



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Luiz Henrique Suzana

Um algoritmo de ponto proximal com efeitos de inércia e relaxação

Florianópolis - SC
2022

Luiz Henrique Suzana

Um algoritmo de ponto proximal com efeitos de inércia e relaxação

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Maicon Marques Alves, Dr.

Florianópolis - SC
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Suzana, Luiz Henrique

Um algoritmo de ponto proximal com efeitos de inércia e relaxação / Luiz Henrique Suzana ; orientador, Maicon Marques Alves, 2022.

99 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Otimização convexa. 3. Algoritmos proximais. 4. Inclusão monótona. 5. Algoritmo proximal com inércia e relaxação. I. Alves, Maicon Marques. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Luiz Henrique Suzana

Um algoritmo de ponto proximal com efeitos de inércia e relaxação

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Alfredo Noel Iusem, Dr.
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Prof. Antonio Carlos Gardel Leitão, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Matheus Cheque Bortolan, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Maicon Marques Alves, Dr.
Orientador

Florianópolis - SC, 2022.

AGRADECIMENTOS

Como sempre, um trabalho como este não se encerra sem o suporte de uma equipe paciente e atenciosa de familiares e amigos, que nos apoiam cada um à sua maneira durante todo o processo, especialmente numa pandemia. Muitas foram as pessoas envolvidas, ainda que indiretamente, no desenvolvimento desta dissertação e tentarei cuidadosamente contemplar todas elas abaixo.

Aos meus pais Marta e Mauro e à minha irmã Ana eu agradeço pelos diversos meses de convívio em Xavantina, incluindo os meses iniciais e de maior tensão na pandemia da COVID 19, repletos de medos e incertezas mas curiosamente também marcados por uma sensação de união e relaxamento proporcionada pela redução da frenética jornada de trabalho usual. Agradeço por todas as conversas que tivemos e pelos diversos conselhos e ensinamentos que recebi de vocês ao longo dos anos, vocês foram e sempre serão fundamentais para minha formação pessoal e profissional.

Estendo esses agradecimentos a todos meus primos, tios, avó e demais familiares que estiveram comigo nesses anos, por todos os momentos de lazer e convivência especialmente durante o mestrado e pandemia. Junto aos meus pais e irmã, vocês são responsáveis pelo conforto da família.

À minha namorada Julia agradeço por ter estado comigo nos últimos quatro anos, por sempre estender a mão quando eu preciso, pela compreensão, companheirismo e amor. Seu suporte me fortalece diariamente e me incentiva a melhorar sempre. Estendo os agradecimentos a seus familiares, que sempre me receberam e me acolheram muito bem, trazendo o aconchego da família para Florianópolis.

Agradeço a todos os professores que tive durante minha formação, desde os anos iniciais na escola até a conclusão deste mestrado, vocês possibilitaram que eu alcançasse esta importante conquista. Agradeço a Marcello Ravadelli, Lucia Menoncini, Cauê Roratto e Lucas Ramiro pelas ótimas lições de matemática, que contribuíram fortemente para minha escolha de formação e carreira. Agradeço ao professor Ivan Pontual pelas conversas e conselhos quando do início do mestrado e também pela ótima orientação durante a graduação.

Agradeço ao meu orientador Maicon Marques Alves por todas as explicações, conversas, conselhos e reuniões que desencadearam este trabalho, e também pela paciência, compreensão e confiança comigo. Agradeço também aos professores da banca Alfredo, Antônio e Matheus por aceitarem ler e julgar este trabalho, por todas as sugestões, comentários, correções e conselhos.

Agradeço a absolutamente todos os meus amigos pelos bons momentos que passamos juntos, pelo apoio, conversas, conselhos e desabaços. Agradeço especialmente àqueles com quem convivi ao longo dos dois anos de pandemia, que coincidentemente foram os anos de estudo no programa de mestrado, alternando minha estadia

entre Xavantina e Florianópolis. Agradeço carinhosamente aos meus amigos Mateus Spezia, Gabriel Michels, Henrique Martins e João Ruiz pela ótima companhia de sempre, incluindo a pós-graduação na Florianópolis pandêmica, e ao Richard Filipini pela amizade de longa data e pela já consagrada moradia compartilhada.

Agradeço a Andrea Rujano por toda nossa amizade, construída remotamente durante esse mestrado compartilhando dicas, explicações e preocupações sobre as disciplinas e também sobre todo o desenvolvimento da dissertação. Agradeço ao Aster Santana pelos ótimos conselhos pessoais, acadêmicos e profissionais e por ter auxiliado imensamente na criação das imagens do trabalho.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro durante o mestrado, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada pela ótima formação oferecida, e à UFSC de forma geral pela qualidade e gratuidade dos serviços prestados. A universidade pública, gratuita e de qualidade é uma importante arma contra o negacionismo científico em que vivemos!

RESUMO

Dado um operador monótono maximal definido num espaço de Hilbert real, consideramos um Algoritmo Proximal com Inércia e Relaxação (RIPA) com cálculo exato do resolvente para resolver o Problema de Inclusão Monótona (MIP) associado. Esse algoritmo surge naturalmente da discretização do sistema contínuo *Heavy Ball With Friction* de Polyak considerando uma regularização de Yosida do operador original. Sob hipóteses apropriadas nos parâmetros e utilizando o Lema de Opial, mostramos que as sequências geradas pelo (RIPA) convergem fracamente para uma solução de (MIP). Começamos considerando parâmetros gerais na iteração, e ao final descrevemos classes particulares e de prática implementação que satisfazem as hipóteses para convergência. Esse algoritmo generaliza o clássico Algoritmo de Ponto Proximal (PPA), incorporando os efeitos de inércia e relaxação na tentativa de acelerar a convergência, em concordância com o *Fast Gradient Method* de Nesterov e o FISTA de Beck e Teboulle. Como casos particulares, resgatamos resultados de convergência para o Algoritmo Proximal com Relaxação e para o Algoritmo Proximal com Inércia, estabelecidos respectivamente por Eckstein e Bertsekas e por Alvarez e Attouch.

Palavras-chave: Inclusão monótona. Algoritmo proximal. Inércia. Relaxação. Algoritmo Proximal com Inércia e Relaxação. Regularização de Yosida. Otimização convexa.

ABSTRACT

Given a maximal monotone operator defined on a real Hilbert space, we consider a Relaxed Inertial Proximal Algorithm (RIPA) with exact resolvent calculation in order to solve the associated Monotone Inclusion Problem (MIP). This algorithm comes naturally from the discretization of the continuous system Heavy Ball With Friction of Polyak considering a Yosida regularization of the original operator. Under appropriate hypotheses on the parameters and invoking the Opial's Lemma, we prove the weak convergence of the sequences generated by (RIPA) towards a solution of (MIP). We begin by considering general sequences of parameters, and at the end we describe particular classes with practical implementation which satisfy the convergence hypotheses. This algorithm generalizes the classical Proximal Point Algorithm (PPA), adding the inertial and relaxation effects in the hope of obtaining faster convergence, in line with the Fast Gradient Method of Nesterov and FISTA of Beck and Teboulle. As particular cases, we recover convergence results for the Relaxed Proximal Algorithm and for the Inertial Proximal Algorithm, provided by Eckstein and Bertsekas and by Alvarez and Attouch respectively.

Keywords: Monotone inclusion. Proximal algorithm. Inertia. Relaxation. Relaxed Inertial Proximal Algorithm. Yosida regularization. Convex optimization.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	SISTEMAS CONTÍNUOS E ALGORITMOS PROXIMAIS	15
2	TEORIA PRELIMINAR	21
2.1	NOTAÇÃO BÁSICA	21
2.2	OPERADORES PONTO-PONTO E NÃO-EXPANSIVIDADE	21
2.3	OTIMIZAÇÃO CONVEXA	22
2.4	OPERADORES MONÓTONOS (MAXIMAIS)	24
2.5	COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO	27
2.6	ALGUNS RESULTADOS ÚTEIS	29
3	O ALGORITMO (RIPA)	31
3.1	APRESENTAÇÃO DO ALGORITMO	31
3.2	FORMAS EQUIVALENTES DO (RIPA)	35
3.3	A SEQUÊNCIA ÂNCORA (h_k)	36
3.4	AS SEQUÊNCIAS (t_i) E $(t_{i,k})$	39
4	CONVERGÊNCIA FRACA DO (RIPA)	43
4.1	O POSSÍVEL CASO DE $\alpha_k \rightarrow 1$	57
5	APLICAÇÃO PARA CLASSES PARTICULARES DE PARÂMETROS	65
5.1	CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA (K_0) E (K_1)	65
5.2	APLICAÇÃO DOS RESULTADOS PRINCIPAIS	76
5.3	ALGUNS CASOS PARTICULARES	83
6	CONCLUSÃO	93
	REFERÊNCIAS	95

1 INTRODUÇÃO

Estamos interessados em resolver o *problema de inclusão monótona* (MIP, *monotone inclusion problem* em inglês):

$$\text{encontrar } x \in \text{zer}(A) \quad (\text{MIP})$$

para um dado operador monótono maximal¹ $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$, definido num espaço de Hilbert real \mathcal{H} , tal que $\text{zer}(A) := \{x \in \mathcal{H} : 0 \in Ax\} \neq \emptyset$, ou seja, queremos encontrar um $x \in \mathcal{H}$ que satisfaça $0 \in Ax$. Esse é o problema clássico na teoria de operadores monótonos, e modela diversos problemas com uma abordagem comum. Uma das principais aplicações ocorre quando A é o subdiferencial ∂f de uma função $f : \mathcal{H} \rightarrow]-\infty, \infty]$ própria, convexa e semicontínua inferiormente, pois nesse caso (MIP) equivale² ao problema de encontrar um minimizador (global) de f em \mathcal{H} , solução do *problema de otimização convexa* $\min_{x \in \mathcal{H}} f(x)$. Outras aplicações aparecem no estudo das desigualdades variacionais e nos problemas de minimax, conforme destaca em mais detalhes a Introdução de Rockafellar (1976).

A estratégia mais comum para resolver (MIP) é utilizar alguma rotina iterativa (um “algoritmo”), que produz uma sequência $(x_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathcal{H}$ a qual esperamos convergir para uma solução $x_\infty \in \text{zer}(A)$. Neste ponto, vale mencionar a enorme diversidade de algoritmos que se propõem a esse objetivo, os quais diferem principalmente na forma como se constrói o iterado x_{k+1} a partir de $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$, mas também diferem na quantidade de pontos iniciais, de parâmetros ajustáveis, de iterados anteriores necessários para definir x_{k+1} , e nas formas de convergência, sendo mais comuns as convergências nas topologias forte e fraca de \mathcal{H} .

Uma classe particularmente interessante de algoritmos para resolver (MIP) é a dos chamados *algoritmos proximais*, cuja técnica principal para construir x_{k+1} consiste em realizar pelo menos uma avaliação do resolvente $J_{\mu A}$ de A (de parâmetro μ) em algum(ns) iterado(s) anterior(es). O nome *proximal* se deve ao caso particular em que $A = \partial f$ e então $J_{\mu A}$ é o operador proximal $\text{Prox}_{\mu f}$ de f . Como exemplo, podemos citar o clássico *Algoritmo de Ponto Proximal*, batizado por Rockafellar e definido por $x_{k+1} = J_{\mu_k A}(x_k)$ para todo $k \geq 0$ e para um dado ponto inicial $x_0 \in \mathcal{H}$, que será discutido em mais detalhes nas Seções 1.1 e 3.1. Uma característica dos algoritmos proximais, no caso particular da otimização convexa, é que em geral eles dispensam a necessidade de calcular derivadas da função objetivo f , substituindo avaliações do operador ∇f pelo operador $\text{Prox}_{\mu f}$, que é crucial quando f não é diferenciável.

Nosso objetivo neste trabalho é o de provar a convergência do *Algoritmo Proxi-*

¹ A notação “ \rightrightarrows ” significa que A é um operador ponto-conjunto, veja Seção 2.4.

² Pois $\text{zer}(\partial f) = \text{Argmin}(f) := \{x \in \mathcal{H} : f(x) \leq f(y), \forall y \in \mathcal{H}\}$.

mal com Inércia e Relaxação (RIPA), cuja iteração é descrita por

$$\forall k \geq 1 : \quad \begin{cases} y_k = x_k + \alpha_k(x_k - x_{k-1}) \\ x_{k+1} = (1 - \rho_k)y_k + \rho_k J_{\mu_k A}(y_k) \end{cases} \quad (\text{RIPA})$$

para dados pontos iniciais $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ e parâmetros $\alpha_k \geq 0$, $\rho_k > 0$ e $\mu_k > 0$. Mais precisamente, assumindo que $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ é monótono maximal, que $\text{zer}(A) \neq \emptyset$ e sob hipóteses apropriadas nas sequências de parâmetros, mostraremos que existe $x_\infty \in \text{zer}(A)$ tal que $x_k \rightharpoonup x_\infty$ e $y_k \rightharpoonup x_\infty$, onde “ \rightharpoonup ” denota convergência na topologia fraca de \mathcal{H} . (RIPA) acrescenta ao Algoritmo de Ponto Proximal os efeitos de inércia e relaxação, descritos respectivamente pela primeira e segunda equações acima, na tentativa de acelerar a convergência das sequências.

O efeito de relaxação, introduzido originalmente por Krasnosel'skii (1955), surge naturalmente quando consideramos sistemas contínuos e discretos regularizados, em que substituímos o operador monótono maximal A por sua regularização de Yosida A_λ , conforme veremos na Seção 1.1. Eckstein e Bertsekas (1992, Teorema 3) consideraram uma versão “relaxada” do Algoritmo de Ponto Proximal, cuja iteração corresponde ao caso particular de (RIPA) em que $\alpha_k = 0$ (sem inércia), e então $x_{k+1} = (1 - \rho_k)x_k + \rho_k J_{\mu_k A}(x_k)$.

O efeito de inércia foi acrescentado ao Algoritmo de Ponto Proximal anos mais tarde, em Alvarez (2001, Teorema 3.1) para o caso especial de $A = \partial f$, e generalizado posteriormente por Jules e Maingé (2002) para A cocoercivo e por Alvarez e Attouch (2001) para o caso mais geral de A monótono maximal. Esse efeito surgiu originalmente em Alvarez (2001) através da discretização do sistema contínuo conhecido como *Heavy Ball With Friction*: $\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + \nabla f(x(t)) = 0$, conforme discutiremos detalhadamente na Seção 1.1. O Algoritmo de Ponto Proximal acrescido do efeito de inércia corresponde à iteração de (RIPA) com $\rho_k = 1$ (sem relaxação), e então $x_{k+1} = J_{\mu_k A}(x_k + \alpha_k(x_k - x_{k-1}))$.

Nos últimos anos, diversos trabalhos têm considerado os efeitos de inércia e relaxação, nas mais variadas classes de algoritmos proximais, na tentativa de obter melhores taxas de convergência. Para citar apenas alguns trabalhos, temos Alvarez (2004) combinando inércia, relaxação e um passo projetivo, Attouch e Cabot (2018) acrescentando inércia ao algoritmo *forward-backward*, e Alves *et al.* (2020) propondo uma versão com inércia e relaxação de Douglas-Rachford e de ADMM. Vale destacar que o caso particular $\alpha_k \rightarrow 1$ em algoritmos inerciais recebe uma atenção especial, motivado pelos métodos iterativos FGM³ de Nesterov (1983) e o FISTA⁴ de Beck e Teboulle (2009), que foram capazes de acelerar a convergência do método do gradiente e do ISTA⁵, respectivamente, de $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ para $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

³ *Fast Gradient Method*.

⁴ *Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm*.

⁵ *Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm*.

O algoritmo (RIPA) foi estudado detalhadamente em Attouch e Cabot (2020), que é a referência principal para este trabalho, de onde extraímos a grande maioria dos resultados e demonstrações. Os conteúdos estão organizados da seguinte forma: no Capítulo 2, discutimos brevemente notação e teoria básica de otimização convexa e de operadores monótonos, a fim de tornar a leitura do restante do trabalho mais confortável e autocontida. O Capítulo 3 contém mais detalhes da iteração de (RIPA), incluindo casos particulares e interpretação geométrica, e desenvolve alguns resultados preliminares que serão utilizados nas provas dos teoremas principais de convergência. No Capítulo 4 vamos finalmente provar a convergência (fraca) de (RIPA) nos Teoremas 4.1 e 4.9, este último incluindo o caso $\alpha_k \rightarrow 1$ cuja importância destacamos acima. Por fim, no Capítulo 5 vamos particularizar os Teoremas 4.1 e 4.9 para classes mais específicas de parâmetros (α_k) e (ρ_k) , afim de obtermos hipóteses mais fáceis de se garantir na prática do que as assumidas anteriormente.

1.1 SISTEMAS CONTÍNUOS E ALGORITMOS PROXIMAIS

Uma maneira intuitiva de compreendermos alguns algoritmos proximais (PPA, RPA, IPA e RIPA) é obtê-los heurísticamente através da discretização de certas equações (e inclusões) diferenciais que modelam situações físicas convenientes para resolver o problema de otimização convexa $\min_{x \in \mathcal{H}} f(x)$, para uma dada função $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa e Fréchet-diferenciável tal que $\text{Argmin}(f) \neq \emptyset$.

Mais geralmente, vamos considerar também o problema de inclusão monótona (MIP) “encontrar $x \in \text{zer}(A)$ ” para um dado operador monótono maximal $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ tal que $\text{zer}(A) \neq \emptyset$, que se reduz ao problema de otimização convexa quando $A = \nabla f$, ou ainda quando $A = \partial f$ se f é apenas semicontínua inferiormente e não Fréchet-diferenciável, como vimos anteriormente.

Vale ressaltar que resultados que asseguram a convergência de um sistema contínuo (equação ou inclusão diferencial) não se traduzem automaticamente em garantia de convergência para os algoritmos iterativos obtidos via discretização. Mesmo assim, o estudo do caso contínuo pode dar luz ao comportamento esperado de um método iterativo, e ainda prover ideias e técnicas para o tratamento do caso discreto.

Considere uma partícula $x : [0, \infty[\rightarrow \mathcal{H}$ que se move em \mathcal{H} . Na esperança de $x(t)$ se aproximar assintoticamente de um minimizador de f , podemos considerar a situação em que

$$\dot{x}(t) = -\gamma \nabla f(x(t)) \tag{1.1}$$

para algum $\gamma > 0$, ou seja, em todo instante $t \geq 0$, a velocidade da partícula aponta na mesma direção e sentido de $-\nabla f(x(t))$, que é a direção de maior taxa de decréscimo de f a partir de $x(t)$.

Guiados por nossa abstração, podemos substituir o operador $\gamma \nabla f = \nabla(\gamma f)$ por $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ na EDO (1.1), ficando com a inclusão diferencial

$$\dot{x}(t) \in -A(x(t)) \quad (1.2)$$

cujas soluções esperamos convergirem para um ponto $x_\infty \in \text{zer}(A)$, solução de (MIP). O cenário em (1.2) foi estudado por Bruck Jr (1975), cujo Teorema 1 mostrou que se A é *demipositivo* e $\text{zer}(A) \neq \emptyset$ então $x(t) \rightarrow x_\infty$, para algum $x_\infty \in \text{zer}(A)$, incluindo o caso particular $A = \gamma \partial f$ no Teorema 3.

A fim de obtermos uma versão iterativa de (1.2), vamos realizar uma discretização implícita, considerando a aproximação $\dot{x}(t) \approx \frac{x(t) - x(t-h)}{h}$ para algum passo $h > 0$. Dessa forma, (1.2) nos dá

$$\frac{x(t) - x(t-h)}{h} \in -A(x(t)) \iff x(t-h) \in (I+hA)(x(t)) \iff x(t) = J_{hA}(x(t-h))$$

onde $J_{hA} = (I+hA)^{-1}$ é o resolvente de hA (veja Seção 2.4). Sendo então $x_0 = x(0)$, $(h_k)_{k \geq 0}$ uma sequência de tamanhos de passo positivos, $t_k = t_{k-1} + h_{k-1}$ com $t_0 = 0$, e $x_k = x(t_k)$, a equivalência acima para $t = t_{k+1}$ e $h = h_k$ nos permite concluir que se $x(t)$ é uma solução de (1.2), então ela *aproximadamente* satisfaz $x_{k+1} = J_{h_k A}(x_k)$. Essa iteração é a essência do *Algoritmo de Ponto Proximal* (PPA, *Proximal Point Algorithm* em inglês): para um dado ponto inicial $x_0 \in \mathcal{H}$, aplicar sucessivamente os operadores $J_{h_k A}$ nos iterados x_k , de forma similar⁶ à bem conhecida iteração de Banach-Picard, e portanto esperamos que x_k convirja para um $x_\infty \in \text{Fix}(J_{hA}) = \text{zer}(A)$, onde $\text{Fix}(T) := \{x \in \mathcal{H} : Tx = x\}$ é o conjunto dos pontos fixos de um operador $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$.

A convergência fraca do (PPA) para um ponto $x_\infty \in \text{zer}(A)$ foi estabelecida por Rockafellar (1976, Teorema 1) supondo que $h_k \geq \underline{h} > 0$, incluindo o cálculo inexato de $J_{h_k A}(x_k)$, e por Brezis e Lions (1978, Proposição 8) sob a hipótese mais modesta de que $\sum_{k=1}^{\infty} h_k^2 = \infty$.

Uma nova abordagem para resolver os problemas $\min_{x \in \mathcal{H}} f(x)$ e “encontrar $x \in \text{zer}(A)$ ” consiste em considerarmos problemas equivalentes a eles envolvendo objetos “regularizados”. Mais precisamente, considere⁷ um envelope de Moreau ${}^\lambda f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ de f e uma regularização de Yosida $A_\lambda : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ de A . ${}^\lambda f$ é uma função convexa e Fréchet-diferenciável (ainda que f seja apenas semicontínua inferiormente) e possui a amigável propriedade de que $\text{Argmin}({}^\lambda f) = \text{Argmin}(f)$, enquanto que A_λ é um operador (ponto-ponto) monótono maximal com $\text{zer}(A_\lambda) = \text{zer}(A)$. Dessa forma, de acordo com o raciocínio empregado em (1.1) e (1.2), podemos considerar as EDO's

$$\dot{x}(t) = -\nabla({}^\lambda f)(x(t)) \quad \text{e} \quad \dot{x}(t) = -A_\lambda(x(t)) \quad (1.3)$$

⁶ Exceto pelo fato de que o operador $J_{h_k A}$ varia de iteração para iteração, já que h_k está variando, e não necessariamente $J_{h_k A}$ são contrações (Proposição 2.8).

⁷ Detalhes sobre definição e propriedades básicas desses objetos podem ser encontrados nas seções 2.3 e 2.4.

e esperar que suas soluções convirjam assintoticamente para um $x_\infty \in \text{Argmin}(f)$ ou $x_\infty \in \text{zer}(A)$. Por sinal, as EDO's acima coincidem no caso $A = \partial f$, já que⁸ $(\partial f)_\lambda = \nabla(\lambda f)$. A convergência desses sistemas contínuos é ainda assegurada por Bruck Jr (1975) nos Teoremas 1 e 3. Para obtermos um algoritmo a partir de (1.3), vamos novamente realizar uma discretização implícita aproximando $\dot{x}(t)$ por $\frac{x(t)-x(t-h)}{h}$, e de forma análoga à dedução anterior obtemos⁹

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = -A_\lambda(x(t)) &\iff x(t) = J_{hA_\lambda}(x(t-h)) \\ &\iff x(t) = \left(1 - \frac{h}{h+\lambda}\right) \cdot x(t-h) + \frac{h}{h+\lambda} \cdot J_{(h+\lambda)A}(x(t-h)). \end{aligned}$$

Considerando as mesmas seqüências (h_k) , (t_k) e (x_k) definidas anteriormente e usando as equivalências acima para $t = t_{k+1}$ e $h = h_k$ concluímos que uma solução de (1.3) deve satisfazer aproximadamente a iteração $x_{k+1} = (1 - \rho_k)x_k + \rho_k J_{\mu_k A}(x_k)$, para $\rho_k = \frac{h_k}{h_k + \lambda}$ e $\mu_k = h_k + \lambda$, que corresponde ao *Algoritmo Proximal com Relaxação* (RPA, *Relaxed Proximal Algorithm* em inglês). Nesse caso, Eckstein e Bertsekas (1992, Teorema 3) mostraram que $x_k \rightarrow x_\infty$, para algum $x_\infty \in \text{zer}(A)$, assumindo $0 < \underline{\rho} \leq \rho_k \leq \bar{\rho} < 2$ e $\mu_k \geq \underline{\mu} > 0$, incluindo o caso com erro somável no cálculo de $J_{\mu_k A}(x_k)$.

Veja que o algoritmo (RPA) foi obtido a partir do (PPA) acrescentando o efeito de relaxação, que por sua vez foi tecnicamente introduzido quando substituímos a função f e o operador A por suas regularizações λf e A_λ . Para acrescentarmos o efeito de inércia ao (PPA), vamos considerar uma situação física diferente de (1.1), a chamada “*Heavy Ball With Friction*” (HBF), introduzida originalmente por Polyak (1964).

Considere $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa, Fréchet-diferenciável e suponha que f possua um minimizador, isto é, $\text{Argmin}(f) \neq \emptyset$. A fim de nos aproximarmos assintoticamente de um $x_\infty \in \text{Argmin}(f)$, podemos considerar uma nova situação em que uma bola, de massa unitária, desliza sobre a superfície de $\text{gra}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}\}$, segundo uma trajetória $r : [0, \infty[\rightarrow \mathcal{H} \times \mathbb{R}$ dada por $r(t) = (x(t), f(x(t)))$ com $x : [0, \infty[\rightarrow \mathcal{H}$. Veja uma ilustração na Figura 1.

Do ponto de vista físico, o movimento em \mathcal{H} descrito por $x(t)$ ocorre de acordo com o campo conservativo gerado pela função potencial f , e então podemos equacionar $\ddot{x}(t) = -\nabla f(x(t))$. Evidentemente, não esperamos algum tipo de convergência de $x(t)$ na ausência de atrito com $\text{gra}(f)$, já que a energia total $E(t) := \frac{1}{2}\|\dot{x}(t)\|^2 + f(x(t))$ permanece constante pois $E'(t) = \langle \dot{x}(t) | \ddot{x}(t) + \nabla f(x(t)) \rangle = 0$.

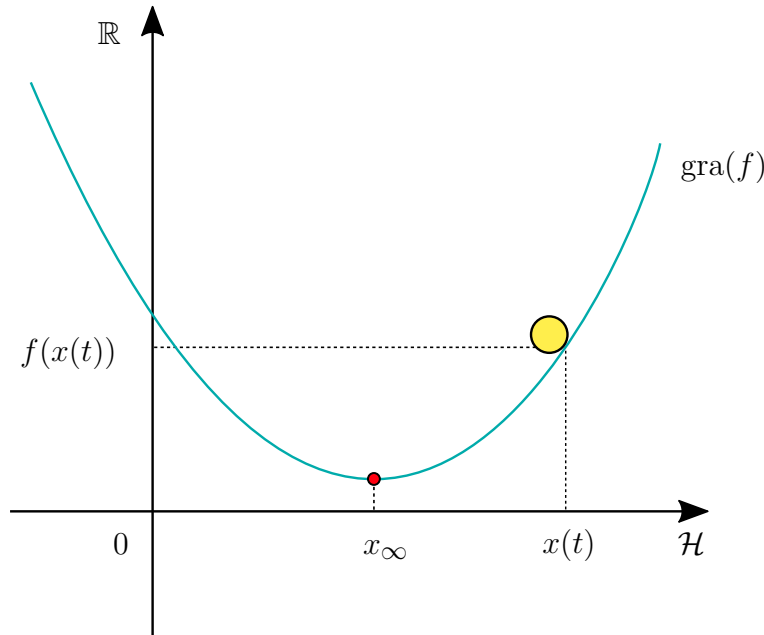
Precisamos então considerar um sistema dissipativo e portanto supomos a existência de atrito entre a bola e a superfície $\text{gra}(f)$, proporcional à velocidade. Dessa forma, $\ddot{x}(t) = -\nabla f(x(t)) - \gamma \dot{x}(t)$ para algum $\gamma > 0$, ou seja¹⁰

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \nabla f(x(t)) = 0. \quad (\text{HBF})$$

⁸ Proposição 2.6.

⁹ A última equivalência segue da Proposição 2.8(3).

¹⁰ Um desenvolvimento mais detalhado de (HBF) pode ser encontrado em Attouch *et al.* (2000), Seção 2.

Figura 1 – Representação do sistema *Heavy Ball With Friction*.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora, $E'(t) = \langle \dot{x}(t) | \ddot{x}(t) + \nabla f(x(t)) \rangle = -\gamma \cdot \|\dot{x}(t)\|^2 \leq 0$ como desejado. Esse sistema contínuo, também conhecido como *oscilador não-linear com atrito* (*non-linear oscillator with damping*, em inglês), foi estudado por diversos autores, dentre eles os já citados Attouch *et al.* (2000), e também Alvarez (2001).

A primeira demonstração de convergência de uma solução $x(t)$ de (HBF) foi fornecida por Alvarez (2001, Teorema 2.1), assumindo f Fréchet-diferenciável com ∇f contínuo e f limitada por baixo¹¹, garantindo que $\inf_{x \in \mathcal{H}} f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(x(t))$ e $x(t) \rightarrow x_\infty$ quando $t \rightarrow \infty$, para algum $x_\infty \in \text{Argmin}(f)$. Condições¹² para convergência forte foram estabelecidas no Teorema 2.4. Assumindo ainda que ∇f é Lipschitz em conjuntos limitados de \mathcal{H} , é provada a existência de soluções de (HBF), conforme Attouch *et al.* (2000, Teorema 4.3), e se f for fortemente convexa então a convergência de $x(t)$ para o único minimizador de f é na topologia da norma, de acordo com Attouch *et al.* (2000, Proposição 4.2).

Como antes, podemos abstrair o sistema (HBF) substituindo o operador ponto-ponto ∇f por um operador $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ monótono maximal tal que $\text{zer}(A) \neq \emptyset$, obtendo a inclusão diferencial

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + A(x(t)) \ni 0. \quad (1.4)$$

Esse caso contínuo geral é consideravelmente complicado, dado que nem se-

¹¹ isto é, $\inf_{x \in \mathcal{H}} f(x) > -\infty$, o que é automaticamente válido em nosso contexto pois estamos assumindo $\text{Argmin}(f) \neq \emptyset$.

¹² f ser par, isto é, $f(-x) = f(x)$, ou $\text{int Argmin}(f) \neq \emptyset$, onde “int” denota o interior topológico de um conjunto.

quer é clara a existência de soluções globais e, mesmo que fosse, a convergência de uma solução ainda seria um desafio. No caso especial em que $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é (ponto-ponto e) β -cocoercivo¹³ para algum $\beta > 0$, em particular (1.4) se torna uma equação diferencial, Attouch e Maingé (2011, Teorema 2.1) mostraram que existe solução $x(t)$ para (1.4) definida em $[0, \infty[$ e que $x(t) \rightarrow x_\infty$ para algum $x_\infty \in \text{zer}(A)$, supondo que $\beta\gamma^2 > 1$ e $\text{zer}(A) \neq \emptyset$, além de recuperarem a convergência de (HBF) estabelecida por Alvarez (2001) e Attouch *et al.* (2000) quando $A = \nabla f$.

Ainda assim, podemos discretizar a inclusão diferencial (1.4) na esperança de que o algoritmo iterativo obtido tenha boas propriedades de convergência para um $x_\infty \in \text{zer}(A)$. Nesse sentido, dado um passo $h > 0$, vamos considerar as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\approx \frac{x(t) - x(t-h)}{h} & \text{e} & & \dot{x}(t-h) &\approx \frac{x(t-h) - x(t-2h)}{h} \\ \ddot{x}(t) &\approx \frac{\dot{x}(t) - \dot{x}(t-h)}{h} \approx \frac{x(t) - 2x(t-h) + x(t-2h)}{h^2} \end{aligned}$$

Substituindo em (1.4):

$$\begin{aligned} (1 + \gamma h)x(t) - (2 + \gamma h)x(t-h) + x(t-2h) + h^2 A(x(t)) &\ni 0 \\ \implies ((1 + \gamma h)I + h^2 A)x(t) &\ni (1 + \gamma h)x(t-h) + x(t-h) - x(t-2h) \\ \implies \left(I + \frac{h^2}{1 + \gamma h} A \right) x(t) &\ni x(t-h) + \frac{1}{1 + \gamma h} (x(t-h) - x(t-2h)). \end{aligned}$$

Agora, definindo $t_k := kh$, $x_k := x(t_k)$, $\alpha := \frac{1}{1 + \gamma h} \in]0, 1[$ e $\mu := \frac{h^2}{1 + \gamma h} > 0$, a inclusão acima para $t = t_{k+1}$ e $k \geq 1$ nos dá

$$(I + \mu A)x_{k+1} \ni x_k + \alpha(x_k - x_{k-1}) \implies x_{k+1} = J_{\mu A}(x_k + \alpha(x_k - x_{k-1})).$$

Se permitirmos que os parâmetros $\alpha = \alpha_k \in [0, 1]$ e $\mu = \mu_k > 0$ variem a cada iteração, chegamos ao *Algoritmo Proximal com Inércia* (IPA, *Inertial Proximal Algorithm* em inglês) descrito por $x_{k+1} = J_{\mu_k A}(x_k + \alpha_k(x_k - x_{k-1}))$.

O caso particular de (IPA) em que $A = \partial f$, com f semicontínua inferiormente¹⁴, convexa e própria foi estudado em Alvarez (2001, Teorema 3.1), que sob hipóteses apropriadas mostrou que existe $x_\infty \in \text{Argmin}(f)$ tal que $x_k \rightarrow x_\infty$. A convergência anterior também foi provada para o caso $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ponto-ponto e cocoercivo em Jules e Maingé (2002, Teorema 2.1), e por fim o caso geral $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ monótono maximal foi estudado em Alvarez e Attouch (2001, Teorema 2.1 e Proposição 2.1). Contemplaremos o trabalho de Alvarez e Attouch (2001) no Capítulo 4.

Por fim, para acrescentarmos o efeito de relaxação ao algoritmo (IPA), de forma similar ao que fizemos previamente, vamos considerar o sistema contínuo (HBF) regularizado, ou seja, aplicado para um envelope de Moreau ${}^\lambda f$ de f . Mais geralmente,

¹³ $\langle x - y | Ax - Ay \rangle \geq \beta \|Ax - Ay\|^2, \forall x, y \in \mathcal{H}$.

¹⁴ Em particular quando f é Fréchet-diferenciável e então $A = \partial f = \nabla f$.

vamos considerar a inclusão diferencial (1.4) regularizada:

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + A_\lambda(x(t)) = 0. \quad (1.5)$$

A convergência fraca de uma solução $x(t)$ de (1.5) para um $x_\infty \in \text{zer}(A_\lambda) = \text{zer}(A)$ é assegurada por Attouch e Maingé (2011, Teorema 2.1) pois A_λ é um operador ponto-ponto e λ -cocoercivo. A discretização de (1.5), conforme procedemos acima para (1.4) e utilizando as sequências $t_k = kh$ e $x_k = x(t_k)$, nos dá a iteração $x_{k+1} = J_{\mu A_\lambda}(x_k + \alpha(x_k - x_{k-1}))$ e portanto¹⁵

$$\forall k \geq 1 : \quad \begin{cases} y_k = x_k + \alpha(x_k - x_{k-1}) \\ x_{k+1} = (1 - \rho)y_k + \rho J_{\mu A}(y_k) \end{cases}$$

onde $\rho := \frac{\mu}{\mu + \lambda} \in]0, 1[$. Se permitirmos que os parâmetros $\alpha = \alpha_k \in [0, 1]$, $\rho = \rho_k \in]0, 2]$ e $\mu = \mu_k > 0$ variem em cada iteração, temos finalmente o *Algoritmo Proximal com Inércia e Relaxação* (RIPA, *Relaxed Inertial Proximal Algorithm* em inglês) descrito por

$$\forall k \geq 1 : \quad \begin{cases} y_k = x_k + \alpha_k(x_k - x_{k-1}) \\ x_{k+1} = (1 - \rho_k)y_k + \rho_k J_{\mu_k A}(y_k) \end{cases} \quad (\text{RIPA})$$

A convergência fraca das sequências (x_k) e (y_k) geradas pelo (RIPA) para um $x_\infty \in \text{zer}(A)$ foi estabelecida por Attouch e Cabot (2020) nos Teoremas 2.6 e 2.14, e é o objetivo central deste trabalho. Os algoritmos (PPA), (RPA), (IPA) e (RIPA) descritos acima serão discutidos novamente na Seção 3.1, incluindo suas interpretações geométricas.

¹⁵ Proposição 2.8(3)

2 TEORIA PRELIMINAR

Neste capítulo, vamos sucintamente discutir a teoria de otimização convexa e de operadores monótonos (especialmente os maximais), a fim de embasar tecnicamente os capítulos seguintes, bem como tornar a leitura mais confortável, sem que o leitor necessite recorrer constantemente às bibliografias. Os resultados e definições, a menos de menção contrária, foram retirados de Bauschke e Combettes (2017), e possuirão as devidas referências para as provas. Ao longo do capítulo, também introduziremos a notação que será utilizada.

2.1 NOTAÇÃO BÁSICA

Ao longo de todo este trabalho, fixamos um espaço de Hilbert real \mathcal{H} com produto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$ e norma Euclidiana $\| \cdot \|$. A notação $\mathcal{H}^{\text{weak}}$ significa que estamos considerando em \mathcal{H} a topologia fraca, enquanto que \mathcal{H} e $\mathcal{H}^{\text{strong}}$ pressupõem a topologia forte, advinda da norma $\| \cdot \|$. Dados $\bar{x} \in \mathcal{H}$ e uma sequência $(x_k) \subseteq \mathcal{H}$, $x_k \rightarrow \bar{x}$ e $x_k \rightharpoonup \bar{x}$ representam, tradicionalmente, que a sequência (x_k) converge para \bar{x} nas topologias forte e fraca, respectivamente. $I : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador identidade $Ix = x$. $d(x, y) = \|x - y\|$ denota a distância Euclidiana entre $x, y \in \mathcal{H}$ e $d_C(x) = \inf\{\|x - y\| : y \in C\}$ denota a distância de x ao conjunto não-vazio $C \subseteq \mathcal{H}$.

Para os principais subconjuntos de \mathbb{R} , usaremos as notações explícitas $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ e similarmente para $\mathbb{R}_{> 0}$, $\mathbb{R}_{\leq 0}$ e $\mathbb{R}_{< 0}$. $]a, b[= \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$ será a notação (francesa) para intervalos, $[-\infty, \infty]$ denotará $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ com sua topologia usual, e similarmente para $] -\infty, \infty[$, $[-\infty, \infty[$ e $] -\infty, \infty]$. Para uma sequência $(t_k) \subseteq [-\infty, \infty]$, $t_k \nearrow t$ e $t_k \searrow t$ significam que $t_k \rightarrow t$ e que (t_k) é não-decrescente ($t_k \leq t_{k+1}$, $\forall k$) ou não-crescente ($t_k \geq t_{k+1}$, $\forall k$), respectivamente.

