Francisco Gabriel Klock Campos Vidal

Categorias Abelianas e o Teorema de Freyd-Mitchell

Florianópolis, SC

2021

Francisco Gabriel Klock Campos Vidal

Categorias Abelianas e o Teorema de Freyd-Mitchell

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para obtenção do Título de Bacharel em Matemática.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática
Bacharelado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Paulinho Demeneghi

Florianópolis, SC
2021

RESUMO

O foco deste trabalho é o estudo de categorias abelianas e suas propriedades, e, em especial, é feita a demonstração do Teorema de Freyd-Mitchell, que afirma que para toda categoria abeliana pequena existe um funtor fiel, cheio e exato para alguma categoria de módulos à esquerda sobre um anel. Este estudo foi feito majoritariamente a partir do livro *Abelian Categories*. Para tratar de categorias abelianas, o trabalho passa por uma introdução à teoria de módulos e à teoria de categorias, notando os detalhes que são necessários para seu entendimento. A demonstração do Teorema de Freyd-Mitchell é feita na segunda metade do trabalho, onde são introduzidos e trabalhados diversos conceitos para tal fim.

Palavras-chave: Categorias; categorias abelianas; sequências exatas; funtores.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Como o título sugere, este trabalho terá foco em dois temas: Categorias abelianas e o Teorema de Freyd-Mitchell.

Muitos tópicos na matemática estudam o comportamento de aplicações entre estruturas, como funções entre conjuntos, morfismos de grupo entre grupos e transformações lineares entre espaços vetoriais. Categorias, de certo modo, generalizam essa noção e nos permite um estudo mais geral sobre tais relações entre estruturas, em que temos objetos e morfismos entre estes objetos, de modo que podemos compor estes morfismos quando apropriado.

Vários conceitos vistos com frequência em teorias mais específicas são vistos também em teoria de categorias de uma forma mais generalizada, como kernels, produtos e monomorfismos. Estes conceitos não necessariamente existem em todas as categorias, mas o tópico que trataremos, de categorias abelianas, nos dá um contexto em que alguns destes conceitos são de suma importância.

Categorias abelianas são categorias que satisfazem alguns axiomas, e que, em particular, todos os morfismos possuem kernels e cokernels, e podemos falar de sequências exatas, que possuem grande importância em vários ramos algébricos.

Numa categoria abeliana arbitrária não podemos utilizar conjuntos em nossa definição de kernels e cokernels, de modo que as demonstrações envolvendo sequências exatas se tornam mais complicadas que as demonstrações que seriam feitas, por exemplo, em teoria de grupos, pois não temos elementos em conjuntos para brincar com a continência de conjuntos por meio deles.

É nesta parte que o Teorema de Freyd-Mitchell acaba brilhando, pois com ele conseguimos, de certo modo, ver toda categoria abeliana pequena como uma subcategoria cheia e exata de uma categoria de módulos, que é um ambiente bastante mais amigável para demonstrações, já que módulos são constituídos por conjuntos, de modo que podemos utilizar a técnica de “diagram chasing”, buscando elementos dentro de conjuntos em diagramas para fazer demonstrações de forma mais simples e intuitiva.

Freyd em seu livro descreve como se deu a formação das ideias para a demonstração do Teorema de Freyd-Mitchell, explicando de forma bastante informal suas lembranças de como foram obtidas as ideias e os resultados feitos por diversos outros matemáticos, que ele incorporou em diversos resultados que, no final, Mitchell juntou em uma demonstração final do teorema.

Se assumirá que o leitor tenha conhecimento de teoria de grupos, anéis e conjuntos, e qualquer outro requisito para o entendimento do tema será introduzido aqui, apesar que é recomendado um certo conhecimento sobre teoria de módulos e de categorias, mesmo que sejam introduzidos e explicados aqui.

Todos os anéis neste trabalho serão assumidos anéis com unidade. Assumiremos também o Lema de Zorn como verdadeiro. Na verdade, assumiremos algo mais forte que isto, o axioma da escolha global.

Nos dois próximos capítulos darei uma introdução à teoria de módulos e à teoria de categorias, informando tudo que é necessário para o estudo de categorias abelianas.

No quarto capítulo começarei a falar de categorias abelianas, as definindo e demonstrando diversos teoremas e proposições nas mesmas. Serão definidas sequências exatas e uma operação de soma entre os morfismos em uma categoria abeliana neste capítulo também.

O quinto capítulo começará uma preparação para que possamos falar do Teorema de Freyd-Mitchell, introduzindo funtores e subcategorias.

É no sexto capítulo que enunciamos o Teorema de Freyd-Mitchell, mas não é feita sua demonstração ainda, pois precisamos de vários outros recursos para a fazer. Definimos objetos projetivos, injetivos, geradores e cogeradores neste capítulo e os utilizamos para a demonstração do Teorema de Mitchell, que é uma versão do Teorema de Freyd-Mitchell com algumas hipóteses extras, e que será utilizado para a demonstração do mesmo.

Os três próximos capítulos serão todos utilizados para a demonstração do Teorema de Freyd-Mitchell, com o capítulo categorias de funtores e a imersão de Yoneda e o capítulo categorias de Grothendieck e envelopes injetivos trabalhando em frentes diferentes, mas que serão unidas posteriormente na demonstração de diversos resultados que serão feitos no capítulo o Teorema de Freyd-Mitchell para enfim demonstrarmos o teorema neste capítulo.

Por fim, planejo mostrar como podemos aplicar o Teorema de Freyd-Mitchell em demonstrações, fazendo uma demonstração de um lema envolvendo um diagrama e exatidão de sequências numa categoria abeliana arbitrária, utilizando e apresentando a técnica de “diagram chasing” numa categoria de módulos arbitrária para tal.

2 R-MÓDULOS

Começaremos com uma breve introdução a módulos, que veremos que formarão uma categoria abeliana de grande importância para o Teorema de Freyd-Mitchell.

2.1 R-MÓDULOS

Definição 2.1.1 (R-módulos)**.** *Seja R um anel. Um **módulo sobre** R **(à esquerda)**, ou um R**-módulo (à esquerda)**, é uma tripla $(M, +, \cdot)$ em que M é um conjunto, $+$ é uma operação tal que $(M, +)$ forma um grupo abeliano e $\cdot$ é uma operação $\cdot \colon R \times M \to M$, que denotamos $\cdot(r, m) = r \cdot m$, que satisfaz, para todo $r, s \in R$ e $m, n \in N$,*

1. $1_R \cdot m = m$
2. $r \cdot (s \cdot m) = (rs) \cdot m$
3. $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$
4. $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$

Caso as operações sejam implícitas, dizemos apenas que M é um R-módulo.

Esta definição de módulo sobre um anel R é usualmente nomeada por R-módulo **à esquerda** por conta de sua multiplicação ser denotada com o elemento do anel à esquerda do elemento do módulo, em contraste com o conceito de R-módulos à direita, que possui uma multiplicação com o elemento do anel à direita do elemento do módulo.

Não falaremos sobre R-módulos à direita neste trabalho, e, portanto, omitirei o lado em que o anel age sobre o módulo, e sempre será assumido que é pelo lado esquerdo, assim como na definição acima.

Pode se notar uma certa similaridade entre esta notação e o produto por escalar de espaços vetoriais, e de fato possuem relação:

Exemplo 2.1.2 (Espaços vetoriais são $\mathbb{K}$-módulos)**.** *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Assim, V com sua operação de soma é um grupo abeliano, e, junto de sua operação de multiplicação por escalar de V, é um $\mathbb{K}$-módulo.*

Exemplo 2.1.3 (Grupos abelianos são $\mathbb{Z}$-módulos)**.** *Dado um grupo abeliano A, podemos definir uma estrutura de $\mathbb{Z}$-módulo em A por, para $z \in \mathbb{Z}$ e $a \in A$, $z \cdot a = \underbrace{a + \cdots + a}_{z}$, se $z > 0$, $z \cdot a = \underbrace{(-a) + \cdots + (-a)}_{-z}$, se $z < 0$, e $z \cdot a = 0$, se $z = 0$.*

Exemplo 2.1.4 (Ideais à esquerda são módulos sobre seus anéis)**.** *Seja R um anel. Um ideal à esquerda I de R pode ser visto como um grupo abeliano com a operação da soma de R, e como para todo $a \in I$ e $r \in R$ temos que $r \cdot a \in I$ (pela multiplicação em R) I é um R-módulo com esta operação.*

Em particular, R é um R-módulo com suas operações usuais.

A partir de então, sempre que falarmos de um R-módulo, estará implícito que R é um anel.

2.2 MORFISMOS DE R-MÓDULOS

Assim como em grupos, anéis e espaços vetoriais, as funções de interesse no estudo de R-módulos são as que preservam sua estrutura.

Definição 2.2.1 (Morfismo entre R-módulos)**.** *Um **morfismo de R-módulos** é uma função $\varphi\colon M_1 \to M_2$ entre dois R-módulos M_1 e M_2, que satisfaz, para todo $r \in R$ e $m, n \in M$,*

1. $\varphi(m+n) = \varphi(m) + \varphi(n)$
2. $\varphi(r \cdot m) = r \cdot \varphi(m)$

Também podemos ver morfismos de R-módulos como morfismos de grupos que satisfazem a propriedade 2. acima, propriedade chamada de R-linearidade.

Exemplo 2.2.2 (Transformações lineares são morfismos de $\mathbb{K}$-módulos)**.** *Dados V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, uma transformação linear T entre eles é um morfismo de $\mathbb{K}$-módulos.*

Exemplo 2.2.3 (Morfismos de grupos abelianos são morfismos de $\mathbb{Z}$-módulos)**.** *Dados A e B grupos abelianos, um um morfismo de grupos φ entre eles é um morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos ao vermos A e B como $\mathbb{Z}$-módulos.*

Note que para um anel R e um R-módulo M, um morfismo de R-módulos $\varphi\colon R \to M$ é definido unicamente por para onde leva a unidade de R, pois, para todo $r \in R$, $\varphi(r) = \varphi(r \cdot 1) = r \cdot \varphi(1)$.

2.3 SUBMÓDULOS E MÓDULOS QUOCIENTE

Definição 2.3.1 (Submódulos)**.** *Seja M um R-módulo. Um R-módulo N é dito um **submódulo** de M se N for um subconjunto de M, e a função inclusão de N em M for um morfismo de R-módulos.*

Alternativamente, N é um submódulo de M se N é um subconjunto de M e sua estrutura de R-módulo provém da estrutura de R-módulo de M, sendo dada pela restrição das operações de M a N.

Exemplo 2.3.2 (Ideais são submódulos de seus anéis)**.** *Dados R um anel, e I um ideal à esquerda de R, sabemos que I e R são R-módulos. Temos, também, que I é um submódulo de R.*

Sejam M um R-módulo e N um submódulo de M. Dizemos que dois elementos de M, m_1 e m_2 são congruentes mod N se $m_1 - m_2 \in N$, ou seja, $m_1 \equiv m_2 \pmod{N}$ se $m_1 - m_2 \in N$. Esta relação de congruência mod N forma uma relação de equivalência. Seja M/N o conjunto de classes de congruência mod N, e para cada $m \in M$ denotemos por $[m] = \{m' \in M : m' \equiv m \pmod{N}\}$ a classe de equivalência que m representa.

Definição 2.3.3 (Módulo Quociente)**.** *Sejam M um R-módulo e N um submódulo de M. Definimos em M/N as operações, para $m, n \in M$ e $r \in R$, $[m]+[n] = [m+n]$, $r \cdot [m] = [r \cdot m]$. Estas operações estão bem definidas e junto de M/N formam um R-módulo. Este R-módulo é chamado o **módulo quociente** de M por N.*

Para $\mathbb{Z}$-módulos, os módulos quociente são justamente os quocientes de grupo da teoria de grupos.

Note que estas definições são idênticas às feitas para grupos. Assim como na teoria de grupos, dado um anel R, podemos definir produtos de R-módulos como o produto cartesiano dos conjuntos. Também, podemos definir o conjunto kernel de um morfismo de R-módulos da mesma forma que em grupos, e este será devidamente um R-módulo por si só.

3 CATEGORIAS

Teoria de categorias será a base para todo este trabalho. Sendo assim, trarei neste capítulo todos os conceitos envolvendo teoria de categorias que serão necessários para o que faremos.

3.1 CATEGORIAS

Definição 3.1.1 (Categoria)**.** *Uma **categoria** é uma tripla* $(\mathscr{C}, Hom, \circ)$*, onde*

- $\mathscr{C}$ *é uma classe, chamada **classe de objetos**.*
- *Hom é uma classe de conjuntos associados unicamente a cada par ordenado de elementos de* $\mathscr{C}$*.*

  Denotamos o conjunto associado ao par de objetos $(A, B) \in \mathscr{C} \times \mathscr{C}$ *por* $Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$*, ou por* $(A, B)_{\mathscr{C}}$*, e este é chamado o **conjunto de morfismos** entre os objetos A e B. Quando a categoria estiver implícita pelo contexto, muitas vezes utilizaremos apenas* $Hom(A, B)$ *ou* (A, B)*. Não haverá mais ocasiões neste trabalho em que veremos* (A, B) *como um par ordenado de objetos, de modo que esta última notação não gerará conflitos.*

  Um elemento $f \in (A, B)_{\mathscr{C}}$ *também será denotado da forma* $A \xrightarrow{f} B$*. Caso digamos que* $A \xrightarrow{f} B$ *é um morfismo de* $\mathscr{C}$*, estará subentendido que* f *é um elemento de* $(A, B)_{\mathscr{C}}$*. Quando estivermos tratando apenas de um morfismo de* $(A, B)_{\mathscr{C}}$*, por vezes seguiremos apenas com a notação* $A \longrightarrow B$*.*

  Diremos também que, para $f \in (A, B)_{\mathscr{C}}$*, A é o domínio de* f *e B é o contradomínio de* f*.*

- $\circ$ *é uma classe de operações associadas a cada tripla ordenada de elementos de* $\mathscr{C}$*.*

  Dada uma tripla de objetos $(A, B, C) \in \mathscr{C} \times \mathscr{C} \times \mathscr{C}$*, a associamos à operação, que levará a mesma notação de sua classe,* $\circ \colon (A, B)_{\mathscr{C}} \times (B, C)_{\mathscr{C}} \to (A, C)_{\mathscr{C}}$*.*

  Para $f \in (A, B)_{\mathscr{C}}$ *e* $g \in (B, C)_{\mathscr{C}}$*, denotaremos* $\circ(f, g)$ *por* $g \circ f$ *ou simplesmente* gf*, e diremos que esta é a composição de* g *com* f*. Neste caso, usando a notação de morfismos com setas, escrevemos também esta composição como* $A \xrightarrow{gf} C = A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

E esta tripla deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. *Para cada tripla de morfismos* $A \xrightarrow{f} B$*,* $B \xrightarrow{g} C$ *e* $C \xrightarrow{h} D$*, temos que* $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ *(de modo que podemos denotar composições de três ou mais morfismos sem nos preocupar com parenteses).*
2. *Para cada* $A \in \mathscr{C}$ *existe um morfismo* $1_A \in (A, A)_{\mathscr{C}}$ *tal que para todo* $B \in \mathscr{C}$*, e* $f \in (A, B)_{\mathscr{C}}$ *e* $g \in (B, A)_{\mathscr{C}}$*, temos que* $f \circ 1_A = f$ *e* $1_A \circ g = g$*.*

Neste caso, e caso não gere confusão, também diremos apenas que $\mathscr{C}$ é uma categoria.

O conceito de categorias é, de certa forma, uma generalização de várias outras teorias. Os exemplos dados abaixo ilustram isto.

Exemplo 3.1.2 (Set)**.** *A categoria cuja classe de objetos é a classe de todos os conjuntos, tal que para cada par A, B de conjuntos, $Hom(A, B)$ é o conjunto de funções com domínio A e contradomínio B, e com a operação de composição usual de funções, é chamada a categoria de conjuntos, e denotamos ela por Set.*

Exemplo 3.1.3 (Grp)**.** *Temos uma categoria cuja classe de objetos é formada por todos os grupos, e os morfismos são os morfismos entre grupos, e, é claro, a composição é a composição usual destes morfismos de grupo. Esta categoria é chamada a categoria de grupos, e a denotamos por Grp.*

Exemplo 3.1.4 (R-mod)**.** *Dado um anel R, a categoria formada pelos R-módulos e morfismos de R-módulos é chamada a categoria de R-módulos e a denotamos por R-mod.*

De forma similar, há categorias para vários tipos de estruturas, como Ring, formada por anéis e morfismos de anéis, Ab, formada por grupos abelianos e morfismos de grupos, Top, formada por espaços topológicos e funções contínuas, dentre muitas outras.

Como notamos antes, grupos abelianos são $\mathbb{Z}$-módulos e morfismos entre grupos abelianos são morfismos entre $\mathbb{Z}$-módulos. Assim, Ab pode ser vista como justamente a mesma categoria que $\mathbb{Z}$-mod.

Em todos os exemplos dados temos que os objetos das categorias envolvem conjuntos, e os morfismos são funções entre estes conjuntos, mas nem todas as categorias são assim.

Na verdade, a ideia de categorias é não se importar com as características dos objetos, mas sim apenas com o modo que os morfismos se comportam entre si, utilizando os objetos mais como um meio para indicar onde os morfismos se encontram.

Por exemplo, podemos definir uma categoria em que os objetos são números inteiros, e os conjuntos de morfismos são dados da seguinte forma: dados $n, m \in \mathbb{N}$, o conjunto de morfismos (n, m) é um conjunto com exatamente um elemento caso n divida m, e o conjunto vazio caso contrário.

Apesar disto, é claro que utilizar as características dos objetos para formular demonstrações é bastante útil. Uma das motivações para o Teorema de Freyd-Mitchell se relaciona intimamente com esta ideia.

Mas falaremos disto em seu tempo. Vejamos então vários conceitos importantes relacionados a categorias.

Um **diagrama** em uma categoria $\mathscr{C}$ é uma ilustração formada por objetos de $\mathscr{C}$ e morfismos entre estes objetos, os representando como flechas entre estes objetos. Dados dois objetos A e B num diagrama, um caminho entre A e B é uma sequência finita de morfismos no diagrama que começa em A e termina em B, e cujo domínio de um morfismo é o contradomínio do anterior (ou seja, podemos compôr os morfismos da sequência para obter um morfismo de A para B).

Dizemos que um diagrama em $\mathscr{C}$ é **comutativo** se para quaisquer dois objetos no diagrama temos que a composição dos morfismos de qualquer caminho entre estes objetos nos dá o mesmo morfismo.

Como exemplos, um diagrama da forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

é comutativo se $A \longrightarrow B \longrightarrow D = A \longrightarrow C \longrightarrow D$, e um diagrama da forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ & C \\ B \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

é comutativo se $A \longrightarrow C = A \longrightarrow B \longrightarrow C$.

Estes serão os principais diagramas que veremos, e os utilizarei especialmente para descrever igualdades de uma forma mais intuitiva.

Diagramas maiores podem acabar dando um trabalho maior de se demonstrar que todo caminho é o mesmo para mostrar sua comutatividade, mas não é difícil de se verificar que no fim basta checar a comutatividade dos diagramas formados pelos polígonos menores no diagrama, cuja verificação de comutatividade é feita com uma simples equação como as dos exemplos acima.

Muitos dos conceitos que veremos envolverão propriedades que podem ser demonstradas apenas por inverter as setas de morfismos em outra demonstração já feita. Para formalização disto serão definidas agora categorias duais e propriedades duais.

Definição 3.1.5 (Categoria Dual)**.** *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. A **categoria dual**, ou **categoria oposta** de $\mathscr{C}$, denotada por $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, é a categoria cujos objetos são os objetos de $\mathscr{C}$ e para cada par de objetos A e B temos que $(A,B)_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ é o conjunto $(B,A)_{\mathscr{C}}$.*

Para dois morfismos $A \xrightarrow{f} B$ e $B \xrightarrow{g} C$ em $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, a composição $g \circ_{\mathrm{op}} f$ em $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ é dada pelo morfismo $f \circ g$ dado pela composição em $\mathscr{C}$

A categoria dual de uma categoria $\mathscr{C}$ é, de forma intuitiva, a categoria $\mathscr{C}$, mas com as setas trocando de direção. Por simplicidade, denotaremos $(A,B)_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ como $(A,B)_{\mathrm{op}}$ nos casos em que a categoria em questão está implícita.

Definição 3.1.6 (Propriedades duais)**.** *Seja P uma propriedade envolvendo objetos, morfismos e suas composições em uma categoria arbitrária $\mathscr{C}$. A **propriedade dual** de P, denotada por P^*, é a propriedade tal que para toda categoria $\mathscr{C}$ temos que P^* é verdadeira em $\mathscr{C}$ se, e somente se, P é verdadeira em $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$.*

Informalmente, P^* pode ser lida como a propriedade P em que trocamos a direção de todos os morfismos descritos e trocamos todos os conceitos por seus conceitos duais. Veremos vários exemplos de conceitos duais nas próximas seções.

A utilidade de se considerar propriedades e conceitos duais é elucidada na seguinte proposição:

Proposição 3.1.7. *Seja P uma proposição válida em qualquer categoria. Assim, P^* também é válida em qualquer categoria.*

Demonstração. Nas hipóteses acima, seja $\mathscr{C}$ uma categoria qualquer. Assim, $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ é também uma categoria, e, portanto, P é válida em $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$. Por definição, então, temos que P^* é válida em $\mathscr{C}$. $\square$

Assim, a demonstração de proposições duais a uma proposição feita numa categoria arbitrária segue imediatamente da demonstração da própria proposição e do resultado acima. Neste caso, diremos que a proposição segue **dualmente**.

3.2 MONOMORFISMOS, EPIMORFISMOS E ISOMORFISMOS

Nesta e nas próximas seções deste capítulo estaremos em uma categoria $\mathscr{C}$ arbitrária.

