



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS – CFM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Kledilson Peter Ribeiro Honorato

**Conexidade Geodésica e Existência de Geodésica Tipo-Tempo Fechada em
Variedades de Lorentz**

Florianópolis
2022

Kledilson Peter Ribeiro Honorato

**Conexidade Geodésica e Existência de Geodésica Tipo-Tempo Fechada em
Variedades de Lorentz**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Doutor em Matemática, com área de concentração em Geometria e Topologia.
Orientador: Prof. Ivan Pontual Costa e Silva, Dr.
Coorientador: Prof. José Luis Flores Dorado, Dr.

Florianópolis
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Honorato, Kledilson Peter Ribeiro
Conexidade geodésica e existência de geodésica tipo
tempo fechada em variedades de Lorentz / Kledilson Peter
Ribeiro Honorato ; orientador, Ivan Pontual Costa e Silva,
coorientador, José Luis Flores Dorado, 2022.
101 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada,
Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Variedades afins e de
Lorentz. 3. Geodésica tipo-tempo fechada. 4. Conexidade
geodésica. I. Costa e Silva, Ivan Pontual. II. Dorado,
José Luis Flores. III. Universidade Federal de Santa
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e
Aplicada. IV. Título.

Kledilson Peter Ribeiro Honorato

Conexidade Geodésica e Existência de Geodésica Tipo-Tempo Fechada em Variedades de Lorentz

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Abraão Mendes do Rêgo Gouveia, Dr.
Universidade Federal de Alagoas – UFAL

Prof. Jonatán Herrera Fernández, Dr.
Universidad de Córdoba – UCO

Prof. Paolo Piccione, Dr.
Universidade de São Paulo – USP

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Doutor em Matemática, com área de concentração em Geometria e Topologia.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Ivan Pontual Costa e Silva, Dr.
Orientador

Prof. José Luis Flores Dorado, Dr.
Coorientador

Florianópolis, 2022.

Este trabalho é dedicado a minha família.

AGRADECIMENTOS

A Deus por minha vida, família e amigos.

À minha mãe (Ana Lúcia), aos meus irmãos (Clebson e Jamilson) e minha sobrinha (Ana Maria), pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

À Andreia, esposa do meu irmão Clebson, pelo apoio.

À Universidade Federal de Santa Catarina pela oportunidade de fazer o curso.

A todos os funcionários do RU (Restaurante Universitário) pelo empenho e a dedicação todos os dias da semana para servir sempre uma excelente alimentação para a comunidade universitária.

Aos meus amigos da Pós-Graduação em Matemática.

Aos meus colegas de seminários de geometria lorentziana, Henrique Amador Puel Martins e Víctor Luis Espinoza.

Ao meu orientador o professor Ivan Pontual Costa e Silva – que é um verdadeiro mestre pela paciência, o apoio, a confiança e seus conhecimentos repassados durante o curso de doutorado e o desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu coorientador o professor José Luis Flores Dorado pela confiança e por ter me propiciado trabalhar nesse problema belíssimo das geodésicas fechadas.

Aos professores da Pós-Graduação em Matemática pelas excelentes aulas e atendimentos prestados.

À secretária do PPGMTM, Érica Flores, pelos excelentes atendimentos prestados.

Aos professores Abraão Mendes do Rêgo Gouveia, Jonatán Herrera Fernández e Paolo Piccione pela disponibilidade de participarem da banca examinadora e pelas considerações acerca da tese.

Às agências da CAPES e da FAPESC pelo apoio financeiro durante o curso.

“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza – uma beleza fria e austera, como a da escultura.”

(Russell, 1907)

RESUMO

Neste trabalho estudamos dois problemas clássicos da geometria diferencial, a conexidade geodésica em variedades afins e de Lorentz e a existência de geodésicas tipo-tempo fechadas em variedades de Lorentz. No primeiro problema obtemos um resultado, no contexto das variedades afins, de conexidade geodésica que também nos fornece informações sobre a multiplicidade dos segmentos de geodésica e uma versão do teorema de Hadamard-Cartan. Para o caso lorentziano obtemos um resultado de conexidade geodésica por segmento de geodésica tipo-tempo – incluindo a existência de um laço geodésico tipo-tempo – e uma nova versão lorentziana do teorema de Hadamard-Cartan. Com relação ao segundo problema obtemos uma extensão do teorema 1.1 em [22] para o caso lorentziano. Além disso, em decorrência da técnica utilizada para obter esta extensão conseguimos generalizar alguns resultados recentes sobre a existência de geodésicas tipo-tempo fechadas já conhecidos na literatura das variedades lorentzianas.

Palavras-chave: Variedades afins e de Lorentz. Conexidade geodésica. Geodésica tipo-tempo fechada.

ABSTRACT

In this work we study two classical problems of differential geometry, the geodesic connectedness in affine and Lorentz manifolds and the existence of closed timelike geodesics in Lorentz manifolds. Regarding the first problem we obtain a result, in the context of affine manifolds, of geodesic connectedness that also provides us informations about the multiplicity of geodesic segments and a version of the Hadamard-Cartan Theorem. For the Lorentzian case we obtain a result of geodesic connectedness by timelike geodesic segments – including the existence of a timelike geodesic loop – and a new Lorentzian version of the Hadamard-Cartan Theorem. Regarding the second problem, we obtain an extension of Theorem 1.1 in [22] to the Lorentzian case. Furthermore, as a further application of the technique used to obtain this extension, we were able to generalize some recent results on the existence of closed timelike geodesics already known in the literature on Lorentzian manifolds.

Keywords: Affine and Lorentz manifolds. Geodesic connectedness. Closed timelike geodesic.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	CONEXIDADE GEODÉSICA	10
1.2	GEODÉSICAS FECHADAS	13
1.3	ESTRUTURAÇÃO DA TESE	16
2	PRELIMINARES	18
2.1	VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS: CONCEITOS BÁSICOS . . .	18
2.2	APLICAÇÕES DE RECOBRIMENTO SEMI-RIEMANNIANAS E OS TEOREMAS DE HOPF E HADAMARD	33
2.3	ESPAÇO-TEMPO	41
3	CONEXIDADE GEODÉSICA EM VARIEDADES AFINS	49
3.1	PROPRIEDADES ABSTRATAS DE FUNÇÕES: LEVANTAMENTO E CONTINUAÇÃO DE CAMINHOS	49
3.2	PSEUDOCONVEXIDADE E DESAPRISIONAMENTO DE GEODÉSI- CAS	52
3.3	CONEXIDADE GEODÉSICA EM VARIEDADES AFINS	59
4	CONEXIDADE GEODÉSICA EM VARIEDADES DE LORENTZ . . .	64
4.1	PROPRIEDADE DE CONTINUAÇÃO CAUSAL PARA A APLICAÇÃO EXPONENCIAL	64
4.2	CONEXIDADE GEODÉSICA CAUSAL EM VARIEDADES DE LORENTZ	69
4.3	TEOREMA DE HADAMARD-CARTAN LORENTZIANO	71
5	GEODÉSICAS TIPO-TEMPO FECHADAS EM VARIEDADES DE LO- RENTZ	75
5.1	PRELIMINARES TÉCNICOS	75
5.2	O ESPAÇO DE LAÇOS GEODÉSICOS TIPO-TEMPO	80
5.3	PSEUDOCONVEXIDADE, DESAPRISIONAMENTO E GEODÉSICAS TIPO-TEMPO FECHADAS	87
5.4	TRANSLAÇÕES DE CLIFFORD E RECOBRIMENTOS GLOBALMENTE HIPERBÓLICOS	92
6	CONCLUSÃO	96
	REFERÊNCIAS	98

1 INTRODUÇÃO

Nesta tese abordaremos dois problemas clássicos da área de geometria diferencial que são *a conexidade geodésica em variedades afins e de Lorentz e a existência de geodésicas tipo-tempo fechadas em variedades de Lorentz*.

O objetivo desta tese é fornecer contribuições inéditas para estes dois problemas da geometria. De forma mais específica:

- obter uma condição natural que além de nos fornecer a conexidade geodésica em uma variedade afim também nos dê a multiplicidade geodésica, i.e., o número de segmentos geodésicos que conectam dois pontos quaisquer na variedade – com os possíveis desdobramentos deste resultado;
- obter a conexidade geodésica via segmentos de geodésicas tipo-tempo em variedades lorentzianas através da relação entre a aplicação exponencial e o conceito de aplicação fracamente própria definida em [18] – isto inclui garantir a existência de laços geodésicos tipo-tempo em uma variedade de Lorentz; e
- garantir a existência de uma geodésica tipo-tempo fechada em uma variedade de Lorentz sob certas hipóteses neste contexto de modo a estender o teorema 1.1 em [22] para o caso lorentziano e fornecer generalizações de alguns resultados recentes da literatura.

Apresentaremos a seguir uma breve revisão bibliográfica dos problemas de conexidade geodésica e existência de geodésicas fechadas procurando detalhar um pouco mais os trabalhos que serão relevantes para esta tese.

1.1 CONEXIDADE GEODÉSICA

Em variedades riemannianas conexas e completas o problema da conexidade geodésica está resolvido positivamente através do teorema de Hopf-Rinow (veja o teorema 2.30). Este teorema na verdade nos garante mais do que a existência de um segmento de geodésica conectando dois pontos da variedade, i.e., *para dois pontos quaisquer existe um segmento de geodésica minimal que os conecta*. Além disso, quaisquer dois pontos podem ser conectados por uma quantidade infinita de segmentos geodésicos se a variedade riemanniana é não-contrátil (veja [23, Pág. 52]).

No caso das variedades semi-riemannianas esta questão é mais delicada, uma vez que neste contexto não temos uma versão do teorema de Hopf-Rinow. Lembre-se que o espaço-tempo de de Sitter (globalmente hiperbólico) é geodesicamente completo, mas não é geodesicamente conexo, ou seja, no caso semi-riemanniano a completude geodésica (e a hiperbolicidade global) não implica necessariamente conexidade geodé-

sica. Outro aspecto também importante é que no caso riemanniano a compacidade da variedade implica na completude (também pelo teorema de Hopf-Rinow) e como vimos anteriormente resulta na conexidade geodésica, porém isso não se mantém em uma variedade semi-riemanniana como pode ser visto no exemplo 7.16 (toro Clifton-Pohl) em [42, Pág. 193].

Apesar destes contra-exemplos para a conectividade geodésica no contexto semi-riemanniano, vale mencionar dois resultados de conexidade geodésica em uma classe mais restrita (porém importante) de variedades semi-riemannianas que são as variedades lorentzianas. Um é o teorema que hoje se conhece como o teorema de Avez–Seifert que nos diz que *para qualquer par de pontos causalmente relacionados em um espaço-tempo globalmente hiperbólico, existe um segmento de geodésica causal futuro-dirigida de comprimento lorentziano maximal conectando estes pontos* (veja o teorema 2.88). Aqui a condição de hiperbolicidade global desempenha um papel importante no espaço-tempo quanto à conectividade geodésica por segmentos de geodésicas causais maximais, assim como a completude o faz dualmente no caso riemanniano mencionado acima. O outro é um resultado importante que pode ser encontrado em [42, Pág. 248], o qual mostra que em uma forma espacial lorentziana com curvatura seccional positiva a conexidade geodésica é incompatível com a orientação temporal.

No contexto mais geral de variedades afins, Bates em [4] fornece um exemplo que mostra que a conexidade geodésica pode falhar ainda que a variedade seja compacta e completa simultaneamente (lembramos que compacidade não implica completude nem mesmo na subclasse das variedades de lorentz). Beem e Parker em [6] apresentam uma discussão quanto à conexidade geodésica em variedades afins a partir de duas condições geométricas: pseudoconvexidade e desaprisionamento, com respeito à classe das geodésicas da variedade. De forma mais específica, mostram que *uma variedade afim pseudoconvexa, desaprisionada e sem pontos conjugados é geodesicamente conexa*. Além disso, através das três condições geométricas:

1. pseudoconvexidade;
2. desaprisionamento; e
3. ausência de pontos conjugados

eles obtiveram uma generalização para variedades afins do teorema de Hadamard-Cartan e, em particular, que a aplicação exponencial $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é uma aplicação de recobrimento universal. Consequentemente, além da conexidade geodésica, vista anteriormente, podemos dizer algo sobre a multiplicidade geodésica, i.e., dois pontos quaisquer podem ser ligados por um único segmento de geodésica (a menos de reparametrizações afins).

Em [18], Costa e Silva e Flores enfraquecem as hipóteses de pseudoconvexi-

dade, desaprisionamento e ausência de pontos conjugados da proposição 5 em [6] e obtêm um resultado de conexidade geodésica (teorema 1.2). Para entender um pouco este resultado faremos uma breve exposição das principais ideias deste artigo (isto é relevante aqui uma vez que as ideias deste artigo [18] nortearam nossas discussões sobre conexidade geodésica em nossa pesquisa).

Sejam (M, ∇) uma variedade afim (conexa) e $p \in M$. Primeiramente, Costa e Silva e Flores dividem as hipóteses da proposição 5 em [6] em dois grupos:

- (1) pseudoconvexidade e desaprisionamento; e
- (2) ausência de pontos conjugados.

Na proposição 2.1 (i) mostram que a condição (1) resulta que a aplicação $\exp_p : \mathcal{D}_p \rightarrow M$ é própria e, conseqüentemente, $\exp_p(\mathcal{D}_p)$ é um subconjunto fechado em M . Além disso, a condição (2) implica que \exp_p é uma aplicação aberta. Como M é conexa então $\exp_p(\mathcal{D}_p) = M$ e, conseqüentemente, (M, ∇) é geodesicamente conexa. Com isso eles têm inicialmente um resultado de conexidade geodésica enfraquecendo a condição (1) com o lema 4 do próprio artigo de Beem e Parker. Em seguida, eles enfraquecem as condições acima separadamente. Na proposição 2.4 os autores mostram que aplicações próprias suaves em variedades diferenciáveis são fracamente próprias (veja a definição 3.17). Dessa forma, Costa e Silva e Flores enfraquecem a condição (1), i.e., pseudoconvexidade e desaprisionamento implicam que a aplicação exponencial é fracamente própria.

Ainda com respeito as aplicações fracamente próprias, eles apresentam três resultados em que a aplicação exponencial é fracamente própria com relação às classes de variedades riemannianas e lorentzianas:

Proposição 1.1 ([18], Prop. 2.6). *Se (M, g) é uma variedade riemanniana completa, então $\forall p \in M$ a aplicação exponencial $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é fracamente própria.*

Proposição 1.2 ([18], Prop. 2.7). *Se (M, g) é uma variedade de Lorentz completa com uma campo vetorial paralelo, então $\forall p \in M$ a aplicação exponencial $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é fracamente própria.*

Proposição 1.3 ([18], Cor. 2.8). *Seja (M, g) uma variedade de Lorentz compacta e suponha que existe uma campo vetorial de Killing tipo-tempo $V \in \mathfrak{X}(M)$ para o qual $\text{Ric}(V, V) \leq 0$, onde Ric denota o tensor de Ricci de (M, g) . Então, $\forall p \in M$ a aplicação exponencial $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é fracamente própria.*

Em seguida Costa e Silva e Flores definem uma variedade *fracamente Wiedersehen* (M, ∇) (ver a definição 3.16) como sendo uma variedade afim conexa tal que, para cada $p \in M$,

- (i) $\text{Conj}(p)$ é fechado; e

(ii) $M \setminus \text{Conj}(p)$ é conexo.

Note que, se a variedade afim não tem pontos conjugados, então ela é uma variedade fracamente Wiedersehen. Dessa forma, eles enfraquecem a condição (2) acima. Além disso, eles obtiveram um resultado mais forte do que a proposição 5 em [6]:

Teorema 1.4 ([18], Teo. 1.2). *Seja $M = (M, \nabla)$ uma WW-variedade (i.e., uma variedade fracamente Wiedersehen). Se $\exp_p : \mathcal{D}_p \subset T_p M \rightarrow M$ é fracamente própria para cada $0_p \in T_p M$, então M é geodesicamente conexa.*

a partir de um resultado mais geral:

Teorema 1.5 ([18], Teo. 3.1). *Seja $F : N \rightarrow M$ uma aplicação suave, entre variedades diferenciáveis suaves de mesma dimensão, a qual é regular e fracamente própria em $O \in N$. Denote por S o conjunto formado pelos pontos singulares de F . Se $F(S)$ é fechada e $M \setminus F(S)$ conexo, então F é sobrejetiva.*

Aqui é importante ressaltar que existem muitas outras maneiras (que não visitaremos neste trabalho) de abordar o problema da conexidade geodésica tais como: métodos variacionais [23, 10, 11], métodos de teoria de grupo [16], técnicas baseadas no grau topológico de Brouwer [21] e métodos baseados em (parcial) integração das equações geodésicas [17].

1.2 GEODÉSICAS FECHADAS

O problema da existência de geodésicas fechadas em variedades riemannianas, além de ser um dos problemas mais belos da geometria, tem sido alvo de intensa investigação desde o início da geometria diferencial global.

O teorema de Cartan em [19] afirma que uma variedade riemanniana compacta que possui uma classe livre de homotopia não-trivial possui uma geodésica fechada nesta classe e, além disso, ela é minimal nesta classe. Deste resultado vemos que se a variedade riemanniana compacta não é simplesmente conexa, então existe uma geodésica fechada na variedade. Este resultado ainda continua válido se a variedade riemanniana compacta é simplesmente conexa, porém é um problema mais difícil de provar (veja [34]). Ou seja, o problema de existência de geodésica fechada em uma variedade riemanniana compacta está resolvido positivamente.

Em uma variedade riemanniana não-compacta, esse resultado não se mantém positivamente sem nenhuma outra hipótese adicional, como pode ser visto nos exemplos triviais: espaço euclidiano e espaço hiperbólico, onde as geodésicas são, respectivamente, retas e semirretas/semicircunferências (modelo do semiplano de Poincaré). Contudo alguns resultados de existência de geodésicas fechadas em variedades riemannianas não-compactas têm aparecido nas últimas décadas (ver, por exemplo, [48],

[12], [3] e [22]). Aqui destacaremos o último artigo [22], pois este motivou inicialmente nossa pesquisa e, conseqüentemente, está diretamente relacionado com nosso trabalho. Nele Flores obteve a existência de uma geodésica fechada (minimizante na classe dos laços geodésicos) em uma variedade riemanniana, não necessariamente compacta, que satisfaz uma condição topológica, não-contrátil, e duas condições geométricas, a saber, ausência de pontos conjugados e raio de injetividade divergindo ao longo de sequências divergentes.

Este resultado, teorema 1.4, é obtido a partir de três resultados fundamentais. O primeiro diz respeito à existência de laços geodésicos em cada ponto de uma variedade riemanniana completa e não-contrátil (veja [40, teo. 13.3, Pág. 239]). No segundo resultado, com a hipótese adicional do raio de injetividade divergir em sequências divergentes Flores constrói um laço geodésico minimizante na classe dos laços geodésicos (portanto mais do que localmente minimizante) da variedade. No último resultado, Flores mostra que *qualquer laço geodésico localmente minimizante não-autoconjugado em uma variedade riemanniana é uma geodésica fechada* (teorema 1.1).

Lembramos que, no caso lorentziano temos três tipos de geodésicas: *tipo-tempo*, *tipo-luz* e *tipo-espaço* (*causal* a geodésica é de um dos dois primeiros tipos). Aqui o nosso principal interesse são as *geodésicas causais fechadas*. O problema de existência de geodésicas causais fechadas no caso das variedades lorentzianas é mais delicado. Diferentemente do caso riemanniano, até quando a variedade lorentziana é compacta não temos garantia de existência de geodésicas causais fechadas, como pode ser visto no último exemplo do artigo de Galloway [25]. Além disso, em [28], Guediri fornece um exemplo de um espaço-tempo (variedade lorentziana conexa temporalmente orientada) completo e compacto que admite uma aplicação de recobrimento regular globalmente hiperbólica que não tem geodésicas causais fechadas (a variedade do exemplo de Galloway é geodesicamente incompleta e não admite uma aplicação de recobrimento globalmente hiperbólica). Contudo temos alguns resultados clássicos sobre geodésicas causais fechadas em variedades de Lorentz. A seguir destacaremos alguns destes resultados que também serviram de base para a nossa pesquisa.

Em [49], Tipler considera um espaço-tempo compacto admitindo uma aplicação de recobrimento lorentziana **regular** (como indicou Beem em [9, p. 148]) em que o espaço de recobrimento contém uma hipersuperfície de Cauchy compacta (i.e., globalmente hiperbólico) obteve uma geodésica tipo-tempo fechada no espaço-tempo. Galloway em [24] define o conceito de uma classe livre e estável de t -homotopia, i.e., em uma variedade lorentziana (M, g_1) dizemos que uma classe livre de t -homotopia \mathcal{C} é *estável* se existe uma métrica lorentziana g_2 de M mais larga do que a métrica lorentziana g_1 em que a menor das cotas superiores do comprimento lorentziano, com

respeito a g_2 , das curvas de \mathcal{C} é finita. Em seguida, Galloway adaptando uma versão da prova do teorema de Cartan dada por Spivak, cuja parte geométrica usava métodos locais e portanto mais flexíveis a adaptações para o caso lorentziano, mostra, no teorema 1, que em uma variedade lorentziana compacta existe uma geodésica tipo-tempo fechada maximal em cada classe livre de t -homotopia estável. Como aplicações deste resultado Galloway obtém novamente o teorema de Tipler para geodésicas tipo-tempo fechadas, mencionado acima, e fornece uma versão lorentziana para o clássico teorema de Synge riemanniano. Além disso, Galloway também obtém, em [25], que *qualquer superfície lorentziana (dimensão 2) compacta possui uma geodésica causal (tipo-tempo ou tipo-luz) fechada*.

Em [26], Guediri fornece um exemplo de um espaço-tempo compacto que admite um espaço de recobrimento regular globalmente hiperbólico com hipersuperfícies de Cauchy não-compactas (i.e., o espaço-tempo de Heisenberg \mathbb{R}^3/Γ , forma espacial compacta plana, onde o recobrimento universal é o espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^3), que não possui geodésicas tipo-tempo fechadas. Desta forma vemos que não podemos retirar a hipótese das hipersuperfícies de Cauchy serem compactas no espaço de recobrimento no teorema de Tipler em [49]. Ele ainda responde positivamente a questão em aberto sobre se uma forma espacial compacta plana possui ou não uma geodésica causal fechada. Guediri também define um análogo lorentziano do raio de injetividade riemanniano (raio de injetividade tipo-tempo): considere um espaço-tempo (M, g) , uma curva tipo-tempo fechada γ e x um ponto em M . Seja \mathcal{C}_γ a classe livre de t -homotopia de γ e $\mathcal{C}_{\gamma, x}$ o subconjunto formado por todos os elementos de \mathcal{C}_γ que passam por x . O *raio de injetividade tipo-tempo* $Tinj_\gamma(x)$ em x relativo a γ é

$$Tinj_\gamma(x) = \frac{1}{2} \sup_{\sigma \in \mathcal{C}_{\gamma, x}} L(\sigma).$$

Além disso, o raio de injetividade tipo-tempo $Tinj_\gamma(M, g)$ de M relativo a γ é

$$Tinj_\gamma(M, g) = \sup_{x \in M} Tinj_\gamma(x).$$

Dessa forma, Guediri obteve a existência de uma geodésica tipo-tempo fechada no espaço-tempo substituindo a hipótese de existência de hipersuperfície de Cauchy compacta no espaço de recobrimento, no teorema de Tipler, pela existência de uma classe livre de t -homotopia, \mathcal{C}_γ , determinada por uma transformação de recobrimento central – esta geodésica tipo-tempo fechada é maximal em \mathcal{C}_γ e $Tinj_\gamma(M, g) < \infty$. Além disso, ele conclui que *se o grupo de transformações de recobrimento é abeliano, então este espaço-tempo tem uma geodésica tipo-tempo fechada*.

Guediri em [27] estende o teorema 5.1 (resultado de existência de geodésica tipo-tempo fechada mencionado anteriormente) em [26] para translações de Clifford no espaço-tempo de recobrimento, i.e., *uma isometria φ de (\tilde{M}, \tilde{g}) tal que $d(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) = \text{cte}$*

para todo $\tilde{x} \in \tilde{M}$. Além disso, no teorema 4.1, ele fornece uma caracterização de quando um espaço-tempo compacto plano possui uma geodésica tipo-tempo fechada, i.e., esta condição será satisfeita se, e só se, o grupo fundamental do espaço-tempo possui uma translação tipo-tempo não-trivial (veja a definição na seção 5.4).

Em [29], Guediri responde afirmativamente, embora que para uma classe de espaços-tempo compactos que admitem um espaço de recobrimento globalmente hiperbólico, a um questionamento que Galloway fez na observação 1 em [24, Pág. 384] – i.e., se ao substituir a condição de estabilidade da classe livre de t -homotopia pela exigência do raio de injetividade tipo-tempo ser finito seria suficiente, ainda, para assegurar a existência de uma geodésica tipo-tempo fechada na classe de t -homotopia. A partir deste resultado, assim como Galloway em [24], Guediri apresenta uma versão lorentziana do teorema do Synge riemanniano:

Proposição 1.6 ([29], Teo. 4.1.). *Para um espaço-tempo (M, g) as seguintes afirmações são incompatíveis:*

1. *M é compacta, tem dimensão par e é orientável.*
2. *Para todo plano tipo-tempo \mathcal{P} em M a curvatura seccional $K(\mathcal{P}) < 0$.*
3. *M admite uma aplicação de recobrimento globalmente hiperbólica regular e existe uma classe de t -homotopia livre \mathcal{C} em M tal que $Tinj(\mathcal{C}) < \infty$.*

Guediri finaliza o artigo [29] apresentando alguns resultados de geodésicas tipo-tempo fechadas para espaços-tempo estáticos. Ele prova que o recobrimento universal (que é regular – veja a observação 2.43(2)) de um espaço-tempo estático é globalmente hiperbólico e, conseqüentemente, conclui que um espaço-tempo estático compacto com uma classe livre de t -homotopia de raio de injetividade tipo-tempo finito possui uma curva tipo-tempo fechada de maior comprimento nesta classe, que deve ser necessariamente uma geodésica tipo-tempo fechada.

1.3 ESTRUTURAÇÃO DA TESE

Encerraremos a introdução apresentando a divisão do corpo desta tese.

No capítulo 2 apresentamos definições e resultados básicos da geometria semi-riemanniana que serão fundamentais para o desenvolvimento dos capítulos 3, 4 e 5 (os principais desta tese).

No capítulo 3 começamos apresentando algumas definições e resultados básicos da teoria desenvolvida por Browder e Rheindboldt em [14, 44] sobre levantamento e continuação de caminhos de aplicações abstratas e, em seguida, aplicamos esta teoria de levantamento e continuação de caminhos à aplicação exponencial a fim de obtermos resultados de conexidade geodésica em variedades afins.

No capítulo 4 utilizamos algumas ideias do capítulo 3, adaptadas ao contexto lorentziano, para obtermos resultados de conexidade geodésica, por meio de segmentos de geodésicas causais, em variedades de Lorentz.

No capítulo 5 introduzimos uma noção de homotopia geodésica tipo-tempo e a combinamos com um argumento local de encurtamento/alongamento de comprimento de laços geodésicos tipo-tempo para obtermos uma série de novos resultados de existência de geodésicas tipo-tempo fechadas em variedades de Lorentz.

No último capítulo apresentamos nossas considerações finais juntamente com as perspectivas de trabalhos futuros.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados de alguns temas básicos da geometria semi-riemanniana que serão cruciais para o entendimento e o desenvolvimento dos próximos capítulos desta tese. Não revisaremos esses conceitos em detalhes, já que de fato assumiremos relativa familiaridade do leitor com estes; uma vez que nosso objetivo aqui é principalmente fixar a nomenclatura, noções básicas e notação a serem usadas posteriormente, que podem ser encontradas nas referências [9], [19], [33], [36], [37], [42], [43] e [50].

2.1 VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS: CONCEITOS BÁSICOS

O objetivo desta seção é apresentar alguns resultados básicos, em sua maioria locais, da geometria semi-riemanniana. Após introduzir os conceitos de variedade afim, geodésica, aplicação exponencial e alguns resultados que envolvem estes conceitos tais como o teorema de existência e unicidade de geodésicas inextensíveis e a existência de vizinhanças normais/convexas, abordamos alguns resultados de variedades semi-riemannianas, tais como: a conexão de Levi-Civita, o lema de Gauss e o teorema de Hopf-Rinow em variedades riemannianas. Finalizamos a seção discutindo alguns resultados em variedades de Lorentz referentes à existência de orientação temporal, a permanência de levantamentos de uma curva tipo-tempo via aplicação exponencial em um mesmo cone causal e de segmentos de curvas causais de maior comprimento em uma vizinhança normal.

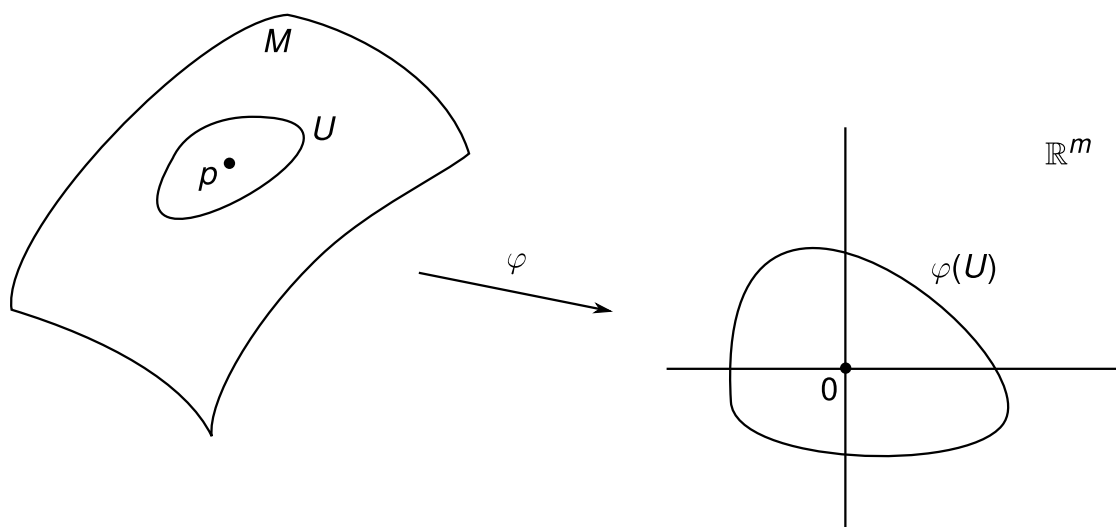
Lembremos que uma **variedade diferenciável** M de dimensão $m < \infty$ é um espaço topológico segundo contável, Hausdorff e localmente euclidiano de dimensão m juntamente com um atlas maximal suave (que para nós sempre significará C^∞ a menos de menção em contrário) \mathcal{A} – veja a figura 1. Assumiremos conhecidos do leitor os principais conceitos e resultados sobre variedades diferenciáveis correspondentes, por exemplo, aos dez primeiros capítulos da referência [36].

O teorema a seguir apresenta uma versão do teorema da função inversa para variedades diferenciáveis:

Teorema 2.1 (Teorema da Função Inversa – [36], Teo. 4.5, Pág. 79). *Sejam M e N variedades diferenciáveis de mesma dimensão e $F : M \rightarrow N$ uma aplicação suave. Se a derivada $dF_p : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ é um isomorfismo, para algum ponto $p \in M$, então existem abertos $U \ni p$ e $V \ni F(p)$ em M e N , respectivamente, tais que a aplicação $F|_U : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo.*

Denotaremos por $C^\infty(M)$ o conjunto formado por todas as funções suaves a valores reais em M e por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto formado por todos os campos vetoriais

Figura 1 – Sistema de coordenadas locais de p em M .



Fonte: Elaborada pelo autor.

suaves de M .

Uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ é uma **conexão (afim)** se satisfaz a seguintes propriedades:

- i. $\nabla_V(X + Y) = \nabla_V X + \nabla_V Y$;
- ii. $\nabla_{fV+gW} X = f\nabla_V X + g\nabla_W X$;
- iii. $\nabla_V(fX) = f\nabla_V X + V(f)X$,

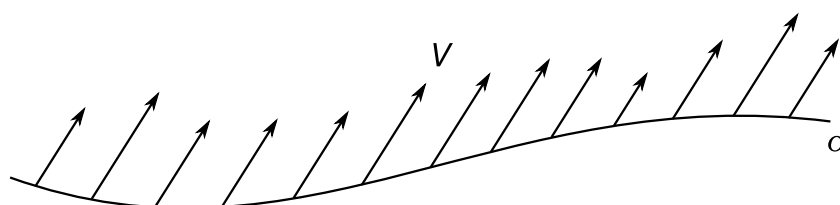
onde $f, g \in C^\infty(M)$ e $V, W, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Além disso, $\nabla_V X$ é chamada de **derivada covariante** de X com respeito a V para a conexão ∇ .

Se considerarmos uma carta $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$ de M podemos escrever localmente em U a conexão ∇ como

$$\nabla_V X = \sum_{k=1}^m \left(V(X^k) + \sum_{i,j=1}^m V^i X^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \forall V, X \in \mathfrak{X}(M),$$

onde $V = \sum_{i=1}^m V^i \partial_i$, $X = \sum_{j=1}^m X^j \partial_j$ e $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \partial_k$ para $i, j = 1, \dots, m$. As funções suaves $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ são chamadas de **símbolos de Christoffel** associados à carta (U, φ) .

Figura 2 – Campo vetorial V ao longo de uma curva $\alpha : I \rightarrow M$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma variedade diferenciável M munida com uma conexão ∇ é chamada de **variedade afim** e é denotada pelo par (M, ∇) . Além disso, para uma curva suave $\alpha : I \rightarrow M$ existe uma única aplicação $D/dt : \mathfrak{X}(\alpha) \rightarrow \mathfrak{X}(\alpha)$, onde $\mathfrak{X}(\alpha)$ é o conjunto formado por todos os campos vetoriais suaves ao longo de α (veja a figura 2), tal que

$$\text{i. } D/dt(V + W) = D/dt(V) + D/dt(W);$$

$$\text{ii. } D/dt(fV) = (df/dt) \cdot V + f \cdot D/dt(V);$$

$$\text{iii. } D/dt(Z \circ \alpha) \Big|_{t=t_0} = \nabla_{\dot{\alpha}(t_0)} Z, \quad t_0 \in I,$$

onde $f \in C^\infty(I)$, $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$ e $Z \in \mathfrak{X}(M)$. A aplicação D/dt é chamada de **derivada covariante induzida** (veja [42, Prop. 18, Pág. 65]).

Diremos que uma curva suave $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ em uma variedade afim (M, ∇) é uma **geodésica** se

$$\frac{D}{dt}(\dot{\gamma}) = 0 \text{ em } I,$$

onde I é um intervalo da reta real. Podemos caracterizar localmente uma geodésica através de um sistema de equações diferenciais de 2ª ordem:

Proposição 2.2 ([42], Cor. 21, Pág. 67). *Sejam $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva suave em uma variedade afim (M, ∇) e $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$ uma carta local de M tal que $\gamma(J) \subset U$, onde J é intervalo em I . Então, a curva $\gamma|_J : J \rightarrow M$ é uma geodésica de M em U se, e só se, as funções coordenadas $x^k \circ \gamma$ satisfazem o sistema de equações diferenciais*

$$\frac{d^2}{dt^2}(x^k \circ \gamma)(t) + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k \circ \gamma(t) \cdot \frac{d}{dt}(x^i \circ \gamma)(t) \cdot \frac{d}{dt}(x^j \circ \gamma)(t) = 0, \quad \forall t \in J,$$

para $k = 1, \dots, m$.

O resultado a seguir garante a existência e unicidade de **geodésicas inextensíveis** ou **maximais** em uma variedade afim dada uma condição inicial:

Proposição 2.3 ([42], Prop. 24, Pág. 68). *Sejam (M, ∇) uma variedade afim e $v \in T_p M$, onde $p \in M$. Então, existe uma única geodésica $\gamma_v : I_v \rightarrow M$ tal que $\dot{\gamma}_v(0) = v$ e para qualquer geodésica $\sigma : J \rightarrow M$ de M com $\dot{\sigma}(0) = v$ temos $J \subset I_v$ e $\sigma = \gamma_v|_J$.*

Se $\gamma : I_v \rightarrow M$ é uma tal geodésica inextensível e $I_v = \mathbb{R}$ então dizemos que a geodésica inextensível γ é **completa**. Além disso, se toda geodésica inextensível é completa dizemos que a variedade afim (M, ∇) é **(geodesicamente) completa**.

A proposição abaixo caracteriza as funções de reparameterização que garantem que geodésicas reparameterizadas continuem a sê-lo:

Proposição 2.4 ([42], Lema 26, Pág. 69). *Sejam (M, ∇) uma variedade afim e $\gamma : I \rightarrow M$ uma geodésica não-constante de M . Uma reparameterização $\gamma \circ h : J \rightarrow M$ de γ*

é uma geodésica se, e somente se, a função reparametrização h é uma função afim não-constante, i.e., $h(t) = at + b$ para $t \in J$ com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$.

Uma curva σ que admite uma função reparametrização f tal que a reparametrização $\sigma \circ f$ de σ é uma geodésica de (M, ∇) é chamada de **pré-geodésica**.