Vamos considerar o conjunto dos naturais como $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$. $\mathcal{P}(C)$ denota o conjunto das partes do conjunto C . Dado $t \in \mathbb{R}$, definimos $[t]_+ = \max\{t, 0\}$, ou seja, $[t]_+ = t$, se $t \geq 0$, e $[t]_+ = 0$, se $t < 0$. Vamos ainda adotar a seguinte importante notação: $\prod_{j=k+1}^k \alpha_j = 1$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, onde $(\alpha_j)_{j \geq 0} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ é uma sequência qualquer.

2.2 OPERADORES PONTO-PONTO E NÃO-EXPANSIVIDADE

Um *operador ponto-ponto* é simplesmente uma função $T : D \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definida em algum conjunto D não-vazio. O motivo de acrescentarmos aqui o adjetivo “ponto-ponto” é que veremos uma generalização desses operadores na Seção 2.4 que receberão o adjetivo “ponto-conjunto”. Denotaremos por $\text{Fix}(T) = \{x \in D : Tx = x\}$ o conjunto dos pontos fixos de T .

Vamos considerar apenas duas noções de não-expansividade, que serão suficientes para nossos propósitos, outras podem ser encontradas em Bauschke e Combettes (2017, Capítulo 4). T é dito *não-expansivo* se é 1-Lipschitz¹, ou seja, $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$, $\forall x, y \in D$, e é *firmemente não-expansivo* (“f.n.e.”, para abreviar) se $\|Tx - Ty\|^2 + \|(I - T)x - (I - T)y\|^2 \leq \|x - y\|^2$, $\forall x, y \in D$. Claramente, todo operador f.n.e. é também não-expansivo, e $-I$ é um contra-exemplo para a recíproca.

Proposição 2.1. *Dado $T : D \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, são equivalentes:*

1. T é firmemente não-expansivo;
2. $I - T$ é firmemente não-expansivo;
3. $2T - I$ é não-expansivo;
4. $\|Tx - Ty\|^2 \leq \langle x - y | Tx - Ty \rangle$, $\forall x, y \in D$;
5. $\langle Tx - Ty | (I - T)x - (I - T)y \rangle \geq 0$, $\forall x, y \in D$.

Demonstração. Proposição 4.4 de Bauschke e Combettes (2017). ■

2.3 OTIMIZAÇÃO CONVEXA

Dada uma função $f : \mathcal{H} \rightarrow [-\infty, \infty]$, definimos o *domínio* de f como $\text{dom}(f) := \{x \in \mathcal{H} : f(x) < \infty\}$ e dizemos que f é *própria* quando $f(x) > -\infty$, $\forall x \in \mathcal{H}$, e $\text{dom}(f) \neq \emptyset$, ou seja, $f : \mathcal{H} \rightarrow]-\infty, \infty]$ e f não é identicamente igual a ∞ . Além disso, f é *convexa* se

$$\forall x, y \in \text{dom}(f), \forall t \in]0, 1[: \quad f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) \quad (2.1)$$

ou, equivalentemente, se o *epigrafo* de f $\text{epi}(f) = \{(x, \xi) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R} : \xi \geq f(x)\}$ é convexo em $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$. Diremos ainda que f é *semicontínua inferiormente* (l.s.c.², para abreviar) se $\forall x \in \mathcal{H}$ e $\forall \xi \in]-\infty, f(x)[$, existir uma vizinhança aberta (de $\mathcal{H}^{\text{strong}}$) \mathcal{V} de x tal que $f(\mathcal{V}) \subseteq]\xi, \infty]$. Assim, definimos $\Gamma_0(\mathcal{H}) := \{g : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} : g \text{ é l.s.c., convexa e própria}\}$.

As condições que definem $\Gamma_0(\mathcal{H})$ são as condições mínimas de regularidade de uma função na otimização convexa, e diversas propriedades interessantes surgem da junção de semicontinuidade inferior com convexidade, como por exemplo a existência de um minorante afim contínuo e boas propriedades sobre existência de minimizadores (veja Teorema 9.20 e Capítulo 11 de Bauschke e Combettes (2017), respectivamente). Além disso, se $f : \mathcal{H} \rightarrow [-\infty, \infty]$ é l.s.c. e convexa, então f é l.s.c. em $\mathcal{H}^{\text{weak}}$.

¹ T é L -Lipschitz se $\|Tx - Ty\| \leq L\|x - y\| \forall x, y \in D$.

² *lower semicontinuous*, em inglês.

Dados $C \subseteq \mathcal{H}$ não-vazio e $f : \mathcal{H} \rightarrow [-\infty, \infty]$, definimos ainda o conjunto $\text{Argmin}_C(f) := \{x \in C : f(x) = \inf_{y \in C} f(y)\}$ dos minimizadores globais de f em C e representamos um elemento de $\text{Argmin}_C(f)$ (ou seja, um minimizador de f em C) por $\text{argmin}_C(f)$. Especialmente quando $C = \mathcal{H}$ usaremos simplesmente as notações $\text{Argmin}(f)$ e $\text{argmin}(f)$, respectivamente.

O problema clássico em otimização convexa é o de minimizar uma função $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ em \mathcal{H} , ou seja, encontrar (quando existir) $\bar{x} \in \text{Argmin}(f)$, que escrevemos resumidamente como

$$\min_{x \in \mathcal{H}} f(x). \quad (2.2)$$

Lembramos que quando C e f são convexos, todo *minimizador local* de f em C também é *minimizador global*, e então não precisamos considerar também um conjunto de minimizadores locais de f . Além disso, destacamos que a hipótese $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ não é suficiente para garantir a existência de um minimizador, nem em \mathcal{H} e tampouco em C . Para isso, em geral acrescentamos hipóteses que garantam³ que $\text{lev}_{\leq \eta}(f) \cap C$ seja não-vazio, fechado, convexo e limitado (portanto compacto em $\mathcal{H}^{\text{weak}}$), para algum $\eta \in \mathbb{R}$, onde $\text{lev}_{\leq \eta}(f) = \{x \in \mathcal{H} : f(x) \leq \eta\}$. A unicidade do minimizador em (2.2) é assegurada exigindo que f seja estritamente convexa⁴.

O caso de minimização com restrições pode ser incorporado a (2.2) da seguinte forma: considere um subconjunto não-vazio $C \subseteq \mathcal{H}$ e a *função indicadora* i_C de C , dada por $i_C : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, onde $i_C(x) = 0$, se $x \in C$, e $i_C(x) = \infty$, se $x \notin C$. Dessa forma, se $f + i_C$ for própria, ou seja, se $\text{dom}(f) \cap C \neq \emptyset$, então $\text{Argmin}_C(f) = \text{Argmin}(f + i_C)$ e escrevemos

$$\min_{x \in C} f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \min_{x \in \mathcal{H}} f(x) + i_C(x). \quad (2.3)$$

Ainda, quando C é fechado e convexo, então i_C também é l.s.c. e convexa, de forma que $f + i_C \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ e portanto (2.3) está contemplado em (2.2).

Dados $\mu > 0$ e $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$, definimos o *envelope de Moreau* de f (de parâmetro μ) como sendo a função ${}^\mu f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$${}^\mu f(x) = \min_{y \in \mathcal{H}} \left(f(y) + \frac{1}{2\mu} \|x - y\|^2 \right). \quad (2.4)$$

${}^\mu f$ é uma regularização da função f e possui as seguintes propriedades:

Proposição 2.2. *Sejam $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ e $\mu > 0$ e defina ${}^\mu f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ por (2.4). Então, ${}^\mu f$ é convexa, contínua, e o mínimo em (2.4) é unicamente atingido.*

³ Geralmente pedimos que C seja convexo, fechado e $\text{dom}(f) \cap C \neq \emptyset$ e que ou C é ainda limitado, ou f é coerciva, ou seja, $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, que é equivalente a $\text{lev}_{\leq \eta}(f)$ ser limitado $\forall \eta \in \mathbb{R}$.

⁴ Quando vale a desigualdade estrita em (2.1) $\forall x \neq y$.

Demonstração. Não é imediato que a função ${}^\mu f$ definida por (2.4) assume apenas valores reais, mas isso e as demais afirmações da proposição seguem de Bauschke e Combettes (2017, Proposição 12.15) ■

O fato de o mínimo em (2.4) ser atingido por exatamente um $y \in \mathcal{H}$ nos permite definir o *operador proximal* (de f) $\text{Prox}_f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ por

$$\text{Prox}_f(x) = \underset{y \in \mathcal{H}}{\text{argmin}} \left(f(y) + \frac{1}{2} \|x - y\|^2 \right) \quad (2.5)$$

ou seja, $\text{Prox}_f(x)$ é o único ponto em \mathcal{H} que realiza o mínimo em (2.4) (para $\mu = 1$):

$${}^1 f(x) = \min_{y \in \mathcal{H}} \left(f(y) + \frac{1}{2} \|x - y\|^2 \right) = f(\text{Prox}_f(x)) + \frac{1}{2} \|x - \text{Prox}_f(x)\|^2. \quad (2.6)$$

O operador proximal possui as seguintes propriedades:

Proposição 2.3. *Dados $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ e $\mu > 0$, temos:*

1. $\text{Prox}_{\mu f}$ e $I - \text{Prox}_{\mu f}$ são firmemente não-expansivos;
2. ${}^\mu f$ é Fréchet diferenciável e $\nabla({}^\mu f) = \frac{1}{\mu}(I - \text{Prox}_{\mu f})$ é $\frac{1}{\mu}$ -Lipschitz (em particular contínuo)
3. $\text{Argmin}({}^\mu f) = \text{Fix}(\text{Prox}_{\mu f}) = \text{Argmin}(\mu f) = \text{Argmin}(f)$

Demonstração. O itens 1) e 2) seguem, respectivamente, das Proposições 12.28 e 12.30 de Bauschke e Combettes (2017). A primeira igualdade no item 3) segue de $\text{Argmin}({}^\mu f) = \{x \in \mathcal{H} : \nabla({}^\mu f)(x) = 0\}$ (pois ${}^\mu f$ é convexa e diferenciável) e do item 2), enquanto que a segunda igualdade segue da Proposição 12.29 de Bauschke e Combettes (2017) e a terceira igualdade é imediata. ■

2.4 OPERADORES MONÓTONOS (MAXIMAIS)

Um operador *ponto-conjunto* (ou *set-valued*) A é, tecnicamente, uma função de \mathcal{H} em $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ (conjunto das partes de \mathcal{H}), que denotaremos por $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$, com seta dupla, para diferenciar de um operador ponto-ponto $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Intuitivamente, um operador ponto-conjunto $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$, como o nome sugere, associa a cada ponto de \mathcal{H} um subconjunto de \mathcal{H} (um elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{H})$), ou seja, $Ax \subseteq \mathcal{H}$ pode conter mais de um ponto, diferentemente dos operadores ponto-ponto. Um vetor $u \in Ax$ (quando existir) será chamado de *(uma) imagem* de x pelo operador A .

Como exemplo, considere o operador $\Pi_C : \mathcal{H} \rightrightarrows C$ de projeção sobre um conjunto não-vazio $C \subseteq \mathcal{H}$, ou seja, $p \in \Pi_C(x) \Leftrightarrow p \in C$ e $\|x - p\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|$. Note que, como em qualquer operador ponto-conjunto, pode existir $x \in \mathcal{H}$ para o qual

$\Pi_C(x) = \emptyset$, que nesse caso significa não existir nenhuma projeção de x em C , como quando $x = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ e $C = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$.

Dado um operador $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$, definimos o *domínio* de A por $\text{dom}(A) = \{x \in \mathcal{H} : Ax \neq \emptyset\}$ e o *gráfico* de A por $\text{gra}(A) = \{(x, u) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : u \in Ax\}$, ou seja, em $\text{gra}(A)$ nós “colamos” a cada ponto $x \in \mathcal{H}$ todos os vetores u na imagem de x por A . Definimos ainda o conjunto $\text{zer}(A) = \{x \in \mathcal{H} : 0 \in Ax\}$ de zeros do operador A , e a *inversa* de A é o operador ponto-conjunto $A^{-1} : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ em que $x \in A^{-1}(u) \Leftrightarrow u \in Ax$, ou seja, $\text{gra}(A^{-1}) = \{(u, x) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : u \in Ax\}$. Veja que $\text{zer}(A) = A^{-1}(0)$.

Por exemplo, se C é convexo, fechado e não-vazio, então todo $x \in \mathcal{H}$ possui uma única projeção em C , donde $\text{dom}(\Pi_C) = \mathcal{H}$ e $\#\Pi_C(x) = 1$, ou seja, Π_C é um operador ponto-ponto $\Pi_C : \mathcal{H} \rightarrow C$ definido em todo \mathcal{H} .

Um dos exemplos mais importantes de operador ponto-conjunto surge na tentativa de definirmos uma noção mais fraca de gradiente e diferenciabilidade para funções que não são Gâteaux diferenciáveis⁵. Dada uma função própria $f : \mathcal{H} \rightarrow]-\infty, \infty]$, o *subdiferencial* de f é o operador ponto-conjunto $\partial f : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ dado por

$$\partial f(x) = \{u \in \mathcal{H} : \langle y - x | u \rangle + f(x) \leq f(y), \forall y \in \mathcal{H}\}. \quad (2.7)$$

Dizemos que f é *subdiferenciável* em x se $\partial f(x) \neq \emptyset$, e nesse caso os vetores $u \in \partial f(x)$ são chamados de *subgradientes* de f em x .

Proposição 2.4. *Seja $f : \mathcal{H} \rightarrow]-\infty, \infty]$ uma função própria. Então,*

1. $\text{Argmin}(f) = \text{zer}(\partial f)$, ou seja, $x \in \mathcal{H}$ é um minimizador (global) de f se, e somente se, $0 \in \partial f(x)$;
2. se f é convexa, $x \in \text{dom}(f)$ e f é Gâteaux diferenciável em x , então $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

Demonstração. Veja Bauschke e Combettes (2017, Proposições 16.3 e 17.31). ■

Agora, note que se $T : D \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é um operador ponto-ponto, então podemos vê-lo também como um operador ponto-conjunto $\hat{T} : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ definido por $\hat{T}(x) = \{Tx\}$, se $x \in D$, e $\hat{T}(x) = \emptyset$, se $x \notin D$. Dessa forma, temos $\text{dom}(\hat{T}) = D$ e $\text{gra}(\hat{T}) = \text{gra}(T) = \{(x, Tx) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : x \in D\}$, e portanto podemos sempre pensar operadores ponto-ponto como operadores ponto-conjunto, mas não vice-versa. Assim, de agora em diante usaremos “operador” sem necessariamente usar os adjetivos “ponto-ponto” ou “ponto-conjunto”, e a notação $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ou $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ indicará a natureza do objeto.

⁵ Uma função própria $f : \mathcal{H} \rightarrow]-\infty, \infty]$ é Gâteaux diferenciável em $x \in \text{dom}(f)$ se existe um vetor $\nabla f(x) \in \mathcal{H}$ tal que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t} = \langle y | \nabla f(x) \rangle$, $\forall y \in \mathcal{H}$. Se isso valer para todo $x \in \text{dom}(f)$, diremos simplesmente que f é Gâteaux diferenciável.

Dados $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ e $\mu > 0$, definimos o *resolvente* de A como $J_A = (I + A)^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e a *regularização de Yosida* de A (de parâmetro μ) como $A_\mu = \frac{1}{\mu}(I - J_{\mu A}) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Um operador $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ é *monótono* se $\langle x - y \mid y - v \rangle \geq 0$, para quaisquer $(x, u), (y, v) \in \text{gra}(A)$, e A é *monótono maximal* se é monótono e não existe operador monótono $B : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ com $\text{gra}(A) \subsetneq \text{gra}(B)$. Abaixo, destacamos diversas boas propriedades dos operadores monótonos maximais.

Teorema 2.5 (Minty). *Se $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ é monótono maximal, então $J_A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é um operador ponto-ponto definido em todo \mathcal{H}*

Demonstração. Veja Minty (1962). Alternativamente, podemos mostrar o resultado como uma consequência do Teorema 21.1 de Bauschke e Combettes (2017). ■

Segue imediatamente do Teorema 2.5 que se A é monótono maximal, então $J_{\mu A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e $A_\mu : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ também são ponto-ponto e definidos em todo \mathcal{H} , já que μA também é monótono maximal, para qualquer $\mu > 0$.

Proposição 2.6. *Se $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$, então ∂f é monótono maximal e temos $J_{\mu \partial f} = \text{Prox}_{\mu f}$ e $(\partial f)_\mu = \nabla(\mu f) = \frac{1}{\mu}(I - \text{Prox}_{\mu f})$, para qualquer $\mu > 0$.*

Demonstração. Veja o Teorema 20.25 e o Exemplo 23.3 de Bauschke e Combettes (2017), e a Proposição 2.3(2). ■

Proposição 2.7. *Seja $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ monótono maximal. Então,*

1. $\text{gra}(A)$ é *sequencialmente fechado* em $\mathcal{H}^{\text{strong}} \times \mathcal{H}^{\text{weak}}$;
2. $\text{gra}(A)$ é *sequencialmente fechado* em $\mathcal{H}^{\text{weak}} \times \mathcal{H}^{\text{strong}}$;
3. $\text{gra}(A)$ é *fechado* em $\mathcal{H}^{\text{strong}} \times \mathcal{H}^{\text{strong}}$.

Demonstração. Veja Bauschke e Combettes (2017, Proposição 20.38). ■

Proposição 2.8. *Sejam $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ um operador monótono maximal e $\mu > 0$. Então,*

1. $J_{\mu A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e $I - J_{\mu A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ são *f.n.e.* e *monótonos maximais*. Em particular, são *operadores 1-Lipschitz*, ou seja, *não-expansivos*;
2. $A_\mu : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é $\frac{1}{\mu}$ -*Lipschitz* e *monótono maximal*;
3. $J_{hA_\mu} = I + \frac{h}{h+\mu} \cdot (J_{(h+\mu)A} - I)$.

Demonstração. Veja o Corolário 23.11 e a Proposição 23.7(iv) de Bauschke e Combettes (2017). ■

Proposição 2.9. *Sejam $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ monótono maximal e $\mu > 0$. Então, $\text{zer}(A) = \text{Fix}(J_{\mu A}) = \text{zer}(A_\mu)$ é *fechado* e *convexo*.*

Demonstração. Veja as Proposições 23.38 e 23.39 de Bauschke e Combettes (2017). ■

Veja que no caso particular de $A = \partial f$, com $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$, as Proposições 2.8 e 2.6 recuperam o item 1) da Proposição 2.3, enquanto que as Proposições 2.9, 2.6 e 2.4(1) recuperam o item 3) da Proposição 2.3, já que $\text{zer}(\partial f)_\mu = \text{zer}(\nabla(\mu f)) = \text{Argmin}(\mu f)$ pois μf é convexa e então $x \in \text{Argmin}(\mu f) \Leftrightarrow \nabla(\mu f)(x) = 0$.

2.5 COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO

Nesta seção, fixamos funções $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sequências $(a_k), (b_k), (c_k) \subseteq \mathbb{R}$ tais que $g(t), h(t), (b_k)$ e (c_k) são eventualmente não-nulas⁶.

Representaremos por $f(t) = o(g(t))$ a propriedade que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$. Analogamente, $a_k = o(b_k)$ significará que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = 0$. Vez ou outra, usaremos a notação $o(g(t))$ para representar **alguma** função $f(t)$ com a propriedade $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$. Dessa forma, é fácil concluir que⁷ $d_1 \cdot o(g(t)) + d_2 \cdot o(g(t)) = o(g(t))$ para quaisquer constantes $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, e que $o(g(t)) \cdot h(t) = o(g(t)h(t))$, por exemplo. Similarmente, $o(b_k)$ pode representar uma sequência (a_k) qualquer, com a propriedade $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = 0$, e então $d_1 \cdot o(b_k) + d_2 \cdot o(b_k) = o(b_k)$ e $o(b_k) \cdot c_k = o(b_k c_k)$. Em particular, dado $\alpha > 0$, $f(t) = o(t^\alpha)$ quando $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} = 0$ e $f(t) = o(1)$ quando $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

Representaremos por $f(t) \sim g(t)$ se $t \rightarrow \infty$ e diremos que $f(t)$ e $g(t)$ são *assintoticamente iguais* quando $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$. Analogamente, denotaremos por $a_k \sim b_k$ se $k \rightarrow \infty$ quando $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = 1$ e diremos que (a_k) e (b_k) são *assintoticamente iguais*. É fácil checar que \sim é uma relação de equivalência na coleção das sequências e na coleção de funções reais a parâmetros reais, e que $a_k \sim b_k \Leftrightarrow \frac{a_k}{b_k} = 1 + o(1) \Leftrightarrow a_k - b_k = o(b_k) \Leftrightarrow a_k - b_k = o(a_k)$ (valendo propriedade similar para funções). Para simplificar um pouco a notação, podemos também omitir “se $t \rightarrow \infty$ ” e “se $k \rightarrow \infty$ ” e escrever simplesmente $f(t) \sim g(t)$ e $a_k \sim b_k$.

Representaremos por $f(t) = \mathcal{O}(g(t))$ se existe constante $D \geq 0$ tal que $|f(t)| \leq D|g(t)|$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e por $f(t) = \mathcal{O}(g(t))$ se $t \rightarrow \infty$ se existem $D \geq 0$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ tais que para todo $t \geq t_0$ vale $|f(t)| \leq D|g(t)|$. O mesmo vale para sequências: denotaremos por $a_k = \mathcal{O}(b_k)$ se existe $D \geq 0$ tal que $|a_k| \leq D|b_k|$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e por $a_k = \mathcal{O}(b_k)$ se $k \rightarrow \infty$ se existem $D \geq 0$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|a_k| \leq D|b_k|$ para todo $k \geq k_0$.

Proposição 2.10. *Se $g(t) \sim h(t)$, então $f(t) = o(g(t)) \Leftrightarrow f(t) = o(h(t))$ e $f(t) = \mathcal{O}(g(t))$ se $t \rightarrow \infty \Leftrightarrow f(t) = \mathcal{O}(h(t))$ se $t \rightarrow \infty$. Similarmente, se $b_k \sim c_k$, então $a_k = o(b_k) \Leftrightarrow a_k = o(c_k)$ e $a_k = \mathcal{O}(b_k)$ se $k \rightarrow \infty \Leftrightarrow a_k = \mathcal{O}(c_k)$ se $k \rightarrow \infty$.*

⁶ $g(t)$ é eventualmente não-nula se existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(t) \neq 0$, $\forall t \geq t_0$. Similarmente, (b_k) é eventualmente não-nula quando existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_k \neq 0$ se $k \geq k_0$.

⁷ Alguns autores usam a notação $o(g(t))$ para representar a coleção das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$. Com essa notação, poderíamos reescrever a propriedade a seguir dizendo que $o(g(t))$ é um \mathbb{R} -espaço vetorial.

Demonstração. Como $g(t) \sim h(t)$, temos $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{h(t)} = 1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{g(t)}$. Começemos mostrando a primeira equivalência. Suponha $f(t) = o(g(t))$, ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$. Daí,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{h(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} \cdot \frac{g(t)}{h(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{h(t)} = 0 \cdot 1 = 0$$

o que mostra que $f(t) = o(h(t))$. Similarmente, se $f(t) = o(h(t))$ então $f(t) = o(g(t))$.

Para a segunda equivalência, suponha $f(t) = \mathcal{O}(g(t))$ se $t \rightarrow \infty$, ou seja, $|f(t)| \leq D \cdot |g(t)|$, $\forall t \geq t_0$, e para alguns $D \geq 0$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Como $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{h(t)} = 1$, existe $t_1 \geq t_0$ tal que para $t \geq t_1$ temos $|g(t)| \leq 2 \cdot |h(t)|$. Dessa forma, se $t \geq t_1$, $|f(t)| \leq 2D \cdot |h(t)|$, o que mostra $f(t) = \mathcal{O}(h(t))$ se $t \rightarrow \infty$. A outra implicação é análoga, usando que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{g(t)} = 1$.

As demais equivalências (para sequências) se provam de maneira inteiramente análoga. ■

Proposição 2.11. Se $f(t) = o(g(t))$, então $f(t) = \mathcal{O}(g(t))$ se $t \rightarrow \infty$. Similarmente, se $a_k = o(b_k)$, então $a_k = \mathcal{O}(b_k)$ se $k \rightarrow \infty$.

Demonstração. Como $f(t) = o(g(t))$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$ e portanto existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que se $t \geq t_0$ então $\left| \frac{f(t)}{g(t)} \right| \leq 1 \Rightarrow |f(t)| \leq |g(t)|$ se $t \geq t_0$, o que mostra $f(t) = \mathcal{O}(g(t))$ se $t \rightarrow \infty$. O caso das sequências é análogo. ■

Proposição 2.12. Se $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ e $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são tais que $f_i = \mathcal{O}(g(t))$, então $d_1 f_1 + d_2 f_2 = \mathcal{O}(g(t))$. Similarmente, se (a_k^1) e (a_k^2) são sequências reais tais que $a_k^i = \mathcal{O}(b_k)$, então $d_1 a_k^1 + d_2 a_k^2 = \mathcal{O}(b_k)$. O resultado permanece verdadeiro acrescentando os casos “se $t \rightarrow \infty$ ” e “se $k \rightarrow \infty$ ”.

Demonstração. Faremos apenas o caso de funções com “se $t \rightarrow \infty$ ”, pois os demais casos são análogos. Suponha então que $f_i = \mathcal{O}(g(t))$ se $t \rightarrow \infty$. Daí, existem $t_i \in \mathbb{R}$ e $D_i \geq 0$ tais que se $t \geq t_i$, então $|f_i(t)| \leq D_i \cdot |g(t)|$. Dessa forma, para $t_0 := \max\{t_1, t_2\}$, temos que se $t \geq t_0$ então $|d_1 f_1(t) + d_2 f_2(t)| \leq (|d_1|D_1 + |d_2|D_2)|g(t)|$, o que mostra que $d_1 f_1 + d_2 f_2 = \mathcal{O}(g(t))$ se $t \rightarrow \infty$. ■

Veja que uma mudança de escala nas funções $f(t)$ ou $g(t)$ não interfere na propriedade de $f(t) = o(g(t))$ ou $f(t) = \mathcal{O}(g(t))$, ou seja:

Proposição 2.13. Sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ constantes. Então, $f(t) = o(g(t)) \Leftrightarrow d_1 \cdot f(t) = o(g(t)) \Leftrightarrow f(t) = o(d_2 \cdot g(t))$ e $f(t) = \mathcal{O}(g(t)) \Leftrightarrow d_1 \cdot f(t) = \mathcal{O}(g(t)) \Leftrightarrow f(t) = \mathcal{O}(d_2 \cdot g(t))$. Similarmente para sequências, $a_k = o(b_k) \Leftrightarrow d_1 \cdot a_k = o(b_k) \Leftrightarrow a_k = o(d_2 \cdot b_k)$ e $a_k = \mathcal{O}(b_k) \Leftrightarrow d_1 \cdot a_k = \mathcal{O}(b_k) \Leftrightarrow a_k = \mathcal{O}(d_2 \cdot b_k)$. O resultado permanece verdadeiro se acrescentarmos os casos “se $t \rightarrow \infty$ ” e “se $k \rightarrow \infty$ ” nas afirmações com $\mathcal{O}(\cdot)$.

Demonstração. Para o caso de $o(\cdot)$ com funções, as equivalências seguem de:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0 \iff \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d_1 \cdot f(t)}{g(t)} = 0 \iff \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{d_2 \cdot g(t)} = 0.$$

Para o caso de $O(\cdot)$ com funções, as equivalências seguem de $\exists D \geq 0 : |f(t)| \leq D|g(t)| \quad \forall t \in \mathbb{R} \iff \exists D \geq 0 : |d_1 \cdot f(t)| \leq D|g(t)| \quad \forall t \in \mathbb{R} \iff \exists D \geq 0 : |f(t)| \leq D \cdot |d_2 \cdot g(t)| \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Os demais casos seguem de forma análoga. ■

Vale comentar que se $a_i \sim b_i$ ($a_i, b_j > 0, \forall i, j$), então a convergência de $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ é equivalente à de $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$, pelos testes usuais de séries. Por fim, utilizaremos ainda a seguinte definição:

Definição 2.14. Dados uma sequência real $(t_k)_{k \geq 1}$ e $\zeta \in \mathbb{R}$, diremos que (t_k) é *eventualmente "bounded away from" ζ* se uma das seguintes condições (mutuamente exclusivas) é satisfeita:

1. existem $k_0 \in \mathbb{N}$ e $\bar{t} < \zeta$ tais que $t_k \leq \bar{t} < \zeta, \forall k \geq k_0$;
2. existem $k_0 \in \mathbb{N}$ e $\bar{t} > \zeta$ tais que $t_k \geq \bar{t} > \zeta, \forall k \geq k_0$.

Se para algum dos itens acima pudermos tomar $k_0 = 1$, então diremos simplesmente que $(t_k)_{k \geq 1}$ é *bounded away from ζ* .

Embora a Definição 2.14 seja tecnicamente ambígua por contemplar dois casos excludentes, o contexto em que ela será utilizada deixará claro qual das situações estaremos considerando.

2.6 ALGUNS RESULTADOS ÚTEIS

Para finalizar o capítulo, vamos compilar alguns resultados que serão utilizados ao longo do trabalho.

Lema 2.15. *Dados $x, y \in \mathcal{H}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos*

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y\|^2 + \alpha(1 - \alpha)\|x - y\|^2 = \alpha\|x\|^2 + (1 - \alpha)\|y\|^2.$$

Demonstração. Basta utilizar que a norma em questão é Euclidiana, ou seja, $\|x\|^2 = \langle x | x \rangle$, e portanto $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2$, ou veja Bauschke e Combettes (2017, Corolário 2.15). ■

Lema 2.16. *Sejam $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ monótono maximal com $\text{zer}(A) \neq \emptyset$, $\gamma, \delta > 0$, $x, y \in \mathcal{H}$ e $z \in \text{zer}(A)$. Então:*

$$\|\gamma A_\gamma(x) - \delta A_\delta(y)\| \leq 2\|x - y\| + 2\|x - z\| \cdot \frac{|\gamma - \delta|}{\gamma}$$

Demonstração. Este resultado foi retirado de Attouch e Peypouquet (2019, Lema A.4). Primeiramente, vamos mostrar que

$$J_{\gamma A}(x) = J_{\delta A} \left(\frac{\delta}{\gamma} \cdot x + \left(1 - \frac{\delta}{\gamma}\right) \cdot J_{\gamma A}(x) \right). \quad (2.8)$$

Com efeito, como $J_{\gamma A} = (I + \gamma A)^{-1}$, temos $x \in (I + \gamma A) J_{\gamma A}(x) = J_{\gamma A}(x) + \gamma \cdot A(J_{\gamma A}(x)) \implies \frac{\delta}{\gamma}(x - J_{\gamma A}(x)) \in \delta A(J_{\gamma A}(x)) \implies \frac{\delta}{\gamma}x + (1 - \frac{\delta}{\gamma}) J_{\gamma A}(x) \in (I + \delta A) J_{\gamma A}(x)$, o que nos dá a Equação (2.8). Agora, usando essa equação e a Proposição 2.8 temos

$$\begin{aligned} \|J_{\gamma A}(x) - J_{\delta A}(y)\| &= \left\| J_{\delta A} \left(\frac{\delta}{\gamma} \cdot x + \left(1 - \frac{\delta}{\gamma}\right) \cdot J_{\gamma A}(x) \right) - J_{\delta A}(y) \right\| \\ &\leq \left\| \frac{\delta}{\gamma} \cdot x + \left(1 - \frac{\delta}{\gamma}\right) \cdot J_{\gamma A}(x) - y \right\| \\ &= \left\| x - y + \left(1 - \frac{\delta}{\gamma}\right) (J_{\gamma A}(x) - x) \right\| \\ &\leq \|x - y\| + \frac{|\gamma - \delta|}{\gamma} \|J_{\gamma A}(x) - x\| \end{aligned}$$

já que $1 - \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\gamma - \delta}{\gamma}$. Daí, ficamos com

$$\begin{aligned} \|\gamma A_{\gamma}(x) - \delta A_{\delta}(y)\| &= \|x - J_{\gamma A}(x) - (y - J_{\delta A}(y))\| \\ &= \|x - y - (J_{\gamma A}(x) - J_{\delta A}(y))\| \\ &\leq \|x - y\| + \|J_{\gamma A}(x) - J_{\delta A}(y)\| \\ &\leq 2\|x - y\| + \frac{|\gamma - \delta|}{\gamma} \|J_{\gamma A}(x) - x\|. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Agora, como $z \in \text{zer}(A) = \text{Fix}(J_{\delta A})$ (Proposição 2.9), temos $J_{\delta A}(z) = z$ e portanto $\|J_{\gamma A}(x) - x\| = \|J_{\gamma A}(x) - J_{\delta A}(z) + z - x\| \leq \|x - z\| + \|J_{\gamma A}(x) - J_{\delta A}(z)\| \leq 2\|x - z\|$ (Proposição 2.8), e então o resultado segue de (2.9). ■

Lema 2.17 (Opial). *Sejam $S \subseteq \mathcal{H}$ um conjunto não-vazio e $(x_k)_{k \geq 0}$ uma sequência qualquer em \mathcal{H} . Suponha que*

1. *para todo $z \in S$, a sequência real $(\|x_k - z\|)_{k \geq 0}$ converge;*
2. *todo ponto de aderência fraco da sequência (x_k) pertence a S .*

Então, existe $x_{\infty} \in S$ tal que $x_k \rightharpoonup x_{\infty}$ (convergência fraca em \mathcal{H}).

Demonstração. A demonstração deste lema pode ser feita utilizando clássicos teoremas sobre a topologia fraca de um espaço de Banach, como os teoremas de Banach-Alaoglu e de Eberlein-Smulian, especialmente suas versões para um espaço de Hilbert. Os detalhes podem ser encontrados em Bauschke e Combettes (2017, Lema 2.47). Alternativamente, pode-se consultar diretamente o artigo original de Opial (1967) em que o resultado foi apresentado. ■

3 O ALGORITMO (RIPA)

Neste capítulo, apresentaremos detalhadamente o algoritmo (RIPA) para resolver o problema de inclusão monótona “encontrar $x \in \mathcal{H}$ tal que $0 \in Ax$ ”, escrito de forma concisa como

$$\text{encontrar } x \in \text{zer}(A) \quad (\text{MIP})$$

para um dado operador monótono maximal $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ com $\text{zer}(A) \neq \emptyset$.

Conforme já mencionamos na Introdução, um importante caso particular ocorre quando $A = \partial f$ com $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$, que é operador monótono maximal pela Proposição 2.6. Dessa forma, pela Proposição 2.4, $\text{zer}(A) = \text{Argmin}(f)$ e portanto (MIP) é equivalente a encontrar $x \in \text{Argmin}(f)$, ou seja, resolver o problema de otimização convexa $\min_{x \in \mathcal{H}} f(x)$. Assim, um algoritmo para resolver (MIP) é, em particular, um algoritmo para o problema de otimização convexa (2.2).

Também provaremos algumas propriedades básicas relacionadas ao (RIPA), e que serão frequentemente utilizadas nos capítulos seguintes nas provas de convergência.

3.1 APRESENTAÇÃO DO ALGORITMO

Dados um operador monótono maximal $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$, pontos iniciais $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ e seqüências de parâmetros reais $(\alpha_k)_{k \geq 0}$, $(\rho_k)_{k \geq 0}$ e $(\mu_k)_{k \geq 0}$, com $\alpha_k \geq 0$, $\rho_k > 0$ e $\mu_k > 0$, definimos o *Algoritmo Proximal com Inércia e Relaxação* (RIPA, *Relaxed Inertial Proximal Algorithm* em inglês) por:

$$\forall k \geq 1 : \quad \begin{cases} y_k = x_k + \alpha_k(x_k - x_{k-1}) \\ x_{k+1} = (1 - \rho_k)y_k + \rho_k J_{\mu_k A}(y_k). \end{cases} \quad (\text{RIPA})$$

A seqüência (y_k) gerada pelo (RIPA) é uma seqüência intermediária. (α_k) serão chamados de *parâmetros de inércia* enquanto que (ρ_k) serão os *parâmetros de relaxação*, pois a primeira e a segunda equação acima correspondem, respectivamente, aos efeitos de inércia e relaxação, como veremos a seguir.

Considere primeiramente o caso particular de (RIPA) em que $\alpha_k = 0$ (sem inércia) e $\rho_k = 1$ (sem relaxação). Dessa forma, $y_k = x_k$ e ficamos simplesmente com o bem conhecido *Algoritmo de Ponto Proximal* (PPA, *Proximal Point Algorithm* em inglês) dado por

$$\forall k \geq 0 : \quad x_{k+1} = J_{\mu_k A}(x_k) \quad (\text{PPA})$$

para um dado ponto inicial $x_0 \in \mathcal{H}$. Sendo (x_k) a seqüência gerada pelo (PPA), foi demonstrado que existe $x_\infty \in \text{zer}(A)$ tal que $x_k \rightarrow x_\infty$ por Rockafellar (1976, Teorema 1) assumindo $\mu_k \geq \underline{\mu} > 0$, e por Brezis e Lions (1978, Proposição 8) assumindo $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 = \infty$, conforme mencionamos na Seção 1.1.

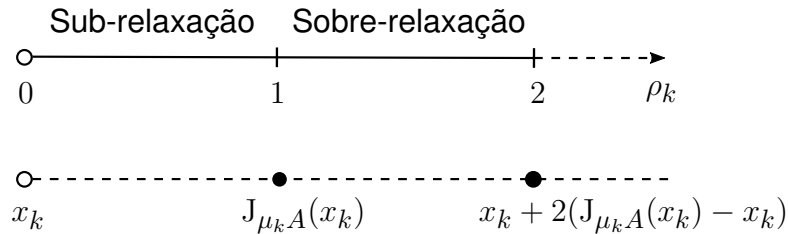
A essa iteração, na tentativa de acelerar a convergência, podemos acrescentar dois efeitos distintos: relaxação e/ou inércia. A relaxação consiste em definirmos o próximo iterado x_{k+1} como sendo uma combinação afim do iterado atual x_k e de $J_{\mu_k A}(x_k)$, ou seja, $x_{k+1} = (1 - \rho_k)x_k + \rho_k J_{\mu_k A}(x_k)$, com $\rho_k > 0$, nos dando o *Algoritmo Proximal com Relaxação* (RPA, *Relaxed Proximal Algorithm* em inglês)

$$\forall k \geq 0 : \quad x_{k+1} = (1 - \rho_k)x_k + \rho_k J_{\mu_k A}(x_k) \quad (\text{RPA})$$

para dado ponto inicial $x_0 \in \mathcal{H}$. Para garantir a convergência fraca de (x_k) gerada pelo (RPA) para um $x_\infty \in \text{zer}(A)$, Eckstein e Bertsekas (1992, Teorema 3) exigiram que $0 < \underline{\rho} \leq \rho_k \leq \bar{\rho} < 2$ e $\mu_k \geq \underline{\mu} > 0$.