Definição 3.2.1 (Monomorfismo)**.** *Um morfismo $A \xrightarrow{f} B$ é dito um **monomorfismo** se para quaisquer morfismos $A' \xrightarrow{x} B$ e $A' \xrightarrow{y} B$ tais que $f \circ x = f \circ y$ temos que $x = y$. Ou seja, temos que o seguinte diagrama comuta:*

$$A' \underset{y}{\overset{x}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$$

Definição 3.2.2 (Epimorfismo)**.** *Um morfismo $A \xrightarrow{f} B$ é dito um **epimorfismo** se para quaisquer morfismos $B \xrightarrow{x} B'$ e $B \xrightarrow{y} B'$ tais que $x \circ f = y \circ f$ temos que $x = y$. Ou seja, temos que o seguinte diagrama comuta:*

$$A \xrightarrow{f} B \underset{y}{\overset{x}{\rightrightarrows}} B'$$

Em Set, por exemplo, os monomorfismos são justamente as funções injetivas, os epimorfismos as funções sobrejetivas. Similarmente, em Grp, Ab e R-mod, seus monomorfismos e epimorfismos são, respectivamente, seus morfismos injetivos e sobrejetivos.

Apesar disto, em Ring, por exemplo, nem todo epimorfismo é sobrejetivo: a inclusão ι de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ é um contraexemplo, pois se f e g são morfismos de anéis tais que $f \circ \iota = g \circ \iota$, temos que $f(n) = g(n)$ para todo inteiro n em $\mathbb{Q}$, de modo que para $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, com $n, m \in \mathbb{Z}$, temos que $f(q) = f(\frac{n}{m}) = \frac{f(n)}{f(m)} = \frac{g(n)}{g(m)} = g(\frac{n}{m}) = g(q)$, e, portanto, $f = g$, de forma que ι é um epimorfismo, mas ι claramente não é sobrejetivo.

Em quaisquer categorias, é fácil ver que os morfismos identidade de quaisquer objetos são monomorfismos e epimorfismos.

Monomorfismos e epimorfismos são um primeiro exemplo de conceitos duais: $A \xrightarrow{f} B$ é um monomorfismo numa categoria $\mathscr{C}$ se, e somente se, este é um epimorfismo em $\mathscr{C}^{\text{op}}$.

Haverá vários outros exemplos importantes de conceitos duais, e os explicitarei, mas evitarei passar por demonstrações de que são conceitos duais, pois estas são usualmente intuitivas e não muito difíceis, apenas potencialmente trabalhosas e longas.

Proposição 3.2.3. *Sejam $A \xrightarrow{g} B$ e $B \xrightarrow{f} C$ dois morfismos.*

- *Se $f \circ g$ é um monomorfismo, então g é um monomorfismo.*
- *Se $f \circ g$ é um epimorfismo, então f é um epimorfismo.*

Demonstração. Mostrarei apenas para o caso do monomorfismo, pois para o epimorfismo segue dualmente. Suponhamos então que $f \circ g$ é um monomorfismo.

Sejam x e y morfismos tais que $g \circ x = g \circ y$. Assim, temos que a composição com f é tal que $f \circ g \circ x = f \circ g \circ y$. Como $f \circ g$ é um monomorfismo, $x = y$. Assim, g é então um monomorfismo. □

Definição 3.2.4 (Isomorfismo)**.** *Um morfismo $A \longrightarrow B$ é dito um* ***isomorfismo*** *se existe um morfismo $B \longrightarrow A$ tal que*

$$A \longrightarrow B \longrightarrow A = A \xrightarrow{1_A} A$$

e

$$B \longrightarrow A \longrightarrow B = B \xrightarrow{1_B} B$$

Neste caso, dizemos que A e B são ***isomorfos****.*

Como exemplos, em Set, Grp, Ab e R-mod, os isomorfismos são as funções bijetivas.

Em quaisquer categorias, os morfismos identidades são isomorfismos, cujo inverso são eles mesmos.

Isomorfismo é um conceito dual consigo mesmo. Ou seja, f é um isomorfismo numa categoria se, e somente se, f é um isomorfismo na categoria dual desta.

Proposição 3.2.5. *Seja $A \xrightarrow{\varphi} B$ um morfismo, e suponha que existem $B \xrightarrow{\psi} A$ e $B \xrightarrow{\psi'} A$ tais que $\psi \circ \varphi = 1_A$ e $\varphi \circ \psi' = 1_B$. Assim, $\psi = \psi'$ e φ é um isomorfismo.*

Demonstração. Basta fazer a composição em alguma das equações: $\psi = \psi \circ 1_B = \psi \circ \varphi \circ \psi' = 1_A \circ \psi' = \psi'$. Segue, então, diretamente que φ é um isomorfismo □

Em particular, podemos ver que se φ é um isomorfismo, então o morfismo que satisfaz as igualdades na definição de isomorfismo é único. Deste modo, damos a notação φ^{-1} para este morfismo, e o chamamos de morfismo inverso de φ. É fácil ver que φ^{-1} é também um isomorfismo cujo inverso é φ.

Nem sempre é verdade que todo morfismo que é um monomorfismo e um epimorfismo é também um isomorfismo como ocorre em Set: a inclusão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ na categoria Ring vista anteriormente é um monomorfismo e um epimorfismo que não é um isomorfismo. Mas o contrário é sempre válido:

Proposição 3.2.6. *Todo isomorfismo é um monomorfismo e um epimorfismo.*

Demonstração. Seja φ um isomorfismo, e x e y dois morfismos tais que $\varphi \circ x = \varphi \circ y$. Assim, compondo com o inverso de φ, temos que

$$x = 1 \circ x = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ x = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ y = 1 \circ y = y$$

De modo que φ é um monomorfismo. Similarmente, vemos que é um epimorfismo. □

3.3 SUBOBJETOS E OBJETOS QUOCIENTE

Definição 3.3.1 (Continência e equivalência de monomorfismos)**.** *Dados dois monomorfismos $A_1 \xrightarrow{\iota_1} B$ e $A_2 \xrightarrow{\iota_2} B$, dizemos que ι_1 está* ***contido*** *em ι_2 (ou que ι_2* ***contém*** *ι_1), e denotamos isto por $\iota_1 \subseteq \iota_2$, se existe um morfismo $A_1 \longrightarrow A_2$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[d] \arrow[dr, hook, "\iota_1"] & \\ & B \\ A_2 \arrow[ur, hook, "\iota_2"'] & \end{tikzcd}$$

comuta.

Os monomorfismos $A_1 \xrightarrow{\iota_1} B$ e $A_2 \xrightarrow{\iota_2} B$ são ditos ***equivalentes*** *se $\iota_1 \subseteq \iota_2$ e $\iota_2 \subseteq \iota_1$, e denotamos $\iota_1 \cong \iota_2$.*

Note que, seguindo a notação da definição, se $\iota_1 \subseteq \iota_2$, segue da proposição 3.2.3 que $A_1 \longrightarrow A_2$ é um monomorfismo, pois sua composição com ι_2 o é.

Proposição 3.3.2. *Se $A_1 \xrightarrow{\iota_1} B$ e $A_2 \xrightarrow{\iota_2} B$ são equivalentes, então A_1 é isomorfo a A_2. Neste caso, os morfismos dados pelas continências são isomorfismos entre A_1 e A_2.*

Demonstração. Da equivalência dos morfismos, como um está contido no outro, segue que existem morfismos $A_2 \longrightarrow A_1$ e $A_1 \longrightarrow A_2$ tais que

$$A_2 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\iota_1} B = A_2 \xrightarrow{\iota_2} B$$

e

$$A_1 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\iota_2} B = A_1 \xrightarrow{\iota_1} B$$

Assim,

$$A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\iota_1} B = A_1 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\iota_2} B = A_1 \xrightarrow{\iota_1} B = A_1 \xrightarrow{1_{A_1}} A_1 \xrightarrow{\iota_1} B$$

Como ι_1 é um monomorfismo, temos então que

$$A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_1 = A_1 \xrightarrow{1_{A_1}} A_1$$

Similarmente temos que $A_2 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 = A_2 \xrightarrow{1_{A_2}} A_2$, de modo que os morfismos são inversos e A e B são, portanto, isomorfos. □

A relação $\cong$ entre monomorfismos para um objeto B forma uma relação de equivalência na classe formada pelos monomorfismos com contradomínio B. Com esta relação de equivalência, definimos subobjetos:

Definição 3.3.3 (Subobjetos)**.** *Um* ***subobjeto*** *de um objeto B é uma classe de equivalência $[A \xrightarrow{\iota} B] \coloneqq \{A \xrightarrow{\iota'} B : \iota' \text{ é monomorfismo}, \iota' \cong \iota\}$ de monomorfismos com contradomínio B.*

Podemos pensar nos subobjetos como uma generalização de subconjuntos, subgrupos e submódulos para categorias mais abstratas, e, de fato, estes são, de certo modo, os subobjetos de suas respectivas categorias. Por exemplo,

Exemplo 3.3.4 (Subobjetos de Grp são os subgrupos)**.** *Se G é um objeto de Grp (ou seja, um grupo), então a inclusão de um subgrupo G' em G é um monomorfismo em Grp e representa uma classe de equivalência de um subobjeto de G.*

E, por outro lado, se $H \xrightarrow{\iota} G$ é um representante de um subobjeto de G, então ι é equivalente à inclusão do subgrupo $\iota(H)$ em G, de forma que esta inclusão representa a mesma classe.

Como um abuso de notação, dado um monomorfismo $B' \xrightarrow{\iota} B$, e considerando o subobjeto $[\iota]$ de B, muitas vezes diremos que ι é este subobjeto de B. Quando este monomorfismo puder ficar implícito, também diremos que B' é este subobjeto de B. Tomaremos cuidado com isto caso hajam monomorfismos distintos para B com mesmo domínio para evitar conflitos de notação, é claro.

Para cada objeto A, seu morfismo identidade, 1_A, é um monomorfismo. Ficará sempre implícito que, caso falemos de A como um subobjeto de A, este é o subobjeto representado por 1_A.

Definimos a continência de subobjetos pela continência de seus monomorfismos representantes. Ou seja, dizemos que o subobjeto representado por ι_1 está contido no subobjeto representado por ι_2 se $\iota_1 \subseteq \iota_2$ como monomorfismos, dando a mesma notação $\iota_1 \subseteq \iota_2$ ao os vermos como subobjetos. É possível ver que esta relação de continência não depende dos representantes escolhidos.

Podemos notar facilmente que, vendo ι_1 e ι_2 como subobjetos, se $\iota_1 \subseteq \iota_2$ e $\iota_2 \subseteq \iota_1$ então $\iota_1 = \iota_2$.

Note que se A_1 e A_2 são subobjetos de algum objeto A com $A_1 \subseteq A_2$, então podemos ver A_1 como um subobjeto do objeto A_2 com o monomorfismo que comuta o diagrama da continência dos monomorfismos que representam os subobjetos A_1 e A_2. De fato, assumiremos que este seja o caso ao vermos A_1 como um subobjeto de A_2 em situações como esta.

Assim como para subconjuntos de um conjunto, temos também uma noção de uniões e intersecções de subobjetos.

Definição 3.3.5 (Intersecção de Subobjetos)**.** *Dados dois subobjetos B_1 e B_2 de um objeto B, dizemos que sua **intersecção**, $B_1 \cap B_2$, é o maior subobjeto de B que está contido em B_1 e B_2, caso exista.*

Ou seja, $B_1 \cap B_2$ está contido em B_1 e B_2, e todo subobjeto que está contido em B_1 e B_2 também está contido em $B_1 \cap B_2$.

Definição 3.3.6 (União de Subobjetos)**.** *Dados dois subobjetos B_1 e B_2 de um objeto B, dizemos que sua **união**, $B_1 \cup B_2$, é o menor subobjeto de B que contém B_1 e B_2, caso exista.*

Ou seja, $B_1 \cup B_2$ contém B_1 e B_2, e todo subobjeto que contém B_1 e B_2 também contém $B_1 \cup B_2$.

Em Set, estas serão as respectivas intersecções e uniões de subconjuntos (considerando, é claro, as inclusões destes como representantes da classe dos subobjetos). Em Grp, a intersecção será a intersecção usual de conjuntos, pois uma intersecção de subgrupos continuará sendo um subgrupo, mas a união pode não ser tão trivial (por exemplo, para o grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, seu único subgrupo contendo $\mathbb{Z} \times 0$ e $0 \times \mathbb{Z}$ é $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, mas esta não é a união dos dois vistos como conjuntos).

Expandimos estas definições para uniões e intersecções arbitrárias de subobjetos.

Definição 3.3.7. *Dada uma família de subobjetos $\{B_i\}_I$ de um objeto B, dizemos que sua intersecção, $\cap_I B_i$, é o maior subobjeto de B que está contido em B_i para todo $i \in I$, caso exista.*

Definição 3.3.8. *Dada uma família de subobjetos $\{B_i\}_I$ de um objeto B, dizemos que sua união, $\cup_I B_i$, é o menor subobjeto de B que contém B_i para todo $i \in I$, caso exista.*

O conceito dual de subobjetos é o de objetos quociente.

Definição 3.3.9 (Continência e equivalência de epimorfismos)**.** *Dados dois epimorfismos $B \xrightarrow{\pi_1} A_1$ e $B \xrightarrow{\pi_2} A_2$, dizemos que π_1 está* ***contido*** *em π_2 (ou que π_2* ***contém*** *π_1), e denotamos isto por $\pi_1 \subseteq \pi_2$, se existe um morfismo $A_2 \longrightarrow A_1$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & A_1 \\ B \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\ & A_2 \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

comuta.

Os epimorfismos $B \xrightarrow{\pi_1} A_1$ e $B \xrightarrow{\pi_2} A_2$ são ditos equivalentes se $\pi_1 \subseteq \pi_2$ e $\pi_2 \subseteq \pi_1$, e denotamos $\pi_1 \cong \pi_2$.

Note que a direção do morfismo entre A_1 e A_2 é contrária à da continência entre monomorfismos. Algo que me ajuda a lembrar disto é pensar que, neste caso como um exemplo, A_1 deve estar, de certo modo, mais longe de B que A_2.

A relação $\cong$ entre dois epimorfismos com o mesmo domínio, assim como a vista com monomorfismos, é uma relação de equivalência, e nos leva à definição de objetos quociente.

Definição 3.3.10. *Um* ***objeto quociente*** *de um objeto A é uma classe de equivalência $[A \xrightarrow{\pi} B] := \{A \xrightarrow{\pi'} B : \pi' \text{ é epimorfismo}, \pi' \cong \pi\}$ de epimorfismos com domínio A.*

Definimos então continência, uniões e intersecções de objetos quociente assim como feito com subobjetos, apenas utilizando esta continência de epimorfismos para isto.

Assim como com subobjetos, por vezes veremos também o próprio epimorfismo, ou o objeto em seu contradomínio, como o objeto quociente que este representa. Usualmente também diremos que o objeto quociente A de um objeto A é o objeto quociente representado por 1_A.

Em Ab (e R-mod), por exemplo, os objetos quociente são os grupos quociente:

Exemplo 3.3.11. *Dado um grupo abeliano M e um epimorfismo π, então se K é o subgrupo dado pelo kernel de π, temos pelo Teorema do Isomorfismo que o contradomínio de π é isomorfo a M/K. Podemos ver que π representa o mesmo objeto quociente que o morfismo quociente de M para M/K.*

3.4 OBJETOS ZERO, KERNELS E COKERNELS

Definição 3.4.1 (Objeto Zero)**.** *Um* ***objeto zero****, é um objeto, usualmente denotado por 0, tal que para todo objeto A temos que os conjuntos de morfismos $(A, 0)$ e $(0, A)$ possuem exatamente um elemento.*

Em Grp, por exemplo, o grupo com apenas um elemento será um objeto zero. Objetos zero nem sempre existem: em Set, por exemplo, os conjuntos unitários da forma $\{*\}$ são os únicos que satisfazem a condição de que para todo conjunto A temos que $(A, \{*\})$ possui exatamente um elemento, mas se A possui, por exemplo, dois elementos, então $(\{*\}, A)$ possui dois elementos também.

Para cada objeto A, o único morfismo $0 \longrightarrow A$ é claramente um monomorfismo e o único morfismo $A \longrightarrow 0$ um epimorfismo.

Objetos zero, assim como isomorfismos, são duais consigo mesmos.

Proposição 3.4.2. *Objetos zero são isomorfos.*

Demonstração. Sejam 0_1 e 0_2 dois objetos zero. Assim, $(0_1, 0_2)$ e $(0_2, 0_1)$ possuem exatamente um elemento, digamos f e g, respectivamente. A composição $f \circ g$ deve ser um elemento de $(0_2, 0_2)$, mas este conjunto também possui exatamente um elemento, e este elemento é 1_{0_2}, de forma que $f \circ g = 1_{0_2}$.

Similarmente, $g \circ f = 1_{0_1}$, e f e g são isomorfismos, de forma que 0_1 e 0_2 são isomorfos. □

Proposição 3.4.3. *Se um objeto A é isomorfo a um objeto zero, então A é também um objeto zero.*

Demonstração. Seja φ um isomorfismo entre A e um objeto zero 0, com inverso ψ. Assim, dado um objeto B qualquer, suponha que $A \xrightarrow{f} B$ e $A \xrightarrow{g} B$ são morfismos em (A, B).

Note que $f = f \circ \psi \circ \varphi = g \circ \psi \circ \varphi = g$, com a segunda igualdade dada pois $f \circ \psi$ e $g \circ \psi$ são o único morfismo de 0 para B. Com isto, há no máximo um elemento em (A, B).

De fato, há exatamente um elemento em (A, B) pois, por exemplo, $A \longrightarrow 0 \longrightarrow B$ é um morfismo neste conjunto.

De forma similar, vemos que (B, A) também possui exatamente um elemento, e A é, portanto, um objeto zero como desejado. □

O subobjeto e o objeto quociente representados pelos morfismos respectivamente saindo e entrando em um objeto zero são chamados de **subobjeto nulo** e **objeto quociente nulo**. É fácil ver que o subobjeto nulo está contido em todo outro subobjeto de um dado objeto, e que o mesmo vale para o objeto quociente nulo. Denotaremos, usualmente, estes subobjeto e objeto quociente ambos por 0.

Em categorias com um objeto zero, podemos também definir morfismos zero.

Definição 3.4.4 (Morfismo Zero)**.** *Suponha que $\mathscr{C}$ possui um objeto zero, e sejam A e B objetos em $\mathscr{C}$. O **morfismo zero** entre A e B, denotado por $A \xrightarrow{0} B$, é o único morfismo que se fatora pelo objeto zero. Ou seja, $A \xrightarrow{0} B = A \longrightarrow 0 \longrightarrow B$.*

É fácil de se mostrar que este morfismo independe do objeto zero em questão.

Também podemos ver facilmente que a composição de um morfismo zero com qualquer outro morfismo será também um morfismo zero.

Notamos ainda que um objeto é um objeto zero se, e somente se, sua identidade for um morfismo zero, pois, caso a identidade seja um morfismo zero, os morfismos de sua fatoração pelo objeto zero serão isomorfismos.

Podemos definir kernels e cokernels de morfismos em categorias com um objeto zero.

Definição 3.4.5 (Kernel)**.** *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria com um objeto zero. Um **kernel** de um morfismo $A \xrightarrow{f} B$ é um morfismo $K \xrightarrow{k} A$ tal que*

1. $K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{f} B = K \xrightarrow{0} B$

2. *Se $K' \xrightarrow{x} A$ é um morfismo tal que $K' \xrightarrow{x} A \xrightarrow{f} B = K' \xrightarrow{0} B$, temos que existe um único morfismo $K' \xrightarrow{x'} K$ tal que $x = k \circ x'$. Ou seja, tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ K' \arrow[u, dashed, "x'"] \arrow[ur, "x"'] & & \end{tikzcd}$$

Em outras palavras, devemos ter que x se fatora de forma única por k.

Definição 3.4.6 (Cokernel)**.** *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria com um objeto zero. Um **cokernel** de um morfismo $A \xrightarrow{f} B$ é um morfismo $B \xrightarrow{c} C$ tal que*

1. $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{c} C = A \xrightarrow{0} C$

2. *Se $B \xrightarrow{x} C'$ é um morfismo tal que $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{x} C' = A \xrightarrow{0} C'$, temos que existe um único morfismo $C \xrightarrow{x'} C'$ tal que $x = x' \circ c$. Ou seja, tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "x"'] & C \arrow[d, dashed, "x'"] \\ & & C' \end{tikzcd}$$

Em outras palavras, devemos ter que x se fatora de forma única por c.

Kernels e cokernels, assim como monomorfismos e epimorfismos, são conceitos duais.

Proposição 3.4.7. *Kernels são monomorfismos e cokernels são epimorfismos.*

Demonstração. Mostrarei apenas para kernels, pois para cokernels é dual.

Seja k um kernel de algum morfismo f. Sejam então x e y dois morfismos tais que $k \circ x = \varphi = k \circ y$. Bem, como $f \circ \varphi = f \circ k \circ x = 0 \circ x = 0$, segue que existe um único morfismo k' tal que $\varphi = k \circ k'$. Agora, $\varphi = k \circ x$ e $\varphi = k \circ y$. Assim, pela unicidade do morfismo que satisfaz isto, segue que $x = y$, e k é, portanto, um monomorfismo como desejado. □

Os kernels de um morfismo $A \longrightarrow B$, caso existam, são monomorfismos equivalentes e representam o mesmo subobjeto de A. Diremos que este subobjeto é **o** kernel de $A \longrightarrow B$, e o denotamos por $\mathrm{Ker}(A \longrightarrow B)$. Também, se um monomorfismo é um representante do kernel de $A \longrightarrow B$, este também será um kernel deste morfismo.

