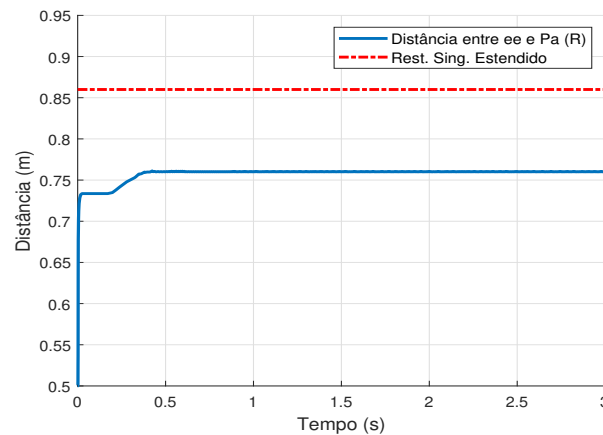


Figura 40 – Evolução temporal da distância entre o efetuador final e a base do braço robótico referente à simulação 4

Observando o gráfico que apresenta a distância entre o efetuador final e a base do braço robótico, percebe-se que o ERG cumpre o objetivo de restringir a distância de 0,86 metros e, além disso, promove uma distância extra da restrição de 0,1 metros, correspondente à variável  $\delta$ .

Verificando a Figura 41, que apresenta a evolução no tempo de  $\Delta(x, v)$ , nota-se que, logo no início da simulação, o valor de  $\Delta(x, v)$  zera e, após 0,7 segundos de simulação, encontra um valor próximo à 50. Isso se deve, mais uma vez, aos altos valores de torque no início da simulação. Nota-se também que o valor estabiliza em um valor final menor, comparado com as outras simulações. Isso ocorre porque os pontos de referência para esta simulação são mais próximos do que os outros ensaios.

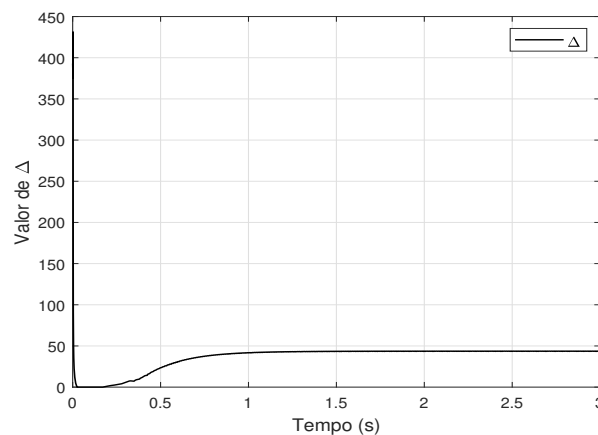


Figura 41 – Valor de  $\Delta(x, v)$  de saída do ERG referente à simulação 4

Na Figura 42, que apresenta a evolução no tempo de  $\Gamma_x(v)$ , verifica-se que o valor mínimo desta variável é rapidamente encontrada, traduzindo-se numa convergência imediata nos valores da referência auxiliar ( $v$ ), como demonstrado nas Figuras 39(a) e 39(b) anteriormente citadas.

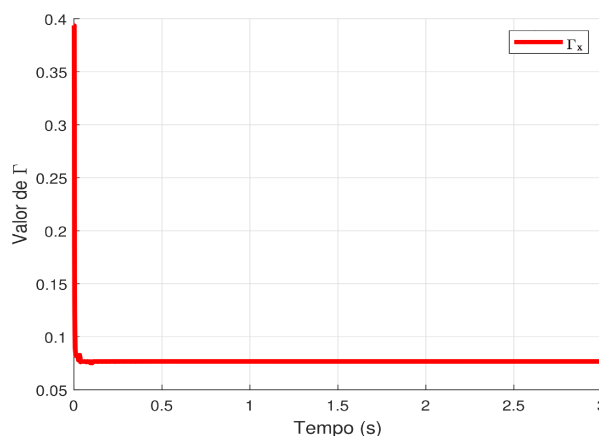


Figura 42 – Valor de  $\Gamma_x(v)$  do ERG referente à simulação 4

A Figura 43 exhibe os valores de  $\rho(r, v)$  da simulação, sendo possível analisar que, mesmo não encontrando o valor de referência, o valor de  $\rho(r, v)$  zera. Isso se deve ao fato de que o Termo de Repulsão  $\rho_0(v)$  contrapõe o efeito do Termo de Atração  $\rho_r(r, v)$  anulando o seu valor.

As Figuras 44(a) e 44(b) apresentam a evolução dos estados do sistema, Notando-se que os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  tenderiam a se igualar, caso não fossem impedidos pela ação do ERG.