Veja que o (RPA) é o caso particular de (RIPA) em que $\alpha_k = 0$ e portanto $y_k = x_k$. Outra forma de visualizar essa iteração é reescrevendo-a como $x_{k+1} = x_k + \rho_k (J_{\mu_k A}(x_k) - x_k)$, ou seja, para atualizarmos o iterado, partimos do atual x_k e “caminhamos” na direção de $J_{\mu_k A}(x_k) - x_k$ um tamanho de passo ρ_k . Se $\rho_k > 1$ chamamos de *sobre-relaxação*; se $\rho_k < 1$ temos a *sub-relaxação*; e se $\rho_k = 1$ então voltamos ao (PPA). A Figura 2 ilustra a iteração de (RPA).

Figura 2 – Iteração de (RPA). Qualquer ponto entre x_k e $x_k + 2(J_{\mu_k A}(x_k) - x_k)$ é um candidato a x_{k+1} , excetuando-se o próprio x_k , já que $\rho_k > 0$ e em geral $\rho_k \leq 2$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No efeito de inércia, antes de avaliarmos o resolvente $J_{\mu_k A}$, vamos definir um ponto intermediário y_k dado por $y_k = x_k + \alpha_k(x_k - x_{k-1})$, com $\alpha_k \geq 0$, e então atualizamos o iterado simplesmente aplicando o resolvente em y_k , ou seja, $x_{k+1} = J_{\mu_k A}(y_k)$, o que nos dá o *Algoritmo Proximal com Inércia* (IPA, *Inertial Proximal Algorithm* em inglês)

$$\forall k \geq 1 : \quad \begin{cases} y_k = x_k + \alpha_k(x_k - x_{k-1}) \\ x_{k+1} = J_{\mu_k A}(y_k) \end{cases} \quad (\text{IPA})$$

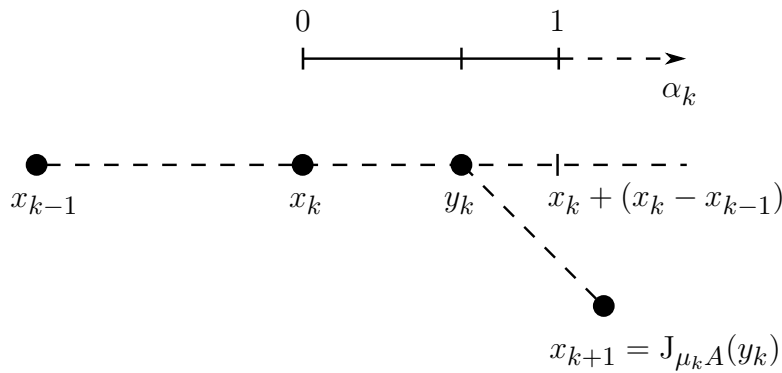
para dados pontos iniciais $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ e $\alpha_k \geq 0$. Alvarez e Attouch (2001, Teorema 2.1 e Proposição 2.1) mostraram que a sequência (x_k) gerada pelo (IPA) converge fraco

para um $x_\infty \in \text{zer}(A)$, assumindo $\mu_k \geq \underline{\mu} > 0$ e:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha} < 1 \\ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha} < \frac{1}{3} \\ (\alpha_k)_{k \geq 0} \text{ não-decrescente.} \end{array} \right.$$

Intuitivamente, o vetor $x_k - x_{k-1}$ corresponde à direção sobre a qual caminhamos do iterado x_{k-1} anterior para o x_k atual, com tamanho de passo igual a 1. Na inércia a ideia é, partindo do ponto atual x_k , caminhar novamente na direção $x_k - x_{k-1}$ um tamanho de passo $\alpha_k \geq 0$ (em geral, exigimos pelo menos $\alpha_k \leq 1$ para convergência), totalizando um passo de $1 + \alpha_k \geq 1$ a partir de x_{k-1} , como evidenciam a forma alternativa $y_k = x_{k-1} + (1 + \alpha_k)(x_k - x_{k-1})$ e a Figura 3.

Figura 3 – Iteração de (IPA). y_k pode ser qualquer ponto entre x_k e $x_k + (x_k - x_{k-1})$, já que em geral temos $\alpha_k \leq 1$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por sua vez, o (RIPA), como o nome já indica, combina ambos os efeitos de inércia e relaxação, conforme ilustra a Figura 4. Observe que o hiperplano que passa por $J_{\mu_k A}(y_k)$ com vetor normal $y_k - J_{\mu_k A}(y_k)$ separa y_k do conjunto fechado e convexo¹ $\text{zer}(A)$, conforme torna preciso a Observação 3.1:

Observação 3.1. Defina a função afim e contínua $L_k : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $L_k(z) = \langle y_k - J_{\mu_k A}(y_k) \mid z - J_{\mu_k A}(y_k) \rangle$. Então, vale que $L_k(\text{zer}(A)) \subseteq]-\infty, 0]$ e $L_k(y_k) \geq 0$, bem como a equivalência $L_k(y_k) = 0 \Leftrightarrow y_k = J_{\mu_k A}(y_k) \Leftrightarrow x_{k+1} = y_k \in \text{zer}(A)$.

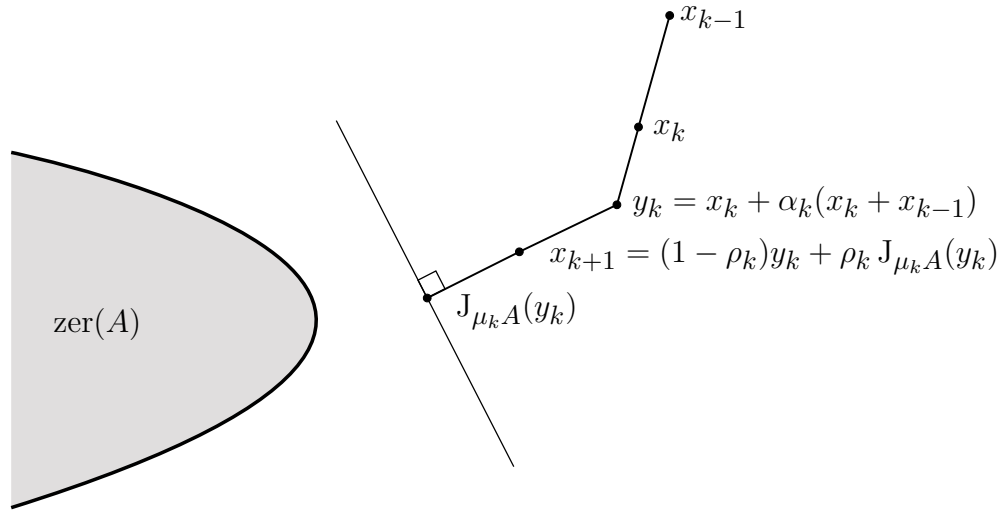
Com efeito, dado $z \in \text{zer}(A)$, temos $J_{\mu_k A}(z) = z$ (Proposição 2.9) e então

$$\begin{aligned} L_k(z) &= \langle z - J_{\mu_k A}(y_k) + y_k - z \mid z - J_{\mu_k A}(y_k) \rangle \\ &= \|z - J_{\mu_k A}(y_k)\|^2 + \langle y_k - z \mid z - J_{\mu_k A}(y_k) \rangle \\ &= \|J_{\mu_k A}(z) - J_{\mu_k A}(y_k)\|^2 - \langle z - y_k \mid J_{\mu_k A}(z) - J_{\mu_k A}(y_k) \rangle \end{aligned}$$

¹ Proposição 2.9.

donde $L_k(z) \leq 0$ pelas Proposições 2.8(1) e 2.1(4), o que mostra $L_k(\text{zer}(A)) \subseteq]-\infty, 0]$. $L_k(y_k) \geq 0$ é imediato, bem como $L_k(y_k) = 0 \Leftrightarrow y_k = J_{\mu_k A}(y_k) \Leftrightarrow y_k \in \text{Fix}(J_{\mu_k A}) = \text{zer}(A)$, onde a última igualdade segue da Proposição 2.9. Por fim, da definição de (RIPA) temos $x_{k+1} = y_k \Leftrightarrow y_k - J_{\mu_k A}(y_k) = 0$, o que nos dá toda a equivalência afirmada.

Figura 4 – Iteração de (RIPA) considerando sub-relaxação ($\rho_k < 1$).



Fonte: Attouch e Cabot (2020, p. 4), modificado pelo autor.

Há ainda outras propriedades geométricas interessantes de (RIPA) que estão ilustradas na Figura 4, conforme destacamos abaixo nas demais observações.

Observação 3.2. Se $z \in \text{zer}(A)$, então $\|z - y_k\|^2 \geq \|z - J_{\mu_k A}(y_k)\|^2 + \|J_{\mu_k A}(y_k) - y_k\|^2$. Em particular, tomando o ínfimo sobre $z \in \text{zer}(A)$ ficamos com $d_{\text{zer}(A)}^2(y_k) \geq d_{\text{zer}(A)}^2(J_{\mu_k A}(y_k)) + \|J_{\mu_k A}(y_k) - y_k\|^2$, ou seja, $J_{\mu_k A}(y_k)$ está mais próximo de $\text{zer}(A)$ do que y_k .

De fato, basta notar que $\|z - y_k\|^2 = \|z - J_{\mu_k A}(y_k)\|^2 + \|J_{\mu_k A}(y_k) - y_k\|^2 + 2\langle z - J_{\mu_k A}(y_k) | J_{\mu_k A}(y_k) - y_k \rangle \geq \|z - J_{\mu_k A}(y_k)\|^2 + \|J_{\mu_k A}(y_k) - y_k\|^2$, onde a desigualdade segue da Observação 3.1 pois $L_k(z) \leq 0$.

Observação 3.3. Para qualquer $z \in \text{zer}(A)$, temos $\|z - x_{k+1}\|^2 \leq \|z - y_k\|^2 - (2 - \rho_k)\rho_k \cdot \|y_k - J_{\mu_k A}(y_k)\|^2$, donde $d_{\text{zer}(A)}^2(x_{k+1}) \leq d_{\text{zer}(A)}^2(y_k) - (2 - \rho_k)\rho_k \|y_k - J_{\mu_k A}(y_k)\|^2$. Dessa forma, se $\rho_k \leq 2$ então x_{k+1} está mais próximo de $\text{zer}(A)$ do que y_k .

Para verificarmos a Observação 3.3, note que $z - x_{k+1} = z - (1 - \rho_k)y_k - \rho_k J_{\mu_k A}(y_k) = (1 - \rho_k)(z - y_k) + \rho_k(z - J_{\mu_k A}(y_k))$, e portanto pelo Lema 2.15 temos

$$\|z - x_{k+1}\|^2 = (1 - \rho_k)\|z - y_k\|^2 + \rho_k\|z - J_{\mu_k A}(y_k)\|^2 - \rho_k(1 - \rho_k)\|y_k - J_{\mu_k A}(y_k)\|^2.$$

² Nos Capítulos 4 e 5 a condição $\rho_k \leq 2$ será onipresente, a fim de garantir a convergência de (RIPA).

Agora, pela Observação 3.2, temos $\|z - J_{\mu_k A}(y_k)\|^2 \leq \|z - y_k\|^2 - \|J_{\mu_k A}(y_k) - y_k\|^2$, e portanto

$$\begin{aligned} & \|z - x_{k+1}\|^2 \\ & \leq (1 - \rho_k)\|z - y_k\|^2 + \rho_k\|z - y_k\|^2 - \rho_k\|y_k - J_{\mu_k A}(y_k)\|^2 - \rho_k(1 - \rho_k)\|y_k - J_{\mu_k A}(y_k)\|^2 \\ & = \|z - y_k\|^2 - \rho_k(2 - \rho_k)\|y_k - J_{\mu_k A}(y_k)\|^2 \end{aligned}$$

o que nos dá a desigualdade desejada. A desigualdade envolvendo $d_{\text{zer}(A)}^2$ segue da anterior tomando o ínfimo sobre $z \in \text{zer}(A)$.

Hipóteses e referências para convergência dos algoritmos (PPA), (RPA) e (IPA) citados acima também foram mencionadas na Introdução do trabalho, especialmente na Seção 1.1. A convergência do (RIPA) será discutida no Capítulo 4 com base em Attouch e Cabot (2020). A menos de menção contrária, ao longo de todo o trabalho estaremos assumindo que:

$$\begin{cases} A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H} \text{ é um operador monótono maximal} \\ \alpha_k \geq 0, \forall k \geq 0 \\ \rho_k > 0 \text{ e } \mu_k > 0, \forall k \geq 0. \end{cases} \quad (\text{H})$$

3.2 FORMAS EQUIVALENTES DO (RIPA)

Nesta seção, vamos reescrever o Algoritmo (RIPA) de algumas formas ligeiramente diferentes, mas que serão convenientes mais à frente. Como vimos, ele originalmente é descrito por:

$$\forall k \geq 1 : \begin{cases} y_k = x_k + \alpha_k(x_k - x_{k-1}) \\ x_{k+1} = (1 - \rho_k)y_k + \rho_k J_{\mu_k A}(y_k). \end{cases} \quad (\text{RIPA})$$

Como $(1 - \rho_k)y_k + \rho_k J_{\mu_k A}(y_k) = y_k - \rho_k(y_k - J_{\mu_k A}(y_k)) = y_k - \rho_k \mu_k A_{\mu_k}(y_k)$, pois $A_{\mu_k} = \frac{1}{\mu_k}(I - J_{\mu_k A})$, podemos reescrever (RIPA) como:

$$\forall k \geq 1 : \begin{cases} y_k = x_k + \alpha_k(x_k - x_{k-1}) \\ x_{k+1} = y_k - \rho_k \mu_k A_{\mu_k}(y_k). \end{cases} \quad (3.1)$$

Intuitivamente, a iteração em (3.1) pode ser vista como um método de descida do gradiente combinado com inércia, já que a primeira equação incorpora o efeito da inércia, enquanto a segunda corresponde ao passo (a partir de y_k) na direção $-A_{\mu_k}(y_k)$ com tamanho $\rho_k \mu_k$. Para o caso particular de $A = \partial f$, com $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$, a Proposição 2.6 nos dá $A_{\mu_k} = \nabla^{(\mu_k f)}$ e isso nos leva ao algoritmo

$$\forall k \geq 1 : \begin{cases} y_k = x_k + \alpha_k(x_k - x_{k-1}) \\ x_{k+1} = y_k - \rho_k \mu_k \nabla^{(\mu_k f)}(y_k) \end{cases}$$

que é aproximadamente uma versão inercial do algoritmo de descida com direção do gradiente, aplicado às funções ${}^{\mu_k}f$, o que está de acordo com a proposta de (RIPA) para resolver o problema de encontrar³ $x \in \text{zer}(A) = \text{Argmin}({}^{\mu_k}f)$.

Para a terceira e última formulação equivalente de (RIPA), note que

$$\xi = A_{\mu}(y) \quad \text{se, e somente se,} \quad \xi \in A(y - \mu\xi). \quad (3.2)$$

De fato, $\xi = A_{\mu}(y) = \frac{1}{\mu}(I - J_{\mu A})(y) \Leftrightarrow (I + \mu A)^{-1}(y) = J_{\mu A}(y) = y - \mu\xi \Leftrightarrow y \in (I + \mu A)(y - \mu\xi) = y - \mu\xi + \mu A(y - \mu\xi) \Leftrightarrow \xi \in A(y - \mu\xi)$. Assim, (3.2) nos dá

$$\begin{aligned} x_{k+1} = y_k - \rho_k \mu_k A_{\mu_k}(y_k) &\Leftrightarrow -\frac{1}{\rho_k \mu_k}(x_{k+1} - y_k) = A_{\mu_k}(y_k) \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{\rho_k \mu_k}(x_{k+1} - y_k) \in A\left(y_k + \frac{1}{\rho_k}(x_{k+1} - y_k)\right) \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{\rho_k \mu_k}(x_{k+1} - y_k) \in A\left(x_{k+1} + \left(\frac{1}{\rho_k} - 1\right)(x_{k+1} - y_k)\right) \\ &\Leftrightarrow x_{k+1} - y_k \in -\rho_k \mu_k A\left(x_{k+1} + \left(\frac{1}{\rho_k} - 1\right)(x_{k+1} - y_k)\right) \end{aligned}$$

que combinado com (3.1) nos dá a seguinte formulação equivalente ao (RIPA):

$$\forall k \geq 1 : \quad \begin{cases} y_k = x_k + \alpha_k(x_k - x_{k-1}) \\ x_{k+1} - y_k \in -\rho_k \mu_k A\left(x_{k+1} + \left(\frac{1}{\rho_k} - 1\right)(x_{k+1} - y_k)\right). \end{cases} \quad (3.3)$$

3.3 A SEQUÊNCIA ÂNCORA (h_k)

Dados $z \in \mathcal{H}$ e $(x_k)_{k \geq 0}$ uma sequência em \mathcal{H} (não necessariamente gerada pelo (RIPA)), a sequência real $h_k := \frac{1}{2}\|x_k - z\|^2$ terá grande relevância no estudo do comportamento assintótico do algoritmo, especialmente a diferença $h_{k+1} - h_k - \alpha_k(h_k - h_{k-1})$ e o caso em que (x_k) é de fato gerada pelo (RIPA). Vamos estudar essa sequência em detalhes nos lemas a seguir.

Lema 3.4. *Sejam⁴ $(x_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathcal{H}$, $(\alpha_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}$, $z \in \mathcal{H}$ e defina a sequência âncora $h_k = \frac{1}{2}\|x_k - z\|^2$. Então, para $y_k := x_k + \alpha_k(x_k - x_{k-1})$ e qualquer $k \geq 1$, temos:*

$$h_{k+1} - h_k - \alpha_k(h_k - h_{k-1}) = \frac{1}{2}(\alpha_k + \alpha_k^2)\|x_k - x_{k-1}\|^2 + \langle x_{k+1} - y_k | x_{k+1} - z \rangle - \frac{1}{2}\|x_{k+1} - y_k\|^2. \quad (3.4)$$

Demonstração. Veja que

$$h_{k+1} = \frac{1}{2}\|x_{k+1} - z\|^2 = \frac{1}{2}\|x_{k+1} - y_k + y_k - z\|^2$$

³ A igualdade $\text{zer}(A) = \text{Argmin}({}^{\mu_k}f)$ segue das Proposições 2.3 (item 3) e 2.4 (item 1) pois $A = \partial f$.

⁴ (x_k) não necessariamente é a sequência gerada pelo (RIPA) e (α_k) não necessariamente é não-negativa.

$$= \frac{1}{2} \|x_{k+1} - y_k\|^2 + \langle x_{k+1} - y_k \mid y_k - z \rangle + \frac{1}{2} \|y_k - z\|^2.$$

Como $\langle x_{k+1} - y_k \mid y_k - z \rangle = \langle x_{k+1} - y_k \mid y_k - x_{k+1} + x_{k+1} - z \rangle = -\|x_{k+1} - y_k\|^2 + \langle x_{k+1} - y_k \mid x_{k+1} - z \rangle$, temos

$$h_{k+1} = -\frac{1}{2} \|x_{k+1} - y_k\|^2 + \langle x_{k+1} - y_k \mid x_{k+1} - z \rangle + \frac{1}{2} \|y_k - z\|^2.$$

Agora, note que $\|y_k - z\|^2 = \|x_k + \alpha_k(x_k - x_{k-1}) - z\|^2 = \|(1 + \alpha_k)(x_k - z) + (-\alpha_k)(x_{k-1} - z)\|^2$ que pelo Lema 2.15 nos dá

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|y_k - z\|^2 &= \frac{1 + \alpha_k}{2} \|x_k - z\|^2 - \frac{\alpha_k}{2} \|x_{k-1} - z\|^2 + \frac{\alpha_k + \alpha_k^2}{2} \|x_k - x_{k-1}\|^2 \\ &= (1 + \alpha_k)h_k - \alpha_k h_{k-1} + \frac{\alpha_k + \alpha_k^2}{2} \|x_k - x_{k-1}\|^2. \end{aligned}$$

Assim, ficamos com

$$\begin{aligned} h_{k+1} &= -\frac{1}{2} \|x_{k+1} - y_k\|^2 + \langle x_{k+1} - y_k \mid x_{k+1} - z \rangle + (1 + \alpha_k)h_k - \alpha_k h_{k-1} \\ &\quad + \frac{\alpha_k + \alpha_k^2}{2} \|x_k - x_{k-1}\|^2 \end{aligned}$$

o que mostra (3.4). ■

Agora, vamos particularizar o Lema 3.4 para o caso em que vale (H) e (x_k) é a sequência gerada pelo (RIPA):

Lema 3.5. *Assuma (H), sejam $(z, q) \in \text{gra}(A)$, $(x_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathcal{H}$ e $(y_k)_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ as sequências geradas pelo (RIPA) (para dados pontos iniciais $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$), e defina $h_k = \frac{1}{2} \|x_k - z\|^2$, $k \geq 0$. Então, para $k \geq 1$:*

$$\begin{aligned} h_{k+1} - h_k - \alpha_k(h_k - h_{k-1}) + \rho_k \mu_k \left\langle x_{k+1} + \left(\frac{1}{\rho_k} - 1 \right) (x_{k+1} - y_k) - z \mid q \right\rangle \leq \\ \frac{1}{2} (\alpha_k + \alpha_k^2) \|x_k - x_{k-1}\|^2 - \frac{(2 - \rho_k)}{2\rho_k} \|x_{k+1} - y_k\|^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Se ainda $\text{zer}(A) \neq \emptyset$ e $z \in \text{zer}(A)$, então para $k \geq 1$:

$$h_{k+1} - h_k - \alpha_k(h_k - h_{k-1}) \leq \frac{1}{2} (\alpha_k + \alpha_k^2) \|x_k - x_{k-1}\|^2 - \frac{(2 - \rho_k)}{2\rho_k} \|x_{k+1} - y_k\|^2. \quad (3.6)$$

Demonstração. Pela formulação equivalente do (RIPA) em (3.3), para todo $k \geq 1$ temos que

$$-\frac{1}{\rho_k \mu_k} (x_{k+1} - y_k) \in A \left(x_{k+1} + \left(\frac{1}{\rho_k} - 1 \right) (x_{k+1} - y_k) \right).$$

Como A é monótono e também $(z, q) \in \text{gra}(A)$, ou seja, $q \in Az$, temos

$$\left\langle x_{k+1} + \left(\frac{1}{\rho_k} - 1 \right) (x_{k+1} - y_k) - z \mid -\frac{1}{\rho_k \mu_k} (x_{k+1} - y_k) - q \right\rangle \geq 0$$

donde

$$\begin{aligned} & \left\langle x_{k+1} + \left(\frac{1}{\rho_k} - 1 \right) (x_{k+1} - y_k) - z \mid q \right\rangle \leq \\ & - \frac{1}{\rho_k \mu_k} \left\langle x_{k+1} + \left(\frac{1}{\rho_k} - 1 \right) (x_{k+1} - y_k) - z \mid x_{k+1} - y_k \right\rangle \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} & \rho_k \mu_k \left\langle x_{k+1} + \left(\frac{1}{\rho_k} - 1 \right) (x_{k+1} - y_k) - z \mid q \right\rangle \leq \\ & - \langle x_{k+1} - z \mid x_{k+1} - y_k \rangle - \left(\frac{1}{\rho_k} - 1 \right) \|x_{k+1} - y_k\|^2. \end{aligned}$$

Agora, vamos somar aos dois lados da última desigualdade acima o valor $h_{k+1} - h_k - \alpha_k(h_k - h_{k-1})$, que é igual a $\frac{1}{2}(\alpha_k + \alpha_k^2)\|x_k - x_{k-1}\|^2 + \langle x_{k+1} - y_k \mid x_{k+1} - z \rangle - \frac{1}{2}\|x_{k+1} - y_k\|^2$ pelo Lema 3.4. Isso nos dá a desigualdade (3.5) desejada, pois

$$-\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\rho_k} - 1 \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\rho_k} = \frac{\rho_k - 2}{2\rho_k} = -\frac{(2 - \rho_k)}{2\rho_k}.$$

A desigualdade em (3.6) segue de (3.5) tomando $q = 0 \in Az$ já que agora $z \in \text{zer}(A)$. ■

Vamos particularizar ainda mais, acrescentando às hipóteses do Lema 3.5 que $0 < \rho_k \leq 2$:

Lema 3.6. *Assuma (H), suponha que $(\rho_k)_{k \geq 0} \subseteq]0, 2]$ e que $z \in \text{zer}(A)$. Sejam $(x_k)_{k \geq 0}$ e $(y_k)_{k \geq 1}$ as seqüências em \mathcal{H} geradas pelo (RIPA) (para dados pontos iniciais $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$). Então, para todo $k \geq 1$ vale:*

$$\begin{aligned} h_{k+1} - h_k - \alpha_k(h_k - h_{k-1}) & \leq \left[\frac{1}{2}(\alpha_k + \alpha_k^2) - \frac{(2 - \rho_k)}{2\rho_k}(1 - \alpha_k)^2 \right] \|x_k - x_{k-1}\|^2 \\ & \quad - \frac{(2 - \rho_k)}{2\rho_k}(1 - \alpha_k) \left(\|x_{k+1} - x_k\|^2 - \|x_k - x_{k-1}\|^2 \right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Demonstração. Pela segunda parte do Lema 3.6, basta mostrarmos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\alpha_k + \alpha_k^2)\|x_k - x_{k-1}\|^2 - \frac{(2 - \rho_k)}{2\rho_k}\|x_{k+1} - y_k\|^2 \leq \\ & \left[\frac{1}{2}(\alpha_k + \alpha_k^2) - \frac{(2 - \rho_k)}{2\rho_k}(1 - \alpha_k)^2 \right] \|x_k - x_{k-1}\|^2 \\ & - \frac{(2 - \rho_k)}{2\rho_k}(1 - \alpha_k) \left(\|x_{k+1} - x_k\|^2 - \|x_k - x_{k-1}\|^2 \right). \end{aligned}$$

Como $0 < \rho_k \leq 2$, temos $\frac{2 - \rho_k}{2\rho_k} \geq 0$. Logo, é suficiente mostrarmos que

$$-\|x_{k+1} - y_k\|^2 \leq -(1 - \alpha_k)^2\|x_k - x_{k-1}\|^2 - (1 - \alpha_k) \left(\|x_{k+1} - x_k\|^2 - \|x_k - x_{k-1}\|^2 \right)$$

ou seja,

$$\|x_{k+1} - y_k\|^2 - (1 - \alpha_k)^2 \|x_k - x_{k-1}\|^2 - (1 - \alpha_k) \left(\|x_{k+1} - x_k\|^2 - \|x_k - x_{k-1}\|^2 \right) \geq 0.$$

Como $x_{k+1} - y_k = x_{k+1} - x_k - \alpha_k(x_k - x_{k-1})$, temos $\|x_{k+1} - y_k\|^2 = \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \alpha_k^2 \|x_k - x_{k-1}\|^2 - 2\alpha_k \langle x_{k+1} - x_k | x_k - x_{k-1} \rangle$. Logo, basta que

$$\begin{aligned} & \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \alpha_k^2 \|x_k - x_{k-1}\|^2 - 2\alpha_k \langle x_{k+1} - x_k | x_k - x_{k-1} \rangle \\ & - (1 - \alpha_k)^2 \|x_k - x_{k-1}\|^2 - (1 - \alpha_k) \left(\|x_{k+1} - x_k\|^2 - \|x_k - x_{k-1}\|^2 \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Agrupando os termos com $\|x_{k+1} - x_k\|^2$ e com $\|x_k - x_{k-1}\|^2$, temos que a desigualdade acima é equivalente a

$$\alpha_k \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \alpha_k \|x_k - x_{k-1}\|^2 - 2\alpha_k \langle x_{k+1} - x_k | x_k - x_{k-1} \rangle \geq 0$$

mas essa desigualdade é verdadeira, pois o lado esquerdo é igual a $\alpha_k \|x_{k+1} - x_k - (x_k - x_{k-1})\|^2$, que é trivialmente não-negativo já que $\alpha_k \geq 0$ por (H). ■

3.4 AS SEQUÊNCIAS (t_i) E $(t_{i,k})$

Considere o problema de inclusão monótona (MIP) em que A é o operador (ponto-ponto) nulo, ou seja, $Ax = \{0\}$, $\forall x \in \mathcal{H}$. Então, todo $x \in \mathcal{H}$ satisfaz $0 \in Ax$ e portanto é solução de (MIP). Vamos analisar o que ocorre com o algoritmo (RIPA) nessa situação. Temos que $J_{\mu_k A} = (I + \mu_k A)^{-1} = I^{-1} = I$ e portanto $x_{k+1} = y_k = x_k + \alpha_k(x_k - x_{k-1})$, ou seja, $x_{k+1} - x_k = \alpha_k(x_k - x_{k-1})$, $\forall k$. Usando recursivamente essa igualdade chegamos a

$$x_{k+1} - x_k = \left(\prod_{j=1}^k \alpha_j \right) (x_1 - x_0), \quad \forall k \geq 1.$$

Fazendo uma soma telescópica em k iniciando em 1, temos

$$x_{k+1} = x_1 + \left[\sum_{l=1}^k \left(\prod_{j=1}^l \alpha_j \right) \right] (x_1 - x_0), \quad \forall k \geq 1.$$

Escrevendo $v = x_1 - x_0$ e $\beta_k = \sum_{l=1}^k \left(\prod_{j=1}^l \alpha_j \right)$, temos $x_k = x_0 + \beta_k v$, $\forall k \geq 1$. Se⁵ $v \neq 0$, ou seja, $x_1 \neq x_0$, é fácil verificar que a convergência (fraca e forte) de (x_k) é equivalente à convergência de (β_k) e, nesse caso, se $\beta = \lim \beta_k$, então $x_k \rightarrow x_0 + \beta v$. Como a série envolvida na definição de β_k é formada por termos não-negativos, a convergência de (β_k) é equivalente a $\sum_{l=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^l \alpha_j \right) < \infty$.

⁵ se $v = 0$, então $x_0 = x_1 \Rightarrow x_0 = x_1 = y_1$. Como $J_{\mu_k A} = I$, temos $x_2 = y_1 = x_1$ e indutivamente mostramos $x_k = x_0, \forall k \geq 1$ e então o algoritmo trivialmente converge.

Assim, concluímos que mesmo para o operador mais simples (do ponto de vista de resolver o problema (MIP)), a sequência (x_k) gerada pelo (RIPA) converge (fraco ou forte) para uma solução⁶ se, e somente se, $\sum_{l=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^l \alpha_j \right) < \infty$ (exceto quando $x_0 = x_1$, quando a sequência permanece constante e portanto trivialmente converge). Portanto, a fim de que (RIPA) convirja, é natural impormos a condição

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^l \alpha_j \right) < \infty.$$

Na prática, vamos garantir a convergência acima exigindo algo mais forte (condição (K_0) abaixo), mas que em algumas situações práticas interessantes é equivalente à condição acima (quando $\alpha_k > 0, \forall k$, por exemplo, como ocorre nos resultados da Seção 5.3. Veja Lema 3.7(2)). Assim, vamos assumir que

$$\sum_{l=i}^{\infty} \left(\prod_{j=i}^l \alpha_j \right) < \infty, \quad \forall i \geq 1. \quad (K_0)$$

Assumindo (K_0) , podemos definir a sequência real⁷

$$t_i := 1 + \sum_{l=i}^{\infty} \left(\prod_{j=i}^l \alpha_j \right) = \sum_{l=i-1}^{\infty} \left(\prod_{j=i}^l \alpha_j \right), \quad \forall i \geq 1 \quad (3.8)$$

e mesmo sem (K_0) , podemos definir as sequências⁸

$$t_{i,k} = \begin{cases} 1 + \sum_{l=i}^{k-1} \left(\prod_{j=i}^l \alpha_j \right) = \sum_{l=i-1}^{k-1} \left(\prod_{j=i}^l \alpha_j \right), & \text{se } i \leq k \\ 0, & \text{se } i > k. \end{cases} \quad (3.9)$$

Veja que, para um dado i , $(t_{i,k})_{k \geq i}$ é a sequência de somas parciais de t_i .

Lema 3.7. *Seja $(\alpha_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ e defina a sequência $(t_{i,k})$ pela Equação (3.9). Então:*

1. $\forall i, k$ com $k \geq i + 1$, temos $1 + \alpha_i t_{i+1,k} = t_{i,k}$;
2. se $\alpha_k > 0, \forall k$, então a condição (K_0) é equivalente a $\sum_{l=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^l \alpha_j \right) < \infty$;
3. assumindo (K_0) , a sequência $(t_i)_{i \geq 1}$ fica bem definida e satisfaz:

a) $t_{i,k} \nearrow t_i$ se $k \rightarrow \infty, \forall i \geq 1$;

⁶ Nesse caso, “convergir para uma solução” é equivalente a “convergir”, já que todo $x \in \mathcal{H}$ é solução de $0 \in Ax$.

⁷ Conforme mencionado na Seção 2.1, ao longo deste trabalho vamos adotar a convenção de que $\prod_{j=i}^{i-1} \alpha_j = 1$ para qualquer i , o que justifica a igualdade em (3.8).

⁸ Vamos adotar a notação $\sum_{l=k}^{k-1} \beta_l = 0$.

$$b) 1 + \alpha_i t_{i+1} = t_i, \forall i \geq 1;$$

4. (K_0) é equivalente a existir um $i_0 \geq 1$ tal que $\sum_{l=i}^{\infty} \left(\prod_{j=i}^l \alpha_j \right) < \infty$ para todo $i \geq i_0$.

Demonstração. Item 1): como $i + 1 \leq k$, temos $t_{i+1,k} = 1 + \sum_{l=i+1}^{k-1} \left(\prod_{j=i+1}^l \alpha_j \right)$ e $t_{i,k} = 1 + \sum_{l=i}^{k-1} \left(\prod_{j=i}^l \alpha_j \right)$ (já que também $i < k$). Portanto:

$$\begin{aligned} 1 + \alpha_i t_{i+1,k} &= 1 + \alpha_i + \alpha_i \cdot \sum_{l=i+1}^{k-1} \left(\prod_{j=i+1}^l \alpha_j \right) = 1 + \alpha_i + \sum_{l=i+1}^{k-1} \left(\prod_{j=i}^l \alpha_j \right) \\ &= 1 + \sum_{l=i}^{k-1} \left(\prod_{j=i}^l \alpha_j \right) = t_{i,k}. \end{aligned}$$

Item 2): veja que (K_0) é claramente suficiente para a outra condição, já que coincidem para $i = 1$. Para a necessidade de (K_0) , pela definição das seqüências $(t_{i,k})$ na Equação (3.9), temos que $(t_{i,k})_{k \geq 1}$ é não-decrescente, pois é soma parcial de série de termos não-negativos. Logo, dado um $i \geq 1$, a condição $\sum_{l=i}^{\infty} \left(\prod_{j=i}^l \alpha_j \right) < \infty$ é equivalente à convergência de $(t_{i,k})_{k \geq 1}$, e portanto (K_0) é equivalente a $(t_{i,k})_{k \geq 1}$ convergir para todo $i \geq 1$. A condição $\sum_{l=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^l \alpha_j \right) < \infty$ garante a convergência de $(t_{1,k})_{k \geq 1}$. Pelo item 1), para $i + 1 \leq k$ vale $t_{i+1,k} = \frac{1}{\alpha_i} (t_{i,k} - 1)$, já que $\alpha_i > 0, \forall i$, e portanto o item 2) segue de um argumento indutivo (em i) sobre a convergência das seqüências $(t_{i,k})_{k \geq 1}$.

Item 3): a seqüência $(t_i)_{i \geq 1}$ claramente fica bem definida pela Equação (3.8). Além disso, o item 3a) segue da observação que, para um dado i , $(t_{i,k})_{k \geq i}$ é a seqüência de somas parciais de t_i e $(t_{i,k})_{k \geq i}$ é não-decrescente, e o item 3b) segue dos itens 1) e 3a) fazendo $k \rightarrow \infty$.

Item 4): a necessidade segue trivialmente tomando $i_0 = 1$. Agora, tome i_0 tal que $\sum_{l=i}^{\infty} \left(\prod_{j=i}^l \alpha_j \right) < \infty$ para todo $i \geq i_0$. Daí, $t_i < \infty$ se $i \geq i_0$, e pela definição de $(t_{i,k})$ temos $t_{i,k} \nearrow t_i$ se $k \rightarrow \infty, \forall i \geq i_0$. Em particular, $t_{i_0,k} \nearrow t_{i_0} < \infty$ se $k \rightarrow \infty$. Pelo item 1) com $i = i_0 - 1$, para $k \geq i_0$ temos $t_{i_0-1,k} = 1 + \alpha_{i_0} t_{i_0,k}$. Fazendo $k \rightarrow \infty$ nos dá que

$$\begin{aligned} \infty > 1 + \alpha_{i_0} t_{i_0} &= \lim_{k \rightarrow \infty} 1 + \alpha_{i_0} t_{i_0,k} = \lim_{k \rightarrow \infty} t_{i_0-1,k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[1 + \sum_{l=i_0-1}^{k-1} \left(\prod_{j=i_0-1}^l \alpha_j \right) \right] \\ &= 1 + \sum_{l=i_0-1}^{\infty} \left(\prod_{j=i_0-1}^l \alpha_j \right) = t_{i_0-1} \end{aligned}$$

donde $t_{i_0-1} = \sum_{l=i_0-1}^{\infty} \left(\prod_{j=i_0-1}^l \alpha_j \right) < \infty$ e portanto a condição (K_0) é satisfeita com $i = i_0 - 1$. Um argumento indutivo nos mostra que (K_0) é, pois, satisfeita para todo $i \geq 1$. ■

Nos Teoremas 4.1 e 4.9 também precisaremos do seguinte lema para provar a convergência do (RIPA):

Lema 3.8. *Sejam $(a_k)_{k \geq 0}$, $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ e $(\omega_k)_{k \geq 0}$ seqüências de números reais satisfazendo $\alpha_i \geq 0$, $\forall i \geq 0$ e*

$$a_{i+1} \leq \alpha_i a_i + \omega_i. \quad (3.10)$$

Então:

$$1. \forall k \geq 1 : \sum_{i=1}^k a_i \leq t_{1,k} a_1 + \sum_{i=1}^{k-1} t_{i+1,k} \cdot \omega_i \quad \text{onde } t_{i,k} \text{ é definido pela Equação (3.9);}$$

2. *assuma (K_0) e defina a seqüência $(t_i)_{i \geq 1}$ por (3.8). Então, se $\sum_{i=1}^{\infty} t_{i+1} [\omega_i]_+ < \infty$, temos que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} [a_i]_+ \leq t_1 [a_1]_+ + \sum_{i=1}^{\infty} t_{i+1} [\omega_i]_+ < \infty. \quad (3.11)$$

Demonstração. Item 1): do Lema 3.7(1) temos que se $k \geq i + 1$, então $1 + \alpha_i t_{i+1,k} = t_{i,k} \Rightarrow t_{i+1,k} \alpha_i = t_{i,k} - 1$. Multiplicando a Equação (3.10) por $t_{i+1,k}$, para todos $i \geq 1$ e $k \geq i + 1$ (isto é, $1 \leq i \leq k - 1$) temos

$$t_{i+1,k} a_{i+1} \leq (t_{i,k} - 1) a_i + t_{i+1,k} \omega_i \implies a_i \leq (t_{i,k} a_i - t_{i+1,k} a_{i+1}) + t_{i+1,k} \omega_i.$$

Dado $k \geq 2$ e somando a segunda desigualdade acima de $i = 1$ até $i = k - 1$, observando que no lado direito temos uma soma telescópica, temos

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_i \leq t_{1,k} a_1 - t_{k,k} a_k + \sum_{i=1}^{k-1} t_{i+1,k} \cdot \omega_i.$$

Mas por definição de $t_{i,k}$ (Equação (3.9)), temos $t_{k,k} = 1$ e portanto, passando o termo $-t_{k,k} a_k = -a_k$ para a esquerda, nos dá a desigualdade desejada (a desigualdade é trivial para $k = 1$).

