UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Liana Garcia Ribeiro

Álgebras de Hopf de Dimensão Finita

Florianópolis
2022

Liana Garcia Ribeiro

Álgebras de Hopf de Dimensão Finita

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Eliezer Batista, Dr.

Florianópolis
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Ribeiro, Liana Garcia
Álgebras de Hopf de Dimensão Finita / Liana Garcia Ribeiro ; orientador, Eliezer Batista, 2022.
79 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Álgebras de Hopf . 3. Teorema de Maschke. 4. Teorema de Radford. 5. Teorema de Nichols-Zoeller. I. Batista, Eliezer. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Liana Garcia Ribeiro

Álgebras de Hopf de Dimensão Finita

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Felipe Lopes Castro, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dirceu Bagio, Dr.
Universidade Federal de Santa Maria

Prof. Vitor de Oliveira Ferreira, Dr.
Universidade de São Paulo

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Daniel Goncalves
Data: 06/05/2022 16:31:03-0300
CPF: 017.022.459-77
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Eliezer Batista
Data: 04/05/2022 10:24:42-0300
CPF: 135.541.288-99
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Eliezer Batista, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2022.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meus pais, Marilene e Deodoro, que sempre me apoiaram nos meus estudos, sem eles não chegaria até aqui. Agradeço meu irmão Levi e a toda minha família que torceram sempre pelo meu sucesso.

Agradeço meu orientador Eliezer que está comigo desde a graduação me ajudando a entender esse mundo da álgebra. Obrigada por tantas horas dedicadas a me fazer crescer e aprender. Palavras não são suficientes para expressar toda minha gratidão.

Agradeço ao Cleison, esse grande amigo que o mestrado me trouxe. Obrigada por todos os momentos de estudos, surtos, conversas e risadas. Esse mestrado com certeza não seria o que foi se não fosse você. Nosso encontro foi um encontro de almas e quero te levar pra vida. Agradeço a minha melhor amiga da vida toda Nathália que sempre esteve ao meu lado. E também todos os amigos que torcem por mim.

Agradeço a UFSC e todos seus professores pelo ensino de qualidade continuado nesses anos de graduação e mestrado. Agradeço a CAPES pela bolsa concedida para que pudesse me dedicar ao estudos. Agradeço também, especialmente, os professores Fábio, Marianna, Daniel, María Rosário e Virgínia pela excelência nas disciplinas ministradas no mestrado.

RESUMO

Neste trabalho veremos os conceitos iniciais relativos as álgebras de Hopf para, assim, seguirmos com foco nas álgebras de dimensão finita. Os principais resultados que estão nesse estudo são o Teorema de Maschke, o Teorema de Radford sobre a antípoda e o Teorema de Nichols-Zoeller.

Palavras-chave: Álgebras de Hopf. Teorema de Maschke. Teorema de Radford. Teorema de Nichols-Zoeller.

ABSTRACT

In this work we will look at the initial concepts concerning Hopf algebras and then move on to focus on finite dimensional algebras. The main results in this study are Maschke's Theorem, Radford's Theorem and Nichols-Zoeller's Theorem.

Keywords: Hopf algebras. Maschke's theorem. Radford's Theorem. Nichols-Zoeller Theorem.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O primeiro exemplo de uma estrutura de Álgebra de Hopf foi observado pelo matemático alemão Heinz Hopf no ano de 1941 em um estudo na área da topologia algébrica. Entretanto, a primeira definição formal de álgebra de Hopf foi feita pelo matemático francês Pierre Cartier em 1956. Ainda utilizando o nome de Hiperálgebra, Cartier se inspirou no trabalho de Jean Dieudonné sobre Grupos-Algébricos. Existem então duas linhagens distintas, uma da teoria da Grupos e outra da Topologia Algébrica. Porém, a definição dada por Cartier não é exatamente a que temos hoje. O nome Álgebra de Hopf foi dado pelo matemático Armand Borel em homenagem ao trabalho de Heinz Hopf.

Apesar dessa estrutura aparecer inicialmente nessas áreas, as Álgebras de Hopf estão presentes em diversos campos da matemática como teoria dos Números, Geometria Algébrica, teoria de Lie, teoria de Galois, teoria de Representaões, entre outros.

Ao longo dos anos, classificar álgebras de Hopf se tornou um objeto de estudo para diversos matemáticos. E, quando nos voltamos para as álgebras de Hopf de dimensão finita, este estudo se dividiu em álgebras semissimples e não-semisimples.

Neste trabalho não abordaremos os aspectos da classificação, mas veremos conceitos que contribuem para ela. Além dos conceitos iniciais para estudarmos as álgebras de Hopf veremos as integrais e resultados envolvendo esse assunto. A ordem da antípoda S de uma álgebra de Hopf também foi tema dos estudos de muitos matemáticos e na década de 70 Radford [2] foi quem encontrou uma fórmula para S^4, o que trouxe consequências interessantes.

Como as álgebras de Hopf estão desde o início ligadas a teoria de Grupos, é natural que tenhamos resultados semelhantes com os que observamos para grupos. É o caso do Teorema de Nichols-Zoeller [3]. Que, a grosso modo, é uma versão do Teorema de Lagrange para álgebras de Hopf.

No primeiro capítulo veremos os conceitos necessários para que possamos definir uma álgebra de Hopf. Em cada tópico deste capítulo veremos exemplos e resultados importantes que irão nos auxiliar ao longo do trabalho.

No segundo capítulo vamos começar a nos interessar mais pelas álgebras de Hopf de dimensão finita. Inicialmente vamos definir integrais em uma álgebra de Hopf, dar exemplos e demonstrar proposições úteis para então seguirmos para a prova do Teorema de Maschke.

O teorema de Maschke nos trás a seguinte equivalência para um álgebra de Hopf H de dimensão finita:

1. H é separável.

2. H é semisimples.

3. Existe $t \in \int_l$ com $\epsilon(t) \neq 0$.

E demonstrar esse resultado é o objetivo do nosso segundo capítulo.

Para o terceiro e último capítulo, escolhemos dois resultados essenciais das álgebras de Hopf com dimensão finita: o Teorema de Radford sobre a antípoda e o Teorema de Nichols-Zoeller. O Teorema de Ratford sobre a antípoda nos dá um importante resultado de que a ordem da antípoda de uma álgebra de Hopf de dimensão finita é finita. Já o teorema de Nichols-Zoeller é um teorema que envolve módulos. Sendo H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e B uma subálgebra de Hopf este teorema nos diz que H é um B-módulo livre.

1 CONCEITOS INICIAIS

Neste capítulo, veremos definições e resultados iniciais que fornecerão uma base para a teoria que queremos desenvolver neste trabalho. Em todos os capítulos considere $\mathbb{K}$ um corpo.

1.1 ÁLGEBRAS

Antes de definirmos o que é uma Coálgebra, precisamos saber o que é uma Álgebra. Vamos trazer então a definição de Álgebra via diagramas para visualizarmos a definição de Coálgebra com mais clareza.

Definição 1.1.1. *(Álgebra) Uma Álgebra sobre $\mathbb{K}$ ou uma $\mathbb{K}$-ágelbra é uma tripla (A,μ,η) em que A é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, $\mu : A\otimes A \to A$ e $\eta : \mathbb{K} \to A$ são morfismos de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais tais que os diagramas abaixo comutam:*

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes A \arrow[r, "\mu\otimes id_A"] \arrow[d, "id_A\otimes\mu"'] & A\otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A\otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A\otimes A \arrow[dd, "\mu"] & \\
\mathbb{K}\otimes A \arrow[ur, "\eta\otimes id_A"] \arrow[dr, "l_A"] & & A\otimes\mathbb{K} \arrow[ul, "id_A\otimes\eta"'] \arrow[dl, "r_A"'] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

em que

$$\begin{array}{lccclllcc}
r_A: & A\otimes\mathbb{K} & \to & A & & r_A^{-1}: & A & \to & A\otimes\mathbb{K} \\
 & a\otimes\lambda & \mapsto & \lambda a & & & a & \mapsto & a\otimes 1_{\mathbb{K}} \\
l_A: & \mathbb{K}\otimes A & \to & A & & l_A^{-1}: & A & \to & \mathbb{K}\otimes A \\
 & \lambda\otimes a & \mapsto & \lambda a & & & a & \mapsto & 1_{\mathbb{K}}\otimes a
\end{array}$$

são os isomorfismos canônicos.

O morfismo μ é chamado de multiplicação e o morfismo η de unidade da álgebra.

Definição 1.1.2. *Sejam A, B duas álgebras sobre $\mathbb{K}$. Um morfismo de álgebras de A em B é uma transformação $\mathbb{K}$-linear $f : A \to B$ tal que os diagramas abaixo comutam.*

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B\otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] & & B \\
 & \mathbb{K} \arrow[ul, "\eta_A"] \arrow[ur, "\eta_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Veja que a comutatividade dos diagramas acima significa que para quaisquer $a, b \in A$ temos que $f(a\cdot b) = f(a)\cdot f(b)$ e $f(1_A) = 1_B$. De fato, como $f\circ\mu_A = \mu_B\circ(f\otimes f)$ temos que:

$$\begin{aligned}
f(a\cdot b) &= f(\mu_A(a\otimes b)) \\
&= (f\circ\mu_A)(a\otimes b)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mu_B \circ (f \otimes f))(a \otimes b) \\
&= \mu_B(f(a) \otimes f(b)) \\
&= f(a) \cdot f(b).
\end{aligned}
$$

Além disso, como $f \circ \eta_A = \eta_B$, $\eta_A(1_{\mathbb{K}}) = 1_A$ e $\eta_B(1_{\mathbb{K}}) = 1_B$, temos:

$$
\begin{aligned}
f(1_A) &= f(\eta_A(1_{\mathbb{K}})) \\
&= (f \circ \eta_A)(1_{\mathbb{K}}) \\
&= \eta_B(1_{\mathbb{K}}) \\
&= 1_B.
\end{aligned}
$$

Definição 1.1.3. *Seja $f : A \to B$ um morfismo de álgebras. Definimos o núcleo de f como o subconjunto de A denotado por $\ker(f)$ e dado por $\ker(f) = \{a \in A : f(a) = 0_B\}$.*

Agora vejamos alguns exemplos e resultados interessantes.

Exemplo 1.1.4. (Álgebra Tensorial) Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Considerando os seguintes espaços

$$
\begin{aligned}
T^0(V) &= \mathbb{K} \\
T^1(V) &= V \\
T^2(V) &= V \otimes V \\
\vdots\quad & \quad \vdots \\
T^n(V) &= \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{\text{n vezes}}
\end{aligned}
$$

Definimos a álgebra tensorial $T(V)$ como

$$
\begin{aligned}
T(V) &= \bigoplus_{n \geq 0} T^n(V) \\
&= \mathbb{K} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \cdots \oplus (V \otimes V \otimes \cdots \otimes V) \oplus \cdots .
\end{aligned}
$$

Definimos também $1_{T(V)} = 1_{\mathbb{K}}$ e, dados $x \in T^n(V)$ e $y \in T^m(V)$:

$$
\begin{aligned}
x \cdot y &= (x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n) \cdot (y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_m) \\
&= x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_m \in T^{m+n}(V).
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.1.5. (Álgebra de matrizes) Considere $M_n(\mathbb{K})$ o $\mathbb{K}$-espaço vetorial das matrizes de ordem n com entradas em $\mathbb{K}$. Denote por E_{ij} a matriz em $M_n(\mathbb{K})$ que tem 1 na entrada ij e 0 em todas as outras. Temos que $M_n(\mathbb{K}) = \text{span}\{E_{ij} | i,j \in \{1,...,n\}\}$. Dados E_{ij}, E_{kl} em $M_n(\mathbb{K})$ defina o seguinte produto:

$$
E_{ij} \cdot E_{kl} = \delta_{j,k} E_{il},
$$

onde $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$ é o delta de Kronecker. E defina a unidade

$$
1_{M_n(\mathbb{K})} = \sum_{i=1}^{n} E_{ii}.
$$

Veja que:

$$E_{jk}\cdot 1_{M_n(\mathbb{K})}=E_{jk}\sum_{i=1}^{n}E_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\delta_{k,i}E_{ji}=\delta_{k,k}E_{jk}=E_{jk}.$$

Temos que $M_n(\mathbb{K})$ com o produto e a unidade definidos acima é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$.

Exemplo 1.1.6. Sejam A,B duas álgebras sobre $\mathbb{K}$. Temos que $A\otimes B$ também possui estrutura de $\mathbb{K}$-álgebra com a multiplicação dada por

$$\mu_{A\otimes B}=(\mu_A\otimes\mu_B)(id\otimes\sigma\otimes id)$$

em que $\sigma: B\otimes A\to A\otimes B$ é simplesmente a permutação (flip) e com a unidade dada por $1_{A\otimes B}=1_A\otimes 1_B$. Dados $a_1,a_2\in A$ e $b_1,b_2\in B$, vejamos como fica a multiplicação em $A\otimes B$:

$$\begin{aligned}\mu_{A\otimes B}((a_1\otimes b_1)\otimes(a_2\otimes b_2)) &= (\mu_A\otimes\mu_B)(id\otimes\sigma\otimes id)((a_1\otimes b_1)\otimes(a_2\otimes b_2))\\ &= (\mu_A\otimes\mu_B)(id(a_1)\otimes\sigma(b_1\otimes a_2)\otimes id(b_2))\\ &= (\mu_A\otimes\mu_B)(a_1\otimes a_2\otimes b_1\otimes b_2)\\ &= \mu_A(a_1\otimes a_2)\otimes\mu_B(b_1\otimes b_2).\end{aligned}$$

Agora nosso objetivo é trazer alguns resultados para depois, finalmente, demonstrar a Propriedade Universal e também que toda algébra é isomorfa ao quociente de uma álgebra livre.

Definição 1.1.7. *Sejam (A,μ,η) uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e B um subconjunto de A. Dizemos que B é uma subalgebra de A se B é uma $\mathbb{K}$-álgebra com as operações induzidas.*

Definição 1.1.8. *Sejam A uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e I uma subalgebra de A. Dizemos que I é um ideal à esquerda de A se $\mu(A\otimes I)\subseteq I$. Dizemos que I é um ideal à direita de A se $\mu(I\otimes A)\subseteq I$. Dizemos que I é um ideal de A se for ideal à esquerda e à direita de A.*

Proposição 1.1.9. *Seja $f: A\to B$ um morfimo de $\mathbb{K}$-álgebras. Então o núcleo de f é um ideal de A.*

Demonstração. Seja $f: A\to B$ um morfimo de $\mathbb{K}$-álgebras arbitrários. Vamos mostrar que $\ker(f)=\{a\in A|f(a)=0_B\}$ é um ideal de A. Tome $a,c\in\ker(f)$, $b\in A$ e $\lambda\in\mathbb{K}$. Veja que:

1. $f(ab)=f(a)f(b)=0_Bf(b)=0_B$, ou seja, $ab\in\ker(f)$;

2. $f(a+c)=f(a)+(c)=0_B+0_B=0_B$, ou seja, $(a+c)\in\ker(f)$;

3. $f(\lambda a)=\lambda f(a)=\lambda 0_B=0_B$, ou seja, $\lambda a\in\ker(f)$.

Disso segue que o núcleo de f é um ideal de A. ∎

Proposição 1.1.10. *Sejam A uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e I um ideal de A. Considere a $\mathbb{K}$-álgebra A/I com $(a+I)\cdot(b+I)=(ab)+I$ e $1_{A/I}=1_A+I$. Então a aplicação quociente $\pi: A\to A/I$ é um morfismo sobrejetor de álgebras.*

Demonstração. Tome $a,b\in A$, $\lambda\in\mathbb{K}$ e $(c+I)\in A/I$ quaisquer. Temos que:

1. $\pi(a+b)=(a+b)+I=(a+I)+(b+I)=\pi(a)+\pi(b)$;
2. $\pi(\lambda a)=(\lambda a)+I=\lambda(a+I)=\lambda(\pi(a))$;
3. $\pi(1_A)=1_A+I=1_{A/I}$;
4. $\pi(ab)=ab+I(a+I)(b+I)=\pi(a)\pi(b)$;
5. $\pi(c)=c+I$, ou seja, $(c+I)\in Im(\pi)$.

Portanto, π é um morfimo sobrejetor de álgebras. ■

Exemplo 1.1.11. (Álgebra livre de um conjunto X) Seja X um conjunto e W_X o conjunto de todas as palavras finitas escritas com "letras" do "alfabeto" composto pelos elementos de X. Seja $\mathbb{1}$ a "palavra vazia", isto é, o símbolo $\mathbb{1}$ servirá apenas para denotar um espaço vazio, sem nada escrito. Defina

$$\mathbb{K}\{X\}=\text{span}(W_X\cup\{\mathbb{1}\}).$$

Defina o produto de duas palavras como a sua justaposição e defina $\mathbb{1}\cdot palavra=palavra=palavra\cdot\mathbb{1}$. Temos que $\mathbb{K}\{X\}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e é chamada de álgebra livre de X. Claramente temos que $\mathbb{K}\{X\}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Além disso, dados $x_1,...,x_n,y_1,...,y_m,z_1,...,z_l\in X$ quaisquer, denotando as palavras $(x_1x_2...x_n),(y_1y_2...y_m),(z_1z_2...z_l)$ em $\mathbb{K}\{X\}$, temos que:

$$\begin{aligned}((x_1...x_n)\cdot(y_1...y_m))\cdot(z_1...z_l)&=(x_1...x_ny_1...y_m)\cdot(z_1...z_l)\\&=x_1...x_ny_1...y_mz_1...z_l\\&=(x_1...x_n)\cdot(y_1...y_mz_1...z_l)\\&=(x_1...x_n)\cdot((y_1...y_m)\cdot(z_1...z_l))\end{aligned}$$

e também, da definição,

$$\mathbb{1}\cdot\text{palavra}=\text{palavra}=\text{palavra}\cdot\mathbb{1}.$$

Proposição 1.1.12. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e B uma base de V. Então $T(V)$ é isomorfa a álgebra livre $\mathbb{K}\{B\}$.*

Demonstração. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e B uma base de V arbitrários. Digamos que $B=\{e_i\}_{i\in I}$. Temos que:

$$T(V)=\mathbb{K}\oplus V\oplus(V\otimes V)\oplus\cdots\oplus(V\otimes V\otimes\cdots\otimes V)\oplus\cdots$$

e

$$W_B\cup\{\mathbb{1}\}=\{\mathbb{1},e_i,e_ie_j,e_ie_je_k,...\}.$$

Definindo

$$\begin{aligned}\varphi:T(V)&\to\mathbb{K}\{B\}\\1_{\mathbb{K}}&\mapsto\mathbb{1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e_i &\mapsto e_i \\
e_i \otimes e_j &\mapsto e_i e_j \\
e_i \otimes e_j \otimes e_k &\mapsto e_i e_j e_k \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

obtemos o isomorfismo desejado. ■

Proposição 1.1.13. *(Propriedade Universal) Sejam X um conjunto, A uma álgebra sobre $\mathbb{K}$, $f : X \to A$ uma função. Então existe um único morfismo de álgebras $\overline{f} : \mathbb{K}\{X\} \to A$ tal que $f = \overline{f} \circ \iota$, em que $\iota : X \to \mathbb{K}\{X\}$ é a injeção canônica que associa cada elemento $x \in X$ a palavra com uma única letra $x \in \mathbb{K}\{X\}$.*

Demonstração. Sejam X um conjunto, A uma álgebra sobre $\mathbb{K}$, $f : X \to A$ uma função arbitrários. Defina $\overline{f} : \mathbb{K}\{X\} \to A$ tal que $f = \overline{f} \circ \iota$. Vejamos que $\overline{f}$ é um morfismo de álgebras. Temos que:

$$\overline{f}(\mathbb{1}) = 1_A$$

$$\overline{f}\left(\sum_{p \in \mathbb{K}\{X\}} \lambda_p p\right) = \sum_{p \in \mathbb{K}\{X\}} \lambda_p \overline{f}(p)$$

e dado $(x_1 \ldots x_n) \in \mathbb{K}\{X\}, \overline{f}(x_1 \ldots x_n) = f(x_1) \ldots f(x_n)$. Além disso, dados $(y_1 \ldots y_m), (z_1 \ldots z_l) \in \mathbb{K}\{X\}$ temos que:

$$
\begin{aligned}
\overline{f}((y_1 \ldots y_m)(z_1 \ldots z_l)) &= \overline{f}(y_1 \ldots y_m z_1 \ldots z_l) \\
&= f(y_1) \ldots f(y_m) f(z_1) \ldots f(z_l) \\
&= \overline{f}(y_1 \ldots y_m) \overline{f}(z_1 \ldots z_l).
\end{aligned}
$$

Agora, para verificarmos a unicidade, suponha que exista um morfismo de álgebras $g : \mathbb{K}\{X\} \to A$ tal que $f = g \circ \iota$. Temos que:

$$
\begin{aligned}
g\left(\sum \lambda_{(x_1 \ldots x_n)} (x_1 \ldots x_n)\right) &= \sum \lambda_{(x_1 \ldots x_n)} g(x_1 \ldots x_n) \\
&= \sum \lambda_{(x_1 \ldots x_n)} f(x_1) \ldots f(x_n) \\
&= \sum \lambda_{(x_1 \ldots x_n)} \overline{f}(x_1 \ldots x_n) \\
&= \overline{f}\left(\sum \lambda_{(x_1 \ldots x_n)} (x_1 \ldots x_n)\right).
\end{aligned}
$$

Portanto, $\overline{f} = g$.

