UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Mateus Spezia

Teorema do mergulho de Nash

Florianópolis, SC
2022

Mateus Spezia

Teorema do mergulho de Nash

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em matematica.
Orientador: Prof. Raphael Falcão da Hora, Dr.

Florianópolis, SC
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Spezia, Mateus
Teorema de Mergulho de Nash / Mateus Spezia ; orientador, Raphael Falçao da Hora, 2022.
62 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. geometria riemanniana. 3. análise geométrica. 4. Equações diferecias. 5. Opereadores pseuo diferecias. I. Falçao da Hora, Raphael. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Mateus Spezia

Teorema do mergulho de Nash

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Raphael Falcão da Hora, Dr.
Departamento de Matemática-UFSC

Prof. Francisco Carlos Caramello Junior, Dr.
Departamento de Matemática-UFSC

Prof. Henrique de Barros Vitorio, Dr.
Departamento de Matemática-UFPE

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em matematica.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Daniel Goncalves
Data: 11/04/2022 11:18:40-0300
CPF: 017.022.459-77
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Raphael Falcao da Hora
Data: 08/04/2022 16:00:55-0300
CPF: 048.960.624-50
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Raphael Falcão da Hora, Dr.
Orientador

Florianópolis, SC, 2022.

AGRADECIMENTOS

Esse trabalho foi escrito em um período excepcional para o mundo todo, durante o auge da pandemia de covid-19, muitas coisas mudaram na vida de todos nós nesses dois anos. Em particular a vida na universidade mudou drasticamente, tivemos que retirar-nos para nossas casas e reorganizar o modo em que ensinamos e discutimos matemática. Mas graças ao incrível progresso técnico e científico das últimas décadas, fruto da enorme dedicação de homens e mulheres que dedicam suas vidas a o fazer cientifico, conseguimos produzir vacinas em tempo recorde o que tem nos possibilitado, aos poucos, à volta do convívio social tal qual o que havia antes pandemia. Para nós matemáticos esse convívio nos corredores dos institutos, as conversas no café e as discussões na frente do quadro negro são peças fundamentais para construir ideias que tocam nossa ciência para frente. Então, sobretudo, gostaria de deixar meu profundo agradecimento a todos os homens e mulheres que dedicam sua vida à construção do conhecimento cientifico.

Também gostaria de agradecer aos meus pais, Ivoni e Edson, por terem me recebido novamente em casa nesses dois anos e terem propiciado toda a estrutura para que eu pudesse continuar a me dedicar aos estudos nessa situação excepcional. Também agradeço a meu pequeno irmão Davi, ter sua companhia nesses dois anos e ver você crescer foi muito agradável. Também gostaria de agradecer por ninguém próximo ter perecido para essa doença.

A minha companheira Maíra, pelo amor, carinho e companheirismo mesmo a distância. Também por ter me recebido em sua casa toda vez que precisei ir para Florianópolis resolver algo da dissertação, ou simplesmente para ir passar uns dias perto e matar a saudade.

A todos professores e professoras que fizeram parte da minha caminhada durante a graduação e pós-graduação. Em especial quero agradecer ao meu orientador Raphael que esteve ao meu lado desde o primeiro semestre da graduação e sempre disponível para me receber em sua sala quendo precisei tirar alguma dúvida ou simplesmente conversar um pouco. também agradeço a ele pela confiança no meu trabalho dando sempre a liberdade para eu estudar algo que fosse do meu interesse.

Também agradeço os meus amigos e colegas, me especial Luiz, Gabriel e Henrique, que estiveram ao meu lado, mesmo que separados por uma tela, sempre disponível para discutir matemática ou jogar conversa fora.

Agradeço também aos membros da banca professores Francisco e Henrique por aceitarem o convite para ler esse trabalho e pelos comentários, observações e correções que contribuíram para o enriquecimento do trabalho final, perincipalmente o alerta do professor Henrique sobre a demostração do lema 4.4, que foi refeita na versão final.

Agradeço por fim a UFSC, que como universidade pública, gratuita e de qualidade cumpre a importante função de produzir e ensinar ciência de ponta. Mesmo com todas as dificuldades impostas pela situação extraordinária da pandemia, a universidade tem lutado para se adaptar e continuar na sua missão. Sobretudo nesses tempos de obscurantismo e retrocesso

em que devemos defender o caráter público da universidade e lutar para ela poder avançar na direção de produzir conhecimento a serviço do povo e do desenvolvimento nacional.

RESUMO

Apresentaremos uma demonstração para o célebre teorema de Mergulho de Nash, que afirma de toda variedade riemanniana compacta pode ser mergulhada isométricamente em algum espaço elucidado. A ideia central na demonstração apresentada nesse trabalho é devido a (**Gunthier1989**) que consiste em usar o operado pseudo diferencial $(1-\Delta)^{-1}$ para contornar o problema de perda de diferenciabilidade. No capítulo 2 introduziremos a linguagem básica dos operadores pseudo diferenciais e mostraremos como tais operadores agem em alguns espaços de funções, tais como os espaços de Sobolev. No capítulo 3 introduziremos a decomposição de Littlewood-Paley e usaremos ela para obter certas estimas para controlar a norma do produto e composições de funções. Já o último capítulo é dedicado a prova do teorema de mergulho de Nash.

Palavras-chave. Operadores pseudo diferenciais. Cálculo Simbólico. Decomposição diádica. Teorema de Mergulho de Nash.

ABSTRACT

We will present a demonstration of the celebrated Nash embedding theorem, this theorem states that every compact Riemannian manifold can be isometrically embedded into some Euclidean space. The central idea of the demostrate presented in this thesis is due to (**Gunthier1989**) that consists in use the pseudo-differential operator $(1-\Delta)^{-1}$ to avoid the phenomenon of loss of differentiability. In chapter 2 we will introduce the basic language of pseudo-differential operators and we will show how this operator acts in some familiar spaces of function, such that Sobolev Spaces. In chapter 3 we will introduce the Littlewood-Paley decomposition and we will use it for get certain estimates for control the norm of the product and composition of functions. In the last chapter we will present the proof of the Nash embedding theorem.

Keywords: Pseudo-differential Operatores. Symbolic Calculus. Dyadic docomposition. Nash embedding theorem.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma demonstração para o célebre teorema de mergulho de Nash, que afirma que toda variedade riemanniana pode ser mergulhada de forma isométrica em algum espaço euclidiano. Falaremos um pouco mais sobre esse teorema na introdução do capítulo 4. A demonstração desse resultado que apresentaremos aqui segue a ideia formulada por Günther em (GÜNTHIER, 1989).

Este trabalho está em sua maior parte baseado no livro (ALINHAC *et al.*, 2007). Essencialmente, seguimos o roteiro apresentado no livro para chegar ao resultado principal. Todos os resultados aqui apresentados também podem ser encontrados neste livro. Nós recortamos os resultados em uma sequência lógica que julgamos coerente, modificamos um pouco as demostrações e também abrimos algumas contas para tentar deixar as demonstrações mais explícitas. Vale ressaltar que optei por não incluir um capítulo com resultados preliminares sobre teoria de distribuições e transformada de Fourier, que são pré-requisitos básicos para falar sobre operadores pseudo-diferenciais. Tais resultados são bem conhecidos e amplamente cobertos por disciplinas da pós-graduação e podem ser encontrados, por exemplo, em (HÖRMANDER, 2004). Sendo assim, começamos nossa apresentação falando de operadores pseudo-diferenciais.

Saliento que o uso da teoria de operados pseudo-diferenciais (OPD) não é peça imprescindível na demonstração do teorema de Nash. Escolhi este caminho porque acredito que o objetivo de uma tese, além de apresentar alguns resultados interessantes, é ao longo do processo aprender algumas novas ferramentas matemáticas que podem ser úteis no futuro.

Quanto à organização do trabalho, seguimos a seguinte ordem. No capítulo 2, iniciaremos nossa jornada apresentado os operadores pseudo-diferenciais e alguns resultados importantes sobre eles. Em particular, falaremos sobre o cálculo simbólico de tais operadores e o usaremos para mostrar como tais operadores agem sobre espaços de funções conhecidos. Deixamos as demonstrações dos teoremas do cálculo simbólico para o apêndice, pois são bastante longas e acredito que não são indeclináveis para compreender o restante do texto. Já no capítulo 3, focaremos no caso de OPD clássico e juntamente com a decomposição de Littlewood–Paley, obteremos estimativas para a norma do produto de duas funções.

Finalmente no último capítulo, falaremos sobre o Teorema de mergulho de Nash. O roteiro da demonstração consiste em primeiro reduzir o teorema de mergulho para um teorema de pertubação local. Para fazer isso, apenas usaremos alguns resultados básicos de geometria de variedades, que serão citados ao longo do texto. No que concerne o **Teorema de Pertubação local**, ele afirma que dado uma métrica que pode ser mergulhada, toda métrica suficientemente próxima dela também pode ser mergulha. A segunda parte do capítulo 4 é concentrada na demonstração do teorema de pertubação local. Para isso, introduziremos a ideia devido a Günther (apresentada em (GÜNTHIER, 1989)) de usar o operador $(1-\Delta)^{-1}$ para contornar o fenômeno de perda de diferenciabilidade, que era a principal dificuldade técnica na primeira prova apresentado por Nash. Usando o operador pseudo-diferencial $(1-\Delta)^{-1}$, conseguiremos reduzir o teorema de pertubação local para um teorema de ponto fixo. Por fim, para controlar as normas e garantirmos que temos uma contração, usaremos as desigualadas obtidas nas **proposição 3.6** e **proposição 3.12** do capítulo 3 e usando o teorema de ponto fixo de Banach, garantiremos a existência de solução para o problema.

2 OPERADORES PSEUDO-DIFERENCIAIS

O objetivo desse capítulo é fazer uma breve introdução aos operadores pseudo-diferenciais, tais operadores generalizam a ideia de um operador diferencial. Esses operadores são ferramentas poderosas no estudo de certas equações diferenciais a derivadas parciais. Antes de prosseguirmos é importante estabelecer certas notações.

Usaremos constantemente a notação de *multi-índice*, um multi-índice é uma n-úpla $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ de inteiros não negativos, ou seja $\alpha \in \mathbb{N}^n$, onde convencionamos $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\cdots\}$. Definimos a *norma* de um multi-índice por $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, também definimos o *fatorial* de um multi-índice por $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$. Dado $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos o monômio $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Para $1 \leqslant j \leqslant n$ considere a derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x_j}$ que também será denotada por ∂_{x_j} ou simplesmente ∂_j. Em virtude que usaremos a transformada de Fourier é interessante introduzir a notação $D_j := \frac{1}{i}\partial_j = -i\partial_j$. As derivadas parciais de ordem superior serão denotas usando os multi-índices, teremos que $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$ e analogamente $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$.

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjunto aberto e k inteiro não negativo $C^k(\Omega)$ denota as funções com valores em $\mathbb{C}$, k vezes diferenciáveis. Analogamente $C^\infty(\Omega)$ denotas as funções infinitamente diferenciáveis, e $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ denota as funções suaves de suporte compacto. Denotaremos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ as funções de Schwartz, que são as funções suaves de decaimento rápido, mais precisamente, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n);\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ temos $|x^\beta D^\alpha u(x)| < \infty\}$. Ainda mais denotaremos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ o dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, esse é o espaço das distribuições temperadas. Para mais propriedades das funções de Schwartz e das distribuições temperadas vejas definições (7.1.2) e (7.1.7) da **seção 7.1** de (HÖRMANDER, 2015). Por fim quando não tiver perigo de confusão omitiremos o domínio, ou seja denotaremos esses espaços simplesmente por, C^k,$\mathcal{C}^\infty$ e assim por diante.

A transformada de Fourier será dada por

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x)dx,$$

e sua inversa por

$$\mathcal{F}^{-1}(u)(x) = \check{u}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \hat{u}(\xi)d\xi.$$

A transforma de Fourier é um isomorfismo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nele mesmo, ver **teorema 7.1.5** de (HÖRMANDER, 2015), e pode ser estendida para um isomorfismo de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ver **teorama 7.1.10** de (HÖRMANDER, 2015).

2.1 OPERADORES PSEUDO-DIFERENCIAIS

Para construirmos o arquétipo de um operador pseudo-diferencial considere o seguinte operador diferencial $P = \sum a_\alpha(x) D_x^\alpha$ onde $a_\alpha \in \mathcal{S}$, ou seja, dado uma função apropriada $u(x)$, temos

$$Pu(x) = \sum_{\alpha} a_\alpha(x) D_x^\alpha u(x)$$

Observe que a formula inversa de Fourier nos dá

$$D_x^\alpha u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi} \widehat{D_x^\alpha u(x)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi} \xi^\alpha \hat{u}(\xi) d\xi$$

logo temos

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \sum_{\alpha} a_\alpha(x) e^{ix\cdot\xi} \xi^\alpha \widehat{u}(\xi) d\xi. \tag{2.1.1}$$

seja $p(x,\xi) = \sum_\alpha a_\alpha(x)\xi^\alpha$, assim temos

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi) \widehat{u}(\xi) d\xi.$$

P definido dessa forma fornece a motivação para a definição de operador pseudo-diferencial. Observe também que para (2.1.1) fazer sentido $p(x,\xi)$ não precisa ser necessariamente uma função polinomial em ξ basta ela ter algumas propriedades razoáveis. Para deixar preciso o que é entendido como "propriedades razoáveis" definiremos a classe dos símbolos e após isso voltar e dar a definição precisa de operador pseudo-diferencial.

2.2 SÍMBOLOS

Definição 2.1. *Seja $m \in \mathbb{R}$. Defina $S^m = S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ espaço das funções $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tais que*

$$\forall\alpha, \forall\beta, |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1 + \|\xi\|)^{m-|\beta|}$$

*Seja também $S^{-\infty} = \bigcap_m S^m$. Um elemento $a \in S^m$ é chamado de **simbolo de ordem** m.*

Após uma nova definição é interessante mostrar alguns exemplos para vermos que a definição faz sentido.

Exemplo 2.2. *Seja $a(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$, onde as $a_\alpha(x)$ são suaves e limitadas com todas suas derivadas também limitadas. Então $a \in S^m$ e a é chamado símbolo diferencial.*

Como observamos na motivação no início do capítulo a é chamado símbolo diferencial, pois está associado ao operador diferencial clássico. Para verificar que $a \in S^m$ observe que dados multi-índices α, β temos

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \partial_x^\alpha a_\alpha(x) \partial_\xi^\beta \xi^\alpha \leqslant C_\alpha \sum_{|\alpha|\leqslant m} \partial_\xi^\beta \xi^\alpha.$$

Pois $a_\alpha(x)$ tem todas as derivadas limitadas. Observe também que $\sum_{|\alpha|\leqslant m} \partial_\xi^\beta \xi^\alpha$ é um polinômio em ξ de grau menor ou igual a $m - |\beta|$ se $|\beta| \leqslant m$ e zero caso $|\beta| > m$. O caso de grau zero é trivialmente satisfeito, por outro lado, para um polinômio de grau s sempre é possível encontra constante K de modo que $\frac{1}{K}(1+\|x\|)^s \leqslant |p(x)| \leqslant K(1+\|x\|)^s$ uma vez que o termo que domina $(1+\|x\|)^s$ é $\|x\|^s$ ou seja basta escolher K suficientemente grande. Portanto

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha| \leqslant C_\alpha \left| \sum_{|\alpha|\leqslant m} \partial_\xi^\beta \xi^\alpha \right| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+\|\xi\|)^{m-|\beta|}.$$

Exemplo 2.3. *Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\varphi(\xi) \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$*

É claro da definição das funções de Schwartz.

Exemplo 2.4. *Seja $a(\xi)$ uma função suave positivamente homogêneo de grau m, i.e., $\forall\lambda > 0$ e $\forall\xi \neq 0$ temos $a(\lambda\xi) = \lambda^m a(\xi)$. Considere também $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\chi = 1$ próximo de 0, então a função $\tilde{a}(\xi) = (1-\chi(\xi))a(\xi)$ é um símbolo de ordem m.*

De fato, observe que para ξ próximo de zero $\tilde{a}$ é constante igual a zero. Para $\xi > 0$ temos $a(\xi) = a\left(\|\xi\|\frac{\xi}{\|\xi\|}\right) = \|\xi\|^m a\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right)$, Observe que como a é suave e $a\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right)$ está definida sobre a esfera, que é compacta, não temos problemas para controlar suas derivadas então o termo que domina é $\|\xi\|^m$ e é fácil ver que $\partial_\xi^\beta|\xi|^m| < K(1+\|\xi\|)^{m-|\beta|}$ com isso conseguimos controlar $\tilde{a}$ visto que as derivadas de $(1-\chi(\xi))$ são obviamente limitadas. Portanto, temos que $\tilde{a} \in S^m$.

O próximo exemplo é interessante, pois está associado a construção da parametrix de um operador elíptico, isto é, da construção de uma inversa em certo sentido para um operador diferencial elíptico.

Exemplo 2.5. *Seja $p(x,\xi)$ um símbolo diferencial de ordem m definido para $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, suponha que $p(x,\xi)$ seja elíptico, isto é,*

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0, \;\; p(x,\xi) \neq 0.$$

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\chi = 1$ próximo de zero, então a função $a(x,\xi) = \varphi(x)\frac{(1-\chi(\xi/C))}{p(x,\xi)}$ é um símbolo de classe $-m$ se C é suficientemente grande.

Observe que numa vizinhança de $\xi = 0$, sendo onde poderíamos ter alguma singularidade, a função $a(x,\xi)$ está controlada dado que $1-\chi(\xi)$ pode ser tomada igual a zero. Já para $\|\xi\|$ grande temos que $(1-\chi(\xi)) = 1$, ou seja $a(x\xi) = \phi(x)\frac{1}{p(x,\xi)}$, nesse caso, temos

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| = |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \phi(x)\frac{1}{p(x,\xi)}| \leqslant C\left|\frac{-\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)}{p^2(x,\xi)}\right| \leqslant C'\frac{p_{m-|\beta|}(\xi)}{p^2(x,\xi)} \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+\|\xi\|)^{-m-|\beta|}$$

Pois p^2 é um polinômio de grau $2m$.

Para $r \leqslant |\xi/C| \leqslant R$,um anel, onde χ não é constante vamos ter um termo extra no numerador dado por $\partial_\xi^\beta \chi(\xi/C) = (1/C)^{|\beta|}\partial_\xi^\beta \chi|_{\xi=\xi/C}$ ou seja

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leqslant K \left|\frac{(1/C)^{|\beta|}p(x,\xi) - (1-\chi(\xi/C))p_{m-|\beta|}(\xi)}{p^2(x,\xi)}\right|$$

e para C suficientemente grande temos que $|\dfrac{C^{-|\beta|}}{p(x,\xi)}| \leqslant K(1+\|\xi\|)^{-m-|\beta|}$, juntamente com a consideração anterior temos o requerido.

Algumas propriedades básicas dos símbolos, que podem ser encontradas na página 20 de (ALINHAC *et al.*, 2007), são as seguintes.

Proposição 2.6. *Sejam* $a \in S^m = S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *e* $b \in S^k = S^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *então temos*

a) $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a \in S^{m-|\beta|}$,

b) $ab \in S^{m+k}$,

c) $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$.

Demonstração. a) Como a é suave, a ordem de derivação não importa, então

$$\left|\partial_x^\gamma \partial_\xi^\lambda \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a\right| = \left|\partial_x^{\gamma+\alpha}\partial_\xi^{\lambda+\beta} a\right| \leqslant C(1+\|\xi\|)^{m-|\lambda+\beta|} \leqslant C(1+\|\xi\|)^{m-|\beta|-|\lambda|} = C(1+\|\xi\|)^{(m-|\beta|)-|\lambda|}.$$

b) Observe que para $\beta = 0$ temos $|a| \leqslant C(1+\|\xi\|)^m$ e $|b| \leqslant C(1+\|\xi\|)^k$. Já para $|\beta| > 0$ devemos usar a regra de Leibniz [1], ver

$$\begin{aligned}
|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta ab| &= \left|\partial_x^\alpha \left(\sum_{\beta' \leqslant \beta} \binom{\beta}{\beta'} \partial_\xi^{\beta-\beta'} a \cdot \partial^{\beta'} b\right)\right| \\
&= \left|\sum_{\alpha' \leqslant \alpha} \sum_{\beta' \leqslant \beta} \binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'} \partial_x^{\alpha-\alpha'}\partial_\xi^{\beta-\beta'} a \cdot \partial_x^{\alpha'}\partial^{\beta'} b\right| \\
&\leqslant \sum_{\alpha' \leqslant \alpha} \sum_{\beta' \leqslant \beta} C_{\alpha'\beta'}(1+\|\xi|)^{m-|\beta'|}(1+\|\xi|)^{k-|\beta-\beta'|} \\
&= \sum_{\alpha' \leqslant \alpha} \sum_{\beta' \leqslant \beta} C_{\alpha'\beta'}(1+\|\xi|)^{m+k-|\beta'|-|\beta-\beta'|} \\
&\leqslant C(1+\|\xi\|)^{m^k-|\beta'+(\beta-\beta')|} \\
&= C(1+\|\xi\|)^{m^k-|\beta|}
\end{aligned}$$

c) Dado $a \in S^m$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$, podemos identificar a com um elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ usando o produto usual, isto é, dado $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ defina

$$\langle a, \varphi \rangle = \int a(x,\xi)\varphi(x,\xi)dxd\xi,$$

que é um operado linear limitado, pois $|a(x,\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^m$. Logo define um elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$. $\square$

[1] Onde $\beta' \leqslant \beta$ significa que para todo $1 \leqslant i \leqslant n$ temos $\beta_i' \leqslant \beta_i$. E ainda mais o coeficiente binomia é dado por $\binom{\beta}{\beta'} = \binom{\beta_1}{\beta_1'} \cdots \binom{\beta_n}{\beta_n'}$

Podemos definir uma família de semi-normas em S^m dado por

$$|a|^m_{\alpha,\beta} = \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \left\{(1+\|\xi\|)^{-m+|\beta|}|\partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi a(x,\xi)|\right\}$$

Como essa família é enumerável, assim como em $\mathcal{S}$, permite munir S^m com uma estrutura de espaço de Fréchet. Lembre que a convergência é definida como $a_n \to a$ significa que $\forall\alpha,\forall\beta$, $|a_n - a|^m_{\alpha,\beta} \to 0$.