Neste caso, podemos ver que o kernel é o maior subobjeto cuja composição de seus monomorfismos representantes com $A \longrightarrow B$ é zero. Note que estou falando apenas de um caso em que o kernel existe. Não é necessariamente verdade que o maior subobjeto de A satisfazendo isto será o kernel.

Similarmente, os cokernels de um morfismo são epimorfismos equivalentes representantes do mesmo objeto quociente de B, e diremos que este objeto quociente é **o** cokernel de $A \longrightarrow B$, o denotando por $\mathrm{Cok}(A \longrightarrow B)$. E se um epimorfismo é um representante do cokernel de $A \longrightarrow B$, então ele será um cokernel deste morfismo.

E, é claro, neste caso o cokernel será o maior objeto quociente cuja composição de seus epimorfismos representantes com $A \longrightarrow B$ é zero.

Em Ab, os kernels de um morfismo são os subobjetos representados pela inclusão do kernel de morfismo de grupo no domínio do morfismo, e os cokernels são a projeção do contradomínio no grupo quociente do contradomínio pela imagem do morfismo.

Proposição 3.4.8. *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria com um objeto zero, e seja $A \xrightarrow{f} B$ um morfismo. Assim,*

1) *Se f é um monomorfismo, então seu kernel existe e $\mathrm{Ker}(f) = 0$.*

1*) *Se f é um epimorfismo, então seu cokernel existe e $\mathrm{Cok}(f) = 0$.*

Demonstração. Demonstrarei apenas 1), pois 1*) é seu dual.

Que $0 \longrightarrow A$ é tal que $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B = 0$ é claro.

Seja então g um morfismo tal que $f \circ g = 0$. Assim, $f \circ g = 0 = f \circ 0$, de modo que como f é um monomorfismo temos que $g = 0$. Como g é um morfismo zero, g em particular se fatora por $0 \longrightarrow A$, e este é o kernel de f, como desejado. □

As recíprocas de 1) e de 1*) não são necessariamente verdadeiras em uma categoria qualquer. Veremos, entretanto, que são em uma categoria abeliana.

Proposição 3.4.9. *Sejam $A \xrightarrow{f} B$ um morfismo, $B \xrightarrow{\iota} I$ um monomorfismo, e $P \xrightarrow{\pi} A$ um epimorfismo. Assim, um morfismo k é um kernel de f se, e somente se, é um kernel de $\iota \circ f$, e um morfismo c é um cokernel de f se, e somente se, é um cokernel de $f \circ \pi$.*

Demonstração. Mostrarei apenas para o kernel, pois para o cokernel é dual.

Bem, note que para todo morfismo $X \xrightarrow{x} A$ temos que $f \circ x = 0$ se, e somente se, $\iota \circ f \circ x = 0$, já que ι é um monomorfismo.

Com isto, se k é um kernel de f, $\iota \circ f \circ k = 0$, e, se x é tal que $\iota \circ f \circ x = 0$, temos que $f \circ x = 0$ e, portanto, x se fatora de forma única por k, e k é então um kernel de $\iota \circ f$.

Por outro lado, se k é um kernel de $\iota \circ f$, temos que $f \circ k = 0$, e, se x é tal que $f \circ x = 0$, temos que $\iota \circ f \circ x = 0$ e, portanto, x se fatora de forma única por k, e k é um kernel de f. □

Proposição 3.4.10. *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria com um objeto zero, e seja $A \xrightarrow{0} B$ um morfismo zero. Assim, $\mathrm{Ker}(A \xrightarrow{0} B) = 1_A$ e $\mathrm{Cok}(A \xrightarrow{0} B) = 1_B$.*

Demonstração. Basta ver que $0 \circ 1_A = 0$, e que todo morfismo se fatora por 1_A, e similarmente para o cokernel. □

3.5 EQUALIZADORES E COEQUALIZADORES

Definição 3.5.1 (Equalizador)**.** *Sejam $A \xrightarrow{f} B$ e $A \xrightarrow{g} B$ dois morfismos. Um* ***equalizador*** *de f e g é um morfismo $K \xrightarrow{k} A$ tal que*

1. $f \circ k = g \circ k$

2. *Se $K' \xrightarrow{x} A$ é um morfismo tal que $f \circ x = g \circ x$, temos que existe um único morfismo $K' \xrightarrow{x'} K$ tal que $x = k \circ x'$. Ou seja, tal que o triângulo no seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ K' \arrow[u, dashed, "x'"] \arrow[ur, "x"'] & & \end{tikzcd}$$

Em outras palavras, devemos ter que x se fatora de forma única por k.

Definição 3.5.2 (Coequalizador)**.** *Sejam $A \xrightarrow{f} B$ e $A \xrightarrow{g} B$ dois morfismos. Um* ***coequalizador*** *de f e g é um morfismo $B \xrightarrow{c} C$ tal que*

1. *$c \circ f = c \circ g$*
2. *Se $B \xrightarrow{x} C'$ é um morfismo tal que $x \circ f = x \circ g$, temos que existe um único morfismo $C \xrightarrow{x'} C'$ tal que $x = x' \circ c$. Ou seja, tal que o triângulo no seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "x"'] & C \arrow[d, dashed, "x'"] \\ & & C' \end{tikzcd}$$

Em outras palavras, devemos ter que x se fatora de forma única por c.

Vemos que equalizador e coequalizador possuem uma definição parecida com a de kernel e cokernel, e, de fato, possuem uma relação: dado um morfismo qualquer numa categoria com um objeto zero, seu kernel e seu cokernel são justamente o equalizador e o coequalizador, respectivamente, deste morfismo com o morfismo zero adequado.

Assim como os kernels, os equalizadores de dois morfismos, caso existam, são monomorfismos equivalentes e representam o mesmo subobjeto, de forma que dizemos que este subobjeto é **o** equalizador dos morfismos, e também, se um monomorfismo representa o equalizador, este é um equalizador dos morfismos. Similarmente, vale algo análogo para o objeto quociente representado por um coequalizador.

Equalizadores e coequalizadores são conceitos duais. Denotamos o (subobjeto representado por um) equalizador como Eq(f,g), e o (objeto quociente representado por um) coequalizador como Coeq(f,g).

Em Set, por exemplo, o equalizador de duas funções f e g com mesmo domínio e contradomínio é a inclusão do subconjunto do domínio formado por todos os elementos x tais que $f(x) = g(x)$, já o coequalizador de duas funções em Set é um tanto mais complexo de se descrever.

O equalizador e o coequalizador de dois morfismos f e g em Ab são mais simples de se descrever: são, respectivamente, o kernel e o cokernel do morfismo $f - g$ dado por $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$. Veremos que, na verdade, este é o caso para qualquer categoria abeliana depois de definirmos uma operação de grupo nos conjuntos de morfismos destas categorias.

Em seu livro, Freyd nomeia equalizadores como kernels de diferença, e coequalizadores como cokernels de diferença. Imagino que o parágrafo acima elucide um pouco a razão destes nomes alternativos.

3.6 IMAGENS E COIMAGENS

Definição 3.6.1 (Imagem)**.** *Seja $A \longrightarrow B$ um morfismo. A **imagem** de $A \longrightarrow B$, caso exista, é um subobjeto $I \longrightarrow B$ tal que existe $A \longrightarrow I$ em que $A \longrightarrow I \longrightarrow B = A \longrightarrow B$, e sempre que outro subobjeto satisfaz isto, $I \longrightarrow B$ está contido nele.*

Em outras palavras, a imagem é o menor subobjeto de B tal que $A \longrightarrow B$ se fatora por ele.

Denotamos este subobjeto por Im($A \longrightarrow B$).

Definição 3.6.2 (Coimagem)**.** *Dualmente, a **coimagem** de um morfismo $A \longrightarrow B$, caso exista, é um objeto quociente $A \longrightarrow C$ tal que existe $C \longrightarrow B$ em que $A \longrightarrow C \longrightarrow B = A \longrightarrow B$, e sempre que outro objeto quociente satisfaz isto, $A \longrightarrow C$ está contido nele. A denotamos por Coim($A \longrightarrow B$).*

Em Set as imagens dos morfismos são justamente suas imagens como funções, junto de sua inclusão no contradomínio. As coimagens de morfismos de Set também são suas imagens como funções mas desta vez junto do epimorfismo do domínio para lá.

O mesmo vale para os morfismos de Set, Grp, Ab e R-mod.

3.7 PRODUTOS E SOMAS

Definição 3.7.1. *Sejam A e B dois objetos. Um **produto** de A e B é uma tripla formada por um objeto e dois morfismos, $(P, P \xrightarrow{p_1} A, P \xrightarrow{p_2} B)$, tal que para toda tripla $(X, X \xrightarrow{f} A, X \xrightarrow{g} B)$, temos que existe um único $X \longrightarrow P$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & A \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, dashed] \arrow[dr, "g"'] & P \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \\ & B \end{tikzcd}$$

comuta.

Neste caso, denotamos o morfismo $X \longrightarrow P$ por (f, g)

Definição 3.7.2. *Dualmente, uma **soma** de dois objetos A e B é uma tripla formada por um objeto e dois morfismos, $(S, A \xrightarrow{u_1} S, B \xrightarrow{u_2} S)$, tal que para toda tripla $(X, A \xrightarrow{f} X, B \xrightarrow{g} X)$, temos que existe um único $S \longrightarrow X$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "u_1"'] \arrow[dr, "f"] & \\ S \arrow[r, dashed] & X \\ B \arrow[u, "u_2"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

comuta.

Neste caso, denotamos o morfismo $S \longrightarrow X$ por $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$

Em Set, os produtos cartesianos dos conjuntos, junto das projeções para cada coordenada, formam um produto. E as somas são as uniões disjuntas dos conjuntos, junto das respectivas inclusões.

Em Ab, os produtos diretos dos grupos abelianos, junto das projeções para cada coordenada, formam um produto. Os produtos diretos dos grupos abelianos, nesta categoria, também formam somas, mas junto dos morfismos u_1 e u_2 definidos por $u_1(a) = (a, 0)$ e $u_2(b) = (0, b)$, que chamaremos também de inclusões.

Em Grp, os produtos diretos de grupos também formam produtos, mas as somas são o produto livre de grupos, que não entrarei em detalhes pois foge ao tema do trabalho.

Seguindo a notação da definição, por vezes também diremos que o objeto P é um produto de A e B e o objeto S é uma soma de A e B, quando não for necessário explicitar os morfismos.

Produtos e somas são conceitos duais.

Note que o único morfismo entrando para o produto depende da tripla em questão, e o mesmo vale para o morfismo para a soma. Assim, caso estejamos lidando com produtos/somas distintos dos mesmos objetos, direi a qual produto/soma este morfismo se refere.

Proposição 3.7.3. *Sejam (P, p_1, p_2) e (P', p_1', p_2') dois produtos para os objetos A e B. Assim, P é isomorfo a P'.*

Demonstração. Os morfismos (p_1, p_2), com relação ao produto P' e (p_1', p_2') com relação ao produto P nos dão isomorfismos entre P e P':

Vejamos que $(p_1', p_2') \circ (p_1, p_2) = 1_P$ ao notar que ambos os morfismos comutam o mesmo diagrama dado pelo produto.

Bem, $p_1 \circ (p_1', p_2') \circ (p_1, p_2) = p_1' \circ (p_1, p_2) = p_1$, e $p_2 \circ (p_1', p_2') \circ (p_1, p_2) = p_2' \circ (p_1, p_2) = p_2$. Mas, também, $p_1 \circ 1_P = p_1$ e $p_2 \circ 1_P = p_2$. Com isto, como existe apenas um morfismo que satisfaz estas propriedades, segue que estes morfismos devem ser iguais.

Similarmente, vemos que $(p_1, p_2) \circ (p_1', p_2') = 1_{P'}$, e, portanto, estes são isomorfismos, como era desejado. □

Da mesma forma, os objetos de somas de dois objetos são isomorfos.

Também, por outro lado, se (P, p_1, p_2) é um produto de A e B, e P' é isomorfo a P, com isomorfismo dado por, digamos, $P' \xrightarrow{\varphi} P$, então podemos ver que $(P', p_1 \circ \varphi, p_2 \circ \varphi)$ é também um produto de A e B. E, de forma parecida, um objeto isomorfo a uma soma pode ganhar estrutura de soma.

Denotaremos então, no geral, um produto por $A \times B$ e uma soma por $A + B$, e os morfismos de sua tripla geralmente ficarão implícitos, normalmente seguindo a notação de modo que $(A \times B, p_1, p_2)$ seja um produto e $(A + B, u_1, u_2)$ seja uma soma. (ou seja, ao falarmos de $A \times B$, estaremos assumindo que foi escolhido um produto arbitrário de A e B e denotado seu objeto por $A \times B$ e seus morfismos por p_1 e p_2).

Deste modo, por vezes chamaremos $A \times B$ de **o** produto de A e B e $A + B$ de **a** soma de A e B.

A soma é usualmente, em outros recursos, chamada de coproduto, com notação $A \coprod B$, mas seguiremos com o nome e a notação anterior.

Note que qualquer morfismo φ entrando em um produto (com projeções p_1 e p_2) é igual a $(p_1 \circ \varphi, p_2 \circ \varphi)$, de modo que todo morfismo para um produto pode ser escrito de forma única deste jeito. Similarmente, todo morfismo saindo de uma soma pode ser escrito como $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ para algum x e algum y apropriados.

Dado um produto P e um morfismo para o mesmo, (x, y), se z é tal que a composição $(x, y) \circ z$ está definida, $(x, y) \circ z$ é um morfismo com contradomínio P, e vemos que é igual a $(x \circ z, y \circ z)$. Similarmente, $z \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \circ x \\ z \circ y \end{pmatrix}$.

Dada uma soma $A + B$ e um produto $C \times D$, os morfismos saindo de $A + B$ e indo para $C \times D$ devem então tomar alguma das duas formas dois parágrafos acima. Podemos ver que um morfismo destes será então escrito como $\begin{pmatrix} (x, y) \\ (z, w) \end{pmatrix}$ ou como $(\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix})$ para os mesmos morfismos x, y, z e w. Neste caso, utilizarei a notação $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)$ para este morfismo.

Podemos ver então que $\varphi = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)$ é o único morfismo que satisfaz as igualdades $p_1 \circ \varphi \circ u_1 = x$, $p_2 \circ \varphi \circ u_1 = y$, $p_1 \circ \varphi \circ u_2 = z$ e $p_2 \circ \varphi \circ u_2 = w$.

Podemos definir produtos e somas de famílias maiores de objetos:

Definição 3.7.4. *Dada uma família $\{A_i\}_I$ indexada por um conjunto I, um produto dos objetos desta família é um par formado por um objeto e uma família de morfismos indexada por I, $(\prod_{i \in I} A_i, \{\prod_{i \in I} A_i \xrightarrow{p_i} A_i\}_I)$, tal que para cada par $(X, \{X \xrightarrow{f_i} A_i\}_I)$, temos que existe um único $X \longrightarrow \prod_{i \in I} A_i$ tal que para todo $i \in I$*

$$X \longrightarrow \prod_{i \in I} A_i \xrightarrow{p_i} A_i = X \xrightarrow{f_i} A_i$$

Neste caso, denotamos o morfismo $X \longrightarrow \prod_{i \in I} A_i$ por $\prod_{i \in I} f_i$

Definição 3.7.5. *Dada uma família $\{A_i\}_I$ indexada por um conjunto I, uma soma dos objetos desta família é um par formado por um objeto e uma família de morfismos indexada por I, $(\sum_{i \in I} A_i, \{A_i \xrightarrow{u_i} \sum_{i \in I} A_i\}_I)$, tal que para cada par $(X, \{A_i \xrightarrow{f_i} X\}_I)$, temos que existe um único $\sum_{i \in I} A_i \longrightarrow X$ tal que para todo $i \in I$*

$$A_i \xrightarrow{u_i} \sum_{i \in I} A_i \longrightarrow X = A_i \xrightarrow{f_i} X$$

Neste caso, denotamos o morfismo $\sum_{i \in I} A_i \longrightarrow X$ por $\sum_{i \in I} f_i$

Em Ab, ainda que os produtos e as somas dois a dois sejam objetos isomorfos, produtos e somas indexados por um conjunto infinito podem não o ser. Por exemplo, o produto de $\mathbb{N}$ cópias de $\mathbb{Z}$ é o grupo formado por elementos da forma $(a_1, a_2, \dots)$, mas a soma é formada por elementos desta forma em que apenas um número finito de entradas são diferentes de zero.

Assim como produtos de dois objetos, temos que produtos arbitrários da mesma família de objetos são isomorfos, e, dado um produto de uma família de objetos e um objeto isomorfo a este, podemos colocar uma estrutura de produto neste objeto. O mesmo vale para somas de famílias.

Assim como as somas e produtos dois a dois, todo morfismo saindo de uma soma arbitrária (digamos que indexada por I) será da forma $\sum_I f_i$, e todo morfismo indo para um produto arbitrário será da forma $\prod_I f_i$.

Definição 3.7.6. *Uma categoria é dita **completa** se todo par de morfismos possui um equalizador e toda família de objetos indexada por um conjunto possui um produto.*

Definição 3.7.7. *Uma categoria é dita* ***cocompleta*** *se todo par de morfismos possui um coequalizador e toda família de objetos indexada por um conjunto possui uma soma.*

Completude e cocompletude são conceitos duais.

Definição 3.7.8. *Uma categoria é dita* ***bicompleta*** *se é completa e cocompleta.*

As categorias Set, Grp, Ab, Ring e R-mod são todas bicompletas. Como exemplo de categoria que não é completa nem cocompleta mas possui produtos e somas temos a categoria formada pelos conjuntos finitos, e a formada pelos grupos abelianos finitos.

3.8 PULLBACKS E PUSHOUTS

Definição 3.8.1. *Sejam $A \xrightarrow{\alpha} M$ e $B \xrightarrow{\beta} M$ dois morfismos. Um* ***pullback*** *para $A \xrightarrow{\alpha} M$ e $B \xrightarrow{\beta} M$ é uma tripla formada por um objeto e dois morfismos, $(P, P \longrightarrow A, P \longrightarrow B)$, tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"] & M \end{tikzcd}$$

comuta, e sempre que uma tripla $(X, X \xrightarrow{x_1} A, X \xrightarrow{x_2} B)$ é tal que $\alpha \circ x_1 = \beta \circ x_2$, temos que existe um único $X \longrightarrow P$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, "x_1"] \arrow[ddr, "x_2"'] & & \\ & P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ & B \arrow[r, "\beta'"] & M \end{tikzcd}$$

comuta.

Neste caso, dizemos que o primeiro diagrama é um ***quadrado pullback****.*

O conceito dual de pullbacks é o de pushouts:

Definição 3.8.2. *Sejam $M \xrightarrow{\alpha} A$ e $M \xrightarrow{\beta} B$ dois morfismos. Um* ***pushout*** *para $M \xrightarrow{\alpha} A$ e $M \xrightarrow{\beta} B$ é uma tripla formada por um objeto e dois morfismos, $(O, A \longrightarrow O, B \longrightarrow O)$, tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

comuta, e sempre que uma tripla $(X, A \xrightarrow{x_1} X, B \xrightarrow{x_2} X)$ é tal que $x_1 \circ \alpha = x_2 \circ \beta$, temos que existe um único $O \longrightarrow X$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & A \arrow[d] \arrow[ddr, "x_1"] & \\
B \arrow[r] \arrow[drr, "x_2"'] & O \arrow[dr, dashed] & \\
& & X
\end{tikzcd}$$

comuta.

Neste caso, dizemos que o primeiro diagrama é um ***quadrado pushout****.*

Em Set, por exemplo, utilizando a notação dada na definição de pullback, um pullback de α e β é o subconjunto $\{(a, b) : a \in A, b \in B \text{ e } \alpha(a) = \beta(b)\}$ de $A \times B$, junto da restrição das projeções respectivas para A e para B.

E, seguindo agora a notação da definição de pushout, um pushout de α e β em Set é o quociente da união disjunta de A com B pela relação de equivalência dada por $a \sim b$ se existe $m \in M$ tal que $\alpha(m) = a$ e $\beta(m) = b$ junto das composições do morfismo quociente pelas inclusões respectivas de A e B em sua união disjunta.

4 CATEGORIAS ABELIANAS

4.1 DEFINIÇÃO E EXEMPLOS

Aqui começamos com o assunto principal deste trabalho: categorias abelianas. Vejamos primeiro sua definição.

Definição 4.1.1 (Categoria Abeliana)**.** *Uma categoria $\mathscr{A}$ é dita abeliana se:*

A0. $\mathscr{A}$ possui um objeto zero.

A1. O produto de cada par de objetos de $\mathscr{A}$ existe em $\mathscr{A}$.

A1. A soma de cada par de objetos de $\mathscr{A}$ existe em $\mathscr{A}$.*

A2. Todo morfismo possui um kernel.

A2. Todo morfismo possui um cokernel.*

A3. Todo monomorfismo é um kernel de algum morfismo.

A3. Todo epimorfismo é um cokernel de algum morfismo.*

Os principais exemplos de categorias abelianas são Ab e R-mod. Outro exemplo é a categoria com apenas um objeto e um morfismo, que é claramente uma categoria abeliana. A categoria formada por grupos abelianos finitamente gerados e morfismos de grupo também é abeliana.

As categorias Set, Grp e Ring são exemplos de categorias que não são abelianas: Set não possui um objeto zero, e em Grp e em Ring nem todo monomorfismo é um kernel (kernels de morfismos de grupos são subgrupos normais, de modo que a inclusão de um subgrupo não normal não será um kernel, e o mesmo ocorre para subanéis de um anel, que não são necessariamente ideais).

Veja que a categoria dual de uma categoria abeliana também é abeliana, pois os pares de axiomas são duais, e $A0$ é dual consigo mesmo. Desta forma, temos este resultado que facilita muitas demonstrações:

Proposição 4.1.2. *Seja P uma proposição válida para todas as categorias abelianas. Assim, P^* também é válida para todas as categorias abelianas.*

Demonstração. A demonstração é análoga à feita na Proposição 3.1.7 para categorias arbitrárias, notando que a categoria dual de uma categoria abeliana é também abeliana. □

Assim, é possível invocar este resultado para demonstrar proposições duais deste tipo com mais simplicidade.