Temos assim, a comutatividade do seguinte diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}\{X\} \arrow[dr, dashed, "\overline{f}"'] & X \arrow[l, "\iota"'] \arrow[d, "f"] \\
& A.
\end{tikzcd}
$$

■

Proposição 1.1.14. *Toda álgebra é isomorfa ao quociente de alguma álgebra livre.*

Demonstração. Seja A uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. Considere a função identidade $id : A \to A$ e a álgebra livre $\mathbb{K}\{A\}$. Pela Proposição 1.1.13 existe um único morfismo de álgebras $\overline{id} : \mathbb{K}\{A\} \to A$ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}\{A\} \arrow[dr, dashed, "\overline{id}"'] & A \arrow[l, "\iota"'] \arrow[d, "id"] \\ & A. \end{tikzcd}$$

Pela Proposição 1.1.9 temos que $\ker(\overline{id})$ é um ideal de $\mathbb{K}\{A\}$. Assim, pela Proposição 1.1.10, temos que a aplicação quociente

$$\pi : \mathbb{K}\{A\} \to \frac{\mathbb{K}\{A\}}{\ker(\overline{id})}$$

é um morfismo sobrejetor de álgebras. Temos então o seguinte isomorfismo:

$$\varphi : \frac{\mathbb{K}\{A\}}{\ker(\overline{id})} \to A$$

em que $\varphi \circ \pi = \overline{id}$. ■

1.2 COÁLGEBRAS

Visto a definição de Álgebra (1.1.1), podemos olhar para os diagramas e questionar o que acontece ao invertermos as flechas. Ou seja, faremos uma dualização da definição de Álgebra para, assim, obtermos o conceito de Coálgebra que vemos agora.

Definição 1.2.1. *(Coálgebra) Uma Coálgebra sobre $\mathbb{K}$ ou uma $\mathbb{K}$-coálgebra é uma tripla (C, Δ, ϵ) em que C é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\epsilon : C \to \mathbb{K}$ são transformações lineares tais que os diagramas abaixo comutam:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "id_C \otimes \Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes id_C"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "r_C^{-1}"] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "l_C^{-1}"'] & \\ \mathbb{K} \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\epsilon \otimes id_C"] \arrow[r, "id_C \otimes \epsilon"'] & C \otimes \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

em que

$$\begin{array}{llcl} r_C: & C \otimes \mathbb{K} & \to & C \\ & x \otimes \lambda & \mapsto & \lambda x \\ l_C: & \mathbb{K} \otimes C & \to & C \\ & \lambda \otimes x & \mapsto & \lambda x \end{array} \qquad \begin{array}{llcl} r_C^{-1}: & C & \to & C \otimes \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & x \otimes 1_{\mathbb{K}} \\ l_C^{-1}: & C & \to & \mathbb{K} \otimes C \\ & x & \mapsto & 1_{\mathbb{K}} \otimes x \end{array}$$

são os isomorfismos canônicos.

A aplicação linear Δ é chamada de comultiplicação e a aplicação linear ϵ é denominada counidade.

Observação 1.2.2. Veja que para $x \in C$, temos que:

$$\begin{aligned}
(id_C \otimes \Delta) \circ \Delta(x) &= (id_C \otimes \Delta) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x_i' \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (id_C \otimes \Delta)(x_i \otimes x_i') \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \Delta(x_i') \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} y_{ij} \otimes y_{ij}' \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \otimes (y_{ij} \otimes y_{ij}').
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id_C) \circ \Delta(x) &= (\Delta \otimes id_C) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x_i' \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\Delta \otimes id_C)(x_i \otimes x_i') \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Delta(x_i) \otimes x_i' \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} y_{ij} \otimes y_{ij}' \right) \otimes x_i' \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (y_{ij} \otimes y_{ij}') \otimes x_i'.
\end{aligned}$$

Para simplificar a escrita usamos a Notação de Sweedler, onde o somatório fica subentendido:

$$\Delta(x) = x_1 \otimes x_2.$$

Agora, vejamos como a comutatividade dos diagramas ficam em termos da Notação de Sweedler. Tome $x \in C$. Veja que:

$$\begin{aligned}
((id_C \otimes \Delta) \circ \Delta)(x) &= (id_C \otimes \Delta)(x_1 \otimes x_2) \\
&= x_1 \otimes \Delta(x_2) \\
&= x_1 \otimes (x_{21} \otimes x_{22}) \\
&= x_1 \otimes x_{21} \otimes x_{22} \\
((\Delta \otimes id_C) \circ \Delta)(x) &= (\Delta \otimes id_C)(x_1 \otimes x_2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Delta(x_1) \otimes x_2 \\
&= (x_{11} \otimes x_{12}) \otimes x_2 \\
&= x_{11} \otimes x_{12} \otimes x_2.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$x_1 \otimes x_{21} \otimes x_{22} = x_{11} \otimes x_{12} \otimes x_2.$$

Também podemos escrever este elemento de $C \otimes C \otimes C$ como $x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$.

Além disso,

$$
\begin{aligned}
x = id_C(x) &= (r_C \circ (id_C \otimes \epsilon) \circ \Delta)(x) \\
&= r_C(id_C \otimes \epsilon)(x_1 \otimes x_2) \\
&= r_C(x_1 \otimes \epsilon(x_2)) \\
&= r_C(x_1 \otimes \epsilon(x_2)) \\
&= x_1 \epsilon(x_2).
\end{aligned}
$$

Analogamente, $x = \epsilon(x_1)x_2$.

Exemplo 1.2.3. Seja X um conjunto. Defina

$$\mathbb{K}X = \text{span}\{\delta_x : x \in X\}$$

com a comultiplicação dada por $\Delta(\delta_x) = \delta_x \otimes \delta_x$ e a counidade dada por $\epsilon(\delta_x) = 1_{\mathbb{K}}$ para todo $x \in X$. Temos que esta é uma coálgebra sobre $\mathbb{K}$. Claramente $\mathbb{K}X$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e também Δ e ϵ são transformações lineares. Vejamos a comutatividade dos diagramas. Tome $x \in X$, temos que:

$$
\begin{aligned}
(\Delta \otimes id) \circ \Delta(\delta_x) &= (\Delta \otimes id)(\delta_x \otimes \delta_x) \\
&= \Delta(\delta_x) \otimes \delta_x \\
&= \delta_x \otimes \delta_x \otimes \delta_x \\
&= \delta_x \otimes \Delta(\delta_x) \\
&= (id \otimes \Delta)(\delta_x \otimes \delta_x) \\
&= (id \otimes \Delta) \circ \Delta(\delta_x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\epsilon \otimes id) \circ \Delta(\delta_x) &= (\epsilon \otimes id)(\delta_x \otimes \delta_x) \\
&= \epsilon(\delta_x) \otimes \delta_x \\
&= 1_{\mathbb{K}} \otimes \delta_x \\
&= \delta_x \\
&= \delta_x \otimes 1_{\mathbb{K}} \\
&= \delta_x \otimes \epsilon(\delta_x) \\
&= (id \otimes \epsilon)(\delta_x \otimes \delta_x) \\
&= (id \otimes \epsilon) \circ \Delta(\delta_x)
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.2.4. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$. Digamos que $\dim V = n$. Denote $C_V = V^* \otimes V$ e defina a comultiplicação por

$$\Delta(\varphi \otimes v) = \sum_{k=1}^{n} \varphi \otimes e_k \otimes \varepsilon^k \otimes v$$

em que $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base de V e $\{\varepsilon^1, ..., \varepsilon^n\}$ é sua respectiva base dual em V^*, e defina a counidade por $\epsilon(\varphi \otimes v) = \varphi(v)$ para todo $v \in V$ e $\varphi \in V^*$. Temos que C_V é uma coálgebra sobre $\mathbb{K}$.

Tome $v \in V$ e $\varphi \in V^*$. Vejamos a comutatividade dos diagramas:

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id) \circ \Delta(\varphi \otimes v) &= (\Delta \otimes id)\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi \otimes e_k \otimes \varepsilon^k \otimes v\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Delta(\varphi \otimes e_k) \otimes \varepsilon^k \otimes v \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi \otimes e_j \otimes \varepsilon^j \otimes e_k\right) \otimes \varepsilon^k \otimes v \\
&= \sum_{k,j=1}^{n} \varphi \otimes e_j \otimes \varepsilon^j \otimes e_k \otimes \varepsilon^k \otimes v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta) \circ \Delta(\varphi \otimes v) &= (id \otimes \Delta)\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi \otimes e_k \otimes \varepsilon^k \otimes v\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \varphi \otimes e_k \otimes \Delta(\varepsilon^k \otimes v) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \varphi \otimes e_k \otimes \left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon^k \otimes e_j \otimes \varepsilon^j \otimes v\right) \\
&= \sum_{k,j=1}^{n} \varphi \otimes e_k \otimes \varepsilon^k \otimes e_j \otimes \varepsilon^j \otimes v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(id \otimes \epsilon) \circ \Delta(\varphi \otimes v) &= (id \otimes \epsilon)\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi \otimes e_k \otimes \varepsilon^k \otimes v\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} id(\varphi \otimes e_k) \otimes \epsilon(\varepsilon^k \otimes v) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \varphi \otimes e_k \otimes \varepsilon^k(v) \\
&= \varphi \otimes \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes \varepsilon^k(v) \\
&= \varphi \otimes v
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \varphi(e_k)\varepsilon^k \otimes v \\
&= \sum_{k=1}^{n} \epsilon(\varphi \otimes e_k)\varepsilon^k \otimes v \\
&= (\epsilon \otimes id) \circ \Delta(\varphi \otimes v).
\end{aligned}
$$

Agora, vejamos que a comultiplicação independe da base escolhida. Tome $\{f_1, ..., f_n\}$ base de V e $\{\phi^1, ..., \phi^n\}$ sua respectiva base dual em V^*. Como $\{e_1, ..., e_n\}$ é base existem escalares a_{ij} tais que $f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$. Assim, dado $(\varphi \otimes v) \in C_V$, temos que:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \varphi \otimes f_j \otimes \phi^j \otimes v &= \sum_{i,j=1}^{n} \varphi \otimes a_{ij} e_i \otimes \phi^j \otimes v \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi \otimes e_i \otimes \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \phi^j \otimes v \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi \otimes e_i \otimes \varepsilon^i \otimes v
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.2.5. (Coálgebra de Matrizes) Considere em $M_n(\mathbb{K})$ a comultiplicação dada por

$$\Delta(E_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} E_{ik} \otimes E_{kj}$$

e com a counidade dada por

$$\epsilon(E_{ij}) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}.$$

Temos que esta é uma coálgebra sobre $\mathbb{K}$.

Observação 1.2.6. No próximo exemplo utilizaremos a notação

$$[[P]] = \begin{cases} 1, \text{ se P é verdadeira} \\ 0, \text{ se P é falsa} \end{cases}.$$

para o valor booleano da sentença P.

Exemplo 1.2.7. (Coálgebra de potências divididas) Considere $H = \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ com a comultiplicação dada por

$$
\begin{aligned}
\Delta(e_n) &= \sum_{k=0}^{n} e_k \otimes e_{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} e_{n-k} \otimes e_k
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{k+l=n} e_k \otimes e_l$$
$$= \sum_{k,l=0}^{n} [[k+l=n]] e_k \otimes e_l$$

e a counidade $\epsilon(e_n) = \delta_{n,0}$. Temos que esta é uma coálgebra sobre $\mathbb{K}$.

Exemplo 1.2.8. Sejam C, D duas coálgebras sobre $\mathbb{K}$. Temos que $C \otimes D$ também possui estrutura de $\mathbb{K}$-coálgebra com a comultiplicação dada por

$$\Delta_{C\otimes D} = (id \otimes \sigma \otimes id) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)$$

e a counidade dada por $\epsilon_{C\otimes D} = \epsilon_C \otimes \epsilon_D$.

Definição 1.2.9. *Sejam C, D duas coálgebras sobre $\mathbb{K}$. Um morfismo de coálgebras entre C e D é uma transformação linear $f : C \to D$ tal que os diagramas abaixo comutam:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f\otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\epsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\epsilon_D"] \\ & \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

Vejamos como fica a comutatividade do primeiro diagrama usando a Notação de Sweedler. Dado $x \in C$ temos que:

$$(\Delta_D \circ f)(x) = ((f \otimes f) \circ \Delta_C)(x)$$
$$\Delta_D(f(x)) = (f \otimes f)(\Delta_C(x))$$
$$(f(x))_1 \otimes (f(x))_2 = (f \otimes f)(x_1 \otimes x_2)$$
$$f(x)_1 \otimes f(x)_2 = f(x_1) \otimes f(x_2)$$

Proposição 1.2.10. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Se $\dim V = n$ então $C_V = V^* \otimes V \cong M_n^c(\mathbb{K})$ como coálgebras.*

Demonstração. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial arbitrários. Suponha que $\dim V = n$. Denote $C = C_V$ e $D = M_n^c(\mathbb{K})$.

Tome $B = \{e_1, ..., e_n\}$ base de V e $B^* = \{\varepsilon^1, ..., \varepsilon^n\}$ sua respectiva base dual. Defina $f : C \to D$ como $f(\varepsilon^i \otimes e_j) = e_{ij}$. Claramente f é transformação linear já que definimos pela base. Além disso, é um isomorfismo pois leva base em base. Agora, vejamos que os diagramas comutam:

$$((f \otimes f) \circ \Delta_C)(\varepsilon^i \otimes e_j) = (f \otimes f)\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon\hat{\imath} \otimes e_k \otimes \varepsilon^k \otimes e_j\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon^i \otimes e_k) \otimes f(\varepsilon^k \otimes e_j)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} e_{ik} \otimes e_{kj}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Delta_D(e_{ij})\\
&= (\Delta_D \circ f)(\varepsilon^i \otimes e_j)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\epsilon_C(\varepsilon^i \otimes e_j) &= \varepsilon^i(e_j)\\
&= \delta_{i,j}\\
&= \epsilon_D(e_{ij})\\
&= (\epsilon_D \circ f)(\varepsilon^i \otimes e_j).
\end{aligned}
$$

■

Definição 1.2.11. *Sejam C uma coálgebra sobre $\mathbb{K}$ e $X \subseteq C$ um subespaço vetorial. Dizemos que X é uma subcoálgebra se $\Delta(X) \subseteq X \otimes X$.*

Teorema 1.2.12. *(Teorema Fundamental de Coálgebras) Todo elemento x de uma coálgebra C está contido em uma subcoálgebra $C_x \subseteq C$ de dimensão finita.*

Demonstração. Sejam C uma $\mathbb{K}$-coálgebra e $x \in C$ arbitrários. Denote $\Delta_2 = (\Delta \otimes id) \circ \Delta$. Considere

$$\Delta_2(x) = \sum_{i,j} x_i \otimes m_{ij} \otimes y_j \in C \otimes C \otimes C$$

de tal forma que os elementos $\{x_i\}$ e $\{y_j\}$ sejam linearmente independentes. Defina

$$C_x = \text{span}\{m_{ij}\}.$$

Veja que C_x é um subespaço vetorial de C de dimensão finita. Além disso, temos que

$$(\epsilon \otimes id \otimes \epsilon) \circ \Delta_2(x) = x$$

ou seja,

$$x = \sum_{i,j} \epsilon(x_i)\epsilon(y_j) m_{ij} \in C_x.$$

Agora, defina os funcionais $\{\phi_i\}$ e $\{\psi_j\}$ em C^* tais que $\phi_i(x_k) = \delta_{i,k} 1_{\mathbb{K}}$ e $\psi_j(y_k) = \delta_{j,k} 1_{\mathbb{K}}$. Veja que

$$m_{ij} = (\phi_i \otimes id \otimes \psi_j)\left(\sum_{k,l} x_k \otimes m_{kl} \otimes y_l\right) = (\phi_i \otimes id \otimes \psi_j)(\Delta_2(x)).$$

Assim, temos que:

$$
\begin{aligned}
\Delta(m_{ij}) &= \Delta\left(\sum_{k,l} \phi_i(x_k) \otimes id(m_{kl}) \otimes \psi_j(y_l)\right)\\
&= (\phi_i \otimes id \otimes id \otimes \psi_j)(id \otimes \Delta \otimes id)\left(\sum_{k,l} x_k \otimes m_{kl} \otimes y_l\right)
\end{aligned}
$$

$$= (\phi_i \otimes id \otimes id \otimes \psi_j)(id \otimes id \otimes \Delta)\left(\sum_{k,l} x_k \otimes m_{kl} \otimes y_l\right)$$
$$= \sum_l m_{il} \otimes ((Id \otimes \psi_j)\Delta(y_l)) \in C_X \otimes C$$

$$\begin{aligned}\Delta(m_{ij}) &= \Delta\left(\sum_{k,l} \phi_i(x_k) \otimes id(m_{kl}) \otimes \psi_j(y_l)\right)\\ &= (\phi_i \otimes id \otimes id \otimes \psi_j)(id \otimes \Delta \otimes id)\left(\sum_{k,l} x_k \otimes m_{kl} \otimes y_l\right)\\ &= (\phi_i \otimes id \otimes id \otimes \psi_j)(\Delta \otimes id \otimes id)\left(\sum_{k,l} x_k \otimes m_{kl} \otimes y_l\right)\\ &= \sum_k (\phi_i \otimes id)\Delta(x_k) \otimes m_{kj} \in C \otimes C_X\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\Delta(m_{ij}) \in (C \otimes C_X) \cap (C_X \otimes C) = C_X \otimes C_X.$$

Do exposto, segue que C_X é uma subcoálgebra de C e $x \in C_X$. ■

Exemplo 1.2.13. (Álgebras de Convolução) Sejam C uma coálgebra e A uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. Defina, no espaço vetorial $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$, o produto de convolução

$$f * g = \mu_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C$$

e a unidade

$$\mathbb{1} = \eta_A \circ \epsilon_C.$$

Dados $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$ e $c \in C$ veja que:

$$\begin{aligned}(f * g)(c) &= \mu_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C(c)\\ &= \mu_A \circ (f \otimes g)(c_1 \otimes c_2)\\ &= \mu_A(f(c_1) \otimes g(c_2))\\ &= f(c_1)g(c_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{1}(c) &= \eta_A \circ \epsilon_C(c)\\ &= 1_A \epsilon_C(c).\end{aligned}$$

Agora, vejamos que $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A), *, \mathbb{1})$ é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. Sejam $f, g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}$ e $x \in C$ quaisquer. Temos que:

$$\begin{aligned}(f * g) * h &= \mu_A \circ ((f * g) \otimes h) \circ \Delta_C\\ &= \mu_A \circ ((\mu_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C) \otimes h) \circ \Delta_C\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu_A \circ (\mu_A \otimes I)(f \otimes g \otimes h)(\Delta_C \otimes I) \circ \Delta_C \\
&= \mu_A \circ (I \otimes \mu_A)(f \otimes g \otimes h)(I \otimes \Delta_C) \circ \Delta_C \\
&= f * (g * h)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{1} * f &= \mu_A \circ ((\eta_A \circ \epsilon_C) \otimes f) \circ \Delta_C \\
&= \mu_A \circ (\eta_A \otimes I) f (\epsilon_C \otimes I) \circ \Delta_C \\
&= id_A \circ f \circ id_C \\
&= f
\end{aligned}
$$

Portanto, temos que $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C,A), *, \mathbb{1})$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra.

Para o caso particular $A = \mathbb{K}$, vamos denotar $C^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, \mathbb{K})$. Veja que, neste caso, $\mathbb{1} = \epsilon_C$.

