UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Cleison dos Santos Ramthun

Existência de Soluções Globais para uma Equação da Onda Semilinear com Dupla Dissipação em um Domínio Exterior

Florianópolis
2022

Cleison dos Santos Ramthun

Existência de Soluções Globais para uma Equação da Onda Semilinear com Dupla Dissipação em um Domínio Exterior

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Cleverson Roberto da Luz, Dr.

Florianópolis
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Ramthun, Cleison dos Santos
Existência de Soluções Globais para uma Equação da Onda Semilinear com Dupla Dissipação em um Domínio Exterior / Cleison dos Santos Ramthun ; orientador, Cleverson Roberto da Luz, 2022.
95 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Equação da onda semilinear. 3. Existência e unicidade de solução. 4. Expoente crítico. 5. Domínio exterior. I. Luz, Cleverson Roberto da . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Cleison dos Santos Ramthun

Existência de Soluções Globais para uma Equação da Onda Semilinear com Dupla Dissipação em um Domínio Exterior

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Marcelo Rempel Ebert, Dr.
Universidade de São Paulo

Prof. Ruy Coimbra Charão, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Edson Cilos Vargas Júnior, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Daniel Goncalves
Data: 20/04/2022 18:16:56-0300
CPF: 017.022.459-77
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Cleverson Roberto da Luz
Data: 20/04/2022 14:41:42-0300
CPF: 029.967.469-02
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Cleverson Roberto da Luz, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2022.

Dedico esta dissertação a todos que contribuíram direta ou indiretamente no meu percurso formativo.

AGRADECIMENTOS

Após um longo e árduo período de pós-graduação, no qual nos desvinculamos de diversos momentos e pessoas, e nos focamos em um objetivo específico, poder parar para relembrar de tudo e todos que, de alguma forma, contribuíram para realização de mais essa etapa é extremamente incrível, e nos mostra que em um mundo gigantesco, não estamos sós.

Eu não poderia iniciar de forma diferente, apesar de todos os meus próprios questionamentos internos, acreditar que existe um Deus e que de alguma forma inexplicável, me guiou, caminhou comigo e me deu condições de chegar até aqui, é um dos motivos que me ajudam a acordar todas as manhãs, levantar, continuar sonhando e conquistando tudo que almejo. À Deus, meu muito obrigado.

Mais uma vez, não sei se começo agradecendo ou me desculpando. Agradecer, pois, sem meus Pais, Adilson e Sueli, nada disso seria verdade, e tão pouco alcançável. Vocês são pessoas com uma história não muito fácil, mas são pessoas extraordinárias, e me orgulho muito de ter vocês como pais. Além de me colocarem no mundo e me fornecerem todas as condições para que eu pudesse correr atrás dos meus sonhos, mostraram a mim, desde pequeno, que o amor existe, que ele cura e que ele é imprescindível para uma vida feliz, não livre de problemas, mas feliz. Vocês me deram todo suporte, e não apenas financeiro. Tê-los ao meu lado em cada batalha é uma das únicas certezas para todas as vitórias que tive. E o pedido de desculpa é pelo fato de não conseguir estar ao lado de vocês em todos os momentos, e ter que me ausentar por diversas vezes. Mas, tenham certeza de que sempre os carregarei no coração.

Outra pessoa do meu círculo familiar que merece destaque é meu irmão Cristian. Alguém que do nada, apenas chegou, deu um olá e começou a fazer parte. Desde que ele nasceu, vê-lo crescer e se desenvolver foi uma das experiências mais lindas que já tive. Apesar de todas as nossas desavenças, temos uma relação super saudável. E nosso laço de amizade me torna uma pessoa melhor a cada dia.

Conhecer pessoas é, provavelmente, uma questão de aleatoriedade. E na vida existem pessoas que surgem no nosso caminho e o desejo mais intrínseco que temos é que elas não desapareçam mais. A partir daqui as pessoas que irei citar são esse tipo de pessoa.

No meio de mais esta etapa, minha vida tomou um rumo diferente, conheci novas pessoas, vivenciei novas experiencias, o mundo adentrou uma pandemia que,

por sua vez, me fez perder o contato direto com a universidade, fazendo com que o ensino remoto fosse minha única saída. Porém, em toda esta mudança, uma pessoa especial cruzou meu campo de visão, conheceu meus medos, angústias, segredos, sonhos e permaneceu aqui. Bruno, ter você ao meu lado tem me feito muito bem. Você é o tipo de pessoa que inspira, faz florescer e ajuda a crescer. Tua presença tem se tornado necessária, tuas mensagens viraram motivos de alegria e teu afeto se mostrou meu mais novo combustível. Eu sempre falei que "o óbvio precisa ser dito", mas, te agradeço por me mostrar que, quando não é dito, ele é demostrado por atitudes. Você me ensinou que o amor pode ser leve. Depois que te conheci, senti que tenho mais um triunfo na vida. Obrigado por estar aqui, por ser você e por fazer meus dias neste mundo muito mais felizes.

Essas aleatoriedades da vida são bem curiosas. Por exemplo, fazer uma graduação e como presente receber o melhor amigo que o universo poderia colocar do meu lado. Bryan, você é, sem sombra de dúvidas, o melhor presente que UFSC – Blumenau me trouxe. Nossa conexão é inexplicável, nos conhecemos há um pouco menos de uma década, mas tenho você como um irmão de outra mãe. Aliás, aproveito pra agradecer a Dona Edivalma, que além de ser tua progenitora, sempre me tratou como filho. Amigo, você incrível, uma preciosidade que não me permito perder. Claro, seu único defeito é ter seguido na área da Análise Numérica, mas nem tudo é perfeito, não é mesmo?

Comentando sobre presentes que a UFSC – Blumenau me trouxe, em hipótese alguma poderia esquecer de mencionar todo o corpo docente. Mas, em especial, ao Prof. Eleomar. Quando penso em didática, quase que imediatamente, lembro das suas aulas de Cálculo 1 e 2, e da minha estimada matéria preferida, Introdução à Análise. Tê-lo como professor na graduação foi uma das dádivas mais admiráveis. E agora, mesmo não sendo seu aluno em sala de aula, continuo aprendendo muito com você. Nossas conversas durante o mestrado me abriram caminhos que eu não esperava, me fizestes identificar áreas de estudo que eu nem cogitava trabalhar, e ainda melhor, me apaixonei por elas. A conclusão deste mestrado não seria possível sem seus direcionamentos, sem que você me ajudasse a trilhar planejamentos, como, por exemplo, quais disciplinas cursar, com quem falar sobre orientação, e principalmente por estar quase sempre disposto a fazer uma chamada de vídeo, abrir o paint e me mostrar que notações assustam, mas nada é impossível de se aprender. Seu encorajamento neste processo foi indispensável.

A Universidade em si tem me trazido presentes incríveis, Liana, por exemplo, veio com o mestrado, pela UFSC – Florianópolis. No momento que achei que entraria

no mestrado e sairia sem contato com ninguém, em uma aula de Álgebra Linear, uma estrelinha brilhou mais forte. Como você gosta de ressaltar, tivemos um encontro de almas. E eu não me imagino mais seguir a vida sem você, sem sua energia, sem sua intensidade e sem sua parceria. Somos muito parecidos em vários aspectos e acho que isso facilitou nossa proximidade. Em pouco tempo, vivemos várias coisas, compartilhamos muito, sonhamos com nosso futuro, e tenho certeza que será ainda mais lindo do que imaginamos.

Sobre as pessoas que fazem parte da minha vida e exercem um papel fundamental, vou finalizar neste parágrafo. Este canceriano tem mania de se estender em textões, então, para poder fechar com chave de ouro, preciso lembrar de duas pessoas. A Andreza, que conheci em 2019, e de lá pra cá, a amizade só aumentou, dividimos, partilhamos, desabafamos e choramos consideravelmente, não é mesmo? Você é uma mulher extremamente forte, com uma energia que vibra de uma forma exuberante e nos conectamos de uma maneira que, em uma sala cheia, sem poder falar, com apenas um olhar, é como se estivéssemos lendo a mente um do outro. Eu sei que você sempre está aqui por mim, da mesma forma que estou por você. Você faz parte de mim. E a Flávia, que conheci através do Bruno, chegou com seus áudios de 3 minutos pra mais e ganhou um lugar de destaque no meu coração. Minhas manhãs ficam mais alegres, após nosso bate papo matinal. Sua amizade sincera, seus conselhos sensatos e seu posicionamento é algo admirável. Feliz por ter conhecido você.

Aos demais amigos que se fizeram presentes nesta jornada, entenderam minha ausência e contribuíram de alguma forma nesse processo, obrigado por acreditarem em mim e me fazerem lembrar a cada dificuldade, que eu seria capaz de superar e ir além! Às pessoas que passaram pela minha vida, deixaram suas marcas e seguiram, agradeço também, pois todas as experiências, trocas e vivências que tive, me tornaram a pessoa que sou hoje. E sigo muito grato por isso.

Realizar esta dissertação em uma pandemia, quando se perde o contato próximo ao orientador, a fim de sanar dúvidas e obter esclarecimentos, não é uma tarefa fácil. Muito se perde pelo caminho. Por isso, quero agradecer ao meu Orientador, Professor Cleverson, por ter aceito me orientar e fazer com que estas perdas se anulassem. Além de me propor este tema para dissertar, sempre se prontificou a me atender e discutir eventuais dúvidas. Este trabalho não seria possível sem sua orientação. Aproveito, também, para agradecer os membros da banca, Professor Ruy, Professor Marcelo e Professor Edson, suas contribuições foram essenciais para lapidação deste trabalho.

Finalmente, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo suporte financeiro entre Março de 2020 e Fevereiro de 2022.

O período do início dos estudos, a escolher a faculdade, e partir para o mundo do mestrado me mostrou um pouco sobre a vida também, desde escolher momentos de confraternização com os amigos e familiares, a noites em claro para enfim compreender melhor um conteúdo. Sou grato a todo esse percurso e ao carinho e amor daqueles que me rodeiam, a todos vocês citados acima, MEU MUITO OBRIGADO!

"Conheça todas as teorias,
domine todas as técnicas, mas,
ao tocar uma alma humana,
seja apenas outra alma humana."

Carl Jung

RESUMO

Nesta dissertação, consideramos um problema de valor inicial e de fronteira associado a uma equação da onda semilinear, com dois termos dissipativos, em um domínio exterior. O principal objetivo do trabalho é obter taxas de decaimento para a solução do problema e estudar o expoente crítico em relação a potência p do termo de não linearidade $|u(t,x)|^p$. Em particular, para o caso bidimensional os resultados obtidos são ótimos e o expoente crítico é dado pelo expoente de Fujita. Os resultados aqui apresentados foram provados por Marcello D'Abbicco, Ryo Ikehata e Hiroshi Takeda em [11].

Palavras-chave: Equação da onda semilinear, existência e unicidade de solução, expoente crítico, domínio exterior, dupla dissipação.

ABSTRACT

In this dissertation, we consider an initial value and boundary problem associated with a semi-linear wave equations with double damping terms in exterior domains. The main goal of the work is to obtain decay rates for the solutions of the problem and to study the critical exponent in relation to the power p of the nonlinear term $|u(t,x)|^p$. In particular, for the two-dimensional case, the data are optimal and the critical exponent is given by the Fujita exponent. The results presented here were proved by Marcello D'Abbicco, Ryo Ikehata and Hiroshi Takeda in [11].

Keywords: Semilinear wave equation, existence and uniqueness of solution, critical exponent, exterior domains, double dissipation.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As Equações Diferenciais Parciais aparecem na modelagem de diversos fenômenos físicos. Aspectos como existência, unicidade, regularidade e comportamento assintótico de soluções para problemas de valor inicial e/ou de contorno são alguns exemplos de resultados teóricos que são amplamente estudados no contexto de equações diferenciais.

Neste trabalho, consideramos o seguinte Problema de Cauchy associado a uma equação da onda semilinear em um domínio exterior de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) + u_t(t,x) - \Delta u_t(t,x) = |u(t,x)|^p, & (t,x) \in (0,+\infty) \times \Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \end{cases} \tag{0.1}$$

no qual Ω é um domínio exterior, ou seja, $\Omega = \mathbb{R}^n / \mathscr{O}$, $n \geq 2$, com $\partial\Omega$ limitada e suave, sendo $\mathscr{O}$ um conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ com medida positiva. Sem perda de generalidade, assumimos que $0 \in int(\mathscr{O})$. Os dados iniciais u_0 e u_1 são escolhidos em um espaço de energia usual, mais precisamente,

$$[u_0, u_1] \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

A energia total $E(t)$ associada à solução $v(t,x)$ do problema linear relacionado a equação (0.1) é definida por:

$$E(t) = \frac{1}{2}\|v_t(t,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla v(t,\cdot)\|^2 \tag{0.2}$$

e satisfaz a seguinte identidade de energia:

$$\frac{dE}{dt}(t) + \int_\Omega |v_t(t,x)|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla v_t(t,x)|^2\,dx = 0. \tag{0.3}$$

Observe que a energia total associada ao problema linear é uma função decrescente. Dessa forma, os termos $u_t(t,x)$ e $-\Delta u_t(t,x)$ representam duas dissipações para o problema (0.1).

O principal objetivo do trabalho é obter taxas de decaimento para a solução do problema (0.1) e estudar o expoente crítico em relação à potência p do termo de não linearidade $|u(t,x)|^p$ que aparece na equação, isto é, um valor limítrofe para a existência ou não-existência de soluções globais no tempo.

Inicialmente, vamos comentar brevemente sobre Problemas de Cauchy para algumas equações e indicar referências, para que assim, o leitor tenha um acervo acessível de pesquisa. Sendo assim, primeiramente, consideremos a seguinte equação linear homogênea:

$$u_{tt}(t,x)-\Delta u(t,x)-\Delta u_t(t,x)=0. \tag{0.4}$$

Para a equação (0.4) indicamos [26] e [27], pois possuem os principais resultados sobre estimativas associadas à equação citada. Na sequência, Ikehata-Todorova-Yordanov [21] e Ikehata [16], apresentam perfis assintóticos de soluções para equação (0.4). No entanto, considerando a equação:

$$u_{tt}(t,x)-\Delta u(t,x)-\Delta u_t(t,x)=|u(t,x)|^p, \tag{0.5}$$

em D'Abbicco-Reissig [12] são estudados os designados "problemas de expoentes críticos", que apresenta condições sobre onde o Problema de Cauchy está inserido, e limita intervalos para a potência p de forma a garantir a existência de solução global.

Cabe também uma menção, D'Abbico-Ebert [10] exploram os perfis assintóticos no caso parabólico para a equação:

$$u_{tt}(t,x)-\Delta u(t,x)+2a(-\Delta)^{\sigma}u_t(t,x)=0, \quad (a>0), \tag{0.6}$$

no qual $\sigma\in(0,1/2)$ e a partir das estimativas apresentadas por [7], D'Abbico-Ebert [9] e [8] obtém o expoente crítico para o caso de não linearidade da forma $|u(t,x)|^p$ e $|u_t(t,x)|^p$. Ressaltamos que o caso $\sigma=1/2$ é detalhado por D'Abbicco [6]. E, em Ikehata-Taketa [19], para $\sigma\in[1/2,1)$, são estudados os possíveis perfis assintóticos de soluções hiperbólicas com $t\to+\infty$.

Recentemente, Ikehata-Sawada [18] propõe um novo problema, com a finalidade de descobrir o perfil assintótico de soluções para o Problema de Cauchy homogêneo, associado ao Problema de Cauchy semilinear (0.1). Neste estudo é indicado que o perfil assintótico é um múltiplo constante do Kernel de Gauss com $t\to+\infty$. Em D'Abbicco [7] é estudado o problema (0.1) com três tipos de não linearidade $|u(t,x)|^p$, $|u_t(t,x)|^p$ e $|\nabla u(t,x)|^p$, e além disso, determina-se os expoentes críticos da potência p para todo $\mathbb{R}^n$, com $n\geq 1$.

Neste trabalho, usamos como base uma Proposição enunciada no Capítulo 3. Como não exploramos sua demonstração, indicamos [20], na qual este resultado é enunciado na Proposição 2.1 e demonstrado no Apêndice A desta mesma referência. Em suma, tal resultado nos traz que, sob certas condições, temos a existência de solução fraca para o Problema (0.1), e além disso, apresenta boa colocação local. Vale ressaltar que, entendemos como boa colocação a existência de solução, a unicidade da mesma e a dependência contínua da solução em relação ao dados iniciais.

No Capítulo 1 são apresentados conceitos e resultados clássicos da área. As demonstrações são omitidas, porém devidamente referenciadas, para que toda a estrutura de cálculos e notações usadas na sequência seja de conhecimento do leitor. Por sua vez, no Capítulo 2, consideramos o problema linear associado ao Problema (0.1), e provamos estimativas para a solução do referido problema, mais precisamente, apresentamos o seguinte resultado:

Teorema 0.1. *Seja $n \geq 2$. Se $[v_0, v_1] \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ é tal que:*

$$\| d_n(\cdot)\,(v_0 + v_1)\| < +\infty,$$

então, a solução única $v \in X_1$ do problema linear associado a (0.1), satisfaz:

$$\| v(t, \cdot)\|^2 \leq C J_0^2 (1+t)^{-1},$$
$$\| v_t(t, \cdot)\|^2 + \|\nabla v(t,\cdot)\|^2 \leq C J_0^2 (1+t)^{-2},$$

para alguma constante $C > 0$, de modo que:

$$J_0^2 := \| v_0\|_{H^1}^2 + \| v_1\|^2 + \| d_n(\cdot)\,(v_0 + v_1)\|^2,$$

onde

$$X_1 := C\left([0, +\infty); H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0, +\infty); L^2(\Omega)\right).$$

Este resultado é de extrema importância para a demonstração do teorema abaixo, pois uma vez que o estudo se dá sobre uma equação semilinear, a solução pode ser obtida usando o método de Duhamel.

Teorema 0.2. *Seja $n = 2$ e $2 < p < +\infty$ ou $n = 3, 4, 5$ e $1 + \frac{4}{n+2} < p \leq \frac{n}{n-2}$. Se as condições iniciais $[u_0, u_1] \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ satisfizer*

$$\mathscr{I}_0^2 := \| e^{|\cdot|^2/4} u_1\|^2 + \| e^{|\cdot|^2/4} \nabla u_0\|^2 + \| e^{|\cdot|^2/4} u_0\|^2 \ll 1,$$

então, o Problema (0.1) tem uma única solução global fraca $u \in X_1$ satisfazendo:

$$\int_\Omega e^{|x|^2/2(1+t)} \left(|u_t(t,x)|^2 + |\nabla u(t,x)|^2 \right) dx \leq \mathscr{I}_0^2,$$

e as estimativas:

$$\| u(t, \cdot)\|^2 \leq C \mathscr{I}_0^2 (1+t)^{-1},$$
$$\| u_t(t, \cdot)\|^2 + \|\nabla u(t,\cdot)\|^2 \leq C \mathscr{I}_0^2 (1+t)^{-2},$$

são verdadeiras para alguma constante $C > 0$.

O resultado acima é enunciado e demonstrado no Capítulo 3, em síntese, provamos a existência e unicidade de solução global fraca sobre certas condições nos dados iniciais e sobre o expoente p. E, por fim, no Capítulo 4, apresentamos e demonstramos os seguintes resultados:

Teorema 0.3. *Seja $n \geq 2$. Suponha que a condição inicial $u_0 \in L^1(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $u_1 \in L^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ em (0.1) não sejam identicamente nulas. Além disso, considere que $u_0(x)$, $u_1(x) \geq 0$, para qualquer $x \in \Omega$. Assuma que $1 < p < 2$, se $n = 2$, ou $1 < p \leq 1 + \frac{2}{n}$, se $n \geq 3$. Então, não existe solução global para o Problema (0.1), isto é, na Proposição 3.1, $T_m < +\infty$.*

Teorema 0.4. *Seja $n \geq 3$. Suponha que a condição inicial $u_0 \in L^1(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ em (0.1) seja tal que $u_0(x) \geq 0$, para qualquer $x \in \Omega$. Além disso, assuma que existe uma constante $\varepsilon > 0$ de modo que o dado inicial $u_1 \in L^{2,1}(\Omega)$ em (0.1) satisfaça:*

$$u_1(x) \geq \varepsilon |x|^{-1-\frac{n}{2}} (\log(1+|x|))^{-1} \qquad \forall x \in \Omega.$$

Assim, se $1 < p < 1 + \frac{4}{n+2}$, então, não existe solução global para o Problema (0.1), isto é, $T_m < +\infty$, onde

$$L^{2,1}(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \quad \backslash \quad |x| f \in L^2(\Omega) \right\}. \tag{0.7}$$

Estes resultados garantem, sob as condições descritas, a não existência de soluções globais para o Problema (0.1), contrapondo assim, o Teorema 0.2. No capítulo 4, bem como no Teorema 0.2, são impostas restrições aos dados iniciais, entretanto, consideramos um complementar aceitável para o intervalo no qual o expoente p está inserido no Teorema 0.2. Sendo assim, garantimos com estes resultados que sob as condições aqui impostas, o Problema (0.1), não admite solução global.

1 PRELIMINARES

Neste capítulo buscamos compilar diversos resultados e definições que serão utilizadas no decorrer deste trabalho. As demonstrações serão omitidas, porém, indicamos as seguintes referências [14], [24], [23], [1], [3], [22], [15], [25] e [2], que foram cruciais no desenvolvimento deste capítulo, e assim, caso o leitor tenha interesse em se familiarizar com as devidas provas, terá o referido acesso.

1.1 NOTAÇÕES E CONCEITOS PRÉVIOS

1. $\mathbb{K}$ indica o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
2. $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ ponto no espaço $\mathbb{R}^n$;
3. $|\cdot|$ norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$;
4. $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, no qual, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $n \in \mathbb{N}$;
5. $L^p(\Omega)$ é o espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$, mensuráveis de modo que $\int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty$, com $1 \leq p < +\infty$;
6. Se $u \in L^p(\Omega)$, então, $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$, com $1 \leq p < +\infty$, define uma norma;
7. $\|\cdot\|$ denota a norma no espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$;
8. $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ derivada de u em relação a t;
9. $u_{tt} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ segunda derivada de u em relação a t;
10. $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$;
11. Se
$$u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
é diferenciável, então, o gradiente de u, denotado por ∇u, é definido como um vetor do $\mathbb{R}^n$ dado por:
$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right);$$
12. Se
$$U(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$$

é um campo vetorial de classe C^1, definimos o divergente de $U(x)$, denotado por $\mathrm{div}(U)$, como

$$\mathrm{div}(U) = \nabla \cdot U = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

onde ∇ é o operador definido por $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$;

13. O laplaciano de uma função u é definido como

$$\mathrm{div}(\nabla u) = \nabla \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

e, é denotado por Δu.

IDENTIDADE RELEVANTES

Sejam u, v funções escalares de classe C^1, K uma constante real e U e V campos vetoriais também de classe C^1, então, são verdadeiras as seguintes relações:

1. $\nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v$;
2. $\nabla(Ku) = K\nabla u$;
3. $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$;
4. $\mathrm{div}(U+V) = \mathrm{div}(U) + \mathrm{div}(V)$;
5. $\mathrm{div}(uU) = u\,\mathrm{div}(U) + \nabla u \cdot U$,

no qual, o ponto $\cdot$ representa o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.

1.2 DISTRIBUIÇÕES

Seja $u : \Omega \to \mathbb{K}$ uma função mensurável e consideremos $(K_i)_{i \in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos K_i de Ω, de modo que, $u = 0$ quase sempre em K_i. Defina o subconjunto aberto $K = \bigcup_{i \in I} K_i$. Então,

$$u = 0 \quad \text{quase sempre em K.}$$

Consequentemente, definimos o suporte de u, que será denotado por $supp(u)$, como sendo o subconjunto fechado de Ω, dado por:

$$supp(u) = \Omega \backslash K.$$

Definição 1.1. Representamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções

$$u : \Omega \to \mathbb{K},$$

com as derivadas parciais de todas as ordens contínuas e com o suporte em um conjunto compacto de Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são chamados de funções testes.