Pelo restante deste capítulo, estaremos supondo que a categoria em questão é uma categoria abeliana.

Demonstramos então alguns teoremas válidos em categorias abelianas.

Teorema 4.1.3. *Seja $A \longrightarrow B$ um morfismo. Assim,*

1) *Se $A \longrightarrow B$ é um monomorfismo e $B \longrightarrow F$ é seu cokernel, então $A \longrightarrow B$ é um kernel de $B \longrightarrow F$.*

1*) *Se $A \longrightarrow B$ é um epimorfismo e $K \longrightarrow A$ é seu kernel, então $A \longrightarrow B$ é um cokernel de $K \longrightarrow A$.*

Demonstração. Mostrarei apenas 1), pois 1*) é seu dual.

Seja $A \longrightarrow B$ um monomorfismo, e seja $B \longrightarrow F$ um cokernel seu.

Por $A3$, temos que $A \longrightarrow B$ é um kernel de um morfismo, digamos $B \longrightarrow C$. Por $A2$, $B \longrightarrow F$ possui um kernel, digamos $K \longrightarrow B$.

Bem, $A \longrightarrow B \longrightarrow F = A \xrightarrow{0} F$, de modo que, como $K \longrightarrow B$ é o kernel de $B \longrightarrow F$, existe $A \longrightarrow K$ tal que $A \longrightarrow B = A \longrightarrow K \longrightarrow B$, e assim o monomorfismo $A \longrightarrow B$ está contido em $K \longrightarrow B$.

Também, $A \longrightarrow B \longrightarrow C = A \xrightarrow{0} C$, de forma que como $B \longrightarrow F$ é o cokernel de $A \longrightarrow B$, temos que existe $F \longrightarrow C$ tal que $B \longrightarrow C = B \longrightarrow F \longrightarrow C$. Assim,

$$K \longrightarrow B \longrightarrow C = K \longrightarrow B \longrightarrow F \longrightarrow C = K \xrightarrow{0} F \longrightarrow C = K \xrightarrow{0} C$$

De modo que como $A \longrightarrow B$ é o kernel de $B \longrightarrow C$, existe $K \longrightarrow A$ tal que $K \longrightarrow B = K \longrightarrow A \longrightarrow B$, e, portanto, o monomorfismo $K \longrightarrow B$ está contido em $A \longrightarrow B$.

Assim, como os monomorfismos se contém, eles representam o mesmo subobjeto e $A \longrightarrow B$ é então um representante do kernel de $B \longrightarrow F$, e, portanto, um kernel seu. □

Este teorema será utilizado com frequência. O referenciarei explicitamente nas primeiras vezes, mas para evitar um excesso de referências, eventualmente será utilizado como um fato direto sem referência.

Proposição 4.1.4. *Fixado um objeto A, sejam S e Q as classes de subobjetos e objetos quociente de A, respectivamente. Defina as funções Ker: $Q \to S$ e Cok: $S \to Q$, onde Ker leva objetos quociente em seus kernels e Cok leva subobjetos em seus cokernels.*

Assim, Ker e Cok são inversas uma da outra, e invertem a ordem dada pela continência (ou seja, se $A_1 \subseteq A_2$ são subobjetos de A, então $Cok(A_2) \subseteq Cok(A_1)$, e seu dual).

Demonstração. Dando uma esclarecida nas definições das funções, Ker leva um subobjeto de A no cokernel de algum monomorfismo representante seu, e Cok leva um objeto quociente no kernel de algum epimorfismo representante seu.

Podemos então questionar a boa definição destas funções, mas é fácil ver que a escolha do representante não influencia no resultado.

O teorema anterior nos mostra que são inversos, pois o kernel do cokernel de um monomorfismo é ele mesmo, e o cokernel do kernel de um epimorfismo também o é.

Para a outra parte, sejam A_1 e A_2 subobjetos de A tais que $A_1 \subseteq A_2$. Ou seja, tais que existe $A_1 \longrightarrow A_2$ tal que $A_1 \longrightarrow A = A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A$.

Assim, sejam $A \longrightarrow F_1$ o cokernel de $A_1 \longrightarrow A$ e $A \longrightarrow F_2$ o cokernel de $A_2 \longrightarrow A$. Veja então que

$$A_1 \longrightarrow A \longrightarrow F_2 = A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A \longrightarrow F_2 = A_1 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{0} F_2 = A_1 \xrightarrow{0} F_2$$

Desta forma, F_2 está contido no cokernel de $A_1 \longrightarrow A$, F_1, e, portanto, $\mathrm{Cok}(A_2) = F_2 \subseteq F_1 = \mathrm{Cok}(A_1)$, como desejado.

Que para objetos quociente $F_1 \subseteq F_2$ de A temos que $\mathrm{Ker}(F_2) \subseteq \mathrm{Ker}(F_1)$ é dual. □

Teorema 4.1.5. *Seja $A \longrightarrow B$ um morfismo. Assim, $A \longrightarrow B$ é um monomorfismo e um epimorfismo se, e somente se, $A \longrightarrow B$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Para a ida, suponha que $A \longrightarrow B$ é um monomorfismo e um epimorfismo.

Pela Proposição 3.4.8, como $A \longrightarrow B$ é um epimorfismo, seu cokernel é $B \longrightarrow 0$. Pela Proposição 3.4.10, o kernel de $B \longrightarrow 0$ é o subobjeto representado por $B \xrightarrow{1} B$. Agora, pelo último teorema, temos que, como $A \longrightarrow B$ é um monomorfismo, ele também representa o kernel de seu cokernel, $B \longrightarrow 0$.

Assim, $A \longrightarrow B$ e $B \xrightarrow{1} B$ são monomorfismos equivalentes. Em particular, $B \xrightarrow{1} B$ está contido em $A \longrightarrow B$ e, portanto, existe um morfismo $B \xrightarrow{x} A$ tal que $B \xrightarrow{x} A \longrightarrow B = B \xrightarrow{1} B$.

Dualmente, como $A \longrightarrow B$ é um monomorfismo, podemos ver que existe um morfismo $B \xrightarrow{y} A$ tal que $A \longrightarrow B \xrightarrow{y} A = A \xrightarrow{1} A$.

Assim, pela Proposição 3.2.5, segue que $A \longrightarrow B$ é um isomorfismo.

A volta segue da Proposição 3.2.6. □

4.2 ALGUMAS QUESTÕES EXISTENCIAIS

Relembrando, assumiremos neste capítulo inteiro que todas as categorias são abelianas. Nesta seção será mostrado que em uma categoria abeliana os conceitos introduzidos no capítulo anterior existem.

EQUALIZADORES E COEQUALIZADORES

Começamos com um lema a ser utilizado na demonstração da existência de equalizadores e coequalizadores e de intersecções.

Lema 4.2.1 (Pullbacks e pushouts específicos existem)**.**

1) Existe um pullback para um monomorfismo $A_1 \longrightarrow B$ e um morfismo $A_2 \longrightarrow B$.

1) Existe um pushout para um epimorfismo $B \longrightarrow M_1$ e um morfismo $B \longrightarrow M_2$.*

Demonstração. Demonstrarei apenas 1), pois 1*) é seu dual.

Como $A_1 \longrightarrow B$ é um monomorfismo, por $A3$, este é o kernel de algum morfismo. Seja então $B \longrightarrow F_1$, qualquer morfismo cujo kernel é $A_1 \longrightarrow B$, e considere $P \longrightarrow A_2$ o kernel de $A_2 \longrightarrow B \longrightarrow F_1$.

Assim, como $P \longrightarrow A_2 \longrightarrow B \longrightarrow F_1 = 0$, e $A_1 \longrightarrow B$ é o kernel de $B \longrightarrow F_1$, existe $P \longrightarrow A_1$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & A_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_2 & \longrightarrow & B \end{array}$$

comuta.

Mostrarei que P com estes morfismos é o pullback de $A_1 \longrightarrow B$ e $A_2 \longrightarrow B$.

Sejam $X \longrightarrow A_1$ e $X \longrightarrow A_2$ dois morfismos quaisquer tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & A_1 \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ A_2 & \longrightarrow & B \end{array}$$

comuta.

Assim,

$$X \longrightarrow A_2 \longrightarrow B \longrightarrow F_1 = X \longrightarrow A_1 \longrightarrow B \longrightarrow F_1 = 0$$

Agora, $P \longrightarrow A_2$ é o kernel de $A_2 \longrightarrow B \longrightarrow F_1$, de forma que existe um único $X \longrightarrow P$ tal que $X \longrightarrow A_2 = X \longrightarrow P \longrightarrow A_2$.

Também,

$$X \longrightarrow P \longrightarrow A_1 \longrightarrow B = X \longrightarrow P \longrightarrow A_2 \longrightarrow B = X \longrightarrow A_2 \longrightarrow B = X \longrightarrow A_1 \longrightarrow B$$

De forma que, como $A_1 \longrightarrow B$ é um monomorfismo, $X \longrightarrow A_1 = X \longrightarrow P \longrightarrow A_1$.

Portanto, $(P, P \longrightarrow A_1, P \longrightarrow A_2)$ é um pullback de $A_1 \longrightarrow B$ e $A_2 \longrightarrow B$. $\square$

Teorema 4.2.2 (Equalizadores e Coequalizadores existem)**.** *Sejam $A \xrightarrow{x} B$ e $A \xrightarrow{y} B$ dois morfismos. Assim, seus equalizador e coequalizador existem.*

Demonstração. Faremos, como sempre, apenas para o equalizador, já que para o coequalizador é dual.

Nas hipóteses do teorema, considere os morfismos $A \xrightarrow{(1,x)} A \times B$ e $A \xrightarrow{(1,y)} A \times B$. Pela Proposição 3.2.3, estes são monomorfismos, pois $p_1 \circ (1, x) = 1_A$ e $p_1 \circ (1, y) = 1_A$ são monomorfismos.

Seja $(K, K \xrightarrow{k_1} A, K \xrightarrow{k_2} A)$ um pullback destes dois monomorfismos, que existe pelo Lema 4.2.1.

Aplicando p_1, vemos que $k_1 = p_1 \circ (1, x) \circ k_1 = p_1 \circ (1, y) \circ k_2 = k_2$. Denotamos, então, este morfismo por k. Veremos que k é um equalizador para x e y.

Aplicando p_2, vemos que $x \circ k = p_2 \circ (1, x) \circ k = p_2 \circ (1, y) \circ k = y \circ k$.

Seja então $X \xrightarrow{f} A$ tal que $x \circ f = y \circ f$. Assim, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & A \\ \big\downarrow f & & \big\downarrow (1,x) \\ A & \xrightarrow{(1,y)} & A \times B \end{array}$$

comuta, pois $(1, x) \circ f = (f, x \circ f) = (f, y \circ f) = (1, y) \circ f$.

Assim, como K é um pullback de $(1, x)$ e $(1, y)$, temos, em particular, que existe um único morfismo $X \longrightarrow K$ tal que $X \xrightarrow{f} A = X \longrightarrow K \xrightarrow{k} A$. Segue então que $K \xrightarrow{k} A$ é o equalizador de x e y. $\square$

Sendo assim, para mostrar que uma categoria abeliana arbitrária é completa, basta mostrar que produtos indexados por conjuntos arbitrários existem, e para mostrar que é cocompleta, que somas indexadas por conjuntos arbitrários existem.

IMAGENS E COIMAGENS

Teorema 4.2.3 (Imagens e coimagens existem)**.** *Seja $A \longrightarrow B$ um morfismo. Assim:*

1) *Sua imagem existe e é igual a Ker(Cok($A \longrightarrow B$)).*

1*) *Sua coimagem existe e é igual a Cok(Ker($A \longrightarrow B$)).*

Demonstração. Mostrarei apenas 1), pois 1*) é seu dual.

Seja $B \longrightarrow F$ o cokernel de $A \longrightarrow B$, e $K \longrightarrow B$ o kernel deste cokernel.

Como $A \longrightarrow B \longrightarrow F = A \xrightarrow{0} F$, e K é o kernel de $B \longrightarrow F$, temos que existe um morfismo $A \longrightarrow K$ tal que $A \longrightarrow B = A \longrightarrow K \longrightarrow B$.

Agora, para ver que este é o menor subobjeto que satisfaz esta propriedade, seja $M \longrightarrow B$ um subobjeto de B tal que existe $A \longrightarrow M$ tal que $A \longrightarrow B = A \longrightarrow M \longrightarrow B$. Basta mostrar que $K \longrightarrow B$ está contido em $M \longrightarrow B$.

Considere então $B \longrightarrow F_M$ o cokernel de $M \longrightarrow B$. Temos então que

$$A \longrightarrow B \longrightarrow F_M = A \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow F_M = A \longrightarrow M \xrightarrow{0} F_M = A \xrightarrow{0} F_M$$

De forma que, como $B \longrightarrow F$ é o cokernel de $A \longrightarrow B$, existe $F \longrightarrow F_M$ tal que $B \longrightarrow F_M = B \longrightarrow F \longrightarrow F_M$. Assim, veja que

$$K \longrightarrow B \longrightarrow F_M = K \longrightarrow B \longrightarrow F \longrightarrow F_M = K \xrightarrow{0} F \longrightarrow F_M = K \xrightarrow{0} F_M$$

Também, pelo Teorema 4.1.3 temos que $M \longrightarrow B$ é o kernel de $B \longrightarrow F_M$, e assim existe $K \longrightarrow M$ tal que $K \longrightarrow B = K \longrightarrow M \longrightarrow B$. Portanto, $K \longrightarrow B$ está contido em $M \longrightarrow B$. □

Corolário 4.2.4. *A imagem de um monomorfismo é o subobjeto representado por ele, e a coimagem de um epimorfismo é o objeto quociente representado por ele.*

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 4.1.3 e do teorema anterior. □

Proposição 4.2.5. *Seja $A \xrightarrow{f} B$ um morfismo. Assim,*

1) *$A \xrightarrow{f} B$ é um epimorfismo se, e somente se, Cok(f) = 0 se, e somente se, Im(f) = B.*

1*) *$A \xrightarrow{f} B$ é um monomorfismo se, e somente se, Ker(f) = 0 se, e somente se, Coim(f) = A.*

Demonstração. Demonstrarei apenas 1), pois 1*) é seu dual.

Suponha primeiramente que f é um epimorfismo. Que $\mathrm{Cok}(f) = 0$ segue da Proposição 3.4.8.

Agora, suponha que $\mathrm{Cok}(f) = 0$. Assim, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Cok}(f)) = \mathrm{Ker}(B \longrightarrow 0) = B$.

E, por fim, suponha que $\mathrm{Im}(f) = B$. Desta forma, sejam $B \xrightarrow{x} C$ e $B \xrightarrow{y} C$ dois morfismos tais que $x \circ f = y \circ f$. Considere então o equalizador $K \longrightarrow B$ de x e y. Assim, existe $A \longrightarrow K$ tal que $A \xrightarrow{f} B = A \longrightarrow K \longrightarrow B$, de modo que $\mathrm{Im}(f)$ está contido em $K = \mathrm{Eq}(x, y)$. Como $\mathrm{Im}(f) = B$, e (trivialmente) $\mathrm{Eq}(x, y) \subseteq B$, segue que $\mathrm{Eq}(x, y) = B$, de modo que 1_B representa $\mathrm{Eq}(x, y)$ e é, então, um equalizador de x e y. Assim, temos que $x = x \circ 1_B = y \circ 1_B = y$, e f é, portanto, um epimorfismo. □

Nos exemplos dados de imagens e coimagens do capítulo anterior os objetos da imagem e da coimagem são isomorfos. Isto não vale para todas as categorias, mas veremos que vale para quaisquer categorias abelianas. Com isto é possível descrever, de certa forma, um teorema do isomorfismo para categorias abelianas.

Teorema 4.2.6. *Seja $A \xrightarrow{f} B$ um morfismo, $I \xrightarrow{i} B$ sua imagem e $A \xrightarrow{c} I$ um morfismo tal que $f = i \circ c$ cuja existência é garantida pela definição de imagem. Assim, c é um epimorfismo que representa a coimagem de f.*

Dualmente, se c é a coimagem de f, e i é um morfismo tal que $f = i \circ c$, então i é um monomorfismo que representa a imagem de f.

Em particular, temos que a imagem e a coimagem de um morfismo nos dão objetos isomorfos, e que todo morfismo pode ser decomposto como uma composição de um monomorfismo por um epimorfismo.

Demonstração. Mostrarei apenas para a imagem. Suponha então que estamos nas hipóteses do primeiro parágrafo do teorema.

Vejamos primeiramente que c é um epimorfismo. Seja $I' \xrightarrow{i'} I$ a imagem de c. Assim, $c = i' \circ c'$ para algum morfismo c', de modo que $i \circ i' \circ c' = i \circ c = f$, e, em particular, f se fatora pelo monomorfismo $i \circ i'$. Pela definição de imagem, i está contido em $i \circ i'$. Também, $i \circ i'$ está claramente contido em i, de modo que, pela Proposição 3.3.2, i' é um isomorfismo, e, portanto, i' representa o mesmo subobjeto que 1_I. Deste modo, pela proposição anterior, como $\mathrm{Im}(c) = I$, c é um epimorfismo.

Agora, como i é um monomorfismo e $f = i \circ c$, temos pela Proposição 3.4.9 que $\mathrm{Ker}(c) = \mathrm{Ker}(f)$. Assim, como c é um epimorfismo, temos que $c = \mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}(c)) = \mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{Coim}(f)$. □

Isto realmente se traduz ao teorema do isomorfismo para grupos abelianos: dado um morfismo de grupos abelianos $A \xrightarrow{f} B$, sua imagem é a inclusão do subgrupo imagem, e sua coimagem é o quociente de seu domínio pelo seu kernel, de modo que o teorema nos diz que $\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{A}/\mathrm{Ker}(f)$

PULLBACKS E PUSHOUTS

Teorema 4.2.7 (Pullbacks e Pushouts existem)**.**

1*) Existe um pullback de dois morfismos $A \longrightarrow M$ e $B \longrightarrow M$.*

1**) Existe um pushout de dois morfismos $M \longrightarrow A$ e $M \longrightarrow B$.*

Demonstração. Demonstrarei apenas 1), pois 1*) é o seu dual.

Nas hipóteses de 1), denotemos o primeiro morfismo por α e o segundo por β.

Seja $P \xrightarrow{(k_1,k_2)} A \times B$ o equalizador de $A \times B \xrightarrow{p_1} A \xrightarrow{\alpha} M$ e $A \times B \xrightarrow{p_2} B \xrightarrow{\beta} M$, que existe pelo Teorema 4.2.2.

Assim, mostrarei que (P, k_1, k_2) é o pullback de α e β que desejamos.

Primeiramente, vemos que $\alpha \circ k_1 = \alpha \circ p_1 \circ (k_1, k_2) = \beta \circ p_2 \circ (k_1, k_2) = \beta \circ k_2$, já que (k_1, k_2) é o equalizador de $\alpha \circ p_1$ e $\beta \circ p_2$.

Seja então $(X, X \xrightarrow{x_1} A, X \xrightarrow{x_2} B)$ uma tripla tal que $\alpha \circ x_1 = \beta \circ x_2$.

Considere o morfismo $X \xrightarrow{(x_1,x_2)} A \times B$. Bem, veja que

$$\alpha \circ p_1 \circ (x_1, x_2) = \alpha \circ x_1 = \beta \circ x_2 = \beta \circ p_2 \circ (x_1, x_2)$$

Assim, pela definição de equalizador, devemos ter que existe um único morfismo $X \xrightarrow{x} P$ tal que $(k_1, k_2) \circ x = (x_1, x_2)$. Ou seja, $(k_1 \circ x, k_2 \circ x) = (x_1, x_2)$, e, portanto, $k_1 \circ x = x_1$ e $k_2 \circ x = x_2$.

Temos então que x comuta os diagramas do pullback. Para mostrar a unicidade deste morfismo, seja $X \xrightarrow{x'} P$ um morfismo tal que $k_1 \circ x' = x_1$ e $k_2 \circ x' = x_2$.

Assim, temos que $(x_1, x_2) = (k_1 \circ x', k_2 \circ x') = (k_1, k_2) \circ x'$. Como x era o único morfismo que satisfaz isto, segue que $x = x'$, e isto garante a unicidade. P é, portanto, um pullback de α e β, como desejado. □

Segue uma proposição sobre pullbacks e pushouts em categorias abelianas que será útil mais para a frente:

Proposição 4.2.8. *Sejam $A \xrightarrow{\alpha} M$ e $B \xrightarrow{\beta} M$ dois morfismos. Assim, dado um pullback $(P, P \xrightarrow{x} A, P \xrightarrow{y} B)$ destes morfismos, se $K_\alpha \xrightarrow{k_\alpha} A$ é um kernel de α e $K_y \xrightarrow{k_y} P$ é um kernel de y, então K_α e K_y são isomorfos.*

Dualmente, o cokernel de dois morfismos paralelos num quadrado pushout nos dá objetos isomorfos.

Demonstração. Nas hipóteses do enunciado, como $\alpha \circ x \circ k_y = \beta \circ y \circ k_y = 0$, existe então $K_y \xrightarrow{k_1} K_\alpha$ tal que $x \circ k_y = k_\alpha \circ k_1$.

Agora, como $\alpha \circ k_\alpha = 0 = \beta \circ 0$, como (P, x, y) é um pullback, segue que existe $K_\alpha \xrightarrow{k'_\alpha} P$ tal que $x \circ k'_\alpha = k_\alpha$ e $y \circ k'_\alpha = 0$.

De $y \circ k'_\alpha = 0$ devemos ter que existe $K_\alpha \xrightarrow{k_2} K_y$ tal que $k'_\alpha = k_y \circ k_2$.