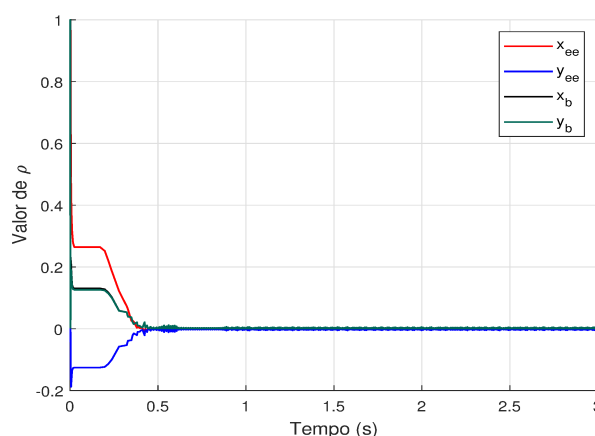
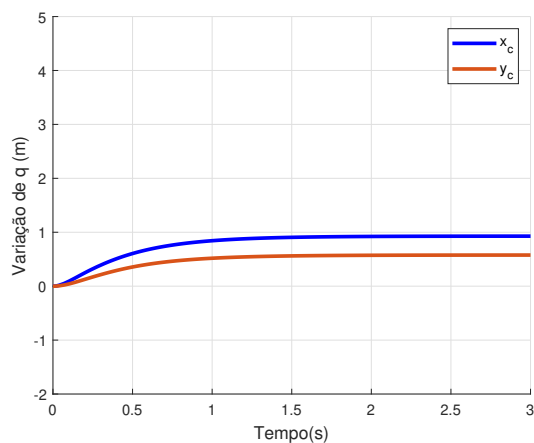
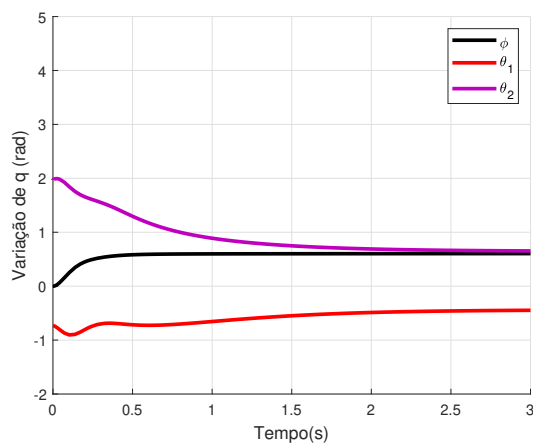


Figura 43 – Valores de  $\rho(r, v)$  de saída do ERG referente à simulação 4



(a) Estados do sistema  $x_c$  e  $y_c$



(b) Estados do sistema  $\phi$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$

Figura 44 – Evolução dos estados do sistema referentes à simulação 4

## 6 CONCLUSÃO

Por se tratar de um sistema não-linear, o controle de manipuladores móveis é uma tarefa complexa, e muito explorado na literatura com grande potencial para aplicações industriais.

O objetivo deste trabalho consistiu em restringir a movimentação de um manipulador móvel planar com base não-holonômica. As restrições eram previamente conhecidas do próprio ambiente e sistema robótico que foram traduzidas em restrições posicionais e de singularidade. Para isso, aplicou-se um método de restrições de movimento conhecido como Governador de Referência Explícito (ERG).

Esta dissertação passou pelas etapas de modelagem do manipulador móvel não-holonômico, controle do sistema no plano cartesiano, aplicação do método de restrições de movimento e simulação do sistema proposto, comparando o sistema com um modelo sem o método de restrições e averiguando o comportamento do ERG e, como demonstrado nos resultados, a aplicação do ERG ao manipulador móvel não-holonômico para restringir a sua movimentação dadas restrições posicionais e de singularidades foram obtidas com sucesso.

No entanto, o sistema que foi desenvolvido priorizou evitar as restrições ao invés de encontrar o ponto desejado. Como o ERG encontra uma posição sub-ótima para o sistema, é provável que haja uma trajetória na qual o manipulador móvel obtenha uma posição ótima. Entretanto, ela só é factível por meio de um desvio ou uma movimentação da base móvel, o que não foi possível de ser efetuado, haja vista que, como apresentado nas simulações, houve apenas o deslocamento do manipulador móvel até a referência desejada e, caso se aproxime das restrições, ele para em um ponto mais próximo possível da referência desejada.

### 6.1 TRABALHO FUTUROS

Trabalhos futuros sobre o tema incluem aplicar outros tipos de restrições, como restrições côncavas, variantes no tempo e não-lineares assim como demonstradas nos artigos pesquisados, além de aplicar obstáculos conhecidos no meio da trajetória para simular o desvio dos mesmos; tratar um manipulador móvel com maior número de graus de liberdade; e utilizar outras técnicas de controle mais avançadas.