Facilmente, temos que $C_0^\infty(\Omega)$, munidos das operações usuais de soma e multiplicação, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Nas próximas seções, apresentaremos noções de convergências, tanto para o espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, quanto para o espaço vetorial das funções testes, que por sua vez, será definido na sequência.

NOÇÃO DE CONVERGÊNCIA EM $C_0^\infty(\Omega)$

Definição 1.2. Sejam $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que $\varphi_k \to \varphi$, se:

(i) $\exists K \subset \Omega$, com K um conjunto compacto, de modo que, $supp(\varphi_k) \subset K$, para todo $k \in \mathbb{N}$;

(ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n, D^\alpha \varphi_k(x) \to D^\alpha \varphi(x)$, uniformemente em $x \in \Omega$.

Definição 1.3. O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, com a noção de convergência definida em 1.2, é denotado por $\mathscr{D}(\Omega)$ e, é chamado de espaço das funções testes.

Definição 1.4. Uma distribuição sobre Ω é um funcional linear definido em $\mathscr{D}(\Omega)$ e contínuo em relação a noção de convergência definida em $\mathscr{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é denotado por $\mathscr{D}'(\Omega)$. Desta forma,

$$\mathscr{D}'(\Omega) = \{T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{K} \quad \backslash \quad T \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Observamos que $\mathscr{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Se $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, denotaremos por $\langle T, \varphi\rangle$ o valor de T aplicado no elemento φ.

NOÇÃO DE CONVERGÊNCIA EM $\mathscr{D}'(\Omega)$

Definição 1.5. Dizemos que $T_k \to T$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$ se $\langle T_k, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$, para toda $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

1.3 ESPAÇOS $L^p(\Omega)$

Definição 1.6. Sejam Ω um conjunto mensurável e $1 \leq p \leq \infty$. Indicamos por $L^p(\Omega)$, o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{K}$ de modo que $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$, no qual:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \text{se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty(\Omega)} &= supess_{x \in \Omega} |f(x)| \\ &= \inf\{C > 0 \quad \backslash \quad |f(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\}. \end{aligned}$$

Observação 1.7. As funções $\| \cdot \|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^+, 1 \leq p \leq \infty$, são normas.

Entendemos $L^p(\Omega)$ como um conjunto de classes de funções, no qual duas funções estão na mesma classe, se elas são iguais quase sempre em Ω.

Os espaços $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$, são espaços de Banach, sendo $L^2(\Omega)$ um espaço de Hilbert, com o produto interno usual da integral. Além disso, para $1 < p < \infty, L^p(\Omega)$ é reflexivo.

Teorema 1.8. *$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$.*

Teorema 1.9. *(Interpolação dos Espaços $L^p(\Omega)$)*
Sejam $1 \leq p < q \leq \infty$. Se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, então, $f \in L^r(\Omega)$ para todo $r \in [p, q]$. Além disso,

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^\alpha_{L^p(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)},$$

de modo que $\dfrac{1}{r} = \alpha \dfrac{1}{p} + (1-\alpha)\dfrac{1}{q}$.

ESPAÇOS $L^p_{loc}(\Omega)$

Definição 1.10. Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $f\chi_K \in L^p(\Omega)$, para todo K compacto de Ω, no qual χ_K é a função característica de K.

Observação 1.11. $L^1_{loc}(\Omega)$ é chamado o espaço das funções localmente integráveis.

Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, vamos considerar o funcional

$$T = T_u : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{K},$$

definido por:

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx.$$

É fácil verificar que T define uma distribuição sobre Ω.

Lema 1.12. *(Du Bois Reymond)*
Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então, $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.

A aplicação

$$\begin{aligned} L^1_{\text{loc}}(\Omega) &\longrightarrow \mathscr{D}'(\Omega) \\ u &\longmapsto T_u \end{aligned}$$

é linear, contínua e injetiva, devido ao Lema 1.12. Sendo assim é usual identificarmos a distribuição T_u com a função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Desta forma, temos que $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$. Como $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ temos que toda função de $L^p(\Omega)$ define uma distribuição sobre Ω, ou seja, toda função de $L^p(\Omega)$ pode ser vista como uma distribuição.

Definição 1.13. Sejam $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, denotada por $D^\alpha T$, é definida por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle,$$

para toda $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Com esta definição temos que se $u \in C^k(\Omega)$, então,

$$D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u},$$

para todo $|\alpha| \leq k$, no qual $D^\alpha u$ indica a derivada clássica de u. E, se $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, então, $D^\alpha T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

1.4 ESPAÇOS DE SOBOLEV

Definição 1.14. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Denotaremos por $W^{m,p}(\Omega)$, o conjunto de todas as funções u de $L^p(\Omega)$, tais que, para todo $|\alpha| \leq m, D^\alpha u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada distribucional de u. $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado de Espaço de Sobolev de ordem m relativo ao espaço $L^p(\Omega)$.

Resumidamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \quad \backslash \quad D^\alpha u \in \mathrm{L}^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m\}.$$

NORMA EM $W^{m,p}(\Omega)$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, definimos normas em $W^{m,p}(\Omega)$, da seguinte maneira:

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \left|(D^\alpha u)(x)\right|^p dx \right)^{1/p},$$

com $p \in [1, \infty)$ e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}, \quad p = +\infty.$$

Observações

1. $\left(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p}\right)$ é um espaço de Banach.
2. Se $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno, dado por:
$$(u,v)_{m,2} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \quad u,v \in W^{m,2}(\Omega).$$
3. Denotamos $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.
4. $H^m(\Omega)$ é reflexivo e separável.
5. Seja $v = \left(v^1, \cdots, v^n\right) \in (H^m(\Omega))^n$, então,
$$\|v\|^2_{(H^m(\Omega))^n} = \sum_{i=1}^{n} \|v^i\|^2_{H^m(\Omega)}.$$

O ESPAÇO $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definição 1.15. Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.

Observações

1. Se $p = 2$, escrevemos $H_0^m(\Omega)$ em vez de $W_0^{m,p}(\Omega)$.
2. Se $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$, o complemento de Ω em $\mathbb{R}^n$ possui medida de Lebesgue nula.
3. É verdade que $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

O ESPAÇO $W^{-m,q}(\Omega)$

Definição 1.16. Suponha $1 \leq p < \infty$ e $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ representamos por $H^{-m}(\Omega)$.

IMERSÕES DE SOBOLEV

Teorema 1.17. *(Teorema de Sobolev)*
Sejam $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$.

(i) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, então, $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$;

(ii) *Se* $\frac{1}{p}-\frac{m}{n}=0$*, então,* $W^{m,p}(\Omega)\subset L^q(\Omega), \quad q\in[p,\infty)$*;*

(iii) *Se* $\frac{1}{p}-\frac{m}{n}<0$*, então,* $W^{m,p}(\Omega)\subset L^\infty(\Omega)$*;*

sendo as imersões acima contínuas.

1.5 DESIGUALDADES IMPORTANTES

Desigualdade de Young

Se $a\geq 0$, $b\geq 0$, $1<p$ e $q<\infty$ com $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, então,

$$ab\leq \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.$$

Desigualdade de Hölder

Sejam $f\in L^p(\Omega)$ e $g\in L^q(\Omega)$, com $1<p<\infty$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ou $q=1$ e $p=\infty$ ou $q=\infty$ e $p=1$. Então, $fg\in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx\leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Desigualdade de Poincaré

Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então,

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\leq C\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

para todo $u\in H^1_0(\Omega)$, sendo $C>0$ uma constante que depende do diâmetro de Ω.

Em particular, se $u\in \left(H^1(\mathbb{R}^n)\right)^n$ e $supp(u)$ está contido na bola $|x|\leq R, \quad R>0$, temos que:

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\leq CR^2\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

com $C>0$ uma constante.

Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ aberto e $1\leq r<z\leq\infty, 1\leq q\leq z$ e $0\leq k\leq m$. Então existe uma constante $\tilde{C}_g>0$, de modo que:

$$\|u\|_{W^{k,z}(\Omega)}\leq \tilde{C}_g\|D^m u\|^{\theta}_{L^q(\Omega)}\|u\|^{1-\theta}_{L^r(\Omega)},$$

para todo $u\in W^{m,q}_0(\Omega)\cap L^r(\Omega)$, sendo:

$$\|D^m u\|_{L^q(\Omega)}=\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha u\|_{L^q(\Omega)}$$

e
$$\theta = \left(\frac{k}{n} + \frac{1}{r} - \frac{1}{z}\right)\left(\frac{m}{n} + \frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)^{-1}.$$

1.6 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA E FÓRMULAS DE GREEN

Seja Ω um aberto limitado, no qual, a $\partial\Omega$ é de Classe C^2.

(i) Para $F \in \left(H^1(\Omega)\right)^n$:
$$\int_\Omega (\operatorname{div} F)(x)dx = \int_\Gamma F(x)\cdot\eta(x)d\Gamma;$$

(ii) Para $v \in H_0^1(\Omega), u \in H^2(\Omega)$:
$$\int_\Omega v(x)\Delta u(x)dx = -\int_\Omega \nabla v(x)\cdot\nabla u(x)dx;$$

(iii) Para $u \in H^2(\Omega), v \in H_0^2(\Omega)$:
$$\int_\Omega v(x)\Delta u(x)dx = \int_\Omega \Delta v(x)u(x)dx.$$

A função $\eta(x)$ representa a normal exterior unitária no ponto $x \in \partial\Omega$ e a função F integrada sobre $\partial\Omega$ é no sentido da função traço.

1.7 SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES

Definição 1.18. Seja X um espaço de Banach e $\mathscr{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Dizemos que uma aplicação
$$S : \mathbb{R}^+ \to \mathscr{L}(X)$$
é um semigrupo de operadores lineares limitados em X se:

(i) $S(0) = I$, onde I é o operador identidade de $\mathscr{L}(X)$;

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+$.

Dizemos que o semigrupo S é de classe C_0, se:

(iii) $\lim\limits_{t\to 0^+} \|(S(t)-I)x\|_X = 0, \quad \forall x \in X$.

Proposição 1.19. *Todo semigrupo de classe C_0 é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$, isto é, se $t \in \mathbb{R}^+$, então,*
$$\lim_{s\to t} S(s)x = S(t)x, \quad \forall x \in X.$$

Definição 1.20. Se

$$\|S(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq 1, \forall t \geq 0,$$

S é chamado semigrupo de contrações de classe C_0.

Definição 1.21. O operador $A : D(A) \to X$ definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X \quad \backslash \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ existe} \right\}$$

e

$$A(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x, \quad \forall x \in D(A),$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo S.

Proposição 1.22. *O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 é um operador linear, fechado e seu domínio é um subespaço vetorial denso em X.*

Proposição 1.23. *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A o gerador infinitesimal de S. Se $x \in D(A)$, então, $S(t)x \in D(A)$, $\quad \forall t \geq 0$, e*

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Definição 1.24. Seja S um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Façamos $A^0 = I, A^1 = A$ e, supondo que A^{k-1} esteja definido, vamos definir A^k pondo

$$D\left(A^k\right) = \left\{ x \quad \backslash \quad x \in D\left(A^{k-1}\right) \text{ e } A^{k-1}x \in D(A) \right\},$$
$$A^k x = A\left(A^{k-1}x\right), \quad \forall x \in D\left(A^k\right).$$

Proposição 1.25. *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Então:*

(i) $D\left(A^k\right)$ *é um subespaço de X e A^k é um operador linear de X;*

(ii) *Se $x \in D\left(A^k\right)$, então, $S(t)x \in D\left(A^k\right)$, $\quad t \geq 0$, e*

$$\frac{d^k}{dt^k} S(t)x = A^k S(t)x = S(t)A^k x, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

(iii) $\bigcap_k D\left(A^k\right)$ *é denso em X.*

Lema 1.26. *Seja A um operador linear fechado de X. Fazendo, para cada $x \in D\left(A^k\right)$,*

$$\|x\|_k = \sum_{j=0}^{k} \|A^j x\|_X, \tag{1.1}$$

o funcional $\|\cdot\|_k$ é uma norma em $D\left(A^k\right)$, de modo que $D\left(A^k\right)$ é um espaço de Banach.

Definição 1.27. A norma (1.1) é dita norma do gráfico. O espaço de Banach que se obtém munindo $D\left(A^k\right)$ da norma (1.1) é representado por $\left[D\left(A^k\right)\right]$.

1.8 TEOREMA LUMER-PHILLIPS

Definição 1.28. Seja A um operador linear de X. O conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$, para os quais o operador linear $\lambda I - A$ é inversível, seu inverso é limitado e tem domínio denso em X, é dito conjunto resolvente de A e é representado por $\rho(A)$.

O operador linear $(\lambda I - A)^{-1}$, representado por $R(\lambda, A)$, é chamado resolvente de A.

Seja X um espaço de Banach, X^* o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^*. Façamos, para cada $x \in X$,

$$J(x) = \left\{ x^* \in X^* \quad \backslash \quad \langle x, x^* \rangle = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X^*}^2 \right\}.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, $J(x) \neq \emptyset, \quad \forall x \in X$. Uma aplicação dualidade é uma aplicação $j : X \longrightarrow X^*$, tal que, $j(x) \in J(x), \quad \forall x \in X$. Imediatamente, percebemos que $\|j(x)\|_{X^*} = \|x\|_X$.

Definição 1.29. Seja X um espaço de Banach. Dizemos que o operador linear

$$A : D(A) \subset X \to X$$

é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade, j,

$$\mathrm{Re}\langle Ax, j(x) \rangle \leq 0, \quad \forall x \in D(A).$$

Para os espaços de Hilbert, a definição de operador dissipativo é dado por:

Definição 1.30. Seja H um espaço de Hilbert. Dizemos que o operador linear

$$A : D(A) \subset H \to H$$

é dissipativo se,

$$\mathrm{Re}\langle Ax, x \rangle \leq 0, \quad \forall x \in D(A).$$

Teorema 1.31. *(Lumer-Phillips)*
Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0, em um espaço de Banach X, então,

(i) A é dissipativo;

(ii) $\mathrm{Im}(\lambda - A) = X, \quad \lambda > 0 \quad (\mathrm{Im}(\lambda - A) =$ *imagem de* $\lambda I - A)$.

Reciprocamente, se

(i) $D(A)$ é denso em X;

(ii) A é dissipativo;

(iii) $\mathrm{Im}(\lambda_0 - A) = X$*, para algum* $\lambda_0 > 0$*, então, A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe* C_0*.*

Definição 1.32. O operador A é dito ser *m*-dissipativo se A é dissipativo e $\mathrm{Im}(\lambda_0 - A) = X$, para algum λ_0.

Proposição 1.33. *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe* C_0 *em um espaço de Banach X e B é o operador linear e limitado, então,* $A + B$ *é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe* C_0 *em* X*.*

1.9 PROBLEMA DE CAUCHY ABSTRATO

Seja X um espaço de Banach e A um operador linear de X. Consideremos o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = AU(t), \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

no qual, $U_0 \in X$ e $t \geq 0$.

Definição 1.34. Uma função $u : \mathbb{R}^+ \to X$, contínua para $t \geq 0$, continuamente diferenciável para todo $t > 0$, tal que, $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$ e que satisfaz (1.2) é chamada solução forte do problema (1.2).

Teorema 1.35. *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe* C_0*, então, para cada* $U_0 \in D(A)$*, o problema* (1.2) *tem uma única solução forte:*

$$U(t) = S(t)U_0 \in C\left(\mathbb{R}^+, D(A)\right),$$

no qual, S é o semigrupo gerado por A. Se $U_0 \in X$*, então, dizemos que*

$$U(t) = S(t)U_0 \in C\left(\mathbb{R}^+, X\right)$$

é uma solução fraca para o problema (1.2)*.*

2 TAXAS DE DECAIMENTO PARA O PROBLEMA LINEAR

Os resultados apresentados na sequência podem ser encontrados em [11]. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, um domínio exterior. Sem perda de generalidade, assumimos que zero pertence ao interior do obstáculo. Consideremos o seguinte Problema de Cauchy:

$$\begin{cases} v_{tt}(t,x) - \Delta v(t,x) + v_t(t,x) - \Delta v_t(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,+\infty) \times \Omega, \\ v(0,x) = v_0(x), \quad v_t(0,x) = v_1(x), & x \in \Omega, \\ v(t,x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Nosso propósito é estabelecer estimativas para o Problema de Cauchy supracitado. Sendo assim, defina a seguinte função:

$$d_n(x) = \begin{cases} |x|, & n \geq 3, \\ |x| \log(B|x|), & n = 2, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $B > 0$ é uma constante que satisfaz:

$$B \inf_{x \in \Omega} |x| \geq 2.$$

O lema a seguir apresenta uma estimativa para a solução $v \in X_1$ do Problema (2.1), no qual:

$$X_1 := C\left([0,+\infty); H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,+\infty); L^2(\Omega)\right). \tag{2.3}$$

Lema 2.1. *Suponha que $n \geq 2$. Assuma que $[v_0, v_1] \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, de modo que:*

$$\| d_n(\cdot)(v_0 + v_1) \| < +\infty,$$

então, a solução única $v \in X_1$ do Problema (2.1) satisfaz:

$$\begin{aligned} &\| v(t,\cdot) \|^2 + \int_0^t \left(\| v(s,\cdot) \|^2 + \| \nabla v(s,\cdot) \|^2 \right) ds \\ &\leq C \| v_0 \|_{H^1}^2 + C \| d_n(\cdot)(v_0 + v_1) \|^2, \end{aligned} \tag{2.4}$$

para todo $t \geq 0$, onde C é uma constante.

Demonstração. Defina

$$w(t,x) := \int_0^t v(s,x) ds.$$

Facilmente verificamos que:

$$w_t(t,x) = v(t,x),$$
$$w_{tt}(t,x) = v_t(t,x).$$

Consequentemente, pelas condições apresentadas no Problema (2.1), temos:

$$w_t(0,x) = v(0,x) = v_0(x), \quad \forall x \in \Omega,$$
$$w_{tt}(0,x) = v_t(0,x) = v_1(x), \quad \forall x \in \Omega,$$
$$w_t(t,x) = v(t,x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

A equação do Problema (2.1) é escrita como:

$$v_{tt}(t,x)-\Delta v(t,x)+v_t(t,x)-\Delta v_t(t,x)=0,$$

com $(t,x)\in(0,+\infty)\times\Omega$. Assim, integrando de ambos os lados sobre $[0,t]$, obtemos:

$$\int_0^t v_{ss}(s,x)ds-\int_0^t \Delta v(s,x)ds+\int_0^t v_s(s,x)ds-\int_0^t \Delta v_s(s,x)ds=0,$$

isto é,

$$v_s(s,x)\Big|_0^t-\Delta\int_0^t v(s,x)ds+v(s,x)\Big|_0^t-\Delta v(s,x)\Big|_0^t=0.$$

Aplicando os extremos e deixando a identidade acima em função de $w(t,x)$, podemos reescrevê-la da seguinte maneira:

$$w_{tt}(t,x)-\Delta w(t,x)+w_t(t,x)-\Delta w_t(t,x)=v_0(x)+v_1(x)-\Delta v_0(x).$$

Multiplicando ambos os lados por $w_t(t,x)$ e integrando sobre $[0,t]\times\Omega$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_\Omega w_{ss}(s,x)w_s(s,x)dxds&-\int_0^t\int_\Omega \Delta w(s,x)w_s(s,x)dxds\\+\int_0^t\int_\Omega |w_s(s,x)|^2dxds&-\int_0^t\int_\Omega \Delta w_s(s,x)\,w_s(s,x)dxds\\=\int_0^t\int_\Omega (v_0(x)+v_1(x))\,w_s(s,x)dxds&-\int_0^t\int_\Omega \Delta v_0(x)w_s(s,x)dxds.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Vamos analisar cada parcela de (2.5) separadamente. Primeiramente,

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_\Omega w_{ss}(s,x)w_s(s,x)dxds&=\int_\Omega\left[\int_0^t\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(|w_s(s,x)|^2\right)ds\right]dx\\&=\frac{1}{2}\left[\int_\Omega\left[|w_s(s,x)|^2\Big|_0^t\right]dx\right]\\&=\frac{1}{2}\int_\Omega|w_s(t,x)|^2dx-\frac{1}{2}\int_\Omega|w_s(0,x)|^2dx\\&=\frac{1}{2}\|w_t(t,\cdot)\|^2-\frac{1}{2}\|w_t(0,\cdot)\|^2\\&=\frac{1}{2}\|w_t(t,\cdot)\|^2-\frac{1}{2}\|v_0\|^2.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Na próxima parcela, usaremos a Identidade de Green e o fato de $v(t,x)$ se anular na fronteira.