Sendo assim, veremos que k_2 é uma inversa para k_1, de modo que K_α é realmente isomorfo a K_y:

Bem, veja que $x \circ (k_y \circ k_2 \circ k_1) = x \circ k'_\alpha \circ k_1 = k_\alpha \circ k_1 = x \circ k_y$ e $y \circ (k_y \circ k_2 \circ k_1) = 0 = y \circ k_y$, de modo que, como (P, x, y) é um pullback, da unicidade do morfismo para P, devemos ter que $k_y \circ k_2 \circ k_1 = k_y$. Como k_y é um monomorfismo, segue então que $k_2 \circ k_1 = 1_{K_y}$.

Também, vemos que $k_\alpha \circ k_1 \circ k_2 = x \circ k_y \circ k_2 = x \circ k'_\alpha = k_\alpha$, de modo que, também como k_α é um monomorfismo, $k_1 \circ k_2 = 1_{K_\alpha}$, e segue o que era desejado. □

Em particular, pela Proposição 4.2.5, temos que um morfismo num quadrado pullback é um monomorfismo se, e somente se, o morfismo paralelo ao mesmo no quadrado é um monomorfismo, e, similarmente, um morfismo num quadrado pushout é um epimorfismo se, e somente se, o morfismo paralelo é um epimorfismo.

INTERSECÇÕES E UNIÕES

Teorema 4.2.9 (Intersecções Existem)**.**

Sejam A_1 e A_2 dois subobjetos de um objeto B. Assim, $A_1 \cap A_2$ existe.

Sejam F_1 e F_2 dois objetos quociente de um objeto B. Assim, $F_1 \cap F_2$ existe.

Demonstração. Mostrarei apenas para subobjetos, pois para objetos quociente é dual.

Seja $(I, I \longrightarrow A_1, I \longrightarrow A_2)$ um pullback dos monomorfismos $A_1 \longrightarrow B$ e $A_2 \longrightarrow B$.

Pelo comentário após a Proposição 4.2.8, $I \longrightarrow A_1$ e $I \longrightarrow A_2$ são monomorfismos. Com isto, temos que $I \longrightarrow B = I \longrightarrow A_1 \longrightarrow B = I \longrightarrow A_2 \longrightarrow B$ é um subobjeto de B contido em A_1 e A_2.

E se X é um subobjeto de B contido em A_1 e A_2, com $X \longrightarrow A_1$ e $X \longrightarrow A_2$ os morfismos dados respectivamente pela continência de X em A_1 e em A_2, temos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & A_1 \arrow[d] \\ A_2 \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

De forma que, como I é um pullback, há um morfismo $X \longrightarrow I$ que comuta diagramas que mostram que X está contido em I.

Portanto, I é a intersecção $A_1 \cap A_2$. □

A forma que intersecções são construídas será importante mais a frente, e, portanto, a escreverei em uma proposição.

Corolário 4.2.10. *Sejam A_1 e A_2 dois subobjetos de um objeto B. Se $B \longrightarrow F_1$ é um morfismo cujo kernel é $A_1 \longrightarrow B$, e $I \longrightarrow A_2$ é o kernel de $A_2 \longrightarrow B \longrightarrow F_1$, então $I \longrightarrow B = I \longrightarrow A_2 \longrightarrow B$ representa a intersecção $A_1 \cap A_2$.*

Demonstração. Segue da construção da intersecção e da construção do pullback envolvendo um monomorfismo feita no Lema 4.2.1. □

Poderíamos mostrar a existência de uniões com mais facilidade utilizando a Proposição 4.1.4, pois a união de subobjetos corresponde à intersecção dos objetos quociente correspondentes e vice-versa, mas decidi fazer a demonstração de outra forma pois assim poderemos a generalizar para uniões arbitrárias, e isto será importante mais a frente.

Teorema 4.2.11 (Uniões Existem)**.**

Sejam A_1 e A_2 dois subobjetos de um objeto A. Assim, $A_1 \cup A_2$ existe.

Sejam F_1 e F_2 dois objetos quociente de um objeto A. Assim, $F_1 \cup F_2$ existe.

Demonstração. Seguindo como no enunciado, denotaremos por $A_1 \xrightarrow{\iota_1} A$ e $A_2 \xrightarrow{\iota_2} A$ os morfismos representantes dos respectivos subobjetos A_1 e A_2.

Considere então o morfismo $A_1 + A_2 \xrightarrow{\binom{\iota_1}{\iota_2}} A$, e sua imagem, $I \longrightarrow A$. Mostrarei que I é a união de A_1 e A_2.

A_1 está contido em I, pois I, sendo uma imagem, é tal que $\binom{\iota_1}{\iota_2}$ se fatora por I, de forma que

$$A_1 \xrightarrow{\iota_1} A = A_1 \xrightarrow{u_1} A_1 + A_2 \xrightarrow{\binom{\iota_1}{\iota_2}} A = A_1 \xrightarrow{u_1} A_1 + A_2 \longrightarrow I \longrightarrow A$$

Similarmente, A_2 está contido em I.

Agora, seja $P \xrightarrow{m} A$ um subobjeto de A tal que A_1 e A_2 estão contidos em P. Sejam então ι_1' e ι_2' os morfismos tais que $\iota_1 = m \circ \iota_1'$ e $\iota_2 = m \circ \iota_2'$ da definição de continência de monomorfismos.

Assim, considerando o morfismo $\binom{\iota_1'}{\iota_2'}$, veja que $m \circ \binom{\iota_1'}{\iota_2'} = \binom{m \circ \iota_1'}{m \circ \iota_2'} = \binom{\iota_1}{\iota_2}$. Em particular, temos que $\binom{\iota_1}{\iota_2}$ se fatora por m. Por definição de imagem, I está, portanto, contido em P.

Assim, I é o menor subobjeto contendo A_1 e A_2, e é, portanto, sua união. Dualmente, a coimagem do morfismo de A para o produto de F_1 e F_2 é sua união. □

Podemos estender este teorema para uniões arbitrárias em categorias completas e cocompletas:

Teorema 4.2.12.

Em uma categoria abeliana cocompleta, uniões de famílias arbitrárias de subobjetos de um objeto A existem.

Em uma categoria abeliana completa, uniões de famílias arbitrárias de objetos quociente de um objeto A existem.

Demonstração. É análoga à demonstração do teorema anterior, mas utilizando a soma da família de subobjetos e o produto da família de objetos quociente, que neste caso existirão pela cocompletude e completude, respectivamente, da categoria. □

4.3 SEQUÊNCIAS EXATAS

Podemos então falar de sequências exatas em categorias abelianas utilizando os subobjetos imagem e kernel e os objetos quociente coimagem e cokernel. Vejamos uma proposição antes disto.

Proposição 4.3.1. *Seja $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ uma sequência, $K \longrightarrow B$ um kernel de $B \longrightarrow C$, e $B \longrightarrow F$ um cokernel de $A \longrightarrow B$. São equivalentes:*

1) $Im(A \longrightarrow B) = Ker(B \longrightarrow C)$

2) $Cok(A \longrightarrow B) = Coim(B \longrightarrow C)$

3) $A \longrightarrow B \longrightarrow C = 0$ e $K \longrightarrow B \longrightarrow F = 0$.

Demonstração.

1) $\implies$ 2) Basta ver que

$$\begin{aligned}\operatorname{Coim}(B \longrightarrow C) &= \operatorname{Cok}(\operatorname{Ker}(B \longrightarrow C)) = \operatorname{Cok}(\operatorname{Im}(A \longrightarrow B)) \\ &= \operatorname{Cok}(\operatorname{Ker}(\operatorname{Cok}(A \longrightarrow B))) = \operatorname{Cok}(A \longrightarrow B)\end{aligned}$$

2) $\implies$ 3) Para a primeira igualdade, notamos que $B \longrightarrow F$ representa, portanto, a coimagem de $B \longrightarrow C$, de modo que $B \longrightarrow C$ se fatora por $B \longrightarrow F$, e, assim,

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C = A \longrightarrow B \longrightarrow F \longrightarrow C = 0$$

Para a segunda igualdade, veja que

$$\begin{aligned}B \longrightarrow F &= \operatorname{Cok}(A \longrightarrow B) = \operatorname{Coim}(B \longrightarrow C) \\ &= \operatorname{Cok}(\operatorname{Ker}(B \longrightarrow C)) = \operatorname{Cok}(K \longrightarrow B)\end{aligned}$$

E assim fica claro que a composição em questão é zero.

3) $\implies$ 1) Como $A \longrightarrow B \longrightarrow C = 0$, temos que $A \longrightarrow B$ se fatora pelo kernel de $B \longrightarrow C$. Assim, pela definição de imagem, segue que $\mathrm{Im}(A \longrightarrow B) \subseteq \mathrm{Ker}(B \longrightarrow C)$.

E, como $K \longrightarrow B \longrightarrow F = 0$, vemos que $K \longrightarrow B$ está contido no kernel de $B \longrightarrow F$. Mas, $\mathrm{Ker}(B \longrightarrow F) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Cok}(A \longrightarrow B)) = \mathrm{Im}(A \longrightarrow B)$. Assim, $\mathrm{Ker}(B \longrightarrow C) \subseteq \mathrm{Im}(A \longrightarrow B)$, de modo que segue a igualdade. □

Definimos então sequências exatas.

Definição 4.3.2 (Sequências Exatas)**.** *Uma sequência* $\cdots \longrightarrow A_{i-1} \longrightarrow A_i \longrightarrow A_{i+1} \longrightarrow \cdots$ *é dita **exata em A_i** se Im($A_{i-1} \longrightarrow A_i$) = Ker($A_i \longrightarrow A_{i+1}$) (ou seja, se $A_{i-1} \longrightarrow A_i \longrightarrow A_{i+1}$ satisfaz qualquer uma das três condições equivalentes da proposição anterior).*

*A sequência é dita **exata** se for exata em todos seus objetos.*

Em Ab e R-mod, esta definição é equivalente à definição em termo dos subconjuntos imagem e kernel de suas respectivas teorias e, portanto, nestas categorias podemos demonstrar e utilizar exatidão de sequências com maior facilidade, já que conjuntos são um conceito mais intuitivo que subobjetos, além de a utilização de elementos que estão nos conjuntos simplificar bastante várias demonstrações.

A linguagem de sequências exatas é bastante útil, pois várias afirmações envolvendo monomorfismos, epimorfismos, kernels e cokernels podem ser feitas apenas em termos da exatidão de sequências.

Proposição 4.3.3. *São válidas as seguintes proposições:*

1) $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow \cdots$ *é exata em* A *se, e somente se,* $A \longrightarrow B$ *é um monomorfismo.*

1*) $\cdots \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ *é exata em* B *se, e somente se,* $A \longrightarrow B$ *é um epimorfismo.*

2) $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ *é exata se, e somente se,* $A \longrightarrow B$ *é um isomorfismo.*

3) $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \cdots$ *é exata em* A *e* B *se, e somente se,* $A \longrightarrow B$ *é o kernel de* $B \longrightarrow C$*.*

3*) $\cdots \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ *é exata em* B *e* C *se, e somente se,* $B \longrightarrow C$ *é o cokernel de* $A \longrightarrow B$*.*

4) $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ *é exata se, e somente se,* $A \longrightarrow B$ *é um monomorfismo e* $B \longrightarrow C$ *é seu cokernel.*

4*) $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ *é exata se, e somente se,* $B \longrightarrow C$ *é um epimorfismo e* $A \longrightarrow B$ *é seu kernel.*

Demonstração. Demonstrarei cada proposição.

1) A sequência é exata em A se, e somente se, $\mathrm{Ker}(A \longrightarrow B) = \mathrm{Im}(0 \longrightarrow A) = 0$, que, pela Proposição 4.2.5, ocorre se, e somente se, $0 \longrightarrow A$ é um monomorfismo.

1*) É demonstrada dualmente.

2) Segue de 1), 1*) e do Teorema 4.1.5 que nos diz que um morfismo é um isomorfismo se, e somente se, este é um monomorfismo e um epimorfismo.

3) A sequência é exata em A e em B se, e somente se, $A \longrightarrow B$ é um monomorfismo (por 1)) e $\operatorname{Ker}(B \longrightarrow C) = \operatorname{Im}(A \longrightarrow B)$. Pelo Corolário 4.2.4, podemos ver que isto ocorre se, e somente se, $\operatorname{Ker}(B \longrightarrow C) = A \longrightarrow B$ (com a volta dada pois um kernel é um monomorfismo).

3*) É demonstrada dualmente.

4) Segue diretamente de 1) e de 3*).

4*) É demonstrada dualmente.

□

Dizemos que uma sequência exata da forma $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ é uma **sequência exata curta**. Sequências exatas curtas são importantes pois são sequências mais simples de se lidar com e codificam informação de sequências exatas maiores:

Proposição 4.3.4. *Uma sequência* $\cdots \xrightarrow{f_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$ *é exata se, e somente se, para todo i temos que a sequência $0 \longrightarrow K_i \longrightarrow A_i \longrightarrow F_i \longrightarrow 0$ é exata, onde $K_i \longrightarrow A_i$ é o kernel de f_i, e $A_i \longrightarrow F_i$ é o cokernel de f_{i-1}.*

Demonstração. Fixe i. Pelo Teorema 4.2.3, temos que $\operatorname{Ker}(A_i \longrightarrow F_i) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Cok}(f_{i-1})) = \operatorname{Im}(f_{i-1})$. Pelo Corolário 4.2.4 temos que $\operatorname{Im}(K_i \longrightarrow A_i) = K_i \longrightarrow A_i = \operatorname{Ker}(f_i)$. Assim, temos que $\operatorname{Im}(f_{i-1}) = \operatorname{Ker}(f_i)$ se, e somente se, $\operatorname{Im}(K_i \longrightarrow A_i) = \operatorname{Ker}(A_i \longrightarrow F_i)$. Deste modo, uma sequência é exata em A_i se, e somente se, a outra também o for.

Para cada i a sequência $0 \longrightarrow K_i \longrightarrow A_i \longrightarrow F_i \longrightarrow 0$ é sempre exata em K_i e F_i, já que $K_i \longrightarrow A_i$ sendo um kernel é um monomorfismo, e $A_i \longrightarrow F_i$ sendo um cokernel é um epimorfismo.

Assim, $\cdots \xrightarrow{f_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$ é exata em A_i se, e somente se, a sequência curta associada a i também for exata. Segue então a equivalência desejada. □

4.4 O LEMA DOS NOVE

Começamos com um lema para a demonstração do Lema dos Nove.

Lema 4.4.1. *Suponha que em uma categoria abeliana $\mathscr{A}$ o diagrama comutativo a seguir é tal que a linha do meio e todas suas colunas são sequências exatas.*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & A_{11} \arrow[r, "r_{11}"] \arrow[d, "d_{11}"'] & A_{12} \arrow[r, "r_{12}"] \arrow[d, "d_{12}"'] & A_{13} \arrow[d, "d_{13}"'] \\
0 \arrow[r] & A_{21} \arrow[r, "r_{21}"] \arrow[d, "d_{21}"'] & A_{22} \arrow[r, "r_{22}"] \arrow[d, "d_{22}"'] & A_{23} \\
0 \arrow[r] & A_{31} \arrow[r, "r_{31}"] \arrow[d] & A_{32} \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Assim, a linha de baixo é exata se, e somente se, a linha de cima é exata.

Demonstração. Para a ida, suponha que a linha de baixo é exata. Devemos mostrar que $0 \longrightarrow A_{11} \longrightarrow A_{12} \longrightarrow A_{13}$ é exata. Ou seja, devemos mostrar que r_{11} é o kernel de r_{12}. Considere então k o kernel de r_{12}.

Primeiramente, r_{11} é um monomorfismo, pois se f é tal que $r_{11} \circ f = 0$, então, pela comutatividade do diagrama, $r_{21} \circ d_{11} \circ f = d_{12} \circ r_{11} \circ f = 0$, e, como r_{21} e d_{11} são monomorfismos pela exatidão das sequências em que estão, temos que sua composição também o é, e, portanto, $f = 0$.

Veja que $d_{13} \circ r_{12} \circ r_{11} = r_{22} \circ d_{12} \circ r_{11} = r_{22} \circ r_{21} \circ d_{11} = 0$, com a última igualdade dada pois $r_{22} \circ r_{21} = 0$, já que a linha do meio é exata. Assim, como d_{13} é um monomorfismo, pois a terceira coluna é exata, temos que $r_{12} \circ r_{11} = 0$. Desta forma, r_{11} está contido em k.

Por outro lado, veja que $r_{22} \circ d_{12} \circ k = d_{13} \circ r_{12} \circ k = 0$, já que k é o kernel de r_{12}. Assim, existe um único morfismo d' tal que $d_{12} \circ k = r_{21} \circ d'$, já que r_{21} é o kernel de r_{22}, da exatidão da linha do meio.

Agora, veja que $r_{31} \circ d_{21} \circ d' = d_{22} \circ r_{21} \circ d' = d_{22} \circ d_{12} \circ k = 0$, já que d_{12} é o kernel de d_{22}, sendo a coluna do meio exata. Como r_{31} é um monomorfismo, pois estamos supondo que a linha de baixo é exata, segue que $d_{21} \circ d' = 0$, e, portanto, existe d'' tal que $d' = d_{11} \circ d''$, já que d_{11} é o kernel de d_{21}.

Assim, $d_{12} \circ k = r_{21} \circ d' = r_{21} \circ d_{11} \circ d'' = d_{12} \circ r_{11} \circ d''$. Como d_{12} é um monomorfismo, temos que $k = r_{11} \circ d''$, e k está então contido em r_{11}. Como então $k \subseteq r_{11}$ e $r_{11} \subseteq k$, segue assim que r_{11} representa o subobjeto kernel de r_{12}, e é, portanto, um kernel seu, nos dando a exatidão da primeira linha, como desejado.

Para a volta, suponha que a linha de cima é exata. Devemos mostrar que a linha de baixo é exata. Em outras palavras, devemos mostrar que r_{31} é um monomorfismo. Considere k o kernel de $r_{31} \circ d_{21}$. Mostrarei que k é o kernel de d_{21}, e isto será suficiente, pois, deste modo, $\mathrm{Coim}(r_{31} \circ d_{21}) = \mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}(r_{31} \circ d_{21}) = \mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}(d_{21})) = d_{21}$, já que d_{21} é um epimorfismo, e de modo que, pelo Teorema 4.2.6, segue que r_{31} é a imagem de $r_{31} \circ d_{21}$, e é, em particular, um monomorfismo.

Bem, veja que $d_{22} \circ r_{21} \circ k = r_{31} \circ d_{21} \circ k = 0$. Assim, existe p tal que $r_{21} \circ k = d_{12} \circ p$, já que d_{12} é o kernel de d_{22}

Agora, note que $d_{13} \circ r_{12} \circ p = r_{22} \circ d_{12} \circ p = r_{22} \circ r_{21} \circ k = 0$. Como d_{13} é um monomorfismo, temos que $r_{12} \circ p = 0$. Assim, como r_{11} é o kernel de r_{12} já que estamos assumindo que a linha de cima é exata, existe p' tal que $p = r_{11} \circ p'$.

Vemos então que $r_{21} \circ k = d_{12} \circ p = d_{12} \circ r_{11} \circ p' = r_{21} \circ d_{11} \circ p'$. Como r_{21} é um monomorfismo, temos que $k = d_{11} \circ p'$, e k está, portanto, contido em d_{11}, o kernel de d_{21}.

Que d_{11} está contido em k é claro, pois $r_{31} \circ d_{21} \circ d_{11} = r_{31} \circ 0 = 0$. Assim, k e d_{11} representam o mesmo subobjeto e são ambos o kernel de d_{21}. Segue então, pelos argumentos no primeiro parágrafo desta parte da demonstração, que r_{31} é um monomorfismo e a linha de baixo é então exata. □

Caso estivéssemos na categoria de módulos, esta demonstração seguiria de forma um tanto mais simples e intuitiva, utilizando os elementos dos R-módulos numa busca pelo diagrama. Para a volta desta demonstração, eu, de fato, utilizei a demonstração via "diagram chasing" para me guiar no que deve ser feito, tendo a maior parte do trabalho mental em argumentar o que foi feito no primeiro parágrafo da volta.

Mostrarei mais para a frente como é uma demonstração deste tipo em R-mod. Na verdade, demonstrações com "diagram chasing" serem mais simples de se fazer em teoremas como este do que trabalhar apenas com morfismos é justamente algo que ressalta a importância do Teorema de Freyd-Mitchell que demonstraremos mais a frente, pois com ele veremos que podemos utilizar este tipo de demonstração em quaisquer categorias abelianas, ao invés de apenas em categorias de módulos.

Como já dito, utilizaremos este lema para demonstrar o Lema dos Nove, que será necessário para a demonstração do Teorema de Freyd-Mitchell, e, portanto, fiz esta demonstração agora sem utilizar destes artifícios.

Lema 4.4.2 (Lema dos Nove)**.** *Suponha que o diagrama comutativo em uma categoria abeliana $\mathscr{A}$ a seguir é tal que a linha do meio e todas suas colunas são sequências exatas.*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_{11} \arrow[r] \arrow[d] & A_{12} \arrow[r] \arrow[d] & A_{13} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{21} \arrow[r] \arrow[d] & A_{22} \arrow[r] \arrow[d] & A_{23} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{31} \arrow[r] \arrow[d] & A_{32} \arrow[r] \arrow[d] & A_{33} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Assim, a linha de baixo é exata se, e somente se, a linha de cima é exata.

Demonstração. Juntamos o último lema com seu dual:

Supondo a exatidão da linha de cima, em particular $0 \longrightarrow A_{11} \longrightarrow A_{12} \longrightarrow A_{13}$ é exata e, portanto, $0 \longrightarrow A_{31} \longrightarrow A_{32}$ é exata.