Item 2): aplicando o item 1) para as seqüências $([a_i]_+)_{i \geq 0}$, $(\alpha_i)_{i \geq 0}$ e $([\omega_i]_+)_{i \geq 0}$, para todo $k \geq 1$ vale que

$$\sum_{i=1}^k [a_i]_+ \leq t_{1,k} [a_1]_+ + \sum_{i=1}^{k-1} t_{i+1,k} [\omega_i]_+.$$

Pelo Lema 3.7(3a) temos que $t_{1,k} \leq t_1$ e $t_{i+1,k} \leq t_{i+1}$, donde

$$\sum_{i=1}^k [a_i]_+ \leq t_1 [a_1]_+ + \sum_{i=1}^{k-1} t_{i+1} [\omega_i]_+.$$

O item 2) segue então fazendo $k \rightarrow \infty$ na desigualdade acima e usando a hipótese de que $\sum_{i=1}^{\infty} t_{i+1} [\omega_i]_+ < \infty$. ■

4 CONVERGÊNCIA FRACA DO (RIPA)

Neste capítulo, vamos estabelecer os teoremas gerais que garantem a convergência (fraca) do (RIPA) para alguma solução do problema de inclusão monótona (MIP). Os principais resultados do capítulo são os Teoremas 4.1 e 4.9. De forma geral, vamos assegurar convergência utilizando o Lema de Opial (Lema 2.17), que é o resultado clássico na análise não-linear para garantir convergência (fraca) de algoritmos.

Para garantir a convergência do (RIPA), além da hipótese (K_0) , cuja necessidade já foi apresentada na Seção 3.4, vamos também precisar de um certo “balanço” entre o efeito de inércia (parâmetros α_k) e o efeito de relaxação (parâmetros ρ_k). Mais precisamente, além de assumir (K_0) , vamos também exigir que a seguinte condição, relacionando (α_k) e (ρ_k) , seja satisfeita:

$$\exists \varepsilon \in]0, 1[\quad \text{e} \quad \exists \underline{k} \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad \forall k \geq \underline{k} \quad (K_1)$$

$$(1 - \varepsilon) \frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} (1 - \alpha_{k-1}) \geq \alpha_k t_{k+1} \left(1 + \alpha_k + \left[\frac{2 - \rho_k}{\rho_k} (1 - \alpha_k) - \frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} (1 - \alpha_{k-1}) \right]_+ \right).$$

O principal papel da hipótese (K_1) no teorema a seguir é garantir que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$, e dessa conclusão seguem os demais resultados.

Teorema 4.1 (Convergência fraca do (RIPA), versão 1). *Assuma $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ monótono maximal com $\text{zer}(A) \neq \emptyset$, $(\alpha_k)_{k \geq 0} \subseteq [0, 1]$, $(\rho_k)_{k \geq 0} \subseteq]0, 2]$, $(\mu_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$, e assumamos (K_0) . Então, para qualquer sequência¹ $(x_k)_{k \geq 0}$ gerada pelo (RIPA), temos:*

1. *se vale também a hipótese (K_1) , então $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}} (1 - \alpha_{i-1}) \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$ e portanto $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$.*

Assuma, de agora em diante, que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$ (por exemplo, assumindo (K_1)). Então:

2. $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i (2 - \rho_i) t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 < \infty$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i (2 - \rho_i) t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 < \infty$;
3. $\forall z \in \text{zer}(A)$, a sequência real $(\|x_k - z\|)_{k \geq 0}$ converge, e portanto $(x_k)_{k \geq 0}$ é limitada.

A partir de agora, assumamos também

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_k < 2; \quad (K_2)$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \rho_k > 0. \quad (K_3)$$

¹ Veja que para cada par de pontos iniciais x_0 e x_1 , ainda que utilizemos os mesmos parâmetros, a sequência (x_k) gerada pelo (RIPA) pode ser diferente.

Então,

4. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(y_k)\| = 0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(x_k)\| = 0$;
5. se ainda $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k > 0$, então existe $x_\infty \in \text{zer}(A)$ tal que $x_k \rightharpoonup x_\infty$ e $y_k \rightharpoonup x_\infty$ (convergência fraca em \mathcal{H}).

Observação 4.2. Se $0 < \rho_k \leq 2$, $\forall k$, (que é o caso do Teorema 4.1), note que a hipótese (K_2) é equivalente² a existirem $k_0 \in \mathbb{N}$ e $\bar{\rho} \in]0, 2[$ tais que se $k \geq k_0$, então $\rho_k \leq \bar{\rho} < 2$, ou seja, a sequência (ρ_k) é³ eventualmente *bounded away from 2*. Similarmente, a hipótese (K_3) é equivalente a existirem $k_1 \in \mathbb{N}$ e $\underline{\rho} \in]0, 2[$ tais que se $k \geq k_1$, então $\rho_k \geq \underline{\rho} > 0$, ou seja, a sequência (ρ_k) é eventualmente *bounded away from 0*. Em particular, as hipóteses (K_2) e (K_3) podem ser garantidas exigindo que $0 < \underline{\rho} \leq \rho_k \leq \bar{\rho} < 2$ para todo k , para dados $0 < \underline{\rho} \leq \bar{\rho} < 2$.

Demonstração. Item 1): fixe $z \in \text{zer}(A)$ e defina a sequência âncora $h_k = \frac{1}{2}\|x_k - z\|^2$. Para $k \geq 1$, defina $a_k = h_k - h_{k-1}$ e

$$\begin{aligned} \omega_k = & \left[\frac{1}{2}(\alpha_k + \alpha_k^2) - \frac{2 - \rho_k}{2\rho_k}(1 - \alpha_k)^2 \right] \|x_k - x_{k-1}\|^2 \\ & - \frac{2 - \rho_k}{2\rho_k}(1 - \alpha_k) \left(\|x_{k+1} - x_k\|^2 - \|x_k - x_{k-1}\|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Assim, o Lema 3.6 pode ser reescrito como $a_{k+1} - \alpha_k a_k \leq \omega_k \Rightarrow a_{k+1} \leq \alpha_k a_k + \omega_k$, para todo $k \geq 1$. Pelo Lema 3.8(1), $\sum_{i=1}^k a_i \leq t_{1,k} a_1 + \sum_{i=1}^{k-1} t_{i+1,k} \omega_i$. Como $a_1 = h_1 - h_0$, temos

$$\begin{aligned} h_k - h_0 &= \sum_{i=1}^k (h_i - h_{i-1}) = \sum_{i=1}^k a_i \leq t_{1,k}(h_1 - h_0) + \sum_{i=1}^{k-1} t_{i+1,k} \omega_i \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{k-1} t_{i+1,k} (-2\omega_i) &\leq 2(t_{1,k}(h_1 - h_0) - h_k + h_0) \leq 2(t_{1,k}|h_1 - h_0| + h_0) \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue de $h_k \geq 0$. Defina a constante $C := 2t_1|h_1 - h_0| + 2h_0 \geq 0$. Como $t_{1,k} \leq t_1$ (Lema 3.7(3a)), temos $\sum_{i=1}^{k-1} t_{i+1,k} (-2\omega_i) \leq C$, $\forall k \geq 1$. Substituindo a expressão que define ω_i nos dá

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} t_{i+1,k} \left[\left(\frac{2 - \rho_i}{\rho_i}(1 - \alpha_i)^2 - (\alpha_i + \alpha_i^2) \right) \|x_i - x_{i-1}\|^2 \right. \\ \left. + \frac{2 - \rho_i}{\rho_i}(1 - \alpha_i) \left(\|x_{i+1} - x_i\|^2 - \|x_i - x_{i-1}\|^2 \right) \right] \leq C \quad \forall k \geq 1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

² Se vale (K_2) , como $\inf_{m \geq 1} \sup_{k \geq m} \rho_k = \limsup \rho_k < 2$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ com $\bar{\rho} := \sup_{k \geq m_0} \rho_k < 2$. Daí, se $k \geq m_0$, então $\rho_k \leq \sup_{i \geq m_0} \rho_i = \bar{\rho} < 2$, como afirmado. A equivalência de (K_3) é análoga.

³ Definição 2.14.

Agora, note que:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{k-1} t_{i+1,k} \frac{2-\rho_i}{\rho_i} (1-\alpha_i) \left(\|x_{i+1} - x_i\|^2 - \|x_i - x_{i-1}\|^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} t_{i+1,k} \frac{2-\rho_i}{\rho_i} (1-\alpha_i) \|x_{i+1} - x_i\|^2 - \sum_{i=1}^{k-1} t_{i+1,k} \frac{2-\rho_i}{\rho_i} (1-\alpha_i) \|x_i - x_{i-1}\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} t_{i,k} \frac{2-\rho_{i-1}}{\rho_{i-1}} (1-\alpha_{i-1}) \|x_i - x_{i-1}\|^2 - \sum_{i=1}^{k-1} t_{i+1,k} \frac{2-\rho_i}{\rho_i} (1-\alpha_i) \|x_i - x_{i-1}\|^2 \\
&\quad - t_{1,k} \frac{2-\rho_0}{\rho_0} (1-\alpha_0) \|x_1 - x_0\|^2 + t_{k,k} \frac{2-\rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} (1-\alpha_{k-1}) \|x_k - x_{k-1}\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \left(t_{i,k} \frac{2-\rho_{i-1}}{\rho_{i-1}} (1-\alpha_{i-1}) - t_{i+1,k} \frac{2-\rho_i}{\rho_i} (1-\alpha_i) \right) \|x_i - x_{i-1}\|^2 \\
&\quad - t_{1,k} \frac{2-\rho_0}{\rho_0} (1-\alpha_0) \|x_1 - x_0\|^2 + t_{k,k} \frac{2-\rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} (1-\alpha_{k-1}) \|x_k - x_{k-1}\|^2.
\end{aligned}$$

Como $t_{k,k} \frac{2-\rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} (1-\alpha_{k-1}) \|x_k - x_{k-1}\|^2 \geq 0$ e $t_{1,k} \leq t_1$, temos

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{k-1} t_{i+1,k} \frac{2-\rho_i}{\rho_i} (1-\alpha_i) \left(\|x_{i+1} - x_i\|^2 - \|x_i - x_{i-1}\|^2 \right) \geq \\
& \sum_{i=1}^{k-1} \left(t_{i,k} \frac{2-\rho_{i-1}}{\rho_{i-1}} (1-\alpha_{i-1}) - t_{i+1,k} \frac{2-\rho_i}{\rho_i} (1-\alpha_i) \right) \|x_i - x_{i-1}\|^2 \\
& - t_1 \frac{2-\rho_0}{\rho_0} (1-\alpha_0) \|x_1 - x_0\|^2.
\end{aligned}$$

Juntando essa desigualdade com (4.2), para todo $k \geq 1$ temos

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{k-1} \left[t_{i+1,k} \left(\frac{2-\rho_i}{\rho_i} (1-\alpha_i)^2 - (\alpha_i + \alpha_i^2) \right) + t_{i,k} \frac{2-\rho_{i-1}}{\rho_{i-1}} (1-\alpha_{i-1}) \right. \\
& \quad \left. - t_{i+1,k} \frac{2-\rho_i}{\rho_i} (1-\alpha_i) \right] \cdot \|x_i - x_{i-1}\|^2 - t_1 \frac{2-\rho_0}{\rho_0} (1-\alpha_0) \|x_1 - x_0\|^2 \leq C
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{k-1} \delta_{i,k} \|x_i - x_{i-1}\|^2 \leq C_1, \quad \forall k \geq 1 \tag{4.3}$$

onde $C_1 := C + t_1 \frac{2-\rho_0}{\rho_0} (1-\alpha_0) \|x_1 - x_0\|^2$ é uma constante (não-negativa) e, para $1 \leq i \leq k-1$,

$$\delta_{i,k} := t_{i+1,k} \left(\frac{2-\rho_i}{\rho_i} (1-\alpha_i)^2 - (\alpha_i + \alpha_i^2) \right) + t_{i,k} \frac{2-\rho_{i-1}}{\rho_{i-1}} (1-\alpha_{i-1}) - t_{i+1,k} \frac{2-\rho_i}{\rho_i} (1-\alpha_i).$$

Agora, vamos reescrever $\delta_{i,k}$ de forma mais amigável, utilizando a identidade $1 + \alpha_i t_{i+1,k} = t_{i,k}$ para $k \geq i+1$ (Lema 3.7(1)). Mais precisamente, se $1 \leq i \leq k-1$

(ou seja, $k \geq i + 1$), vamos substituir $t_{i,k} = 1 + \alpha_i t_{i+1,k}$ na expressão de $\delta_{i,k}$:

$$\begin{aligned} \delta_{i,k} &= \frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1 - \alpha_{i-1}) + \\ & \quad t_{i+1,k} \left[\frac{2 - \rho_i}{\rho_i}(1 - \alpha_i)^2 - (\alpha_i + \alpha_i^2) + \alpha_i \frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1 - \alpha_{i-1}) - \frac{2 - \rho_i}{\rho_i}(1 - \alpha_i) \right] \\ &= \frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1 - \alpha_{i-1}) + \\ & \quad t_{i+1,k} \left[(-\alpha_i + \alpha_i^2) \frac{2 - \rho_i}{\rho_i} - (\alpha_i + \alpha_i^2) + \alpha_i \frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1 - \alpha_{i-1}) \right] \\ &= \frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1 - \alpha_{i-1}) - \alpha_i t_{i+1,k} \left[1 + \alpha_i + (1 - \alpha_i) \frac{2 - \rho_i}{\rho_i} - \frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1 - \alpha_{i-1}) \right]. \end{aligned}$$

Agora, como $t \leq [t]_+$ (por definição de $[t]_+$) e $t_{i+1,k} \leq t_{i+1}$, temos

$$\delta_{i,k} \geq \frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1 - \alpha_{i-1}) - \alpha_i t_{i+1} \overbrace{\left(1 + \alpha_i + \left[\frac{2 - \rho_i}{\rho_i}(1 - \alpha_i) - \frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1 - \alpha_{i-1}) \right]_+ \right)}^{\xi_i}.$$

Logo, pela Equação (4.3), temos

$$\sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1 - \alpha_{i-1}) - \xi_i \right) \cdot \|x_i - x_{i-1}\|^2 \leq C_1, \quad \forall k \geq 1. \quad (4.4)$$

É hora de usarmos a hipótese (K_1) : sejam $\varepsilon \in]0, 1[$ e $\underline{k} \in \mathbb{N}$ tais que se $k \geq \underline{k}$, então $(1 - \varepsilon) \frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}}(1 - \alpha_{k-1}) \geq \xi_k$. Logo, para $i \geq \underline{k}$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1 - \alpha_{i-1}) - \xi_i \right) &\geq \left(\frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1 - \alpha_{i-1}) - (1 - \varepsilon) \frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1 - \alpha_{i-1}) \right) \\ &= \varepsilon \cdot \frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1 - \alpha_{i-1}). \end{aligned}$$

Logo, se $k \geq \underline{k} + 1$, temos

$$\sum_{i=\underline{k}}^{k-1} \varepsilon \frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1 - \alpha_{i-1}) \|x_i - x_{i-1}\|^2 \leq \sum_{i=\underline{k}}^{k-1} \left(\frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1 - \alpha_{i-1}) - \xi_i \right) \|x_i - x_{i-1}\|^2$$

e, portanto, pela desigualdade acima e por (4.4), para $k \geq \underline{k} + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1 - \alpha_{i-1}) - \xi_i \right) \|x_i - x_{i-1}\|^2 + \sum_{i=\underline{k}}^{k-1} \varepsilon \frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1 - \alpha_{i-1}) \|x_i - x_{i-1}\|^2 &\leq \\ \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1 - \alpha_{i-1}) - \xi_i \right) \|x_i - x_{i-1}\|^2 &\leq C_1 \end{aligned}$$

donde

$$\sum_{i=\underline{k}}^{k-1} \varepsilon \frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}} (1 - \alpha_{i-1}) \|x_i - x_{i-1}\|^2 \leq C_1 - \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}} (1 - \alpha_{i-1}) - \xi_i \right) \|x_i - x_{i-1}\|^2, \quad \forall k \geq \underline{k} + 1.$$

Assim, como o lado direito da desigualdade acima independe de k , fazendo $k \rightarrow \infty$, temos $\sum_{i=\underline{k}}^{\infty} \varepsilon \frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}} (1 - \alpha_{i-1}) \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$ e portanto $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}} (1 - \alpha_{i-1}) \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$, o que nos dá o primeiro resultado do item 1).

Para a segunda parte do item 1), lembre que se $k \geq \underline{k}$, então $(1 - \varepsilon) \frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} (1 - \alpha_{k-1}) \geq \xi_k$ (segue da hipótese (K_1)). Além disso, como $\alpha_i \geq 0$ e $[t]_+ \geq 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$, da definição de ξ_i segue que $\xi_i \geq \alpha_i t_{i+1}$, e portanto para $i \geq \underline{k}$, temos $(1 - \varepsilon) \frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}} (1 - \alpha_{i-1}) \geq \alpha_i t_{i+1}$. Logo,

$$\sum_{i=\underline{k}}^{\infty} \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2 \leq (1 - \varepsilon) \sum_{i=\underline{k}}^{\infty} \frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}} (1 - \alpha_{i-1}) \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$$

em que a convergência da série do lado direito segue do que acabamos de provar. Logo, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$ e isso encerra o item 1).

Item 2): fixe novamente $z \in \text{zer}(A)$ e defina $h_k = \frac{1}{2} \|x_k - z\|^2$. Agora, em vez de utilizarmos o Lema 3.6 como feito no item 1), vamos utilizar o Lema 3.5 em que aparece também a sequência (y_k) . Como $x_{k+1} = (1 - \rho_k)y_k + \rho_k J_{\mu_k A}(y_k)$, temos $x_{k+1} - y_k = \rho_k (J_{\mu_k A}(y_k) - y_k)$. Logo, pela Equação (3.6), para todo $k \geq 1$ temos

$$h_{k+1} - h_k - \alpha_k (h_k - h_{k-1}) \leq \frac{1}{2} (\alpha_k + \alpha_k^2) \|x_k - x_{k-1}\|^2 - (2 - \rho_k) \frac{\rho_k}{2} \|J_{\mu_k A}(y_k) - y_k\|^2.$$

Para $k \geq 1$, defina as sequências $a_k := h_k - h_{k-1}$ e

$$\omega_k := \frac{1}{2} (\alpha_k + \alpha_k^2) \|x_k - x_{k-1}\|^2 - \frac{\rho_k}{2} (2 - \rho_k) \|J_{\mu_k A}(y_k) - y_k\|^2$$

de forma que a desigualdade acima pode ser reescrita como $a_{k+1} - \alpha_k a_k \leq \omega_k \Rightarrow a_{k+1} \leq \alpha_k a_k + \omega_k, \forall k \geq 1$. Pelo Lema 3.8(1), para um dado $k \geq 1$, temos

$$h_k - h_0 = \sum_{i=1}^k (h_i - h_{i-1}) = \sum_{i=1}^k a_i \leq t_{1,k} a_1 + \sum_{i=1}^{k-1} t_{i+1,k} \omega_i.$$

Como $0 \leq \alpha_i \leq 1, \alpha_i^2 \leq \alpha_i \Rightarrow \frac{1}{2} (\alpha_i + \alpha_i^2) \leq \alpha_i$, donde $\omega_i \leq \alpha_i \|x_i - x_{i-1}\|^2 - \frac{\rho_i}{2} (2 - \rho_i) \|J_{\mu_i A}(y_i) - y_i\|^2$ e portanto

$$h_k - h_0 \leq t_{1,k} (h_1 - h_0) + \sum_{i=1}^{k-1} t_{i+1,k} \left[\alpha_i \|x_i - x_{i-1}\|^2 - \frac{\rho_i}{2} (2 - \rho_i) \|J_{\mu_i A}(y_i) - y_i\|^2 \right]$$

que reorganizando nos dá

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i(2 - \rho_i)t_{i+1,k} \|J_{\mu_i A}(y_i) - y_i\|^2 \leq t_{1,k}(h_1 - h_0) - h_k + h_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i t_{i+1,k} \|x_i - x_{i-1}\|^2. \quad (4.5)$$

Agora, como $h_k \geq 0$, $t_{i+1,k} \leq t_{i+1}$ (Lema 3.7(3a)) e

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i t_{i+1,k} \|x_i - x_{i-1}\|^2 \leq \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$$

definindo $C_2 := t_1|h_1 - h_0| + h_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$, pela Equação (4.5) temos

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i(2 - \rho_i)t_{i+1,k} \|J_{\mu_i A}(y_i) - y_i\|^2 \leq C_2, \quad \forall k \geq 1.$$

Como $t_{i+1,k} = 0$ se $i + 1 > k$ (por definição da sequência $(t_{i,k})$ em (3.9)), ou seja, se $i > k - 1$, então

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i(2 - \rho_i)t_{i+1,k} \|J_{\mu_i A}(y_i) - y_i\|^2 \leq 2C_2, \quad \forall k \geq 1. \quad (4.6)$$

A Equação (4.6) já está muito próxima da primeira conclusão do item 2), basta apenas substituirmos os $t_{i+1,k}$ pelos t_i . Como $t_{i+1,k} \nearrow t_{i+1}$ se $k \rightarrow \infty$ (Lema 3.7(3a)), queremos de alguma forma poder passar um limite em $k \rightarrow \infty$ na Equação (4.6). Para formalizar essa passagem, vamos utilizar o Teorema da Convergência Monótona: considere o espaço de medida $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \#)$ onde $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ é a σ -álgebra das partes de \mathbb{N}^* e $\#$ é a medida de contagem. Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, considere a função $f_k : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $f_k(i) := \rho_i(2 - \rho_i)t_{i+1,k} \|J_{\mu_i A}(y_i) - y_i\|^2$, de forma que a Equação (4.6) pode ser reescrita como

$$\int_{\mathbb{N}^*} f_k d\# \leq 2C_2, \quad \forall k \geq 1. \quad (4.7)$$

Como $t_{i,k} \leq t_{i,k+1}$, $\forall i$, temos $f_k \leq f_{k+1}$ e portanto $(f_k)_{k \geq 1}$ é uma sequência não-decrescente. Além disso, se definimos $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ por $f(i) := \rho_i(2 - \rho_i)t_{i+1} \|J_{\mu_i A}(y_i) - y_i\|^2$, como $t_{i,k} \rightarrow t_i$ se $k \rightarrow \infty$, então $f_k \rightarrow f$ (convergência pontual). Assim, as hipóteses do Teorema da Convergência Monótona são satisfeitas, e portanto

$$\int_{\mathbb{N}^*} f d\# = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{N}^*} f_k d\# \stackrel{\text{Eq. (4.7)}}{\implies} \int_{\mathbb{N}^*} f d\# \leq 2C_2 < \infty$$

ou seja

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i(2 - \rho_i)t_{i+1} \|J_{\mu_i A}(y_i) - y_i\|^2 = \int_{\mathbb{N}^*} f d\# < \infty$$

que nos dá a primeira convergência prometida pelo item 2), pois $\mu_i A_{\mu_i}(y_i) = J_{\mu_i A}(y_i) - y_i$. Para a segunda parte, veja que

$$\|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 = \mu_i^2 \|A_{\mu_i}(x_i)\|^2 = \mu_i^2 \|A_{\mu_i}(y_i) + [A_{\mu_i}(x_i) - A_{\mu_i}(y_i)]\|^2.$$

Agora, pela identidade do paralelogramo $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$ temos $\|u + v\|^2 \leq 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$. Usando essa desigualdade com $u = A_{\mu_i}(y_i)$ e $v = A_{\mu_i}(x_i) - A_{\mu_i}(y_i)$ e a equação anterior, concluímos

$$\|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 \leq 2\mu_i^2 \|A_{\mu_i}(y_i)\|^2 + 2\mu_i^2 \|A_{\mu_i}(x_i) - A_{\mu_i}(y_i)\|^2.$$

Como A_{μ_i} é $\frac{1}{\mu_i}$ -Lipschitz (Proposição 2.8), temos $\|A_{\mu_i}(x_i) - A_{\mu_i}(y_i)\|^2 \leq \frac{1}{\mu_i^2} \|x_i - y_i\|^2 = \frac{1}{\mu_i^2} \|x_i - (x_i + \alpha_i(x_i - x_{i-1}))\|^2 = \frac{\alpha_i^2}{\mu_i^2} \|x_i - x_{i-1}\|^2$, donde

$$\|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 \leq 2\|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 + 2\alpha_i^2 \|x_i - x_{i-1}\|^2 \leq 2\|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 + 2\alpha_i \|x_i - x_{i-1}\|^2$$

já que $0 \leq \alpha_i \leq 1$. Logo,

$$\begin{aligned} \rho_i(2 - \rho_i)t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 &\leq 2\rho_i(2 - \rho_i)t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 + 2\rho_i(2 - \rho_i)t_{i+1} \alpha_i \|x_i - x_{i-1}\|^2 \\ &\leq 2\rho_i(2 - \rho_i)t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 + 2\alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2 \end{aligned}$$

já que $\rho_i(2 - \rho_i) \leq 1$ pois o máximo valor da função $\mathbb{R} \ni t \mapsto t(2 - t) \in \mathbb{R}$ é 1. A desigualdade acima mostra que $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i(2 - \rho_i)t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2$ converge, pois na primeira parte do item 2) mostramos que $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i(2 - \rho_i)t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2$ converge e estamos assumindo que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$. Isso encerra o item 2).

Item 3): seja $z \in \text{zer}(A)$ e defina novamente $h_k = \frac{1}{2} \|x_k - z\|^2$. Como $0 \leq \alpha_k \leq 1$, $\frac{1}{2}(\alpha_k + \alpha_k^2) \leq \alpha_k$ e portanto a Equação (3.6) nos dá $h_{k+1} - h_k \leq \alpha_k(h_k - h_{k-1}) + \alpha_k \|x_k - x_{k-1}\|^2$, $\forall k \geq 1$. Definindo $a_k := h_k - h_{k-1}$ e $\omega_k := \alpha_k \|x_k - x_{k-1}\|^2$, temos $a_{k+1} \leq \alpha_k a_k + \omega_k$, $\forall k \geq 1$. Como $\omega_k \geq 0$, $[\omega_k]_+ = \omega_k$ e portanto $t_{i+1}[\omega_i]_+ = \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2$. Daí, $\sum_i t_{i+1}[\omega_i]_+ < \infty$ pois estamos assumindo $\sum_i \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$. Assim, pelo Lema 3.8(2) temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} [h_i - h_{i-1}]_+ = \sum_{i=1}^{\infty} [a_i]_+ < \infty.$$

Defina a sequência real $\zeta_k := h_k - \sum_{i=1}^k [h_i - h_{i-1}]_+$, para $k \geq 1$. Como $h_k \geq 0$ e $\sum_{i=1}^k [h_i - h_{i-1}]_+ \leq \sum_{i=1}^{\infty} [h_i - h_{i-1}]_+ < \infty$, temos $\zeta_k \geq -\sum_{i=1}^{\infty} [h_i - h_{i-1}]_+ > -\infty$, $\forall k \geq 1$, ou seja, $(\zeta_k)_{k \geq 1}$ é limitada por baixo. Além disso, como $t \leq [t]_+$, temos $-[t]_+ \leq -t$ e

$$\zeta_{k+1} = h_{k+1} - \sum_{i=1}^{k+1} [h_i - h_{i-1}]_+ = h_{k+1} - \sum_{i=1}^k [h_i - h_{i-1}]_+ - [h_{k+1} - h_k]_+$$

$$\leq h_{k+1} - \sum_{i=1}^k [h_i - h_{i-1}]_+ - (h_{k+1} - h_k) = h_k - \sum_{i=1}^k [h_i - h_{i-1}]_+ = \zeta_k$$

isto é, $(\zeta_k)_{k \geq 1}$ é não-crescente (e limitada por baixo), logo converge, digamos $\zeta_k \rightarrow \zeta \in \mathbb{R}$. Assim, $\frac{1}{2} \|x_k - z\|^2 = h_k = \zeta_k + \sum_{i=1}^k [h_i - h_{i-1}]_+ \rightarrow \zeta + \sum_{i=1}^{\infty} [h_i - h_{i-1}]_+ \in \mathbb{R}$, e portanto $(\|x_k - z\|)_{k \geq 1}$ converge, o que mostra a primeira afirmação do item 3). Como $(\|x_k - z\|)_{k \geq 1}$ converge, é limitada, e como $\|x_k\| \leq \|x_k - z\| + \|z\|$, concluímos que $(x_k)_{k \geq 1}$ é limitada.

Item 4): agora, estamos assumindo também (K_2) e (K_3) . Pela Observação 4.2, existem $k_0 \in \mathbb{N}$, $\underline{\rho}$ e $\bar{\rho}$ tais que $0 < \underline{\rho} \leq \rho_k \leq \bar{\rho} < 2$, $\forall k \geq k_0$. Daí, para $k \geq k_0$, temos $\rho_k(2 - \rho_k) \geq \underline{\rho}(2 - \bar{\rho})$ e, como $t_i \geq 1$,

$$\underline{\rho}(2 - \bar{\rho}) \sum_{i=k_0}^{\infty} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 \leq \sum_{i=k_0}^{\infty} \rho_i(2 - \rho_i) t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 < \infty$$

pelo item 2). Como $\underline{\rho}(2 - \bar{\rho}) > 0$, segue $\sum_{i=1}^{\infty} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 < \infty$ e portanto $\lim_{i \rightarrow \infty} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\| = 0$. O caso $\lim_{i \rightarrow \infty} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\| = 0$ é análogo, utilizando também o item 2).

Item 5): agora, $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k > 0$. Como $\mu_k > 0$, $\forall k$, por um raciocínio semelhante ao da Observação 4.2, existem $k_1 \in \mathbb{N}$ e $\underline{\mu} > 0$ tais que se $\mu_k \geq \underline{\mu} > 0$, $\forall k \geq k_1$. Para mostrar a convergência (fraca) de (x_k) , vamos utilizar o Lema de Opial (Lema 2.17). O item 3) já garante uma das hipóteses do lema. Para a outra hipótese, primeiramente note que, para $k \geq k_1$, pelo item 4) temos

$$\|A_{\mu_k}(x_k)\| \leq \frac{1}{\underline{\mu}} \mu_k \|A_{\mu_k}(x_k)\| \rightarrow 0 \quad \implies \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_{\mu_k}(x_k)\| = 0$$

ou seja, a sequência $(A_{\mu_k}(x_k))_{k \geq 1}$ converge (forte) para o vetor nulo. Agora, a fim de verificar a segunda hipótese do Lema de Opial, seja \bar{x} um ponto de aderência fraco de (x_k) , digamos $x_{k_n} \rightharpoonup \bar{x}$ se $n \rightarrow \infty$. Pela Equação (3.2), temos

$$A_{\mu_{k_n}}(x_{k_n}) \in A(x_{k_n} - \mu_{k_n} A_{\mu_{k_n}}(x_{k_n})), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ou seja

$$(x_{k_n} - \mu_{k_n} A_{\mu_{k_n}}(x_{k_n}), A_{\mu_{k_n}}(x_{k_n})) \in \text{gra}(A), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Agora, pelo item 4), $\mu_{k_n} A_{\mu_{k_n}}(x_{k_n}) \rightarrow 0$, donde $x_{k_n} - \mu_{k_n} A_{\mu_{k_n}}(x_{k_n}) \rightharpoonup \bar{x}$. Além disso, concluímos acima que $A_{\mu_k}(x_k) \rightarrow 0$, e portanto $A_{\mu_{k_n}}(x_{k_n}) \rightarrow 0$. Daí, pela Proposição 2.7(2), segue que $(\bar{x}, 0) \in \text{gra}(A)$, ou seja, $0 \in A\bar{x}$ e portanto $\bar{x} \in \text{zer}(A)$.

Isso verifica a segunda hipótese do Lema de Opial, e portanto existe $x_{\infty} \in \text{zer}(A)$ tal que $x_k \rightharpoonup x_{\infty}$. Resta apenas mostrar que $y_k \rightharpoonup x_{\infty}$. Mas por definição de (RIPA) temos $x_{k+1} - y_k = \rho_k (J_{\mu_k A}(y_k) - y_k)$. Pelo item 4), temos $J_{\mu_k A}(y_k) - y_k = -\mu_k A_{\mu_k}(y_k) \rightarrow$

0 e como $0 < \rho_k \leq 2$ segue $x_{k+1} - y_k = \rho_k(J_{\mu_k A}(y_k) - y_k) \rightarrow 0$. Em particular, $x_{k+1} - y_k \rightarrow 0$ e portanto, como $x_k \rightarrow x_\infty$, temos $y_k \rightarrow x_\infty$ e então encerramos o item 5) e a prova. ■

Num primeiro momento, garantir a hipótese $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$ (sem assumir (K_1)) pode ser desafiador, já que ela envolve toda a sequência (x_k) que, a priori, é desconhecida. No entanto, podemos proceder utilizando uma “on-line rule” apropriada, conforme segue.

Primeiramente, note que se $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha} < 1$, $\forall k \geq 1$, ou seja, $(\alpha_k)_{k \geq 1}$ é *bounded away from 1*, então $\prod_{j=i}^l \alpha_j \leq \bar{\alpha}^{l-i+1}$, e portanto

$$\sum_{l=i}^{\infty} \left(\prod_{j=i}^l \alpha_j \right) \leq \sum_{l=i}^{\infty} \bar{\alpha}^{l-i+1} = \sum_{l=1}^{\infty} \bar{\alpha}^l = \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} < \infty.$$

Logo, automaticamente (K_0) é verificada. Além disso, pela definição de t_i (Equação (3.8)) e como $1 + \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} = \frac{1}{1-\bar{\alpha}}$, segue $1 \leq t_i \leq \frac{1}{1-\bar{\alpha}}$, $\forall i$. Logo, a convergência de $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2$ é equivalente à de $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \|x_i - x_{i-1}\|^2$. A conclusão aqui é que para assegurar (K_0) e $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$, que são duas importantes hipóteses no Teorema 4.1, é suficiente garantirmos que

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha} < 1, \forall k \text{ e para algum } \bar{\alpha} \in [0, 1[\\ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty. \end{cases} \quad (4.8)$$

Por sua vez, uma forma de garantir (4.8) é prosseguir como no Algoritmo 1, em que a cada iteração k , temos $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k \leq \bar{\alpha} < 1$ e além disso $\alpha_k \leq \bar{\alpha}_k \leq \beta_k \frac{1}{\|x_k - x_{k-1}\|^2}$ (se $x_k \neq x_{k-1}$), donde $\alpha_k \|x_k - x_{k-1}\|^2 \leq \beta_k$ (mesmo se $x_k = x_{k-1}$, pois nesse caso $\alpha_k = 0$) e portanto segue $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \|x_k - x_{k-1}\|^2 < \infty$ já que por escolha de (β_k) temos $\sum \beta_k < \infty$. Na prática, podemos escolher $\beta_k = \beta^k$ com $0 < \beta < 1$ (rápida convergência $\beta_k \rightarrow 0$), ou $\beta_k = \frac{1}{k^p}$ com $p > 1$ (convergência $\beta_k \rightarrow 0$ mais lenta), por exemplo.

Quanto à convergência do Algoritmo 1, conforme explicado acima, sua construção verifica (4.8) e portanto garante as hipóteses (K_0) e $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$. De acordo com o Teorema 4.1, o Algoritmo 1 convergirá (fracamente) se também supusermos (K_2) , (K_3) e $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k > 0$.

A seguir, vamos obter diversos corolários do Teorema 4.1 para certos casos particulares. Primeiramente, vamos considerar o caso de (RPA), sem inércia, ou seja, $\alpha_k = 0, \forall k$. Essa convergência já fora obtida por Eckstein e Bertsekas (1992, Teorema 3), incluindo o caso inexato do cálculo do resolvente $J_{\mu_k A}(x_k)$.

Algoritmo 1: (RIPA) com “on-line rule”**Dados:** $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ (monótono maximal com $\text{zer}(A) \neq \emptyset$), $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$, $\bar{\alpha} \in [0, 1[$ e $(\beta_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ com $\sum \beta_k < \infty$.**1 para** $k = 1, 2, \dots$ **faça****2** | **se** $x_k \neq x_{k-1}$ **então****3** | | $\bar{\alpha}_k = \min \left\{ \bar{\alpha}, \beta_k \cdot \frac{1}{\|x_k - x_{k-1}\|^2} \right\};$ **4** | **senão****5** | | $\bar{\alpha}_k = 0;$ **6** | **fim****7** | Escolha $\alpha_k \in [0, \bar{\alpha}_k];$ // $\alpha_k = 0$ se $x_k = x_{k-1}$ **8** | Escolha $\rho_k \in]0, 2[$ e $\mu_k > 0;$ **9** | Defina $y_k = x_k + \alpha_k(x_k - x_{k-1})$ e $x_{k+1} = (1 - \rho_k)y_k + \rho_k J_{\mu_k A}(y_k).$ **10 fim**

Corolário 4.3 (Convergência fraca do (RPA)). *Sejam $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ monótono maximal com $\text{zer}(A) \neq \emptyset$, $(\rho_k)_{k \geq 0} \subseteq]0, 2[$ e $(\mu_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}_{> 0}$. Dado um ponto inicial $x_0 = x_1 \in \mathcal{H}$, considere a seqüência gerada pelo (RPA):*

$$k \geq 1 : \quad x_{k+1} = (1 - \rho_k)x_k + \rho_k J_{\mu_k A}(x_k).$$

Então,

1. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 - \rho_i}{\rho_i} \|x_{i+1} - x_i\|^2 < \infty;$
2. $\forall z \in \text{zer}(A)$, a seqüência real $(\|x_k - z\|)_{k \geq 0}$ converge, e portanto $(x_k)_{k \geq 0}$ é limitada.