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \int_\Omega \Delta w(s,x) w_s(s,x) dx ds = & -\int_0^t \int_\Omega \nabla w(s,x) \nabla w_s(s,x) dx ds \\
& + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\eta} w(s,x) w_s(s,x) d\Gamma ds \\
= & -\int_0^t \int_\Omega \nabla w(s,x) \nabla w_s(s,x) dx ds \\
= & -\int_\Omega \int_0^t \nabla w(s,x) \nabla w_s(s,x) ds dx \\
= & -\int_\Omega \int_0^t \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(|\nabla w(s,x)|^2 \right) ds dx \\
= & -\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla w(t,x)|^2 dx \\
& + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla w(0,x)|^2 dx \\
= & -\frac{1}{2} \|\nabla w(t,\cdot)\|^2,
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

pois,

$$
w(0,x) = \int_0^0 v(s,x) ds = 0.
$$

Assim, $w(0,x)$ é uma função de x. Desta forma,

$$
w(0,x) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla w(0,x) = \overrightarrow{0}.
$$

Agora, perceba:

$$
\int_0^t \int_\Omega |w_s(s,x)|^2 dx ds = \int_0^t \|w_s(s,\cdot)\|^2 ds. \tag{2.8}
$$

E, novamente, usando a Identidade de Green e o fato de que $v(t,x)$ se anula na fronteira de Ω, $\forall t$, segue que:

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \int_\Omega \Delta w_s(s,x) w_s(s,x) dx ds = & -\int_0^t \int_\Omega \nabla w_s(s,x) \nabla w_s(s,x) dx ds \\
& + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\eta} w_s(s,x) w_s(s,x) d\Gamma ds \\
= & -\int_0^t \int_\Omega |\nabla w_s(s,x)|^2 dx ds \\
= & -\int_0^t \|\nabla w_s(s,\cdot)\|^2 ds.
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
I := & \int_0^t \int_\Omega (v_0(x)+v_1(x)-\Delta v_0(x))\, w_s(s,x)dxds \\
= & \int_\Omega \int_0^t (v_0(x)+v_1(x)-\Delta v_0(x))\, w_s(s,x)dsdx \\
= & \int_\Omega (v_0(x)+v_1(x)-\Delta v_0(x)) \left[\int_0^t w_s(s,x)ds\right] dx \\
= & \int_\Omega (v_0(x)+v_1(x)-\Delta v_0(x)) \left[w(s,x)\Big|_0^t \right] dx \\
= & \int_\Omega (v_0(x)+v_1(x)-\Delta v_0(x)) [w(t,x)-w(0,x)]dx.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Como $w(0,x)=0$, temos que:

$$\begin{aligned}
I = & \int_\Omega (v_0(x)+v_1(x)-\Delta v_0(x))\, w(t,x)dx \\
= & \langle v_0+v_1-\Delta v_0, w(t,\cdot)\rangle \\
= & \langle v_0+v_1, w(t,\cdot)\rangle + \langle -\Delta v_0, w(t,\cdot)\rangle .
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Substituindo (2.6), (2.7), (2.8), (2.9) e (2.11) em (2.5), temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\|w_t(t,\cdot)\|^2 - \frac{1}{2}\|v_0\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla w(t,\cdot)\|^2 + \int_0^t \|w_s(s,\cdot)\|^2 ds \\
& + \int_0^t \|\nabla w_s(s,\cdot)\|^2 ds \\
= & \langle v_0+v_1, w(t,\cdot)\rangle + \langle -\Delta v_0, w(t,\cdot)\rangle ,
\end{aligned}$$

implicando em:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\|w_t(t,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla w(t,\cdot)\|^2 + \int_0^t \left(\|w_s(s,\cdot)\|^2 + \|\nabla w_s(s,\cdot)\|^2\right) ds \\
= & \langle v_0+v_1, w(t,\cdot)\rangle + \langle -\Delta v_0, w(t,\cdot)\rangle + \frac{1}{2}\|v_0\|^2 .
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Na sequência, faremos duas estimativas. Primeiro, veja:

$$\begin{aligned}
\left|\langle v_0+v_1, w(t,\cdot)\rangle\right| = & \left|\int_\Omega (v_0+v_1)\, w(t,\cdot)\, dx\right| \\
= & \left|\int_\Omega [d_n(\cdot)(v_0+v_1)] \left[\frac{w(t,\cdot)}{d_n(\cdot)}\right] dx\right| \\
\le & \|d_n(\cdot)(v_0+v_1)\| \, \|\frac{w(t,\cdot)}{d_n(\cdot)}\| \\
= & \frac{\|d_n(\cdot)(v_0+v_1)\|}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{2\varepsilon}\, \|\frac{w(t,\cdot)}{d_n(\cdot)}\| .
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hardy, que garante que, se $\phi \in H_0^1(\Omega)$, então,

$$\|\frac{\phi}{d_n(\cdot)}\| \le C_0 \|\nabla\phi\|.$$

E, aplicando a desigualdade de Young, obtemos:

$$\left|\langle v_0+v_1, w(t,\cdot)\rangle\right| \leq \frac{1}{4\varepsilon}\|d_n(\cdot)(v_0+v_1)\|^2+\varepsilon C_0^2\|\nabla w(t,\cdot)\|^2. \tag{2.13}$$

Na próxima estimativa, usaremos novamente a desigualdade de Green, o fato de $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ e a desigualdade de Young.

$$\begin{aligned}
\left|\langle -\Delta v_0, w(t,\cdot)\rangle\right| &= \left|\int_\Omega -\Delta v_0 w(t,\cdot)\,dx\right| \\
&= \left|\int_\Omega \nabla v_0 \nabla w(t,\cdot)\,dx - \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial v_0}{\partial \eta}\right) w(t,\cdot)\,d\Gamma\right| \\
&= \left|\langle \nabla v_0, \nabla w(t,\cdot)\rangle\right| \\
&\leq \|\nabla v_0\|\,\|\nabla w(t,\cdot)\| \\
&= \frac{\|\nabla v_0\|}{\sqrt{2\gamma}}\sqrt{2\gamma}\,\|\nabla w(t,\cdot)\| \\
&\leq \frac{1}{4\gamma}\|\nabla v_0\|^2+\gamma\|\nabla w(t,\cdot)\|^2.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Dessa forma, substituindo (2.13) e (2.14) em (2.12), obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|w_t(t,\cdot)\|^2+\left(\frac{1}{2}-\varepsilon C_0^2-\gamma\right)\|\nabla w(t,\cdot)\|^2 \\
&\quad+\int_0^t\left(\|w_s(s,\cdot)\|^2+\|\nabla w_s(s,\cdot)\|^2\right)ds \\
&\leq \frac{1}{2}\|v_0\|^2+\frac{1}{4\varepsilon}\|d_n(\cdot)(v_0+v_1)\|^2+\frac{1}{4\gamma}\|\nabla v_0\|^2.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ e $\gamma > 0$ suficientemente pequenos, usando o fato de que $w_t = v$ e

$$\|v_0\| \leq \|v_0\|_{H^1} \text{ e } \|\nabla v_0\| \leq \|v_0\|_{H^1},$$

segue que:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|v(t,\cdot)\|^2+\int_0^t\left(\|v(s,\cdot)\|^2+\|\nabla v(s,\cdot)\|^2\right)ds \\
&\leq C\left(\|v_0\|_{H^1}^2+\|d_n(\cdot)(v_0+v_1)\|^2\right),
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$, onde C é uma constante. □

Na sequência apresentaremos o Teorema 2.3 e, sua respectiva demonstração. Sucintamente, a prova será dada a partir da manipulação de duas identidades.

Note que:

$$\frac{d}{dt}E_v(t)+\|v_t(t,\cdot)\|^2+\|\nabla v_t(t,\cdot)\|^2 = 0, \tag{2.16}$$

onde $E_v(t)$ é entendido como a energia total da equação (2.1) e, é definido por:

$$E_v(t) := \frac{1}{2}\left(\|v_t(t,\cdot)\|^2+\|\nabla v(t,\cdot)\|^2\right). \tag{2.17}$$

De fato, multiplicando a equação do Problema (2.1) por $v_t(t,x)$ e integrando sobre Ω, temos que:

$$\int_\Omega v_t v_{tt} dx - \int_\Omega v_t \Delta v dx + \int_\Omega v_t^2 dx - \int_\Omega v_t \Delta v_t dx = 0. \tag{2.18}$$

Veja que:

$$\int_\Omega v_t v_{tt} dx = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(v_t^2\right) dx. \tag{2.19}$$

E usando a Identidade de Green, com o fato de $v(t,x)$ se anular na fronteira, segue:

$$-\int_\Omega v_t \Delta v dx = \int_\Omega \nabla v_t \nabla v dx = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|\nabla v|^2\right) dx \tag{2.20}$$

e

$$-\int_\Omega v_t \Delta v_t dx = \int_\Omega \nabla v_t \nabla v_t dx. \tag{2.21}$$

Substituindo (2.19), (2.20) e (2.21) em (2.18), obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\|v_t\|^2 + \|\nabla v\|^2\right)\right) + \|v_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 = 0.$$

Pela definição de $E_v(t)$, dada em (2.17), concluímos que:

$$\frac{d}{dt}E_v(t) + \|v_t(t,\cdot)\|^2 + \|\nabla v_t(t,\cdot)\|^2 = 0.$$

Por outro lado, note que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle v_t(t,\cdot), v(t,\cdot)\rangle + \|\nabla v(t,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla v(t,\cdot)\|^2 \\ = \|v_t(t,\cdot)\|^2.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Verificaremos a identidade acima. Desta forma, multiplicando a equação do Problema (2.1) por $v(t,x)$ e integrando sobre Ω, obtemos:

$$\int_\Omega v_{tt} v dx - \int_\Omega (\Delta v) v dx + \int_\Omega v_t v dx - \int_\Omega \Delta v_t v dx = 0. \tag{2.23}$$

Usando a Identidade de Green, observamos que:

$$-\int_\Omega (\Delta v) v dx = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \tag{2.24}$$

e

$$-\int_\Omega \Delta v_t v dx = \int_\Omega \nabla v_t \nabla v dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx. \tag{2.25}$$

Além disso, temos que:

$$\int_\Omega v_t v dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |v|^2 dx. \tag{2.26}$$

Substituindo (2.24), (2.25) e (2.26) em (2.23), podemos obter:

$$\langle v_{tt}, v\rangle + \|\nabla v\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla v\|^2 = 0. \tag{2.27}$$

Para concluir, basta apenas notar que:

$$
\begin{aligned}
\langle v_{tt}, v\rangle &= \int_\Omega (v_{tt}v + v_t^2 - v_t^2)\,dx \\
&= \int_\Omega \frac{d}{dt}(v_t v)\,dx - \int_\Omega |v_t|^2 dx \\
&= \frac{d}{dt}\int_\Omega v_t v dx - \int_\Omega |v_t|^2 dx \\
&= \frac{d}{dt}\langle v_t, v\rangle - \|v_t\|^2.
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Desta forma, substituindo (2.28) em (2.27), conseguimos obter:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\langle v_t(t,\cdot), v(t,\cdot)\rangle + \|\nabla v(t,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla v(t,\cdot)\|^2 \\
&= \|v_t(t,\cdot)\|^2.
\end{aligned}
$$

A fim de garantir a efetivação da demonstração do Teorema 2.3, precisamos que todas as integrais empregadas sejam possíveis a serem calculadas, sendo assim, assumimos que $v(t,x)$ seja uma função suave.

Primeiramente, vamos mostrar o Lema 2.2, que apresenta uma estimativa envolvendo a energia do Problema (2.1), a qual nos auxiliará na demonstração do Teorema 2.3.

Lema 2.2. *Seja $n \geq 2$. Se $[v_0, v_1] \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, então, a solução única $v \in X_1$ do Problema (2.1), satisfaz:*

$$
(1+t)E_v(t) + \int_0^t (1+s)\|v_s(s,\cdot)\|^2 ds \leq C\left(\|v_0\|_{H^1}^2 + \|v_1\|^2\right),
$$

para alguma constante $C > 0$.

Demonstração. Integrando a identidade (2.16) sobre $[0,t]$, obtemos:

$$
\int_0^t \frac{d}{ds}E_v(s)ds + \int_0^t \|v_s(s,\cdot)\|^2 ds + \int_0^t \|\nabla v_s(s,\cdot)\|^2 ds = 0. \tag{2.29}
$$

Dessa forma,

$$
E_v(t) + \int_0^t \|v_s(s,\cdot)\|^2 ds + \int_0^t \|\nabla v_s(s,\cdot)\|^2 ds = E_v(0). \tag{2.30}
$$

Como $\displaystyle\int_0^t \|\nabla v_s(s,\cdot)\|^2 ds \geq 0$, segue que:

$$
E_v(t) + \int_0^t \|v_s(s,\cdot)\|^2 ds \leq E_v(0). \tag{2.31}
$$

Por outro lado, multiplicando (2.16) por $(1+t)$ e, em seguida, integrando sobre $[0,t]$, temos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^t (1+s)\left[\frac{d}{ds}E_v(s)\right]ds + \int_0^t (1+s)\|v_s(s,\cdot)\|^2 ds \\
+\int_0^t (1+s)\|\nabla v_s(s,\cdot)\|^2 ds = 0.
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

Integrando por partes, temos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^t (1+s)\left[\frac{d}{ds}E_v(s)\right]ds &= (1+s)E_v(s)\Big|_0^t - \int_0^t E_v(s)ds \\
&= (1+t)E_v(t) - E_v(0) - \int_0^t E_v(s)ds.
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

E, como $\displaystyle\int_0^t (1+s)\|\nabla v_s(s,\cdot)\|^2 ds \geq 0$, segue de (2.32) que:

$$
(1+t)E_v(t) + \int_0^t (1+s)\|v_s(s,\cdot)\|^2 ds \leq E_v(0) + \int_0^t E_v(s)ds. \tag{2.34}
$$

Nosso objetivo é provar que $\displaystyle\int_0^t E_v(s)ds \leq CI_0$, na qual $C>0$. E, neste caso, obtemos uma taxa de ordem 1 para a energia.

Agora, veja que, integrando (2.22) sobre $[0,t]$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \frac{d}{ds}\langle v_s(s,\cdot), v(s,\cdot)\rangle\, ds + \int_0^t \|\nabla v(s,\cdot)\|^2 ds + \int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|v(s,\cdot)\|^2 ds \\
+\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|\nabla v(s,\cdot)\|^2 ds = \int_0^t \|v_s(s,\cdot)\|^2\, ds.
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

Perceba abaixo:

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \frac{d}{ds}\langle v_s(s,\cdot), v(s,\cdot)\rangle\, ds &= \int_0^t \frac{d}{ds}\int_\Omega v_s(s,\cdot)v(s,\cdot)dxds \\
&= \int_\Omega \int_0^t \frac{d}{ds} v_s(s,\cdot)v(s,\cdot)dsdx \\
&= \int_\Omega [v_t(t,\cdot)v(t,\cdot) - v_t(0,\cdot)v(0,\cdot)]\,dx \\
&= \int_\Omega v_t(t,\cdot)v(t,\cdot)dx - \int_\Omega v_t(0,\cdot)v(0,\cdot)dx \\
&= \int_\Omega v_t(t,\cdot)v(t,\cdot)dx - \langle v_0, v_1\rangle.
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|v(s,\cdot)\|^2 ds &= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}\|v(s,\cdot)\|^2 ds \\
&= \frac{1}{2}\|v(t,\cdot)\|^2 - \frac{1}{2}\|v(0,\cdot)\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\|v(t,\cdot)\|^2 - \frac{1}{2}\|v_0\|^2,
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

e

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|\nabla v(s,\cdot)\|^2 ds &= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}\|\nabla v(s,\cdot)\|^2 ds\\ &= \frac{1}{2}\|\nabla v(t,\cdot)\|^2 - \frac{1}{2}\|\nabla v_0\|^2.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Então, substituindo (2.36), (2.37) e (2.38) em (2.35), obtemos:

$$\begin{aligned}&\int_0^t \|\nabla v(s,\cdot)\|^2 ds + \frac{1}{2}\|v(t,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla v(t,\cdot)\|^2\\ &\le \langle v_0, v_1\rangle + \frac{1}{2}\|\nabla v_0\|^2 + \frac{1}{2}\|v_0\|^2\\ &+ \int_0^t \|v_s(s,\cdot)\|^2\, ds - \int_\Omega v_t(t,\cdot)v(t,\cdot)dx.\end{aligned} \tag{2.39}$$

Agora, veja que:

$$\begin{aligned}\int_\Omega v_t(t,\cdot)v(t,\cdot)dx &\le \int_\Omega |v(t,\cdot)||v_t(t,\cdot)|dx\\ &\le \|v(t,\cdot)\|\|v_t(t,\cdot)\|\\ &= \frac{\|v(t,\cdot)\|}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\|v_t(t,\cdot)\|.\end{aligned} \tag{2.40}$$

Usando a desigualdade de Young, obtemos:

$$\int_\Omega v_t(t,\cdot)v(t,\cdot)dx \le \frac{1}{4}\|v(t,\cdot)\|^2 + \|v_t(t,\cdot)\|^2. \tag{2.41}$$

Substituindo (2.41) em (2.39), temos:

$$\begin{aligned}&\int_0^t \|\nabla v(s,\cdot)\|^2 ds + \frac{1}{2}\|v(t,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla v(t,\cdot)\|^2\\ &\le \langle v_0, v_1\rangle + \frac{1}{2}\|\nabla v(0,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2}\|v_0\|^2\\ &+ \int_0^t \|v_s(s,\cdot)\|^2\, ds + \frac{1}{4}\|v(t,\cdot)\|^2 + \|v_t(t,\cdot)\|^2.\end{aligned} \tag{2.42}$$

Uma vez que $\frac{1}{2}\|v_t(0,\cdot)\|^2 \ge 0$, $E_v(0) = \frac{1}{2}\left(\|v_t(0,\cdot)\|^2 + \|\nabla v(0,\cdot)\|^2\right)$ e $\|v_t(t,\cdot)\|^2 \ge 0$, concluímos:

$$\begin{aligned}&\int_0^t \|\nabla v(s,\cdot)\|^2 ds + \frac{1}{4}\|v(t,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla v(t,\cdot)\|^2\\ &\le \langle v_0, v_1\rangle + E_v(0) + \frac{1}{2}\|v_0\|^2 + \int_0^t \|v_s(s,\cdot)\|^2\, ds + \|v_t(t,\cdot)\|^2.\end{aligned} \tag{2.43}$$

Note que, por (2.17) e (2.31), temos:

$$\frac{1}{2}\left(\|v_t(t,\cdot)\|^2 + \|\nabla v(t,\cdot)\|^2\right) + \int_0^t \|v_s(s,\cdot)\|^2\, ds \le E_v(0). \tag{2.44}$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\int_0^t \|\nabla v(s,\cdot)\|^2 ds + \frac{1}{4}\|v(t,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla v(t,\cdot)\|^2 \\ &\le \langle v_0, v_1\rangle + 3E_v(0) + \frac{1}{2}\|v_0\|^2.\end{aligned} \tag{2.45}$$

Usando (2.44) e (2.45) em (2.34), obtém-se que:

$$\begin{aligned}&(1+t)E_v(t) + \int_0^t (1+s)\|v_s(s,\cdot)\|^2 ds \\ &\le E_v(0) + \frac{1}{2}\int_0^t \|v_s(s,\cdot)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla v(s,\cdot)\|^2 ds \\ &\le 3E_v(0) + \frac{1}{2}\langle v_0, v_1\rangle + \frac{1}{4}\|v_0\|^2 \\ &\le \frac{3}{2}\|v_1\|^2 + \frac{3}{2}\|\nabla v_0\|^2 + \frac{1}{2}\|v_0\|\|v_1\| + \frac{1}{4}\|v_0\|^2 \\ &\le \frac{7}{4}\|v_1\|^2 + \frac{3}{2}\|\nabla v_0\|^2 + \frac{1}{2}\|v_0\|^2 \\ &\le C\left(\|v_0\|_{H^1}^2 + \|v_1\|^2\right),\end{aligned} \tag{2.46}$$

para alguma constante $C > 0$. □

Na sequência, segue o resultado que nos permite apresentar taxas de decaimento para a solução v e para a energia do Problema (2.1).

Teorema 2.3. *Seja $n \ge 2$. Se $[v_0, v_1] \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ é tal que:*

$$\|d_n(\cdot)(v_0 + v_1)\| < +\infty,$$

então, a solução única $v \in X_1$ do Problema (2.1), satisfaz:

$$\|v(t,\cdot)\|^2 \le CJ_0^2(1+t)^{-1},$$
$$\|v_t(t,\cdot)\|^2 + \|\nabla v(t,\cdot)\|^2 \le CJ_0^2(1+t)^{-2},$$

para alguma constante $C > 0$, de modo que:

$$J_0^2 := \|v_0\|_{H^1}^2 + \|v_1\|^2 + \|d_n(\cdot)(v_0 + v_1)\|^2.$$

Demonstração. Primeiramente, note que:

$$\frac{d}{dt}\left\{(1+t)^2 E_v(t)\right\} \le 2(1+t)E_v(t), \tag{2.47}$$

pois,

$$\frac{d}{dt}E_v(t) \le 0. \tag{2.48}$$

Sendo assim, integrando sobre $[0,t]$ em ambos os lados, temos:

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\left\{(1+s)^2 E_v(s)\right\} ds \le \int_0^t (1+s)(2E_v(s))\, ds, \tag{2.49}$$

isto é,

$$(1+t)^2 E_v(t) \le E_v(0) + \int_0^t (1+s)\left(\|v_s(s,\cdot)\|^2 + \|\nabla v(s,\cdot)\|^2 \right) ds. \tag{2.50}$$

Pretendemos estimar o termo que envolve a norma de ∇v, em (2.50). Perceba que multiplicando (2.22) de ambos os lados por $(1+t)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&(1+t)\frac{d}{dt}\langle v_t(t,\cdot), v(t,\cdot)\rangle + (1+t)\|\nabla v(t,\cdot)\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(1+t)\frac{d}{dt}\|v(t,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2}(1+t)\frac{d}{dt}\|\nabla v(t,\cdot)\|^2 \\
&= (1+t)\,\|v_t(t,\cdot)\|^2.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Desta forma, integrando em ambos os lados sobre $[0,t]$, temos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (1+s)\frac{d}{ds}\langle v_s(s,\cdot), v(s,\cdot)\rangle\, ds + \int_0^t (1+s)\|\nabla v(s,\cdot)\|^2 ds \\
&\quad + \int_0^t \frac{1}{2}(1+s)\frac{d}{ds}\|v(s,\cdot)\|^2 ds + \int_0^t \frac{1}{2}(1+s)\frac{d}{ds}\|\nabla v(s,\cdot)\|^2 ds \\
&= \int_0^t (1+s)\,\|v_s(s,\cdot)\|^2\, ds.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Agora, note que:

$$\begin{aligned}
\int_0^t (1+s)\frac{d}{ds}\langle v_s(s,\cdot), v(s,\cdot)\rangle\, ds &= (1+s)\,\langle v_s(s,\cdot), v(s,\cdot)\rangle \Big|_0^t \\
&\quad - \int_0^t \langle v_s(s,\cdot), v(s,\cdot)\rangle\, ds \\
&= (1+t)\,\langle v_t(t,\cdot), v(t,\cdot)\rangle \\
&\quad - \langle v_t(0,\cdot), v(0,\cdot)\rangle \\
&\quad - \int_0^t \langle v_s(s,\cdot), v(s,\cdot)\rangle\, ds \\
&= (1+t)\,\langle v_t(t,\cdot), v(t,\cdot)\rangle \\
&\quad - \langle v_1, v_0\rangle \\
&\quad - \int_0^t \langle v_s(s,\cdot), v(s,\cdot)\rangle\, ds.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Também, temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^t (1+s)\frac{d}{ds}\|v(s,\cdot)\|^2 ds &= \frac{1}{2}(1+s)\|v(s,\cdot)\|^2\Big|_0^t \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^t \|v(s,\cdot)\|^2 ds \\
&= \frac{1}{2}(1+t)\|v(t,\cdot)\|^2 - \frac{1}{2}\|v(0,\cdot)\|^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^t \|v(s,\cdot)\|^2 ds \\
&= \frac{1}{2}(1+t)\|v(t,\cdot)\|^2 - \frac{1}{2}\|v_0\|^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^t \|v(s,\cdot)\|^2 ds.
\end{aligned} \tag{2.54}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^t (1+s)\frac{d}{ds}\|\nabla v(s,\cdot)\|^2 ds &= \frac{1}{2}(1+s)\|\nabla v(s,\cdot)\|^2\Big|_0^t \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla v(s,\cdot)\|^2 ds \\
&= \frac{1}{2}(1+t)\|\nabla v(t,\cdot)\|^2 - \frac{1}{2}\|\nabla v_0\|^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla v(s,\cdot)\|^2 ds.
\end{aligned} \tag{2.55}
$$

Assim, substituindo (2.53), (2.54) e (2.55) em (2.52), obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t (1+s)\|\nabla v(s,\cdot)\|^2 ds + \frac{1}{2}(1+t)\|v(t,\cdot)\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(1+t)\|\nabla v(t,\cdot)\|^2 \\
&= \langle v_1, v_0\rangle + \frac{1}{2}\|\nabla v_0\|^2 - (1+t)\langle v_t(t,\cdot), v(t,\cdot)\rangle \\
&\quad + \int_0^t (1+s)\,\|v_s(s,\cdot)\|^2\, ds + \int_0^t \langle v_s(s,\cdot), v(s,\cdot)\rangle\, ds \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \|v(s,\cdot)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla v(s,\cdot)\|^2 ds + \frac{1}{2}\|v_0\|^2.
\end{aligned} \tag{2.56}
$$

Agora, note que:

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \langle v_s(s,\cdot), v(s,\cdot)\rangle\, ds &= \int_0^t \int_\Omega v_s(s,x)v(s,x)dxds \\
&= \int_\Omega \int_0^t v_s(s,x)v(s,x)dsdx \\
&= \int_\Omega \int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{ds}|v(s,x)|^2 dsdx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |v(s,x)|^2\Big|_0^t dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|v(t,x)|^2 - |v(0,x)|^2\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|v(t,x)|^2 - |v_0|^2\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |v(t,x)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |v_0|^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\|v(t,\cdot)\|^2 - \frac{1}{2}\|v_0\|^2.
\end{aligned} \tag{2.57}
$$

Desta forma, podemos reescrever (2.56) da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t (1+s)\|\nabla v(s,\cdot)\|^2 ds + \frac{1}{2}(1+t)\|v(t,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2}(1+t)\|\nabla v(t,\cdot)\|^2 \\
&= \langle v_1, v_0\rangle + \frac{1}{2}\|\nabla v_0\|^2 - (1+t)\langle v_t(t,\cdot), v(t,\cdot)\rangle + \frac{1}{2}\|v(t,\cdot)\|^2 \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \|v(s,\cdot)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla v(s,\cdot)\|^2 ds + \int_0^t (1+s)\,\|v_s(s,\cdot)\|^2\, ds,
\end{aligned} \tag{2.58}
$$

e, isto implica em:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t (1+s)\|\nabla v(s,\cdot)\|^2 ds + \frac{1}{4}(1+t)\|v(t,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2}(1+t)\|\nabla v(t,\cdot)\|^2 \\
&\le \langle v_1, v_0\rangle + \frac{1}{2}\|\nabla v_0\|^2 + \frac{1}{2}\|v(t,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|v(s,\cdot)\|^2 ds \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla v(s,\cdot)\|^2 ds + \int_0^t (1+s)\,\|v_s(s,\cdot)\|^2\, ds + (1+t)\|v_t(t,\cdot)\|^2,
\end{aligned} \tag{2.59}
$$

pois, $|\langle v_t(t,\cdot), v(t,\cdot)\rangle| \le \sqrt{2}\|v_t(t,\cdot)\|\dfrac{\|v(t,\cdot)\|}{\sqrt{2}} \le \|v_t(t,\cdot)\|^2 + \dfrac{1}{4}\|v(t,\cdot)\|^2$.