Observação 2.7. *Se $m \geqslant m'$ então $S^{m'} \subseteq S^m$ isso ocorre, pois a condição $1+\|\xi\|)^{m'-|\beta|} \leqslant (1+\|\xi\|)^{m-|\beta|}$. Ou seja, se $a_n \to a$ em $S^{m'}$ então $a_n \to a$ em S^m para todo $m \geqslant m'$.*

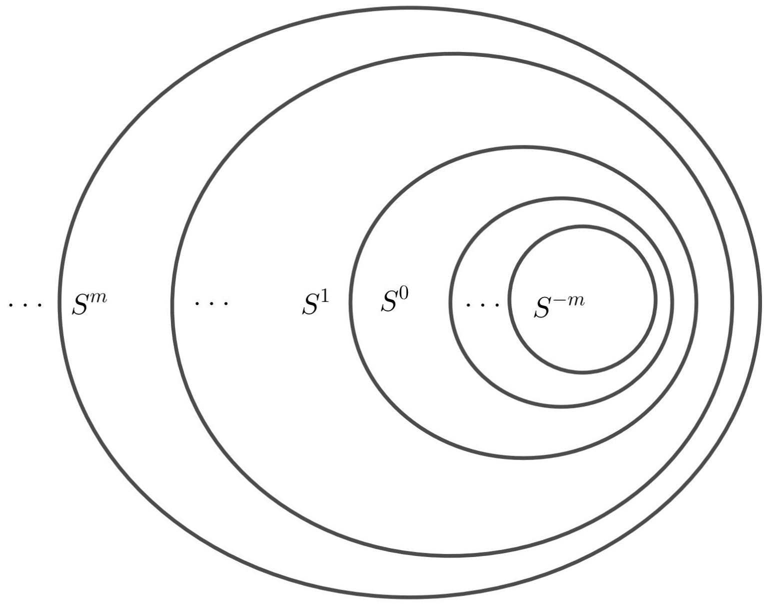

Figura 1 – Inclusão dos espaços dos símbolos

Lema 2.8. *Seja $a \in S^0 = S^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e defina $a_\varepsilon = a(x,\varepsilon\xi)$. Temos a aplicação $a \in S^0 \mapsto a_\varepsilon \in S^0$ é limitada em S^0. Ainda mais $a_\varepsilon \to a_0$ em S^m para todo $m > 0$ se $\varepsilon \to 0$*

Demonstração. Note que usando a regra da cadeia temos

$$|a_\varepsilon|^0_{\alpha,\beta} \leqslant \varepsilon^{|\beta|}|a|^0_{\alpha,\beta} \leqslant C$$

Para o restante do problema a **observação 2.7** permite nos preocuparmos apenas com a caso $0 < m \leqslant 1$. Como estamos interessados no caso $\varepsilon \to 0$, considere $0 < \varepsilon \leqslant 1$.

Se $\beta \neq 0$ temos $\partial^\beta_\xi a_0 = 0$, portanto usando o fato que $a_\varepsilon \in S^0$, temos

$$|\partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi (a_\varepsilon - a_0)| \leqslant \varepsilon^{|\beta|} C_{\alpha,\beta}(1+\varepsilon|\xi|)^{-|\beta|}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
|a_\varepsilon - a_0|^m_{\alpha,\beta} &= \sup\left\{(1+\|\xi\|)^{-m+|\beta|}\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta(a_\varepsilon - a_0)\right\} \\
&\leqslant C_{\alpha,\beta}\sup\left\{\varepsilon^{|\beta|}(1+\|\xi\|)^{-m+|\beta|}(1+\varepsilon\|\xi\|)^{-|\beta|}\right\} \\
&= C_{\alpha,\beta}\varepsilon^m\sup\left\{\varepsilon^{-m+|\beta|}(1+\|\xi\|)^{-m+|\beta|}(1+\varepsilon\|\xi\|)^{-|\beta|}\right\} \\
&= C_{\alpha,\beta}\varepsilon^m\sup\left\{\underbrace{(\varepsilon+\varepsilon\|\xi\|)^{-m}\left(\frac{\varepsilon+\varepsilon\|\xi\|}{1+\varepsilon\|\xi\|}\right)^{|\beta|}}_{\leqslant 1}\right\} \\
&\leqslant C_{\alpha,\beta}\varepsilon^m
\end{aligned}
$$

Nesse caso $|a_\varepsilon - a_0|^m_{\alpha,\beta} \to 0$ se $\varepsilon \to 0$.

Por outro lado, se $\beta = 0$, podemos usar o teorema fundamental do cálculo

$$
\begin{aligned}
|\partial_x^\alpha(a_\varepsilon - a_0)| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}\partial_x^\alpha a(x,t\varepsilon\xi)dt\right| \\
&= \left|\varepsilon\xi\int_0^1 \partial_\xi\partial_x^\alpha a(x,t\varepsilon\xi)dt\right| \\
&\leqslant C\left|\varepsilon\xi\int_0^1 (1+t\|\varepsilon\xi\|)^{-1}dt\right| \\
&= C\ln(1+\varepsilon\|\xi\|) \\
&\leqslant C'_m\varepsilon^m\|\xi\|^m.
\end{aligned}
$$

Com essa desigualdade, também conseguimos mostrar que $|a_\varepsilon - a_0|^m_{\alpha,\beta} \to 0$ se $\varepsilon \to 0$. Por fim observe que ela só é validase $m > 0$. □

Corolário 2.9. *Temos que $S^{-\infty} = \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m$ é denso em S^m com respeito à topologia induzida por $S^{m'}$ para todo $m' > m$.*

Demonstração. De fato tome uma função teste $\chi \in \mathcal{S}$ tal que $\chi = 1$ próximo de 0. Dado $a(x,\xi) \in S^m$, temos que $a_\varepsilon(x,\xi) = \chi(\varepsilon\xi)a(x,\xi) \in S^{-\infty}$, pelo resultado anterior $\chi(\varepsilon\xi) \to \chi(0) = 1$ em S^δ para todo $\delta > 0$, logo $a_\varepsilon \to a$ em $S^{\delta+m}$. □

A próxima proposição pode ser encontrada em (ALINHAC *et al.*, 2007), ela é equivalente ao **Lmema 2.1.1.** desse livro.

Proposição 2.10. *Sejam $a_1,\cdots,a_k \in S^0$ e $F \in C^\infty(\mathbb{C}^k)$, então $F(a_1,\cdots,a_k) \in S^0$.*

Demonstração. Em primeiro lugar note $a \in S^0 \iff \mathrm{Re}(a) \in S^0$ e $\mathrm{Im}(a) \in S^0$, basta supor que temos tudo a valores reais.

Seja $a = (a_1,\cdots,a_n)$, em primeiro lugar note que a desigualdade do valor médio nos dá

$$|F(a)| \leqslant C|a|$$

Suponha por hipótese de indução que, para $|\alpha| + |\beta| \leqslant p$ tenhamos $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta F(a)| \leqslant C(1 + \|\xi\|)^{-|\beta|}$

Pela regra da cadeia temos

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial a_l} \partial_{x_j} a_l \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial \xi_j}(a) = \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial a_l} \partial_{\xi_j} a_l \tag{2.2.1}$$

Seja $|\alpha| + |\beta| = p + 1$. Pode escrever $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta F(a)$ como $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta F(a) = \partial_{\xi_j}\left(\partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta'} F(a)\right) = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta'} F(a)\right)$ onde $|\beta'| = |\beta| - 1$, podemos fazer isso, pois $F(a)$ é suave. Aplicando (2.2.1) para a função $\partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta'} F(a)$ temos

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta F(a)\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta'} F(a)\right)\right| \\
&= \left|\sum_{l=1}^{k} \frac{\partial}{\partial a_l}\left(\partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta'} F(a)\right) \partial_{\xi_l} a_l\right| \\
&\leqslant \sum_{l=1}^{k} C_l |\partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta'} F(a)| |\partial_{\xi_l} a_l| \\
&\leqslant \sum_{l=1}^{k} C_l (1 + \|\xi\|)^{-|\beta'|} (1 + \|\xi\|)^{-1} \\
&\leqslant C(1 + \|\xi|)^{-(1+|\beta'|)} \\
&= C(1 + \|\xi|)^{-|\beta|}.
\end{aligned}$$

Logo $F(a) \in S^0$. □

O conceito de soma assintótica tem papel fundamental para o entendimento dos operadores pseudo-deferenciais. Dado $a_j \in S^{m_j}$, onde $m_j \searrow -\infty$, queremos dar um significado para a soma $\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j$. Seria muita pretensão desejar convergência pontual sempre, então dizemos que a é a soma assintótica, se escreve

$$a \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j,$$

se para todo $k \in \mathbb{N}$ temos $a - \sum_{j=1}^{k} a_j \in S^{m_{k+1}}$ Observe que isso significa que

$$|a - \sum_{j=0}^{k} a_j| \leqslant C(1 + \|\xi\|)^{m_{k+1}} \to 0$$

se $\|\xi\| \to \infty$, o que justifica chamar de soma assintótica.

Proposição 2.11. *Sejam $a_j \in S^{m_j}$ com $m_j \searrow -\infty$. Então existe $a \in S^{m_0}$ tal que $a \sim \sum a_j$, e ainda mais supp(a) $\subseteq \bigcup$ supp(a_j). Onde o supp denota o suporte da função.*

Demonstração. Defina $a = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{a_j} = \sum_{j=0}^{\infty} \big(1 - \chi(\varepsilon_j \xi)\big) a_j$, onde $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ é uma função *bump* tal que $\chi = 1$ numa vizinhança de 0, e tomando $\varepsilon_j \to 0$ rápido o suficiente observe o que a soma acima é localmente finita, ou seja a é bem definida, e ainda mais $\text{supp}(a) \subseteq \bigcup \text{supp}(a_j)$. De forma análoga à demonstração da **proposição 2.6** vamos ter,

$$\begin{aligned} |\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} \tilde{a_j}| &= |\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} \big(1 - \chi(\varepsilon_j \xi)\big) a_j| \\ &\leqslant \sum_{\beta' \leqslant \beta} \sum_{\alpha' \leqslant \alpha} C_{\beta' \alpha'} \left| \partial^{\alpha'} \partial^{\beta'} \big(1 - \chi(\varepsilon_j \xi)\big) \right| \cdot \left| \partial^{\alpha - \alpha'} \partial^{\beta - \beta'} a_j \right|. \end{aligned}$$

Observe ainda que pelo **Lema 2.8** temos $1 - \chi(\varepsilon_j \xi) \to 0$ em S^1, então podemos tomar sequencias ε_j de modo que para todo multi-índice $\beta' \leqslant \beta$ tenhamos

$$(1 + |\xi|)^{-1 + |\beta'|} \left| \partial^{\alpha'} \partial^{\beta'} \big(1 - \chi(\varepsilon_j \xi)\big) \right| \leqslant \frac{1}{2^j}$$

Com o fato que $a_j \in S^{m_j}$, temos

$$\begin{aligned} |\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} \tilde{a_j}| &\leqslant \frac{C}{2^j} \sum_{\beta' \leqslant \beta} (1 + |\xi|)^{1 - |\beta'|} (1 + |\xi|)^{m_j - |\beta - \beta'} \\ &\leqslant \frac{C}{2^j} (1 + \|\xi\|)^{1 + m_j - |\beta|} \end{aligned}$$

Dados α,β multi-índices e k natural, tome N inteiro tal que $N \geqslant |\alpha| + |\beta|$ e $m_N + 1 \leqslant m_{k+1}$, temos

$$|\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} \Big(a - \sum_{j \leqslant N-1} \tilde{a_j}\Big)| = |\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} \Big(\sum_{j \geqslant N} \tilde{a_j}\Big)| \leqslant (1 + \|\xi\|)^{m_N + 1 - |\beta|} \leqslant (1 + \|\xi\|)^{m_{k+1} - |\beta|}$$

Portanto

$$a - \sum_{j \leqslant k} a_j = a - \sum_{j \leqslant N-1} \tilde{a_j} + \sum_{k+1 \leqslant j \leqslant N-1} \tilde{a_j} + \sum_{j \leqslant k} (a_j - \tilde{a_j}).$$

Por fim observe ainda que $\tilde{a_j} \in S^{m_j - 1} \subseteq S^{m_j}$ e $a_j - \tilde{a_j} = a_j \chi(\epsilon_j \xi) \in S^{-\infty}$. Usando isso, temos

$$\left| \partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} \big(a - \sum_{j \leqslant k} a_j\big) \right| \leqslant C_{\alpha,\beta,k} + (1 + \|\xi\|)^{m_{k+1} - |\beta|}$$

Sendo assim $a - \sum_{j \leqslant k} a_j \in S^{m_{K+1}}$, ou seja $a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j$. □

Definição 2.12. *Seja $a \in S^m$, a é dito ser um símbolo **clássico** se $a \sim a_j$ onde $a_j \in S^{m-j}$ e a_j é homogêneo de ordem $m - j$, isto é, $a_j(x,\lambda\xi) = \lambda^{m-j} a(x,\xi)$.*

2.3 OPERADORES PSEUDO-DIFERENCIAIS

Seja $a \in S^m$ e $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, considere o operador dado por

$$\begin{aligned} Op(a) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ u &\mapsto Op(a)u(x), \end{aligned}$$

onde

$$Op(a)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \qquad 2.3.1$$

$Op(a)$ é chamado de **operador pseudo-diferencial de ordem m com símbolo a**. Denotamos por Op(S^m) o conjunto dos operadores pseudo-diferenciais de ordem m. O próximo passo é mostrar que $Op(a)$ é bem definido.

Proposição 2.13. *Sejam $a \in S^m$ e $u \in \mathcal{S}(\mathcal{R}^n)$ então $Op(a)u(x)$ dado por (2.3.1) pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ainda mais, o mapa bi-linear $(a,u) \mapsto Op(a)u$ é contínuo e satisfaz as relações de comutação*

$$[Op(a),D_j] = iOp(\partial_{x_j}a) \qquad 2.3.2$$

$$[Op(a),x_j] = -iOp(\partial_{\xi_j}a) \qquad 2.3.3$$

Por fim, Op define um operador linear injetivo de S^m no conjunto dos operadores de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Observe que $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ uma vez que $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, com isso

$$\begin{aligned}
|Op(a)u(x)| &= (2\pi)^{-n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \right| \\
&\leqslant (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi) \right| d\xi \\
&\leqslant (2\pi)^{-n} \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \left\{ (1+\|\xi\|)^{-m} |a(x,\xi)| \right\} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{ix\cdot\xi}(1+\|\xi\|)^m \hat{u}(\xi)|d\xi|
\end{aligned}$$

Que é limitado, logo o mapa bilinear $(a,u) \mapsto Op(a)u$ é um operador limitado, ou seja, contínuo. Para provar (2.3.2) basta usar a regra de Leibniz

$$\begin{aligned}
[Op(a),D_j]u(x) &= Op(a)(D_j u)(x) - D_j\big(Op(a)u(x)\big) \\
&= (2\pi)^{-n} \left(\int e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)\widehat{D_j u}(\xi)d\xi - D_j \int e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \right) \\
&= (2\pi)^{-n} \left(\int e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)\xi_j\hat{u}(\xi)d\xi - \int e^{ix\cdot\xi}\hat{u}(\xi)\Big(\xi_j a(x,\xi) - i\partial_{x_j}a(x,\xi)\Big)d\xi \right) \\
&= i(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\partial_{x_j}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \\
&= iOp(\partial_{x_j}a)u(x).
\end{aligned}$$

Agora para (2.3.3) basta integrar por partes

$$\begin{aligned}
[Op(a),x_j]u(x) &= Op(a)(x_j u)(x) - x_j\big(Op(a)u(x)\big)\\
&= (2\pi)^{-n}\left(\int e^{ix\cdot\xi}a(x,\xi)\widehat{x_j u}(\xi)d\xi - \int e^{ix\cdot\xi}a(x,\xi)x_j\hat{u}(\xi)d\xi\right)\\
&= (2\pi)^{-n}\left(\int e^{ix\cdot\xi}a(x,\xi)\Big(-D_{\xi_j}\hat{u}(\xi)\Big)d\xi - \int e^{ix\cdot\xi}a(x,\xi)x_j\hat{u}(\xi)d\xi\right)\\
&= (2\pi)^{-n}\left(\int D_{\xi_j}\big(e^{ix\cdot\xi}a(x,\xi)\big)\hat{u}(\xi)d\xi - \int e^{ix\cdot\xi}a(x,\xi)x_j\hat{u}(\xi)d\xi\right)\\
&= -i(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\partial_{\xi_j}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi\\
&= -iOp(\partial_{\xi_j}a)u(x)
\end{aligned}$$

Aplicando (2.3.2) e (2.3.3) várias vezes termos

$$D_x^\beta Op(a)u(x) = \sum_{\beta'+\beta''=\beta} C_{\beta',\beta''}Op(\partial_x^{\beta'}a)D_x^{\beta''}u. \tag{2.3.4}$$

Ainda mais

$$x^\alpha D_x^\beta Op(a)u(x) = \sum_{\beta'+\beta''=\beta}\sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha} C_{\beta',\beta''}^{\alpha'\alpha''}Op(\partial_\xi^{\alpha'}\partial_x^{\beta'}a)(x^{\alpha''}D^{\beta''}u). \tag{2.3.5}$$

Logo $|x^\alpha D^\beta Op(a)u(x)| < \infty$, ou seja $Op(a)u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Falta provar que Op é injetivo. Para isso devemos provar que para $a \in S^m$ de forma que $Op(a)u = 0$ para todo $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a função $a \in S^m$ deve ser a função nula.

Defina a seguinte função para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixado.

$$b_x(\xi) = \frac{a(x,\xi)}{(1+\|\xi\|)^{\frac{m}{2}+\frac{n}{4}+\frac{1}{2}}}$$

Observe que $b_x \in L^2(\mathbb{R}^n)$, uma vez que $a \in S^m$.Observe ainda que para toda função $v(\xi) \in L^2$ da forma

$$v(\xi) = e^{-ix\cdot\xi}(1+\|\xi\|)^{\frac{m}{2}+\frac{n}{4}+\frac{1}{2}}\overline{\hat{u}(\xi)}$$

satisfaz a relação $\big(b(\xi),v(\xi)\big) = 0$, onde $(\cdot,\cdot)$ é o produto sesquilinear de L^2, mas $v(\xi)$ '*varre*' todo $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pois

$$f \in \mathcal{S} \mapsto e^{-ix\cdot\xi}(1+\|\xi\|)^{\frac{m}{2}+\frac{n}{4}+\frac{1}{2}}\overline{\hat{f}} \in \mathcal{S}$$

é uma bijeção de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$. Logo $b(\xi) = 0$, pois $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Portanto $a(x,\xi) = 0$, o que prova a injetividade.

□

Observação 2.14. *Quando não tiver perigo de confusão vamos denotar $Op(a)$ por $a(x,D)$.*

Para operadores integrais, o kernel do operador concentra toda a informação, observe

$$\begin{aligned} Op(a)u(x) =& (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \\ =& (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}a(x,\xi)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi}u(y)dyd\xi \\ =& \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\left(\underbrace{(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y-x)\cdot\xi}a(x,\xi)d\xi}_{K(x,y)}\right)dy \end{aligned}$$

.

Chamamos

$$K(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y-x)\cdot\xi}a(x,\xi)d\xi \qquad 2.3.6$$

de **Kernel** do operador $Op(a)$. Observe ainda que se $a \in S^m$ pela **proposição 2.6** temos $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$, então podemos ver (2.3.6) como uma transformada de Fourier com respeito a variável ξ. De fato

$$K(x,y) = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}_\xi a(x,y-x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y-x)\cdot\xi}a(x,\xi)d\xi$$

A vantagem disso é que assim podemos obter o simbolo do operador em função do kernel usando a transformada inversa de Fourier ou seja

$$a(x,\xi) = \mathcal{F}_y[K\big(x,-(y-x)\big)] = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-y\cdot\xi}K(x,x-y)dy. \qquad 2.3.7$$

Essa formula vai ser de fundamental importância. Nosso próximo passo é tentar estender ação dos operadores pseudo-diferenciais para espaços de função mais gerais. Seria bastante desejável que conseguíssemos agir com $Op(a)$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, pois tal espaço contem a maiorias dos espaços de função que estamos acostumados. Por exemplo, o espaço das funções quadro integrável $L^2(\mathbb{R}^n)$ pode ser identificado com um sub espaço de $\mathcal{S}'$. Uma alternativa para fazer isso seria construindo o **adjunto** de $A = Op(a)$. O Adjunto de um operador é definido por.

Definição 2.15. *Seja $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ um operador qualquer, então A^* é chamado de adjunto se $A^* : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ satisfaz*

$$Au,v) = (u,A^*v), \quad \forall u \in \mathcal{S}, \forall v \in \mathcal{S}.$$

onde $(\cdot,\cdot)$ é o produto sesquilinear dado por $(u,v) = \langle u,\overline{v}\rangle = \int u\overline{v}$.