Uma das dificuldades encontradas no desenvolvimento do ERG consistiu na forma de incluir as restrições de singularidade ao manipulador móvel. Como o controle do sistema foi projetado sobre as restrições posicionais do MM, foi necessário encontrar uma forma indireta de calcular a singularidade que ocorre quando os ângulos do braço robótico são iguais ou com diferença de  $\pi$  radianos. Em vista disso, um possível trabalho futuro consiste em desenvolver uma forma de restringir os estados de um sistema que sofreu manipulação no espaço de trabalho.

Por fim, implementar o ERG em um software de simulação de robôs para verificar se o sistema é rápido o suficiente pra não interferir na atuação do robô.



## REFERÊNCIAS

- ANDALUZ, Víctor; RAMPINELLI, VTL; ROBERTI, Flavio; CARELLI, Ricardo. Coordinated cooperative control of mobile manipulators. *In: IEEE. 2011 IEEE International Conference on Industrial Technology. [S.l.: s.n.], 2011. P. 300–305.*
- AVANZINI, Giovanni Buizza; ZANCHETTIN, Andrea Maria; ROCCO, Paolo. Constraint-based Model Predictive Control for holonomic mobile manipulators. *In: 2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). [S.l.: s.n.], 2015. P. 1473–1479. DOI: 10.1109/IROS.2015.7353562.*
- BEMPORAD, Alberto. Reference governor for constrained nonlinear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 43, n. 3, p. 415–419, 1998.
- BISCHOFF, Rainer; HUGGENBERGER, Ulrich; PRASSLER, Erwin. Kuka youbot-a mobile manipulator for research and education. *In: IEEE. 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation. [S.l.: s.n.], 2011. P. 1–4.*
- BOUKATTAYA, Mohamed; DAMAK, Tarak; JALLOULI, Mohamed. Robust adaptive control for mobile manipulators. **International Journal of Automation and Computing**, Springer, v. 8, n. 1, p. 8–13, 2011.
- BOUKATTAYA, Mohamed; MEZGHANI, Neila; DAMAK, Tarak. Adaptive motion/force control of uncertain nonholonomic mobile manipulator with estimation of unknown external force. **Multibody System Dynamics**, Springer, v. 44, n. 3, p. 223–250, 2018.
- BRAHMI, A.; SAAD, M.; GAUTHIER, G.; BRAHMI, B.; ZHU, W-H; GHOMMAM, J. Adaptive backstepping control of mobile manipulator robot based on virtual decomposition approach. *In: IEEE. 2016 8th International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC). [S.l.: s.n.], 2016. P. 707–712.*
- BURGET, F.; BENNEWITZ, M.; BURGARD, W. BI2RRT\*: An efficient sampling-based path planning framework for task-constrained mobile manipulation. *In: 2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). [S.l.: s.n.], out. 2016. P. 3714–3721. DOI: 10.1109/IROS.2016.7759547.*
- CAMACHO, Eduardo F.; ALBA, Carlos Bordons. **Model predictive control**. [S.l.]: Springer science & business media, 2013.

CHEN, Fei; SELVAGGIO, Mario; CALDWELL, Darwin G. Dexterous grasping by manipulability selection for mobile manipulator with visual guidance. **IEEE Transactions on Industrial Informatics**, IEEE, v. 15, n. 2, p. 1202–1210, 2018.

CHEN, Heping; CHENG, Hongtai; ZHANG, Biao; WANG, Jianjun; FUHLBRIGGE, Tom; LIU, Jian. Semiautonomous industrial mobile manipulation for industrial applications. *In: IEEE. 2013 IEEE International Conference on Cyber Technology in Automation, Control and Intelligent Systems. [S.l.: s.n.], 2013. P. 361–366.*

DAI, Gong-Bo; LIU, Yen-Chen. Distributed Coordination and Cooperation Control for Networked Mobile Manipulators. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, IEEE, v. 64, n. 6, p. 5065–5074, 2016.

FRANKOVSKY, Peter; PĀSTOR, Miroslav; DOMINIK, Lukas; KICKO, Michal; TREBUNA, Peter; HRONCOVĀ, Darina; KELEMEN, Michal. Wheeled mobile robot in structured environment. *In: IEEE. 2018 ELEKTRO. [S.l.: s.n.], 2018. P. 1–5.*

GALICKI, M. Tracking the kinematically optimal trajectories by mobile manipulators. **Journal of Intelligent & Robotic Systems**, Springer, v. 93, n. 3-4, p. 635–648, 2019.

GARONE, Emanuele; DI CAIRANO, Stefano; KOLMANOVSKY, Ilya. Reference and command governors for systems with constraints: A survey on theory and applications. **Automatica**, Elsevier, v. 75, p. 306–328, 2017.

GIFTTHALER, Markus; FARSHIDIAN, Farbod; SANDY, Timothy; STADELMANN, Lukas; BUCHLI, Jonas. Efficient kinematic planning for mobile manipulators with non-holonomic constraints using optimal control. *In: IEEE. 2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). [S.l.: s.n.], 2017. P. 3411–3417.*

GILBERT, Elmer; KOLMANOVSKY, Ilya. Nonlinear tracking control in the presence of state and control constraints: a generalized reference governor. **Automatica**, Elsevier, v. 38, n. 12, p. 2063–2073, 2002.