Proposição 1.2.14. *Considere a álgebra de séries formais* $\mathbb{K}[[x]] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n : a_n \in \mathbb{K} \right\}$ *com o produto dado por*

$$
\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n
$$

em que $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$*.Considere também a coálgebra de potências divididas* $C = \mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *definida no exemplo 1.2.7 Então:*

$$
C^* \cong \mathbb{K}[[x]].
$$

Demonstração. Considere a álgebra $\mathbb{K}[[x]]$ e a coálgebra $C = \mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Defina

$$
\begin{array}{rccc}
-: & C^* & \to & \mathbb{K}[[x]] \\
 & \varphi & \mapsto & \overline{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(e_n) x^n
\end{array}
$$

Temos que é linear:

$$
\begin{aligned}
\overline{(\varphi_1 + \alpha\varphi_2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_1 + \alpha\varphi_2)(e_n) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_1(e_n) + \alpha\varphi_2(e_n)) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_1(e_n) x^n + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_2(e_n) x^n \\
&= \overline{\varphi_1} + \alpha \overline{\varphi_2}.
\end{aligned}
$$

É injetora:

$$
\varphi \in \ker(-) \Rightarrow \overline{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(e_n) x^n = 0
$$

$$\Rightarrow \varphi(e_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \varphi = 0$$

É sobrejetora:

Tome $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{K}[[x]]$. Defina $\varphi : C \to \mathbb{K}$ por $\varphi(e_n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos que $\varphi \in C^*$ e $\overline{\varphi} = A$.

E também é um morfismo de álgebras:

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi * \psi} &= \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi * \psi)(e_n) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \varphi(e_k)\psi(e_{n-k}) \right) x^n \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(e_n) x^n \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \psi(e_m) x^m \right) \\
&= \overline{\varphi} \cdot \overline{\psi}
\end{aligned}$$

$$\overline{\mathbb{1}} = \overline{\epsilon_C} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_C(e_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n,0} x^n = 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}[[x]]}.$$

Do exposto segue o isomorfismo de álgebras desejado. ∎

1.2.1 O dual finito de uma álgebra

Já vimos que se C é uma coálgebra sobre $\mathbb{K}$ então C^* é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. Agora se A é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ nem sempre conseguimos colocar uma estrutura de coálgebra em A^*. Por isso, vamos definir a maior coálgebra contida em A^*.

Definição 1.2.15. *Seja A uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. Dado I um ideal de A, dizemos que I possui codimensão finita se*

$$\dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{A}{I} \right) < \infty.$$

Definição 1.2.16. *Seja A uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. Definimos o dual finito de A como o conjunto denotado por A^0 e dado por*

$$A^0 = \{\varphi \in A^* : \ker(\varphi) \text{ contém um ideal de codimensão finita de } A\}.$$

Teorema 1.2.17. *Sejam A uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e $f \in A^*$. Denote por $\mu^* : A^* \to (A \otimes A)^*$ o dual da multiplicação dado por $\mu^*(\varphi)(a \otimes b) = \varphi(ab)$ para todo $\varphi \in A^*$ e todos $a, b \in A$. São equivalentes:*

1. *$\mu^*(f) \in A^* \otimes A^*$, isto é,*

$$\mu^*(f) = \sum_{i=1}^{n} f_1 \otimes f_2$$

ou ainda, para todos $a,b \in A$

$$f(ab) = \sum_{i=1}^{n} f_1(a)f_2(b).$$

2. $\ker(f)$ *contém um ideal à esquerda de codimensão finita de A.*

3. $\ker(f)$ *contém um ideal à direita de codimensão finita de A.*

4. $\ker(f)$ *contém um ideal de codimensão finita de A.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada na referência [5].

Lema 1.2.18. *Seja V um K-espaço vetorial. Se X e Y subespaços de V possuem codimensão finita, então $X \cap Y$ possui codimensão finita.*

Demonstração. Sejam V um K-espaço vetorial e X e Y subespaços de V de codimensão finita. Temos que $\dim(\frac{V}{X}) < \infty$ e $\dim(\frac{V}{Y}) < \infty$. Assim, considere

$$\begin{array}{rccc} T: & V & \rightarrow & \frac{V}{X} \times \frac{V}{Y} \\ & v & \mapsto & T(v) = (v+X, v+Y). \end{array}$$

Claramente T é linear. Além disso,

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \{v \in V : T(v) = (0+X, 0+Y)\} \\ &= \{v \in V : (v+X, v+Y) = (0+X, 0+Y)\} \\ &= \{v \in V : v \in X \text{ e } v \in Y\} \\ &= X \cap Y. \end{aligned}$$

Assim, $\frac{V}{\ker(T)} = \frac{V}{X \cap Y} \cong Im(T) \subset \frac{V}{X} \times \frac{V}{Y}$, que por sua vez é finito dimensional. Logo, $X \cap Y$ possui codimensão finita. ∎

Proposição 1.2.19. *Seja A uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. Então A^0 é um subespaço vetorial de A^*.*

Demonstração. Seja A uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ arbitrária. Note que $A^0 \neq \emptyset$, visto que a função $f : A \to \mathbb{K}$ dada por $f(a) = 0$ está em A^0 pois $\ker(f) = A$ e $\dim(\frac{A}{A}) = 0$. Agora, sejam $f, g \in A^0$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ quaisquer. Temos que:

1. Como $f, g \in A^0$, existem ideais I e J de A, tais que $I \subset \ker(f)$ e $J \subset \ker(g)$ com $\dim(\frac{A}{I}) < \infty$ e $\dim(\frac{A}{J}) < \infty$. Veja que $I \cap J \subset \ker(f+g)$. Assim, pelo lema anterior, $\dim(\frac{A}{I \cap J}) < \infty$. Logo, $f + g \in A^0$.

2. Claramente, se $I \subset \ker(f)$, temos que $I \subset \ker(\alpha f)$, em que este possui dimensão finita. Logo, $\alpha f \in A^0$.

∎

Lema 1.2.20. *Seja $f: A \to B$ um morfismo de álgebras. Se I é um ideal de B de codimensão finita, então a imagem inversa*

$$f^{-1}(I) = \{x \in A : f(x) \in I\}$$

é um ideal de A de codimensão finita.

Demonstração. Já sabemos que $f^{-1}(I)$ é um ideal A e, por hipótese, temos $\dim(\frac{B}{I}) < \infty$. Observemos que o morfismo

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\pi} \frac{B}{I},$$

$\pi \circ f$ é um morfismo de álgebras cujo núcleo é dado por

$$\begin{aligned}\ker(\pi \circ f) &= \{x \in A : (\pi \circ f)(x) = 0 + I\} \\ &= \{x \in A : f(x) + I = 0 + I\} \\ &= \{x \in A : f(x) \in I\} \\ &= f^{-1}(I).\end{aligned}$$

Daí, $\dfrac{A}{\ker(\pi \circ f)} \cong Im(\pi \circ f)$ que é um subespaço de $\frac{B}{I}$, ou seja, $\frac{A}{f^{-1}(I)}$ é finito dimensional. ■

Lema 1.2.21. *Sejam A e B álgebras sobre $\mathbb{K}$ e $f: A \to B$ morfismos de álgebras. Então:*

1. *$f^*(B^0) \subset A^0$ em que f^* é o dual de f.*

2. *Considerando $\phi: A^* \otimes B^* \to (A \otimes B)^*$ a injeção canônica, temos $\phi(A^0 \otimes B^0) = (A \otimes B)^0$.*

3. *$\mu^*(A^0) \subset \psi(A^0 \otimes A^0)$, em que $\psi: A^* \otimes A^* \to (A \otimes A^*)$ é a injeção canônica.*

A demonstração deste Lema pode ser encontrada na referência [1] (página 34).

Finalmente, vamos mostrar que A^0 é, de fato, uma coálgebra. Defina $\Delta: A^0 \to A^0 \otimes A^0$ por $\Delta(f)(a \otimes b) = f(ab) = \sum_{i=1}^{n} f_1(a) \otimes f_2(b)$ e $\epsilon: A^0 \to \mathbb{K}$ por $\epsilon(f) = f(\mathbb{1}_A)$.

Proposição 1.2.22. (A^0, Δ, ϵ) *é uma coálgebra.*

Demonstração. Veja que desejamos comutar o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} A^0 & \xrightarrow{\Delta} & A^0 \otimes A^0 \\ {\scriptstyle\Delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta \otimes id_{A^0}} \\ A^0 \otimes A^0 & \xrightarrow[id_{A^0} \otimes \Delta]{} & A^0 \otimes A^0 \otimes A^0. \end{array}$$

Considere o seguinte diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & & (A\otimes A)^* \arrow[rr, "(id\otimes\mu)^*"] & & (A\otimes A\otimes A)^* \\
A^* \arrow[urr, "\mu^*"] \arrow[rr, "\mu^*"'] & & (A\otimes A)^* \arrow[urr, "(\mu\otimes id)^*"'] & & \\
 & & A^0\otimes A^0 \arrow[uu, dashed] \arrow[rr, dashed, "id\otimes\Delta"] & & A^0\otimes A^0\otimes A^0 \arrow[uu, "\psi_1"'] \\
A^0 \arrow[uu, "j"'] \arrow[urr, dashed, "\Delta"] \arrow[rr, "\Delta"'] & & A^0\otimes A^0 \arrow[uu] \arrow[urr, "\Delta\otimes id"'] & &
\end{tikzcd}
$$

em que

1. $j : A^0 \to A^*$ é a inclusão canônica.

2. $\varphi : A^0 \otimes A^0 \to (A\otimes A)^*$ é a restrição da injeção canônica vista no lema anterior.

3. $\psi_1 : A^0 \otimes A^0 \otimes A^0 \to (A\otimes A\otimes A)^0$ é dada por $\psi_1 = \iota \circ \phi \circ (\psi \otimes id)$. Assim, dados $f, g, h \in A^0$ e $a, b, c \in A$, temos
$$\psi_1(f\otimes g\otimes h)(a\otimes b\otimes c) = f(a)g(b)h(c).$$

O diagrama que queremos comutar é a base do paralelogramo visto acima. Para mostrar que a base comuta, mostraremos que todas as outras faces comutam.

Face Frontal:

Seja $f \in A^0$. Então,

$$(\varphi\circ\Delta)(f) = (\psi\circ\Delta)(f) = \mu^*(f) = \mu^*(j(f)) = (\mu^*\circ j)(f).$$

Logo,
$$\varphi\circ\Delta = \mu^*\circ j, \tag{1.1}$$
ou seja, a face frontal do paralelogramo comuta. Como a face lateral traseira é igual a face frontal, comuta também.

Face Lateral Dianteira:

Sejam $f, g \in A^0$ e $a, b, c \in A$. Assim,

$$
\begin{aligned}
(\psi_1\circ(\Delta\otimes id))(f\otimes g)(a\otimes b\times c) &= (\psi_1(f_1\otimes f_1\otimes g))(a\otimes b\otimes c) \\
&= \sum f_1(a)f_2(b)g(c) \\
&= \left(\sum f_1(a)f_2(b)\right)g(c) \\
&= f(ab)g(c)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\psi(f \otimes g))(ab \otimes c)\\
&= (\psi(f \otimes g))(\mu \otimes id)(a \otimes b \otimes c)\\
&= (\mu \otimes id)^*(\psi(f \otimes g))(a \otimes b \otimes c)\\
&= ((\mu \otimes id)^* \circ \psi)(f \otimes g))(a \otimes b \otimes c)\\
&= ((\mu \otimes id)^* \circ \varphi)(f \otimes g))(a \otimes b \otimes c).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\psi_1 \circ (\Delta \otimes id) = (\mu \otimes id)^* \circ \varphi, \tag{1.2}$$

ou seja, a face lateral dianteira comuta.

Analogamente temos que

$$\psi_1 \circ (id \otimes \Delta) = (id \otimes \mu)^* \circ \varphi, \tag{1.3}$$

isto é, que a face traseira comuta.

Face Superior:

Veja que

$$(\mu \otimes id)^* \circ \mu^* = (\mu \circ (\mu \otimes id))^* \overset{(*)}{=} (\mu \circ (id \otimes \mu))^* = (id \otimes \mu)^* \circ \mu^*,$$

em que $(*)$ ocorre pois como A é uma álgebra, o diagrama de μ é comutativo. Logo, a face superior comuta e temos

$$(\mu \otimes id)^* \circ \mu^* = (id \otimes \mu)^* \circ \mu^*. \tag{1.4}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\psi_1 \circ (\Delta \otimes id) \circ \Delta &\overset{(1.2)}{=} (\mu \otimes id)^* \circ \varphi \circ \Delta\\
&\overset{(1.1)}{=} (\mu \otimes id)^* \circ \mu^* \circ j\\
&\overset{(1.4)}{=} (id \otimes \mu)^* \circ \mu^* \circ j\\
&\overset{(1.1)}{=} (id \otimes \mu)^* \circ \varphi \circ \Delta\\
&\overset{(1.3)}{=} \psi_1 \circ (id \otimes \Delta) \circ \Delta.
\end{aligned}
$$

Daí, como $\psi_1 \circ (\Delta \otimes id) \circ \Delta = \psi_1 \circ (id \otimes \Delta) \circ \Delta$ e ψ_1 é injetora, temos que $(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$, ou seja, que o face da base do paralelogramo comuta.

Por fim, vejamos a comutatividade do diagrama da counidade.

$$
\begin{tikzcd}
 & A^0 \arrow[dd, "\Delta"'] & \\
\mathbb{K} \otimes A^0 \arrow[ur] & & A^0 \otimes \mathbb{K} \arrow[ul, "\phi"'] \\
 & A^0 \otimes A^0 \arrow[ul, "\varepsilon \otimes id_{A^0}"] \arrow[ur, "id_{A^0} \otimes \varepsilon"'] &
\end{tikzcd}
$$

Seja $f \in A^0$ e $a \in A$. Temos que:

$$
\begin{aligned}
((\phi \circ (id_{A^0} \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(f))(a) &= (\phi \circ (id_{A^0} \otimes \varepsilon)) \left(\sum f_1 \otimes f_2 \right)(a) \\
&= \left(\sum \varepsilon(f_2) f_1 \right)(a) \\
&= \left(\sum f_2(1_A) f_1 \right)(a) \\
&= \sum f_1(a) f_2(1_A) \\
&= f(a 1_A) \\
&= f(a),
\end{aligned}
$$

ou seja, $(\phi \circ (id_{A^0} \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(f) = f = id_{A^0}(f), \forall f \in A^0$. Logo,

$$\phi \circ (id_{A^0} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = id_{A^0}.$$

Do exposto, segue que $(A^0, \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra. Claramente, A^0 é a maior coálgebra em A^*. ■

1.3 BIÁLGEBRAS

Queremos estudar agora um conjunto que possui uma estrutura tanto de álgebra quanto de coálgebra. Além disso, vamos relacionar essas duas estruturas neste conjunto. Veremos na próxima proposição que quando Δ e ϵ são morfismos de álgebra então μ e η são morfismos de coálgebra e vice-versa. Assim, vamos conseguir uma certa compatibilidade nessas estruturas. A partir daí, vamos definir o que é uma Biálgebra.

Proposição 1.3.1. *Seja H um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com uma estrutura de $\mathbb{K}$-álgebra (H, μ, η) e de coálgebra (H, Δ, ϵ). São equivalentes:*

1. *Δ e ϵ são morfismos de álgebras.*
2. *μ e η são morfismos de coálgebras.*

Demonstração. Se Δ e ϵ são morfismos de álgebras então os seguintes diagramas comutam:

$$
\begin{tikzcd}
H\otimes H \arrow[r, "\Delta\otimes\Delta"] \arrow[dd, "\mu_H"'] & H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[d, "id_H\otimes T\otimes id_H"'] \arrow[dd, bend left=60, "\mu_{H\otimes H}"] \\
(1) & H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[d, "\mu_H\otimes\mu_H"'] \\
H \arrow[r, "\Delta"'] & H\otimes H
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta"] & H\otimes H \\
(2) & \mathbb{K}\otimes\mathbb{K} \arrow[u, "\eta\otimes\eta"'] \\
\mathbb{K} \arrow[uu, "\eta"] \arrow[r, "id_{\mathbb{K}}"'] & \mathbb{K} \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H\otimes H \arrow[r, "\epsilon\otimes\epsilon"] \arrow[dd, "\mu_H"'] & \mathbb{K}\otimes\mathbb{K} \arrow[dd, "\phi=\mu_{\mathbb{K}}"] \\
(3) & \\
H \arrow[r, "\epsilon"'] & \mathbb{K}
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[rr, "\epsilon"] \arrow[dr, "\eta"'] & {} \arrow[d, phantom, "(4)"] & \mathbb{K} \\
& \mathbb{K} \arrow[ur, "id_{\mathbb{K}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Veja que os diagramas nos mostram que μ e η são morfismos de coálgebras.

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[rr, "\mu"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"] \arrow[dd, bend right=60, "\Delta_{H\otimes H}"'] & & H \arrow[dd, "\Delta"] \\
H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[d, "id_H \otimes T \otimes id_H"] \arrow[r, phantom, "(5)"] & {} & \\
H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[rr, "\mu_H \otimes \mu_H"'] & & H \otimes H
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[rr, "\mu_H"'] \arrow[d, "\epsilon\otimes\epsilon"'] & & H \arrow[dd, "\epsilon"] \\
\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[d, "\phi"'] \arrow[r, phantom, "(6)"] & {} & \\
\mathbb{K} \arrow[rr, "id_{\mathbb{K}}"'] & & \mathbb{K}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[rr, "\eta"] \arrow[d, "\psi=\Delta_{\mathbb{K}}"'] & (7) & H \arrow[d, "\Delta"] \\
\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[rr, "\eta\otimes\eta"] & & H \otimes H
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "id_{\mathbb{K}}=\varepsilon_{\mathbb{K}}"'] & {} \arrow[d, phantom, "(8)"] & H \arrow[dl, "\varepsilon"] \\
& \mathbb{K} &
\end{tikzcd}$$

Os quatro primeiros diagramas implicam nos quatro últimos diagramas e vice-versa. Veja que: (1) $\Leftrightarrow$ (5), (2) $\Leftrightarrow$ (7), (3) $\Leftrightarrow$ (6) e (4) $\Leftrightarrow$ (8). ■

Definição 1.3.2. *(Biálgebra) Uma biálgebra sobre $\mathbb{K}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial H com uma estrutura de álgebra (H,μ,η) e coálgebra (H,Δ,ϵ) tal que Δ e ϵ são morfimos de álgebras (ou, equivalentemente, tal que μ e η são morfismos de coálgebras).*

Definição 1.3.3. *Sejam H, H' duas biálgebras sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que uma transformação linear $f : H \to H'$ é um morfismo de biálgebras se for simultaneamente um morfismo de álgebras e de coálgebras.*

Exemplo 1.3.4. (Álgebra do Grupo) Seja G um grupo. Considere o $\mathbb{K}$-espaço vetorial:

$$\mathbb{K}G = \{\sum_{g\in G} a_g\delta_g : a_g \in \mathbb{K}, g \in G, \text{somas finitas}\}.$$

Defina as transformações lineares:

$$\begin{array}{rccc}
\mu: & \mathbb{K}G \otimes \mathbb{K}G & \to & \mathbb{K}G \\
& \delta_g \otimes \delta_h & \mapsto & \delta_{gh}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rccc}
\eta: & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K}G \\
& \lambda & \mapsto & \lambda\delta_e
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}
\Delta: & \mathbb{K}G & \to & \mathbb{K}G \otimes \mathbb{K}G \\
& \delta_g & \mapsto & \delta_g \otimes \delta_g
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rccc}
\epsilon: & \mathbb{K}G & \to & \mathbb{K} \\
& \delta_g & \mapsto & 1_{\mathbb{K}}
\end{array}$$

onde e é o elemento neutro do grupo G.

Assumindo que temos as estruturas de álgebra e coálgebra com as transformações lineares definidas acima, vamos mostrar que Δ e ϵ são morfismos de álgebra. Sejam $g, h \in G$. Temos que:

$$\epsilon(\delta_g\delta_h) = \epsilon(\delta_{gh}) = 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} \cdot 1_{\mathbb{K}} = \epsilon(\delta_g)\epsilon(\delta_h)$$

$$\begin{aligned}
\Delta(\delta_g\delta_h) &= \Delta(\delta_{gh}) \\
&= \delta_{gh} \otimes \delta_{gh} \\
&= \delta_g\delta_h \otimes \delta_g\delta_h \\
&= (\delta_g \otimes \delta_g)(\delta_h \otimes \delta_h) \\
&= \Delta(\delta_g)\Delta(\delta_h)
\end{aligned}$$

$$\epsilon(\delta_e) = 1_{\mathbb{K}}$$

$$\Delta(\delta_e) = \delta_e \otimes \delta_e.$$

Portanto, temos que $\mathbb{K}G$ é uma biálgebra.