A partir de agora, assuma também que $\liminf_{k \rightarrow \infty} \rho_k > 0$ e $\limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_k < 2$. Então, valem:

3. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(x_k)\| = 0;$
4. se também $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k > 0$, então existe $x_{\infty} \in \text{zer}(A)$ tal que $x_k \rightharpoonup x_{\infty}$.

Demonstração. Aqui, não há inércia e portanto $\alpha_k = 0, \forall k$. Dessa forma, (K_0) é trivialmente satisfeita e $t_i = 1, \forall i$. Além disso, (K_1) é satisfeita para qualquer $\varepsilon \in]0, 1[$ e com $\underline{k} = 1$, já que o lado direito de (K_1) é identicamente nulo. Assim, todas as hipóteses do Teorema 4.1 são satisfeitas, e os itens 1), 2), 3) e 4) seguem, respectivamente, dos itens 1), 3), 4), 5) do Teorema 4.1. Veja que nesse caso sem inércia, $y_k = x_k$. ■

Agora, consideramos o caso sem relaxação, ou seja, $\rho_k = 1, \forall k$. Nesse caso, como $\frac{2 - \rho_k}{\rho_k} = 1$, a hipótese (K_1) se reduz a:

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon \in]0, 1[\quad \text{e} \quad \exists \underline{k} \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad \forall k \geq \underline{k} : & \quad (\tilde{K}_1) \\ (1 - \varepsilon)(1 - \alpha_{k-1}) \geq \alpha_k t_{k+1} (1 + \alpha_k + [\alpha_{k-1} - \alpha_k]_+). & \end{aligned}$$

Corolário 4.4 (Convergência fraca do (IPA)). *Sejam $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ monótono maximal com $\text{zer}(A) \neq \emptyset$, $(\alpha_k)_{k \geq 0} \subseteq [0, 1]$ e $(\mu_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$. Assuma (K_0) e defina a sequência $(t_i)_{i \geq 1}$ por (3.8). Então, dados pontos iniciais $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ e definindo a sequência (x_k) pelo (IPA):*

$$\forall k \geq 1 : \quad \begin{cases} y_k = x_k + \alpha_k(x_k - x_{k-1}) \\ x_{k+1} = J_{\mu_k A}(y_k) \end{cases}$$

temos:

1. *se vale também a hipótese (\tilde{K}_1) , então $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - \alpha_i) \|x_{i+1} - x_i\|^2 < \infty$ e portanto $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$.*

Assuma, de agora em diante, que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$ (por exemplo, assumindo (\tilde{K}_1)). Então:

2. $\sum_{i=1}^{\infty} t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 < \infty$ e $\sum_{i=1}^{\infty} t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 < \infty$;
3. $\forall z \in \text{zer}(A)$, a sequência real $(\|x_k - z\|)_{k \geq 0}$ converge, e portanto $(x_k)_{k \geq 0}$ é limitada;
4. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(y_k)\| = 0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(x_k)\| = 0$;
5. *se ainda $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k > 0$, então existe $x_{\infty} \in \text{zer}(A)$ tal que $x_k \rightharpoonup x_{\infty}$ e $y_k \rightharpoonup x_{\infty}$ (convergência fraca em \mathcal{H}).*

Demonstração. Nesse caso, $\rho_k = 1, \forall k$, e então, trivialmente valem (K_2) e (K_3) . Além disso, veja que a hipótese (K_1) se reduz nesse caso a (\tilde{K}_1) já que $\frac{2-\rho_k}{\rho_k} = 1$. Logo, as conclusões aqui seguem imediatamente das respectivas conclusões dos itens do Teorema 4.1, já que $\rho_i(2 - \rho_i) = 1$. ■

De forma análoga ao que mencionamos ao final do Teorema 4.1, podemos garantir a hipótese $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$ no Corolário 4.4, sem assumir (\tilde{K}_1) , utilizando uma *on-line rule* semelhante à do Algoritmo 1, ou seja, podemos substituir as hipóteses (K_0) e $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$ pelas hipóteses em (4.8):

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha} < 1, \forall k \text{ e para algum } \bar{\alpha} \in [0, 1[\\ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty. \end{cases}$$

Nesse contexto do (IPA), o Corolário 4.4 com as hipóteses em (4.8) nos dão exatamente o Teorema 2.1 de Alvarez e Attouch (2001), enunciado abaixo para conveniência do leitor e utilizando notação consistente com este trabalho:

Corolário 4.5. *Sejam $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ monótono maximal com $\text{zer}(A) \neq \emptyset$, $(\alpha_k)_{k \geq 0} \subseteq [0, 1[$, $(\mu_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ e $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ pontos iniciais. Defina a sequência $(x_k)_{k \geq 0}$ pelo (IPA) e suponha que:*

1. $\exists \underline{\mu} > 0$ tal que $\mu_k \geq \underline{\mu}$, $\forall k \geq 0$;
2. $\exists \bar{\alpha} \in [0, 1[$ tal que $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}$, $\forall k \geq 0$;
3. $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$.

Então, existe $x_{\infty} \in \text{zer}(A)$ tal que $x_k \rightharpoonup x_{\infty}$ e $y_k \rightharpoonup x_{\infty}$.

Demonstração. As hipóteses 2) e 3) acima garantem (4.8), em particular implicam (K_0) e $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$. A convergência segue então do Corolário 4.4(5) já que $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k \geq \underline{\mu} > 0$ pois $\mu_k \geq \underline{\mu} > 0$, $\forall k$, por 1). A demonstração original (excetuando-se a conclusão de $y_k \rightharpoonup x_{\infty}$) pode ser encontrada em Alvarez e Attouch (2001, p. 7) utilizando diretamente o Lema de Opial. ■

Ainda em Alvarez e Attouch (2001) na Proposição 2.1, os autores descrevem uma hipótese suficiente para as condições 2) e 3) do Corolário 4.5: $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha} < \frac{1}{3}$ e $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ não-decrescente, que combinada com Alvarez e Attouch (2001, Teorema 2.1) (correspondente ao Corolário 4.5 neste trabalho) lhes rendeu:

Corolário 4.6. *Sejam $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ monótono maximal com $\text{zer}(A) \neq \emptyset$, $(\alpha_k)_{k \geq 0} \subseteq [0, 1[$, $(\mu_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ e $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ pontos iniciais. Defina a sequência $(x_k)_{k \geq 0}$ pelo (IPA) e suponha que:*

1. $\exists \underline{\mu} > 0$ tal que $\mu_k \geq \underline{\mu}$, $\forall k \geq 0$;
2. $\exists \bar{\alpha} \in [0, \frac{1}{3}[$ tal que $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}$ e $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ é não-decrescente.

Então, existe $x_{\infty} \in \text{zer}(A)$ tal que $x_k \rightharpoonup x_{\infty}$ e $y_k \rightharpoonup x_{\infty}$.

Demonstração. A demonstração original (sem a convergência $y_k \rightharpoonup x_{\infty}$) se encontra em Alvarez e Attouch (2001, Proposição 2.1 na p. 9), e pode ser feita, alternativamente, utilizando o Corolário 4.7(5) a seguir, que por sua vez se baseia no Teorema 4.1. ■

Através de Attouch e Cabot (2020) e em mãos do Teorema 4.1, podemos fortalecer o Corolário 4.6 de Alvarez e Attouch (2001) removendo a hipótese de que $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ é não-decrescente:

Corolário 4.7. *Sejam $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ monótono maximal com $\text{zer}(A) \neq \emptyset$, $(\alpha_k)_{k \geq 0} \subseteq [0, 1[$ e $(\mu_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$. Suponha que existe $\bar{\alpha} \in [0, \frac{1}{3}[$ tal que $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}$, $\forall k$. Então, dados pontos iniciais $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ e definindo a sequência (x_k) pelo (IPA) temos:*

1. $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$;

2. $\sum_{i=1}^{\infty} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 < \infty$;
3. $\forall z \in \text{zer}(A)$, a sequência real $(\|x_k - z\|)_{k \geq 0}$ converge, e portanto $(x_k)_{k \geq 0}$ é limitada;
4. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(y_k)\| = 0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(x_k)\| = 0$;
5. se ainda $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k > 0$, então existe $x_{\infty} \in \text{zer}(A)$ tal que $x_k \rightarrow x_{\infty}$ e $y_k \rightarrow x_{\infty}$.

Demonstração. Vamos utilizar o Corolário 4.4. Como $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha} < \frac{1}{3}$, a hipótese (K_0) é verificada, já que $t_i \leq \frac{1}{1-\bar{\alpha}}$ (veja Equação (3.8)). Agora, vamos verificar (\tilde{K}_1) . Por um lado, para todo $k \geq 1$:

$$\alpha_k t_{k+1} (1 + \alpha_k + [\alpha_{k-1} - \alpha_k]_+) = \alpha_k t_{k+1} (1 + \max\{\alpha_k, \alpha_{k-1}\}) \leq \bar{\alpha} \cdot \frac{1}{1-\bar{\alpha}} \cdot (1 + \bar{\alpha}).$$

Por outro lado, $1 - \alpha_{k-1} \geq 1 - \bar{\alpha}$. Logo, podemos garantir (\tilde{K}_1) mostrando que

$$\exists \varepsilon \in]0, 1[\text{ tal que } (1 - \varepsilon)(1 - \bar{\alpha}) \geq \frac{\bar{\alpha}}{1 - \bar{\alpha}}(1 + \bar{\alpha}) \quad (4.9)$$

pois nesse caso (\tilde{K}_1) será satisfeita com $\underline{k} = 1$. Por sua vez, (4.9) é equivalente a $1 - \bar{\alpha} > \frac{\bar{\alpha}}{1 - \bar{\alpha}}(1 + \bar{\alpha})$ já que $1 - \bar{\alpha} > 0$ e temos

$$\begin{aligned} 1 - \bar{\alpha} > \frac{\bar{\alpha}}{1 - \bar{\alpha}}(1 + \bar{\alpha}) &\iff (1 - \bar{\alpha})^2 > \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2 \iff \bar{\alpha}^2 - 2\bar{\alpha} + 1 > \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2 \\ &\iff 1 > 3\bar{\alpha} \iff \bar{\alpha} < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Logo, como estamos justamente assumindo $\bar{\alpha} < \frac{1}{3}$, verificamos (\tilde{K}_1) , e portanto satisfazemos todas as hipóteses do Corolário 4.4. O item 1) segue de $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - \alpha_i) \|x_{i+1} - x_i\|^2 < \infty$ (Corolário 4.4(1)) e de $0 < 1 - \bar{\alpha} \leq 1 - \alpha_i \leq 1$, $\forall i$. Similarmente, o item 2) segue de $\sum_{i=1}^{\infty} t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 < \infty$ (Corolário 4.4(2)) e $1 \leq t_i \leq \frac{1}{1-\bar{\alpha}}$, $\forall i$. Os itens 3), 4) e 5) seguem imediatamente dos respectivos itens no Corolário 4.4. ■

Por fim, vamos analisar o caso particular de (RIPA) em que os parâmetros α_k e ρ_k são constantes, ou seja, $\alpha_k = \alpha$ e $\rho_k = \rho$.

Corolário 4.8. *Sejam $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ monótono maximal com $\text{zer}(A) \neq \emptyset$, $\alpha_k = \alpha \in [0, 1[$, $\rho_k = \rho \in]0, 2[$ e $(\mu_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$. Suponha que*

$$\frac{2 - \rho}{\rho} \cdot (1 - \alpha)^2 > \alpha(1 + \alpha). \quad (4.10)$$

Então, dados pontos iniciais $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ e definindo a sequência (x_k) pelo (RIPA) temos:

1. $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$;

2. $\sum_{i=1}^{\infty} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 < \infty$;
3. $\forall z \in \text{zer}(A)$, a sequência real $(\|x_k - z\|)_{k \geq 0}$ converge, e portanto $(x_k)_{k \geq 0}$ é limitada;
4. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(y_k)\| = 0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(x_k)\| = 0$;
5. se ainda $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k > 0$, então existe $x_{\infty} \in \text{zer}(A)$ tal que $x_k \rightharpoonup x_{\infty}$ e $y_k \rightharpoonup x_{\infty}$.

Demonstração. A estratégia é utilizar o Teorema 4.1, verificando as hipóteses (K_0) e (K_1) . Como $0 < \alpha_k = \alpha < 1$, $\forall k$, então $1 \leq t_i = \frac{1}{1-\alpha} < \infty$ (veja Definição 3.8) e portanto (K_0) está garantida. Como $\alpha_k = \alpha$ e $\rho_k = \rho$, temos

$$\left[\frac{2-\rho_k}{\rho_k}(1-\alpha_k) - \frac{2-\rho_{k-1}}{\rho_{k-1}}(1-\alpha_{k-1}) \right]_+ = \left[\frac{2-\rho}{\rho}(1-\alpha) - \frac{2-\rho}{\rho}(1-\alpha) \right]_+ = 0$$

e portanto (K_1) é equivalente a:

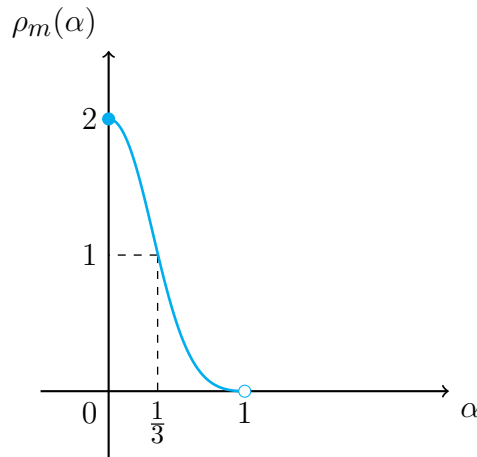
$$\exists \varepsilon \in]0, 1[\text{ e } \exists \underline{k} \in \mathbb{N} \text{ tais que } \forall k \geq \underline{k} : \quad (1-\varepsilon) \frac{2-\rho}{\rho}(1-\alpha) \geq \alpha t_{k+1}(1+\alpha).$$

Portanto, como $t_{k+1} = \frac{1}{1-\alpha}$, uma condição suficiente para (K_1) é:

$$\exists \varepsilon \in]0, 1[\text{ tal que } (1-\varepsilon) \frac{2-\rho}{\rho}(1-\alpha) \geq \frac{\alpha}{1-\alpha}(1+\alpha)$$

que por sua vez é equivalente a $\frac{2-\rho}{\rho}(1-\alpha) > \frac{\alpha}{1-\alpha}(1+\alpha)$, o que é assegurado por (4.10). Logo, (K_0) e (K_1) estão garantidas e podemos utilizar o Teorema 4.1. Para o item 1), temos $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2-\rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1-\alpha_{i-1})\|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$ (Teorema 4.1(1)) e como $\rho_i = \rho \in]0, 2[$, $\alpha_i = \alpha \in [0, 1[$, para todo i temos $\frac{2-\rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1-\alpha_{i-1}) = \frac{2-\rho}{\rho}(1-\alpha) > 0$ e portanto segue nosso item 1). Similarmente, como $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i(2-\rho_i)t_{i+1}\|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 < \infty$ (Teorema 4.1(2)) e $\rho_i(2-\rho_i)t_{i+1} = \rho(2-\rho)\frac{1}{1-\alpha} > 0$, segue nosso item 2). Finalmente, os itens 3), 4) e 5) seguem dos respectivos itens no Teorema 4.1. ■

A desigualdade (4.10) nos dá um indicativo do balanço existente entre os efeitos de relaxação e inércia, pelo menos nesse caso particular de $\alpha_k = \alpha \in [0, 1[$ e $\rho_k = \rho \in]0, 2[$. De fato, podemos reescrever (4.10) como $\rho < \frac{2(1-\alpha)^2}{2\alpha^2 - \alpha + 1}$. Assim, para um dado $\alpha \in [0, 1[$, o valor limite para o parâmetro de relaxação é $\rho_m(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)^2}{2\alpha^2 - \alpha + 1}$ pois para qualquer $\rho \in [0, \rho_m[$, o Algoritmo (RIPA) tem garantia teórica de convergência tomando-se $\alpha_k = \alpha$ e $\rho_k = \rho$. Como $\rho'_m(\alpha) = \frac{2(3\alpha^2 - 2\alpha - 1)}{(2\alpha^2 - \alpha + 1)^2}$ é negativo se $0 \leq \alpha < 1$, a função $\rho_m(\alpha)$ é decrescente, ou seja, quando aumentamos o efeito de inércia, devemos diminuir o efeito da relaxação. Além disso, se $\alpha \rightarrow 0$, $\rho_m(\alpha) \rightarrow 2$, se $\alpha \rightarrow 1$, $\rho_m(\alpha) \rightarrow 0$ e $\rho_m\left(\frac{1}{3}\right) = 1$. Em particular, para $\alpha < \frac{1}{3}$, temos $\rho_m(\alpha) > 1$ e portanto é possível termos sobre-relaxação ($\rho > 1$). Essas propriedades de $\rho_m(\alpha)$ estão ilustradas na Figura 5.

Figura 5 – Gráfico da função $\rho_m(\alpha)$, com $\alpha \in [0, 1[$.

Fonte: Geremia (2020, p. 56), modificado pelo autor.

4.1 O POSSÍVEL CASO DE $\alpha_k \rightarrow 1$

O Teorema 4.1 não contempla a possibilidade de $\alpha_k \rightarrow 1$, pois nesse caso se a hipótese (K_1) é satisfeita (juntamente com (K_0)) eventualmente temos

$$(1 - \varepsilon) \frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} (1 - \alpha_{k-1}) \geq$$

$$\alpha_k t_{k+1} \left(1 + \alpha_k + \left[\frac{2 - \rho_k}{\rho_k} (1 - \alpha_k) - \frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} (1 - \alpha_{k-1}) \right]_+ \right) \geq$$

$$\alpha_k t_{k+1} (1 + \alpha_k) \geq \alpha_k (1 + \alpha_k)$$

donde $(1 - \varepsilon) \frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} \geq \frac{\alpha_k (1 + \alpha_k)}{1 - \alpha_{k-1}} \rightarrow \infty$, o que força $\rho_k \rightarrow 0$. No entanto, isso está em contradição com a hipótese (K_3) , e portanto a convergência de (RIPA) ainda não está estabelecida nesse caso.

O caso $\alpha_k \rightarrow 1$ tem se mostrado importante para obter rápida convergência de algoritmos inerciais, em concordância com os métodos de Nesterov (1983) e o FISTA de Beck e Teboulle (2009) por exemplo, em que $\alpha_k = \frac{t_k - 1}{t_{k+1}}$ com⁴ $t_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_k^2}}{2}$ e $t_1 = 1$.

O Teorema 4.9 a seguir nos fornece uma alternativa ao Teorema 4.1, substituindo a hipótese (K_3) pelas hipóteses (K_4) e (K_5) , de forma que o caso $\alpha_k \rightarrow 1$ está assegurado.

Teorema 4.9 (Convergência fraca do (RIPA), versão 2). *Assuma $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ monótono maximal com $\text{zer}(A) \neq \emptyset$, $(\alpha_k) \subseteq [0, 1]$, $(\rho_k) \subseteq]0, 2]$ e $(\mu_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$, e assumo (K_0) e (K_1) . Então, para qualquer sequência $(x_k)_{k \geq 0}$ gerada pelo (RIPA), temos:*

⁴ Indutivamente podemos mostrar que $t_k \geq \frac{k+1}{2}$, que (t_k) é crescente e que $t_k^2 = t_{k+1}^2 - t_{k+1}$, donde $t_k \nearrow \infty$ e $t_k^2/t_{k+1}^2 = 1 - \frac{1}{t_{k+1}} \nearrow 1$ e então $\alpha_k = \frac{t_k - 1}{t_{k+1}} \nearrow 1$ nesse caso. Veja Beck e Teboulle (2009, Seção 4) para os detalhes.

1. existe $C \geq 0$ tal que $\forall k \geq 1: \|x_{k+1} - x_k\| \leq C \cdot \sum_{i=1}^k \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right]$;

2. neste item, assumamos também (K_2) , que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right] &= \mathcal{O}(\rho_k t_{k+1}), \\ \frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}} &= \mathcal{O}(\rho_k t_{k+1}), \\ \rho_{k-1} t_k &= \mathcal{O}(\rho_k t_{k+1}), \end{aligned} \quad (K_4)$$

se $k \rightarrow \infty$, e que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i t_{i+1} = \infty. \quad (K_5)$$

Então, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(x_k)\| = 0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(y_k)\| = 0$. Se ainda $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k > 0$, então existe $x_\infty \in \text{zer}(A)$ tal que $x_k \rightharpoonup x_\infty$ e $y_k \rightharpoonup x_\infty$ (convergência fraca em \mathcal{H});

3. neste item, assumamos também que⁵ (K_5) falha, ou seja, $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i t_{i+1} < \infty$. Então,

$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i - x_{i-1}\| < \infty$ e portanto existe⁶ $x_\infty \in \mathcal{H}$ tal que $x_k \rightarrow x_\infty$ e $y_k \rightarrow x_\infty$ (convergência forte em \mathcal{H}).

Demonstração. Item 1): $x_{k+1} = (1 - \rho_k)y_k + \rho_k J_{\mu_k A}(y_k) = y_k - \rho_k(y_k - J_{\mu_k A}(y_k)) = x_k + \alpha_k(x_k - x_{k-1}) - \rho_k \mu_k A_{\mu_k}(y_k)$. Logo, $x_{k+1} - x_k = \alpha_k(x_k - x_{k-1}) - \rho_k \mu_k A_{\mu_k}(y_k)$ e portanto

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \alpha_k \|x_k - x_{k-1}\| + \rho_k \mu_k \|A_{\mu_k}(y_k)\|, \quad \forall k \geq 1. \quad (4.11)$$

Agora, vamos estimar o valor $\|A_{\mu_k}(y_k)\|$. Fixe um $z \in \text{zer}(A)$. Pela Proposição 2.9 temos $z \in \text{zer}(A_{\mu_k})$ e portanto $\|A_{\mu_k}(y_k)\| = \|A_{\mu_k}(y_k) - A_{\mu_k}(z)\| \leq \frac{1}{\mu_k} \|y_k - z\|$, pela Proposição 2.8. Agora, pelo Teorema 4.1(3) temos que $(x_k)_{k \geq 0}$ é limitada, ou seja, $\sup_{k \geq 0} \|x_k\| < \infty$. Como $\|y_k\| = \|x_k + \alpha_k(x_k - x_{k-1})\| \leq (1 + \alpha_k)\|x_k\| + \alpha_k\|x_{k-1}\| \leq (1 + 2\alpha_k) \cdot \sup_{k \geq 0} \|x_k\| \leq 3 \cdot \sup_{k \geq 0} \|x_k\| < \infty$, onde $1 + 2\alpha_k \leq 3$ pois $\alpha_k \leq 1$, temos que $(y_k)_{k \geq 1}$ é limitada. Daí, existe constante $\hat{C} \geq 0$ tal que $\|y_k - z\| \leq \hat{C}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Assim, $\|A_{\mu_k}(y_k)\| \leq \frac{1}{\mu_k} \|y_k - z\| \leq \frac{1}{\mu_k} \hat{C}$ e combinando com (4.11) temos

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \alpha_k \|x_k - x_{k-1}\| + \hat{C} \rho_k, \quad \forall k \geq 1. \quad (4.12)$$

⁵ Aqui, não estamos assumindo (K_2) ou (K_4) e nem $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k > 0$.

⁶ Veja que não necessariamente $x_\infty \in \text{zer}(A)$.

Usando (4.12) recursivamente, $\forall k \geq 1$ temos⁷

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x_k\| &\leq \alpha_k \|x_k - x_{k-1}\| + \hat{C} \rho_k \\
&\leq \alpha_k (\alpha_{k-1} \|x_{k-1} - x_{k-2}\| + \hat{C} \rho_{k-1}) + \hat{C} \rho_k \\
&= \alpha_k \alpha_{k-1} \|x_{k-1} - x_{k-2}\| + \hat{C} \cdot (\alpha_k \rho_{k-1} + \rho_k) \\
&\leq \alpha_k \alpha_{k-1} (\alpha_{k-2} \|x_{k-2} - x_{k-3}\| + \hat{C} \rho_{k-2}) + \hat{C} \cdot (\alpha_k \rho_{k-1} + \rho_k) \\
&= \alpha_k \alpha_{k-1} \alpha_{k-2} \|x_{k-2} - x_{k-3}\| + \hat{C} \cdot (\alpha_k \alpha_{k-1} \rho_{k-2} + \alpha_k \rho_{k-1} + \rho_k) \\
&\leq \dots \\
&\leq \left(\prod_{j=1}^k \alpha_j \right) \|x_1 - x_0\| + \hat{C} \cdot \sum_{i=1}^k \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right]. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Agora, note que para qualquer i com $1 \leq i \leq k$, temos $\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \geq \prod_{j=1}^k \alpha_j$ pois $0 \leq \alpha_j \leq 1, \forall j$. Daí:

$$\sum_{i=1}^k \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right] \geq \left(\prod_{j=1}^k \alpha_j \right) \cdot \sum_{i=1}^k \rho_i \geq \left(\prod_{j=1}^k \alpha_j \right) \cdot \rho_1$$

e portanto

$$\left(\prod_{j=1}^k \alpha_j \right) \|x_1 - x_0\| \leq \frac{\|x_1 - x_0\|}{\rho_1} \cdot \sum_{i=1}^k \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right].$$

Logo, definindo $C := \frac{\|x_1 - x_0\|}{\rho_1} + \hat{C}$, a Equação (4.13) nos dá

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq C \cdot \sum_{i=1}^k \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right], \quad \forall k \geq 1$$

que mostra o item 1).

Item 2): neste item, precisamos garantir a convergência fraca da sequência $(x_k)_{k \geq 0}$ para algum ponto $x_\infty \in \text{zer}(A)$. A estratégia adotada é mostrar que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(x_k)\| = 0$ e então seguir os passos da demonstração do Teorema 4.1(5), utilizando o Teorema 4.1(2), o Lema de Opial, $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k > 0$ e a Proposição 2.7(2). Neste item, vamos portanto nos ater a provar que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(x_k)\| = 0$, junto com $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(y_k)\| = 0$ e $y_k \rightharpoonup x_\infty$. Inicialmente, vamos nos concentrar em $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(x_k)\| = 0$.

Primeiramente, pelo Teorema 4.1(2) temos $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i (2 - \rho_i) t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 < \infty$. Por (K_2) e pela Observação 4.2, existem $\bar{\rho} \in]0, 2[$ e $\underline{k} \in \mathbb{N}$ tais que $\rho_k \leq \bar{\rho}, \forall k \geq \underline{k}$.

⁷ Lembre que estamos adotando a notação $\prod_{j=k+1}^k \alpha_j = 1$.

Logo, para $i \geq \underline{k}$ temos $2 - \rho_i \geq 2 - \bar{\rho} > 0$ e como $\sum_{i=\underline{k}}^{\infty} \rho_i(2 - \rho_i)t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 < \infty$ temos $\sum_{i=\underline{k}}^{\infty} \rho_i t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 < \infty$, ou seja

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 < \infty. \quad (4.14)$$

Por (K_5) , $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i t_{i+1} = \infty$ e portanto pela Equação (4.14) devemos ter que $\liminf_{i \rightarrow \infty} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\| = 0$. Com efeito, suponhamos por contradição que o valor de $\liminf_{i \rightarrow \infty} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|$ seja positivo. Pela Observação 4.2, existem $\underline{i} \in \mathbb{N}$ e $\underline{l} > 0$ tais que para $i \geq \underline{i}$ temos $\|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\| \geq \underline{l} > 0$. Mas então por (K_5) teríamos

$$\sum_{i=\underline{i}}^{\infty} \rho_i t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 \geq \underline{l}^2 \cdot \sum_{i=\underline{i}}^{\infty} \rho_i t_{i+1} = \infty$$

o que contraria a Equação (4.14). Assim, de fato, $\liminf_{i \rightarrow \infty} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\| = 0$. Sendo assim, a fim de que $\lim_{i \rightarrow \infty} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\| = 0$, basta mostrarmos que $(\|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|)_{i \geq 1}$ converge em \mathbb{R} , pois nesse caso teremos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\| = \liminf_{i \rightarrow \infty} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\| = 0$$

como desejado.

Dessa forma, nos resta apenas mostrar que a sequência real $(\|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|)_{i \geq 1}$ converge. Curiosamente, faremos isso mostrando que a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\mu_{i+1} A_{\mu_{i+1}}(x_{i+1})\|^4 - \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^4$$

converge, e portanto como é uma série telescópica, $(\|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^4)_{i \geq 1}$ converge e então finalmente $(\|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|)_{i \geq 1}$ converge. Mãos à obra!

Pela Proposição 2.8, A_{μ_k} é $\frac{1}{\mu_k}$ -Lipschitz e portanto $\mu_k A_{\mu_k}$ é 1-Lipschitz, ou seja, não-expansivo. Portanto, dado um $z \in \text{zer}(A) = \text{zer}(A_{\mu_k})$ (Proposição 2.9), temos

$$\forall k \geq 1 : \quad \|\mu_k A_{\mu_k}(x_k)\| = \|\mu_k A_{\mu_k}(x_k) - \mu_k A_{\mu_k}(z)\| \leq \|x_k - z\| \leq C_1 \quad (4.15)$$

onde $C_1 := \sup_{k \geq 0} \|x_k - z\|$, que é finito pois $(x_k)_{k \geq 0}$ é limitada pelo Teorema 4.1(3). Então, como

$$\begin{aligned} & \left| \|\mu_{k+1} A_{\mu_{k+1}}(x_{k+1})\|^2 - \|\mu_k A_{\mu_k}(x_k)\|^2 \right| = \\ & \left(\|\mu_{k+1} A_{\mu_{k+1}}(x_{k+1})\| + \|\mu_k A_{\mu_k}(x_k)\| \right) \cdot \left| \|\mu_{k+1} A_{\mu_{k+1}}(x_{k+1})\| - \|\mu_k A_{\mu_k}(x_k)\| \right| \end{aligned}$$

usando a desigualdade triangular $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ e a Equação (4.15), ficamos com

$$\left| \|\mu_{k+1} A_{\mu_{k+1}}(x_{k+1})\|^2 - \|\mu_k A_{\mu_k}(x_k)\|^2 \right| \leq 2C_1 \cdot \|\mu_{k+1} A_{\mu_{k+1}}(x_{k+1}) - \mu_k A_{\mu_k}(x_k)\|. \quad (4.16)$$

Para estimar $\|\mu_{k+1}A_{\mu_{k+1}}(x_{k+1}) - \mu_k A_{\mu_k}(x_k)\|$ vamos utilizar o Lema 2.16 com $\gamma = \mu_{k+1}$, $\delta = \mu_k$, $x = x_{k+1}$, $y = x_k$ e $o \in \text{zer}(A)$ fixado anteriormente, o que nos dá

$$\begin{aligned} \|\mu_{k+1}A_{\mu_{k+1}}(x_{k+1}) - \mu_k A_{\mu_k}(x_k)\| &\leq 2\|x_{k+1} - x_k\| + 2\|x_{k+1} - z\| \cdot \frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}} \\ &\stackrel{\text{Eq. (4.15)}}{\leq} 2\|x_{k+1} - x_k\| + 2C_1 \cdot \frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}} \\ &\stackrel{\text{Item 1)}}{\leq} 2C \cdot \sum_{i=1}^k \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right] + 2C_1 \cdot \frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Por (K_4) , existem $k_0 \in \mathbb{N}$ e $C_2 \geq 0$ tais que para $k \geq k_0$, temos

$$\sum_{i=1}^k \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right] \leq C_2 \rho_k t_{k+1}, \quad \frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}} \leq C_2 \rho_k t_{k+1}, \quad \rho_{k-1} t_k \leq C_2 \rho_k t_{k+1} \quad (4.18)$$

e portanto pela Equação (4.17), temos

$$\forall k \geq k_0 : \quad \|\mu_{k+1}A_{\mu_{k+1}}(x_{k+1}) - \mu_k A_{\mu_k}(x_k)\| \leq 2C_2(C + C_1) \cdot \rho_k t_{k+1}$$

que combinado com a Equação (4.16) nos dá

$$\forall k \geq k_0 : \quad \left| \|\mu_{k+1}A_{\mu_{k+1}}(x_{k+1})\|^2 - \|\mu_k A_{\mu_k}(x_k)\|^2 \right| \leq C_3 \rho_k t_{k+1} \quad (4.19)$$

onde $C_3 := 2C_2(C + C_1) \cdot 2C_1$. Dessa forma, por (4.19), para $k \geq k_0$ temos

$$\begin{aligned} &\sum_{i=k_0}^k \left| \|\mu_{i+1}A_{\mu_{i+1}}(x_{i+1})\|^4 - \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^4 \right| \\ &= \sum_{i=k_0}^k \left(\|\mu_{i+1}A_{\mu_{i+1}}(x_{i+1})\|^2 + \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 \right) \cdot \left| \|\mu_{i+1}A_{\mu_{i+1}}(x_{i+1})\|^2 - \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 \right| \\ &\leq \sum_{i=k_0}^k C_3 \rho_i t_{i+1} \left(\|\mu_{i+1}A_{\mu_{i+1}}(x_{i+1})\|^2 + \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 \right) \\ &= \sum_{i=k_0}^k C_3 \rho_i t_{i+1} \|\mu_{i+1}A_{\mu_{i+1}}(x_{i+1})\|^2 + \sum_{i=k_0}^k C_3 \rho_i t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2. \end{aligned}$$

Enquanto isso, por (4.18), para $i \geq k_0$ temos $\rho_i t_{i+1} \leq C_2 \rho_{i+1} t_{i+2}$ e as desigualdades acima então nos dão

$$\sum_{i=k_0}^k \left| \|\mu_{i+1}A_{\mu_{i+1}}(x_{i+1})\|^4 - \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^4 \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=k_0}^k C_2 C_3 \rho_{i+1} t_{i+2} \|\mu_{i+1} A_{\mu_{i+1}}(x_{i+1})\|^2 + \sum_{i=k_0}^k C_3 \rho_i t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 \\
&\leq \sum_{i=k_0}^{\infty} C_2 C_3 \rho_{i+1} t_{i+2} \|\mu_{i+1} A_{\mu_{i+1}}(x_{i+1})\|^2 + \sum_{i=k_0}^{\infty} C_3 \rho_i t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

onde a convergência das séries segue da Equação (4.14).

Assim, concluímos que $\sum_{i=1}^{\infty} \left| \|\mu_{i+1} A_{\mu_{i+1}}(x_{i+1})\|^4 - \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^4 \right|$ converge, e portanto $\sum_{i=1}^{\infty} (\|\mu_{i+1} A_{\mu_{i+1}}(x_{i+1})\|^4 - \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^4)$ converge. Conforme mencionado anteriormente, essa é uma série telescópica, e sua convergência garante (de fato, é equivalente) que $(\|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^4)_{i \geq 1}$ converge e portanto $(\|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|)_{i \geq 1}$ converge, como desejávamos.

De maneira completamente análoga ao caso $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(x_k)\| = 0$ mostrado acima, podemos provar que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(y_k)\| = 0$, conforme os passos principais a seguir, cujas justificativas são similares às anteriores. Inicialmente, combinando a convergência de $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i (2 - \rho_i) t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2$ (Teorema 4.1(2)) com (K_2) e com a Observação 4.2 temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 < \infty. \quad (4.20)$$

Por (K_5) temos $\liminf_{i \rightarrow \infty} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\| = 0$ e então basta mostrarmos que a sequência $(\|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|)_{i \geq 1}$ converge. Fixe $z \in \text{zer}(A)$ e como $\tilde{C}_1 := \sup_{k \geq 0} \|y_k - z\| < \infty$ pois (y_k) é limitada (já que (x_k) é limitada, Teorema 4.1(3)), temos o análogo de (4.15):

$$\forall k \geq 1: \quad \|\mu_k A_{\mu_k}(y_k)\| = \|\mu_k A_{\mu_k}(y_k) - \mu_k A_{\mu_k}(z)\| \leq \|y_k - z\| \leq \tilde{C}_1. \quad (4.21)$$

Similarmente a (4.16),

$$\left| \|\mu_{k+1} A_{\mu_{k+1}}(y_{k+1})\|^2 - \|\mu_k A_{\mu_k}(y_k)\|^2 \right| \leq 2\tilde{C}_1 \cdot \|\mu_{k+1} A_{\mu_{k+1}}(y_{k+1}) - \mu_k A_{\mu_k}(y_k)\| \quad (4.22)$$

e utilizando o Lema 2.16 com $\gamma = \mu_{k+1}$, $\delta = \mu_k$, $x = y_{k+1}$, $y = y_k$ e z (fixado anteriormente), temos

$$\begin{aligned}
\|\mu_{k+1} A_{\mu_{k+1}}(y_{k+1}) - \mu_k A_{\mu_k}(y_k)\| &\leq 2\|y_{k+1} - y_k\| + 2\|y_{k+1} - z\| \cdot \frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}} \\
&\stackrel{\text{Eq. (4.21)}}{\leq} 2\|y_{k+1} - y_k\| + 2\tilde{C}_1 \cdot \frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}}. \quad (4.23)
\end{aligned}$$

Aqui, precisamos estimar $\|y_{k+1} - y_k\|$, o que é ligeiramente diferente do caso anterior em que estimávamos $\|x_{k+1} - x_k\|$. Por definição de (RIPA), $y_{k+1} - y_k = x_{k+1} + \alpha_{k+1}(x_{k+1} - x_k) - x_k - \alpha_k(x_k - x_{k-1}) = (1 + \alpha_{k+1})(x_{k+1} - x_k) - \alpha_k(x_k - x_{k-1})$ e

portanto $\|y_{k+1} - y_k\| \leq (1 + \alpha_{k+1})\|x_{k+1} - x_k\| + \alpha_k\|x_k - x_{k-1}\|$. Usando agora o item 1) e que $\alpha_k \leq 1$ temos

$$\|y_{k+1} - y_k\| \leq C \cdot \left(2 \cdot \sum_{i=1}^k \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right] + \sum_{i=1}^{k-1} \left[\left(\prod_{j=i+1}^{k-1} \alpha_j \right) \rho_i \right] \right)$$

e por (4.18) temos então

$$\begin{aligned} \forall k \geq k_0 : \quad & \|y_{k+1} - y_k\| \leq CC_2 \cdot (2\rho_k t_{k+1} + \rho_{k-1} t_k) \leq CC_2 \cdot (2 + C_2) \rho_k t_{k+1} \\ \text{e} \quad & \frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}} \leq C_2 \rho_k t_{k+1}. \end{aligned}$$

Usando agora (4.23) segue

$$\forall k \geq k_0 : \quad \|\mu_{k+1} A_{\mu_{k+1}}(y_{k+1}) - \mu_k A_{\mu_k}(y_k)\| \leq [2CC_2 \cdot (2 + C_2) + 2\tilde{C}_1 C_2] \rho_k t_{k+1}$$

e combinando com (4.22) nos dá

$$\forall k \geq k_0 : \quad \left| \|\mu_{k+1} A_{\mu_{k+1}}(y_{k+1})\|^2 - \|\mu_k A_{\mu_k}(y_k)\|^2 \right| \leq \tilde{C}_3 \rho_k t_{k+1} \quad (4.24)$$

onde $\tilde{C}_3 := [2CC_2 \cdot (2 + C_2) + 2\tilde{C}_1 C_2] \cdot 2\tilde{C}_1 \geq 0$, que é o análogo de (4.19). Agora, de forma similar a como fizemos para $\sum_{i=1}^{\infty} \left| \|\mu_{i+1} A_{\mu_{i+1}}(x_{i+1})\|^4 - \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^4 \right|$, podemos mostrar que a série $\sum_{i=1}^{\infty} \left| \|\mu_{i+1} A_{\mu_{i+1}}(y_{i+1})\|^4 - \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^4 \right|$ converge utilizando (4.20), donde segue que a sequência $(\|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|)_{i \geq 1}$ converge, e então como temos $\liminf_{i \rightarrow \infty} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\| = 0$ segue $\lim_{i \rightarrow \infty} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\| = 0$ como desejávamos.