GOLDAR, Alejandro; ROMAGNOLI, Raffaele; COUTO, Luis D.; NICOTRA, Marco; KINNAERT, Michel; GARONE, Emanuele. Low-Complexity Fast Charging Strategies Based on Explicit Reference Governors for Li-Ion Battery Cells. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, IEEE, 2020.

HOSSEINZADEH, Mehdi; GARONE, Emanuele. An explicit reference governor for the intersection of concave constraints. **IEEE transactions on automatic control**, IEEE, v. 65, n. 1, p. 1–11, 2019.

HOSSEINZADEH, Mehdi; SINOPOLI, Bruno; BOBICK, Aaron F. An Explicit Reference Governor for Time-Varying Linear Constraints. *In*: IEEE. 2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). [S.l.: s.n.], 2020. P. 3323–3328.

KELLY, Rafael; DAVILA, Victor Santibáñez; PEREZ, Julio Antonio Loria. **Control of robot manipulators in joint space**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.

LI, Zhijun; GE, Shuzhi Sam. **Fundamentals in modeling and control of mobile manipulators**. [S.l.]: CRC Press, 2019.

LI, Zhijun; SU, Chun-Yi. Neural-adaptive control of single-master–multiple-slaves teleoperation for coordinated multiple mobile manipulators with time-varying communication delays and input uncertainties. **IEEE transactions on neural networks and learning systems**, IEEE, v. 24, n. 9, p. 1400–1413, 2013.

LIN, Sheng; GOLDENBERG, Andrew A. Neural-network control of mobile manipulators. **IEEE Transactions on Neural Networks**, IEEE, v. 12, n. 5, p. 1121–1133, 2001.

MERCKAERT, K.; VANDERBORGHT, B.; NICOTRA, Marco M.; GARONE, Emanuele. Constrained Control of Robotic Manipulators Using the Explicit Reference Governor. *In*: 2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). [S.l.: s.n.], 2018. P. 5155–5162. DOI: 10.1109/IROS.2018.8593857.

MINNITI, Maria Vittoria; FARSHIDIAN, Farbod; GRANDIA, Ruben; HUTTER, Marco. Whole-Body MPC for a Dynamically Stable Mobile Manipulator. **IEEE Robotics and Automation Letters**, v. 4, n. 4, p. 3687–3694, 2019. DOI: 10.1109/LRA.2019.2927955.

NAKANO, Satoshi; NGUYEN, Tam W.; GARONE, Emanuele; IBUKI, Tatsuya; SAMPEI, Mitsuji. Attitude constrained control on SO(3): An explicit reference governor approach. *In*: IEEE. 2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC). [S.l.: s.n.], 2018. P. 1833–1838.

NICOTRA, Marco M.; GARONE, Emanuele. An Explicit Reference Governor for the robust constrained control of nonlinear systems. *In*: 2016 IEEE 55th Conference on

Decision and Control (CDC). [S.l.: s.n.], 2016a. P. 1502–1507. DOI: 10.1109/CDC.2016.7798479.

NICOTRA, Marco M.; GARONE, Emanuele. **Constrained control of nonlinear systems**. 2016b. Tese (Doutorado) – PhD dissertation). Brussels, BE: Université Libre de Bruxelles.

NICOTRA, Marco M.; GARONE, Emanuele. Explicit Reference Governor for Constrained Nonlinear Systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 61, n. 5, p. 1379–1384, 2016c. DOI: 10.1109/TAC.2015.2476195.

NICOTRA, Marco M.; GARONE, Emanuele. Explicit reference governor for continuous time nonlinear systems subject to convex constraints. *In: 2015 American Control Conference (ACC)*. [S.l.: s.n.], 2015. P. 4561–4566. DOI: 10.1109/ACC.2015.7172047.

NICOTRA, Marco M.; GARONE, Emanuele. The Explicit Reference Governor: A General Framework for the Closed-Form Control of Constrained Nonlinear Systems. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 38, n. 4, p. 89–107, 2018. DOI: 10.1109/MCS.2018.2830081.

NICOTRA, Marco M.; GARONE, Emanuele; BARTULOVIC, Mihovil; SINOPOLI, Bruno. A distributed explicit reference governor for constrained control of multiple UAVs. **IFAC-PapersOnLine**, Elsevier, v. 48, n. 22, p. 156–161, 2015.

NICOTRA, Marco M.; GARONE, Emanuele; NALDI, Roberto. A robust explicit reference governor for constrained control of Unmanned Aerial Vehicles. *In: 2016 American Control Conference (ACC)*. [S.l.: s.n.], 2016. P. 6284–6289. DOI: 10.1109/ACC.2016.7526657.