Exemplo 1.3.5. Considere $H = \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Temos que H possui estrutura de álgebra com a multiplicação dada por

$$e_m \cdot e_n = \binom{m+n}{n} e_{m+n}$$

e a unidade dada por $\mathbb{1}_H = e_0$. Além disso, como vimos no exemplo 1.2.7, temos que H também possui estrutura de coálgebra com a comultiplicação dada por

$$\Delta(e_n) = \sum_{k=0}^{n} e_k \otimes e_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} e_{n-k} \otimes e_k = \sum_{k+l=n} e_k \otimes e_l = \sum_{k,l=0}^{n} [[k+l=n]] e_k \otimes e_l$$

e a counidade $\epsilon(e_n) = \delta_{n,0}$. Vejamos que Δ e ϵ são morfismos de álgebra.

$$\begin{aligned}
\Delta(e_n)\Delta(e_m) &= \sum_{p,q}\sum_{r,s} e_p e_r \otimes e_q e_s [[p+q=m]][[r+s=n]] \\
&= \sum_{p,q}\sum_{r,s} \binom{p+r}{r}\binom{q+s}{s} e_{p+r} \otimes e_{q+s} [[p+q=m]][[r+s=n]]
\end{aligned}$$

Denotando $k = p+r$ e $l = q+s$ temos:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k,l}\sum_{r,s} \binom{k}{r}\binom{l}{s} e_k \otimes e_l [[k+l-r-s=m]][[r+s=n]] \\
&= \sum_{k,l=0}^{m+n} \left(\sum_{r=0}^{n} \binom{k}{r}\binom{l}{n-r} \right) e_k \otimes e_l [[k+l=m+n]] \\
&= \binom{m+n}{n} \sum_{k,l=0}^{m+n} e_k \otimes e_l [[k+l=m+n]]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Delta\left(\binom{m+n}{n} e_{m+n}\right)\\
&= \Delta(e_n e_m)
\end{aligned}
$$

$$\Delta(e_0) = \sum_{k+l=0} e_k \otimes e_l = e_0 \otimes e_0$$

$$
\begin{aligned}
\epsilon(e_m)\epsilon(e_n) &= \delta_{m,0}\delta_{n,0}\\
&= \begin{cases} \delta_{m,0}, \text{ se } n=0\\ 0, \text{ se } n \neq 0 \end{cases}\\
&= \begin{cases} 1, \text{ se } m=n=0\\ 0, \text{ se } m\neq 0 \text{ ou } n \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\epsilon(e_m e_n) &= \epsilon\left(\binom{m+n}{n} e_{m+n}\right)\\
&= \binom{m+n}{n}\epsilon(e_{m+n})\\
&= \binom{m+n}{n}\delta_{m+n,0}\\
&= \begin{cases} \binom{m+n}{n}, \text{ se } m+n=0\\ 0, \text{ se } m+n \neq 0 \end{cases}\\
&= \begin{cases} \binom{m+n}{n}, \text{ se } m=n=0\\ 0, \text{ se } m\neq 0 \text{ ou } n \neq 0 \end{cases}\\
&= \begin{cases} \binom{0}{0}, \text{ se } m=n=0\\ 0, \text{ se } m\neq 0 \text{ ou } n \neq 0 \end{cases}\\
&= \begin{cases} 1, \text{ se } m=n=0\\ 0, \text{ se } m\neq 0 \text{ ou } n \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\epsilon(e_0) = \delta_{0,0} = 1$$

Do exposto, segue o desejado.

Observação 1.3.6. Considere a álgebra de matrizes $M_n(\mathbb{K})$ vista no exemplo 1.1.5. Neste conjunto não pode existir uma estrutura de biálgebra. Se $M_n(\mathbb{K})$ fosse uma biálgebra, então $\epsilon : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ seria morfismo de álgebras. Teríamos então que o $\ker(\epsilon)$ seria um ideal próprio de $M_n(\mathbb{K})$. Mas $M_n(\mathbb{K})$ é simples, pois todo ideal de $M_n(\mathbb{K})$ é da forma $M_n(I)$ com I ideal de $\mathbb{K}$.

1.4 MÓDULOS

Assim como estudamos módulos sobre um anel, agora que vimos a definição de Álgebra, podemos definir o que é um módulo sobre uma álgebra. Considere (A, μ, η) uma $\mathbb{K}$-álgebra.

Definição 1.4.1. *Um A-módulo à esquerda é um par $(M, \triangleright)$ em que M é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e*

$$\triangleright : A \otimes M \to M$$

é uma transformação $\mathbb{K}$-linear tal que os diagramas abaixo comutam:

$$\begin{tikzcd} A\otimes A\otimes M \arrow[r, "\mu_A\otimes id_M"] \arrow[d, "id_A\otimes\triangleright"'] & A\otimes M \arrow[d, "\triangleright"] \\ A\otimes M \arrow[r, "\triangleright"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{K}\otimes M \arrow[rr, "\eta_A\otimes id_M"] \arrow[dr, "l_M"'] & & A\otimes M \arrow[dl, "\triangleright"] \\ & M. & \end{tikzcd}$$

Definição 1.4.2. *Um morfismo de A-módulos à esquerda entre M e N é uma aplicação linear $f : M \to N$ tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd} A\otimes M \arrow[r, "id_A\otimes f"] \arrow[d, "\triangleright"'] & A\otimes N \arrow[d, "\triangleright"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N. \end{tikzcd}$$

Veja que, em termos de elementos, a comutatividade do diagrama acima nos diz que $f(a \triangleright m) = a \triangleright f(m)$ para todos $a \in A$ e $m \in M$.

Definição 1.4.3. *Um A-módulo à direita é um par $(M, \triangleleft)$ em que M é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e*

$$\triangleleft : M \otimes A \to M$$

é um morfismo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais tal que os diagramas abaixo comutam:

$$\begin{tikzcd} M\otimes A\otimes A \arrow[r, "id_M\otimes\mu_A"] \arrow[d, "\triangleleft\otimes id_A"'] & M\otimes A \arrow[d, "\triangleleft"] \\ M\otimes A \arrow[r, "\mu"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M\otimes\mathbb{K} \arrow[rr, "id_M\otimes\eta_A"] \arrow[dr, "r_M"'] & & M\otimes A \arrow[dl, "\triangleleft"] \\ & M. & \end{tikzcd}$$

Definição 1.4.4. *Um morfismo de A-módulos à direita entre M e N é uma aplicação linear $f : M \to N$ tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd} M\otimes A \arrow[r, "f\otimes id_A"] \arrow[d, "\triangleleft"'] & N\otimes A \arrow[d, "\triangleleft"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N. \end{tikzcd}$$

Veja que, em termos de elementos, a comutatividade do diagrama acima nos diz que $f(m \triangleleft a) = f(m) \triangleleft a$ para todos $a \in A$ e $m \in M$.

Exemplo 1.4.5. Todo ideal I à esquerda de A é um A-módulo à esquerda.

De fato, como I é um ideal à esquerda de A já temos que I é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\triangleright = \mu_{A\otimes I}$ é uma transformação linear. Além disso, dados $a, b \in A$ e $i \in I$, os diagramas comutam:

$$\begin{aligned} a \triangleright (b \triangleright i) &= a \triangleright (bi) \\ &= a(bi) \\ &= (ab)i \\ &= (ab) \triangleright i \end{aligned}$$

$$\mathbb{1}_A \triangleright i = \mathbb{1}_A i = i.$$

Exemplo 1.4.6. Seja V um espaço vetorial com $\dim V = n$. Então V é um $\mathbb{K}$-módulo à esquerda e também um $M_n(\mathbb{K})$-módulo à esquerda, via multiplicação de matrizes.

Proposição 1.4.7. *Sejam $f : A \to B$ um morfismo de álgebras e $(M, \triangleright_B)$ um B-módulo à esquerda. Então M tem estrutura de A-módulo à esquerda dada por $a \triangleright_A m = f(a) \triangleright_B m$ para todos $a \in A$ e $m \in M$.*

Demonstração. Como $\triangleright_B$ é transformação linear, temos que $\triangleright_A$ também será. Além disso, como f é morfismo de álgebra e $(M, \triangleright_B)$ é B-módulo, temos:

1. $f \circ \mu_A = \mu_B(f \otimes f)$;
2. $f \circ \eta_A = \eta_B$;
3. $\triangleright_B \circ (id_B \otimes \triangleright_B) = \triangleright_B \circ (\mu_B \otimes id_M)$;
4. $I_M = \triangleright_B \circ (\eta_B \otimes id_M)$.

Portanto, segue que:

$$\begin{aligned} \triangleright_A \circ (\mu_A \otimes id_M)(a \otimes b \otimes m) &= \triangleright_A \circ (\mu_A(a \otimes b) \otimes m) \\ &= f(\mu_A(a \otimes b)) \triangleright_B (m) \\ &= \mu_B(f \otimes f)(a \otimes b) \triangleright_B (m) \\ &= \triangleright_B(\mu_B(f(a) \otimes f(b)) \otimes m) \\ &= \triangleright_B \circ (\mu_B \otimes id_M)(f(a) \otimes f(b) \otimes m) \\ &= \triangleright_B \circ (id_B \otimes \triangleright_B)(f(a) \otimes f(b) \otimes m) \\ &= \triangleright_B(f(a) \otimes (f(b) \triangleright_B m) \\ &= \triangleright_B(f(a) \otimes b \triangleright_A m) \\ &= f(a) \triangleright_B (b \triangleright_A m) \\ &= a \triangleright_A (b \triangleright_A m) \\ &= \triangleright_A \circ (id_A \otimes \triangleright_A)(a \otimes b \otimes m) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
l_M(\lambda \otimes m) &= \triangleright_B \circ (\eta_B \otimes id_M)(\lambda \otimes m) \\
&= \triangleright_B \circ ((f \circ \eta_A) \otimes id_M)(\lambda \otimes m) \\
&= \triangleright_B \circ (f(\eta_A(\lambda) \otimes m) \\
&= \triangleright_B(f(\lambda \mathbb{1}_A) \otimes m) \\
&= f(\lambda \mathbb{1}_A) \triangleright_B m \\
&= \lambda \mathbb{1}_A \triangleright_A m \\
&= \triangleright_A(\eta_A \otimes id_M)(\lambda \otimes m).
\end{aligned}
$$

Logo, $(M, \triangleright_A)$ é um A-módulo à esquerda. ∎

Definição 1.4.8. *Dados G um grupo e V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Considere $GL(V) = \{T \in End(V) : T$ é inversível$\}$. Uma representação do grupo G é um homomorfismo $\varphi : G \to GL(V)$.*

Exemplo 1.4.9. Sejam G um grupo, V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e uma representação $\rho : G \to GL(V)$. Considere a álgebra $\mathbb{K}G$ vista no exemplo 1.3.4 Temos que $(V, \triangleright)$ é um $\mathbb{K}G$-módulo à esquerda com a estrutura dada por

$$
\delta_g \triangleright v = \rho(g)(v) = \rho_g(v)
$$

para todos $g \in G$ e $v \in V$.

Tome $g, h \in G$, $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Temos que:

$$
\begin{aligned}
\triangleright \circ (id_{\mathbb{K}G} \otimes \triangleright)(\delta_g \otimes \delta_h \otimes v) &= \triangleright(\delta_g \otimes \rho_h(v)) \\
&= \rho_g(\rho_h(v)) \\
&= \rho_{gh}(v) \\
&= \triangleright(\delta_{gh} \otimes v) \\
&= \triangleright \circ (\mu_{\mathbb{K}G} \otimes id_V)(\delta_g \otimes \delta_h \otimes v)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\triangleright \circ (\eta_{\mathbb{K}G} \otimes id_V)(\lambda \otimes v) &= \triangleright(\lambda \delta_e \otimes v) \\
&= \lambda(\triangleright(\delta_e \otimes v) \\
&= \lambda(\rho_e(v)) \\
&= \lambda v \\
&= l_V(\lambda \otimes v).
\end{aligned}
$$

1.5 COMÓDULOS

Agora podemos dualizar a definição de módulo sobre uma álgebra e definir comódulo sobre uma coálgebra. Considere (C, Δ, ϵ) uma $\mathbb{K}$-coálgebra.

Definição 1.5.1. *Um C-comódulo à direita é um par (M,ρ), em que M é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\rho : M \to M \otimes C$ é um morfismo de $\mathbb{K}$ espaços vetoriais tal que os diagramas abaixo comutam.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes C \arrow[d, "id_M \otimes \Delta"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\rho \otimes id_C"'] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \otimes C \arrow[rr, "id_M \otimes \epsilon"] & & M \otimes \mathbb{K} \\ & M. \arrow[ul, "\rho"] \arrow[ur, "r_M^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Definição 1.5.2. *Um C-comódulo à esquerda é um par (M,λ), em que M é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\lambda : M \to C \otimes M$ é um morfismo de $\mathbb{K}$ espaços vetoriais tal que os diagramas abaixo comutam.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda"'] & C \otimes M \arrow[d, "\Delta \otimes id_M"] \\ C \otimes M \arrow[r, "id_C \otimes \lambda"'] & C \otimes C \otimes M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \otimes M \arrow[rr, "\varepsilon \otimes id_M"] & & \mathbb{K} \otimes M \\ & M. \arrow[ul, "\lambda"] \arrow[ur, "l_M^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Assim como usamos a Notação de Sweedler para coálgebras, vamos usar também para os comódulos. Para C-comódulos à direita, então $\rho : M \to M \otimes C$ e escrevemos

$$\rho(m) = m_0 \otimes m_1,$$

em que os m_0 são combinações de elementos de M e os m_1 são combinações de elementos de C. Além disso, dado $m \in M$, a comutatividade do primeiro diagrama nos dá

$$((id_M \otimes \Delta) \circ \rho)(m) = (id_M \otimes \Delta)(m_0 \otimes m_1) = m_0 \otimes (m_1)_1 \otimes (m_1)_2$$

$$((\rho \otimes id_C) \circ \rho)(m) = (\rho \otimes id_C)(m_0 \otimes m_1) = (m_0)_0 \otimes (m_1)_1 \otimes m_1,$$

ou seja,

$$m_0 \otimes (m_1)_1 \otimes (m_1)_2 = (m_0)_0 \otimes (m_0)_1 \otimes m_1 = m_0 \otimes m_1 \otimes m_2.$$

E a comutatividade do segundo diagrama nos dá

$$\begin{aligned} id_M(m) &= (r_M^{-1} \circ (id_M \otimes \epsilon) \circ \rho)(m) \\ &= (r_M^{-1} \circ (id_M \otimes \epsilon))(m_0 \otimes m_1) \\ &= r_M^{-1}(m_0 \otimes \epsilon(m_1)) \\ &= m_0 \epsilon(m_1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$m = \epsilon(m_1) m_0.$$

Para C-comódulos à esquerda, então $\rho : M \to C \otimes M$ e escrevemos

$$\rho(m) = m_{-1)} \otimes m_0,$$

em que os m_{-1} são combinações de elementos de C e os m_0 são combinações de elementos de M. Analogamente, dado $m \in M$ temos da comutatividade dos diagramas:

$$\begin{aligned} (m_{-1})_1 \otimes (m_{-1})_2 \otimes m_0 &= m_{-1} \otimes (m_0)_{-1} \otimes (m_0)_0 \\ &= m_{-2} \otimes m_{-1} \otimes m_0. \end{aligned}$$

$$m = \epsilon(m_{-1}) m_0.$$

Definição 1.5.3. *Um morfismo de C-comódulos à direita entre M e N é uma aplicação linear $f: M \to N$ tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho^M"'] & N \arrow[d, "\rho^N"] \\ M \otimes C \arrow[r, "f \otimes id_C"'] & N \otimes C. \end{tikzcd}$$

Veja que, na notação de Sweedler, a comutatividade do diagrama fica

$$f(m)_0 \otimes f(m)_1 = f(m_0) \otimes f(m_1)$$

para todo $m \in M$.

Definição 1.5.4. *Um morfismo de C-comódulos à esquerda entre M e N é uma aplicação linear $f: M \to N$ tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho^M"'] & N \arrow[d, "\rho^N"] \\ C \otimes M \arrow[r, "id_C \otimes f"'] & C \otimes N. \end{tikzcd}$$

Veja que, na notação de Sweedler, a comutatividade do diagrama fica

$$f(m)_{-1} \otimes f(m)_0 = f(m_{-1}) \otimes f(m_0)$$

para todo $m \in M$.

Definição 1.5.5. *Seja (C, Δ, ϵ) uma coálgebra sobre $\mathbb{K}$. Um subespaço vetorial $I \subseteq C$ é dito ser um*

1. *coideal à esquerda se $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$;*

2. *coideal à direita se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$;*

3. *coideal se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ e $\epsilon(I) = \{0\}$.*

Exemplo 1.5.6. Seja (C, Δ, ϵ) uma coálgebra sobre $\mathbb{K}$. Todo coideal à direita de C é um C-comódulo. Considere $I \subseteq C$ um coideal à direita de C. Então temos que $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$. Defina

$$\rho: I \to I \otimes C$$

por $\rho(x) = \Delta(x)$ para todo $x \in I$. Note que ρ é a restrição de Δ em I. Portanto, dos diagramas da definição de coálgebra (1.2.1), segue que (I, ρ) é um C-comódulo à direita.

Analogamente, todo coideal à esquerda é um C-comódulo à esquerda.

Exemplo 1.5.7. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com $\dim V = n$. Tome $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base de V. Temos que V é um $M_n(\mathbb{K})$-comódulo à direita com $\rho: V \to V \otimes M_n(\mathbb{K})$ dada por

$$\rho(e_i) = \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes E_{ji}.$$

De fato, denote $C = M_n(\mathbb{K})$. Temos que:

$$
\begin{aligned}
(\rho \otimes id_C) \circ \rho(e_i) &= \rho \otimes id_C \left(\sum_{j=1}^{n} e_j \otimes E_{ji} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \rho(e_j) \otimes E_{ji} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes E_{kj} \otimes E_{ji} \\
&= \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes \Delta(E_{ki}) \\
&= (id_V \otimes \Delta) \left(\sum_{k=1}^{n} e_k \otimes E_{ki} \right) \\
&= (id_V \otimes \Delta) \circ \rho(e_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(id_V \otimes \epsilon) \circ \rho(e_i) &= (id_V \otimes \epsilon) \left(\sum_{j=1}^{n} e_j \otimes E_{ji} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes \delta_{j,i} \\
&= e_i \otimes 1 \\
&= r_V^{-1}(e_i)
\end{aligned}
$$

Definição 1.5.8. *Seja G um grupo. Uma função $f : G \to \mathbb{K}$ é dita ser uma função representativa do grupo G se existirem:*

1. *Uma representação $\pi : G \to GL(V)$ em que V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita;*
2. *Um vetor $v \in V$;*
3. *Um funcional linear $\varphi \in V^*$;*

tais que, para qualquer $g \in G$, tenhamos

$$f(g) = \varphi(\pi_g(v)).$$

Iremos denotar por $R_{\mathbb{K}}(G)$ o conjunto de todas as funções representativas de G relativas ao corpo $\mathbb{K}$. Dado $f \in R_{\mathbb{K}}(G)$ existem V $\mathbb{K}$-espaço vetorial, $\pi : G \to GL(V)$ uma representação de G, $\varphi \in V^*$ e $v \in V$ tais que $f(g) = \varphi(\pi_g(v))$ para todo $g \in G$. Seja $B = \{e_1, ..., e_n\}$ uma base de V e $B' = \{\varepsilon^1, ..., \varepsilon^n\}$ sua respectiva base dual em V^*. Temos que:

$$f(gh) = \varphi(\pi(gh)(v)) = \varphi(\pi_g \pi_h(v))$$

Como $\pi_h(v) \in V$, temos que $\pi_h(v) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i(\pi_h(v))e_i$. Assim,

$$\begin{aligned} f(gh) &= \varphi(\pi_g \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon\hat{\imath}(\pi_h(v))e_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi(\pi_g e_i)\varepsilon^i(\pi_h(v)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i'(g)f_i''(h). \end{aligned}$$

Em que $f_i'(g) = \varphi(\pi + ge_i)$ e $f_i''(h) = \varepsilon\hat{\imath}(\pi_h(v))$. Assim, $R_{\mathbb{K}}(G)$ é uma coálgebra com a comultiplicação e a counidade dadas por:

$$\begin{array}{lccc} \Delta\colon & R_{\mathbb{K}}(G) & \to & R_{\mathbb{K}}(G) \otimes R_{\mathbb{K}}(G) \\ & f & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} f_i' \otimes f_i'' \end{array} \qquad \begin{array}{lccc} \epsilon\colon & R_{\mathbb{K}}(G) & \to & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & f(e) \end{array}$$

Exemplo 1.5.9. Sejam G um grupo, V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com $\dim V = n$ e $\pi : G \to GL(V)$ uma representação de G. Temos que V é um $R_{\mathbb{K}}(G)$-comódulo à direita com $\rho : V \to V \otimes R_{\mathbb{K}}(G)$ dada por

$$\rho(e_i) = \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes \varepsilon_j(\pi(\_)(e_i))$$

em que $\{e_1, ..., e_n\} \subseteq V$ é uma base de V e $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\} \subseteq V^*$ é sua base dual associada. Denote $C = R_{\mathbb{K}}(G)$. Vejamos a comutatividade dos diagramas:

$$\begin{aligned} (\rho \otimes id_C) \circ \rho(e_i) &= (\rho \otimes id_C) \left(\sum_{j=1}^{n} e_j \otimes \varepsilon_j(\pi(\_)(e_i)) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \rho(e_j) \otimes \varepsilon_j(\pi(\_)(e_i)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} e_k \otimes \varepsilon_k(\pi(\_)(e_j) \right) \otimes \varepsilon_j(\pi(\_)(e_i)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes \varepsilon_k(\pi(\_)(e_j)) \otimes \varepsilon_j(\pi(\_)(e_i)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes \left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_k(\pi(\_)(e_j) \right) \otimes \varepsilon_j(\pi(\_)(e_i)) \\ &= (id_V \otimes \Delta) \left(\sum_{j=1}^{n} e_j \otimes \varepsilon_j(\pi(\_)(e_i) \right) \\ &= (id_V \otimes \Delta) \circ \rho(e_i) \end{aligned}$$

$$(id_V \otimes \epsilon) \circ \rho(e_i) = (id_V \otimes \epsilon) \left(\sum_{j=1}^{n} e_j \otimes \varepsilon_j(\pi(\_)(e_i)) \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes \varepsilon_j(\pi_e(e_i)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes \varepsilon_j(e_i) \\
&= e_i \otimes \varepsilon_i(e_i) \\
&= e_i \otimes 1 \\
&= r_V^{-1}(e_i).
\end{aligned}
$$

1.6 ÁLGEBRAS DE HOPF

Agora que vimos todos esses conceitos, podemos finalmente abordar as Álgebras de Hopf. Uma Biálgebra será uma Álgebra de Hopf quando existir um um morfismo, que chamaremos de antípoda, com algumas propriedades. Veremos também alguns exemplos e resultados.

