UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Filipe Hernandes Azenha Pilon

Atratores Exponenciais para Semigrupos em Espaços de Banach

Florianópolis
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pilon, Filipe
Atratores exponenciais para semigrupos em espaços de Banach / Filipe Pilon ; orientador, Matheus Cheque Bortolan, 2022.
75 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Atratores exponenciais. 3. Atratores Globais. 4. Semigrupos k dissipativos. 5. Dimensão fractal. I. Cheque Bortolan, Matheus . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Filipe Hernandes Azenha Pilon

Atratores Exponenciais para Semigrupos em Espaços de Banach

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Matheus Cheque Bortolan,
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Éder Ritis Aragão Costa,
Universidade de São Paulo

Profª. Drª. Giovana Siracusa Gouveia
Universidade Federal de Sergipe

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Daniel Goncalves
Data: 15/03/2022 12:12:27-0300
CPF: 017.022.459-77
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Matheus Cheque Bortolan
Data: 15/03/2022 11:49:00-0300
CPF: 337.007.338-28
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Matheus Cheque Bortolan, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2022.

.

Dedico esta dissertação à minha família, aos meus professores e ao meu grande amor, Jádina Amaro.

Agradecimentos

Expresso aqui a minha gratidão a meus familiares e a todos os profissionais do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina pelo apoio que me proporcionaram ao longo da minha jornada acadêmica. Ao meu orientador, professor Matheus Cheque Bortolan, que é um excelente profissional, dedicado e responsável. Gostaria também de agradecer aos membros da banca examinadora pelos comentários e avaliações.

Resumo

Nesse trabalho descrevemos um método de construção de atratores exponenciais para semigrupos, usando como base o conceito de semigrupos κ-dissipativos definidos em [22]. Aplicamos os resultados abstratos desenvolvidos para mostrar a existência de um atrator exponencial para uma equação da onda semilinear amortecida.

Palavras-chave: atratores exponenciais, semigrupos κ-dissipativos, dimensão fractal, atratores globais, dimensão de Hausdorff.

Abstract

In this work we describe a method for the construction of exponencial attractors for semigroups, using as basis the concept of κ-dissipative semigroups defined in [22]. We apply the abstract developed results to show the existence of an exponential attractor to a damped semilinear wave equation.

Keywords: exponential attractors, κ-dissipative semigroups, fractal dimension, global attractors, Hausdorff dimension.

Sumário

Introdução

O atrator global é o objeto de maior importância no estudo da dinâmica assintótica de um semigrupo T, é extensivamente estudado na literatura (veja, por exemplo, [15, 21]), porém tem suas limitações. A principal delas é que não há, em geral, informações quantitativas sobre a *taxa de atração* dos conjuntos limitados para o atrator.

Com esse problema da taxa de atração em mente, surgiram as *variedades inerciais*, apresentadas por Foias, Sell and Temam em 1988 através do trabalho [12]. O conjunto $\mathcal{M}$ é uma variedade inercial do semigrupo T, que possui um atrator global $\mathcal{A}$, se é uma variedade Lipschitz de dimensão finita que contém $\mathcal{A}$, é positivamente invariante (isto é, $T(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ para todo $t \geqslant 0$) e atrai *exponencialmente* os subconjuntos limitados de X. A construção de tal variedade se baseia em condições difíceis de serem verificadas, apesar de já estar estabelecida para uma grande quantidade de equações em dimensão 1 e 2 (é um problema em aberto para as equações de Navier-Stokes em dimensão 2, e para as equações amortecidas de Sine-Gordon sua inexistência foi provada em [18]).

Tendo em vista a dificuldade de se obter variedades inerciais, Eden et. al. [10] em 1994 definiram o conceito de *atrator exponencial*, que é um conjunto compacto, positivamente invariante que atrai exponencialmente os subconjuntos limitados de X, e possuem *dimensão fractal finita* (veja a Seção 1.3 para o conceito de dimensão fractal). Quando tal atrator exponencial existe, existe também o atrator global para o semigrupo, e esse atrator global está contido no atrator exponencial e possui dimensão fractal finita (veja a Proposição 2.2). Na literatura, muitos trabalhos sugerem que a grande maioria dos semigrupos que possuem atrator global com dimensão fractal finita também possuem um atrator exponencial (mas veremos aqui que um resultado abstrato nesse sentido precisa de hipóteses adicionais sobre o semigrupo em questão). A hipótese da finitude da dimensão fractal é fruto do Teorema 1.20, que garante que nessa situação podemos projetar injetivamente tal conjunto num espaço de dimensão finita, o que mostra que o semigrupo, quando restrito ao atrator, define um sistema dinâmico finito dimensional.

Assim, esse trabalho está focado no problema de exibir um método de construção de atratores exponenciais para semigrupos (discretos) e usar esse método, juntamente com o conceito de *semigrupos κ-dissipativos* (introduzido em [22]), para obter um atrator exponencial para a equação da onda semilinear amortecida, dada por

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) + u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + f(u(x,t)) = g(x), \ x \in \Omega, \ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \ , \ u_t(x,0) = u_1(x), \ x \in \Omega \\ u(x,t) = 0 \ , \ x \in \partial\Omega \ , \ t \geqslant 0, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio (aberto e conexo) limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave. Para isso, dividimos essa tarefa em três partes:

Capítulo 1. Preliminares

Aqui definimos formalmente o conceito de semigrupos e atratores globais num espaço métrico, apresentando (sem demonstração) o principal resultado de caracterização de semigrupos que possem um atrator global. Definimos e apresentamos também os conceitos de *dimensão de Hausdorff* e *dimensão fractal*, juntamente com resultados (com provas) necessários para o restante do trabalho, além do Teorema 1.20 e do Corolário 1.21, que são as principais motivações para o estudo de conjuntos compactos com dimensão fractal finita. Esse capítulo, diferentemente dos demais, não entra em detalhes das teorias apresentadas, funcionando apenas como uma base de definições e notações que serão utilizadas no restante do texto. Por esse motivo, escolhemos apresentá-lo de uma maneira bastante concisa, com o Teorema 1.20 (junto com a teoria necessária para obtê-lo) sendo a única exceção.

Capítulo 2. Atratores exponenciais

Começamos esse capítulo definindo o conceito de *atrator exponencial* e relacionamos a sua existência com a existência do atrator global com dimensão fractal finita, através da Proposição 2.2. Com isso, apresentamos o conceito de *semigrupo discreto* e relacionamos a existência de atratores exponenciais de semigrupos discretos e semigrupos contínuos. Para obter a finitude da dimensão fractal do atrator global de um semigrupo discreto, obtemos uma estimativa para essa dimensão na Seção 2.2. O tópico principal desse capítulo é a Seção 2.3, baseada em [23], na qual apresentamos um método de construção de atratores exponenciais para semigrupos discretos, sob certas hipóteses.

Capítulo 3. Semigrupos κ-dissipativos

Baseados em [22], apresentamos o conceito de semigrupos κ-dissipativos, como isso se relaciona com a existência de atrator global, e condições suficientes para obtermos semigrupos κ-dissipativos. Como passo intermediário entre os atratores globais e os atratores exponenciais, obtemos um método de construção de conjuntos compactos, positivamente invariantes e com taxa de atração exponencial, porém *não necessariamente* com dimensão fractal finita (veja Subseção 3.2.3). Existem exemplos (veja o Exemplo 3.14) nos quais tal construção gera um conjunto com dimensão fractal infinita, mas sob certas condições (dadas no Lema 3.15, e válidas para uma grande classe de problemas) é possível mostrar a finitude da dimensão de Hausdorff (veja o Teorema 3.16). Adicionando uma condição de diferenciabilidade (um pouco mais restritiva que as condições do Lema 3.15) é possível mostrar que tal construção gera um atrator exponencial, desde que o atrator global tenha dimensão fractal finita. Com todos esses resultados, na Seção 3.3 somos capazes de mostrar a existência de um atrator exponencial para a equação da onda semilinear amortecida apresentada previamente, o que conclui o nosso trabalho.

A fim de manter o trabalho limpo, apresentamos no Apêndice alguns resultados que merecem estar descritos, mas que atrapalhariam a leitura do texto caso fossem apresentados diretamente no trabalho. Damos principal ênfase ao Teorema A.11, que é essencial para a demonstração do Teorema 1.20.

Esperamos que o trabalho descreva um caminho coeso para a construção de atratores exponenciais de equações de evolução, que desperte no leitor o mesmo interesse que despertou em nós, e que possa ser usado como base para estudos futuros em outras equações, e possa ser estendido para o caso não-autônomo de processos de evolução.

1 Preliminares

1.1 Semigrupos e atratores globais

Nesse capítulo apresentamos brevemente as definições e os resultados básicos sobre semigrupos em espaços métricos e atratores globais para tais semigrupos (para mais detalhes veja, por exemplo, [15]). Para isso, consideramos (X, d) um espaço métrico, que denotaremos simplesmente por X quando não houver confusão, e $C(X)$ o conjunto das funções contínuas de X em X. Para um subconjunto A de X, $\overline{A}$ representa o **fecho** de A.

Um **semigrupo** em X é uma família $T = \{T(t) \colon t \geqslant 0\} \subset C(X)$ satisfazendo:

(i) $T(0)x = x$ para todo $x \in X$;

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todos $t, s \geqslant 0$;

(iii) a aplicação $[0, \infty) \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$ é contínua.

Para $A, B \subset X$ não-vazios, a **semidistância de Hausdorff** entre A e B é dada por

$$d_H(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Quando $A = \{a\}$, denotaremos $d(a, B) = d_H(\{a\}, B)$, que é a distância usual de um ponto a um conjunto não-vazio. Note que, para $A, B \subset X$ não-vazios, temos $d_H(A, B) = 0$ se, e somente se, $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Observação 1.1. Em raras ocasiões, usaremos a **distância usual entre dois subconjuntos** A, B não-vazios de X, dada por

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{a \in A} \inf_{b \in B} d(x, y).$$

Dizemos também que A **atrai** B **sob a ação de** T se dado $\epsilon > 0$, existe $t_0 \geqslant 0$ tal que

$$d_H(T(t)B, A) < \epsilon \text{ para todo } t \geqslant t_0,$$

isto é, se

$$\lim_{t \to \infty} d_H(T(t)B, A) = 0. \tag{1.1}$$

Nós podemos dizer também que A T**-atrai** B, ou simplesmente que A **atrai** B, quando não houver confusão com respeito ao semigrupo T. Uma noção relacionada à atração é a noção de **absorção**. Dizemos que A **absorve** B **sob a ação de** T, se existe $t_0 \geqslant 0$ tal que

$$T(t)B \subset A \text{ para todo } t \geqslant t_0.$$

Também dizemos que A T**-absorve** B, ou simplesmente que A **absorve** B, quando não houver confusão com respeito ao semigrupo T.

Observação 1.2. Veja que se A absorve B então A atrai B, mas o contrário nem sempre é verdade, como por exemplo $A = \{0\}$, $B = [-1, 1]$ e $T(t)x = xe^{-t}$ para $x \in X = \mathbb{R}$. De todo modo, se A atrai B, então para qualquer $r > 0$, a r-vizinhança de A, dada por $\mathcal{O}_r(A) = \{x \in X : d(x, A) < r\}$, absorve B.

Além da definição de atração, para chegarmos à definição de um atrator global para um semigrupo, é fundamental a noção de *invariância*. Dizemos que um conjunto não-vazio A é **positivamente invariante/negativamente invariante/invariante por T** se

$$T(t)A \subset A \quad / \quad T(t)A \supset A \quad / \quad T(t)A = A \text{ para todo } t \geqslant 0.$$

Com isto, somos capazes de introduzir a noção de *atrator global* para um semigrupo. Um conjunto $\mathcal{A}$ de X é um **atrator global** de um semigrupo T se $\mathcal{A}$ é compacto, invariante por T e $\mathcal{A}$ atrai todos os subconjuntos limitados de X, isto é, se $B \subset X$ é limitado então

$$\lim_{t\to\infty} d_H(T(t)B, \mathcal{A}) = 0.$$

Observação 1.3. Segue diretamente da definição que um atrator global para um semigrupo T, quando existe, é único. De fato, se $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ são atratores globais, $\mathcal{A}_2$ atrai $\mathcal{A}_1$ (pois $\mathcal{A}_1$ é compacto e, portanto, limitado). Mas $\mathcal{A}_1$ é invariante, e isso nos dá

$$d_H(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = d_H(T(t)\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

Assim $d_H(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0$ e então $\mathcal{A}_1 = \overline{\mathcal{A}_1} \subset \overline{\mathcal{A}_2} \subset \mathcal{A}_2$. Trocando $\mathcal{A}_1$ por $\mathcal{A}_2$, obtemos a outra inclusão e, portanto, a igualdade.

Uma **solução global** de T é uma função $\xi : \mathbb{R} \to X$ que satisfaz $T(t)\xi(s) = \xi(t+s)$ para todos $t \geqslant 0$ e $s \in \mathbb{R}$. Se além disso o conjunto $\xi(\mathbb{R})$ é limitado em X, diremos que ξ é uma **solução global limitada** de T. A seguinte caracterização do atrator global $\mathcal{A}$ de um semigrupo T, quando ele existe, nos dá uma ideia de quão importante é esse objeto do ponto de vista prático:

$$\mathcal{A} = \{\xi(0) : \xi \text{ é uma solução global limitada de } T\}. \tag{1.2}$$

Tal caracterização nos mostra que o atrator global $\mathcal{A}$ não só é o conjunto sobre o qual todas as soluções do semigrupo T se acumulam quando $t \to \infty$, mas também é formado somente pelos pontos sobre os quais passa uma solução global limitada de T. Desta forma, o estudo de atratores globais para semigrupos é fundamental para o entendimento não somente do comportamento assintótico (quando $t \to \infty$), mas também para a compreensão de todas as soluções limitadas de um dado problema.

No que diz respeito à existência de atratores globais, o seguinte resultado é canônico, e sua demonstração pode ser encontrada em, por exemplo, [15].

Teorema 1.4 (Caracterização de semigrupos que possuem atrator global)**.** *Um semigrupo T num espaço métrico X possui um atrator global $\mathcal{A}$ se, e somente se,* *(a) existe um subconjunto limitado B_0 de X que absorve todos os limitados de X, isto é, dado $B \subset X$ limitado, existe $t_0 = t_0(B) \geqslant 0$ tal que $T(t)B \subset B_0$ para todo $t \geqslant t_0$;*

*(b) T é **assintoticamente compacto**, isto é, para todas sequências $t_n \to \infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ limitada, $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ possui subsequência convergente.*

Nesse caso, o atrator global $\mathcal{A}$ é dado por

$$\mathcal{A} = \omega(B_0) = \{y \in X\colon \text{ existem } t_n \to \infty \text{ e } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subset B_0 \text{ com } T(t_n)x_n \to y\}.$$

Observação 1.5. Para $B \subset X$ não-vazio, o conjunto $\omega(B)$ é chamado de **ω-limite de B**. Não é difícil ver que para cada $B \subset X$ temos

$$\omega(B) = \bigcap_{s\geqslant 0} \overline{\bigcup_{t\geqslant s} T(t)B}.$$

1.2 Dimensão de Hausdorff

Apresentamos agora os conceitos básicos de dimensão de Hausdorff, seguindo os livros do Falconer [11] e Folland [13]. Para X um conjunto qualquer, o conjunto das partes de X será denotado por 2^X. Lembremos que uma função $\mu^*\colon 2^X \to [0,\infty]$ é uma **medida exterior** se satisfaz

(i) $\mu^*(\varnothing) = 0$;

(ii) $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$ sempre que $A \subset B$;

(iii) $\mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$, para qualquer sequência $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}^*} \subset 2^X$.

Um conjunto $E \subset X$ é dito **μ^*-mensurável** se para todo $A \subset X$

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

De agora em diante, a menos que especificado o contrátrio (X,d) será um espaço métrico. Para $A \subset X$ não-vazio, o **diâmetro de A** é definido por

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{a_1,a_2\in A} d(a_1,a_2).$$

Dados $\alpha > 0$ e $\delta > 0$, para cada $A \subset X$, definimos

$$\mu_\delta^{(\alpha)}(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam}(B_i))^\alpha\colon A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,\ \operatorname{diam}(B_i) < \delta\right\},$$

com a convenção de que $\inf(\varnothing) = \infty$. Como $\mu_\delta^{(\alpha)}(A)$ cresce quando δ decresce, podemos definir

$$\mu^{(\alpha)}(A) = \lim_{\delta\to 0^+} \mu_\delta^{(\alpha)}(A) = \sup_{\delta>0} \mu_\delta^{(\alpha)}(A).$$

Observação 1.6. Podemos considerar, na definição de $\mu_\delta^{(\alpha)}(A)$, que A seja coberto por conjuntos *abertos*. Isso muda um pouco o valor de $\mu_\delta^{(\alpha)}(A)$ para cada $\delta > 0$, mas não altera o valor de $\mu^{(\alpha)}(A)$ (veja [7]).

Proposição 1.7.

(a) *Para cada* $\alpha > 0$ *e* $\delta > 0$, $\mu_\delta^{(\alpha)}$ *é uma medida exterior.*

(b) *Para cada* $\alpha > 0$, $\mu^{(\alpha)}$ *é uma medida exterior.*

(c) *Para* $\alpha' > \alpha > 0$, *se* $\mu^{(\alpha)}(A) < \infty$ *então* $\mu^{(\alpha')}(A) = 0$, *e se* $\mu^{(\alpha')}(A) > 0$ *então* $\mu^{(\alpha)}(A) = \infty$.

Demonstração. **(a)** Fixemos $\alpha > 0$ e $\delta > 0$. Note que $\mu_\delta^{(\alpha)}(\varnothing) = 0$ e $\mu_\delta^{(\alpha)}(A) \leqslant \mu_\delta^{(\alpha)}(B)$ sempre que $A \subset B$.

Consideremos agora uma sequência $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}^*} \subset 2^X$. Fixado $\varepsilon > 0$, da definição de $\mu_\delta^{(\alpha)}(A_j)$, para cada $j \in \mathbb{N}^*$, existe uma sequência $\{B_i^j\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ com

$$A_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^j, \quad \operatorname{diam}(B_i^j) < \delta \text{ para todo } i \in \mathbb{N}^* \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(B_i^j))^\alpha \leqslant \mu_\delta^\alpha(A_j) + 2^{-j}\varepsilon.$$

Deste modo $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup\limits_{i,j=1}^{\infty} B_i^j$ e

$$\mu_\delta^{(\alpha)}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leqslant \sum_{i,j=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(B_i^j))^\alpha \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu_\delta^{(\alpha)}(A_j) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, obtemos

$$\mu_\delta^{(\alpha)}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu_\delta^{(\alpha)}(A_j),$$

o que conclui a demonstração do item **(a)**.

(b) Segue diretamente da definição de $\mu^{(\alpha)}$ que $\mu^{(\alpha)}(\varnothing) = 0$ e que $\mu^{(\alpha)}(A) \leqslant \mu^{(\alpha)}(B)$ sempre que $A \subset B$. Se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}^*} \subset 2^X$ e $\delta > 0$, do item **(a)** segue que

$$\mu_\delta^{(\alpha)}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu_\delta^{(\alpha)}(A_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^{(\alpha)}(A_j),$$

e portanto

$$\mu^{(\alpha)}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^{(\alpha)}(A_j),$$

o que conclui a demonstração do item **(b)**.

(c) É suficiente provar a primeira afirmação, pois segunda é sua contrapositiva. Assuma assim $\mu^{(\alpha)}(A) < \infty$. Para cada $\delta > 0$ existe $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ com $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$, $\operatorname{diam}(B_j) < \delta$ para todo $j \in \mathbb{N}^*$, e

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(B_j))^\alpha \leqslant \mu^{(\alpha)}(A) + 1.$$

Assim

$$\mu_\delta^{(\alpha')}(A) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} (\mathrm{diam}(B_j))^{(\alpha')} < \delta^{\alpha'-\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} (\mathrm{diam}(B_j))^{\alpha} \leqslant \delta^{\alpha'-\alpha}[\mu^{\alpha}(A)+1],$$

e, como $\alpha' > \alpha$, $\delta^{\alpha'-\alpha}[\mu^{(\alpha)}(A)+1] \xrightarrow{\delta \to 0} 0$ e, portanto, $\mu^{(\alpha')}(A) = 0$. □

Dado $A \subset X$, a **dimensão de Hausdorff de A** é definida por

$$\dim_H(A) = \inf\{\alpha > 0 \colon \mu^{(\alpha)}(A) = 0\} = \sup\{\alpha > 0 \colon \mu^{(\alpha)}(A) = \infty\}.$$

Observação 1.8. Dizemos que um espaço topológico K tem *dimensão finita* se existe um inteiro n tal que, para toda a cobertura aberta $\mathcal{U}$ de K, existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}'$ de K refinando $\mathcal{U}$ com a propriedade de que cada ponto de K pertence a no máximo $n+1$ subconjuntos de $\mathcal{U}'$. Neste caso, a **dimensão topológica** $\dim(K)$ de K é o menor n com essa propriedade. Sabemos, vide Kahane [14] por exemplo, que

$$\dim(K) \leqslant \dim_H(K).$$

Proposição 1.9. *Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ e $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ então*

$$\dim_H(A) = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \dim_H(A_n).$$

Demonstração. Como $A_n \subset A$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$, segue diretamente que $\dim_H(A_n) \leqslant \dim_H(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e portanto $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \dim_H(A_n) \leqslant \dim_H(A)$. Para a recíproca, seja $\alpha > \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \dim_H(A_n)$. Temos

$$\mu^{(\alpha)}(A) = \mu^{(\alpha)}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{(\alpha)}(A_n) = 0,$$

e portanto $\dim_H(A) \leqslant \alpha$. Como $\alpha > \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \dim_H(A_n)$ é arbitrário, segue o resultado. □

A dimensão de Hausdorff tem um comportamento interessante quando associada à funções Lipschitz contínuas, que será dada no seguinte resultado:

Proposição 1.10. *Sejam X, Y espaços métricos.*

(a) *Para cada $\alpha > 0$, se $f \colon X \to Y$ é uma função Lipschitz contínua com constante de Lipschitz $L \geqslant 0$ e $A \subset X$ então $\mu^{(\alpha)}(f(A)) \leqslant L^{\alpha}\mu^{(\alpha)}(A)$.*

(b) *Se $f \colon X \to Y$ uma função Lipschitz contínua então $\dim_H(f(A)) \leqslant \dim_H(A)$ para todo $A \subset X$.*

Demonstração. **(a)** A demonstração desse item é trivial caso tenhamos $L = 0$ ou se $\mu^{(\alpha)}(A) = \infty$. Assumimos então que $L > 0$, que $\mu^{(\alpha)}(A) < \infty$, e fixemos $\varepsilon > 0$. Para cada $\delta > 0$, existe $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}^*} \subset 2^X$ tal que $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, $\operatorname{diam}(B_j) < \frac{\delta}{L}$ para todo $j \in \mathbb{N}^*$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\operatorname{diam}(B_j))^\alpha \leqslant \mu^{(\alpha)}_{\delta/L}(A) + \varepsilon \leqslant \mu^{(\alpha)}(A) + \varepsilon.$$

Definimos $D_j = f(B_j)$ para cada $j \in \mathbb{N}^*$. Agora:

- como $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$, temos $f(A) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} D_j$;
- se $x_1, x_2 \in D_j$, então $x_i = f(y_i)$ onde $y_i \in B_j$ para $i = 1, 2$. Assim

$$d(x_1, x_2) = d(f(y_1), f(y_2)) \leqslant Ld(y_1, y_2) \leqslant L\operatorname{diam}(B_j)$$

  e, portanto, $\operatorname{diam}(D_j) \leqslant L\operatorname{diam}(B_j) < \delta$.