Segue do Lema 2.1 e do Lema 2.2 que:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t (1+s)\|\nabla v(s,\cdot)\|^2 ds + \frac{1}{4}(1+t)\|v(t,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2}(1+t)\|\nabla v(t,\cdot)\|^2 \\
&\le C\left(\|v_0\|_{H^1}^2 + \|v_1\|^2 + \|d_n(\cdot)(v_0+v_1)\|^2\right).
\end{aligned} \tag{2.60}
$$

Usando Lema 2.2 e (2.60), segue que:

$$
(1+t)^2 E_v(t) \le C\left(\|v_0\|_{H^1}^2 + \|v_1\|^2 + \|d_n(\cdot)(v_0+v_1)\|^2\right). \tag{2.61}
$$

Ao multiplicar ambos os lados de (2.61) por $2(1+t)^{-2}$, obtemos:

$$2E_v(t) \leq C(1+t)^{-2}\left(\|v_0\|_{H^1}^2 + \|v_1\|^2 + \|d_n(\cdot)(v_0+v_1)\|^2\right). \tag{2.62}$$

Desta forma, fazendo:

$$J_0^2 := \|v_0\|_{H^1}^2 + \|v_1\|^2 + \|d_n(\cdot)(v_0+v_1)\|^2,$$

por (2.60) e (2.62), concluímos:

$$\|v(t,\cdot)\|^2 \leq CJ_0^2(1+t)^{-1},$$
$$\|v_t(t,\cdot)\|^2 + \|\nabla v(t,\cdot)\|^2 \leq CJ_0^2(1+t)^{-2},$$

para alguma constante $C > 0$.

□

3 PROBLEMA SEMILINEAR: EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO GLOBAL

Consideremos o Problema Semilinear para a equação da onda em um domínio exterior $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, com $\partial\Omega$ limitada e suave:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) + u_t(t,x) - \Delta u_t(t,x) = |u(t,x)|^p, & (t,x) \in (0,+\infty) \times \Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Neste capítulo, nosso interesse é aplicar as estimativas obtidas no Teorema 2.3 no Problema (3.1). Para este fim, usaremos o método da energia ponderada, modificado por [20]. Iniciaremos definindo a função ψ descrita abaixo, tal função é solução da equação de Eikonal (ver [5] para o Sistema de Ondas Elásticas):

$$\psi(t,x) := \frac{|x|^2}{4(1+t)}. \tag{3.2}$$

Perceba que a função definida por (3.2) satisfaz algumas relações:

$$\psi_t(t,x) = \frac{|x|^2}{4} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{1+t}\right) = -\frac{|x|^2}{4(1+t)^2} < 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega. \tag{3.3}$$

E,

$$\begin{aligned} \nabla\psi(t,x) &= (\psi_{x_1}, \psi_{x_2}, \cdots, \psi_{x_n}) \\ &= \left(\frac{x_1}{2(1+t)}, \frac{x_2}{2(1+t)}, \cdots, \frac{x_n}{2(1+t)}\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Logo,

$$\|\nabla\psi(t,\cdot)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{4(1+t)^2} = \frac{1}{4(1+t)^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{|x|^2}{4(1+t)^2}. \tag{3.5}$$

Sendo assim, usando (3.3) e (3.5), temos:

$$\psi_t(t,x) + \|\nabla\psi(t,\cdot)\|^2 = -\frac{|x|^2}{4(1+t)^2} + \frac{|x|^2}{4(1+t)^2} = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega. \tag{3.6}$$

E, também,

$$\Delta\psi(t,x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2(1+t)} = \frac{n}{2(1+t)}, \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega. \tag{3.7}$$

Perceba que a parte linear da equação do Problema (3.1) coincide com:

$$w_t(t,x) - \Delta w(t,x) = 0, \tag{3.8}$$

no qual $w(t,x) := u_t(t,x) + u(t,x)$.

Na sequência, apresentaremos a Proposição 3.1 que é o resultado da existência local para o Problema (3.1).

Proposição 3.1. *Seja* $n \geq 2, 1 < p \leq \frac{n}{n-2}$ $(n \geq 3)$ *e* $1 < p < +\infty$, *se* $n = 2$. *Para cada dado inicial* $[u_0, u_1] \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, *satisfazendo:*

$$\int_\Omega e^{|x|^2} \left(|\nabla u_0(x)|^2 + |u_0(x)|^2 + |u_1(x)|^2 \right) dx < +\infty \tag{3.9}$$

existe um tempo de existência máximo, $T_m > 0$, *de modo que o Problema* (3.1) *tem uma única solução:*

$$u \in C\left([0, T_m); H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0, T_m); L^2(\Omega)\right),$$

tal que:

$$\sup_{t \in [0,T]} \left\{ \| e^{\psi(t,\cdot)} \nabla u(t,\cdot) \| + \| e^{\psi(t,\cdot)} u_t(t,\cdot) \| + \| e^{\psi(t,\cdot)} u(t,\cdot) \| \right\} < +\infty \tag{3.10}$$

para qualquer $T < T_m$. *Se, em particular,* $T_m < +\infty$, *então, temos:*

$$\limsup_{t \uparrow T_m} \left\{ \| e^{\psi(t,\cdot)} \nabla u(t,\cdot) \| + \| e^{\psi(t,\cdot)} u_t(t,\cdot) \| + \| e^{\psi(t,\cdot)} u(t,\cdot) \| \right\} = +\infty. \tag{3.11}$$

Sua demonstração é semelhante ao realizado em [20], na Proposição 2.1. O destaque deste capítulo é a demonstração do Teorema 3.10, que apresenta condições para existência de solução global para o Problema (3.1). Para este fim, abaixo apresentaremos alguns resultados que serão importantes para concluir o desejado.

Lema 3.2. *Seja* $u(t,x)$ *uma solução local para o Problema* (3.1), *como na Proposição* 3.1. *Então, para todo* $t \in [0, T_m)$ *temos:*

$$\begin{aligned} &||e^{\psi(t,\cdot)} \nabla u(t,\cdot)|| + ||e^{\psi(t,\cdot)} u_t(t,\cdot)|| \\ &\leq C I_0 + C \left[\sup_{s \in [0,t]} (1+s)^\delta \| e^{\gamma \psi(s,\cdot)} u(s,\cdot) \|_{L^{p+1}} \right]^{\frac{p+1}{2}}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

com

$$\begin{aligned} I_0^2 :=& \int_\Omega \left(e^{2\psi(0,x)} \left(|u_t(0,x)|^2 + |\nabla u(0,x)|^2 \right) \right) dx \\ &-2 \int_\Omega \left(\frac{e^{2\psi(0,x)}}{p+1} |u(0,x)|^p u(0,x) \right) dx, \end{aligned} \tag{3.13}$$

no qual $\gamma \in \left(\frac{2}{p+1}, 1 \right]$, $\delta > 0$ *e* $C = C_{\delta,\gamma}$.

Demonstração. Verificaremos que, ao multiplicar a parte linear da equação do Problema (3.1) por $e^{2\psi(t,x)} u_t(t,x)$, obtemos:

$$\begin{aligned} e^{2\psi(t,x)} u_t (u_{tt} - \Delta u + u_t - \Delta u_t) =& \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{2\psi}}{2} \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2 \right) \right) \\ &- \nabla \cdot \left(e^{2\psi} u_t (\nabla u + \nabla u_t) \right) \\ &- \frac{e^{2\psi}}{\psi_t} \left| \psi_t \nabla u - u_t \nabla \psi \right|^2 \\ &+ e^{2\psi} \left| \nabla u_t + u_t \nabla \psi \right|^2 \\ &+ \frac{e^{2\psi}}{\psi_t} u_t^2 \left(\psi_t + |\nabla \psi|^2 \right) (1 - \psi_t), \end{aligned} \tag{3.14}$$

com $(t,x) \in [0, T_m) \times \Omega$, no qual $\psi = \psi(t,x)$ é definido por (3.2). De fato, veja que:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2\psi}}{2}\left(\left|u_t\right|^2 + |\nabla u|^2\right)\right) \\
&\quad = \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2\psi}}{2}\left(\left|u_t\right|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\right)\right) \\
&\quad = e^{2\psi}\psi_t\left(|u_t|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\right) + e^{2\psi}\left(u_t u_{tt} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u_t}{\partial x_i}\right) \\
&\quad = e^{2\psi}\psi_t\left(\left|u_t\right|^2 + |\nabla u|^2\right) + e^{2\psi}\left(u_t u_{tt} + \langle \nabla u, \nabla u_t\rangle\right).
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

E, como:

$$
\begin{aligned}
e^{2\psi}u_t(\nabla u + \nabla u_t) &= e^{2\psi}u_t\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u_t}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n} + \frac{\partial u_t}{\partial x_n}\right) \\
&= \left(e^{2\psi}u_t\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u_t}{\partial x_1}\right), \cdots, e^{2\psi}u_t\left(\frac{\partial u}{\partial x_n} + \frac{\partial u_t}{\partial x_n}\right)\right),
\end{aligned}
$$

segue que, ao tomar seu divergente,

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\left(e^{2\psi}u_t(\nabla u + \nabla u_t)\right) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^{2\psi}u_t\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u_t}{\partial x_i}\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2e^{2\psi}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}u_t\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u_t}{\partial x_i}\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} e^{2\psi}\frac{\partial u_t}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u_t}{\partial x_i}\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} e^{2\psi}u_t\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u_t}{\partial x_i^2}\right) \\
&= 2e^{2\psi}u_t\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u_t}{\partial x_i}\right) \\
&\quad + e^{2\psi}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_t}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u_t}{\partial x_i}\right) \\
&\quad + e^{2\psi}u_t(\Delta u + \Delta u_t) \\
&= 2e^{2\psi}u_t\langle \nabla\psi, \nabla u + \nabla u_t\rangle + e^{2\psi}\langle \nabla u_t, \nabla u + \nabla u_t\rangle \\
&\quad + e^{2\psi}u_t(\Delta u + \Delta u_t).
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Agora, perceba:

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{2\psi}}{\psi_t}\left|\psi_t\nabla u-u_t\nabla\psi\right|^2 &= \frac{e^{2\psi}}{\psi_t}\left|\left(\psi_t\frac{\partial u}{\partial x_1}-u_t\frac{\partial \psi}{\partial x_1},\cdots,\psi_t\frac{\partial u}{\partial x_n}-u_t\frac{\partial \psi}{\partial x_n}\right)\right|^2\\
&= \frac{e^{2\psi}}{\psi_t}\sum_{i=1}^{n}\left|\psi_t\frac{\partial u}{\partial x_i}-u_t\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right|^2\\
&= \frac{e^{2\psi}}{\psi_t}\sum_{i=1}^{n}\left[\psi_t^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2-2\psi_t\frac{\partial u}{\partial x_i}u_t\frac{\partial \psi}{\partial x_i}+u_t^2\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)^2\right]\\
&= e^{2\psi}\psi_t\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2-2e^{2\psi}u_t\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)+\frac{e^{2\psi}}{\psi_t}u_t^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)^2\\
&= e^{2\psi}\psi_t|\nabla u|^2-2e^{2\psi}u_t\langle\nabla u,\nabla\psi\rangle+\frac{e^{2\psi}}{\psi_t}\left|u_t\right|^2\left|\nabla\psi\right|^2.
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

E, note também que:

$$
\begin{aligned}
e^{2\psi}\left|\nabla u_t+u_t\nabla\psi\right|^2 &= e^{2\psi}\left|\left(\frac{\partial u_t}{\partial x_1}+u_t\frac{\partial \psi}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u_t}{\partial x_n}+u_t\frac{\partial \psi}{\partial x_n}\right)\right|^2\\
&= e^{2\psi}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial u_t}{\partial x_i}+u_t\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right]^2\\
&= e^{2\psi}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u_t}{\partial x_i}\right)^2+2e^{2\psi}u_t\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u_t}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)+e^{2\psi}u_t^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)^2\\
&= e^{2\psi}\left|\nabla u_t\right|^2+2e^{2\psi}u_t\langle\nabla u_t,\nabla\psi\rangle+e^{2\psi}\left|u_t\right|^2\left|\nabla\psi\right|^2,
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

sendo assim, por (3.15), (3.16), (3.17) e (3.18), temos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2\psi}}{2}\left(\left|u_t\right|^2+|\nabla u|^2\right)\right)-\nabla\cdot\left(e^{2\psi}u_t(\nabla u+\nabla u_t)\right)\\
&\quad-\frac{e^{2\psi}}{\psi_t}\left|\psi_t\nabla u-u_t\nabla\psi\right|^2+e^{2\psi}\left|\nabla u_t+u_t\nabla\psi\right|^2\\
&\quad+\frac{e^{2\psi}}{\psi_t}u_t^2\left(\psi_t+|\nabla\psi|^2\right)(1-\psi_t)\\
&= e^{2\psi}\psi_t\left(\left|u_t\right|^2+|\nabla u|^2\right)+e^{2\psi}\left(u_tu_{tt}+\langle\nabla u,\nabla u_t\rangle\right)\\
&\quad-2e^{2\psi}u_t\langle\nabla\psi,\nabla u+\nabla u_t\rangle-e^{2\psi}\langle\nabla u_t,\nabla u+\nabla u_t\rangle\\
&\quad-e^{2\psi}u_t(\Delta u+\Delta u_t)-e^{2\psi}\psi_t|\nabla u|^2+2e^{2\psi}u_t\langle\nabla u,\nabla\psi\rangle\\
&\quad-\frac{e^{2\psi}}{\psi_t}\left|u_t\right|^2\left|\nabla\psi\right|^2+e^{2\psi}\left|\nabla u_t\right|^2+2e^{2\psi}u_t\langle\nabla u_t,\nabla\psi\rangle\\
&\quad+e^{2\psi}\left|u_t\right|^2\left|\nabla\psi\right|^2+\frac{e^{2\psi}}{\psi_t}u_t^2\left(\psi_t+|\nabla\psi|^2\right)\\
&\quad-e^{2\psi}u_t^2\left(\psi_t+|\nabla\psi|^2\right)\\
&= e^{2\psi}u_t(u_{tt}-\Delta u+u_t-\Delta u_t),
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

no qual $\psi = \psi(t,x)$, definido por (3.2).

Agora, uma vez que temos a relação dada por (3.19) temos:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2\psi}}{2}\left(|u_t|^2+|\nabla u|^2\right)-\frac{e^{2\psi}}{p+1}|u|^p u\right)-\nabla\cdot\left(e^{2\psi}u_t(\nabla u+\nabla u_t)\right)\\
&=e^{2\psi}u_t(u_{tt}-\Delta u+u_t-\Delta u_t)+\frac{e^{2\psi}}{\psi_t}\left|\psi_t\nabla u-u_t\nabla\psi\right|^2\\
&\quad -e^{2\psi}\left|\nabla u_t+u_t\nabla\psi\right|^2-\frac{e^{2\psi}}{\psi_t}u_t^2\left(\psi_t+|\nabla\psi|^2\right)(1-\psi_t)\\
&\quad -\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2\psi}}{p+1}|u|^p u\right).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

E, pela equação do Problema (3.1) e por (3.6), segue:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2\psi}}{2}\left(|u_t|^2+|\nabla u|^2\right)-\frac{e^{2\psi}}{p+1}|u|^p u\right)-\nabla\cdot\left(e^{2\psi}u_t(\nabla u+\nabla u_t)\right)\\
&=e^{2\psi}u_t|u|^p+\frac{e^{2\psi}}{\psi_t}\left|\psi_t\nabla u-u_t\nabla\psi\right|^2-e^{2\psi}\left|\nabla u_t+u_t\nabla\psi\right|^2\\
&\quad -\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2\psi}}{p+1}|u|^p u\right).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Uma vez que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2\psi}}{p+1}|u|^p u\right)=\frac{2e^{2\psi}\psi_t}{p+1}|u|^p u+e^{2\psi}|u|^p u_t, \tag{3.22}$$

por (3.6), segue:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2\psi}}{2}\left(|u_t|^2+|\nabla u|^2\right)-\frac{e^{2\psi}}{p+1}|u|^p u\right)-\nabla\cdot\left(e^{2\psi}u_t(\nabla u+\nabla u_t)\right)\\
&=-\frac{e^{2\psi}}{|\nabla\psi|^2}\left|\psi_t\nabla u-u_t\nabla\psi\right|^2-e^{2\psi}\left|\nabla u_t+u_t\nabla\psi\right|^2-\frac{2e^{2\psi}\psi_t}{p+1}|u|^p u\\
&\leq-\frac{2e^{2\psi}\psi_t}{p+1}|u|^p u,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

pois,

$$-\frac{e^{2\psi}}{|\nabla\psi|^2}\left|\psi_t\nabla u-u_t\nabla\psi\right|^2-e^{2\psi}\left|\nabla u_t+u_t\nabla\psi\right|^2\leq 0. \tag{3.24}$$

Sendo assim, integrando sobre $[0,t]\times\Omega$ de ambos os lados de (3.23), temos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_\Omega\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{2\psi(s,x)}}{2}\left(\left|u_s(s,x)\right|^2+|\nabla u(s,x)|^2\right)\right)dxds\\
&\quad -\int_0^t\int_\Omega\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{2\psi(s,x)}}{p+1}|u(s,x)|^p u(s,x)\right)dxds\\
&\quad -\int_0^t\int_\Omega\nabla\cdot\left(e^{2\psi(s,x)}u_s(s,x)(\nabla u(s,x)+\nabla u_s(s,x))\right)dxds\\
&\leq-\int_0^t\int_\Omega\frac{2e^{2\psi(s,x)}\psi_s(s,x)}{p+1}|u(s,x)|^p u(s,x)dxds.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Pelo Teorema do Divergente, temos que:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_\Omega \nabla \left(e^{2\psi(s,x)} u_s(s,x) \left(\nabla u(s,x) + \nabla u_s(s,x)\right)\right) dxds \\
&= \int_{\partial\Omega} e^{2\psi(s,x)} u_s(s,x) \left(\nabla u(s,x) + \nabla u_s(s,x)\right) d\Gamma = 0,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

pois, $u(t,x) = 0$, $\forall x \in \partial\Omega$ e $t \geq 0$.

Disto e usando o Teorema de Fubini, temos:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_0^t \frac{d}{ds}\left(\frac{e^{2\psi(s,x)}}{2} \left(\left|u_s(s,x)\right|^2 + |\nabla u(s,x)|^2 \right)\right) dsdx \\
&\leq \int_\Omega \int_0^t \frac{d}{ds}\left(\frac{e^{2\psi(s,x)}}{p+1} |u(s,x)|^p u(s,x) \right) dsdx \\
&\quad - \frac{2}{p+1} \int_0^t \int_\Omega e^{2\psi(s,x)} \psi_s(s,x) |u(s,x)|^p u(s,x) dxds,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

implicando em:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(e^{2\psi(t,x)} \left(\left|u_t(t,x)\right|^2 + |\nabla u(t,x)|^2 \right)\right) dx \\
&\leq \int_\Omega \left(e^{2\psi(0,x)} \left(\left|u_t(0,x)\right|^2 + |\nabla u(0,x)|^2 \right)\right) dx \\
&\quad + 2 \int_\Omega \left(\frac{e^{2\psi(t,x)}}{p+1} |u(t,x)|^p u(t,x) \right) dx \\
&\quad - 2 \int_\Omega \left(\frac{e^{2\psi(0,x)}}{p+1} |u(0,x)|^p u(0,x) \right) dx \\
&\quad - \frac{4}{p+1} \int_0^t \int_\Omega e^{2\psi(s,x)} \psi_s(s,x) |u(s,x)|^p u(s,x) dxds.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Pela definição de I_0 dada em (3.13), temos que:

$$\begin{aligned}
&\| e^{\psi(t,\cdot)} \left|u_t(t,\cdot)\right| \|^2 + \| e^{\psi(t,\cdot)} |\nabla u(t,\cdot)| \|^2 \\
&\leq C I_0^2 + 2 \int_\Omega \left(\frac{e^{2\psi(t,x)}}{p+1} |u(t,x)|^p u(t,x) \right) dx \\
&\quad - \frac{4}{p+1} \int_0^t \int_\Omega e^{2\psi(s,x)} \psi_s(s,x) |u(s,x)|^p u(s,x) dxds.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Logo, temos:

$$
\begin{aligned}
&\| e^{\psi(t,\cdot)} u_t(t,\cdot)\|^2 + \| e^{\psi(t,\cdot)} \nabla u(t,\cdot)\|^2 \\
&\quad \le C I_0^2 + C \int_\Omega \left(e^{2\psi(t,x)} |u(t,x)|^{p+1} \right) dx \\
&\qquad + C \int_0^t \int_\Omega e^{2\psi(s,x)} |\psi_s(s,x)| |u(s,x)|^{p+1} dx ds \\
&\quad \le C I_0^2 + \| e^{\frac{2\psi(t,\cdot)}{p+1}} |u(t,\cdot)| \|_{L^{p+1}}^{p+1} \\
&\qquad + C \int_0^t \left[\max_{x\in\Omega} |\psi_s(s,x)| e^{\psi(s,x)(2-\gamma(p+1))} \right] \int_\Omega e^{\gamma(p+1)\psi(s,x)} |u(s,x)|^{p+1} dx ds \\
&\quad \le C I_0^2 + \| e^{\frac{2\psi(t,\cdot)}{p+1}} |u(t,\cdot)| \|_{L^{p+1}}^{p+1} \\
&\qquad + C \int_0^t \left(\max_{x\in\Omega} \phi(s,x) \right) \| e^{\gamma\psi(s,\cdot)} u(s,\cdot)\|_{L^{p+1}}^{p+1},
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

no qual,

$$
\phi(t,x) := \|\psi_t(t,x)\| e^{(2-\gamma(p+1))\psi(t,x)} \quad \text{e} \quad \gamma > \frac{2}{p+1}. \tag{3.31}
$$

Utilizando-se do fato de que:

$$
C_\gamma = \sup_{\tau\ge 0} \tau e^{(2-\gamma(p+1))\tau} < +\infty,
$$

segue:

$$
\begin{aligned}
\phi(t,x) &= \|\psi_t(t,\cdot)\| e^{(2-\gamma(p+1))\psi(t,x)} \\
&= \frac{|x|^2}{4(1+t)^2} e^{(2-\gamma(p+1))\frac{|x|^2}{4(1+t)}} \\
&= \frac{1}{1+t} \left[\frac{|x|^2}{4(1+t)} e^{(2-\gamma(p+1))\frac{|x|^2}{4(1+t)}} \right] \\
&\le \frac{C_\gamma}{1+t}.
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Assim, temos:

$$
\max_{x\in\Omega} \phi(t,x) \le \frac{C_\gamma}{1+t}. \tag{3.33}
$$

Portanto, de (3.30) e (3.33), temos:

$$
\begin{aligned}
\| e^{\psi(t,\cdot)} u_t(t,\cdot)\|^2 + \| e^{\psi(t,\cdot)} \nabla u(t,\cdot)\|^2 &\le C I_0^2 + \| e^{\frac{2\psi(t,\cdot)}{p+1}} u(t,\cdot)\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\
&\quad + C_\gamma \int_0^t \frac{1}{1+s} \| e^{\gamma\psi(s,\cdot)} u(s,\cdot)\|_{L^{p+1}}^{p+1} ds.
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

A partir disso, pode-se obter uma série de estimativas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\|e^{\psi(t,\cdot)}u_t(t,\cdot)\|^2+\|e^{\psi(t,\cdot)}\nabla u(t,\cdot)\|^2\\
&\leq CI_0^2+C\left(\sup_{s\in[0,t]}(1+s)^{\delta}\|e^{\frac{2\psi(t,\cdot)}{p+1}}u(t,\cdot)\|_{L^{p+1}}\right)^{p+1}\\
&\quad+C_\gamma\int_0^t\frac{1}{(1+s)^{1+\delta(p+1)}}\left(\sup_{s\in[0,t]}(1+s)^{\delta}\|e^{\gamma\psi(s,\cdot)}u(s,\cdot)\|_{L^{p+1}}\right)^{p+1}ds\\
&\leq CI_0^2+C_{\gamma,\delta}\left(\sup_{s\in[0,t]}(1+s)^{\delta}\|e^{\gamma\psi(s,\cdot)}u(s,\cdot)\|_{L^{p+1}}\right)^{p+1},
\end{aligned}\tag{3.35}$$

no qual utilizamos

$$C_\delta:=\int_0^{+\infty}(1+s)^{-1-\delta(p+1)}ds<+\infty.\tag{3.36}$$

E assim, concluímos o resultado. □

Considere um parâmetro $\sigma>0$. Para este parâmetro vamos definir uma família de espaços de funções peso associadas a função $\psi(t,x)$:

$$f\in H^1_{0,\sigma\psi(t,\cdot)}(\Omega)\text{ se, e somente se, }f\in H^1_0(\Omega)\text{ e}$$
$$\|e^{\sigma\psi(t,\cdot)}f\|^2+\|e^{\sigma\psi(t,\cdot)}\nabla f\|^2<+\infty,\ t\in[0,T].$$

O próximo resultado tem como propósito obter a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg para $v\in H^1_{0,\psi(t,\cdot)}(\Omega)$.