Como visto no exemplo 1.2.13, se (C,Δ,ϵ) é uma $\mathbb{K}$-coálgebra e (A,μ,η) é uma $\mathbb{K}$-álgebra, então $Hom_{\mathbb{K}}(C,A)$ possui uma estrutura de álgebra com multiplicação dada pelo produto de convolução. Agora, considere H uma biálgebra sobre $\mathbb{K}$ com estrutura de coálgebra denotada por $H^C = (H,\Delta,\epsilon)$ e estrutura de álgebra denotada por $H^A = (H,\mu,\eta)$. Assim, temos que $Hom_{\mathbb{K}}(H^C,H^A) = End_{\mathbb{K}}(H)$ é uma álgebra com o produto de convolução e unidade $\mathbb{1}_{End_{\mathbb{K}}(H)} = \eta\circ\epsilon$.

Definição 1.6.1. *(Antípoda) Seja H uma biálgebra. Se existir a inversa da transformação identidade $id_H : H \to H$ em relação ao produto de convolução da álgebra $Hom_{\mathbb{K}}(H^C,H^A)$, digamos $S : H \to H$, dizemos que S é a antípoda da biálgebra H. Ou seja, $S * id_H = \eta\circ\epsilon = id_H * S$.*

Definição 1.6.2. *(Álgebra de Hopf) Uma Álgebra de Hopf é uma biálgebra que possui antípoda.*

Definição 1.6.3. *Sejam H e K duas álgebras de Hopf. Uma transformação linear $f : H \to K$ é um morfismo de álgebras de Hopf se for um morfismo de biálgebras.*

Proposição 1.6.4. *Sejam H e K duas álgebras de Hopf com antípodas S_H e S_K, respectivamente. Se $f : H \to K$ é um morfismo de álgebras de Hopf então $f\circ S_H = S_K\circ f$.*

Demonstração. Sejam H e K duas álgebras de Hopf com antípodas S_H e S_K, respectivamente. Considere $H = (H,\mu_H,\eta_H,\Delta_H,\epsilon_H)$ e $K = (K,\mu_K,\eta_K,\Delta_K,\epsilon_K)$. Considere também a álgebra de convolução $Hom_{\mathbb{K}}(H^C,K^A)$. Tome $h \in H$, temos que:

$$
\begin{aligned}
((S_K\circ f) * f)(h) &= \sum (S_K\circ f)(h_1)f(h_2) \\
&= \sum S_K(f(h_1))f(h_2) \\
&= \sum S_K((f(h))_1)(f(h))_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (S_K * id_K)(f(h)) \\
&= (\eta_K \circ \epsilon_K)(f(h)) \\
&= (\eta_K \circ \epsilon_K \circ f)(h) \\
&= (\eta_K \circ \epsilon_H)(h).
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos que:

$$
\begin{aligned}
(f * (f \circ S_H))(h) &= \sum f(h_1)(f \circ S_H)(h_2) \\
&= \sum f(h_1 S_H(h_2)) \\
&= f\left(\sum h_1 S_H(h_2)\right) \\
&= f(\epsilon_H(h) 1_H) \\
&= \epsilon_H(h) f(1_H) \\
&= \epsilon_H(h) 1_K \\
&= \epsilon_H(h) \eta_K(\mathbb{1}_{\mathbb{K}}) \\
&= \eta_K(\epsilon_H(h)).
\end{aligned}
$$

Assim, ambos são inversos de convolução de f. Logo, segue o desejado: $f \circ S_H = S_K \circ f$. ■

Proposição 1.6.5. *Seja $H = (H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então, para quaisquer $h, k \in H$, temos que:*

1. *$S(hk) = S(k)S(h)$;*
2. *$S(1_H) = 1_H$;*
3. *$S(h)_1 \otimes S(h)_2 = S(h_2) \otimes S(h_1)$;*
4. *$\epsilon(S(h)) = \epsilon(h)$.*

Demonstração. 1. Considere a álgebra de convolução $Hom_{\mathbb{K}}(H \otimes H, H)$. Sejam $F, G : H \otimes H \to H$ dados, para quaisquer $h, k \in H$, por $F(h \otimes k) = S(k)S(h)$ e $G(h \otimes k) = S(hk)$. Temos que $F, G \in Hom_{\mathbb{K}}(H \otimes H, H)$. Vamos mostrar que ambos são inversos da multiplicação μ de H e, portanto, que $F = G$. Tome $h, k \in H$ quaisquer. Temos que:

$$
\begin{aligned}
(\mu * F)(h \otimes k) &= \sum \mu((h \otimes k)_1) F((h \otimes k)_2) \\
&= \sum \mu(h_1 \otimes k_1) F(h_2 \otimes k_2) \\
&= \sum h_1 k_1 S(k_2) S(h_2) \\
&= \sum h_1 (\epsilon(k) 1_H) S(h_2) \\
&= \epsilon(k) \sum h_1 S(h_2) \\
&= \epsilon(k) \epsilon(h) 1_H \\
&= \overline{\epsilon}(h \otimes k) 1_H \\
&= (\eta \circ \overline{\epsilon})(h \otimes k),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}(G*\mu)(h\otimes k) &= \sum G((h\otimes k)_1)\mu((h\otimes k)_2)\\ &= \sum G(h_1\otimes k_1)\mu(h_2\otimes k_2)\\ &= \sum S(h_1k_1)h_2k_2\\ &= \sum S((hk)_1)((hk)_2)\\ &= \epsilon(hk)1_H\\ &= \epsilon(h)\epsilon(k)1_H\\ &= \overline{\epsilon}(h\otimes k)1_H\\ &= (\eta\circ\overline{\epsilon})(h\otimes k),\end{aligned}$$

em que $\overline{\epsilon}$ é a counidade de $H\otimes H$ e m é a multiplicação da álgebra $\mathbb{K}$. Logo, F e G são inversos de μ com relação ao produto de convolução. Portanto, $F=G$.

2. Temos que:

$$\begin{aligned}1_H &= \eta(\mathbb{1}_{\mathbb{K}})\\ &= \eta(\epsilon(1_H))\\ &= (S*id_H)(1_H)\\ &= S(1_H)1_H\\ &= S(1_H).\end{aligned}$$

3. Considere a álgebra de convolução $Hom_{\mathbb{K}}(H,H\otimes H)$. Sejam $F,G:H\to H\otimes H$ definidas por $F(h)=\Delta(S(h))$ e $G(h)=\sum S(h_2)\otimes S(h_1)$, para todo $h\in H$. Temos que $F,G\in Hom_{\mathbb{K}}(H,H\otimes H)$. Vamos mostrar que ambos são inversos da comultiplicação Δ de H. Tome $h\in H$ qualquer. Temos que:

$$\begin{aligned}(\Delta*F)(h) &= \sum \Delta(h_1)F(h_2)\\ &= \sum \Delta(h_1)\Delta(S(h_2))\\ &= \Delta\left(\sum h_1S(h_2)\right)\\ &= \Delta(\epsilon(h)1_H)\\ &= \epsilon(h)\Delta(1_H)\\ &= \epsilon(h)(1_H\otimes 1_H)\\ &= \epsilon(h)\overline{\eta}(\mathbb{1}_{\mathbb{K}})\\ &= \overline{\eta}(\epsilon(h))\\ &= (\overline{\eta}\circ\epsilon)(h),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(G*\Delta)(h) &= \sum G(h_1)\Delta(h_2)\\ &= \sum (S(h_{12})\otimes S(h_{11}))(h_{21}\otimes h_{22})\\ &= \sum (S(h_2)\otimes S(h_1))(h_3\otimes h_4)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum S(h_2)h_3 \otimes S(h_1)h_4 \\
&= \sum \epsilon(h_2)1_H \otimes S(h_1)h_3 \\
&= \sum 1_H \otimes S(h_1)\epsilon(h_2)h_3 \\
&= \sum 1_H \otimes S(h_1)h_2 \\
&= 1_H \otimes \epsilon(h)1_H \\
&= \epsilon(h)(1_H \otimes 1_H) \\
&= (\overline{\eta} \circ \epsilon)(h),
\end{aligned}
$$

em que $\overline{\eta}$ é a unidade de $H \otimes H$. Logo, F e G são inversos de Δ com relação ao produto de convolução. Portanto, $F = G$.

4. Tome $h \in H$. Note que:

$$\epsilon(h)1_H = \sum h_1 S(h_2).$$

Assim,

$$\epsilon(h)\epsilon(1_H) = \epsilon(h)1_{\mathbb{K}} = \epsilon(h)$$

e

$$
\begin{aligned}
\epsilon\left(\sum h_1 S(h_2)\right) &= \sum \epsilon(h_1 S(h_2)) \\
&= \sum \epsilon(h_1)\epsilon(S(h_2)) \\
&= \sum \epsilon(\epsilon(h_1)S(h_2)) \\
&= \sum \epsilon(S(\epsilon(h_1)h_2)) \\
&= \epsilon(S(h)).
\end{aligned}
$$

Portanto, segue que $\epsilon(h) = \epsilon(S(h))$.

■

Proposição 1.6.6. *Sejam $H = (H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ uma álgebra de Hopf com antípoda S e $h \in H$. São equivalentes:*

1. $\sum S(h_2)h_1 = \varepsilon(h)1_H$;

2. $\sum h_2 S(h_1) = \varepsilon(h)1_H$;

3. $S \circ S = id_H$.

Demonstração. (1)$\Longrightarrow$(3)

Veja que:

$$
\begin{aligned}
(S * S^2)(h) &= \sum S(h_1)S(S(h_2)) \\
&= \sum S(S(h_2)h_1) \\
&= S\left(\sum S(h_2)h_1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= S(\epsilon(h)1_H) \\
&= \epsilon(h)(S(1_H)) \\
&= \epsilon(h)1_H \\
&= (\eta \circ \epsilon)(h).
\end{aligned}
$$

Assim, temos que S^2 e id_H ambos são inversos de S com relação ao produto de convolução. Portanto, $S^2 = id_H$.

(2)$\Longrightarrow$(3)

Análogo ao item anterior, para $S^2 * S$.

(3)$\Longrightarrow$(1)

Temos que:

$$
\begin{aligned}
\sum S(h_2)h_1 &= \sum S(h_2)S^2(h_1) \\
&= \sum S(h_2)S(S(h_1)) \\
&= \sum S(S(h_1)h_2) \\
&= S\left(\sum S(h_1)h_2\right) \\
&= S(\epsilon(h)1_H) \\
&= \epsilon(h)S(1_H) \\
&= \epsilon(h)1_H.
\end{aligned}
$$

(3)$\Longrightarrow$(2)

Análogo ao item anterior. ∎

Exemplo 1.6.7. Seja G um grupo. Considere a biálgebra $\mathbb{K}G$ vista no exemplo 1.3.4. Temos que esta é uma álgebra de Hopf com antípoda $S : \mathbb{K}G \to \mathbb{K}G$ dada por:

$$S(\delta_g) = \delta_{g^{-1}}.$$

De fato, dado $g \in G$ temos que:

$$
\begin{aligned}
\mu(S \otimes id)\Delta(\delta_g) &= S(\delta_g)\delta_g \\
&= \delta_{g^{-1}} * \delta_g \\
&= \delta_{gg^{-1}} \\
&= \delta_e \\
&= (\eta \circ \epsilon)(\delta_g)
\end{aligned}
$$

e

$$\mu(id \otimes S)\Delta(\delta_g) = \delta_g S(\delta_g)$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta_g * \delta_{g^{-1}} \\
&= \delta_{gg^{-1}} \\
&= \delta_e \\
&= (\eta \circ \epsilon)(\delta_g).
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.6.8. Seja G um grupo. Considere $R_{\mathbb{K}}(G)$ como visto na definição 1.5.8. Defina $\mathbb{1} : G \to \mathbb{K}$ por $\mathbb{1}(g) = 1_{\mathbb{K}}$ para todo $g \in G$. Temos que $\mathbb{1} \in R_{\mathbb{K}}(G)$. Veja que:

1. $\varepsilon : G \to GL(\mathbb{K})$ dada por $\varepsilon(g) = 1_{\mathbb{K}}$ para todo $g \in G$ é uma representação de G;

2. $id_{\mathbb{K}}$ é um funcional linear em $\mathbb{K}$;

3. $\mathbb{1}(g) = 1 = id_{\mathbb{K}}(\varepsilon(g)(1))$.

Além disso, dadas $f, g \in R_{\mathbb{K}}(G)$, temos que o produto ponto a ponto $f \cdot g$ pertence a $R_{\mathbb{K}}(G)$. De fato, como $f, g \in R_{\mathbb{K}}(G)$, existem $\mathbb{K}$-espaços vetoriais V_1, V_2, representações $\pi_1 : G \to GL(V_1)$ e $\pi_2 : G \to GL(V_2)$, vetores $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$ e funcionais $\varphi_1 \in V_1^*$ e $\varphi_2 \in V_2^*$ tais que, para qualquer $h \in G$ tenhamos que $f(h) = \varphi_1(\pi_1(h)(v_1))$ e $g(h) = \varphi_2(\pi_2(h)(v_2))$. Veja que:

1. $\pi_1 \otimes \pi_2 : G \to GL(V_1 \otimes V_2)$ dada por $\pi_1 \otimes \pi_2(g)(\sum v_i \otimes w_i) = \sum \pi_1(g)(v_i) \otimes \pi_2(g)(w_i)$ é uma representação;

2. $\varphi_1 \otimes \varphi_2 : V_1 \otimes V_2 \to \mathbb{K}$ dada por $(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(v \otimes w) = \varphi_1(v)\varphi_2(w)$ é um funcional linear em $(V_1 \otimes V_2)^*$;

3.

$$
\begin{aligned}
(fg)(h) &= f(h)g(h) \\
&= \varphi_1(\pi_1(h)(v_1))\varphi_2(\pi_2(h)(v_2)) \\
&= (\varphi_1 \otimes \varphi_2)(\pi_1 \otimes \pi_2)(h)(v_1 \otimes v_2)
\end{aligned}
$$

Temos que $R_{\mathbb{K}}(G)$ é uma biálgebra sobre $\mathbb{K}$ com

$$
\begin{array}{rccc}
\mu: & R_{\mathbb{K}}(G) \otimes R_{\mathbb{K}}(G) & \to & R_{\mathbb{K}}(G) \\
& f \otimes g & \mapsto & f \cdot g
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rccc}
\eta: & \mathbb{K} & \to & R_{\mathbb{K}}(G) \\
& \lambda & \mapsto & \lambda \mathbb{1}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccc}
\Delta: & R_{\mathbb{K}}(G) & \to & R_{\mathbb{K}}(G) \otimes R_{\mathbb{K}}(G) \\
& f & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} f_i' \otimes f_i''
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rccc}
\epsilon: & R_{\mathbb{K}}(G) & \to & \mathbb{K} \\
& f & \mapsto & f(e)
\end{array}
$$

e também é uma Álgebra de Hopf com antípoda $S : R_{\mathbb{K}}(G) \to R_{\mathbb{K}}(G)$ dada por $S(f)(g) = f(g^{-1})$ para todos $f \in R_{\mathbb{K}}(G)$ e $g \in G$. Denote $H = R_{\mathbb{K}}(G)$. Dados $f \in R_{\mathbb{K}}(G)$ e $g \in G$ temos que:

$$
\begin{aligned}
(S * id_H)(f)(g) &= (S(f_1)f_2)(g) \\
&= f_1(g^{-1})f_2(g) \\
&= f(g^{-1}g)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= f(e)\mathbb{1}(g) \\
&= (\eta\circ\epsilon)(f)(g)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(id_H * S)(f)(g) &= (f_1 S(f_2))(g) \\
&= f_1(g) f_2(g^{-1}) \\
&= f(gg^{-1}) \\
&= f(e)\mathbb{1}(g) \\
&= (\eta\circ\epsilon)(f)(g)
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.6.9. (Álgebra de Hopf de Sweedler) Seja $\mathbb{K}$ é um corpo com característica diferente de 2. A álgebra Hopf de Sweedler, denotada por H_4, é uma $\mathbb{K}$-álgebra gerada pelos elementos g e x satisfazendo:

1. $g^2 = 1$;

2. $x^2 = 0$;

3. $xg = -gx$.

Assim, podemos escrever

$$H_4 = \frac{\mathbb{K}\{1, x, g\}}{\langle x^2, g^2-1, xg+gx\rangle}.$$

Temos que, como $\mathbb{K}$-espaço vetorial, H_4 possui base $\{1, x, g, gx\}$, ou seja, $\dim H_4 = 4$. E a estrutura de coálgebra de H_4 é dada por

$$\Delta(g) = g\otimes g$$

$$\Delta(x) = g\otimes x + x\otimes 1$$

$$\epsilon(g) = 1$$

$$\epsilon(x) = 0$$

A antípoda $S : H_4 \to H_4$ é dada por $S(g) = g$ e $S(x) = -gx$. Veja que:

$$
\begin{aligned}
(S * id_{H_4})(g) = S(g)g = gg = g^2 &= 1 = (\eta\circ\epsilon)(g) \\
&= 1 = g^2 g S(g) = (id_{H_4} * S)(g)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(S * id_{H_4})(x) = S(x)x = (-gx)x = -gx^2 &= 0 = (\eta\circ\epsilon)(x) \\
&= 0 = x^2 g = x(xg) = x(-gx) = xS(x) = (id_{H_4} * S)(x)
\end{aligned}
$$

Definição 1.6.10. *Seja H uma álgebra de Hopf sobre $\mathbb{K}$. Um H-Hopf módulo à direita é um espaço vetorial M satisfazendo as seguintes condições:*

1. *M é um H-módulo à direita;*

2. *M é um H-comódulo à direita;*

3. *A coação $\rho^M : M \to M \otimes H$ é um morfismo de H módulos, ou seja*

$$\rho^M(m \triangleleft h) = m_0 \triangleleft h_1 \otimes m_1 \triangleleft h_2$$

Definição 1.6.11. *Sejam M e N dois H-Hopf módulos à direita. Dizemos que $f : M \to N$ é um morfismo de H-Hopf módulos à direita se f é morfimo de H-módulos e H-comódulos à direita.*

Vamos denotar por $\mathcal{M}_H^H$ a categoria dos H-Hopf módulos à direita. Analogamente, denotamos por ${}_H^H\mathcal{M}$ a categoria dos H-Hopf módulos à esquerda.