Assim

$$\mu^{(\alpha)}_{\delta}(f(A)) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}(\operatorname{diam}(D_j))^\alpha \leqslant L^\alpha \sum_{j=1}^{\infty}(\operatorname{diam}(B_j))^\alpha \leqslant L^\alpha \mu^{(\alpha)}(A) + L^\alpha\varepsilon.$$

Fazendo $\delta \to 0^+$ obtemos $\mu^{(\alpha)}(f(A)) \leqslant L^\alpha\mu^{(\alpha)}(A) + L^\alpha\varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos o resultado.

(b) Pelo item **(a)**, se $\mu^{(\alpha)}(A) = 0$ então $\mu^{(\alpha)}(f(A)) = 0$. Assim, pela definição de dimensão de Hausdorff, temos $\dim_H(f(A)) \leqslant \dim_H(A)$. □

1.3 Dimensão Fractal

Agora, vamos introduzir o conceito de *dimensão fractal*, que nos permitirá projetar o atrator de maneira injetiva em um espaço vetorial de dimensão finita (veja o Corolário 1.21).

No que segue, K é um subconjunto compacto de um espaço métrico (X, d). Defina

$$N(r, K) = \text{ número mínimo de bolas de raio } r \text{ necessário para cobrir } K.$$

A **dimensão fractal** de K é dada por

$$c(K) = \limsup_{r\to 0^+} \frac{\ln N(r, K)}{\ln(1/r)},$$

onde $\ln$ denota o logaritmo natural.

Observação 1.11. Veja que, da definição de $c(K)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$N(r, K) \leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{c(K)+\varepsilon} \quad \text{para todo } 0 < r < \delta.$$

Para cada $\alpha > 0$ e $r > 0$, existem $B_1, \cdots, B_{N(r,K)}$ bolas de raio r que cobrem K. Assim

$$\mu_{2r}^{(\alpha)}(K) \leqslant \sum_{j=1}^{N(r,K)} (\operatorname{diam}(B_j))^\alpha = N(r,K)2^\alpha r^\alpha \leqslant 2^\alpha \left(\frac{1}{r}\right)^{c(K)+\varepsilon-\alpha}.$$

Tomando $\alpha = c(K) + \eta$, onde $0 < \epsilon < \eta$ temos

$$\mu_{2r}^{(c(K)+\eta)}(K) \leqslant 2^\alpha \left(\frac{1}{r}\right)^{\varepsilon-\eta}.$$

Fazendo $r \to 0^+$ obtemos $\mu^{(c(K)+\eta)}(K) = 0$ para cada $\eta > \epsilon > 0$. Da arbitrariedade de $\eta > \epsilon > 0$, obtemos $\mu^{(c(K))}(K) = 0$ e, da definição de dimensão de Hausdorff, obtemos

$$\dim_H(K) \leqslant c(K).$$

É possível que $c(K)$ e $\dim_H(K)$ sejam diferentes (vide Mañé [17], por exemplo).

Exemplo 1.12. Note que se $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, temos $c([a,b]) = 1$, pois para cada $r > 0$, temos

$$\frac{b-a}{r} \leqslant N(r,[a,b]) \leqslant \frac{b-a}{r} + 1.$$

Assim, obtemos facilmente que $\dim_H([a,b]) \leqslant 1$. Da Observação 1.8, como $\dim([a,b]) = 1$, obtemos $\dim_H([a,b]) = 1$.

Claramente, como $\ln(a+b) \leqslant \ln a + \ln b$ para $a, b > 1$ números inteiros, temos

$$c(K_1 \cup K_2) \leqslant c(K_1) + c(K_2).$$

Proposição 1.13. *Se (X,d), (Y,ρ) são espaços métricos, $K \subset X$ é compacto e $f\colon K \to Y$ é Lipschitz contínua, então $c(f(K)) \leqslant c(K)$.*

Demonstração. Não há nada a provar se $c(K) = \infty$, e assim supomos $c(K) < \infty$. Denotamos por $L > 0$ a constante de Lipschitz de f. Note que se

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N(r/L,K)} B_r^X(x_i),$$

com $x_i \in K$ para $i = 1, \ldots, N(r/L, K)$, então

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{N(r,K)} B_r^Y(f(x_i)),$$

ou seja $N(r, f(K)) \leqslant N(r/L, K)$, o que nos dá

$$c(f(K)) = \limsup_{r\to 0^+} \frac{\ln N(r, f(K))}{\ln(1/r)} \leqslant \limsup_{r\to 0^+} \frac{\ln N(r/L, K)}{\ln(1/r)} = c(K).$$

$\square$

Num espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|_X)$, dados $r > 0$ e $x \in X$ denotaremos a **bola aberta em X de centro x e raio r** por

$$B_r(x) = \{y \in X\colon \|y - x\|_X < r\}.$$

Além disso, dados $A, B \subset X$, denotaremos a **soma de A e B** por

$$A + B = \{x + y\colon x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Denotaremos também $-A = \{-x\colon x \in A\}$ e $A - B := A + (-B)$.

Observação 1.14. Notemos que se $x_1, x_2 \in X$ e $r > 0$ então

$$B_r(x) + B_r(y) \subset B_{2r}(x + y).$$

De fato se $z \in B_r(x)$ e $w \in B_r(y)$ então

$$\|z + w - (x + y)\|_X \leqslant \|z - x\|_X + \|w - y\|_X < 2r,$$

isto é, $z + w \in B_{2r}(x + y)$.

Proposição 1.15. *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado e K_1, K_2 subconjuntos compactos de X. Então*

$$c(K_1 + K_2) \leqslant c(K_1) + c(K_2).$$

Demonstração. Dado $r > 0$, existem $x_1^i, \ldots, x_{N(r,K_i)}^i$ em K_i tais que $K_i \subset \bigcup_{j=1}^{N(r,K_i)} B_r(x_j^i)$ e consequentemente

$$K_1 + K_2 \subset \bigcup_{i=1}^{N(r,K_2)} \bigcup_{j=1}^{N(r,K_1)} (B_r(x_j^1) + B_r(x_i^2)) \subset \bigcup_{i=1}^{N(r,K_2)} \bigcup_{j=1}^{N(r,K_1)} B_{2r}(x_j^1 + x_i^2).$$

Portanto, $N(r, K_1)N(r, K_2)$ bolas de raio $2r$ cobrem $K_1 + K_2$, o que nos dá $N(2r, K_1 + K_2) \leqslant N(r, K_1)N(r, K_2)$. Consequentemente

$$\begin{aligned}
c(K_1 + K_2) &= \limsup_{r \to 0^+} \frac{\ln N(2r, K_1 + K_2)}{\ln(1/2r)} \leqslant \limsup_{r \to 0^+} \frac{\ln[N(r, K_1)N(r, K_2)]}{\ln(1/2r)} \\
&\leqslant \limsup_{r \to 0^+} \frac{\ln N(r, K_1)}{\ln(1/2r)} + \limsup_{r \to 0^+} \frac{\ln N(r, K_2)}{\ln(1/2r)}.
\end{aligned}$$

Notando que para $i = 1, 2$ temos

$$\limsup_{r \to 0^+} \frac{\ln N(r, K_i)}{\ln(1/2r)} = \limsup_{r \to 0^+} \frac{\ln N(r, K_i)}{\ln(1/r)} \cdot \frac{\ln(1/r)}{\ln(1/2r)} = c(K_i),$$

uma vez que $\lim_{r \to 0^+} \frac{\ln(1/r)}{\ln(1/2r)} = 1$, o resultado segue. □

Corolário 1.16. *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado e K um subconjunto compacto de X. Então $c(K - K) \leqslant 2c(K)$.*

Demonstração. A prova segue diretamente da Proposição 1.15, já que $c(-K) = c(K)$. □

Agora mostraremos que conjuntos compactos que têm dimensão fractal finita podem ser projetados, de maneira injetiva, num espaço vetorial de dimensão finita. Isso indica que podemos pensar os atratores de semigrupos como objetos de dimensão finita, mesmo quando o semigrupo está num espaço de Banach de dimensão infinita. Para tanto, vamos provar alguns resultados técnicos de análise funcional, com o propósito de mostrarmos alguns resultados sobre dimensionalidade finita de conjuntos compactos invariantes para certas aplicações não-lineares.

Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{L}(X)$ o conjunto dos operadores lineares contínuos de X em X. Dado Y um subespaço de dimensão finita de X, denotaremos por $\mathcal{P}(X, Y)$ o subconjunto de $\mathcal{L}(X)$ consistindo das projeções com imagem Y, isto é, das aplicações $P \in \mathcal{L}(X)$ tais que $P^2 = P$ e $P(X) = Y$. No que segue, a menos que dito o contrário, $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach e Y um subespaço de dimensão finita de X.

Lema 1.17. *Dados K um subconjunto compacto de X e $r > 0$ então o conjunto*

$$A_r = \{v - w \colon v, w \in K \text{ e } \|v - w\|_X \geqslant r\},$$

é um subconjunto compacto de X.

Demonstração. Notemos primeiramente que, como a aplicação $X \times X \ni (x, y) \mapsto x - y \in X$ é contínua, o conjunto $K - K$ é compacto. Como $A_r \subset K - K$, para mostrar que A_r é compacto, basta mostrar que A_r é fechado.

Para tanto, considere $v_k, w_k \in K$ e $\||v_k - w_k\|_X \geqslant r$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$, com $y_k := v_k - w_k \xrightarrow{k\to\infty} y \in X$. Usando a compacidade de K_n, podemos assumir que, passando a subsequência se necessário, que $v_k \xrightarrow{k\to\infty} v \in K$ e $w_k \xrightarrow{k\to\infty} w \in K$. Portanto $y = v - w$ e $\|v - w\|_X \geqslant r$, o que mostra que $y \in A_r$ r prova que A_r é fechado. □

Lema 1.18. *Para K um subconjunto compacto de K e $r > 0$, defina*

$$\mathcal{P}_r = \{P \in \mathcal{P}(X, Y) \colon \operatorname{diam}(P^{-1}(y) \cap K) < r \text{ para todo } y \in Y\}. \tag{1.3}$$

Então dada $P \in \mathcal{P}(X, Y)$ temos $P \in \mathcal{P}_r$ se, e somente se, $P^{-1}(0) \cap A_r = \varnothing$. Além disso, $\mathcal{P}_r$ é aberto em $\mathcal{P}(X, Y)$ na topologia uniforme de operadores.

Demonstração. Fixemos $P \in \mathcal{P}(X, Y)$. Suponha $P \in \mathcal{P}_r$ e, por absurdo, que $P^{-1}(0) \cap A_r \neq \varnothing$. Tome $y_1 \in P^{-1}(0) \cap A_r$. Assim $Py_1 = 0$ e existem $v, w \in K$ com $\|v - w\|_X \geqslant r$ com $y_1 = v - w$. Deste modo, $0 = Py_1 = Pz - Pw$, e para $y = Pv = Pw \in Y$ temos

$$\operatorname{diam}(P^{-1}(y) \cap K) \geqslant \|v - w\|_X \geqslant r,$$

o que mostra que $P \notin \mathcal{P}_r$ e nos dá uma contradição.

Por outro lado, se $P^{-1}(0) \cap A_r = \varnothing$ para todo $y \in Y$ e $v, w \in P^{-1}(y) \cap K$, temos $v - w \in P^{-1}(0)$ (pois $P(v-w) = y - y = 0$) e, portanto, devemos ter $v - w \notin A_r$, isto é, $\|v - w\|_X < r$. Como $P^{-1}(y) \cap K$ é compacto, segue que $\operatorname{diam}(P^{-1}(y) \cap K) < r$, o que completa a prova da primeira afirmação.

Para provar que $\mathcal{P}_r$ é aberto em $\mathcal{P}(X,Y)$ na topologia uniforme de operadores, vamos mostrar que seu complementar em $\mathcal{P}(X,Y)$ é fechado. Seja $\mathcal{P}(X,Y) \setminus \mathcal{P}_r \ni P_n \to P \in \mathcal{P}(X,Y)$ na topologia uniforme. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, como $P_n \notin \mathcal{P}_r$ temos $P_n^{-1}(0) \cap A_r \neq \varnothing$ e existe $x_n \in A_r$ com $P_n x_n = 0$. Logo, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset A_r$ e como A_r é compacto, $x_n \to x$ para algum $x \in A_r$ (a menos de subsequência). Além disso

$$\begin{aligned}\|Px\|_X = \|Px - P_n x_n\|_X &\leqslant \|Px - Px_n\|_X + \|Px_n - P_n x_n\|_X \\ &\leqslant \|P\|_{\mathcal{L}(X)} \|x - x_n\|_X + \|P - P_n\|_{\mathcal{L}(X)} \|x_n\|_X \xrightarrow{n \to \infty} 0,\end{aligned}$$

o que mostra que $Px = 0$. Assim $x \in P^{-1}(0) \cap A_r$, e mostra que $P \notin \mathcal{P}_r$. □

Para um espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|_X)$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) denotaremos por X^* o seu dual topológico, isto é, o conjunto dos funcionais lineares contínuos de X em $\mathbb{K}$.

Lema 1.19. *Sejam X um espaço de Banach, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos compactos de X e $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Então existe uma sequência $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ em X^* tal que, se $a \in A$ e $\phi_n(a) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, então $a = 0$.*

Demonstração. Consideremos W como o fecho do subespaço gerado por A. Como A é uma união enumerável de conjuntos compactos, ele é separável. Consequentemente W é um espaço de Banach separável. Consideremos a bola unitária fechada centrada na origem em W^*, denotada por $\overline{B}_1^{W^*}(0)$. Sabemos que $\overline{B}_1^{W^*}(0)$ é compacto e metrizável na topologia fraca*, denotada por $\sigma(W^*, W)$ (veja os Teoremas A.10 e A.11). Portanto, existe uma sequência densa $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $(\overline{B}_1^{W^*}(0), \sigma(W^*, W))$. Agora, se $x \in W$ e $\psi_n(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $\psi(x) = 0$ para todo $\psi \in B_1^{W^*}(0)$ o que implica que $x = 0$. Usando o Teorema de Hahn-Banach, podemos estender cada ψ_n a um funcional $\phi_n \in X^*$, nos dando a sequência desejada. □

Com isso, apresentamos o principal resultado desta seção, que nos mostra que certos conjuntos podem ser projetados injetivamente num espaço vetorial de dimensão finita. Tal resultado foi retirado de [17].

Teorema 1.20. *Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ com K_n compacto para cada $n \in \mathbb{N}$ e tal que $\dim_H(K - K) < \infty$. Se Y é um subespaço de dimensão finita de X com $\dim_H(K - K) + 1 < \dim Y$, então o conjunto $\{P \in \mathcal{P}(X,Y) \colon P|_K$ é injetora$\}$ é residual [1] em $\mathcal{P}(X,Y)$.*

[1] Um subconjunto X de um espaço topológico é um conjunto residual se contém uma interseção enumerável de subconjuntos abertos e densos.

Antes de demonstrarmos esse teorema, vejamos um corolário imediato:

Corolário 1.21. *Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ com K_n compacto para cada $n \in \mathbb{N}$ e tal que $c(K) < \infty$. Se Y é um subespaço de dimensão finita de X com $2c(K) + 1 < \dim Y$, então o conjunto $\{P \in \mathcal{P}(X,Y)\colon P|_K$ é injetora$\}$ é residual em $\mathcal{P}(X,Y)$.*

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 1.20, usando a estimativa do Corolário 1.16. □

Demonstração do Teorema 1.20. Para melhorar o entendimento, separamos a demonstração em quatro passos.

Passo 1. Primeiramente vemos que, trocando K_n por $\tilde{K}_n = \bigcup_{j=1}^{n} K_j$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$ se necessário, podemos assumir que $K_n \subset K_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$.

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ e $r > 0$ definimos

$$\mathcal{P}_{n,r} = \{P \in \mathcal{P}(X,Y)\colon \operatorname{diam}(P^{-1}(y) \cap K_n) < r \text{ para todo } y \in Y\}.$$

Usando o Lema 1.18 sabemos que $P_{n,r}$ é aberto em $\mathcal{P}(X,Y)$ e que

$$\mathcal{P}_{n,r} = \{P \in \mathcal{P}(X,Y)\colon P^{-1}(0) \cap A_{n,r} = \varnothing\},$$

onde $A_{n,r} = \{v - w\colon v, w \in K_n \text{ e } \|v-w\|_X \geqslant r\}$.

Passo 2. Notemos que o conjunto das projeções em $\mathcal{P}(X,Y)$ que são injetivas sobre K é igual a $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{P}_{n,\frac{1}{m}}$. De fato, fixe $P \in \mathcal{P}(X,Y)$ com $P|_K$ injetiva e $n, m \in \mathbb{N}^*$. Assuma, por contradição, que $P^{-1}(0) \cap A_{n,\frac{1}{m}} \neq \varnothing$. Então existe $v, w \in K_n$ com $\|v-w\|_X \geqslant \frac{1}{m}$ com $v - w \in P^{-1}(0)$. Mas assim $v \neq w$ e $Pv = Pw$, o que contraria a injetividade de P em K. Portanto $P \in \mathcal{P}_{n,\frac{1}{m}}$ para todos $n, m \in \mathbb{N}^*$. Reciprocamente assuma que P não é injetiva em K. Assim, existem $x, y \in K$ com $x \neq y$ e $Px = Py$. Existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $\|x - y\|_X \geqslant \frac{1}{m}$. Além disso, como $K_j \subset K_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}^*$, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $x, y \in K_n$. Mas assim $x - y \in P^{-1}(0) \cap A_{m,\frac{1}{m}}$, o que nos dá uma contradição e mostra que $P|_K$ é injetiva.

Passo 3. Considere o espaço quociente $Z = \{x + Y\colon x \in X\}$ onde $x + Y = \{x + y\colon y \in Y\}$. Em Z, definimos a norma

$$\|x + Y\|_Z = \inf_{y \in Y} \|x + y\|_X.$$

Sabemos que $(Z, \|\cdot\|_Z)$ é um espaço de Banach, e consideramos a aplicação quociente $Q\colon X \to Z$ dada por $Q(x) = x + Y$ para cada $x \in X$. Note que

$$Q(A_{n,r}) \setminus \{0\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Big\{Q(v)\colon v \in A_{n,r}, \|Q(v)\|_Z \geqslant \frac{1}{m}\Big\},$$

e cada conjunto $\{Q(v)\colon v \in A_{n,r}, \|Q(v)\|_Z \geqslant \frac{1}{m}\}$ é compacto. Podemos então usar o Lema 1.19 para obter uma sequência $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ em Z^* tal que se $x + Y \in Q(A_{n,r}) \setminus \{0\}$ e $\phi_i(x + Y) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$, então $x + Y = 0$, isto é, $x \in Y$.

Para $i, j \in \mathbb{N}^*$, defina

$$A_{n,r,i,j} = \Big\{x \in A_{n,r} \colon |\phi_i(Q(x))| \geqslant \frac{1}{j}\Big\}.$$

Vejamos que

$$P^{-1}(0) \cap A_{n,r} = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} P^{-1}(0) \cap A_{n,r,i,j},$$

De fato, suponha que $x \in P^{-1}(0) \cap A_{n,r}$ e $\phi_i(Q(x)) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Se $Q(x) = 0$ então $x \in Y = P(X)$, o que nos á $x = Px = 0$ e contradiz o fato de $x \in A_{n,r}$ (uma vez que $0 \notin A_{n,r}$). Se $Q(x) \neq \{0\}$ então $Q(x) \in Q(A_{n,r}) \setminus \{0\}$ e obtemos $x \in Y$. Como no primeiro caso, $x \in Y = P(X)$, o que nos dá $x = Px = 0$ e chegamos a uma contradição. Portanto, $|\phi_i(Q(x))| > 0$ para algum $i \in \mathbb{N}^*$ e, escolhendo $j \in \mathbb{N}^*$ tal que $|\phi_i(Q(x))| \geqslant \frac{1}{j}$, mostramos que $x \in A_{n,r,i,j}$. Reciprocamente, como $A_{n,r,i,j} \subset A_{n,r}$ para todos $i, j \in \mathbb{N}^*$, a outra inclusão é trivial.

Por fim, definindo

$$\mathcal{P}_{n,r,i,j} = \{P \in \mathcal{P}(X, Y) \colon P^{-1}(0) \cap A_{n,r,i,j} = \varnothing\},$$

vemos que

$$\mathcal{P}_{n,r} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}}\bigcap_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_{n,r,i,j},$$

pois $P^{-1}(0) \cap A_{n,r} = \varnothing$ se, e somente se, $P^{-1}(0) \cap A_{n,r,i,j} = \varnothing$ para todos $i, j \in \mathbb{N}$. Além disso, como $A_{n,r}$ é compacto (vide Lema 1.17) e $A_{n,r,i,j} \subset A_{n,r}$ para todos $i, j \in \mathbb{N}$, segue facilmente que $A_{n,r,i,j}$ é compacto (basta ver que $A_{n,r,i,j}$ é fechado). Procedendo exatamente como na demonstração do Lema 1.18 obtemos que $P_{n,r,i,j}$ é aberto. Portanto, a prova fica reduzida a mostrar que para cada $n, i, j \in \mathbb{N}$ e $r > 0$, $P_{n,r,i,j}$ é denso em $\mathcal{P}(X, Y)$.

Passo 4. Fixemos $P_0 \in \mathcal{P}(X, Y)$ e defina $\beta \colon Y \setminus \{0\} \to S = \{y \in Y \colon \|y\|_X = 1\}$ por $\beta(y) = \frac{y}{\|y\|_X}$. Então

$$\beta(P_0(A_n, r) \setminus \{0\}) = \bigcup_{l=1}^{\infty} \beta\big(P_0(A_n, r)) \cap [Y \setminus B^Y_{1/l}(0)]\big),$$

e, da Proposição 1.9,

$$\dim_H(\phi(P_0(A_{n,r}))) = \sup_{l\in\mathbb{N}} \dim_H(\phi(P_0(A_{n,r}) \cap [Y \backslash B^Y_{1/l}(0)])).$$

Note que a aplicação β, quando restrita à $P_0(A_{n,r}) \cap [Y \backslash B^Y_{1/l}(0)]$, é Lipschitz contínua, uma vez que para $y_1, y_2 \in Y \setminus B^Y_{1/l}(0)$ temos

$$\|\beta(y_1) - \beta(y_2)\|_X \leqslant 2l\|y_1 - y_2\|_X.$$

Consequentemente, pela Proposição 1.10, obtemos

$$\dim_H\left(\beta\big(P_0(A_{n,r}) \cap [Y \backslash B^Y_{1/l}(0)]\big)\right) \leqslant \dim_H(P_0(A_{n,r})).$$

Lembrando que P_0 também é Lipschitz contínua (pois é linear limitada), usando novamente a Proposição 1.10 juntamente com o fato de que $A_{n,r} \subset K_n - K_n \subset K - K$ e o Corolário 1.16, temos

$$\dim_H(\beta(P_0(A_{n,r}))) \leqslant \dim_H(P_0(A_{n,r})) \leqslant \dim_H(A_{n,r}) \leqslant \dim_H(K - K).$$

Com isso, afirmamos que existe $y_0 \in S \setminus \beta(P_0(A_{n,r}))$. De fato, se este não é o caso, então $S \subset \beta(P_0(A_{n,r}))$ e $\dim Y - 1 = \dim(S) \leqslant \dim_H(S) \leqslant \dim_H(\beta(P_0(A_{n,r}))) \leqslant \dim_H(K - K)$ o que contradiz a nossa hipótese (para a desiguldade $\dim(S) \leqslant \dim_H(S)$, veja a Observação 1.8). Assim, dados $\varepsilon > 0$, $i, j \in \mathbb{N}^*$ definimos $P_\varepsilon \in \mathcal{L}(X)$ por

$$P_\epsilon x = P_0 x + \varepsilon \phi_i(Q(x)) y_0 \quad \text{para todo } x \in X.$$

Claramente $P_\varepsilon x \in Y$ para todo $x \in X$. Além disso, para cada $y \in Y$, como $Q(y) = 0$, temos $P_\varepsilon y = P_0 y = y$. Portanto $P_\varepsilon(X) = Y$, isto é $P_\epsilon \in \mathcal{P}(X, Y)$.