Por fim, combinando $x_k \rightarrow x_\infty$ com $\|\mu_k A_{\mu_k}(y_k)\| \rightarrow 0$ temos também $y_k \rightarrow x_\infty$, de maneira idêntica ao que fizemos na demonstração do Teorema 4.1(5), o que encerra o item 2).

Item 3): assumamos que (K_5) falhe, ou seja, $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i t_{i+1} < \infty$. Pela Equação (4.12), temos

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \alpha_k \|x_k - x_{k-1}\| + \hat{C} \rho_k, \quad \forall k \geq 1.$$

Definindo $a_k := \|x_k - x_{k-1}\|$ e $\omega_k := \hat{C} \rho_k$, temos que $a_{k+1} \leq \alpha_k a_k + \omega_k$, $\forall k \geq 1$, e $\sum_{i=1}^{\infty} t_{i+1} [\omega_i]_+ = \hat{C} \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i t_{i+1} < \infty$. Daí, pelo Lema 3.8(2) temos $\sum_{i=1}^{\infty} [a_i]_+ < \infty$, ou seja, $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i - x_{i-1}\| < \infty$. Como o espaço \mathcal{H} é completo, isso implica que $\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_{i-1})$ converge, o que garante (de fato, é equivalente) a convergência forte de $(x_k)_{k \geq 0}$ para algum ponto $x_\infty \in \mathcal{H}$, isto é, $x_k \rightarrow x_\infty$.

Basta mostrarmos agora $y_k \rightarrow x_\infty$. Como $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i - x_{i-1}\| < \infty$, temos $\|x_i - x_{i-1}\| \rightarrow 0$, ou seja, $x_k - x_{k-1} \rightarrow 0$. Daí, da definição de (RIPA) temos $y_k = x_k + \alpha_k(x_k - x_{k-1}) \Rightarrow y_k - x_k = \alpha_k(x_k - x_{k-1}) \rightarrow 0$, pois $0 \leq \alpha_k \leq 1$, e portanto $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_\infty$, o que encerra o item 3). ■

5 APLICAÇÃO PARA CLASSES PARTICULARES DE PARÂMETROS

Neste capítulo, nosso objetivo é particularizar os Teoremas 4.1 e 4.9 para algumas classes particulares de parâmetros (α_k) , (ρ_k) e (μ_k) , de forma a garantir as hipóteses dos teoremas citados e, portanto, assegurar a convergência de (RIPA). Observe que as hipóteses de (K_0) a (K_5) envolvem apenas as sequências de parâmetros, e não as sequências (x_k) e (y_k) geradas, de forma que a convergência de (RIPA) está condicionada a escolhas apropriadas dos parâmetros. Discutiremos essas escolhas neste capítulo.

5.1 CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA (K_0) E (K_1)

Nesta seção, vamos desenvolver condições sobre as sequências de parâmetros a fim de garantir que as hipóteses (K_0) e (K_1) , presentes em ambos os Teoremas 4.1 e 4.9, sejam satisfeitas. Começamos com uma condição suficiente para (K_0) (que envolve apenas os parâmetros de inércia (α_k)).

Proposição 5.1. *Seja $(\alpha_k)_{k \geq 0} \subseteq [0, 1[$ tal que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \alpha_{k+1}} - \frac{1}{1 - \alpha_k} \right) = c \quad (5.1)$$

para algum $c \in \mathbb{R}$ com $0 \leq c < 1$. Então, temos:

1. a condição (K_0) é satisfeita e $t_{k+1} \sim \frac{1}{(1-c)(1-\alpha_k)}$ se $k \rightarrow \infty$;
2. $1 - \alpha_k \sim 1 - \alpha_{k+1}$ se $k \rightarrow \infty$, e portanto $t_{k+1} \sim t_{k+2}$ se $k \rightarrow \infty$;
3. $\sum_{k=1}^{\infty} 1 - \alpha_k = \infty$.

Demonstração. Item 1): o resultado deste item se deve a Attouch e Cabot (2018, Proposição 15). Fixe $\varepsilon \in]0, 1 - c[$ e defina $\hat{\varepsilon} := \varepsilon(1 - c)$. Por (5.1), tome $i_0 \in \mathbb{N}$ (que depende apenas da aproximação ε) tal que

$$\forall i \geq i_0 : \quad c - \hat{\varepsilon} \leq \frac{1}{1 - \alpha_{i+1}} - \frac{1}{1 - \alpha_i} \leq c + \hat{\varepsilon}. \quad (5.2)$$

Daí, para $i \geq i_0$ temos $-c - \hat{\varepsilon} \leq \frac{1}{1 - \alpha_i} - \frac{1}{1 - \alpha_{i+1}} \leq -c + \hat{\varepsilon}$ e portanto $1 - c - \hat{\varepsilon} \leq 1 + \frac{1}{1 - \alpha_i} - \frac{1}{1 - \alpha_{i+1}} \leq 1 - c + \hat{\varepsilon}$. Logo,

$$\forall i \geq i_0 \quad \text{e} \quad 1 \leq k \leq i : \quad (1 - c - \hat{\varepsilon}) \prod_{j=k+1}^i \alpha_j \leq \left(1 + \frac{1}{1 - \alpha_i} - \frac{1}{1 - \alpha_{i+1}} \right) \prod_{j=k+1}^i \alpha_j \leq (1 - c + \hat{\varepsilon}) \prod_{j=k+1}^i \alpha_j. \quad (5.3)$$

Agora, veja que $1 + \frac{1}{1-\alpha_i} - \frac{1}{1-\alpha_{i+1}} = \frac{1}{1-\alpha_i} - \frac{\alpha_{i+1}}{1-\alpha_{i+1}}$ e portanto

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{1-\alpha_i} - \frac{1}{1-\alpha_{i+1}}\right) \prod_{j=k+1}^i \alpha_j &= \frac{1}{1-\alpha_i} \prod_{j=k+1}^i \alpha_j - \frac{\alpha_{i+1}}{1-\alpha_{i+1}} \prod_{j=k+1}^i \alpha_j \\ &= \frac{1}{1-\alpha_i} \prod_{j=k+1}^i \alpha_j - \frac{1}{1-\alpha_{i+1}} \prod_{j=k+1}^{i+1} \alpha_j \end{aligned}$$

que combinado com (5.3) nos dá

$$\begin{aligned} \forall i \geq i_0 \quad \text{e} \quad 1 \leq k \leq i : \\ (1 - c - \hat{\varepsilon}) \prod_{j=k+1}^i \alpha_j \leq \frac{1}{1-\alpha_i} \prod_{j=k+1}^i \alpha_j - \frac{1}{1-\alpha_{i+1}} \prod_{j=k+1}^{i+1} \alpha_j \leq (1 - c + \hat{\varepsilon}) \prod_{j=k+1}^i \alpha_j. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Veja que a diferença que aparece no termo do meio das desigualdades acima é uma diferença telescópica em i , então nada melhor do que realizarmos uma soma. Fixe $k, n \in \mathbb{N}$ tais que $i_0 \leq k \leq n - 1$, de forma que a Equação (5.4) é satisfeita para todo $i \geq k$. Somando para $i = k$ até $i = n - 1$ nos dá

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{n-1} \left(\frac{1}{1-\alpha_i} \prod_{j=k+1}^i \alpha_j - \frac{1}{1-\alpha_{i+1}} \prod_{j=k+1}^{i+1} \alpha_j \right) &= \frac{1}{1-\alpha_k} \prod_{j=k+1}^k \alpha_j - \frac{1}{1-\alpha_n} \prod_{j=k+1}^n \alpha_j \\ &= \frac{1}{1-\alpha_k} - \frac{1}{1-\alpha_n} \prod_{j=k+1}^n \alpha_j. \end{aligned}$$

Dessa forma, somando de $i = k$ até $i = n - 1$ toda a desigualdade em (5.4):

$$\begin{aligned} \forall k, n \in \mathbb{N} \quad \text{tais que} \quad i_0 \leq k \leq n - 1 : \\ (1 - c - \hat{\varepsilon}) \sum_{i=k}^{n-1} \prod_{j=k+1}^i \alpha_j \leq \frac{1}{1-\alpha_k} - \frac{1}{1-\alpha_n} \prod_{j=k+1}^n \alpha_j \leq (1 - c + \hat{\varepsilon}) \sum_{i=k}^{n-1} \prod_{j=k+1}^i \alpha_j. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Nosso objetivo agora é mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\alpha_n} \prod_{j=k+1}^n \alpha_j = 0$. Se existe $n_0 \geq k + 1$ tal que $\alpha_{n_0} = 0$, então $\prod_{j=k+1}^n \alpha_j = 0$ para todo $n \geq n_0$ e então esse limite trivialmente é 0. Suponha então que $\alpha_n > 0$ para todo $n \geq k + 1$. Daí, se $i \geq k \geq i_0$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{1-\alpha_{i+1}} \prod_{j=k+1}^{i+1} \alpha_j}{\frac{1}{1-\alpha_i} \prod_{j=k+1}^i \alpha_j} &= \frac{1-\alpha_i}{1-\alpha_{i+1}} \cdot \alpha_{i+1} \stackrel{\text{Eq. (5.2)}}{\leq} (1-\alpha_i) \left(c + \hat{\varepsilon} + \frac{1}{1-\alpha_i} \right) \alpha_{i+1} \\ &= \left(1 + (c + \hat{\varepsilon})(1-\alpha_i) \right) \alpha_{i+1} \stackrel{(*)}{\leq} \exp \left((c + \hat{\varepsilon})(1-\alpha_i) \right) \cdot \exp(\alpha_{i+1} - 1) \\ &= \exp \left(- (1 - c - \hat{\varepsilon})(1-\alpha_i) + \alpha_{i+1} - \alpha_i \right) \end{aligned}$$

onde a desigualdade (\star) segue de $1 + x \leq \exp(x)$, $\forall x \geq 0$, e portanto $y \leq \exp(y - 1)$, $\forall y \geq 1$. Basta fazer $y = 1 + (c + \hat{\varepsilon})(1 - \alpha_i)$ e $x = \alpha_{i+1}$.

Agora, para $i_0 \leq k \leq n - 1$, multiplicando a expressão anterior de $i = k$ até $i = n - 1$ nos dá

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \alpha_n} \prod_{j=k+1}^n \alpha_j &= \frac{1}{1 - \alpha_n} \prod_{j=k+1}^n \alpha_j = \prod_{i=k}^{n-1} \frac{1}{1 - \alpha_{i+1}} \prod_{j=k+1}^{i+1} \alpha_j \\ &= \frac{1}{1 - \alpha_k} \prod_{j=k+1}^k \alpha_j = \prod_{i=k}^{n-1} \frac{1}{1 - \alpha_i} \prod_{j=k+1}^i \alpha_j \\ &\leq \prod_{i=k}^{n-1} \exp\left(- (1 - c - \hat{\varepsilon})(1 - \alpha_i) + \alpha_{i+1} - \alpha_i\right) \\ &= \exp\left(- (1 - c - \hat{\varepsilon}) \sum_{i=k}^{n-1} (1 - \alpha_i) + \alpha_n - \alpha_k\right) \end{aligned}$$

donde

$\forall k, n \in \mathbb{N}$ tais que $i_0 \leq k \leq n - 1$:

$$\frac{1}{1 - \alpha_n} \prod_{j=k+1}^n \alpha_j \leq \frac{1}{1 - \alpha_k} \cdot \exp\left(- (1 - c - \hat{\varepsilon}) \sum_{i=k}^{n-1} (1 - \alpha_i) + \alpha_n - \alpha_k\right). \quad (5.6)$$

Agora, pela Equação (5.2) temos $\frac{1}{1 - \alpha_{l+1}} - \frac{1}{1 - \alpha_l} \leq c + \hat{\varepsilon}$ para todo $l \geq i_0$. Logo, para qualquer $i \geq i_0$, somando de $l = i_0$ até $l = i$ nos dá

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \alpha_{i+1}} - \frac{1}{1 - \alpha_{i_0}} &\leq (i - i_0)(c + \hat{\varepsilon}) \implies \frac{1}{1 - \alpha_{i+1}} \leq \frac{1}{1 - \alpha_{i_0}} + (i - i_0)(c + \hat{\varepsilon}) \\ &\implies 1 - \alpha_{i+1} \geq \frac{1}{d} > 0 \end{aligned}$$

onde $d := \frac{1}{1 - \alpha_{i_0}} + (i - i_0)(c + \hat{\varepsilon}) > 0$, o que mostra que $\sum_{i=i_0}^{\infty} 1 - \alpha_{i+1} = \infty$, ou seja, $\sum_{i=1}^{\infty} 1 - \alpha_i = \infty$, o que em particular prova o item 3). Dessa forma, na Equação (5.6) como $\alpha_n \leq 1$ e $1 - c - \hat{\varepsilon} > 0$ já que $\hat{\varepsilon} = (1 - c)\varepsilon < 1 - c$ (pois $0 < \varepsilon < 1 - c \leq 1$), passando o limite em $n \rightarrow \infty$ nos dá que¹ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \alpha_n} \prod_{j=k+1}^n \alpha_j = 0$, como queríamos.

Daí, fazendo agora $n \rightarrow \infty$ na primeira desigualdade da Equação (5.5) nos dá que

$$\forall k \geq i_0 : (1 - c - \hat{\varepsilon}) \sum_{i=k}^{\infty} \prod_{j=k+1}^i \alpha_j \leq \frac{1}{1 - \alpha_k} < \infty \implies \forall k \geq i_0 : \underbrace{\sum_{i=k}^{\infty} \prod_{j=k+1}^i \alpha_j}_{t_{k+1}} < \infty.$$

Isso verifica a condição (K_0) para todo $i \geq i_0$. O Lema 3.7(4) nos garante então que (K_0) é satisfeita para todo $i \geq 1$, o que mostra a primeira afirmação do item 1). Fazendo novamente $n \rightarrow \infty$ em (5.5) nos dá

¹ Já que $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x) = 0$.

$$\begin{aligned}
(1 - c - \hat{\varepsilon})t_{k+1} &\leq \frac{1}{1 - \alpha_k} \leq (1 - c + \hat{\varepsilon})t_{k+1} && \forall k \geq i_0 \\
\implies \left(1 - \frac{\hat{\varepsilon}}{1 - c}\right)t_{k+1} &\leq \frac{1}{(1 - c)(1 - \alpha_k)} \leq \left(1 + \frac{\hat{\varepsilon}}{1 - c}\right)t_{k+1} && \forall k \geq i_0 \\
\implies 1 - \varepsilon &\leq \frac{1}{\frac{(1 - c)(1 - \alpha_k)}{t_{k+1}}} \leq 1 + \varepsilon && \forall k \geq i_0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, para qualquer $\varepsilon \in]0, 1 - c[$ fomos capazes de encontrar $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1 - \varepsilon \leq \frac{1}{(1 - c)(1 - \alpha_k)} / t_{k+1} \leq 1 + \varepsilon$ para todo $k \geq i_0$, o que mostra que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{(1 - c)(1 - \alpha_k)}{t_{k+1}}} = 1$$

isto é, $t_{k+1} \sim \frac{1}{(1 - c)(1 - \alpha_k)}$ se $k \rightarrow \infty$, o que encerra o item 1).

Item 2): primeiramente, assuma que $c > 0$ e fixe $\varepsilon \in]0, \frac{c}{2}[$. Por (5.1), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ (que depende apenas de ε) tal que se $i \geq k_0$, então $c - \varepsilon \leq \frac{1}{1 - \alpha_{i+1}} - \frac{1}{1 - \alpha_i} \leq c + \varepsilon$. Dado um $k \geq k_0 + 1$, somando a desigualdade anterior de $i = k_0$ até $i = k - 1$ nos dá

$$\begin{aligned}
(c - \varepsilon)(k - k_0) &\leq \frac{1}{1 - \alpha_k} - \frac{1}{1 - \alpha_{k_0}} \leq (c + \varepsilon)(k - k_0) \\
\implies (c - \varepsilon)(k - k_0) + \frac{1}{1 - \alpha_{k_0}} &\leq \frac{1}{1 - \alpha_k} \leq (c + \varepsilon)(k - k_0) + \frac{1}{1 - \alpha_{k_0}}.
\end{aligned}$$

Dividindo toda a desigualdade por ck nos dá

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{c}\right) \left(1 - \frac{k_0}{k}\right) + \frac{1}{(1 - \alpha_{k_0})ck} \leq \frac{1}{(1 - \alpha_k)ck} \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{c}\right) \left(1 - \frac{k_0}{k}\right) + \frac{1}{(1 - \alpha_{k_0})ck}$$

e portanto

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{c}\right) \left(1 - \frac{k_0}{k}\right) \leq \frac{1}{(1 - \alpha_k)ck} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{c} + \frac{1}{(1 - \alpha_{k_0})ck}, \quad \forall k \geq k_0 + 1. \quad (5.7)$$

Agora, defina²

$$k_1 := \left\lceil \max \left\{ k_0 \left(\frac{c}{\varepsilon} - 1 \right), \frac{1}{(1 - \alpha_{k_0})\varepsilon}, k_0 + 1 \right\} \right\rceil.$$

Veja que k_1 depende apenas de ε , assim como k_0 . Dessa forma, se $k \geq k_1$, então $k \geq k_0 + 1$ e portanto a desigualdade em (5.7) vale. Além disso:

$$\begin{aligned}
k \geq k_0 \left(\frac{c}{\varepsilon} - 1 \right) &\implies k \cdot \frac{\varepsilon}{c} \geq k_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{c} \right) \implies \frac{k_0}{k} \left(1 - \frac{\varepsilon}{c} \right) \leq \frac{\varepsilon}{c} \\
&\implies \left(1 - \frac{\varepsilon}{c} \right) \left(1 - \frac{k_0}{k} \right) = 1 - \frac{\varepsilon}{c} - \frac{k_0}{k} \left(1 - \frac{\varepsilon}{c} \right) \geq 1 - \frac{2\varepsilon}{c}
\end{aligned}$$

² Dado $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil := \min\{r \in \mathbb{Z} : x \leq r\}$.

e

$$k \geq \frac{1}{(1 - \alpha_{k_0})\varepsilon} \implies \frac{1}{(1 - \alpha_{k_0})k} \leq \varepsilon \implies \frac{1}{(1 - \alpha_{k_0})ck} \leq \frac{\varepsilon}{c}.$$

Juntando as estimativas acima com (5.7) nos dá

$$1 - \frac{2\varepsilon}{c} \leq \frac{1}{ck} \leq 1 + \frac{2\varepsilon}{c} \quad \forall k \geq k_1. \quad (5.8)$$

Assim, para cada $\varepsilon \in]0, \frac{c}{2}[$ fomos capazes de encontrar $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que (5.8) vale, o que mostra que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \alpha_k} / ck = 1$, ou seja, $\frac{1}{1 - \alpha_k} \sim ck$. Podemos reescrever como $1 - \alpha_k \sim \frac{1}{ck}$, e como $\frac{1}{ck} \sim \frac{1}{c(k+1)}$ e $1 - \alpha_{k+1} \sim \frac{1}{c(k+1)}$, pela transitividade de \sim segue que $1 - \alpha_k \sim 1 - \alpha_{k+1}$, o que nos dá a primeira conclusão do item 2) para o caso $c > 0$.

Se agora $c = 0$, de (5.1) temos

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \alpha_{k+1}} - \frac{1}{1 - \alpha_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \alpha_k} \left(\frac{1 - \alpha_k}{1 - \alpha_{k+1}} - 1 \right).$$

Como $0 \leq \alpha_k < 1$, temos $\frac{1}{1 - \alpha_k} \geq 1$ e portanto:

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \alpha_k}{1 - \alpha_{k+1}} - 1 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \alpha_k}{1 - \alpha_{k+1}} = 1$$

ou seja, $1 - \alpha_k \sim 1 - \alpha_{k+1}$ se $k \rightarrow \infty$. Dessa forma, a afirmação $1 - \alpha_k \sim 1 - \alpha_{k+1}$ está estabelecida, tanto para $c > 0$ quanto para $c = 0$. Finalmente, em qualquer dos casos $c > 0$ ou $c = 0$, como $1 - \alpha_k \sim 1 - \alpha_{k+1}$, temos $\frac{1}{(1-c)(1-\alpha_k)} \sim \frac{1}{(1-c)(1-\alpha_{k+1})}$, e pelo item 1) segue então $t_{k+1} \sim t_{k+2}$, o que encerra o item 2).

Item 3): foi provado no item 1). ■

Vamos agora estabelecer hipóteses suficientes para (K_1) . Considere a seguinte condição:

$\exists c' \in]-1, 1[$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{2 - \rho_k}{\rho_k} \cdot (1 - \alpha_k) - \frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} \cdot (1 - \alpha_{k-1})}{\frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} \cdot (1 - \alpha_{k-1})^2} = c'. \quad (5.9)$$

Veja que em (K_1) , precisamos também assumir (K_0) , pois do contrário a sequência (t_k) não está bem definida. A Proposição 5.2 a seguir assume então tanto (5.9) quanto (5.1) e assegura que ambas (K_0) e (K_1) são satisfeitas:

Proposição 5.2. Assuma $(\alpha_k)_{k \geq 0} \subseteq [0, 1[$, $(\rho_k)_{k \geq 0} \subseteq]0, 2[$, juntamente com (5.1), (5.9), $|c'| < 1 - c$ e

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{2 - \rho_k}{\rho_k} \cdot (1 - \alpha_k)^2 > \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k(1 + \alpha_k)}{1 - c - |c'|}. \quad (5.10)$$

Então, as condições (K_0) e (K_1) são satisfeitas.

Demonstração. A hipótese (5.1) garante a condição (K_0) , conforme a Proposição 5.1. Basta então verificarmos a condição (K_1) . Defina $\theta_k := \frac{2-\rho_k}{\rho_k} \cdot (1 - \alpha_k)$, de forma que (K_1) pode ser reescrita como

$$\exists \varepsilon \in]0, 1[\text{ e } \exists \underline{k} \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall k \geq \underline{k} : (1 - \varepsilon)\theta_{k-1} \geq \alpha_k t_{k+1} (1 + \alpha_k + [\theta_k - \theta_{k-1}]_+). \quad (5.11)$$

Pela Proposição 5.1, temos $t_{k+1} \sim t_k \sim \frac{1}{(1-c)(1-\alpha_{k-1})}$. Logo,

$$\frac{t_{k+1}}{\frac{1}{(1-c)(1-\alpha_{k-1})}} = 1 + o(1) \implies t_{k+1} = \frac{1}{(1-c)(1-\alpha_{k-1})} \cdot (1 + o(1)).$$

Dessa forma, (5.11) (e portanto (K_1)) é equivalente a

$$\begin{aligned} & \exists \varepsilon \in]0, 1[\text{ e } \exists \underline{k} \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall k \geq \underline{k} \\ & (1 - \varepsilon)(1 - c) \cdot \frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} \cdot (1 - \alpha_{k-1})^2 \geq \alpha_k (1 + o(1)) (1 + \alpha_k + [\theta_k - \theta_{k-1}]_+). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Por outro lado, por (5.9) temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\theta_k - \theta_{k-1}|}{\frac{2-\rho_{k-1}}{\rho_{k-1}}(1-\alpha_{k-1})^2} = |c'| \implies \frac{|\theta_k - \theta_{k-1}|}{\frac{2-\rho_{k-1}}{\rho_{k-1}}(1-\alpha_{k-1})^2} - |c'| = o(1)$$

e então

$$\begin{aligned} |\theta_k - \theta_{k-1}| - |c'| \frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} (1 - \alpha_{k-1})^2 &= o(1) \cdot \frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} (1 - \alpha_{k-1})^2 \\ &= o\left(\frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} (1 - \alpha_{k-1})^2\right) \end{aligned}$$

donde

$$|\theta_k - \theta_{k-1}| = |c'| \cdot \frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} (1 - \alpha_{k-1})^2 + o\left(\frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} (1 - \alpha_{k-1})^2\right). \quad (5.13)$$

Fazendo agora $R_k := \frac{2-\rho_k}{\rho_k} (1 - \alpha_k)^2$, como $|\theta_k - \theta_{k-1}| \geq [\theta_k - \theta_{k-1}]_+$, a Equação (5.12) nos permite concluir que (K_1) é implicada por:

$$\begin{aligned} & \exists \varepsilon \in]0, 1[\text{ e } \exists \underline{k} \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall k \geq \underline{k} \\ & (1 - \varepsilon)(1 - c)R_{k-1} \geq \alpha_k (1 + o(1)) (1 + \alpha_k + |\theta_k - \theta_{k-1}|). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} & (1 - \varepsilon)(1 - c)R_{k-1} \geq \alpha_k (1 + o(1)) (1 + \alpha_k + |\theta_k - \theta_{k-1}|) \\ \stackrel{(5.13)}{\iff} & (1 - \varepsilon)(1 - c)R_{k-1} \geq \alpha_k (1 + o(1)) (1 + \alpha_k + |c'|R_{k-1} + o(R_{k-1})) \\ \iff & \left[(1 - \varepsilon)(1 - c) - \alpha_k (1 + o(1)) \left(|c'| + \frac{o(R_{k-1})}{R_{k-1}} \right) \right] \cdot R_{k-1} \geq (1 + o(1))\alpha_k (1 + \alpha_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff \left[(1 - \varepsilon)(1 - c) - \alpha_k(1 + o(1)) (|c'| + o(1)) \right] \cdot R_{k-1} \geq (1 + o(1))\alpha_k(1 + \alpha_k) \\ &\iff \left[(1 - \varepsilon)(1 - c) - \alpha_k (|c'| + o(1)) \right] \cdot R_{k-1} \geq (1 + o(1))\alpha_k(1 + \alpha_k). \end{aligned}$$

Como também $\alpha_k \leq 1$, as desigualdades acima são implicadas por

$$\begin{aligned} &\left[(1 - \varepsilon)(1 - c) - (|c'| + o(1)) \right] \cdot R_{k-1} \geq (1 + o(1))\alpha_k(1 + \alpha_k) \\ \stackrel{3}{\iff} &\left[1 - \frac{o(1)}{(1 - \varepsilon)(1 - c) - |c'|} \right] \cdot R_{k-1} \geq (1 + o(1)) \frac{\alpha_k(1 + \alpha_k)}{(1 - \varepsilon)(1 - c) - |c'|} \\ \iff &(1 + o(1)) \cdot R_{k-1} \geq (1 + o(1)) \frac{\alpha_k(1 + \alpha_k)}{(1 - \varepsilon)(1 - c) - |c'|}. \end{aligned}$$

Assim, por (5.14) e como $\frac{1+o(1)}{1+o(1)} = 1 + o(1)$, vemos que (K_1) é implicada por:

$$\exists \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[\text{ e } \exists \underline{k} \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall k \geq \underline{k}: R_{k-1} \geq (1 + o(1)) \frac{\alpha_k(1 + \alpha_k)}{(1 - \varepsilon)(1 - c) - |c'|}. \quad (5.15)$$

Procedendo de forma semelhante à Observação 4.2, dada uma sequência real $(b_k)_{k \geq 1}$, a propriedade $\liminf_{k \rightarrow \infty} b_k > 0$ é equivalente a (b_k) ser eventualmente *bounded away from 0*, ou seja, existirem $l > 0$ e $\underline{k} \in \mathbb{N}$ tais que $\forall k \geq \underline{k}$ valha $b_k \geq l$. Dessa forma, para garantir que eventualmente tenhamos $R_{k-1} - (1 + o(1)) \frac{\alpha_k(1 + \alpha_k)}{(1 - \varepsilon)(1 - c) - |c'|} \geq 0$ (que é a condição que aparece em (5.15)), podemos exigir a condição mais forte de que $\left(R_{k-1} - (1 + o(1)) \frac{\alpha_k(1 + \alpha_k)}{(1 - \varepsilon)(1 - c) - |c'|} \right)_{k \geq 1}$ seja eventualmente *bounded away from 0*, ou equivalentemente

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \left[R_{k-1} - (1 + o(1)) \frac{\alpha_k(1 + \alpha_k)}{(1 - \varepsilon)(1 - c) - |c'|} \right] > 0$$

de forma que (5.15) nos garante que (K_1) é satisfeita se

$$\exists \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[\text{ tal que } \liminf_{k \rightarrow \infty} \left[R_{k-1} - (1 + o(1)) \frac{\alpha_k(1 + \alpha_k)}{(1 - \varepsilon)(1 - c) - |c'|} \right] > 0. \quad (5.16)$$

Agora, dadas sequências reais (a_k) e (b_k) , lembre que $\liminf_{k \rightarrow \infty} (a_k - b_k) \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} a_k + \liminf_{k \rightarrow \infty} (-b_k) = \liminf_{k \rightarrow \infty} a_k - \limsup_{k \rightarrow \infty} b_k$, e assim podemos garantir que $\liminf_{k \rightarrow \infty} (a_k - b_k) > 0$ pedindo que $\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k - \limsup_{k \rightarrow \infty} b_k > 0$, ou seja, que $\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k > \limsup_{k \rightarrow \infty} b_k$. Dessa forma, (5.16) é garantida por

$$\exists \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[\text{ tal que } \liminf_{k \rightarrow \infty} R_{k-1} > \limsup_{k \rightarrow \infty} \left[(1 + o(1)) \frac{\alpha_k(1 + \alpha_k)}{(1 - \varepsilon)(1 - c) - |c'|} \right]. \quad (5.17)$$

Além disso, se (a_k) converge, digamos $a_k \rightarrow a \in \mathbb{R}$, então $\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k b_k = a \cdot \limsup_{k \rightarrow \infty} b_k$. Tomando $a_k = 1 + o(1) \rightarrow 1$, temos que (5.17) é assegurada por

$$\exists \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[\text{ tal que } \liminf_{k \rightarrow \infty} R_{k-1} > \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k(1 + \alpha_k)}{(1 - \varepsilon)(1 - c) - |c'|}. \quad (5.18)$$

³ Restringindo $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, de forma que $(1 - \varepsilon)(1 - c) - |c'| > 0$. A escolha de tal $\varepsilon_0 > 0$ é possível pela hipótese $|c'| < 1 - c \Rightarrow 1 - c - |c'| > 0$ e pela continuidade da função em ε .

Finalmente, note que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k(1 + \alpha_k)}{(1 - \varepsilon)(1 - c) - |c'|} = \frac{1}{(1 - \varepsilon)(1 - c) - |c'|} \cdot \limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha_k(1 + \alpha_k)$$

é uma função contínua de $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, já que o termo $\limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha_k(1 + \alpha_k)$ é constante e finito (pois $\alpha_k(1 + \alpha_k) \leq 2$ pois $\alpha_k \leq 1$). Dessa forma, pela continuidade de tal função, a existência de ε em (5.18) é garantida se exigirmos que a desigualdade estrita seja satisfeita para $\varepsilon = 0$, o que ao final do dia nos mostra que (K_1) é garantida se

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} R_{k-1} > \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k(1 + \alpha_k)}{1 - c - |c'|}$$

que é exatamente nossa hipótese em (5.10), já que $\liminf_{k \rightarrow \infty} R_{k-1} = \liminf_{k \rightarrow \infty} R_k$ e $R_k = \frac{2 - \rho_k}{\rho_k}(1 - \alpha_k)^2$. ■

A Proposição 5.3 a seguir fornece um conjunto de hipóteses alternativo, em relação ao da Proposição 5.2, a fim de garantir (K_0) e (K_1) :

Proposição 5.3. *Suponha que $(\alpha_k)_{k \geq 0} \subseteq [0, 1[$ e $(\rho_k)_{k \geq 0} \subseteq]0, 2[$. Assuma que existem $\bar{\rho} \in [0, 2[$, $c \in [0, 1[$ e $c'' \in \mathbb{R}$, com $-(1 - \frac{\bar{\rho}}{2}) < c'' \leq -(1 - \frac{\bar{\rho}}{2})c$, tais que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \bar{\rho}; \tag{5.19}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \alpha_{k+1}} - \frac{1}{1 - \alpha_k} \right) = c; \tag{5.20}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho_{k+1} - \rho_k}{\rho_{k+1}(1 - \alpha_k)} = c''; \tag{5.21}$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - \alpha_k)^2}{\rho_k} > \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k(1 + \alpha_k)}{2 - \bar{\rho} + 2c''}. \tag{5.22}$$

Então, as condições (K_0) e (K_1) são satisfeitas.

Demonstração. A hipótese (5.20) é idêntica a (5.1) e portanto a Proposição 5.1 garante que (K_0) é satisfeita. Para garantir (K_1) , vamos mostrar que as hipóteses da Proposição 5.2 são satisfeitas. Começamos verificando (5.9).