Exemplo 1.6.12. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e H uma $\mathbb{K}$-álgebra de Hopf. Temos que $V \otimes H$ é um H-Hopf módulo à direita com

$$\begin{aligned} (v \otimes h) \triangleleft k &= v \otimes hk \\ \rho(v \otimes h) &= v \otimes h_1 \otimes h_2 \end{aligned}$$

para cada $v \in V$ e $h, k \in H$. Veja que:

$$\begin{aligned} \rho((v \otimes h) \triangleleft k) &= \rho(v \otimes hk) \\ &= v \otimes (hk)_1 \otimes (hk)_2 \\ &= v \otimes h_1 k_1 \otimes h_2 k_2 \\ &= ((v \otimes h_1) \triangleleft k_1) \otimes h_2 k_2 \\ &= (v \otimes h)_0 \triangleleft k_1 \otimes (v \otimes h)_1 \triangleleft k_2. \end{aligned}$$

Definição 1.6.13. *Seja H uma $\mathbb{K}$-álgebra de Hopf e $M \in \mathcal{M}_H^H$ com coação $\rho : M \to M \otimes H$. Denifimos o subespaço vetorial*

$$M^{\mathrm{coH}} = \{m \in M : \rho(m) = m \otimes 1_H\}$$

chamado subsespaço dos covariantes de M.

Teorema 1.6.14. *(Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf) Sejam H uma álgebra de Hopf sobre $\mathbb{K}$ e M um H-Hopf módulo à direita. Então a transformação linear $f : M^{\mathrm{coH}} \otimes H \to M$ dada por $f(m \otimes h) = mh$ para todo $m \in M^{\mathrm{coH}}$ e $h \in H$ é um isomorfismo de H-Hopf módulos.*

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada na referência [1] (página 171).

2 INTEGRAIS E O TEOREMA DE MASCHKE

A partir de agora queremos focar nas álgebras de Hopf de dimensão finita. Neste capítulo vamos trabalhar com as integrais e a semissimplicidade em uma Álgebra de Hopf para podermos, assim, demonstrar o Teorema de Maschke.

2.1 INTEGRAIS

Definição 2.1.1. *Seja H uma biálgebra. Uma integral à esquerda para H é um funcional $T \in H^*$ tal que*

$$\varphi * T = \varphi(1_H)T$$

para todo $\varphi \in H^*$.

Definição 2.1.2. *Seja H uma biálgebra. Uma integral à direita para H é um funcional $T \in H^*$ tal que*

$$T * \varphi = \varphi(1_H)T$$

para todo $\varphi \in H^*$.

Observação 2.1.3. Seja H uma álgebra de Hopf. Temos que $T \in H^*$ é uma integral à esquerda se, e somente se, para todo $h \in H$ tivermos

$$T(h)1_H = h_1 T(h_2).$$

De fato, tome $\varphi \in V^*$ qualquer. Temos que

$$\begin{aligned} \varphi * T(h) = \varphi(1_H)T(h) &\Leftrightarrow \varphi(h_1)T(h_2) = \varphi(1_H)T(h) \\ &\Leftrightarrow \varphi(h_1 T(h_2)) = \varphi(T(h)1_H). \end{aligned}$$

Como φ é arbitrária, segue o desejado. Analogamente, T é uma integral à direita se, e somente se, para todo $h \in H$ tivermos $T(h)1_H = T(h_1)h_2$.

Proposição 2.1.4. *Sejam H uma álgebra de Hopf com antípoda S e $T \in H^*$ uma integral à esquerda. Então para todos $h, k \in H$ temos que*

$$T(hS(k_1))k_2 = h_1 T(h_2 S(k)).$$

Demonstração. Sejam H uma álgebra de Hopf com antípoda S e $T \in H^*$ uma integral à esquerda. Tome $\varphi \in H^*$ e $h, k \in H$ arbitrários. Temos que:

$$\begin{aligned} \varphi(h_1)T(h_2 S(k)) &= \varphi(h_1 S(k_2)k_3)T(h_2 S(k_1)) \\ &= \varphi(k_2)T(hS(k_1)) \end{aligned}$$

Como φ é arbitrária, segue o desejado. ∎

Exemplo 2.1.5. Seja G um grupo. Considere a álgebra de Hopf $H = \mathbb{K}G$. Seja $p_e \in H^*$ a função característica do elemento neutro e do grupo G, isto é, $p_e(\delta_g) = \delta_{g,e}$ para todo $g \in G$. Vejamos que p_e é uma integral à esquerda de H. Tome $\varphi \in H^*$ e $g \in G$ quaisquer. Temos que:

$$(\varphi * p_e)(\delta_g) = \varphi(\delta_g)p_e(\delta_g) = \begin{cases} \varphi(\delta_g), \text{ se } g = e \\ 0, \text{ se } g \neq e \end{cases} = \begin{cases} \varphi(\delta_e), \text{ se } g = e \\ 0, \text{ se } g \neq e \end{cases}$$

e, por outro lado,

$$\varphi(\delta_e)p_e(\delta_g) = \begin{cases} \varphi(\delta_e), \text{ se } g = e \\ 0, \text{ se } g \neq e \end{cases}.$$

Portanto, $\varphi * p_e = \varphi(\delta_e)p_e$.

De modo análogo podemos verificar que p_e também é uma integral à direita de H.

Exemplo 2.1.6. Considere a biálgebra das potências divididas $H = Span\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Temos que H não possui integral à esquerda não nula. Considere o isomorfismo de álgebras $\widehat{(\_)} : H^* \to \mathbb{K}[[x]]$ dado por

$$\widehat{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(e_n)x^n$$

para cada $\varphi \in H^*$. Agora suponha que $T \in H^*$ é uma integral à esquerda de H. Então para qualquer $\varphi \in H^*$ temos que:

$$\varphi * T = \varphi(e_0)T.$$

Aplicando $\widehat{(\_)}$:

$$\widehat{\varphi * T} = \varphi(\widehat{e_0)T}$$

$$\widehat{\varphi}\widehat{T} = \varphi(e_0)\widehat{T}.$$

Note que $\varphi(e_0) = \widehat{\varphi}(0)$. Assim, $\widehat{T}$ é uma série tal que:

$$F\widehat{T} = F(0)\widehat{T}$$

para qualquer outra série $F \in \mathbb{K}[[x]]$, visto que $\widehat{(\_)}$ é um isomorfismo. Considerando $F = x$, temos que $F(0) = 0$. Assim,

$$x\widehat{T} = 0$$

Disso segue que $\widehat{T} = 0$.

Observação 2.1.7. Vamos denotar o subespaço das integrais à esquerda de uma álgebra de Hopf H por $\int_l$ e o subespaço das integrais à direita por $\int_r$. Se $\int_l = \int_r$ então H será dito ser unimodular. Temos também que estes são ideais de H^*. Veja que, dado $g \in H^*$ e $T \in \int_l$, para qualquer $f \in H^*$ temos que

$$f(Tg) = (fT)g = (f(1)T)g = h(1)(Tg)$$

$$f(g)T = (fg)T = (fg)(1)T = f(1)g(1)T = h(1)gT,$$

ou seja, $Tg, gT \in \int_l$. Analogamente, conseguimos mostrar que $\int_r$ é ideal de H^*.

Definição 2.1.8. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Um elemento $t \in H$ é uma integral à esquerda em H se para qualquer $h \in H$ tivermos que*

$$ht = \epsilon(h)t.$$

Definição 2.1.9. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Um elemento $t \in H$ é uma integral à direita em H se para qualquer $h \in H$ tivermos que*

$$th = \epsilon(h)t.$$

Observação 2.1.10. Quando H possui dimensão finita temos que uma integral para H é o mesmo que uma integral em H^*.

Exemplo 2.1.11. Seja H_4 a álgebra de Sweedler. Temos que $t_1 = x+gx$ é integral à esquerda de H_4 e $t_2 = x-gx$ é integral à direita em H_4. Veja que:

$$xt_1 = x(x+gx) = x(x-xg) = x^2 - x^2 g = 0 = \epsilon(x) = \epsilon(x)t_1$$

$$gt_1 = g(x+gx) = gx + g^2 x = gx + x = t_1 = \epsilon(g)t_1$$

$$t_2 x = (x-gx)x = x^2 - gx^2 = 0 = \epsilon(x) = \epsilon(x)t_2$$

$$t_2 g = (x-gx)g = (x+xg)g = xg + xg^2 = xg + x = -gx + x = t_2 = \epsilon(g)t_2.$$

Exemplo 2.1.12. Considere agora G um grupo finito, $H = \mathbb{K}G$ e $t = \sum_{g\in G} \delta_g$. Temos que essa é uma integral à direita e à esquerda em H. De fato, tome $h \in G$. Temos que:

$$\delta_h t = \delta_h \sum_{g\in G} \delta_g = \sum_{g\in G} \delta_h \delta_g = \sum_{g\in G} \delta_{g,h} = \delta_{h,h} = 1_{\mathbb{K}} = \epsilon(\delta_h)t$$

$$t\delta_h = \left(\sum_{g\in G} \delta_g\right) \delta_h = \sum_{g\in G} \delta_g \delta_h = \sum_{g\in G} \delta_{h,g} = \delta_{h,h} = 1_{\mathbb{K}} = \epsilon(\delta_h)t.$$

Definição 2.1.13. *Sejam C uma coálgebra, C^* sua álgebra dual e M um C^*-módulo à esquerda. Considere $\psi_M : C^* \otimes M \to M$ a sua estrutura de C^*-módulo. Defina*

$$\begin{array}{rccccc} \rho_M: & M & \to & Hom(C^*, M) & & \\ & m & \mapsto & \rho_M(m): & C^* & \to & M \\ & & & & f^* & \mapsto & \rho_M(m)(f^*) = \psi_M(f^* \otimes m). \end{array}$$

Considere j a injeção canônica:

$$\begin{array}{rccccc} j: & C & \to & C^{**} & & \\ & c & \mapsto & j(c): & C^* & \to & \mathbb{K} \\ & & & & f^* & \mapsto & j(c)(f^*) = f^*(c). \end{array}$$

E considere o morfismo:

$$\begin{array}{rccccc} \varphi_M: & M \otimes C^{**} & \to & Hom(C^*, M) & & \\ & m \otimes f^{**} & \mapsto & \varphi_M: & C^* & \to & M \\ & & & & f^* & \mapsto & \varphi_M(m \otimes f^{**})(f^*) = f^{**}(f^*)m. \end{array}$$

Defina também o morfismo $\mu_M : M \otimes C \to Hom(C^*, M)$ dado por $\mu_M = \varphi_M \circ (id_M \otimes j)$. Temos μ_M é injetora pois j e φ_M são injetoras. Portanto, dado $f^* \in C^*$, $m \in M$ e $c \in C$, temos que

$$\begin{aligned}
\mu_M(m \otimes c)(f^*) &= (\varphi_M \circ (id_M \otimes j))(m \otimes c)(f^*) \\
&= \varphi_M(m \otimes j(c))(f^*) \\
&= j(c)(f^*)m \\
&= f^*(c)m.
\end{aligned}$$

*O C^*-módulo à esquerda M é dito ser **racional** se*

$$\rho_M(M) \subset \mu_M(M \otimes C).$$

Observação 2.1.14. Seja H uma biálgebra e considere H^{*Rat} a parte racional de H^* como módulo sobre H^* pela ação regular a esquerda:

$$H^{*Rat} = \{\varphi \in H^* : dim(H^* * \varphi) < \infty\}.$$

Temos que H^{*Rat} é um H-comódulo à direita com $\rho(\varphi) = \varphi_0 \otimes \varphi_1$ tal que $\phi * \varphi = (\varphi_0)\phi(\varphi_1)$.

Agora, se H é uma álgebra de Hopf, considere a ação $\rightharpoonup : H \otimes H^* \to H^*$ dada por

$$\rightharpoonup (h \otimes \varphi)(k) = (h \rightharpoonup \varphi)(k) = \varphi(kh).$$

Temos que H^* tem estrutura de H-módulo à esquerda com a ação acima. Também podemos induzir uma estrutura de H-módulo à direita em H^* com ação $\leftharpoonup : H^* \otimes H \to H^*$ dada por

$$\leftharpoonup (\varphi \otimes h)(k) = (S(h) \rightharpoonup \varphi)(k) = \varphi(kS(h)).$$

Proposição 2.1.15. *Seja H uma álgebra de Hopf. Então $(H^{*Rat}, \rho, \leftharpoonup)$ é um H-Hopf módulo à direita, ou seja, $H^{*Rat} \in \mathcal{M}_H^H$.*

Demonstração. Tome $\varphi \in H^{*Rat}$, $\phi \in H^*$ e $h, g \in H$. Temos que:

$$\begin{aligned}
\phi(\varphi_1 h_2)(\varphi_0 \leftharpoonup h_1)(g) &= \phi(\varphi_1 h_2)\varphi_0(gS(h_1)) \\
&= (h_2 \rightharpoonup \phi)\varphi_1 \varphi_0(gS(h_1)) \\
&= ((h_2 \rightharpoonup \phi)\varphi)(gS(h_1)) \\
&= (h_2 \rightharpoonup \phi)(gS(h_1)_1)\varphi((gS(h_1))_2) \\
&= (h_3 \rightharpoonup \phi)(g_1 S(h_2))\varphi(g_2 S(h_1)) \\
&= \phi(g_1 S(h_2)h_3)\varphi(g_2 S(h_1)) \\
&= \phi(g_1 \epsilon(h_2))\varphi(g_2 S(h_1)) \\
&= \phi(g_1)\varphi(g_2 S(h)) \\
&= \phi(\varphi \leftharpoonup h)(g).
\end{aligned}$$

Assim, $\varphi \leftharpoonup h \in H^{*Rat}$. Portanto, $\rho(\varphi \leftharpoonup h) = \varphi_0 \leftharpoonup h_1 \otimes \varphi_1 h_2$. ■

Lema 2.1.16. *Seja H uma álgebra de Hopf. Então temos que:*

$$\left(H^{*Rat}\right)^{CoH} = \int_l.$$

Demonstração. Tome $\phi \in H^*$ e $h \in H$. Temos que:

$$\begin{aligned} \varphi \in (H^{*Rat})^{CoH} &\Leftrightarrow \phi(1)\varphi(h) = \phi(h_1)\varphi(h_2) \\ &\Leftrightarrow \phi((h)1) = \phi(\varphi(h_2)h_1) \\ &\Leftrightarrow \varphi(h)1 = \varphi(h_2)h_1 \\ &\Leftrightarrow \varphi \in \int_l. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.1.17. *Seja H uma álgebra de Hopf. Então*

$$H^{*Rat} \cong \int_l \otimes H.$$

Demonstração. Considere o homomorfismo $T : \int_l \otimes H \to H^{*Rat}$ dado por $T(t \otimes h) = t \leftharpoonup h$. Segue do Teorema 1.6.14 que T é um isomorfismo. ■

Observação 2.1.18. Se H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita então H^* é racional. De fato, temos que $j : H \to H^{**}$ e $f : H^* \otimes H^{**} \to Hom(H^*, H^*)$ são isomorfismos. Assim, $\mu_{H^*}(H^* \otimes H) = Hom(H^*, H^*)$. Portanto, $\rho_{H^*}(H^*) \subseteq \mu_{H^*}(H^* \otimes H)$.

Corolário 2.1.19. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S que admite integral à esquerda. Então S é bijetora e* $\dim(\int_l) = 1$.

Demonstração. Como H é de dimensão finita, temos que $H^* = H^{*Rat}$. Do teorema anterior, temos que $H^* \cong \int_l \otimes H$. Assim, $\dim(H^*) = \dim(\int_l \otimes H)$. Mas $\dim(H) = \dim(H^*)$ e $\dim(\int_l \otimes H) = \dim(\int_l)\dim(H)$. Portanto, $\dim(\int_l) = 1$.

Vejamos agora que S é bijetora. Suponha que exista $h \in \ker(S)$ tal que $h \neq 0$. Sabemos que existe $t \in \int_l$ não nula. Temos que $T(t \otimes h) = t \leftharpoonup h = S(h) \rightharpoonup t = 0 \rightharpoonup t = 0$. Mas T é injetora. Contradição. Portanto, segue que S é injetora. Como $S : H \to H$ e H é de dimensão finita, segue que S é bijetora. ■

2.2 TEOREMA DE MASCHKE

Agora, temos as ferramentas necessárias para mostrar o Teorema de Maschke que trás uma equivalência envolvendo separabilidade, semisimplicidade e integrais em uma álgebra de Hopf. Antes, vejamos a seguinte situação que nos motiva para esse resultado: Sejam G é um grupo finito com característica do corpo $\mathbb{K}$ não dividindo a ordem de G, M um $\mathbb{K}G$-módulo e $N \subseteq M$ um $\mathbb{K}G$-submódulo. Então, tomando a projeção linear $\pi : M \to M$ tal que $\pi(M) = N$ e a transformação linear $P : M \to M$ dada por $P(m) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} gT(g^{-1}m)$, teremos que $P = P \circ P$, $P|_N = Id_N$ e que P é um morfismo de $\mathbb{K}G$-módulos. Assim N é somando direto de M como $\mathbb{K}G$-módulo, ou seja, $\mathbb{K}G$ é semisimples. Além disso, temos que $t = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g$ é uma integral (pelo exemplo 2.1.12) e $\epsilon(t) = 1$. Por isto a motivação de utilizar a integral, com $\epsilon(t) = 1$, como substituição à soma sobre os elementos de G.

Definição 2.2.1. *Seja A uma álgebra sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que A é separável se existe algum elemento $e \in A \otimes A^{op}$ tal que $\mu(e) = \mathbb{1}_A$ e $ae = ea$ para todo $a \in A$. Este elemento e é tal que $e^2 = e$ e é chamado de idempotente de separabilidade.*

Observação 2.2.2. Uma álgebra semisimples pode ter um ou mais idempotentes de separabilidade.

Definição 2.2.3. *Uma álgebra A é dita ser semisimples caso todos os A-módulos não nulos são semisimples. Veja mais no apêndice.*

Teorema 2.2.4. *(Teorema de Maschke) Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. São equivalentes:*

1. *H é separável;*
2. *H é semisimples;*
3. *Existe $t \in \int_l$ com $\epsilon(t) \neq 0$.*

Demonstração. $(1 \Rightarrow 2)$

Suponha que H seja separável. Sejam ${}_HM$ um H-módulo e ${}_HN \leq {}_HM$ um sub H-módulo. Considere a aplicação $\mathbb{K}$-linear $\pi : M \to M$ tal que $\pi^2 = \pi$, $\pi(M) = N$ e $\pi|_N = id_N$. Tome $e = e^1 \otimes e^2$ um idempotente de separabilidade. Defina $P : M \to N$ por

$$P(m) = e^1\pi(e^2m).$$

Temos que $P|_N = id_N$, veja:

$$\begin{aligned} P(n) &= e^1\pi(e^2n) \\ &= e^1e^2n \\ &= n. \end{aligned}$$

Além disso, P é morfismo de H-módulos:

$$\begin{aligned} P(hm) &= e^1\pi(e^2(hm)) \\ &= e^1\pi((e^2h)m) \\ &= he^1\pi(e^2m) \\ &= hP(m). \end{aligned}$$

Portanto, temos que $M = N \oplus \ker(P)$. Disso segue que H é semisimples.

$(2 \Rightarrow 3)$

Suponha que H é semisimples. Como $\ker(\epsilon)$ é um ideal de H e H é semisimples, então existe um ideal I de H tal que $H = I \oplus \ker(\epsilon)$. Veja que se $t \in I$ então t é uma integral à esquerda de H. De fato, como $\ker(\epsilon)$ possui codimensão igual a 1, temos que $\dim(I) = 1$. Assim, $I = Ht$ para algum $t \in H$. Dado $x \in H$ temos que $xt \in I$. Como

$$xt = (x - \epsilon(x))t + \epsilon(x)t$$

e $xt \in I$, temos que $x - \epsilon(x)t \in \ker(\epsilon)$ e $\epsilon(x)t \in I$. Ou seja, $\epsilon(x)t = xt$. Assim, $t \in \int_l$. Além disso, como $I \cap \ker(\epsilon) = 0$, temos que $\epsilon(t) \neq 0$.

$(3 \Rightarrow 1)$

Suponha agora que existe $t \in \int_l$ tal que $\epsilon(t) \neq 0$. Considerando $\epsilon(t) = 1$, temos que o elemento $e = \sum t_1 \otimes S(t_2)$ é um idempotente de separabilidade de H. De fato, tome $h \in H$, veja que:

$$\begin{aligned}
he &= h \sum t_1 \otimes S(t_2) \\
&= \sum ht_1 \otimes S(t_2) \\
&= \sum h_1 t_1 \otimes S(t_2) S(h_2) h_3 \\
&= \sum h_1 t_1 \otimes S(h_2 t_2) h_3 \\
&= \sum (id \otimes S)\Delta(h_1 t)(1 \otimes h_2) \\
&= \sum (id \otimes S)\Delta(\epsilon(h_1)t)(1 \otimes h_2) \\
&= \sum (id \otimes S)\Delta(t)(1 \otimes h) \\
&= \sum t_1 \otimes S(t_2)h \\
&= eh.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\mu(e) = \mu(\sum t_1 \otimes S(t_2) = \sum t_1 S(t_2) = \epsilon(t) = 1.$$

Portanto, segue que H é separável. ■

3 TEOREMA DE RADFORD E TEOREMA DE NICHOLS ZOELLER

Dentre muitos resultados sobre as álgebras de Hopf de dimensão finita, o Teorema de Radford sobre a antípoda tem grande destaque. Veremos que a ordem da antípoda de uma álgebra de Hopf de dimensão finita é finita.