Agora, se $x \in P_\varepsilon^{-1}(0) \cap A_{n,r,i,j}$ temos $P_\varepsilon(x) = 0$, o que implica que

$$P_0 x = -\varepsilon \phi_i(Q(x)) y_0,$$

e $x \in A_{n,r,i,j}$, o que nos dá $x \in A_{n,r}$ e $\phi_i(Q(x)) \neq 0$. Portanto,

$$y_0 = -(\varepsilon \phi_i(Q(x)))^{-1} P_0 x.$$

Como $y_0 \in S$, $y_0 = \beta(y_0)$ e assim $\beta(P_0 x) = P_0 x$, o que nos dá $|\varepsilon \phi_i(Q(x))| = 1$ e, portanto, $\pm y_0 = \beta(P_0 x) \in \beta(P_0(A_{n,r,i,j}))$. Consequentemente $y_0 \in \beta(P_0(A_{n,r}))$ contradizendo a escolha de y_0 e mostrando que $P_\varepsilon \in P_{n,r,i,j}$. Finalmente, como

$$\|P_\varepsilon - P_0\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \varepsilon \|\phi_i\|_{Z^*} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0,$$

temos $P_{n,r,i,j}$ denso em $\mathcal{P}(X, Y)$, o que encerra a demonstração. $\square$

Notas

Num espaço de Banach X, quando consideramos um semigrupo T com um atrator global $\mathcal{A}$, a dinâmica assintótica "interessante" de T é totalmente definida por $\mathcal{A}$, por meio da caracterização (1.2). Assim, estudar o comportamento de longo prazo do semigrupo T é estudar o atrator global $\mathcal{A}$ e sua estrutura interna. O atrator global é objeto constante de estudo na literatura, como por exemplo em [15] e [21]. O termo "global attractor" gera um resultado de mais de 2700 artigos no MathSciNet.

Quando $\mathcal{A}$ tem dimensão fractal finita, é possível projetá-lo num espaço de dimensão finita, o que torna o estudo mais simples. Existem muitos artigos dedicados a encontrar condições que garantam que a dimensão fractal de atratores globais de certos semigrupos (ou atratores pullback para processos de evolução) é finita, como por exemplo [21, 2, 5, 6, 4] dentre tantos outros.

Como a dimensão fractal é uma cota superior para a dimensão de Hausdorff, podendo ser diferentes, há resultados que valem para a dimensão de Hausdorff que não são verdadeiros, em geral, para a dimensão fractal (veja o Teorema 3.16 no Capítulo 3, por exemplo). Conhecendo somente a dimensão de Hausdorff, apesar de não sermos capazes de aplicar diretamente o Corolário 1.21, ainda temos boas características geométricas de $\mathcal{A}$.

2 Atratores exponenciais

Os semigrupos que possuem atratores globais ocorrem frequentemente nas aplicações. Porém, a *taxa de atração* desse atrator global pode não ser conhecida. Com isso, surge a teoria de *atratores exponenciais*, definidos a seguir:

Definição 2.1. Seja $T = \{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ um semigrupo num espaço métrico X. Dizemos que $\mathcal{M}$ é um **atrator exponencial** para T se:

(i) $\mathcal{M}$ é compacto;

(ii) $\mathcal{M}$ é positivamente invariante, isto é, $T(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, para todo $t \geqslant 0$;

(iii) $c(\mathcal{M}) < \infty$, isto é, $\mathcal{M}$ tem dimensão fractal finita;

(iv) Para cada $B \subset X$ limitado, existem $C = C(B) \geqslant 0$, $t_0 = t_0(B) \geqslant 0$ e $\alpha = \alpha(B) > 0$ tais que $d_H(T(t)B, \mathcal{M}) \leqslant Ce^{-\alpha t}$ para todo $t \geqslant t_0$.

Neste capítulo, seguindo as ideias de [23], [9] e [5], estudaremos os atratores exponenciais para semigrupos. Veja adicionamos a taxa exponencial de atração, porém perdemos a invariância. Com isso, atratores exponenciais podem não ser únicos. Devido à sua taxa exponencial de atração, atratores exponenciais são mais robustos sob perturbações e, quando existem, garantem a existência do atrator global (e sempre o contém), como veremos no resultado a seguir.

Proposição 2.2. *Se o semigrupo T possui um atrator exponencial $\mathcal{M}$, então T possui um atrator global $\mathcal{A}$, com $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Em particular, $c(\mathcal{A}) < \infty$.*

Demonstração. Basta verificarmos que T satisfaz as condições do Teorema 1.4. Para isso, defina $B_0 = \mathcal{O}_1(\mathcal{M}) = \{x \in X\colon d(x, \mathcal{M}) < 1\}$. Como $\mathcal{M}$ é compacto, B_0 é limitado. Ainda, dado $B \subset X$ limitado, existem $C \geqslant 0$, $t_0 \geqslant 0$ e $\alpha > 0$ tais que $d_H(T(t)B, \mathcal{M}) \leqslant Ce^{-\alpha t}$ para todo $t \geqslant t_0$. Escolhendo $t_1 \geqslant t_0$ tal que $Ce^{-\alpha t_1} < 1$, temos temos $d_H(T(t)B, \mathcal{M}) < 1$ para $t \geqslant t_1$, isto é, $T(t)B \subset \mathcal{O}_1(\mathcal{M}) = B_0$ para todo $t \geqslant t_1$.

Agora, sejam $t_n \to \infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ uma sequência limitada. Então $B = \{x_n\colon n \in \mathbb{N}^*\} \subset X$ é limitado e

$$d(T(t_n)x_n, \mathcal{M}) \leqslant d_H(T(t_n)B, \mathcal{M}) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Como $\mathcal{M}$ é compacto, $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ possui subsequência convergente (veja o Lema A.1). Portanto, do Teorema 1.4, T possui atrator global $\mathcal{A}$.

Além disso, como $\mathcal{A}$ é invariante, temos

$$d_H(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = d_H(T(t)\mathcal{A}, \mathcal{M}) \quad \text{para todo } t \geqslant 0.$$

Como $\mathcal{A}$ é compacto (e, portanto, limitado) segue que

$$d_H(T(t)\mathcal{A}, \mathcal{M}) \to 0 \quad \text{quando } t \to \infty.$$

Logo $d_H(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = 0$, ou seja, $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \subset \overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$. □

2.1 Semigrupos discretos

Nessa seção, veremos os semigrupos discretos. Estudaremos a relação desses semigrupos com os semigrupos contínuos e também como se relacionam seus atratores globais.

Um **semigrupo discreto** num espaço métrico X é uma família $\{S(n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}(X)$ tal que

(i) $S(0)x = x$, para todo $x \in X$;

(ii) $S(n+m) = S(n)S(m)$, para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$;

Como $S(n) = S(1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, um semigrupo discreto pode ser escrito na forma $\{S^n : n \in \mathbb{N}\}$, e por simplicidade nos referiremos ao semigrupos discreto $\{S^n : n \in \mathbb{N}\}$ simplesmente por S. Um subconjunto compacto $\mathcal{C}$ de X é dito um **atrator global** de S se $S^n\mathcal{C} = \mathcal{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (ou seja, $\mathcal{C}$ é invariante por S) e $d_H(S^nB, \mathcal{C}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ para cada $B \subset X$ limitado. Claramente, como no caso de semigrupos contínuos (isto é, $T = \{T(t) : t \geqslant 0\}$), um atrator global de um semigrupo discreto, quando existe, é único.

Uma função $\varphi : \mathbb{Z} \to X$ é uma **solução global** de S se $\varphi(n+m) = S^n\varphi(m)$ para todos $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$. Novamente, como no caso de semigrupos contínuos (veja a caracterização (1.2)), quando $\mathcal{C}$ é o atrator global de S temos

$$\mathcal{C} = \{\varphi(0) : \varphi \text{ é uma solução global limitada de } S\}.$$

No que segue, estudaremos a relação entre os semigrupos contínuos e discretos, e a de seus atratores globais. O primeiro resultado é imediato, e omitimos sua demonstração.

Proposição 2.3. *Considere $T = \{T(t) : t \geqslant 0\}$ um semigrupo num espaço métrico X com atrator global $\mathcal{A}$. Fixado $h > 0$, defina $S = T(h)$. Então $\{S^n : n \in \mathbb{N}\}$ define um semigrupo discreto em X e $\mathcal{A}$ é seu atrator global.*

Agora vejamos uma espécie de recíproca parcial da proposição anterior.

Proposição 2.4. *Considere $T = \{T(t) : t \geqslant 0\}$ um semigrupo num espaço métrico X, e assuma que exista $h > 0$ tal que para cada $B \subset X$ limitado temos $T([0,h])B$ limitado. Defina $S = T(h)$ e assuma que o semigrupo discreto $\{S^n : n \in \mathbb{N}\}$ tenha um atrator global $\mathcal{C}$. Então $\mathcal{C}$ é o atrator global de T.*

Demonstração. Primeiro provemos que T possui um atrator global utilizando o Teorema 1.4. Defina $B_0 = \mathcal{O}_1(\mathcal{C})$, que é limitado, e considere $B \subset X$ limitado. Como, por hipótese, $\tilde{B} = T([0,h])B$ é limitado em X, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $S^n\tilde{B} \subset B_0$ para todo $n \geqslant n_0$. Assim, se $t \geqslant n_0$ temos $t = nh + r$ para algum $n \geqslant n_0$ e $r \in [0,h)$ e, portanto,

$$T(t)B = T(nh+r)B = T(nh)T(r)B \subset S^n\tilde{B} \subset B_0.$$

Sejam $t_n \to \infty$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ uma sequência limitada e defina $B = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}^*\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $t_n = m_n h + r_n$, onde $m_n \in \mathbb{N}$ e $r_n \in [0,h)$. Definindo $y_n = T(r_n)x_n$ temos

$$T(t_n)x_n = T(m_n h)T(r_n)x_n = S^{m_n}y_n.$$

Note que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \tilde{B} := T([0,h])B$, que é limitado. Desse modo

$$d_H(T(t_n)x_n, \mathcal{C}) \leqslant d_H(S^{m_n}\tilde{B}, \mathcal{C}) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

uma vez que $m_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Portanto $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ possui subsequência convergente. Segue do Teorema 1.4 que T possui um atrator global $\mathcal{A}$.

Como $\mathcal{A}$ é invariante por T e compacto, temos

$$d_H(\mathcal{A}, \mathcal{C}) = d_H(T(nh)\mathcal{A}, \mathcal{C}) = d_H(S^n\mathcal{A}, \mathcal{C}) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

o que mostra que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$. Reciprocamente, como $\mathcal{C}$ é compacto e invariante por S, temos

$$d_H(\mathcal{C}, \mathcal{A}) = d_H(S^n\mathcal{C}, \mathcal{A}) = d_H(T(nh)\mathcal{C}, \mathcal{A}) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

o que mostra que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ e conclui a demonstração. □

Temos também um resultado análogo à Proposição 2.3, para atratores exponenciais. A prova é direta e, por isso, a omitiremos.

Proposição 2.5. *Seja $T = \{T(t) \colon t \geqslant 0\}$ um semigrupo um espaço métrico X, com um atrator exponencial $\mathcal{M}$. Fixado $h > 0$, defina $S = T(h)$. Então $\mathcal{M}$ é também um atrator exponencial para o semigrupo discreto $\{S^n \colon n \in \mathbb{N}\}$.*

Dizemos que $\mathcal{M}$ é um **atrator exponencial** para o semigrupo discreto $\{S^n \colon n \in \mathbb{N}\}$ se $\mathcal{M}$ é um conjunto compacto, com dimensão fractal finita, $S\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, e para cada $B \subset X$ limitado, existem $C = C(B) \geqslant 0$, $\alpha = \alpha(B) > 0$ e $n_0 = n_0(B) \in \mathbb{N}$ tais que

$$d_H(S^nB, \mathcal{M}) \leqslant Ce^{-\alpha n} \quad \text{para todo } n \geqslant n_0.$$

Agora, inspirados nas ideias apresentadas em [23, Seção 3], mostraremos que, sob certas condições, é possível apresentar uma espécie de recíproca do resultado anterior. Isto é, vamos construir um atrator exponencial $\mathcal{M}_c$ para o semigrupo T, a partir de um atrator exponencial $\mathcal{M}_d$ do semigrupo discreto $\{S^n \colon n \in \mathbb{N}\}$, onde $S = T(h)$ para algum $h > 0$. Notamos aqui que o atrator exponencial $\mathcal{M}_c$ obtido não é igual, em geral, ao atrator exponencial $\mathcal{M}_d$.

Teorema 2.6. *Seja $T = \{T(t) \colon t \geqslant 0\}$ um semigrupo num espaço métrico X. Fixado $h > 0$, defina $S = T(h)$, e assuma que o semigrupo discreto $\{S^n \colon n \in \mathbb{N}\}$ possua um atrator exponencial $\mathcal{M}_d$. Suponha também que existe $\epsilon > 0$ tal que a aplicação $[0,h] \times \mathcal{O}_\epsilon(\mathcal{M}_d) \ni (t,x) \mapsto T(t)x \in X$ seja Lipschitz contínua. Então o conjunto $\mathcal{M}_c = T([0,h])\mathcal{M}_d$ é um atrator exponencial para T.*

Demonstração. Primeiramente, mostremos que $T(t)\mathcal{M}_c \subset \mathcal{M}_c$ para cada $t \geqslant 0$. Para isso, fixemos $t \geqslant 0$ e $x \in \mathcal{M}_c$. Da definição de $\mathcal{M}_c$ existe $\xi \in [0,h]$ e $y \in \mathcal{M}_d$ tais que $x = T(\xi)y$. Escrevendo $t + \xi = nh + r$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $r \in [0,h)$, temos

$$\begin{aligned} T(t)x &= T(t)T(\xi)y = T(t+\xi)y = T(nh+r)y = T(r)T(nh)y \\ &= T(r)T(h)^n y = T(r)S^n y. \end{aligned}$$

Como $S^n\mathcal{M}_d \subset \mathcal{M}_d$ temos $S^n y \in \mathcal{M}_d$ e, portanto, $T(t)x \in \mathcal{M}_c$.

Para prosseguirmos notemos que, da hipótese, existe $L \geqslant 0$ tal que para todos $(s,x),(r,y) \in [0,h] \times X$ temos

$$d(T(s)x, T(r)y) \leqslant L(|s-r| + d(x,y)).$$

Assim, se $B \subset X$ é limitado, existem $C \geqslant 0$, $\alpha > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $d_H(S^nB, \mathcal{M}_d) \leqslant Ce^{-\alpha n}$ para todo $n \geqslant n_0$. Escolhemos $n_1 \geqslant n_0$ tal que $Ce^{-\alpha n} < \epsilon$ para $n \geqslant n_1$. Para $t \geqslant n_1 h$, escrevemos $t = nh + r$, onde $n \geqslant n_1$ e $r \in [0,h)$. Para $x \in B$ e $z \in \mathcal{M}_d$, tomando $y = T(r)z \in \mathcal{M}_c$, obtemos

$$d(T(t)x, \mathcal{M}_c) \leqslant d(T(t)x, y) = d(T(r)S^n x, T(r)z) \leqslant Ld(S^n x, z),$$

uma vez que $S^nB \subset \mathcal{O}_\epsilon(\mathcal{M}_d)$. Como essa estimativa é válida para todo $z \in \mathcal{M}_d$, tomando o ínfimo (para $z \in \mathcal{M}_d$) em ambos os lados, obtemos

$$d(T(t)x, \mathcal{M}_c) \leqslant Ld(S^n x, \mathcal{M}_d)$$

e, novamente, como $x \in B$ é arbitrário, tomando o supremo (para $x \in B$) em ambos os lados, segue que

$$d_H(T(t)B, \mathcal{M}_c) \leqslant Ld(S^nB, \mathcal{M}_d).$$

Portanto, para $t \geqslant n_1 h$, temos

$$\begin{aligned} d_H(T(t)B, \mathcal{M}_c) &\leqslant LCe^{-\alpha n} = LCe^{-\frac{\alpha(t-r)}{h}} = LCe^{\frac{\alpha r}{h}}e^{-\frac{\alpha}{h}t} \\ &= LCe^{\frac{\alpha r}{h}}e^{-\frac{\alpha}{h}t} \leqslant C_1 e^{-\alpha_1 t}, \end{aligned}$$

onde $C_1 = LCe^{\alpha}$ e $\alpha_1 = \frac{\alpha}{h}$.

Para concluir a demonstração, nos resta mostrar que $c(\mathcal{M}_c) < \infty$. Para tanto, vamos primeiro estimar $N(r, \mathcal{M}_c)$ para $r > 0$. Note que o número mínimo de bolas de raio $\frac{r}{2L}$ necessárias para cobrir o intervalo $[0,h]$ é j, onde $j \in \mathbb{N}$ é tal que $\frac{(j-1)r}{L} \leqslant h < \frac{jr}{L}$, isto é, $j = \lfloor \frac{Lh}{r} + 1 \rfloor$. Assim, se $k = N\left(\frac{r}{2L}, \mathcal{M}_d\right)$, existem $x_1, \cdots, x_k \in \mathcal{M}_d$ e $s_1, \cdots, s_j \in [0,h]$ tais que

$$\mathcal{M}_d \subset \bigcup_{p=1}^{k} B^X_{\frac{r}{2L}}(x_p) \quad \text{e} \quad [0,h] \subset \bigcup_{i=1}^{j} \left(s_i - \tfrac{r}{2L}, s_i + \tfrac{r}{2L}\right).$$

Portanto, dado $x \in \mathcal{M}_c$, existem $\xi \in [0,h]$ e $y \in \mathcal{M}_d$ tais que $x = T(\xi)y$. Além disso, existem x_p e s_i tais que $y \in B^X_{\frac{r}{2L}}(x_p)$ e $\xi \in \left(s_i - \frac{r}{2L}, s_i + \frac{r}{2L}\right)$. Logo

$$d(x, T(s_i)x_p) = d(T(\xi)y, T(s_i)x_p) \leqslant L\left(|\xi - s_i| + d(y, x_p)\right) < r,$$

o que mostra que

$$\mathcal{M}_c \subset \bigcup_{p=1}^{k} \bigcup_{i=1}^{j} B^X_r(T(s_i)x_p)$$

e, portanto, $N(r, \mathcal{M}_c) \leqslant kj$. Com isso, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\ln N(r,\mathcal{M}_c)}{\ln(1/r)} &\leqslant \frac{\ln kj}{\ln(1/r)} = \frac{\ln k}{\ln(1/r)} + \frac{\ln j}{\ln(1/r)} \\
&\leqslant \frac{\ln N(\frac{r}{2L}, \mathcal{M}_d)}{\ln(1/r)} + \frac{\ln(\frac{Lh}{r}+1)}{\ln(1/r)} \\
&= \frac{\ln N(\frac{r}{2L}, \mathcal{M}_d)}{\ln(2L/r)} \cdot \frac{\ln(2L/r)}{\ln(1/r)} + \frac{\ln(\frac{Lh}{r}+1)}{\ln(1/r)}.
\end{aligned}$$

Tomando $\limsup\limits_{r \to 0^+}$ em ambos os lados, obtemos

$$c(\mathcal{M}_c) \leqslant c(\mathcal{M}_d) + 1,$$

uma vez que

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\ln(2L/r)}{\ln(1/r)} = \lim_{r \to 0^+} \frac{\ln(\frac{Lh}{r}+1)}{\ln(1/r)} = 1.$$

□

2.2 Estimativa para a dimensão fractal do atrator global para semigrupos discretos

Considere um semigrupo $T = \{T(t) \colon t \geqslant 0\}$ com um atrator global $\mathcal{A}$. Da Proposição 2.3, fixado $h > 0$ e definindo $S = T(h)$, $\mathcal{A}$ é também o atrator global do semigrupo discreto $\{S^n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Note assim que $\mathcal{A}$ é um compacto invariante por S, isto é, $S\mathcal{A} = \mathcal{A}$.

No que segue, queremos construir, sob certas hipóteses, um atrator exponencial $\mathcal{M}$ para o semigrupos discreto $\{S^n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Para começarmos, sejam F um subespaço de dimensão finita de um espaço de Banach X e $L \in \mathcal{L}(X)$. A **aplicação quociente induzida por L**, denotada por L_F, é definida por

$$\begin{aligned}
L_F \colon X &\longrightarrow X/F \\
x &\longmapsto Lx + F,
\end{aligned}$$

munido da norma $\|\chi\|_{X/F} = \inf\limits_{f \in F} \|\chi - f\|_X$ para $\chi \in X/F$.

Para cada número real $\lambda > 0$, denotaremos por $\mathcal{L}_\lambda(X)$ o conjunto das transformações $L \in \mathcal{L}(X)$ tais que L pode ser decomposta como $L = K + C$, com K compacto e $\|C\|_{\mathcal{L}(X)} < \lambda$, sendo $\|C\|_{\mathcal{L}(X)}$ a norma do operador C.

Lema 2.7. *Para cada $L \in \mathcal{L}_\lambda(X)$, existe um subespaço de dimensão finita $F \subset X$ tal que se $L_F\colon X \to X/F$ é a aplicação quociente, então $\|L_F\|_{\mathcal{L}(X,X/F)} < 2\lambda$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $\|L_F\|_{\mathcal{L}(X,X/F)} \geqslant 2\lambda$ para todo subespaço de dimensão finita $F \subset X$. Dado $x_1 \in X$ com $\|x_1\|_X = 1$, e considerando $F_1 = \operatorname{span}\{Lx_1\}$, da hipótese temos $\|L_{F_1}\|_{\mathcal{L}(X,X/F_1)} \geqslant 1$ e, portanto, existe $x_2 \in X$ com $\|x_2\|_X = 1$ e $\|Lx_2 + F_1\|_X \geqslant 2\lambda - 1$. Definindo $F_2 = \operatorname{span}\{Lx_1, Lx_2\}$, da hipótese temos $\|L_{F_2}\|_{\mathcal{L}(X,X/F_2)} \geqslant 2\lambda$ e existe $x_3 \in X$ com $\|x_3\|_X = 1$ e $\|Lx_3 + F_2\|_X \geqslant 2\lambda - \frac{1}{2}$. Indutivamente, construímos uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$, com $\|x_n\|_X = 1$ e

$$\|Lx_{n+1} + F_n\|_X \geqslant 2\lambda - \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}^*,$$

onde $F_n = \operatorname{span}\{Lx_1, \cdots, Lx_n\}$. Essa última desigualdade pode ser escrita da forma

$$\|Lx_{n+1} - w\|_X \geqslant 2\lambda - \frac{1}{n} \quad \text{para todo } w \in F_n \text{ e } n \in \mathbb{N}^*.$$

Como $L \in \mathcal{L}_\lambda(X)$, podemos escrever $L = K + C$, com K compacto e $\|C\|_{\mathcal{L}(X)} < \lambda$. Então para todos $m > n$, como $Lx_n \in F_n \subset F_{m-1}$ temos

$$\begin{aligned} 2\lambda - \frac{1}{m-1} &\leqslant \|Lx_m - Lx_n\|_X \leqslant \|Kx_m - Kx_n\|_X + \|Cx_m - Cx_n\|_X \\ &\leqslant \|Kx_m - Kx_n\|_X + 2\|C\|_{\mathcal{L}(X)}, \end{aligned}$$

o que nos dá

$$\|Kx_m - Kx_n\|_X \geqslant 2(\lambda - \|C\|_{\mathcal{L}(X)}) - \frac{1}{m-1},$$

o que contradiz a compacidade de K, e encerra a demonstração. □

Definição 2.8. Dada $L \in \mathcal{L}_{\lambda/2}(X)$, definimos $\nu_\lambda(L)$ como o menor inteiro n tal que existe um subespaço $F \subset X$ satisfazendo $\dim F = n$ e $\|L_F\|_{\mathcal{L}(X,X/F)} < \lambda$.