Se existir tal operador A^* podemos estender A continuamente para $\mathcal{S}'$. De fato, basta definir $A : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ como o único operador satisfazendo

$$[Au](v) = u(A^*v), \forall u \in \mathcal{S}', \forall v \in \mathcal{S}.$$

Onde, em geral, a ação de $u \in \mathcal{S}'$ em um elemento $v \in \mathcal{S}$ é dada pelo produto usual, i.e.,

$$(Au,v) = (u,A^*v) \Rightarrow \int Au\overline{v} = \int u\overline{A^*v} \quad \forall u \in \mathcal{S}', \forall v \in \mathcal{S}.$$

Esse tipo de manipulação é corriqueira quando desejamos estender propriedades para o espaço dual. O que garante a que de fato a extensão seja única é a densidade de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

É mentira que todo operador de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$ admite um adjunto, entretanto mostraremos que para $a \in S^m$, podemos construir o operador adjunto do operador pseudo-diferencial $A = Op(a) = a(x,D)$. A demonstração de tal propriedade não é trivial e demanda um certo esforço e constitui um dos principais resultado do chamado cálculo simbólico para operadores pseudo-diferenciais. Suponha que exista A^* exite então conseguimos calcular o kernel de A^* em função do kernel de A. De fato o Kernel satisfaz

$$Au(x) = \int u(y)K(x,y)dy$$

$$\therefore$$

$$\langle Au, v\rangle = \int Au(x)v(x)dx = \int\int K(x,y)u(y)v(x)dydx = \langle K(x,y),u(y)v(x)\rangle$$

com isso temos

$$\langle Au, v\rangle = (Au, \overline{v} = (u, A^*\overline{v}) = \langle u, \overline{A^*\overline{v}}\rangle = \overline{\langle\ \overline{u},A^*\overline{v}\rangle} = \langle\ A^*\overline{v},\overline{u}\rangle,$$

mas

$$\langle A^*\overline{v},\overline{u}\rangle = \langle K^*(x,y),\overline{v}(y)\overline{u}(x)\rangle,$$

logo

$$\langle K^*(x,y),\overline{v}(y)\overline{u}(x)\rangle = \langle K(x,y),u(y)v(x)\rangle,$$

e disso conseguimos concluir que

$$K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}.^2 \qquad 2.3.8$$

Essa construção vale para um operador integral qualquer. Em particular no nosso caso de um operador pseudo-diferencial, temos

$$K^*(x,y) = \overline{K(y,x)} = \frac{1}{(2\pi)^n}\overline{\int e^{(y-x)\cdot\xi}a(y,\xi)d\xi} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{(x-y)\cdot\xi}\overline{a(y,\xi)}d\xi. \qquad 2.3.9$$

Mas (2.3.7) permite obter o simbolo em função de kernel, logo

$$a^*(x,\xi) = \int e^{-iy\cdot\xi}K^*(x,x-y)dy = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\int e^{-iy\cdot\eta}\overline{a}(x-y,\xi-\eta)dyd\eta. \qquad 2.3.10$$

A dificuldade em provar que $Op(a) = a(x,D) = A$ admite de fato em adjunto reside em provar que (2.3.10) é de fato em símbolo de ordem m, pois pela construção feita acima temos que $A^* = Op(a^*) = a^*(x,D)$. Esse é o conteúdo do primeiro resultado do cálculo simbólico.

[2] repare que x e y estão trocados.

Teorema 2.16. *Seja $a \in S^m$, então a^* dado por (2.3.10) pertence também à S^m e é dado assintoticamente por*

$$a^*(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{a}(x,\xi). \qquad 2.3.11$$

Em particular se $A = Op(a) = a(x,D)$ é um operador pseudo-diferencial de ordem m, então $A^* = Op(a^*) = a^*(x,D)$ é o operador adjunto de A e também é um operador pseudo diferencial de ordem m e, consequentemente, A pode ser estendido continuamente para um operador de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ para $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Falta justamente provarmos que $a^* \in S^m$, mas para isso devemos dar sentido a formular (2.3.10) e isso depende de algumas estimativas delicadas, pois a princípio para $a \in S^m$ parece que a integral pode divergir, então vamos precisar de estimativas mais delicadas. Também devemos calcular a expansão assintótica. Exitem varias demonstração diferente pode ser encontradas em (HÖRMANDER, 2007), **Theorem 18.1.8**; ,(GRIGIS; SJÖSTRAND, 1994) **Theorem 3.4** e (ALINHAC *et al.*, 2007), **Theorem 3.2.3 e Theorem 3.2.4**. Uma forma particular de demonstrar isso é estudar um pouco mais de perto as chamadas integrais oscilatórias. Antes disso vamos estudar como compor dois operadores pseudo-diferenciais, pois a demonstração se baseia exatamente nos mesmos princípios.

Sejam $A_1 = Op(a_1)$ e $A_2 = Op(a_2)$ dois operadores pseudo-diferenciais, dado $u \in S$ temos

$$(A_1A_2u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}a_1(x,\xi)\widehat{A_2u}(\xi)d\xi$$

e

$$\widehat{A_2u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-iy(\xi\eta)}a_2(y,\eta)\widehat{u}(\eta)dyd\eta,$$

portanto

$$(A_1A_2u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^2n}\int e^{ix\cdot\eta}e^{-i(x-y)\cdot(\xi-\eta)}a_1(x,\eta)a_2(y,\xi)\hat{(u)}(\xi)d\xi d\eta dy$$

Observe que $A_1A_2 = B = Op(b)$ onde

$$\begin{aligned} b(x,\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-i(x-y)\cdot(\xi-\eta)}a_1(x,\eta)a_2(y,\xi)d\eta dy \\ b(x,\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-iy\cdot\eta}a_1(x,\xi-\eta)a_(x-y,\xi)d\eta dy. \end{aligned} \qquad 2.3.12$$

Então para provarmos que a composição de dois operadores pseudo-diferenciais também é um operador pseudo-diferencial devemos mostrar que $b(x,\xi)$ dado por (2.3.12) é de fato um símbolo. A prova segue o mesmo espirito da prova do teorema para o operador adjunto.Como isso o segundo teorema fundamental do cálculo simbólico.

Teorema 2.17. *Sejam $a_1 \in S^{m_1}$ e $a_2 \in S^{m_2}$. Então $Op(a_1)Op(a_2) = Op(b)$, onde $b = a_1\#a_2 \in S^{m_1+m_2}$ é dado por (2.3.12) e ainda mais*

$$b(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a_1 D_x^\alpha a_2. \qquad 2.3.13$$

Esses resultados são ferramentas muito poderosas no estudo dos operadores pseudo-diferenciais, de fato eles são a ferramentas que permitem manipular operadores pseudo-diferenciais de forma algébrica.

A demonstração de tais resultados é bastante técnica e envolve fazer certas estimativas, para garantir que as integrais (2.3.10) e (2.3.12) então bem definidas e satisfazem as propriedades dos símbolos. Como julgamos que as técnicas presentes na demonstração de tais resultados não são crucias para um bom entediamento do que se segue optamos por deixar em um apêndice ao final do trabalho.

2.4 AÇÃO NOS ESPAÇOS DE SOBOLEV

Já vimos ser possível estender a ação de operadores pseudo-diferenciais para o espaço das distribuições temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, tal espaço engloba boa parte dos espaços de funções que estamos acostumadas a trabalhar, o mais familiar dele é $L^2(\mathbb{R}^n)$, o espaço das funções de quadrado integrável. Devido a sua rica estrutura, em geral é conveniente estudar as propriedades dos operadores em L^2, uma agradável propriedade sobre os operadores pseudo-diferencias é que em certas circunstâncias eles são um endomorfismo de L^2. Isso é o conteúdo do próximo teorema.

Teorema 2.18. *Seja $a \in S^0$ então $A = a(x,D) = Op(a)$ é um endomorfismo de $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Para provar o teorema vamos precisar do seguinte lema.

Lema 2.19. *(Teste de Schur) Seja $k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ satisfazendo.*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int |k(x,y)|dx \leqslant C, \quad , \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int |k(x,y)|dy \leqslant C \tag{2.4.1}$$

Então o operador integral T com kernel $k(x,y)$ tem norma limitada em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Seja $u \in L^2$, temos

$$(Tu)(x) = \int k(x,y)u(y)dy,$$

com isso

$$\begin{aligned} |(Tu)(x)|^2 &= \left| \int k(x,y)u(y)dy \right|^2 \\ &= \left| \int k^{1/2}(x,y) \cdot k^{1/2}(x,y)u(y)dy \right|^2 \\ &\leqslant \int |k(x,y)|dy \cdot \int |k(x,y)||u(y)|^2dy \\ &\leqslant C \int |k(x,y)||u(y)|^2dy. \end{aligned}$$

Denotando por $|\cdot|_0$ a norma L^2, temos

$$\begin{aligned}
|Tu|_0^2 &= \int |(Tu)(x)|^2 dx \\
&\leqslant C \int\int |k(x,y)||u(y)|^2 dydx \\
&\leqslant C^2 \int |u(y)|^2 dy \\
&\leqslant C^2 |u|_0^2 \ < \infty.
\end{aligned}$$

□

Agora podemos provar o **teorema 2.18**.

Demonstração. A ideia para a demonstração é a seguinte.

i Se $a(x,\xi)$ é de ordem S^{-k} com $k \leqslant -(n+1)$ então conseguimos provar que A é limitado na norma de L^2.

ii Reduzir a caso de ordem S^0 ao caso anterior.

Para provar i) observe que de (2.3.6) sabemos

$$k(x,y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi) d\xi,$$

$$\therefore$$

$$|k(x,y)| \leqslant (2\pi)^{-n} C' \int \frac{1}{(1+\|\xi\|)^k} d\xi \leqslant C$$

Para conseguirmos usar o teste de Schur, temos que provar $\int |k(x,y)|dx$ e $\int |k(x,y)|dy$ são limitadas. Vamos calcular o kernel do seguinte operador: $A_i = D_{\xi_i} a(x,D)$. Observe que $(A_i u)(x) = \int e^{ix\cdot\xi} D_{\xi_i} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi$, integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}
(A_i u)(x) &= -\int a(x,\xi) D_{\xi_i}\big(e^{ix\cdot\xi}\hat{u}(\xi)\big) d\xi \\
&= -\int a(x,\xi)\big(x_i e^{-ix\cdot\xi}\hat{u}(\xi) + e^{ix\cdot\xi} y_i \hat{u}(\xi)\big) d\xi \\
&= \int e^{ix\cdot\xi}(x_i - y_i) a(x,\xi)\hat{u}(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos que o kernel de A_i é dado por $(x_i - y_i)k(x,y)$. De forma análoga, se considerarmos $A_\alpha = D^\alpha a(x,D)$ e repetindo o processo acima, vamos obter que o kernel de A_α é dado por $(x-y)^\alpha k(x,y)$. Mas observe que A_α é de ordem menor ou igual a $-k-|\alpha|$, tomando $|\alpha| = n+1$, temos

$$\begin{aligned}
(1 + |x-y|^{n+1})|k(x,y)| &\leqslant |k(x,y)| + |x-y|^{n+1}|k(x,y)| \\
&\leqslant C + C'|(x-y)^\alpha k(x,y)| \\
&\leqslant C + c\int |D^\alpha a(x,\xi)| d\xi \\
&\leqslant \tilde{C}.
\end{aligned}$$

Ou seja $|k(x,y)| \leqslant \dfrac{\tilde{C}}{1+|x-y|^{n+1}}$, como isso temos que $\int |k(x,y)|dx$ e $\int |k(x,y)|dy$ são limitadas. Pelo teste de Schur, temos que $A = a(x,D)$ que tem kernel $k(x,y)$, tem norma L^2 limitada no caso em que a ordem de $a(x,D)$ é menor ou igual a $-(n+1)$.

O próximo passo é reduzir o caso onde $a(x,\xi)$ é de ordem 0 para o caso coberto acima.Para isso usaremos os teoremas do cálculo simbólico. Dado $a \in S^0$ queremos mostrar que

$$|Au|_0^2 \leqslant M|u|_0^2, \quad \text{para algum } M > 0.$$

Observe que $|Au|_0^2 = (Au,Au) = (A^*Au,u)$. Defina um novo operador $B =: M \cdot I - A^*A$, onde B também é um operador pseudo-diferencial de ordem 0, e pelos **Teorema 2.16 e Teorema 2.17** seu símbolo é dado assintoticamente por

$$b \sim M - \Big[a(x,\xi)\cdot \overline{a}(x,\xi) + \underbrace{\sum_{|\alpha|\geqslant 1} \frac{1}{\alpha!}\partial_{xi}^{\alpha} a^* D_x^{\alpha} a}_{\in S^{-1}}\Big].$$

Escolha $M > 0$ satisfazendo

$$M \geqslant 2\sup|a(x,\xi)|^2. \qquad 2.4.2$$

Seja $c(x,\xi) = (M - |a(x,\xi)|^2)^{1/2}$. Pela **Proposição 2.10**, temos que $c \in S^0$. Seja $C = c(x,D)$ operador cujo símbolo é c. Novamente defina outro operador $R := C^*C - B$. O Símbolo r desse operado será dado assintoticamente pela expressão

$$\begin{aligned}
r \sim & c\cdot\overline{c} + \underbrace{\sum_{|\alpha|\geqslant 1}\frac{1}{\alpha!}\partial_{xi}^{\alpha}c^* D_x^{\alpha} a}_{\in S^{-1}} - \Big[M - a\cdot\overline{a} - \underbrace{\sum_{|\alpha|\leqslant 1}\frac{1}{\alpha!}\partial_{xi}^{\alpha}a^* D_x^{\alpha} a}_{\in S^{-1}}\Big]\\
r \sim & (M - |a(x,\xi)|^2)^{1/2}(M - |a(x,\xi)|^2)^{1/2} - M + |a(x,\xi)|^2 + \mathsf{op}(S^{-1})\\
r \sim & M - |a(x,\xi)|^2 - M + |a(x,\xi)|^2 + \mathsf{op}(S^{-1})\\
r \sim & \mathsf{op}(S^{-1})
\end{aligned}$$

Onde $op(S^{-1})$ denota um símbolo genérico de ordem -1. Logo $R \in \mathsf{Op}(S^{-1})$, ou seja R é um operador de ordem -1. Ainda mais, da desigualdade (2.4.2) temos, $|c(x,\xi)| = |(M - |a(x,\xi)|^2)^{1/2}| \geqslant |a(x,\xi)|$, como isso obtemos que $|Cu|_0^2 \geqslant |Au|_0^2$. Logo

$$|Au|_0^2 \leqslant |Cu|_0^2 = (C^*Cu, u) = (Mu - A^*Au + Ru,u) = M|u|_0^2 - |Au|_0^2 + (Ru,u).$$

Ou seja

$$|Au|_0^2 \leqslant \frac{1}{2}\big(M|u|_0^2 + (Ru,u)\big).$$

Usando Cauchy-Schwarz

$$|Au|_0^2 \leqslant \frac{1}{2}\Big(M|u|_0^2 + |(Ru,u)|\Big) \leqslant \frac{1}{2}\Big(M|u|_0^2 + |Ru|_0|u|_0\Big).$$

O problema estaria resolvido se conseguirmos mostra que $|Ru|_0 \leqslant C|u|_0$, mas agora R é de ordem -1. Fazendo com R exatamente o que fizemos com o operador A, conseguiremos mostra que

$$|Ru|_0^2 \leqslant \frac{1}{2}(\tilde{M}|u|_0^2 + |\tilde{R}u|_0|u|_0).$$

Mas agora $\tilde{R}$ é um operador de ordem pelo menos menor ou igual que -2. Repetindo o processo um número conveniente de vezes, conseguimos reduzir para o caso de um operador de ordem menor ou igual a $-(n+1)$, que está coberto pela primeira parte da prova.

□

Outros espaços que possuem um papel importante no estudo de certas equações a derivadas parciais são os chamados **Espaços de Sobolev**. Existem algumas formas equivalente de apresentar tais espaços, a que será conveniente no nosso contexto é:

Definição 2.20. *Para cada $s \in \mathbb{R}$ considere*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \text{ tal que } \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|\xi\|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty\}. \tag{2.4.3}$$

*$H^s(\mathbb{R}^n)$ é chamado de **espaço de Sobolev** de ordem s. Onde não tiver perigo de confusão denotaremos $H^s(\mathbb{R}^n)$ simplesmente por H^s.*

$$|u|_s^2 = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|\xi\|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi. \tag{2.4.4}$$

denota a norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Algumas observações úteis são

- i) $\langle D\rangle^s = (1+|D|^2)^{s/2}$ é uma isometria de H^s em L^2. Onde $|D|^2 = D_1^2 + \cdots + D_n^2$
- ii) Outra forma de apresentar os espaço de Sobolev é: $H^s = \{u \in L^2, \forall \alpha, |\alpha| \leqslant s, \partial^a u \in L^2\}$
- iii) $H^0 = L^2$

O único item que não é trivial é o ii), não faremos aqui, mas podemos encontra uma demostração após a **definição 7.1.9** de (HÖRMANDER, 2015). Temos o seguinte corolário do **Teorema2.18**.

Corolário 2.21. *Seja $a \in S^m$, então $Op(a)$ mapeia $H^s(\mathbb{R}^n)$ em $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Dado $u \in H^s$, então existe $v \in H^0 = L^2$ tal que $u = \langle D\rangle^{-s} v = (1 + |D|^2)^{-s/2} v$, logo

$$\langle D\rangle^{s-m} \circ A(u) = \langle D\rangle^{s-m} \circ A \circ \langle D\rangle^{-s}(v) \in H^0,$$

dado que $\langle D\rangle^{s-m} \circ A \circ \langle D\rangle^{-s}$ é de ordem 0.

Sendo assim $\langle D\rangle^{s-m} \circ Au \in H^0 \Rightarrow Au \in \langle D\rangle^{s-m}$. □

Agora temos todas as ferramentes para construir o inverso para operadores elípticos. Temos o seguinte importante teorema.

Teorema 2.22. *Seja $a \in S^m$. As condições:*

i) $\exists b \in S^{-m}; a(x,D)b(x,D) - id \in Op(S^{-\infty})$,

ii) $\exists b \in S^{-m}; b(x,D)a(x,D) - id \in Op(S^{-\infty})$,

São equivalentes e implicam,

iii) $|a(x,\xi)| \geqslant c\|\xi\|^m$ *para algum* $c > 0$ *e* $\|\xi\| \geqslant C$*, isto é,* $a(x,D)$ *é elíptico.*

Reciprocamente se iii) é satisfeito, então existe b satisfazendo i) e ii) e ainda mais ele é único módulo $S^{-\infty}$.

Demonstração. Vamos mostra que i) e ii) são equivalentes. Sejam b' e b'' símbolos em S^{-m}, de forma que $B' = b'(x,D)$ e $B'' = b''(x,D)$ satisfazem

$$AB' - id \in \mathrm{Op}(S^{-\infty}) \quad \text{e} \quad B''A - id \in \mathrm{Op}(S^{-\infty}).$$

Note que, modulo $S^{-\infty}$

$$B'' - B' = B''(id - AB') = (B''A - id)B' \in \mathrm{Op}(S^{-\infty}),$$

e ainda mais

$$A(B'' - B') - id + id = AB'' - id - (AB' - id) \in \mathrm{Op}(S^{-\infty}) \Rightarrow AB'' - id \in \mathrm{Op}(S^{-\infty}).$$

Analogamente, $B'A - id \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$, ou seja, i) e ii) são equivalentes e b é único modulo $S^{-\infty}$.

Para mostra que i) ou ii) implicam em iii), observe que $ab - id \in S^{-1}$, logo

$$|a(x,\xi)b(x,\xi) - 1| \leqslant \frac{C}{(1 - \|\xi\|)} \leqslant \frac{1}{2}, \quad \text{se } C \leqslant \|\xi\|, \text{ ou seja, } \|\xi\| \text{ é grande.}$$

Observe que isso nos dá ainda que $\frac{1}{2} \leqslant |a(x,\xi)b(x,\xi)|$ se $\|\xi\| \geqslant C$ para algum C. Por fim

$$\frac{1}{2} \leqslant |a(x,\xi)b(x,\xi)| \leqslant |a(x,\xi)|\tilde{K}\|\xi\|^{-m} \Rightarrow |a(x,\xi)| \geqslant c\|\xi\|^m,$$

ou seja $a(x,\xi)$ é elíptico.

Reciprocamente, suponha $a(x,\xi)$ elíptico. Então para $\|\xi\| \geqslant C$ temos que

$$|a(x,\xi)(1 + \|\xi\|^2)^{-m/2}| \geqslant c\|\xi\|^m(1 + \|\xi\|^2)^{-m/2} = c\Big(\frac{\|\xi\|^2}{1 + \|\xi\|^2}\Big)^{m/2} \geqslant c',$$

uma vez que $\Big(\frac{\|\xi\|^2}{1 + \|\xi\|^2}\Big)^{m/2}$ é crescente. Defina $F \in C^\infty(\mathbb{C})$ de forma que $F(z) = \frac{1}{z}$ se $|z| \geqslant c'$. Seja

$$b = (1 + \|\xi\|^2)^{-m/2}F\big(a(1 + \|\xi\|^2)^{m/2}\big).$$

Pela **proposição 2.10** temos que $b \in S^{-m}$, uma vez que $F\big(a(1 + \|\xi\|^2)^{m/2}\big) \in S^0$, e ainda $ab = 1 + \chi(\xi)$ com $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\chi(\xi) = 0$ se $\|\xi\| \geqslant C$, ou seja $\chi \in S^{-\infty}$.

Pelo **Teorema 2.17** temos que $a\#b \sim ab + r'$, onde $r' \in S^{-1}$. Logo $a\#b = 1 + \overbrace{\chi + r'}^{r}$ com $r \in S^{-1}$. Com isso, temos

$$a(x,D)b(x,D) = id + r(x,D), \quad r \in S^{-1}.$$

Para cada $k \geqslant 0$ defina $b_k(x,D) = b(x,D)r^k(x,D) \in \mathsf{Op}(S^{-m-k})$. A **Proposição 2.11** permite escolher $b' \in S^{-m}$ de modo que $b' \sim \sum_{k \geqslant 0} b_k$, ou seja para cada $k \geqslant 0$ temos $b' - \sum_{j=0}^{k} \in S^{-m-(k+1)}$. Chamando $b_k(x,D) = B_k$ e $r(x,D) = R$, encontramos

$$\begin{aligned}
AB' &= A(B' - \sum_{j=0}^{k} B_j) + A \sum_{j=0}^{k} B_j \\
&= A(B' - \sum_{j=0}^{k} B_j) + AB \sum_{j=0}^{k} R^j \\
&= \mathsf{Op}(S^{m+(-m-k-1)}) + (id - R) \sum_{j=0}^{k} R^j, \quad \text{a soma é telescópica} \\
&= \mathsf{Op}(S^{-k-1}) + id - RR^k \\
&= \mathsf{Op}(S^{-k-1}) + id - R^{K+1} = id + \mathsf{Op}(S^{-k-1}).
\end{aligned}$$

Com isso, temos que $AB' - id \in \mathsf{Op}(S^{-k})$ para todo $k \geqslant 0$, ou seja, $AB' - id \in \mathsf{Op}(S^{-\infty})$. Analogamente, conseguimos construir B'' de modo que $B''A - id \in \mathsf{Op}(S^{-\infty})$. Com isso, completamos a prova.