Além disso, neste capítulo também veremos o Teorema de Nichols-Zoeller que é um resultado mais geral do que o Teorema de Lagrange da teoria de grupos. Este teorema mostra que toda álgebra de Hopf H de dimensão finita é um B-módulo livre para qualquer B subálgebra de Hopf e também que a dimensão de B divide a dimensão de H.

3.1 TEOREMA DE RADFORD SOBRE A ANTÍPODA

Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$.

Definição 3.1.1. *Um elemento $g \in H$ é dito ser "group-like" se $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\epsilon(g) = 1$. Denotamos por $G(H) = \{g \in H \mid g$ é group-like$\}$.*

Observação 3.1.2. Se $g \in G(H)$ denotamos

$$L_g = \{\varphi \in H^* \mid \phi * \varphi = \phi(g)\varphi \ \forall \phi \in H^*\}$$

e

$$R_g = \{\varphi \in H^* \mid \varphi * \phi = \phi(g)\varphi \ \forall \phi \in H^*\}.$$

Temos que estes são ideais de H^*, $L_1 = \int_l$ e $R_1 = \int_r$. Do mesmo modo, para $\eta \in G(H^*)$, denotamos

$$\widehat{L}_\eta = \{x \in H \mid hx = \eta(h)x \ \forall h \in H\}$$

e

$$\widehat{R}_\eta = \{x \in H \mid xh = \eta(h)x \ \forall h \in H\}.$$

Proposição 3.1.3. *Se $g \in G(H)$ então L_g e R_g possuem dimensão 1 e existe um elemento $a \in G(H)$ tal que $R_a = L_1$. Dizemos que a é o elemento group-like descatado de H.*

A demonstração da proposição acima pode ser encontrada na referência [1] (página 196).

Observação 3.1.4. Também para H^* temos que $\widehat{L}_\eta$ e $\widehat{R}_\eta$ são ideais de H de dimensão 1 e existe $\alpha \in G(H^*)$ tal que $\widehat{R}_\alpha = \widehat{L}_\epsilon$.

Lema 3.1.5. *Sejam $\eta \in G(H^*)$, $g \in G(H)$, $\varphi, \phi \in H^*$ e $x \in \widehat{L}_\eta$ tais que $\varphi \rightharpoonup x = g = x \leftharpoonup \phi$. Então $\varphi \in L_g$ e $\phi \in R_g$.*

Demonstração. Sejam $\eta \in G(H^*)$, $g \in G(H)$, $\varphi, \phi \in H^*$ e $x \in \widehat{L}_\eta$ arbitrários. Suponha que $\varphi \rightharpoonup x = g = x \leftharpoonup \phi$. Tome $T, F \in H^*$, temos:

$$FT\varphi(x) = FT(x_1)\varphi(x_2)$$

$$
\begin{aligned}
&= FT(x_1\varphi(x_2))\\
&= (FT)(g)\\
&= F(g)T(g)\\
&= F(\varphi(x_2)x_1)T(g)\\
&= (FT(g)\varphi)(x).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$(F(T\varphi - T(g)\varphi))(x) = 0,$$

$$(T\varphi - T(g)\varphi)(x \leftharpoonup H^*) = 0.$$

Como $\widehat{L_\eta} \leftharpoonup \eta = \widehat{L_\epsilon}$ e $\widehat{L_\epsilon} \leftharpoonup H^* = H$, temos que $x \leftharpoonup H^* = H$. Portanto,

$$T\varphi = T(g)\varphi.$$

Assim, $\varphi \in L_g$. Analogamente mostramos que $\phi \in R_g$. ■

Corolário 3.1.6. *Sejam $\varphi \in H^*$ e $x \in \widehat{L_\epsilon}$. Se $\varphi \rightharpoonup x = 1$ então $\varphi \in L_1$ e $x \leftharpoonup \varphi = a$.*

Demonstração. Sejam $\varphi \in H^*$ e $x \in \widehat{L_\epsilon}$ arbitrários. Suponha que $\varphi \rightharpoonup x = 1$. Do lema anterior temos que $\varphi \in L_1 = R_a$. Agora tome $f \in H^*$. Temos:

$$
\begin{aligned}
f(x \leftharpoonup \varphi) &= f(x_2)\varphi(x_1)\\
&= (\varphi f)(x)\\
&= f(a)\varphi(x)\\
&= f(\varphi(x)a).
\end{aligned}
$$

Aplicando ϵ à igualdade obtemos:

$$\sum \varphi(x_2)x_1 = 1,$$

ou seja, $\varphi(x) = 1$. Logo, $x \leftharpoonup \varphi = a$. ■

Lema 3.1.7. *Sejam $x \in \widehat{L_\eta}$, $g \in G(H)$ e $\varphi \in H^*$. Se $\varphi \rightharpoonup x = g$ então*

$$\eta(g)\phi(1) = \sum \phi(x_1)\varphi(gx_2)$$

para todo $\phi \in H^*$.

Demonstração. Sejam $x \in \widehat{L_\eta}$, $g \in G(H)$ e $\varphi \in H^*$ arbitrários. Suponha que $\varphi \rightharpoonup x = g$. Tome $\phi \in H^*$ qualquer. Temos que:

$$
\begin{aligned}
\eta(g)\phi(1) &= \sum \eta(g)\phi_1(g^{-1})\phi_2(g)\\
&= \phi_1(g^{-1})\phi_2(\varphi(x_2)x_1\eta(g))
\end{aligned}
$$

e, como $\eta(g)x = gx$,

$$
\begin{aligned}
\eta(g)\phi(1) &= \sum \phi_1(g^{-1})\phi_2(\varphi(gx_2)gx_1)\\
&= \sum \phi(g^{-1}gx_1)\varphi(gx_2)\\
&= \sum \phi(x_1)\varphi(gx_2).
\end{aligned}
$$

■

Lema 3.1.8. *Sejam $g \in G(H)$, $\eta \in G(H^*)$, $x \in \widehat{L}_\eta$ e $\varphi \in H^*$. Se $\varphi \rightharpoonup x = g$ então*

$$S(g^{-1}(\eta \rightharpoonup h)) = (\varphi \leftharpoonup h) \rightharpoonup x$$

para todo $h \in H$.

Demonstração. Sejam $g \in G(H)$, $\eta \in G(H^*)$, $x \in \widehat{L}_\eta$ e $\varphi \in H^*$ arbitrários. Suponha que $\varphi \rightharpoonup x = g$. Tome $h \in H$ e $\phi \in H^*$. Temos que:

$$\begin{aligned}
\phi(S(g^{-1}(\eta \rightharpoonup h))) &= \sum \phi(S(g^{-1}h_1)g)\eta(h_2) \\
&= \sum \eta(g)\phi(S(h_1)g)\eta(g^{-1}h_2) \\
&= \eta(g)((\phi S)\eta)(g^{-1}h)
\end{aligned}$$

Usando a propriedade da counidade para ϕ temos que $\phi = \sum \phi_1 \epsilon(\phi_2)$. Como $\varphi \rightharpoonup x = g$ e $\phi_2 \in H^*$, aplicando o lema anterior, temos que $\eta(g)\phi_2(1) = \sum \phi_2(x_1)\varphi(gx_2)$. Assim,

$$\begin{aligned}
&= \sum ((\phi_1 S)\eta)(g^{-1}h)\eta(g)\phi_2(1) \\
&= \sum ((\phi_1 S)\eta)(g^{-1}h)\phi_2(\varphi(gx_2)x_1) \\
&= \sum (\phi_1 S)(g^{-1}h_1)\eta(g^{-1}h_2)\phi_2(\varphi(gx_2)x_1)
\end{aligned}$$

e, como $\eta(g^{-1}h_2x) = g^{-1}h_2x$,

$$\begin{aligned}
&= \sum \phi_1(S(h_1)g)\phi_2(\varphi(gg^{-1}h_3x_2)g^{-1}h_2x_1) \\
&= \sum \phi(S(h_1)gg^{-1}h_2x_1\varphi(h_3x_2)) \\
&= \sum \phi(x_1\varphi(hx_2)) \\
&= \phi((\varphi \leftharpoonup h) \rightharpoonup x)
\end{aligned}$$

Do exposto, segue o desejado. ∎

Observação 3.1.9. Usando o lema anterior, podemos obter para qualquer $h \in H$ as seguintes fórmulas:

1. Se $x \in \widehat{L}_\eta$ e $\varphi \rightharpoonup x = g$ então

$$S(g^{-1}(\eta \rightharpoonup h)) = (\varphi \leftharpoonup h) \rightharpoonup x.$$

2. Se $x \in \widehat{R}_\eta$ e $\varphi \rightharpoonup x = g$ então

$$S^{-1}((\eta \rightharpoonup h)g^{-1}) = (h \rightharpoonup \varphi) \rightharpoonup x.$$

3. Se $x \in \widehat{R}_\eta$ e $x \leftharpoonup \varphi = g$ então

$$S((h \leftharpoonup \eta)g^{-1} = x \leftharpoonup (\varphi \leftharpoonup h).$$

4. Se $x \in \widehat{L}_\eta$ e $x \leftharpoonup \varphi = g$ então

$$S^{-1}(g^{-1}(h \leftharpoonup \eta)) = x \leftharpoonup (\varphi \leftharpoonup h).$$

5. Se $x \in \widehat{L}_\epsilon$ e $\varphi \rightharpoonup x = 1$ então
$$S(h) = (\varphi \leftharpoonup h) \rightharpoonup x.$$

6. Se $x \in \widehat{R}_\alpha = L_\epsilon$ e $\varphi \rightharpoonup x = 1$ então
$$S^{-1}(\alpha \rightharpoonup h) = (h \rightharpoonup \varphi) \rightharpoonup x.$$

7. Se $x \in \widehat{R}_\alpha = L_\epsilon$ e $x \leftharpoonup \varphi = a$ então
$$S((h \leftharpoonup \alpha)a^{-1}) = x \leftharpoonup (h \rightharpoonup \varphi).$$

8. Se $x \in \widehat{L}_\epsilon$ e $x \leftharpoonup \varphi = g$ então
$$S^{-1}(g^{-1}h) = x \leftharpoonup (\varphi \leftharpoonup h).$$

Teorema 3.1.10. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e $h \in H$ então:*
$$S^4(h) = a^{-1}(\alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1})a.$$

Demonstração. Seja $h \in H$ arbitrário. Tome $x \in \widehat{R}_\alpha = \widehat{L}_\epsilon$ e $\varphi \in H^*$ tais que $\varphi \rightharpoonup x = 1$. Pelo corolário 3.1.6 temos que $\varphi \in L_1$ e $x \leftharpoonup \varphi = a$. Usando os itens 5 e 6 da observação anterior, otemos:
$$\begin{aligned}(S^4(h) \rightharpoonup \varphi) \rightharpoonup x &= S^{-1}(\alpha \rightharpoonup S^4(h)) \ (6)\\ &= S^{-1}(S^4(\alpha \rightharpoonup h))\\ &= S(S^2(\alpha \rightharpoonup h))\\ &= (\varphi \leftharpoonup S^2(\alpha \rightharpoonup h)) \rightharpoonup x \ (5).\end{aligned}$$

Considere a transformação linear $T : H^* \to H$ dada por $T(\varphi) = \varphi \rightharpoonup x$. Temos que T é bijetora. Assim,
$$S^4(h) \rightharpoonup \varphi = \varphi \leftharpoonup S^2(\alpha \rightharpoonup h).$$

Por outro lado, usando os itens 7 e 8 da observação anterior temos:
$$\begin{aligned}x \leftharpoonup (\varphi \leftharpoonup S^2(\alpha \rightharpoonup h)) &= S^{-1}(a^{-1}S^2(\alpha \rightharpoonup h)) \ (8)\\ &= S^{-1}(S^2(a^{-1}(\alpha \rightharpoonup h)))\\ &= S(a^{-1}(\alpha \rightharpoonup h))\\ &= S(a^{-1}(\alpha \rightharpoonup h)aa^{-1})\\ &= x \leftharpoonup ((a^{-1}(\alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1})a) \rightharpoonup \varphi) \ (7).\end{aligned}$$

Considere a transformação linear $T' : H^* \to H$ dada por $T'(\varphi) = x \leftharpoonup \varphi$. Temos que T' é bijetora. Assim,
$$\varphi \leftharpoonup S^2(\alpha \rightharpoonup h) = (a^{-1}(\alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1})a) \rightharpoonup \varphi.$$

Portanto,
$$S^4(h) \rightharpoonup \varphi = (a^{-1}(\alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1})a) \rightharpoonup \varphi.$$

Considere a transformação linear $T'': H \to H^*$ dada por $T''(h) = h \rightharpoonup \varphi$. Temos que T'' é bijetora. Logo, temos o desejado:

$$S^4(h) = a^{-1}(\alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1})a.$$

■

Teorema 3.1.11. *(Radford) A antípoda S de H possui ordem finita.*

Demonstração. Fazendo uma indução sobre n na fórmula do teorema anterior temos que

$$S^{4n}(h) = a^{-n}(\alpha^n \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-n})a^n.$$

De fato, o teorema anterior nos garante que é válido para $n = 1$. Agora suponha válido para n, veja que:

$$\begin{aligned}
S^{4(n+1)}(h) &= S^4(S^{4n}(h)) \\
&= a^{-1}(\alpha \rightharpoonup S^{4n}(h) \leftharpoonup \alpha^{-1})a \\
&= a^{-1}\alpha \rightharpoonup (a^{-n}(\alpha^n \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-n})a^n) \leftharpoonup \alpha^{-1})a \\
&= a^{-1}((\alpha \rightharpoonup \alpha^{-n})(\alpha^{n+1} \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-n})(\alpha \rightharpoonup a^n) \leftharpoonup \alpha^{-1})a \\
&= a^{-1}((\alpha \rightharpoonup a^{-n}) \leftharpoonup \alpha^{-1})(\alpha^{n+1} \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-(n+1)})(\alpha \rightharpoonup a^n \leftharpoonup \alpha^{-1}))a \\
&= a^{-1}(\alpha(a^{-n})\alpha^{-1}(a^n)a^{-n}(\alpha^{n+1} \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-(n+1)})\alpha(a^n)\alpha^{-1}(a^n)a^n)a \\
&= a^{-(n+1)}(\alpha^{n+1} \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-(n+1)})a^{n+1}.
\end{aligned}$$

Como $G(H)$ e $G(H^*)$ são grupos finitos, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $a^p = 1$ e $\alpha^p = \epsilon$. Portanto, segue que $S^{4p} = Id$. ■

3.2 TEOREMA DE NICHOLS-ZOELLER

Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e B uma subálgebra de Hopf de H. Sejam M, N H-módulos à esquerda. Então $M \otimes N$ possui estrutura de H-módulo à esquerda dada por $h(x \otimes y) = \sum h_1 x \otimes h_2 y$ para todos $x \in M$, $y \in N$ e $h \in H$. Temos que se restringirmos os escalares em B, $M \otimes N$ também é um B-módulo à esquerda.

Proposição 3.2.1. *Seja $M \in {}^H_B\mathcal{M}$ um B-módulo. Então $H \otimes M \cong M^{(\dim H)}$ como B-módulos.*

Demonstração. Seja $M \in {}^H_B\mathcal{M}$ um B-módulo arbitrário. Considere $U = H \otimes M$ com a estrutura de B-módulo citada acima. E considere $V = H \otimes M$ com a estrutura de B-módulo dada por $b(h \otimes m) = h \otimes bm$ para todos $b \in B$, $h \in H$ e $m \in M$. Veja que B atua apenas na segunda posição do tensor, assim temos que $V \cong M^{(\dim H)}$. Agora, vamos mostrar que $U \cong V$ como B-módulos.

Defina $f : V \to U$ e $g : U \to V$ dadas por:

$$f(h \otimes m) = \sum m_{(-1)} h \otimes m_0$$

$$g(h \otimes m) = \sum S^{-1}(m_{(-1)}) h \otimes m_0.$$

Veja que:

$$\begin{aligned} fg(h\otimes m) &= f(\sum S^{-1}(m_{(-1)})h\otimes m_0) \\ &= \sum m_{0(-1)}(S^{-1}(m_{(-1)}h)\otimes m_{00} \\ &= \sum m_{(-1)}S^{-1}(m_{(-2)})h\otimes m_0 \\ &= \sum \epsilon(m_{(-1)})h\otimes m_0 \\ &= h\otimes \sum \epsilon(m_{(-1)})m_0 \\ &= h\otimes m \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} gf(h\otimes m) &= \sum g(m_{(-1)}h\otimes m_0) \\ &= \sum S^{-1}(m_{0(-1)})m_{(-1)}h\otimes m_0 0 \\ &= \sum S^{(-1)}(m_{(-1)})m_{(-2)}h\otimes m_0 \\ &= \sum \epsilon(m_{(-1)})h\otimes m_0 \\ &= \sum h\otimes \epsilon(m_{(-1)})m_0 \\ &= h\otimes \sum \epsilon(m_{(-1)})m_0 \\ &= h\otimes m. \end{aligned}$$

Além disso, f é morfismo de B-módulos:

$$\begin{aligned} f(b(h\otimes m)) &= f(h\otimes bm) \\ &= \sum (bm)_{(-1)}h\otimes (bm)_0 \\ &= \sum b_1 m_{(-1)}h\otimes b_2 m_0 \\ &= \sum b(m_{(-1)}h\otimes m_0) \\ &= b\sum m_{(-1)}h\otimes m_0 \\ &= bf(h\otimes m). \end{aligned}$$

Portanto, segue o desejado. ■

Proposição 3.2.2. *Seja W um B-módulo à esquerda. Então $B\otimes W \cong W\otimes B \cong B^{(\dim W)}$ como B-módulos.*

Demonstração. Seja W um B-módulo à esquerda arbitrário. Vejamos que $B\otimes W$ é um B-Hopf módulo à esquerda. Temos a estrutura de B-módulo dada por

$$h(b\otimes w) = \sum h_1 b\otimes h_2 w$$

e estrutura de B-comódulo dada por

$$\rho(b\otimes w) = \sum b_1\otimes b_2\otimes w.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\rho(h(b\otimes w)) &= \rho(h_1 b\otimes h_2 w\\ &= (h_1 b)_1\otimes (h_1 b)_2\otimes h_2 w\\ &= h_{11}b_1\otimes h_{12}b_2\otimes h_2 w\\ &= h_1 b_1\otimes h_2 b_2\otimes h_3 w\\ &= h_1 b_1\otimes h_{21}b_2\otimes h_{22}w\\ &= h_1 b_1\otimes h_2(b_2\otimes w)\\ &= h_1(b\otimes w)_{(-1)}\otimes h_2(b\otimes w)_0.\end{aligned}$$

Vejamos agora que $(B\otimes W)^{CoH} = 1\otimes W \cong W$. Temos que:

$$(B\otimes W)^{CoH} = \{\sum b_i\otimes w_i \in B\otimes W \mid \rho(\sum b_i\otimes w_i) = 1\otimes \sum b_i\otimes w_i\}$$

e

$$\sum (b_i)_1\otimes (b_i)_2\otimes w_i = \rho(\sum b_i\otimes w_i) = 1\otimes\sum b_i\otimes w_i.$$

Podemos, sem perda de generalidade, tomar $\{w_i\}$ LI. Considere w_i^* o seu respectivo conjunto dual. Temos que:

$$\begin{aligned}(I\otimes I\otimes w_i^*)\sum (b_i)_1\otimes (b_i)_2\otimes w_i = (I\otimes I\otimes w_i^*)\rho(\sum b_i\otimes w_i) &= 1\otimes\sum b_i\otimes w_i\\ (b_i)_1\otimes (b_i)_2 &= 1\otimes (b_i)\\ (I\otimes\epsilon)(b_i)_1\otimes (b_i)_2 &= (I\otimes\epsilon)1\otimes (b_i)\\ (b_i)_1\otimes\epsilon((b_i)_2) &= 1\otimes\epsilon(b_i)\\ b_i &= 1\epsilon(b_i).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum b_i\otimes w_i = \sum 1\epsilon(b_i)\otimes w_i = 1\otimes\sum\epsilon(b_i)w_i.$$

Pelo teorema 1.6.14 segue que

$$B\otimes W\cong (B\otimes W)^{CoH}\otimes B\cong W\otimes B\cong B^{(\dim W)}.$$

Considere agora B^{cop} com a multiplicação de B e a comultiplicação dada por $\Delta(c) = \sum c_1\otimes c_2 = \sum c_2\otimes c_1$. Veja que W é um B^{cop}-módulo à esquerda. Assim, segue que

$$B^{cop}\otimes W\cong (B^{cop})^{(\dim W)}$$

como B^{cop}-módulos à esquerda.