Sejam (M, ∇) uma variedade afim e $p \in M$. Denotamos por \mathcal{D}_p o conjunto formado por todos os elementos v de T_pM tal que a geodésica inextensível γ_v está definida no intervalo $[0,1]$. Dessa forma, definimos a **aplicação exponencial** como

$$\begin{aligned} \exp_p &: \mathcal{D}_p \longrightarrow M \\ v &\longmapsto \exp_p(v) = \gamma_v(1) \end{aligned}$$

Além disso, definimos também a aplicação $E : \mathcal{D} \subset TM \rightarrow M \times M$ dada por $E(v) = (\pi(v), \exp(v))$ para todo $v \in \mathcal{D}$, onde π é a projeção natural de TM sobre M e $\mathcal{D} = \sqcup_{p \in M} \mathcal{D}_p$. Os conjuntos \mathcal{D}_p (estrelado em 0_p) e \mathcal{D} são subconjuntos abertos de, respectivamente, T_pM e TM (veja os detalhes em [42, Cor. 4, Pág. 129]). Temos também que as aplicações \exp_p e E são suaves.

Observação 2.5. Note que se $\gamma_v : I_v \rightarrow M$ é uma geodésica inextensível completa então $\mathbb{R} \cdot v \subset \mathcal{D}_p$. Dessa forma, se (M, ∇) é completa temos que $\mathcal{D} = TM$.

Proposição 2.6 ([42], Prop. 30, Pág. 71). *Para cada ponto p em uma variedade afim (M, ∇) existem vizinhanças \tilde{U} de 0_p em T_pM e U de p em M tal que $\exp_p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ é um difeomorfismo.*

Dizemos que uma vizinhança U de p em M é uma **vizinhança normal** de p se existe uma vizinhança \tilde{U} estrelada em 0_p tal que $\exp_p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ é um difeomorfismo – veja a figura 3. Se uma vizinhança V é uma vizinhança normal de cada um de seus pontos então dizemos que V é uma **vizinhança convexa** – a proposição 5.7 em [42] garante a existência de uma base de vizinhanças convexas em cada ponto de M .

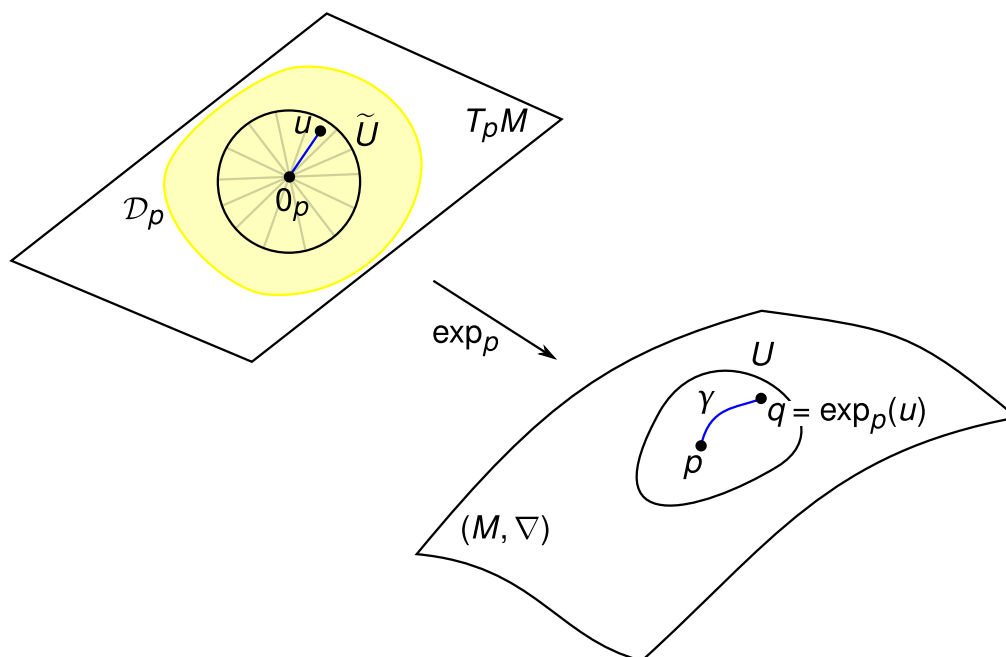
Proposição 2.7 ([42], Prop. 31, Pág. 72). *Se U é uma vizinhança normal de p , então cada ponto q em U é conectado a p por um único segmento de geodésica $\gamma : [0,1] \rightarrow U$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.*

Observação 2.8. Segue-se imediatamente da proposição anterior que dois pontos quaisquer p e q em uma vizinhança convexa V são conectados por um único segmento de geodésica em V .

Proposição 2.9 ([42], Lema 6, Pág. 129). *Se a aplicação exponencial \exp_p é não-singular em $v \in T_pM$, então a aplicação E também é não-singular em v .*

Observação 2.10. As proposições 2.6 e 2.9 mostram que a aplicação E é não-singular em 0_p e, conseqüentemente, pelo teorema 2.1, existem vizinhanças de 0_p em TM e

Figura 3 – Segmento de geodésica γ de p a q em uma vizinhança normal U de p em (M, ∇) .



Fonte: Elaborada pelo autor.

de (p,p) em $M \times M$ tais que a aplicação E é um difeomorfismo quando restrita a estas vizinhanças.

O lema a seguir caracteriza quando uma geodésica é extensível como geodésica:

Lema 2.11 ([42], Lema 8, Pág. 130). *Uma geodésica $\gamma : [0,b) \rightarrow M$ de uma variedade afim é extensível como geodésica se, e só se, γ é extensível (continuamente) para b .*

Seja V uma vizinhança convexa de (M, ∇) . Denote por \vec{pq} a velocidade inicial da geodésica $\sigma : [0,1] \rightarrow V$ que conecta p a q , onde p e q são pontos quaisquer em V .

Lema 2.12 ([42], Lema 9, Pág. 131). *Se V é uma vizinhança convexa de (M, ∇) , então a aplicação*

$$\begin{aligned} \Delta : V \times V &\longrightarrow TM \\ (p,q) &\longmapsto \Delta(p,q) = \vec{pq} \end{aligned}$$

é suave.

Sejam M uma variedade diferenciável e g um campo tensorial 2-covariante simétrico não-degenerado e com índice constante. Chamaremos o par (M, g) de **variedade semi-riemanniana** e g de **tensor métrico** ou, simplesmente, de **métrica**. Quando não houver possibilidade de confusão denotaremos a variedade semi-riemanniana (M, g) simplesmente por M . Por outro lado, frequentemente usaremos também a notação $\langle v,w \rangle := g_p(v,w)$ para $v,w \in T_p M$ e o **índice** de M é o índice (suposto constante) de

g . Se o índice de M é 0 dizemos que (M, g) é uma **variedade riemanniana** e, conseqüentemente, g é um produto interno para cada ponto de M . Já para o caso em que o índice é 1 e $\dim M \geq 2$ dizemos que (M, g) é uma **variedade lorentziana**.

Exemplo 2.13. Sejam $M = \mathbb{R}^m$ e $u = \sum_{i=1}^m u^i \partial_i|_p$ e $v = \sum_{j=1}^m v^j \partial_j|_p$ vetores em $T_p M$, onde $p \in M$. Considere as seguintes métricas:

1. $g_p(u, v) := \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^m u^i \cdot v^i$. A variedade semi-riemanniana $(M, g) = \mathbb{R}^m$ é uma variedade riemanniana que recebe o nome de **espaço euclidiano m -dimensional**.
- 2 $g_p(u, v) = \sum_{i=1}^{m-\nu} u^i \cdot v^i - \sum_{j=m-\nu+1}^m u^j \cdot v^j$ com $0 \leq \nu \leq m$. Chamamos a variedade semi-riemanniana $(M, g) = \mathbb{R}_\nu^m$ de **espaço semi-euclidiano** de dimensão m e índice ν . em particular, para $m \geq 2$, \mathbb{R}_1^m é chamado de **espaço de Minkowski** de dimensão m (que é uma variedade lorentziana).

Os vetores tangentes de uma variedade semi-riemanniana (M, g) são classificados da seguinte forma:

Definição 2.14 (Caráter causal de um vetor). Seja $v \in TM$. Então, v é um vetor

- i. **tipo-tempo**, se $\langle v, v \rangle < 0$;
- ii. **tipo-luz**, se $\langle v, v \rangle = 0$ e $v \neq 0$;
- iii. **tipo-espaço**, se $\langle v, v \rangle > 0$ ou $v = 0$.

Observação 2.15. Dizemos que um vetor é **causal** se ele é tipo-tempo ou tipo-luz.

Sejam S uma subvariedade (mergulhada) da variedade semi-riemanniana (M, g) e $i : S \rightarrow M$ a aplicação inclusão. Dizemos que $(S, i^*(g))$ é uma **subvariedade semi-riemanniana** de (M, g) se o *pullback* $i^*(g)$ é uma métrica para S .

Sejam (M_1, g_1) e (M_2, g_2) variedades semi-riemannianas e $f : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação suave.

- i. Se a aplicação f é um difeomorfismo e $g_2(df(u), df(v)) = g_1(u, v)$, para quaisquer $u, v \in TM_1$, então dizemos que a aplicação f é uma **isometria**;
- ii. Se a derivada $df_p : T_p M_1 \rightarrow T_{f(p)} M_2$ é um isomorfismo linear para cada $p \in M_1$, então dizemos que a aplicação f é uma **isometria local**.

A seguir enunciaremos o teorema fundamental da geometria semi-riemanniana:

Teorema 2.16 (Conexão de Levi-Civita – [42], Teo. 11, Pág. 61). *Seja (M, g) uma variedade semi-riemanniana. Existe uma única conexão afim ∇ tal que*

- i. *é simétrica, i.e., $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$; e*
- ii. *compatível com a métrica g , i.e., $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$.*

*Essa conexão é chamada de **conexão de Levi-Civita (associada à métrica g)**.*

Daqui em diante vamos considerar as variedades semi-riemannianas munidas com a conexão de Levi-Civita, de modo que, em particular, as geodésicas, vizinhanças normais, aplicação exponencial, etc. de uma tal variedade (M, g) referem-se às tomadas com respeito à conexão de Levi-Civita de g .

Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma geodésica de (M, g) . Pela compatibilidade da conexão com a métrica temos que

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0, \quad \forall t \in I.$$

Dessa forma, o caráter causal dos vetores tangentes à geodésica γ é o mesmo para todo t em I . Assim, diremos que uma geodésica é **tipo-tempo** se os seus vetores tangentes são tipo-tempo (idem para **tipo-luz**, **tipo-espaço** e **causal**).

Observação 2.17. Mais geralmente, no caso de curvas suaves, dizemos que uma curva $c : I \rightarrow M$ é **tipo-tempo** se $\dot{c}(t)$ é tipo-tempo para todo $t \in I$ (idem para **tipo-luz**, **tipo-espaço** e **causal**).

Sejam (M^m, g) uma variedade semi-riemanniana e $p \in M$. A proposição 42 em [42, Pág. 23] mostra que existe uma única forma de considerar $T_p M$ uma variedade diferenciável de dimensão m tal que os isomorfismos de $T_p M$ em \mathbb{R}^m são cartas (globais). Denotamos por v_u , com $u, v \in T_p M$, o vetor velocidade inicial da curva $c(t) = u + tv$, $t \in \mathbb{R}$, que passa por u (na verdade c é a reta em $T_p M$ que passa por u e tem direção v). Dessa forma, temos que

$$T_u(T_p M) = \{v_u : v \in T_p M\}.$$

Obtemos assim o isomorfismo canônico

$$\begin{aligned} \varpi_u : T_p M &\longrightarrow T_u(T_p M) \\ v &\longmapsto \varpi_u v := v_u \end{aligned}$$

Definimos o seguinte produto escalar em $T_u(T_p M)$ associado a g_p :

$$\begin{aligned} \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle : T_u(T_p M) \times T_u(T_p M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle \langle x, y \rangle \rangle := g_p(\varpi_u^{-1} x, \varpi_u^{-1} y) \end{aligned}$$

O lema a seguir mostra que a aplicação exponencial é uma “isometria radial”:

Lema 2.18 (Lema de Gauss – [9], Teo. 10.18, Pág. 338). *Sejam (M, g) uma variedade semi-riemanniana e $p \in M$. Então, para $u_x, v_x \in T_x(T_p M)$ tal que $x = k \cdot u \in \mathcal{D}_p$, onde $k \in \mathbb{R}$, temos*

$$\langle \langle u_x, v_x \rangle \rangle = g_{\exp_p x} \left(d(\exp_p)_x u_x, d(\exp_p)_x v_x \right).$$

Seja (M^m, g) uma variedade semi-riemanniana munida com a conexão de Levi-Civita ∇ . O **tensor curvatura de Riemann** ou, simplesmente, **tensor curvatura** de M é a aplicação $R : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(Z, X, Y) := R_{XY}Z := \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z,$$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Note que R é uma aplicação $C^\infty(M)$ -multilinear. Dessa forma, definimos o chamado **operador curvatura**, i.e., a aplicação

$$\begin{aligned} R_{xy} &: T_p M \longrightarrow T_p M \\ z &\longmapsto R_{xy} z \end{aligned}$$

onde $x, y \in T_p M$. Além disso, a partir do tensor curvatura R é por vezes conveniente definir um campo tensorial de tipo (1,3) sobre M (i.e., um campo tensorial 1-contravariante e 3-covariante)

$$\begin{aligned} \bar{R} &: \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^3 \longrightarrow C^\infty(M) \\ (\omega, Z, X, Y) &\longmapsto \bar{R}(\omega, Z, X, Y) := \omega(R(Z, X, Y)) = \omega(R_{XY}Z) \end{aligned}$$

Esse novo tensor (1,3) também é às vezes chamado tensor curvatura (de Riemann) pois veremos que a informação geométrica que fornece é idêntica à de R .

Observação 2.19. Os tensores R e \bar{R} dão “a mesma informação algébrica” no seguinte sentido preciso. Sejam $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$ um sistema de coordenadas de M e $R_{jkl} = \sum_{r=1}^m R_{jkl}^r \partial_r$. Temos que,

$$\begin{aligned} \bar{R}_{jkl}^i &= \bar{R}(dx^i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) \\ &= dx^i(R_{jkl}) = dx^i\left(\sum_{r=1}^m R_{jkl}^r \partial_r\right) \\ &= \sum_{r=1}^m R_{jkl}^r dx^i(\partial_r) = R_{jkl}^i. \end{aligned}$$

Considere a 1-forma $V^*(X) = g(V, X)$ para $X \in \mathfrak{X}(M)$, onde $V \in \mathfrak{X}(M)$. Como a aplicação $V \mapsto V^*$ é um isomorfismo $C^\infty(M)$ -linear de $\mathfrak{X}(M)$ em $\mathfrak{X}^*(M)$ (veja prop. 3.10 em [42]), então definimos o campo tensorial 4-covariante

$$\tilde{R}(W, Z, X, Y) := \bar{R}(W^*, Z, X, Y) = g(W, R_{XY}Z),$$

para todo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)^1$. Dessa forma, se considerarmos um sistema de coordenadas $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$ de M temos

$$\tilde{R}_{ijkl} = \left(\downarrow_1^1 \bar{R}\right)_{ijkl} = \sum_{r=1}^m g_{ir} \bar{R}_{jkl}^r, \quad (1)$$

para $i, j, k, l = 1, \dots, m$. Uma vez que as componentes de R e \bar{R} são iguais, e as de \tilde{R} obtêm-se facilmente via (1), no que segue frequentemente omitimos os símbolos ‘ \sim ’ e ‘ $-$ ’ sobre as componentes desses tensores, considerando-os efetivamente como (combinações de) componentes de R .

¹ Os três campos tensoriais R , \bar{R} e \tilde{R} serão chamados de tensor curvatura e denotados simplesmente por R , quando não houver possibilidade de confusão.

Observação 2.20. Uma variedade semi-riemanniana é dita ser **plana** (ou **flat**) se $R = 0$.

O tensor curvatura tem as seguintes simetrias:

Proposição 2.21 ([42], Prop. 36, Pág. 75). *Seja $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$ um sistema de coordenadas de M . Então, em termos das componentes de R , temos as seguintes identidades:*

- i. (Antisimetria nos índices k e l) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$;*
- ii. (Antisimetria nos índices i e j) $R_{ijkl} = -R_{jikl}$;*
- iii. (Primeira Identidade de Bianchi) $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$;*
- iv. (Simetria dos pares ij e kl) $R_{ijkl} = R_{klij}$.*

Um subespaço vetorial bidimensional de T_pM é chamado de **plano tangente** de M em p (evidentemente os conceitos de plano e espaço tangente coincidem em dimensão 2). Considere a aplicação $Q : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$Q(u, v) = g_p(u, u) \cdot g_p(v, v) - [g_p(u, v)]^2, \quad u, v \in T_pM.$$

Um plano tangente $\Pi = \text{span}\{u, v\}$ de T_pM é não-degenerado se, e só se, $Q(u, v) \neq 0$. Além disso, se Π é um **plano tipo-tempo** (resp. **tipo-espaço**), i.e., $g_p|_{\Pi}$ tem índice 1 (resp. 0), então $Q(u, v) < 0$ (resp. $Q(u, v) > 0$) – veja os detalhes em [42].

Definição 2.22. Seja $\Pi = \text{span}\{u, v\}$ um plano tangente não-degenerado de T_pM . Chamamos de **curvatura seccional** de Π o número real

$$K(\Pi) = -\frac{R(u, v, u, v)}{Q(u, v)}.$$

Observação 2.23.

1. A curvatura seccional $K(\Pi)$ não depende da escolha da base $\{u, v\}$ de Π (veja o lema 3.39 em [42]).
2. M é flat se, e só se, $K = 0$, isto é, a curvatura seccional de todo plano tangente não-degenerado é nula (veja o proposição 3.41 em [42]).

Definição 2.24. O **tensor curvatura de Ricci** (ou, simplesmente, **tensor de Ricci**) Ric é o campo tensorial 2-covariante dado pela contração C_3^1 do tensor curvatura \bar{R} , i.e.,

$$\text{Ric} = C_3^1 \bar{R}.$$

Se considerarmos um sistema de coordenadas $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$ de M , temos que

$$\begin{aligned} R_{jk} &:= (\text{Ric})_{jk} = \sum_{r=1}^m \bar{R}_{jkr}^r \left(= \sum_{r=1}^m R_{jkr}^r \right) \\ &= \sum_{l,r=1}^m \left(\sum_{i=1}^m g^{il} \cdot g_{ir} \bar{R}_{jkl}^r \right) = \sum_{i,l=1}^m g^{il} \left(\sum_{r=1}^m g_{ir} \bar{R}_{jkl}^r \right) \\ &\stackrel{(1)}{=} \sum_{i,l=1}^m g^{il} \tilde{R}_{ijkl} = (C_{14} \tilde{R})_{jk}. \end{aligned}$$

Dessa forma, $\text{Ric} = C_3^1 \bar{R} = C_{14} \tilde{R}^2$. Além disso, pela proposição 2.21, temos

$$R_{jk} = \sum_{i,l=1}^m g^{il} \tilde{R}_{ijkl} = \sum_{i,l=1}^m g^{il} \tilde{R}_{klji} = \sum_{i,l=1}^m g^{il} \tilde{R}_{lkji} = \sum_{i,l=1}^m g^{il} \tilde{R}_{ikjl} = R_{kj}$$

e, consequentemente, Ric é um campo tensorial simétrico.

Vejamos uma relação algébrica para o tensor de Ricci através da curvatura seccional. Seja u um vetor unitário em $T_p M$ (i.e., $|u|_p := \sqrt{|g_p(u,u)|} = 1$). Agora, considere uma base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^m$ de $T_p M$, i.e., $|g_p(e_i, e_j)| = \delta_{ij}$ para $i = 1, \dots, m$, onde $e_1 = u$. Seja $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$ um sistema de coordenadas normal de p em M tal que $\partial_j|_p = e_j$ para todo $i = 1, \dots, m$ (veja [42, Pág. 72]). Dessa forma,

$$\begin{aligned} \text{Ric}_p(u,u) &= \left(\sum_{j,k=1}^m R_{jk} dx^j \otimes dx^k \right) \Big|_p(u,u) \\ &= \sum_{j,k=1}^m \left(\sum_{i,l=1}^m g_p^{il} \tilde{R}_p(e_i, e_j, e_k, e_l) \right) dx^j|_p(u) dx^k|_p(u) \\ &= \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \tilde{R}_p(e_i, u, u, e_i) = \sum_{i=2}^m \frac{\tilde{R}_p(u, e_i, u, e_i)}{\varepsilon_i} \\ &= g_p(u,u) \sum_{i=2}^m K(\Pi_i), \end{aligned} \tag{2}$$

onde $\varepsilon_i = g_p(e_i, e_i)$ e $\Pi_i = \text{span}\{u, e_i\}$. Ou seja, a menos de sinal, $\text{Ric}_p(u,u)$ é a soma das curvaturas seccionais de $m-1$ planos não-degenerados ortogonais que contêm u .

Observação 2.25. No caso em que (M, g) é uma variedade riemanniana temos uma pequena simplificação na expressão (2), i.e.,

$$\text{Ric}_p(u,u) = \sum_{i=2}^m K(\Pi_i). \tag{3}$$

² Denotamos por $C_{14} \tilde{R}$ a contração da métrica com respeito aos índices covariantes 1 e 4 do tensor curvatura \tilde{R} – para mais detalhes consulte a seção intitulada de “Type-Changing and Metric Contraction” do capítulo 3 em [42].

Já se (M, g) é uma variedade lorentziana e u é um vetor tipo-tempo, então

$$\text{Ric}_p(u, u) = - \sum_{i=2}^m K(\Pi_i). \quad (4)$$

Definição 2.26. A **curvatura escalar** de M é a função suave $S : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$S = C_{12} \text{Ric}.$$

Se considerarmos uma vizinhança coordenada de um ponto p de M temos

$$S(p) = (C_{12} \text{Ric})(p) = \sum_{j,k=1}^m g_p^{jk} R_{jk}(p). \quad (5)$$

Também podemos dá uma relação algébrica à curvatura escalar através da curvatura seccional. Para isso, considere uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_m\}$ de $T_p M$ e um sistema de coordenadas normal $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$ de p tal que $\partial_i|_p = e_i$, para $i = 1, \dots, m$. Assim,

$$S(p) \stackrel{(5)}{=} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i R_{ij}(p) \stackrel{(2)}{=} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \left(\varepsilon_i \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m K(\Pi_{ij}) \right) = \sum_{i \neq j} K(\Pi_{ij}) = 2 \cdot \sum_{i < j} K(\Pi_{ij}),$$

onde $\Pi_{ij} = \text{span}\{e_i, e_j\}$. Em outras palavras, a curvatura escalar em um ponto p de M é o dobro da soma de todas as curvaturas seccionais dos planos não-degenerados (distintos) gerados pelos elementos de uma base ortonormal de $T_p M$.

Seja $c : [a, b] \rightarrow M$ um segmento de curva em M . Dizemos que c é um **segmento de curva suave por partes**, se existe uma partição $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_{k+1}\}$ do intervalo $[a, b]$ tal que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = b$ e $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$ é um segmento suave³, para $i = 0, \dots, k$. Além disso, se c está definida em um intervalo aberto I , dizemos que c é uma **curva suave por partes**, se para todo $a, b \in I$ com $a < b$, $c|_{[a, b]}$ é um segmento de curva suave por partes.

A seguir definiremos o comprimento de um segmento de curva em uma variedade semi-riemanniana:

Definição 2.27. Seja $c : [a, b] \rightarrow M$ um segmento de curva suave por partes em uma variedade semi-riemanniana (M, g) . O **comprimento** de c é

$$L(c) = \int_a^b |\dot{c}(t)|_g dt.$$

Observação 2.28.

³ Um segmento de curva é suave se existe uma extensão, para um intervalo aberto, suave deste segmento.

1. Se h é uma função reparametrização para a curva c tal que ou $\dot{h} < 0$ ou $\dot{h} > 0$ (a função h é monótona), então $L(c) = L(c \circ h)$ – a prova da proposição 13.25 em [36] pode ser facilmente adaptada para o caso semi-riemanniano.
2. Se c é uma **curva regular** (ou seja, $\dot{c}(t) \neq 0$, para todo $t \in [a, b]$) tal que $|\dot{c}(t)| > 0$, $\forall t \in [a, b]$, então podemos definir uma **função comprimento de arco** de c

$$s(t) := \int_a^t |\dot{c}(r)| dr, \quad t \in [a, b].$$

Vide observação anterior, a função s é estritamente crescente ($s : [a, b] \rightarrow s([a, b])$ é uma bijeção). Dizemos que a curva $\alpha := c \circ s^{-1} : [0, \ell] \rightarrow M$ é uma **reparametrização pelo comprimento de arco** da curva c , onde $\ell = L(c)$. Observe que, $|\dot{\alpha}| = 1$.

Assumiremos sem comentários no que segue o fato bem conhecido na geometria riemanniana que toda variedade diferenciável admite uma métrica riemanniana (veja [36, Prop. 13.3, Pág. 329]).

Sejam (M, g) uma variedade riemanniana conexa e $\Omega(p, q)$ o conjunto formado por todos os segmentos de curvas suaves por partes de p a q , onde $p, q \in M$ ⁴. Definimos a **distância riemanniana** de p a q em (M, g) como

$$d(p, q) := \inf \{L(c) : c \in \Omega(p, q)\}.$$

Temos que a variedade riemanniana M munida com a distância riemanniana d é um espaço métrico, ou seja, a aplicação $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades:

- i. (**positiva-definida**) $d(p, q) \geq 0$, para todo $p, q \in M$, e a igualdade vale se, e só se, $p = q$;
- ii. (**simétrica**) $d(p, q) = d(q, p)$, para todo $p, q \in M$; e
- iii. (**desigualdade triangular**) $d(p, r) + d(r, q) \geq d(p, q)$, para todo $p, q, r \in M$.

Considere $\varepsilon > 0$. Chamaremos de **ε -bola centrada em p** o subconjunto de M

$$B_\varepsilon(p) := \{q \in M : d(p, q) < \varepsilon\}.$$

A coleção de ε -bolas forma uma base para uma topologia em M , que chamamos de **topologia métrica induzida por d** . Um fato importante é que a topologia métrica induzida por d em M coincide com a topologia da variedade diferenciável M – os detalhes deste parágrafo podem ser checados através das proposições 2.5 e 2.6 em [19].

⁴ Observe que o conjunto $\Omega(p, q)$ não é vazio. De fato, como M é conexa existe um segmento de curva contínua de p a q (que, é claro, possui imagem compacta em M). Tome um número finito de vizinhanças coordenadas cobrindo este segmento de curva e em seguida escolha um segmento de curva suave por partes de p a q tal que cada subsegmento está inteiramente contido em uma dessas vizinhanças coordenadas.

Observação 2.29. Sejam p e q pontos de M . Se existe um segmento de curva $c \in \Omega(p, q)$ tal que $d(p, q) = L(c)$, dizemos que c é um **segmento de curva minimal** (ou **minimizante**) que liga os pontos p e q . Na verdade c é uma reparametrização monótona de um segmento de geodésica de p a q (veja [42, Cor. 19, Pág. 137]).

O teorema a seguir é um resultado global de M (i.e., que depende do comportamento da variedade como um todo) bem conhecido:

Teorema 2.30 (Teorema de Hopf-Rinow – [19], Teo. 2.8, Pág. 162). *Sejam (M, g) uma variedade riemanniana conexa e p um ponto de M . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i. (M, d) é um espaço métrico completo, onde d é a distância riemanniana induzida pela métrica g .*
- ii. $\mathcal{D}_p = T_p M$, onde \mathcal{D}_p é o domínio maximal da aplicação exponencial em p .*
- iii. Todo subconjunto limitado e fechado de M é compacto.*
- iv. (M, g) é geodesicamente completo.*

Além disso, as afirmações acima implicam que para todo ponto q de M existe um segmento de geodésica minimal que conecta p a q .

O problema da *conexidade geodésica* (veja os capítulos 3 e 4) em uma *variedade riemanniana conexa e completa* (M, g) é resolvido de forma *positiva* através do *teorema de Hopf-Rinow* (veja observação 2.5), i.e., dados dois pontos quaisquer p e q de M existe um segmento de geodésica γ que conecta os pontos p e q . Além disso, γ pode ser escolhida como um segmento de geodésica minimizante, ou seja,

$$d(p, q) = L(\gamma).$$

Um corolário importante do teorema de Hopf-Rinow é:

Corolário 2.31. *Uma variedade riemanniana conexa e compacta é completa.*

Observação 2.32. Em variedades semi-riemannianas compacidade não implica necessariamente em completude geodésica – veja o exemplo em [42, Ex. 7.16, Pág. 193] do toro de Clifton-Pohl.

O próximo resultado diz respeito à existência de métricas riemannianas completas:

Teorema 2.33. *Toda variedade diferenciável conexa M admite uma métrica riemanniana completa.*

Em [37, Prop. 8, Pág. 284] esse resultado é obtido induzindo uma métrica riemanniana completa para M através do pullback da métrica do espaço euclidiano de

dimensão $2 \dim M + 1$ por um mergulho próprio de M em $\mathbb{R}^{2 \dim M + 1}$, dado no teorema de Whitney (i.e., toda variedade diferenciável N^n admite um mergulho próprio em \mathbb{R}^{2n+1} – veja [37, Cor., Pág. 284] ou [36, Teo. 6.15, Pág. 134]). Já em [41, Teo. 1, Pág. 889] os autores provam que para uma métrica riemanniana g de M existe uma métrica riemanniana completa que é conforme a g para M (lembre-se que toda variedade diferenciável tem uma métrica riemanniana).

Sejam (M, g) uma variedade lorentziana e $p \in M$. Considere \mathcal{T}_p o conjunto formado por todos os vetores tipo-tempo de $T_p M$. Seja $u \in \mathcal{T}_p$. Chamamos de **cone temporal de $T_p M$ que contém u** o subconjunto de \mathcal{T}_p

$$\tau_p(u) := \{v \in \mathcal{T}_p : g_p(u, v) < 0\}.$$

Dessa forma,

$$\mathcal{T}_p = \tau_p(u) \overset{\circ}{\cup} \tau_p(-u), \quad (6)$$

pois os vetores de $u^\perp : \{v \in T_p M : g_p(u, v) = 0\}$ são tipo-espaço (veja [42, Lema 26, Pág. 141]). Note que, $\tau_p(-u) = -\tau_p(u)$. Temos que dois vetores v e w de \mathcal{T}_p estão em um mesmo cone temporal se, e só se, $g_p(v, w) < 0$ (veja [42, Lema 29, Pág. 143]).

Observação 2.34.

1. Observe que, $v \in \tau_p(u) \Leftrightarrow u \in \tau_p(v) \Leftrightarrow \tau_p(u) = \tau_p(v)$. Assim, a decomposição de \mathcal{T}_p em (6) é única e, conseqüentemente, podemos escrever

$$\mathcal{T}_p = \tau_p \overset{\circ}{\cup} (-\tau_p),$$

onde $\pm \tau_p = \tau_p(\pm v)$, para qualquer v em $\tau_p(u)$.

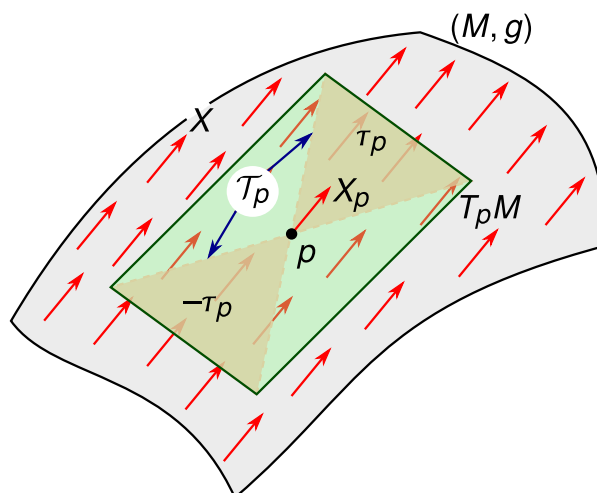
2. $\tau_p(u)$ é convexo, i.e., $av + bw \in \tau_p(u)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ e $v, w \in \tau_p(u)$.
3. Denotaremos por $\overline{\tau_p}(u) := \overline{\tau_p(u)} \setminus \{0_p\}$ o **cone causal** de $T_p M$ que contém u (se $v \in \overline{\tau_p}(u)$ então v é um vetor causal tal que $g_p(u, v) < 0$).

Sejam $M^T := \cup_{p \in M} \{\tau_p, -\tau_p\}$ e uma aplicação $T : M \rightarrow M^T$ que associa cada ponto p de M a um cone temporal de $T_p M$. Se para cada $p \in M$ existir um campo vetorial suave $X : U \subset M \rightarrow TM$ tal que U é uma vizinhança de p e $X_q \in T(q)$, para todo $q \in U$, então dizemos que T é uma **orientação temporal** para M (denotaremos a orientação temporal por τ^+ ⁵). Se uma variedade lorentziana (M, g) admite uma orientação temporal dizemos que (M, g) é **temporalmente orientável** – veja a figura 4.

O resultado a seguir caracteriza quando uma variedade lorentziana admite uma orientação temporal:

Proposição 2.35 ([42], Lema 32, Pág. 145). *Uma variedade lorentziana (M, g) é temporalmente orientável se, e só se, existe um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tipo-tempo, i.e., $X_p \in \mathcal{T}_p$, para todo $p \in M$.*

Figura 4 – Orientação temporal τ^+ de (M, g) em p , i.e, $\tau^+(p) = \tau_p$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dizemos que uma curva suave por partes $c : I \rightarrow M$ em uma variedade lorentziana (M, g) é **tipo-tempo** (resp. **causal**), se $\dot{c}(t)$ é tipo-tempo (resp. causal) para todo $t \in I$ e os vetores $\dot{c}(t_j^-)$ e $\dot{c}(t_j^+)$ estão no mesmo cone temporal (resp. causal), onde estes vetores são, respectivamente, os vetores velocidade final e inicial dos segmentos, respectivamente, $c|_{[t_{j-1}, t_j]}$ e $c|_{[t_j, t_{j+1}]}$. Isto é, o caráter causal da curva é o mesmo em todo o domínio e os vetores velocidade nas quebras estão no mesmo cone temporal/causal.

O lema a seguir será fundamental para garantirmos a existência de um segmento geodésico tipo-tempo conectando dois pontos em uma variedade lorentziana no capítulo 4:

Lema 2.36 ([42], Lema 33, Pág. 146). *Sejam (M, g) uma variedade lorentziana e $p \in M$. Se existe uma curva suave por partes $c : [0, b] \rightarrow \mathcal{D}_p \subset T_p M$ que parte de 0_p tal que $\exp_p \circ c : [0, b] \rightarrow M$ é tipo-tempo (resp. causal), então a curva c permanece no mesmo cone temporal (resp. causal) de $T_p M$.*

A proposição a seguir nos diz que em uma vizinhança normal de um ponto p em uma variedade lorentziana (M, g) , os segmentos de geodésicas radiais tipo-tempo que partem de p são, nesta vizinhança, os únicos segmentos de curvas tipo-tempo maximais:

Proposição 2.37 ([42], Prop. 34, Pág. 147). *Sejam (M, g) uma variedade lorentziana e U uma vizinhança normal de $p \in M$. Se existe um segmento de curva suave por partes tipo-tempo de p a q em U , então, a menos de reparametrizações, o segmento de geodésica radial tipo-tempo que conecta p a q é o único segmento de curva tipo-tempo, em U , de maior comprimento que liga p a q .*

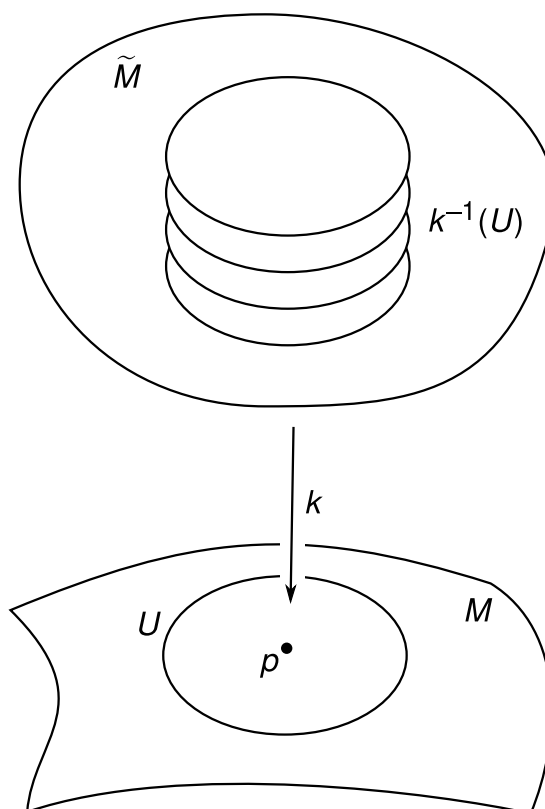
⁵ Esta notação será melhor entendida após a leitura da última seção deste capítulo.

2.2 APLICAÇÕES DE RECOBRIMENTO SEMI-RIEMANNIANAS E OS TEOREMAS DE HOPF E HADAMARD

Iniciamos esta seção abordando alguns resultados das aplicações de recobrimento semi-riemannianas. Posteriormente discutimos alguns resultados envolvendo os campos de Jacobi e Killing e as formas espaciais (teorema de Hopf). Encerramos a seção apresentando o teorema de Hadamard.

Sejam M e \tilde{M} variedades diferenciáveis e $k : \tilde{M} \rightarrow M$ uma aplicação suave sobrejetora. Dizemos que k é uma **aplicação de recobrimento suave** se para cada ponto p de M existe uma vizinhança conexa U deste ponto em M tal que cada componente de $k^{-1}(U)$ é difeomórfica a U através da aplicação k (dizemos que U é **coberta uniformemente por k**).

Figura 5 – Aplicação de recobrimento $k : \tilde{M} \rightarrow M$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em uma aplicação de recobrimento $k : \tilde{M} \rightarrow M$, onde M é conexa, temos que $\text{card } k^{-1}(\{p\}) = \text{cte}$ (um número inteiro positivo ou ∞) para todo $p \in M$, i.e., a cardinalidade das fibras $k^{-1}(\{p\})$ é a mesma para todos os pontos p de M – veja [42, Lema 8, Pág. 443]. O número de elementos de uma fibra é chamado de **multiplicidade** da aplicação de recobrimento k .