Lema 3.3. *Sejam $\sigma>0$ e $v\in H^1_{0,\sigma\psi(t,\cdot)}(\Omega)$. Se $t\in[0,T_m)$, então,*

$$\|e^{\sigma\psi(t,\cdot)}\nabla v\|^2\geq\|\nabla(e^{\sigma\psi(t,\cdot)}v)\|^2+\frac{n\sigma}{2(1+t)}\int_\Omega e^{2\sigma\psi(t,x)}|v(x)|^2dx.$$

Demonstração. Defina $f=e^{\sigma\psi}v$, com $\sigma>0$. Assim, perceba:

$$\begin{aligned}
\nabla f-\sigma f\nabla\psi&=\nabla(e^{\sigma\psi}v)-\sigma(e^{\sigma\psi}v)\nabla\psi\\
&=e^{\sigma\psi}\nabla v+v\nabla e^{\sigma\psi}-\sigma(e^{\sigma\psi}v)\nabla\psi\\
&=e^{\sigma\psi}\nabla v+\sigma(e^{\sigma\psi}v)\nabla\psi-\sigma(e^{\sigma\psi}v)\nabla\psi\\
&=e^{\sigma\psi}\nabla v.
\end{aligned}\tag{3.37}$$

E, isto implica que:

$$\begin{aligned}
\|e^{\sigma\psi(t,\cdot)}\nabla v\|^2&=\int_\Omega|\nabla f-\sigma f\nabla\psi|^2dx\\
&=\int_\Omega|\nabla f|^2dx+\sigma^2\int_\Omega f^2|\nabla\psi|^2dx\\
&\quad-2\sigma\int_\Omega f(\nabla f\cdot\nabla\psi)dx.
\end{aligned}\tag{3.38}$$

Por outro lado, $f\nabla f = \dfrac{1}{2}\nabla f^2$, usando a Identidade de Green, podemos notar que:

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(\nabla f \cdot \nabla \psi)dx &= \int_\Omega \frac{1}{2}\nabla f^2 \cdot \nabla \psi dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega f^2 \Delta \psi dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} f^2 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \eta} dS \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega f^2 \Delta \psi dx, \end{aligned} \tag{3.39}$$

pois, $v \in H^1_{0,\sigma\psi(t,\cdot)}(\Omega)$ e isto implica que a segunda parcela é nula.

Substituindo (3.39) em (3.38), segue:

$$\begin{aligned} \|e^{\sigma\psi(t,\cdot)}\nabla v\|^2 &= \int_\Omega |\nabla f|^2 dx + \sigma^2 \int_\Omega f^2 |\nabla \psi|^2 dx + \sigma \int_\Omega f^2 \Delta \psi dx \\ &\geq \int_\Omega |\nabla f|^2 dx + \sigma \int_\Omega f^2 \Delta \psi dx. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Usando (3.7), temos que:

$$\|e^{\sigma\psi(t,\cdot)}\nabla v\|^2 \geq \|\nabla(e^{\sigma\psi(t,\cdot)}v)\|^2 + \frac{n\sigma}{2(1+t)}\int_\Omega e^{2\sigma\psi(t,x)}|v(x)|^2 dx. \tag{3.41}$$

□

Usando o Lema 3.3 com a finalidade de controlar o termo não linear, nosso próximo resultado, surge também, uma versão da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg.

Lema 3.4. *Sejam $n \geq 2$, $\theta(q) := n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \in [0,1)$ e $\sigma \in (0,1]$. Se $v \in H^1_{0,\psi(t,\cdot)}(\Omega)$, para cada $t \in [0, T_m)$, então, temos que:*

$$\|e^{\sigma\psi(t,\cdot)}v\|_{L^q} \leq C(1+t)^{\frac{1-\theta(q)}{2}} \|\nabla v\|^{1-\sigma} \|e^{\psi(t,\cdot)}\nabla v\|^\sigma,$$

no qual $C > 0$ é uma constante.

Demonstração. Seja $v \in H^1_{0,\psi(t,\cdot)}(\Omega)$ $(t \geq 0)$. Considere $\sigma \in (0,1]$ e utilizando a desigualdade de Hölder, podemos obter:

$$\begin{aligned} \|e^{\sigma\psi(t,\cdot)}\nabla v\|^2 &= \int_\Omega |e^{\sigma\psi(t,x)}\nabla v|^2 dx \\ &= \int_\Omega e^{2\sigma\psi(t,x)}|\nabla v|^{2\sigma}|\nabla v|^{2(1-\sigma)} dx \\ &\leq \|e^{2\sigma\psi(t,\cdot)}|\nabla v|^{2\sigma}\|_{L^{\frac{1}{\sigma}}} \||\nabla v|^{2(1-\sigma)}\|_{L^{\frac{1}{1-\sigma}}} \\ &= \|\nabla v\|^{2(1-\sigma)} \|e^{\psi(t,\cdot)}|\nabla v|\|^{2\sigma}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Similarmente, temos:

$$\begin{aligned} \|e^{\sigma\psi(t,\cdot)}v\|^2 &= \int_\Omega |e^{\sigma\psi(t,x)}v|^2 dx \\ &= \int_\Omega e^{2\sigma\psi(t,x)}|v|^{2\sigma}|v|^{2(1-\sigma)} dx \\ &\leq \|e^{2\sigma\psi(t,\cdot)}|v|^{2\sigma}\|_{L^{\frac{1}{\sigma}}} \||v|^{2(1-\sigma)}\|_{L^{\frac{1}{1-\sigma}}} \\ &= \|e^{\psi(t,\cdot)}v\|^{2\sigma} \|v\|^{2(1-\sigma)}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Sendo assim, por (3.42) e (3.43), notamos que $v \in H^1_{0,\sigma\psi(t,\cdot)}(\Omega)$, para todo $\sigma \in (0,1]$. Assim, segue que $f(t,\cdot) := e^{\sigma\psi(t,\cdot)}v \in H^1_0(\Omega)$. Agora, aplicando a usual desigualdade de Gagliardo-Nirenberg para a função $f(t,\cdot)$, temos:

$$\|f(t,\cdot)\|_{L^q} \le C\|f(t,\cdot)\|^{1-\theta(q)}\|\nabla f(t,\cdot)\|^{\theta(q)}, \tag{3.44}$$

no qual $\theta(q) = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \in [0,1)$.

Além disso, aplicando o Lema 3.3, obtemos:

$$\|f(t,\cdot)\| \le \left(\frac{2(1+t)}{n\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \|e^{\sigma\psi(t,\cdot)}\nabla v\| \tag{3.45}$$

e

$$\|\nabla f(t,\cdot)\| \le \|e^{\sigma\psi(t,\cdot)}\nabla v\|. \tag{3.46}$$

Assim, por (3.44), (3.45) e (3.46), podemos obter:

$$\|f(t,\cdot)\|_{L^q} \le C_\sigma(1+t)^{\frac{1-\theta(q)}{2}}\|e^{\sigma\psi(t,\cdot)}\nabla v\|. \tag{3.47}$$

Logo, se $\sigma \in (0,1]$, por (3.47), concluímos que:

$$\|e^{\sigma\psi(t,\cdot)}v\|_{L^q} \le C(1+t)^{\frac{1-\theta(q)}{2}}\|\nabla v\|^{1-\sigma}\|e^{\psi(t,\cdot)}\nabla v\|^{\sigma}, \tag{3.48}$$

para algum $t \in [0, T_m)$, no qual $C > 0$ é uma constante. □

Nosso próximo resultado apresenta uma estimativa que será utilizada na sequência.

Lema 3.5. *Sejam* $n \ge 2$, $1 < p \le \frac{n}{n-2}$ $(n \ge 3)$ *e* $1 < p < +\infty$ $(n = 2)$. *Para qualquer* $\varepsilon \ge 0$ *e* $\delta > 0$, *existe uma constante* $C := C_{\varepsilon,\delta} > 0$ *de modo que para todo* $t \in [0, T_m)$, *temos:*

$$|x|^{1+\varepsilon}e^{-p\delta\psi(t,x)} \le C(1+t)^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \quad (x \in \Omega).$$

Demonstração. Sejam $\varepsilon \ge 0$ e uma constante $C_1 > 0$ de modo que $e^y \ge C_1 y^{\frac{1+\varepsilon}{2}}$, para todo $y > 0$. Faça $y = \frac{p\delta r^2}{4(1+t)}$. Então,

$$e^{\frac{p\delta r^2}{4(1+t)}} \ge C_1\left(\frac{p\delta r^2}{4(1+t)}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}. \tag{3.49}$$

Disto, segue que:

$$e^{-\frac{p\delta r^2}{4(1+t)}} \le \frac{1}{C_1}\left(\frac{4(1+t)}{p\delta r^2}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{2}} = \frac{1}{C_1}\frac{1}{r^{1+\varepsilon}}\left(\frac{4(1+t)}{p\delta}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}. \tag{3.50}$$

Assim, temos:

$$r^{1+\varepsilon}e^{-\frac{p\delta r^2}{4(1+t)}} \le \frac{1}{C_1}\left(\frac{4}{p\delta}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}(1+t)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}. \tag{3.51}$$

Logo, fazendo $r = |x|$, com $x \in \Omega$, concluímos que:

$$|x|^{1+\varepsilon} e^{-p\delta\psi(t,x)} \leq C(1+t)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}. \tag{3.52}$$

□

Usando Lema 3.5, com $\varepsilon > 0$ pode-se majorar o termo não linear da seguinte maneira:

Lema 3.6. *Sejam $n = 2$, $1 < p < +\infty$. Para cada $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ existe uma constante $C := C_{\varepsilon,\delta} > 0$ de modo que para todo $t \in [0, T_m)$ temos:*

$$\|d_2(\cdot)|u(t,\cdot)|^p\| \leq C(1+t)^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \|e^{\delta\psi(t,\cdot)} u(t,\cdot)\|_{L^{2p}}^p.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$, arbitrariamente fixado. Note que

$$C_\varepsilon := \sup_{x\in\Omega} \frac{log(B|x|)}{|x|^\varepsilon} < +\infty. \tag{3.53}$$

Por (2.2), temos:

$$d_2(x) = |x| log(B|x|). \tag{3.54}$$

Assim, pelo Lema 3.5,

$$\begin{aligned}
\|d_2(\cdot)|u(t,\cdot)|^p\|^2 &= \int_\Omega \left[|x| log(B|x|) \cdot |u(t,x)|^p\right]^2 dx \\
&= \int_\Omega \left[\frac{|x| log(B|x|)}{|x|^{1+\varepsilon}}\right]^2 \cdot |x|^{2(1+\varepsilon)} \cdot |u(t,x)|^{2p} dx \\
&\leq C_\varepsilon^2 \int_\Omega |x|^{2(1+\varepsilon)} e^{-2p\delta\psi(t,x)} \cdot e^{2p\delta\psi(t,x)} \cdot |u(t,x)|^{2p} dx \\
&\leq C_\varepsilon^2 C_{\varepsilon,\delta}^2 (1+t)^{1+\varepsilon} \|e^{\delta\psi(t,\cdot)} u(t,\cdot)\|_{L^{2p}}^{2p}.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

□

Por outro lado, usando novamente o Lema 3.5, com $\varepsilon = 0$ podemos majorar o termo não linear da seguinte maneira:

Lema 3.7. *Sejam $n \geq 3$ e $1 < p \leq \dfrac{n}{n-2}$. Para cada $\delta > 0$ existe uma constante $C := C_{0,\delta}$ de modo que para todo $t \in [0, T_m)$ temos:*

$$\|d_n(\cdot)|u(t,\cdot)|^p\| \leq C(1+t)^{\frac{1}{2}} \|e^{\delta\psi(t,\cdot)} u(t,\cdot)\|_{L^{2p}}^p.$$

Demonstração. Por (2.2) temos que $d_n(x) = |x|$, com $n \geq 3$. Para $\varepsilon = 0$, temos que:

$$\begin{aligned}
\|d_n(\cdot)|u(t,\cdot)|^p\|^2 &= \int_\Omega \left[|x||u(t,x)|^p\right]^2 dx \\
&= \int_\Omega \left(|x| e^{-p\delta\psi(t,x)}\right)^2 \cdot e^{2p\delta\psi(t,x)} |u(t,x)|^{2p} dx \\
&\leq C_{0,\delta}^2 (1+t) \int_\Omega e^{2p\delta\psi(t,x)} |u(t,x)|^{2p} dx \\
&= C_{0,\delta}^2 (1+t) \|e^{\delta\psi(t,\cdot)} u(t,\cdot)\|_{L^{2p}}^{2p}.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Logo, concluímos que:

$$\|d_n(\cdot)|u(t,\cdot)|^p\| \leq C(1+t)^{\frac{1}{2}}\|e^{\delta\psi(t,\cdot)}u(t,\cdot)\|^p_{L^{2p}}. \tag{3.57}$$

□

A seguir apresentaremos o enunciado do Teorema 3.10, destaque deste capítulo. Este resultado, basicamente, apresenta restrições ao expoente p do termo de não linearidade, com base na Proposição 3.1 e conclui a existência de solução global para o Problema (3.1).

Observação 3.8. Para provarmos a existência de solução global para o Problema (3.1) assumiremos a condição (3.58). Tal condição é mais fraca do que assumir que os dados iniciais têm suporte compacto (ver, por exemplo, [28]).

Observação 3.9. Observe que se $n=2$ o expoente crítico é $p=2$. No entanto, o caso crítico não será estudado nos resultados abaixo. Isso se deve ao fato de não considerarmos dados iniciais em $L^1(\Omega)$. Se tal hipótese fosse assumida, acreditamos que teríamos a existência de solução global para o caso em que p é igual ao expoente crítico (ver, por exemplo, [13]).

Teorema 3.10. *Seja $n=2$ e $2<p<+\infty$ ou $n=3,4,5$ e $1+\frac{4}{n+2}<p\leq\frac{n}{n-2}$. Se as condições iniciais $[u_0,u_1]\in H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)$ satisfizer*

$$\mathscr{I}_0^2 := \|e^{|\cdot|^2/4}u_1\|^2+\|e^{|\cdot|^2/4}\nabla u_0\|^2+\|e^{|\cdot|^2/4}u_0\|^2 \ll 1, \tag{3.58}$$

então, o Problema (3.1) tem uma única solução global fraca $u\in X_1$ satisfazendo:

$$\int_\Omega e^{|x|^2/2(1+t)}\left(|u_t(t,x)|^2+|\nabla u(t,x)|^2\right)dx \leq \mathscr{I}_0^2,$$

e as estimativas:

$$\|u(t,\cdot)\|^2 \leq C\mathscr{I}_0^2(1+t)^{-1},$$

$$\|u_t(t,\cdot)\|^2+\|\nabla u(t,\cdot)\|^2 \leq C\mathscr{I}_0^2(1+t)^{-2},$$

são verdadeiras para alguma constante $C>0$.

Com a finalidade de provar o Teorema 3.10, denotaremos por

$$S(t;\{v_0,v_1\})$$

a solução única do Problema Linear (2.1).

E, pelo Princípio de Duhamel, a solução do Problema Semilinear (3.1), pode ser expressa por:

$$u(t) = S(t;\{u_0,u_1\})+\int_0^t S\left(t-s;\left\{0,|u(s)|^p\right\}\right)ds. \tag{3.59}$$

Veja que:

$$\begin{cases} S_{tt}(t,x)-\Delta S(t,x)+S_t(t,x)-\Delta S_t(t,x)=0, & (t,x)\in(0,\infty)\times\Omega, \\ S(0,x)=u_0(x), \quad S_t(0,x)=u_1(x), & x\in\Omega, \\ S(t,x)=0, \quad t>0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{3.60}$$

Do Teorema 2.3, os operadores $\{S(t;\{u_0,u_1\}) : t\geq 0\}$ satisfazem as propriedades abaixo:

$$\|S(t;\{u_0,u_1\})\| \leq CJ_0(u_0,u_1)(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.61}$$

$$\|\partial_t S(t;\{u_0,u_1\})\| + \|\nabla S(t;\{u_0,u_1\})\| \leq CJ_0(u_0,u_1)(1+t)^{-1}, \tag{3.62}$$

no qual

$$J_0(u_0,u_1)^2 := \|u_0\|_{H^1}^2 + \|u_1\|^2 + \|d_n(\cdot)(u_0+u_1)\|^2. \tag{3.63}$$

Note que $J_0(u_0,u_1)$ pode ser absorvido por $\mathscr{I}_0$ definido no Teorema 3.10. De fato, veja:

$$\begin{aligned} J_0(u_0,u_1)^2 &= \|u_0\|_{H^1}^2 + \|u_1\|^2 + \|d_n(\cdot)(u_0+u_1)\|^2 \\ &= \|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|u_1\|^2 + \|d_n(\cdot)(u_0+u_1)\|^2. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Sendo assim, note que:

$$|u_0(x)|^2 \leq e^y|u_0(x)|^2,$$

para todo $y\geq 0$ e $x\in\Omega$. Faça $y=\dfrac{|x|^2}{8}$, com $x\in\Omega$. Assim, podemos perceber que:

$$\int_\Omega |u_0(x)|^2 dx \leq \int_\Omega |e^{|x|^2/4}u_0(x)|^2 dx.$$

E, isto nos indica:

$$\|u_0\|^2 \leq \|e^{|\cdot|^2/4}u_0\|^2. \tag{3.65}$$

De forma análoga, segue que:

$$\|\nabla u_0\|^2 \leq \|e^{|\cdot|^2/4}\nabla u_0\|^2 \tag{3.66}$$

e

$$\|u_1\|^2 \leq \|e^{|\cdot|^2/4}u_1\|^2. \tag{3.67}$$

Assuma que $n\geq 3$, por (2.2), $d_n(x)=|x|$. E, dado $\varepsilon>0$ existe uma constante $C_\varepsilon>0$ de modo que, se $y>0$, então,

$$y^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \leq C_\varepsilon e^{\frac{y}{8}}. \tag{3.68}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\|d_n(\cdot)(u_0+u_1)\|^2 &= \int_\Omega |x|^2(u_0(x)+u_1(x))^2 dx \\
&= \int_\Omega |x|^2 u_0^2(x)dx + 2\int_\Omega |x|^2 u_0(x)u_1(x)dx \\
&\quad + \int_\Omega |x|^2 u_1^2(x)dx \\
&\leq 2\int_\Omega |x|^2 u_0^2(x)dx + 2\int_\Omega |x|^2 u_1^2(x)dx.
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

Usando (3.68), com $y = |x|^2$ e $\varepsilon = 1$, temos:

$$
\|d_n(\cdot)(u_0+u_1)\|^2 \leq 2C_1\left(\|e^{|\cdot|^2/4}u_0\|^2 + \|e^{|\cdot|^2/4}u_1\|^2\right). \tag{3.70}
$$

Desta forma, para $n=2$, temos:

$$
\begin{aligned}
J_0(u_0,u_1)^2 &\leq \|e^{|\cdot|^2/4}u_0\|^2 + \|e^{|\cdot|^2/4}\nabla u_0\|^2 + \|e^{|\cdot|^2/4}u_1\|^2 \\
&\quad + 2C_1\|e^{|\cdot|^2/4}u_0\|^2 + 2C_1\|e^{|\cdot|^2/4}u_1\|^2 \\
&\leq C\left(\|e^{|\cdot|^2/4}u_1\|^2 + \|e^{|\cdot|^2/4}\nabla u_0\|^2 + \|e^{|\cdot|^2/4}u_0\|^2\right) \\
&= C\mathscr{I}_0^2.
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

Para o caso $n=2$, por (2.2), temos que: $d_2(x) = |x|log(B|x|)$, no qual $B>0$ é uma constante que satisfaz:

$$
B\inf_{x\in\Omega}|x| \geq 2.
$$

Usando o fato de que, existe $C_1>0$ de modo que

$$
log(B|x|) \leq C_1|x|.
$$

Assim, $d_2(x) = |x|log(B|x|) \leq C_1|x|^2$. Desta forma, a absorção de $J_0(u_0,u_1)$ por $\mathscr{I}_0(u_0,u_1)$ segue de maneira semelhante ao caso anterior.