$\square$

3 TEORIA DE LITTLEWOOD-PALEY

Nesse capítulo, estudaremos alguns resultados que serão importantes no estudo dos problemas na natureza não linear no próximo capítulo. Em particular, obtermos certas estimativas para o controle da norma de aplicações que serão peça chave para o próximo capítulo. Além disso, a teoria aqui desenvolvida fornece uma aplicação interessante do cálculo simbólico no caso de operadores clássicos. Nas próximas paginas faremos uso sistemático da chamada **partição diádica da frequência**. Nesse capítulo seguiremos de perto a primeira seção do capítulo II de (ALINHAC *et al.*, 2007).

Antes de seguirmos, é importante estabelecer algumas convenções para a notação.

Notação. *Denotaremos uma constante genérica por* `Cnt`. *Quando* `Cnt` *aparecer mais de uma vez na mesma conta, apenas significa que é uma constante genérica. Faremos isso para deixar a notação mais concisa, uma vez que estaremos trabalhando com desigualdades que valem a menos de uma constante genérica.*

Notação. *Diferenciaremos as normas de funções nesse capítulo.*

- $|\cdot|_s$ *com* $s \in \mathbb{R}$, *para denotar a norma em* $H^s(\mathbb{R}^n)$, *ou seja, a norma de Sobolev. Lembre que* $|\cdot|_0$ *é a norma* L^2.
- $\|\cdot\|_\rho$, *com* $\rho > 0$ *e* $\rho \notin \mathbb{N}$, *para denota a norma em* $C^\rho(\mathbb{R}^n)$, *ou seja, a norma de Hölder.*
- $\|\cdot\|_0$ *para denotar a norma em* $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

3.1 DECOMPOSIÇÃO DE LITTLEWOOD-PALEY

Deixaremos claro o conceito de partição **diádica** da unidade. Considere $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função teste não negativa tal que $\psi(\xi) = 1$ para $0 \leqslant \|\xi\| \leqslant \frac{1}{2}$ e $\psi(\xi) = 0$ para $\|\xi\| \geqslant 1$. Defina também uma função φ por $\varphi(\xi) = \psi(\dfrac{\xi}{2}) - \psi(\xi)$, observe que $\operatorname{supp}\varphi = \{\xi; 1/2 \leqslant \|\xi\| \leqslant 2\}$. Veja que $\psi(\xi) + \sum_{p\geqslant 0}\varphi(2^{-p}\xi) = 1$. De fato

$$
\begin{aligned}
\psi(\xi) + \sum_{p\geqslant 0}\varphi(2^{-p}\xi) &= \psi(\xi) + \sum_{p\geqslant 0}\Big(\psi(2^{-p-1}\xi) - \psi(2^{-p}\xi)\Big) \\
&= \psi(\xi) - \psi(\xi) - \lim_{p\to\infty}\psi(2^{-p}\xi) \\
&= \psi(0) = 1
\end{aligned}
$$

Defina então $\varphi_{-1} = \psi$ e para $p \geqslant 0$ $\varphi_p(\xi) = \varphi(2^{-p}\xi)$, o nome diádica vem da partição ser constituída por duas partes ψ e φ. Observe ainda que

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{supp}\varphi_{-1} = \{\xi : 0 \leqslant \|\xi\| \leqslant 1\}, \\
&\operatorname{supp}\varphi_p = \{\xi : 2^{p-1} \leqslant \|\xi\| \leqslant 2^{p+1}\}, \quad \text{para } p \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

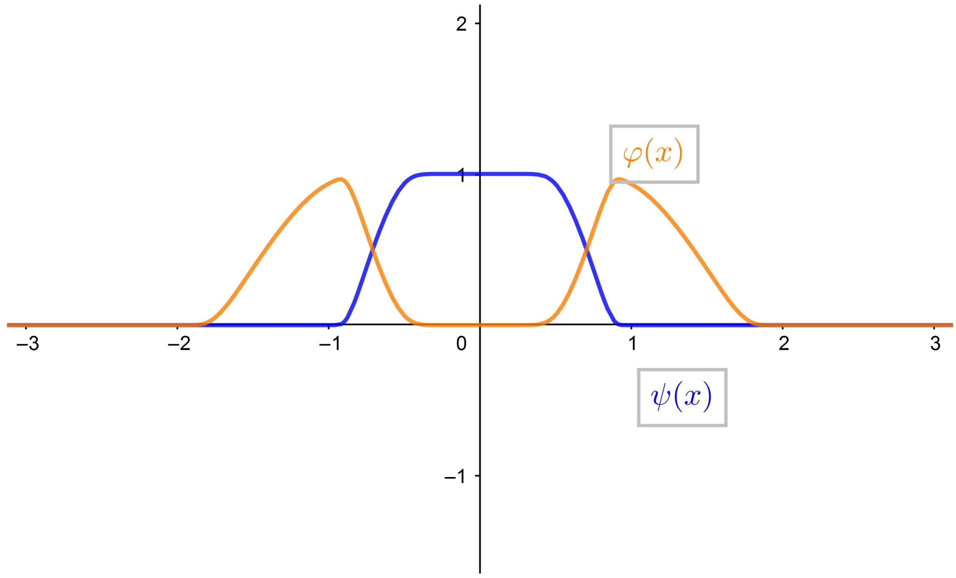

Figura 2 – Partição diádica da unidade.

Para $u \in \mathcal{S}'$, defina $u_{-1} = \varphi_{-1}(D)u = \psi(D)u$ e $u_p = \varphi_p(D)u = \varphi(2^{-p}D)u$ e $S_p u = \sum_{q=-1}^{p-1} u_q$ para $p \geqslant 0$. Onde $\varphi(D)$ denota o operador pseudo-diferencial cujo símbolo é $\varphi(\xi)$, note que esse simbolo não depende de x. Essa é chamada **decomposição de Littlewood-Paley** de u. Por fim, observe que

$$u = S_o u + \sum_{p \geqslant 0} u_p.$$

Lema 3.1. *Temos*

$$1/2 \leqslant \psi^2(\xi) + \sum_{p \geqslant 0} \varphi^2(2^{-p}\xi) \leqslant 1. \tag{3.1.1}$$

E para todo $u \in L^2$ temos

$$\sum_{p \geqslant -1} |u_p|_0^2 \leqslant |u|_0^2 \leqslant 2 \sum_{p \geqslant -1} |u_p|_0^2. \tag{3.1.2}$$

Demonstração. Para (3.1.1) basta usar a desigualdade $a^2 + b^2 \leqslant (a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, onde $a,b \geqslant 0$, com isso

$$\psi^2(\xi) + \sum_{p \geqslant 0} \varphi^2(2^{-p}\xi) \leqslant \Big(\overbrace{\psi(\xi) + \sum_{p \geqslant 0} \varphi(2^{-p}\xi)}^{=1} \Big) \leqslant 2\Big(\psi^2(\xi) + \sum_{p \geqslant 0} \varphi^2(2^{-p}\xi)\Big)^2,$$

Com isso $\dfrac{1}{2} \leqslant \psi^2(\xi) + \sum_{p \geqslant 0} \varphi^2(2^{-p}\xi) \leqslant 1$

Para provar (3.1.2) veja que

$$\hat{u_p}(\xi) = \varphi(2^{-p}\xi)\hat{u}(\xi). \tag{3.1.3}$$

De fato, temos

$$\begin{aligned} u_p(x) &= \varphi(2^{-p}D)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}\varphi(2^{-p}\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \\ &= \mathcal{F}^{-1}\big(\varphi(2^{-p}\xi)\hat{u}(\xi)\big). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados de (3.1.1) por $|\hat{u}|_0^2$ e lembrando que $(2\pi)^{-n}|\hat{u}|_0 = |u|_0$, temos

$$\begin{aligned} 1/2|\hat{u}|_0^2 &\leqslant \psi^2(\xi)|\hat{u}|_0^2 + \sum_{p\geqslant 0}\varphi^2(2^{-p}\xi)|\hat{u}|_0^2 \leqslant |\hat{u}|_0^2 \\ 1/2|\hat{u}|_0^2 &\leqslant \sum_{p\geqslant -1}|\hat{u}_p|_0^2 \leqslant |\hat{u}|_0^2. \end{aligned}$$

Como isso, vamos ter

$$\sum_{p\geqslant -1}|u_p|_0^2 \leqslant |u|_0^2 \leqslant 2\sum_{p\geqslant -1}|u_p|_0^2.$$

□

Lema 3.2. *Existe constante C, independente de p e u, tal que vale as seguintes afirmações:*

- *a) Para a norma $|\cdot|_0$*

  i) para todo multi-índice α e $p \geqslant -1$, temos

$$|\partial^\alpha u_p|_0 \leqslant C2^{p|\alpha|}|u|_0 \quad e \quad |\partial^\alpha S_p u|_0 \leqslant C2^{p|\alpha|}|u|_0. \tag{3.1.4}$$

  ii) Para todo s real e $p > 0$

$$\frac{1}{C}2^{ps}|u_p|_0 \leqslant |u_p|_s \leqslant C2^{ps}|u_p|_0. \tag{3.1.5}$$

- *b) Para a norma $\|\cdot\|_0$ vale*

  iii) para todo multi-índice α e $p \geqslant -1$, temos

$$\|\partial^\alpha u_p\|_0 \leqslant C2^{p|\alpha|}\|u\|_0 \quad e \quad \|\partial^\alpha S_p u\|_0 \leqslant C2^{p|\alpha|}\|u\|_0. \tag{3.1.6}$$

  iv) Para $k \in \mathbb{N}$ e $p > 0$

$$\frac{1}{C}2^{pk}\|u_p\|_0 \leqslant \sum_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha u_p\|_0 \leqslant C2^{pk}\|u_p\|_0. \tag{3.1.7}$$

Demonstração. a) Veja que

$$|\partial^\alpha u_p|_s^2 = (2\pi)^{-n}\int(1+\|\xi\|^2)^s|\widehat{\partial^\alpha u_p}|^2 d\xi = (2\pi)^{-n}\int(1+\|\xi\|^2)^s\|\xi\|^{2|\alpha|}|\varphi(2^p\xi)\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Visto que $\operatorname{supp}\varphi_p$ é compacto logo limitado, então para todo $\xi \in \operatorname{supp}\varphi_p$ podemos escolher uma constante C tal que

$$\frac{1}{C}2^{2(ps+p|\alpha|)} \leqslant (1+\|\xi\|^2)^s\|\xi\|^{2|\alpha|} \leqslant C2^{2(ps+p|\alpha|)}.$$

Isso é suficiente para concluir (3.1.4) e (3.1.5).

b)Considere a transformada inversa de Fourier, denotada por $\mathcal{F}^{-1}(\Phi) = \check{\Phi}$. Dada $\Phi \in C_0^\infty$ temos:

$$\Phi(D)u = \check{\Phi} * u \qquad 3.1.8$$

$$\begin{aligned}\Phi(D)u(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\Phi(\xi)\hat{u}(\xi)d\xi &= \int u(y)dy\int (2\pi)^{-n}e^{i(x-y)\cdot\xi}\Phi(\xi)d\xi \\ &= \int u(y)\check{\Phi}(x-y)dy = (\check{\Phi} * u)(x).\end{aligned}$$

Sejam Φ_1 e $\lambda \in \mathbb{R}$ fixados de modo que $\Phi(\xi) = \Phi_1(\lambda\xi)$, observe que $\check{\Phi}(x) = \lambda^{-n}\widecheck{\Phi_1}(x)$. Temos

$$\int |\check{\Phi}(x)|dx = \int |\lambda^{-n}\check{\Phi}_1(x/\lambda)|dx = \int |\check{\Phi}_1(y)|dy. \qquad 3.1.9$$

Ou seja (3.1.9) independe de λ. Observe ainda

$$\|\check{\Phi} * u\|_0 = \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left|\int \check{\Phi}(x)u(x-y)dx\right| \leqslant C\|u\|_0,$$

onde C independe de λ.

Dado α multi-índice qualquer. Temos

$$\begin{aligned}\partial^\alpha(\Phi(D)u) = \partial^\alpha(\check{\Phi} * u) &= \partial^\alpha(\lambda^{-n}\check{\Phi}_1(\frac{x}{\lambda}) * u) \\ &= \big((1/\lambda)^{|\alpha|}\lambda^{-n}\partial^\alpha\check{\Phi}_1|_{x/\lambda}\big) * u.\end{aligned}$$

Logo

$$\|\partial^\alpha(\Phi(D)u)\|_0 = \|\big((1/\lambda)^{|\alpha|}\lambda^{-n}\partial^\alpha\check{\Phi}_1|_{x/\lambda}\big) * u\|_0 \leqslant |\lambda|^{-|\alpha|}C||u||_0, \qquad 3.1.10$$

onde C independe de λ. Considere o caso onde $\Phi(\xi) = \varphi(2^{-p}\xi)$, então $u_p = \Phi(D)u$ logo a desigualdade (3.1.10) fornece que

$$||\partial^\alpha(u_p)||_0 \leqslant C(2^{-p})^{-|\alpha|}||u||_0 = C2^{p|\alpha|}\|u\|_0$$

$$||\partial^\alpha(Spu)||_0 = \sum_{q=-1}^{p-1}||\partial^\alpha(u_q)||_0 \leqslant C(2^{p|\alpha|}||u||_0$$

Onde C não depende de p, o que prova (3.1.6).

Para o item (iv), vamos calcular

$$\widehat{\partial^\alpha u_p} = (i\xi)^\alpha\hat{u}_p = 2^{p|\alpha|}(2^{-p}i\xi)^\alpha\hat{u}_p.$$

Agora considera a função Φ sendo $\Phi(\xi) = \xi^\alpha\chi(\xi)$, onde χ é função teste tal que $\chi = 1$ em $\operatorname{supp}\varphi$, logo

$$\partial^\alpha u_p = 2^{p|\alpha|}\mathcal{F}^{-1}\big(\Phi(2^{-p}\xi)\hat{u}_p(\xi)\big) = 2^{p|\alpha|}\check{\Phi}(2^{-p}\xi) * u_p.$$

Portanto
$$\|\partial^\alpha u_p\|_0 \leqslant \texttt{Cnt} \cdot 2^{p|\alpha|}\|u_p\|_0.$$
Com isso exite constante C de modo que
$$\sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u_p\|_0 \leqslant C2^{pk}\|u_p\|_0$$
O que prova um lado de (3.1.7). Para o outro lado considere a seguinte função $\chi_\alpha(\xi) = \dfrac{\xi^\alpha \chi(\xi)}{\sum_{|\beta|=k}(\xi^\beta)^2} \in C_0^\infty$. Como $\varphi = 0$ numa vizinhança de zero, $\chi = 0$ numa vizinhança de zero também, ou seja, não temos nenhuma singularidade na definição de χ_α. Uma vez que $\varphi(\xi) = \Big(\sum_{|\alpha|=k} \xi^\alpha \chi_\alpha(\xi)\Big)\varphi(\xi)$. Vamos ter
$$\begin{aligned}
\hat{u}_p(\xi) &= \varphi(2^{-p}\xi)\hat{u}(\xi) \\
&= \sum_{|\alpha|=k} \big((2^{-p}\xi)^\alpha \chi_\alpha(2^{-p}\xi)\varphi(2^{-p}\xi)\hat{u}(\xi)\big) \\
&= 2^{-pk} \sum_{|\alpha|=k} \big(\chi_\alpha(2^{-p}\xi)\xi^\alpha \hat{u}_p(\xi)\big) \\
&= 2^{-pk} \sum_{|\alpha|=k} \big(\chi_\alpha(2^{-p}\xi)\widehat{D^\alpha u_p}(\xi)\big) \\
&\therefore \\
u_p &= 2^{-pk} \sum_{|\alpha|=k} \widecheck{\chi_\alpha} * D^\alpha u_p.
\end{aligned}$$
Com isso obtemos o outro lado da desigualdade. De fato
$$\begin{aligned}
\|u_p\|_0 &\leqslant 2^{-pk}\texttt{Cnt} \cdot \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u_p\|_0 \\
\frac{1}{C}2^{pk}\|u_p\|_0 &\leqslant \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u_p\|_0.
\end{aligned}$$
□

Seja $\langle D\rangle^s = (1+|D|^2)^{s/2}$. Veja que $(\langle D\rangle^s u)_p = \langle D\rangle^s u_p$. De fato
$$\begin{aligned}
(\langle D\rangle^s u)_p = \varphi(2^{-p}D)\big(\langle D\rangle^s u(x)\big) &= (2\pi)^n \int e^{ix\cdot\xi}\varphi(2^{-p}\xi)(1+\|\xi\|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi)d\xi \\
&= (2\pi)^n \int e^{ix\cdot\xi}(1+\|\xi\|^2)^{s/2}\widehat{u_p}(\xi)d\xi \\
&= \langle D\rangle^s u_p.
\end{aligned}$$
Com isso, conseguimos provar a seguinte proposição.

Proposição 3.3. *i) Seja $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, então para todo $p \geqslant -1$,*
$$|u_p|_0 \leqslant \texttt{Cnt} \cdot |u|_s c_p 2^{-ps}, \qquad 3.1.11$$
onde c_p depende de u e satisfaz $\sum_{p\geqslant -1} c_p^2 \leqslant 1$.

ii) Reciprocamente,se $|u_p|_0 \leqslant Cc_p 2^{-ps}$, *onde* $\sum_{p\geqslant -1} c_p^2 \leqslant 1$ *para* $p \geqslant -1$. *Então* $u \in H^s$ *e* $|u|_s \leqslant \mathtt{Cnt} \cdot C$.

Demonstração. Observe que para $u \in H^s$, temos que $u \in L^2$ e por (3.1.5) e (3.1.2), temos

$$|u_p|_0 \leqslant C2^{-ps}|u_p|_s = \mathtt{Cnt} \cdot C2^{-ps}|(\langle D\rangle^s u)_p|_0 \leqslant \mathtt{Cnt} \cdot c_p 2^{-ps}|\langle D\rangle^s u_P|_0 = \mathtt{Cnt} \cdot c_p 2^{-ps}|u|_s.$$

Reciprocamente usando as desigualdade (3.1.2) (3.1.5), temos

$$\begin{aligned}
|u|_s^2 = |\langle D\rangle^s u|_0^2 &\leqslant 2\sum |\langle D\rangle^s u_p|_0^2 \\
&= 2\mathtt{Cnt} \cdot \sum |u_p|_s^2 \\
&\leqslant \mathtt{Cnt} \cdot \sum_{p\geqslant -1} (2^{ps}|u_p|_0)^2 \\
&\leqslant \mathtt{Cnt} \cdot C^2.
\end{aligned}$$

Logo $u \in H^s$ e ainda $|u|_s \leqslant \mathtt{Cnt} \cdot C$. □

Vamos obter uma proposição semelhante para o caso de espaços de Hölder, mas antes é conveniente definir o que são espaços de Hölder.

Definição 3.4. *Para* $\rho > 0$ *e* $\rho \notin \mathbb{N}$, *defina* C^ρ *como o conjunto das funções* $C^k(\mathbb{R}^n)$, *onde* k *é a parte inteira de* ρ, *que satisfazem a seguinte propriedade: Exite* $C > 0$ *tal que para todos* $x,y \in \mathbb{R}^n$ *e multi-índice* β *com* $|\beta| = k$ *vale*

$$|\partial^\beta u(x) - \partial^\beta u(y)| \leqslant C|x-y|^{\rho-k}.$$

Defina a norma em C^ρ, *denotada por* $\|u\|_\rho$, *como* $\|u\|_\rho = \|u\|_k + \|u\|'_\rho$, *onde* $\|u\|'_\rho = \sup \dfrac{|\partial^\beta u(x) - \partial^\beta u(y)|}{|x-y|}$ *e* $\|u\|_k$ *é a norma* C^K *ou seja a soma das derivadas de ordem menor ou igual a* K. *Esse é chamado de espaço de* ***Hölder***. *Tal espaço é um espaço de Banach, veja o* ***Theorem 1*** *do capítulo 5 de (EVANS, 2010).*

Agora podemos enunciar.

Proposição 3.5. *Seja* $\rho > 0$ *e* $\rho \notin \mathbb{N}$. *Então*

i) Seja $u \in C^\rho(\mathbb{R}^n)$, *então para todo* $p \geqslant -1$,

$$\|u_p\|_0 \leqslant \mathtt{Cnt} \cdot 2^{-p\rho}\|u\|_\rho. \qquad 3.1.12$$

.

ii) Reciprocamente,se $\|u_p\|_0 \leqslant C2^{-p\rho}$, *para* $p \geqslant -1$. *Então* $u \in C^\rho$ *e* $\|u\|_\rho \leqslant \mathtt{Cnt} \cdot C$.

Demonstração. i) Para $p = -1$ usando a (3.1.6) para $\alpha = 0$,temos $\|u_{-1}\|_0 \leqslant \mathtt{Cnt} \cdot \|u\|_0 \leqslant \mathtt{Cnt} \cdot \|u\|_\rho$. Já para $p \geqslant 0$, a definição (3.1.8) aplicada para $\Phi = \varphi(2^{-p}\xi)$, nos dá

$$\varphi(2^{-p}D)u(x) = u_p(x) = \int 2^{pn}\breve{\varphi}(2^p(x-y))u(y)dy, \qquad 3.1.13$$

onde n é a dimenção.