Considere $k : \tilde{M} \rightarrow M$ uma aplicação de recobrimento e $\varphi : P \rightarrow M$ uma aplicação. Chamamos uma aplicação $\tilde{\varphi} : P \rightarrow \tilde{M}$ de **levantamento de φ através**

de k se $k \circ \tilde{\varphi} = \varphi$ em P . O resultado a seguir garante a existência e unicidade de levantamento de uma curva:

Lema 2.38 ([42], Lema 9, Pág. 443). *Sejam $k : \tilde{M} \rightarrow M$ uma aplicação de recobrimento, $c : I \rightarrow M$ uma curva contínua (resp. suave), onde $0 \in I$, e $q \in \tilde{M}$ tal que $c(0) = k(q)$. Então, existe um único levantamento $\tilde{c} : I \rightarrow \tilde{M}$ contínuo (resp. suave) de c através de k tal que $\tilde{c}(0) = q$.*

O próximo resultado é semelhante ao lema anterior, porém trata de uma aplicação e não de uma curva:

Proposição 2.39 ([42], Prop. 11, Pág. 444). *Sejam $k : \tilde{M} \rightarrow M$ uma aplicação de recobrimento e $\varphi : P \rightarrow M$ uma aplicação suave. Considere $p \in P$ e $q \in \tilde{M}$ tal que $\varphi(p) = k(q)$. Temos que:*

- i. se P é conexa, então existe, no máximo, um levantamento $\tilde{\varphi}$ de φ através de k tal que $\tilde{\varphi}(p) = q$.*
- ii. se P é simplesmente conexa existe um levantamento como no item i.*

Temos que toda variedade diferenciável conexa possui um recobrimento simplesmente conexo⁶ ([42, Teo. 12, Pág. 444]). Da proposição 2.39 decorre que para duas aplicações de recobrimento simplesmente conexas $k_1 : M_1 \rightarrow M$ e $k_2 : M_2 \rightarrow M$, existe um único difeomorfismo $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ tal que $k_2 \circ \psi = k_1$. Nesse sentido dizemos que k_1 e k_2 são equivalentes. Dessa forma, podemos falar “o” recobrimento simplesmente conexo (ou o **recobrimento universal**) de M .

Dizemos que uma aplicação de recobrimento $k : \tilde{M} \rightarrow M$ é **trivial**, se cada componente conexa de M é coberta uniformemente por k . Dessa forma, se M é conexa então cada componente conexa de \tilde{M} é difeomorfa M através de k .

Proposição 2.40 ([42], Cor. 14, Pág. 445). *Todo recobrimento de uma variedade diferenciável simplesmente conexa é trivial.*

Definição 2.41. Uma **transformação de recobrimento** de uma aplicação de recobrimento $k : \tilde{M} \rightarrow M$ é um difeomorfismo $\varphi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ tal que $k \circ \varphi = k$.

Observação 2.42. Note que uma transformação de recobrimento simplesmente reorganiza os elementos em cada fibra de k .

O conjunto $\mathcal{D}(k)$ de todas as transformações de recobrimento da aplicação de recobrimento k forma um grupo quando munido com a operação de composição de

⁶ Adotamos aqui o já consagrado abuso de linguagem no qual propriedades topológicas e de variedades diferenciáveis atribuídas à aplicação de recobrimento $k : \tilde{M} \rightarrow M$ referem-se, na verdade, ao espaço de recobrimento \tilde{M} .

funções que é obviamente um subgrupo do grupo $\text{Diff}(\tilde{M})$ de todos os difeomorfismos de \tilde{M} .

Observe que, devido a proposição 2.39, se para uma aplicação de recobrimento conexa $k : \tilde{M} \rightarrow M$ temos que existem $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(k)$ tal que $\varphi_1(p) = \varphi_2(p)$ para algum $p \in M$, então $\varphi_1 = \varphi_2$. Isto implica que a única transformação de recobrimento que fixa um ponto é a aplicação identidade.

Dizemos que uma aplicação de recobrimento $k : \tilde{M} \rightarrow M$ é **regular** se para quaisquer pontos $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in k^{-1}(\{p\})$, onde $p \in M$, existe $\varphi \in \mathcal{D}(k)$ tal que $\varphi(\tilde{p}_1) = \tilde{p}_2$. Em outras palavras, a ação do grupo de transformações de recobrimento age transitivamente nas fibras.

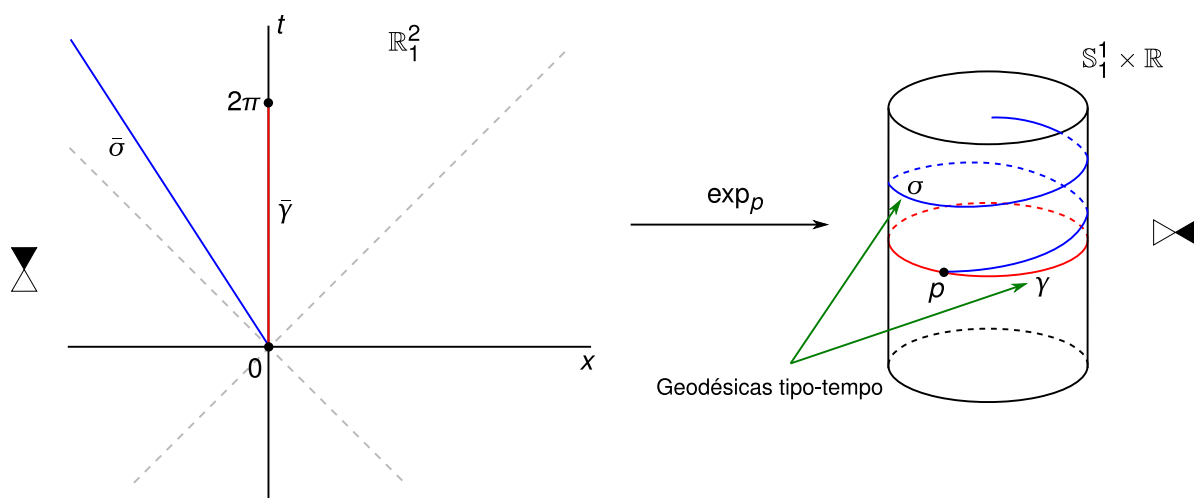
Observação 2.43.

1. Todo recobrimento duplo (i.e., multiplicidade 2) é regular. Além disso, o grupo de transformações de recobrimento é formado pela aplicação identidade e a aplicação φ tal que $\varphi(\tilde{p}_i) = \tilde{p}_j$ para $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$, onde $\{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2\}$ é uma fibra.
2. Todo recobrimento simplesmente conexo é regular (segue diretamente da proposição 2.39).

Proposição 2.44 ([42], Prop. 4, Pág. 186). Se $k : \tilde{M} \rightarrow M$ é uma aplicação de recobrimento simplesmente conexa, então $\mathcal{D}(k) \approx \pi_1(M)$.

Definição 2.45. Sejam (M, g) e (\tilde{M}, \tilde{g}) variedades semi-riemannianas. Dizemos que uma aplicação $k : \tilde{M} \rightarrow M$ é uma **aplicação de recobrimento semi-riemanniana** se k é uma aplicação de recobrimento e, também, uma isometria local.

Figura 6 – Aplicação de recobrimento semi-riemanniana $\exp_p : \mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^1 \times \mathbb{R}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observação 2.46.

1. Sejam (M, g) uma variedade semi-riemanniana e $k : \tilde{M} \rightarrow M$ uma aplicação de recobrimento. Se munirmos \tilde{M} com a métrica do pullback $\tilde{g} := k^*(g)$, então (\tilde{M}, \tilde{g}) é uma variedade semi-riemanniana e $k : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ é uma aplicação de recobrimento semi-riemanniana.
2. Se $k : \tilde{M} \rightarrow M$ é uma aplicação de recobrimento semi-riemanniana, então $\mathcal{D}(k) \subset \text{Isom}(\tilde{M})$ (grupo das isometrias de \tilde{M}).

Seja (M, g) uma variedade lorentziana. Lembre-se que $M^T = \cup_{p \in M} \{\pm T_p\}$ (veja a seção anterior). Agora, defina a aplicação $k : M^T \rightarrow M$ dada por $k(\pm T_p) = p$, para todo $p \in M$. A observação 5 em [42, Pág. 187] mostra que existe uma única forma de tornar M^T uma variedade diferenciável e k uma aplicação de recobrimento duplo (suave). Além disso, de acordo com a observação 2.46(1) temos que $k : M^T \rightarrow M$ é uma aplicação de recobrimento lorentziana, onde M^T está munida com a métrica do pullback $k^*(g)$. Temos o seguinte resultado:

Lema 2.47 ([42], Lema 17, Pág. 194). *Se M é uma variedade lorentziana, então:*

- i. M^T é sempre temporalmente orientável.
- ii. M é temporalmente orientável se, e só se, $k : M^T \rightarrow M$ é trivial.

O teorema a seguir apresenta uma condição suficiente (através de existência de levantamentos de segmentos de geodésicas – cf. lema 2.38) para que uma isometria local seja uma aplicação de recobrimento semi-riemanniana:

Teorema 2.48 ([42], Teo. 28, Pág. 201). *Seja $k : M \rightarrow N$ uma isometria local com N conexa. Considere que para qualquer segmento de geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow N$ e $p \in M$ tal que $k(p) = \gamma(0)$, existe um levantamento $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow M$ de γ através de k com $\tilde{\gamma}(0) = p$. Então k é uma aplicação de recobrimento semi-riemanniana.*

O corolário a seguir caracteriza quando as variedades (domínio e contradomínio) de uma isometria local serão completas:

Corolário 2.49 ([42], Cor. 29, Pág. 202). *Seja $k : M \rightarrow N$ uma isometria local com N conexa. M é completa se, e só se, N é completa e k é uma aplicação de recobrimento semi-riemanniana.*

Uma curva pode ser comparada com curvas suficientemente próximas através da noção de variação de uma curva, que definimos a seguir:

Definição 2.50. Sejam M uma variedade diferenciável e $c : [a, b] \rightarrow M$ um segmento de curva suave por partes. Chamamos de **variação** de c uma aplicação contínua $x : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, onde $\varepsilon > 0$, tal que

- i. $c(t) = x(t, 0)$ para todo $t \in [a, b]$ (**curva base** de x); e

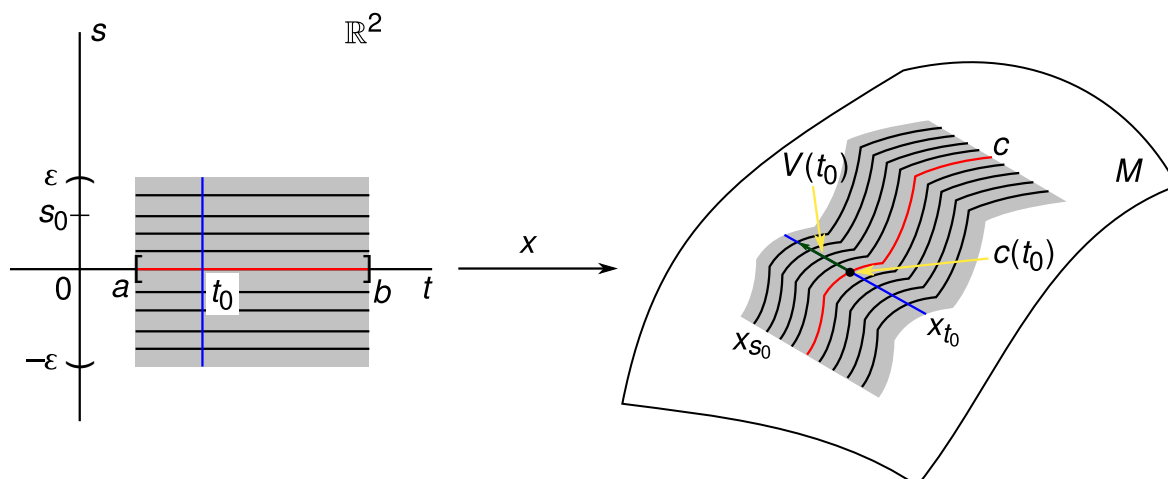
ii. existe uma partição $\mathcal{P} := \{t_0, t_1, \dots, t_{k+1}\}$ de $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = b$, tal que $x|_{[t_i, t_{i+1}] \times (-\varepsilon, \varepsilon)}$ é suave, para $i = 0, \dots, k$.
 Se $x(a, s) = c(a)$ e $x(b, s) = c(b)$ para todo s em $(-\varepsilon, \varepsilon)$ dizemos que x é uma **variação própria** de c . A variação x é dita ser **suave** se x é suave.

As curvas $x_s : [a, b] \rightarrow M$ dadas por $x_s(t) := x(t, s)$ para $t \in [a, b]$, onde $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, são chamadas de **curvas longitudinais** da variação x de c . Já para $t \in [a, b]$ as curvas $x_t(s) := x(t, s)$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, são chamadas de **curvas transversais** da variação x . O campo vetorial $V \in \mathfrak{X}(c)$ dado por

$$V(t) := \frac{\partial}{\partial s} x(t, 0), \quad t \in [a, b],$$

é chamado de **campo variacional** de x . Isto é, o campo variacional de x é dado pelos vetores velocidade inicial das curvas transversais.

Figura 7 – Variação x de uma curva $c : [a, b] \rightarrow M$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Um problema relevante em variedades lorentzianas é determinar quando um par de pontos pode ser conectado por uma curva tipo-tempo. Através da noção de variação que definimos acima temos uma condição suficiente para a existência de uma tal curva, e que também será utilizada mais adiante nesta tese:

Proposição 2.51 ([42], Prop. 46, Pág. 294). *Sejam (M, g) uma variedade de Lorentz e c uma curva causal de p a q em M . Se c não é uma pré-geodésica tipo-luz, então existe uma curva tipo-tempo que liga p a q suficientemente próxima a c .*

Definição 2.52. Sejam γ uma geodésica em uma variedade semi-riemanniana (M, g) e J um campo vetorial ao longo de γ . Se o campo vetorial J satisfaz a **equação diferencial de Jacobi**, i.e,

$$J'' = R_J \dot{\gamma},$$

onde R é o tensor curvatura de (M, g) , dizemos que J é um **campo vetorial de Jacobi**.

Se em uma variação as curvas longitudinais são geodésicas, então chamamos esta variação de **variação geodésica** (suave) ou **família a 1-parâmetro de geodésicas**. Dessa forma, temos o seguinte resultado:

Lema 2.53 ([42], Lema 3, Pág. 216). *O campo variacional de uma variação geodésica é um campo de Jacobi.*

Considere $\mathcal{J}(\gamma)$ o conjunto formado por todos os campos de Jacobi ao longo da geodésica γ da variedade semi-riemanniana (M, g) . Como a equação de Jacobi é linear temos que $\mathcal{J}(\gamma)$ é um espaço vetorial real. O resultado a seguir fornece a dimensão deste espaço vetorial:

Lema 2.54 ([42], Lema 5, Pág. 217). *Seja γ uma geodésica de (M, g) tal que $\gamma(0) = p$, onde $p \in M$. Para $u, v \in T_p M$ temos que existe um único campo de Jacobi J ao longo de γ tal que $J(0) = u$ e $J'(0) = v$.*

Dessa forma, a dimensão do espaço vetorial $\mathcal{J}(\gamma)$ é

$$\dim \mathcal{J}(\gamma) = 2n.$$

Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma geodésica em uma variedade semi-riemanniana (M, g) . Dizemos que $\gamma(b)$ é um **ponto conjugado** a $\gamma(a)$ ao longo de γ , se existe um campo de Jacobi não-nulo J tal que $J(a) = J(b) = 0$.

Observação 2.55. Considere $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$.

1. O fato de q ser um ponto conjugado a p ao longo de γ independe da parametrização (geodésica) de γ .
2. Pode existir uma segunda geodésica σ que liga p a q em M tal que q não é um ponto conjugado a p ao longo de σ .

O resultado a seguir caracteriza a existência de pontos conjugados ao longo de uma geodésica através da existência de singularidades da aplicação exponencial. De forma mais precisa:

Proposição 2.56 ([42], Prop. 10, Pág. 271). *Sejam (M, g) uma variedade semi-riemanniana e $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma geodésica em M . Então, $\gamma(b)$ é um ponto conjugado a $\gamma(a)$ ao longo de γ se, e somente se, a aplicação exponencial $\exp_{\gamma(a)} : \mathcal{D}_{\gamma(a)} \rightarrow M$ é singular em $(b-a) \cdot \dot{\gamma}(a)$.*

Uma variedade semi-riemanniana conexa, completa e com curvatura seccional constante é chamada de **forma espacial**. No caso de uma forma espacial simplesmente conexa temos o seguinte resultado:

Proposição 2.57 ([42], Prop. 23, Pág. 227). *Formas espaciais simplesmente conexas são isométricas se, e somente se, têm a mesma dimensão, índice e curvatura.*

Desta proposição segue um resultado bem conhecido na geometria riemanniana:

Teorema 2.58 (Teorema de Hopf). *Uma variedade riemanniana (M^m, g) , $m \geq 2$, simplesmente conexa, completa e com curvatura constante K é isométrica a(ao):*

- i. espaço hiperbólico $\mathbb{H}^m(r)$, se $K = -1/r^2$;*
- ii. espaço euclidiano \mathbb{R}^m , se $K = 0$;*
- iii. esfera $\mathbb{S}^m(r)$, se $K = 1/r^2$.*

A versão lorentziana do teorema de Hopf é a seguinte:

Teorema 2.59. *Uma variedade lorentziana (M^m, g) , $m \geq 2$, simplesmente conexa, completa e com curvatura constante K é isométrica a(ao):*

- i. recobrimento universal do espaço pseudohiperbólico (ou espaço-tempo de anti-de Sitter) $\tilde{\mathbb{H}}_1^m(r)$, se $K = -1/r^2$;*
- ii. espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^m , se $K = 0$;*
- iii. pseudoesfera (ou esfera lorentziana ou espaço-tempo de de Sitter) $\mathbb{S}_1^m(r)$, se $K = 1/r^2$ e $m \geq 3$;*
- iv. recobrimento universal da pseudoesfera $\tilde{\mathbb{S}}_1^2(r)$, se $K = 1/r^2$ e $m = 2$.*

Seja M uma variedade diferenciável. O teorema 15 em [42, Pág. 45] garante a existência de um único tensor derivação L_V para cada $V \in \mathfrak{X}(M)$ tal que

- i. $L_V(f) = V(f)$, para $f \in C^\infty(M)$; e*
- ii. $L_V(X) = [V, X]$, para $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

Este tensor derivação é chamado de **derivada de Lie** relativa a V .

Definição 2.60. Seja (M, g) uma variedade semi-riemanniana. Dizemos que um campo vetorial V é um **campo vetorial de Killing** se

$$L_V(g) = 0.$$

Sendo $V \in \mathfrak{X}(M)$ temos que, para um campo tensorial s -covariante T ,

$$L_V(T) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\psi_t^*(T) - T),$$

onde $\{\psi_t\}$ é o (resp. um) grupo (resp. grupo local) a 1-parâmetro de V – veja a prova em [42]. Deste resultado temos que

Proposição 2.61 ([42], Prop. 23, Pág. 251). *Um campo vetorial V é Killing se, e só se, cada difeomorfismo ψ_t do (resp. de um) grupo (grupo local) a 1-parâmetro de V é uma isometria.*

A proposição a seguir apresenta duas formas alternativas que podemos utilizar, por exemplo, para checar se um campo vetorial é de Killing:

Proposição 2.62 ([42], Prop. 25, Pág. 251). *Sejam (M, g) uma variedade semi-riemanniana munida com a conexão de Levi-Civita ∇ e $V \in \mathfrak{X}(M)$. As afirmações a seguir são equivalentes:*

- i. V é um campo de Killing.*
- ii. $Vg(X, Y) = g([V, X], Y) + g(X, [V, Y])$, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*
- iii. $g(\nabla_X V, Y) = -g(X, \nabla_Y V)$, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

O lema a seguir relaciona campo de Killing com campo de Jacobi ao longo de uma geodésica em uma variedade semi-riemanniana:

Lema 2.63 (Lema da Conservação – [42], Lema 26, Pág. 252). *Sejam V um campo de Killing e γ uma geodésica de (M, g) . Então, V_γ é um campo de Jacobi e $g_\gamma(V_\gamma, \dot{\gamma})$ é uma função constante.*

Finalizamos esta seção apresentando dois resultados globais importantes. O primeiro relaciona o sinal da curvatura com a ausência de pontos conjugados:

Proposição 2.64 ([42], 9).

- i. Uma variedade riemanniana com curvatura seccional não-positiva não possui pontos conjugados.*
- ii. Uma variedade lorentziana com curvatura seccional não-negativa em planos tipo-tempo não possui pontos conjugados ao longo de geodésicas causais.*

Exemplo 2.65. De acordo com a proposição acima, temos que o espaço hiperbólico \mathbb{H}^n ($K = -1 < 0$) não tem pontos conjugados e a esfera lorentziana \mathbb{S}_1^n ($K = 1 > 0$) não possui pontos conjugados ao longo de geodésicas causais.

O resultado a seguir nos apresenta uma classe de variedades riemannianas que são difeomórficas ao espaço euclidiano:

Teorema 2.66 (Teorema de Hadamard – [42], Teo. 22, Pág. 278). *Seja (M, g) uma variedade riemanniana simplesmente conexa, completa e com curvatura seccional não-positiva. Então, para cada ponto p de M a aplicação exponencial $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é um difeomorfismo.*

Observação 2.67. Dessa forma,

1. M é difeomórfica a \mathbb{R}^m ; e
2. dados dois pontos de M existe uma única geodésica que os conecta.

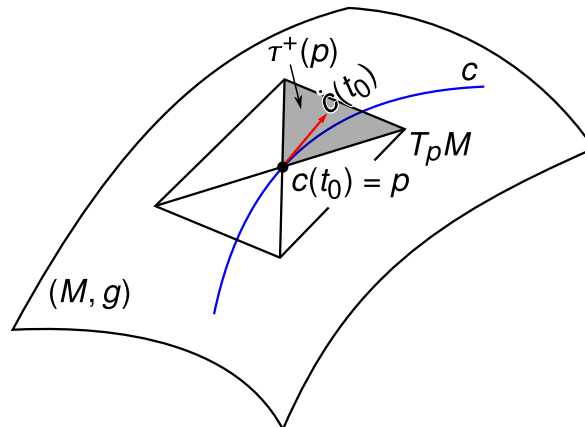
2.3 ESPAÇO-TEMPO

Nesta seção apresentamos alguns aspectos básicos de uma classe especial de variedades lorentzianas, que são os espaços-tempo. Iniciamos definindo esta classe de variedades de Lorentz e em seguida prosseguimos apresentando as relações de causalidade, parte da escala causal, a distância lorentziana e suas propriedades (por exemplo: desigualdade triangular reversa e semicontinuidade inferior), o teorema de Avez-Seifert, que envolve os problemas de conexidade geodésica e curva causal de maior comprimento, e finalizamos a seção caracterizando os espaços-tempo globalmente hiperbólicos através das hipersuperfícies de Cauchy.

Definição 2.68. Uma variedade lorentziana conexa e temporalmente orientável é chamada de **espaço-tempo**.

Sejam (M, g) um espaço-tempo e $\tau^+ : M \rightarrow M^T$ sua orientação temporal. Dessa forma, pela proposição 2.35 existe um campo vetorial tipo-tempo X tal que $X_p \in \tau^+(p)$, para todo $p \in M$. Dizemos que uma curva causal $c : I \rightarrow M$ é **futuro-dirigida** (resp. **passado-dirigida**) no espaço-tempo (M, g) , se $\dot{c}(t) \in \overline{\tau^+(c(t))} \setminus \{0\}$ (resp. $\dot{c}(t) \in \overline{-\tau^+(c(t))} \setminus \{0\}$), para todo $t \in I$ – ou, alternativamente, se $g_{c(t)}(X_{c(t)}, \dot{c}(t)) < 0$ (resp. > 0), para todo $t \in I$.

Figura 8 – Uma curva causal futuro-dirigida c em M .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observação 2.69. Note que uma curva causal ou é passado-dirigida ou é futuro-dirigida devido a nossa definição de curva causal dada na seção 2.1.

Sejam p e q dois pontos de um espaço-tempo M . Denotaremos por:

- i. $p \ll q$, se existe uma curva tipo-tempo futuro-dirigida em M de p a q ;
- ii. $p < q$, se existe uma curva causal futuro-dirigida em M de p a q ; e
- iii. $p \leq q$, se $p < q$ ou $p = q$.

Além disso, seja A um subconjunto de M , denotaremos por

$$I^+(A) := \{q \in M : \text{existe } p \in A \text{ tal que } p \ll q\}$$

e

$$J^+(A) := \{q \in M : q \in A \text{ ou existe } p \in A \text{ tal que } p < q\}.$$

Chamamos os subconjuntos acima de, respectivamente, **futuro cronológico** de A e **futuro causal** de A .

Observação 2.70.

1. As relações acima definidas em M são chamadas de **relações de causalidade** em M . Perceba que estas relações são transitivas.
2. $I^+(A) = \cup_{p \in A} I^+(\{p\})$ (por simplicidade escreveremos $I^+(\{p\})$ como $I^+(p)$).
3. $A \cup I^+(A) \subset J^+(A)$.

De forma dual temos as versões para o passado dos conjuntos $I^+(A)$ e $J^+(A)$. Vejamos:

$$I^-(A) := \{q \in M : \text{existe } p \in A \text{ tal que } q \ll p\} \text{ (passado cronológico de } A)$$

e

$$J^-(A) := \{q \in M : q \in A \text{ ou existe } p \in A \text{ tal que } q < p\} \text{ (passado causal de } A).$$

Aqui enfatizaremos situações futuro-dirigidas, pois as demonstrações para as situações passado-dirigidas são análogas e tratam basicamente de inverter a orientação temporal.

Observe que da proposição 2.51 temos o seguinte resultado:

Corolário 2.71. *Se $p \ll q \leq r$ ou $p \leq q \ll r$, então $p \ll r$.*

Sejam U um aberto de um espaço-tempo (M, g) e A um subconjunto de U . Denotaremos por $I^+(A, U)$ (resp. $J^+(A, U)$) o conjunto formado por todos os pontos de U que podem ser conectados por curvas tipo-tempo (resp. causais) futuro-dirigidas que partem de um ponto de A e estão inteiramente contidas em U . Temos que, $I^+(A, U) \subset I^+(A) \cap U$ – esta inclusão em geral é própria.

O lema a seguir mostra, em particular, que o futuro cronológico de um subconjunto de um espaço-tempo é um subconjunto aberto:

Lema 2.72 ([42], Lema 3, Pág. 403). *Sejam (M, g) um espaço-tempo e $p, q \in M$. Se $p \ll q$, então existem vizinhanças abertas U e V de, respectivamente, p e q em M tais que $r \ll s$ para todo $r \in U$ e $s \in V$.*

O próximo lema nos dá informações a respeito do interior e do fecho do futuro causal e do futuro cronológico de um subconjunto qualquer de um espaço-tempo:

Lema 2.73 ([42], Lema 6, Pág. 404). *Seja A um subconjunto de um espaço-tempo (M, g) . Então:*

- i. $\text{int } J^+(A) = I^+(A)$; e*
- ii. $J^+(A) \subset \overline{I^+(A)}$ com a igualdade ocorrendo se, e só se, $J^+(A)$ é um subconjunto fechado em M .*

Seja (M, g) um espaço-tempo. Dizemos que a **condição de cronologia** (resp. **causalidade**) se mantém em um ponto p de M se não existe uma curva tipo-tempo (resp. causal) futuro-dirigida fechada através de p . Se a condição de cronologia (resp. causalidade) se mantém para todos os pontos de um subconjunto $A \subset M$ então dizemos que a condição de cronologia (resp. causalidade) se mantém em A . Além disso, se a condição de cronologia (resp. causalidade) se mantém em M então dizemos que (M, g) é um **espaço-tempo cronológico** (resp. **causal**).

Observação 2.74. Note que a condição de causalidade implica na condição de cronologia, porém a recíproca é falsa – veja os exemplos em [42, Pág. 407] e [9, Pág. 58].

O resultado a seguir mostra que um espaço-tempo compacto não é cronológico e, conseqüentemente, não é causal:

Proposição 2.75 ([42], Lema 10, Pág. 407). *Se (M, g) é um espaço-tempo compacto, então existe uma curva tipo-tempo futuro-dirigida fechada em M .*

Um corolário interessante deste resultado é que toda variedade lorentziana compacta (não necessariamente conexa ou temporalmente orientável) possui uma curva tipo-tempo fechada:

Corolário 2.76. *Seja (M, g) uma variedade lorentziana compacta. Então, M tem uma curva tipo-tempo fechada.*

Demonstração. Considere a aplicação de recobrimento lorentziana $k : M^T \rightarrow M$ definida na seção 2.2. Pelo lema 2.47(i), M^T é temporalmente orientável e, conseqüentemente, suas componentes conexas também são. Agora, considere uma de suas componentes conexas, digamos C . Como M é compacta e k é uma aplicação de recobrimento duplo temos que C é compacta. Dessa forma, $(C, g|_C)$ é um espaço-tempo compacto e, pela proposição anterior, existe uma curva tipo-tempo fechada $\bar{\beta}$ em C . Portanto, $\beta := k \circ \bar{\beta}$ é uma curva tipo-tempo fechada em M , pois k é uma aplicação de recobrimento lorentziana. □

Em um espaço-tempo (M, g) dizemos que um aberto U é **causalmente convexo** se toda curva causal futuro-dirigida intersecta U em um conjunto conexo.

Exemplo 2.77. Sejam p e q dois pontos de M . Note que $I^+(p) \cap I^-(q)$ é um aberto causalmente convexo.

Definição 2.78. Sejam (M, g) um espaço-tempo e $p \in M$. Dizemos que (M, g) é **fortemente causal** em p , se existem vizinhanças causalmente convexas arbitrariamente pequenas que contêm p . Além disso, se (M, g) é fortemente causal em todo ponto de M então (M, g) é dito ser um **espaço-tempo fortemente causal**.

Observação 2.79.

1. Todo espaço-tempo fortemente causal é causal e, conseqüentemente, cronológico. A recíproca desta afirmação é falsa, veja o exemplo 12 em [42, Pág. 408].
2. O subconjunto formado pelos pontos em que (M, g) é fortemente causal é aberto em M (veja proposição 4.13 em [43]).
3. Alternativamente, dizemos que um espaço-tempo (M, g) é fortemente causal em $p \in M$, se para cada vizinhança U de p existe uma vizinhança $V \subset U$ de p tal que todo segmento de curva causal futuro-dirigido com extremidades em V está inteiramente contido em U . Se (M, g) é fortemente causal em todo ponto de M (nesse sentido) dizemos que (M, g) é um espaço-tempo fortemente causal.

Observe que $\mathcal{B} := \{I^+(p) \cap I^-(q) : p, q \in M\}$ forma uma base para uma topologia em M . A topologia gerada por \mathcal{B} é chamada de **topologia de Alexandrov** para um espaço-tempo (M, g) . Além da forma alternativa em 2.79(3) de caracterizar um espaço-tempo fortemente causal também podemos caracterizá-lo através da topologia de Alexandrov.

Proposição 2.80 ([9], Prop. 3.11, Pág. 60). *Seja (M, g) um espaço-tempo. A topologia de Alexandrov para M coincide com a topologia da variedade diferenciável M se, e somente se, (M, g) é um espaço-tempo fortemente causal.*

Observação 2.81. Em geral temos ao menos que a topologia da variedade diferenciável é mais fina do que a topologia de Alexandrov para a variedade.

Proposição 2.82 ([42], Lema 13, Pág. 408). *Seja (M, g) um espaço-tempo fortemente causal em um compacto K . Se $c : [a, b) \rightarrow M$ é uma curva causal futuro-dirigida futuro-inextensível que inicia em K , então existe $t_0 \in (a, b)$ tal que $c(t) \notin K$, para todo $t \in [t_0, b)$, i.e., c deixa K e não retorna mais.*

Definição 2.83. Sejam (M, g) um espaço-tempo e U um subconjunto de M . Dizemos que U é **globalmente hiperbólico** se:

- i. (M, g) é fortemente causal em U ; e

ii. $J(p, q) := J^+(p) \cap J^-(q)$ é compacto e está contido em U , para todo $p, q \in U$.

Note que, se M é globalmente hiperbólico temos que, por definição, M é fortemente causal (causal e cronológico). Porém a recíproca não é verdadeira, para ver isto basta pensar no espaço-tempo de Minkowski menos um ponto.

Em um espaço-tempo globalmente hiperbólico (M, g) temos que $J^+(p)$, $J^-(q)$ e $J(p, q)$ são subconjuntos fechados em M (cf. [9, Prop. 3.16, Pág. 65]), pois:

Proposição 2.84 ([42], Lema 22, Pág. 412). *Seja U um subconjunto aberto globalmente hiperbólico de M . Se $p_n, q_n, p, q \in U$, com $n \in \mathbb{N}^*$, tal que $p_n \leq q_n$, para $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \rightarrow p$ e $q_n \rightarrow q$, então $p \leq q$.*

Definição 2.85. Seja (M, g) um espaço-tempo. Definimos a **distância lorentziana** d como a aplicação $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que $d(p, q)$ é igual ao supremo dos comprimentos de todas as curvas causais futuro-dirigidas de p a q , se $p < q$, caso contrário $d(p, q) = 0$.

Observação 2.86.

1. Caso os comprimentos das curvas causais de p a q sejam ilimitados então $d(p, q) = +\infty$ (isto ocorre, por exemplo, se p e q são pontos ao longo de uma curva tipo-tempo fechada).
2. A ordem dos pontos p e q é importante para o cálculo da distância lorentziana, ou seja, d pode não ser simétrica – observe isto no espaço-tempo de Minkowski.

Temos o seguinte lema:

Lema 2.87 ([42], Lema 16, Pág. 410). *Seja (M, g) um espaço-tempo. Temos para $p, q, r \in M$:*

- i. $d(p, q) > 0$ se, e só se, $p \ll q$; e
- ii. (**Desigualdade triangular reversa**) se $p \leq q \leq r$, então $d(p, r) \geq d(p, q) + d(q, r)$.

O exemplo 18 em [42, Pág. 410] mostra que a distância lorentziana d pode não ser contínua para um espaço-tempo (diferentemente da função distância riemanniana definida na seção 2.1). Porém a distância lorentziana é sempre semicontínua inferiormente (veja [42, Lema 17, Pág. 410]) – em geral a distância lorentziana falha em ser semicontínua superiormente.

O resultado a seguir responde positivamente os problemas de conexidade geodésica e existência de curva causal de maior comprimento entre dois pontos para a classe de espaços-tempo globalmente hiperbólicos:

Teorema 2.88 (Teorema de Avez-Seifert – [42], Prop. 19, Pág. 411). *Seja (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Então, para quaisquer $p, q \in M$ tais que $q \in$*

$J^+(p) \setminus \{p\}$, existe um segmento de geodésica causal futuro-dirigida maximal γ de p a q (i.e., $L(\gamma) = d(p, q)$).

Observação 2.89. Dessa forma, a distância lorentziana é uma função a valores reais em espaços-tempo globalmente hiperbólicos.

Em espaços-tempo globalmente hiperbólicos a função distância lorentziana é semicontínua superiormente e, conseqüentemente:

Proposição 2.90 ([42], Lema 21, Pág. 412). *Se (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico, então a função distância lorentziana d é contínua.*

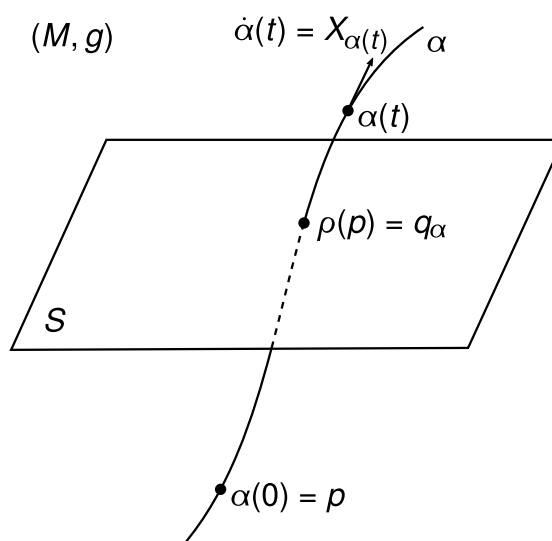
Lembre-se que um espaço topológico M é uma **variedade topológica** de dimensão m , se M tem base contável, é Hausdorff e é localmente euclidiano a \mathbb{R}^m . Além disso, dizemos que um subconjunto S de M é uma **subvariedade topológica** de dimensão s (**hipersuperfície topológica**, se $s = m - 1$) se para cada $p \in S$ existe um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$, onde U é uma vizinhança (aberta) de p em M e $\varphi(U)$ é um subconjunto aberto em \mathbb{R}^m , tal que $\varphi(S \cap U) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^s \times 0)$, onde $0 := (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m-s}$ – tal homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ é chamado de **carta local adaptada** de M a S em p .

Sejam (M, g) um espaço-tempo e A um subconjunto de M . Dizemos que A é **acronal** (resp. **acausal**) se qualquer curva tipo-tempo (resp. causal) futuro-dirigida intersecta A , no máximo, uma vez, i.e., a relação $p \ll q$ (resp. $p < q$) não ocorre para quaisquer que sejam $p, q \in A$.