NICOTRA, Marco M.; GARONE, Emanuele; NALDI, Roberto. Nonlinear control of a tethered UAV: The taut cable case. **Automatica**, Elsevier, v. 78, p. 174–184, 2017.

NICOTRA, Marco M.; GARONE, Emanuele; NGUYEN, Tam W.; KOLMANOVSKY, Ilya V. Explicit Reference Governor for the Constrained Control of Linear Time-Delay Systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 64, n. 7, p. 2883–2889, 2018.

NICOTRA, Marco M.; LIAO-MCPHERSON, Dominic; BURLION, Laurent; KOLMANOVSKY, Ilya V. Spacecraft attitude control with nonconvex constraints: An

explicit reference governor approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 65, n. 8, p. 3677–3684, 2019.

PACHECO, Rafael Neto; COSTA, Anna Helena Reali. Navegação de robôs móveis utilizando o método de campos potenciais. *In: WORKSHOP de Computação*. [S.l.: s.n.], 2002. P. 125–130.

PILANIA, Vinay; GUPTA, Kamal. Mobile manipulator planning under uncertainty in unknown environments. **The International Journal of Robotics Research**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 37, n. 2-3, p. 316–339, 2018.

QIN, S. Joe; BADGWELL, Thomas A. A survey of industrial model predictive control technology. **Control engineering practice**, Elsevier, v. 11, n. 7, p. 733–764, 2003.

ROMAGNOLI, Raffaele; COUTO, Luis D.; NICOTRA, Marco M.; GARONE, Emanuele; KINNAERT, Michel. Computationally-efficient constrained control of the state-of-charge of a li-ion battery cell. *In: IEEE. 2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*. [S.l.: s.n.], 2017. P. 1433–1439.

SPONG, Mark W.; HUTCHINSON, Seth; VIDYASAGAR, Mathukumalli. **Robot modeling and control**. [S.l.: s.n.], 2006.

SPONG, Mark W.; VIDYASAGAR, Mathukumalli. **Robot dynamics and control**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.

SUN, Hao; MENG, Zehui; TAO, Pey Yuen; ANG, Marcelo H. Scene recognition and object detection in a unified convolutional neural network on a mobile manipulator. *In: IEEE. 2018 IEEE international conference on robotics and automation (ICRA)*. [S.l.: s.n.], 2018. P. 5875–5881.

THAKAR, Shantanu; FANG, Liwei; SHAH, Brual; GUPTA, Satyandra. Towards time-optimal trajectory planning for pick-and-transport operation with a mobile manipulator. *In: IEEE. 2018 IEEE 14th International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*. [S.l.: s.n.], 2018. P. 981–987.

TSAI, Lung-Wen. **Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1999.

VAZQUEZ, Sergio; LEON, Jose I; FRANQUELO, Leopoldo G.; RODRIGUEZ, Jose; YOUNG, Hector A.; MARQUEZ, Abraham; ZANCHETTA, Pericle. Model predictive control: A review of its applications in power electronics. **IEEE industrial electronics magazine**, IEEE, v. 8, n. 1, p. 16–31, 2014.

WHITE, Glenn D. **Simultaneous motion and interaction force control of a nonholonomic mobile manipulator**. [S.l.]: Citeseer, 2006.

WHITE, Glenn D.; BHATT, Rajankumar M.; KROVI, Venkat N. Dynamic redundancy resolution in a nonholonomic wheeled mobile manipulator. **Robotica**, v. 25, n. 2, p. 147–156, 2007.

WHITE, Glenn D.; BHATT, Rajankumar M.; TANG, Chin Pei; KROVI, Venkat N. Experimental evaluation of dynamic redundancy resolution in a nonholonomic wheeled mobile manipulator. **IEEE/ASME Transactions on Mechatronics**, IEEE, v. 14, n. 3, p. 349–357, 2009.

XIAO, Lin; LIAO, Bolin; LI, Shuai; ZHANG, Zhijun; DING, Lei; JIN, Long. Design and analysis of FTZNN applied to the real-time solution of a nonstationary Lyapunov equation and tracking control of a wheeled mobile manipulator. **IEEE Transactions on Industrial Informatics**, IEEE, v. 14, n. 1, p. 98–105, 2017.

XU, Dong; ZHAO, Dongbin; YI, Jianqiang; TAN, Xiangmin. Trajectory tracking control of omnidirectional wheeled mobile manipulators: robust neural network-based sliding mode approach. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)**, IEEE, v. 39, n. 3, p. 788–799, 2009.

ZHONG, Guoliang; KOBAYASHI, Yukinori; HOSHINO, Yohei; EMARU, Takanori. Intuitive teleoperation of nonholonomic mobile robot with a manipulator based on virtual reality and WiFi. **IET/ICISCE**, IET, 2012.