Dado que φ é constante e igual a zero numa vizinhança de zero, faremos o seguinte truque: para todo multi-índice β, observe que

$$\int \check{\varphi}(2^p(x-y))(x-y)^\beta \partial^\beta u(x)dy = \partial^\beta u(x)\texttt{Cnt} \cdot \partial^\beta \varphi|_0 = 0.$$

Então, podemos somar esse termo impunemente em (3.1.12), para todo $0 \leqslant |\beta| \leqslant k$. Vamos ter

$$u_p(x) = \int 2^{pn}\check{\varphi}\big(2^p(x-y)\big)\Big(u(y) - u(x) - \sum_{1\leqslant|\beta|\leqslant k} \frac{(x-y)^\beta}{\beta!}\partial^\beta u(x)\Big)dy. \qquad 3.1.14$$

Mas podemos enxergar o último termo como o resto integral na fórmula de Taylor, como isso

$$\begin{aligned} u_p(x) &= \int 2^{pn}\check{\varphi}\big(2^p(x-y)\big)\Big(\int_0^1 \big[k(1-t)^{k-1} \sum_{|\beta|=k} \frac{(x-y)^\beta}{\beta!}\partial^\beta u(x-t(y-x))\big]dt \\ &\qquad + \sum_{k=|\beta|} (x-y)^\beta \partial^\beta u(x)\Big)dy. \\ &= \int 2^{pn}\check{\varphi}2^p(x-y)\big) \int_0^1 k(1-t)^{k-1} \sum_{|\beta|=k} \frac{(x-y)^\beta}{\beta!}(\partial^\beta u(x-t(y-x)) - \partial^\beta u(x)). \end{aligned}$$

Multiplicando por $1 = \dfrac{\|x-y\|^{\rho-k}}{\|x-y\|^{\rho-k}}$, podemos limitar a integral de dentro por $\texttt{Cnt} \cdot \|u\|_\rho \|x-y\|^\rho$, Logo

$$\|u_p\|_0 \leqslant \texttt{Cnt} \cdot \int |2^{pn}\check{\varphi}(2^p(x-y)\|x-y\|^\rho \|u\|_\rho dy \leqslant \texttt{Cnt} \cdot 2^{-\rho p}\|u\|_\rho.$$

ii) Reciprocamente. Em primeiro lugar veja que é fácil majorar $\|u\|_0$. De fato

$$\|u\|_0 \leqslant \sum_{p\geqslant -1} \|u_p\|_0 \leqslant \sum_{p\geqslant -1} C2^{-p\rho} \leqslant \texttt{Cnt} \cdot C.$$

Agora devemos estimar $|\partial^\beta u(x) - \partial^\beta u(y)|$, para $|\beta| = k$. Considere

$$u = S_N u + R_N u, \quad \text{onde } S_N u = \sum_{q=-1}^{N-1} u_q \text{ e } R_N u = \sum_{q\geqslant N} u_q.$$

Logo

$$|\partial^\beta u(x) - \partial^\beta u(y)| \leqslant |\partial^\beta S_N u(x) - \partial^\beta S_N u(y)| + |\partial^\beta R_N u(x) - \partial^\beta R_N u(y)|.$$

O segundo termo, podemos estimar usando (3.1.6).

$$\begin{aligned}|\partial^\beta R_N u(x) - \partial^\beta R_N u(y)| \leqslant & 2\|\partial^\beta R_N u\|_0 \\ \leqslant & \sum_{q\geqslant N} \|\partial^\beta u_q\|_0 \\ \leqslant & \sum_{q\geqslant N} 2^{q|\beta|}\|u_q\|_0 \\ \leqslant & \sum_{q\geqslant N} 2^{q(|\beta|-\rho)} \\ \leqslant & C\texttt{Cnt}\cdot 2^{N(|\beta|-\rho)}.\end{aligned}$$

Para estimar o primeiro termo tome um multi-índice β', de forma que $|\beta'| = |\beta| + 1 = k + 1$. Usando a desigualdade do valor médio vamos ter

$$\begin{aligned}|\partial^\beta S_N u(x) - \partial^\beta S_N u(y)| &\leqslant \|x-y\|\|\partial^{\beta'} S_n u\|_0 \\ &\leqslant \|x-y\| \sum_{q=-1}^{N-1} \|\partial^{\beta'} u_q\|_0 \\ &\leqslant \|x-y\| \sum_{q=-1}^{N-1} 2^{q(k+1)}\|u_q\|_0 \\ &\leqslant \texttt{Cnt}\cdot C\|x-y\| \sum_{q=-1}^{q=N-1} 2^{q(k+1-\rho)} \\ &\leqslant \texttt{Cnt}\cdot C\|x-y\|2^{N(k+1-\rho)}.\end{aligned}$$

Tome como estamos interessados em olhar localmente, ou seja, $|x-y|$ pequeno. Tome N de modo que $2^N \leqslant \dfrac{1}{\|x-y\|}$, logo $\|x-y\|2^{N(k+1-\rho)} \leqslant 2^{N(k-\rho)}$. Com isso, $|\partial^\beta S_N u(x) - \partial^\beta S_N u(y)| \leqslant \texttt{Cnt}\cdot C2^{N(K-\rho)}$, ou seja,

$$|\partial^\beta u(x) - \partial^\beta u(y)| \leqslant \texttt{Cnt}\cdot C(2^N)^{k-\rho} \leqslant \texttt{Cnt}\cdot C\frac{1}{\|x-y\|^{k-\rho}} = \texttt{Cnt}\cdot C\|x-y\|^{\rho-k}$$

Logo $u \in C^\rho$ e $\|u\|_\rho \leqslant \texttt{Cnt}\cdot C$. □

Outra proposição que será fundamental no próximo capítulo é a seguinte

Proposição 3.6. *Seja* $u \in \mathcal{S}'$.

i) Suponha que para $\rho > 2$ *temos que* $\Delta u \in C^{\rho-2}$, *então* $u \in C^\rho$. *Onde* Δ *é o laplaciano, ou seja,* $\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \cdot\cdot_n^2$.

ii) Considere o operador Pseudo diferencial $(1-\Delta)^{-1}$, *sabemos que ele é um operador de ordem* -2. *Logo ele leva* $C^{\rho-2}$ *em* C^ρ. *E vale a estimativa*

$$\|(1-\Delta)^{-1}u\|_\rho \leqslant \texttt{Cnt}\cdot\|u\|_{\rho-2}$$

Demonstração. i) Para todo $p \geqslant -1$ observe que exite uma função χ de suporte compacto tal que

$$u_p = 2^{-2p}\chi(2^{-p}D)(\Delta u_p),$$

De fato, basta definir $\chi = \dfrac{\tilde{\chi}}{\|\xi\|^2}$, onde $\tilde{\chi}$ é um função teste que é igual a 1 no suporte de φ. Com isso observe que $\varphi(\xi) = (\|\xi\|^2\chi(\xi))\varphi(\xi)$. Logo

$$\begin{aligned} u_p(x) &= (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}\varphi(2^{-p}\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \\ &= (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}((\|2^{-p}\xi\|^2\chi(2^{-p}\xi))\widehat{u_p}(\xi)d\xi \\ &= (2\pi)^{-n}\int 2^{-2p}e^{ix\cdot\xi}\chi(2^{-p}\xi))\widehat{\Delta u_p}(\xi)d\xi \\ &= 2^{-2p}\chi(2^{-p}D)(\Delta u_p). \end{aligned}$$

Pela **Proposição 3.5** e pela hipótese que $\Delta u \in C^{\rho-2}$ temos que

$$\|u_p\|_0 \leqslant \texttt{Cnt}\cdot 2^{-2p}2^{-p(\rho-2)}\|\Delta u\|_{\rho-2} = \texttt{Cnt}\cdot 2^{-p\rho}\|\Delta u\|_{\rho-2}.$$

Novamente pela recíproca da mesma proposição temos que $u \in C^{\rho}$ e ainda mais

$$\|u\|_{\rho} \leqslant \texttt{Cnt}\cdot\|\Delta u\|_{\rho-2}. \qquad 3.1.15$$

ii) Suponha que $u \in C^{\rho-2}$. Temos que $u = (1-\Delta)(1-\Delta)^{-1}u \in C^{\rho-2}$. Logo, pelo item i) dessa proposição temos, $(1-\Delta)^{-1}u \in C^{\rho}$. ainda mais pela desigualdade 3.1.15 temos que

$$\|(1-\Delta)^{-1}u\|_{\rho} \leqslant \texttt{Cnt}\cdot\|(1-\Delta)(1-\Delta)^{-1}u\|_{\rho-2} = \texttt{Cnt}\cdot\|u\|_{\rho-2}$$

Ou seja $(1-\Delta)^{-1}$ também é contínuo com respeito a topologia dos espaços de Hölder. □

Proposição 3.7. *Para $s > \dfrac{n}{2}$ e $s - \dfrac{n}{2} \notin \mathbb{N}$, temos que $H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq C^{s-n/2}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Dado $u \in H^s$, então $u_p \in H^s$ e $u_p(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}\hat{u}_p(\xi)d\xi$. Usando as duas proposições anteriores temos

$$\begin{aligned} \|u_p\|_0 \leqslant \texttt{Cnt}\cdot\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}_p(\xi)|d\xi &= \texttt{Cnt}\cdot\int_{\operatorname{supp}\hat{u}_p}|\hat{u}_p(\xi)|d\xi \\ &\leqslant \texttt{Cnt}\cdot\Big(\int_{\operatorname{supp}\hat{u}_p}|\hat{u}_p(\xi)|^2\Big)^{1/2}\Big(\int_{\operatorname{supp}\hat{u}_p}1\Big)^{1/2} \\ &\leqslant \texttt{Cnt}\cdot|\hat{u}_p|_0 2^{\frac{pn}{2}} \\ &\leqslant \texttt{Cnt}\cdot 2^{\frac{pn}{2}}2^{-ps}c_p|u|_s \\ &\leqslant \texttt{Cnt}\cdot 2^{p(\frac{n}{2}-s)}|u|_s \end{aligned}$$

Então $u \in C^{s-\frac{n}{2}}$ e $\|u\|_{s-\frac{n}{2}} \leqslant \texttt{Cnt}\cdot|u|_s$.

□

Proposição 3.8. • *Se* $s = \lambda s_0 + (1-\lambda)s_1$ *com* $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ *e* $s_0 \leqslant s_1$ *reais. Então para toda* $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*, temos*

$$|u|_s \leqslant \texttt{Cnt} \cdot |u|_{s_0}^{\lambda} |u|_{s_1}^{\lambda-1}. \qquad 3.1.16$$

• *Se* $\rho = \lambda \rho_0 + (1-\lambda)\rho_1$ *com* $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ *e* $\rho_0 \leqslant \rho_1$ *positivos não naturais. Então para toda* $u \in C^{\rho_1}(\mathbb{R}^n)$*, temos*

$$\|u\|_\rho \leqslant \texttt{Cnt} \cdot \|u\|_{\rho_0}^{\lambda} \|u\|_{\rho_1}^{\lambda-1}. \qquad 3.1.17$$

Demonstração. i) Usando a desigualdades de Hölder[1] para $p = 1/\lambda$ e $q = 1/(1-\lambda)$, temos

$$\begin{aligned}
|u|_s^2 &= \int (1+\|\xi\|^2)^s |\hat{u}(s)|^2 d\xi \\
&= \int (1+\|\xi\|^2)^{\lambda s_0} |\hat{u}(s)|^{2\lambda} (1+\|\xi\|^2)^{(1-\lambda)s_1} |\hat{u}(s)|^{2(1-\lambda)} d\xi \\
&\leqslant \Big(\int \big[(1+\|\xi\|^2)^{\lambda s_0} |\hat{u}(s)|^{2\lambda}\big]^{1/\lambda} d\xi \Big)^{\lambda} \Big(\int \big[(1+\|\xi\|^2)^{(1-\lambda)s_1} |\hat{u}(s)|^{2(1-\lambda)}\big]^{\frac{1}{1-\lambda}} d\xi \Big)^{1-\lambda} \\
&\leqslant |u|_{s_0}^{\lambda} |u|_{s_1}^{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

ii) Veja que

$$\begin{aligned}
\|u_p\|_0 \leqslant \|u_p\|_0^{\lambda} \|u_p\|_0^{1-\lambda} &\leqslant \texttt{Cnt} \cdot (\|u\|_{\rho_0} 2^{-p\rho_0})^{\lambda} (\|u\|_{\rho_1} 2^{-p\rho_1})^{1-\lambda} \\
&\leqslant \texttt{Cnt} \cdot 2^{-p\rho} \|u\|_{\rho_0}^{\lambda} \|u\|_{\rho_1}^{1-\lambda}
\end{aligned}$$

Pela **Proposição 3.5**, temos

$$\|u\|_\rho \leqslant \texttt{Cnt} \cdot \|u\|_{\rho_0}^{\lambda} \|u\|_{\rho_1}^{1-\lambda}$$

□

3.2 APLICAÇÕES PARA O ESTUDO DO PRODUTO E COMPOSIÇÃO.

O Seguinte lema será importante para obter os resultados que vem em sequência.

Lema 3.9. *Seja* $(a_q)_{q \geqslant -1}$ *uma sequência de funções tal que*

- $\operatorname{supp} \widehat{a_q} \subseteq \{\xi; \|\xi\| \leqslant \texttt{Cnt} \cdot 2^q\}$.
- $\|a_q\|_0 \leqslant C 2^{q\rho}$*, para algum* $\rho > 0$ *(resp.* $|a_q|_0 \leqslant C c_q 2^{-qs}$ *para algum* $s > 0$ *e* $\sum_{q \geqslant -1} c_q^2 \leqslant 1$*).*

Então $u = \sum_{q \geqslant -1} a_q \in C^\rho$ *(resp.* $u \in H^s$*) e* $\|u\|_\rho \leqslant \texttt{Cnt} \cdot C$ *(resp.* $|u|_s \leqslant \texttt{Cnt} \cdot C$*).*

Demonstração. Temos

$$u_p = \varphi(2^{-p}D)u = \sum_{q \geqslant -1} \varphi(2^{-p}D) a_q = \sum_{q \geqslant -1} (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \varphi(2^{-p}\xi) \hat{a}_q(\xi) d\xi.$$

[1] $|\int fg| \leqslant (\int |f|^p)^{1/p} (\int |f|^q)^{1/q}$ se $1/p + 1/q = 1$

Para p fixado temos $\operatorname{supp}\varphi(2^{-p}\xi) \subseteq \{\xi;\ 2^{p-1} \leqslant \|\xi\| \leqslant 2^p\}$, então deve existis $N \in \mathbb{N}$ de modo que se $q < p - N$ temos $\operatorname{supp}\varphi(2^{-p}\xi) \cap \operatorname{supp}\widehat{a}_q = \varnothing$. Portanto

$$u_p = \sum_{q \geqslant -1} (a_q)_p = \sum_{q \geqslant p-N} (a_q)_p.$$

Por um instante, denote tanto a norma L^2 e a noma L^∞ simplesmente por $|\cdot|$, pois as contas a seguir independe de qual for a norma. Pelo **Lema 3.2**, temos $|(a_q)_p| \leqslant \mathtt{Cnt} \cdot |a_q|$, então

$$|u_p| \leqslant \sum_{q \geqslant p-N} |(a_q)_p| \leqslant \mathtt{Cnt} \cdot \sum_{q \geqslant p-N} |a_q|.$$

• Para o caso L^∞, temos

$$\|u_p\|_0 \leqslant \mathtt{Cnt} \cdot \sum_{q \geqslant p-N} \|a_q\|_0 \leqslant \mathtt{Cnt} \cdot C \sum_{q \geqslant p-N} 2^{-q\rho} \leqslant \mathtt{Cnt} \cdot C 2^{-p\rho}.$$

Pela **Proposição 3.5**, temos $u \in C^\rho$ e $\|u\|_\rho \leqslant \mathtt{Cnt} \cdot C$.

• Para a caso L^2 a demonstração é análoga. □

A próxima proposição pode ser encontrada em (ALINHAC *et al.*, 2007) como **proposition 2.2.1**.

Proposição 3.10. *i) Se $u,v \in C^\rho$, $\rho > 0$ e $\rho \notin \mathbb{N}$, então*

$$\|uv\|_\rho \leqslant \mathtt{Cnt} \cdot \big(\|u\|_0 \|v\|_\rho + \|u\|_\rho \|u\|_0\big). \qquad 3.2.1$$

ii) Se $u,v \in L^\infty \cap H^s$ e $s > 0$, então

$$|uv|_s \leqslant \mathtt{Cnt} \cdot \big(\|u\|_0 |v|_s + |u|_s \|u\|_0\big). \qquad 3.2.2$$

Demonstração. Veja que

$$u \cdot v = \sum_{p \geqslant -1} \sum_{q \geqslant -1} u_p v_q = \sum_{q \geqslant 0} (S_q u) v_q + \sum_{p \geqslant -1} u_p (S_{p+1} v).$$

Observe que.

- $\operatorname{supp} \widehat{(S_q u) v_q} \subseteq \{\xi;\ \|\xi\| \leqslant \mathtt{Cnt} \cdot 2^q\}$.
- $\operatorname{supp} \widehat{u_p (S_{p+1} v)} \subseteq \{\xi;\ \|\xi\| \leqslant \mathtt{Cnt} \cdot 2^p\}$.
- $\|(S_q u) v_q\|_0 \leqslant \|S_q u\|_0 \|v_q\|_0 \leqslant \mathtt{Cnt} \cdot \|u\|_0 \|v\|_\rho 2^{-q\rho}$, pela **Proposição 3.5**.
- $\|u_p (S_{p+1} v)\|_0 \leqslant \|S_(p+1) v\|_0 \|u_p\|_0 \leqslant \mathtt{Cnt} \cdot \|v\|_0 \|u\|_\rho 2^{-p\rho}$, pela **Proposição 3.5**.

Aplicando o **Lema 3.9**, vamos ter

$$\|uv\|_\rho \leqslant \mathtt{Cnt} \cdot \big(\|u\|_0 \|v\|_\rho + \|u\|_\rho \|v\|_0\big).$$

A demonstração é inteiramente análoga no caso de H^s. □

Proposição 3.11. *Sejam $u,v \in L^\infty \cap H^s$ e s inteiro positivo . Então para multi-índices α e β satisfazendo $|\alpha| + |\beta| = s$, temos*

$$|(\partial^\alpha u)(\partial^\beta v)|_0 \leqslant \texttt{Cnt} \cdot \big(\|u\|_0|v|_s + |u|_s\|v\|_0\big). \qquad 3.2.3$$

Demonstração. Para o caso $\alpha = 0$ e, temos

$$|u\partial^\beta v|_0 \leqslant \|u\|_0|\partial^\beta v|_0 \leqslant \texttt{Cnt} \cdot \|u\|_0|v|_s.$$

Uma vez que $|\beta| = s$

$$|\partial^\beta v|_0 = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\partial^\beta v}|^2 \leqslant \texttt{Cnt} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \|\xi\|^s|\widehat{v}(\xi)|^2 \leqslant \texttt{Cnt} \cdot |v|_s.$$

Caso $|\alpha| \geqslant 1$, observe que podemos reescrever $(\partial^\alpha u)(\partial^\beta v)$ como

$$(\partial^\alpha u)(\partial^\beta v) = \sum_j \star\partial_{i_j}(\partial^{\alpha_j}u\partial^{\beta_j}v) + \star u\partial^{\alpha+\beta}v,$$

onde $\star$ é um coeficiente sem importância e α_j e β_j são multi-índices de forma que $|\alpha_j|+|\beta_j| = s-1$. Por um lado, temos

$$|u\partial^{\alpha+\beta}v|_0 \leqslant \|u\|_0|v|_s.$$

Para estimar os termos restantes observem que

$$|\partial_{i_j}(\partial^{\alpha_j}u\partial^{\beta_j}v)|_0 \leqslant |\partial^{\alpha_j}u\partial^{\beta_j}v|_1.$$

Então a tarefa passa a ser obter uma estimativa para $|\partial_{i_j}(\partial^{\alpha_j}u\partial^{\beta_j}v)|_0 \leqslant |\partial^{\alpha_j}u\partial^{\beta_j}v|_1$. Para isso usaremos a mesma ideia da demostração da proposição anteiror.

$$\partial^{\alpha_j}u\partial^{\beta_j}v = \sum_{q\geqslant 0}(S_q\partial^{\alpha_j}u)(\partial^{\beta_j}v)_q + \sum_{p\geqslant -1}(\partial^{\alpha_j}u)_p(S_{p+1}\partial^{\beta_j}v).$$

Mas

$$\begin{aligned}
|(S_q\partial^{\alpha_j}u)(\partial^{\beta_j}v)_q|_0 &\leqslant \|S_q\partial^{\alpha_j}u\|_0|(\partial^{\beta_j}v)_q|_0 \\
&\leqslant \texttt{Cnt} \cdot 2^{q|\alpha_j|}\|u\|_0 2^{q|\beta_j|}|v_q|_0 \\
&\leqslant \texttt{Cnt} \cdot 2^{q(s-1)}\|u\|_0 2^{-qs}c_q|v|_s \\
&= \texttt{Cnt} \cdot 2^{-q\cdot 1}c_q\|u\|_0|v|_s
\end{aligned}$$

Analogamente $|(\partial^{\alpha_j}u)_p(S_{p+1}\partial^{\beta_j}v)|_0 \leqslant \texttt{Cnt} \cdot 2^{-p\cdot 1}c_p|u|_s\|v\|_0$, novamente aplicando o **Lema 3.9**, vamos ter

$$|\partial^{\alpha_j}u\partial^{\beta_j}v|_1 \leqslant \texttt{Cnt} \cdot \big(\|u\|_0|v|_s + |u|_s\|v\|_0\big).$$

□

Proposição 3.12. *Sejam $u,v \in C^\rho$ ($\rho = k + \lambda$ com k inteiro positivo e $0 < \lambda \leqslant 1$) sejam α e β multi-índices tais que $|\alpha|,|\beta| \leqslant k$. Então $\partial^\alpha v \in C^{\rho-|\alpha|}$ e $\partial^\beta u \in C^{\rho-|\beta|}$. Suponha ainda sem perda de generalidade que $|\alpha| \leqslant |\beta|$ e seja $\rho' = \rho - |\beta|$. Temos*

$$\|\partial^\alpha v \cdot \partial^\beta u\|_{\rho'} \leqslant \texttt{Cnt} \cdot (\|\partial^\alpha v\|_0 \|u\|_\rho + \|v\|_\rho \|\partial^\beta u\|_0).$$

Demonstração. Basta lembrar que

$$\|u\|_\rho = \sum_{|\gamma| \leqslant k} \|\partial^\gamma u\|_0 + \sum_{|\gamma|=k} [\partial^\gamma u]_\lambda$$

onde $[u]_\lambda = \sum_{x,y} \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\lambda}$ Disso temos que $\|\partial^\alpha v|_{\rho-|\alpha|} \leqslant \|v\| - \rho$, de onde temos que $\partial^\alpha v \in C^{\rho-|\alpha|}$, analogamente para u. Para a desigualdade basta aplicar a desigualdade 3.2.1 da **Proposição 3.10**, ou seja

$$\|\partial^\alpha v \cdot \partial^\beta u\|_{\rho'} \leqslant \texttt{Cnt} \cdot (\|\partial^\alpha v\|_0 \|\partial^\beta u\|_{\rho'} + \|\partial^\alpha v\|_{\rho'} \|\partial^\beta u\|_0) \leqslant \texttt{Cnt} \cdot (\|\partial^\alpha v\|_0 \|u\|_\rho + \|v\|_\rho \|\partial^\beta u\|_0).$$

□

Por fim, gostaríamos de conseguir uma estimativa para a norma da composição, mas para isso vamos necessitar do seguinte lema.