Definição 2.91. Seja (M, g) um espaço-tempo. Um subconjunto S de M é uma **hipersuperfície de Cauchy** se toda curva tipo-tempo futuro-dirigida inextensível em M intersecta S exatamente um vez.

O lema 29 em [42, Pág. 415] nos diz que uma hipersuperfície de Cauchy é uma hipersuperfície topológica fechada acronal tal que toda curva causal futuro-dirigida inextensível a intersecta.

Sejam (M, g) um espaço-tempo e S uma hipersuperfície de Cauchy. Considere X um campo vetorial tipo-tempo que fornece a orientação temporal do espaço-tempo M . Seja p um ponto de M . Dessa forma, existe uma única curva integral maximal (inextensível) $\alpha : I \rightarrow M$ de X tal que $\alpha(0) = p$. Além disso, α é uma curva tipo-tempo futuro-dirigida inextensível. Como S é uma hipersuperfície de Cauchy então $\text{im } \alpha \cap S = \{q_\alpha\}$. Agora, defina a aplicação $\rho : M \rightarrow S$ dada por $\rho(p) = q_\alpha$ para $p \in M$. Como em cada ponto de M passa uma única curva integral maximal de X , S é uma hipersuperfície de Cauchy e $\rho(\alpha(t)) = q_\alpha$ para todo $t \in I$, onde α é uma curva integral maximal de X , temos que a aplicação ρ está bem definida – veja a figura 9.

Figura 9 – Visualização geométrica da aplicação $\rho : M \rightarrow S$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Pela proposição 31 em [42, Pág. 415], temos que $\rho : M \rightarrow S$ é uma aplicação aberta contínua sobrejetora tal que $\rho(p) = p$ para todo $p \in S$ (i.e., $\rho|_S = \text{id} : S \rightarrow S$). Em particular, toda hipersuperfície de Cauchy é conexa. Como consequência desta proposição 31 temos que duas hipersuperfícies de Cauchy são homeomorfas. Assim, se um espaço-tempo tem uma hipersuperfície de Cauchy compacta então todas as hipersuperfícies de Cauchy são compactas.

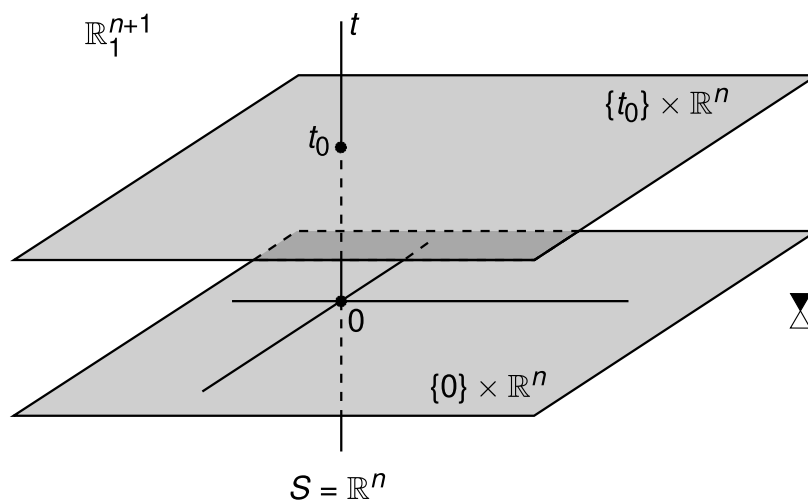
Os dois próximos resultados caracterizam um espaço-tempo globalmente hiperbólico através de uma hipersuperfície de Cauchy. O primeiro resultado pode ser obtido através do desenvolvimento de Cauchy (veja o capítulo 14 em [42]) e nos diz o seguinte:

Proposição 2.92 ([42], Cor. 39, Pág. 422). *Se um espaço-tempo (M, g) tem uma hipersuperfície de Cauchy, então (M, g) é globalmente hiperbólico.*

Já o segundo resultado foi obtido por Geroch e estabelece a recíproca da proposição anterior:

Proposição 2.93 ([33], Prop. 6.6.8, Pág. 212). *Se (M, g) é um espaço-tempo globalmente hiperbólico, então M é homeomorfa a $\mathbb{R} \times S$, onde S é uma hipersuperfície topológica de M , e $\{t\} \times S$ é uma hipersuperfície de Cauchy para cada t real.*

Figura 10 – O espaço-tempo de Minkowski \mathbb{R}_1^{n+1} folheado pelas hipersuperfícies de Cauchy $\{t\} \times \mathbb{R}^n$ com $t \in \mathbb{R}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3 CONEXIDADE GEODÉSICA EM VARIEDADES AFINS

Neste capítulo, começaremos apresentando algumas definições e resultados básicos de levantamento e continuação de caminhos de aplicações abstratas no contexto dos trabalhos de Browder e Rheindboldt [14, 44]. Em seguida, particularizaremos esta discussão para a aplicação exponencial de uma variedade afim, obtendo assim um novo resultado de existência e multiplicidade de geodésicas e uma nova versão do bem conhecido teorema de Hadamard-Cartan da geometria riemanniana para variedades afins. Também apresentaremos aqui uma discussão sobre pseudoconvexidade e desaprisionamento de geodésicas em variedades afins da qual obteremos um resultado geral que caracteriza a pseudoconvexidade e o desaprisionamento de geodésicas através da aplicação exponencial – este resultado será particularizado/simplificado no próximo capítulo para o contexto lorentziano, tendo importantes desdobramentos lá.

3.1 PROPRIEDADES ABSTRATAS DE FUNÇÕES: LEVANTAMENTO E CONTINUAÇÃO DE CAMINHOS

Vários problemas matemáticos estão relacionados a saber se uma dada aplicação $F : X \rightarrow Y$ é sobrejetora. Isto é, se a equação (provavelmente não-linear)

$$F(x) = y_0, \quad (7)$$

tem uma solução $x \in X$ para cada $y_0 \in Y$ dado. Isto nos remete ao trabalho de Hadamard em [32, 1906] e vários outros trabalhos que desenvolveram ferramentas topológicas para abordar aspectos desse problema geral. Estaremos interessados aqui, em especial, na análise das propriedades de *levantamento* e *continuação de caminhos* de uma aplicação entre espaços topológicos desenvolvidas nos trabalhos pioneiros de Browder e Rheindboldt em [14] e [44], respectivamente. A estrutura resultante é bastante flexível, tendo sido adaptada a uma vasta gama de problemas diferentes (veja, e.g., [30, 31] e suas referências para uma revisão recente com várias aplicações).

Temos dois objetivos nesta seção. Primeiro, estabelecer a maior parte da terminologia e notação que usaremos no restante deste capítulo. Em segundo lugar, fornecer uma descrição abstrata das propriedades de levantamento e continuação de caminhos de aplicações entre espaços topológicos Hausdorff, como apresentado à la Browder e Rheindboldt¹.

Com respeito ao segundo objetivo, descreveremos generalizações de certos fatos bem conhecidos na teoria de espaços de recobrimento. Sua importância para nós reside em fornecer condições suficientes simples, mas elegantes, para que uma aplica-

¹ Como seus detalhes podem ser desconhecidos para alguns geômetras, decidimos incluir um breve relato dos pontos-chave para este capítulo.

ção seja sobrejetiva e, em algumas situações, de fato uma aplicação de recobrimento. Essas noções serão posteriormente aplicadas à aplicação exponencial.

Nesta seção vamos denotar por X e Y espaços topológicos Hausdorff e $F : X \rightarrow Y$ como sendo uma aplicação contínua entre estes espaços topológicos. De acordo com [44] denotaremos por $\mathcal{P}(X)$ (resp. $\mathcal{P}(Y)$) o conjunto formado por todos os caminhos (contínuos) $\alpha : [0,1] \rightarrow X$ (resp. $\beta : [0,1] \rightarrow Y$).

Definição 3.1. Seja P um subconjunto de $\mathcal{P}(Y)$. Dizemos que $F : X \rightarrow Y$ tem a **propriedade de levantamento de caminhos para P** , se para quaisquer $\alpha \in P$ e $x_0 \in F^{-1}(\alpha(0))$ existe um caminho $\bar{\alpha} \in \mathcal{P}(X)$ tal que

$$\bar{\alpha}(0) = x_0 \text{ e } F \circ \bar{\alpha} = \alpha.$$

Neste caso chamamos o caminho $\bar{\alpha}$ de **levantamento de α através de F que parte de x_0** .

Observação 3.2.

1. Se $F : X \rightarrow Y$ tem a propriedade de levantamento de caminhos para $P \subset \mathcal{P}(Y)$, evidentemente F também tem esta propriedade para todo subconjunto P' de P .
2. Note que, se $F : X \rightarrow Y$ é uma aplicação de recobrimento, então F tem a propriedade de levantamento de caminhos para todo subconjunto de $\mathcal{P}(Y)$ (veja o lema 2.38).

A distinção da abordagem de Rheinboldt em [44] é que a propriedade de levantamento de caminhos pode ser enfraquecida para subconjuntos próprios de $\mathcal{P}(Y)$, e também que ela fornece uma caracterização muito importante de levantamento de caminhos em termos da seguinte definição.

Definição 3.3. Seja P um subconjunto de $\mathcal{P}(Y)$. Dizemos que $F : X \rightarrow Y$ tem a **propriedade de continuação para P** , se para quaisquer $\alpha \in P$ e caminho $\bar{\alpha} : [0,b) \subset [0,1] \rightarrow X$ tais que

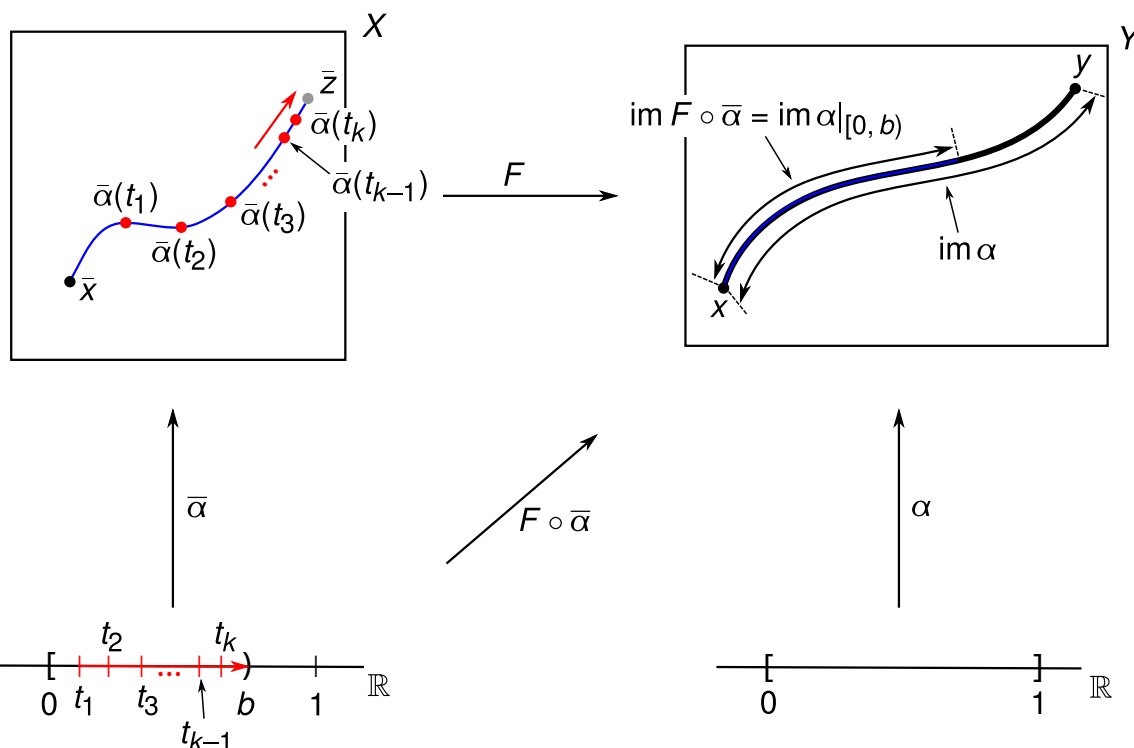
$$F \circ \bar{\alpha} = \alpha|_{[0,b)},$$

existe uma sequência $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em $[0,b)$ convergindo para b para o qual a sequência $(\bar{\alpha}(t_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge em X (veja a figura 11).

Note que, uma aplicação de recobrimento possui também a propriedade de continuação para todo subconjunto de $\mathcal{P}(Y)$ devido, novamente, ao lema 2.38 e à continuidade do levantamento.

A proposição a seguir nos diz que as propriedades de levantamento e continuação de caminhos são equivalentes para *homeomorfismos locais*:

Figura 11 – Aplicação $F : X \rightarrow Y$ tem a propriedade de continuação para P .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Proposição 3.4 ([44], Teo. 2.4, Pág. 185). *Seja $P \subset \mathcal{P}(Y)$. Um homeomorfismo local $F : X \rightarrow Y$ tem a propriedade de levantamento de caminhos para P se, e somente se, F tem a propriedade de continuação para P .*

De acordo com [30] temos a seguinte definição:

Definição 3.5. Diremos que Y é P -conexo para $P \subset \mathcal{P}(Y)$ se para quaisquer dois pontos de Y existe um caminho em P que os conecta².

Dessa forma, através da P -conexidade e a propriedade de levantamento de caminhos temos um resultado interessante sobre a existência de uma solução para a equação (7) (i.e. sobre a sobrejetividade da aplicação F):

Proposição 3.6. *Se Y é P -conexo e $F : X \rightarrow Y$ tem a propriedade de levantamento de caminhos para P , então F é sobrejetiva.*

Assim das proposições 3.4 e 3.6 decorre que:

Corolário 3.7. *Se Y é P -conexo e o homeomorfismo local $F : X \rightarrow Y$ tem a propriedade de continuação para P , então F é sobrejetora.*

² Na verdade, os autores de [30] exigem que para qualquer caminho $\alpha : [0,1] \rightarrow Y$ em P , o caminho inverso $\alpha^{-1} : t \in [0,1] \mapsto \alpha(1-t) \in Y$ esteja contido também em P . Esta é uma condição técnica que não usaremos aqui e, conseqüentemente, iremos omiti-la.

Consideremos agora algumas aplicações dessas ideias topológicas gerais ao contexto de variedades diferenciáveis. Sejam M e N duas variedades diferenciáveis e $F : M \rightarrow N$ uma aplicação suave. Denotaremos por

$$\mathcal{P}^\infty(M) := \{\alpha \in \mathcal{P}(M) : \alpha \text{ é suave por partes}\}. \quad (8)$$

Temos o seguinte resultado:

Proposição 3.8. *Sejam M e N duas variedades diferenciáveis com N conexa e $F : M \rightarrow N$ um difeomorfismo local com a propriedade de continuação para $\mathcal{P}^\infty(N)$. Então, F é uma aplicação de recobrimento suave.*

Demonstração. Seja h uma métrica riemanniana para N . Considere M munida com a métrica do pullback $\bar{h} := F^*h$ de h por F . Como F é um difeomorfismo local, temos que (M, \bar{h}) é uma variedade riemanniana e $F : (M, \bar{h}) \rightarrow (N, h)$ é uma isometria local. Seja $\sigma : [0, 1] \rightarrow N$ uma h -geodésica. Dessa forma, σ é um elemento de $\mathcal{P}^\infty(N)$. Digamos que $F(p) = \sigma(0)$, onde $p \in M$. Como $F : M \rightarrow N$ é uma isometria local (bastaria ser um homeomorfismo local) então, pela proposição 3.4, F tem a propriedade de levantamento de caminhos para $\mathcal{P}^\infty(N)$. Consequentemente, existe um levantamento $\bar{\sigma} : [0, 1] \rightarrow M$ de σ através de F que começa em p ($\bar{\sigma}$ é uma \bar{h} -geodésica em M , pois F é uma isometria local). Assim, pelo teorema 2.48, F é uma aplicação de recobrimento suave. \square

Lembre-se que uma aplicação $F : X \rightarrow Y$ entre dois espaços topológicos X e Y é **própria**, se a imagem inversa de qualquer subconjunto compacto em Y é um subconjunto compacto em X . O resultado a seguir decorre imediatamente do teorema 7 em [14] (c.f. também [36, Prop. 4.46, Pág. 94]) – lembrando que uma aplicação própria suave entre variedades diferenciáveis é uma *aplicação fechada* (veja o corolário em [45]), i.e., leva subconjuntos fechados do domínio em subconjuntos fechados do contradomínio.

Proposição 3.9. *Sejam M e N variedades diferenciáveis de mesma dimensão e $F : M \rightarrow N$ um difeomorfismo local. Se N é conexa e F é uma aplicação própria, então F é uma aplicação de recobrimento suave de multiplicidade finita.*

3.2 PSEUDOCONVEXIDADE E DESAPRISIONAMENTO DE GEODÉSICAS

Nesta seção vamos nos restringir às variedades afins (veja a seção 2.1) e neste contexto vamos considerar o domínio $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ de uma geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ como sendo um intervalo aberto, fechado ou semifechado, a menos que seja especificado o contrário. Em particular, quando tivermos $I = [a, b]$ (compacto) diremos que γ é um segmento de geodésica com extremidades em $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$.

Por uma questão de conveniência vamos primeiro estabelecer uma estrutura ligeiramente abstrata para descrever uma coleção fixa adequada \mathcal{C} , não-vazia, de geodésicas em uma variedade afim (M, ∇) em termos da aplicação exponencial. Esta descrição geral pode ser particularizada para os casos de interesse posteriormente – por exemplo, em variedades de Lorentz.

Denotamos por $\exp : \mathcal{D} \subset TM \rightarrow M$ a aplicação exponencial de (M, ∇) , onde \mathcal{D} é o seu domínio maximal, e $\mathcal{Z} \subset TM$ a imagem da seção nula do fibrado tangente TM . Diremos que uma coleção \mathcal{C} de geodésicas não-constantes é:

- i. **pseudoconvexa** se para qualquer subconjunto compacto K de M existe um subconjunto compacto $K^* \subset M$ tal que qualquer segmento de geodésica em \mathcal{C} com extremidades em K está inteiramente contido em K^* ; e
- ii. **desaprisionada** se para qualquer extensão maximal $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ de uma geodésica em \mathcal{C} ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) e $t_0 \in (a, b)$ os fechos de ambos os subconjuntos $\gamma(a, t_0]$ e $\gamma[t_0, b)$ não são compactos. Caso contrário, diremos que \mathcal{C} é **aprisionada**.

Se \mathcal{C} é a coleção de todas as geodésicas (não-constantes) de uma variedade afim (M, ∇) e \mathcal{C} é pseudoconvexa e/ou desaprisionada, então diremos que (M, ∇) é uma **variedade afim pseudoconvexa** e/ou **desaprisionada**. Além disso, para uma variedade semi-riemanniana (M, g) temos dois casos bem conhecidos de pseudoconvexidade e desaprisionamento que são abordados na literatura. Seja \mathcal{C} a coleção formada por todas as geodésicas tipo-luz (resp. causal) de (M, g) . Se \mathcal{C} é pseudoconvexa e/ou desaprisionada, então dizemos que (M, g) é **pseudoconvexa tipo-luz** (resp. **causalmente pseudoconvexa**) e/ou **desaprisionada tipo-luz (causalmente desaprisionada)**³.

Fixaremos pelo resto desta seção (M, ∇) como sendo uma variedade afim e h uma métrica riemanniana completa para M . Denotaremos por d_h e $|\cdot|_h$, respectivamente, a distância riemanniana e a norma com respeito a métrica h . Seja S um subconjunto qualquer de M . Denotaremos por $\mathbb{S}_h^1 S$ o conjunto formado por todos os vetores h -unitários de $\pi^{-1}(S) \subset TM$, onde $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção natural do fibrado tangente. Note que, se S é compacto então $\mathbb{S}_h^1 S$ também é.

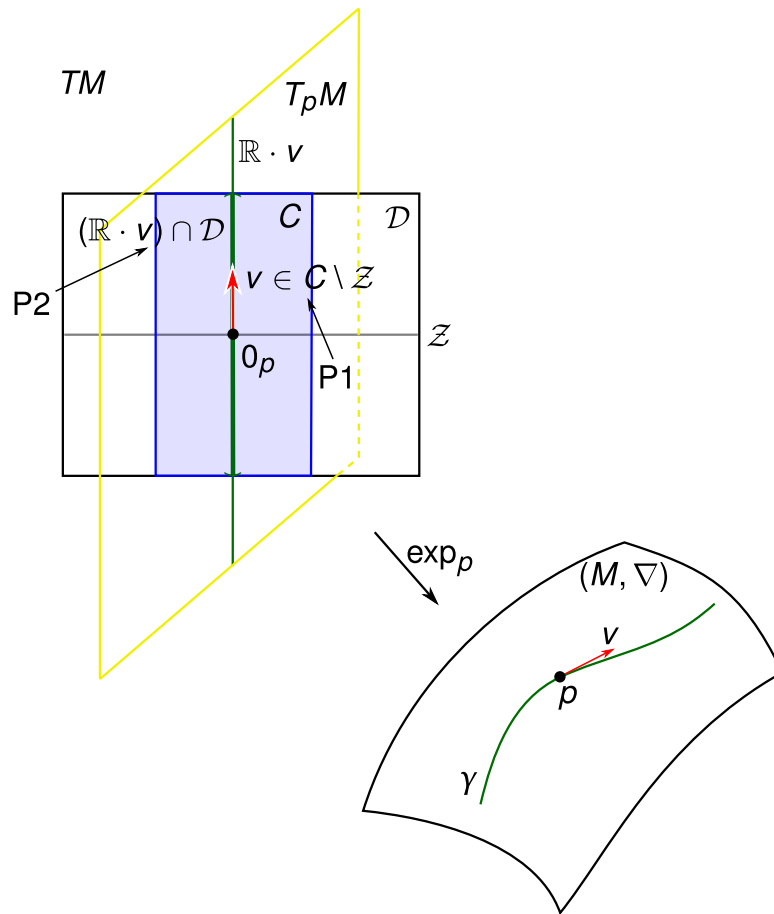
Considere um subconjunto não-vazio C de \mathcal{D} tal que satisfaz as seguintes propriedades:

P1) Para qualquer $v \in C$ existe $v' \in C \setminus \mathcal{Z}$ com $\pi(v') = \pi(v)$.

P2) Para qualquer $v \in C \setminus \mathcal{Z}$, $(\mathbb{R} \cdot v) \cap \mathcal{D} \subset C$. Em particular, se $v \in C$, então $0 \cdot v \in C$.

³ Evidentemente, podemos considerar separadamente a classe das geodésicas *tipo-tempo*, mas esta não se comporta bem mediante limites de geodésicas, e portanto tem menor importância neste contexto.

Figura 12 – Esboço de um subconjunto C de \mathcal{D} .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, defina o seguinte subconjunto de TM

$$C_1 := \{v/|v|_h \in \mathbb{S}_h^1 M : v \in C \setminus \mathcal{Z}\}.$$

Para cada $w \in C_1$, considere o intervalo

$$J_w := \{t \in \mathbb{R} : t \cdot w \in \mathcal{D}\}$$

(veja a figura 13). Por fim, defina a seguinte classe de geodésicas

$$\mathcal{C} := \{\gamma : t \in I \mapsto \exp(t \cdot w) \in M : I \subset J_w \text{ é um intervalo não-degenerado e } w \in C_1\}. \quad (9)$$

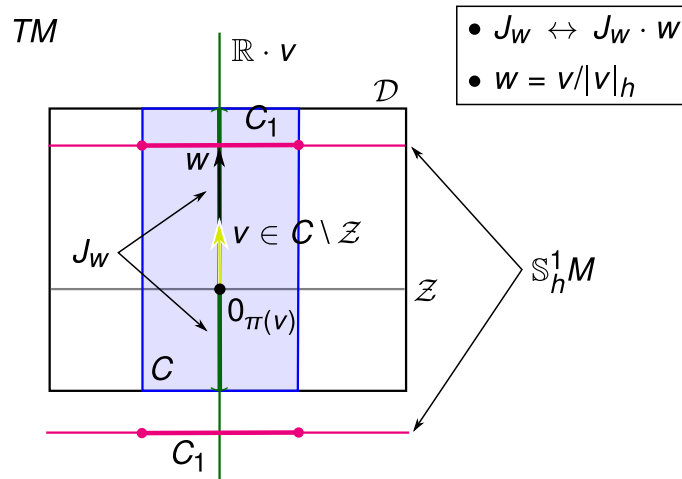
Observação 3.10.

1. Note que $0 \in J_w$, para $w \in C_1$.
2. Para cada $w \in C_1$ temos que J_w é um intervalo aberto e $t \in J_w \mapsto \exp(t \cdot w) \in M$ é uma geodésica inextensível.
3. \mathcal{C} é não-vazio. De fato, como $C \neq \emptyset$ temos que a propriedade (P1) implica que existe $v' \in C \setminus \mathcal{Z}$. Assim, $w := v'/|v'|_h \in C_1$. Logo, existe um intervalo não-

degenerado $I \subset J_w$ tal que $\gamma : t \in I \mapsto \exp(t \cdot w) \in M$ está em \mathcal{C} e consequentemente segue o resultado. Além disso, observe que \mathcal{C} não possui geodésicas constantes.

4. Qualquer extensão de um geodésica em \mathcal{C} está em \mathcal{C} . Logo, para qualquer geodésica em \mathcal{C} a sua extensão maximal, digamos $\gamma : (a,b) \rightarrow M$, está em \mathcal{C} e, além disso, para qualquer $t_0 \in (a,b)$ temos que $\gamma|_{(a,t_0]}$ e $\gamma|_{[t_0,b)}$ pertencem a \mathcal{C} .

Figura 13 – Esboço de um subconjunto \mathcal{C}_1 e de um intervalo J_w .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Consideraremos agora alguns exemplos concretos referentes à discussão acima. Nem todos eles serão utilizados nesta tese, mas mesmo assim servirão para ilustrar o escopo bastante amplo das definições acima.

Exemplo 3.11. Seja (M, ∇) uma variedade afim e $\mathcal{C} \equiv \mathcal{D}$. Afirmamos que \mathcal{C} é o conjunto formado por todas as geodésicas não-constantes de (M, ∇) (a menos de reparametrizações afins). Observe que $\mathcal{C}_1 \equiv \mathbb{S}_h^1 M$. Considere $\alpha : I \rightarrow M$ uma geodésica não-constante e um instante $t_0 \in I$. Seja $v := \alpha'(t_0)$. Como α não é constante, $v \neq 0$, então podemos definir o seguinte vetor

$$w := \frac{v}{|v|_h} \in \mathbb{S}_h^1 M.$$

Para $t \in I$ temos que,

$$(t - t_0) \cdot v \in \mathcal{D} \text{ and } \alpha(t) = \exp((t - t_0) \cdot v) = \exp((t - t_0)|v|_h \cdot w) \Rightarrow (t - t_0)|v|_h \in J_w.$$

Dessa forma, se definirmos

$$I_w := \{(t - t_0)|v|_h : t \in I\}$$

temos que $I_w \subset J_w$. Assim $\gamma : s \in I_w \mapsto \exp(s \cdot w) \in M$ está em \mathcal{C} e é uma reparametrização afim de α .

Exemplo 3.12. Considere novamente uma variedade afim (M, ∇) porém tomando $C \equiv \mathcal{D}_p$, onde $p \in M$. Note que, $C \cap \mathcal{Z} = \{0_p := 0_{T_p M}\}$. Seja $\alpha : I \rightarrow M$ uma geodésica não-constante tal que $\alpha(t_0) = p$ para algum $t_0 \in I$. Procedendo de forma similar ao exemplo anterior, podemos mostrar que, a menos de reparametrizações afins, esta geodésica pertence a \mathcal{C} . Portanto, \mathcal{C} é o conjunto formado por todas as geodésicas que podem estender-se para passar por p , a menos de reparametrizações afins.

Exemplo 3.13. Sejam (M, g) uma variedade semi-riemanniana e $S \subset M$ uma subvariedade (mergulhada) semi-riemanniana de codimensão > 0 . Denote por $NS \subset TM$ o fibrado normal de S em M . Considere

$$C = NS \cap \mathcal{D}$$

e $\exp_{\perp} := \exp|_C : C \rightarrow M$ (a aplicação exponencial normal a S em M). Pode-se checar que neste caso \mathcal{C} é a coleção de todas as geodésicas de (M, g) que podem ser estendidas como geodésicas normais a S a menos de reparametrizações afins.

Exemplo 3.14. Seja (M, g) uma variedade lorentziana. Denotaremos por \mathcal{C}_p o fecho de \mathcal{T}_p em $T_p M$. Dessa forma, $0_p \in \mathcal{C}_p$ e $\mathcal{C}_p \setminus \{0_p\}$ coincide com o conjunto de vetores causais em $T_p M$. Agora, considere:

- i. $C = (\mathcal{T}_p \cup \{0_p\}) \cap \mathcal{D}$. Portanto, \mathcal{C} é a coleção de todas as geodésicas tipo-tempo através de p (a menos de reparametrizações afins e/ou extensões).
- ii. $C = (\Lambda_p \cup \{0_p\}) \cap \mathcal{D}$, onde Λ_p é o conjunto formado por todos os vetores tipo-luz de $T_p M$. Assim, \mathcal{C} é a coleção de todas as geodésicas tipo-luz através de p (a menos de reparametrizações afins e/ou extensões).
- iii. $C = \mathcal{C}_p \cap \mathcal{D}$. Logo, \mathcal{C} é a coleção de todas as geodésicas causais através de p (a menos de reparametrizações afins e/ou extensões).

Agora estamos prontos para enunciar nosso primeiro resultado principal. Este fornece uma caracterização analítica unificada da pseudoconvexidade e desaprisionamento para uma classe ampla de geodésicas (veja o corolário 4.1).

Teorema 3.15. *Se $\exp|_C$ é uma aplicação própria, então a coleção \mathcal{C} definida em (9) é pseudoconvexa e desaprisionada. Se $C \cap \mathcal{Z}$ é compacto e C é fechada em \mathcal{D} , então vale a recíproca dessa afirmação.*

Demonstração. Vamos provar a primeira afirmação do teorema. Portanto, vamos assumir que $\exp|_C : C \rightarrow M$ é uma aplicação própria. Suponha que \mathcal{C} não é desaprisionada, i.e., é aprisionada. Seja $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ (com $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) uma geodésica inextensível em \mathcal{C} e $t_0 \in (a, b)$ para o qual $\overline{\gamma[t_0, b]}$ é compacto (o caso em que $\gamma|_{(a, t_0]}$ é compacto é análogo). Considere $\gamma(t) = \exp(t \cdot w)$ para $t \in [t_0, b)$, onde $w \in C_1$. Temos que

$$t \cdot w \in \tilde{K} := (\exp|_C)^{-1}(\overline{\gamma[t_0, b]}), \quad \forall t \in [t_0, b),$$

com \tilde{K} compacto em C , e conseqüentemente, compacto em TM . Seja $p := \pi(w)$, então $w \in T_pM$. Dessa forma, $t \cdot w \in T_pM \cap \tilde{K}$, para todo $t \in [t_0, b)$, e como $T_pM \cap \tilde{K}$ é compacto em T_pM , decorre que ele é h_p -limitado. Assim, $b < +\infty$. Com isso, $b \cdot w \in \tilde{K} \subset C \subset \mathcal{D}$, conseqüentemente $b \in J_w$, i.e., γ é extensível à direita, contradizendo a nossa suposição de que γ é inextensível. Logo, C é desaprisionada.

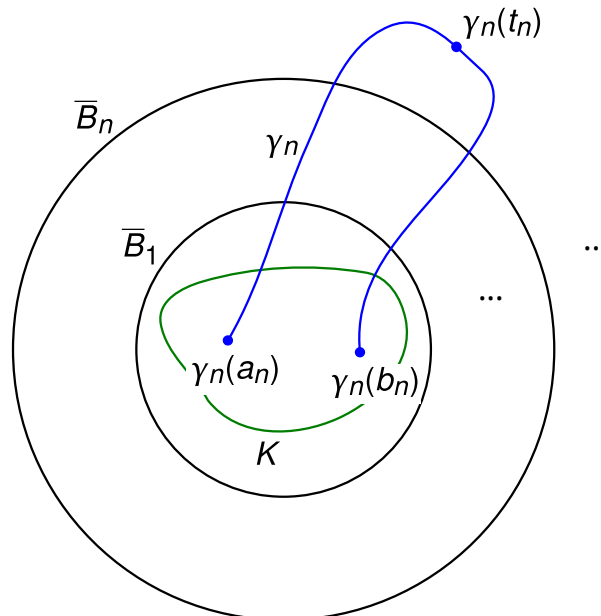
Suponha que C não é pseudoconvexa (neste caso M não é compacta). Fixe um ponto $q \in M$, e para cada $n \in \mathbb{N}^*$ considere

$$\bar{B}_n := \{p \in M : d_h(p, q) \leq n\}.$$

Temos que \bar{B}_n é compacto, devido o teorema de Hopf-Rinow para (M, h) , já que estes subconjuntos são fechados, d_h -limitados e h é uma métrica riemanniana completa. Como a pseudoconvexidade falha então existe um subconjunto compacto $K \subset M$ e uma seqüência $(\gamma_n : [a_n, b_n] \rightarrow M)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de elementos de C tal que

$$\gamma_n(a_n), \gamma_n(b_n) \in K \text{ e } \exists t_n \in [a_n, b_n] \text{ com } \gamma_n(t_n) \notin \bar{B}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Figura 14 – Subconjunto compacto K de M para o qual a pseudoconvexidade de C falha.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Escreva

$$\gamma_n(t) = \exp(t \cdot w_n), \quad w_n \in C_1, t \in [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Assim,

$$a_n \cdot w_n, b_n \cdot w_n \in \tilde{K} := (\exp|_C)^{-1}(K), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

e novamente \tilde{K} é compacto em C e, conseqüentemente, em TM . Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ temos

$$\rho_n := \pi(w_n) = \pi(a_n \cdot w_n) = \pi(b_n \cdot w_n) \in \pi(\tilde{K}).$$

O último subconjunto é compacto em M , conseqüentemente também é $\mathbb{S}_h^1 \pi(\tilde{K}) \ni w_n$. Com isso podemos escolher uma subsequência $(\gamma_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$, $w \in \mathbb{S}_h^1 M$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $w_{n_i} \rightarrow w$ em TM , $a_{n_i} \rightarrow a$ e $b_{n_i} \rightarrow b$ em \mathbb{R} . Em particular, $w \neq 0$ e $a \leq b$. Como \tilde{K} é fechado em C temos que $a \cdot w, b \cdot w \in \tilde{K} \subset C \subset \mathcal{D}$, e o fato que $a_{n_i} \leq t_{n_i} \leq b_{n_i}$ implica que $t_{n_i} \rightarrow t_0 \in [a, b]$ (a menos de passagem para uma subsequência). Agora, como $a \cdot w, b \cdot w \in \mathcal{D}_{\pi(w)}$ temos que $[a, b] \cdot w \subset \mathcal{D}_{\pi(w)}$, pois o último conjunto é estrelado. Isto resulta que $t_0 \cdot w \in \mathcal{D}$, e dessa forma

$$\gamma_{n_i}(t_{n_i}) = \exp(t_{n_i} \cdot w_{n_i}) \rightarrow \exp(t_0 \cdot w).$$

Em particular, $(\gamma_{n_i}(t_{n_i}))$ deve ser d_h -limitado, o que é impossível pela natureza de sua construção. Logo, \mathcal{C} é pseudoconvexa.

Agora, mostraremos a segunda afirmação. Temos que \mathcal{C} é pseudoconvexa e desaprisionada, com $C \cap \mathcal{Z}$ compacto e C fechado em \mathcal{D} . Seja $K \subset M$ um subconjunto compacto. Escolha uma sequência $(v_n) \subset (\exp|_C)^{-1}(K)$. Devemos mostrar que existe uma subsequência de (v_n) que converge para um elemento de $(\exp|_C)^{-1}(K)$. Sem perda de generalidade, suponha que $v_n \neq 0$ para todo n (do contrário, tome a subsequência tendo todos os seus termos nulos e, em seguida, escolha uma subsequência convergente, para um elemento de $(\exp|_C)^{-1}(K)$, desta subsequência nula – a existência desta subsequência convergente segue da hipótese de compacidade de $C \cap \mathcal{Z}$ e do fato de que $(\exp|_C)^{-1}(K)$ é fechado em C). Defina

$$w_n := \frac{v_n}{|v_n|_h} \text{ e } a_n := |v_n|_h > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Por construção $w_n \in C_1$ e $[0, a_n] \subset J_{w_n}$. Seja $\rho_n := \pi(w_n) \equiv \pi(v_n)$. Como $0_{\rho_n} \in C \cap \mathcal{Z}$, que é compacto em \mathcal{D} (e, conseqüentemente, em TM), temos que

$$\rho_n \in \pi(C \cap \mathcal{Z}), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

e o último subconjunto é compacto em M . Assim, $w_n \in \mathbb{S}_h^1 \pi(C \cap \mathcal{Z})$. Dessa forma, a menos de passagem para uma subsequência, existe $w \in \mathbb{S}_h^1 M$ tal que $w_n \rightarrow w$. Agora considere para cada $n \in \mathbb{N}^*$, a geodésica

$$\gamma_n : t \in [0, a_n] \mapsto \exp(t \cdot w_n) \in M,$$

que está em \mathcal{C} por construção. Considere o subconjunto compacto $\mathcal{K} := \pi(C \cap \mathcal{Z}) \cup K \subset M$. Como $\gamma_n(0) = \rho_n, \gamma_n(a_n) = \exp(v_n) \in \mathcal{K}$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$, pela pseudoconvexidade existe um subconjunto compacto $\mathcal{K}^* \subset M$ tal que $\gamma_n[0, a_n] \subset \mathcal{K}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Seja $\gamma :$

$[0, b) \rightarrow M$ a geodésica inextensível à direita tal que $\gamma'(0) = w$. Então, $t \cdot w \in \mathcal{D}$ para qualquer $t \in [0, b)$ e

$$\gamma(t) = \exp(t \cdot w), \quad \forall t \in [0, b).$$

Afirmamos que a sequência de números reais (a_n) é limitada. Suponha que não. Passando para uma subsequência se necessário, temos que $a_n \rightarrow +\infty$. Fixe $0 < t < b$. Eventualmente $a_n > t$. Assim, por um lado,

$$t \cdot w_n = \left(\frac{t}{a_n} \right) \cdot v_n \in \mathcal{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

pois $0 < t/a_n < 1$. Por outro lado,

$$t \cdot w_n \rightarrow t \cdot w \in \overline{\mathcal{C}} \cap \mathcal{D} \equiv \overline{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \equiv \mathcal{C}$$

pois \mathcal{C} é fechado em \mathcal{D} . Concluimos que $t \cdot w \in \mathcal{C}$ e como $t > 0$ então $w \in \mathcal{C}_1$. Temos que $\gamma_n(t) \rightarrow \gamma(t)$, assim $\gamma(t) \in \mathcal{K}^*$. Dessa forma, $\gamma \in \mathcal{C}$ e $\gamma[0, b) \subset \mathcal{K}^*$ o que contradiz o fato de que \mathcal{C} é desaprisionado. Portanto, segue a afirmação de limitação para sequência (a_n) .