Do Lema 2.7, vemos que $\nu_\lambda(L)$ está bem definido e é finito (note ainda que $\dim L(F) \leqslant \dim(F)$).

Lema 2.9. *Assuma que S é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança $\mathcal{O}_\delta(\mathcal{A})$, $\delta > 0$, e suponha que exista um $\lambda > 0$ tal que $S'(x) \in \mathcal{L}_{\lambda/2}(X)$ para todo $x \in \mathcal{O}_\delta(\mathcal{A})$. Então*

$$\nu := \sup_{x\in\mathcal{A}} \nu_\lambda(S'(x)) < \infty.$$

Demonstração. Para cada $x \in \mathcal{A}$, existe $0 < \lambda_x < \lambda$ tal que $S'(x) \in \mathcal{L}_{\lambda_x/2}(X)$, isto é, existe um subespaço $F \subset X$, com $\dim F < \infty$, tal que $\|S'(x)_F\|_{\mathcal{L}(X,X/F)} < \lambda_x$. Além disso, podemos escrever $S'(x) = K_x + C_x$, onde K_x é compacto e $\|C_x\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{\lambda_x}{2}$. Escolha $\theta > 0$ tal que $\|S'(x)_F\|_{\mathcal{L}(X,X/F)} < \theta < \lambda_x$ e $\|C_x\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{\theta}{2} < \frac{\lambda_x}{2}$. Como S é continuamente diferenciável numa vizinhança de $\mathcal{A}$, existe uma vizinhança U_x de x tal que para todo $y \in U_x$ temos

$$\|S'(y) - S'(x)\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{\lambda_x - \theta}{2}.$$

Logo

$$S'(y) = S'(y) - S'(x) + S'(x) = K_x + C_x + S'(y) - S'(x),$$

e assim

$$\|C_x + S'(y) - S'(x)\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{\theta}{2} + \frac{\lambda_x - \theta}{2} = \frac{\lambda_x}{2},$$

o que mostra que $S'(y) \in \mathcal{L}_{\lambda_x/2}(X)$. Além disso, para $u \in X$ e $f \in F$ temos

$$\|S'(y)u - f\|_X \leqslant \|S'(y)u - S'(x)u\|_X + \|S'(x)u - f\|_X < \frac{\lambda_x - \theta}{2}\|u\|_X + \|S'(x)u - f\|_X,$$

o que nos dá

$$\|S'(y)_F u\|_{X/F} \leqslant \frac{(\lambda_x - \theta)}{2}\|u\|_X + \|S'(x)_F u\|_{X/F} < \frac{\lambda_x + \theta}{2}\|u\|_X.$$

Portanto

$$\|S'(y)_F\|_{\mathcal{L}(X,X/F)} \leqslant \frac{\lambda_x + \theta}{2} < \lambda_x.$$

Em particular, obtemos $\nu_\lambda(S'(y)) \leqslant \dim F$ para todo $y \in U_x$. A coleção $\{U_x\}_{x \in \mathcal{A}}$ formam uma cobertura aberta de $\mathcal{A}$. Da compacidade de $\mathcal{A}$, existem $x_1, \cdots, x_k \in \mathcal{A}$ tais que

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i},$$

e como $\nu_\lambda(S'(y)) < \infty$ em cada U_{x_i}, o resultado segue. $\square$

A seguir veremos dois resultados que serão fundamentais para dar prosseguimento ao nosso estudo, e são inspirados em [17]. Para tanto, consideraremos X um espaço de Banach real. O caso complexo pode ser feito de maneira análoga.

Lema 2.10. *Se F é um subespaço vetorial de X (onde X é um espaço de Banach real), com $\dim F = m$, então existem bases $\{v_1, \dots, v_m\}$ de F e $\{v_1^*, \dots, v_m^*\}$ de F^* tais que $\|v_i\|_X = \|v_i^*\|_{F^*} = 1$ para cada $i = 1, \dots, m$, e também que $\langle v_j, v_i^* \rangle = \delta_{ij}$ para $i, j = 1, \dots, m$.*

Além disso, se $\mathbb{E}^m$ é o espaço $\mathbb{R}^m$ munido da norma

$$\|(x_1, \dots, x_m)\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,m} |x_i|,$$

então existe um isomorfismo linear $T\colon \mathbb{E}^m \to F$ tal que

$$\|x\|_\infty \leqslant \|Tx\|_X \leqslant m\|x\|_\infty \quad \text{para todo } x \in \mathbb{E}^m.$$

Demonstração. Tomemos uma base qualquer $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_m\}$ de F e, para um elemento $x \in F$, denotamos por $\hat{x}$ a matriz coluna $m \times 1$ das coordenadas de x na base $\mathcal{B}$. Defina a aplicação contínua

$$F^m \ni (x_1, \dots, x_m) \mapsto D(x_1, \dots, x_m) = |\det[\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m]| \in [0, \infty),$$

onde F^m é o produto cartesiano de m-cópias de F. Tendo F dimensão finita, a sua bola unitária fechada $\overline{B}_1^F(0)$ é compacta e, portanto, D atinge seu máximo num ponto $(v_1, \ldots, v_m) \in (\overline{B}_1^F(0))^m$. Claramente $D(v_1, \ldots, v_m) > 0$, o que mostra que $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é uma base de F. Além disso, se $\|v_i\|_X < 1$ para algum $i = 1, \ldots, m$ então podemos tomar $\alpha > 1$ tal que $\alpha\|v_i\|_X < 1$ e

$$D(v_1, \ldots, v_{i-1}, \alpha v_i, v_{i+1}, \ldots, v_m) = \alpha D(v_1, \ldots, v_m) > D(v_1, \ldots, v_m),$$

o que contradiz a escolha de $(v_1, \ldots, v_n)$ e nos mostra que $\|v_i\|_X = 1$ para cada $i = 1, \ldots, m$. Agora, para cada $i = 1, \ldots, m$ defina

$$\langle x, v_i^* \rangle = \frac{\det[\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_{i-1}, \hat{x}, \hat{v}_{i+1}, \ldots, \hat{v}_m]}{\det[\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_m]} \quad \text{para cada } x \in F.$$

Temos $v_i^* \in F^*$, $\|v_i^*\|_{F^*} = 1$ e $\langle v_j, v_i^* \rangle = \delta_{ij}$ para todos $i, j = 1, \ldots, m$, o que nos dá também que $\{v_1^*, \cdots, v_m^*\}$ é uma base de F^*.

Finalmente, defina

$$T(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^m x_i v_i \quad \text{para cada } (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{E}^m.$$

Claramente T é um isomorfismo linear com $\|Tx\|_X \leqslant m\|x\|_X$ para cada $x \in \mathbb{E}^m$. Se $u = Tx = \sum_{i=1}^n x_i v_i \in F$ então

$$\|Tx\|_X = \|u\|_X \overset{(*)}{\geqslant} \max_{i=1,\cdots,m} |\langle u, v_i^* \rangle| = \max_{i=1,\ldots,m} |x_i| = \|x\|_\infty,$$

em que, em $(*)$ usamos o fato de que $|\langle u, v_i^* \rangle| \leqslant \|u\|_X \|v_i^*\|_{F^*} = \|u\|_X$ para cada $i = 1, \ldots, m$. □

Lema 2.11. *Temos*

$$N\left(\frac{r_1}{m}, B_{r_2}^{\mathbb{E}^m}(0)\right) \leqslant \left(1 + \frac{mr_2}{r_1}\right)^m,$$

onde $B_{r_2}^{\mathbb{E}^m}(0) = \{x \in \mathbb{R}^m \colon \|x\|_\infty < r_2\}$ *e* $0 < r_1 \leqslant r_2$.

Demonstração. Note que para $m = 1$ temos $B_{r_2}^{\mathbb{E}^1}(0) = (-r_2, r_2)$. Seja k o inteiro tal que $\frac{r_2}{r_1} < k \leqslant \frac{r_2}{r_1} + 1$. Defina

$$a_j = -r_2 + 2(j-1)r_1 \quad \text{para } j = 1, \ldots, k+1.$$

Veja que

$$(-r_2, r_2) \setminus \{a_j \colon 2 = 1, \ldots, k\} = \bigcup_{i=1}^k (a_i, a_{i+1}),$$

pois $a_k \leqslant r_2 < a_{k+1}$. Se $\epsilon = a_{k+1} - r_2 > 0$, então escolhendo $\eta_1 = 0$ e $0 < \eta_2 < \eta_3 < \ldots < \eta_k < \epsilon$, temos

$$(-r_2, r_2) \subset \bigcup_{i=1}^k (a_i - \eta_i, a_{i+1} - \eta_i).$$

Como cada $(a_i - \eta_i, a_{i+1} - \eta_i) = B^{\mathbb{E}^1}_{r_1}(-r_2 + 2(i-1)r_1)$, mostramos que $B^{mathbbE^1}_{r_2}(0)$ pode ser coberta com k bolas de raio r_1, e o resultado para o caso $m = 1$ está provado. A prova para $m > 1$ é análoga. □

Lema 2.12. *Seja F um subespaço vetorial de X (onde X é um espaço de Banach real), com $\dim F = m$. Para cada $0 < r_1 \leqslant r_2$ temos*

$$N(r_1, B^F_{r_2}(0)) \leqslant (1+m)^m \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)^m,$$

onde $B^F_{r_2}(0) = \{z \in F \colon \|z\|_X < r_2\}$.

Demonstração. Veja que, como $\|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(F,\mathbb{E}^m)} \leqslant 1$, temos

$$B^F_{r_2}(0) = TT^{-1}(B^F_{r_2}(0)) \subset T(B^{\mathbb{E}^m}_{r_2}(0)).$$

Usando o Lema 2.11 obtemos

$$k := N\left(\frac{r_1}{m}, B^{\mathbb{E}^m}_{r_2}(0)\right) \leqslant \left(1 + \frac{mr_2}{r_1}\right)^m \leqslant (1+m)^m \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)^m,$$

e assim existem $z_1, \ldots, z_k \in B^{\mathbb{E}^m}_{r_2}(0)$ tais que

$$B^{\mathbb{E}^m}_{r_2}(0) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B^{\mathbb{E}^m}_{r_1/m}(z_i)$$

e, portanto,

$$B^F_{r_2}(0) \subset \bigcup_{i=1}^{k} T(B^{\mathbb{E}^m}_{r_1/m}(z_i)) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B^F_{r_1}(T(z_i)),$$

já que $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}^m,F)} \leqslant m$. Isto nos mostra que

$$N(r_1, B^F_{r_2}(0)) \leqslant k \leqslant (1+m)^m \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)^m.$$

□

Note que, no caso $r_1 > r_2$, temos

$$N(r_1, B^F_{r_2}(0)) = 1 \leqslant (1+m)^m \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)^m.$$

Lema 2.13. *Sejam $L \in \mathcal{L}(X)$ e F um subespaço vetorial de X (onde X é um espaço de Banach real), com $\dim F = m$ e $\|L_F\|_{\mathcal{L}(X,X/F)} < \infty$. Então, dados $\gamma, r > 0$ e $\lambda > \|L_F\|_{\mathcal{L}(X,X/F)}$ temos*

$$N((1+\gamma)\lambda r, L(B^X_r(0)) \leqslant (1+m)^m \left(1 + \frac{\|L\|_{\mathcal{L}(X)} + \lambda}{\lambda\gamma}\right)^m. \tag{2.1}$$

Além disso, os centros das bolas dessa cobertura podem ser escolhidos em F.

Demonstração. Pela linearidade de L, podemos assumir que $r = 1$. Seja $R = \|L\|_{\mathcal{L}(X)} + \lambda$. Usando o Lema 2.12, conseguimos cobrir a bola $B_R^F(0)$ por k bolas $B_{\gamma\lambda}^F(x_i)$, com $x_i \in B_R^F(0)$ para $i = 1, \dots, k$, e

$$k \leqslant (1+m)^m \left(1 + \frac{R}{\gamma\lambda}\right)^m.$$

Agora se $v \in B_1^X(0)$ temos

$$\inf_{w \in F} \|Lv - w\|_X = \|L_F v\|_{X/F} \leqslant \|L_F\|_{\mathcal{L}(X,X/F)} \|v\|_X < \lambda.$$

Deste modo, existe $w \in F$ com $\|Lv - w\|_X < \lambda$. Definindo $u = Lv - w$, temos $Lv = u + w$ e $\|u\|_X < \lambda$. Assim $\|w\|_X \leqslant \|Lv\|_X + \|u\|_X < \|L\|_{\mathcal{L}(X)} + \lambda = R$, e existe $i = 1, \dots, k$ tal que $w \in B_{\gamma\lambda}^F(x_i)$. Portanto

$$\|Lv - x_i\|_X \leqslant \|u\|_X + \|w - x_i\|_X < \lambda + \gamma\lambda = (1+\gamma)\lambda,$$

o que mostra que

$$L(B_1^X(0)) \subset \bigcup_{i=1}^k B_{(1+\gamma)\lambda}^X(x_i),$$

e o resultado está provado. □

Podemos, com esses lemas, retomar o nosso estudo sobre o semigrupo $\{S^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Proposição 2.14. *Suponha que existe $\delta > 0$ tal que S é continuamente diferenciável na vizinhança $\mathcal{O}_\delta(\mathcal{A})$ e que existe $\lambda \in (0, 1/2)$ tal que $S'(x) \in \mathcal{L}_{\lambda/2}$ para todo $x \in \mathcal{O}_\delta(\mathcal{A})$. Então existem $r_0 > 0$, $\theta \in (0,1)$ e um inteiro k_0, que dependem somente de $\nu := \sup_{x \in \mathcal{A}} \nu_\lambda(S'(x))$ e $M := \sup_{x \in \mathcal{A}} \|S'(x)\|_{\mathcal{L}(X)}$ tal que para cada $r \in (0, r_0]$ temos*

$$N(\theta r, S(B_r^X(x) \cap \mathcal{A})) \leqslant k_0. \tag{2.2}$$

Além disso, a cobertura bolas são centradas em $\mathcal{A}$.

Demonstração. Fixemos $\epsilon_0 > 0$. Como S é continuamente diferenciável numa vizinhança de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é compacto, podemos encontrar $r_0 = r_0(\epsilon_0) > 0$ tal que para todo $x \in \mathcal{A}$ e $r \in (0, r_0]$ temos

$$S(B_r^X(x) \cap \mathcal{A}) \subset S(x) + S'(x)(B_r^X(x)) + B_{\epsilon_0 r}^X(0). \tag{2.3}$$

onde $S'(x)(B_r^X(x)) + B_{\epsilon_0 r}(0)$ é a $\epsilon_0 r$-vizinhança do conjunto $S'(x)(B_r^X(x))$ em X. Do Lema 2.13, para cada $\epsilon > 0$, temos

$$N\left((1+\epsilon)\lambda r, S'(x)(B_r^X(x))\right) \leqslant k_0 := (1+\nu)^\nu \left(1 + \frac{M+\lambda}{\lambda\epsilon}\right)^\nu,$$

e os centros das bolas da usadas para cobrir $S'(x)(B_r^X(x))$ podem ser tomados em F_x, em que F_x é um subespaço de dimensão finita de X obtido pelo Lema 2.7 aplicado à $S'(x)$ (note que usamos o fato que $\dim F_x \leqslant \nu$, pelo Lema 2.9).

Aumentando o raio das bolas de $(1+\epsilon)\lambda r$ para $(1+\epsilon)\lambda r+\epsilon_0 r$, obtemos uma cobertura para $S(B_r^X(x)\cap\mathcal{A})$ com centros em $S(x)+F_x$ e raio βr onde

$$\beta := (1+\epsilon)\lambda + \epsilon_0.$$

Por fim, se $B_{\beta r}(y)$, com $y\in S(x)+F_x$, é uma bola da cobertura e intersecta $S(B_r^X(x)\cap\mathcal{A})$, então podemos escolher um ponto $z\in S(B_r^X(x)\cap\mathcal{A})\cap B_{\beta r}^X(y)$. A bola $B_{2\beta r}^X(z)$ contém a bola $B_{\beta r}(y)$. Assim, obtemos uma cobertura para $S(B_r^X(x)\cap\mathcal{A})$ com no máximo k_0 bolas de raio $2\beta r$ e centradas em $S(B_r^X(x)\cap\mathcal{A})\subset S(\mathcal{A})=\mathcal{A}$. Defina $\theta=2\beta$. Como $\lambda<1/2$, podemos escolher $\epsilon,\epsilon_0>0$ pequenos o suficiente de maneira que $\beta<1/2$, o que nos dá $\theta<1$ e encerra a prova. □

Com isso, somos capazes de mostrar que a dimensão fractal do atrator global $\mathcal{A}$ de $\{S^n\colon n\in\mathbb{N}\}$ é finita.

Teorema 2.15. *Suponha que existe $\delta>0$ tal que S é continuamente diferenciável na vizinhança $\mathcal{O}_\delta(\mathcal{A})$ e que existe $\lambda\in(0,1/2)$ tal que $S'(x)\in\mathcal{L}_{\lambda/2}$ para todo $x\in\mathcal{O}_\delta(\mathcal{A})$. Então*

$$c(\mathcal{A})\leqslant -\frac{\ln k_0}{\ln\theta}.$$

Demonstração. Considere $r_0>0$, $\theta\in(0,1)$ e k_0 dados na Proposição 2.14. Como $\mathcal{A}$ é compacto, podemos cobrir $\mathcal{A}$ com N_0 bolas de raio r_0, isto é,

$$\mathcal{A}=\bigcup_{i=1}^{N_0} B_{r_0}^X(x_i)\cap\mathcal{A}.$$

Como $S(\mathcal{A})=\mathcal{A}$, temos

$$\mathcal{A}\subset\bigcup_{i=1}^{N_0} S(B_{r_0}^x(x_i)\cap\mathcal{A}).$$

Da Proposição 2.14, existem k_0 bolas de raio θr_0 que cobrem cada uma dessas bolas, ou seja

$$N(\theta r_0,\mathcal{A})\leqslant N_0k_0.$$

Aplicando indutivamente esse argumento, obtemos

$$N(\theta^k r_0,\mathcal{A})\leqslant N_0k_0^k,$$

o que nos dá

$$c(\mathcal{A})\leqslant\limsup_{k\to\infty}\frac{\ln N(\theta^k r_0,\mathcal{A})}{\ln(1/\theta^k r_0)}\leqslant\limsup_{k\to\infty}\frac{\ln N_0k_0^k}{\ln(1/\theta^k r_0)}=-\frac{\ln k_0}{\ln\theta}.$$

□

2.3 Construção de um atrator exponencial para um semigrupo discreto

Precisaremos adaptar os resultados da seção anterior, a fim de sermos capazes de adicionar ao atrator global $\mathcal{A}$ de um semigrupo discreto $\{S^n : n \in \mathbb{N}\}$ num espaço de Banach X (de dimensão infinita, em geral) órbitas de pontos cuidadosamente selecionados, e assim construir um atrator exponencial para tal semigrupo. A adaptação dos resultados anteriores é necessária para que consigamos estimar a dimensão fractal do conjunto obtido. Começamos com o alguns lemas.

Lema 2.16. *Se $\mathcal{A}$ é um compacto, dados $x_i \in \mathcal{A}$ e U_{x_i} vizinhança de x_i em X para $i = 1, \ldots, n$ com $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$, então existe $\delta_0 > 0$ tal que $\mathcal{O}_{\delta_0}(\mathcal{A}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$.*

Demonstração. Se o resultado não é verdade, então existe

$$z_n \in \mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(\mathcal{A}) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Do Lema A.1, podemos assumir que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para um ponto z de $\mathcal{A}$. Como $z_n \notin \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e esse é um conjunto aberto, obtemos $z \in \mathcal{A} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$, o que nos dá uma contradição. □

Estendemos o Lema 2.9 para uma vizinhança do atrator global.

Lema 2.17. *Sejam $\mathcal{A} \subset X$ um compacto e suponha que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A})$ é positivamente invariante por S, e S continuamente diferenciável em $\mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A})$. Suponha também que existe $\lambda > 0$ tal que $S'(x) \in \mathcal{L}_{\lambda/2}$ para cada $x \in \mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A})$. Então existe $0 < \delta_0 \leqslant \epsilon_0$ tal que*

$$\sup_{x\in\mathcal{O}_{\delta_0}(\mathcal{A})} \nu_\lambda(S'(x)) < \infty.$$

Demonstração. Procedendo como no Lema 2.9, podemos encontrar $x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{A}$ e vizinhanças U_{x_i} de x_i, para $i = 1, \ldots, k$ tais que $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \subset \mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A})$ e $\sup_{y\in U_{x_i}} \nu_\lambda(S'(y)) < \infty$.

Do Lema 2.16, existe $0 < \delta_0 \leqslant \epsilon_0$ tal que $\mathcal{O}_{\delta_0}(\mathcal{A}) \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}$, e o resultado segue. □

Com isso, conseguimos estender a inclusão (2.3) usada na demonstração da Proposição 2.14 para uma vizinhança do atrator global.