Temos a seguinte estrutura de B^{cop}-módulo à esquerda em $B^{cop}\otimes W$:

$$b(c\otimes w) = \sum b_1 c\otimes b_2 w = \sum b_2 c\otimes b_1 w.$$

Lembre que $B = B^{cop}$ como álgebras. Assim, $B^{cop}\otimes W\cong W\otimes B$ como B-módulos à esquerda. Portanto, segue o desejado:

$$B\otimes W\cong W\otimes B\cong B^{(\dim W)}.$$

■

Lema 3.2.3. *Sejam A uma álgebra sobre um corpo $\mathbb{K}$ e M um A-módulo à esquerda. Então M é A-fiel se, e somente se, A é imerso em M^n como A-módulo à esquerda para algum $n \in \mathbb{Z}^+$.*

Demonstração. Sejam A uma álgebra sobre um corpo $\mathbb{K}$ e M um A-módulo à esquerda arbitrários. Suponha que A é imerso em M^n como A-módulo à esquerda para algum $n \in \mathbb{Z}^+$. Então temos que

$$ann_A(M) = ann_A(M^n) \subseteq ann_A(A) = 0.$$

Ou seja, M é A-fiel. Agora suponha que M é A-fiel. Tome $\{m_i\}_1^n$ base para M. Considere o morfismo de A-módulos $f : A \to M^n$ dado por $f(a) = (am_1 \cdots am_n)$. Temos que

$$ker(f) = \cap ann_A(m_i) = ann_A(M) = 0.$$

Portanto, f é injetora. Ou seja, A é imerso em M^n como A-módulos à esquerda. ■

Corolário 3.2.4. *Sejam A uma álgebra sobre um corpo $\mathbb{K}$ que é um A-módulo injetivo à esquerda, $P_1, ..., P_t$ os isomorfismos de A-módulos à esquerda indecomponíveis principais e M um A-módulo à esquerda finitamente gerado. Então M é A-fiel se, e somente se, cada P_i é isomorfo a um somando direto do A-módulo M.*

Demonstração. Sejam A uma álgebra sobre um corpo $\mathbb{K}$ que é injetiva como A-módulo à esquerda, $P_1, ..., P_t$ os isomorfismos de A-módulos à esquerda indecomponíveis principais e M um A-módulo à esquerda finitamente gerado. Suponha que M é A-fiel.

Pelo lema anterior, A é imerso em M^n para algum $n \in \mathbb{Z}^+$. Como A é injetivo como A-módulo, temos que $M^n \cong A \oplus X$ para algum A-módulo X. Fazendo a decomposição em soma direta de indecomponíveis de M^n e $A \oplus X$, o teorema A.0.10 garante que M contém um somando direto que é isomorfo a P_i para cada $i \in \{1, ..., t\}$.

Agora, se cada P_i é isomorfo a um somando direto do A-módulo M, temos que A será imerso em M^t e, pelo lema anterior, M é A-fiel. ■

Proposição 3.2.5. *Sejam A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ que é injetiva como A-módulo à esquerda e W um A-módulo finitamente gerado. Então existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $W^r = F \oplus E$ para algum A-módulo livre F e E um A-módulo que não é A-fiel.*

Demonstração. Sejam A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ que é injetiva como A-módulo à esquerda e W um A-módulo finitamente gerado arbitrários. Se W não é A-fiel escolha $r = 1$, $F = 0$ e $E = W$. Assim, temos o desejado. Agora se W é A-fiel considere $P_1^{n_1}, ..., P_t^{n_t}$ tais que $A \cong P_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus P_t^{n_t}$. Pelo corolário anterior temos que

$$W \cong P_1^{m_1} \oplus P_t^{m_t} \oplus Q$$

para algum A-módulo Q e $m_1, ..., m_t > 0$ tal que nenhum somando direto de Q é isomorfo a P_i $\forall i$. Tome $r = \mathrm{mmc}(n_1, ..., n_t)$. Temos que:

$$W^r \cong P_1^{rm_1} \oplus \cdots \oplus P_t^{rm_t} \oplus Q^r.$$

Agora, tome $\alpha = \min\left(\frac{rm_1}{n_1}, ..., \frac{rm_t}{n_t}\right)$. Se $\alpha = \frac{rm_i}{n_i}$ então

$$W^r \cong A^\alpha \oplus P_1(rm_1 - \alpha n_1) \oplus \cdots \oplus P_i^{(rm_i - \alpha n_i)} \oplus Q^r.$$

Veja que A^α é livre e $P_1(rm_1 - \alpha n_1) \oplus \cdots \oplus P_i^{(rm_i - \alpha n_i)} \oplus Q^r$ não é A-fiel visto que $rm_i - \alpha n_i = 0$ e, assim, não possui somando direto isomorfo a P_i. Definindo $F = A^\alpha$ e $E = P_1(rm_1 - \alpha n_1) \oplus \cdots \oplus P_i^{(rm_i - \alpha n_i)} \oplus Q^r$ obtemos o desejado. ■

Proposição 3.2.6. *Seja W um B-módulo à esquerda finitamente gerado. Se W^r é um B-módulo livre para algum inteiro r então W é um B-módulo livre.*

Demonstração. Seja W um B-módulo à esquerda finitamente gerado arbitrário. Tome $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$ uma decomposição de B em B-módulos à esquerda indecomponíveis.

Seja $t \in B$ uma integral à esquerda não nula. Digamos que $t = t_1 + \cdots + t_n$ com $t_i \in B_i$ $\forall i$. Temos que para qualquer $b \in B$

$$bt_1 + \cdots + bt_n = bt = \epsilon(b)t = \epsilon(b)t_1 + \cdots + \epsilon(b)t_n.$$

Assim, $t_1, ..., t_n$ são integrais à esquerda de B. Como o espaço das integrais possui dimensão igual a 1, existe um j tal que $t = t_j$ e $t_i = 0$ para todo $i \neq j$. Portanto, B_j não é isomorfo a nenhum B_i.

Tome $P_1 = B_j, P_2, ..., P_s$ os tipos de isomorfismos de B-módulos indecomponíveis principais. Seja $B \cong P_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus P_s^{n_s}$ a decomposição de B. Temos que $n_1 = 1$. Como W^r é um B-módulo livre, temos que $W^r \cong B^p$ para algum inteiro p. Assim,

$$W^r \cong B^p \cong P_1^{pn_1} \oplus \cdots \oplus P_s^{pn_s}.$$

Pelo teorema A.0.10, temos que

$$W \cong P_1^{m_1} \oplus \cdots \oplus P_s^{m_s}$$

para alguns m_i. Ou seja,

$$W^r \cong P_1^{rm_1} \oplus \cdots \oplus P_s^{rm_s}.$$

Portanto, temos que $pn_i = rm_i$ $\forall i$. Como $n_1 = 1$, temos que $p = rm_1$. Logo, $pn_i = rm_1 n_i = rm_i$, ou seja, $m_i = m_1 n_i$.

Do exposto segue que $W \cong B_1^m$. Assim, temos o desejado. ■

Proposição 3.2.7. *Seja W um B-módulo à esquerda finitamente gerado. Se existe L um B-módulo B-fiel tal que $L \otimes W \cong W^{(\dim L)}$ como B-módulos então W é um B-módulo livre.*

Demonstração. Note que B é injetivo como B-módulo à esquerda. Assim, pela proposição 3.2.5 temos que $W^r \cong F \oplus E$ para algum $r \in \mathbb{Z}^+$, F B-módulo livre e E B-módulo não B-fiel. Pela proposição anterior temos

$$L \otimes W^r \cong (L\otimes)^r \cong (W^{(\dim L)})^r \cong (W^r)^{(\dim L)}.$$

Assim, podemos substituir W^r por W e assumir $W \cong F \oplus E$.

Similarmente existe $s \in \mathbb{Z}^+$ tal que $L^s \cong F' \oplus E'$ com F' B-módulo livre e E' B-módulo não B-fiel. Como L é um B-módulo fiel, L^s*tambémé.Assim*,F'$\neq 0$. Veja que

$$L^s \otimes W \cong (L \otimes W)^s \cong (W^{(\dim L)})^s \cong W^{(\dim L^s)}.$$

Assim, podemos substituir L^s por L e assumir $L \cong F' \oplus E'$.

Seja $t = \dim L$. Como $L \otimes W \cong W^t$, temos que

$$F^t \oplus E^t \cong W^t \cong L \otimes W \cong L \otimes F \oplus L \otimes E.$$

Como F é livre existe $q \in \mathbb{Z}^+$ tal que $F \cong B^q$. Assim, segue que

$$L \otimes F \cong L \otimes B^q \cong (L \otimes B)^q.$$

Pela proposição 3.2.2 temos que

$$(L \otimes B)^q \cong (B^{(\dim L)})^q \cong B^{tq} \cong F^t.$$

Assim, $L \otimes F \cong F^t$. Pelo teorema A.0.10 temos que $E^t \cong L \otimes E$. Suponha que $E \neq 0$. Então

$$E^t \cong L \otimes E \cong (F' \otimes E) \oplus (E' \otimes E).$$

Pela proposição 3.2.2 segue que

$$F' \otimes E \cong B^r \otimes E \cong (B \otimes E)^r \cong B^{(\dim Er)}.$$

Portanto, $F' \otimes E$ é livre e não nulo. Ou seja, $F' \otimes E$ é B-fiel. Do exposto, vemos que E^t também é B-fiel. Contradição. Logo $E = 0$.

Como $W \cong F \oplus E$ e $E = 0$, obtemos que W é livre. ■

Lema 3.2.8. *Se todo módulo em ${}_B^H\mathcal{M}$ de dimensão finita é livre como B-módulo à esquerda, então dado $M \in {}_B^H\mathcal{M}$ temos que M é livre como B-módulo.*

Demonstração. Seja $M \in {}_B^H\mathcal{M}$ arbitrário. Suponha que todo $N \in {}_B^H\mathcal{M}$ de dimensão finita é livre como B-módulo à esquerda. Seja N um H-submódulo de M não nulo. Então temos que BN é um subobjeto de dimensão finita de M na categoria ${}_B^H\mathcal{M}$.

Agora, defina o conjunto $\mathcal{F}$ de todos subconjuntos X não vazios de M tal que BX é um subobjeto de M na categoria ${}_B^H\mathcal{M}$ e BX é um B-módulo livre com base X. Veja que $BN \in \mathcal{F}$. Logo, $\mathcal{F}$ é não vazio.

Considere em $\mathcal{F}$ a ordem dada pela inclusão. Temos que se $(X_i)_{i \in I}$ é um subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{F}$ então $X = \cup X_i$ é base do B-módulo BX e $BX = \sum BX_i$ é um subobjeto de M na categoria ${}_B^H\mathcal{M}$. Ou seja, $X \in \mathcal{F}$.

Pelo Lema de Zorn existe um elemento maximal $Y \in \mathcal{F}$. Suponha que $BY \neq M$. Então $\frac{M}{BY}$ é um objeto não nulo de ${}^{H}_{B}\mathcal{M}$. Assim, $\frac{M}{BY}$ contém um subobjeto $\frac{S}{BY}$ tal que $BY \subseteq S \subseteq M$ e $S \in {}^{H}_{B}\mathcal{M}$.

Seja Z base de $\frac{S}{BY}$ e $Y' \subseteq S$ tal que $\pi(Y') = Z$ em que $\pi : S \to \frac{S}{BY}$ é a projeção. Então S é um B-módulo livre com base $Y \cup Y'$. Assim, $Y \cup Y' \in \mathcal{F}$. Contradição pois Y é elemento maximal. Logo, $BY = M$.

Do exposto segue que M é um B-módulo livre com base Y. ∎

Teorema 3.2.9. *(Teorema de Nichols-Zoeller) Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e B uma subálgebra de Hopf. Então todo $M \in {}^{H}_{B}\mathcal{M}$ é um B-módulo livre. Em particular, H é um B-módulo livre e, portanto, $\dim B$ divide $\dim H$.*

Demonstração. Seja $M \in {}^{H}_{B}\mathcal{M}$ arbitrário. Se M possui dimensão finita, o lema anterior nos garante o desejado. Caso contrário, como H é finitamente gerado e B-fiel como B-módulo à esquerda, pela proposição 3.2.1 temos que $H \otimes M \cong M^{(\dim H)}$ como B-módulos. Pela proposição 3.2.7 temos que M é B-módulo livre.

Tomando $M = H$ obtemos que H é B-módulo livre e $\dim B$ divide $\dim H$. ∎

3.3 APÊNDICE

Definição 3.3.1. *(Módulo Simples) Sejam A uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e M um A-módulo à esquerda. Então M diz-se um módulo simples ou irredutível se $M \neq \{0\}$ e os únicos A-submódulos de M são os triviais, ou seja, $\{0\}$ e M.*

Definição 3.3.2. *(Módulo Semisimples) Sejam A uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e M um A-módulo à esquerda. Então M diz-se um módulo semissimples ou completamente redutível se todo submódulo N de M é um somando direto de M, ou seja, $M = N \oplus N'$ para algum N' A-submódulo de M.*

Definição 3.3.3. *(Álgebra Semisimples) Uma $\mathbb{K}$-álgebra A é dita ser semisimples se todos os A-módulos não nulos são semisimples.*

Definição 3.3.4. *(Módulo Livre) Sejam A uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e M um A-módulo à esquerda. Dizemos que M é um módulo livre se possui uma base. Ou seja, se existe uma família de elementos linearmente independentes $\{x_i\}$ tal que $M = \mathrm{span}\{x_i\}$.*

Definição 3.3.5. *(Anulador) Sejam A uma álgebra sobre $\mathbb{K}$, M um A-módulo e N um submódulo de M. Dizemos que o conjunto*

$$\mathrm{ann}_A(N) = \{a \in A \mid an = 0 \ \forall n \in N\}$$

é o anulador de N.

Definição 3.3.6. *(Módulo Fiel) Sejam A uma álgebra sobre* $\mathbb{K}$ *e M um A-módulo. Dizemos que M é A-fiel se* $ann_A(M) = 0$.

Definição 3.3.7. *(Módulo Injetivo) Sejam A uma álgebra sobre* $\mathbb{K}$ *e* M, N *dois A-módulos à esquerda. Um R-módulo U diz ser injetivo se para qualquer monomorfismo* $f : M \to N$ *e qualquer morfismo* $g : M \to U$ *existir um morfismo* $h : N \to U$ *tal que* $h \circ f = g$.

Definição 3.3.8. *(Comprimento Finito) Sejam A uma álgebra sobre* $\mathbb{K}$*, M um A-módulo à esquerda e*

$$0 = M_r \subseteq M_{r-1} \subseteq \cdots \subseteq M_0 = M$$

uma sequência finita S de submódulos de M. Um refinamento S' *para S é uma sequência finita de submódulos*

$$0 = N_s \subseteq N_{s-1} \subseteq \cdots \subseteq N_0 = N$$

tal que para todo $i \in \{1, ..., r\}$ *existe* $j \in \{1, ..., s\}$ *tal que* $M_i = Nj$.

Dizemos ainda que S' *é um refinamento próprio de S se existir algum k tal que* $N_k \neq M_i$ *para qualquer* $i \in \{1, ..., r\}$*. Além disso, quando M não admite refinamento próprio dizemos que M possui comprimento finito.*

Definição 3.3.9. *(Módulo Indecomponível) Seja A uma álgebra sobre* $\mathbb{K}$*. Um A-módulo M é dito ser indecomponível se* $M \neq 0$ *e não existirem A-submódulos não triviais* N_1, N_2 *tais que* $M = N_1 \oplus N_2$.

Teorema 3.3.10. *(Teorema de Krull-Schmidt) Todo módulo M de comprimento finito tem uma decomposição em soma direta de submódulos*

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$$

onde, para cada $i \in \{1, ..., r\}$*,* M_i *é indecomponível. Além disso, esta decomposição é única a menos de isomorfismo.*

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada na referência [8].

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu and S. Raianu - **Hopf Algebras: An Introduction**. Marcel Dekker. 2001.

[2] D. E. Radford - **The order of the antipode of a finite dimensional Hopf algebra is finite**, Amer. J. Math. 98, (333-355), 1976.

[3] W. D. Nichols and M. B. Zoeller - **A Hopf algebra freeness theorem**, Amer. J. Math. 111, (381-385), 1989.

[4] J. Amaro - **Teoremas de dualidade de Tannaka-Krein**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina. 2017.

[5] G. G. Pollachini - **Álgebras de Hopf associadas a grafos tipo árvore**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina. 2015.

[6] G. Martini - **Sobre a semisimplicidade de álgebras de hopf finito-dimensionais e o duplo de drinfeld**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2013.

[7] M. F. Santos - **Tensores integrais em álgebras de hopf**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco. 2013.

[8] D. S. Dummit and R. M. Foote - **Abstract Algebra**. John Wiley Sons. 1999.

Apêndices

APÊNDICE A – DEFINIÇÕES AUXILIARES

Definição A.0.1. *(Módulo Simples) Sejam A uma álgebra sobre* $\mathbb{K}$ *e M um A-módulo à esquerda. Então M diz-se um módulo simples ou irredutível se* $M \neq \{0\}$ *e os únicos A-submódulos de M são os triviais, ou seja,* $\{0\}$ *e M.*

Definição A.0.2. *(Módulo Semisimples) Sejam A uma álgebra sobre* $\mathbb{K}$ *e M um A-módulo à esquerda. Então M diz-se um módulo semissimples ou completamente redutível se todo submódulo N de M é um somando direto de M, ou seja,* $M = N \oplus N'$ *para algum* N' *A-submódulo de M.*

Definição A.0.3. *(Álgebra Semisimples) Uma* $\mathbb{K}$*-álgebra A é dita ser semisimples se todos os A-módulos não nulos são semisimples.*

Definição A.0.4. *(Módulo Livre) Sejam A uma álgebra sobre* $\mathbb{K}$ *e M um A-módulo à esquerda. Dizemos que M é um módulo livre se possui uma base. Ou seja, se existe uma família de elementos linearmente independentes* $\{x_i\}$ *tal que* $M = \mathrm{span}\{x_i\}$.

Definição A.0.5. *(Anulador) Sejam A uma álgebra sobre* $\mathbb{K}$*, M um A-módulo e N um sub-módulo de M. Dizemos que o conjunto*

$$\mathrm{ann}_A(N) = \{a \in A \mid an = 0 \ \forall n \in N\}$$

é o anulador de N.

Definição A.0.6. *(Módulo Fiel) Sejam A uma álgebra sobre* $\mathbb{K}$ *e M um A-módulo. Dizemos que M é A-fiel se* $ann_A(M) = 0$.

Definição A.0.7. *(Módulo Injetivo) Sejam A uma álgebra sobre* $\mathbb{K}$ *e* M, N *dois A-módulos à esquerda. Um R-módulo U diz ser injetivo se para qualquer monomorfismo* $f : M \to N$ *e qualquer morfismo* $g : M \to U$ *existir um morfismo* $h : N \to U$ *tal que* $h \circ f = g$.

Definição A.0.8. *(Comprimento Finito) Sejam A uma álgebra sobre* $\mathbb{K}$*, M um A-módulo à esquerda e*

$$0 = M_r \subseteq M_{r-1} \subseteq \cdots \subseteq M_0 = M$$

uma sequência finita S de submódulos de M. Um refinamento S' *para S é uma sequência finita de submódulos*

$$0 = N_s \subseteq N_{s-1} \subseteq \cdots \subseteq N_0 = N$$

tal que para todo $i \in \{1,...,r\}$ *existe* $j \in \{1,...,s\}$ *tal que* $M_i = Nj$.

Dizemos ainda que S' *é um refinamento próprio de S se existir algum k tal que* $N_k \neq M_i$ *para qualquer* $i \in \{1,...,r\}$*. Além disso, quando M não admite refinamento próprio dizemos que M possui comprimento finito.*

Definição A.0.9. *(Módulo Indecomponível) Seja A uma álgebra sobre* $\mathbb{K}$*. Um A-módulo M é dito ser indecomponível se* $M \neq 0$ *e não existirem A-submódulos não triviais* N_1, N_2 *tais que* $M = N_1 \oplus N_2$.

Teorema A.0.10. *(Teorema de Krull-Schmidt) Todo módulo M de comprimento finito tem uma decomposição em soma direta de submódulos*

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$$

onde, para cada $i \in \{1, ..., r\}$, M_i é indecomponível. Além disso, esta decomposição é única a menos de isomorfismo.

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada na referência [8].