Também, como $A_{12} \longrightarrow A_{13} \longrightarrow 0$ é exata, do dual do último lema, segue que $A_{31} \longrightarrow A_{32} \longrightarrow A_{33} \longrightarrow 0$ é exata.

Juntando isto, segue que a linha de baixo é exata. Similarmente vemos o outro lado. □

4.5 SOMAS DIRETAS

Veremos aqui que o produto e a soma de dois objetos numa categoria abeliana são isomorfos, e passaremos a ver os dois conceitos como um só ao definir somas diretas.

Para isto, primeiro veremos algumas proposições.

Proposição 4.5.1. *Sejam A e B objetos, $(A + B, u_1, u_2)$ sua soma e $(A \times B, p_1, p_2)$ seu produto. Assim, as seguintes sequências são exatas:*

- $0 \longrightarrow A \xrightarrow{u_1} A + B \xrightarrow{\binom{0}{1}} B \longrightarrow 0$
- $0 \longrightarrow B \xrightarrow{u_2} A + B \xrightarrow{\binom{1}{0}} A \longrightarrow 0$
- $0 \longrightarrow A \xrightarrow{(1,0)} A \times B \xrightarrow{p_2} B \longrightarrow 0$

- $0 \longrightarrow B \xrightarrow{(0,1)} A \times B \xrightarrow{p_1} A \longrightarrow 0$

Demonstração. Demonstrarei apenas a exatidão da primeira sequência, pois as outras seguem de forma análoga ou dual.

Veja que $0 \longrightarrow A \xrightarrow{u_1} A + B$ é um monomorfismo, pois $A \xrightarrow{u_1} A + B \xrightarrow{\binom{1}{0}} A = A \xrightarrow{1} A$ também o é.

Assim, basta mostrar que $A + B \xrightarrow{\binom{0}{1}} B$ é um cokernel de $A \xrightarrow{u_1} A + B$.

Seja então $A + B \xrightarrow{\binom{x}{y}} F$ tal que $A \xrightarrow{u_1} A + B \xrightarrow{\binom{x}{y}} F = 0$. Assim, $x = 0$, de modo que $A + B \xrightarrow{\binom{x}{y}} F = A + B \xrightarrow{\binom{0}{y}} F = A + B \xrightarrow{\binom{0}{1}} B \xrightarrow{y} F$.

O morfismo y é o único que satisfaz isto, pois caso um morfismo y' seja tal que $y' \circ \binom{0}{1} = \binom{x}{y}$, segue que $\binom{0}{y'} = \binom{x}{y}$, e, portanto, $y' = y$. Assim, temos o que era desejado, e a sequência é então exata. □

Proposição 4.5.2. *Sejam A e B objetos, $(A + B, u_1, u_2)$ sua soma e $(A \times B, p_1, p_2)$ seu produto. Assim, a intersecção dos subobjetos u_1 e u_2 é nula e a intersecção dos objetos quociente p_1 e p_2 é nula.*

Demonstração. Seguindo o enunciado da proposição, mostrarei apenas para a intersecção de u_1 e u_2, pois para p_1 e p_2 é dual.

Segue da proposição anterior e da construção da intersecção enunciada no Corolário 4.2.10. Pela proposição anterior, o u_1 é um kernel de $A + B \xrightarrow{\binom{0}{1}} B$. Agora, pela construção de $u_1 \cap u_2$, este subobjeto é, então, o kernel de $B \xrightarrow{u_2} A + B \xrightarrow{\binom{0}{1}} B$. Mas $B \xrightarrow{u_2} A + B \xrightarrow{\binom{0}{1}} B$ $= B \xrightarrow{1} B$ é um monomorfismo, de modo que, assim, $u_1 \cap u_2 = 0$. □

Com isto, podemos demonstrar o teorema desta seção.

Teorema 4.5.3. *Sejam A e B objetos, $(A + B, u_1, u_2)$ sua soma e $(A \times B, p_1, p_2)$ seu produto. Assim, $A + B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} A \times B$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Seja $K \longrightarrow A + B$ o kernel de $A + B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} A \times B$. Assim,

$$K \longrightarrow A + B \xrightarrow{\binom{0}{1}} B = K \longrightarrow A + B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} A \times B \xrightarrow{p_2} B = 0$$

de forma que K está contido no kernel de $A + B \xrightarrow{\binom{0}{1}} B$, que vimos que é u_1.

Similarmente, temos que K está contido em u_2. Como está contido em ambos, está então contido em sua intersecção, que vimos que é nula. Assim, temos que $K = 0$, e, portanto, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ é um monomorfismo.

Da mesma maneira vemos que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ é um epimorfismo e, portanto, pelo Teorema 4.1.5, é um isomorfismo. □

Assim, dados objetos A e B, $(A+B, u_1, u_2)$ sua soma e $(A \times B, p_1, p_2)$ seu produto, temos que $A + B$ é um objeto isomorfo a $A \times B$, de forma que podemos ver o produto como uma soma, e a soma como um produto por meio deste isomorfismo. Assim, daremos uma notação especial a isto.

Definição 4.5.4. *Sejam A e B objetos. Dizemos que a quíntupla $(A \oplus B, u_1, u_2, p_1, p_2)$ é uma* ***soma direta*** *de A e B se $(A \oplus B, u_1, u_2)$ é uma soma e $(A \oplus B, p_1, p_2)$ é um produto.*

Neste caso, dizemos que esta quíntupla forma um ***sistema de soma direta*** *se*

$$p_1 \circ u_1 = 1_A \qquad p_2 \circ u_2 = 1_B$$
$$p_1 \circ u_2 = 0 \qquad p_2 \circ u_1 = 0$$

Proposição 4.5.5. *Sejam A e B objetos, $(A + B, u_1, u_2)$ uma soma e $(A \times B, p_1, p_2)$ um produto. Assim, $(A + B, u_1, u_2, \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$ e $(A \times B, (1, 0), (0, 1), p_1, p_2)$ são somas diretas. Ainda mais, formam sistemas de soma direta.*

Demonstração. Basta utilizar o isomorfismo $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ e os comentários envolvendo isomorfismos de produtos e isomorfismos de somas do capítulo anterior para ver que $(A + B, \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$ é um produto e $(A \times B, (1, 0), (0, 1))$ é uma soma:

$$\begin{aligned} p_1 \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) &= p_1 \circ (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \\ p_2 \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) &= p_2 \circ (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ u_1 &= \begin{pmatrix} {\scriptstyle (1,0)} \\ {\scriptstyle (0,1)} \end{pmatrix} \circ u_1 = (1, 0) \\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ u_2 &= \begin{pmatrix} {\scriptstyle (1,0)} \\ {\scriptstyle (0,1)} \end{pmatrix} \circ u_2 = (0, 1) \end{aligned}$$

Que formam sistemas de soma direta segue da definição dos morfismos $(1, 0)$, $(0, 1)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ □

Em particular, somas diretas e sistemas de soma direta de quaisquer dois objetos existem em categorias abelianas, pois podemos adicionar informação a sua soma ou a seu produto para que se tornem um sistema de soma direta. Dada uma soma direta, seguiremos com a notação que já utilizamos para o único morfismo que comuta o diagrama do produto e o que comuta o diagrama da soma.

Sistemas de soma direta são mais convenientes de se lidar com por conta das propriedades adicionais dos morfismos. Temos, de certa forma, uma recíproca para a última proposição:

Proposição 4.5.6. *Sejam A e B objetos e $(A \oplus B, u_1, u_2, p_1, p_2)$ um sistema de soma direta de A e B. Assim, com relação à soma $(A \oplus B, u_1, u_2)$, temos que $p_1 = A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} A$ e $p_2 = A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} B$. E, com relação ao produto $(A \oplus B, p_1, p_2)$, temos que $u_1 = A \xrightarrow{(1,0)} A \oplus B$ e $u_2 = B \xrightarrow{(0,1)} A \oplus B$.*

Demonstração. Como os morfismos satisfazem as igualdades da definição de sistema de soma direta, temos que $p_1 \circ u_1 = 1_A$ e $p_1 \circ u_2 = 0$, de forma que p_1 satisfaz a propriedade que define $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ unicamente e é, portanto, igual ao mesmo. Similarmente para os outros casos. □

Assim como com somas e produtos, muitas vezes omitiremos a quíntupla $(A \oplus B, u_1, u_2, p_1, p_2)$ e diremos que apenas $A \oplus B$ é a soma direta de A e B, e, neste caso, os morfismos da quíntupla terão esta mesma notação. Também substituiremos estes morfismos pelos das igualdades na proposição acima livremente, ficando implícito que estes vêm da estrutura de soma ou produto respectiva.

4.6 A ESTRUTURA DE GRUPO ABELIANO PARA HOM

Para cada par de objetos A e B, definiremos aqui uma estrutura de grupo abeliano para (A, B) que será de grande interesse para nosso estudo.

Primeiramente definirei dois morfismos auxiliares para que possamos definir esta operação.

Definição 4.6.1. *Seja A um objeto e $A \oplus A$ uma soma direta. Definimos*

*O **morfismo diagonal** de A, que denotaremos por Δ_A, como o morfismo $A \xrightarrow{(1,1)} A \oplus A$.*

*O **morfismo codiagonal** de A, que denotaremos por ∇_A, como o morfismo $A \oplus A \xrightarrow{\binom{1}{1}} A$.*

Assim, definimos a operação:

Definição 4.6.2. *Sejam A e B dois objetos, e fixemos duas somas diretas $A \oplus A$ e $B \oplus B$. Definimos a operação $+$ em (A, B) por, para dois morfismos $A \xrightarrow{x} B$ e $A \xrightarrow{y} B$ em (A, B), o morfismo $x + y$ é definido como*

$$A \xrightarrow{x+y} B \ = A \xrightarrow{\Delta_A} A \oplus A \xrightarrow{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}} B \oplus B \xrightarrow{\nabla_B} B$$

Note que, como mencionado na seção de produtos e somas do capítulo anterior, todos os morfismos utilizados para esta definição dependem da soma direta em questão, pois, por exemplo, $(1, 1)$ com relação a um produto será um morfismo diferente de $(1, 1)$ com relação a um outro produto.

Mas, podemos ver que a escolha das somas diretas não importam para esta operação, pois dadas outras somas diretas, estas são isomorfas às escolhidas de uma forma que os morfismos diagonal, codiagonal e o morfismo entre as somas diretas da definição da operação acabam, de certo modo, cancelando estes isomorfismos e temos no fim a mesma composição.

Veremos que esta operação é uma operação de grupo que é comutativa e satisfaz uma bilinearidade com a composição de morfismos.

Para mostrar estas propriedades, estaremos muitas vezes trabalhando com somas diretas distintas, mas manteremos a notação dos únicos morfismos que comutam os diagramas da soma sem distinção entre as somas diretas, e o mesmo para os morfismos do produto. Isto não será grande problema caso tenhamos em mente seus domínios e contradomínios.

Também, por conveniência, suporemos que todas as somas diretas que escolhermos são sistemas de soma direta.

Proposição 4.6.3. *Para todo morfismo $A \xrightarrow{x} B$, temos que $x + 0 = x = 0 + x$.*

Demonstração. Vejamos primeiramente que $A \oplus A \xrightarrow{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} B \oplus B$ pode ser escrito como $u_1 \circ x \circ p_1$: Note que

$$\begin{gathered} p_1 \circ u_1 \circ x \circ p_1 \circ u_1 = 1_B \circ x \circ 1_A = x, \\ p_1 \circ u_1 \circ x \circ p_1 \circ u_2 = 0, \\ p_2 \circ u_1 \circ x \circ p_1 \circ u_1 = 0, \\ p_2 \circ u_1 \circ x \circ p_1 \circ u_2 = 0, \end{gathered}$$

de forma que $u_1 \circ x \circ p_1$ satisfaz a propriedade que define $\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ de forma única. Assim,

$$x + 0 = \nabla_B \circ \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \circ \Delta_A = \nabla_B \circ u_1 \circ x \circ p_1 \circ \Delta_A = 1_B \circ x \circ 1_A = x$$

Similarmente, mostrando que $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right) = u_2 \circ x \circ p_2$, vemos que $0 + x = x$. □

Proposição 4.6.4. *Sejam $x, y \in (B, C)$, $w \in (A, B)$ e $z \in (C, D)$. Assim,*

$$(x + y) \circ w = x \circ w + y \circ w$$
$$z \circ (x + y) = z \circ x + y \circ z$$

Demonstração. Bem, note que $\Delta_B \circ w = (1, 1) \circ w = (w, w)$. Veremos então que $\Delta_B \circ w = \left(\begin{smallmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{smallmatrix}\right) \circ \Delta_A$ mostrando que o lado direito da igualdade satisfaz a propriedade que define (w, w) de forma única:

Para isto, compomos com as projeções. Vemos que $p_1 \circ \left(\begin{smallmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{smallmatrix}\right) \circ \Delta_A = \left(\begin{smallmatrix} w \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \circ \Delta_A = w \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \circ \Delta_A = w \circ p_1 \circ \Delta_A = w \circ 1_A = w$, e, similarmente, $p_2 \circ \left(\begin{smallmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{smallmatrix}\right) \circ \Delta_A = w$.

Veja também que $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \circ \left(\begin{smallmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \circ w & 0 \\ 0 & y \circ w \end{pmatrix}$, pois o lado esquerdo da equação satisfaz as propriedades únicas do lado direito:

$$p_1 \circ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \circ \left(\begin{smallmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{smallmatrix}\right) \circ u_1 = \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \circ (w, 0) = x \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \circ (1, 0) \circ w = x \circ p_1 \circ u_1 \circ w = x \circ w$$
$$p_2 \circ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \circ \left(\begin{smallmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{smallmatrix}\right) \circ u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \circ (w, 0) = y \circ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \circ (1, 0) \circ w = y \circ p_2 \circ u_1 \circ w = 0$$
$$p_1 \circ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \circ \left(\begin{smallmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{smallmatrix}\right) \circ u_2 = \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \circ (0, w) = x \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \circ (0, 1) \circ w = x \circ p_1 \circ u_2 \circ w = 0$$
$$p_2 \circ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \circ \left(\begin{smallmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{smallmatrix}\right) \circ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \circ (0, w) = y \circ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \circ (0, 1) \circ w = y \circ p_2 \circ u_2 \circ w = y \circ w$$

Sendo assim, temos então que

$$(x+y) \circ w = \nabla_C \circ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \circ \Delta_B \circ w = \nabla_C \circ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \circ \left(\begin{smallmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{smallmatrix}\right) \circ \Delta_A = \nabla_C \circ \begin{pmatrix} x \circ w & 0 \\ 0 & y \circ w \end{pmatrix} \circ \Delta_A = x \circ w + y \circ w$$

De forma similar, vemos que $z \circ (x + y) = z \circ x + y \circ z$. □

Para mostrar as outras propriedades de grupo precisarei da seguinte proposição:

Proposição 4.6.5. *Sejam A, B e C objetos e $A \oplus B$ um sistema de soma direta, e sejam $a_u \in (C, A)$, $a_p \in (A, C)$, $b_u \in (C, B)$ e $b_p \in (B, C)$ morfismos. Assim,*

$$u_1 \circ a_u + u_2 \circ b_u = C \xrightarrow{(a_u, b_u)} A \oplus B = u_2 \circ b_u + u_1 \circ a_u$$
$$a_p \circ p_1 + b_p \circ p_2 = A \oplus B \xrightarrow{\begin{pmatrix} a_p \\ b_p \end{pmatrix}} C = b_p \circ p_2 + a_p \circ p_1$$

Em particular, tomando $B = C = A$ e as identidades de A, temos que

$$u_1 + u_2 = \Delta_A = u_2 + u_1$$
$$p_1 + p_2 = \nabla_A = p_2 + p_1$$

Demonstração. Para a primeira igualdade, basta mostrar que $u_1 \circ a_u + u_2 \circ b_u$ e $u_2 \circ b_u + u_1 \circ a_u$ satisfazem a propriedade que define (a_u, b_u) unicamente:

$p_1 \circ (u_1 \circ a_u + u_2 \circ b_u) = p_1 \circ u_1 \circ a_u + p_1 \circ u_2 \circ b_u = a_u + 0 = a_u$ e $p_2 \circ (u_1 \circ a_u + u_2 \circ b_u) = p_2 \circ u_1 \circ a_u + p_2 \circ u_2 \circ b_u = 0 + b_u = b_u$, mostrando que $u_1 \circ a_u + u_2 \circ b_u = (a_u, b_u)$. Similarmente vemos que $u_2 \circ b_u + u_1 \circ a_u$ também satisfaz isto.

Similarmente também mostramos a outra igualdade. □

Proposição 4.6.6. *Sejam $x, y \in (A, B)$. Assim, $x + y = y + x$.*

Demonstração. Note que $x = p_1 \circ (x, y)$ e $y = p_2 \circ (x, y)$, de forma que

$$x + y = p_1 \circ (x,y) + p_2 \circ (x,y) = (p_1 + p_2) \circ (x,y) = (p_2 + p_1) \circ (x,y) = \\ p_2 \circ (x,y) + p_1 \circ (x,y) = y + x$$

como desejado. □

A operação é, portanto, comutativa.

Proposição 4.6.7. *Sejam $x, y, z \in (A, B)$. Assim, $(x + y) + z = x + (y + z)$.*

Demonstração. Por um lado, veja que

$$\nabla_B \circ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) \circ \Delta_A = \nabla_B \circ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) \circ (u_1 + u_2) = \nabla_B \circ (\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) \circ u_1 + \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) \circ u_2) = \nabla_B \circ ((x,y) + (0,z)) = \\ \nabla_B \circ (x,y) + \nabla_B \circ (0,z) = (p_1 + p_2) \circ (x,y) + (p_1 + p_2) \circ (0,z) = (x+y) + (0+z) = (x+y) + z$$

E, por outro lado,

$$\nabla_B \circ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) \circ \Delta_A = (p_1 + p_2) \circ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) \circ \Delta_A = (p_1 \circ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) + p_2 \circ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right)) \circ \Delta_A = (\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix}\right)) \circ \Delta_A = \\ \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \circ \Delta_A + \left(\begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix}\right) \circ \Delta_A = \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \circ (u_1 + u_2) + \left(\begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix}\right) \circ (u_1 + u_2) = (x + 0) + (y + z) = x + (y + z)$$

Unindo então estas igualdades obtemos o que é desejado. □

Assim, a operação é associativa, e passaremos a ignorar os parenteses envolvendo ela.

Ainda não mostramos que a operação é uma operação de grupo, pois ainda nos falta demonstrar a existência de elementos inversos, mas podemos mostrar algumas propriedades interessantes das composições, que serão também úteis para isto. Vejamos que as composições de morfismos seguem as regras de composição de matrizes usual, com apenas uma possível mudança na ordem, dependendo de como é descrita a composição.

Proposição 4.6.8. *Sejam A e B objetos e $A \oplus B$ um sistema de soma direta. Assim,*

$$A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)} A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)} A \oplus B = A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} xa+zb & ya+wb \\ xc+zd & yc+wd \end{smallmatrix}\right)} A \oplus B$$

Demonstração. Basta ver que a composição do lado esquerdo satisfaz a propriedade que define o morfismo do lado direito de forma única:

$$\begin{aligned} p_1 \circ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \circ u_1 &= \left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right) \circ (a,b) = (x \circ p_1 + z \circ p_2) \circ (u_1 \circ a + u_2 \circ b) \\ &= x \circ p_1 \circ u_1 \circ a + z \circ p_2 \circ u_1 \circ a + x \circ p_1 \circ u_2 \circ b + z \circ p_2 \circ u_2 \circ b \\ &= x \circ a + z \circ b = xa + zb \end{aligned}$$

E, similarmente,

$$p_2 \circ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \circ u_1 = ya + wb$$

$$p_1 \circ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \circ u_2 = xc + zd$$

$$p_2 \circ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \circ u_2 = yc + wd$$

□

Com argumentos similares podemos ver também que

$$A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)} A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right)} A \oplus B = A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} xa+zb \\ xc+zd \end{smallmatrix}\right)} A \oplus B$$

e

$$A \oplus B \xrightarrow{(a,b)} A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)} A \oplus B = A \oplus B \xrightarrow{(xa+zb, ya+wb)} A \oplus B$$

Proposição 4.6.9. *Seja $x \in (A, B)$. Assim, existe $y \in (A, B)$ tal que $x + y = 0 = y + x$.*

Demonstração. Considere o morfismo $A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} A \oplus B$.

Seja $K \xrightarrow{(k_1,k_2)} A \oplus B$ o kernel de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Assim,

$$K \xrightarrow{(0,0)} A \oplus B = K \xrightarrow{(k_1,k_2)} A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} A \oplus B = K \xrightarrow{(k_1, x \circ k_1 + k_2)} A \oplus B$$

De modo que $k_1 = 0$, e $x \circ k_1 + k_2 = 0$, nos dando também que $k_2 = 0$. Assim, o kernel de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ é o subobjeto nulo, e este é, portanto, um monomorfismo. Similarmente vemos que este é um epimorfismo.

Sendo um monomorfismo e um epimorfismo, pelo Teorema 4.1.5, segue que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ é um isomorfismo. Seja $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ sua inversa. Como $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, segue que

$$\begin{aligned} a + xc &= 1 \\ b + xd &= 0 \\ c &= 0 \\ d &= 1 \end{aligned}$$

Assim, como $d = 1$, segue da segunda equação acima que $b + x = 0$. Como a operação é comutativa, também temos então que $x + b = 0$, e segue o que era desejado. ☐

Com isto, vemos que para cada par de objetos A e B, temos que $((A, B), +)$ é um grupo abeliano, e estas operações nos conjuntos de morfismos são tais que a composição é bilinear com relação a $+$.

Com esta bilinearidade, vemos, ainda mais, $((A, A), +, \circ)$ como um anel para todo objeto A. Utilizaremos normalmente, entretanto, a estrutura de anel oposta, $((A, A), +, \circ_{\text{op}})$, com multiplicação feita trocando a ordem dos fatores. Chamaremos este anel com a estrutura oposta de **o anel de endomorfismos de** A.