## APÊNDICE A – MODELAGEM CINEMÁTICA E MATRIZES DE EULER-LAGRANGE

Este apêndice tem por finalidade explicar como foi realizado o procedimento de Modelagem Cinemática e obtenção das Matrizes de Euler-Lagrange para manipulador móvel com braço 2D (movimentação no plano XY).

### A.1 EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

A Equação de Euler-Lagrange descreve a evolução do sistema dinâmico sujeito a restrições de movimento. Para determinar a equação de Euler-Lagrange, encontra-se o Lagrangiano do sistema ( $\mathcal{L}$ ) que é a diferença entre a Energia Cinética ( $\mathcal{K}$ ) e a Energia Potencial ( $\mathcal{P}$ ):

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy. \quad (88)$$

Note que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{y}} \quad \& \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y},$$

então, a equação (88) é escrita na forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = f, \quad (89)$$

com isso, é possível reescrever a equação (88) da seguinte forma

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = f(q), \quad (90)$$

onde  $M(q)$  é a matriz de inércia expressa em termos da coordenadas estendidas;  $C(q, \dot{q})$  é a matriz que inclui as forças de Coriolis, centrífugas e gravitacionais;  $g(q)$  é o vetor de gravidade do sistema e  $f(q)$  são as forças que atuam nas coordenadas do sistema.

### A.2 MODELAGEM DO MANIPULADOR MÓVEL

Os modelos de manipuladores móveis são utilizados tanto para simulações como para síntese de controladores, sendo o primeiro passo para o projeto de MM a definição de suas características físicas e sua representação cinemática.

Considere um manipulador móvel 2D (Figura 45) composto por um braço robótico de duas juntas de revolução e uma base móvel não-holonômica de 3 rodas (duas rodas atuadas e uma para sustentação); as coordenadas generalizadas combinadas dos sistemas base e braço são expressas por

$$q = \left[ x_c \quad y_c \quad \phi \quad \theta_R \quad \theta_L \quad \theta_1 \quad \theta_2 \right]^T.$$

As variáveis apresentadas na tabela abaixo descrevem o veículo:

Tabela A.1. Parâmetros do Manipulador Móvel

Variável	Descrição	Valor	Unidade
$b$	Distância da roda para o centro do MM	0,182	m
$d$	Distância da roda para o centro do MM	0,166	m
$r_o$	Raio da roda	0,05	m
$L_1$	Tamanho do Braço 1 (link 1)	0,514	m
$L_2$	Tamanho do Braço 2 (link 2)	0,362	m
$L_{cm1}$	Distância do centro de massa do braço 1	0,252	m
$L_{cm2}$	Distância do centro de massa do braço 2	0,243	m
$P_a$	Posição da base do braço robótico	Variável	m
$L_a$	Distância do centro de massa da base até $P_a$	0,1	m
$m_1$	Massa do Braço 1	2,56	kg
$m_2$	Massa do Braço 2	1,07	kg
$m_w$	Massa da roda	0,159	kg
$m_c$	Massa da base	17,25	kg
$I_1$	Momento de Inércia do Braço 1	0,148	$kg.m^2$
$I_2$	Momento de Inércia do Braço 2	0,0228	$kg.m^2$
$I_w$	Momento de Inércia da roda	$2,0 \times 10^{-4}$	$kg.m^2$
$I_c$	Momento de Inércia da base	0,297	$kg.m^2$
$P_c$	Posição do centro de massa da base	Variável	m
$s_R, s_L$	Amortecimento das rodas	0,1	$kg.m^2/s$
$s_1, s_2$	Amortecimento das juntas	0,1	$kg.m^2/s$
$x_c, y_c$	Posição absoluta do centro de massa	Variável	m
$\phi$	Ângulo de rotação do MM	Variável	rad
$\theta_R, \theta_L$	Deslocamento angular das rodas	Variável	rad
$\theta_1, \theta_2$	Ângulos das juntas do Braço Robótico	Variável	rad
$\tau_R, \tau_L$	Entrada de Torque das rodas	Entradas	N.m
$\tau_1, \tau_2$	Entrada de Torque nas juntas rotativas	Entradas	N.m

### A.2.1 Energia Cinética do Sistema

Como o MM possui 5 corpos rígidos (desconsiderando a roda de sustentação), o total de energia cinética é dado pela soma da energia cinética individual de cada corpo, ou seja

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = k_p + k_1 + k_2 + k_r + k_l. \quad (91)$$