Além disso, uma vez que (3.59) é solução do Problema (3.1), usando (3.60), obtemos o seguinte problema auxiliar, vide o Princípio de Duhamel:

$$
\begin{cases}
\tilde{S}_{tt}(t,x) - \Delta\tilde{S}(t,x) + \tilde{S}_t(t,x) - \Delta\tilde{S}_t(t,x) = 0, \quad (t,x)\in(0,\infty)\times\Omega, \\
\tilde{S}(0,x) = 0, \quad \tilde{S}_t(0,x) = |u(s)|^p, \quad x\in\Omega, \\
\tilde{S}(t,x) = 0, \quad t>0, \quad x\in\partial\Omega,
\end{cases}
\tag{3.72}
$$

no qual $\tilde{S} = S(t-s;\{0,|u(s)|^p\})$. Assim,

$$
J_0^2(0,|u(s)|^p) = \||u(s)|^p\|^2 + \|d_n(\cdot)|u(s)|^p\|^2. \tag{3.73}
$$

Perceba que:

$$
\begin{aligned}
\||u(s)|^p\|^2 &= \int_\Omega |u(s)|^{2p} ds \\
&= \|u(s)\|_{L^{2p}}^{2p}.
\end{aligned} \tag{3.74}
$$

Logo,

$$
J_0^2(0,|u(s)|^p) = \|u(s)\|_{L^{2p}}^{2p} + \|d_n(\cdot)|u(s)|^p\|^2. \tag{3.75}
$$

Pelo Teorema 2.3, obtemos as seguintes estimativas:

$$
\begin{aligned}
&\|S\left(t-s;\{0,|u(s)|^p\}\right)\| \\
&\quad \le CJ_0(0,|u(s)|^p)(1+t-s)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad \le C\left(\|u(s)\|_{L^{2p}}^p + \|d_n(\cdot)|u(s)|^p\|\right)(1+t-s)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{3.76}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&\|\partial_t S\left(t-s;\{0,|u(s)|^p\}\right)\| + \|\nabla S\left(t-s;\{0,|u(s)|^p\}\right)\| \\
&\le CJ_0(0,|u(s)|^p)(1+t-s)^{-1} \\
&\le C\left(\|u(s)\|_{L^{2p}}^p + \|d_n(\cdot)|u(s)|^p\|\right)(1+t-s)^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.77}
$$

Note que:

$$
\begin{aligned}
\|u(s)\|_{L^{2p}}^p &= \left(\int_\Omega |u(s)|^{2p} dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_\Omega e^{-2p\delta\psi(s,x)} |e^{\delta\psi(s,x)} u(s)|^{2p} dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \left(\int_\Omega |e^{\delta\psi(s,x)} u(s)|^{2p} dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|e^{\delta\psi(s,\cdot)} u(s)\|_{L^{2p}}^p.
\end{aligned} \tag{3.78}
$$

Usando a desigualdade acima, e os Lemas 3.6 e 3.7, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\|S\left(t-s;\{0,|u(s)|^p\}\right)\| \\
&\quad \le C(1+t-s)^{-\frac{1}{2}}(1+s)^{(1+\varepsilon)/2}\|e^{\delta\psi(s,\cdot)}u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}^p,
\end{aligned} \tag{3.79}
$$

e, também,

$$
\begin{aligned}
&\|\partial_t S\left(t-s;\{0,|u(s)|^p\}\right)\| + \|\nabla S\left(t-s;\{0,|u(s)|^p\}\right)\| \\
&\le C(1+t-s)^{-1}(1+s)^{(1+\varepsilon)/2}\|e^{\delta\psi(s,\cdot)}u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}^p.
\end{aligned} \tag{3.80}
$$

Abaixo segue o enunciado da desigualdade da integral, que pode ser visto em [4].

Lema 3.11. *Seja $\beta > 1$ um número real. Então, existe uma constante $C_\beta > 0$ dependendo de β, de modo que:*

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t (1+t-s)^{-1/2}(1+s)^{-\beta} ds \le C_\beta (1+t)^{-1/2} \\
&\int_0^t (1+t-s)^{-1}(1+s)^{-\beta} ds \le C_\beta (1+t)^{-1}
\end{aligned} \tag{3.81}
$$

para todo $t > 0$.

Note que (3.79) e (3.80) são verdadeiras para todo $n \geq 2$ e $\varepsilon \geq 0$. Agora integrando de ambos os lados das desigualdades, sobre $[0,t]$, e usando a desigualdade da integral, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \| S\left(t-s;\{0,|u(s)|^p\}\right)\| \, ds \\
&\leq C\int_0^t (1+t-s)^{-\frac{1}{2}}(1+s)^{(1+\varepsilon)/2}\, \| e^{\delta\psi(s,\cdot)}u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}^p\, ds \\
&\leq C\int_0^t (1+s)^{-1-\nu}(1+t-s)^{-\frac{1}{2}}((1+s)^{\frac{1+\varepsilon}{2p}+\frac{1+\nu}{p}}\, \| e^{\delta\psi(s,\cdot)}u(s,\cdot)\|_{L^{2p}})^p ds \\
&\leq C\left(\sup_{[0,t]}(1+s)^{\beta}\, \| e^{\delta\psi(s,\cdot)}u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}\right)^p (1+t)^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{3.82}$$

no qual $\nu > 0$ e

$$\beta := \frac{3+\varepsilon+2\nu}{2p}.$$

De forma similar, podemos obter a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left(\|\partial_t S\left(t-s;\{0,|u(s)|^p\}\right)\| + \|\nabla S\left(t-s;\{0,|u(s)|^p\}\right)\|\right) ds \\
&\quad \leq C\left(\sup_{[0,t]}(1+s)^{\beta}\, \| e^{\delta\psi(s,\cdot)}u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}\right)^p (1+t)^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Combinando as desigualdades obtidas acima, prova-se o seguinte resultado.

Lema 3.12. *Seja $n \geq 2$ e $u(t,x)$ a solução local do Problema (3.1) em $[0,T_m)$ dada na Proposição 3.1. Então, temos:*

$$(1+t)^{\frac{1}{2}}\|u(t,\cdot)\| \leq C\mathscr{I}_0 + C\left(\sup_{[0,t]}(1+s)^{\beta}\, \| e^{\delta\psi(s,\cdot)}u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}\right)^p$$

e

$$\begin{aligned}
&(1+t)\left(\|u_t(t,\cdot)\| + \|\nabla u(t,\cdot)\|\right) \\
&\quad \leq C\mathscr{I}_0 + C\left(\sup_{[0,t]}(1+s)^{\beta}\, \| e^{\delta\psi(s,\cdot)}u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}\right)^p,
\end{aligned}$$

para qualquer $\varepsilon > 0$, $\nu > 0$, $\delta > 0$ e

$$\beta := \frac{3+\varepsilon+2\nu}{2p}.$$

Demonstração. Seja $n \geq 2$ e $u(t,x)$ a solução local do Problema (3.1) em $[0,T_m)$. Assim,

$$\begin{aligned} \|u(t,\cdot)\| &= \|S(t;\{u_0,u_1\}) + \int_0^t S\left(t-s;\left\{0,|u(s)|^p\right\}\right) ds\| \\ &\leq \|S(t;\{u_0,u_1\})\| + \|\int_0^t S\left(t-s;\left\{0,|u(s)|^p\right\}\right) ds\| \\ &\leq \|S(t;\{u_0,u_1\})\| + \int_0^t \|S\left(t-s;\left\{0,|u(s)|^p\right\}\right)\| ds. \end{aligned} \tag{3.84}$$

Utilizando (3.61), (3.82) e o fato de que J_0 pode ser absorvido por $\mathscr{I}_0$, obtemos que:

$$(1+t)^{\frac{1}{2}}\|u(t,\cdot)\| \leq C\mathscr{I}_0 + C\left(\sup_{[0,t]}(1+s)^{\beta}\|e^{\delta\psi(s,\cdot)}u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}\right)^p, \tag{3.85}$$

e, de forma similar, utilizando (3.62) e (3.83), obtemos:

$$\begin{aligned} &(1+t)\left(\|u_t(t,\cdot)\| + \|\nabla u(t,\cdot)\|\right) \\ &\leq C\mathscr{I}_0 + C\left(\sup_{[0,t]}(1+s)^{\beta}\|e^{\delta\psi(s,\cdot)}u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}\right)^p, \end{aligned} \tag{3.86}$$

para qualquer $\varepsilon > 0$, $\nu > 0$, $\delta > 0$ e

$$\beta := \frac{3+\varepsilon+2\nu}{2p}. \tag{3.87}$$

□

Finalmente, com o objetivo de concluir este capítulo, realizaremos a demonstração do Teorema 3.10.

Demonstração. Teorema 3.10: Defina

$$\begin{aligned} W(t) := &\|e^{\psi(t,\cdot)}u_t(t,\cdot)\| + \|e^{\psi(t,\cdot)}\nabla u(t,\cdot)\| \\ &+ (1+t)\|u_t(t,\cdot)\| + (1+t)\|\nabla u(t,\cdot)\| \\ &+ (1+t)^{\frac{1}{2}}\|u(t,\cdot)\|. \end{aligned} \tag{3.88}$$

Verificaremos que I_0, definido no Lema 3.2, pode ser majorado por $\mathscr{I}_0$. Veja:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega e^{2\psi(0,x)}(|u_t(0,x)|^2 + |\nabla u(0,x)|^2)dx \\ &= \int_\Omega e^{|x|^2/2}|u_1(x)|^2 dx + \int_\Omega e^{|x|^2/2}|\nabla u_0(x)|^2 dx \\ &= \|e^{|\cdot|^2/4}u_1\|^2 + \|e^{|\cdot|^2/4}\nabla u_0\|^2. \end{aligned} \tag{3.89}$$

Para a próxima majoração vamos usar o Lema 3.4, com $\sigma = 1$, $t = 0$, $v = u_0$ e $q = p+1$. E, como $\mathscr{I}_0^2 \ll 1$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_\Omega e^{|x|^2/2}|u_0(x)|^{p+1}\,dx &\le \int_\Omega e^{|x|^2\frac{(p+1)}{4}}|u_0(x)|^2 dx\\ &= \int_\Omega e^{\psi(0,x)(p+1)}|u_0(x)|^2 dx\\ &\le \|e^{\psi(0,\cdot)}u_0\|^2\\ &\le \mathscr{I}_0^{p+1}\\ &\le \mathscr{I}_0.\end{aligned} \tag{3.90}$$

Então, temos:

$$I_0^2 \le C\left(\|e^{|\cdot|^2/4}u_1\|^2 + \|e^{|\cdot|^2/4}\nabla u_0\|^2 + \|e^{|\cdot|^2/4}u_1\|^2\right) = C\mathscr{I}_0^2. \tag{3.91}$$

Desta forma, utilizando os Lemas 3.2 e 3.12, obtemos:

$$\begin{aligned}W(t) \le C\mathscr{I}_0 + C&\left(\sup_{s\in[0,t]}(1+s)^\delta\|e^{\gamma\psi(s,\cdot)}u(s,\cdot)\|_{L^{p+1}}\right)^{\frac{p+1}{2}}\\ &+ C\left(\sup_{[0,t]}(1+s)^\beta\|e^{\delta\psi(s,\cdot)}u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}\right)^p,\end{aligned} \tag{3.92}$$

com $t \in [0, T_m)$.

Escolhendo $q = p+1$ e $v := u(s,\cdot)$ no Lema 3.4, segue que:

$$\begin{aligned}&\|e^{\gamma\psi(t,\cdot)}u(s,\cdot)\|_{L^{p+1}}\\ &\quad\le C(1+s)^{\frac{1-\theta(p+1)}{2}}\|\nabla u(s,\cdot)\|^{1-\gamma}\|e^{\psi(s,\cdot)}\nabla u(s,\cdot)\|^\gamma\\ &\quad\le C(1+s)^{\frac{1-\theta(p+1)}{2}}(1+s)^{\gamma-1}\{(1+s)\|\nabla u(s,\cdot)\|\}^{1-\gamma}\|e^{\psi(s,\cdot)}\nabla u(s,\cdot)\|^\gamma\\ &\quad\le C(1+s)^{\frac{1-\theta(p+1)}{2}+\gamma-1}\left(\frac{(1+s)\|\nabla u(s,\cdot)\|}{1-\gamma} + \frac{\|e^{\psi(s,\cdot)}\nabla u(s,\cdot)\|}{\gamma}\right)\\ &\quad\le C_1(1+s)^{\frac{1-\theta(p+1)}{2}+\gamma-1}W(s),\end{aligned} \tag{3.93}$$

e, de modo similar,

$$\begin{aligned}\|e^{\delta\psi(s,\cdot)}u(s,\cdot)\|_{L^{2p}} &\le C(1+s)^{\frac{1-\theta(2p)}{2}}\|\nabla u(s,\cdot)\|^{1-\delta}\|e^{\psi(s,\cdot)}\nabla u(s,\cdot)\|^\delta\\ &\le C_2(1+s)^{\frac{1-\theta(2p)}{2}+\delta-1}W(s).\end{aligned} \tag{3.94}$$

Assim, usando (3.92),(3.93) e (3.94), na definição de $W(s)$, obtemos:

$$\begin{aligned}W(t) \le C\mathscr{I}_0 + C&\left(\sup_{s\in[0,t]}(1+s)^{\delta+\gamma-1+\frac{1-\theta(p+1)}{2}}W(s)\right)^{\frac{p+1}{2}}\\ &+ C\left(\sup_{s\in[0,t]}(1+s)^{\beta+\delta-1+\frac{1-\theta(2p)}{2}}W(s)\right)^p.\end{aligned} \tag{3.95}$$

Usando a definição de $\theta(q)$, dada no Lema 3.4, temos:

$$\begin{aligned}\delta+\gamma-1+\frac{1-\theta(p+1)}{2} &= \delta+\gamma-1+\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\\ &= \delta+\gamma-\frac{1}{2}-\frac{n}{4}+\frac{n}{2(p+1)}<0,\end{aligned} \tag{3.96}$$

pois $1+\frac{4}{n+2}<p$ ou $p>2$ e δ e γ suficientemente pequenos.

E, usando a definição de β, vista em (3.87), veja:

$$\begin{aligned}\beta+\delta-1+\left(\frac{1-\theta(2p)}{2}\right) &= \beta+\delta-1+\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}\right)\\ &= \delta+\frac{\varepsilon}{2p}+\frac{\nu}{p}+\left(\frac{6+n}{4p}-\frac{n+2}{4}\right)<0,\end{aligned} \tag{3.97}$$

pois $1+\frac{4}{n+2}<p$ ou $p>2$ e δ, ν e ε suficientemente pequenos.

Assim, podemos obter que:

$$\sup_{s\in[0,t]} W(s) \le C\mathscr{I}_0 + C\left(\sup_{s\in[0,t]} W(s)\right)^{\frac{p+1}{2}} + C\left(\sup_{s\in[0,t]} W(s)\right)^{p}, \tag{3.98}$$

com $t\in[0,T_m)$.

Agora, defina $M(t) := \sup_{s\in[0,t]} W(s)$. Note que $M(t)\in C([0,T_m))$. Desta forma, por (3.98), temos:

$$M(t) \le C\mathscr{I}_0 + M(t)^{\frac{p+1}{2}} + M(t)^p. \tag{3.99}$$

Como de costume, escolhendo $\mathscr{I}_0$ suficientemente pequeno, podemos obter $M(t)\le C\mathscr{I}_0$, $\forall t\in[0,T_m)$, consequência do Lema *A*.1, demonstrado no Apêndice.

Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned}&\|e^{\psi(t,\cdot)}u_t(t,\cdot)\| + \|e^{\psi(t,\cdot)}\nabla u(t,\cdot)\|\\ &\qquad + (1+t)\|u_t(t,\cdot)\| + (1+t)\|\nabla u(t,\cdot)\| + (1+t)^{\frac{1}{2}}\|u(t,\cdot)\|\\ &\quad \le C\mathscr{I}_0.\end{aligned} \tag{3.100}$$

Do Lema 3.3, com $\sigma=1$ e $v := u(t,\cdot)$, segue que:

$$\|e^{\psi(t,\cdot)}\nabla u(t,\cdot)\|^2 \ge \|\nabla\cdot(e^{\psi(t,\cdot)}u(t,\cdot))\|^2 + \frac{n}{2(1+t)}\int_\Omega |e^{\psi(t,x)}u(t,x)|^2dx. \tag{3.101}$$

Isto implica em:

$$\|e^{\psi(t,\cdot)}u(t,\cdot)\| \le C(1+t)^{\frac{1}{2}}\|e^{\psi(t,\cdot)}\nabla u(t,\cdot)\| \le C(1+t)^{\frac{1}{2}}\mathscr{I}_0, \tag{3.102}$$

com $t\in[0,T_m)$, para alguma constante $C>0$.

Agora, vamos provar que $T_m = +\infty$. Suponha, por contradição, que $T_m < +\infty$. Assim, por (3.100) e (3.102), segue que

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\uparrow T_m}\left\{\|e^{\psi(t,\cdot)}\nabla u(t,\cdot)\| + \|e^{\psi(t,\cdot)}u_t(t,\cdot)\| + \|e^{\psi(t,\cdot)}u(t,\cdot)\|\right\} \\
&\leq C\mathscr{I}_0(1+T_m)^{\frac{1}{2}} + C\mathscr{I}_0 < +\infty.
\end{aligned} \tag{3.103}$$

Pela Proposição 3.1, concluímos que $T_m = +\infty$.

Além disso, por (3.100), obtemos facilmente as estimativas desejadas:

$$\|u(t,\cdot)\|^2 \leq C\mathscr{I}_0^2(1+t)^{-1},$$

$$\|u_t(t,\cdot)\|^2 + \|\nabla u(t,\cdot)\|^2 \leq C\mathscr{I}_0^2(1+t)^{-2}.$$

E desta forma, concluímos a demonstração. □

4 PROBLEMA SEMILINEAR: EXPOENTE CRÍTICO

Seja $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash \overline{B_\rho}$, para algum $\rho > 0$. Novamente, considere o problema:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) + u_t(t,x) - \Delta u_t(t,x) = |u(t,x)|^p, & (t,x) \in (0,+\infty)\times\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

O objetivo deste capítulo é apresentar as demonstrações dos Teoremas 4.2 e 4.3. Basicamente, estes resultados nos trazem a informação da não existência de soluções globais para a equação do Problema (4.1), quando a solução possui condições específicas.

Considere a função teste $\Phi \in C_0^\infty([0,+\infty)\times\overline{\Omega})$, de modo que

$$\Phi(t,\cdot)\big|_{\partial\Omega} = 0,$$

para todo $t \geq 0$. Assuma que $u(t,x)$ é a solução clássica do Problema (4.1). Note que ao multiplicarmos a equação de (4.1) por Φ e, em seguida, integrarmos sobre $[0,+\infty)\times\Omega$, obtemos:

$$\begin{aligned} &\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \int_\Omega |u(t,x)|^p \Phi(t,x)dxdt \\ &= \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \int_\Omega (u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) + (1-\Delta)u_t(t,x))\Phi(t,x)dxdt. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Como de costume, as parcelas serão calculadas separadamente, tornando assim, a compreensão mais acessível.

Veja que, usando integração por partes, e observando que

$$u(t,x) \in X_1,$$

visto em (2.3), bem como, Φ possui suporte compacto, obtemos:

$$\begin{aligned} &\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \int_\Omega u_{tt}(t,x)\Phi(t,x)dxdt \\ &= \int_\Omega \left[\lim_{b\to+\infty}\int_0^b u_{tt}(t,x)\Phi(t,x)dt\right]dx \\ &= \int_\Omega \left[\lim_{b\to+\infty}\left(u_t(t,x)\Phi(t,x)\Big|_0^b - \int_0^b u_t(t,x)\partial_t\Phi(t,x)dt\right)\right]dx \\ &= -\int_\Omega u_1(x)\Phi(0,x)dx + \int_\Omega u_0(x)\partial_t\Phi(0,x)dx \\ &\quad + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \int_\Omega u(t,x)\partial_t^2\Phi(t,x)dxdt. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Por outro lado, usando a Identidade de Green e o fato de que, para qualquer $t \in [0,+\infty)$, $u(t,x) = 0$ se $x \in \partial\Omega$, segue que:

$$
\begin{aligned}
&-\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\int_\Omega \Delta u(t,x)\Phi(t,x)dxdt\\
&=-\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\left[-\int_\Omega \nabla u(t,x)\nabla\Phi(t,x)dx+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\eta}(t,x)\Phi(t,x)d\Gamma\right]dt\\
&=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\int_\Omega \nabla u(t,x)\nabla\Phi(t,x)dxdt\\
&=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\int_\Omega -u(t,x)\Delta\Phi(t,x)dxdt.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Operando, novamente, com as justificativas para obter (4.3), podemos notar que:

$$
\begin{aligned}
\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\int_\Omega u_t(t,x)\Phi(t,x)dxdt &= \int_\Omega\left[\lim_{b\to+\infty}\int_0^b u_t(t,x)\Phi(t,x)dt\right]dx\\
&=\int_\Omega\left[\lim_{b\to+\infty}\left(u(t,x)\Phi(t,x)\Big|_0^b-\int_0^b u(t,x)\partial_t\Phi(t,x)dt\right)\right]dx\\
&=\int_\Omega\left[-u_0(x)\Phi(0,x)-\lim_{b\to+\infty}\int_0^b u(t,x)\partial_t\Phi(t,x)dt\right]dx\\
&=-\int_\Omega u_0(x)\Phi(0,x)dx+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\int_\Omega -u(t,x)\partial_t\Phi(t,x)dxdt.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

E, finalmente:

$$
\begin{aligned}
&-\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\int_\Omega \Delta u_t(t,x)\Phi(t,x)dxdt\\
&=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\left[\int_\Omega \nabla u_t(t,x)\nabla\Phi(t,x)dx-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u_t}{\partial\eta}(t,x)\Phi(t,x)d\Gamma\right]dt\\
&=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\int_\Omega \nabla u_t(t,x)\nabla\Phi(t,x)dxdt\\
&=-\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\int_\Omega u_t(t,x)\Delta\Phi(t,x)dxdt\\
&=-\int_\Omega\left[\lim_{b\to+\infty}\left(u(t,x)\Delta\Phi(t,x)\Big|_0^b-\int_0^b u(t,x)\Delta\partial_t\Phi(t,x)dt\right)\right]dx\\
&=\int_\Omega u_0(x)\Delta\Phi(0,x)dx\\
&\quad+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\int_\Omega u(t,x)\Delta\partial_t\Phi(t,x)dxdt.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Substituindo (4.3), (4.4), (4.5), (4.6) em (4.2), temos:

$$\begin{aligned}
&\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\int_\Omega \left|u(t,x)\right|^p \Phi(t,x)dxdt \\
&= \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\int_\Omega u(t,x)\left(\partial_t^2\Phi(t,x)-\Delta\Phi(t,x)\right)dxdt \\
&\quad+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\int_\Omega u(t,x)(-\partial_t\Phi(t,x)+\Delta\partial_t\Phi(t,x))dxdt \\
&\quad-\int_\Omega (u_1(x)+u_0(x))\Phi(0,x)dx+\int_\Omega u_0(x)\partial_t\Phi(0,x)dx \\
&\quad+\int_\Omega u_0(x)\Delta\Phi(0,x)dx.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Observação 4.1. Entendemos que $u(t,x)$ é uma solução fraca para o Problema (4.1) se, para qualquer função teste $\Phi\in C_0^\infty([0,+\infty)\times\overline{\Omega})$ com $\Phi(t,\cdot)\big|_{\partial\Omega}=0$, para todo $t\geq 0$, a identidade integral (4.7) for verificada. Particularmente, soluções clássicas são soluções fracas, entretanto a recíproca nem sempre é verdadeira.

Em vista das observações realizadas até agora, apresentaremos os resultados deste capítulo e suas respectivas demonstrações.