Note que o numerador de (5.9) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} & \frac{2 - \rho_k}{\rho_k}(1 - \alpha_k) - \frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}}(1 - \alpha_{k-1}) \\ &= \frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} \left((1 - \alpha_k) - (1 - \alpha_{k-1}) \right) + \left(\frac{2 - \rho_k}{\rho_k} - \frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} \right) (1 - \alpha_k) \\ &= \frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} \left((1 - \alpha_k) - (1 - \alpha_{k-1}) \right) - 2 \cdot \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\rho_k \rho_{k-1}} (1 - \alpha_k). \end{aligned} \tag{5.23}$$

Por (5.20),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - \alpha_{k-1}) - (1 - \alpha_k)}{(1 - \alpha_k)(1 - \alpha_{k-1})} = c$$

$$\begin{aligned}
&\implies \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - \alpha_{k-1}) - (1 - \alpha_k) - c(1 - \alpha_k)(1 - \alpha_{k-1})}{(1 - \alpha_k)(1 - \alpha_{k-1})} = 0 \\
&\implies (1 - \alpha_{k-1}) - (1 - \alpha_k) - c(1 - \alpha_k)(1 - \alpha_{k-1}) = o\left((1 - \alpha_k)(1 - \alpha_{k-1})\right) \\
&\implies (1 - \alpha_k) - (1 - \alpha_{k-1}) = -c(1 - \alpha_k)(1 - \alpha_{k-1}) + o\left((1 - \alpha_k)(1 - \alpha_{k-1})\right). \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Agora, pela Proposição 5.1(2), $1 - \alpha_k \sim 1 - \alpha_{k-1} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \alpha_k}{1 - \alpha_{k-1}} = 1 \Rightarrow (1 - \alpha_k) - (1 - \alpha_{k-1}) = o(1 - \alpha_{k-1}) \Rightarrow 1 - \alpha_k = 1 - \alpha_{k-1} + o(1 - \alpha_{k-1})$. Substituindo essa igualdade no lado direito de (5.24) nos dá

$$\begin{aligned}
&(1 - \alpha_k) - (1 - \alpha_{k-1}) \\
&= -c(1 - \alpha_{k-1})^2 - c(1 - \alpha_{k-1})o(1 - \alpha_{k-1}) + o\left((1 - \alpha_k)(1 - \alpha_{k-1})\right) \\
&= -c(1 - \alpha_{k-1})^2 - c \cdot o\left((1 - \alpha_{k-1})^2\right) + o\left((1 - \alpha_k)(1 - \alpha_{k-1})\right). \quad (5.25)
\end{aligned}$$

Note que $o\left((1 - \alpha_k)(1 - \alpha_{k-1})\right) = o\left((1 - \alpha_{k-1})^2\right)$, pois como $1 - \alpha_k \sim 1 - \alpha_{k-1}$ (Proposição 5.1(2)), temos $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \alpha_k}{1 - \alpha_{k-1}} = 1$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \alpha_{k-1}}{1 - \alpha_k} = 1$, donde

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{o\left((1 - \alpha_k)(1 - \alpha_{k-1})\right)}{(1 - \alpha_{k-1})^2} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \alpha_{k-1}}{1 - \alpha_k} \cdot \frac{o\left((1 - \alpha_k)(1 - \alpha_{k-1})\right)}{(1 - \alpha_{k-1})^2} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{o\left((1 - \alpha_k)(1 - \alpha_{k-1})\right)}{(1 - \alpha_k)(1 - \alpha_{k-1})} \\
&= 0
\end{aligned}$$

o que mostra $o\left((1 - \alpha_k)(1 - \alpha_{k-1})\right) = o\left((1 - \alpha_{k-1})^2\right)$. Inserindo essa igualdade em (5.25) nos dá

$$(1 - \alpha_k) - (1 - \alpha_{k-1}) = -c(1 - \alpha_{k-1})^2 + o\left((1 - \alpha_{k-1})^2\right)$$

e portanto

$$\begin{aligned}
&\frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} \left((1 - \alpha_k) - (1 - \alpha_{k-1}) \right) \\
&= -c \cdot \frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} (1 - \alpha_{k-1})^2 + \frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} o\left((1 - \alpha_{k-1})^2\right) \\
&= -cR_{k-1} + o\left(\frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} (1 - \alpha_{k-1})^2\right) \\
&= -cR_{k-1} + o(R_{k-1})
\end{aligned}$$

onde $R_k := \frac{2 - \rho_k}{\rho_k} (1 - \alpha_k)^2$, ou seja,

$$\frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} \left((1 - \alpha_k) - (1 - \alpha_{k-1}) \right) = -cR_{k-1} + o(R_{k-1}). \quad (5.26)$$

Isso lida com a primeira parcela da Equação (5.23). Para a segunda parcela, veja que por (5.21) temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\rho_k(1 - \alpha_{k-1})} - c'' = 0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho_k - \rho_{k-1} - c'' \rho_k(1 - \alpha_{k-1})}{\rho_k(1 - \alpha_{k-1})} = 0$$

donde segue que $\rho_k - \rho_{k-1} - c'' \rho_k(1 - \alpha_{k-1}) = o(\rho_k(1 - \alpha_{k-1}))$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\rho_k \rho_{k-1}} &= \frac{1 - \alpha_{k-1}}{\rho_{k-1}} \cdot c'' + \frac{o(\rho_k(1 - \alpha_{k-1}))}{\rho_k \rho_{k-1}} \implies \\ \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\rho_k \rho_{k-1}} (1 - \alpha_k) &= \frac{(1 - \alpha_k)(1 - \alpha_{k-1})}{\rho_{k-1}} \cdot c'' + (1 - \alpha_k) \frac{o(\rho_k(1 - \alpha_{k-1}))}{\rho_k \rho_{k-1}}. \end{aligned}$$

Substituindo $1 - \alpha_k = 1 - \alpha_{k-1} + o(1 - \alpha_{k-1})$ (segue da Proposição 5.1(2)) no lado direito da expressão acima, temos

$$\begin{aligned} \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\rho_k \rho_{k-1}} (1 - \alpha_k) &= \frac{(1 - \alpha_{k-1})^2}{\rho_{k-1}} \cdot c'' + \frac{1 - \alpha_{k-1}}{\rho_{k-1}} \cdot c'' \cdot o(1 - \alpha_{k-1}) \\ &+ \frac{1 - \alpha_{k-1}}{\rho_k \rho_{k-1}} \cdot o(\rho_k(1 - \alpha_{k-1})) + \frac{o(1 - \alpha_{k-1}) o(\rho_k(1 - \alpha_{k-1}))}{\rho_k \rho_{k-1}} \\ &\stackrel{4}{=} \frac{(1 - \alpha_{k-1})^2}{\rho_{k-1}} \cdot c'' + o\left(\frac{(1 - \alpha_{k-1})^2}{\rho_{k-1}}\right) \\ &= \frac{c''}{2 - \rho_{k-1}} \cdot \frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} (1 - \alpha_{k-1})^2 \\ &+ o\left(\frac{1}{2 - \rho_{k-1}} \cdot \frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} (1 - \alpha_{k-1})^2\right) \\ &= \frac{c''}{2 - \rho_{k-1}} \cdot R_{k-1} + o\left(\frac{1}{2 - \rho_{k-1}} \cdot R_{k-1}\right). \end{aligned}$$

Mas por (5.19) e como $\rho_k < 2$ e $\bar{\rho} < 2$, temos $\frac{1}{2 - \rho_{k-1}} \rightarrow \frac{1}{2 - \bar{\rho}}$. Dessa forma, $o\left(\frac{1}{2 - \rho_{k-1}} \cdot R_{k-1}\right) = o(R_{k-1})$ pois

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{o\left(\frac{1}{2 - \rho_{k-1}} \cdot R_{k-1}\right)}{R_{k-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \rho_{k-1}} \cdot \frac{o\left(\frac{1}{2 - \rho_{k-1}} \cdot R_{k-1}\right)}{\frac{1}{2 - \rho_{k-1}} R_{k-1}} = \frac{1}{2 - \bar{\rho}} \cdot 0 = 0$$

e portanto das equações acima concluímos

$$\frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\rho_k \rho_{k-1}} (1 - \alpha_k) = \frac{c''}{2 - \rho_{k-1}} \cdot R_{k-1} + o(R_{k-1}) \quad (5.27)$$

que dá uma descrição para a segunda parcela da Equação (5.23). Dessa forma, combinando as equações (5.23), (5.26) e (5.27), temos

$$\frac{2 - \rho_k}{\rho_k} (1 - \alpha_k) - \frac{2 - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} (1 - \alpha_{k-1})$$

⁴ Pois $a_k \cdot o(b_k) = o(a_k \cdot b_k)$ e $c_1 \cdot o(b_k) + c_2 \cdot o(b_k) = o(b_k)$.

$$\begin{aligned}
&= -cR_{k-1} + o(R_{k-1}) - 2 \left(\frac{c''}{2 - \rho_{k-1}} \cdot R_{k-1} + o(R_{k-1}) \right) \\
&= - \left(c + 2 \cdot \frac{c''}{2 - \rho_{k-1}} \right) R_{k-1} + o(R_{k-1}).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{2-\rho_k}{\rho_k} \cdot (1 - \alpha_k) - \frac{2-\rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} \cdot (1 - \alpha_{k-1})}{\frac{2-\rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} \cdot (1 - \alpha_{k-1})^2} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{- \left(c + 2 \cdot \frac{c''}{2 - \rho_{k-1}} \right) R_{k-1} + o(R_{k-1})}{R_{k-1}} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} - \left(c + 2 \cdot \frac{c''}{2 - \rho_{k-1}} \right) \\
&= - \left(c + 2 \cdot \frac{c''}{2 - \bar{\rho}} \right).
\end{aligned}$$

Daí, a hipótese em (5.9) é satisfeita com $c' := - \left(c + 2 \cdot \frac{c''}{2 - \bar{\rho}} \right) = - \left(c + \frac{c''}{1 - \frac{\bar{\rho}}{2}} \right)$. Resta ainda mostrar que $c' \in]-1, 1[$ para concluir (5.9). Como estamos assumindo que $c'' \leq - \left(1 - \frac{\bar{\rho}}{2} \right) c$ e $\bar{\rho} < 2$, temos $1 - \frac{\bar{\rho}}{2} > 0$ e $c + \frac{c''}{1 - \frac{\bar{\rho}}{2}} \leq 0 \Rightarrow c' \geq 0$. Além disso, $1 - c - |c'| = 1 - c - c' = 1 - c + c + \frac{c''}{1 - \frac{\bar{\rho}}{2}} = 1 + \frac{c''}{1 - \frac{\bar{\rho}}{2}}$ que é positivo pela hipótese $- \left(1 - \frac{\bar{\rho}}{2} \right) < c''$. Logo, $1 - c - c' > 0 \Rightarrow 0 \leq c' < 1 - c \leq 1$ pois $0 \leq c < 1$, donde segue que $c' \in [0, 1[\subseteq]-1, 1[$. Isso verifica (5.9).

Mostramos também acima que $|c'| = c' < 1 - c$, de forma que a única condição restante a ser garantida da Proposição 5.2 é (5.10). De (5.19) e como $0 \leq \bar{\rho} < 2$, temos $\lim_{k \rightarrow \infty} 2 - \rho_k = 2 - \bar{\rho} > 0$ e portanto

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{2 - \rho_k}{\rho_k} (1 - \alpha_k)^2 = (2 - \bar{\rho}) \cdot \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - \alpha_k)^2}{\rho_k}.$$

Além disso,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k(1 + \alpha_k)}{1 - c - |c'|} = \frac{1}{1 - c - c'} \cdot \limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha_k(1 + \alpha_k)$$

de forma que (5.10) é equivalente a

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - \alpha_k)^2}{\rho_k} > \frac{1}{2 - \bar{\rho}} \cdot \frac{1}{1 - c - c'} \cdot \limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha_k(1 + \alpha_k)$$

que é justamente a hipótese (5.22) pois

$$(2 - \bar{\rho})(1 - c - c') = (2 - \bar{\rho}) \left(1 + \frac{c''}{1 - \frac{\bar{\rho}}{2}} \right) = 2 - \bar{\rho} + (2 - \bar{\rho}) \cdot \frac{2c''}{2 - \bar{\rho}} = 2 - \bar{\rho} + 2c''.$$

As condições (K_0) e (K_1) são então asseguradas pela Proposição 5.2. ■

5.2 APLICAÇÃO DOS RESULTADOS PRINCIPAIS

Nesta seção, vamos combinar os teoremas principais sobre a convergência do (RIPA) (Teoremas 4.1 e 4.9) com as proposições vistas na seção anterior, que garantem (K_0) e (K_1) .

Teorema 5.4. *Assuma $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ monótono maximal com $\text{zer}(A) \neq \emptyset$, $(\alpha_k) \subseteq [0, 1[$, $(\rho_k) \subseteq]0, 2[$ e $(\mu_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$. Assuma também que existem $\bar{\rho} \in [0, 2[$, $c \in [0, 1[$ e $c'' \in \mathbb{R}$ com $-\left(1 - \frac{\bar{\rho}}{2}\right) < c'' \leq -\left(1 - \frac{\bar{\rho}}{2}\right) c$ tais que:*

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k &= \bar{\rho}; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \alpha_{k+1}} - \frac{1}{1 - \alpha_k} \right) &= c; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho_{k+1} - \rho_k}{\rho_{k+1}(1 - \alpha_k)} &= c''; \\ \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - \alpha_k)^2}{\rho_k} &> \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k(1 + \alpha_k)}{2 - \bar{\rho} + 2c''}. \end{aligned}$$

Então, para qualquer sequência $(x_k)_{k \geq 0}$ gerada pelo (RIPA), temos:

1. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 - \alpha_{i-1}}{\rho_{i-1}} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$;
2. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i}{1 - \alpha_i} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 < \infty$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i}{1 - \alpha_i} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 < \infty$;
3. $\forall z \in \text{zer}(A)$, a sequência real $(\|x_k - z\|)_{k \geq 0}$ converge, e portanto $(x_k)_{k \geq 0}$ é limitada.

A partir de agora, assuma também que $\bar{\rho} > 0$. Então:

4. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(y_k)\| = 0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(x_k)\| = 0$;
5. se ainda $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k > 0$, então existe $x_{\infty} \in \text{zer}(A)$ tal que $x_k \rightharpoonup x_{\infty}$ e $y_k \rightharpoonup x_{\infty}$ (convergência fraca em \mathcal{H}).

Demonstração. Essencialmente, basta combinarmos o Teorema 4.1 com a Proposição 5.3, já que esta garante que (K_0) e (K_1) são satisfeitas e assim valem as conclusões do Teorema 4.1.

Item 1): do Teorema 4.1(1), temos que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}} (1 - \alpha_{i-1}) \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$. Como temos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 - \alpha_{i-1}}{\rho_{i-1}}}{\frac{2 - \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}} (1 - \alpha_{i-1})} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \rho_{i-1}} = \frac{1}{2 - \bar{\rho}} > 0,$$

já que $\rho_i \rightarrow \bar{\rho} < 2$ por hipótese, então existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $i \geq i_0$ temos

$$\frac{\frac{1-\alpha_{i-1}}{\rho_{i-1}}}{\frac{2-\rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1-\alpha_{i-1})} \leq \frac{2}{2-\bar{\rho}} \implies \frac{1-\alpha_{i-1}}{\rho_{i-1}} \leq \frac{2}{2-\bar{\rho}} \cdot \frac{2-\rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1-\alpha_{i-1})$$

e portanto

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{1-\alpha_{i-1}}{\rho_{i-1}} \|x_i - x_{i-1}\|^2 \leq \frac{2}{2-\bar{\rho}} \sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{2-\rho_{i-1}}{\rho_{i-1}}(1-\alpha_{i-1}) \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$$

donde $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1-\alpha_{i-1}}{\rho_{i-1}} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$. A convergência de $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_{i+1} \|x_i - x_{i-1}\|^2$ segue diretamente do Teorema 4.1(1).

Item 2): veja que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\frac{\rho_i}{1-\alpha_i}}{\rho_i(2-\rho_i)t_{i+1}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-\alpha_i)t_{i+1}} \cdot \frac{1}{2-\rho_i} = (1-c) \cdot \frac{1}{2-\bar{\rho}} > 0$$

já que $\rho_i \rightarrow \bar{\rho} < 2$ e $t_{i+1} \sim \frac{1}{(1-c)(1-\alpha_i)} \Rightarrow 1-c \sim \frac{1}{(1-\alpha_i)t_{i+1}}$ se $i \rightarrow \infty$ (Proposição 5.1(1)), donde $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-\alpha_i)t_{i+1}} = 1-c$. Daí, existe $i_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $i \geq i_1$ temos

$$\frac{\frac{\rho_i}{1-\alpha_i}}{\rho_i(2-\rho_i)t_{i+1}} \leq 2(1-c) \cdot \frac{1}{2-\bar{\rho}} \implies \frac{\rho_i}{1-\alpha_i} \leq \rho_i(2-\rho_i)t_{i+1} \cdot 2(1-c) \cdot \frac{1}{2-\bar{\rho}}$$

donde

$$\sum_{i=i_1}^{\infty} \frac{\rho_i}{1-\alpha_i} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 \leq 2(1-c) \cdot \frac{1}{2-\bar{\rho}} \sum_{i=i_1}^{\infty} \rho_i(2-\rho_i)t_{i+1} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 < \infty$$

onde a convergência da segunda série segue do Teorema 4.1(2). Portanto, temos $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i}{1-\alpha_i} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 < \infty$. Analogamente, podemos mostrar a convergência da série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i}{1-\alpha_i} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2$ utilizando também o Teorema 4.1(2).

Item 3): imediato do Teorema 4.1(3).

Itens 4) e 5): assumindo agora $\bar{\rho} > 0$, ficamos com $0 < \bar{\rho} < 2$ e como $\rho_k \rightarrow \bar{\rho}$, temos $\bar{\rho} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_k$, o que verifica (K_2) e (K_3) . Dessa forma, estes itens seguem imediatamente dos itens 4) e 5) do Teorema 4.1. ■

Queremos agora particularizar o Teorema 4.9. Para tanto, além de assegurarmos as hipóteses (K_0) e (K_1) , queremos também garantir a primeira condição de (K_4) , que é o conteúdo da seguinte proposição:

Proposição 5.5. *Sejam $(\alpha_k)_{k \geq 0} \subseteq [0, 1[$ e $(\rho_k) \subseteq]0, 2]$. Assuma que existe $\bar{\alpha} \in [0, 1]$, $c \in [0, 1[$ e $c'' \in \mathbb{R}$, com $1 + c + c''\bar{\alpha} > 0$, tais que:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \bar{\alpha}; \tag{5.28}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \alpha_{k+1}} - \frac{1}{1 - \alpha_k} \right) = c; \quad (5.29)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho_{k+1} - \rho_k}{\rho_{k+1}(1 - \alpha_k)} = c''. \quad (5.30)$$

Então, vale que

$$\sum_{i=1}^k \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right] = \mathcal{O}(\rho_k t_{k+1}) = \mathcal{O} \left(\frac{\rho_k}{1 - \alpha_k} \right), \quad \text{se } k \rightarrow \infty$$

Demonstração. Para $i \leq k$:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_i}{1 - \alpha_i} \cdot \prod_{j=i+1}^k \alpha_j - \frac{\rho_{i-1}}{1 - \alpha_{i-1}} \cdot \prod_{j=i}^k \alpha_j \\ &= \left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \cdot \left[\frac{\rho_i}{1 - \alpha_i} - \frac{\rho_{i-1}}{1 - \alpha_{i-1}} \cdot \alpha_i \right] \\ &= \left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \cdot \left[\frac{\rho_i}{1 - \alpha_i} - \frac{\rho_i \alpha_i}{1 - \alpha_{i-1}} + \frac{(\rho_i - \rho_{i-1}) \alpha_i}{1 - \alpha_{i-1}} \right] \\ &= \left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \cdot \left[\frac{1}{1 - \alpha_i} - \frac{1}{1 - \alpha_{i-1}} + \frac{1 - \alpha_i}{1 - \alpha_{i-1}} + \frac{(\rho_i - \rho_{i-1}) \alpha_i}{\rho_i (1 - \alpha_{i-1})} \right]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Pela Equação (5.29) e pela Proposição 5.1(2), temos $1 - \alpha_{i-1} \sim 1 - \alpha_i$, ou seja, $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1 - \alpha_i}{1 - \alpha_{i-1}} = 1$. Logo, por (5.28), (5.29) e (5.30) temos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 - \alpha_i} - \frac{1}{1 - \alpha_{i-1}} + \frac{1 - \alpha_i}{1 - \alpha_{i-1}} + \frac{(\rho_i - \rho_{i-1}) \alpha_i}{\rho_i (1 - \alpha_{i-1})} \right] = 1 + c + c'' \bar{\alpha} > 0. \quad (5.32)$$

Fixe $\varepsilon \in]0, 1 + c + c'' \bar{\alpha}[$. Daí, por (5.32), existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq i_0$:

$$1 + c + c'' \bar{\alpha} - \varepsilon \leq \left[\frac{1}{1 - \alpha_i} - \frac{1}{1 - \alpha_{i-1}} + \frac{1 - \alpha_i}{1 - \alpha_{i-1}} + \frac{(\rho_i - \rho_{i-1}) \alpha_i}{\rho_i (1 - \alpha_{i-1})} \right] \leq 1 + c + c'' \bar{\alpha} + \varepsilon.$$

Multiplicando toda a desigualdade acima por $\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i$ e usando (5.31), para quaisquer $i_0 \leq i \leq k$ temos

$$\begin{aligned} (1 + c + c'' \bar{\alpha} - \varepsilon) \left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i &\leq \frac{\rho_i}{1 - \alpha_i} \cdot \prod_{j=i+1}^k \alpha_j - \frac{\rho_{i-1}}{1 - \alpha_{i-1}} \cdot \prod_{j=i}^k \alpha_j \\ &\leq (1 + c + c'' \bar{\alpha} + \varepsilon) \left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Note que o termo central nas desigualdades acima é uma diferença telescópica em i . Assim, dado $k \geq i_0 + 1$, somando as desigualdades em (5.33) de $i = i_0$ até $i = k$ nos dá

$$\forall k \geq i_0 + 1 :$$

$$\begin{aligned}
(1 + c + c''\bar{\alpha} - \varepsilon) \sum_{i=i_0}^k \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right] &\leq \frac{\rho_k}{1 - \alpha_k} - \frac{\rho_{i_0-1}}{1 - \alpha_{i_0-1}} \cdot \prod_{j=i_0}^k \alpha_j \\
&\leq (1 + c + c''\bar{\alpha} + \varepsilon) \sum_{i=i_0}^k \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right]
\end{aligned}$$

já que $\prod_{j=k+1}^k \alpha_j = 1$. Definindo $\hat{C} := 1 + c + c''\bar{\alpha} - \varepsilon > 0$, para todo $k \geq i_0 + 1$ a primeira desigualdade acima nos dá

$$\begin{aligned}
\hat{C} \cdot \sum_{i=i_0}^k \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right] &\leq \frac{\rho_k}{1 - \alpha_k} \\
\Rightarrow \hat{C} \cdot \sum_{i=1}^k \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right] &\leq \frac{\rho_k}{1 - \alpha_k} + \hat{C} \cdot \sum_{i=1}^{i_0-1} \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right] \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^k \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right] &\leq \frac{\rho_k}{1 - \alpha_k} \cdot \left\{ \frac{1}{\hat{C}} + \frac{1 - \alpha_k}{\rho_k} \cdot \sum_{i=1}^{i_0-1} \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Agora, veja que para $1 \leq i \leq i_0 - 1$, temos $\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \leq \prod_{j=i_0}^k \alpha_j$ já que $0 \leq \alpha_j \leq 1, \forall j \in \mathbb{N}$. Daí, usando (5.34) temos

$$\forall k \geq i_0 + 1 : \sum_{i=1}^k \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right] \leq \frac{\rho_k}{1 - \alpha_k} \cdot \left[\frac{1}{\hat{C}} + \frac{1 - \alpha_k}{\rho_k} \cdot \left(\prod_{j=i_0}^k \alpha_j \right) \left(\sum_{i=1}^{i_0-1} \rho_i \right) \right]. \tag{5.35}$$

Vamos agora mostrar que $\prod_{j=i_0}^k \alpha_j = o\left(\frac{\rho_k}{1 - \alpha_k}\right)$, ou seja, que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \alpha_k}{\rho_k} \cdot \prod_{j=i_0}^k \alpha_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\prod_{j=i_0}^k \alpha_j}{\frac{\rho_k}{1 - \alpha_k}} = 0.$$

Se existir $j_0 \geq i_0$ com $\alpha_{j_0} = 0$, então para $k \geq j_0$ teremos $\prod_{j=i_0}^k \alpha_j = 0$ e a conclusão é imediata. Assuma então, sem perda de generalidade, que $\alpha_j > 0, \forall j \geq i_0$. Em (5.33), dados $i_0 \leq i \leq k$ e dividindo ambos os lados da primeira desigualdade por $\prod_{j=i_0}^k \alpha_j$ (que é não-nulo, já que assumimos $\alpha_j > 0$ se $j \geq i_0$), e lembrando que $\hat{C} = 1 + c + c''\bar{\alpha} - \varepsilon$, temos

$$\forall i \geq i_0 : \hat{C} \cdot \frac{\rho_i}{\prod_{j=i_0}^i \alpha_j} \leq \frac{\rho_i}{1 - \alpha_i} \cdot \frac{1}{\prod_{j=i_0}^i \alpha_j} - \frac{\rho_{i-1}}{1 - \alpha_{i-1}} \cdot \frac{1}{\prod_{j=i_0}^{i-1} \alpha_j}. \tag{5.36}$$

Como $\hat{C} > 0$ (por escolha de ε), para qualquer $i \geq i_0$ temos

$$\frac{\rho_i}{1 - \alpha_i} \cdot \frac{1}{\prod_{j=i_0}^i \alpha_j} - \frac{\rho_{i-1}}{1 - \alpha_{i-1}} \cdot \frac{1}{\prod_{j=i_0}^{i-1} \alpha_j} \geq 0$$

ou seja, a sequência $\left(\frac{\rho_i}{1 - \alpha_i} \cdot \frac{1}{\prod_{j=i_0}^i \alpha_j} \right)_{i \geq i_0}$ é não-decrescente. Em particular,

$$\forall i \geq i_0 : \frac{\rho_i}{1 - \alpha_i} \cdot \frac{1}{\prod_{j=i_0}^i \alpha_j} \geq \frac{\rho_{i_0-1}}{1 - \alpha_{i_0-1}} \cdot \frac{1}{\prod_{j=i_0}^{i_0-1} \alpha_j} = \frac{\rho_{i_0-1}}{1 - \alpha_{i_0-1}}$$

donde

$$\forall i \geq i_0 : \frac{\rho_i}{\prod_{j=i_0}^i \alpha_j} \geq (1 - \alpha_i) \cdot \frac{\rho_{i_0-1}}{1 - \alpha_{i_0-1}}.$$

Usando a desigualdade acima em (5.36) nos dá

$$\forall i \geq i_0 : \hat{C} \cdot (1 - \alpha_i) \cdot \frac{\rho_{i_0-1}}{1 - \alpha_{i_0-1}} \leq \frac{\rho_i}{1 - \alpha_i} \cdot \frac{1}{\prod_{j=i_0}^i \alpha_j} - \frac{\rho_{i-1}}{1 - \alpha_{i-1}} \cdot \frac{1}{\prod_{j=i_0}^{i-1} \alpha_j}$$

e somando essa desigualdade de $i = i_0$ até $i = k \geq i_0 + 1$, já que o termo da direita é uma diferença telescópica, temos

$$\forall k \geq i_0 + 1 : \hat{C} \cdot \frac{\rho_{i_0-1}}{1 - \alpha_{i_0-1}} \cdot \sum_{i=i_0}^k (1 - \alpha_i) \leq \frac{\rho_k}{1 - \alpha_k} \cdot \frac{1}{\prod_{j=i_0}^k \alpha_j} - \frac{\rho_{i_0-1}}{1 - \alpha_{i_0-1}}$$

pois $\prod_{j=i_0}^{i_0-1} \alpha_j = 1$. Daí, fazendo $k \rightarrow \infty$ e lembrando que $\sum_{i=i_0}^{\infty} (1 - \alpha_i) = \infty$ (pela Proposição 5.1(3)), temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho_k}{1 - \alpha_k} \cdot \frac{1}{\prod_{j=i_0}^k \alpha_j} = \infty \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \alpha_k}{\rho_k} \cdot \prod_{j=i_0}^k \alpha_j = 0$$

e portanto $\prod_{j=i_0}^k \alpha_j = o\left(\frac{\rho_k}{1 - \alpha_k}\right)$ como queríamos. Dessa forma,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\hat{C}} + \frac{1 - \alpha_k}{\rho_k} \cdot \left(\prod_{j=i_0}^k \alpha_j \right) \left(\sum_{i=1}^{i_0-1} \rho_i \right) \right] = \frac{1}{\hat{C}}$$

e portanto existe $k_0 \geq i_0 + 1$ tal que

$$\text{se } k \geq k_0 : \frac{1}{\hat{C}} + \frac{1 - \alpha_k}{\rho_k} \cdot \left(\prod_{j=i_0}^k \alpha_j \right) \left(\sum_{i=1}^{i_0-1} \rho_i \right) \leq \frac{2}{\hat{C}}.$$

Daí, por (5.35),

$$\text{se } k \geq k_0 : \sum_{i=1}^k \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right] \leq \frac{\rho_k}{1 - \alpha_k} \cdot \frac{2}{\tilde{C}} \quad (5.37)$$

o que mostra que

$$\sum_{i=1}^k \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right] = \mathcal{O} \left(\frac{\rho_k}{1 - \alpha_k} \right), \quad \text{se } k \rightarrow \infty.$$

Agora, como $t_{k+1}(1-c) \sim \frac{1}{1-\alpha_k}$ (Proposição 5.1(1)), temos $\rho_k t_{k+1}(1-c) \sim \frac{\rho_k}{1-\alpha_k}$ e portanto $\mathcal{O}(\rho_k t_{k+1}) = \mathcal{O}(\rho_k t_{k+1}(1-c)) = \mathcal{O}(\frac{\rho_k}{1-\alpha_k})$ quando $k \rightarrow \infty$, o que encerra a prova utilizando a equação acima. ■

Agora, vamos combinar o Teorema 4.9 com a Proposição 5.5 acima, resultando no:

Teorema 5.6. *Sejam $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ monótono maximal, com $\text{zer}(A) \neq \emptyset$, $(\alpha_k)_{k \geq 0} \subseteq [0, 1[$, $(\rho_k)_{k \geq 0} \subseteq]0, 2[$ e $(\mu_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$. Suponha que existem $\bar{\alpha} \in [0, 1]$, $\bar{\rho} \in [0, 2[$, $c \in [0, 1[$ e $c'' \in \mathbb{R}$, com $-\left(1 - \frac{\bar{\rho}}{2}\right) < c'' \leq -\left(1 - \frac{\bar{\rho}}{2}\right)c$, tais que:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \bar{\alpha}; \quad (5.38)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \bar{\rho}; \quad (5.39)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \alpha_{k+1}} - \frac{1}{1 - \alpha_k} \right) = c; \quad (5.40)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho_{k+1} - \rho_k}{\rho_{k+1}(1 - \alpha_k)} = c''; \quad (5.41)$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - \alpha_k)^2}{\rho_k} > \frac{\bar{\alpha}(1 + \bar{\alpha})}{2 - \bar{\rho} + 2c''}. \quad (5.42)$$

Então, para qualquer sequência $(x_k)_{k \geq 0}$ gerada pelo (RIPA), temos:

$$1. \|x_{k+1} - x_k\| = \mathcal{O} \left(\frac{\rho_k}{1 - \alpha_k} \right) \text{ se } k \rightarrow \infty;$$

2. neste item, assuma também que $\frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}} = \mathcal{O} \left(\frac{\rho_k}{1 - \alpha_k} \right)$, se $k \rightarrow \infty$, e $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i}{1 - \alpha_i} = \infty$. Então, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(x_k)\| = 0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(y_k)\| = 0$. Se ainda $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k > 0$, então existe $x_{\infty} \in \text{zer}(A)$ tal que $x_k \rightharpoonup x_{\infty}$ e $y_k \rightarrow x_{\infty}$ (convergência fraca em \mathcal{H});

3. se⁵ $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i}{1 - \alpha_i} < \infty$, então $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i - x_{i-1}\| < \infty$ e portanto existe⁶ $x_{\infty} \in \mathcal{H}$ tal que $x_k \rightarrow x_{\infty}$ e $y_k \rightarrow x_{\infty}$ (convergência forte em \mathcal{H}).

⁵ Aqui, não estamos assumindo que $\frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}} = \mathcal{O} \left(\frac{\rho_k}{1 - \alpha_k} \right)$ se $k \rightarrow \infty$ e nem que $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k > 0$.

⁶ Não necessariamente $x_{\infty} \in \text{zer}(A)$.

Demonstração. Veja que como $\alpha_k \rightarrow \bar{\alpha}$, temos

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k(1 + \alpha_k)}{2 - \bar{\rho} + 2c''} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k(1 + \alpha_k)}{2 - \bar{\rho} + 2c''} = \frac{\bar{\alpha}(1 + \bar{\alpha})}{2 - \bar{\rho} + 2c''}.$$

Logo, as hipóteses (5.38) e (5.42) garantem a hipótese (5.22) na Proposição 5.3, e (5.39), (5.40) e (5.41) garantem (5.19), (5.20) e (5.21), respectivamente. Dessa forma, a Proposição 5.3 assegura que (K_0) e (K_1) são satisfeitas.

Item 1): comecemos verificando que $1 + c + c''\bar{\alpha} > 0$. Veja que $c'' \leq 0$, pois $\bar{\rho} < 2 \Rightarrow 1 - \frac{\bar{\rho}}{2} > 0 \Rightarrow -\left(1 - \frac{\bar{\rho}}{2}\right)c \leq 0$, já que $0 \leq c < 1$. Como por hipótese $c'' \leq -\left(1 - \frac{\bar{\rho}}{2}\right)c$, segue então $c'' \leq 0$. Dessa forma, multiplicando a desigualdade $\bar{\alpha} \leq 1$ por c'' nos dá $c''\bar{\alpha} \geq c''$ e portanto $1 + c + c''\bar{\alpha} \geq 1 + c + c''$. Agora, por hipótese também temos que $c'' > -\left(1 - \frac{\bar{\rho}}{2}\right)$ e portanto

$$1 + c + c''\bar{\alpha} \geq 1 + c + c'' > 1 + c - \left(1 - \frac{\bar{\rho}}{2}\right) = c + \frac{\bar{\rho}}{2} \geq 0$$

onde a última desigualdade segue de $c \geq 0$ e $\bar{\rho} \geq 0$. Dessa forma, mostramos que $1 + c + c''\bar{\alpha} > 0$, que juntamente com (5.38), (5.40) e (5.41) verificam todas as hipóteses da Proposição 5.5.

Assim, sejam $\hat{C} \geq 0$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sum_{i=1}^k \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right] \leq \hat{C} \cdot \frac{\rho_k}{1 - \alpha_k}, \quad \forall k \geq k_0.$$

Pelo Teorema 4.9(1), existe $D \geq 0$ tal que

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq D \cdot \sum_{i=1}^k \left[\left(\prod_{j=i+1}^k \alpha_j \right) \rho_i \right], \quad \forall k \geq 1.$$

Juntando as duas equações acima, temos que

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq D\hat{C} \cdot \frac{\rho_k}{1 - \alpha_k}, \quad \forall k \geq k_0$$

o que nos dá o item 1).

Item 2): agora, assuma também que $\frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}} = \mathcal{O}\left(\frac{\rho_k}{1 - \alpha_k}\right)$, se $k \rightarrow \infty$, e $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i}{1 - \alpha_i} = \infty$. Como $\rho_k \rightarrow \bar{\rho} < 2$, temos $\limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \bar{\rho} < 2$ e portanto (K_2) é satisfeita. De acordo com o Teorema 4.9(2), o item 2) estará provado se verificarmos (K_4) e (K_5) .

A primeira condição de (K_4) é garantida pela Proposição 5.5. Além disso, pela hipótese $\frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}} = \mathcal{O}\left(\frac{\rho_k}{1 - \alpha_k}\right)$, se $k \rightarrow \infty$, segue que $\frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}} = \mathcal{O}(\rho_k t_{k+1})$, se $k \rightarrow \infty$, que é a segunda condição em (K_4) .

Para a terceira condição em (K_4) , fixe $\varepsilon > 0$ arbitrário e veja que (5.41) garante que existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_1$, então $\frac{\rho_{k+1} - \rho_k}{\rho_{k+1}(1 - \alpha_k)} \geq c'' - \varepsilon \Rightarrow \rho_{k+1} - \rho_k \geq$

$(c'' - \varepsilon)\rho_{k+1}(1 - \alpha_k) = -\zeta\rho_{k+1}(1 - \alpha_k)$, onde $\zeta := \varepsilon - c'' > 0$, já que $\varepsilon > 0$ e $c'' \leq 0$. Como $\alpha_k \geq 0$, $-(1 - \alpha_k) \geq -1$ e portanto $\rho_{k+1} - \rho_k \geq -\zeta\rho_{k+1}$, $\forall k \geq k_1$, donde

$$\rho_k \leq (1 + \zeta)\rho_{k+1}, \quad \forall k \geq k_1. \quad (5.43)$$

Agora, pela Proposição 5.1(2), $t_{k+1} \sim t_{k+2}$, ou seja, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_{k+1}}{t_{k+2}} = 1$. Daí, existe $k_2 \geq k_1$ de forma que se $k \geq k_2$, então $\frac{t_{k+1}}{t_{k+2}} \leq 1 + \varepsilon$, ou seja, $t_{k+1} \leq (1 + \varepsilon)t_{k+2}$. Logo,

$$\forall k \geq k_2 : \rho_k t_{k+1} \leq (1 + \varepsilon)\rho_k t_{k+2} \stackrel{(5.43)}{\leq} (1 + \varepsilon)(1 + \zeta)\rho_{k+1} t_{k+2}$$

o que mostra que $\rho_k t_{k+1} = \mathcal{O}(\rho_{k+1} t_{k+2})$ se $k \rightarrow \infty$, que verifica a terceira (e última restante) condição de (K_4) . Finalmente, note que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\rho_i t_{i+1}}{\frac{\rho_i}{1 - \alpha_i}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{t_{i+1}}{\frac{1}{1 - \alpha_i}} = \frac{1}{1 - c} \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{t_{i+1}}{\frac{1}{(1-c)(1-\alpha_i)}} = \frac{1}{1 - c} \quad (5.44)$$

onde a última igualdade segue da Proposição 5.1(1). Dessa forma, como por hipótese temos $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i}{1 - \alpha_i} = \infty$, pela comparação de séries segue que $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i t_{i+1} = \infty$, o que verifica (K_5) .

Dessa forma, todas as hipóteses do Teorema 4.9(2) estão verificadas, e então o resultado do item 2) segue.

Item 3): pela comparação de séries em (5.44) e pela hipótese neste item de que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i}{1 - \alpha_i} < \infty$, segue que $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i t_{i+1} < \infty$ e portanto o resultado decorre do Teorema 4.9(3). ■

5.3 ALGUNS CASOS PARTICULARES

Vamos agora particularizar ainda mais os Teoremas 4.1 e 4.9 (mais especificamente, os Teoremas 5.4 e 5.6) para o caso em que os parâmetros (α_k) e (ρ_k) são definidos por

$$\alpha_k = 1 - \frac{\alpha}{(k + \underline{k})^q} \quad \text{e} \quad \rho_k = \frac{\beta}{(k + \underline{k})^r} \quad \forall k \geq 0 \quad (5.45)$$

para dados números α e β positivos, $0 < q < 1$, $r > 0$ e $\underline{k} \in \mathbb{N}$, onde \underline{k} é escolhido de forma que⁷ $\alpha_0 = 1 - \frac{\alpha}{\underline{k}^q} > 0$ e $\rho_0 = \frac{\beta}{\underline{k}^r} < 2$. Dessa forma, como a sequência (α_k) é crescente, temos $0 < \alpha_k < 1$, $\forall k$, e como (ρ_k) é decrescente, $0 < \rho_k < 2$, $\forall k$, ou seja, $(\alpha_k)_{k \geq 0} \subseteq]0, 1[$ e $(\rho_k)_{k \geq 0} \subseteq]0, 2[$.

Corolário 5.7. *Sejam $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ monótono maximal, com $\text{zer}(A) \neq \emptyset$, $(\mu_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$, $q \in]0, 1[$, $r > 0$ e α, β positivos com $r \geq 2q$ e $\frac{\alpha^2}{\beta} > 1$ se⁸ $r = 2q$. Defina as sequências*

⁷ Explicitamente, podemos tomar qualquer natural $\underline{k} > \max \left\{ \alpha^{\frac{1}{q}}, \left(\frac{\beta}{2} \right)^{\frac{1}{r}} \right\}$.

⁸ Se $r > 2q$, a hipótese $\frac{\alpha^2}{\beta} > 1$ não é necessária.

de parâmetros $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ e $(\rho_k)_{k \geq 0}$ por (5.45), escolhendo $\underline{k} \in \mathbb{N}$ de forma que $\alpha_0 = 1 - \frac{\alpha}{\underline{k}^q} > 0$ e $\rho_0 = \frac{\beta}{\underline{k}^r} < 2$. Então, para qualquer sequência $(x_k)_{k \geq 0}$ gerada pelo (RIPA), temos:

1. $\sum_{i=1}^{\infty} i^{r-q} \cdot \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$;
2. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{r-q}} \cdot \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 < \infty$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{r-q}} \cdot \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 < \infty$;
3. $\forall z \in \text{zer}(A)$, a sequência real $(\|x_k - z\|)_{k \geq 0}$ converge, e portanto $(x_k)_{k \geq 0}$ é limitada;
4. $\|x_{k+1} - x_k\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{r-q}}\right)$ se $k \rightarrow \infty$;
5. neste item, assuma também que $r \leq q + 1$ e $\frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{r-q}}\right)$ se $k \rightarrow \infty$. Então, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(x_k)\| = 0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(y_k)\| = 0$. Se ainda $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k > 0$, então existe $x_\infty \in \text{zer}(A)$ tal que $x_k \rightarrow x_\infty$ e $y_k \rightarrow x_\infty$ (convergência fraca em \mathcal{H});
6. se⁹ $r > q + 1$, então $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i - x_{i-1}\| < \infty$ e portanto existe¹⁰ $x_\infty \in \mathcal{H}$ tal que $x_k \rightarrow x_\infty$ e $y_k \rightarrow x_\infty$ (convergência forte em \mathcal{H}).

Demonstração. Primeiramente, note que (α_k) é crescente, e como $\alpha_0 > 0$ por escolha de \underline{k} , temos $0 < \alpha_0 \leq \alpha_k < 1$, $\forall k$, donde $(\alpha_k) \subseteq]0, 1[$. Similarmente, (ρ_k) é decrescente, e como $\rho_0 < 2$ por escolha de \underline{k} , temos $0 < \rho_k \leq \rho_0 < 2$ e portanto $(\rho_k) \subseteq]0, 2[$. Agora, note que $\alpha_k \rightarrow 1$, e portanto precisaremos utilizar o Teorema 5.6 para garantir convergência. Inicialmente, vamos verificar as hipóteses (5.38)-(5.42) do Teorema 5.6, que consequentemente verificam as hipóteses do Teorema 5.4.

Claramente, (5.38) é satisfeita com $\bar{\alpha} = 1$, enquanto que (5.39) é satisfeita com $\bar{\rho} = 0$. Agora, veja que

$$\frac{1}{1 - \alpha_{k+1}} - \frac{1}{1 - \alpha_k} = \frac{1}{\frac{\alpha}{(k+1+\underline{k})^q}} - \frac{1}{\frac{\alpha}{(k+\underline{k})^q}} = \frac{1}{\alpha} \left((k+1+\underline{k})^q - (k+\underline{k})^q \right)$$

e portanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \alpha_{k+1}} - \frac{1}{1 - \alpha_k} \right) = \frac{1}{\alpha} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left((k+1+\underline{k})^q - (k+\underline{k})^q \right) = 0$$

⁹ Aqui, não estamos assumindo que $\frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{r-q}}\right)$ se $k \rightarrow \infty$ e nem $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k > 0$.