A energia cinética de um corpo rígido é dado por

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (92)$$



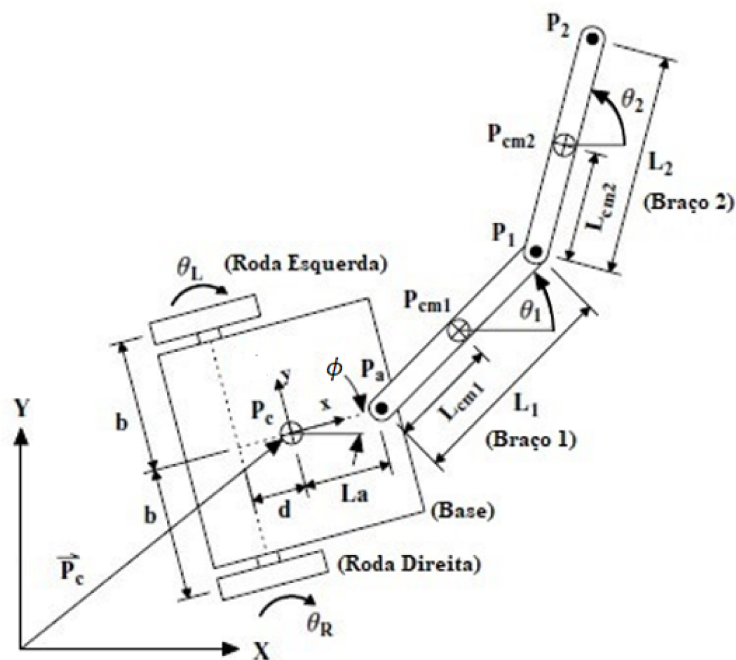


Figura 45 – Nomenclatura do Manipulador Móvel

onde:

$m$ : massa do corpo;

$v$ : velocidade linear do corpo;

$I$ : momento de Inércia;

$\omega$ : velocidade angular do corpo.

Em vista disso, calcula-se a velocidade referente ao centro de massa dos corpos presentes no MM. As posições dos centros de massa das rodas direita  $(x_r, y_r)$  e esquerda  $(x_l, y_l)$  são dados por:

$$x_r = x_c + l \sin \phi; \quad (93)$$

$$y_r = y_c - l \cos \phi; \quad (94)$$

$$x_l = x_c - l \sin \phi; \quad (95)$$

$$y_l = y_c + l \cos \phi, \quad (96)$$

o que leva as suas respectivas velocidades:

$$\dot{x}_r = \dot{x}_c + l \dot{\phi} \cos \phi; \quad (97)$$

$$\dot{y}_r = \dot{y}_c + l \dot{\phi} \sin \phi; \quad (98)$$

$$\dot{x}_l = \dot{x}_c - l \dot{\phi} \cos \phi; \quad (99)$$

$$\dot{y}_l = \dot{y}_c - l \dot{\phi} \sin \phi. \quad (100)$$

As posições dos centros de massa dos braços robóticos 1 ( $P_{cmx1}, P_{cmy1}$ ) e 2 ( $P_{cmx2}, P_{cmy2}$ ) são dados por:

$$P_{cmx1} = x_c + L_a \cos \phi + L_{cm1} \cos \theta_1; \quad (101)$$

$$P_{cmy1} = y_c + L_a \sin \phi + L_{cm1} \sin \theta_1; \quad (102)$$

$$P_{cmx2} = x_c + L_a \cos \phi + L_1 \cos \theta_1 + L_{cm2} \cos \theta_2; \quad (103)$$

$$P_{cmy2} = y_c + L_a \sin \phi + L_1 \sin \theta_1 + L_{cm2} \sin \theta_2, \quad (104)$$

o que leva às respectivas velocidades:

$$\dot{P}_{cmx1} = \dot{x}_c - L_a \dot{\phi} \sin \phi - L_{cm1} \dot{\theta}_1 \sin \theta_1; \quad (105)$$

$$\dot{P}_{cmy1} = \dot{y}_c + L_a \dot{\phi} \cos \phi + L_{cm1} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1; \quad (106)$$

$$\dot{P}_{cmx2} = \dot{x}_c - L_a \dot{\phi} \sin \phi - L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - L_{cm2} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2; \quad (107)$$

$$\dot{P}_{cmy2} = \dot{y}_c + L_a \dot{\phi} \cos \phi + L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + L_{cm2} \dot{\theta}_2 \cos \theta_2. \quad (108)$$

Dessa forma, utilizando as velocidades encontradas das equações (97 - 100) e (105 - 108) encontram-se as seguintes equações de energia cinética referente a cada corpo do MM:

$$k_p = \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2} I_c \dot{\phi}^2; \quad (109)$$

$$k_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{P}_{cmx1}^2 + \dot{P}_{cmy1}^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2; \quad (110)$$

$$k_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{P}_{cmx2}^2 + \dot{P}_{cmy2}^2) + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2; \quad (111)$$

$$k_r = \frac{1}{2} m_w (\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2) + \frac{1}{2} I_w \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_w \dot{\theta}_r^2; \quad (112)$$

$$k_l = \frac{1}{2} m_w (\dot{x}_l^2 + \dot{y}_l^2) + \frac{1}{2} I_w \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_w \dot{\theta}_l^2. \quad (113)$$