Lema 2.18. *Suponha que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A})$ é positivamente invariante por S, S é continuamente diferenciável na vizinhança $\mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A})$ e que existe $\lambda \in (0, 1/2)$ tal que $S'(x) \in \mathcal{L}_{\lambda/2}$ para todo $x \in \mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A})$. Dado $\rho_0 > 0$ existem $r_0 > 0$ e $0 < \delta_1 < \epsilon_0$ tais que para todo $x \in \mathcal{O}_{\delta_1}(\mathcal{A})$ e $r \in (0, r_0]$ temos*

$$S(B_r^X(x) \cap \mathcal{O}_{\delta_1}(\mathcal{A})) \subset S(x) + S'(x)(B_r^X(x)) + B_{\rho_0 r}^X(0).$$

Demonstração. Dados $\rho_0 > 0$ e $x \in \mathcal{A}$, como S é continuamente diferenciável em $\mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A})$, existe $r_x > 0$ tal que para cada $0 < r \leqslant r_x$ temos

$$S(B_r^X(x) \cap \mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A})) \subset S(x) + S'(x)(B_r^X(x)) + B^X_{\frac{\rho_0}{6}r}(0),$$

e para $u \in B^X_{r_x}(x)$

$$\|S'(u) - S'(x)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{\rho_0}{3}. \tag{2.4}$$

Agora, veja que para cada $y \in B^X_{\frac{r_x}{2}}(x)$ e $z \in B_r^X(y)$, com $0 < r < \frac{r_x}{2}$, temos

$$\begin{aligned} &\|S(z) - S(y) - S'(y)(z-y)\|_X \\ &= \left\| \int_0^1 [S'(y + \tau(z-y))(z-y) - S'(y)(z-y)]\, d\tau \right\|_X \\ &= \left\| \int_0^1 (S'(y+\tau(z-y)) - S'(y))\, d\tau \cdot (z-y) \right\|_X \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\|S'(y+\tau(z-y)) - S'(x)\|_{\mathcal{L}(X)} + \|S'(x) - S'(y)\|_{\mathcal{L}(X)} \right) d\tau \cdot \|z-y\|_X \end{aligned} \tag{2.5}$$

Das escolhas de y e z, obtemos $y + \tau(z-y) \in B^X_{r_x}(x)$ para cada $\tau \in [0,1]$. Assim, ao inserirmos a estimativa (2.4) em (2.5), temos

$$\|S(z) - S(y) - S'(y)(z-y)\|_X \leqslant \frac{2}{3}\rho_0\|z-y\|_X < \rho_0\|z-y\|_X.$$

Para cada $w \in B^X_{\frac{r_x}{2}}(x)$ e $0 < r < \frac{r_x}{2}$, segue que

$$S(B_r^X(w) \cap \mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A})) \subset S(w) + S'(w)(B_r^X(w)) + B^X_{\rho_0 r}(0). \tag{2.6}$$

Aplicando o Lema 2.16 ao conjunto $\mathcal{A}$, segue que existem $0 < \delta_1 < \epsilon_0$ e $x_1, \ldots, x_m \in \mathcal{A}$ tais que $\mathcal{O}_{\delta_1}(\mathcal{A}) \subset \bigcup_{i=1}^m B^X_{\frac{r_{x_i}}{2}}(x_i)$. Logo para cada $w \in B^X_{\frac{r_x}{2}}(x_i)$ e $0 < r < \frac{r_{x_i}}{2}$, $i = 1, \ldots, m$, temos

$$S(B_r^X(w) \cap \mathcal{O}_{\delta_1}(\mathcal{A})) \subset S(w) + S'(w)(B_r^X(w)) + B^X_{\rho_0 r}(0).$$

Tomando $r_0 = \min\limits_{i=1,\ldots,m} \frac{r_{x_i}}{2} > 0$, concluímos que

$$S(B_r^X(x) \cap \mathcal{O}_{\delta_1}(\mathcal{A})) \subset S(x) + S'(x)(B_r^X(x)) + B^X_{\rho_0 r}(0),$$

para todos $x \in \mathcal{O}_{\delta_1}(\mathcal{A})$ e $0 < r \leqslant r_0$, o que finaliza a prova. □

Observação 2.19. Para cada $\rho \in (0, \min\{\delta_0, \delta_1\})$, onde δ_0 é dado no Lema 2.17 e δ_1 é dado no lema acima, o conjunto $D := \overline{\mathcal{O}_\rho(\mathcal{A})}$, satisfaz as conclusões dos Lemas 2.17 e 2.18, isto é, $\sup\limits_{x \in D} \nu_\lambda(S'(x)) < \infty$ e, dado $\rho_0 > 0$ existe $r_0 > 0$ tal que para cada $x \in D$ e $r \in (0, r_0]$ temos

$$S(B_r^X(x) \cap D) \subset S(x) + S'(x)(B_r^X(x)) + B^X_{\rho_0 r}(0).$$

O conjunto D, em geral, pode não ser positivamente invariante por S.

Usando as notações acima, para um semigrupo $\{S^n\colon n\in\mathbb{N}\}$ com um atrator global $\mathcal{A}$, temos os seguintes resultados.

Lema 2.20. *Para cada inteiro* $m\geqslant 1$, $\overline{S^m(\mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A}))}$ *é positivamente invariante por* S *e existe um inteiro* m_0 *tal que para cada inteiro* $m\geqslant m_0$, *temos*

$$\overline{S^m\left(\mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A})\right)}\subset D. \tag{2.7}$$

Demonstração. Para $m\geqslant 1$, como $S(\mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A}))\subset \mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A})$, temos

$$S(S^m(\mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A})))=S^m(S(\mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A})))\subset S^m(\mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A})).$$

Agora, basta notar que se C é um conjunto invariante por S então seu fecho também é (veja Lema A.2), e portanto $\overline{S^m(\mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A}))}$ é invariante por S. Além disso, como $\mathcal{A}$ é o atrator global de $\{S^n\colon n\in\mathbb{N}\}$ e $\mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A})$ é limitado, existe $m_0\geqslant 0$ tal que para $m\geqslant m_0$ temos $S^m(\mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A}))\subset D$. Como D é fechado, tomando o fecho obtemos (2.7) □

Defina $\mathcal{B}=\overline{S^{m_0}(\mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A}))}$, onde m_0 é dado no lema acima. Note que $S\colon\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ e que $\mathcal{B}\subset D$. Assim, dado $\rho_0>0$ existe $r_0>0$ tal que para cada $x\in\mathcal{B}$ e $r\in(0,r_0]$ temos

$$S(B_r^X(x)\cap\mathcal{B})\subset S(x)+S'(x)(B_r^X(x))+B_{\rho_0 r}^X(0),$$

e $\nu:=\sup\limits_{x\in\mathcal{B}}\nu_\lambda(S'(x))<\infty$. Aplicando o Lema 2.13 obtemos

$$N((1+\gamma)\lambda r,S'(x)(B_r^X(x)))\leqslant k_0:=(1+\nu)^\nu\left(1+\frac{\sup\limits_{x\in\mathcal{B}}\|S'(x)\|_{\mathcal{L}(X)}+\lambda}{\lambda\gamma}\right)^\nu,$$

para $\gamma>0$, $r>0$ e $x\in\mathcal{B}$. Aumentando o raio das bolas de $(1+\gamma)\lambda r$ para $(1+\gamma)\lambda r+\epsilon_0 r$, obtemos uma cobertura para $S(B_r^X(x)\cap\mathcal{B})$ com centros em $S(x)+F_x$ e raio βr onde

$$\beta:=(1+\gamma)\lambda+\epsilon_0.$$

Por fim, se $B_{\beta r}(y)$, com $y\in S(x)+F_x$, é uma bola da cobertura e intersecta $S(B_r^X(x)\cap\mathcal{B})$, então podemos escolher um ponto $z\in S(B_r^X(x)\cap\mathcal{B})\cap B_{\beta r}^X(y)$. A bola $B_{2\beta r}^X(z)$ contém a bola $B_{\beta r}(y)$. Assim, obtemos uma cobertura para $S(B_r^X(x)\cap\mathcal{B})$ com no máximo k_0 bolas de raio $2\beta r$ e centradas em $S(B_r^X(x)\cap\mathcal{B})\subset S(\mathcal{B})\subset\mathcal{B}$. Defina $\theta=2\beta$. Como $\lambda<1/2$, podemos escolher $\epsilon,\epsilon_0>0$ pequenos o suficiente de maneira que $\beta<1/2$, o que nos dá $\theta<1$. Com isso, obtemos $\theta\in(0,1)$ tal que para cada $r\in(0,r_0]$ e subconjunto limitado $B\subset\mathcal{B}$ temos

$$N(\theta r,S(B_r^X(x)\cap B))\leqslant k_0. \tag{2.8}$$

Passo 1. Cobrimos primeiramente $S(\mathcal{B})$.

Como $S(\mathcal{B})\subset\mathcal{B}\subset D$, basta cobrir D, onde $D=\overline{\mathcal{O}_\rho(\mathcal{A})}$ é definido na Observação 2.19). Podemos escolhemos $\rho>0$ suficientemente pequeno tal que $0<\rho<\frac{\theta r_0}{4}$, onde

$\theta \in (0,1)$ e $r_0 > 0$ são dados acima. Como $\mathcal{A}$ é compacto, podemos cobrir D com N_0 bolas $\{B^X_{\theta r_0}(a_i)\}_{i=1}^{N_0}$ centradas em $S(\mathcal{B})$. Assim

$$S(\mathcal{B}) \subset D \subset \bigcup_{i=1}^{N_0} B^X_{\theta r_0}(a_i) \cap S(\mathcal{B}),$$

e definimos

$$X^{(1)} = \{a_1, \ldots, a_{N_0}\} \subset S(\mathcal{B}).$$

Passo 2. Agora cobriremos $S^2(\mathcal{B})$, uma vez que

$$S^2(\mathcal{B}) \subset \bigcup_{i=1}^{N_0} S(B^X_{\theta r_0}(a_i) \cap S(\mathcal{B})),$$

nós precisamos cobrir cada conjunto no lado direito. De (2.8) (com $B = S(\mathcal{B})$), para cada $i_1 \in \{1, \ldots, N_0\}$ podemos encontrar (no máximo) k_0 pontos $a_{i_1,i_2} \in S^2(\mathcal{B})$, $i_2 = 1, \cdots, k_0$, tal que as bolas $B^X_{\theta^2 r_0}(a_{i_1,i_2})$ sejam uma cobertura para $S(B^X_{\theta r_0}(a_{i_1}) \cap S(\mathcal{B}))$. Definimos então

$$X_{2;i_1} := \{a_{i_1,i_2} \colon i_2 \in \{1, \ldots, k_0\}\} \quad \text{para } i_1 = 1, \cdots, N_0,$$

e

$$X^{(2)} := \bigcup_{i_1=1}^{N_0} X_{2;i_1}.$$

Note que a cardinalidade de $X^{(2)}$, denotada por $\operatorname{card}(X^{(2)})$, é (no máximo) $k_0 N_0$.

Passo Indutivo. Indutivamente obtemos a k-ésima coleção de pontos $S^k(\mathcal{B})$ satisfazendo

$$X_{k;\ i_1,\ldots,i_{k-1}} := \{a_{i_1,\ldots,i_{k-1},j} \colon j \in \{1, \ldots, k_0\}\},$$

e

$$X^{(k)} := \bigcup_{i_1=1}^{N_0} \bigcup_{i_2,\ldots,i_{k-1}=1}^{k_0} X_{k;\ i_1,\ldots,i_{k-1}} \subset S^k(\mathcal{B}),$$

com $\operatorname{card}(X^{(k)}) \leqslant k_0^{k-1} N_0$. Notemos que as bolas de raio $\theta^k r_0$ com os centros em $X_{k;i_1,\ldots,i_{k-1}}$ cobrem o conjunto $S(B^X_{\theta^{k-1} r_0}(a_{i_1,\ldots,i_{k-1}})) \cap S^{k-1}(\mathcal{B}))$ e também

$$S^k(\mathcal{B}) \subset \bigcup_{a \in X^{(k)}} B^X_{\theta^k r_0}(a). \tag{2.9}$$

Definimos então

$$C_\infty := \overline{\bigcup_k X^{(k)}} \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{M} X^{(k)}} \cup S^{M+1}(\mathcal{B}), \tag{2.10}$$

onde $M \geqslant 1$ é um inteiro qualquer fixado, e a inclusão vem dos fatos de que $X^{(k)} \subset S^{M+1}(\mathcal{B})$ para todo $k \geqslant M+1$ e que todo ponto limite de $\cup_k X^{(k)}$ deve pertencer ao atrator global $\mathcal{A}$, que por sua vez está contido em $S^{M+1}(\mathcal{B})$.

Além disso, consideraremos

$$\Gamma_\infty := \bigcup_{j=0}^{\infty} S^j(C_\infty), \quad \text{e} \quad \mathcal{M} := \mathcal{A} \cup \Gamma_\infty$$

Observação 2.21. É simples ver que $\mathcal{M}$ é compacto, uma vez que C_∞ é compacto e $d_H(S^j(C_\infty), \mathcal{A}) \to 0$ quando $j \to \infty$. Além disso, como Γ_∞ é positivamente invariante, obtemos $\mathcal{M}$ positivamente invariante.

Mostremos que $\mathcal{M}$ atrai exponencialmente os subconjuntos limitados de X. De fato, se $B \subset X$ é limitado, como $\mathcal{A}$ é o atrator global, encontramos $n \geqslant 0$ tal que $S^n(B) \subset \mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A})$. Como $\mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A})$ é positivamente invariante, temos $S^j(B) \subset \mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathcal{A})$ para todo $j \geqslant n$ e, para $j \geqslant n + m_0$ temos $S^j(B) \subset \mathcal{B}$. Disso segue que

$$S^{k+n+m_0}(B) \subset S^k(\mathcal{B}) \quad \text{para todo } k \geqslant 1.$$

Dado $x \in B$, de (2.9) existe $a \in X^k$ tal que

$$\|S^{k+n+m_0}(x) - a\| \leqslant \theta^k r_0.$$

Como $a \in S(X^{(k)}) \subset \mathcal{M}$, obtemos

$$d_H(S^{k+n+m_0}(B), \mathcal{M}) \leqslant \theta^k r_0,$$

para todo $k \geqslant 1$. Disso segue facilmente que $\mathcal{M}$ atrai B exponencialmente.

Para mostrar que $\mathcal{M}$ é atrator exponencial do semigrupo discreto $\{S^n : n \in \mathbb{N}\}$ basta mostrar que sua dimensão fractal é finita. Na seção anterior já mostramos que a dimensão fractal de $\mathcal{A}$ é finita e, portanto, basta mostrar que a dimensão fractal de Γ_∞ é finita.

Começamos mostrando que a dimensão fractal de C_∞ é finita.

Lema 2.22. $c(C_\infty) < \infty$.

Demonstração. Sejam $B^X_{\theta r_0}(x_i)$, $i = 1, \dots, N_0$ as bolas de raio θr_0 que formam a cobertura de $S(\mathcal{B})$. Para cada $\epsilon > 0$ dado, se $\theta < 1$ podemos encontrar um inteiro M e $\rho \in [\theta r_0, r_0]$ tal que

$$\theta^{M+2} r_0 < \epsilon \leqslant \theta^{M+1} r_0 \qquad e \qquad \epsilon = \theta^{M+1}\rho.$$

De (2.10) temos

$$C_\infty \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{M} X^{(k)} \cup S^{M+1}(\mathcal{B})},$$

e portanto

$$N(\epsilon, C_\infty) \leqslant \sum_{k=1}^{M} N(\epsilon, X^{(k)}) + N(\epsilon, S^{M+1}(\mathcal{B})) \tag{2.11}$$

Uma vez que $\epsilon = \theta^{M+1}\rho$ e $\rho \leqslant r_0$, podemos aplicar iterativamente (2.8) para obter

$$N(\epsilon, S^{M+1}(\mathcal{B})) = N(\theta^{M+1}\rho, S^{M+1}(\mathcal{B})) \leqslant k_0^{M+1} N(\rho, S(\mathcal{B}))$$

$$\leqslant k_0^{M+1} N(\theta r_0, S(\mathcal{B})) \leqslant k_0^{M+1} N_0.$$

Além disso, pela cardinalidade de $X^{(k)}$, podemos cobri-lo com (no máximo) $k_0^{k-1} N_0$ bolas de raio ϵ. A partir de 2.11 nós obtemos

$$N(\epsilon, C_\infty) \leqslant \sum_{k=1}^{M} k_0^{k-1} N_0 + k_0^{M+1} N_0 \leqslant M N_0 k_0^{k-1} + k_0^{M+1} N_0.$$

Uma vez que $\epsilon = \theta^{M+1}\rho$ temos $M + 1 = \frac{\ln(\rho/\epsilon)}{\ln(1/\theta)}$, de modo que

$$\begin{aligned} N(\epsilon, C_\infty) &\leqslant k_0^{M+1}(M+1)N_0 \\ &\leqslant k_0^{\ln(\rho/\epsilon)/\ln(1/\theta)} \frac{\ln(\rho/\epsilon)}{\ln(1/\theta)} N_0 \\ &\overset{(*)}{=} \left(\frac{\rho}{\epsilon}\right)^{\ln(k_0)/\ln(1/\theta)} \frac{\ln(\rho/\epsilon)}{\ln(1/\theta)} N_0, \end{aligned}$$

onde em $(*)$ usamos a propriedade $a^{\ln(b)} = b^{\ln(a)}$. Por isso,

$$\frac{\ln(N(\epsilon, C_\infty))}{\ln(1/\epsilon)} \leqslant \frac{\ln(k_0)}{\ln(1/\theta)} \cdot \frac{\ln(\rho/\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)} + \frac{\ln\left(N_0 \frac{\ln(\rho/\epsilon)}{\ln(1/\theta)}\right)}{\ln(1/\epsilon)}.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ obtemos

$$c(C_\infty) \leqslant \frac{\ln(k_0)}{\ln(1/\theta)} < \infty.$$

□

Com isso, somos capazes de mostrar que a dimensão fractal de Γ_∞ é finita, o que conclui a prova de que $\mathcal{M}$ é um atrator exponencial para o semigrupo discreto $\{S^n \colon n \in \mathbb{N}\}$.

Lema 2.23. *Temos*

$$c(\Gamma_\infty) \leqslant \max\left\{c(C_\infty), \frac{\ln k_0}{\ln(1/\theta)}\right\}.$$

Demonstração. Fixemos $\epsilon > 0$. Escolha inteiros M e ρ como na demonstração do Lema 2.22, isto é, $\theta^{M+2} r_0 < \epsilon \leqslant \theta^{M+1} r_0$, $\rho \in [\theta r_0, r_0]$ tal que $\epsilon = \theta^{M+1}\rho$.

Como $S^j(C_\infty) \subset S^{M+1}(\mathcal{B})$ para todo $j > M$, temos

$$\Gamma_\infty = \left(\bigcup_{j=0}^{M} S^j(C_\infty)\right) \cup \left(\bigcup_{j=M+1}^{\infty} S^j(C_\infty)\right) \subset \left(\bigcup_{j=0}^{M} S^j(C_\infty)\right) \cup S^{M+1}(\mathcal{B}),$$

e assim

$$N(\epsilon, \Gamma_\infty) \leqslant \sum_{j=0}^{M} N(\epsilon, S^j(C_\infty)) + N(\epsilon, S^{M+1}(\mathcal{B})).$$

Como antes, temos a seguinte estimativa $N(\epsilon, S^{M+1}(\mathcal{B})) \leqslant k_0^{M+1} N_0$. Os cálculos da demonstração do Lema 2.22 podem ser utilizado iterativamente (uma vez que $\epsilon\theta^{-j} \leqslant \epsilon\theta^{-M} \leqslant \theta r_0$, para $j \leqslant M$) para concluir que

$$N(\epsilon, S^j(C_\infty)) \leqslant k_0^j N(\epsilon\theta^{-j}, C_\infty)$$

e, portanto

$$N(\epsilon, \Gamma_\infty) \leqslant \sum_{j=0}^{M} k_0^j N(\epsilon\theta^{-j}, C_\infty) + k_0^{M+1} N_0.$$

Para cada $d > c(C_\infty)$ existe uma constante $c = c(d) > 0$ satisfazendo

$$N(\delta, C_\infty) \leqslant c(d) \left(\frac{1}{\delta}\right)^d \qquad \text{para todo } \delta \in (0, r_0].$$

Por isso, com $\delta = \epsilon\theta^{-j} \leqslant r_0$ para $j = 0, \ldots, M$, nós temos

$$N(\epsilon, (\Gamma_\infty) \leqslant \frac{c(d)}{\epsilon^d} \sum_{j=0}^{M} (k_0\theta^d)^j + k_0^{M+1} N_0. \tag{2.12}$$

Consideraremos dois casos. Se $k_0\theta^d \leqslant 1$ então a estimativa acima pode ser simplificada (lembrando que $M + 1 = \frac{\ln(\rho/\epsilon)}{\ln(1/\theta))}$:

$$\begin{aligned}
N(\epsilon, \Gamma_\infty) &\leqslant \frac{c(d)}{\epsilon^d}(M+1) + k_0^{M+1} N_0 \\
&\leqslant \frac{c(d)}{\rho^d}\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right)^d \frac{\ln(\rho/\epsilon)}{\ln(1/\theta)} + N_0 k_0^{\ln(\rho/\epsilon)/\ln(1/\theta)} \\
&\leqslant \left(\frac{\rho}{\epsilon}\right)^{d_0} \left[\frac{c(d)}{\rho^d} \cdot \frac{\ln(\rho/\epsilon)}{\ln(1/\theta)} + N_0\right],
\end{aligned}$$

onde $d_0 := \max\{d, \ln(k_0)/\ln(1/\theta)\}$. Fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos da estimativa acima que

$$c(\Gamma_\infty) \leqslant \max\{d, \ln(k_0)/\ln(1/\theta)\}.$$

Já no segundo caso, se $k_0\theta^d > 1$, então a desigualdade (2.12) implica que

$$\begin{aligned}
N(\epsilon, \Gamma_\infty) &\leqslant \frac{c(d)}{\rho^d}\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right)^d (k_0\theta^d)^M (M+1) + k_0^{M+1} N_0 \\
&\leqslant \frac{c(d)}{\rho^d}\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right)^d (k_0\theta^d)^{\ln(\rho/\epsilon)/\ln(1/\theta)} \frac{\ln(\rho/\epsilon)}{\ln(1/\theta)} + N_0 k_0^{\ln(\rho/\epsilon)/\ln(1/\theta)} \\
&\leqslant \frac{c(d)}{\rho^d}\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right)^d \left(\frac{\rho}{\epsilon}\right)^{\ln(k_0\theta^d)/\ln(1/\theta)} \frac{\ln(\rho/\epsilon)}{\ln(1/\theta)} + N_0 \left(\frac{\rho}{\epsilon}\right)^{\ln(k_0/\ln(1/\theta))} \\
&\leqslant \left(\frac{\rho}{\epsilon}\right)^{\ln(k_0)/\ln(1/\theta)} \left[\frac{c(d)}{\rho^d}\frac{\ln(\rho/\epsilon)}{\ln(1/\theta)} + N_0\right],
\end{aligned}$$

e fazendo $\epsilon \to 0$, concluímos que

$$c(\Gamma_\infty) \leqslant \frac{\ln(k_0)}{\ln(1/\theta)}.$$

Como $d > c(C_\infty)$ é arbitrário, a prova está completa. $\square$

Notas

Como vimos, seguindo [9], podemos mostrar que, sob certas condições, a dimensão fractal do atrator global de um semigrupo T é finita. Isso, no entanto, não garante que o atrator global seja um atrator exponencial (pois a atração pode não ter taxa exponencial), e nem que exista um atrator exponencial para T. Com os resultados da Seção 2.3, retirados de [23], somos capazes de, sob certas hipóteses, construir um atrator exponencial para um semigrupo discreto. Com o Teorema 2.6, se esse semigrupo discreto é proveniente de um semigrupo contínuo, com uma condição de Lipschitz continuidade, podemos construir um atrator exponencial para o semigrupo contínuo.

Seguindo exatamente essa linha de raciocínio, em [23] os autores constroem um atrator exponencial em $L^{2p}(\Omega)$ para o semigrupo gerado pela equação não linear de reação-difusão

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + |u(x,t)|^{p-1}u(x,t) + f(x,u(x,t)) = g(x) & \text{em } \Omega \times [0,\infty), \\ u(x,t) = 0 & \text{em } \partial\Omega \times [0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $p \geqslant 2$, $g \in L^2(\Omega)$ e $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função duas vezes continuamente diferenciável, com

$$c_1|u|^{q-2}u - c_0 \leqslant f'(x,u) \leqslant c_2|u|^{q-2} + c_0 \quad \text{para } (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

para algumas constantes $c_0, c_1, c_2 > 0$ e $q \in [1,p)$.

3 Semigrupos κ-dissipativos

Nesse capítulo, seguindo e aprimorando as ideias contidas em [22], apresentamos os semigrupos *exponencialmente κ-dissipativos*, e mostramos que, sob certas condições somos capazes de construir um conjunto compacto positivamente invariante que atrai exponencialmente todos os subconjuntos limitados de X, com dimensões de Hausdorff e fractal finitas.

Para começarmos, precisaremos do conceito de *medida de não compacidade de Kuratowski*, cuja definição e propriedades básicas serão desenvolvidas na seção a seguir.