Teorema 4.2. *Seja $n\geq 2$. Suponha que a condição inicial $u_0\in L^1(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ e $u_1\in L^1(\Omega)\cap L^2(\Omega)$ em (4.1) não sejam identicamente nulas. Além disso, considere que $u_0(x)$, $u_1(x)\geq 0$, para qualquer $x\in\Omega$. Assuma que $1<p<2$, se $n=2$, ou $1<p\leq 1+\dfrac{2}{n}$, se $n\geq 3$. Então, não existe solução global para o Problema (4.1), isto é, na Proposição 3.1, $T_m<+\infty$.*

Demonstração. Seja $\rho>0$. Defina $\psi\in C_0^\infty([0,+\infty))$, sendo,

$$\psi(x)=\begin{cases} 1, & \text{se} \quad x\in[0,1], \\ 0, & \text{se} \quad x\geq 2. \end{cases} \tag{4.8}$$

Seja $n\geq 3$. Para cada $R>\rho$, defina φ_R uma função de suporte compacto em $\overline{\Omega}=\mathbb{R}^n\backslash B_\rho$, da seguinte maneira:

$$\varphi_R(x)=\tilde{\varphi_R}(r), \tag{4.9}$$

com $\tilde{\varphi}_R(r)=K(r)\psi(R^{-1}r)$, no qual $K(r)=\rho^{2-n}-r^{2-n}$ e $r=|x|$.

É fácil perceber que φ_R satisfaz algumas propriedades, por exemplo, $\varphi_R(x)=0$, para todo $x\in\partial\Omega$. Isto ocorre pelo fato de que, uma vez que $x\in\partial\Omega$, segue que, $|x|=\rho$. Assim, por definição, $K(\rho)=0$. Também, temos que, se x for tal que $|x|\geq 2R$, $\varphi_R(x)=0$, aqui, segue pelo fato de que $R^{-1}|x|\geq 2$ e, por definição, $\psi(R^{-1}|x|)=0$.

Agora, vamos verificar algumas relações para $\Delta\varphi_R$. Para tanto, consideremos dois casos: $\rho<|x|\le R$ e $R\le|x|$. Veja:

$$\varphi_R(x)=K(|x|)\psi(R^{-1}|x|)=K\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\right)\psi\left(R^{-1}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\right). \tag{4.10}$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[\varphi_R(x)]=K'(|x|)\psi(R^{-1}|x|)\frac{x_i}{|x|}+K(|x|)\psi'(R^{-1}|x|)\frac{R^{-1}x_i}{|x|}. \tag{4.11}$$

E, então,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}[\varphi_R(x)]=&K''(|x|)\psi(R^{-1}|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2}+2K'(|x|)\psi'(R^{-1}|x|)\frac{R^{-1}x_i^2}{|x|^2}\\&+K'(|x|)\psi(R^{-1}|x|)\frac{1}{|x|}-K'(|x|)\psi(R^{-1}|x|)\frac{x_i^2}{|x|^3}\\&+K(|x|)\psi''(R^{-1}|x|)\frac{R^{-2}x_i^2}{|x|^2}+K(|x|)\psi'(R^{-1}|x|)\frac{R^{-1}}{|x|}\\&-K(|x|)\psi'(R^{-1}|x|)\frac{R^{-1}x_i^2}{|x|^3}.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_R(x)=&K''(|x|)\psi(R^{-1}|x|)+2K'(|x|)\psi'(R^{-1}|x|)R^{-1}\\&+K'(|x|)\psi(R^{-1}|x|)\frac{n}{|x|}-K'(|x|)\psi(R^{-1}|x|)\frac{1}{|x|}\\&+K(|x|)\psi''(R^{-1}|x|)R^{-2}+K(|x|)\psi'(R^{-1}|x|)\frac{R^{-1}n}{|x|}\\&-K(|x|)\psi'(R^{-1}|x|)\frac{R^{-1}}{|x|}\\=&\,\psi\left(R^{-1}|x|\right)\cdot\left[K''(|x|)+K'(|x|)\frac{n}{|x|}-K'(|x|)\frac{1}{|x|}\right]\\&+\psi'\left(R^{-1}|x|\right)\cdot\left[2K'(|x|)R^{-1}+K(|x|)\frac{R^{-1}}{|x|}(n-1)\right]\\&+\psi''\left(R^{-1}|x|\right)\cdot\left[K(|x|)R^{-2}\right].\end{aligned} \tag{4.13}$$

1º caso: Suponha que $\rho<|x|\le R$. Então, $R^{-1}|x|\le 1$. Assim, temos $\psi(R^{-1}|x|)=1$ e $\psi'(R^{-1}|x|)=\psi''(R^{-1}|x|)=0$. Consequentemente,

$$\Delta\varphi_R(x)=K''(|x|)+K'(|x|)\frac{n}{|x|}-K'(|x|)\frac{1}{|x|}. \tag{4.14}$$

Como, $K(|x|)=\rho^{2-n}-|x|^{2-n}$, segue que:

$$K'(|x|)=(n-2)|x|^{1-n}\quad\text{e}\quad K''(|x|)=-(n-2)(n-1)|x|^{-n}. \tag{4.15}$$

Disto, temos:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_R(x) &= \frac{-(n-2)(n-1)}{|x|^n} + \frac{n(n-2)}{|x|^n} - \frac{(n-2)}{|x|^n} \\ &= \frac{-n^2+3n-2+n^2-2n-n+2}{|x|^n} \\ &= \frac{0}{|x|^n} = 0.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Antes de apresentarmos o próximo caso, defina:

$$f(y) = |\psi(y)| + |\psi'(y)| + |\psi''(y)|. \tag{4.17}$$

Assim,

$$\begin{aligned}|\Delta\varphi_R(x)| \leq &\left[\left|K''(|x|) + K'(|x|)\frac{n}{|x|} - K'(|x|)\frac{1}{|x|}\right|\right. \\ &+ \left|2K'(|x|)R^{-1} + K(|x|)\frac{R^{-1}n}{|x|} - K(|x|)\frac{R^{-1}}{|x|}\right| \\ &\left. + \left|K(|x|)R^{-2}\right|\right] f\left(R^{-1}|x|\right).\end{aligned} \tag{4.18}$$

Agora, perceba que:

$$\left|K''(|x|) + K'(|x|)\frac{n}{|x|} - K'(|x|)\frac{1}{|x|}\right| = 0, \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}&\left|2K'(|x|)R^{-1} + K(|x|)\frac{R^{-1}n}{|x|} - K(|x|)\frac{R^{-1}}{|x|}\right| \\ &= \left|\frac{(n-3)}{R|x|^{n-1}} + \frac{n-1}{R|x|\rho^{n-2}}\right| \\ &\leq C\left[\frac{1}{R|x|^{n-1}} + \frac{1}{R|x|\rho^{n-2}}\right],\end{aligned} \tag{4.20}$$

no qual $C > 0$ e, finalmente,

$$\begin{aligned}\left|K(|x|)R^{-2}\right| &= \left|\left(\frac{1}{\rho^{n-2}} - \frac{1}{|x|^{n-2}}\right)\frac{1}{R^2}\right| \\ &\leq \frac{2}{R^2\rho^{n-2}},\end{aligned} \tag{4.21}$$

para $|x| > \rho$.

Substituindo (4.19), (4.20) e (4.21) em (4.18), segue que:

$$|\Delta\varphi_R(x)| \leq C\left[\frac{1}{R|x|\rho^{n-2}} + \frac{1}{R|x|^{n-1}} + \frac{1}{R^2\rho^{n-2}}\right] f(R^{-1}|x|), \tag{4.22}$$

no qual $C > 0$.

2º caso: Agora, suponha que $\rho < R \leq |x|$. Assim,

$$\frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho}.$$

Logo,

$$\frac{1}{R|x|\rho^{n-2}} \le \frac{1}{R^2\rho^{n-2}}, \tag{4.23}$$

e,

$$\frac{1}{R|x|^{n-1}} = \frac{R}{R^2|x|^{n-1}} \le \frac{|x|}{R^2|x|^{n-1}} = \frac{1}{R^2|x|^{n-2}} \le \frac{1}{R^2\rho^{n-2}}. \tag{4.24}$$

Então,

$$\begin{aligned} |\Delta\varphi_R(x)| &\le C\left[\frac{1}{R|x|\rho^{n-2}} + \frac{1}{R|x|^{n-1}} + \frac{1}{R^2\rho^{n-2}}\right] f(R^{-1}|x|) \\ &\le \frac{C}{R^2\rho^{n-2}} f(R^{-1}|x|), \end{aligned} \tag{4.25}$$

no qual $C > 0$.

Agora, para cada $R > \rho$, definimos:

$$\psi_R(t) = \psi(R^{-2}t). \tag{4.26}$$

Note que:

$$\partial_t\psi_R(t) = \partial_t\psi\left(R^{-2}t\right) = R^{-2}\psi'\left(R^{-2}t\right).$$

Desta forma,

$$\partial_t^2\psi_R(t) = R^{-4}\psi''\left(R^{-2}t\right).$$

Assim, segue que:

$$\begin{aligned} \left|\partial_t^2\psi_R(t)\right| + \left|\partial_t\psi_R(t)\right| &= R^{-4}\left|\psi''\left(R^{-2}t\right)\right| + R^{-2}\left|\psi'\left(R^{-2}t\right)\right| \\ &\le \left(R^{-4} + R^{-2}\right) f\left(R^{-2}t\right). \end{aligned}$$

Escolhendo ψ suficientemente suave, podemos supor que:

$$f(r)^p \le C\psi(r). \tag{4.27}$$

Para tanto, basta considerar $\psi = \Psi^l$, no qual $\Psi \in C_0^\infty([0,+\infty))$ não crescente, com $\Psi = 1$ em $[0,1]$ e $\Psi = 0$ em $[2,+\infty)$, escolhendo $(l-2)p \ge l$, ou seja, $l \ge 2\frac{p}{p-1}$.

Nosso objetivo é mostrar que o Problema (4.1) não possui solução global. Por contradição, assuma que existe solução global para o Problema (4.1), isto é, na Proposição 3.1, $T_m = +\infty$.

Para cada $R > \rho$, considere as integrais não negativas:

$$I_R = \int_G |u(t,x)|^p \varphi_R(x)\psi_R(t)\,dxdt \tag{4.28}$$

e

$$J_R = \int_{G\setminus([0,R^2]\times\overline{B_R})} |u(t,x)|^p \varphi_R(x)\psi_R(t)\,dxdt, \tag{4.29}$$

no qual $G = [0,+\infty)\times\Omega$.

Defina $\Phi(t,x) = \varphi_R(x)\psi_R(t)$ em (4.7). Assim:

$$\begin{aligned} I_R &= \int_G u(t,x)\left(\varphi_R(x)(\partial_t^2\psi_R(t)-\partial_t\psi_R(t))-\Delta\varphi_R(x)\psi_R(t)\right)dxdt \\ &+\int_G u(t,x)\left(\Delta\varphi_R(x)\partial_t\psi_R(t)\right)dxdt \\ &-\int_\Omega (u_1(x)+u_0(x))\,\varphi_R(x)dx+\int_\Omega u_0(x)\Delta\varphi_R(x)dx. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Veja que, se R for suficientemente grande, temos:

$$-\int_\Omega (u_1(x)+u_0(x))\,\varphi_R(x)-u_0(x)\Delta\varphi_R(x)dx \leq -\int_\Omega u_1(x)\varphi_R(x)dx. \tag{4.31}$$

De fato, se $u_0(x)=0, \forall x\in\Omega$, é imediato. Suponha que $u_0(x)$ não seja identicamente nula. Uma vez que R é suficientemente grande, é fácil perceber que $\varphi_R(x) = K(|x|)$, pois $R^{-1}|x|\leq 1$, e $\Delta\varphi_R(x)=0$ em $\overline{B_R}\cap\Omega$. Por hipótese, $u_0\in L^1(\Omega)$, assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_\Omega u_0(x)\Delta\varphi_R(x)dx = 0 \tag{4.32}$$

e

$$\lim_{R\to+\infty}\int_\Omega u_0(x)\varphi_R(x)dx = \int_\Omega u_0(x)K(|x|)dx > 0. \tag{4.33}$$

E isso garante a afirmação (4.31).

Defina:

$$D_R(t,x) = |\varphi_R(x)(\partial_t^2\psi_R(t)-\partial_t\psi_R(t))+\Delta\varphi_R(x)(\partial_t\psi_R(t)-\psi_R(t))|. \tag{4.34}$$

Assim, por (4.30), (4.31), (4.34) e o fato de que:

$$\int_\Omega u_1(x)\varphi_R(x)dx \geq 0 \tag{4.35}$$

por hipótese, temos:

$$\begin{aligned} I_R &\leq \int_G |u(t,x)|D_R(t,x)dxdt \\ &= \int_G |u(t,x)|\beta\beta^{-1}D_R(t,x)dxdt, \end{aligned} \tag{4.36}$$

com $\beta\neq 0$, observando que, por hipótese, $u_1(x)\geq 0$, $\forall x\in\Omega$. Perceba que $D_R(t,x)$ se anula em $[0,R^2]\times(\Omega\cap\overline{B_R})$, quando R é suficientemente grande, pois ψ é constante em $[0,1]$ e $|\Delta\varphi_R(x)| = 0$. Assim:

$$I_R \leq \int_{G\setminus([0,R^2]\times\overline{B_R})} |u(t,x)|\beta\beta^{-1}D_R(t,x)dxdt. \tag{4.37}$$

Usando Hölder, onde p e p' são conjugados, segue:

$$I_R \leq \left(\int_{G \setminus ([0,R^2] \times \overline{B_R})} |u(t,x)\beta|^p dxdt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_G |\beta^{-1} D_R(t,x)|^{p'} dxdt \right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{4.38}$$

Defina $\beta = (\varphi_R(x)\psi_R(t))^{\frac{1}{p}}$ e $\mathscr{U}_R$ o conjunto em que $\varphi_R(x)\psi_R(t)$ se anula. Agora, considere $\mathscr{U} = \bigcup_{R>\rho} \mathscr{U}_R$, assim segue que:

$$I_R \leq J_R^{\frac{1}{p}} \left(\int_{G \setminus \mathscr{U}} D_R(t,x)^{p'} (\varphi_R(x)\psi_R(t))^{\frac{-p'}{p}} dxdt \right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{4.39}$$

Vamos estimar $D_R(t,x)$. Por definição, seguem as igualdades abaixo:

$$\begin{aligned} \varphi_R(x)\partial_t^2 \psi_R(t) &= R^{-4} \varphi_R(x) \psi''(R^{-2}t), \\ \varphi_R(x)\partial_t \psi_R(t) &= R^{-2} \varphi_R(x) \psi'(R^{-2}t), \\ \Delta\varphi_R(x)\partial_t \psi_R(t) &= R^{-2} \Delta\varphi_R(x) \psi'(R^{-2}t), \\ \Delta\varphi_R(x)\psi_R(t) &= \Delta\varphi_R(x) \psi(R^{-2}t), \end{aligned} \tag{4.40}$$

assim, com alguma constante $C > 0$, obtemos que:

$$\begin{aligned} D_R(t,x) \leq\ & C(R^{-4} + R^{-2}) |\varphi_R(x)| (\psi_R(t))^{\frac{1}{p}} \\ & + C(R^{-2} + 1) |\Delta\varphi_R(x)| (\psi_R(t))^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Para $\rho < |x| \leq R$, temos que $\Delta\varphi_R(x) = 0$. Assim,

$$D_R(t,x) \leq C(R^{-4} + R^{-2}) |\varphi_R(x)| (\psi_R(t))^{\frac{1}{p}}. \tag{4.42}$$

Por definição, $\varphi_R(x) = K(|x|)\psi(R^{-1}|x|)$. Levando em consideração a referida região, $\psi(R^{-1}|x|) = 1$ e $\varphi_R(x) = K(|x|)$.

Primeiro, assuma que $K(|x|) \leq 1$. Como $\dfrac{1}{p} \in (0,1)$ obtemos:

$$K(|x|) \leq (K(|x|))^{\frac{1}{p}},$$

e, consequentemente,

$$|\varphi_R(x)| \leq |\varphi_R(x)|^{\frac{1}{p}}.$$

Agora, tome como verdade que $K(|x|) \geq 1$. Logo, $\dfrac{1}{K(|x|)} \leq 1$ e $\dfrac{1}{(K(|x|))^{\frac{1}{p}}} \leq 1$. Por (4.27), temos:

$$f(R^{-1}|x|) \leq C|\psi(R^{-1}|x|)|^{\frac{1}{p}} \leq C \frac{1}{|K(|x|)|^{\frac{1}{p}}} |\varphi_R(x)|^{\frac{1}{p}} \leq \tilde{C} |\varphi_R(x)|^{\frac{1}{p}}. \tag{4.43}$$

Ademais, por definição,

$$K(|x|) = \rho^{2-n} - |x|^{2-n} \leq \rho^{2-n} \leq C_1,$$

no qual $C_1 > 0$. A desigualdade (4.43) é importante para estabelecer que:

$$|\varphi_R(x)| = |K(|x|)||\psi(R^{-1}|x|)| \leq C_1 f(R^{-1}|x|) \leq \tilde{C}_1 |\varphi_R(x)|^{\frac{1}{p}}. \tag{4.44}$$

Sendo assim, concluímos que se $\rho < |x| \leq R$, então,

$$D_R(t,x) \leq C(R^{-4} + R^{-2})(\varphi_R(x)\psi_R(t))^{\frac{1}{p}}. \tag{4.45}$$

Para $R \leq |x|$, existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$, de modo que $C_2 \leq K(|x|) \leq C_1$. Assim, (4.43) e (4.44) são obtidas via raciocínio similar. Além disso, por (4.25) e (4.43), temos:

$$|\Delta\varphi_R(x)| \leq C_3 R^{-2} f(R^{-1}|x|) \leq \tilde{C}_3 R^{-2} |\varphi_R(x)|^{\frac{1}{p}}. \tag{4.46}$$

Por (4.41), (4.44) e (4.46), temos:

$$D_R(t,x) \leq C(R^{-4} + R^{-2})(\varphi_R(x)\psi_R(t))^{\frac{1}{p}}. \tag{4.47}$$

Portanto, por (4.39), obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} I_R &\leq J_R^{\frac{1}{p}} \left(\int_{G\backslash\mathcal{U}} (D_R(t,x))^{p'} (\varphi_R(x)\psi_R(t))^{\frac{-p'}{p}} dxdt \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq C J_R^{\frac{1}{p}} R^{-2} \left(\int_{G\backslash\mathcal{U}} (\varphi_R(x)\psi_R(t))^{\frac{p'}{p}} (\varphi_R(x)\psi_R(t))^{\frac{-p'}{p}} dxdt \right)^{\frac{1}{p'}}, \end{aligned} \tag{4.48}$$

no qual, usamos que $R^{-4} + R^{-2} \leq 2R^{-2}$, para R suficientemente grande.

Como $\psi_R(t) = \psi(R^{-2}t)$ e o suporte de $\psi(t)$ é $[0,2]$, temos que o suporte de $\psi_R(t)$ é $[0, 2R^2]$, com $t \in [0, +\infty)$. Além disso,

$$\varphi_R(x) = \tilde{\varphi}_R(|x|) = K(|x|)\psi(R^{-1}|x|) = 0,$$

se $R^{-1}|x| \geq 2$. Logo, suporte de $\varphi_R(x) = B_{2R}\backslash B_\rho$, pois $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash \overline{B}_\rho$. Então,

$$\begin{aligned} &\int_{G\backslash\mathcal{U}} (\varphi_R(x)\psi_R(t))^{\frac{p'}{p}} (\varphi_R(x)\psi_R(t))^{\frac{-p'}{p}} dxdt \\ &\leq \int_{B_{2R}\backslash B_\rho} \int_0^{2R^2} 1\, dtdx \\ &= 2R^2 \int_{B_{2R}\backslash B_\rho} 1\, dx \\ &= 2R^2 \int_\rho^{2R} \int_{|x|=s} 1\, dSds \\ &= 2\tilde{C}R^2 \int_\rho^{2R} 1\, ds \\ &\leq CR^2 R^n. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Logo, temos:

$$I_R \leq C J_R^{\frac{1}{p}} R^{-2+\frac{n+2}{p'}}, \tag{4.50}$$

para R suficientemente grande. Como, por hipótese, se $n \geq 3$, então, $p \leq 1 + \frac{2}{n}$, veja que:

$$\begin{aligned} p \leq 1 + \frac{2}{n} \Rightarrow & \quad -\frac{pn}{2} \geq -\frac{n}{2} - 1 \\ \Rightarrow & \quad p \geq \frac{pn}{2} + p - \frac{n}{2} - 1 \\ \Rightarrow & \quad \frac{p}{p-1} \geq \frac{n}{2} + 1 \\ \Rightarrow & \quad p' \geq \frac{n}{2} + 1 \\ \Rightarrow & \quad 2p' \geq n + 2 \\ \Rightarrow & \quad -2 + \frac{n+2}{p'} \leq 0, \end{aligned} \tag{4.51}$$

assim, temos que $R^{-2+\frac{n+2}{p'}}$ é limitado. Portanto, para algum $C > 0$, temos:

$$I_R \leq C J_R^{\frac{1}{p}}. \tag{4.52}$$

Por construção, $J_R \leq I_R$, assim, $I_R \leq C J_R^{\frac{1}{p}} \leq C I_R^{\frac{1}{p}}$, isto é, $I_R \leq C^{p'}$. Portanto, I_R é limitado e, consequentemente, temos:

$$\int_G |u(t,x)|^p dxdt = \lim_{R \to +\infty} I_R \tag{4.53}$$

é finito, ou seja, $u \in L^p(G)$.

Finalizando o caso $n \geq 3$, perceba que, se $R \to +\infty$, então, $J_R \to 0$, pois

$$med(G \backslash [0, R^2] \times \overline{B_R}) \to 0,$$

quando $R \to +\infty$. E, por consequência, $I_R \to 0$, quando $R \to +\infty$. Disto, concluímos que $u(t,x) = 0$ em $G = [0, +\infty) \times \Omega$, contradizendo a Proposição 3.1. Portanto, se $n \geq 3$, o Problema (4.1) não possui solução global.

Agora, considere $n = 2$. Neste caso, faremos uma mudança genuína na função teste utilizada anteriormente. Aqui, considere que a função teste adequada para a conclusão do resultado é dada por:

$$\tilde{\varphi}_R(r) = K(r)\psi\left(R^{-1}r\right), \quad K(r) = (\log r - \log \rho), \tag{4.54}$$

no qual $r = |x|$.

Semelhante ao realizado anteriormente, vamos verificar algumas propriedades que φ_R satisfaz. Primeiramente, veja: $\varphi_R\big|_{\partial\Omega} = 0$, isto ocorre, pois, como no caso $n \geq 3$, $x \in \partial\Omega$, implica que $|x| = \rho$, fazendo com que $K(|x|) = 0$. Por outro lado, se $\rho < |x| \leq R$, por (4.14), temos:

$$\Delta\varphi_R(x) = K''(|x|) + \frac{K'(|x|)}{|x|}. \tag{4.55}$$

Como, $K(|x|) = \log|x| - \log\rho$, segue que:

$$K'(|x|) = \frac{1}{|x|} \quad \text{e} \quad K''(|x|) = -\frac{1}{|x|^2}. \tag{4.56}$$

Então,

$$\Delta\varphi_R(x) = -\frac{1}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2} = 0. \tag{4.57}$$

Temos também que, se $|x| \geq 2R$, então, $R^{-1}|x| \geq 2$ e, assim, $\psi(R^{-1}|x|) = 0$. Desta forma, $\varphi_R(x) = 0$.

Além disso, como em (4.18), se $|x| \geq R$, segue que:

$$\begin{aligned} |\Delta\varphi_R(x)| \leq & \left[\left|K''(|x|) + \frac{K'(|x|)}{|x|}\right|\right. \\ & + \left|2K'(|x|)R^{-1} + \frac{K(|x|)R^{-1}}{|x|}\right| \\ & + \left.\left|K(|x|)R^{-2}\right|\right] f\left(R^{-1}|x|\right). \end{aligned} \tag{4.58}$$

Para dar continuidade a estimativa acima, faremos alguns cálculos individualmente e usaremos (4.56). Veja:

$$\left|K''(|x|) + \frac{K'(|x|)}{|x|}\right| = 0 \tag{4.59}$$

e

$$\begin{aligned} \left|2K'(|x|)R^{-1} + \frac{K(|x|)R^{-1}}{|x|}\right| &= \left|\frac{2}{R|x|} + \frac{\log|x|}{R|x|} - \frac{\log\rho}{R|x|}\right| \\ &\leq C\left[\frac{|\log|x||}{R|x|} + \frac{1}{R|x|}\right], \end{aligned} \tag{4.60}$$

e, por fim,

$$\left|K(|x|)R^{-2}\right| = \left|\frac{\log|x| - \log\rho}{R^2}\right| \leq C\frac{|\log|x||}{R^2}, \tag{4.61}$$

para alguma contante $C > 0$, R suficientemente grande e $|x| \geq R$.