A menos de passagem para uma subsequência, podemos assumir que $a_n \rightarrow a$. Seja $v := a \cdot w$. Então, $v_n \rightarrow v \in \overline{\mathcal{C}}$. Dessa forma, resta mostrar que $v \in \mathcal{D}$. Do contrário, temos que $b \leq a$. Para qualquer $0 < t < b \leq a$, eventualmente $a_n > t$ e um argumento análogo ao anterior mostra que $\gamma \in \mathcal{C}$ e $\gamma[0, b) \subset \mathcal{K}^*$, o que é novamente uma contradição. Dessa forma, $a < b$ e, conseqüentemente, $v \in \mathcal{D} \cap \overline{\mathcal{C}} = \overline{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \equiv \mathcal{C}$ e $\exp(v) \in K$. Portanto, $v \in (\exp|_{\mathcal{C}})^{-1}(K)$. \square

3.3 CONEXIDADE GEODÉSICA EM VARIEDADES AFINS

Nesta seção utilizaremos alguns resultados da seção 3.1 para tratar da questão da conexidade geodésica em uma variedade afim (M, ∇) . Iniciamos definindo os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{S}_p := \{v \in \mathcal{D}_p : (d \exp)_v \text{ é singular}\}$$

e

$$\text{Conj}(p) := \exp_p(\mathcal{S}_p),$$

onde p é um ponto de M . Note que o último conjunto na verdade é o conjunto formado por todos os pontos conjugados a p ao longo de segmentos de geodésicas que partem de p .

Definição 3.16. Dizemos que a variedade afim conexa (M, ∇) é uma **variedade fracamente Wiedersehen em p** ou **WW-variedade em p** , com $p \in M$, se

- i. $\text{Conj}(p)$ é um subconjunto fechado de M ; e

ii. $M \setminus \text{Conj}(p)$ é conexo.

Se as condições (i) e (ii) se mantêm para todos os pontos de (M, ∇) , então dizemos que (M, ∇) é **WW-variedade**.

A definição a seguir é uma restrição da definição 2.2 em [18] à aplicação exponencial:

Definição 3.17. Sejam (M, ∇) uma variedade afim e $p \in M$. Dizemos que \exp_p é **fracamente própria** se para qualquer curva contínua⁴ $\bar{\alpha} : [0, a) \rightarrow T_p M$ ($0 < a \leq +\infty$) tal que $\bar{\alpha}[0, a) \subset \mathcal{D}_p$ e $\exp_p \circ \bar{\alpha} : [0, a) \rightarrow M$ é extensível à direita, existe um subconjunto compacto $K \subset \mathcal{D}_p$ que contém $\bar{\alpha}[0, a)$.

Usando estes conceitos, Costa e Silva e Flores obtiveram o teorema 1.4 sobre conexidade geodésica em uma variedade afim em [18]. Agora, nosso objetivo é melhorar o teorema 1.4. Para isso vamos primeiramente relacionar os conceitos de fracamente própria e de continuação com respeito à aplicação exponencial, conectando assim esta seção com a teoria de Heinboldt-Browder.

Proposição 3.18. Sejam (M, ∇) uma variedade afim e $p \in M$. Se a aplicação exponencial $\exp_p : \mathcal{D}_p \rightarrow M$ é fracamente própria, então \exp_p possui a propriedade de continuação para $\mathcal{P}^\infty(M)$.

Demonstração. Sejam $\alpha \in \mathcal{P}^\infty(M)$ e $\bar{\alpha} : [0, b) \subset [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}_p$ uma curva contínua tal que $\exp_p \circ \bar{\alpha} = \alpha|_{[0, b)}$. Como \exp_p é fracamente própria, então $\bar{\alpha}[0, b) \subset K$, para algum subconjunto compacto K de \mathcal{D}_p .

Seja $(t_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ uma sequência em $[0, b)$ tal que $t_k \rightarrow b$. Como $\bar{\alpha}(t_k) \in K$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, então, a menos de passagem para uma subsequência, temos que $(\bar{\alpha}(t_k))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge em \mathcal{D}_p . Logo, a aplicação exponencial \exp_p tem a propriedade de continuação para $\mathcal{P}^\infty(M)$. \square

O resultado a seguir estabelece a conectividade geodésica de um ponto p através da sobrejetividade de uma aplicação de recobrimento suave. Além disso, também nos dá informação sobre o número de segmentos de geodésicas que conectam p a um outro dado ponto q .

Teorema 3.19. Sejam (M, ∇) uma variedade afim conexa e p um ponto de M . Suponha que

- i. \exp_p tem a propriedade de continuação para $\mathcal{P}^\infty(M)$ (o que ocorre, por exemplo, se \exp_p é fracamente própria – veja a proposição 3.18); e

⁴ Em [18] é exigido que $\bar{\alpha}$ seja uma curva suave por partes (e regular) em \mathcal{D}_p . Contudo isso acaba sendo uma tecnicidade desnecessária em nosso contexto, uma vez que nas situações que envolvem este conceito aqui temos também que a aplicação exponencial \exp_p é um difeomorfismo local e assim, um levantamento de uma curva suave por partes acaba também sendo suave por partes.

ii. (M, ∇) é uma WW-variedade em p .

Então, a aplicação $\varphi_p := \exp_p|_{\mathcal{N}_p} : \mathcal{N}_p \rightarrow M \setminus \text{Conj}(p)$ é uma aplicação de recobrimento suave, onde

$$\mathcal{N}_p := \exp_p^{-1}(M \setminus \text{Conj}(p)).$$

Em particular, para qualquer $q \in M \setminus \text{Conj}(p)$ existe pelo menos um segmento de geodésica que conecta p a q .

Demonstração. Pelo item (ii) temos que os subconjuntos \mathcal{N}_p and $M \setminus \text{Conj}(p)$ são abertos em \mathcal{D}_p e M , respectivamente. Além disso, estes subconjuntos são não-vazios pelo teorema de Sard (veja [36, Teo. 6.10, Pág. 129]). Dessa forma,

$$v \in \mathcal{N}_p \Rightarrow \exp_p(v) \notin \text{Conj}(p) \Rightarrow v \notin \mathcal{S}_p,$$

e, conseqüentemente, φ_p é um difeomorfismo local pelo teorema da função inversa.

Sejam $\alpha : [0, 1] \rightarrow M \setminus \text{Conj}(p)$ um caminho em $\mathcal{P}^\infty(M \setminus \text{Conj}(p))$ e, conseqüentemente, um caminho também em $\mathcal{P}^\infty(M)$. Agora, considere $\bar{\alpha} : [0, l) \subset [0, 1] \rightarrow \mathcal{N}_p$ uma curva contínua em $\mathcal{N}_p \subset \mathcal{D}_p$ tal que

$$\varphi_p \circ \bar{\alpha} \equiv \exp_p \circ \bar{\alpha} = \alpha|_{[0, l)}.$$

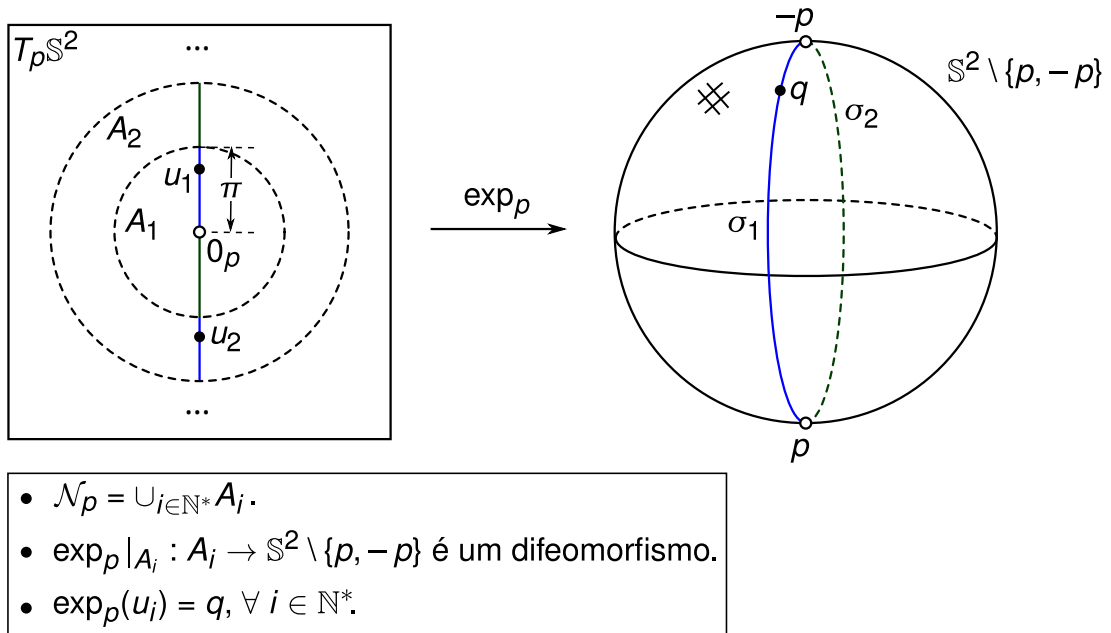
Como a aplicação exponencial \exp_p tem a propriedade de continuação para $\mathcal{P}^\infty(M)$, então existe uma sequência $(t_k) \subset [0, l)$ com $t_k \rightarrow l$ para o qual $\bar{\alpha}(t_k)$ converge em \mathcal{D}_p para algum $\hat{v} \in \mathcal{D}_p$. Pela continuidade, temos que $\exp_p(\hat{v}) = \alpha(l) \in \alpha[0, 1] \subset M \setminus \text{Conj}(p)$. Assim, $\hat{v} \in \mathcal{N}_p$. Logo, a aplicação φ_p tem a propriedade de continuação para $\mathcal{P}^\infty(M \setminus \text{Conj}(p))$. Portanto, pela proposição 3.8, a aplicação $\varphi_p : \mathcal{N}_p \rightarrow M \setminus \text{Conj}(p)$ é uma aplicação de recobrimento suave. \square

Observação 3.20. Seguem alguns comentários da proposição 3.18 e do teorema 3.19:

1. Existem algumas situações concretas onde o conceito de fracamente própria se aplica. Por exemplo, seja (M, g) ou uma variedade riemanniana completa ou uma variedade de Lorentz completa que admite um campo vetorial tipo-tempo paralelo V . Então, para qualquer $p \in M$, a aplicação exponencial $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é fracamente própria, mas não necessariamente própria (e.g., quando M é compacta) – para mais detalhes veja [18, Proposições 2.6, 2.7].
2. Podemos ter que $p \in \text{Conj}(p)$, i.e., o ponto p é conjugado a ele mesmo ao longo de um laço geodésico. Dessa forma, $0_p \notin \mathcal{N}_p$. Esta situação ocorre, por exemplo, para qualquer ponto da esfera unitária \mathbb{S}^m munida com a métrica induzida do espaço euclidiano $m + 1$ -dimensional, $m \geq 2$. Observe que todas as hipóteses do teorema 3.19 são satisfeitas, pois \mathbb{S}^m é uma variedade riemanniana completa (veja item (1)) e para qualquer $p \in \mathbb{S}^m$ temos que $\text{Conj}(p) = \{p, -p\}$. A aplicação de recobrimento suave φ_p é trivial para $m \geq 2$: \mathcal{N}_p tem uma quantidade infinita

de componentes conexas em que cada uma delas é difeomórfica a $\mathbb{S}^m \setminus \{p, -p\}$; isto é esperado para $m > 2$ pois $\mathbb{S}^m \setminus \{p, -p\}$ é simplesmente conexa, porém isto também se mantém para $m = 2$, apesar de $\pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{p, -p\}) = \mathbb{Z}$. O teorema 3.19 nos diz que para $q \in \mathbb{S}^m \setminus \{p, -p\}$ existe uma quantidade infinita de segmentos de geodésicas que conectam p a q , porém vale ressaltar que, neste caso, todos estes segmentos são partes de um geodésica fechada (completa) que passa por p e q (veja a figura 15). Vale mencionar que, neste caso, como $p \in \text{Conj}(p)$, não podemos aplicar o teorema 3.19 para $q = p$.

Figura 15 – A aplicação de recobrimento $\varphi_p : \mathcal{N}_p \rightarrow \mathbb{S}^m \setminus \{p, -p\}$ para $m = 2$.



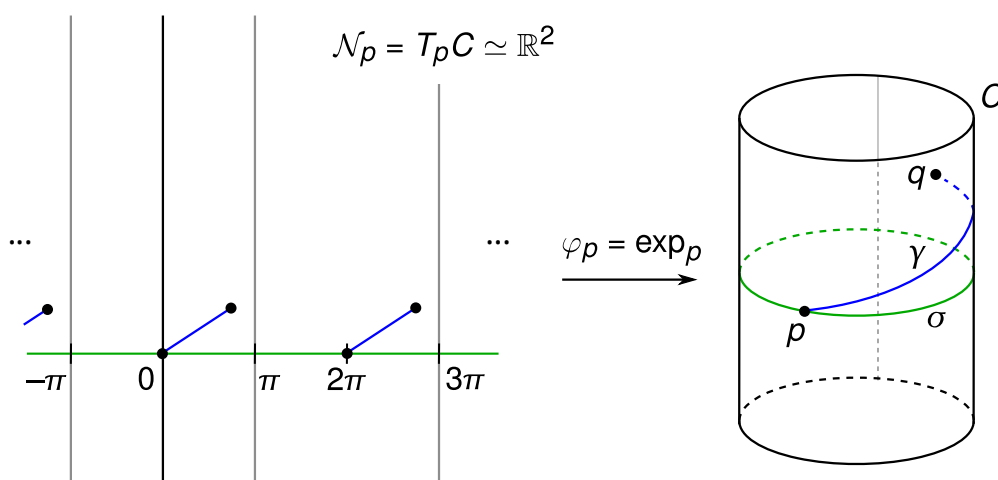
Fonte: Elaborada pelo autor.

3. A discussão do item anterior pode ser contrastada com o cilindro riemanniano plano bidimensional C (geodesicamente completo). Neste caso $\text{Conj}(p) = \emptyset$, para todo $p \in C$, e assim $\mathcal{N}_p = T_p C \simeq \mathbb{R}^2$. Então $\varphi_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow C$ é o recobrimento universal de C com multiplicidade infinita. Para quaisquer $p, q \in C$, o teorema 3.19 nos garante que existe uma quantidade infinita de segmentos de geodésicas que conectam p a q , neste caso, até se $p = q$ – neste último caso, novamente aqui estes segmentos são partes de uma mesma geodésica fechada através de p (veja a figura 16).

O resultado a seguir é uma versão generalizada do teorema de Hadamard-Cartan riemanniano (veja o teorema 2.66) para variedades afins (c.f. [6, Teo. 9, Pág. 140]):

Corolário 3.21 (Teorema de Hadamard-Cartan Generalizado). *Sejam (M^m, ∇) uma variedade afim conexa e $p \in M$. Se $\text{Conj}(p) = \emptyset$ e a aplicação exponencial \exp_p tem a propriedade de continuação para $\mathcal{P}^\infty(M)$, então:*

Figura 16 – A aplicação de recobrimento $\varphi_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow C$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

- i.* Ou $\pi_1(M)$ é trivial ou infinito (enumerável).
- ii.* Se M é simplesmente conexa, então M é difeomorfa a \mathbb{R}^m . Neste caso existe um único segmento de geodésica (a menos de reparametrizações afins) que conecta um ponto qualquer $q \in M$ a p .
- iii.* Se M não é simplesmente conexa, então para $q \in M$ existe uma quantidade infinita⁵ (enumerável) de segmentos de geodésicas de p a q . Em particular, existem uma quantidade infinita de laços geodésicos em p .

Demonstração. Aqui faremos uso da notação do teorema 3.19. Como $\text{Conj}(p) = \emptyset$ então $\mathcal{N}_p \equiv \mathcal{D}_p$. Como \mathcal{D}_p é aberto e estrelado em T_pM , então \mathcal{D}_p é difeomorfo a \mathbb{R}^m . Observe que as hipóteses do teorema 3.19 se verificam aqui. Dessa forma, a aplicação exponencial $\exp_p : \mathcal{D}_p \rightarrow M$ é uma aplicação de recobrimento universal suave. Portanto **(i)** se mantém pelo lema 8 em [6].

Se M é simplesmente conexa, então a aplicação de recobrimento \exp_p é trivial. Como M é conexa, então as variedades $\mathcal{D}_p \simeq \mathbb{R}^m$ e M são difeomorfas.

Agora, se M não é simplesmente conexa, então $\pi_1(M)$ tem um quantidade infinita de elementos (por **(i)**). Consequentemente, a multiplicidade do recobrimento $\exp_p : \mathcal{D}_p \rightarrow M$ é infinita. Portanto, segue o item **(iii)**. □

⁵ Como mencionado na observação 3.20(2-3), estes segmentos podem ser partes de uma mesma geodésica fechada.

4 CONEXIDADE GEODÉSICA EM VARIEDADES DE LORENTZ

Neste capítulo, começaremos caracterizando a pseudoconvexidade causal e o desaprisionamento causal através da aplicação exponencial – fato que será necessário no decorrer do capítulo. Em seguida, adaptaremos a propriedade de continuação, vista no capítulo anterior, para o contexto das variedades lorentzianas, i.e., definiremos quando a aplicação exponencial tem a propriedade de continuação causal. Além disso, forneceremos condições suficientes para que a aplicação exponencial de uma variedade de Lorentz tenha esta propriedade. Em seguida, daremos condições suficientes (envolvendo a propriedade de continuação causal) para a conectividade geodésica, por meio de geodésicas causais, entre pontos causalmente relacionados de uma variedade lorentziana – incluindo a existência de laços geodésicos tipo-tempo. Encerraremos o capítulo apresentando uma nova versão lorentziana do teorema de Hadamard-Cartan em que utilizamos hipóteses estritamente mais fracas do que hiperbolicidade global e 1-conectividade futura – estas últimas usadas como hipóteses no teorema de Hadarmard-Cartan lorentziano tradicional [9, Prop. 11.16].

4.1 PROPRIEDADE DE CONTINUAÇÃO CAUSAL PARA A APLICAÇÃO EXPONENCIAL

Nesta seção, particularizaremos as ideias vistas no capítulo anterior para uma variedade de Lorentz (M^m, g) , onde $m \geq 2$, pensada como variedade afim munida da conexão de Levi-Civita de g .

Começamos esta seção apresentando uma aplicação do teorema 3.15 visto no capítulo anterior. Para isto, considere o conjunto

$$C_p = \mathcal{C}_p \cap \mathcal{D},$$

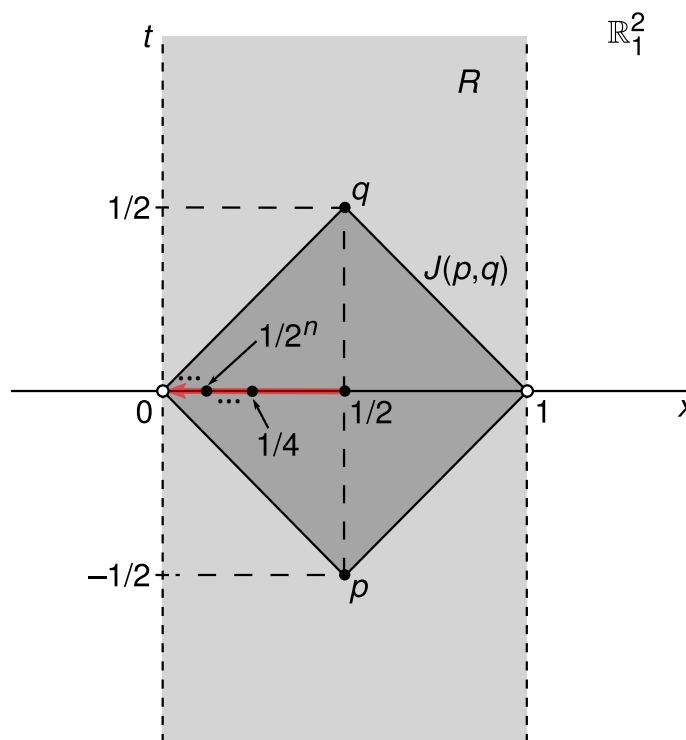
onde $\mathcal{C}_p = \overline{\mathcal{T}_p}$. Dessa forma, a coleção \mathcal{C} definida em (9) é formada por todas as geodésicas causais em (M, g) através de p (a menos de reparametrizações afins e/ou extensões) – veja o exemplo 3.14(iii). Como C_p é fechado em \mathcal{D} e $C_p \cap \mathcal{Z} = \{0_p\}$ é compacto, então a pseudoconvexidade causal e o desaprisionamento causal de \mathcal{C}^1 fica caracterizada através da aplicação exponencial pelo teorema 3.15. De forma mais precisa:

Corolário 4.1. *Seja (M, g) uma variedade de Lorentz e $p \in M$. O conjunto de todas as geodésicas causais de (M, g) que passam por p (ou que podem ser estendidas para passar por p) é causalmente pseudoconvexo e desaprisionado se, e só se, $\exp_p|_{C_p}$ é uma aplicação própria. Em particular, se (M, g) é causalmente pseudoconvexa e desaprisionada, então $\exp_q|_{C_q}$ é própria para todo $q \in M$.*

¹ A fim de evitar repetições, daqui em diante quando mencionarmos a frase “causalmente pseudoconvexa e desaprisionada” significa “causalmente pseudoconvexa” e “causalmente desaprisionada”.

Observação 4.2. Com vistas às aplicações físicas, muitas vezes é conveniente que as propriedades geométricas dos espaços-tempos sejam derivadas da sua posição na chamada **escada causal** – veja [39]. O degrau mais alto dessa escada é ocupado pelos espaços-tempo globalmente hiperbólicos. É bem conhecido que se um espaço-tempo (M,g) é globalmente hiperbólico, então ele é causalmente pseudoconvexo e desaprisionado (veja, e.g., [9, Prop. 7.36]). A recíproca, porém é falsa. Isto é ilustrado pela faixa $R := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\}$ (com a restrição da métrica) no espaço-tempo de Minkowski $(\mathbb{R}^2, -dt^2 + dx^2)$. De fato, note que $J(p,q)$ não é compacto, onde $p = (1/2, -1/2)$ e $q = (1/2, 1/2)$, e, conseqüentemente, este espaço-tempo não é globalmente hiperbólico.

Figura 17 – O subconjunto $J(p,q)$ não é compacto em R .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Denotaremos por

$$I(p) = \{q \in M : \exists \text{ segmento de curva tipo-tempo suave por partes que conecta } p \text{ e } q\}$$

e

$$J(p) = \{q \in M : \exists \text{ segmento de curva causal suave por partes que conecta } p \text{ e } q\} \cup \{p\}.$$

Note que o subconjunto $I(p)$ é aberto em M (veja o lema 2.72).

O teorema 3.19, apesar de nos garantir a existência de segmentos geodésicos juntamente com a sua multiplicidade, aqui no contexto de variedades lorentzianas tem

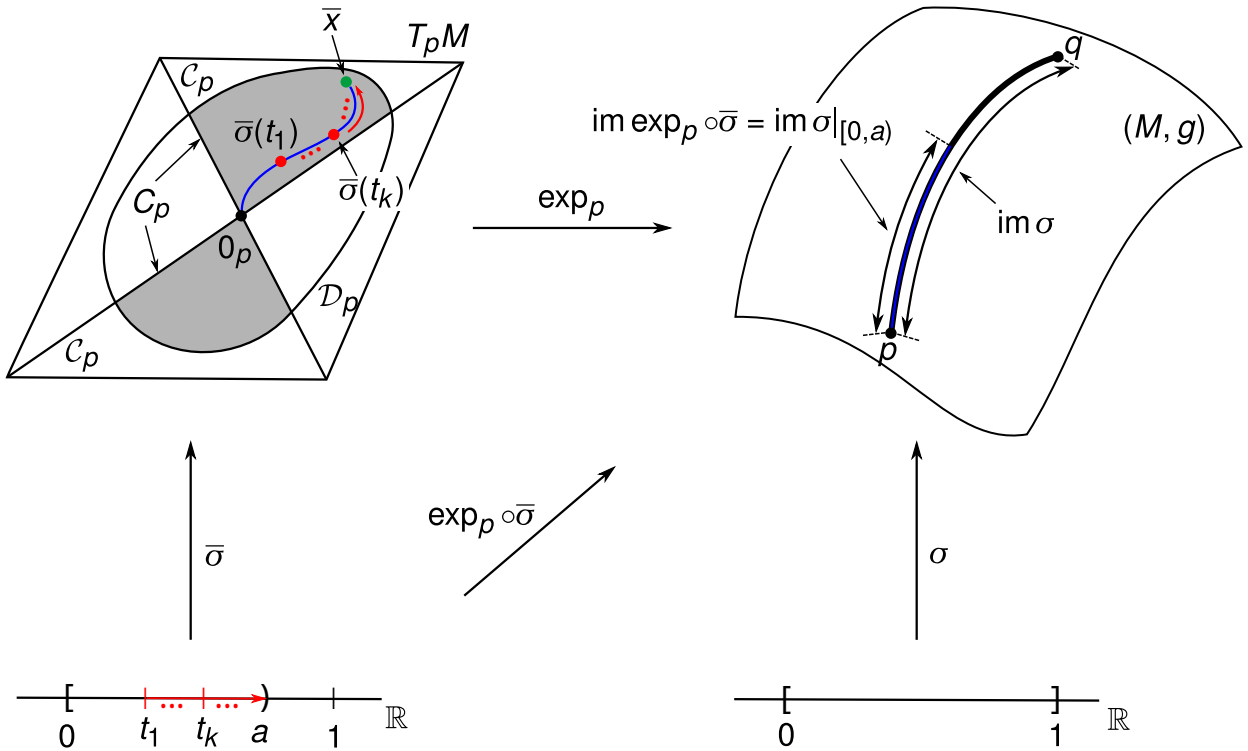
uma desvantagem, pois exige a propriedade de continuação para todas as curvas suaves por partes na variedade. Entretanto, no caso lorentziano, seria interessante que apenas condições sobre a subclasse das curvas *causais* fossem suficientes para tais conclusões. Portanto, tendo isto em mente, a próxima definição fará uma pequena adaptação da noção de continuação apresentada na definição 3.3.

Definição 4.3. Sejam (M, g) uma variedade de Lorentz e $p \in M$. Dizemos que a aplicação exponencial \exp_p tem a **propriedade de continuação causal** (CCP)² se para qualquer curva causal (suave por partes) $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ com $\sigma(0) = p$ e para qualquer curva contínua $\bar{\sigma} : [0, a) \subset [0, 1] \rightarrow C_p (= C_p \cap \mathcal{D})$ tal que $\bar{\sigma}(0) = 0_p$ e

$$\exp_p \circ \bar{\sigma} = \sigma|_{[0, a)}$$

existe uma seqüência $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset [0, a)$ com $t_k \rightarrow a$ para a qual $\bar{\sigma}(t_k)$ converge para algum $\bar{x} \in \mathcal{D}_p$ (e, conseqüentemente, $\bar{x} \in C_p$) – veja a figura 18.

Figura 18 – A aplicação exponencial $\exp_p : \mathcal{D}_p \rightarrow M$ tem a CCP.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O lema a seguir mostra que as propriedades de pseudoconvexidade e desaprisionamento causal de uma variedade de Lorentz passam para o espaço de recobrimento através de uma aplicação de recobrimento lorentziana. Além disso, também indica que,

² Nesta tese optamos por usar a sigla CCP formada pelas iniciais da expressão em inglês *causal continuation property* utilizada em nosso preprint intitulado de “Path-Lifting Properties of the Exponential Map with Applications to Geodesics” disponível em <<https://arxiv.org/abs/2107.14328v1>>.

considerando as aplicações exponenciais de uma variedade de Lorentz e de um recobrimento lorentziano seu, ou bem ambas possuem a CCP, ou ambas não a possuem.

Lema 4.4. *Seja $\varphi : (\hat{M}, \hat{g}) \rightarrow (M, g)$ uma aplicação de recobrimento lorentziana.*

- i. Se (M, g) é causalmente pseudoconvexa e desaprisionada, então (\hat{M}, \hat{g}) também é.*
- ii. Para cada $\hat{p} \in \hat{M}$, $\exp_{\hat{p}}^{\hat{g}}$ tem a CCP se, e só se, $\exp_{\varphi(\hat{p})}^g$ também a possui.*

Demonstração. A fim de reduzir a notação desta prova, indicaremos com $\hat{\cdot}$ os elementos referentes a (\hat{M}, \hat{g}) e sem $\hat{\cdot}$ os elementos referentes a (M, g) . Sejam $\hat{p} \in \hat{M}$ e $p = \varphi(\hat{p}) \in M$. Usando as propriedades de levantamento e de isometria local da aplicação de recobrimento lorentziana φ , temos

$$d\varphi_{\hat{p}}(\hat{D}_{\hat{p}}) = \mathcal{D}_p \text{ e } d\varphi_{\hat{p}}(\hat{C}_{\hat{p}}) = C_p \implies d\varphi_{\hat{p}}(\hat{C}_{\hat{p}}) = C_p, \quad (10)$$

assim como

$$\varphi \circ \hat{\exp}_{\hat{p}} = \exp_p \circ d\varphi_{\hat{p}}. \quad (11)$$

i.

Como (M, g) é causalmente pseudoconvexa e desaprisionada. Então, pelo corolário 4.1, $\exp_p|_{C_p}$ é própria. Sejam $\hat{K} \subset \hat{M}$ subconjunto compacto e $(\hat{v}_k) \subset (\hat{\exp}_{\hat{p}}|_{\hat{C}_{\hat{p}}})^{-1}(\hat{K})$ uma sequência arbitrária. Da compacidade de \hat{K} temos que, a menos de passagem para uma subsequência,

$$\hat{\exp}_{\hat{p}}|_{\hat{C}_{\hat{p}}}(\hat{v}_k) \rightarrow \hat{q} \implies \varphi \circ \hat{\exp}_{\hat{p}}|_{\hat{C}_{\hat{p}}}(\hat{v}_k) \rightarrow \varphi(\hat{q}) =: q \stackrel{(11)}{\implies} \exp_p(d\varphi_{\hat{p}}(\hat{v}_k)) \rightarrow q.$$

Considere uma vizinhança compacta $V \ni q$ in M . Como $\exp_p|_{C_p}$ é própria, então $W := (\exp_p|_{C_p})^{-1}(V)$ compacta em C_p e eventualmente temos que $(d\varphi_{\hat{p}}(\hat{v}_k)) \subset W$. Novamente, a menos de passagem a uma subsequência, temos

$$d\varphi_{\hat{p}}(\hat{v}_k) \rightarrow v_0$$

para algum $v_0 \in C_p$. Como $d\varphi_{\hat{p}}$ é um isomorfismo, então, pela equação (10),

$$\hat{v}_k \rightarrow (d\varphi_{\hat{p}})^{-1}(v_0) =: \hat{v}_0 \in \hat{C}_{\hat{p}}.$$

Assim, $\hat{\exp}_{\hat{p}}|_{\hat{C}_{\hat{p}}}(\hat{v}_0) = \hat{q} \in \hat{K}$, i.e., $\hat{v}_0 \in (\hat{\exp}_{\hat{p}}|_{\hat{C}_{\hat{p}}})^{-1}(\hat{K})$. Dessa forma, $(\hat{\exp}_{\hat{p}}|_{\hat{C}_{\hat{p}}})^{-1}(\hat{K})$ é compacto e, conseqüentemente, $\hat{\exp}_{\hat{p}}|_{\hat{C}_{\hat{p}}}$ é uma aplicação própria. Novamente pelo corolário 4.1, segue que (\hat{M}, \hat{g}) é causalmente pseudoconvexa e desaprisionada.

ii.

Mostraremos apenas que, se $\hat{\exp}_{\hat{p}}$ tem a CCP, então \exp_p também tem, pois a recíproca é similar.

Sejam $\alpha : [0,1] \rightarrow M$ uma curva causal com $\alpha(0) = p$ e $\bar{\alpha} : [0,a) \subset [0,1] \rightarrow C_p$ uma curva contínua tal que $\bar{\alpha}(0) = 0_p$ e $\alpha|_{[0,a)} = \exp_p \circ \bar{\alpha}$.

Seja $\beta : [0,1] \rightarrow \hat{M}$ o único levantamento de α através de φ iniciando em \hat{p} . Note que, β é uma curva causal em (\hat{M}, \hat{g}) , pois φ é uma isometria local. Considere $\bar{\beta} := (d\varphi_{\hat{p}})^{-1} \circ \bar{\alpha}$. Dessa forma, $\bar{\beta}(0) = 0_{\hat{p}}$ e por (10)

$$\bar{\beta}[0,a) \subset \hat{D}_{\hat{p}} \cap \hat{C}_{\hat{p}}. \quad (12)$$

Agora,

$$\begin{aligned} \varphi \circ \exp_{\hat{p}} \circ \bar{\beta} &\stackrel{(11)}{=} \exp_p \circ d\varphi_{\hat{p}} \circ \bar{\beta} \\ &= \exp_p \circ \bar{\alpha} \equiv \alpha|_{[0,a)}. \end{aligned}$$

Assim, pela unicidade do levantamento de $\alpha|_{[0,a)}$ através de φ iniciando em \hat{p} , temos que

$$\exp_{\hat{p}} \circ \bar{\beta} = \beta|_{[0,a)}. \quad (13)$$

Em decorrência da equação (13) e da CCP para $\exp_{\hat{p}}$, temos que existe uma sequência $(t_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \subset [0,a)$ com $t_k \rightarrow a$ para o qual $\bar{\beta}(t_k)$ converge para algum $\hat{x} \in \hat{C}_{\hat{p}}$. Dessa forma, $\bar{\alpha}(t_k) \rightarrow d\varphi_{\hat{p}}(\hat{x}) =: x \in C_p$. Portanto, a aplicação exponencial \exp_p tem a CCP. \square

O resultado a seguir fornece uma condição suficiente natural para que a aplicação exponencial tenha a propriedade de continuação causal.

Proposição 4.5. *Seja (M, g) um espaço-tempo causalmente pseudoconvexo e desaprisionado. Então, para qualquer $p \in M$, a aplicação exponencial \exp_p tem a CCP.*

Demonstração. Sejam $\sigma : [0,1] \rightarrow M$ uma curva causal com $\sigma(0) = p$ e $\bar{\sigma} : [0,a) \subset [0,1] \rightarrow C_p$ uma curva contínua tal que $\bar{\sigma}(0) = 0_p$ e

$$\exp_p \circ \bar{\sigma} = \sigma|_{[0,a)}.$$

Pelo corolário 4.1, $\exp_p|_{C_p}$ é uma aplicação própria. Assim,

$$K := (\exp_p|_{C_p})^{-1}(\sigma[0,1])$$

é um subconjunto compacto em C_p e $\bar{\sigma}[0,a) \subset K$.

Seja $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset [0,a)$ uma sequência tal que $t_k \rightarrow a$. Como a imagem da curva $\bar{\sigma}$ está contida no subconjunto compacto K de C_p , segue que $\bar{\sigma}(t_k)$ converge para algum vetor $\bar{x} \in C_p$, a menos de passagem a uma subsequência. Portanto, \exp_p tem a CCP. \square

Observação 4.6. *A recíproca da proposição 4.5 é falsa. De fato:*

1. O cilindro lorentziano $M = \mathbb{S}_1^1 \times \mathbb{R}$ não é causalmente desaprisionado, porém a sua aplicação exponencial \exp_p tem a CCP, para todo $p \in M$ – pelo lema 4.4(ii);
2. Toda forma espacial lorentziana (temporalmente orientável) flat compacta M^m não é causalmente desaprisionada. Contudo, pelo lema 4.4(ii), sua aplicação exponencial \exp_p tem a CCP, para todo $p \in M$, pois \mathbb{R}_1^m é um espaço de recobrimento de M e sua aplicação exponencial tem a CCP.

Assim, a condição geométrica de ser causalmente pseudoconvexo e desaprisionado para um espaço-tempo é estritamente mais forte do que a CCP para a aplicação exponencial de um espaço-tempo.