3.1 Medida de não compacidade de Kuratowski

Consideremos X um espaço métrico completo, com métrica d. Para $B \subset X$ limitado, o **diâmetro** de B é definido por

$$\operatorname{diam}(B) = \sup_{x,y \in B} d(x,y).$$

Para $A \subset X$ limitado, definimos

$$\kappa(A) = \inf \Big\{ \delta > 0 \colon A \subset \cup_{i=1}^{n} B_i, \text{ com } B_i \subset X \text{ limitado e } \operatorname{diam}(B_i) \leqslant \delta \text{ para } i = 1, \cdots, n \Big\},$$

que é chamada de **medida de não-compacidade de Kuratowski** de A. Claramente $\kappa(A) \leqslant \operatorname{diam}(A)$ para cada $A \subset X$ limitado. As propriedades de κ que serão necessárias para o que segue estão enunciadas e demonstradas a seguir.

Lema 3.1. *Sejam A, A_1 e A_2 subconjuntos limitados de X. Então:*

(a) $\kappa(A) = 0$ *se, e somente se, A é relativamente compacto;*

(b) *se $A_1 \subset A_2$, então $\kappa(A_1) \leqslant \kappa(A_2)$;*

(c) $\kappa(A) = \kappa(\overline{A})$;

(d) $\kappa(A_1 \cup A_2) = \max\{\kappa(A_1), \kappa(A_2)\}$;

(e) *se X é um espaço de Banach e $A = A_1 + A_2$, então $\kappa(A) \leqslant \kappa(A_1) + \kappa(A_2)$.*

Demonstração. Os itens **(a)** e **(b)** seguem diretamente da definição de κ.

Provemos agora o item **(c)**. Do item **(b)** temos $\kappa(A) \leqslant \kappa(\overline{A})$. Reciprocamente, sejam $\delta > 0$ e $A \subset \cup_{i=1}^{n} B_i$ com $\operatorname{diam} B_i \leqslant \delta$ para $i = 1, \ldots, n$. Então

$$\overline{A} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{n} B_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B_i},$$

e como $\operatorname{diam}(\overline{B_i}) = \operatorname{diam}(B_i) \leqslant \delta$, obtemos **(c)**.

De **(b)**, temos $\max\{\kappa(A_1), \kappa(A_2)\} \leqslant \kappa(A_1 \cup A_2)$. Se $s = \max\{\kappa(A_1), \kappa(A_2)\}$, dado $\epsilon > 0$ sabemos que ambos A_1 e A_2 podem ser cobertos por uma quantidade finita de conjuntos de diâmetro menor do que $s+\epsilon$. Claramente, a união dessas coberturas é uma cobertura finita para $A_1 \cup A_2$, o que nos dá $\kappa(A_1 \cup A_2) \leqslant s + \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, obtemos **(d)**.

Por fim, para provar **(e)** notemos primeiramente que se $B, C \subset X$ são limitados, para $x_i = b_i + c_i \in B + C$, $i = 1, 2$, temos

$$\|x_1 - x_2\|_X \leqslant \|b_1 - b_2\|_X + \|c_1 - c_2\|_X \leqslant \operatorname{diam}(B) + \operatorname{diam}(C),$$

o que nos dá $\operatorname{diam}(B + C) \leqslant \operatorname{diam}(B) + \operatorname{diam}(C)$. Disso o item **(e)** segue diretamente. □

Lema 3.2. *Assuma que $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de subconjuntos fechados e limitados de X, satisfazendo:*

(i) $F_n \neq \varnothing$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) $F_{n+1} \subset F_n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*;*

(iii) $\kappa(F_n) \to 0$ *quando* $n \to \infty$*.*

Então $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ *é compacto e não-vazio.*

Demonstração. Claramente F é fechado, pois é uma interseção de fechados. Como $F \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ obtemos $\kappa(F) = 0$, o que mostra que F é compacto.

Para mostrar que $F \neq \varnothing$, para cada $n \in \mathbb{N}$ escolhemos $x_n \in F_n$, e definimos $E_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Como $E_n \subset F_n$ temos $\kappa(E_n) \leqslant \kappa(F_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos também que como $E_1 = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \cup E_n$, do item **(d)** do Lema 3.1 obtemos

$$\kappa(X_1) = \max\{\kappa(\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}), \kappa(E_n)\} = \kappa(E_n),$$

uma vez que $\kappa(\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}) = 0$. Portanto $\kappa(E_1) = 0$, e obtemos E_1 relativamente compacto. Assim, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente para um ponto $x \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, essa subsequência eventualmente está em F_n e, sendo F_n fechado, obtemos $x \in F_n$. Portanto $x \in F$, o que completa a prova. □

Por fim, vejamos mais um lema que será necessário mais adiante.

Lema 3.3. *Sejam X espaço de Banach e $A, B \subset X$, com A compacto. Se $d_H(B, A) \leqslant \gamma$ então $\kappa(B) \leqslant 2\gamma$.*

Demonstração. Claramente B é limitado, já que $B \subset \mathcal{O}_\gamma(A)$. Fixemos $\epsilon > 0$. Como A é compacto, para cada $x \in B$ existe $y_x \in A$ tal que $d(x, y_x) < \gamma + \frac{\epsilon}{4}$. Assim

$$B \subset \bigcup_{x\in B} B^X_{\gamma+\frac{\epsilon}{4}}(y_x).$$

Como $C := \{y_x : x \in B\} \subset A$ e A é compacto, existem $z_1, z_2, \ldots, z_m \in A$ tais que $C \subset \bigcup_{i=1}^{m} B^X_{\frac{\epsilon}{4}}(z_i)$, o que nos dá

$$B \subset \bigcup_{x\in B} B^X_{\gamma+\frac{\epsilon}{4}}(y_x) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B^X_{\gamma+\frac{\epsilon}{2}}(z_i).$$

Segue diretamente da definição de κ que $\kappa(B) \leqslant 2\gamma+\epsilon$, e como $\epsilon > 0$ é arbitrário, o resultado segue. □

3.2 Definição e resultados principais

Com essa noção, estudaremos os semigrupos *exponencialmente κ-dissipativos* e seus atratores globais. Para isso, dados um semigrupo $T = \{T(t) : t \geqslant 0\}$ num espaço métrico X, $B \subset X$ e $s \geqslant 0$, definimos a **órbita de B por T a partir de s** como o conjunto

$$\gamma_s^+(B) = \bigcup_{t\geqslant s} T(t)B = \{T(t)x : x \in B \text{ e } t \geqslant s\}.$$

Quando $s = 0$, denotamos $\gamma^+(B) = \gamma_0^+(B)$. Quando $B = \{u\}$ é unitário, escrevemos $\gamma_s^+(u)$ e $\gamma^+(u)$ no lugar de $\gamma_s^+(\{u\})$ e $\gamma^+(\{u\})$, respectivamente.

Definição 3.4. Um semigrupo $T = \{T(t) : t \geqslant 0\}$ em X é dito **exponencialmente κ-dissipativo** se dado $B \subset X$ limitado existem constantes $t_0 = t_0(B) \geqslant 0$, $C = C(B) \geqslant 0$ e $\alpha = \alpha(B) > 0$ tais que

$$\kappa\big(\gamma_s^+(B)\big) \leqslant Ce^{-\alpha s} \quad \text{para todo } s \geqslant t_0.$$

3.2.1 Condições suficientes para obter semigrupos exponencialmente κ-dissipativos

Nessa subseção veremos algumas condições que garantem que um semigrupo T num espaço métrico X seja exponencialmente κ-dissipativo. Claramente, se T é um **semigrupo uniformemente compacto para t grande**, isto é, se dado $B \subset X$ limitado existe $t_0 = t_0(B) \geqslant 0$ tal que $\gamma_{t_0}^+(B)$ é relativamente compacto, então T é exponencialmente κ-dissipativo.

Temos alguns outros resultados nessa direção, que são enunciados e provados a seguir.

Proposição 3.5. *Seja T um semigrupo num espaço métrico X. Assuma que:*

- *existe um subconjunto limitado B_0 de X que absorve os limitados de X (cf. Teorema 1.4);*
- *T é **κ-contrativo**, isto é, dado $B \subset X$ limitado, existem $t_0 = t_0(B) > 0$ e $\beta = \beta(B) \in (0, 1)$ tais que*
$$\kappa(T(t_0)D) \leqslant \beta\kappa(D), \tag{3.1}$$
para todo $D \subset B$.

Então T é exponencialmente κ-dissipativo.

Demonstração. Para $B \subset X$ limitado, existe $s_0 = s_0(B) \geqslant 0$ tal que $T(s)B \subset B_0$ para todo $s \geqslant s_0$. Deste modo, tomando $c = \kappa(B_0)$, temos

$$\kappa\left(\gamma_{s_0}^+(B)\right) \leqslant c.$$

Sejam $t_0 = t_0(B_0) > 0$ e $\beta = \beta(B_0) \in (0,1)$ tais que $\kappa(T(t_0)D) \leqslant \beta\kappa(D)$ para todo $D \subset B_0$. Para $s \geqslant s_0$, escreva $s - s_0 = nt_0 + \tau$ com $\tau \in [0, t_0)$. Assim, para $t \geqslant s$ temos $t - nt_0 \geqslant s_0 + \tau \geqslant s_0$ e

$$T(t)B = T(nt_0)T(t - nt_0)B \subset T(nt_0)\gamma_{s_0}^+(B),$$

o que nos dá $\gamma_s^+(B) \subset T(nt_0)\gamma_{s_0}^+(B)$. Aplicando n-vezes (3.1) obtemos

$$\kappa\left(\gamma_s^+(B)\right) \leqslant \beta^n\kappa\left(\gamma_{s_0}^+(B)\right) \leqslant c\beta^n.$$

Como $0 < \beta < 1$, existe $\gamma > 0$ tal que $\beta = e^{-\gamma}$, o que nos dá

$$\kappa\left(\gamma_s^+(B)\right) \leqslant ce^{-\gamma n} \quad \text{para } s \geqslant s_0.$$

Mas $nt_0 \geqslant s - s_0 - t_0$ e, portanto, obtemos

$$\kappa\left(\gamma_s^+(B)\right) \leqslant ce^{\frac{-\gamma(s-s_0-t_0)}{t_0}} = ce^{\frac{\gamma(s_0+t_0)}{t_0}}e^{-\frac{\gamma}{t_0}s} = Ce^{-\alpha s} \quad \text{para } s \geqslant s_0,$$

onde $C = ce^{\frac{\gamma(s_0+t_0)}{t_0}}$ e $\alpha = \frac{\gamma}{t_0}$. □

Proposição 3.6. *Seja T um semigrupo em X. Assuma que existe $A \subset X$ compacto tal que para $B \subset X$ limitado, existem $t_0 = t_0(B) \geqslant 0$, $C = C(B) \geqslant 0$ $\alpha = \alpha(B) > 0$ tais que*

$$d_H(T(t)B, A) \leqslant Ce^{-\alpha t} \quad \textit{para todo } t \geqslant t_0.$$

Então T é exponencialmente κ-dissipativo.

Demonstração. Para $B \subset X$ limitado e t_0, C, α como na hipótese, temos $d_H(T(t)B, A) \leqslant Ce^{-\alpha t}$ para $t \geqslant t_0$. Em particular, obtemos $d_H(T(t)B, A) \leqslant C$ para $t \geqslant t_0$, o que mostra que $T(t)B \subset \mathcal{O}_C(A)$ para $t \geqslant t_0$. Portanto $\tilde{B} = \gamma_{t_0}^+(B)$ é limitado e, da hipótese, existem $t_1 = t_1(\tilde{B}) \geqslant 0$, $C_1 = C_1(\tilde{B}) \geqslant 0 \geqslant 0$ e $\alpha_1 = \alpha_1(\tilde{B}) > 0$ tais que

$$d_H(T(t)\tilde{B}, A) \leqslant C_1e^{-\alpha_1 t} \quad \text{para todo } t \geqslant t_1.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $t_1 \geqslant t_0$. Assim, para $s \geqslant s_0 + t_1$ temos

$$\begin{aligned} d_H\left(\gamma_s^+(B), A\right) &\leqslant d_H\left(T(s-s_0)\gamma_{t_0}^+(B), A\right) \\ &= d_H(T(s-s_0)\tilde{B}, A) \leqslant C_1e^{-\alpha_1(s-s_0)} = C_1e^{-\alpha s_0}e^{-\alpha s}. \end{aligned}$$

Do Lema 3.3 segue que

$$\kappa\left(\gamma_s^+(B)\right) \leqslant 2C_1e^{-\alpha s_0}e^{-\alpha s},$$

e a demonstração está completa. □

Esse resultado mostra que, em particular, se T possui um atrator exponencial então T é exponencialmente κ-dissipativo. Quando X é um espaço de Banach, uma das condições que é usada para se obter semigrupos exponencialmente κ-dissipativos é a condição (C*), definida abaixo.

Definição 3.7. Diremos que um semigrupo T num espaço de Banach X satisfaz a **condição (C*)** se para cada $B \subset X$ limitado existem constantes $t_0 = t_0(B) \geqslant 0$, $C = C(B) \geqslant 0$ e $\alpha = \alpha(B) > 0$ tais que para cada $\varepsilon > 0$, existe um subespaço finito dimensional X_1 de X para o qual $\{\|PT(t)x\|_X \colon x \in B \text{ e } t \geqslant t_0\}$ é limitado e

$$\|(I-P)T(t)x\|_X \leqslant Ce^{-\alpha t} + \varepsilon \quad \text{para todos } x \in B \text{ e } t \geqslant t_0,$$

onde $P\colon X \to X_1$ é a projeção de X sobre X_1.

Observação 3.8. É importante aqui notar que as constantes t_0, C e α dadas na condição (C*) são *independentes de* ε. A dependência de ε está somente no subespaço X_1 (e, consequentemente, na projeção P).

Lembremos que se P é uma projeção de um espaço de Banach X sobre $X_1 = PX$, podemos escrever

$$X = X_1 \oplus X_2$$

onde $X_1 = (I-P)X$.

Lema 3.9. *Nas condições acima, se $A \subset X$ é limitado e $\kappa((I-P)A) \leqslant \varepsilon$, então $\kappa(A) \leqslant \varepsilon$.*

Demonstração. Note que $A = PA + (I-P)A$. Como X_1 tem dimensão finita, PA é relativamente compacto e, portanto, $\kappa(PA) = 0$. Logo do item **(e)** do Lema 3.1 obtemos

$$\kappa(A) \leqslant \kappa(PA) + \kappa((I-P)A) < \varepsilon.$$

□

Teorema 3.10. *Se T é um semigrupo num espaço de Banach X que satisfaz a condição* (C*)*, então T é exponencialmente κ-dissipativo.*

Demonstração. Seja $B \subset X$ limitado e fixemos t_0, C e α dados pela condição (C*). Tomando $\varepsilon = 1$, por exemplo, obtemos $\gamma^+_{t_0}(B)$ limitado. Agora, para $\varepsilon > 0$ e $t \geqslant s \geqslant t_0$, temos

$$\begin{aligned}\|(I-P)T(t)x - (I-P)T(t)y\|_X &\leqslant \|(I-P)T(t)x\|_X + \|(I-P)T(t)y\|_X \\ &\leqslant 2Ce^{-\alpha t} + 2\varepsilon \leqslant 2Ce^{-\alpha s} + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Assim $\operatorname{diam}(\gamma^+_s(B)) \leqslant 2C^{-\alpha s} + 2\varepsilon$ e o Lema 3.9 nos dá $\kappa\left(\gamma^+_s(B)\right) \leqslant 2Ce^{-\alpha s} + 2\varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, o resultado segue. □

3.2.2 Existência de atrator global para semigrupos exponencialmente κ-dissipativos

Veremos aqui que a existência de um conjunto limitado que absorve limitados é suficiente para garantir que um semigrupo exponencialmente κ-dissipativo tenha um atrator global.

Teorema 3.11. *Assuma que T é um semigrupo exponencialmente κ-dissipativo num espaço métrico completo X, e que existe $B_0 \subset X$ limitado que absorve todos os limitados de X. Então $\mathcal{A} = \omega(B_0)$ é o atrator global de T.*

Demonstração. Usando o Teorema 1.4, é suficiente mostrar que T é assintoticamente compacto. Para isso sejam $s_n \to \infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitada. Defina $B = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, que é um subconjunto limitado de X. Assim, existem $t_0 \geqslant 0$, $C \geqslant 0$ e $\alpha > 0$ tais que

$$\kappa\left(\gamma_s^+(B)\right) \leqslant Ce^{-\alpha s} \quad \text{para todo } s \geqslant t_0.$$

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $s_n \geqslant t_0$ para todo $n \geqslant 0$. Definindo $F_n = \overline{\{T(s_n)x_n, T(s_{n+1})x_{n+1}, \ldots\}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, temos F_n fechado, não-vazio, com $F_{n+1} \subset F_n$ e $\kappa(F_n) \leqslant Ce^{-\alpha s_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Segue do Lema 3.2 que $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ é um compacto não-vazio.

Fixemos $x \in F$. Como $x \in F_1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(T(s_{n_1})x_{n_1}, x) < 1$. Como $x \in F_{n_1+1}$, existe $n_2 > n_1$ tal que $d(T(s_{n_2})x_{n_2}, x) < \frac{1}{2}$. Indutivamente, construímos $n_{k+1} > n_k$ com $d(T(s_{n_k})x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$. Assim, a sequência $\{T(s_{n_k})x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para x, o que mostra que T é assintoticamente compacto. □

3.2.3 Existência de conjuntos exponencialmente atraentes

O Teorema 3.11 nos diz que para um semigrupo exponencialmente κ-dissipativo, a existência de um limitado que absorve limitados é suficiente para nos dar um atrator global para T. Veremos que o resultado é um pouco mais forte, e obtemos um conjunto compacto positivamente invariante que atrai todos os limitados de X com taxa de atração exponencial.

Teorema 3.12. *Seja T um semigrupo exponencialmente κ-dissipativo, e assuma que existe um conjunto limitado $B_0 \subset X$ que absorve limitados de X. Então existe um conjunto compacto $\mathcal{A}^*$ positivamente invariante que atrai exponencialmente todos os limitados de X.*

Demonstração. Segue do Teorema 3.11 que $\mathcal{A} = \omega(B_0)$ é o atrator global de T. Além disso, como T é exponencialmente κ-dissipativo, existem constantes $t_0 \geqslant 0$, $C \geqslant 0$ e $\alpha > 0$ tais que

$$\kappa\left(\gamma_s^+(B_0)\right) \leqslant Ce^{-\alpha s} \quad \text{para todo } s \geqslant t_0.$$

Aumentando C, se necessário, podemos assumir que a desigualdade acima é estrita. Assim, para $s_1 := 1 + t_0$, como $\kappa(\gamma_{s_1}^+(B_0)) < Ce^{-\alpha s_1} =: \epsilon_1$, existem $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_{k_1}^{(1)} \in B_0$ e $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_{k_1}^{(1)} \geqslant s_1$ tais que

$$\gamma_{s_1}^+(B_0) \subset \bigcup_{i=1}^{k_1} B_{\epsilon_1}^X\left(T(t_i^{(1)})a_i^{(1)}\right) = \mathcal{O}_{\epsilon_1}\left(\bigcup_{i=1}^{k_1} T(t_i^{(1)})a_i^{(1)}\right) \subset \mathcal{O}_{\epsilon_1}\left(\bigcup_{i=1}^{k_1}\bigcup_{t\geqslant 0} T(t)T(s_1)a_i^{(1)}\right).$$

Dessa forma, vemos que

$$d_H\left(\gamma^+_{s_1}(B_0),\ \bigcup_{i=1}^{k_1}\bigcup_{t\geqslant 0} T(t)T(s_1)a_i^{(1)}\right) \leqslant \epsilon_1.$$

Procedendo indutivamente, para $s_m := m+t_0$ e $\epsilon_m := Ce^{-\alpha s_m}$, existem $a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \dots, a_{k_m}^{(m)} \in B_0$ e $t_1^{(m)}, t_2^{(m)}, \dots, t_{k_m}^{(m)} \geqslant s_m$ tais que

$$d_H\left(\gamma^+_{s_m}(B_0),\ \bigcup_{i=1}^{k_m}\bigcup_{t\geqslant 0} T(t)T(s_m)a_i^{(m)}\right) \leqslant \epsilon_m. \tag{3.2}$$

Definimos então

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \cup \left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{k_m}\bigcup_{t\geqslant 0} T(t)T(s_m)a_i^{(m)}\right).$$

Claramente $\mathcal{A}$ é positivamente invariante.

Afirmação 1. $\mathcal{A}^*$ é compacto.

Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}^*$. Se alguma subsequência de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está em $\mathcal{A}$, a compacidade de $\mathcal{A}$ nos mostra que ela possui uma subsequência convergente. Assim, sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{k_m}\bigcup_{t\geqslant 0} T(t)T(s_m)a_i^{(m)}.$$

Desse modo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $m_n \in \mathbb{N}$, $t_n \geqslant 0$ e $1 \leqslant i_n \leqslant k_{m_n}$ tais que

$$x_n = T(t_n)T(s_{m_n})a_{i_n}^{(m_n)} = T(t_n + s_{m_n})a_{i_n}^{(m_n)}.$$

Se $t_n \to \infty$ ou $s_{m_n} \to \infty$, como T é exponencialmente κ-dissipativo (e portanto, assintoticamente compacto), vemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente. Agora, se ambas $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{s_{m_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ são ambas limitadas, existe uma constante N_0 tal que

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \bigcup_{m=1}^{N_0}\bigcup_{i=1}^{k_m}\bigcup_{t=0}^{N_0} T(t)T(s_m)a_i^{(m)}.$$

O conjunto do lado direito dessa inclusão é compacto, o que garante que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente, e completa a prova da Afirmação 1.

Afirmação 2. $\mathcal{A}^*$ atrai exponencialmente todos os limitados de X.

Se $B \subset X$ é limitado, existe $t_1 = t_1(B) \geqslant 0$ tal que $T(t)B \subset B_0$ para todo $t \geqslant t_1$. Assim, para cada $s \geqslant t_0$ e $t \geqslant t_1 + s$ temos

$$T(t)B = T(t-t_1)T(t_1)B \subset T(t-t_1)B_0 \subset \gamma^+_s(B_0).$$

Para cada $t \geqslant t_1 + s_1$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $t - t_1 \in [s_m, s_m+1)$, isto é, existe $\tau \in [0,1)$ com $t - t_1 = s_m + \tau$. Disso segue que

$$T(t)B \subset \gamma^+_{s_m}(B_0),$$

e, juntamente com (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} d_H(T(t)B,\mathcal{A}^*) &\leqslant d_H(\gamma^+_{s_m}(B_0),\mathcal{A}^*) \\ &\leqslant d_H\left(\gamma^+_{s_m}(B_0),\bigcup_{i=1}^{k_m}\bigcup_{r\geqslant 0} T(r)S(s_m)a_i^{(m)}\right) \leqslant \epsilon_m, \end{aligned} \tag{3.3}$$

e, portanto,

$$d_H(T(t)B,\mathcal{A}^*) \leqslant Ce^{-\alpha s_m} \leqslant \tilde{C}e^{-\alpha t},$$

onde $\tilde{C} = Ce^{\alpha(t_1+1)}$, para todo $t \geqslant t_1 + s_1$. Com isso, a demostração está completa. □

Observação 3.13. Segue diretamente da prova do Teorema 3.12 que os pontos $a_i^{(m)}$, para $i = 1, 2, \ldots, k_m$ e $m \in \mathbb{N}$ podem ser escolhidos em qualquer subconjunto B_1 denso em B_0.

Sabemos que se $\mathcal{A}^*$ tiver dimensão fractal finita, então $\mathcal{A}^*$ é um atrator exponencial para T e, em particular, a dimensão fractal de $\mathcal{A}$ também será finita. Nos perguntamos a recíproca: se $\mathcal{A}$ tem dimensão fractal finita, é possível garantir que a dimensão fractal de $\mathcal{A}^*$ é finita? A resposta para esse problema, em geral, é negativa, como veremos no exemplo a seguir (cf. com comentários em [22, pág. 3497]).