Algumas outras definições equivalentes de categorias abelianas começam já com uma estrutura de grupo abeliano em cada conjunto de morfismos que satisfaz a bilinearidade com a composição, e desta operação junto de outros axiomas derivam os axiomas da definição feita deste trabalho.

Com a operação de soma podemos ver algumas outras proposições importantes.

Podemos ver agora algo que foi prenunciado no capítulo anterior:

Proposição 4.6.10. *Sejam A e B dois objetos, e $x, y \in (A, B)$. Assim, o kernel de $x - y$ é o equalizador de x e y, e o cokernel de $x - y$ é o coequalizador de x e y.*

Demonstração. Mostrarei apenas que o kernel de $x - y$ é o equalizador de x e y, pois o outro resultado segue dualmente. Seja k o kernel de $x - y$. Assim, verifiquemos que k satisfaz a propriedade do equalizador:

Temos que $xk - yk = (x-y)k = 0$, de modo que $xk = yk$, e, se z é tal que $xz = yz$, vemos que $(x-y)z = xz - yz = 0$, de modo que como k é o kernel de $x - y$, z se fatora por k. $\square$

Com isto, podemos também ver uma forma mais simples de descrever pullbacks e pushouts.

Proposição 4.6.11.

Sejam $A \xrightarrow{\alpha} M$ e $B \xrightarrow{\beta} M$ dois morfismos. Assim, $P \xrightarrow{(x,y)} A \oplus B$ é um kernel de $\left(\begin{smallmatrix}\alpha \\ -\beta\end{smallmatrix}\right)$ se, e somente se, (P, x, y) é um pullback para α e β.

Sejam $M \xrightarrow{\alpha} A$ e $M \xrightarrow{\beta} B$ dois morfismos. Assim, $A \oplus B \xrightarrow{\binom{x}{y}} P$ é um cokernel de $(\alpha, -\beta)$ se, e somente se, (P, x, y) é um pushout para α e β.

Demonstração. As idas Seguem de suas respectivas construções feitas neste capítulo, notando, em especial, que, por exemplo para o caso do pullback, se p_1 e p_2 são as projeções de $A \oplus B$, então $\alpha \circ p_1 = \left(\begin{smallmatrix}\alpha \\ 0\end{smallmatrix}\right)$ e $\beta \circ p_2 = \begin{pmatrix}0 \\ \beta\end{pmatrix}$, e o equalizador de $\alpha \circ p_1$ e $\beta \circ p_2$ é justamente o kernel de $\left(\begin{smallmatrix}\alpha \\ -\beta\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\alpha \\ 0\end{smallmatrix}\right) - \begin{pmatrix}0 \\ \beta\end{pmatrix}$.

Para a volta, no caso do pullback, já que o caso do pushout é dual, supondo que (x, y) é o kernel de $\left(\begin{smallmatrix}\alpha \\ -\beta\end{smallmatrix}\right)$, temos que $\alpha \circ x - \beta \circ y = \left(\begin{smallmatrix}\alpha \\ -\beta\end{smallmatrix}\right) \circ (x, y) = 0$, de modo que $\alpha \circ x = \beta \circ y$.

E se x' e y' são tais que $\alpha \circ x' = \beta \circ y'$, então $\left(\begin{smallmatrix}\alpha \\ -\beta\end{smallmatrix}\right) \circ (x', y') = \alpha \circ x' - \beta \circ y' = 0$, e (x', y') deve se fatorar de forma única pelo kernel de $\left(\begin{smallmatrix}\alpha \\ -\beta\end{smallmatrix}\right)$ como $(x', y') = (x, y) \circ c$ para algum morfismo c, e é fácil de ver que este morfismo é o único que comuta o diagrama do pushout. $\square$

E podemos demonstrar os teoremas do pullback e do pushout:

Teorema 4.6.12.

Se $A \xrightarrow{\alpha} M$ é um morfismo e $B \xrightarrow{\beta} M$ é um epimorfismos, e (P, x, y) é seu pullback, então x é um epimorfismo.

Se $M \xrightarrow{\alpha} A$ é um morfismo e $M \xrightarrow{\beta} B$ é um monomorfismos, e (P, x, y) é seu pushout, então x é um monomorfismo.

Demonstração. Demonstrarei apenas para o pullback, pois para o pushout é dual. Nas hipóteses desta parte do enunciado, considere então c o cokernel de x. Mostrarei que $c = 0$.

Vimos na última proposição que (x, y) é o kernel de $\left(\begin{smallmatrix}\alpha \\ -\beta\end{smallmatrix}\right)$. Como β é um epimorfismo, vemos facilmente que $\left(\begin{smallmatrix}\alpha \\ -\beta\end{smallmatrix}\right)$ também o é, já que $\left(\begin{smallmatrix}\alpha \\ -\beta\end{smallmatrix}\right) \circ u_2 = -\beta$ é um epimorfismo. Deste modo, o cokernel de (x, y) é $\left(\begin{smallmatrix}\alpha \\ -\beta\end{smallmatrix}\right)$.

Assim, como $\left(\begin{smallmatrix}c \\ 0\end{smallmatrix}\right) \circ (x, y) = c \circ p_1 \circ (x, y) = c \circ x = 0$, temos que $\left(\begin{smallmatrix}c \\ 0\end{smallmatrix}\right) = c' \circ \left(\begin{smallmatrix}\alpha \\ -\beta\end{smallmatrix}\right)$ para algum morfismo c'. Deste modo, $\left(\begin{smallmatrix}c \\ 0\end{smallmatrix}\right) = c' \circ \left(\begin{smallmatrix}\alpha \\ -\beta\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}c' \circ \alpha \\ c' \circ (-\beta)\end{pmatrix}$.

Desta forma, temos que $c = c' \circ \alpha$, e $0 = c' \circ (-\beta) = -c' \circ \beta$, ou, $c' \circ \beta = 0$. Como β é um epimorfismo, temos que $c' = 0$, e, portanto, $c = c' \circ \alpha = 0$.

Como c é o cokernel de x, segue que x é um epimorfismo, como desejado. $\square$

Conseguimos também demonstrar algumas outras formas de se mostrar que uma dada quíntupla é um sistema de soma direta.

Teorema 4.6.13. *Seja $(S, A \xrightarrow{u_1} S, B \xrightarrow{u_2} S, S \xrightarrow{p_1} A, S \xrightarrow{p_2} B)$ uma quíntupla. Assim, são equivalentes:*

1) (S, u_1, u_2, p_1, p_2) *é um sistema de soma direta.*

2) $p_1 \circ u_1 = 1_A$*,* $p_2 \circ u_2 = 1_B$ *e* $A \xrightarrow{u_1} S \xrightarrow{p_2} B$ *e* $B \xrightarrow{u_2} S \xrightarrow{p_1} A$ *são sequências exatas.*

3) $p_1 \circ u_1 = 1_A$*,* $p_2 \circ u_2 = 1_B$*,* $p_1 \circ u_2 = 0$*,* $p_2 \circ u_1 = 0$ *e* $u_1p_1 + u_2p_2 = 1_S$*.*

Demonstração.

$1 \implies 2$ As igualdades seguem diretamente do fato de que a quíntupla é um sistema de soma direta, e a exatidão das sequências segue das proposições 4.5.6 e 4.5.1.

$2 \implies 3$ As quatro primeiras igualdades seguem diretamente. Denotemos por s o morfismo $u_1p_1 + u_2p_2$. Assim, considere o morfismo $z = 1_S - s$.

Veja que $p_1z = p_1(1_S - s) = p_1 - p_1(u_1p_1 + u_2p_2) = p_1 - p_1u_1p_1 - p_1u_2p_2 = p_1 - p_1 = 0$. De forma similar, $p_2z = 0$. Como u_2 é o kernel de p_1 (notando que u_2 é um monomorfismo, pois $p_1u_1 = 1_A$), então z deve se fatorar como u_2z' para algum morfismo $z' \in (S, B)$. Assim, veja que

$$z' = 1_Bz' = p_2u_2z' = p_2z = 0$$

De forma que $z = u_2z' = 0$. Assim, $1_S - s = z = 0$ e, portanto, $s = 1_S$.

$3 \implies 1$ Basta mostrar que (S, u_1, u_2) é uma soma de A e B, e que (S, p_1, p_2) é um produto de A e B, pois as equações de um sistema de soma direta são satisfeitas por hipótese. Mostrarei apenas que (S, u_1, u_2) é uma soma, pois que (S, p_1, p_2) é um produto segue de forma dual.

Seja $(X, A \xrightarrow{x_1} X, B \xrightarrow{x_2} X)$ uma tripla. Mostrarei que existe um único morfismo $S \xrightarrow{x} X$ tal que $x \circ u_1 = x_1$ e $x \circ u_2 = x_2$.

Considere o morfismo de S para X dado por $x = x_1p_1 + x_2p_2$. Assim, veja que

$$xu_1 = (x_1p_1 + x_2p_2)u_1 = x_1p_1u_1 + x_2p_2u_1 = x_11_A + x_20 = x_1$$

e

$$xu_2 = (x_1p_1 + x_2p_2)u_2 = x_1p_1u_2 + x_2p_2u_2 = x_10 + x_21_B = x_2$$

E, para a unicidade, seja y um morfismo tal que $yu_1 = x_1$ e $yu_2 = x_2$. Assim, temos que

$$y = y1_S = y(u_1p_1 + u_2p_2) = yu_1p_1 + yu_2p_2 = x_1p_1 + x_2p_2 = x$$

Concluindo que (S, u_1, u_2) é uma soma. □

5 FUNTORES E SUBCATEGORIAS

Saímos de categorias abelianas por um momento para definir funtores, que serão de alta importância nos próximos capítulos, em que começaremos a focar no Teorema de Freyd-Mitchell.

5.1 FUNTORES

Definição 5.1.1 (Funtores)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ duas categorias quaisquer. Um **funtor**, ou um **funtor covariante**, F entre $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$, que escrevemos $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, consiste de*

- *Uma aplicação entre a classe de objetos de $\mathscr{C}$ e a classe de objetos de $\mathscr{D}$, atribuindo ao objeto $C \in \mathscr{C}$ um objeto $F(C) \in \mathscr{D}$.*
- *Para cada dois objetos A e B de $\mathscr{C}$, uma função entre $(A, B)_{\mathscr{C}}$ e $(F(A), F(B))_{\mathscr{D}}$, atribuindo a cada morfismo $A \xrightarrow{f} B$ um morfismo $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$. Quando estivermos considerando apenas um morfismo $A \longrightarrow B$, e for mais conveniente a omissão do nome do morfismo, muitas vezes escreveremos apenas $F(A) \longrightarrow F(B)$ para F($A \longrightarrow B$).*

E deve satisfazer

1. *Para todo objeto A de $\mathscr{C}$, $F(1_A) = 1_{F(A)}$.*
2. *Para cada par de morfismos $A \xrightarrow{f} B$ e $B \xrightarrow{g} C$, temos que $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$*

Assim como os morfismos de grupo são funções entre grupos que preservam a estrutura de grupo, os funtores são como funções entre categorias que preservam a estrutura de categoria.

Como funtores preservam composição, dado um diagrama comutativo, sua imagem por um funtor será também um diagrama comutativo.

Exemplo 5.1.2 (O funtor identidade)**.** *Dada uma categoria $\mathscr{C}$ qualquer, há um funtor $I\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ tal que $I(C) = C$ e $I(f) = f$, para todo objeto C e morfismo f de $\mathscr{C}$. Este é chamado o funtor identidade de $\mathscr{C}$.*

Exemplo 5.1.3 (Funtores Constantes)**.** *Dadas duas categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$, e dado um objeto $D \in \mathscr{D}$, o funtor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ tal que $F(C) = D$ e $F(f) = 1_D$ para cada objeto C e morfismo f de $\mathscr{C}$ é chamado funtor constante e igual a D.*

Exemplo 5.1.4 (O funtor esquecimento de Grp)**.** *Temos um funtor de Grp para Set que que atribui a cada grupo o seu conjunto correspondente e a cada morfismo de grupo ele mesmo visto como uma função entre conjuntos. Este é chamado o funtor esquecimento.*

Em muitas categorias cujos objetos são conjuntos com uma estrutura e os morfismos são funções entre conjuntos que preservam esta estrutura, como Ab, Ring e R-mod, podemos definir um funtor deste tipo, que "esquece" toda a estrutura dos conjuntos.

Podemos também esquecer a estrutura dos conjuntos de forma parcial. É possível, por exemplo, definir um funtor entre R-mod e Ab que remove apenas a multiplicação por escalar que torna o grupo abeliano num R-módulo.

Exemplo 5.1.5 (A inclusão de Ab em Grp)**.** *Há um funtor entre Ab e Grp que leva cada grupo abeliano em sua cópia em Grp, e cada morfismo no próprio morfismo de grupos.*

Quando falarmos de subcategorias, podemos ver que esta é a inclusão da subcategoria cheia de Grp formada pelos grupos abelianos em Grp.

Definição 5.1.6. *Dados dois funtores $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ e $G\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$, definimos o funtor composição de G com F como $G \circ F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ que leva os objetos A em $G(F(A))$ e os morfismos f em $G(F(f))$.*

5.2 FUNTORES CONTRAVARIANTES

Definição 5.2.1 (Funtores)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ duas categorias quaisquer. Um **funtor contravariante**, F entre $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$, que escrevemos $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, consiste de*

- *Uma aplicação entre a classe de objetos de $\mathscr{C}$ e a classe de objetos de $\mathscr{D}$, atribuindo ao objeto $C \in \mathscr{C}$ um objeto $F(C) \in \mathscr{D}$.*
- *Para cada dois objetos A e B de $\mathscr{C}$, uma função entre $(A,B)_{\mathscr{C}}$ e $(F(B),F(A))_{\mathscr{D}}$, atribuindo a cada morfismo $A \xrightarrow{f} B$ um morfismo $F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A)$. Quando estivermos considerando apenas um morfismo $A \longrightarrow B$, e for mais conveniente a omissão do nome do morfismo, muitas vezes escreveremos apenas $F(B) \longrightarrow F(A)$ para F($A \longrightarrow B$).*

  E deve satisfazer

1. *Para todo objeto A de $\mathscr{C}$, $F(1_A) = 1_{F(A)}$.*
2. *Para cada par de morfismos $A \xrightarrow{f} B$ e $B \xrightarrow{g} C$, temos que $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$*

Um funtor contravariante F entre duas categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ pode ser visto como um funtor covariante entre $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ e $\mathscr{D}$ pela mesma associação dada por F.

Alternativamente, podemos também ver este funtor F como um funtor covariante entre $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}^{\mathrm{op}}$, utilizando também a mesma associação dada por F.

Por outro lado, de modo que temos uma equivalência entre estas formas de ver um funtor contravariante e sua definição, podemos ver todo funtor covariante entre $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ e $\mathscr{D}$ como um funtor contravariante entre $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$, e todo funtor covariante entre $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}^{\mathrm{op}}$ como um funtor contravariante entre $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$, tomando os funtores contravariantes que associam os objetos e os morfismos da mesma forma que o funtor covariante.

Usualmente quando falarmos de um funtor sem especificar se este é covariante ou contravariante, assumiremos que este é covariante. É claro, quando necessário enfatizaremos a covariância do funtor.

Como principal exemplo, temos o funtor dual de uma categoria para sua categoria dual.

Exemplo 5.2.2 (Funtor Dual)**.** *Dada uma categoria $\mathscr{C}$, o **funtor dual** é um funtor contravariante $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ que leva objetos e morfismos neles mesmos, mas em $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$.*

Outros exemplos de funtores contravariantes aparecerão ainda pelo trabalho, como na próxima seção.

5.3 OS FUNTORES HOM

Duas classes de funtores de grande importância são os funtores Hom, que podem ser definidos de qualquer categoria para Set, e que merecem neste trabalho uma seção dedicada a eles.

Definição 5.3.1. *Dada uma categoria $\mathscr{C}$ e um objeto C de $\mathscr{C}$, definimos o funtor $(C, \_)_{\mathscr{C}} \colon \mathscr{C} \to Set$ por*

- *$(C, \_)_{\mathscr{C}}(X)$ é o conjunto de morfismos entre C e X, ou seja, $(C, X)_{\mathscr{C}}$*
- *Para $X \xrightarrow{f} Y$, $(C, \_)_{\mathscr{C}}(f)$, denotado por $(C, f)_{\mathscr{C}}$, é a função entre os conjuntos $(C, X)_{\mathscr{C}}$ e $(C, Y)_{\mathscr{C}}$ que leva um morfismo $g \in (C, X)_{\mathscr{C}}$ no morfismo $f \circ g \in (C, Y)_{\mathscr{C}}$.*

Também denotamos este funtor por $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, \_)$, ou, num caso em que a categoria possa ficar implícita, por $(C, \_)$ ou $\mathrm{Hom}(C, \_)$.

Caso a categoria em questão seja uma categoria abeliana, cada conjunto de morfismos possui uma estrutura de grupo abeliano, e podemos ver, utilizando a Proposição 4.6.4, que (C, f) satisfaz as propriedades de um morfismo de grupos. Assim, podemos ver o funtor como um funtor para Ab, que leva cada objeto X no grupo abeliano $((C, X), +)$, e cada morfismo f no morfismo de grupo (C, f).

Podemos ir ainda além e ver estes funtores saindo de categorias abelianas como funtores para uma categoria de módulos sobre um anel R:

Proposição 5.3.2. *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana, e fixe um objeto A de $\mathscr{A}$. Assim, para todo objeto $X \in \mathscr{A}$, (A, X) possui uma estrutura de R-módulo, onde $R = (A, A)$ com a soma e a composição, e de forma que para todo morfismo f de $\mathscr{A}$, (A, f) é um morfismo de R-módulos.*

Demonstração. Para cada objeto X de $\mathscr{A}$, definimos a estrutura de R-módulo no grupo abeliano (A, X) da seguinte maneira: para cada $A \xrightarrow{x} X \in (A, X)$ e $A \xrightarrow{r} A \in R$, definimos $r \cdot x$ como $A \xrightarrow{r} A \xrightarrow{x} X$. É fácil ver que esta operação satisfaz os axiomas de R-módulos utilizando, dentre outras propriedades, a bilinearidade da soma com a composição.

E para cada $f \in (X, Y)$ morfismo de $\mathscr{A}$, o morfismo de grupos abelianos (A, f) é um morfismo de R-módulos: para $r \in R$ e $f \in (A, X)$, temos a R-linearidade:

$$(A, f)(r \cdot x) = (A, f)(x \circ r) = f \circ (x \circ r) = (f \circ x) \circ r = r \cdot (f \circ x) = r \cdot (A, f)(x)$$

□

Desta forma, $(A, \_)$ pode ser visto como um funtor para R-mod, com $R = (A, A)$, que leva cada objeto X no R-módulo $((A, X), +, \cdot)$ e cada morfismo f no morfismo de R-módulos (A, f).

É claro que estes três funtores, um que vai para Set, outro para Ab, e outro para uma categoria de módulos, são todos funtores distintos, mas seguiremos com a mesma notação para os três. Explicitarei, é claro, o contradomínio destes funtores sempre que necessário.

A outra classe de funtores Hom é a seguinte classe de funtores contravariantes.

Definição 5.3.3. *Dada uma categoria $\mathscr{C}$ e um objeto C de $\mathscr{C}$, definimos o funtor contravariante $(\_, C)_{\mathscr{C}} \colon \mathscr{C} \to Set$ por*

- *$(\_, C)_{\mathscr{C}}(X)$ é o conjunto de morfismos entre X e C, ou seja, $(X, C)_{\mathscr{C}}$*
- *Para $X \xrightarrow{f} Y$, $(\_, C)_{\mathscr{C}}(f)$, denotado por $(f, C)_{\mathscr{C}}$, é a função entre os conjuntos $(Y, C)_{\mathscr{C}}$ e $(X, C)_{\mathscr{C}}$ que leva um morfismo $g \in (Y, C)_{\mathscr{C}}$ no morfismo $g \circ f \in (X, C)_{\mathscr{C}}$.*

Da mesma forma, denotamos este funtor também por $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\_, C)$ e $(\_, C)$. Também costumaremos o ver como um funtor covariante saindo da categoria dual.

Assim como o funtor anterior, em uma categoria abeliana podemos promover este funtor para um funtor contravariante para Ab. Não necessariamente podemos o promover para um funtor para uma categoria de R-módulos com R o anel de endomorfismos do objeto. Ao menos não para a categoria de módulos à esquerda, pois podem ocorrer problemas na R-linearidade das funções. Apesar disto, podemos os promover para funtores para uma categoria de R-módulos à direita. Mas não entrarei em detalhes, pois foge de nossas necessidades.

5.4 FUNTORES ADITIVOS

Uma classe de funtores interessantes entre categorias abelianas é a classe de funtores aditivos, que preserva a estrutura da soma que demos para seus conjuntos de morfismos.

Definição 5.4.1 (Funtores Aditivos)**.** *Sejam $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ duas categorias abelianas. Um funtor $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ é dito aditivo se para cada dois objetos A e B de $\mathscr{A}$ a função entre os grupos $(A, B)_{\mathscr{C}}$ e $(F(A), F(B))_{\mathscr{D}}$ correspondente do funtor é um morfismo de grupos.*

Como exemplos de funtores aditivos, temos os funtores Hom:

Exemplo 5.4.2. *Seja $\mathscr{A}$ um objeto numa categoria abeliana $\mathscr{A}$. Assim, $(A, \_)$ e $(\_, A)$, vistos como funtores covariantes com contradomínio sendo a categoria Ab ou uma categoria de módulos, são funtores aditivos.*

Este exemplo será importante o suficiente para merecer uma demonstração, mas, por mais que seja simples mostrar que $(A, f + g) = (A, f) + (A, g)$, demonstrarei isto em duas seções de uma forma que segue diretamente de dois resultados importantes.