Da proposição anterior e do lema 4.4(ii) temos:

Corolário 4.7. *Se (M, g) admite uma aplicação de recobrimento lorentziana suave $\varphi : (\hat{M}, \hat{g}) \rightarrow (M, g)$ tal que (\hat{M}, \hat{g}) é causalmente pseudoconvexa e desaprisionada, então, para qualquer $p \in M$, a aplicação exponencial \exp_p tem a CCP.*

4.2 CONEXIDADE GEODÉSICA CAUSAL EM VARIEDADES DE LORENTZ

Nesta seção forneceremos condições suficientes para a existência de um segmento de geodésica causal conectando dois pontos p e q causalmente relacionados em uma variedade de Lorentz. Um fato importante da nossa abordagem é que ela não exclui a possibilidade de $p = q$ e dessa forma garantindo a existência de laços geodésicos tipo-tempo, quando p e q estão cronologicamente relacionados e $p = q$ – isto será importante para as discussões do próximo capítulo.

Sejam (M, g) uma variedade de Lorentz e $p \in M$. Denotaremos por $\text{Conj}_c(p)$ o conjunto formado por todos os pontos de M que são conjugados a p ao longo de geodésicas causais. Note que $\text{Conj}_c(p) \subset \text{Conj}(p) \cap J(p)$, porém esta inclusão pode ser estrita (por exemplo, isto ocorre no espaço-tempo de de Sitter).

O teorema a seguir fornece uma condição suficiente para que os pontos p e $q \in I(p)$ sejam conectados por um segmento de geodésica tipo-tempo. Na verdade esta condição é suficiente para a conexidade geodésica causal, pois se $q \in J(p) \setminus I(p)$ e existe uma curva causal que conecta p a q , então, pela proposição 2.51, existe um segmento de geodésica tipo-luz que conecta p a q .

Teorema 4.8. *Sejam (M, g) uma variedade de Lorentz e $p \in M$. Assuma que \exp_p tem a CCP. Seja $q \in I(p)$ tal que existe uma curva tipo-tempo $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ com $\sigma(0) = p$ e $\sigma(1) = q$ que não intersecta o conjunto $\text{Conj}_c(p)$. Então, existe um segmento de geodésica tipo-tempo que conecta p a q .*

Demonstração. Construiremos um levantamento (suave por partes) de σ através de \exp_p em C_p , isto é, uma curva suave por partes $\bar{\sigma} : [0, 1] \rightarrow C_p$ tal que $\bar{\sigma}(0) = 0_p$,

$\bar{\sigma}(0,1] \subset \mathcal{T}_p \cap \mathcal{D}_p$ e $\exp_p \circ \bar{\sigma} = \sigma$. Em particular, o segmento de geodésica tipo-tempo $\gamma(t) := \exp_p(t \cdot \bar{\sigma}(1))$ com $t \in [0,1]$ conecta p a q , estabelecendo o resultado desejado.

Como $0_p \notin \mathcal{S}_p$ então, pelo teorema da função inversa, existem subconjuntos abertos $U \ni 0_p$ em \mathcal{D}_p e $V \ni p$ em M tal que $V = \exp_p(U)$ e $\exp_p|_U : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo. Pela continuidade de σ existe $0 < \varepsilon < 1$ com $\sigma|_{[0,\varepsilon]} \subset V$. Assim, temos um levantamento $\bar{\sigma}|_{[0,\varepsilon]} := (\exp_p|_U)^{-1} \circ \sigma|_{[0,\varepsilon]}$ de $\sigma|_{[0,\varepsilon]}$ através de $\exp_p|_U$ em U .

A observação fundamental aqui é que como $\exp_p \circ \bar{\sigma}|_{[0,\varepsilon]} = \sigma|_{[0,\varepsilon]}$ é uma curva tipo-tempo então, pelo lema 2.36, $\bar{\sigma}(0,\varepsilon]$ está contido em um mesmo cone temporal de $T_p M$.

Seja $0 < \ell \leq 1$ a menor das cotas superiores de todo $t \in (0,1]$ para o qual $\bar{\sigma}|_{[0,t]}$ está bem definida e é suave por partes com $\bar{\sigma}|_{(0,t]}$ contida em $\mathcal{T}_p \cap \mathcal{D}_p$.

Como $\exp_p \circ \bar{\sigma}|_{[0,\ell]} = \sigma|_{[0,\ell]}$ e $\bar{\sigma}(0) = 0_p$ a CCP implica que existe alguma sequência $(t_k) \subset [0,\ell]$ com $t_k \rightarrow \ell$ para o qual $\bar{\sigma}(t_k) \rightarrow \hat{x}$ para algum $\hat{x} \in C_p = C_p \cap \mathcal{D}_p$. Denote por $\bar{\sigma}(\ell) := \hat{x}$. Como $\exp_p(\hat{x}) = \sigma(\ell) \notin \text{Conj}_c(p)$, então o segmento de geodésica causal $\eta(t) := \exp_p(t \cdot \hat{x})$, $t \in [0,1]$, conecta p a $\sigma(\ell)$ e $d(\exp_p)$ não é singular em \hat{x} , isto é, $\hat{x} \notin \mathcal{S}_p$. Novamente pela continuidade e o teorema da função inversa, temos que $\bar{\sigma}|_{[0,\ell]}$ está bem definida e $\bar{\sigma}|_{(0,\ell]}$ está contido em $\mathcal{T}_p \setminus \mathcal{S}_p$ pelo lema 2.36. Agora, observe que se considerarmos $\ell < 1$ então por um argumento similar ao anterior conseguiremos estender $\bar{\sigma}|_{[0,\ell]}$ com as propriedades definidas acima para uma curva $\bar{\sigma}|_{[0,\ell+\delta]}$, $\delta > 0$, o que contradiz a definição de ℓ . \square

Observação 4.9. A hipótese de \exp_p ter a CCP não pode ser retirada do teorema 4.8. De fato, considere a variedade lorentziana plana $(M := \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}, -dt^2 + dx^2)$ e os pontos $p = (0,0)$ e $q = (2,0)$. Temos que $q \in I(p)$. Mas não existe um segmento de geodésica tipo-tempo que conecta os pontos p e q . Note que

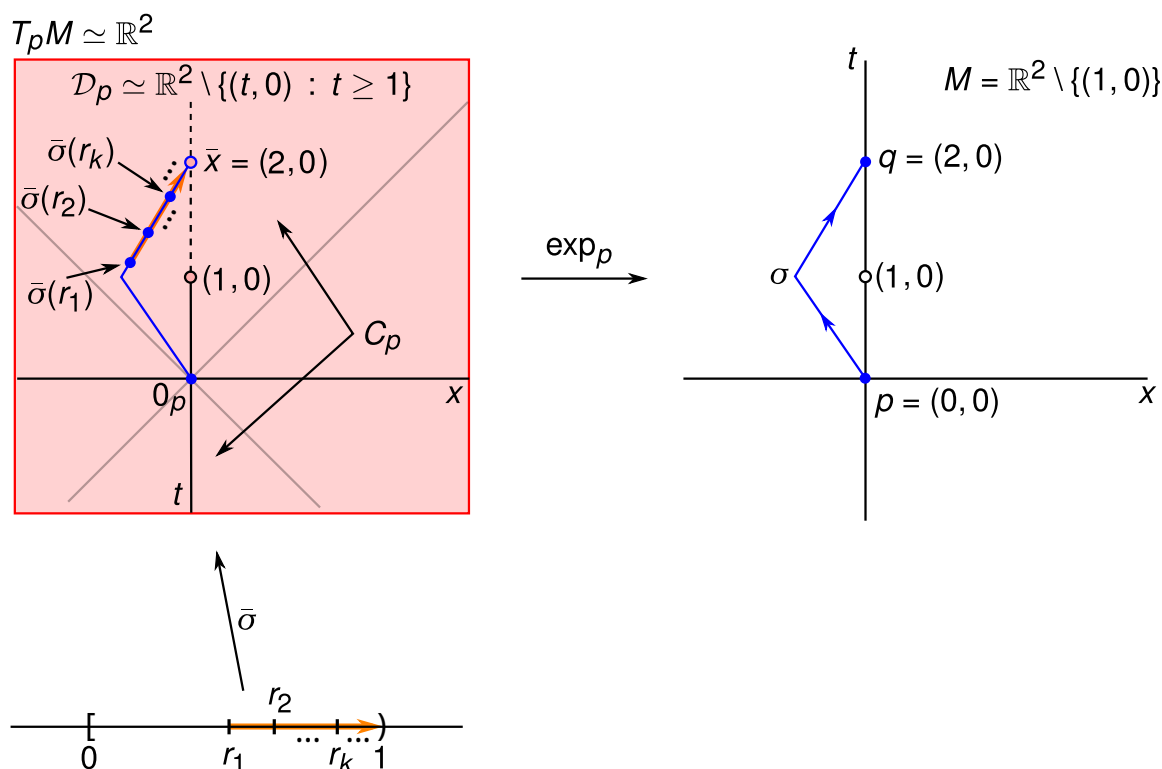
$$\mathcal{D}_p \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{(t,0) : t \geq 1\}.$$

Considere um segmento de curva tipo-tempo $\sigma : [0,1] \rightarrow M$ de p a q . Perceba que a curva $\sigma|_{[0,a]}$, $a \leq 1$, possui um levantamento em C_p através de \exp_p , porém possivelmente inextensível em \mathcal{D}_p (veja a figura 19).

Corolário 4.10. *Sejam (M, g) uma variedade de Lorentz e $p \in M$ tal que $\text{Conj}_c(p) = \emptyset$ e \exp_p tem a CCP. Então, para qualquer $q \in I(p)$, existe um segmento de geodésica tipo-tempo de p a q . Em particular, se $p = q$ então existe um laço geodésico tipo-tempo em p .*

Observação 4.11. Suponha que para quaisquer $p \in M$ e planos tipo-tempo $\Pi_p \subset T_p M$ a curvatura seccional $K(\Pi_p) \geq 0$. Então, $\text{Conj}_c(p) = \emptyset$ por [20, Prop. 2.1] (c.f. também [9, Prop. 11.13]).

Figura 19 – A aplicação exponencial \exp_p não tem a CCP.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Decorre imediatamente da corolário 4.7, do corolário 4.10 e da observação 4.11 que:

Corolário 4.12. *Seja (M, g) uma variedade de Lorentz com curvatura seccional não-negativa em planos tipo-tempo. Se (M, g) admite uma aplicação de recobrimento lorentziana $\varphi : (\hat{M}, \hat{g}) \rightarrow (M, g)$ tal que (\hat{M}, \hat{g}) é causalmente pseudoconvexa e desaprisionada, então para quaisquer pontos $p, q \in M$, conectados por uma curva causal, existe um segmento de geodésica causal que conecta p e q .*

4.3 TEOREMA DE HADAMARD-CARTAN LORENTZIANO

Nesta seção trabalharemos com os espaços-tempo causalmente pseudoconvexos e desaprisionados em que aplicaremos alguns dos resultados das seções anteriores.

O teorema a seguir é uma versão lorentziana do teorema de Hadamard-Cartan lorentziano (veja [9, Teo. 11.16, Pág. 414]):

Teorema 4.13 (Teorema de Hadamard-Cartan Lorentziano). *Sejam (M, g) um espaço-tempo causalmente pseudoconvexo e desaprisionado e $p \in M$ tal que $\text{Conj}_c(p) = \emptyset$. Então:*

- i.* A restrição da aplicação exponencial $\exp_p|_{\mathcal{T}_p^+ \cap \mathcal{D}_p} : \mathcal{T}_p^+ \cap \mathcal{D}_p \rightarrow I^+(p)$ é um difeomorfismo. Em particular, $I^+(p)$ é difeomórfico a \mathbb{R}^m e para qualquer $q \in I^+(p)$ existe um único segmento de geodésica tipo-tempo futuro-dirigido, a menos de reparametrizações, de p a q .
- ii.* Se $q \in J^+(p) \setminus \{p\}$, existe no máximo um número finito de segmentos de geodésicas tipo-luz futuro-dirigidos, a menos de reparametrizações, de p a q .
- iii.* $J^+(p)$ é um subconjunto fechado em M .

Demonstração. Primeiramente vamos estabelecer as seguintes notações, $\tau_p := \mathcal{T}_p \cap \mathcal{D}_p$ e $\tau_p^+ := \mathcal{T}_p^+ \cap \mathcal{D}_p$, onde \mathcal{T}_p^+ é o cone temporal futuro em p .

Pelo corolário 4.1, temos que $\exp_p|_{C_p}$ é uma aplicação própria. Como $\text{Conj}_C(p) = \emptyset$, então $S_p \cap C_p = \emptyset$ e, conseqüentemente, $(d \exp_p)_v$ é não-singular para cada $v \in C_p$ (i.e., para cada $v \in C_p$ existe uma vizinhança $V \ni v$ tal que $\exp_p|_V : V \rightarrow \exp_p|_V(V)$ é um difeomorfismo, pelo teorema da função inversa).

Seja $q \in M$. Temos que $A := (\exp_p|_{C_p})^{-1}(q)$ é compacto em C_p . Suponha que A tem uma infinidade de elementos (distintos). Assim, existe uma sequência de elementos (u_n) (distintos) de A que converge para um vetor u em $A \subset C_p$, pela compacidade de A . Dessa forma, $\exp_p|_{C_p}(u) = q$, pois $\exp_p|_{C_p}(u) \leftarrow \exp_p|_{C_p}(u_n) = q$. Temos que, existem abertos $U \ni u$ e $W \ni q$ tal que $\exp_p|_U : U \rightarrow W$ é um difeomorfismo. Porém, eventualmente $u_n \in U$ com $\exp_p|_U(u_n) = q$, o que contradiz a injetividade local da $\exp_p|_U$. Portanto, A é finito (podendo ser vazio), o que estabelece o item (ii).

Pela proposição 4.5, \exp_p tem a CCP. Além disso, como $\text{Conj}_C(p) = \emptyset$, então pelo teorema 4.8 segue que $\exp_p|_{\tau_p} : \tau_p \rightarrow I(p)$ é sobrejetora. Observe que a prova deste teorema pode ser adaptada obtendo que $\exp_p|_{\tau_p^+} : \tau_p^+ \rightarrow I^+(p)$ ainda é uma aplicação sobrejetora. Temos que, $\exp_p|_{C_p} : C_p \rightarrow J(p)$ é um homeomorfismo local sobrejetor, C_p é um espaço normal (conseqüentemente, Hausdorff) e $J(p)$ é um espaço conexo primeiro contável em cada ponto. Além disso, o fato de que $\exp_p|_{C_p} : C_p \rightarrow J(p)$ é uma aplicação própria implica que $\exp_p|_{C_p}$ é uma aplicação fechada. Logo, pelo teorema 7 em [14], a aplicação $\exp_p|_{C_p} : C_p \rightarrow J(p)$ é uma aplicação de recobrimento de multiplicidade finita. Dessa forma, não é difícil de ver que a restrição $\exp_p|_{\tau_p^+} : \tau_p^+ \rightarrow I^+(p)$ é uma aplicação de recobrimento suave de multiplicidade finita.

No entanto, τ_p^+ é homeomorfo a \mathbb{R}^m (i.e., $\exp_p|_{\tau_p^+} : \tau_p^+ \rightarrow I^+(p)$ é uma aplicação de recobrimento universal). Dessa forma, \mathbb{R}^m cobre $I^+(p)$ e, pelo [6, Lemma 8], $\pi_1(I^+(p))$ é ou trivial ou infinito. Como a multiplicidade da aplicação de recobrimento $\exp_p|_{\tau_p^+}$ (que é igual a cardinalidade de $\pi_1(I^+(p))$ para o recobrimento universal) é finita, então $\pi_1(I^+(p))$ é finito, conseqüentemente, trivial – $\pi_1(I^+(p))$ é simplesmente conexo. Concluimos que $\exp_p|_{\tau_p^+} : \tau_p^+ \rightarrow I^+(p)$ é uma aplicação de recobrimento trivial e, conseqüentemente, um difeomorfismo – pois τ_p^+ é conexo. Portanto, fica estabelecido o item

(i).

Agora, checaremos o item (iii). Antes, lembre-se que

$$\overline{J^+(p)} = \overline{I^+(p)}.$$

Seja $q \in \overline{J^+(p)}$. Escolha uma sequência $(q_k) \subset I^+(p)$ convergindo em M para q . Do item (i), para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um único $v_k \in \tau_p^+ \subset C_p$ tal que $\exp_p(v_k) = q_k$. Como $\exp_p|_{C_p}$ é uma aplicação própria, então, a menos de passagem para uma subsequência, temos que $v_k \rightarrow v_0$, onde $v_0 \in C_p$. Assim, $q \equiv \exp_p(v_0)$ e, conseqüentemente, $q \in J^+(p)$. Isto é, $J^+(p)$ é um subconjunto fechado. \square

Observação 4.14.

1. Note que, pela dualidade temporal, o teorema 4.13 pode ser reescrito para o passado de um ponto.
2. Nesta versão do teorema de Hadamard-Cartan não foram requisitadas do espaço-tempo a hiperbolicidade global e a 1-conectividade futura, diferentemente da versão existente deste teorema em [9, Teo. 11.16, Pág. 414].

Um espaço-tempo (M, g) é dito ser **causalmente simples** se ele for causal e $J^\pm(p)$ são subconjuntos fechados em M para todo ponto $p \in M$ – veja [39].

Concluimos este capítulo com o corolário a seguir que é uma variante da proposição 2 em [8] e do teorema principal em [20].

Corolário 4.15. *Seja (M, g) um espaço-tempo causal, causalmente pseudoconvexo e desaprisionado. Assuma que para qualquer $p \in M$ temos que $\text{Conj}_c(p) = \emptyset$. Então, (M, g) é causalmente simples. Se adicionalmente temos que todas as geodésicas causais são completas, então (M, g) é globalmente hiperbólico.*

Demonstração. A primeira conclusão do corolário, i.e. (M, g) é causalmente simples, decorre imediatamente do teorema 4.13(iii) e da observação 4.14(1).

Para checarmos a última afirmação, basta mostrarmos que (M, g) é 1-conexo futuro³ em vista do teorema principal em [20].

Pelo teorema 4.13, é suficiente mostrarmos que qualquer curva tipo-tempo futuro-dirigida $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$ é homotópica via curvas tipo-tempo futuro-dirigidas ao único segmento de geodésica tipo-tempo futuro-dirigido $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ de p a q .

³ I.e., para quaisquer $p, q \in M$ com $p \ll q$ e quaisquer dois segmentos de geodésicas tipo-tempo futuro-dirigidos de p a q existe uma homotopia com as extremidades fixas em p e q que deforma continuamente um destes segmentos de geodésicas no outro via curvas tipo-tempo futuro-dirigidas de p a q .

O teorema 4.13(i) implica que existe um único segmento de curva suave por partes $\beta : [0,1] \rightarrow T_p M$ com $\beta(0) = 0_p$ e $\beta(0,1] \subset \mathcal{T}_p^+$ tal que $\exp_p \circ \beta = \alpha$. Assim, o segmento de geodésica σ é dado por

$$\sigma(t) = \exp_p(t \cdot \beta(1)), \quad t \in [0,1].$$

Defina a aplicação contínua $\bar{H} : [0,1]^2 \rightarrow \mathcal{T}_p^+ \cup \{0_p\}$ dada por

$$\bar{H}(s,t) := \begin{cases} (t/s) \cdot \beta(s), & \text{se } 0 \leq t \leq s, \\ \beta(t), & \text{se } s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

quando $0 < s \leq 1$; e $\bar{H}(0,t) := \beta(t)$ para $t \in [0,1]$. Agora, defina a aplicação contínua $H := \exp_p \circ \bar{H}$. Observe que H é uma homotopia com as extremidades fixas em p e q que deforma α em σ via curvas tipo-tempo futuro-dirigidas de p a q . Isto completa a prova. \square

5 GEODÉSICAS TIPO-TEMPO FECHADAS EM VARIEDADES DE LORENTZ

Neste capítulo, abordaremos outro problema clássico da geometria diferencial, que é a existência de geodésicas fechadas. A obtenção de condições suficientes para a existência de geodésicas fechadas na geometria riemanniana é um tema bastante estudado, com muitos resultados elegantes e diversas técnicas poderosas desenvolvidas. Contudo muitas destas técnicas não funcionam tão bem na geometria lorentziana. Dessa forma, a abordagem deste problema no contexto lorentziano passa também por descobrir condições geométricas naturais e/ou desenvolver novas técnicas (ou, quando possível, adaptar técnicas riemannianas para o contexto lorentziano) que possibilitem respostas quanto à existência ou não de geodésicas tipo-tempo (ou causais) fechadas em uma variedade de Lorentz. Neste sentido, introduziremos a noção de *homotopia geodésica tipo-tempo*, i.e., uma restrição aos laços geodésicos tipo-tempo da homotopia via curvas tipo-tempo fechadas (também conhecida como *t-homotopia*) em variedades Lorentzianas. Combinaremos esta ferramenta com um argumento local de encurtamento/alongamento de comprimento de laços geodésicos tipo-tempo para fornecer novos resultados sobre a existência de geodésicas tipo-tempo fechadas em variedades de Lorentz compactas. Além disso, motivados pelos trabalhos de Guediri [26, 27, 29], introduziremos condições geométricas alternativas para a existência de laços geodésicos tipo-tempo localmente maximizantes e, conseqüentemente, a existência de geodésicas do tipo-tempo fechadas em variedades de Lorentz não necessariamente compactas e/ou que possuem um recobrimento globalmente hiperbólico regular, mas que admitem certa classe de simetrias conhecidas na literatura como *translações de Clifford*. Este último permitirá generalizar alguns resultados recentes da literatura.

5.1 PRELIMINARES TÉCNICOS

Ao longo deste capítulo o par (M, g) denotará uma variedade de Lorentz de dimensão ≥ 2 . Diremos que um segmento de geodésica (tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço) $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ em (M, g) é um **laço geodésico (tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço)** se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Além disso, se $\dot{\gamma}(a) = c \cdot \dot{\gamma}(b)$ para algum $c > 0$, então diremos que γ é uma **geodésica (tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço) fechada** – caso γ não seja uma geodésica tipo-luz fechada então $c = 1$ pela proposição 7.13(2) em [42].

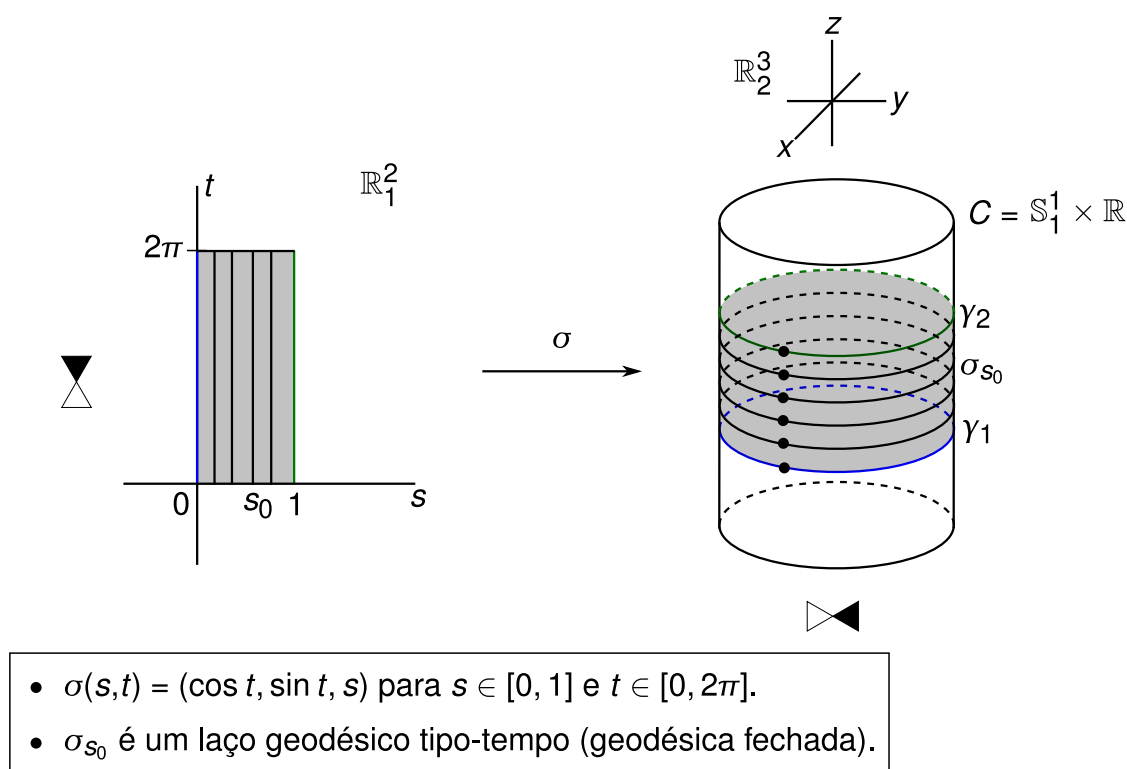
Dizemos que duas curvas tipo-tempo fechadas α_1, α_2 são **homotópicas tipo-tempo** (ou, simplesmente, **t-homotópicas**) se existe uma homotopia livre entre α_1 e α_2 tal que as curvas longitudinais são curvas tipo-tempo fechadas. A definição a seguir, na verdade, é uma restrição das curvas longitudinais da *t-homotopia* para laços

geodésicos tipo-tempo.

Definição 5.1. Dois laços geodésicos tipo-tempo $\gamma_i : [a,b] \rightarrow M$ ($i = 1,2$) em (M,g) são **(livremente) TG-homotópicos** se existe uma aplicação contínua $\sigma : [0,1] \times [a,b] \rightarrow M$ tal que

- i. $\sigma(0,t) = \gamma_1(t)$ e $\sigma(1,t) = \gamma_2(t)$, $\forall t \in [a,b]$;
- ii. para cada $s \in [0,1]$ a curva longitudinal $\sigma_s : t \in [a,b] \mapsto \sigma(s,t) \in M$ é um laço geodésico tipo-tempo.

Figura 20 – Os laços geodésicos tipo-tempo γ_1 e γ_2 em C são TG-homotópicos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que a TG-homotopia define uma relação de equivalência no *espaço dos laços geodésicos tipo-tempo* (que veremos mais adiante), em que suas classes de equivalência serão chamadas de **classes de TG-homotopia**. Além disso, como uma TG-homotopia é uma t -homotopia então a classe de t -homotopia de um laço geodésico tipo-tempo γ (notação: $\mathfrak{T}(\gamma)$) contém a classe de TG-homotopia de γ (notação: $\mathfrak{T}\mathfrak{G}(\gamma)$), i.e., em termos de notação $\mathfrak{T}\mathfrak{G}(\gamma) \subset \mathfrak{T}(\gamma)$. Observe que esta inclusão pode ser própria.

Da discussão anterior temos que uma cota superior (resp. inferior) do conjunto formados pelos comprimentos dos elementos de $\mathfrak{T}(\gamma)$ é também uma cota superior (resp. inferior) para o conjunto formados pelos comprimentos dos elementos de $\mathfrak{T}\mathfrak{G}(\gamma)$. Assim,

$$l_{\mathfrak{T}}(\gamma) := \inf_{\alpha \in \mathfrak{T}(\gamma)} L(\alpha) \leq \inf_{\alpha \in \mathfrak{T}\mathfrak{G}(\gamma)} L(\alpha) =: l_{\mathfrak{T}\mathfrak{G}}(\gamma) \tag{14}$$

e

$$L_{\mathfrak{I}\mathfrak{G}}(\gamma) := \sup_{\alpha \in \mathfrak{I}\mathfrak{G}(\gamma)} L(\alpha) \leq \sup_{\alpha \in \mathfrak{I}(\gamma)} L(\alpha) =: L_{\mathfrak{I}}(\gamma). \quad (15)$$

Observação 5.2. Uma situação possível é $l_{\mathfrak{I}}(\gamma) = 0 < l_{\mathfrak{I}\mathfrak{G}}(\gamma)$. Este fato representa uma vantagem de trabalharmos com classes de TG -homotopia quando pensamos em garantir a existência de uma geodésica tipo-tempo fechada (como veremos mais adiante).

A seguir apresentamos dois exemplos que ilustram as discussões anteriores.

Exemplo 5.3. Considere o espaço de Minkowski $(\hat{M}, \hat{g}) = (\mathbb{R}^2, -dt^2 + dx^2)$ (com a orientação temporal padrão $\partial/\partial t$). Agora, façamos em (\hat{M}, \hat{g}) a seguinte identificação isométrica ao longo do eixo- t (direção temporal)

$$(t, x) \sim (t + 1, x).$$

Seja (M, g) a variedade quociente resultante desta identificação (que é uma variedade de Lorentz) – topologicamente um cilindro. Agora, considere o laço geodésico tipo-tempo γ em (M, g) que é a imagem do segmento de geodésica tipo-tempo $\hat{\gamma} : t \in [0, 1] \mapsto (t, 0) \in \hat{M}$ através da projeção canônica $\pi : \hat{M} \rightarrow M$. Temos que $\mathfrak{I}\mathfrak{G}(\gamma)$ consiste apenas de laços geodésicos tipo-tempo η com $L(\eta) = 1$. Portanto,

$$l_{\mathfrak{I}\mathfrak{G}}(\gamma) = L_{\mathfrak{I}\mathfrak{G}}(\gamma) = 1.$$

Além disso, se considerarmos curvas tipo-tempo fechadas, ainda temos que $L_{\mathfrak{I}}(\gamma) = 1$. Porém, $l_{\mathfrak{I}}(\gamma) = 0$ pois podemos, por exemplo, construir curvas tipo-tempo fechadas t -homotópicas a γ formadas por dois segmentos de geodésicas tipo-tempo que se aproximam de direções tipo-luz.

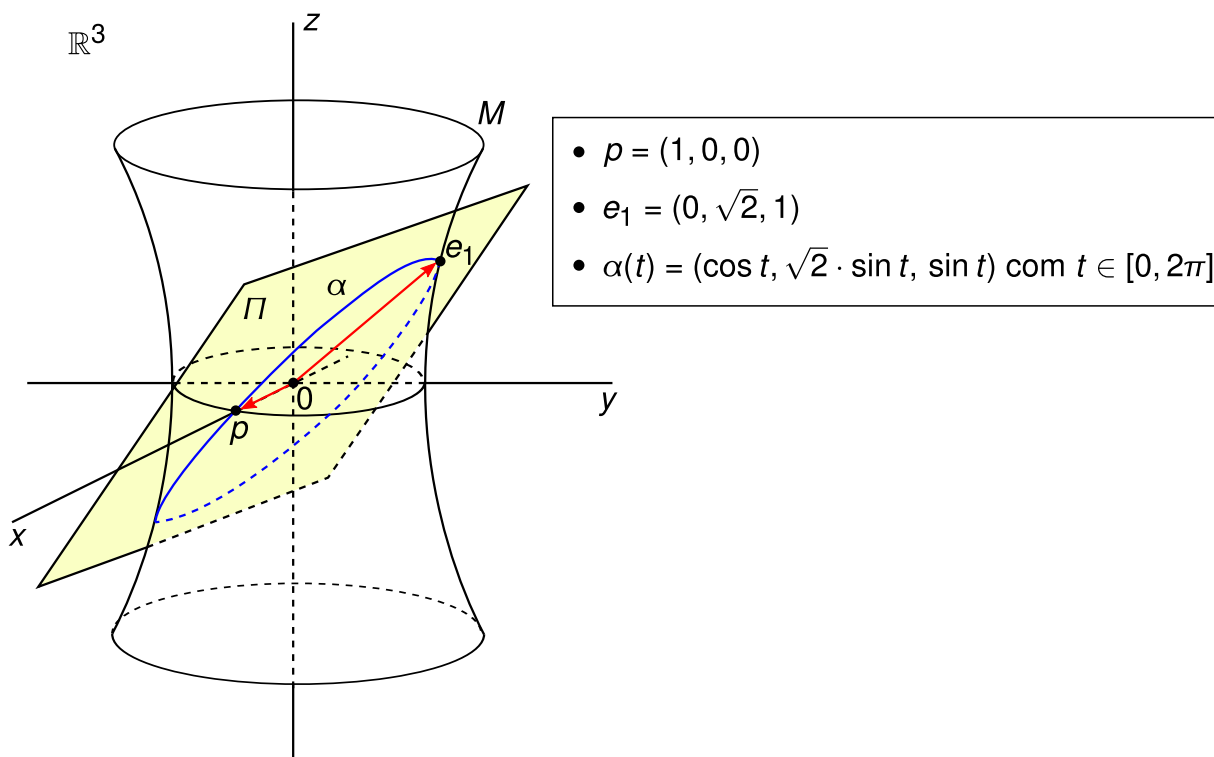
Exemplo 5.4. Considere, em \mathbb{R}^3 , o hiperboloide de uma folha M dado por

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1,$$

e a forma bilinear simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de índice 2 dada por

$$\langle (v_1, v_2, v_3), (w_1, w_2, w_3) \rangle = -v_1 w_1 - v_2 w_2 + v_3 w_3.$$

Com a identificação $T_p \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$ para cada $p \in M$ esta forma bilinear induz uma métrica semi-riemanniana de índice 2 em \mathbb{R}^3 , e como consequência uma métrica lorentziana g para M . Dessa forma, (M, g) é uma variedade lorentziana bidimensional cujo recobrimento universal é o espaço-tempo de anti-de Sitter bidimensional [33, Pág. 131], que diferentemente do exemplo anterior não é globalmente hiperbólico. Temos que todas as geodésicas de (M, g) são reparametrizações das interseções de planos que passam pela origem de \mathbb{R}^3 com M – para mais detalhes consulte o capítulo 4

Figura 21 – Uma geodésica tipo-tempo em M .


Fonte: Elaborada pelo autor.

em [42]. Em particular, as geodésicas tipo-tempo fechadas através de $p \in M$ (note que $\langle p, p \rangle = -1$) são descritas como se segue. Fixe qualquer vetor $e_1 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\langle e_1, e_1 \rangle = -1$ e $\langle p, e_1 \rangle = 0$ e considere o plano $\Pi = \text{span}\{p, e_1\}$. A curva fechada $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(t) = (\cos t) \cdot p + (\sin t) \cdot e_1$$

é uma parametrização de $\Pi \cap M$ e é uma geodésica tipo-tempo com comprimento 2π . Como qualquer laço geodésico tipo-tempo na classe de t -homotopia de α é desta forma, então todos estes laços geodésicos têm comprimento igual a 2π . Portanto,

$$l_{\mathcal{L}\mathcal{G}}(\gamma) = L_{\mathcal{L}\mathcal{G}}(\gamma) = 2\pi.$$

Uma questão fundamental para as próximas seções deste capítulo é ter garantida a existência de laços geodésicos tipo-tempo. Neste sentido o resultado a seguir fornece uma condição suficiente para a existência de pelo menos um laço geodésico tipo-tempo em uma variedade de Lorentz.

Proposição 5.5. *Seja (M, g) uma variedade de Lorentz que admite uma aplicação de recobrimento lorentziana globalmente hiperbólica $\varphi : (\hat{M}, \hat{g}) \rightarrow (M, g)$. Se (M, g) possui uma curva tipo-tempo fechada, então (M, g) admite um laço geodésico tipo-tempo.*

Demonstração. Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva tipo-tempo fechada com $p := \alpha(0) = \alpha(1)$. Escolha $\tilde{p} \in \tilde{M}$ tal que $\varphi(\tilde{p}) = p$. Considere o levantamento $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ de α através

de φ iniciando em \tilde{p} . Como φ é uma isometria local, então $\tilde{\alpha}$ também é uma curva tipo-tempo. Como (\hat{M}, \hat{g}) é um espaço-tempo globalmente hiperbólico temos que $\tilde{\alpha}(0) \neq \tilde{\alpha}(1)$. Além disso, pelo teorema de Avez-Seifert, existe um segmento de geodésica causal futuro-dirigido maximal (consequentemente tipo-tempo) $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ com $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\alpha}(0)$ e $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\alpha}(1)$. Portanto, $\gamma := \varphi \circ \tilde{\gamma}$ é um laço geodésico tipo-tempo de (M, g) em p . \square

Observação 5.6. Substituindo a hipótese de existência de uma curva tipo-tempo fechada na proposição acima por uma condição geométrica (que veremos mais adiante) obtemos o teorema 5.20, que nos garantirá mais do que a existência de um laço geodésico tipo-tempo na variedade de Lorentz. Ou seja, ele garante a existência de um *laço geodésico tipo-tempo localmente maximizante* (esta definição será dada mais à frente) através de *cada ponto* da variedade de Lorentz.

Do corolário 2.76 e da proposição anterior temos o seguinte corolário:

Corolário 5.7. *Seja (M, g) uma variedade de Lorentz compacta que admite uma aplicação de recobrimento lorentziana globalmente hiperbólica $\varphi : (\hat{M}, \hat{g}) \rightarrow (M, g)$. Então, (M, g) possui pelo menos um laço geodésico tipo-tempo.*

Neste contexto particular, (M, g) compacta e com uma cobertura lorentziana globalmente hiperbólica, Galloway em [24] e Guediri em [26, 27, 29] fornecem condições que garantem a finitude de $L_{\mathcal{I}}(\gamma)$ e, consequentemente, a finitude de $L_{\mathcal{I}\mathcal{G}}(\gamma)$ para um laço geodésico tipo-tempo γ – como mencionado no início desta seção. Uma outra maneira de ver este problema da existência de um laço geodésico tipo-tempo é através do problema da conexidade geodésica causal, i.e., dois pontos quaisquer de uma variedade de Lorentz podem ser conectados por um segmento de geodésica causal. Nesse sentido, na seção 4.2, o corolário 4.10 faz este link via a propriedade de continuação causal para a aplicação exponencial quando ela é não-singular para cada vetor de C_p , onde $p \in M$.