Exemplo 3.14. Vamos dividir esse exemplo em algumas partes, para facilitar sua compreensão.

Parte 1. Fixe $\beta > 0$ e defina

$$a_\beta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \geqslant \beta, \\ \beta^{-1}|x| & \text{se } |x| < \beta. \end{cases} \tag{3.4}$$

Em $\mathbb{R}$, considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -a_\beta(x)x \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases},$$

que define um semigrupo S em $\mathbb{R}$, uma vez que $f(x) = -a(x)x$ é localmente Lipschitz e $f(x)x = -a(x)x^2 \leqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. É simples verificar que o intervalo $[-\beta,\beta]$ é positivamente invariante e atrai exponencialmente cada subconjunto limitado de $\mathbb{R}$. Segue da Proposição 3.6 que S é exponencialmente κ-dissipativo. Mais ainda, vemos que $\mathcal{A} = \{0\}$ é o atrator global de S.

A construção de $\mathcal{A}^*$ feita no Teorema 3.12 nos dá $\mathcal{A}^* = [-\gamma,\gamma]$, para algum $0 < \gamma < \beta$, tomando para isso $B_0 = [-r,r]$ com $0 < r < \beta$ suficientemente pequeno e

$$\gamma = \sup_{m\in\mathbb{N},\ i=1,\ldots,k_m} |S(s_m)a_i^{(m)}|.$$

Parte 2. Considere $\ell^2(\mathbb{R})$ o espaço de Banach das sequências reais de quadrado somável com a norma

$$\|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

e vamos indexar as sequências em $\ell^2(\mathbb{R})$ da forma

$$x = \{x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2, x_2^3, x_2^4, x_3^1, \dots, x_3^8, \dots, x_n^1, \dots, x_n^{2^n}, \dots\}.$$

Em $\ell^2(\mathbb{R})$ consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx_n^j}{dt} = -a_{\frac{1}{n2^n}}(x_n^j)x_n^j, \\ x(0) = x_0 \in \ell^2(\mathbb{R}), \end{cases}$$

com $a_{\frac{1}{n2^n}}$ definida em (3.4). Do que fizemos na Parte 1, é simples verificar que esse sistema dá origem a um semigrupo T em $\ell^2(\mathbb{R})$, que é exponencialmente κ-dissipativo, com atrator global $\mathcal{A} = \{0\}$. Além disso, a construção feita no Teorema 3.12 nos dá que $\mathcal{A}^*$ contém uma cópia de um retângulo n-dimensional para cada $n \in \mathbb{N}$. Como a dimensão fractal de cada retângulo n-dimensional é n, a dimensão fractal de $\mathcal{A}^*$ é infinita.

Vejamos, porém, que o resultado é verdadeiro para a dimensão de Hausdorff. Para isso, começamos um lema.

Lema 3.15. *Seja T um semigrupo num espaço métrico completo X com atrator global $\mathcal{A}$, e suponha que $\dim_H(\mathcal{A}) < \infty$. Assuma que existam $u_0 \in X$ e $L \geqslant 0$ tais que*

$$d(T(t)u_0, T(s)u_0) \leqslant L|t-s| \quad \textit{para todos } t, s \geqslant 0. \tag{3.5}$$

Então

$$\dim_H\left(\gamma^+(u_0)\right) \leqslant \max\{1, \dim_H(\mathcal{A})\}.$$

Demonstração. Seja $d_0 = \dim_H(\mathcal{A}) < \infty$. Para cada $d > 0$, sabemos que $\mu^{(d+d_0)}(\mathcal{A}) = 0$, ou seja, $\sup\limits_{\delta>0} \mu_\delta^{(d+d_0)}(\mathcal{A}) = 0$. Logo, dados $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$, existem conjuntos abertos[1] $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ com $\operatorname{diam}(B_i) < \delta$ para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ e

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(B_i))^{d+d_0} < \epsilon.$$

Como $\mathcal{A}$ é compacto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{A} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} B_i$ e, assim, existe $r_0 > 0$ tal que $\mathcal{O}_{r_0}(\mathcal{A}) \subset \bigcup_{i=1}^N B_i$. Como $\mathcal{A}$ é o atrator global de T, para u_0 existe $t_1 \geqslant 0$ tal que

$$d_H(T(t)u_0, \mathcal{A}) < r_0 \quad \text{para } t \geqslant t_1,$$

o que nos dá $\gamma_{t_1}^+(u_0) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} B_i$. Portanto $\mu^{(d+d_0)}(\gamma_{t_1}^+(u_0)) = 0$ para cada $d > 0$ e, logo, $\dim_H(\gamma_{t_1}^+(u_0)) \leqslant d_0$. Como $[0, t_1] \ni t \mapsto T(t)u_0 \in X$ é Lipschitz, para $C := \{T(t)u_0 \colon t \in [0, t_1]\}$, da Proposição 1.10 e do Exemplo 1.12 obtemos

$$\dim_H(C) \leqslant \dim_H([0, t_1]) = 1,$$

[1] Veja a Observação 1.6.

e assim

$$\dim_H(\gamma^+(u_0)) = \max\{\dim_H(C),\ \dim_H(\gamma^+_{t_1}(u_0))\} \leqslant \max\{1, \dim_H(\mathcal{A})\}.$$

$\square$

Com esse lema, podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 3.16. *Sejam X um espaço métrico completo e T um semigrupo exponencialmente κ-dissipativo em X com um conjunto limitado $B_0 \subset X$ que absorve limitados de X. Assuma que T satisfaz (3.5) em um conjunto B_1 que é denso em B_0, e assuma que $\dim_H(\mathcal{A}) < \infty$. Então $\dim_H(\mathcal{A}^*) \leqslant \max\{1, \dim_H(\mathcal{A})\}$.*

Demonstração. Segue da Proposição 1.9 que

$$\dim_H(\mathcal{A}^*) = \max\Big\{\dim_H(\mathcal{A}), \sup_{m\in\mathbb{N}} \max_{i=1,\cdots,k_m} \dim_H(\gamma^+(T(s_m)a_i^{(m)})\Big\},$$

onde os pontos $a_i^{(m)}$, para $i = 1, \dots, k_m$ e $m \in \mathbb{N}$ são escolhidos em B_1 (veja Observação 3.13). Para cada $i = 1, \dots, k_m$ e $m \in \mathbb{N}$, $\gamma^+(T(s_m)a_i^{(m)}) \subset \gamma^+(a_i^{(m)})$ e, pelo Lema 3.15, temos $\dim_H(\gamma^+(u_0)) \leqslant \max\{1, \dim_H(\mathcal{A})\}$ para todo $u_0 \in B_1$. Portanto

$$\dim_H(\mathcal{A}^*) \leqslant \max\{1, \dim_H(\mathcal{A})\}.$$

$\square$

Apesar de sabermos que o resultado acima não é válido, em geral, para a dimensão fractal, adicionando uma hipótese de diferenciabilidade obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.17. *Sejam X um espaço métrico completo e T um semigrupo exponencialmente κ-dissipativo em X, com um conjunto limitado $B_0 \subset X$ que absorve limitados de X. Suponha que T satisfaz (3.5) num subconjunto B_1 que é denso em B_0. Assuma também que $c(\mathcal{A}) < \infty$ e que existem $\epsilon > 0$ e $\lambda \in (0, 1/2)$ tais que, para cada $h > 0$, a aplicação $S_h = T(h)$ é continuamente diferenciável em $\mathcal{O}_\epsilon(\mathcal{A})$ e $S'_h(x) \in \mathcal{L}_{\lambda/2}$ para todo $x \in \mathcal{O}_\epsilon(\mathcal{A})$.*

Então $c(\mathcal{A}^*) < \infty$ e $\mathcal{A}^*$ é um atrator exponencial para T.

Demonstração. Com demonstrações análogas aos Lemas 2.22 e 2.23, mostramos que

$$c(\mathcal{A}^* \cap \mathcal{O}_\epsilon(\mathcal{A})) < \infty.$$

Para $B_0 \subset X$ um conjunto limitado que absorve limitados, existe $t_1 \geqslant 0$ tal que $T(t)B_0 \subset \mathcal{O}_\epsilon(\mathcal{A})$ para $t \geqslant t_1$ (pois $\mathcal{A}$ é o atrator global de T). Assim, para s_m como na construção de $\mathcal{A}^*$ (feita no Teorema 3.12) tais que $m \geqslant m_0 \geqslant t_1 - t_0$ temos $s_m \geqslant t_1$ e

$$\bigcup_{m\geqslant m_0} \bigcup_{i=1}^{k_m} \bigcup_{t\geqslant 0} T(t)T(s_m)a_i^{(m)} \subset \mathcal{O}_\epsilon(\mathcal{A}).$$

Para $m = 1, \dots, m_0 - 1$ temos

$$\bigcup_{i=1}^{k_m} \bigcup_{t \geqslant t_1} T(t)T(s_m)a_i^{(m)} \subset \mathcal{O}_\epsilon(\mathcal{A})$$

e, portanto,

$$\mathcal{A}^* \setminus \mathcal{O}_\epsilon(\mathcal{A}) \subset \bigcup_{m=1}^{m_0-1} \bigcup_{i=1}^{k_m} \bigcup_{t \in [0,t_1]} T(t)T(s_m)a_i^{(m)}.$$

Assim $\mathcal{A}^* \setminus \mathcal{O}_\epsilon(\mathcal{A})$ é uma união finita de trajetórias de comprimento finito e, portanto, tem dimensão fractal finita, já que T satisfaz (3.5) (veja Proposição 1.13 e Exemplo 1.12), o que conclui a demonstração. □

3.3 Aplicação à equação de onda semilinear amortecida

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio (aberto e conexo) limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, e o seguinte problema de valor inicial e de contorno:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) + u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + f(u(x,t)) = g(x), \ x \in \Omega, \ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \ , \ u_t(x,0) = u_1(x), \ x \in \Omega \\ u(x,t) = 0 \ , \ x \in \partial\Omega \ , \ t \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

onde $u\colon \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Consideraremos também os espaços usuais

$$H = L^2(\Omega), \quad (u,v) = \int_\Omega uv \text{ e } |u|^2 = (u,u) \text{ para } u, v \in H;$$

$$V = H_0^1(\Omega), \quad ((u,v)) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \text{ e } \|u\|^2 = ((u,u)) \text{ para } u, v \in V,$$

e assumiremos $g \in H$. Denotaremos $-\Delta = A\colon D(A) \subset H \to H$ o operador Laplaciano, com domínio $D(A) = H^2(\Omega) \cap V$. Sabemos que A é um operador autoadjunto e de tipo positivo, e podemos definir as suas potências fracionárias $A^s\colon D(A^s) \subset H \to H$. Além disso, temos $H = D(A^0)$, $V = D(A^{\frac{1}{2}})$ e para $s \in \mathbb{R}$, definimos

$$V_{2s} = D(A^s),$$

com produto interno $(u,s)_{V_{2s}} = (A^s u, A^s v)$ para $u, v \in V_{2s}$. Denotemos $E_0 = V \times H$ com norma

$$\|(u_0,u_1)\|_{E_0}^2 = \|u_0\|^2 + |u_1|^2,$$

e $E_1 = D(A) \times V$ com norma

$$\|(u_0,u_1)\|_{E_1}^2 = \|u_0\|_{D(A)}^2 + \|u_1\|^2,$$

onde para $u_0 \in D(A) = H^2(\Omega) \cap V$ tomamos a norma $\|u_0\|_{D(A)}^2 = \|u_0\|^2 + |Au_0|^2$.

No que segue, pediremos várias hipóteses de caráter técnico sobre f, que são necessárias para aplicar os resultados de [21] e, assim, obter a Proposição 3.18. Como exemplo, as funções $f(u) = u^r$ para $1 < r < 3$ satisfazem essas condições.

Hipóteses sobre a função f.

(f1) $f\colon V \to H$ é uma função limitada, compacta, e continuamente Fréchet diferenciável com derivada f';

(f2) $f(D(A)) \subset V$, f é Lipschitz de limitados de $D(A)$ em V, e de limitados de V em H;

(f3) existe $\sigma_1 \in (0,1)$ tal que para cada $R > 0$ existe $c_0 = c_0(R) \geqslant 0$ tal que se $v \in B_R^{D(A)}(0)$ então
$$\|f(v)\| \leqslant c_0(1 + |Av|)^{1-\sigma_1}$$

(f4) f é contínua de $L^\infty_{ws}(0,T;V) \cap L^2(0,T;H)$ em $L^2_w(0,T;H)$, onde o subscrito ws denota a topologia fraca* e w denota a topologia fraca;

(f5) f' é contínua e limitada de V em $\mathcal{L}(V,H)$, de $D(A)$ em $\mathcal{L}(V_s,H)$ para algum $0 \leqslant s < 1$, e de V em $\mathcal{L}(H, V_{\sigma_2-1})$ para algum $\sigma_2 \in (0,1)$;

(f6) existe $\delta \in (0,1)$ tal que para todo $R > 0$ existe $d_0 = d_0(R) \geqslant 0$ tal que se $u, v \in B_R^V(0)$ então
$$\|f'(u) - f'(v)\|_{\mathcal{L}(V,H)} \leqslant d_0 \|u - v\|^\delta.$$

(f7) existe G limitada e continuamente diferenciável de V em $\mathbb{R}$, com $G(0) = 0$ e $p\colon V \to H$ limitada e contínua com $f'(u) = G'(u) + p(u)$ para toda $u \in V$, com
$$\liminf_{\|u\|\to\infty} \frac{G(u)}{\|u\|^2} \geqslant 0;$$

(f8) existe $c_1 > 0$ tal que
$$\liminf_{\|u\|\to\infty} \frac{(u, f(u)) - c_1 G(u)}{\|u\|^2} \geqslant 0;$$

(f9) existem constantes $\sigma_3 \in (0, \frac{1}{2})$ e $c_3 \geqslant 0$ tais que
$$|p(u)| \leqslant c_3(1 + |G(u)|)^{\frac{1}{2} - \sigma_3} \quad \text{para } u \in V.$$

Com essas hipóteses e notações, usando os resultados de [21, Seções IV.4.1, IV.4.2] e [21, Seções VI.6.1, VI.6.2] obtemos as seguintes propriedades para (3.6).

Proposição 3.18. *Para cada $(u_0, u_1) \in E_0$ o problema possui uma única solução fraca*
$$u \in C([0,\infty);V) \quad \text{e} \quad u_t \in C([0,\infty);H),$$
e a família $T = \{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ definida por
$$T(t)(u_0,u_1) = (u(t), u_t(t)) \quad \text{para } t \geqslant 0 \text{ e } (u_0,u_1) \in E_0,$$
define um semigrupo Fréchet diferenciável em E_0 e, se $(u_0,u_1) \in E_1$, então a solução fraca u satisfaz
$$u \in C([0,\infty);D(A)) \quad \text{e} \quad u_t \in C([0,\infty);V).$$

Além disso, existe um conjunto limitado $B_0 \subset E_0$ que absorve limitados de E_0 e um conjunto limitado $B_1 \subset E_1$, denso em B_0, que absorve limitados de E_1, e T possui atrator global $\mathcal{A}$.

Mais ainda, se $\epsilon > 0$ é fixado, então para cada $\lambda \in (0, 1/2)$ existe $h > 0$ tal que se $S_h = T(h)$ então $S_h'(x) \in \mathcal{L}_{\lambda/2}$ para todo $x \in \mathcal{O}_\epsilon(\mathcal{A})$, e $c(\mathcal{A}) < \infty$.

O principal objetivo desta seção é aplicar o Teorema 3.10 para mostrar que T é exponencialmente κ-dissipativo, e assim construir um atrator exponencial para T.

Teorema 3.19. *O semigrupo T é exponencialmente κ-dissipativo.*

Demonstração. Usando o Teorema 3.10, basta mostrar que T satisfaz a condição (C*) em E_0. Para isso, consideremos uma base ortonormal completa $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de H, formada por autovetores de A, com w_j associado ao autovalor λ_j para cada $j \in \mathbb{N}$, tal que

$$-\Delta\omega_j = \lambda_j\omega_j, \ (\omega_j, \omega_k) = \delta_{jk} \quad \text{para } j, k \in \mathbb{N}$$

e

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_j \leqslant \ldots, \ \lambda_j \to \infty \quad \text{quando } j \to \infty.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos $H_1^m = \operatorname{span}\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$, $H_2^m = (H_1^m)^\perp$ e consideremos a projeção ortogonal $P_m \colon H \to H_1^m$. Então cada $u \in H$ admite a decomposição

$$u = P_m u + (I - P_m)u := u^{(1)} + u^{(2)} \ , \ \ u^{(1)} \in H_1^m \ , \ u^{(2)} \in H_2^m.$$

Se $B \subset E_0$ é limitado, da Proposição 3.18 existe $t_0 = t_0(B) \geqslant 0$ tal que para todos $(u_0, u_1) \in B$ e $t \geqslant t_0$ temos

$$(u(t), u_t(t)) = T(t)(u_0, u_1) \in B_0.$$

Logo, existe uma constante positiva $\rho > 0$ tal que para todo $(u_0, u_1) \in B$ e $t \geqslant t_0$ temos

$$\|u(t)\|^2 + |u_t(t)|^2 \leqslant \rho^2. \tag{3.7}$$

Tomando o produto interno de (3.6) com $u_t^{(2)} + \frac{1}{2}u^{(2)}$ em H, notando que $(u^{(i)})_t = u_t^{(i)}$, $(u^{(i)})_{tt} = u_{tt}^{(i)}$ e $\Delta u^{(i)} = (\Delta u)^{(i)}$ para $i = 1, 2$, e lembrando que $H_m^2 = (H_1^m)^\perp$, obtemos

$$\begin{aligned}(u_{tt}^{(2)}, u_t^{(2)} + \tfrac{1}{2}u^{(2)}) + (u_t^{(2)}, u_t^{(2)} + \tfrac{1}{2}u^{(2)}) - (\Delta u^{(2)}, u_t^{(2)} + \tfrac{1}{2}u^{(2)})&\\ + ((I - P_m)f(u), u_t^{(2)} + \tfrac{1}{2}u^{(2)}) = ((I - P_m)g, u_t^{(2)} + \tfrac{1}{2}u^{(2)}),&\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}(u_{tt}^{(2)}, u_t^{(2)}) + \tfrac{1}{2}(u_t^{(2)}, u^{(2)}) + (\nabla u^{(2)}, \nabla u_t^{(2)}) + \tfrac{1}{2}(u_{tt}^{(2)}, u^{(2)}) + (u_t^{(2)}, u_t^{(2)})&\\ + \tfrac{1}{2}(\nabla u^{(2)}, \nabla u^{(2)}) = ((I - P_m)g, u_t^{(2)} + \tfrac{1}{2}u^{(2)}) - ((I - P_m)f(u), u_t^{(2)} + \tfrac{1}{2}u^{(2)}).&\end{aligned}$$

Agora, notando que
$$\frac{d}{dt}(u_t^{(2)},u^{(2)}) = (u_{tt}^{(2)},u^{(2)}) + (u_t^{(2)},u_t^{(2)}),$$
obtemos
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(|u_t^{(2)}|^2 + \|u^{(2)}\|^2 + (u_t^{(2)},u^{(2)})\Big) + \frac{1}{2}\Big(|u_t^{(2)}|^2 + \|u^{(2)}\|^2 + \Big(u_t^{(2)},u^{(2)}\Big)\Big) \\ = ((I-P_m)g, u_t^{(2)} + \tfrac{1}{2}u^{(2)}) - ((I-P_m)f(u), u_t^{(2)} + \tfrac{1}{2}u^{(2)}).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Como $g \in H$ e $f\colon V \to H$ é compacta, dado $\epsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_{m+1} > 1$,
$$|(I-P_m)g|^2 < \epsilon \quad \text{e} \quad |(I-P_m)f(u)|^2 < \epsilon \text{ para todo } u \in \overline{B}_\rho^V(0).$$

Assim, usando a desigualdade de Young[2] e a desigualdade de Poincaré[3] em H_m^2, obtemos
$$\begin{aligned}((I-P_m)g, u_t^{(2)} + \tfrac{1}{2}u^{(2)}) &\leqslant |((I-P_m)g, u_t^{(2)} + \tfrac{1}{2}u^{(2)})| \leqslant |(I-P_m)g||u_t^{(2)} + \tfrac{1}{2}u^{(2)}| \\ &\leqslant 2|(I-P_m)g|^2 + \frac{1}{8}|u_t^{(2)} + \tfrac{1}{2}u^{(2)}|^2 \\ &\leqslant 2\epsilon + \frac{1}{8}\Big(|u_t^{(2)}|^2 + \tfrac{1}{4}|u^{(2)}|^2 + (u_t^{(2)},u^{(2)})\Big) \\ &\leqslant 2\epsilon + \frac{1}{8}\Big(|u_t^{(2)}|^2 + \tfrac{1}{4\lambda_{m+1}}\|u^{(2)}\|^2 + (u_t^{(2)},u^{(2)})\Big) \\ &\leqslant 2\epsilon + \frac{1}{8}\Big(|u_t^{(2)}|^2 + \|u^{(2)}\|^2 + (u_t^{(2)},u^{(2)})\Big).\end{aligned}$$

Analogamente
$$\Big|\Big((I-P_m)f(u), u_t^{(2)} + \tfrac{1}{2}u^{(2)}\Big)\Big| \leqslant 2\epsilon + \frac{1}{8}\Big(|u_t^{(2)}|^2 + \|u^{(2)}\|^2 + (u_t^{(2)},u^{(2)})\Big). \tag{3.9}$$

Combinando (3.8) com as estimativas (3.9) e (3.9) obtemos
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u_t^{(2)}|^2 + \|u^{(2)}\|^2 + (u^{(2)},u_t^{(2)})\right) + \frac{1}{4}\left(|u_t^{(2)}|^2 + \|u^{(2)}\|^2 + (u_t^{(2)},u^{(2)}\Big)\right) \leqslant 4\epsilon. \tag{3.10}$$

Definindo $\phi(t) = |u_t^{(2)}|^2 + \|u^{(2)}\|^2 + (u^{(2)},u_t^{(2)})$, vemos que
$$\frac{d\phi}{dt}(t) + \frac{1}{2}\phi(t) \leqslant 8\epsilon.$$

Aplicando o Lema de Grönwall (veja Lema A.3) em $[t_0,t]$ obtemos
$$\phi(t) \leqslant \phi(t_0)e^{-\frac{1}{2}(t-t_0)} + 16\epsilon.$$

Mas $\phi(t_0) \leqslant 2(|u_t^{(2)}(t_0)|^2 + \|u^{(2)}(t_0)\|^2) \leqslant 2\rho^2$ (por (3.7)), o que nos dá
$$\phi(t) = |u_t^{(2)}(t)|^2 + \|u^{(2)}(t)\|^2 + (u_t^{(2)}(t),u^{(2)}(t)) \leqslant 2\rho^2 e^{\frac{1}{2}t_0}e^{-\frac{1}{2}t} + 16\epsilon \quad \text{para } t \geqslant t_0.$$

[2] Para $a,b \in \mathbb{R}$ e $\eta > 0$ temos $ab \leqslant \eta a^2 + \frac{b^2}{4\eta}$.

[3] Para $v \in H_m^2 \cap V$ temos $|v|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_{m+1}}\|v\|^2$.