Lema 3.13. *Seja $\delta \in \mathbb{R}$ e suponha que tenhamos uma sequência de funções suaves $(m_p)_{p \geqslant -1}$ de forma que para cada $k \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha m_p\|_0 \leqslant C_k 2^{p(k+\delta)}. \qquad 3.2.4$$

Então o mapa $M : u \mapsto Mu = \sum_{p \geqslant -1} m_p u_p$ mapeia H^s em $H^{s-\delta}$ para todo $s \geqslant \delta$ e ainda

$$|Mu|_{s-\delta} \leqslant \texttt{Cnt} \cdot |u|_s, \qquad 3.2.5$$

onde a constante depende de C_0 e C_l, para l finito.

Demonstração. Sejam ψ e φ as funções definidas pela partição de Littlewood-Paley. Tome uma constante $C > 4$ de modo que

$$\hat{m}_p = \overbrace{\left(\psi(2^{-p}\frac{\xi}{C}) + \sum_{k \geqslant 0} \varphi(2^{-k}\frac{2^{-p}\xi}{C})\right)}^{1} \hat{m}_p = \hat{m}_{p,-1} + \sum_{k \geqslant 0} \hat{m}_{p,k}$$

Onde $\hat{m}_{p,-1}; = \psi(2^{-p}\frac{\xi}{C})\hat{m}_p$ e $\hat{m}_{p,k}; = \varphi(2^{-k}2^{-p}\frac{\xi}{C})\hat{m}_p$ para $k \geqslant 0$. Defina $M_k u = \sum_{p \geqslant -1} m_{p,k} u_p$ para $k \geqslant -1$. A ideia é usar novamente o **Lema 3.9**. Vamos separar nos seguintes casos.

- $k = -1$. Nessa caso as parcelas de $M_{-1}u = \sum_{p \geqslant -1} m_{p,-1} u_p$, satisfazem:

- $\text{supp}\{\widehat{(m_{p,-1}u_p)}\} \subseteq \{\xi;\ \|\xi\| \leqslant 2^p(2+C)\}$.

  De fato, Pelo **Theorem 7.1.6** de (HÖRMANDER, 2015) temos, $\widehat{(m_{p,-1}u_p)} = \widehat{m_{p,-1}} * \widehat{u_p}$, onde $*$ é o produto de convolução. E pelo, **corollary 1.3.4** de (HÖRMANDER, 2015) o suporte do produto de convolução é dado pela soma dos suportes. Ou seja,

$$\begin{aligned}\text{supp}\{\widehat{(m_{p,-1}u_p)}\} &= \text{supp}\{\widehat{m_{p,-1}} * \widehat{u_p}\}\\ &\subseteq \text{supp}\{\widehat{m_{p,-1}}\} + \text{supp}\{\widehat{u_p}\}\\ &\subseteq \{\xi; \|\xi\| \leqslant C2^p\} + \{\xi\ 2^{p-1} \leqslant \|\xi\| \leqslant 2^{p+1}\}\\ &\subseteq \{\xi; \|\xi\| \leqslant (2+C)2^p\}.\end{aligned}$$

- $|(m_{p,-1}u_p|_0 \leqslant \texttt{Cnt} \cdot 2^{-p(s-\delta)}c_p|u|_s$.

  De fato, podemo estimar $|(m_p)_{-1}u_p|_0$ como.

$$\begin{aligned}|(m_p)_{-1}u_p|_0 &\leqslant \texttt{Cnt} \cdot \|(m_p)_{-1}\|_0|u_p|_0\\ &\leqslant \texttt{Cnt} \cdot \|m_p\|_0 c_p 2^{-ps}|u|_s\\ &\leqslant \texttt{Cnt} \cdot 2^{p(0+\delta)}2^{-ps}|u|_s\\ &\leqslant \texttt{Cnt} \cdot 2^{-p(s-\delta)}c_p|u|_s.\end{aligned}$$

  Portanto pelo **lema 3.9** $M_{-1}u \in H^{s-\delta}$, se $s \geqslant \delta$.

- $k \geqslant 0$. Nessa caso para parcelas de $M_k u = \sum_{p\geqslant -1} m_{p,k}u_p$, temos.
  - $\text{supp}\{\widehat{(m_{p,k}u_p)}\} \subseteq \{\xi; 2^{p-1}(C2^k - 1) \leqslant \|\xi\| \leqslant 2^{p+1}(1 + C2^k)\}$.

    De fato

$$\begin{aligned}\text{supp}\{\widehat{(m_{p,k}u_p)}\} &\subseteq \text{supp}\{\widehat{m_{p,k}}\} + \text{supp}\{\widehat{u_p}\}\\ &\subseteq \{\xi; 2^k 2^{p-1}C \leqslant \|\xi\| \leqslant 2^k 2^{p+1}C\} + \{\xi; 2^{p-1} \leqslant \|\xi\| \leqslant 2^{p+1}\}\\ &\subseteq \{\xi; 2^{p-1}(C2^k - 1) \leqslant \|\xi\| \leqslant 2^{p+1}(1 + C2^k)\}.\end{aligned}$$

  - $|(m_p)_k u_p|_0 \leqslant C(l,k)2^{-p(s-\delta)}c_p|u|_s$.

    De fato, temos

$$\begin{aligned}|(m_{p,k}u_p|_0 &\leqslant \texttt{Cnt} \cdot \|(m_p)_k\|_0|u_p|_0\\ &\leqslant \texttt{Cnt} \cdot \Big(\sum_{|\alpha|=l} \|(\partial^\alpha m_p)\|_0 2^{-pl-pk}\Big)c_p 2^{-ps}|u|_s, \quad \text{usando (3.1.6) e (3.1.7)}\\ &\leqslant \texttt{Cnt} \cdot C_l 2^{p(l+\delta)}2^{-pl-pk}c_p 2^{-ps}|u|_s\\ &= \texttt{Cnt} \cdot C_l 2^{k(s-l-\delta)}2^{-k(s-\delta)}c_p 2^{-p(s-\delta)}|u|_s\\ &= C(l,k)2^{-p(s-\delta)}c_p|u|_s.\end{aligned}$$

Onde $C(l,k)$ é um constante que depende de l e k. Novamente se $s \geqslant \delta$, pelo **lema 3.9** temos, $M_k u \in H^{s-\delta}$, e ainda mais $|M_k|_{s-\delta} \leqslant \mathcal{C}(l)|u|_s 2^{K(s-\delta-l)}$, onde a constante só depende de l. Escolha l de modo que $0 < s - \delta < l$. Veja que para tal l vale o seguinte.

$$|Mu|_{s-\delta} \leqslant \sum_{k\geqslant -1} |M_k u|_{s-\delta} \leqslant \texttt{Cnt} \cdot (C_0|u|_s + \sum_{k\geqslant 1} C_l 2^{k(s-\delta-l)}|u|_s) \leqslant \texttt{Cnt} \cdot (C_0 + C_l)|u|_s.$$

Logo $Mu \in H^{s-\delta}$ e ainda $|Mu|_{s-\delta} \leqslant \texttt{Cnt} \cdot |u|_s$, onde a constante depende de C_0 e C_l. □

Teorema 3.14. *Seja* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *de classe* C^∞ *tal que* $F(0) = 0$. *Se* $u \in L^\infty \cap H^s$, *então* $F(u) \in L^\infty \cap H^s$ *e* $|F(u)|_s \leqslant C|u|_s$, *onde* C *depende apenas de* F *e* $\|u\|_0$.

Demonstração. Lembre que $u = \lim S_n u$. Usando o truque da soma telescópica, temos

$$F(u) = F(S_0u) + F(S_1u) - F(S_0u) + \cdots + F(S_{p+1}u) - F(S_pu) + \cdots .$$

Observe também que

$$F(S_{p+1}u) - F(S_pu) = \int_0^1 \frac{d}{dt}F(S_pu + tu_p)dt = \Big(\int_0^1 F'(S_pu + tu_p)dt\Big)u_p.$$

Defina $m_p := \displaystyle\int_0^1 F'(S_pu + tu_p)dt$. Como $H^s \subseteq L^2$, temos que

$\vdash$ Para todo multi-índice α temos $\partial^\alpha(F(S_0u)) \in L^\infty \cap L^2$. De fato

$$\partial^\alpha(F(S_0u)) = \sum_{q\leqslant|\alpha|} \star F^{(q)}(S_0u)(\partial^{\gamma_1}S_0u)\cdots(\partial^{\gamma_q}S_0u),$$

onde $\gamma_1, \cdots, \gamma_q$ são multi-índices de forma que $\gamma_1 + \cdots + \gamma_q = \alpha$. Sabemos também que $\|\partial^\gamma S_0u\|_0 \leqslant \texttt{Cnt} \cdot \|u\|_0$ e $|\partial^\gamma S_0u|_0 \leqslant \texttt{Cnt} \cdot |u|_0$. Se $|\alpha| > 0$, temos

$$|\partial^\alpha F(S_0u)|_0 \leqslant \sum_{q\leqslant|\alpha|} \| \star F^{(q)}(S_0u)(\partial^{\gamma_1}S_0u)\cdots(\partial^{\gamma_{q-1}}S_0u)\|_0 \texttt{Cnt} \cdot |u|_0 \leqslant C|u|_0,$$

onde C depende de F e $\|u\|_0$. Se $|\alpha| = 0$, basta usar a desigualdade do valor médio. De fato

$$|F(S_0u)|_0 \leqslant \texttt{Cnt} \cdot |S_0u|_0 \leqslant C|u|_0,$$

onde novamente C de $\|u\|_0$ e de F. $\dashv$

Seja $G(S_pu) = m_p = \displaystyle\int_0^1 F'(S_pu + tu_p)dt = F(S_{p+1}u) - F(S_pu)$. Observe que $F(u) = \sum m_pu_p$.

Observe também que $\|\partial^\gamma G(S_pu)\|_0 \leqslant \texttt{Cnt} \cdot 2^{p|\gamma|}\|u\|_0$. Ainda mais

$$\partial^\alpha G(S_pu) = \sum_{q\leqslant|\alpha|} \star G^{(q)}(S_pu)(\partial^{\gamma_1}S_pu)\cdots(\partial^{\gamma_q}S_pu).$$

Logo

$$\|\partial^\alpha G(S_pu)\|_0 \leqslant \sum_{q\leqslant|\alpha|} \texttt{Cnt} \cdot 2^{p(|\gamma_1|+\cdots+|\gamma_q|)}\|u\| = C2^{p|\alpha|},$$

onde C depende de $\|u\|_0$ e de G, que por sua vez depende de F. Pelo **Lema 3.13**, para $\delta = 0$, temos que $F(u) = \sum m_pu_p \in H^{s-0} = H^s$ e satisfaz a desigualdade

$$|F(u)|_s \leqslant C|u|_s,$$

onde C depende de F e $\|u\|_0$. □

4 TEOREMA DO MERGULHO DE NASH

Nosso objetivo é fazer uma apresentação sobre o celebrado Teorema de Mergulho de Variedades Riemannianas, ou seja, gostaríamos de entender se uma variedade Riemanniana pode ser mergulhada em um espaço euclidiano de modo isométrico. Essa é uma questão que surge naturalmente uma vez que a definição da variedade e também da métrica é dada de forma intrínseca, ou seja, sem depender de um ambiente. Por outro lado a motivação que permite definir tais objetos são inspiradas na teoria das superfícies nos espaços euclidianos, então é natural se perguntar se esses novos objetos que definimos são algo totalmente novo ou é algo que já conhecíamos mas de modo disfarçado? A resposta para essa pergunta para o caso de variedades suave, ou seja, quanto a métrica não entra em questão foi dada por Whitney na década de 1930 no artigo (WHITNEY, 1936). Nesse trabalho ele provou que uma variedade suave de classe C^r de dimensão n pode ser mergulhada no espaço euclidiano de dimensão $2n + 1$.

Para o caso de variedades Riemanniana, onde temos uma estrutura a mais, que é a métrica, e essa por sua vez é uma estrutura muito rica que permite desenvolver toda uma geometria, queremos que o mergulho preserve a métrica, ou seja, queremos no fundo, mostrar que toda métrica em uma variedade é induzida pela métrica euclidiana, ou seja, agora o mergulho que vai necessitar se "moldar" ao espaço ambiente, pois a métrica está fixada, ou seja, é de se esperar que a dimensão do contra domínio aumente bastante. Os primeiros resultados sobre mergulhos isométricos são resultados de Cartan e Janet em (CARTAN, 1927) da década de 1920, entretanto esses resultados são apenas locais e para o caso da métrica ser real analítica, que não é uma condição comum de se exigir. Em 1954 Nash em (NASH, 1954) mostrou uma versão global para o caso de métricas de classe C^∞, entretanto nesse caso o mergulho é de classe C^1, a demonstração desse resultado envolve técnicas não muito complicadas, mas condiz a resultados contra intuitivos, e ainda mais, algumas estruturas geométricas importantes tal como a curvatura são estrutura que depende de condições de segunda ordem, ou seja, não são preservadas por aplicações de classe C^1. Dois anos depois no artigo (NASH, 1956) também Nash provou para o caso de mergulhos de classe C^K, esse é o principal teorema referente ao mergulho de variedades Riemannianas, que ficou conhecido como **Nash embedding theorem**. Ele provou que para toda variedade Riemanniana m dimensional de classe C^k como $k > 2$ existe um mergulho isométrico $f : M \to R^d$ para algum d (onde $d \leqslant m(3m + 11)/2$ se M é compacto ou $d \leqslant m(m + 1)(3m + 11)/2$ no caso não compacto).

A prova de tal resultado apresentada por Nash envolveu o desenvolvimento de técnicas inovadoras, em particular ele fez uso de uma nova versão do Teorema da função implícita desenvolvida especialmente para prova o teorema. Basicamente a esse teorema é usado para provar que o conjuntos da métricas que podem ser mergulhadas é aberto no conjunto de todas as métricas, provando também ele é fechado e usando um argumento de conexidade ele provou o teorema. A versão do teorema da função implícita foi generalizada e simplificada na década de 1960 por Moser nos artigos (MOSER, 1966b) e (MOSER, 1966a), e o teorema passou a ser chamado **Nash–Moser theorem of implicti function**. Tal teorema possou a ser uma importante ferramenta no estudo de certos problemas de natureza não linear para além do teorema de mergulho, outras versões do Teorema de Nash-Moser também foram mostradas por Gromov, Hamilton, Hörmander entre outros matemáticos. A mais citada é (HAMILTON, 1982).

No final de década de 1980, Günthier, no trabalho (GÜNTHIER, 1989), apresentou uma nova demonstração do teorema de Mergulho que evitava a principal dificuldade técnica da demonstração do Nash, que é um fenômeno de perda de diferenciabilidade que forçava ao emprego da versão generalizada do teorema da função implícita. Günthier desenvolveu uma técnica engenhosa usado operadores elípticos. Essa técina permite reduzir o problema para uma aplicação do teorema de ponto fixo. Neste trabalho, vamos nos propor a estudar a demonstração dada por Günthier. Em particular, vamos nos guiar pelo capítulo III do livro (ALINHAC *et al.*, 2007), que é uma ótima exposição sobre o resultado de Günthier e pode ser encontrada no blog do prof. Terence Tao (TAO, 2016). Em particular, vamos nos concentrar no caso de uma variedade compacta. O nosso principal objetivo é expor uma demonstração para o seguinte teorema.

Teorema 4.1. *[Mergulho de Nash] Seja (M,g) uma variedade Riemanniana suave*[1] *compacta. Então existe um mergulho isométrico $u : M \to R^d$ para algum d.*

O primeiro passo é traduzir esse resultado para um problema de equação diferencial. Antes disso, vamos deixar claro o que é um mergulho isométrico. Seja (M,g) uma variedade Riemanniana de dimensão m. Uma aplicação $\phi : M \to \mathbb{R}^d$ é dita ser um **mergulho isométrico** se ϕ é um mergulho (i.e., é uma imersão, ou seja, $d\phi$ é injetora e ϕ é um homeomorfismo sobre sua imagem) e é uma isometria, ou seja, preserva a métrica, i.e., para todos os campos $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$, temos $g_p(X_p,Y_p) = \langle d\phi \cdot X_p, d\phi \cdot Y_p\rangle$, onde $\langle \cdot,\cdot \rangle$ é a métrica canônica em R^d. Em termos de coordenadas locais $(x_1, \cdots ,x_m)$ a métrica é dada por $g = \sum_{i,j \leqslant m} g_{ij} dx^i \wedge dx^j$, ou seja, vamos ter o seguinte sistema de equações diferenciais

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_{k,l \leqslant d} \frac{\partial \phi^k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \phi^l}{\partial x_j}, \quad \text{para} 1 \leqslant i,j \leqslant m. \qquad 4.0.1$$

Em termos de coordenadas locais, temos um sistema de equações diferencias parciais não lineares. Vamos fazer isso para o caso global, reduzindo o problema para o caso em que M é um toro munido de uma métrica qualquer, pois para o toro $\mathbb{T}^m = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$ temos coordenadas globais. Esse é o primeiro passo na demonstração do teorema.

Lema 4.2. *[Mergulho do Toro] Sem perda de generalidade, podemos assumir que $M = \mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$, i.e., um toro n dimensional munido de uma métrica g qualquer.*

[1] no sentido que (M,g) é de classe C^∞. Nesse caso o mergulho também será de classe C^∞

Demonstração. Pelo Teorema de mergulho de Whitney, veja **Theorem 6.15** (LEE, 2013), sabemos que existe um mergulho $u : M \to \mathbb{R}^n$,s onde $n = 2m + 1$. Como M é compacta, reescalonando, se for necessário, podemos assumir que $u(M) \subseteq (0,1)^n$. Então, sem perda de generalidade, podemos assumir que M é uma subvariedade regular de dimensão m do toro $\mathbb{T}^n$. Agora basta mostrar que conseguimos estender a métrica g de M para todo o toro.

O primeiro passo é fazer isso localmente. Como uma consequência da forma local das imersões, dado um $p \in M$, existe um aberto $\tilde{U} \in \mathbb{T}^n$, $U = M \cap \tilde{U}$ aberto em M e um difeomorfismo $\Phi : \tilde{U} \to \tilde{V} = V \times W \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, satisfazendo $\Phi(U) = V \times \{0\}$, onde V é uma vizinhança da origem em R^m. Defina uma métrica h em $V \times \{0\}$ satisfazendo $h = (\Phi^{-1}|_{V\times\{0\}})^* g$, ou seja, h é o pull-back de g. Como os espaços tangentes de $V \times \{q\}$ para todo $q \in W$ são canonicamente isomorfos, defina h e $V \times \{q\}$ como sendo a própria métrica h identificada por esse isomorfismo canônico. De forma análoga, em $\{r\} \times W$, onde $r \in V$, defina a métrica como sendo simplesmente a métrica canônica de $\mathbb{R}^{n-m}$, i.e., $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathbb{R}^{n-m}}$. Por fim, em $\tilde{V} = V \times W$ defina $\tilde{h} = h + \langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathbb{R}^{n-m}}$. Com isso, temos que $\tilde{g} = (\Phi^{-1})^* \tilde{h}$ estende g para a vizinhança $\tilde{U}$ de p.

Tome um cobertura de M por abertos $\tilde{U_i}$, satisfazendo a condição acima. Como M é compacto, podemos assumir que essa cobertura é finita, com $1 \leqslant i \leqslant N$. Em cada $\tilde{U_i}$, seja $\tilde{g_i}$ a métrica que estende g. Seja $U_o = \mathbb{T}^n / M$ e neste conjunto considere $\tilde{g_0}$ a métrica euclidiana usual. Tome agora uma partição da unidade $(\psi_i)_{i=0}^N$ subordinada à cobertura $U_0, \cdots U_N$. Definindo $\tilde{g} = \sum_{i=0}^N \psi_i \tilde{g_i}$, temos que $\tilde{g}$ estende g para todo $\mathbb{T}^n$.

Então conseguimos conseguimos um mergulho isométrico de $(M, g) \to (\mathbb{T}^n, \tilde{g})$. Com isso, conseguimos reduzir o teorema a provar o Teorema de mergulho de Nash no caso em que M é um toro munido de uma métrica qualquer. □

Vamos relembrar em que em passo estamos. Seja $M = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n = \mathbb{T}^n$ um toro (não necessariamente flat) munido de uma métrica riemanniana qualquer, $g = \sum g_{ij} dx^i \wedge dx^j, 1 \leqslant i,j \leqslant n$. Nosso objetivo é encontrar um mergulho isométrico $u : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^d$ para algum d. Observe que a condição de u ser um mergulho implica necessariamente que u deve ser **injetiva**. Logo, o nosso objetivo é encontrar em mergulho u que satisfaz

$$g_{ij} = \sum_{k,l \leqslant d} \frac{\partial u^k}{\partial x_i} \frac{\partial u^l}{\partial x_j}, \quad \text{para } 1 \leqslant i,j \leqslant n. \tag{4.0.2}$$

Podemos escrever em termos de um tensor simétrico $Q(u)$, dado por $Q(u)_{ij} = \partial_i u \cdot \partial_j u$, onde $\cdot$ denota o produto interno em $\mathbb{R}^d$.

$$Q(u) = g, \tag{4.0.3}$$

onde Q é um operador diferencial não linear definido em *Map* $= \cup_{d \in \mathbb{N}} C^\infty(\mathbb{T}^n : \mathbb{R}^d)$ para o conjunto *Sym* que denota os tensores simétricos em $\mathbb{T}^n$. Observe que uma métrica em $\mathbb{T}^n$ não é nada mais que um tensor simétrico positivo definido.