Além disso, na seção 4.2 temos também a incorporação da pseudoconvexidade e do desaprisionamento causais tanto no problema da conexidade geodésica causal quanto no da existência de laços geodésicos tipo-tempo fechados. Ou seja:

Proposição 5.8. *Seja (M, g) uma variedade de Lorentz tal que $\text{Conj}_c(p) = \emptyset$ para qualquer $p \in M$. Se (M, g) admite uma aplicação de recobrimento lorentziana $\varphi : (\hat{M}, \hat{g}) \rightarrow (M, g)$ tal que (\hat{M}, \hat{g}) é causalmente pseudoconvexa e desaprisionada, então para quaisquer $p, q \in M$ que podem ser conectados por uma curva tipo-tempo, existe um segmento de geodésica tipo-tempo que conecta p a q . Assim, se ademais (M, g) é compacta, então existe um laço geodésico tipo-tempo em (M, g) .*

5.2 O ESPAÇO DE LAÇOS GEODÉSICOS TIPO-TEMPO

Como justificado na seção anterior, desejamos trabalhar diretamente com o espaço de laços geodésicos tipo-tempo e desenvolver argumentos variacionais sobre ele. Para este fim, descreveremos aqui uma parametrização conveniente para ele. Obteremos aqui também um resultado importante, que denominaremos informalmente de *lema Hill-Climb*. Isso será crucial mais tarde para estabelecermos a existência de geodésicas tipo-tempo fechadas.

Para obter uma parametrização conveniente do espaço de laços geodésicos tipo-tempo, considere a aplicação suave $E : \mathcal{D} \subset TM \rightarrow M \times M$ dada por $E(v) := (\pi(v), \exp(v))$ para $v \in \mathcal{D}$, onde π é a projeção natural do fibrado tangente TM sobre M (veja a seção 2.1). Denotemos por

$$\mathcal{D}_{\mathcal{T}} := \mathcal{D} \cap \left(\bigcup_{p \in M} \mathcal{T}_p \right),$$

i.e., o conjunto formado por todos os vetores tipo-tempo do domínio maximal da aplicação exponencial. Note que $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ é um subconjunto aberto em TM . Também escreveremos $E_{\mathcal{T}} := E|_{\mathcal{D}_{\mathcal{T}}}$.

Denotemos por $\Delta_M \subset M \times M$ a diagonal em $M \times M$, ou seja, o conjunto de todos os pontos da forma (p,p) , para $p \in M$. Assim, o conjunto de laços geodésicos tipo-tempo está em correspondência biunívoca com

$$\mathcal{L} := E_{\mathcal{T}}^{-1}(\Delta_M), \quad (16)$$

onde consideramos os laços geodésicos tipo-tempo com parametrização afim no intervalo $[0,1]^1$. Ou seja, identificamos o laço geodésico tipo-tempo $\gamma : t \in [0,1] \mapsto \exp(t \cdot v) \in M$ com sua velocidade inicial $v \in \mathcal{L}$. Em seguida, dotamos o conjunto dos laços geodésicos tipo-tempo $\gamma : [0,1] \rightarrow M$ com a única topologia para a qual a correspondência $\gamma \mapsto \dot{\gamma}(0) \in \mathcal{L}$ é um homeomorfismo (com \mathcal{L} munido da topologia de subespaço de TM). Este espaço topológico que acabamos de definir é o que chamamos aqui de **espaço de laços geodésicos tipo-tempo**.

Observação 5.9. Vejamos algumas características de \mathcal{L} :

1. Como Δ_M é o gráfico da função identidade em M , temos que Δ_M é uma subvariedade fechada de dimensão n de $M \times M$. Assim, \mathcal{L} é fechado em $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$.
2. Note que, \mathcal{L} não precisa ser uma subvariedade de TM , mas tem uma estrutura de subvariedade n -dimensional em torno de pontos de \mathcal{L} onde $E_{\mathcal{T}}$ não é singular.

¹ Esta não é necessariamente a parametrização afim mais conveniente para geodésicas em todas as circunstâncias, e em alguns cálculos usaremos outra em que as velocidades são vetores unitários do tipo-tempo. A descrição pode ser facilmente modificada para refletir isso.

3. O funcional comprimento dos laços geodésicos tipo-tempo em \mathcal{L} dado pela aplicação $v \in \mathcal{L} \mapsto |v| \in \mathbb{R}$ é contínuo com respeito à topologia induzida em \mathcal{L} .
4. Sejam $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow M$ dois laços geodésicos tipo-tempo. Se existe uma curva contínua $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}$ conectando $\dot{\gamma}_i(0)$ ($i = 1, 2$), então

$$\sigma(s, t) := \exp(t \cdot \beta(s)) \in M$$

é uma TG -homotopia entre γ_1 e γ_2 . Portanto, *dois laços geodésicos tipo-tempo na mesma componente conexa por caminhos são TG -homotópicos*. A recíproca se mantém caso exista uma TG -homotopia $\lambda : [0, 1]^2 \rightarrow M$ de classe C^1 entre γ_1 e γ_2 (i.e., existe uma curva contínua em \mathcal{L} conectando $\dot{\gamma}_1(0)$ a $\dot{\gamma}_2(0)$).

5. Enfatizamos que o espaço de laços geodésicos tipo-tempo introduzidos aqui não é o mesmo que o espaço de geodésicas definido em [7]. Para ver isto, considere um segmento geodésico tipo-tempo $\gamma : [a, b] \rightarrow M$. Suponha que γ se auto-intersecta (pelo menos) duas vezes, digamos $\gamma(a) = \gamma(b) = \gamma(c)$ com $a < c < b$. Dessa forma, os laços geodésicos tipo-tempo $\eta_1, \eta_2, \eta_3 : [0, 1] \rightarrow M$ dados por

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &:= \gamma((c-a).t + a), \\ \eta_2(t) &:= \gamma((b-c).t + c), \\ \eta_3(t) &:= \gamma((b-a).t + a), \end{aligned}$$

para $0 \leq t \leq 1$, são distintos entre si, embora todos deem origem a uma única geodésica inextensível, a menos de reparametrizações afins.

Diremos que um laço geodésico $\eta : [a, b] \rightarrow M$ em uma variedade de Lorentz (M, g) com $\eta(a) = \eta(b) = p \in M$ é **autoconjugado** se p é um ponto conjugado a ele mesmo ao longo de η . Agora estamos prontos para enunciar o próximo resultado:

Proposição 5.10. *Sejam (M, g) uma variedade lorentziana e $(\eta_k : [0, 1] \rightarrow M)_{k \in \mathbb{N}^*}$ uma seqüência de laços geodésicos tipo-tempo que pertencem a mesma classe de TG -homotopia $\mathfrak{TG}(\gamma)$, onde γ é um laço geodésico tipo-tempo. Considere*

$$\dot{\eta}_k(0) \rightarrow v \quad \text{em } TM,$$

onde $v \in \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ é um vetor tipo-tempo, e

$$\eta : t \in [0, 1] \mapsto \exp(t \cdot v) \in M$$

é um laço geodésico tipo-tempo não-autoconjugado. Então, $\eta \in \mathfrak{TG}(\gamma)$.

Demonstração. Para mostrar que $\eta \in \mathfrak{TG}(\gamma)$ é suficiente provar que η pertence a alguma classe de TG -homotopia de (η_k) . Para isto, escreva $v_k := \dot{\eta}_k(0) \in T_{p_k}M$ com ponto base $p_k \in M$, para cada k , e p o ponto base de v . Assim,

$$E(v_k) \rightarrow E(v) \Rightarrow p_k \rightarrow p,$$

e como \mathcal{L} é um subconjunto fechado em $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ (veja a observação 5.9(1)), $v \in \mathcal{L}$, então η é de fato um laço geodésico tipo-tempo.

Como η é não-autoconjugado, $(d \exp_p)_v$ não é singular e, conseqüentemente, E é também não singular em v . Pelo teorema da função inversa, existem vizinhanças conexas $A \ni v$ e $B \ni p$, respectivamente, em $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ e M tais que $E|_A : A \rightarrow B \times B$ é um difeomorfismo, onde todos os vetores de A são tipo-tempo². Como $\lim v_k = v$, podemos escolher $v_{k_0} \in A$ e, conseqüentemente, $E(v_{k_0}) = (p_{k_0}, p_{k_0}) \in B \times B$. Agora, seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva suave de p a p_{k_0} em B . Dessa forma, $\bar{\alpha} := (E|_A)^{-1} \circ (\alpha \times \alpha) : [0, 1] \rightarrow TM$ é uma curva suave que conecta v a v_{k_0} em A . Defina a aplicação suave

$$\begin{aligned} \lambda : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow M \\ (s, t) &\longmapsto \lambda(s, t) = \exp(t \cdot \bar{\alpha}(s)) \end{aligned}$$

Temos que

- $\lambda(0, t) = \exp(t \cdot \bar{\alpha}(0)) = \exp_p(tv) = \eta(t)$, para todo $t \in [0, 1]$;
- $\lambda(1, t) = \exp(t \cdot \bar{\alpha}(1)) = \exp_{p_{k_0}}(tv_{k_0}) = \eta_{k_0}(t)$, para todo $t \in [0, 1]$;
- As curvas longitudinais λ_s são tipo-tempo (pela escolha da vizinhança A acima) e além disso,

$$\lambda_s(0) = \exp(0 \cdot \bar{\alpha}(s)) = \alpha(s) = \exp(1 \cdot \bar{\alpha}(s)) = \lambda_s(1).$$

I.e., as curvas longitudinais λ_s são laços geodésicos tipo-tempo.

Portanto, λ é uma TG -homotopia que deforma η em η_{k_0} via laços geodésicos tipo-tempo e, conseqüentemente, $\eta \in \mathfrak{I}\mathfrak{G}(\eta_{k_0}) = \mathfrak{I}\mathfrak{G}(\gamma)$ como desejado (compare com a observação 5.9(4)). \square

A seguir apresentamos o lema Hill-Climb que mencionamos no início desta seção. Este resultado implica que laços geodésicos tipo-tempo podem ter seus comprimentos aumentados ou encurtados dentro de uma mesma classe de TG -homotopia, a menos que eles sejam ou autoconjugados ou geodésicas tipo-tempo fechadas.

Teorema 5.11 (Lema Hill-Climb). *Seja $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ um laço geodésico tipo-tempo não-autoconjugado em uma variedade lorentziana (M, g) . Então, ou γ é uma geodésica tipo-tempo fechada ou existe uma TG -homotopia suave $\sigma : [-\delta, \delta] \times [0, l] \rightarrow M$ tal que $\sigma_0 \equiv \gamma$ e*

$$L(\sigma_s) < L(\gamma) < L(\sigma_{s'}), \quad \text{para } -\delta \leq s < 0 < s' \leq \delta.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, assumimos que $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ é um segmento de geodésica unitário com $\gamma(0) = \gamma(l) =: p$ e que $\gamma(0) (= \gamma(l))$ não é conjugado a ele mesmo ao longo de γ . Lembre-se que denotamos a aplicação exponencial em

² Pois $v \in TM$ é um vetor tipo-tempo e este carácter causal na verdade é uma condição aberta, i.e., todo vetor tipo-tempo admite uma vizinhança de vetores tipo-tempo.

(M, g) por $\exp : \mathcal{D} \subset TM \rightarrow M$, e que para qualquer $q \in M$, escrevemos $\mathcal{D}_q := \mathcal{D} \cap (T_q M)$ e $\exp_q := \exp|_{\mathcal{D}_q}$. Dessa forma, $v_0 := l\dot{\gamma}(0) \in \mathcal{D}_p$ e

$$\exp_p(v_0) = \exp_{\gamma(0)}(l\dot{\gamma}(0)) = \gamma(l) = p.$$

A condição de que γ não é autoconjugada implica que $(d \exp_p)_{v_0} : T_{v_0}(T_p M) \rightarrow T_p M$ não é singular. Temos que a aplicação suave E também não é singular em $v_0 \in \mathcal{D}$ e

$$E(v_0) = (\pi(v_0), \exp(v_0)) = (p, p).$$

Pelo teorema da função inversa, existem vizinhanças conexas $U \ni v_0$ e $V \ni p$, respectivamente, em TM e M para as quais $E|_U : U \subset \mathcal{D} \rightarrow V \times V \subset M \times M$ é um difeomorfismo. Diminuindo U e V se necessário, podemos sem perda de generalidade assumir que todo vetor $v \in U$ é tipo-tempo e V é uma vizinhança convexa de p . Escreva $U_q := U \cap \mathcal{D}_q$ para cada $q \in V$. Temos que $\exp_q|_{U_q} : U_q \rightarrow V$ é um difeomorfismo.

Fixe $0 < \vartheta < l$ tal que $\gamma[-\vartheta, \vartheta] \subset V^3$ e seja $\alpha := \gamma|_{(-\vartheta, \vartheta)}$. Como V é convexo, temos que $\alpha(t) \neq \alpha(s)$ para $s \neq t$ em $(-\vartheta, \vartheta)$. Agora, para cada $q \in V$, defina a curva suave

$$\bar{\alpha}_q := (\exp_q|_{U_q})^{-1} \circ \alpha : (-\vartheta, \vartheta) \rightarrow U_q \subset T_q M.$$

Note que sempre $r_q(t) := |\bar{\alpha}_q(t)| > 0$ para qualquer $q \in V$ e qualquer $t \in (-\vartheta, \vartheta)$ pela escolha de U . Em adição, seja

$$w_q(t) := \frac{\bar{\alpha}_q(t)}{r_q(t)} = \frac{\bar{\alpha}_q(t)}{|\bar{\alpha}_q(t)|} \quad \forall t \in (-\vartheta, \vartheta),$$

e

$$\mathcal{O}_q = \{(r, t) \in (0, +\infty) \times (-\vartheta, \vartheta) : r \cdot w_q(t) \in U_q\}.$$

Defina a função

$$f_q : (r, t) \in \mathcal{O}_q \mapsto \exp_q(r w_q(t)) \in M. \quad (17)$$

Em particular,

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{d}{dt} \exp_q(\bar{\alpha}_q(t)) = \frac{d}{dt} f_q(r_q(t), t) = \frac{\partial f_q}{\partial r} \dot{r}_q(t) + \frac{\partial f_q}{\partial t}. \quad (18)$$

Pelo lema de Gauss, $g(\partial f_q / \partial r, \partial f_q / \partial t) = 0$. Além disso, $g(\partial f_q / \partial r, \partial f_q / \partial r) = -1$. Em uma variedade de Lorentz estas relações implicam que $g(\partial f_q / \partial t, \partial f_q / \partial t) \geq 0$ (i.e., $\partial f_q / \partial t$ é tipo-espaço). Consequentemente,

$$-1 = g(\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t)) = g(\partial f_q / \partial r, \partial f_q / \partial r) \cdot \dot{r}_q(t)^2 + g(\partial f_q / \partial t, \partial f_q / \partial t) = -\dot{r}_q(t)^2 + \left| \frac{\partial f_q}{\partial t} \right|^2,$$

³ Claro que estamos admitindo aqui que γ estende-se à esquerda de 0, porém manteremos a mesma nomenclatura.

ou

$$|\dot{r}_q(t)| = \sqrt{1 + \left| \frac{\partial f_q}{\partial t} \right|^2} = 1 + \frac{\left| \frac{\partial f_q}{\partial t} \right|^2}{1 + \sqrt{1 + \left| \frac{\partial f_q}{\partial t} \right|^2}}. \quad (19)$$

Em particular, $|\dot{r}_q(t)| \geq 1$ e, conseqüentemente, $\dot{r}_q(t)$ é ou sempre positiva ou sempre negativa para todo $(t, q) \in (-\vartheta, \vartheta) \times V$.

Agora, observe que

$$\bar{\alpha}_q(t) = (E|_U)^{-1}(q, \alpha(t)), \quad \forall (t, q) \in (-\vartheta, \vartheta) \times V, \quad (20)$$

e, conseqüentemente, $r_q(t) = |\bar{\alpha}_q(t)|$ varia suavemente em $(-\vartheta, \vartheta) \times V$. Por continuidade, existem uma vizinhança $V_0 \ni p$ contida em V e um número $0 < \vartheta_0 < \vartheta$ tais que $\dot{r}_q(t)$ tem o mesmo sinal de $\dot{r}_p(0)$ sempre que $(t, q) \in (-\vartheta_0, \vartheta_0) \times V_0$.

Para o restante da prova diremos que um número $\delta \in (0, \vartheta_0)$ é *aceitável* se ele é suficientemente pequeno tal que $v_{\pm\delta} := (l \mp \delta)\dot{\gamma}(\pm\delta) \in U$ (note que $\lim_{\delta \rightarrow 0} v_{\pm\delta} = v_0 \in U$) e $\gamma[-\delta, \delta] \subset V_0$. Fixe um $\delta > 0$ aceitável e denote por $q_{\pm\delta} := \gamma(\pm\delta) \neq p$. Temos que

$$\exp_{q_{\pm\delta}}(v_{\pm\delta}) = \exp_{\gamma(\pm\delta)}((l \mp \delta)\dot{\gamma}(\pm\delta)) = \gamma(\pm\delta + (l \mp \delta)) = \gamma(l) = p. \quad (21)$$

De (21) obtemos que

$$\bar{\alpha}_{q_{\pm\delta}}(0) = (\exp_{q_{\pm\delta}}|_{U_{q_{\pm\delta}}})^{-1}(\alpha(0)) = (\exp_{q_{\pm\delta}}|_{U_{q_{\pm\delta}}})^{-1}(p) = v_{\pm\delta} \in U_{q_{\pm\delta}} \subset \mathcal{D}_{q_{\pm\delta}}. \quad (22)$$

Dessa forma, se definirmos

$$u_{\pm\delta} := \bar{\alpha}_{q_{\pm\delta}}(\pm\delta) = (\exp_{q_{\pm\delta}}|_{U_{q_{\pm\delta}}})^{-1}(\alpha(\pm\delta)) \in U_{q_{\pm\delta}} \subset \mathcal{D}_{q_{\pm\delta}}, \quad (23)$$

os vetores $u_{\pm\delta}, v_{\pm\delta} (\neq 0)$ são distintos (lembre-se que $\alpha(0) = p \neq q_{\pm\delta} = \alpha(\pm\delta)$ e $\exp_{q_{\pm\delta}}|_{U_{q_{\pm\delta}}}$ é um difeomorfismo).

Por (20), temos que

$$u_{\pm\delta} \xrightarrow{\delta} \bar{\alpha}_p(0),$$

e

$$\exp_p(v_0) = p = \alpha(0) = \exp_p(\bar{\alpha}_p(0)) \Rightarrow \bar{\alpha}_p(0) = l\dot{\gamma}(0).$$

Conseqüentemente,

$$u_{\pm\delta}/l \xrightarrow{\delta} \dot{\gamma}(0). \quad (24)$$

Agora, se definirmos as geodésicas

$$\beta_{\pm\delta} : t \in [0, l] \mapsto \exp_{q_{\pm\delta}}(t \cdot (u_{\pm\delta}/l)) \in M$$

vemos que $\beta_{\pm\delta}(0) = \beta_{\pm\delta}(l) = q_{\pm\delta}$, i.e., β_s são laços geodésicos tipo-tempo para $s = \pm\delta$. Além disso, $\dot{\beta}_{\pm\delta}(0) = u_{\pm\delta}/l$. Por (24), temos que os vetores velocidade inicial destes

laços geodésicos estão próximos (ou podemos escolher um novo $\delta > 0$, tomando $\delta \rightarrow 0$, de modo que isso ocorra) a $\dot{\gamma}(0)$. Note que

$$L(\beta_{\pm\delta}) = |u_{\pm\delta}|. \quad (25)$$

Temos dois casos a considerar:

1º CASO: $\dot{r}_p(0) < 0$.

Assim, $\dot{r}_q(t) < 0$ para todo $q \in V_0$ e $t \in (-\vartheta_0, \vartheta_0)$. Em particular, se escolhermos um $\delta > 0$ aceitável e integrarmos a equação (19) em $[-\delta, 0]$ com $q = q_{-\delta}$ obtemos

$$-(r_{q_{-\delta}}(0) - r_{q_{-\delta}}(-\delta)) = \int_{-\delta}^0 |\dot{r}_{q_{-\delta}}(t)| dt = \delta + \eta_{-\delta} \Rightarrow |u_{-\delta}| - |v_{-\delta}| = \delta + \eta_{-\delta}, \quad (26)$$

onde

$$\eta_{-\delta} := \int_{-\delta}^0 \frac{\left| \frac{\partial f_{q_{-\delta}}}{\partial t} \right|^2}{1 + \sqrt{1 + \left| \frac{\partial f_{q_{-\delta}}}{\partial t} \right|^2}} dt \geq 0. \quad (27)$$

Portanto, usando a definição de $v_{-\delta}$ e a discussão em torno da equação (25) juntamente com a equação (26) temos que

$$L(\beta_{-\delta}) = l + 2\delta + \eta_{-\delta} > l \equiv L(\gamma). \quad (28)$$

Dessa forma, se definirmos

$$\sigma : (s, t) \in [0, \delta] \times [0, l] \mapsto \beta_{-s}(t) \in M$$

então σ é uma TG -homotopia de γ tal que cada curva longitudinal (com $s > 0$) tem o comprimento lorentziano estritamente maior do que o de γ .

Por outro lado, integrando a equação (19) em $[0, \delta]$ com $q = q_{+\delta}$ obtemos

$$-(r_{q_{+\delta}}(\delta) - r_{q_{+\delta}}(0)) = \int_0^\delta |\dot{r}_{q_{+\delta}}(t)| dt = \delta + \eta_{+\delta} \Rightarrow -|u_{+\delta}| + |v_{+\delta}| = \delta + \eta_{+\delta}, \quad (29)$$

onde

$$\eta_{+\delta} := \int_0^\delta \frac{\left| \frac{\partial f_{q_{+\delta}}}{\partial t} \right|^2}{1 + \sqrt{1 + \left| \frac{\partial f_{q_{+\delta}}}{\partial t} \right|^2}} dt \geq 0. \quad (30)$$

Novamente, usando a definição de $v_{+\delta}$ e a discussão em torno da equação (25) juntamente com a equação (29), temos que

$$L(\beta_{+\delta}) = l - 2\delta - \eta_{+\delta} < l \equiv L(\gamma). \quad (31)$$

Logo, se definirmos

$$\sigma : (s, t) \in [0, \delta] \times [0, l] \mapsto \beta_s(t) \in M,$$

temos uma TG -homotopia de γ de quem as curvas longitudinais com $s > 0$ têm comprimentos lorentzianos estritamente menor do que o de γ .

2º CASO: $\dot{r}_p(0) > 0$.

Neste caso, $\dot{r}_q(t) > 0$ para todo $q \in V_0$ e $t \in (-\vartheta_0, \vartheta_0)$. Novamente escolha um $\delta > 0$ aceitável, porém agora integramos a equação (19) em $[0, \delta]$ com $q = q_{+\delta}$:

$$(r_{q_{+\delta}}(\delta) - r_{q_{+\delta}}(0)) = \int_0^\delta |\dot{r}_{q_{+\delta}}(t)| dt = \delta + \eta_{+\delta} \Rightarrow |u_{+\delta}| - |v_{+\delta}| = \delta + \eta_{+\delta}, \quad (32)$$

onde

$$\eta_{+\delta} := \int_0^{+\delta} \frac{\left| \frac{\partial f_{q_{+\delta}}}{\partial t} \right|^2}{1 + \sqrt{1 + \left| \frac{\partial f_{q_{+\delta}}}{\partial t} \right|^2}} dt \geq 0. \quad (33)$$

Contudo, usando a definição de $v_{+\delta}$ e as discussões em torno da equação (25) juntamente com a equação (32), temos que

$$L(\beta_{+\delta}) = l + \eta_{+\delta} \geq l \equiv L(\gamma). \quad (34)$$

Esta desigualdade a priori não é estrita, porém existem duas possibilidades: ou existe algum $\delta_0 > 0$ aceitável tal que $\eta_{+\delta} > 0$ para todo $0 < \delta \leq \delta_0$, então da desigualdade (34) obtemos, como no primeiro caso, uma TG -homotopia da qual as curvas longitudinais com $s > 0$ têm comprimentos lorentzianos maior do que o de γ ; ou para algum $\delta_0 > 0$ aceitável temos $\eta_{+\delta_0} \equiv 0$. Dessa forma, como o integrando em (33) é não-negativo obtemos que

$$\frac{\partial f_{q_{+\delta_0}}}{\partial t} \equiv 0 \quad \text{em } [0, \delta_0]. \quad (35)$$

Da igualdade (19) temos que (lembre-se que $\dot{r}_{q_{+\delta_0}} > 0$)

$$r_{q_{+\delta_0}}(t) = t + (l - \delta_0) \quad \forall t \in [0, \delta_0]. \quad (36)$$

Em adição, quando (35) é usado em (17), concluímos que

$$\dot{w}_{+\delta_0} \equiv 0 \Rightarrow w_{+\delta_0}(t) = w_{+\delta_0}(0) = \frac{v_{+\delta_0}}{|v_{+\delta_0}|} \equiv \dot{\gamma}(\delta_0) \quad \forall t \in [0, \delta_0]. \quad (37)$$

Dessa forma, (36) e (37) requerem que

$$\bar{\alpha}_{\gamma(\delta_0)}(t) = (t + l - \delta_0) \cdot \dot{\gamma}(\delta_0) \Rightarrow \alpha(t) = \exp_{\gamma(\delta_0)}((t + l - \delta_0) \cdot \dot{\gamma}(\delta_0)) \Rightarrow \gamma(t) = \gamma(t + l) \quad (38)$$

em $[0, \delta_0]$. Em particular,

$$\dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(l),$$

o que significa que γ é uma geodésica tipo-tempo fechada.

Finalmente, para o último subcaso, integramos a equação (19) em $[-\delta, 0]$ com $q = q_{-\delta}$:

$$(r_{q_{-\delta}}(0) - r_{q_{-\delta}}(-\delta)) = \int_{-\delta}^0 |\dot{r}_{q_{-\delta}}(t)| dt = \delta + \eta_{-\delta} \Rightarrow |v_{-\delta}| - |u_{-\delta}| = \delta + \eta_{-\delta}, \quad (39)$$

onde

$$\eta_{-\delta} := \int_{-\delta}^0 \frac{\left| \frac{\partial f_{q_{-\delta}}}{\partial t} \right|^2}{1 + \sqrt{1 + \left| \frac{\partial f_{q_{-\delta}}}{\partial t} \right|^2}} dt \geq 0. \quad (40)$$

Usando a definição de $v_{-\delta}$ e a discussão em torno da equação (25) juntamente com a equação (39) (os δ 's agora "se cancelam em ambos membros"), obtemos

$$L(\beta_{-\delta}) = l - \eta_{-\delta} \leq l \equiv L(\gamma). \quad (41)$$

Novamente, isto requer uma TG -homotopia de γ em que os comprimentos lorentzianos das curvas longitudinais são menores do que o de γ , sempre que $\eta_{-\delta} > 0$ em um intervalo de δ 's aceitáveis. Do contrário, $\eta_{-\delta_0} = 0$ para, pelo menos, um $\delta_0 > 0$ aceitável. Assim com um argumento similar ao usado no subcaso anterior concluímos que γ é uma geodésica tipo-tempo fechada. \square

Dizemos que um laço geodésico tipo-tempo $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ é **localmente minimizante** (resp. **localmente maximizante**) se $L(\zeta) \geq L(\gamma)$ (resp. $L(\zeta) \leq L(\gamma)$) para qualquer laço geodésico tipo-tempo $\zeta : [0, 1] \rightarrow M$ com condições iniciais $(\zeta(0), \dot{\zeta}(0)) \in TM$ suficientemente próximas⁴ as condições iniciais $(\gamma(0), \dot{\gamma}(0))$. Além disso, diremos que γ é **localmente extremal** se ela é localmente minimizante ou localmente maximizante.

Uma consequência imediata da definição anterior e do lema Hill-Climb é:

Corolário 5.12. *Um laço geodésico tipo-tempo localmente extremal não-autoconjugado em uma variedade de Lorentz é uma geodésica tipo-tempo fechada.*

5.3 PSEUDOCONVEXIDADE, DESAPRISIONAMENTO E GEODÉSICAS TIPO-TEMPO FECHADAS

Esta seção contém as principais consequências geométricas da análise da seção anterior. Os principais resultados aqui são a proposição 5.13 e o teorema 5.14, que veremos a seguir, que estabelecem novas condições naturais para a existência de uma geodésica tipo-tempo fechada em uma variedade de Lorentz.

⁴ Aqui, TM está implicitamente dotado com uma métrica riemanniana, digamos, a métrica de Sasaki associada com alguma métrica riemanniana h de M .

Proposição 5.13. *Sejam (M, g) uma variedade de Lorentz que contém um laço geodésico tipo-tempo γ tal que $\mathfrak{T}\mathfrak{G}(\gamma)$ (o subconjunto formado por todos os vetores velocidade inicial desta classe) é precompacto em $\mathcal{D} \subset TM$.*

Então, $L_{\mathfrak{T}\mathfrak{G}}(\gamma) < \infty$ e existe um laço geodésico tipo-tempo η com comprimento lorentziano $L_{\mathfrak{T}\mathfrak{G}}(\eta)$ tal que ou

- i. $\eta \in \mathfrak{T}(\gamma)$ e η é autoconjugado; ou*
- ii. $\eta \in \mathfrak{T}\mathfrak{G}(\gamma)$ e η é uma geodésica tipo-tempo fechada.*

Se adicionarmos $l_{\mathfrak{T}\mathfrak{G}}(\gamma) > 0$, então existe um laço geodésico tipo-tempo η' com comprimento lorentziano $l_{\mathfrak{T}\mathfrak{G}}(\eta')$ tal que ou

- i'. $\eta' \in \mathfrak{T}(\gamma)$ e ele é autoconjugado; ou*
- ii'. $\eta' \in \mathfrak{T}\mathfrak{G}(\gamma)$ e ele é uma geodésica tipo-tempo fechada.*

Demonstração. Provaremos apenas a primeira afirmação (i.e., os itens (i) e (ii)), pois os argumentos utilizados para a prova da segunda parte são inteiramente análogos. Seja $(\eta_k : [0, 1] \rightarrow M)_{k \in \mathbb{N}^*}$ uma sequência de laços geodésicos tipo-tempo em $\mathfrak{T}\mathfrak{G}(\gamma)$ da qual a sequência de comprimentos $(\ell_k = |\dot{\eta}_k(0)|)_{k \in \mathbb{N}^*}$ se aproxima de $\ell := L_{\mathfrak{T}\mathfrak{G}}(\gamma) \leq \infty$, i.e.,

$$\ell_k \rightarrow \ell. \quad (42)$$

Seja $p_k := \eta_k(0) = \eta_k(1)$. Da precompactidade de $\mathfrak{T}\mathfrak{G}(\gamma)$, a menos de passagem para uma subsequência, temos que

$$\dot{\eta}_k(0) \rightarrow v \in \mathcal{D} \Rightarrow \ell_k = |\dot{\eta}_k(0)| \rightarrow |v| = \ell < \infty.$$

A existência de γ (tipo-tempo) implica que $\ell \geq L(\gamma) > 0$. Dessa forma, o caráter causal de v é tipo-tempo. Se $p \in M$ é o ponto base de v , então $p_k \rightarrow p$. Logo, se definirmos $\eta : t \in [0, 1] \mapsto \exp_p(t \cdot v) \in M$, temos que η é uma laço geodésico tipo-tempo em $\mathfrak{T}(\gamma)$ ⁵. Então, ou η é autoconjugado ou, pela proposição 5.10 e o teorema 5.11, $\eta \in \mathfrak{T}\mathfrak{G}(\gamma)$ é uma geodésica fechada. \square

A precompactidade de uma classe de TG -homotopia $\mathfrak{T}\mathfrak{G}(\gamma)$ assumida na proposição 5.13 pode não ser fácil de verificar na prática. O teorema a seguir fornece condições geométricas naturais e concretas em que ela ocorre, porém a variedade lorentziana será compacta, o que não era exigido na proposição anterior.

Teorema 5.14. *Seja (M, g) uma variedade de Lorentz compacta. Suponha que:*

⁵ Para ver isto, primeiro tome uma cobertura para a imagem de η (que é compacta) formada por vizinhanças convexas de (M, g) . Em seguida, tome um subcobertura finita para a imagem de η e daí obtenha uma cobertura finita para o intervalo $[0, 1]$ através da imagem inversa desta subcobertura finita por η . Aplique o lema da cobertura de Lebesgue, para cobertura finita anterior de $[0, 1]$, obtendo uma partição para este intervalo tal que a imagem de η de cada subintervalo está contida em uma vizinhança convexa da subcobertura finita de η . Por fim, use o fato de que $\dot{\eta}_k(0) \rightarrow v = \dot{\eta}(0)$ para encontrar uma t -homotopia entre η e η_k , para algum k suficientemente grande.

- i. (M, g) contém um laço geodésico tipo-tempo γ tal que $\mathfrak{T}(\gamma)$ não contém laços geodésicos tipo-tempo autoconjugados;
- ii. existe uma aplicação de recobrimento lorentziana regular $\varphi : (\hat{M}, \hat{g}) \rightarrow (M, g)$ tal que (\hat{M}, \hat{g}) é causalmente pseudoconvexa e desaprisionada (e.g., se (\hat{M}, \hat{g}) é globalmente hiperbólico) e $\mathcal{D}(\varphi)$ é um grupo abeliano.

Então, $\mathfrak{T}\mathfrak{G}(\gamma)$ contém uma geodésica tipo-tempo fechada de comprimento $L_{\mathfrak{T}\mathfrak{G}}(\gamma)$. Se acrescentarmos que $l_{\mathfrak{T}\mathfrak{G}}(\gamma) > 0$, então $\mathfrak{T}\mathfrak{G}(\gamma)$ também contém uma geodésica tipo-tempo fechada de comprimento $l_{\mathfrak{T}\mathfrak{G}}(\gamma)$.

Demonstração. Em decorrência da proposição 5.13, perceba que é suficiente provar que o subconjunto formado pelos vetores velocidade inicial de $\mathfrak{T}\mathfrak{G}(\gamma)$ é precompacta em \mathcal{D} .

Sejam $(\eta_k : [0, 1] \rightarrow M)_{k \in \mathbb{N}^*}$ uma sequência de laços geodésicos tipo-tempo em $\mathfrak{T}\mathfrak{G}(\gamma)$ e $p_k := \eta_k(0) = \eta_k(1)$. Como M é compacto, então, a menos de passagem para uma subsequência, $p_k \rightarrow p$.

Escolha uma vizinhança conexa $U \ni p$ em M e escreva

$$\bigsqcup_{i \in I \subset \mathbb{N}^*} \hat{U}_i = \varphi^{-1}(U)$$

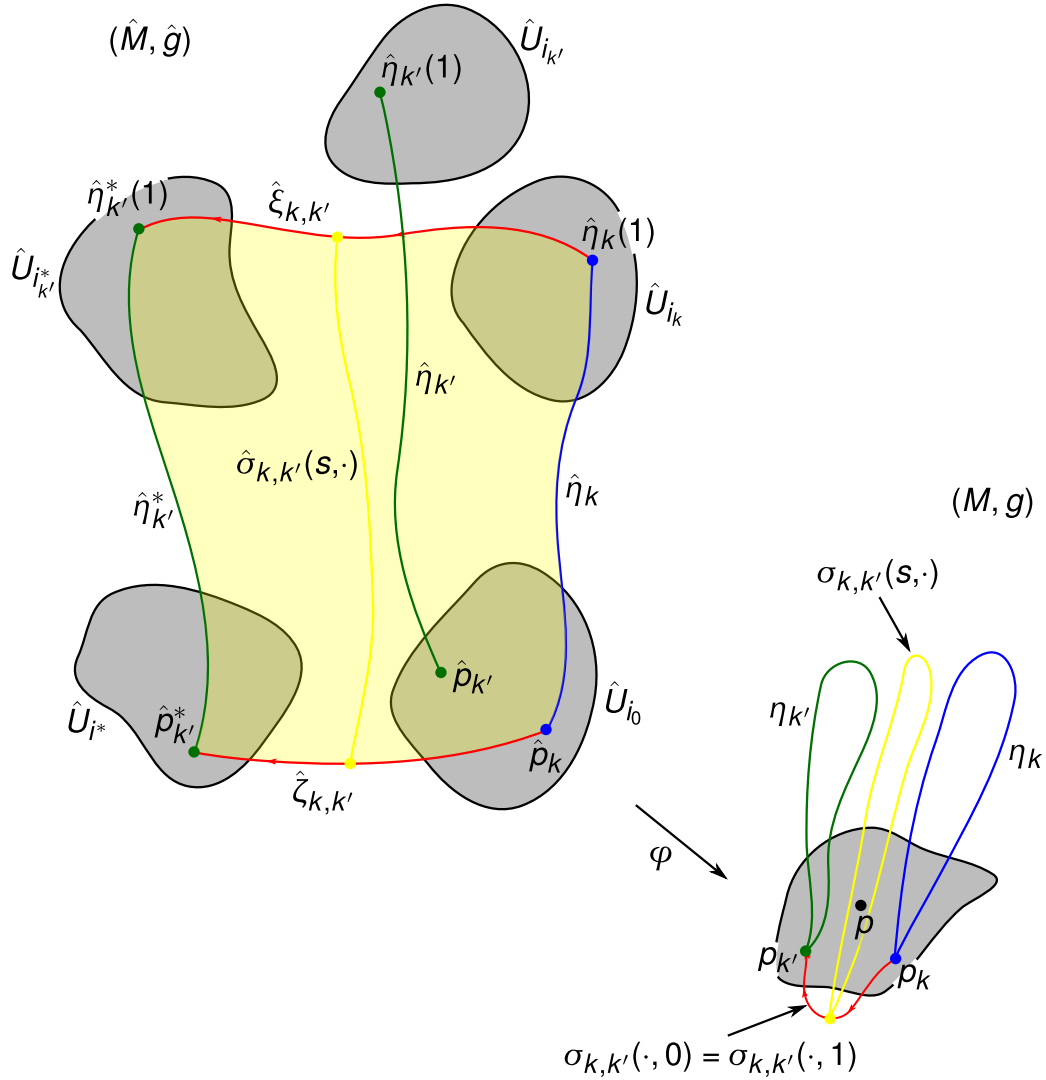
tal que $\varphi|_{\hat{U}_i} : \hat{U}_i \rightarrow U$ é um difeomorfismo para todo $i \in I$. Além disso, escolha uma vizinhança $V \ni p$ com $\bar{V} \subset U$ (note que o fecho de V é compacto) e $\hat{p} \in \hat{U}_{i_0}$, para algum $i_0 \in I$, tal que $\varphi(\hat{p}) = p$. Eventualmente $p_k \in V$, então podemos supor que esse é o caso para todo k , e considere os levantamentos $\hat{\eta}_k : [0, 1] \rightarrow \hat{M}$ das geodésicas η_k que iniciam em $\hat{p}_k := (\varphi|_{\hat{U}_{i_0}})^{-1}(p_k) \rightarrow \hat{p}$.