Como

$$|(u_t^{(2)}, u^{(2)})| \leqslant \frac{1}{2}|u_t^{(2)}|^2 + \frac{1}{2}|u^{(2)}|^2 \leqslant \frac{1}{2}|u_t^{(2)}|^2 + \frac{1}{2\lambda_{m+1}}\|u^{(2)}\|^2 \leqslant \frac{1}{2}|u_t^{(2)}|^2 + \frac{1}{2}\|u^{(2)}\|^2,$$

obtemos

$$\|(I - P_m)T(t)(u_0, u_1)\|_{E_0}^2 = |u_t^{(2)}(t)|^2 + \|u^{(2)}(t)\|^2 \leqslant 8\rho^2 e^{\frac{1}{2}t_0} e^{-\frac{1}{2}t} + 32\epsilon,$$

para $t \geqslant t_0$ e $(u_0, u_1) \in B$. Por fim, segue que (3.7) que para $t \geqslant t_0$ e $(u_0, u_1) \in B$

$$\|P_m T(t)(u_0, u_1)\|_{E_0}^2 = \|u^{(1)}(t)\|^2 + |u_t^{(1)}(t)|^2 \leqslant \|u(t)\|^2 + |u_t(t)|^2 \leqslant \rho^2,$$

e a condição (C*) está verificada. □

Aplicando o Teorema 3.12, sabemos que existe um conjunto compacto $\mathcal{A}^*$ em E_0 positivamente invariante que atrai exponencialmente todos os subconjuntos limitados de E_0. Para aplicar o Teorema 3.16 e garantir que $\mathcal{A}^*$ tem dimensão de Hausdorff finita, precisaremos mostrar que T satisfaz (3.5) em B_1. Para isso, temos os seguinte lemas.

Lema 3.20. *Para $i = 0, 1$, existe $\tilde{B}_i \subset B_i$ limitado em E_i, positivamente invariante, que absorve limitados de E_i, com $\tilde{B}_1$ denso em $\tilde{B}_0$.*

Demonstração. Como B_i absorve limitados de E_i, e B_i é também limitado em E_i, existe $t^* \geqslant 0$ tal que $T(t)B_i \subset B_i$ para $t \geqslant t^*$ e $i = 0, 1$. Defina

$$\tilde{B}_i = \bigcup_{t \geqslant t^*} T(t)B_i.$$

Claramente $\tilde{B}_i \subset B_i$ e é positivamente invariante. Se B é um limitado de E_i e $T(t)B \subset B_i$ para $t \geqslant t_B \geqslant 0$, para $t \geqslant t_B + t^*$ temos

$$T(t)B = T(t - t_B)T(t_B)B \subset T(t - t_B)B_i \subset \tilde{B}_i,$$

o que prova que $\tilde{B}_i$ absorve limitados de E_i. Agora, se $x \in \tilde{B}_0$ e $\epsilon > 0$, então existe $t \geqslant t^*$ e $y \in B_0$. Para esse $y \in B_0$, da densidade de B_1 em B_0 e da continuidade de $T(t)$, existe $z \in B_1$ com $\|y - z\|_{E_0} \leqslant \epsilon$ e $\|T(t)y - T(t)z\|_X < \epsilon$. Assim, $\tilde{z} = T(t)z \in \tilde{B}_0$ e $\|x - \tilde{z}\|_X < \epsilon$, o que mostra que $\tilde{B}_1$ é denso em $\tilde{B}_0$. □

Com esse lema, trocando B_i por $\tilde{B}_i$ para $i = 0, 1$, se necessário, podemos assumir que B_0 e B_1 são positivamente invariantes.

Lema 3.21. *Existe uma constante $L \geqslant 0$ tal que*

$$\|T(t)(u_0, u_1) - T(s)(u_0, u_1)\|_{E_0} \leqslant L|t - s| \quad \textit{para todos } t, s \geqslant 0 \textit{ e } (u_0, u_1) \in B_1.$$

Demonstração. Do que acabamos de mostrar, podemos supor que B_0 e B_1 são positivamente invariantes. Assim existe uma constante $C \geqslant 0$ tal que

$$\|T(t)(u_0, u_1)\|_{E_0} \leqslant C \quad \text{e} \quad \|T(t)(u_0, u_1)\|_{E_1} \leqslant C,$$

para todos $t \geqslant 0$ e $(u_0, u_1) \in B_1$. Escrevendo $(u(t), u_t(t)) = T(t)(u_0, u_1)$, obtemos

$$\|u(t)\| \leqslant C, \quad |u_t(t)| \leqslant C, \quad |\Delta u(t)| \leqslant C \;\; \text{e} \;\; \|u_t(t)\| \leqslant C,$$

para todo $t \geqslant 0$.

Assim, para $t, s \geqslant 0$, temos

$$\|u(t) - u(s)\| \leqslant \left| \int_s^t \|u_t(r)\| dr \right| \leqslant C|t-s|.$$

Como $f\colon V \to H$ é compacta, podemos tomar $M = |g| + \sup_{v \in B_0} |f(v)|$, e como $u_{tt} = -u_t + \Delta u - f(u) + g$, temos

$$|u_{tt}(t)| \leqslant |u_t(t)| + |\Delta u(t)| + |f(u(t))| + |g| \leqslant 2C + M,$$

e para $t, s \geqslant 0$ obtemos

$$|u_t(t) - u_t(s)| \leqslant \left| \int_s^t |u_t t(r)| dr \right| \leqslant (2C + M)|t-s|.$$

O resultado então está provado, tomando $L = 3C + M$. □

Conclusão. Os resultados da Proposição, 3.18 do Teorema 3.19 e do Lema 3.21 nos mostram que todas as condições do Teorema 3.17 estão satisfeitas, o que garantem que $\mathcal{A}^*$ é um atrator exponencial para T.

Notas

Usando as ideias de [22], introduzimos a definição de semigrupos exponencialmente κ-dissipativos e mostramos que, sabendo da existência de um subconjunto limitado B_0 que absorve limitados, é possível construir um conjunto compacto $\mathcal{A}^*$, positivamente invariante e que atrai limitados de X com taxa de atração exponencial.

Assumindo que o atrator global $\mathcal{A}$ de T tenha dimensão de Hausdorff finita, e que a aplicação $t \mapsto T(t)x$ seja Lipschitz contínua para cada x num subconjunto denso de B_0, obtemos que a dimensão de Hausdorff de $\mathcal{A}^*$ também é finita.

Quando o atrator global $\mathcal{A}$ tem dimensão fractal finita e T é um semigrupo Fréchet diferenciável numa vizinhança de $\mathcal{A}$, obtemos que a dimensão fractal de $\mathcal{A}^*$ é também finita, o que prova que $\mathcal{A}^*$ é um atrator exponencial para T.

A Apêndice

Nesse apêndice, apresentamos a demonstração de alguns resultados auxiliares que foram usados durante o trabalho.

Lema A.1. *Sejam X um espaço métrico completo, $K \subset X$ um conjunto compacto e assuma que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ é tal que $d(x_n, K) \to 0$ quando $n \to \infty$. Então $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente para um ponto de K.*

Demonstração. Como K é compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in K$ tal que $d(x_n, z_n) = d(x_n, K)$. Como $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ e K é compacto, ela possui uma subsequência $\{z_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente para um ponto $x \in K$. Portanto

$$d(x_{n_k}, x) \leqslant d(x_{n_k}, z_{n_k}) + d(z_{n_k}, x) \leqslant d(x_{n_k}, K) + d(z_{n_k}, x) \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

o que mostra que $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente para $x \in K$. $\square$

Lema A.2. *Sejam X um espaço métrico, $S\colon X \to X$ uma aplicação contínua e $C \subset X$. Se $S(C) \subset C$ então $S(\overline{C}) \subset \overline{C}$.*

Demonstração. Se $x \in \overline{C}$ e $C \ni x_n \to x$ então $Sx_n \to Sx$, ou seja $Sx \in \overline{S(C)} \subset \overline{C}$, e a demonstração está completa. $\square$

Lema A.3 (Lema de Grönwall - Versão Diferencial)**.** *Sejam $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e continuamente diferenciável em (a,b), e $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\frac{d\phi}{dt}(t) + \alpha\phi(t) \leqslant \beta \text{ para } t \in (a,b).$$

Então

$$\phi(t) \leqslant \phi(a)e^{-\alpha(t-a)} + \frac{\beta}{\alpha}.$$

Demonstração. Multiplicando a primeira equação por $e^{\alpha t}$, temos

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{\alpha t}\phi(t)\Big) \leqslant \beta e^{\alpha t}.$$

Integrando essa expressão de a a t, obtemos

$$e^{\alpha t}\phi(t) - e^{\alpha a}\phi(a) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha t} - e^{\alpha a}),$$

de onde o resultado segue diretamente, notando que $1 - e^{-\alpha(t-a)} \leqslant 1$ para todo $t \geqslant a$. $\square$

A.1 Topologia fraca*

Dados X um conjunto qualquer, $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ uma coleção de espaços topológicos e, para cada $\alpha \in \Lambda$, uma função $f_\alpha\colon X \to X_\alpha$, queremos dotar X da topologia τ menos fina que torne contínua todas as funções f_α, que será chamada de **topologia gerada por $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$**.

Notemos que, para que cada f_α seja contínua devemos ter

$$f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \tau,$$

para todo $U_\alpha \in \tau_\alpha$ e $\alpha \in \Lambda$. Assim, a topologia τ menos fina que torna todas as funções f_α^{-1} é a dada pela coleção de todas as uniões de intersecções finitas de elementos da forma $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, onde $U_\alpha \in \tau_\alpha$ e $\alpha \in \Lambda$, além dos conjuntos $\varnothing$ e X. Sendo assim, a seguinte proposição tem demonstração simples, e é deixada à cargo do leitor.

Proposição A.4. *A coleção formada pelos conjuntos da forma*

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha^{-1}(U_\alpha), \quad \Gamma \textit{ é um subconjunto finito de } \Lambda \textit{ e } U_\alpha \in \tau_\alpha \textit{ para cada } \alpha \in \Gamma,$$

forma uma base para τ.

Exemplo A.5. Sejam $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ é uma coleção de espaços topológicos, e defina

$$X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \{f\colon \Lambda \to \cup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \text{ com } f(\alpha) \in X_\alpha \text{ para todo } \alpha \in \Lambda\}.$$

Identificamos um elemento f de X por $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, onde $x_\alpha = f(\alpha)$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Para cada $\alpha_0 \in \Lambda$ fixado, a projeção na coordenada α_0 é definida por

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha_0}\colon X &\to X_{\alpha_0} \\ (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} &\mapsto \pi_{\alpha_0}((x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}) = x_{\alpha_0}. \end{aligned}$$

A topologia τ gerada por $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ é chamada de **topologia produto de X**. Sabemos do Teorema de Tychonoff (veja [19, Theorem 37.3], por exemplo) que se (X_α, τ_α) é compacto para cada $\alpha \in \Lambda$ então (X, τ) é compacto.

Proposição A.6. *Seja τ a topologia gerada por $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ em X. Então $x_n \to x$ em (X, τ) se, e somente se, $f_\alpha(x_n) \to f_\alpha(x)$ em (X_α, τ_α) para cada $\alpha \in \Lambda$.*

Demonstração. Se $x_n \to x$ em (X, τ) então $f_\alpha(x_n) \to f_\alpha(x)$ em (X_α, τ_α), uma vez que $f_\alpha\colon X \to X_\alpha$ é contínua, para cada $\alpha \in \Lambda$.

Reciprocamente, assuma que $f_\alpha(x_n) \to f_\alpha(x)$ em (X_α, τ_α) para todo $\alpha \in \Lambda$ e considere uma vizinhança U de x em (X, τ). Da Proposição A.4, existe um subconjunto finito $\Gamma \subset \Lambda$ e abertos $U_\alpha \in \tau_\alpha$ para cada $\alpha \in \Gamma$ tais que

$$x \in \bigcap_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \subset U.$$

Assim, para cada $\alpha \in \Gamma$, como $f_\alpha(x) \in U_\alpha$, existe $n_0(\alpha) \in \mathbb{N}$ tal que $f_\alpha(x_n) \in U_\alpha$ para $n \geqslant n_0(\alpha)$. Para $n \geqslant n_0 := \max\{n_0(\alpha)\colon \alpha \in \Gamma\}$ temos $f_\alpha(x_n) \in U_\alpha$ e todo $\alpha \in \Gamma$, ou seja, $x_n \in \cap_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \subset U$ para todo $n \geqslant n_0$, o que mostra que $x_n \to x$. $\square$

A demonstração do próximo resultado é imediata e fica a cargo do leitor.

Proposição A.7. *Seja* (Z, ω) *um espaço topológico. Então* $g\colon (Z, \omega) \to (X, \tau)$ *é contínua se, e somente se,* $f_\alpha \circ g\colon (Z, \omega) \to (X_\alpha, \tau_\alpha)$ *é contínua para cada* $\alpha \in \Lambda$.

Para um espaço normado X, temos a isometria linear canônica $\mathrm{av.}\colon X \to X^{**}$ definida da seguinte maneira: para cada $x \in X$, o elemento $\mathrm{av}_x \in X^{**}$ é dado por $\langle x^*, \mathrm{av}_x\rangle = \langle x, x^*\rangle$ para todo $x^* \in X^*$.

Claramente $\mathrm{av.}$ é uma isometria linear, e é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem $\mathrm{av}(X)$ em X^{**}, e portanto, podemos identificar X como um subespaço de X^{**}. Quando $\mathrm{av}(X) = X^{**}$, dizemos que X é **reflexivo** (mas nem sempre esse é o caso).

Em X^* temos definidas a topologia da norma e sua topologia fraca $\sigma(X^*, X^{**})$. Definiremos uma terceira topologia em X^*, chamada de **topologia fraca*** e denotada por $\sigma(X^*, X)$, dada como a topologia gerada pelas família de aplicações $(\mathrm{av}_x)_{x\in X}$.

As seguintes propriedades são válidas para a topologia fraca*, e o leitor pode checá-las em, por exemplo, [3, Seção 3.4]).

Proposição A.8. *A topologia fraca* em* X^* *é de Hausdorff, e os conjuntos*

$$\{x^* \in X^*\colon |\langle x_i, x^* - x_0^*\rangle| < \varepsilon,\ i = 1, \cdots, n\},$$

com $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$ *para* $i = 1, \cdots, n$, $x_0^* \in X^*$ *e* $\varepsilon > 0$, *formam uma base para* $\sigma(X^*, X)$.

Escrevemos $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ para denotar que $\{x_n^*\}$ converge para x^* na topologia fraca*.

Proposição A.9. *Sejam* X *um espaço vetorial normado sobre* $\mathbb{K}$ *e* $\{x_n^*\} \subset X^*$. *Temos:*

(a) $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ *se e só se* $\langle x, x_n^*\rangle \to \langle x, x^*\rangle$ *para todo* $x \in X$.

(b) Se $\|x_n^* - x^*\|_{X^*} \to 0$ *então* $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$.

(c) Se $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ *então* $\{x_n^*\}$ *é limitada e* $\|x^*\|_{X^*} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|x_n^*\|_{X^*}$.

(d) se $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ *e* $x_n \to x$ *então* $\langle x_n, x_n^*\rangle \to \langle x, x^*\rangle$.

Teorema A.10 (Teorema de Banach-Alaoglu)**.** *Se* X *é um espaço vetorial normado então* $B = \overline{B}_1^{X^*}(0) = \{x^* \in X^*\colon \|x^*\|_{X^*} \leqslant 1\}$ *é compacta na topologia fraca*.*

Demonstração. Considere $Z = \{h\colon X \to \mathbb{C}\}$ dotado da topologia produto ω, e defina $\Phi\colon X^* \to Z$ por

$$\Phi(x^*) = (\langle x, x^*\rangle)_{x\in X}.$$

Note que para cada $x \in X$ fixado temos $\pi_x \circ \Phi\colon X^* \to X$ dada por $\pi_x(\Phi(x^*)) = \langle x, x^*\rangle$. Da definição de $\sigma(X^*, X)$, vemos que $\pi_x \circ \Phi$ é contínua, e da Proposição A.7 segue que Φ é contínua. Claramente Φ é injetora, e portanto tem uma inversa $\Phi^{-1}\colon \Phi(X^*) \subset Z \to X^*$.

Provemos agora que Φ^{-1} é contínua. Da Proposição A.7, é suficiente notar que $\mathrm{av}_x \circ \Phi^{-1} \colon \Phi(X^*) \to \mathbb{C}$ é contínua para cada $x \in X$. De fato, note que para cada $x \in X$ fixado

$$\mathrm{av}_x(\Phi^{-1}h) = \langle x, \Phi^{-1}h \rangle = h(x),$$

ou seja, a aplicação $\Phi(X^*) \ni h \mapsto (\mathrm{av}_x \circ \Phi^{-1})(h) = h(x)$ é contínua, pela definição da topologia produto.

Note que

$$\Phi(B) = \{h \in Z \colon |h(x)| \leqslant \|x\|_X,\ h(x+\lambda y) = h(x) + \lambda h(y),\ \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } x, y \in X\},$$

e que podemos escrever $\Phi(B) = K_1 \cap K_2$, com

$$K_1 = \{h \in Z \colon |h(x)| \leqslant \|x\|_X,\ x \in X\} = \prod_{x \in X} \overline{B}^{\mathbb{C}}_{\|x\|_X}(0),$$

e

$$\begin{aligned} K_2 &= \{h \in Z \colon h(x+\lambda y) = h(x) + \lambda h(y),\ \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } x, y \in X\} \\ &= \bigcap_{x,y \in X,\ \lambda \in \mathbb{C}} \underbrace{\{h \in Z \colon h(x+\lambda y) = h(x) + \lambda h(y)\}}_{=D_{x,y,\lambda}}. \end{aligned}$$

Do Teorema de Tychonoff, K_1 é compacto, e como a aplicação $h \mapsto h(x+\lambda y) - h(x) - \lambda h(y)$ é contínua, $D_{x,y,\lambda}$ é fechado para cada $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Portanto K_2 é fechado, e assim $\Phi(B)$ é compacto, o que nos dá B compacto. □

Teorema A.11. *Se X é um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$. Se X é separável então $\overline{B}_1^{X^*}(0)$, com a topologia fraca* induzida, é metrizável.*

Demonstração. Tome $\{x_n\}$ um conjunto enumerável denso em $\overline{B}_1^{X}(0)$. Para $x^*, y^* \in \overline{B}_1^{X^*}(0)$ defina

$$\rho(x^*, y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |\langle x_n, x^* - y^* \rangle|.$$

É simples verificar que ρ define uma métrica em $B_1^{X^*}(0)$.

Mostremos que a topologia gerada pela métrica ρ coincide com a topologia fraca* em $\overline{B}_1^{X^*}(0)$. Para isso, seja $x_0^* \in \overline{B}_1^{X^*}(0)$ e W uma vizinhança de x_0^* na topologia fraca* induzida em $\overline{B}_1^{X^*}(0)$. Sabemos que existem $n \in \mathbb{N}$, $z_i \in \overline{B}_1^{X}(0)$ para $i = 1, \dots, n$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$x_0^* \in V := \{x^* \in \overline{B}_1^{X^*}(0) \colon |\langle z_i, x^* - x_0^* \rangle| < \varepsilon,\ i = 1, \dots, n\} \subset W.$$

Para cada $i = 1, \dots, n$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $\|z_i - x_{n_i}\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomando $N = \max\limits_{i=1,\dots,n} n_i$, se $\rho(x^*, x_0^*) < \frac{\varepsilon}{2^{N+1}}$ então

$$|\langle z_i, x^* - x_0^* \rangle| \leqslant 2\|z_i - x_{n_i}\|_X + |\langle x_{n_i}, x^* - x_0^* \rangle| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2^{n_i}\varepsilon}{2^{N+1}} < \varepsilon,$$

o que mostra que $x^* \in V$. Assim, a topologia induzida por ρ é mais fina do que a topologia fraca* em $\overline{B}_1^{X^*}(0)$.

Reciprocamente, sejam $x_0^* \in \overline{B}_1^{X^*}(0)$ e $\varepsilon > 0$. Fixe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>n_0} 2^{-n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Defina

$$V = \left\{x^* \in \overline{B}_1^{X^*}(0) \colon |\langle x_i, x^* - x_0^*\rangle| < \frac{\varepsilon}{2},\ i = 1, \ldots, n_0\right\}.$$

Se $x^* \in V$ então

$$\rho(x^*, x_0^*) = \sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n}|\langle x_n, x^* - x_0^*\rangle| + \sum_{n>n_0} 2^{-n}|\langle x_n, x^* - x_0^*\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} + \sum_{n>n_0} 2^{-n+1} < \varepsilon,$$

o que mostra que $x_0^* \in V \subset B_\varepsilon^\rho(x_0^*)$, onde $B_\varepsilon^\rho(x_0^*)$ denota a bola aberta de centro x_0^* e raio ε na métrica ρ. Deste modo, a topologia fraca* é mais fina do que a topologia induzida pela métrica ρ, o que completa a demonstração. $\square$

Referências

[1] M. C. Bortolan. *Atratores para sistemas dinâmicos discretos: dimensão fractal e continuidade da estrutura por perturbações*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2009.

[2] M. C. Bortolan and A. N. Carvalho. Strongly damped wave equation and its Yosida approximations. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 46(2):563–602, 2015.

[3] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.

[4] A. N. Carvalho and J. W. Cholewa. Exponential global attractors for semigroups in metric spaces with applications to differential equations. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 31(6):1641–1667, 2011.

[5] A. N. Carvalho, J. A. Langa, and J. C. Robinson. Finite-dimensional global attractors in Banach spaces. *J. Differential Equations*, 249(12):3099–3109, 2010.

[6] A. N. Carvalho and S. Sonner. Pullback exponential attractors for evolution processes in Banach spaces: properties and applications. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 13(3):1141–1165, 2014.

[7] R. O. Davies. A property of Hausdorff measure. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 52:30–34, 1956.

[8] L. A. d. A. Dias. Equi-atração e continuidade de atratores globais de semigrupos. *Universidade Federal de Santa Catarina*, Trabalho de Conclusão de Curso, 2020.

[9] L. Dung and B. Nicolaenko. Exponential attractors in Banach spaces. *J. Dynam. Differential Equations*, 13(4):791–806, 2001.

[10] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko, and R. Temam. *Exponential attractors for dissipative evolution equations*, volume 37 of *RAM: Research in Applied Mathematics*. Masson, Paris; John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1994.

[11] K. J. Falconer. *The geometry of fractal sets*. Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 1985.

[12] C. Foias, G. R. Sell, and R. Temam. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations. *J. Differential Equations*, 73(2):309–353, 1988.

[13] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern techniques and their applications*. Pure & Applied Mathematics, John Wiley & Sons, 1984.

[14] J. P. Kahane. *Measures et dimensions, Turbulence and the Navier Stokes equation*. Lecture Notes in Mathematics **565** Springer-Verlag, New York, 1976.

[15] O. Ladyzhenskaya. *Attractors for semi-groups and evolution equations*. CUP Archive, 1991.

[16] L. A. Lusternik and L. G. Schnirelmann. *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels.*, volume 188. Hermann & Cie, 1934.

[17] R. Mañé. *On the dimension of the compact invariant sets of certain non-linear maps*. Lecture Notes in Mathematics **898** 230-242 Springer-Verlag, New York, 1981.

[18] X. Mora and J. Solà-Morales. Existence and nonexistence of finite-dimensional globally attracting invariant manifolds in semilinear damped wave equations. In *Dynamics of infinite-dimensional systems (Lisbon, 1986)*, volume 37 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. F: Comput. Systems Sci.*, pages 187–210. Springer, Berlin, 1987.

[19] J. Munkres. *Topology*. Pearson Education, 2000.

[20] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[21] R. Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 68 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.

[22] J. Zhang, P. E. Kloeden, M. Yang, and C. Zhong. Global exponential κ-dissipative semigroups and exponential attraction. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 37(6):3487–3502, 2017.

[23] Y. Zhong and C. Zhong. Exponential attractors for semigroups in banach spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 75(4):1799–1809, 2012.

ÍNDICE