Dados $u_1 : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^{d_1}$ e $u_2 : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^{d_2}$, defina $u = u_1 \oplus u_2 : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{R}^{d_2}$ dado por $u(p) = (u_1(p), u_2(p))$. Observe que Q se comporta bem com respeito a essa soma direta, i.e.,

$$Q(u_1 \oplus u_2) = Q(u_1) + Q(u_2). \qquad 4.0.4$$

Usaremos esse fato para resolver o problema sem se preocupar com respeito a injetividade de u. Temos o seguinte lema.

Lema 4.3. *Suponha que exista $u_1 : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^{d_1}$ isometria, não necessariamente injetora, que satisfaça 4.0.3. Então existe $u : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^d$ isometria injetora, ou seja, um mergulho isométrico.*

Demonstração. Tome $u_2 : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^{d_2}$ um mergulho não necessariamente isométrico (existe pelo teorema de Whytney), e tome ε pequeno o suficiente de modo que $Q(\varepsilon u_2) < g$. Então $g = Q(\varepsilon u_2) + g'$, onde $g' := g - Q(\varepsilon u_2)$. Por hipótese, deve existir $u_1 : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^{d_1}$, isometria não necessariamente injetora, de modo que $g' = Q(u_1)$. Logo $g = Q(\varepsilon u_2) + g' = Q(\varepsilon u_2) + Q(u_1) = Q(\varepsilon u_2 \oplus u_1) = Q(u)$. Onde $u = \varepsilon u_2 \oplus u_1$ herda a injetividade de εu_2. □

Ou seja, podemos resolver o problema sem nos preocupar com a injetividade, uma vez que achando uma u que satisfaça (4.0.3), conseguimos construir uma função injetiva que também satisfaz essa propriedade. Antes de continuar, algumas definições importantes devem ser feitas.

- Seja g métrica em $\mathbb{T}^n$. Diremos que g é **boa** se existir $u \in$ *Map* tal que $g = Q(u)$. Observe que a soma de duas métricas boa é boa. De fato se $g_i = Q(u_i), i = 1,2$, então $g = g_1 + g_2 = Q(u_1 \oplus u_2)$.
- Um mapa $u : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^d$ é dito **livre** se para todo ponto $p \in \mathbb{T}^n$ o conjunto $\{\partial_i u(p), \partial_{ij} u(p)\}_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ é linearmente independente.

  De fato, é possível construir um mapa livre. Observe para isso que $f : \mathbb{R}^m \ni (x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_i, x_i x_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant m} \in \mathbb{R}^{m+m(m+1)/2}$ é livre. Então mergulhe $\mathbb{T}^n$ em $\mathbb{R}^m$ e depois aplique f para ter um mergulho livre de $\mathbb{T}^n$.

O próximo lema mostra que o conjunto das métricas **boas** é denso no conjunto das métrica de $\mathbb{T}^n$, no seguinte sentido.

Lema 4.4. *Seja g métrica qualquer em $\mathbb{T}^n$. Então existe um tensor simétrico h de modo que $g + \varepsilon^2 h$ é **boa** para todo $\varepsilon > 0$.*

Demonstração. Como g é um métrica positiva defina em $\mathbb{T}^n$ ao redor de cada ponto $p \in \mathbb{T}^n$ existe vizinhaça U_p,co-vetores $(e^1, \cdots e^n)$ e função positivas $(b_1^2, \cdots, b_n^2)$ de forma que nessa vizinhança podemos escrever g da seguinte forma

$$g|_{U_p} = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 e^i \otimes e^i.$$

Como $\mathbb{T}^n$ é compacto podemos tomar subcobertura finita $(U_1, \cdots, U_m)$ de forma que

$$g|_{U_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(b_i^{(j)}\right)^2 e^i_{(j)} \otimes e^i_{(j)}$$

refinando ainda mais essa cobertura se for necessário podemos tomar funções $u_{(j)}$: $\mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ de forma que $d\psi^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} e^i_{(j)}$ (isso é o conteúdo do lema de Poicaré, veja **Theorem 11.49** de (LEE, 2013)).

Tome partição suave da unidade $(\varphi^{(j)})$ subordinada a cobertura $(U_1, \cdots, U_m)$, agora defina novas funções $\tilde{\varphi}^{(j)} = \dfrac{\varphi^{(j)}}{\sqrt{\sum_{l=1}^{m}(\varphi^{(j)})^2}}$, logo $\left(\tilde{\varphi}^{(j)}\right)^2$ também é partição suave da unidade subordina a $(U_1, \cdots, U_m)$. Observe que

$$\left(\tilde{\varphi}^{(j)}\right)^2 g = \sum_{i=1}^{n} \left(\tilde{\varphi}^{(j)}\right)^2 \left(b_i^{(j)}\right)^2 d\psi_i^{(j)} \otimes d\psi_i^{(j)}$$

Somando em j vamos ter

$$g = \sum_{i,j} \left(\tilde{\varphi}^{(j)} b_i^j\right)^2 d\psi_i^{(j)} \otimes d\psi_i^{(j)}$$

Podemos calcular g_{lk}

$$g_{lk} = g(X_l, X_k) = \sum_{i,j} \left(\tilde{\varphi}^{(j)} b_i^j\right)^2 d\psi_i^{(j)} \otimes d\psi_i^{(j)}(X_k, X_l) = \sum_{j=1}^{m} (\eta^{(j)})^2 \partial_l \psi^{(j)} \partial_k \psi^{(j)}.$$

Onde $(\eta^{(j)})^2 = \sum_i (\tilde{\varphi}^{(j)} b_i^j)^2$

Defina os mapas espirais $u_\varepsilon^{(j)} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^2$ por

$$u_\varepsilon^{(j)} := \varepsilon \eta^{(j)} \Big(\cos\big(\frac{\psi^{(j)}}{\varepsilon}\big), \sin\big(\frac{\psi^{(j)}}{\varepsilon}\big)\Big).$$

Veja que

$$\begin{aligned} Q(u_\varepsilon^{(j)})_{lk} &= \partial_l \Big(\varepsilon\eta^{(j)} \cos\big(\frac{\psi^{(j)}}{\varepsilon}\big), \varepsilon\eta^{(j)} \sin\big(\frac{\psi^{(j)}}{\varepsilon}\big)\Big) \cdot \partial_k \Big(\varepsilon\eta^{(j)} \cos\big(\frac{\psi^{(j)}}{\varepsilon}\big), \varepsilon\eta^{(j)} \sin\big(\frac{\psi^{(j)}}{\varepsilon}\big)\Big) \\ &= (\eta^{(j)})^2 \partial_l \psi^{(j)} \partial_k \psi^{(j)} + \varepsilon^2 \partial_l \eta^{(j)} \partial_k \eta^{(j)}. \end{aligned}$$

Defina h satisfazendo $h_{lk} = \sum_{j=1}^{m} \partial_l \eta^{(j)} \partial_k \eta^{(j)}$ e $u_\varepsilon = \bigoplus_{j=1}^{m} u_\varepsilon^{(j)}$. Com isso, temos que

$$Q(u_\varepsilon)_{lk} = \sum_{j=1}^{m} (\eta^{(j)})^2 \partial_l \psi^{(j)} \partial_k \psi^{(j)} + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^2 \partial_l \eta^{(j)} \partial_k \eta^{(j)} = g_{lk} + \varepsilon^2 h_{lk}.$$

Logo $Q(u_\varepsilon) = g + \varepsilon^2 h$, ou seja $g + \varepsilon^2 h$ é boa. □

A partir desse lema é possível reduzir o problema a um problema de perturbação. Dado uma métrica boa, qualquer métrica suficientemente próxima dela também é boa. Em particular, isso prova que o conjunto das métricas boa é aberto no conjunto das métricas. De fato, temos o seguinte lema, que, devido a sua importância, vamos chamar de Teorema da Perturbação local.

Teorema 4.5. *[Perturbação Local] Seja $u_0 : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^d$ um mapa livre. Então $Q(u_0) + h$ é **boa** para todo $h \in$ Sym suficientemente próxima de 0 na topologia C^∞.*

Assumindo por hora esse Teorema como verdadeiro, conseguimos provar o **Teorema de Mergulho de Nash**.

Com efeito, seja g uma métrica em $\mathbb{T}^n$. Tome $u_o : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^d$ um mergulho livre de modo que $g_0 = Q(u_0) \leqslant g$, podemos fazer isso reescalando u_0 (basta multiplicar por δpequeno o suficiente). Então, temos

$$g = Q(u_o) + g' = g_0 + g',$$

onde $g_0 = Q(u_0)$ é obviamente boa.

Pelo **Lema 4.4** g' é "aproximadamente boa", i.e., para todo $\varepsilon > 0$ $g' + \varepsilon^2 h$ é boa, ou seja, existe u_1 tal que $Q(u_1) = g' + \varepsilon^2 h$.

Por outro lado assumindo o **Teorema 4.5** como verdadeiro para ε pequeno o suficiente, temos $-\varepsilon^2 h$ é suficientemente próximo de 0. Logo $Q(u_0) - \varepsilon^2 h = g_0 - \varepsilon^2 h$ é boa, ou seja, existe u_2 tal que $Q(u_2) = g_0 - \varepsilon^2 h$. Por fim, note que

$$g = g_0 + g' = (g_0 - \varepsilon^2 h) + (g' + \varepsilon^2 h) = Q(u_1) + Q(u_2) = Q(u_1 \oplus u_2).$$

O que prova que toda métrica em $\mathbb{T}^n$ é boa. Então basta provar o **Teorema 4.5**.

4.1 TEOREMA DE PERTUBAÇÃO LOCAL

Foi para provar esse teorema que Nash introduziu a versão generalizada do teorema de função inversa. Entretanto, vamos apresentar a prova apresentada por Günthier em (GÜNTHIER, 1989) que evita o problema de perda de diferenciabilidade.

Teorema (Perturbação Local). *Seja $u_0 : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^d$ um mapa livre. Então $Q(u_0) + h$ é **boa** para todo $h \in$ Sym suficientemente próxima de 0 na topologia C^∞.*

Demonstração. Basta provar que existe $u = u_0 + v \in C^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^d)$ tal que

$$Q(u) = Q(u_0 + v) = g_0 + h. \tag{4.1.1}$$

Ou seja demos resolver o seguinte sistema de equações.

$$\begin{gathered} \langle \partial_i u_0, \partial_j v\rangle + \langle \partial_i v, \partial_j u_0\rangle + \langle \partial_i v, \partial_j v\rangle = h_{ij} \\ \partial_j\langle \partial_i u_0, v\rangle + \partial_i\langle \partial_j u_0, v\rangle - 2\langle \partial_{ij}^2 u_0, v\rangle + \langle \partial_i v, \partial_j v\rangle = h_{ij}. \end{gathered} \tag{4.1.2}$$

Agora, introduziremos o truque de Günther que permitirá reduzir a um problema de ponto fixo.

Lema 4.6. *[Günther] Seja $\Delta = \sum_j \partial_j^2$ o Laplaciano em $\mathbb{T}^n$. Então*

$$(1 - \Delta)\langle \partial_i v, \partial_j v\rangle = \partial_i f_j(v) + \partial_j f_i(v) + r_{ij}(v), \tag{4.1.3}$$

onde $f_i(v) = \langle \Delta v, \partial_i v\rangle$ e $r_{ij}(v)$ são polinômios quadráticos com respeito a $\partial^\alpha v$ e α é multi-índice tal que $|\alpha| \leqslant 2$.

Demonstração. Observe que $\partial_i \Delta = \Delta \partial_i$. Com isso, temos

$$\begin{aligned}(1-\Delta)\langle \partial_i v, \partial_j v\rangle &= -\Delta\langle \partial_i v, \partial_j v\rangle + \langle \partial_i v, \partial_j v\rangle \\ &= -\partial_i\langle \Delta v, \partial_j v\rangle - \partial_j\langle \partial_i v, \Delta v, \rangle + r_{ij} v \\ &= \partial_i f_j(v) + \partial_j f_i(v) + r_{ij}(v).\end{aligned}$$

□

Lembre que $(1-\Delta)^{-1}$ é um operador pseudo-diferencial de ordem -2, ou seja, ele aumenta a regularidade, i.e., se $v \in C^k$, então $(1-\Delta)^{-1} v \in C^{k+2}$, veja **Proposição 3.6**. Do **Lema4.6**, temos $\langle \partial_i v, \partial_j v\rangle = (1-\Delta)^{-1}\big[\partial_i f_j(v) + \partial_j f_i(v) + r_{ij}(v)\big]$, substituindo em (4.1.2), temos

$$\partial_j\langle \partial_i u_0, v\rangle + \partial_i\langle \partial_j u_0, v\rangle - 2\langle \partial^2_{ij} u_0, v\rangle + (1-\Delta)^{-1}\big[\partial_i f_j(v) + \partial_j f_i(v) + r_{ij}(v)\big] = h_{ij}.$$

Seja $F_i(v) = (1-\Delta)^{-1} f_i(v)$ e $R_{ij} = (1-\Delta)^{-1} r_{ij}$. Como a derivada também comuta com $(1-\Delta)^{-1}$, temos

$$\partial_j\langle \partial_i u_0, v\rangle + \partial_i\langle \partial_j u_0, v\rangle - 2\langle \partial^2_{ij} u_0, v\rangle + \partial_i F_j(v) + \partial_j F_i(v) = h_{ij} - R_{ij}. \qquad 4.1.4$$

Agora observe que para encontrar uma função v que satisfaz a igualdade (4.1.4), basta encontra v que satisfaz o seguinte

$$\begin{aligned}\langle \partial_i u_o, v\rangle &= \quad -F_i(v) \qquad i = 1, \cdots, n \\ \langle \partial^2_{ij} u_o, v\rangle &= \frac{R_{ij} - h_{ij}}{2} \qquad i,j = 1, \cdots, n.\end{aligned} \qquad 4.1.5$$

Seja *Sym*$_2$ espaço dos 2-tensores simétricos em $\mathbb{T}^n$ e *Sym*$_1$, que é o espaço dos 1-tensores em $\mathbb{T}^n$. Considere os mapas $L : C^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^d) \to$ *Sym*$_1 \times$ *Sym*$_2$ e $G : C^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^d) \to$ *Sym*$_1 \times$ *Sym*$_2$ dados por

$$\begin{aligned} L(v)_{l,ij} &= \big(\langle \partial_l u_o, v\rangle, \langle \partial^2_{ij} u_o, v\rangle\big) \\ G(v)_{l,ij} &= \left(F_l(v), \frac{R_{ij} - h_{ij}}{2}\right).\end{aligned}$$

Nós podemos então reescrever (4.1.5) como

$$L(v) = G(v).$$

Mas é possível construir uma inversa a esquerda para o operador L. Para isso, temos que usar o fato de u_0 ter sido escolhido um mergulho livre. Considere M : *Sym*$_1 \times$ *Sym*$_2 \to C^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^d)$, onde para $f \in$ *Sym*$_1$ e $g \in$ *Sym*$_2$, M é dado por

$$M(f,g) = \sum_l^n w_i f_i + \sum_{i,j}^n \hat{w}_{ij} g_{ij},$$

onde $w_l = \sum_{k=1}^{d} w_i^{(k)} e_k$ e $\hat{w}_{ij} = \sum_{k=1}^{d} \hat{w}_{ij}^{(k)} e_k$ são elementos de $C^\infty(\mathbb{T}^n,\mathbb{R}^d)$ a serem escolhidos de modo que $w_i^{(k)}$ e $\hat{w}_{ij}^{(k)}$ são funções reais e $e_1, \cdots e_d$ é a base canônica de $\mathbb{R}^d$, de modo que

$$\begin{aligned} M(L(v)) &= \sum_{l=1}^{n} w_l \langle \partial_l u_0, v\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \hat{w}_{ij} \langle \partial_{ij}^2 u_0, v\rangle \\ &= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{d} w_i^{(k)} e_k \langle \partial_l u_0, v\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{d} \hat{w}_{ij}^{(k)} e_k \langle \partial_{ij}^2 u_0, v\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{d} \left\langle \sum_{l}^{n} w_l^{(k)} \partial_l u_0, v \right\rangle e_k + \sum_{k=1}^{d} \left\langle \sum_{i,j}^{n} \hat{w}_{ij}^{(k)} \partial_{ij}^2 u_0, v \right\rangle e_k \end{aligned}$$

Usando o fato que u_0 é livre, escolha as funções $w_l^{(k)}$ e $w_{ij}^{(k)}$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{l=1}^{n} w_l^{(k)} \partial_l u_0 &= e_k \\ \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} \hat{w}_{ij}^{(k)} \partial_{ij}^2 u_0 &= 0. \end{aligned} \qquad 4.1.6$$

Com isso, vamos ter

$$M(L(v)) = \sum_{k=1}^{d} \langle e_k, v\rangle e_k + \sum_{k=1}^{d} \langle 0, v\rangle e_k = \sum_{k=1}^{d} v^{(k)} e_k = v, \qquad 4.1.7$$

onde M depende suavemente de u_0, i.e., $M = M(u_0)$. Com isso, conseguimos escrever a equação (4.1.5) numa linguagem de ponto fixo.

$$v = M(u_0)(G(v)) = F(v). \qquad 4.1.8$$

Agora, gostaríamos de aplicar o Teorema do ponto fixo de Banach. Para isso, precisamos de um espaço de Banach conveniente e que F não tenha perda de diferenciabilidade e seja uma contração. O espaço $C^\infty(\mathbb{T}^n;\mathbb{R}^d)$ não tem estrutura de espaço de Banach, então consideraremos o espaço de Holder $C^\rho(\mathbb{T}^n,\mathbb{R}^d)$, ou seja, cada função componente é Holder, onde $\rho = k + \lambda$ para $k \geqslant 2$ e $0 < \lambda \leqslant 1$. Como já vimos, esse espaço é um espaço de Banach. Vamos mostrar que não temos o fenômeno de perda de diferenciabilidade, i.e., F aplica C^ρ em C^ρ e ainda mais F é um contração, ou seja, existe constante $0 < C < 1$ tal que $\|F(v)\|_\rho \leqslant C\|v\|_\rho$. Com essas hipóteses, existe $v \in C^\rho$ satisfazendo (4.1.8).

Observe que $F(v)$ é dada por

$$F(v) = \sum_{l=1}^{n} -w_l F_l(v) + \sum_{i,j=1}^{n} \hat{w}_{ij} \frac{R_{ij} - h_{ij}}{2} = \sum_{k=1}^{d} \Big(\sum_{l=1}^{n} -w_l^{(k)} F_l(v) + \sum_{i,j=1}^{n} \hat{w}_{ij}^{(k)} \frac{R_{ij} - h_{ij}}{2} \Big) e_k.$$

Podemos analisar a norma de cada termo. Para isso, devemos usar as proposições **Proposição 3.6** e **Proposição 3.12**. De fato se $v \in C^\rho$, então temos que $f_i(v), r_{ij}(v) \in$

$C^{\rho-2}$. Logo $F_i(v) = (1-\Delta)^{-1} f_i(v) \in C^\rho$ e analogamente $R_{ij}(v) = (1-\Delta)^{-1} r_{ij} v \in C^\rho$, ou seja, $F(v) \in C^\rho$. Observe ainda que

$$\begin{aligned} \|F_i(v)\|_\rho = \|(1-\Delta)^{-1} f_i(v)\|_\rho &\leqslant \|f_i(v)\|_{\rho-2} \\ &= \| - \langle \Delta v, \partial_i v \rangle\|_{\rho-2} \\ &\leqslant C(\|v\|_\rho \|\partial_i v\|_0 + \|\Delta v\|_0 \|v\|_\rho). \end{aligned}$$

Analogamente temos uma estimativa parecida para $\|R_{ij} v\|_\rho \leqslant C(\|v\|_\rho \|\partial_i v\|_0 + \|v\|_\rho \|\partial_j v\|_0)$.

Considere $B_R = \{v \in C^\rho; \|v\|_\rho \leqslant R\}$. Veja também que se $|\alpha| \leqslant 2$, temos que $\|\partial^\alpha v\|_0 \leqslant \|v\|_\rho \leqslant R$. Tomando R suficientemente pequeno, vamos mostrar que F é uma contração. Sejam $v_1, v_2 \in B_R$, temos

$$\begin{aligned} \|F^{(k)}(v_1) - F^{(k)}(v_2)\|_\rho &= \left\| \sum_{l=1}^n -w_l^{(k)} (F_l(v_1) - F_l(v_2) + \sum_{i,j=1}^n \hat{w}_{ij}^{(k)} \frac{R_{ij}(v_1) - R_{ij}(v_2}{2} \right\|_\rho \\ &\leqslant C_1 \sum_{l=1}^n \|F_l(v_1) - F_l(v_2)\| + C_2 \sum_{i,j=1}^n \|R_{ij}(v_1) - R_{ij}(v_2)\|_\rho \\ &\leqslant C\|v_1 - v_2\|_\rho (\|v_1\|_\rho + \|v_2\|_\rho) \\ &\leqslant 2RC\|v_1 - v_2\|_\rho. \end{aligned}$$

Basta tomar R suficientemente pequeno de modo que $2RC < \dfrac{1}{2}$. Então, vamos ter que

$$\|F(v_1) - F(v_2)\|_\rho < \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|_\rho,$$

e encontramos uma solução para o problema. □

REFERÊNCIAS

ALINHAC, S.; SERGE ALINHAC, P.G.; GÉRARD, P.; WILSON, S.S.; SOCIETY, American Mathematical. **Pseudo-differential Operators and the Nash-Moser Theorem**. [*S.l.*]: American Mathematical Society, 2007. (Graduate studies in mathematics). ISBN 9780821834541.