Assim, substituindo (4.59), (4.60) e (4.61) em (4.58), segue que:

$$\begin{aligned} |\Delta\varphi_R(x)| &\leq Cf\left(R^{-1}|x|\right)\left[\frac{|\log|x||}{R|x|} + \frac{1}{R|x|} + \frac{|\log|x||}{R^2}\right] \\ &\leq Cf\left(R^{-1}|x|\right)\left[\frac{|\log|x||}{R^2} + \frac{1}{R^2} + \frac{|\log|x||}{R^2}\right] \\ &\leq Cf\left(R^{-1}|x|\right)R^{-2}(1 + 2|\log(2R)|) \\ &\leq Cf\left(R^{-1}|x|\right)R^{-2}(1 + 2|\log 2 + \log R|) \\ &\approx Cf\left(R^{-1}|x|\right)R^{-2}\log R, \end{aligned} \tag{4.62}$$

para R suficientemente grande, tal que $R \leq |x| \leq 2R$.

Como em (4.39),

$$I_R \leq J_R^{\frac{1}{p}} \left(\int_{G \setminus \mathcal{U}} (D_R(t,x))^{p'} (\varphi_R(x)\psi_R(t))^{\frac{-p'}{p}} dxdt \right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{4.63}$$

Como visto em (4.42), se $\rho < |x| \leq R$, então,

$$D_R(t,x) \leq C(R^{-4} + R^{-2})|\varphi_R(x)|(\psi_R(t))^{\frac{1}{p}}. \tag{4.64}$$

E, $\varphi_R(x) = K(|x|)$. Analogamente ao caso $n \geq 3$, se $K(|x|) \leq 1$, $|\varphi_R(x)| \leq |\varphi_R(x)|^{\frac{1}{p}}$. Assim, para R suficientemente grande, $|\varphi_R(x)| \leq \log R |\varphi_R(x)|^{\frac{1}{p}}$. Por outro lado, se $K(|x|) \geq 1$, se verifica que:

$$\begin{aligned} |\varphi_R(x)| &= |K(|x|)||\psi(R^{-1}|x|)| \\ &\leq C_1 \left(|\log|x|| + |\log\rho|\right) f(R^{-1}|x|) \\ &\leq \tilde{C} \log R |\varphi_R(x)|^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Logo, se $\rho < |x| \leq R$, obtemos:

$$D_R(t,x) \leq C(R^{-4} + R^{-2}) \log R (\varphi_R(x)\psi_R(t))^{\frac{1}{p}}. \tag{4.66}$$

Agora, para $R \leq |x| \leq 2R$, temos:

$$\log R - \log\rho \leq \log|x| - \log\rho \leq \log(2R) - \log\rho. \tag{4.67}$$

Para $R \gg 1$, $1 \leq \log R - \log\rho$. Assim, em vista de (4.67), temos que $1 \leq K(|x|)$, isto indica que $\dfrac{1}{|K(|x|)|^{\frac{1}{p}}} \leq 1$. Por um raciocínio semelhante, (4.43) é verificada.

E, por (4.43) e (4.62), temos:

$$|\Delta\varphi_R(x)| \leq CR^{-2} \log R |\varphi_R(x)|^{\frac{1}{p}}. \tag{4.68}$$

Usando (4.43) e o fato de:

$$K(|x|) \leq \log(2R) - \log\rho \leq C_2 \log R,$$

obtemos:

$$|\varphi_R(x)| = |K(|x|)||\psi(R^{-1}|x|)| \leq C_2 \log R f(R^{-1}|x|) \leq \tilde{C}_1 \log R |\varphi_R(x)|^{\frac{1}{p}}. \tag{4.69}$$

Assim, por (4.41), (4.68) e (4.69) temos que:

$$D_R(t,x) \leq C(R^{-4} + R^{-2}) \log R (\varphi_R(x)\psi_R(t))^{\frac{1}{p}}. \tag{4.70}$$

Finalmente, se $|x| \geq 2R$, então, $R^{-1}|x| \geq 2$. Assim, $\psi(R^{-1}|x|) = 0$, o que implica em $\varphi_R(x) = \Delta\varphi_R(x) = 0$. Desta forma, $D_R(t,x) = 0$ e isto também assegura a desigualdade (4.70).

Logo usando o mesmo raciocínio empregado entre (4.48) e (4.49), podemos obter:

$$I_R \leq CJ_R^{\frac{1}{p}} R^{-2+\frac{4}{p'}} \log(R). \tag{4.71}$$

Consequentemente, temos:

$$\int_G |u(t,x)|^p dxdt = \lim_{R \to +\infty} I_R = 0. \tag{4.72}$$

Isto, novamente, implica que $u(t,x) = 0$, $\forall (t,x) \in G = [0,+\infty) \times \Omega$. O que contradiz a Proposição 3.1.

Portanto, se $n \geq 2$, o Problema (4.1), não possui solução global. □

Note que temos a presença do termo $\log R$ em (4.71), sendo assim, não podemos incluir o valor crítico $p = 2$ no enunciado, pois se assim fosse, $I_R \to +\infty$, quando $R \to +\infty$.

Agora, apresentaremos nosso último resultado, o que finaliza esta dissertação. No entanto, preliminarmente, identificaremos por $L^{2,1}(\Omega)$ o seguinte conjunto:

$$L^{2,1}(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \quad \backslash \quad |x| f \in L^2(\Omega) \right\}. \tag{4.73}$$

Teorema 4.3. *Seja $n \geq 3$. Suponha que a condição inicial $u_0 \in L^1(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ em (4.1) seja tal que $u_0(x) \geq 0$, para qualquer $x \in \Omega$. Além disso, assuma que existe uma constante $\varepsilon > 0$ de modo que o dado inicial $u_1 \in L^{2,1}(\Omega)$ em (4.1) satisfaça:*

$$u_1(x) \geq \varepsilon |x|^{-1-\frac{n}{2}} (\log(1+|x|))^{-1} \qquad \forall x \in \Omega.$$

Assim, se $1 < p < 1 + \dfrac{4}{n+2}$, então, não existe solução global para o Problema (4.1), isto é, $T_m < +\infty$.

Demonstração. Seja $R > 2\rho$. Defina φ_R como (4.9). Daí, para qualquer $x \in \Omega$, com:

$$2\rho < |x| \leq R, \tag{4.74}$$

temos que $\varphi_R(x)$, satisfaz:

$$\varphi_R(x) = K(|x|)\psi(R^{-1}|x|) = K(|x|) = \rho^{2-n} - |x|^{2-n} \geq c(\rho, n), \tag{4.75}$$

no qual $c(\rho, n) := \rho^{2-n} - (2\rho)^{2-n}$.

Pela hipótese, para todo $x \in \Omega$, temos:

$$u_1(x) \geq \varepsilon |x|^{-1-\frac{n}{2}} (\log(1+|x|))^{-1}. \tag{4.76}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_1(x)\varphi_R(x)dx &\geq \varepsilon\int_\Omega |x|^{-1-\frac{n}{2}}(\log(1+|x|))^{-1}\varphi_R(x)dx\\ &\geq c(\rho,n)\varepsilon\int_{\frac{R}{2}<|x|\leq R}|x|^{-1-\frac{n}{2}}(\log(1+|x|))^{-1}dx\\ &\geq c(\rho,n)\varepsilon\int_{\frac{R}{2}<|x|\leq R}R^{-1-\frac{n}{2}}(\log(1+R))^{-1}dx\\ &\geq c(\rho,n)\varepsilon R^{-1-\frac{n}{2}}(\log(1+R))^{-1}\int_{\frac{R}{2}<|x|\leq R}1dx.\end{aligned}\tag{4.77}$$

Note que:

$$\int_{\frac{R}{2}<|x|\leq R}1dx = C_1R^n,\tag{4.78}$$

no qual $C_1>0$.

Concluímos assim que:

$$\int_\Omega u_1(x)\varphi_R(x)dx \geq C\varepsilon R^{\frac{n}{2}-1}(\log(1+R))^{-1},\tag{4.79}$$

com $C>0$. Logo,

$$-\int_\Omega u_1(x)\varphi_R(x)dx \leq -C\varepsilon R^{\frac{n}{2}-1}(\log(1+R))^{-1},\tag{4.80}$$

com $C>0$.

Pela demonstração do Teorema 4.2, mais precisamente, no caso $n\geq 3$, sabemos que:

$$\begin{aligned}&\int_G u(t,x)\left(\varphi_R(x)(\partial_t^2\psi_R(t)-\partial_t\psi_R(t))+\Delta\varphi_R(x)\psi_R(t)\right)dxdt\\ &\quad+\int_G u(t,x)\left(\Delta\varphi_R(x)\partial_t\psi_R(t)\right)dxdt\\ &\leq C_1 I_R^{\frac{1}{p}}R^{-2+\frac{n+2}{p'}},\end{aligned}\tag{4.81}$$

com $C_1>0$.

Utilizando (4.80) e (4.81), em (4.30), obtemos:

$$I_R \leq C_1R^{-2+\frac{n+2}{p'}}I_R^{\frac{1}{p}} - C\varepsilon R^{\frac{n}{2}-1}(\log(1+R))^{-1},\tag{4.82}$$

para qualquer R suficientemente grande, tal que $R>4\rho$.

Por outro lado, perceba que, a partir da desigualdade de Young, temos:

$$C_1R^{-2+\frac{n+2}{p'}}I_R^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C_1^{p'}}{p'}R^{-2p'+n+2}+\frac{1}{p}I_R.\tag{4.83}$$

Então, temos:

$$I_R\left(1-\frac{1}{p}\right) \leq \frac{C_1^{p'}}{p'}R^{-2p'+n+2} - C\varepsilon R^{\frac{n}{2}-1}(\log(1+R))^{-1}.\tag{4.84}$$

E, uma vez que p e p' são conjugados, temos que:

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p'}.$$

Portanto,

$$I_R \leq C_2 R^{-2p'+n+2} - Cp'\varepsilon R^{\frac{n}{2}-1}(\log(1+R))^{-1}. \tag{4.85}$$

Pela hipótese, temos que $p<1+\dfrac{4}{n+2}$. Desta forma,

$$\begin{aligned} p<\frac{n+6}{n+2} &\Rightarrow \frac{1}{p}>\frac{n+2}{n+6} \\ &\Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}>\frac{n+2}{n+6}+\frac{1}{p'} \\ &\Rightarrow 1>\frac{n+2}{n+6}+\frac{1}{p'} \\ &\Rightarrow 1-\frac{1}{p'}>\frac{n+2}{n+6} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{p'}>\frac{n+2}{n+6}-1 \\ &\Rightarrow \quad -\frac{1}{p'}>\frac{n+2-n-6}{n+6}=\frac{-4}{n+6} \\ &\Rightarrow \quad -p'<-\frac{(n+6)}{4} \\ &\Rightarrow -2p'<-\frac{n}{2}-3. \end{aligned} \tag{4.86}$$

Assim,

$$-2p'+n+2<-\frac{n}{2}-3+n+2=\frac{n}{2}-1. \tag{4.87}$$

Logo,

$$-2p'+n+2<\frac{n}{2}-1. \tag{4.88}$$

Considere $\alpha>0$ suficientemente pequeno, de modo que:

$$0<\alpha<\left(\frac{n}{2}-1\right)-(-2p'+n+2). \tag{4.89}$$

Agora, seja $\tilde{C}>0$ tal que $\log(1+R)\leq \tilde{C}R^{\alpha}$. Portanto, temos:

$$-[\log(1+R)]^{-1} \leq -\tilde{\tilde{C}}R^{-\alpha}, \tag{4.90}$$

no qual $\tilde{\tilde{C}}>0$.

Assim, temos:

$$\begin{aligned} I_R &\leq C_1 R^{-2p'+n+2} - Cp'\varepsilon R^{\frac{n}{2}-1}\tilde{\tilde{C}}R^{-\alpha} \\ &\leq C_1 R^{-2p'+n+2} - C_2 R^{\frac{n}{2}-1-\alpha}. \end{aligned} \tag{4.91}$$

Como $\dfrac{n}{2}-1-\alpha>-2p'+n+2$, a segunda parcela domina a primeira quando $R\to+\infty$. Daí, $I_R<0$, para R suficientemente grande. Sendo assim, segue que a desigualdade (4.85) é falsa. Portanto, $T_m<+\infty$ na Proposição 3.1, concluindo assim esta demonstração. □

BIBLIOGRAFIA

[1] ADAMS, E. A. **Sobolev Spaces**. Academic Press, New York, 1975.

[2] AGMON, S.; DOUGLIS, H.; NIRENBERG, L. **Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II**. Comm. Pure Appl. Math., 17, 35-92, 1964.

[3] BREZIS, H. **Análisis Funcional Teoria y Aplicaciones**. Alianza Editorial, Madrid, 1983.

[4] CHARÃO, R. C.; DA LUZ, C. R. **Asymptotic Properties for a Semilinear Plate Equation in Unbounded Domains**. Journal of Hyperbolic Differential Equations-Vol. 6, No. 2 (2009) 269–294.

[5] CHARÃO, R. C.; IKEHATA, R. **Energy decay rates of elastic waves in unbounded domain with potential type of damping**. J. Math. Anal. Appl. 380 (2011) 46–56.

[6] D'ABBICCO, M. **A benefit from the L 1 smallness of initial data for the semilinear wave equation with structural damping, in Current Trends in Analysis and its Applications**. 2015, 209-216. Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Krakow. Eds V. Mityushev and M. Ruzhansky, http://www.springer.com/br/book/9783319125763.

[7] D'ABBICCO, M. **L1 -L1 estimates for a doubly dissipative semilinear wave equation**. Nonlinear Differ. Equ. Appl. 24:5 (2017), 2307-2336.

[8] D'ABBICCO, M.; EBERT, M. R. **A new phenomenon in the critical exponent for structurally damped semi-linear evolution equations**. Nonlinear Analysis 149 (2017), 1-40.

[9] D'ABBICCO, M.; EBERT, M. R. **An application of Lp - Lq decay estimates to the semilinear wave equation with parabolic-like structural damping**. Nonlinear Analysis 99 (2014), 16-34.

[10] D'ABBICCO, M.; EBERT, M. R. **Diffusion phenomena for the wave equation with structural damping in the Lp -Lq framework**. J. Diff. Eqns 256 (7) (2014), 2307-2336.

[11] D'ABBICCO, M.; IKEHATA R.; TAKEDA, H. **Critical Exponent for Semi-Linear Wave Equations with Double Damping Terms in Exterior Domains**. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 26 (2019), no. 6, Paper No. 56.

[12] D'ABBICCO, M.; REISSIG, M. **Semilinear structural damped waves**. Math. Methods Appl. Sci. 37(11)(2014), 1570-1592.

[13] EBERT, M. R. ; DA LUZ, C. R.; PALMA, M. F. G. **The influence of data regularity in the critical exponent for a class of semilinear evolution equations**. Nonlinear Differ. Equ. Appl. (2020) 27:44.

[14] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. American Mathematical Society, 2002.

[15] GOMES, A. M. **Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução**. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1985.

[16] IKEHATA, R. **Asymptotic profiles for wave equations with strong damping**. J. Diff. Eqns 257 (2014), 2159-2177.

[17] IKEHATA, R.; MATSUYAMA, T. **L2-behaviour of solutions to the linear heat and wave equations in exterior domains**. Sci. Math. Japon. 55 (2002), 33-42.

[18] IKEHATA, R.; SAWADA, A. **Asymptotic profiles of solutions for wave equations with frictional and viscoelastic damping terms**. Asymptotic Anal. 98 (2016), 59-77.

[19] IKEHATA, R.; TAKEDA, H. **Asymptotic profiles of solutions for structural damped wave equations**. J. Dynamics Diff. Eqns. 31, 537 (2019).

[20] IKEHATA, R.; TANIZAWA, K. **Global existence of solutions for semilinear damped wave equations in RN with noncompactly supported initial data**. Nonlinear Analysis 61 (2005) 1189 – 1208.

[21] IKEHATA, R.; TODOROVA, G.; YORDANOV, B. **Wave equations with strong damping in Hilbert spaces**. J. Diff. Eqns 254 (2013), 3352-3368.

[22] KESAVAN, S. **Topics in functional analysis and applications**. Wiley Eastern Limited, Bangalore, 1989.

[23] MEDEIROS, L. A.; RIVERA, P. H. **Espaços de Sobolev e aplicações às equações diferenciais parciais**. Textos de Métodos Matemáticos nº 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1975.

[24] MEDEIROS, L. A.; RIVERA, P. H. **Iniciação aos espaços de Sobolev**. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

[25] PAZY, A. **Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations**. Springer-Verlag, New York, 1983.

[26] PONCE, G. **Global existence of small solutions to a class of nonlinear evolution equations**. Nonlinear Anal. 9(5) (19), 399-418.

[27] SHIBATA, Y. **On the rate of decay of solutions to linear viscoelastic equation**. Math. Meth. Appl. Sci. 23 (2000), 203-226.

[28] TODOROVA, G.; YORDANOV, B. **Critical Exponent for a Nonlinear Wave Equation with Damping**. Journal of Differential Equations 174, 464-489 (2001).

Apêndices

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DE LEMA AUXILIAR

Este apêndice apresenta um resultado a fim de justificar uma desigualdade utilizada no Capítulo 3 da presente dissertação.

Lema A.1. *Seja* $n=2$ *e* $2<p<+\infty$ *ou* $n=3,4,5$ *e* $1+\frac{4}{n+2}<p\leq\frac{n}{n-2}$*. Suponha que as condições iniciais* $[u_0,u_1]\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ *satisfaçam*

$$\mathscr{I}_0^2 := \|e^{|\cdot|^2/4}u_1\|^2+\|e^{|\cdot|^2/4}\nabla u_0\|^2+\|e^{|\cdot|^2/4}u_0\|^2 \ll 1.$$

Além disso, assuma que $M(t)\in C([0,T_m))$ *seja uma função não-negativa e*

$$M(t)\leq C\mathscr{I}_0+M(t)^{\frac{p+1}{2}}+M(t)^p,$$

onde $C>0$*. Se* $\mathscr{I}_0$ *for suficientemente pequeno, então,* $M(t)\leq C\mathscr{I}_0$*,* $\forall t\in[0,T_m)$*.*

Demonstração. Seja $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$. Defina:

$$F(M)=C\mathscr{I}_0+M^{\frac{p+1}{2}}+M^p-M,$$

então, F é contínua e

$$F'(M)=\frac{p+1}{2}M^{\frac{p-1}{2}}+pM^{p-1}-1.$$

Seja $a=\dfrac{p-1}{2}>0$, pois $p>1$. Assim,

$$F'(M)=(a+1)M^a+(2a+1)M^{2a}-1.$$

Para encontrar os pontos críticos de F devemos resolver a equação:

$$(a+1)M^a+(2a+1)M^{2a}-1=0.$$

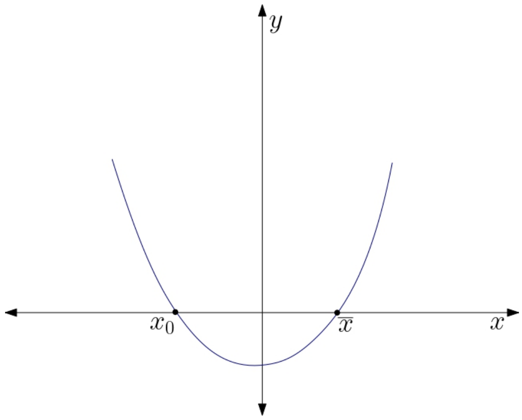
Seja $x=M^a$, então,

$$(2a+1)x^2+(a+1)x-1=0. \tag{A.1}$$

Desta forma,

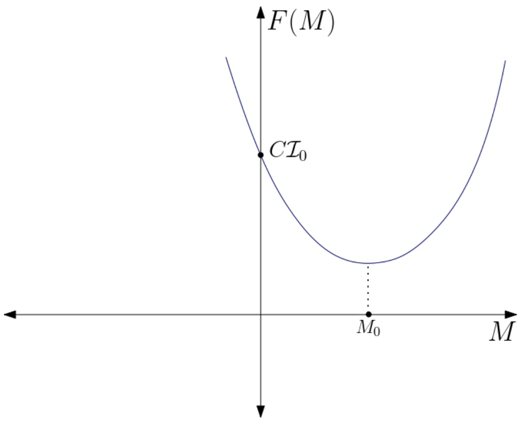
$$x=\frac{-(a+1)\pm\sqrt{(a+1)^2+4(2a+1)}}{2(2a+1)}.$$

Assim, ($A.1$) possui duas raízes reais e distintas, sendo uma positiva e outra negativa. Denotaremos por $\overline{x}$ a raiz positiva. Note que ($A.1$) possui concavidade voltada para cima:

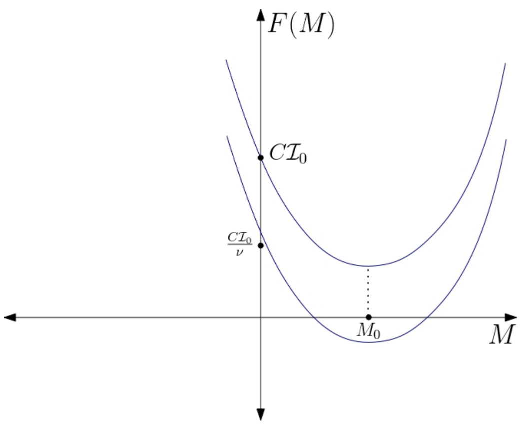


Desta forma, para $x \in [0, \overline{x})$ temos que $F'(M) < 0$ e se $x \in (\overline{x}, +\infty)$, então, $F'(M) > 0$, o que mostra que $\overline{x} = \overline{M}^a$ é um ponto de mínimo. Vamos denotar tal ponto por M_0.

Como $F(0) = C\mathscr{I}_0 > 0$, o gráfico de F é da forma:



Considere $F_\nu(M) = F(M) - \left(C\mathscr{I}_0 - \frac{C\mathscr{I}_0}{\nu}\right) = \frac{C\mathscr{I}_0}{\nu} + M^{\frac{p+1}{2}} + M^p - M.$



Desta forma, para ν suficientemente grande, concluímos que

$$F_\nu(M_0) < 0.$$

Em outras palavras, para ε suficientemente pequeno, temos que

$$F(M_0) < 0,$$

desde que $0 < \mathscr{I}_0 < \varepsilon$.

Agora, note que $M(t)$ é contínua e por definição $M(t) \geq 0$. Ademais, temos que $F(M(t)) \geq 0$, para todo $t \in [0, T_m)$.

Portanto, se $0 < \mathscr{I}_0 < \varepsilon$, pela continuidade de $M(t)$ existem duas possibilidades:

$$\begin{aligned} M(t) < M_0, &\quad \text{para todo} \quad t \in [0, T_m); \\ M(t) > M_0, &\quad \text{para todo} \quad t \in [0, T_m). \end{aligned}$$

Para $M(0) = C\mathscr{I}_0 < M_0$, ou seja, para $\mathscr{I}_0 < \min\left\{\varepsilon, \frac{M_0}{C}\right\}$, a primeira possibilidade ocorre. $\square$