Temos que $\hat{\eta}_k(0) \in \hat{K}_{i_0} := (\varphi|_{\hat{U}_{i_0}})^{-1}(\bar{V})$ e $\hat{\eta}_k(1) \in \hat{K}_{i_k} := (\varphi|_{\hat{U}_{i_k}})^{-1}(\bar{V})$ para algum $i_k \in I$ (possivelmente $i_k = i_0$), onde \hat{K}_{i_0} e \hat{K}_{i_k} são subconjuntos compactos.

Considere $k, k' \in \mathbb{N}^*$. Afirmamos que $\hat{U}_{i_k} = \hat{U}_{i_{k'}}$ e, conseqüentemente, $i_k = i_{k'}$ e $\hat{K}_{i_k} = \hat{K}_{i_{k'}}$. Para ver isto, usaremos o fato de que η_k e $\eta_{k'}$ estão na mesma classe de TG -homotopia, o recobrimento φ é regular e $\mathcal{D}(\varphi)$ é abeliano. De fato, seja $\sigma_{k, k'} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ uma TG -homotopia com $\sigma_{k, k'}(0, t) = \eta_k(t)$ e $\sigma_{k, k'}(1, t) = \eta_{k'}(t)$ para todo $t \in [0, 1]$. Seja $\hat{\sigma}_{k, k'} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \hat{M}$ o levantamento de $\sigma_{k, k'}$ através de φ com $\hat{\sigma}_{k, k'}(0, 0) = \hat{p}_k$. Note que, $\hat{\eta}_k(t) = \hat{\sigma}_{k, k'}(0, t)$ para $t \in [0, 1]$, pois $\varphi \circ \hat{\sigma}_{k, k'}(0, \cdot) = \sigma_{k, k'}(0, \cdot) = \eta_k$ e $\hat{\sigma}_{k, k'}(0, 0) = \hat{p}_k = \hat{\eta}_k(0)$. Denotaremos por $\hat{\eta}_{k'}^*(t) = \hat{\sigma}_{k, k'}(1, t)$ para $t \in [0, 1]$ o levantamento de $\eta_{k'}$ através de φ iniciando em $\hat{p}_{k'}^* := \hat{\sigma}_{k, k'}(1, 0) \in \hat{U}_{i^*}$ para algum $i^* \in I$ (veja a figura 22).

Pela regularidade do recobrimento, existem transformações de recobrimento $F_k, F_{k'}^* : \hat{M} \rightarrow \hat{M}$ com $F_k(\hat{\eta}_k(0)) = \hat{\eta}_k(1) \in \hat{U}_{i_k}$ e $F_{k'}^*(\hat{\eta}_{k'}^*(0)) = \hat{\eta}_{k'}^*(1) \in \hat{U}_{i_{k'}^*}$, onde $i_{k'}^* \in I$. Dessa forma, $F_k(\hat{U}_{i_0}) = \hat{U}_{i_k}$ e $F_{k'}^*(\hat{U}_{i^*}) = \hat{U}_{i_{k'}^*}$.

Figura 22 – O levantamento $\hat{\sigma}_{k,k'} : [0,1] \times [0,1] \rightarrow \hat{M}$ de $\sigma_{k,k'}$ através de φ com $\hat{\sigma}_{k,k'}(0,0) = \hat{p}_k$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, considere a curva

$$\hat{\zeta}_{k,k'} : s \in [0,1] \mapsto \hat{\sigma}_{k,k'}(s,0) \in \hat{M}$$

que conecta \hat{p}_k a $\hat{p}_{k'}^*$. Dessa forma, temos que as curvas $F_k \circ \hat{\zeta}_{k,k'}$ e

$$\hat{\xi}_{k,k'} : s \in [0,1] \mapsto \hat{\sigma}_{k,k'}(s,1) \in \hat{M}$$

são levantamentos através de φ iniciando em $\hat{\eta}_k(1)$ da curva

$$s \in [0,1] \mapsto \sigma_{k,k'}(s,0) = \sigma_{k,k'}(s,1) \in M$$

formada pelos pontos iniciais (e finais) dos segmentos de geodésicas de $\sigma_{k,k'}$. Assim, $F_k \circ \hat{\zeta}_{k,k'} = \hat{\xi}_{k,k'}$. Em particular, $F_k \circ \hat{\zeta}_{k,k'}(1) = \hat{\xi}_{k,k'}(1)$. Então,

$$F_k(\hat{p}_{k'}^*) = F_k(\hat{\eta}_{k'}^*(0)) = F_k(\hat{\zeta}_{k,k'}(1)) = \hat{\xi}_{k,k'}(1) = \hat{\eta}_{k'}^*(1) = F_{k'}^*(\hat{\eta}_{k'}^*(0)) = F_{k'}^*(\hat{p}_{k'}^*).$$

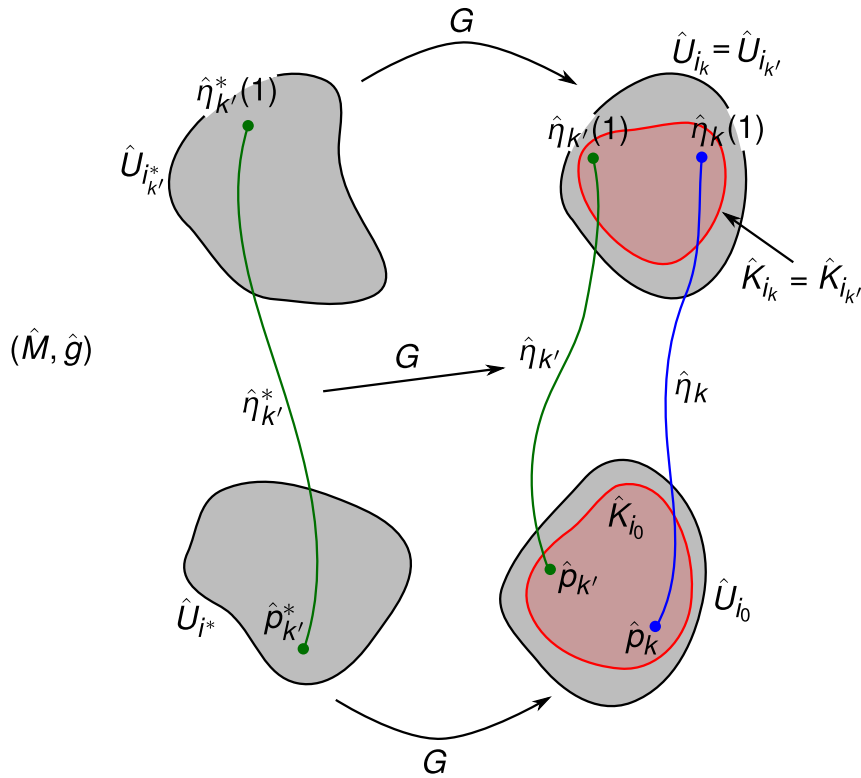
Consequentemente, $F_k = F_{k'} = F$. Assim, $F(\hat{U}_{i_0}) = \hat{U}_{i_k}$ e $F(\hat{U}_{i^*}) = \hat{U}_{i_{k'}}$.

Como $\hat{p}_{k'}, \hat{p}_{k'}^* \in \varphi^{-1}(\{p_{k'}\})$ e $\varphi : \hat{M} \rightarrow M$ é regular, então $\exists G \in \mathcal{D}(\varphi)$ tal que $G(\hat{p}_{k'}^*) = \hat{p}_{k'}$. Assim, $G(\hat{U}_{i^*}) = \hat{U}_{i_0}$ e $\hat{\eta}_{k'} = G \circ \hat{\eta}_{k'}^*$ em $[0,1]$. Como $\mathcal{D}(\varphi)$ é um grupo abeliano, então

$$\begin{aligned} G(\hat{U}_{i_{k'}}) &= G(F(\hat{U}_{i^*})) \\ &= F(G(\hat{U}_{i^*})) \\ &= F(\hat{U}_{i_0}) = \hat{U}_{i_k} \end{aligned} \quad (43)$$

Como $\hat{\eta}_{k'}^*(1) \in \hat{U}_{i_{k'}}$, então, por (43), $\hat{\eta}_{k'}(1) = G \circ \hat{\eta}_{k'}^*(1) \in \hat{U}_{i_k}$. Isto é, $\hat{U}_{i_k} = \hat{U}_{i_{k'}}$ e, consequentemente, $\hat{K}_{i_k} = \hat{K}_{i_{k'}}$ como afirmamos acima.

Figura 23 – Os abertos \hat{U}_{i_k} e $\hat{U}_{i_{k'}}$ coincidem.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dessa forma, da afirmação anterior segue que os levantamentos $\hat{\eta}_k$, segmentos de geodésicas tipo-tempo em (\hat{M}, \hat{g}) , têm extremidades no subconjunto compacto

$$\hat{K} := \hat{K}_{i_0} \cup \hat{K}_{i_1} \subset \hat{M}.$$

Da pseudoconvexidade e desaprisionamento causais de (\hat{M}, \hat{g}) , temos que a aplicação exponencial $\exp|_{\hat{C}}$ é própria, onde \hat{C} é conjunto formado pelos vetores causais em \mathcal{D} e os elementos da imagem da seção nula de $T\hat{M}$ tais que $\hat{\pi}(\hat{C}) = \hat{K}$ (veja o teorema 3.15). Temos que, para cada k , $\hat{\eta}_k(0) \in \hat{C}$ e

$$\hat{K} \ni \hat{\eta}_k(1) = \exp_{\hat{p}_k}(\dot{\hat{\eta}}_k(0)) \Rightarrow \dot{\hat{\eta}}_k(0) \in (\exp|_{\hat{C}})^{-1}(\hat{K}) \subset \hat{C},$$

onde $(\text{ex}\hat{p} |_{\hat{C}})^{-1}(\hat{K})$ é um subconjunto compacto em \hat{C} . Logo, a menos de passagem para uma subsequência,

$$\hat{\eta}_k(0) \rightarrow \hat{v} \in \hat{\mathcal{D}}_{\hat{p}}. \quad (44)$$

Aplicando $d\varphi$ a (44), vem que

$$\dot{\eta}_k(0) \rightarrow d\varphi(\hat{v}) =: v \in \mathcal{D}_p.$$

Portanto, $\mathfrak{T}\mathfrak{O}(\gamma)$ é precompacta. □

O teorema 5.14 é uma variante do seguinte resultado:

Proposição 5.15 ([26], Cor. 5.2). *Seja (M, g) um espaço-tempo compacto que admite uma aplicação de recobrimento regular globalmente hiperbólica $\varphi : (\hat{M}, \hat{g}) \rightarrow (M, g)$. Se o grupo de recobrimento $\mathcal{D}(\varphi)$ é abeliano, então (M, g) possui uma geodésica tipo-tempo fechada.*

5.4 TRANSLAÇÕES DE CLIFFORD E RECOBRIMENTOS GLOBALMENTE HIPERBÓLICOS

Nesta seção voltamos ao contexto específico das variedades lorentzianas que admitem um espaço de recobrimento globalmente hiperbólico, porém agora admitindo simetrias tais como as *translações de Clifford* e as *isometrias tipo-tempo futuro-dirigidas* neste espaço-tempo. Nossa abordagem aqui gerou novos resultados de existência de geodésicas tipo-tempo fechadas em variedades de Lorentz que são um pouco mais fortes do que resultados similares na literatura, e isso nos motivou a revisitá-los aqui munidos do lema Hill-Climb.

Sejam (M, g) um espaço-tempo e $\rho : M \rightarrow M$ uma isometria. Dizemos que ρ é uma:

- i. **translação de Clifford**, se $d(p, \rho(p))$ é constante para todo $p \in M$.
- ii. **isometria tipo-tempo futuro-dirigida**, se para cada $p \in M$ ou $\rho(p) = p$ ou $\rho(p) \in I^+(p)$.

Estas duas definições são, em princípio, noções inteiramente diferentes. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 5.16. Se X é um campo vetorial de Killing completo tipo-luz ou tipo-espaço que tem órbitas acronais em um espaço-tempo (M, g) , então qualquer estágio ρ_t ($t \in \mathbb{R}$) de seu fluxo é uma translação de Clifford, pois $d(p, \rho_t(p)) = 0$ para todo $p \in M$. Até mesmo se X for um campo vetorial de Killing tipo-tempo futuro-dirigido e (M, g) um espaço-tempo cronológico, temos que ρ_t , para $t < 0$, é uma translação de Clifford, pois também temos que $d(p, \rho_t(p)) = 0$ para todo $p \in M$ e $t < 0$. Note que, em nenhuma destas situações temos que ρ_t é uma isometria tipo-tempo futuro-dirigida,

exceto $\rho_0 = Id_M$ – que é trivialmente uma translação de Clifford, em espaços-tempo cronológicos⁶ (já que $d(p,p) = 0$ para todo $p \in M$ neste caso), e uma isometria tipo-tempo futuro-dirigida.

O resultado a seguir obtido por Beem, Ehrlich e Markvorsen fornece uma relação entre as isometrias tipo-tempo futuro-dirigidas e as translações de Clifford em um espaço-tempo globalmente hiperbólico e 1-conexo futuro-dirigido.

Teorema 5.17 ([5], Teo. 4.2, Pág. 254). *Seja (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico e 1-conexo futuro-dirigido tal que todas as curvaturas seccionais são ≥ 0 em planos tipo-tempo. Se (M, g) é geodesicamente completo em alguma das classes de geodésicas (tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço), então qualquer isometria tipo-tempo futuro-dirigida não-trivial de (M, g) é uma translação de Clifford.*

Este resultado motiva a seguinte definição:

Definição 5.18. Uma isometria ρ de um espaço-tempo (M, g) é uma **translação de Clifford tipo-tempo futuro-dirigida** se ρ é uma isometria tipo-tempo futuro-dirigida e também uma translação de Clifford.

A seguir apresentamos dois exemplos simples que ilustram a definição anterior – contudo no segundo exemplo as hipóteses do teorema 5.17 podem falhar, mas mesmo assim temos uma translação de Clifford tipo-tempo futuro-dirigida.

Exemplo 5.19.

1. Considere o espaço-tempo de Minkowski \mathbb{R}_1^n com a orientação temporal padrão. Uma translação $\rho_a : \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ dada por $\rho_a(x) := x + a$, onde $a \in \mathbb{R}^n$ é qualquer vetor tipo-tempo pertencente ao cone temporal futuro, é uma translação de Clifford não-trivial tipo-tempo futuro-dirigida (observe que $d(x, \rho_a(x)) = |a|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$).
2. Mais geralmente, seja $(M = \mathbb{R} \times N, g = -dt^2 \oplus h)$ um cilindro Lorentziano, onde (N^{n-1}, h) é uma variedade riemanniana conexa. (M, g) é um espaço-tempo globalmente hiperbólico e geodesicamente completo se, e somente se, (N, h) é completo (c.f. [9, Teo. 3.67, Pág. 103]; a orientação temporal é escolhida de modo que $\partial/\partial t$ está em τ^+). No entanto, (M, g) não precisa ser 1-conexo futuro-dirigido; na verdade, pode até ter infinitas classes de t -homotopia, mesmo que N seja simplesmente conexa (veja [2]). Então o teorema 5.17 não pode ser aplicado diretamente. Porém, para cada número real positivo $a > 0$, a aplicação $\rho_a : (t, x) \in M \mapsto (t + a, x) \in M$ é claramente uma translação de Clifford tipo-tempo futura-dirigida não-trivial com $d(p, \rho_a(p)) = a$ para todo $p \in M$.

⁶ Curiosamente, por esta definição, se (M, g) é totalmente vicioso, ou seja, se através de qualquer ponto de M passa uma curva tipo-tempo futuro-dirigida fechada, então a aplicação identidade é uma translação de Clifford, pois $d(p, p) = +\infty$ para todo $p \in M$.

Agora forneceremos condições suficientes para a existência de um laço geodésico tipo-tempo localmente maximizante (veja também o corolário 4.10 e a proposição 5.5). Observe que no resultado a seguir não precisamos nem de compacidade de M e nem de regularidade do recobrimento.

Teorema 5.20. *Seja (M, g) uma variedade de Lorentz que admite um recobrimento lorentziano $\varphi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$, onde (\tilde{M}, \tilde{g}) é um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Se o grupo $\mathcal{D}(\varphi) \subset \text{Diff}(\tilde{M})$ de transformações de recobrimento contém uma translação de Clifford tipo-tempo futuro-dirigida não-trivial de (\tilde{M}, \tilde{g}) , então (M, g) tem um laço geodésico tipo-tempo localmente maximizante em cada ponto $p \in M$.*

Demonstração. Primeiramente observe que $M = \varphi(\tilde{M})$ é conexa, pois \tilde{M} é conexa e φ é uma aplicação contínua. Sejam $\rho : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ uma translação de Clifford tipo-tempo futuro-dirigida não-trivial em $\mathcal{D}(\varphi)$ e $p \in M$. Considere $\tilde{p}_1 \in \varphi^{-1}(\{p\})$. Temos que $\tilde{p}_2 := \rho(\tilde{p}_1) \neq \tilde{p}_1$, pois ρ é uma transformação de recobrimento não-trivial de φ e como ρ é uma isometria tipo-tempo futuro-dirigida, segue que $\tilde{p}_2 \in I^+(\tilde{p}_1)$. Como (\tilde{M}, \tilde{g}) é globalmente hiperbólico, então existe um segmento de geodésica tipo-tempo futuro-dirigido maximal $\tilde{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ que conecta \tilde{p}_1 a \tilde{p}_2 , ou seja, $d(\tilde{p}_1, \rho(\tilde{p}_1)) = d(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = L(\tilde{\sigma})$. Seja $U \ni p$ uma vizinhança conexa que é coberta uniformemente por φ e escreva $\varphi^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} \tilde{U}_i$ (i.e., I é, no máximo, infinito contável). Sem perda de generalidade podemos assumir que $\tilde{p}_i \in \tilde{U}_i$ para $i = 1, 2$. Como consequência, temos que $\rho(\tilde{U}_1) = \tilde{U}_2$. Denotamos por \tilde{u} a velocidade inicial de $\tilde{\sigma}$.

Seja $\tilde{E} : \tilde{\mathcal{D}} \subset T\tilde{M} \rightarrow \tilde{M} \times \tilde{M}$ a aplicação dada por $\tilde{E}(v) = (\tilde{\pi}(v), \tilde{\text{exp}}(v))$ para $v \in \tilde{\mathcal{D}}$, onde $\tilde{\mathcal{D}}$ é o domínio maximal da aplicação exponencial $\tilde{\text{exp}}$ em (\tilde{M}, \tilde{g}) e $\tilde{\pi}$ a projeção canônica de $T\tilde{M}$ sobre \tilde{M} . Como $\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{D}}$, temos que

$$\tilde{E}(\tilde{u}) = (\tilde{\pi}(\tilde{u}), \tilde{\text{exp}}(\tilde{u})) = (\tilde{\sigma}(0), \tilde{\sigma}(1)) = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) \in \tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2.$$

Assim, $\tilde{W} := \tilde{E}^{-1}(\tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2)$ é uma vizinhança de \tilde{u} em $\tilde{\mathcal{D}}$. Agora, como a aplicação $\varphi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ é um recobrimento lorentziano, então a derivada $d\varphi : T\tilde{M} \rightarrow TM$ de φ é um difeomorfismo local que preserva o caráter causal dos vetores. Em particular, a restrição da aplicação de fibrado $d\varphi$ entre os subconjuntos abertos $T\tilde{U}_1 := \bigsqcup_{\tilde{q} \in \tilde{U}_1} T_{\tilde{q}}\tilde{M}$ e $TU := \bigsqcup_{q \in U} T_qM$ é um difeomorfismo. Observe que $\tilde{W} \subset T\tilde{U}_1 \cap \tilde{\mathcal{D}}$. Seja $\tilde{v} \in \tilde{W}$. Considere a geodésica inextensível $\tilde{\sigma}_{\tilde{v}}$ em \tilde{M} tal que $\dot{\tilde{\sigma}}_{\tilde{v}}(0) = \tilde{v}$. Como $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{D}}$, então $\tilde{\sigma}_{\tilde{v}}$ está definida no intervalo $[0, 1]$. Assim, a geodésica inextensível $\sigma_v := \varphi \circ \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}$ em M é tal que $\dot{\sigma}_v(0) = v := d\varphi(\tilde{v})$ e também está definida no intervalo $[0, 1]$. Concluimos que a vizinhança $W := (d\varphi)(\tilde{W})$ de $u := (d\varphi)(\tilde{u})$ está contida em $TU \cap \mathcal{D}$.

Afirmamos que o laço geodésico tipo-tempo $\sigma := \varphi \circ \tilde{\sigma} : [0, 1] \rightarrow M$ com $\dot{\sigma}(0) = u \in \mathcal{D}$ tem comprimento maximal dentre todos os laços geodésicos tipo-tempo com condições iniciais em W . De fato, seja $\beta : [0, 1] \rightarrow M$ um laço geodésico tipo-tempo tal que $\beta(0) = \beta(1) = x \in U$ e $w = \dot{\beta}(0) \in W$. Considere $\tilde{w} \in \tilde{W} \subset \tilde{\mathcal{D}}$ tal que $d\varphi(\tilde{w}) = w$ e

$\tilde{x} = \tilde{\pi}(\tilde{w}) \in \tilde{U}_1$. Agora, considere o segmento de geodésico tipo-tempo $\tilde{\beta} : [0,1] \rightarrow \tilde{M}$ tal que $\tilde{\beta}(0) = \tilde{x}$ e $\dot{\tilde{\beta}}(0) = \tilde{w}$, ou seja, $\tilde{\beta}(t) = \widetilde{\exp}_{\tilde{x}}(t \cdot \tilde{w})$ para $t \in [0,1]$ (observe que $\tilde{\beta}(1) = \widetilde{\exp}_{\tilde{x}}\tilde{w} \in \tilde{U}_2$ pela definição de \tilde{W}). Note que $\beta = \varphi \circ \tilde{\beta}$, pois ambos os segmentos geodésicos β e $\varphi \circ \tilde{\beta}$ possuem as mesmas condições iniciais. Além disso, $\tilde{\beta}(1) = \rho(\tilde{x})$, porque ambos os pontos estão em \tilde{U}_2 e $\varphi(\tilde{\beta}(1)) = \varphi(\rho(\tilde{x})) = x$. Como ρ é uma translação de Clifford, então

$$\begin{aligned}
 L(\beta) &= L(\tilde{\beta}) \\
 &\leq d(\tilde{x}, \rho(\tilde{x})) \\
 &= d(\tilde{\rho}_1, \rho(\tilde{\rho}_1)) \\
 &= L(\tilde{\sigma}) = L(\sigma).
 \end{aligned}$$

□

O teorema 5.20 junto com o Corolário 5.12 produz imediatamente uma generalização do [27, Teo. 3.5]:

Corolário 5.21. *Seja (M, g) uma variedade lorentziana tal que $\text{Conj}_c(p) = \emptyset$ para algum $p \in M$. Suponha que (M, g) admite uma aplicação de recobrimento lorentziana globalmente hiperbólica $\varphi(\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ tal que o grupo de transformação de recobrimento $\mathcal{D}(\varphi)$ tem uma translação de Clifford tipo-tempo futuro-dirigida não-trivial, então (M, g) tem uma geodésica tipo-tempo fechada através de p . Em particular, se (M, g) tem curvaturas seccionais não-negativas em planos tipo-tempo, então (M, g) tem uma geodésica tipo-tempo fechada passando por cada um de seus pontos.*

Finalmente, o corolário a seguir decorre imediatamente do teorema 5.17 e do corolário 5.21 – lembrando que qualquer forma espacial lorentziana plana tem como recobrimento universal o espaço-tempo de Minkowski. Ele generaliza [27, Cor. 3.6].

Corolário 5.22. *Seja (M, g) uma forma espacial lorentziana plana. Se o grupo fundamental $\pi_1(M)$ contém uma isometria tipo-tempo futuro-dirigida não-trivial, então (M, g) contém uma geodésica tipo-tempo fechada através de cada um de seus pontos.*

6 CONCLUSÃO

No capítulo 3 abordamos o problema da conexidade geodésica em variedades afins e conseguimos avanços importantes. De forma mais específica, conseguimos melhorar o teorema 1.4 obtido por Costa e Silva e Flores em [18] através do teorema 3.19 com a vantagem de termos não só informações sobre a *conectividade geodésica entre dois pontos na variedade*, mas como também informações a respeito da *quantidade destes segmentos de geodésicas que conectam estes dois pontos*.

No capítulo 4 trabalhamos no problema da conexidade geodésica em variedades de Lorentz. Obtemos no teorema 4.8 um resultado relevante sobre a conexidade geodésica entre dois pontos, que nos garante *a existência de um segmento geodésico tipo-tempo* conectando dois pontos p e q quando a aplicação exponencial \exp_p tem a propriedade de continuação causal (CCP), veja definição 4.3, e estes pontos podem ser conectados por uma curva tipo-tempo que não intersecta o conjunto formado pelos pontos conjugados a p ao longo de geodésicas causais. Em particular, este resultado tem uma grande importância para nossa pesquisa, pois ele nos fornece condições suficientes para *existência de laços geodésicos tipo-tempo*, corolário 4.10, o que é fundamental para estabelecermos a existência de geodésicas tipo-tempo em uma variedade de Lorentz em vista da nossa técnica empregada para tal no capítulo 5.

No capítulo 5 tratamos do problema da existência de uma geodésica tipo-tempo fechada em uma variedade de Lorentz. A partir da existência de uma laço geodésico tipo-tempo introduzimos o conceito de *TG-homotopia* (veja definição 5.1) e nesse sentido obtemos o teorema 5.11. Utilizamos esse resultado crucial para a obtenção de novos resultados sobre existência de geodésicas tipo-tempo fechadas.

Combinando o teorema 5.20 com o corolário 5.12 obtemos o corolário 5.21 que é uma generalização de [27, Teo. 3.5]. A vantagem aqui é que nosso resultado *não* requer nem a compacidade da variedade de Lorentz e nem a regularidade do seu espaço de recobrimento. Finalizamos o capítulo obtendo o corolário 5.22 que generaliza [27, Cor. 3.6] (não requisitamos a compacidade da forma espacial lorentziana).

Como fruto da nossa pesquisa produzimos dois preprints, um intitulado por "Path-Lifting Properties of the Exponential Map with Applications to Geodesics" em que tratamos do problema da conexidade geodésica em variedades afins e de Lorentz abordada nesta tese nos capítulos 3 e 4 (para visualizar o preprint acesse o endereço: <<https://arxiv.org/abs/2107.14328v1>>) e o outro por "Locally Extremal Timelike Geodesic Loops on Lorentzian Manifolds" em que trabalhamos com o problema da existência de geodésicas tipo-tempo fechadas em variedades de Lorentz, visto aqui no capítulo 5 (para visualizar o preprint acesse o endereço: <<https://arxiv.org/abs/2201.09993v1>>).

Como trabalhos futuros em decorrência desta pesquisa desejamos estudar mais detalhadamente a hipótese de “não-autoconjugação” exigida para que um laço geodésico tipo-tempo localmente extremal em uma variedade de Lorentz seja uma geodésica tipo-tempo fechada no corolário 5.12. De fato acreditamos que esta suposição possa ser apenas uma limitação em decorrência da técnica empregada no problema. Finalmente, gostaríamos também de investigar o quão genérica é a ausência de pontos autoconjugados para laços geodésicos tipo-tempo nas classes de variedades de Lorentz consideradas.

REFERÊNCIAS

- [1] ALEXANDER, S. B. e KARR, W. A. Convex Functions and Geodesic Connectedness of Space-Times. **Differential Geometry and its Applications**, v. 54, pt. B, p. 361–384, out. 2017.
- [2] ÁLVAREZ, P. M. e SÁNCHEZ, M. A Note on the Causal Homotopy Classes of a Globally Hyperbolic Spacetime. **Classical and Quantum Gravity**, v. 32, n. 19, p. 1-12, set. 2015.
- [3] ASSELLE, L. e MAZZUCHELLI, M. On the Existence of Infinitely Many Closed Geodesics on Non-Compact Manifolds. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 145, n. 6, p. 2689-2697, 2017.
- [4] BATES, L. You Can't Get There from Here. **Differential Geometry and its Applications**, v. 8, n. 3, p. 273-274, jun. 1998.
- [5] BEEM, J. K.; EHRLICH, P. e MARKVORSEN, S. Timelike Isometries and Killing Fields. **Geometriae Dedicata**, v. 26, p. 247-258, 1988.
- [6] BEEM, J. K. e PARKER, P. E. Pseudoconvexity and Geodesic Connectedness. **Annali di Matematica pura ed applicata**, v. 155, n. 1, p. 137-142, dez. 1989.
- [7] BEEM, J. K. e PARKER, P. E. The Space of Geodesics. **Geometriae Dedicata**, v. 38, n. 1, p. 87-99, 1991.
- [8] BEEM, J. K. e KRÓLAK, A. Cosmic Censorship and Pseudoconvexity. **Journal of Mathematical Physics**, v. 33, n. 6, p. 2249-2253, jan. 1992.
- [9] BEEM, J. K.; EASLEY, K. L. e EHRLICH, P. E. **Global Lorentzian Geometry**. 2nd ed. New York: Marcel Dekker Inc., 1996, 635 p. (Série Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, n. 202)
- [10] BENCI, V. e FORTUNATO, D. Existence of Geodesics for the Lorentz Metric of a Stationary Gravitational Field. **Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire**, v. 7, n. 1, p. 27-35, fev. 1990.
- [11] BENCI, V. e FORTUNATO, D. Periodic Trajectories for the Lorentz Metric of a Static Gravitational Field. *In*: BERESTICKY, H. *et al.* (ed). **Variational Methods**. Boston: Birkhäuser, 1990. cap. 29, p. 413-429. (Série Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, v. 4)
- [12] BENCI, V. e GIANNONI, F. On the Existence of Closed Geodesics on Noncompact Riemannian Manifolds. **Duke Mathematical**, v. 68, n. 2, p. 195-215, nov. 1992.
- [13] BESSE, A. L. **Manifolds all of Whose Geodesics are Closed**. Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [14] BROWDER, F. E. Covering spaces, Fiber Spaces and Local Homeomorphisms. **Duke Mathematical Journal**, v. 21, n. 2, p. 329-336, jun. 1954.
- [15] BUSEMANN, H. **The Geometry of Geodesics**. Academic Press, New York, 1955.

- [16] CALABI, E. e MARKUS, L. Relativistic Space Forms. **Annals of Mathematics**, v. 75, n. 1, p.63-76, jan. 1962.
- [17] CANDELA, A. M. e SÁNCHEZ M. Geodesic Connectedness in Gödel Type Space-Times. **Differential Geometry and its Applications**, v. 12, n. 2, p. 105-120, mar. 2000.
- [18] COSTA E SILVA, I. P. e FLORES, J. L. Geodesic Connectedness of Affine Manifolds. **Annali di Matematica**, v. 200, n. 3, p. 1135-1148, out. 2020.
- [19] DO CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015, 335 p.
- [20] FLAHERTY, F. J. Lorentzian Manifolds of Nonpositive Curvature. II **Proceedings American Mathematical Society**, v. 48, n. 1, p. 199-202, mar. 1975.
- [21] FLORES DORADO, J. L. **Conectividad Geodésica en Algunos Espaciotiempos: Un Método Topológico**. 2002. Tese (Doutorado em Matemática) – Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada, Espanha, 2002.
- [22] FLORES, J. L. Locally Extremal Geodesic Loops on a Riemannian Manifold. **Proceedings American Mathematical Society**, v. 146, n. 9, p. 4029-4033, jun. 2018.
- [23] FRAUENDIENER, J.; GIULINI, D. J. W. e PERLICK, V. (ed.). **Analytical and Numerical Approaches to Mathematical Relativity**. Heidelberg: Springer, 2006, 281 p. (Série Lecture Notes in Physics, v. 692)
- [24] GALLOWAY, G. J. Closed Timelike Geodesics. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 285, n. 1, p. 379-388, set. 1984.
- [25] GALLOWAY, G. J. Compact Lorentzian Manifolds Without Closed Nonspacelike Geodesics. **Proceedings American Mathematical Society**, v. 98, n. 1, p. 119-123, set. 1986.
- [26] GUEDIRI, M. On the Existence of Closed Timelike Geodesics in Compact Spacetimes. **Mathematische Zeitschrift**, v. 239, n. 2, p. 277-291, fev. 2002.
- [27] GUEDIRI, M. On the Existence of Closed Timelike Geodesics in Compact Spacetimes. II **Mathematische Zeitschrift**, v. 244, n. 3, p. 577-585, jul. 2003.
- [28] GUEDIRI, M. A New Class of Compact Spacetimes Without Closed Causal Geodesics. **Geometriae Dedicata**, v. 126, n. 1, p. 177-185, abr. 2007.
- [29] GUEDIRI, M. Closed Timelike Geodesics in Compact Spacetimes. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 359, n. 6, p. 2663-2673, jun. 2007.
- [30] GUTÚ, O. e JARAMILLO, J. Global Homeomorphism and Covering Projections on Metric Spaces. **Mathematische Annalen**, v. 338, n. 1, p. 75-95, mar. 2007.
- [31] GUTÚ, O. On Global Inverse Theorems. **Topological Methods in Nonlinear Analysis**, v. 49, n. 2, p. 401-444, jun. 2017.
- [32] HADAMARD, J. Sur les Transformations Ponctuelles. **Bulletin de la Société Mathématique de France**, v. 34, p. 71-84, 1906.

- [33] HAWKING, S. W., ELLIS, G. F. R. **Large Scale Structure of Space-Time**. Cambridge: Cambridge University Press, 1973, 391 p. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)
- [34] KLINGENBERG, W. **Lectures on Closed Geodesics**. Heidelberg: Springer, 1978, 230 p. (Série Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, v. 230)
- [35] KRÓLAK, A. Strong Curvature Singularities and Causal Simplicity. **Journal of Mathematical Physics**, v. 33, n. 2, p. 701-704, fev. 1992.
- [36] LEE, J. **Introduction to Smooth Manifolds**. 2. ed. New York: Springer, 2013, 708 p. (Graduate Texts in Mathematics, v. 218)
- [37] LIMA, E. L. **Variedades Diferenciáveis**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011, 289 p. (Série: Publicações Matemáticas)
- [38] MINGUZZI, E. e SÁNCHEZ, M. The Causal Hierarchy of Spacetimes. *In*: ALEKSEEVSKY, D. V. e BAUM, H. (ed). **ESI Lectures in Mathematics and Physics: Recent Developments in Pseudo-Riemannian Geometry**. EMS, 2008. cap. 8, p. 299-358.
- [39] MINGUZZI, E. Lorentzian Causality Theory. **Living Reviews in Relativity**, v. 22, n. 1, jun. 2019.
- [40] MORSE, M. **The calculus of Variations in the Large**. American Mathematical Society, 1934, 368 p. (Série Colloquium Publications, v. 18)
- [41] NOMIZU, K. e OZEKI, H. The Existence of Complete Riemannian Metrics. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 12, n. 6, p. 889-891, dez. 1961.
- [42] O'NEILL, B. **Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity**. New York: Academic Press, 1983, 468 p.
- [43] PENROSE, R. **Techniques of Differential Topology in Relativity**. Bristol: J. W. Arrowsmith Ltd, Society for Industrial and applied Mathematics, 1972, 72 p. (CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, CB07)
- [44] RHEINBOLDT, W. C. Local Mapping Relations and Global Implicit Function Theorems. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 138, p. 183-198, abr. 1969.
- [45] RICHARD, P. When Proper Maps are Closed. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 24, n. 4, p. 835-836, abr. 1970.
- [46] SÁNCHEZ, M. Causal Hierarchy of Spacetimes, Temporal Functions and Smoothness of Geroch's Splitting. A Revision. **Matemática Contemporânea – SBM**, v. 29, p. 127-155, 2005. (XIII Escola de Geometria Diferencial – Part II)
- [47] SEIFERT, H. J. Global Connectivity by Timelike Geodesics. **Zeitschrift für Naturforschung A**, v. 22, n. 9, p. 1356-1360, jun. 1967.

-
- [48] THORBERGSSON, G. Closed Geodesics on Non-Compact Riemannian Manifolds. **Mathematische Zeitschrift**, v. 159, n. 3, p. 249-258, out. 1978.
- [49] TIPLER, F. J. Existence of Closed Timelike Geodesics in Lorentz Spaces. **Proceedings American Mathematical Society**, v. 76, n. 1, p. 145-147, ago. 1979.
- [50] TU, L. W. **An Introduction to Manifolds**. 2. ed. New York: Springer, 2011, 410 p.
- [51] VATANDOOST, M.; POURKHANDANI, R. e EBRAHIMI, N. On Null and Causal Pseudoconvex Spacetimes. **Journal of Mathematical Physics**, v. 60, n. 1, p. 012502-1 a 012502-7, jan. 2019.