¹⁰ Não necessariamente $x_\infty \in \text{zer}(A)$.

pois¹¹ $\lim_{x \rightarrow \infty} [(x+1)^q - x^q] = 0$ já que $0 < q < 1$. Dessa forma, (5.40) é satisfeita com $c = 0$. Similarmente,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{k+1} - \rho_k}{\rho_{k+1}(1 - \alpha_k)} &= \frac{\frac{\beta}{(k+1+k)^r} - \frac{\beta}{(k+k)^r}}{\frac{\beta}{(k+1+k)^r} \cdot \frac{\alpha}{(k+k)^q}} = \frac{(k+k)^q}{\alpha} (k+1+k)^r \left[\frac{1}{(k+1+k)^r} - \frac{1}{(k+k)^r} \right] \\ &= \frac{(k+k)^q}{\alpha} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{k+k} \right)^r \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

pois¹² $\lim_{x \rightarrow \infty} x^q \left[1 - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^r \right] = 0$ já que $0 < q < 1$. Consequentemente, (5.41) é válida com $c'' = 0$. Note que trivialmente vale $-\left(1 - \frac{\bar{\rho}}{2}\right) < c'' \leq -\left(1 - \frac{\bar{\rho}}{2}\right)c$, já que $\bar{\rho} = c = c'' = 0$.

Por fim, vamos verificar (5.42). Como $\bar{\alpha} = 1$ e $\bar{\rho} = c'' = 0$, essa condição é equivalente a $\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - \alpha_k)^2}{\rho_k} > 1$. Agora, veja que

$$\frac{(1 - \alpha_k)^2}{\rho_k} = \frac{\frac{\alpha^2}{(k+k)^{2q}}}{\frac{\beta}{(k+k)^r}} = \frac{\alpha^2}{\beta} \cdot (k+k)^{r-2q}$$

de forma que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - \alpha_k)^2}{\rho_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - \alpha_k)^2}{\rho_k} = \begin{cases} \infty, & \text{se } r > 2q \\ \frac{\alpha^2}{\beta}, & \text{se } r = 2q. \end{cases}$$

Dessa forma, claramente vale $\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - \alpha_k)^2}{\rho_k} > 1$ em ambos os casos $r > 2q$ ou $r = 2q$, já que neste segundo caso acrescentamos justamente a hipótese $\frac{\alpha^2}{\beta} > 1$. Assim, (5.42) também é satisfeita, e então verificamos (5.38)-(5.42), ou seja, todas as hipóteses do Teorema 5.6 (e também do Teorema 5.4) estão garantidas.

Item 1): do Teorema 5.4(1), temos que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 - \alpha_i}{\rho_i} \|x_{i+1} - x_i\|^2 < \infty$. Como

$$\frac{1 - \alpha_i}{\rho_i} = \frac{\frac{\alpha}{(i+k)^q}}{\frac{\beta}{(i+k)^r}} = \frac{\alpha}{\beta} (i+k)^{r-q} \sim \frac{\alpha}{\beta} (i+1)^{r-q} \text{ se } i \rightarrow \infty$$

segue $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\beta} (i+1)^{r-q} / \frac{1 - \alpha_i}{\rho_i} = 1$ e portanto existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $i \geq i_0$ temos $\frac{\alpha}{\beta} (i+1)^{r-q} \leq 2 \cdot \frac{1 - \alpha_i}{\rho_i} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} (i+1)^{r-q} \|x_{i+1} - x_i\|^2 \leq 2 \cdot \frac{1 - \alpha_i}{\rho_i} \|x_{i+1} - x_i\|^2$ e então $\frac{\alpha}{\beta} \sum_{i=i_0}^{\infty} (i+1)^{r-q} \|x_{i+1} - x_i\|^2 \leq 2 \sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{1 - \alpha_i}{\rho_i} \|x_{i+1} - x_i\|^2 < \infty$, o que nos dá o item 1).

¹¹ $\lim_{x \rightarrow \infty} [(x+1)^q - x^q] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right)^q - 1 \right] / x^{-q}$, e usando a regra de L'Hôpital (já que $x^{-q} \rightarrow 0$ pois $q > 0$) nos dá $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{q-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{q-1} = 0$ pois $q-1 < 0$ já que $q < 1$.

¹² $\lim_{x \rightarrow \infty} x^q \left[1 - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^r \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^r \right] / x^{-q}$, e usando a regra de L'Hôpital (já que $x^{-q} \rightarrow 0$ pois $q > 0$) nos dá $-\frac{r}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^{q-1} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{r-1} = 0$ pois $x^{q-1} \rightarrow 0$ já que $q < 1$.

Item 2): do Teorema 5.4(2) temos que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i}{1-\alpha_i} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 < \infty$. Similarmente ao item 1), temos

$$\frac{\rho_i}{1-\alpha_i} = \frac{\frac{\beta}{(i+k)^r}}{\frac{\alpha}{(i+k)^q}} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{(i+k)^{r-q}} \sim \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{i^{r-q}} \text{ se } i \rightarrow \infty.$$

Dessa forma, $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{i^{r-q}} / \frac{\rho_i}{1-\alpha_i} = 1$ e então existe $i_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $i \geq i_1$ temos $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{i^{r-q}} \leq 2 \cdot \frac{\rho_i}{1-\alpha_i}$, donde $\frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=i_1}^{\infty} \frac{1}{i^{r-q}} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 \leq 2 \sum_{i=i_1}^{\infty} \frac{\rho_i}{1-\alpha_i} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 < \infty$, o que nos dá a primeira convergência do item 2). A segunda convergência é análoga, usando novamente o Teorema 5.4(2) para $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i}{1-\alpha_i} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 < \infty$.

Item 3): segue imediatamente do Teorema 5.4(3).

Item 4): do Teorema 5.6(1), temos $\|x_{k+1} - x_k\| = \mathcal{O}\left(\frac{\rho_k}{1-\alpha_k}\right)$ se $k \rightarrow \infty$. Como mostrado no item 2), temos $\frac{\rho_k}{1-\alpha_k} \sim \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{k^{r-q}}$, donde segue $\mathcal{O}\left(\frac{\rho_k}{1-\alpha_k}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{k^{r-q}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{r-q}}\right)$ se $k \rightarrow \infty$, o que mostra o item 4).

Item 5): assumamos que $r \leq q+1$ e $\frac{|\mu_{k+1}-\mu_k|}{\mu_{k+1}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{r-q}}\right)$ se $k \rightarrow \infty$. Como por hipótese deste corolário temos $r \geq 2q$, então $0 < q \leq r-q \leq 1$ e portanto $k^{r-q} \leq k \Rightarrow \frac{1}{k^{r-q}} \geq \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{(k+k)^{r-q}} \geq \frac{1}{k+k}, \forall k \geq 0$. Como também $\frac{\rho_k}{1-\alpha_k} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{(k+k)^{r-q}}$ (por (5.45)), temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_k}{1-\alpha_k} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k+k)^{r-q}} \geq \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k+k} = \infty \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_k}{1-\alpha_k} = \infty$$

e como $\frac{\rho_k}{1-\alpha_k} \sim \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{k^{r-q}}$, temos $\frac{|\mu_{k+1}-\mu_k|}{\mu_{k+1}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{r-q}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{k^{r-q}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\rho_k}{1-\alpha_k}\right)$ se $k \rightarrow \infty$. Dessa forma, o item 5) segue diretamente do Teorema 5.6(2).

Item 6): se $r > q+1$, então $r-q > 1$ e portanto $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k}{1-\alpha_k} = \frac{\beta}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+k)^{r-q}} < \infty$, e assim o item 6) segue do Teorema 5.6(3). ■

Vamos agora considerar o caso limite do Corolário 5.7 em que $q = 1$:

Corolário 5.8. *Sejam $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ monótono maximal, com $\text{zer}(A) \neq \emptyset$, $(\mu_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$, $\alpha > r \geq 2$ e $\beta > 0$ com $\beta < \alpha(\alpha-2)$ se¹³ $r = 2$. Defina as seqüências de parâmetros $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ e $(\rho_k)_{k \geq 0}$ por (5.45), escolhendo $q = 1$ e $\underline{k} \in \mathbb{N}$ de forma que $\alpha_0 = 1 - \frac{\alpha}{\underline{k}} > 0$ e $\rho_0 = \frac{\beta}{\underline{k}^r} < 2$. Então, para qualquer seqüência $(x_k)_{k \geq 0}$ gerada pelo (RIPA), temos:*

1. $\sum_{i=1}^{\infty} i^{r-1} \cdot \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$;
2. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{r-1}} \cdot \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 < \infty$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{r-1}} \cdot \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 < \infty$;
3. $\forall z \in \text{zer}(A)$, a seqüência real $(\|x_k - z\|)_{k \geq 0}$ converge, e portanto $(x_k)_{k \geq 0}$ é limitada;

¹³ Se $r > 2$, a hipótese $\beta < \alpha(\alpha-2)$ não é necessária.

4. $\|x_{k+1} - x_k\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{r-1}}\right)$ se $k \rightarrow \infty$;
5. neste item, assumamos também que $r = 2$ e $\frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ se $k \rightarrow \infty$. Então, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(x_k)\| = 0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k A_{\mu_k}(y_k)\| = 0$. Se ainda $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k > 0$, então existe $x_\infty \in \text{zer}(A)$ tal que $x_k \rightarrow x_\infty$ e $y_k \rightarrow x_\infty$ (convergência fraca em \mathcal{H});
6. se¹⁴ $r > 2$, então $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i - x_{i-1}\| < \infty$ e portanto existe¹⁵ $x_\infty \in \mathcal{H}$ tal que $x_k \rightarrow x_\infty$ e $y_k \rightarrow x_\infty$ (convergência forte em \mathcal{H}).

Demonstração. Como aqui $q = 1$, temos $\alpha_k = 1 - \frac{\alpha}{k+\underline{k}}$. Novamente, pela escolha de $\underline{k} \in \mathbb{N}$, temos $0 < \alpha_0 < 1$ e $0 < \rho_0 < 2$, e como (α_k) é crescente e (ρ_k) é decrescente, temos $(\alpha_k)_{k \geq 0} \subseteq]0, 1[$ e $(\rho_k) \subseteq]0, 2[$. Como no Corolário 5.7, vamos verificar as hipóteses (5.38)-(5.42) do Teorema 5.6, que portanto verificam as hipóteses do Teorema 5.4.

Como $\alpha_k = 1 - \frac{\alpha}{k+\underline{k}}$ e $\rho_k = \frac{\beta}{(k+\underline{k})^r}$, é imediato que as hipóteses (5.38) e (5.39) se verificam com $\bar{\alpha} = 1$ e $\bar{\rho} = 0$. Agora, note que

$$\frac{1}{1 - \alpha_{k+1}} - \frac{1}{1 - \alpha_k} = \frac{1}{\alpha} \left(k + 1 + \underline{k} - (k + \underline{k}) \right) = \frac{1}{\alpha}, \quad \forall k \geq 0$$

de forma que (5.40) é satisfeita com $c = \frac{1}{\alpha}$. Como por hipótese $\alpha > r \geq 2$, temos $c \in]0, \frac{1}{2}[\subseteq]0, 1[$. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{k+1} - \rho_k}{\rho_{k+1}(1 - \alpha_k)} &= \frac{\frac{\beta}{(k+1+\underline{k})^r} - \frac{\beta}{(k+\underline{k})^r}}{\frac{\beta}{(k+1+\underline{k})^r} \cdot \frac{\alpha}{k+\underline{k}}} = \frac{k + \underline{k}}{\alpha} \cdot (k + 1 + \underline{k})^r \left[\frac{1}{(k + 1 + \underline{k})^r} - \frac{1}{(k + \underline{k})^r} \right] \\ &= \frac{k + \underline{k}}{\alpha} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{1}{k + \underline{k}} \right)^r \right]. \end{aligned}$$

Agora, veja que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\alpha} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^r \right] = \frac{1}{\alpha} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^r \right] / x^{-1}$$

e usando a regra de L'Hôpital nos dá

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\alpha} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^r \right] = -\frac{r}{\alpha} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{r-1} = -\frac{r}{\alpha}$$

donde segue $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho_{k+1} - \rho_k}{\rho_{k+1}(1 - \alpha_k)} = -\frac{r}{\alpha}$. Dessa forma, (5.41) é satisfeita com $c'' = -\frac{r}{\alpha}$.

Veja que como $\bar{\rho} = 0$, $c = \frac{1}{\alpha}$ e $c'' = -\frac{r}{\alpha}$, temos $-\left(1 - \frac{\bar{\rho}}{2}\right) = -1$ e $-\left(1 - \frac{\bar{\rho}}{2}\right)c = -c = -\frac{1}{\alpha}$, de forma que a desigualdade $-\left(1 - \frac{\bar{\rho}}{2}\right) < c'' \leq -\left(1 - \frac{\bar{\rho}}{2}\right)c$ é equivalente a $-1 < -\frac{r}{\alpha} \leq -\frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha > r \geq 1$, o que é válido já que estamos assumindo $\alpha > r \geq 2$.

¹⁴ Aqui, não estamos assumindo que $\frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ se $k \rightarrow \infty$ e nem $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k > 0$.

¹⁵ Não necessariamente $x_\infty \in \text{zer}(A)$.

Por fim, vamos verificar (5.42). Veja que

$$\frac{\bar{\alpha}(1 + \bar{\alpha})}{2 - \bar{\rho} + 2c''} = \frac{2}{2 + 2c''} = \frac{1}{1 - \frac{r}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha - r}$$

e

$$\frac{(1 - \alpha_k)^2}{\rho_k} = \frac{\frac{\alpha^2}{(k + \underline{k})^2}}{\frac{\beta}{(k + \underline{k})^r}} = \frac{\alpha^2}{\beta} \cdot (k + \underline{k})^{r-2}$$

donde

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{(1 - \alpha_k)^2}{\rho_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - \alpha_k)^2}{\rho_k} = \begin{cases} \infty, & \text{se } r > 2 \\ \frac{\alpha^2}{\beta}, & \text{se } r = 2. \end{cases}$$

Dessa forma, quando $r > 2$, (5.42) é trivialmente satisfeita, e quando $r = 2$ ela é equivalente a $\frac{\alpha^2}{\beta} > \frac{\alpha}{\alpha - r} \Leftrightarrow \alpha(\alpha - r) > \beta$ e como $r = 2$, (5.42) é então equivalente a $\alpha(\alpha - 2) > \beta$, que é precisamente a hipótese que acrescentamos nesse caso. Dessa forma, (5.42) é satisfeita.

Assim verificamos (5.38)-(5.42) do Teorema 5.6, e conseqüentemente verificamos as hipóteses do Teorema 5.4. Agora, vamos provar individualmente cada um dos itens, usando os Teoremas 5.4 e 5.6.

Item 1): do Teorema 5.4(1), temos $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 - \alpha_{i-1}}{\rho_{i-1}} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$. Além disso, no nosso caso:

$$\frac{1 - \alpha_{i-1}}{\rho_{i-1}} = \frac{\frac{\alpha}{i-1+\underline{k}}}{\frac{\beta}{(i-1+\underline{k})^r}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot (i-1 + \underline{k})^{r-1} \sim \frac{\alpha}{\beta} \cdot (i-1)^{r-1} \sim \frac{\alpha}{\beta} \cdot i^{r-1} \quad \text{se } i \rightarrow \infty$$

donde $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\beta} \cdot i^{r-1} / \frac{1 - \alpha_{i-1}}{\rho_{i-1}} = 1$ e portanto existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $i \geq i_0$, então $\frac{\alpha}{\beta} \cdot i^{r-1} \leq 2 \cdot \frac{1 - \alpha_{i-1}}{\rho_{i-1}}$, e portanto

$$\frac{\alpha}{\beta} \sum_{i=i_0}^{\infty} i^{r-1} \|x_i - x_{i-1}\|^2 \leq 2 \sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{1 - \alpha_{i-1}}{\rho_{i-1}} \|x_i - x_{i-1}\|^2 < \infty$$

o que nos dá o item 1).

Item 2): pelas contas do item 1), concluímos também que

$$\frac{\rho_i}{1 - \alpha_i} \sim \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{i^{r-1}} \quad \text{se } i \rightarrow \infty \implies \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{i^{r-1}} / \frac{\rho_i}{1 - \alpha_i} = 1.$$

Daí, existe $i_1 \in \mathbb{N}$ tal que, se $i \geq i_1$, então $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{i^{r-1}} \leq 2 \cdot \frac{\rho_i}{1 - \alpha_i}$, donde

$$\frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=i_1}^{\infty} \frac{1}{i^{r-1}} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 \leq 2 \sum_{i=i_1}^{\infty} \frac{\rho_i}{1 - \alpha_i} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 < \infty$$

já que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i}{1-\alpha_i} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 < \infty$ pelo Teorema 5.4(2). Dessa forma, mostramos $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{r-1}} \|\mu_i A_{\mu_i}(y_i)\|^2 < \infty$ e analogamente $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{r-1}} \|\mu_i A_{\mu_i}(x_i)\|^2 < \infty$, o que mostra o item 2).

Item 3): segue imediatamente do Teorema 5.4(3).

Item 4): do Teorema 5.6(1), temos que $\|x_{k+1} - x_k\| = \mathcal{O}\left(\frac{\rho_k}{1-\alpha_k}\right)$ se $k \rightarrow \infty$. Como vimos no item 2), $\frac{\rho_k}{1-\alpha_k} \sim \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{k^{r-1}}$ e portanto $\|x_{k+1} - x_k\| = \mathcal{O}\left(\frac{\rho_k}{1-\alpha_k}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{k^{r-1}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{r-1}}\right)$ se $k \rightarrow \infty$, o que nos dá o item 4).

Item 5): neste item, suponha também que $r = 2$ e $\frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ se $k \rightarrow \infty$. Nesse caso, $\rho_k = \frac{\beta}{(k+\underline{k})^2}$ e portanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i}{1-\alpha_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{\beta}{(i+\underline{k})^2}}{\frac{\alpha}{i+\underline{k}}} = \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i+\underline{k}} = \infty$$

e como $\frac{\rho_k}{1-\alpha_k} \sim \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{k^{r-1}} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{k}$, segue que $\frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{k}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\rho_k}{1-\alpha_k}\right)$ se $k \rightarrow \infty$. Dessa forma, o item 5) segue do Teorema 5.6(2).

Item 6): assuma agora que $r > 2$. Daí,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i}{1-\alpha_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{\beta}{(i+\underline{k})^r}}{\frac{\alpha}{i+\underline{k}}} = \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+\underline{k})^{r-1}} < \infty$$

onde a convergência da série decorre de $r-1 > 1$. Dessa forma, o item 6) segue do Teorema 5.6(3). ■

Por fim, vamos ainda considerar um último caso particular, em que os parâmetros (α_k) , (ρ_k) e (μ_k) são dados por

$$\alpha_k = 1 - \frac{\alpha}{k+\underline{k}}, \quad \rho_k = \frac{s}{\lambda_k + s} \quad \text{e} \quad \mu_k = \lambda_k + s \quad \forall k \geq 0 \quad (5.46)$$

em que α e s são constantes positivas, $\lambda_k = (1+\varepsilon)\frac{s}{\alpha^2} \cdot k^2$, para algum $\varepsilon > 0$, e $\underline{k} \in \mathbb{N}$ é escolhido de forma que¹⁶ $\alpha_0 = 1 - \frac{\alpha}{\underline{k}} > 0$. Esse caso foi estudado por Attouch e Peypouquet (2019, Teorema 3.6) e neste trabalho pode ser obtido como mais um corolário dos Teoremas 5.4 e 5.6.

Corolário 5.9. *Sejam $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ monótono maximal, com $\text{zer}(A) \neq \emptyset$, α, s, ε números positivos e defina os parâmetros por (5.46), escolhendo $\underline{k} \in \mathbb{N}$ de forma que $\alpha_0 = 1 - \frac{\alpha}{\underline{k}} > 0$. Suponha que $\alpha > 2$ e $\varepsilon > \frac{2}{\alpha-2}$. Então, para qualquer sequência $(x_k)_{k \geq 0}$ gerada pelo (RIPA), temos:*

$$1. \|x_{k+1} - x_k\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) \text{ se } k \rightarrow \infty, \text{ e } \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \|x_k - x_{k-1}\|^2 < \infty;$$

¹⁶ Podemos tomar qualquer $\underline{k} \in \mathbb{N}$ satisfazendo $\underline{k} > \alpha$.

2. existe $x_\infty \in \text{zer}(A)$ tal que $x_k \rightarrow x_\infty$ (convergência fraca em \mathcal{H});

3. $y_k \rightarrow x_\infty$ (convergência fraca em \mathcal{H}).

Demonstração. Veja que (α_k) é crescente e como $\alpha_0 > 0$ (por escolha de \underline{k}), temos $(\alpha_k) \subseteq]0, 1[$. Além disso, $\lambda_k \nearrow \infty$, de forma que $(\rho_k) \searrow 0$. Claramente, $\rho_0 = 1$ e portanto $(\rho_k) \subseteq]0, 1] \subseteq]0, 2[$ pois (ρ_k) é decrescente. Note também que $\mu_k \geq s$, $\forall k \geq 0$, e portanto $(\mu_k) \subseteq \mathbb{R}_{>0}$. Agora, vamos verificar as hipóteses (5.38)-(5.42) do Teorema 5.6, que garantem as hipóteses do Teorema 5.4.

(5.38) vale com $\bar{\alpha} = 1$ e (5.39) vale com $\bar{\rho} = 0$. De maneira idêntica à demonstração do Corolário 5.8, já que os parâmetros (α_k) são definidos da mesma forma, segue que (5.40) é satisfeita com $c = \frac{1}{\alpha}$. Agora, note que

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{k+1} - \rho_k}{\rho_{k+1}(1 - \alpha_k)} &= \frac{\frac{s}{\lambda_{k+1} + s} - \frac{s}{\lambda_k + s}}{\frac{s}{\lambda_{k+1} + s} \cdot \frac{\alpha}{k + \underline{k}}} = \frac{k + \underline{k}}{\alpha} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_{k+1} + s}{\lambda_k + s}\right) \\ &= \frac{k + \underline{k}}{\alpha} \cdot \left(1 - \frac{(1 + \varepsilon)\frac{s}{\alpha^2}(k + 1)^2 + s}{(1 + \varepsilon)\frac{s}{\alpha^2}k^2 + s}\right) \\ &= \frac{k + \underline{k}}{\alpha} \cdot \left(1 - \frac{(k + 1)^2 + \frac{\alpha^2}{1 + \varepsilon}}{k^2 + \frac{\alpha^2}{1 + \varepsilon}}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{k + \underline{k}}{k} \cdot k \cdot \left(1 - \frac{(k + 1)^2 + \tilde{\alpha}}{k^2 + \tilde{\alpha}}\right) \end{aligned}$$

onde por simplicidade fazemos $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha^2}{1 + \varepsilon}$. Agora, note que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(1 - \frac{(x + 1)^2 + \tilde{\alpha}}{x^2 + \tilde{\alpha}}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{-2x - 1}{x^2 + \tilde{\alpha}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 - x}{x^2 + \tilde{\alpha}} = -2$$

e portanto mostramos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho_{k+1} - \rho_k}{\rho_{k+1}(1 - \alpha_k)} = -\frac{2}{\alpha}$, ou seja, (5.40) é satisfeita com $c'' = -\frac{2}{\alpha}$. Agora, como $\bar{\rho} = 0$, note que $-\left(1 - \frac{\bar{\rho}}{2}\right) < c'' \leq -\left(1 - \frac{\bar{\rho}}{2}\right)c \Leftrightarrow -1 < c'' \leq -c = -\frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow -1 < -\frac{2}{\alpha} \leq -\frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha > 2 \geq 1$, o que é válido já que estamos assumindo $\alpha > 2$. Por fim, veja que

$$\frac{\bar{\alpha}(1 + \bar{\alpha})}{2 - \bar{\rho} + 2c''} = \frac{2}{2 - \frac{4}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha - 2}$$

e portanto (5.42) é equivalente a $\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - \alpha_k)^2}{\rho_k} > \frac{\alpha}{\alpha - 2}$. Além disso,

$$\frac{(1 - \alpha_k)^2}{\rho_k} = \frac{\left(\frac{\alpha}{k + \underline{k}}\right)^2}{\frac{s}{\lambda_k + s}} = \frac{\alpha^2}{s} \cdot \frac{\lambda_k + s}{(k + \underline{k})^2} = \frac{\alpha^2}{s} \cdot \frac{(1 + \varepsilon)\frac{s}{\alpha^2}k^2 + s}{(k + \underline{k})^2}$$

e então

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - \alpha_k)^2}{\rho_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - \alpha_k)^2}{\rho_k} = \frac{\alpha^2}{s} \cdot (1 + \varepsilon) \frac{s}{\alpha^2} = 1 + \varepsilon.$$

Dessa forma, (5.42) é equivalente a $1 + \varepsilon > \frac{\alpha}{\alpha-2} \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{\alpha}{\alpha-2} - 1 \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{2}{\alpha-2}$, que é precisamente nossa hipótese. Dessa forma, verificamos todas as hipóteses (5.38)-(5.42) do Teorema 5.6, que por sua vez garantem as hipóteses do Teorema 5.4.

Item 1): o Teorema 5.6(1) nos garante que $\|x_{k+1} - x_k\| = \mathcal{O}\left(\frac{\rho_k}{1-\alpha_k}\right)$ se $k \rightarrow \infty$. No nosso caso, em que os parâmetros são dados por (5.46), temos

$$\frac{\rho_k}{1-\alpha_k} = \frac{\frac{s}{\lambda_k+s}}{\frac{\alpha}{k+k}} = \frac{k+k}{\alpha} \cdot \frac{s}{(1+\varepsilon)\frac{s}{\alpha^2}k^2+s} = \frac{\alpha}{1+\varepsilon} \cdot \frac{k+k}{k^2+\frac{\alpha^2}{1+\varepsilon}} \sim \frac{\alpha}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1}{k} \quad \text{se } k \rightarrow \infty. \quad (5.47)$$

Dessa forma, $\mathcal{O}\left(\frac{\rho_k}{1-\alpha_k}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1}{k}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ se $k \rightarrow \infty$, donde $\|x_{k+1} - x_k\| = \mathcal{O}\left(\frac{\rho_k}{1-\alpha_k}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ se $k \rightarrow \infty$, o que mostra a primeira parte do item 1). Agora, do Teorema 5.4(1) temos que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1-\alpha_i}{\rho_i} \|x_{i+1} - x_i\|^2 < \infty$. Invertendo as contas acima, temos $\frac{1-\alpha_i}{\rho_i} \sim \frac{1+\varepsilon}{\alpha} \cdot i \sim \frac{1+\varepsilon}{\alpha} \cdot (i+1)$, ou seja, $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1+\varepsilon}{\alpha} \cdot (i+1) / \frac{1-\alpha_i}{\rho_i} = 1$, e portanto existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $i \geq i_0$ temos $\frac{1+\varepsilon}{\alpha} \cdot (i+1) \leq 2 \cdot \frac{1-\alpha_i}{\rho_i}$. Daí,

$$\frac{1+\varepsilon}{\alpha} \sum_{i=i_0}^{\infty} (i+1) \cdot \|x_{i+1} - x_i\|^2 \leq 2 \sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{1-\alpha_i}{\rho_i} \cdot \|x_{i+1} - x_i\|^2 < \infty$$

o que mostra que $\sum_{i=1}^{\infty} (i+1) \cdot \|x_{i+1} - x_i\|^2 < \infty$, encerrando o item 1).

Item 2): neste item, queremos garantir a convergência de (x_k) utilizando o Teorema 5.6(2). Para tanto, ainda precisamos verificar três hipóteses adicionais. Primeiramente, por (5.46) temos que¹⁷

$$\begin{aligned} \frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}} &= \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\lambda_{k+1} + s} = \frac{(1+\varepsilon)\frac{s}{\alpha^2}(k+1)^2 - (1+\varepsilon)\frac{s}{\alpha^2}k^2}{(1+\varepsilon)\frac{s}{\alpha^2}(k+1)^2 + s} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{(k+1)^2 + \frac{\alpha^2}{1+\varepsilon}} \\ &= \frac{2k+1}{k^2 + 2k + 1 + \frac{\alpha^2}{1+\varepsilon}} \sim \frac{2}{k} \quad \text{se } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Daí, mostramos $\frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}} \sim \frac{2}{k}$. Mas, rearranjando os termos em (5.47), temos que $\frac{1}{k} \sim \frac{1+\varepsilon}{\alpha} \cdot \frac{\rho_k}{1-\alpha_k}$, e portanto $\frac{2}{k} \sim 2 \cdot \frac{1+\varepsilon}{\alpha} \cdot \frac{\rho_k}{1-\alpha_k}$. Daí, $\frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}} \sim 2 \cdot \frac{1+\varepsilon}{\alpha} \cdot \frac{\rho_k}{1-\alpha_k}$, e então $\frac{|\mu_{k+1} - \mu_k|}{\mu_{k+1}} = \mathcal{O}\left(2 \cdot \frac{1+\varepsilon}{\alpha} \cdot \frac{\rho_k}{1-\alpha_k}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\rho_k}{1-\alpha_k}\right)$ se $k \rightarrow \infty$, o que verifica a primeira hipótese adicional no Teorema 5.6(2).

Além disso, por (5.47) temos $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho_k}{1-\alpha_k} / \left[\frac{\alpha}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1}{k}\right] = 1$, e portanto existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq k_0$ temos $\frac{\rho_k}{1-\alpha_k} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1}{k}$, donde

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\rho_k}{1-\alpha_k} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{1+\varepsilon} \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

¹⁷ Lembre que $\lambda_k = (1+\varepsilon)\frac{s}{\alpha^2}k^2$ é uma sequência crescente, de modo que $|\lambda_{k+1} - \lambda_k| = \lambda_{k+1} - \lambda_k$.

e então $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k}{1-\alpha_k} = \infty$, o que verifica mais uma hipótese do item 2) do Teorema 5.6. Por fim, como $\lambda_k \nearrow \infty$, então $\mu_k = \lambda_k + s \nearrow \infty$ e portanto $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \infty > 0$, e assim o item 2) segue do Teorema 5.6(2).

Item 3): segue também do Teorema 5.6(2). ■

6 CONCLUSÃO

Baseados em Attouch e Cabot (2020), estudamos detalhadamente o Algoritmo Proximal com Inércia e Relaxação (RIPA) descrito por

$$\forall k \geq 1 : \quad \begin{cases} y_k = x_k + \alpha_k(x_k - x_{k-1}) \\ x_{k+1} = (1 - \rho_k)y_k + \rho_k J_{\mu_k A}(y_k) \end{cases} \quad (\text{RIPA})$$

para pontos iniciais $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$, parâmetros α_k (de inércia), ρ_k (de relaxação) e μ_k , e operador monótono maximal $A : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ com $\text{zer}(A) \neq \emptyset$. No Capítulo 3, incluímos interpretação geométrica e casos especiais de (RIPA), bem como introduzimos as sequências (h_k) , $(t_{i,k})$ e (t_i) , que são úteis nas provas de convergência do capítulo seguinte. Calibrando apropriadamente os parâmetros, no Capítulo 4 garantimos a convergência fraca das sequências (x_k) e (y_k) para um $x_\infty \in \text{zer}(A)$, solução do problema de inclusão monótona $0 \in Ax$ (Teoremas 4.1 e 4.9). Por fim, no Capítulo 5 particularizamos nossa análise para classes específicas de parâmetros (Teoremas 5.4 e 5.6), incluindo expressões explícitas para eles (Corolários 5.7, 5.8 e 5.9), o que facilita a implementação prática do algoritmo.

Acreditamos que futuros trabalhos relacionados ao (RIPA) possam incluir análise de convergência, tanto do ponto de vista teórico como do ponto de vista prático, realizando experimentos computacionais e comparando os resultados com os de algoritmos já conhecidos para o problema $0 \in Ax$, incluindo o caso $\alpha_k \rightarrow 1$ em que se espera obter rápida convergência. Além disso, podem ser consideradas versões inexatas do algoritmo, como

$$\forall k \geq 1 : \quad \begin{cases} y_k = x_k + \alpha_k(x_k - x_{k-1}) \\ x_{k+1} = (1 - \rho_k)y_k + \rho_k w_k \end{cases} \quad (\text{Inexact-RIPA})$$

onde $\|w_k - J_{\mu_k A}(y_k)\| \leq \varepsilon_k$, ou seja, $w_k \approx J_{\mu_k A}(y_k)$ contém o erro de cálculo do resolvente. Motivados pelos trabalhos de Rockafellar (1976) e Eckstein e Bertsekas (1992) por exemplo, é natural nos indagarmos se a hipótese adicional de erro somável $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$ seria suficiente para garantir convergência de (Inexact-RIPA).

Por fim, podemos considerar também algoritmos proximais de decomposição (*splitting proximal algorithms*) com inércia e relaxação no caso em que $A = \sum_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ e cada $\mathcal{A}_i : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ é um operador monótono maximal, a fim de explorar individualmente a estrutura de cada operador \mathcal{A}_i . Podemos citar Alves *et al.* (2020) e Geremia (2020) como exemplos de trabalhos nesse sentido. Esse caso se mostra particularmente interessante quando alguns operadores \mathcal{A}_i têm alguma estrutura extra além de monotonia e maximalidade, como cocoercividade ou ainda quando algum $\mathcal{A}_i = \partial f$ para f própria, convexa e semicontínua inferiormente.

REFERÊNCIAS

ALVAREZ, Felipe. On the minimizing property of a second order dissipative system in Hilbert spaces. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 38, fev. 2001. DOI: 10.1137/S0363012998335802.

ALVAREZ, Felipe. Weak convergence of a relaxed and inertial hybrid projection-proximal point algorithm for maximal monotone operators in Hilbert space. **SIAM Journal on Optimization**, v. 14, p. 773–782, jan. 2004. DOI: 10.1137/S1052623403427859.

ALVAREZ, Felipe; ATTOUCH, Hedy. An inertial proximal method for maximal monotone operators via discretization of a nonlinear oscillator with damping. **Set-Valued Analysis**, v. 9, p. 3–11, jan. 2001. DOI: 10.1023/A:1011253113155.

ALVES, M Marques; ECKSTEIN, Jonathan; GEREMIA, Marina; MELO, Jefferson G. Relative-error inertial-relaxed inexact versions of Douglas-Rachford and ADMM splitting algorithms. **Computational Optimization and Applications**, Springer, v. 75, n. 2, p. 389–422, 2020. DOI: 10.1007/s10589-019-00165-y.

ATTOUCH, Hedy; CABOT, Alexandre. Convergence of a relaxed inertial proximal algorithm for maximally monotone operators. **Mathematical Programming**, Springer Verlag, v. 184, n. 1-2, p. 243–287, nov. 2020. DOI: 10.1007/s10107-019-01412-0.

ATTOUCH, Hedy; CABOT, Alexandre. Convergence rates of inertial forward-backward algorithms. **SIAM Journal on Optimization**, v. 28, p. 849–874, jan. 2018. DOI: 10.1137/17M1114739.

ATTOUCH, Hedy; GOUDOU, Xavier; REDONT, Patrick. The heavy ball with friction method, I. The continuous dynamical system: global exploration of the local minima of a real-valued function by asymptotic analysis of a dissipative dynamical system. **Communications in Contemporary Mathematics**, World Scientific, v. 2, n. 01, p. 1–34, 2000. DOI: 10.1142/S0219199700000025.

ATTOUCH, Hedy; MAINGÉ, Paul-Emile. Asymptotic behavior of second-order dissipative evolution equations combining potential with non-potential effects. **ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations**, EDP Sciences, v. 17, n. 3, p. 836–857, 2011. DOI: 10.1051/cocv/2010024.

- ATTOUCH, Hedy; PEYPOUQUET, Juan. Convergence of inertial dynamics and proximal algorithms governed by maximally monotone operators. **Mathematical Programming**, v. 174, p. 391–432, 2019. DOI: 10.1007/s10107-018-1252-x.
- BAUSCHKE, Heinz; COMBETTES, Patrick. **Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces**. Second. [S.l.]: Springer International Publishing, 2017. ISBN 978-3-319-48310-8. DOI: 10.1007/978-3-319-48311-5.
- BECK, Amir; TBOULLE, Marc. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems. **SIAM J. Imaging Sciences**, v. 2, p. 183–202, jan. 2009. DOI: 10.1137/080716542.
- BREZIS, H.; LIONS, P. L. Produits infinis de resolvantes. French. **Israel Journal of Mathematics**, Springer New York, v. 29, n. 4, p. 329–345, dez. 1978. DOI: 10.1007/BF02761171.
- BRUCK JR, Ronald E. Asymptotic convergence of nonlinear contraction semigroups in Hilbert space. **Journal of Functional Analysis**, Elsevier, v. 18, n. 1, p. 15–26, 1975. DOI: 10.1016/0022-1236(75)90027-0.
- ECKSTEIN, Jonathan; BERTSEKAS, Dimitri. On the Douglas-Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators. **Mathematical Programming**, v. 55, p. 293–318, abr. 1992. DOI: 10.1007/BF01581204.
- GEREMIA, Marina. **Relative-error inexact versions of Douglas-Rachford and ADMM splitting algorithms**. 2020. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/220397>.
- GOL'SHTEIN, E.; TRET'YAKOV, N. Modified Lagrangians in convex programming and their generalizations. *In*: [S.l.: s.n.], mar. 1979. v. 10, p. 86–97. DOI: 10.1007/BFb0120845.
- JULES, Florence; MAINGÉ, Paul-Emile. Numerical approach to a stationary solution of a second order dissipative dynamical system. **Optimization**, Taylor & Francis, v. 51, n. 2, p. 235–255, 2002. DOI: 10.1080/02331930290019404.

KRASNOSEL'SKII, Mark A. Two remarks on the method of successive approximations. **Uspekhi Mat. Nauk**, v. 10, p. 123–127, 1955.

MINTY, George J. Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space. **Duke Mathematical Journal**, Duke University Press, v. 29, n. 3, p. 341–346, 1962. DOI: 10.1215/S0012-7094-62-02933-2.

NESTEROV, Yurii. A method for solving the convex programming problem with convergence rate $O(1/k^2)$. **Proceedings of the USSR Academy of Sciences**, v. 269, p. 543–547, 1983.

OPIAL, Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 73, p. 591–597, 1967. DOI: 10.1090/S0002-9904-1967-11761-0.

POLYAK, B.T. Some methods of speeding up the convergence of iteration methods. **USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics**, v. 4, n. 5, p. 1–17, 1964. DOI: 10.1016/0041-5553(64)90137-5.

ROCKAFELLAR, R Tyrrell. Monotone operators and the proximal point algorithm. **SIAM Journal on Control and Optimization**, SIAM, v. 14, n. 5, p. 877–898, 1976. DOI: 10.1137/0314056.