### A.2.2 Energia Potencial do Sistema

Como o Manipulador Móvel se movimenta no plano horizontal, sua energia potencial será considerada igual a zero, ou seja

$$\mathcal{P}(q) = 0. \quad (114)$$

### A.3 MATRIZES DA EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

O procedimento para encontrar a formulação de Euler-Lagrange para sistemas robóticos não é única, existindo alguns métodos para encontrá-la. A fórmula de Euler-Lagrange utilizado para este tipo de manipulador móvel possui a configuração

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = E\tau_m - A^T\lambda, \quad (115)$$

em que  $M(q)$  é a matriz de inércia, expressa em termos das coordenadas estendidas.  $C(q, \dot{q})$  é uma matriz que inclui as forças de Coriolis e centrífugas.  $\tau_m$  consiste nos torques de entrada do sistema com origem dos motores das rodas, direita e esquerda, e do braço, juntas 1 e 2 e  $E$  mapeia os torques ativos de  $\tau_m$ .

Pela definição de energia cinética, a matriz de inércia  $M(q)$  é obtida da forma

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}, \quad (116)$$

a qual pode ser escrita a partir do somatório das energias cinéticas individuais dos corpos rígidos (assim como demonstrado em (91)). Portanto, utilizando as equações de (109) à (113) e substituindo as variáveis  $\dot{x}_r, \dot{y}_r, \dot{x}_l, \dot{y}_l$  pelas equações em (97) à (100) e  $\dot{P}_{cmx1}, \dot{P}_{cmy1}, \dot{P}_{cmx2}, \dot{P}_{cmy2}$  pelas equações em (105) à (108), respectivamente, para deixar todos os valores em função de  $\dot{x}_c$  e  $\dot{y}_c$ . Para isso, recomenda-se a utilização de recursos computacionais voltados a manipulação e resolução de álgebra (MatLab, Geogebra ou xMaxima). Com isso, e fazendo as devidas substituições, encontra-se a matriz de inércia

$$M(q) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & -p_2 s(\phi) & 0 & 0 & -p_3 s(\theta_1) & -p_4 s(\theta_2) \\ 0 & p_1 & p_2 c(\phi) & 0 & 0 & p_3 c(\theta_1) & p_4 c(\theta_2) \\ -p_2 s(\phi) & p_2 c(\phi) & p_5 & 0 & 0 & p_8 c(-\phi + \theta_1) & p_9 c(-\phi + \theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & p_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_7 & 0 & 0 \\ -p_3 s(\theta_1) & p_3 c(\theta_1) & p_8 c(-\phi + \theta_1) & 0 & 0 & p_6 & p_{11} c(\theta_1 - \theta_2) \\ -p_4 s(\theta_2) & p_4 c(\theta_2) & p_9 c(-\phi + \theta_2) & 0 & 0 & p_{11} c(\theta_1 - \theta_2) & p_{10} \end{bmatrix} \quad (117)$$

O  $kj$ -ésimo elemento da matriz de Coriolis ( $C(q, \dot{q})$ ) é definida segundo

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^n c_{ijk} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right] \dot{q}_i, \quad (118)$$

onde o elemento  $c_{ijk}$  é conhecido como símbolo de Christoffel de primeira ordem (Spong *et al.* (2006)). Desse modo, obtém-se a matriz de Coriolis ( $C(q, \dot{q})$ ), como

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -p_2 c(\phi) \dot{\phi} & 0 & 0 & -p_3 c(\theta_1) \dot{\theta}_1 & -p_4 c(\theta_2) \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & -p_2 s(\phi) \dot{\phi} & 0 & 0 & -p_3 s(\theta_1) \dot{\theta}_1 & -p_4 s(\theta_2) \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & s_1 & 0 & 0 & -p_8 s(-\phi + \theta_1) \dot{\theta}_1 - s_1 & -p_9 s(-\phi + \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & 0 & s_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_8 s(-\phi + \theta_1) \dot{\phi} - s_1 & 0 & 0 & s_1 + s_2 & p_{11} s(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 - s_2 \\ 0 & 0 & p_9 s(-\phi + \theta_2) \dot{\phi} & 0 & 0 & -p_{11} s(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 - s_2 & s_2 \end{bmatrix} \quad (119)$$

Sendo os termos  $s_1, s_2, s_R$  e  $s_L$  amortecimentos lineares ideais presentes nas rodas e juntas do manipulador móvel e  $s(\alpha)$  e  $c(\alpha)$  os senos e cossenos do ângulo  $\alpha$ , respectivamente.

A Matriz  $E$  permite mapear as forças provenientes dos torques em  $\tau_m$ . Para os ângulos do braço robótico do sistema possuir a configuração presente na Figura 45, a matriz  $E$  deve ser

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (120)$$

e a matriz  $\tau_m$  é a matriz de torques de atuação do sistema e são produzidos por motores ideais de torque controlado localizados em cada junta e nas rodas do manipulador

$$\tau_m = [\tau_R \ \tau_L \ \tau_1 \ \tau_2]^T. \quad (121)$$