CARTAN, E. Sur la possibilite de plonger un espace riemannien donne dans un espace euclidien. **Ann. Soc. Polon. Math.**, v. 6, p. 1–7, 1927.

EVANS, L.C. **Partial Differential Equations**. [*S.l.*]: American Mathematical Society, 2010. (Graduate studies in mathematics). ISBN 9780821849743.

GRIGIS, A.; SJÖSTRAND, J. **Microlocal Analysis for Differential Operators: An Introduction**. [*S.l.*]: Cambridge University Press, 1994. (Lecture note series / London mathematical society). ISBN 9780521449861.

GÜNTHIER, M. On the perturbation problem associated to isometric embeddings of Riemannian manifolds. **Ann Glob Anal Geom.**, v. 7, p. 69–77, 1989.

HAMILTON, Richard S. The inverse function theorem of Nash and Moser. **Bull. Amer. Math. Soc.**, Ams, v. 7, p. 65–222, 1982.

HÖRMANDER, L. **The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis**. [*S.l.*]: Springer Berlin Heidelberg, 2015. (Classics in Mathematics). ISBN 9783642614972.

HÖRMANDER, L. **The Analysis of Linear Partial Differential Operators II: Differential Operators with Constant Coefficients**. [*S.l.*]: Springer Berlin Heidelberg, 2004. (Classics in Mathematics). ISBN 9783540225164.

HÖRMANDER, L. **The Analysis of Linear Partial Differential Operators III: Pseudo-Differential Operators**. [*S.l.*]: Springer Berlin Heidelberg, 2007. (Classics in Mathematics). ISBN 9783540499381.

LEE, J.M. **Introduction to Smooth Manifolds**. 2ª. [*S.l.*]: Springer New York, 2013. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 9780387217529.

MOSER, Jürgen. A rapidly convergent iteration method and non-linear differential equations -II. **Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze**, Scuola normale superiore, Ser. 3, 20, n. 3, p. 499–535, 1966.

MOSER, Jürgen. A rapidly convergent iteration method and non-linear partial differential equations - I. **Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze**, Scuola normale superiore, Ser. 3, 20, n. 2, p. 265–315, 1966.

NASH, J. C1-isometric imbeddings. **Ann. of Math.**, v. 60, p. 383–396, nov. 1954.

NASH, J. The imbedding problem for Riemannian manifolds. **Ann. of Math.**, v. 63, p. 20–63, jul. 1956.

TAO, Terence. **Notes on the Nash embedding theorem**. 2016. Disponível em: https://terrytao.wordpress.com/2016/05/11/notes-on-the-nash-embedding-theorem/.

WHITNEY, H. Diferentiable Manifolds. **Ann. of Math.**, v. 37, p. 645–680, jul. 1936.

Apêndices

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DOS RESULTADOS DO CÁLCULO SIMBÓLICO.

Para mostrar os teoremas do cálculo simbólico, devemos entender melhor o comportamento das seguintes integrais.

$$a^*(x,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\int e^{-iy\cdot\eta}\overline{a}(x-y,\xi-\eta)dyd\eta, \qquad \text{A.0.1}$$

$$a\#b(x,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\int e^{-iy\cdot\eta}a(x,\xi-\eta)b(x-y,\xi)dyd\eta. \qquad \text{A.0.2}$$

Essas integrais podem ser enxergadas com parte de uma família mais geral de integrais chamada de **integrais oscilatórias**. Em geral, uma integral oscilatória é dada por

$$I_\varphi(a) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\varphi(\theta)}a(\theta)d\theta, \qquad \text{A.0.3}$$

onde φ é dita ser uma função de fase. Nós gostaríamos que φ oscile rapidamente. A função a é uma função 'apropriada', definiremos posteriormente o que entendemos por 'apropriada'. A ideia fundamental por trás das integrais oscilatórias é se a é 'apropriada', onde a não necessariamente decai rapidamente. A oscilação de φ permite que a integral acima faça sentido, ou seja, que não divirja. Mas para isso, precisaremos olhar mais cuidadosamente, pois o truque de "passar o módulo para dentro" não é suficiente para garantir a convergência.

Por função 'apropriada', entenderemos a classe das **amplitudes**, que tem uma definição muito semelhante a classes dos símbolos. Definimos essa classe da seguinte forma.

Definição A.1. *[Amplitude] Sejam $\rho \in (-\infty,1]$, $m \in \mathbb{R}$ e $A^m_\rho(\mathbb{R}^N)$ o conjunto das funções $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tais que para todo $\theta \in \mathbb{R}^N$ e multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, temos*

$$|\partial^\alpha a(\theta)| \leqslant C_\alpha(1+|\theta|)^{m-\rho|\alpha|}$$

. Os elementos de $A^m_\rho(\mathbb{R}^N)$ são chamados de amplitudes.

Algumas observações importantes.

- Para $\rho = 1$, retornamos a definição de símbolo para o caso que não depende de x, que já conhecíamos.
- Assim como para os símbolos, $A^m_\rho(\mathbb{R}^N)$ tem uma estrutura de espaço de Frechet dada pela família de semi-normas

$$N^m_{\rho,k}(a) = \sup_{|\alpha|\leqslant k,\theta\in\mathbb{R}^N}\{(1+|\theta|)^{-m+\rho|\alpha|}|\partial^\alpha a(\theta)|\}.$$

- O espaço residual $\bigcap_{m\in\mathbb{R}} A^m_\rho$ é denso em A^m_ρ com respeito a topologia de $A^{m\delta}_\rho$, para todo $\delta > 0$. A demonstração desse fato é análoga à demonstração do **corolário 2.9**.

- Se $m \leqslant -N$ e $a \in A_\rho^m(\mathbb{R}^N)$, a integral (A.0.1) é bem definida. De fato, neste caso o "passar o módulo para dentro" resolve.

Queremos estender a última observação para qualquer amplitude. Vamos precisar do seguinte lema.

Lema A.2. *[Fase não estacionaria] Sejam $K \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto e $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi'(\theta) \leqslant C_0 < 0$ em K. Então para todo $a \in C_0^\infty(K)$, para todo natural $k > 0$ e $\lambda \in [1,\infty)$, temos*

$$\lambda^k \Big| \int_K e^{i\lambda\varphi(\theta)} a(\theta) d\theta \Big| \leqslant C_{k+1}(\varphi, c_0) \sup_{|\alpha| \leqslant k} |\partial^\alpha a|.$$

Demonstração. Veja que $\partial_i e^{i\lambda\varphi(\theta)} = (i\lambda)\partial_i\varphi(\theta) e^{i\lambda\varphi(\theta)}$, ou seja integrando por partes temos

$$\int_K e^{i\lambda\varphi(\theta)} a(\theta) d\theta = \int_K [(i\lambda)\partial_i\varphi(\theta) e^{i\lambda\varphi(\theta)}] \frac{a(\theta)}{(i\lambda)\partial_i\varphi(\theta)} d\theta = \int_K e^{i\lambda\varphi(\theta)} \partial_i \frac{a(\theta)}{(i\lambda)\partial_i\varphi(\theta)} d\theta.$$

Basta integrar por partes varias vezes que, vamos ter

$$\int_K e^{i\lambda\varphi(\theta)} a(\theta) d\theta = \int_K e^{i\lambda\varphi(\theta)} \frac{\partial^\alpha a(\theta)}{(i\lambda)^{|\alpha|} L(\varphi)} d\theta,$$

onde $L(\varphi)$ depende das derivadas de $\varphi(\theta)$ de ordem menor ou igual a $k = |\alpha|$, ou seja, $|L(\varphi)| \neq 0$. Com isso

$$\Big| \int_K e^{i\lambda\varphi(\theta)} a(\theta) d\theta \Big| \leqslant (1/\lambda)^k \frac{1}{|L(\varphi)|} \int_K |\partial^\alpha a| d\theta \leqslant (1/\lambda)^k C_{k+1}(\varphi) vol(k) \sup |\partial^\alpha a|.$$

□

Com esse lema, conseguimos estender o resultado para todo A_ρ^m. Temos a seguinte proposição.

Proposição A.3. *[Extensão para toda amplitude] Suponha $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, φ seja homogênea de grau $\mu = 1 - \rho$ (i.e., $\forall \lambda \neq 0$, temos $\varphi(\lambda\theta) = \lambda^\mu \varphi(\theta)$). Então I_φ pode ser continuamente estendida para toda $a \in A_\rho^m(\mathbb{R}^N)$ e essa extensão é única.*

Demonstração. Tome uma partição diádica da unidade (definimos no capítulo III, veja **Figura: 2**), ou seja,

$$1 = \chi_0(\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} \chi(2^{-l}\theta),$$

onde $\operatorname{supp}\chi = \{\theta; 1/2 \leqslant |\theta| \leqslant 2\}$ e $\operatorname{supp}\chi_0 = \{\theta; |\theta| \leqslant 1\}$. Temos

$$\begin{aligned} I_\varphi &= \int e^{i\varphi(\theta)} \chi_0(\theta) a(\theta) d\theta + \sum_{l=0}^{\infty} \int e^{i\varphi(\theta)} \chi(2^{-l}\theta) a(\theta) d\theta \\ &= \int e^{i\varphi(\theta)} \chi_0(\theta) a(\theta) d\theta + \sum_{l=0}^{\infty} \int e^{i\varphi(2^l\theta)} \chi(\theta) a(2^l\theta) 2^{lN} d\theta \\ &= \int e^{i\varphi(\theta)} \chi_0(\theta) a(\theta) d\theta + \sum_{l=0}^{\infty} 2^{lN} \int_{1/2 \leqslant |\theta| \leqslant 2} e^{i2^{l\mu}\varphi(\theta)} \chi(\theta) a(2^l\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Pelo lema da fase não estacionaria, temos

$$\begin{aligned}\left|2^{lN}\int_{1/2\leqslant|\theta|\leqslant 2} e^{i2^{l\mu}\varphi(\theta)}\chi(\theta)a(2^l\theta)d\theta\right| &\leqslant 2^{lN}(2^{l\mu})^{-k}C_{k+1}\sup_{1/2\leqslant|\theta|\leqslant 2}\{\partial^\alpha\big(\chi(\theta)a(2^l\theta)\big)\}\\ &\leqslant 2^{lN-l\mu k}C_{k+1}2^{l|\alpha|}N^m_{\rho,k}(a)(2^l)^{m-\rho|\alpha|}\\ &= C_{k+1}N^m_{\rho,k}(a)2^{l[N+m-k(\mu-1-\rho)]}.\end{aligned}$$

Vamos ter

$$|I_\varphi| \leqslant |C_0N^m_{\rho,k}| + \sum_{l=0}^{\infty} C_{k+1}N^m_{\rho,k}(a)2^{l[N+m-k(\mu-1-\rho)]}$$

Tome k grande de modo que $N+m-k(\mu-1-\rho)<0$, e somando os termos acima, vamos ter

$$|I_\varphi(a)| \leqslant CN^m_{\rho,k}(a). \tag{A.0.4}$$

Isso garante que $I_\varphi(a)$ está bem definida e é continua. Ainda mais, como $\mathcal{S}\subseteq A^m_\rho$ é denso, conseguimos garantir a unicidade. □

Agora, temos todas a ferramentas que permitem provar os **Teoremas 2.16 e 2.17**. Na verdade, vamos provar apenas o **Teorema 2.16**, pois as demonstrações são muito parecidas.

Teorema. *Seja $a\in S^m(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. Então a^* é dada por (*A.0.1*)*

$$a^*(x,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\int e^{-iy\cdot\eta}\overline{a}(x-y,\xi-\eta)dyd\eta. \qquad (A.1.1)$$

Temos $a^*\in S^m$ e é dada assintoticamente por

$$a^*(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|\leqslant 0}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha_\xi D^\alpha_x\overline{a}(x\xi). \tag{A.0.5}$$

Demonstração. Seja $\varphi(y,\eta) = -y\cdot\eta$. Veja que φ é uma forma quadrática não degenerada homogênea de ordem $\mu = 2$. Ainda mais para cada par ordenado (x,ξ) fixo, temos

$$\begin{aligned}|\partial^\alpha_y\partial^\beta_\eta\overline{a}(x-y,\xi-\eta)| &\leqslant C(1+|\xi-\eta|)^{m-|\beta|} \quad a\in S^m\\ &\leqslant C(1+|\xi-\eta|)^{|m|} \quad |m|\leqslant m-|\beta|\\ &\leqslant C'(1+|\xi-\eta,x-y|)^{|m|}\end{aligned}$$

Logo $\overline{a}(x-y,\xi-\eta)\in A^{|m|}_0(\mathbb{R}^{2n})$. Analogamente $\partial^\lambda_x\partial^\gamma_\xi\overline{a}\in A^{|m-|\gamma||}_0(\mathbb{R}^{2n})$

Ou seja, estamos cobertos pelas hipótes da proposição anterior. Antes de continuar, vamos estabelecer uma desigualdade útil.

$\vdash$**[Desigualdade de Peetre]** Dados $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$ e m real igual, temos que

$$(1+|\xi-\eta|)^m \leqslant (1+|\eta|)^{|m|}(1+|\xi|)^m.$$

Para $m \geqslant 0$, essa desigualdade é trivial, uma vez que $(1+|\xi-\eta|) \leqslant (1+|\xi)(1+|\eta|)$. Já para $m<0$, observe que $|m| = -m$ e $(1+|\xi|) = (1+|\xi-\eta+\eta|) \leqslant (1+|\xi-\eta|)(1+|\eta|)$. Com isso, temos

$$\begin{aligned} (1+|\xi|)^{-m} &\leqslant (1+|\xi-\eta|)^{-m}(1+|\eta|)^{-m} \\ \Rightarrow (1+|\xi-\eta|)^{m} &\leqslant (1+|\eta|)^{|m|}(1+|\xi|)^{m} \qquad \dashv \end{aligned}$$

Agora veja que $\partial_x^\lambda \partial_\xi^\gamma a^*(x,\xi) = I_\varphi(\partial_x^\lambda \partial_\xi^\gamma \overline{a})$ e por (A.0.4), temos $|I_\varphi(\partial_x^\lambda \partial_\xi^\gamma \overline{a})| \leqslant cntN_{0,k}^{|m-|\gamma||}(\overline{a})$. Vamos estimar $N_{0,k}^{|m-|\gamma||}(\overline{a})$

$$\begin{aligned} &\big|1+|y|+|\eta|\big|^{-|m-|\gamma||} \sup_{|\alpha|+|\beta|\leqslant k} |\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta \overbrace{\partial_x^\lambda \partial_\xi^\gamma \overline{a}(x-y,\xi-\eta)}^{\in S^{m-|\gamma|}}| \\ &\leqslant C(1+|\eta|)^{-|m-|\gamma||}(1+|\xi-\eta|)^{-m-|\gamma|} \\ &\leqslant C(1+|\eta|)^{-|m-|\gamma||}(1+|\eta|)^{|m-|\gamma||}(1+|\xi|)^{m-|\gamma|} = C(1+|\xi|)^{m-|\gamma|}. \end{aligned}$$

Logo $a^*(x,\xi) \in S^m$.

Para a expansão assintótica, considere $g(t) = a(x+ty,\xi+t\eta)$. Observe que

$$g^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=k} \frac{k!}{\alpha!\beta!} y^\alpha \eta^\beta \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \overline{a}(x+ty,\xi+t\eta).$$

Pela fórmula de Taylor, temos

$$g(-1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{g^{(k)}(0)(-1)^k}{k!} + r_k, \text{ onde } r_k = \int_0^1 \frac{(-1)^{k+1} g^{(k+1)}(-t)}{k!}(t-1)^k dt.$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned} a^*(x,\xi) &= (2\pi)^{-n} \int e^{-iy\cdot\eta} a(x-y,\xi-\eta) dy d\eta \\ &= (2\pi)^{-n} \sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant 2k+1} \int e^{-iy\cdot\eta} g^{(|\alpha|+|\beta|)}(0)(-1)^{|\alpha|+|\beta|} dy d\eta \\ &+ (2\pi)^{-n} \int e^{-iy\cdot\eta} \int_0^1 \frac{(-1)^{2k+2} g^{(2k+2)}(-t)}{(2k)!}(t-1)^{2k+1} dt dy d\eta \\ &= (2\pi)^{-n} \sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant 2k+1} \frac{(-1)^{|\alpha|+|\beta|}}{\alpha!\beta!} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \overline{a}(x,\xi) \int e^{-iy\cdot\eta} y^\alpha \eta^\beta dy d\eta \\ &+ (2\pi)^{-n} \int_0^1 (t-1)^{2k+1} dt \int e^{-iy\cdot\eta} \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta| \\ =2k+2}} \frac{2k+2}{\alpha!\beta!} \partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta \overline{a}(x-ty,\xi-t\eta) y^\alpha \eta^\beta dy d\eta \end{aligned}$$

veja que $\vdash$

$$(1/2\pi)^n \int e^{-iy\cdot\eta} y^\alpha \eta^\beta dy d\eta = (-i)^{|\alpha|} \alpha! \delta_{\alpha\beta},$$

onde $\delta_{\alpha\beta} = 1$ se $\alpha = \beta$ e $\delta_{\alpha\beta} = 0$ caso contrario. Sem perda de generalidade, suponha que $|\alpha| \geqslant |\beta|$ e observe que $y^{\alpha}e^{-iy\cdot\eta} = (-D_{\eta})^{\alpha}(e^{-iy\cdot\eta})$. Usando isso e integrando por partes, vamos ter

$$(1/2\pi)^n \int e^{-iy\cdot\eta} y^{\alpha}\eta^{\beta} dy d\eta = (1/2\pi)^n \int e^{-iy\cdot\eta}(-D_{\eta})^{\alpha}(\eta^{\beta}) dy d\eta$$

Se $\alpha \neq \beta$, temos $(-D_{\eta})^{\alpha}(\eta^{\beta}) = 0$, caso $\alpha = \beta$ temos $(-D_{\eta})^{\alpha}(\eta^{\beta}) = (-i)^{|\alpha|}\alpha!$, ou seja $(-D_{\eta})^{\alpha}(\eta^{\beta}) = (-i)^{|\alpha|}\alpha!\delta_{\alpha\beta}$. Por fim, temos

$$\begin{aligned}
(1/2\pi)^n \int e^{-iy\cdot\eta} y^{\alpha}\eta^{\beta} dy d\eta &= (1/2\pi)^n \int e^{-iy\cdot\eta}(-D_{\eta})^{\alpha}(\eta^{\beta}) dy d\eta \\
&= (1/2\pi)^n \int e^{-iy\cdot\eta}(-i)^{|\alpha|}\alpha!\delta_{\alpha\beta} dy d\eta \\
&= (1/2\pi)^n (-i)^{|\alpha|}\alpha!\delta_{\alpha\beta} \int e^{-iy\cdot\eta} dy d\eta \\
&= (-i)^{|\alpha|}\alpha!\delta_{\alpha\beta} \qquad \dashv .
\end{aligned}$$

Voltado para a expressão de a^*, temos

$$\begin{aligned}
a^*(x,\xi) &= \sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant 2k+1} \frac{(-1)^{|\alpha|+|\beta|}}{\alpha!\beta!}\partial_x^{\alpha}\partial_{\xi}^{\beta}\overline{a}(x,\xi)(-i)^{|\alpha|}\alpha!\delta_{\alpha\beta} + R_K(x,\xi) \\
&= \sum_{|\alpha|\leqslant k} \frac{(-1)^{2|\alpha|}}{\alpha!\alpha!}(-i)^{|\alpha|}\alpha!\partial_x^{\alpha}\partial_{\xi}^{\alpha}\overline{a}(x,\xi) + R_K(x,\xi) \\
&= \sum_{|\alpha|\leqslant k} \frac{1}{\alpha!}D_x^{\alpha}\partial_{\xi}^{\alpha}\overline{a}(x,\xi) + R_K(x,\xi).
\end{aligned}$$

Uma vez que que $D_x^{\alpha}\partial_{\xi}^{\alpha}\overline{a}(x,\xi) \in S^{m-|\alpha|}$, resta verificar que $R_k \in S^{m-k-1}$. Mas lembre que

$$R_k(x,\xi) = (2\pi)^{-n}\int_0^1 (t-1)^{2k+1}dt \int e^{-iy\cdot\eta} \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta| \\ =2k+2}} \frac{2k+2}{\alpha!\beta!}\partial_y^{\alpha}\partial_{\eta}^{\beta}\overline{a}(x-ty,\xi-t\eta)y^{\alpha}\eta^{\beta} dy d\eta.$$

Integrando por partes, com $|\gamma_j| \geqslant k+1$, vamos ter

$$R_k(x,\xi) = \sum_{j=1}^{2k+2} c_j \int_0^1 (1-t)^{2k+1}t^{2k+2}\int e^{-iyx}\partial_x^{\gamma_j}\partial^{\gamma_j}\overline{a}(x-ty,\xi-t\eta) dy d\eta.$$

Mas $\partial_x^\gamma \partial^\gamma \overline{a}(x-ty,\xi-t\eta) \in A_0^{m-|\gamma|} \subseteq A_0^{|m-|\gamma||}$. Logo

$$\begin{aligned}
|R_k(x,\xi)| &\leqslant CN_{0,k}^{|m-|\gamma||}(\partial^\gamma \overline{a}(x-ty,\xi-t\eta)) \\
&= C(1+|y|+|\eta|)^{-|m-|\gamma||} \sup_{|\alpha|+|\beta|=k} \{\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta \partial_x^\gamma \partial^\gamma \overline{a}(x-ty,\xi-t\eta)\} \\
&\leqslant C(1+t|\eta|)^{-|m-|\gamma||}(1+|\xi-t\eta|)^{m-|\gamma|} \\
&\leqslant C(1+|\xi|)^{m-|\gamma|} \\
&\leqslant C(1+|\xi|)^{m-k-1}.
\end{aligned}$$

Similarmente, obtemos o limite superior para $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_k$. Com isso, obtemos

$$R_k \in S^{m-k-1}.$$

Isso completa a prova.

$\square$