Teorema 5.4.3. *Seja F um funtor entre duas categorias abelianas $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$. Assim, F é aditivo se, e somente se, para todo par de objetos A e B de $\mathscr{A}$ temos que se $(A \oplus B, u_1, u_2, p_1, p_2)$ é um sistema de soma direta de A e B então $(F(A \oplus B), F(u_1), F(u_2), F(p_1), F(p_2))$ é um sistema de soma direta de $F(A)$ e $F(B)$.*

Demonstração. Suponha primeiramente que F é aditivo. Assim, considere um sistema de soma direta $(A \oplus B, u_1, u_2, p_1, p_2)$. Assim, pelo Teorema 4.6.13, $p_1u_1 = 1_A$, $p_2u_2 = 1_B$, $p_1u_2 = 0$, $p_2u_1 = 0$ e $u_1p_1 + u_2p_2 = 1_{A \oplus B}$.

Aplicando F nestes morfismos, vemos que $F(p_1)F(u_1) = F(p_1u_1) = F(1_A) = 1_{F(A)}$, e similarmente $F(p_2)F(u_2) = 1_{F(B)}$. Também vemos que $F(p_1)F(u_2) = F(p_1u_2) = F(0) = 0$ e $F(p_2)F(u_1) = 0$, já que morfismos de grupo preservam o elemento neutro da adição. E, também, $F(u_1)F(p_1) + F(u_2)F(p_2) = F(u_1p_1 + u_2p_2) = F(1_{A \oplus B}) = 1_{F(A \oplus B)}$. Com isto, pelo Teorema 4.6.13, a quíntupla $(F(A \oplus B), F(u_1), F(u_2), F(p_1), F(p_2))$ é um sistema de soma direta de $F(A)$ e $F(B)$, como desejado.

Por outro lado, supondo que F preserva sistemas de soma direta, sejam $x, y \in (A, B)_{\mathscr{A}}$, e fixe sistemas de soma direta $A \oplus A$ e $B \oplus B$, e considere os sistemas de soma direta associados em $\mathscr{B}$.

Veja que $F((x, y))$ satisfaz a propriedade que define $(F(x), F(y))$ de forma única, pois $F(p_1)F((x, y)) = F(p_1(x, y)) = F(x)$ e, similarmente, $F(p_2)F((x, y)) = F(y)$, de modo que $F((x, y)) = (F(x), F(y))$. De modo similar podemos ver que $F((\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix})) = (\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix})$, para os morfismos identidade adequados. Assim, vemos que

$$\begin{aligned}
F(x+y) &= F(p_1(x,y) + p_2(x,y)) = F((p_1+p_2)(x,y)) = F((\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix})(x,y)) = F((\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}))F((x,y)) \\
&= (\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix})(F(x), F(y)) = (F(p_1) + F(p_2))(F(x), F(y)) \\
&= F(p_1)(F(x), F(y)) + F(p_2)(F(x), F(y)) = F(x) + F(y)
\end{aligned}$$

E F é, portanto, aditivo. □

5.5 FUNTORES FIEIS E CHEIOS

Definição 5.5.1 (Funtores Fieis). *Um funtor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é dito* ***fiel*** *se para cada dois objetos A e B de $\mathscr{C}$ a função entre $(A, B)_{\mathscr{C}}$ e $(F(A), F(B))_{\mathscr{D}}$ correspondente do funtor é uma função injetiva.*

Definição 5.5.2 (Funtores Cheios). *Um funtor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é dito* ***cheio*** *se para cada dois objetos A e B de $\mathscr{C}$ a função entre $(A, B)_{\mathscr{C}}$ e $(F(A), F(B))_{\mathscr{D}}$ correspondente do funtor é uma função sobrejetiva.*

Por vezes chamaremos um funtor fiel de uma **imersão**.

Exemplo 5.5.3. *Os funtores esquecimento são funtores fieis.*

Exemplo 5.5.4. *O funtor de inclusão de Ab em Grp é um funtor fiel e cheio.*

Perceba que um funtor aditivo entre categorias abelianas é fiel se, e somente se, apenas morfismos zero são levados em morfismos zero, já que o funtor restrito aos conjuntos de morfismos é um morfismo de grupos.

Teorema 5.5.5. *Seja $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ um funtor aditivo entre categorias abelianas. São equivalentes:*

1) F é um funtor fiel.

2) F leva diagramas não comutativos em diagramas não comutativos.

3) F leva sequências não exatas em sequências não exatas.

Demonstração.

1) $\iff$ 2) Pode ser visto facilmente da definição de funtor fiel.

1) $\implies$ 3) Seja $\cdots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+1} \longrightarrow \cdots$ uma sequência não exata. Assim, esta não é exata em A_i para algum i, de modo que $\operatorname{Im}(f_i) \neq \operatorname{Ker}(f_{i+1})$.

Assim, pela Proposição 4.3.1, temos que ou $f_{i+1} \circ f_i \neq 0$ ou $c \circ k \neq 0$, em que $K \xrightarrow{k} A_i$ é o kernel de f_{i+1} e $A_i \xrightarrow{c} C$ o cokernel de f_i. Daqui temos dois casos então:

- Se $f_{i+1} \circ f_i \neq 0$, como F é fiel, temos que $F(f_{i+1}) \circ F(f_i) \neq 0$, e daqui segue também pela Proposição 4.3.1 que $\mathrm{Im}(F(f_i)) \neq \mathrm{Ker}(F(f_{i+1}))$, e a imagem da sequência por F não é exata em $F(A_i)$, e, portanto, não é uma sequência exata.
- Se $c \circ k \neq 0$, também, como F é fiel, $F(c) \circ F(k) \neq 0$. Considere então k' o kernel de $F(f_{i+1})$ e c' o cokernel de $F(f_i)$.

  Como $F(f_{i+1}) \circ F(k) = F(f_{i+1} \circ k) = F(0) = 0$, temos que $F(k)$ se fatora por k' como $F(k) = k' \circ k''$ para algum morfismo k''. De forma similar vemos que $F(c)$ se fatora por c' como $c'' \circ c'$ para algum morfismo c''.

  Assim, $F(c) \circ F(k) = c'' \circ c' \circ k' \circ k''$. Deste modo, não podemos ter que $c' \circ k' = 0$, pois, neste caso, teríamos que $F(c) \circ F(k) = 0$. Assim, como $c' \circ k' \neq 0$, segue mais uma vez pela Proposição 4.3.1 que $\mathrm{Im}(F(f_i)) \neq \mathrm{Ker}(F(f_{i+1}))$, e a imagem da sequência por F não é exata em $F(A_i)$, e assim não é exata.

3) $\implies$ 1) Seja $A \xrightarrow{x} B$ um morfismo não nulo. Assim, $A \xrightarrow{1_A} A \xrightarrow{x} B$ não é uma sequência exata, de modo que, por hipótese, $F(A) \xrightarrow{1_{F(A)}} F(A) \xrightarrow{F(x)} F(B)$ também não o é.

Pela Proposição 4.3.1, se k é o kernel de $F(x)$ e c é o cokernel de $1_{F(A)}$, como a última sequência não é exata, devemos ter que ou $c \circ k \neq 0$ ou $F(x) \circ 1_{F(x)} \neq 0$. Agora, c é um morfismo nulo, pois é o cokernel de uma identidade, de modo que $c \circ k = 0$. Deste modo, devemos ter que $F(x) \circ 1 \neq 0$. Ou seja, que $F(x) \neq 0$, e, portanto, F é fiel. □

5.6 FUNTORES EXATOS

Definição 5.6.1 (Sequências exatas à esquerda)**.** *Uma **sequência exata à esquerda** é uma sequência exata da forma* $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$.

Definição 5.6.2 (Sequências exatas à direita)**.** *Uma **sequência exata à direita** é uma sequência exata da forma* $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$.

Definição 5.6.3 (Funtores exatos à esquerda)**.** *Um funtor entre categorias abelianas* $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *é dito **exato à esquerda** se preserva sequências exatas à esquerda. Ou seja, se para toda sequência exata da forma* $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$ *em* $\mathscr{A}$ *temos que a sequência* $F(0) \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$ *é exata em* $\mathscr{B}$.

Definição 5.6.4 (Funtores exatos à direita)**.** *Um funtor entre categorias abelianas* $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *é dito **exato à direita** se preserva sequências exatas à direita.*

Uma outra forma de ver funtores exatos à esquerda e à direita é como funtores que preservam kernels e cokernels, respectivamente, notando as equivalências destes tipos de sequências dada na Proposição 4.3.3.

Proposição 5.6.5. *Seja* $\mathscr{A}$ *uma categoria abeliana. Para todo objeto* M *de* $\mathscr{A}$ *o funtor* $(M, \_)$ *é exato à esquerda.*

Demonstração. Seja $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ uma sequência exata à esquerda em $\mathscr{A}$. Mostrarei então que a sequência de grupos abelianos $(M, 0) \longrightarrow (M, A) \xrightarrow{(M,f)} (M, B) \xrightarrow{(M,g)} (M, C)$ é exata.

Primeiramente, veja que $(M, 0)$ possui um único elemento, e assim é isomorfo ao grupo abeliano contendo apenas o elemento zero. Este grupo é um objeto zero de Ab, de forma que $(M, 0)$ também o é.

Assim, temos que a sequência de grupos abelianos é exata se, e somente se, (M, f) é uma função injetiva e sua imagem é igual ao kernel de (M, g).

Para mostrar a injetividade de (M, f), sejam $x, y \in (M, A)$, e suponha que $(M, f)(x) = (M, f)(y)$. Assim, pela definição de (M, f), temos que $f \circ x = f \circ y$. Agora, da exatidão da sequência inicial, f é um monomorfismo, e desta forma segue que $x = y$, e (M, f) é, portanto, injetivo.

Para a outra parte, mostramos a igualdade dos conjuntos $\mathrm{Im}((M, f))$ e $\mathrm{Ker}((M, g))$, demonstrando que um está contido no outro.

Dado $y \in \mathrm{Im}((M, f))$, existe $x \in (M, A)$ tal que $(M, f)(x) = y$. Ou seja, $y = f \circ x$. Assim, $(M, g)(y) = g \circ y = g \circ f \circ x$. Da exatidão da sequência inicial, f é o kernel de g, de forma que $g \circ f = 0$. Assim, $(M, g)(y) = 0$, e $y \in \mathrm{Ker}((M, g))$.

Por outro lado, seja $y \in \mathrm{Ker}((M, g))$. Assim, $g \circ y = (M, g)(y) = 0$. Agora, f é o kernel de g, de modo que, pela definição de kernel, existe $x \in (M, A)$ tal que $y = f \circ x$. Assim, $y = (M, f)(x) \in \mathrm{Im}(f)$. $\square$

De modo similar, podemos ver que o funtor covariante $(\_, M)\colon \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$ é também exato à esquerda.

Teorema 5.6.6. *Funtores exatos à esquerda e funtores exatos à direita são funtores aditivos.*

Demonstração. Mostrarei que um funtor exato à esquerda satisfaz a propriedade equivalente à aditividade de um funtor mostrada no Teorema 5.4.3. Para funtores exatos à direita será similar.

Seja F um funtor exato à esquerda entre duas categorias abelianas. Sejam A e B dois objetos quaisquer e (S, u_1, u_2, p_1, p_2) um sistema de soma direta destes objetos. Assim, pelo Teorema 4.6.13, $p_1 \circ u_1 = 1_A$, $p_2 \circ u_2 = 1_B$ e $A \xrightarrow{u_1} S \xrightarrow{p_2} B$ e $B \xrightarrow{u_2} S \xrightarrow{p_1} A$ são sequências exatas. Como u_1 e u_2 são monomorfismos, temos mais ainda que $0 \longrightarrow A \xrightarrow{u_1} S \xrightarrow{p_2} B$ e $0 \longrightarrow B \xrightarrow{u_2} S \xrightarrow{p_1} A$ são sequências exatas.

Assim, $F(p_1) \circ F(u_1) = 1_{F(A)}$, $F(p_2) \circ F(u_2) = 1_{F(B)}$, e, da exatidão à esquerda de F, temos que $F(0) \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(u_1)} F(S) \xrightarrow{F(p_2)} F(B)$ e $F(0) \longrightarrow F(B) \xrightarrow{F(u_2)} F(S) \xrightarrow{F(p_1)} F(A)$ são sequências exatas, que são, em particular, exatas em $F(S)$. Portanto, pelo Teorema 4.6.13, $(F(S), F(u_1), F(u_2), F(p_1), F(p_2))$ é um sistema de soma direta e, assim, F é aditivo. $\square$

Em particular, os funtores Hom são funtores aditivos.

Definição 5.6.7 (Funtores exatos)**.** *Um funtor entre categorias abelianas $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ é dito* ***exato*** *se preserva sequências exatas. Ou seja, se para toda sequência exata em $\mathscr{A}$,*

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

temos que

$$\cdots \xrightarrow{F(f_{i-2})} F(A_{i-1}) \xrightarrow{F(f_{i-1})} F(A_i) \xrightarrow{F(f_i)} F(A_{i+1}) \xrightarrow{F(f_{i+1})} \cdots$$

é uma sequência exata em $\mathscr{B}$.

Funtores exatos, preservando sequências exatas, preservarão então todas as propriedades equivalentes descritas na Proposição 4.3.3.

Teorema 5.6.8. *Um funtor entre categorias abelianas é exato se, e somente se, é exato à direita e à esquerda.*

Demonstração. Seja $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ um funtor entre categorias abelianas. Se F é um exato, ele claramente é exato à direita e exato à esquerda, de modo que temos a ida. Suponhamos então para a volta que F é exato à direita e à esquerda.

Seja $\cdots \overset{f_{i-2}}{\longrightarrow} A_{i-1} \overset{f_{i-1}}{\longrightarrow} A_i \overset{f_i}{\longrightarrow} A_{i+1} \overset{f_{i+1}}{\longrightarrow} \cdots$ uma sequência exata em $\mathscr{A}$.

Fixe então i. Pela Proposição 4.3.4, segue então que $0 \longrightarrow K_i \longrightarrow A_i \longrightarrow F_i \longrightarrow 0$ é exata, onde $K_i \longrightarrow A_i$ é o kernel de f_i, e $A_i \longrightarrow F_i$ é o cokernel de f_{i-1}.

Da exatidão à esquerda de F, $0 \longrightarrow F(K_i) \longrightarrow F(A_i) \longrightarrow F(C_i) \longrightarrow 0$ é exata em $F(K_i)$ e $F(A_i)$, e de sua exatidão à direita, é exata em $F(C_i)$, e, portanto, é uma sequência exata.

Agora, F sendo exato à esquerda, temos que F preserva kernels, e F sendo exato à direita, F preserva cokernels. Assim, $F(K_i) \longrightarrow F(A_i)$ é o kernel de $F(f_i)$ e $A_i \longrightarrow F_i$ é o cokernel de $F(f_{i-1})$.

Assim, a sequência $0 \longrightarrow F(K_i) \longrightarrow F(A_i) \longrightarrow F(C_i) \longrightarrow 0$ é justamente a sequência da Proposição 4.3.4. Segue assim que que a sequência $\cdots \overset{f_{i-2}}{\longrightarrow} A_{i-1} \overset{f_{i-1}}{\longrightarrow} A_i \overset{f_i}{\longrightarrow} A_{i+1} \overset{f_{i+1}}{\longrightarrow} \cdots$ é exata, e F é, portanto, um funtor exato. $\square$

Com algumas poucas mudanças nos argumentos, é fácil ver que, mais que isso, F é exato se, e somente se, F é exato à esquerda e preserva epimorfismos, e se, e somente se, F é exato à direita e preserva monomorfismos.

Para qualquer anel R, podemos ver que o funtor esquecimento de R-mod para Ab é exato, pois os conjuntos dados pelos kernels e cokernels de morfismos de R-módulos são os mesmos dados pelos kernels e cokernels destes vistos como morfismos de grupo.

Lema 5.6.9. *Seja $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ um funtor fiel e exato entre categorias abelianas. A exatidão de sequências em $\mathscr{A}$ é equivalente à exatidão de suas imagens por F em $\mathscr{B}$.*

Demonstração. Fixe uma sequência. Supondo que a sequência é exata em $\mathscr{A}$, como F é exato, sua imagem por F também é exata em $\mathscr{B}$. E, por outro lado, pelo Teorema 5.5.5, como F é fiel e aditivo, já que um funtor exato é aditivo, se uma sequência é tal que sua imagem por F é exata, devemos ter que a sequência é exata ela mesma, pois caso contrário sua imagem por F não seria exata. $\square$

Teorema 5.6.10. *Seja $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ um funtor fiel e exato entre categorias abelianas. A exatidão de sequências e a comutatividade de diagramas em $\mathscr{A}$ é equivalente à exatidão e à comutatividade de suas imagens por F.*

Demonstração. Segue do lema anterior e do Teorema 5.5.5, já que todos os funtores preservam diagramas comutativos. $\square$

5.7 SUBCATEGORIAS

Definição 5.7.1 (Subcategoria)**.** *Dada uma categoria $\mathscr{C}$, uma* ***subcategoria*** *$\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$ é uma categoria tal que*

- *A classe de objetos de $\mathscr{C}'$ é uma subclasse da classe de objetos de $\mathscr{C}$.*
- *Para cada par de objetos A e B de $\mathscr{C}'$, temos que $(A,B)_{\mathscr{C}'}$ é um subconjunto de $(A,B)_{\mathscr{C}}$.*
- *Para $f \in (A,B)_{\mathscr{C}'}$ e $g \in (B,C)_{\mathscr{C}'}$, temos que $g \circ f$ pela operação de composição em $\mathscr{C}'$ é igual a $g \circ f$ pela operação de composição de $\mathscr{C}$.*

Nos termos desta definição, o funtor que inclui a subcategoria $\mathscr{C}'$ em $\mathscr{C}$, levando os objetos e os morfismos neles mesmos, é chamado **funtor inclusão**. Este funtor é claramente um funtor fiel.

Nem toda subcategoria de uma categoria abeliana será também abeliana. Considere, por exemplo, a subcategoria dos grupos abelianos formada por todos os grupos abelianos, mas cujos morfismos são apenas as identidades. Esta categoria não possui nem sequer um objeto zero.

Note que um morfismo f numa subcategoria $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$ pode ser um monomorfismo em $\mathscr{C}'$ mas não em $\mathscr{C}$, pois podem haver dois morfismos distintos x e y em $\mathscr{C}$ cuja composição com f é igual, mas que não estão em $\mathscr{C}'$. Também, um morfismo pode ser um kernel de outro morfismo na subcategoria mas não ser na categoria em si, ou uma tripla pode ser um produto de dois objetos na subcategoria mas não ser na categoria.

Há vários conceitos que no contexto da subcategoria podem mudar. Sendo assim, muitas vezes adicionarei um prefixo para estes conceitos já conhecidos para notar a categoria que estou falando de. Por exemplo, direi que f é um $\mathscr{C}'$-epimorfismo se f é um epimorfismo quando visto como um morfismo em $\mathscr{C}'$, diferenciando de dizer que f é um $\mathscr{C}$-epimorfismo.

Definição 5.7.2 (Subcategoria Cheia)**.** *Uma subcategoria $\mathscr{C}'$ de uma categoria $\mathscr{C}$ é dita uma **subcategoria cheia** se o funtor inclusão for cheio.*

Ou seja, uma subcategoria cheia é uma subcategoria tal que o conjunto de morfismos entre todo par de objetos da subcategoria é igual ao conjunto de morfismos da categoria a contendo.

Podemos definir uma subcategoria cheia de uma categoria qualquer apenas citando uma subclasse de objetos da categoria, e, do fato de esta ser uma subcategoria cheia, já estarão implícitos os conjuntos de morfismos, como sendo iguais aos da categoria a contendo.

Note que, dada uma subcategoria cheia $\mathscr{A}$ de uma dada categoria $\mathscr{B}$, conceitos como kernels, cokernels, produtos e somas, que são definidos a partir da existência de algum morfismo comutando algum diagrama, continuam sendo tais, caso estejam em $\mathscr{A}$.

Por exemplo, no caso da soma, se A_1 e A_2 estiverem em $\mathscr{A}$, e sua $\mathscr{B}$-soma $A_1 + A_2$ também for um objeto em $\mathscr{A}$, temos que $A_1 + A_2$ é uma $\mathscr{A}$-soma destes objetos, pois dadas as triplas apropriadas, existe um único morfismo em $\mathscr{B}$ comutando o diagrama respectivo, e, como a subcategoria é cheia, este morfismo está em $\mathscr{A}$, e será também único.

Nem toda subcategoria cheia de uma categoria abeliana é abeliana por si só. Considere a subcategoria cheia de Ab consistindo apenas do objeto $\mathbb{Z}$. Esta categoria não possui sequer um objeto zero.

E nem toda subcategoria de uma categoria abeliana que é também abeliana é completa. A subcategoria de Ab consistindo apenas do objeto $\mathbb{Z}$ cujo único morfismo é sua identidade é abeliana, mas não é completa.

Definição 5.7.3 (Subcategoria Exata)**.** *Uma subcategoria $\mathscr{A}'$ de uma categoria abeliana $\mathscr{A}$ é dita uma **subcategoria exata** se $\mathscr{A}'$ é uma categoria abeliana e o funtor inclusão for exato.*

Neste caso, o funtor inclusão é fiel e exato, de forma que, pelo Teorema 5.6.10, a exatidão e comutatividade de diagramas na subcategoria pode ser demonstrada na categoria a contendo.

Para cada anel R, ao vermos a imagem do funtor esquecimento de R-mod para Ab como uma subcategoria de Ab, esta imagem é uma subcategoria exata de Ab.

Veremos mais para a frente um exemplo não tão trivial de uma subcategoria cheia de uma categoria abeliana que por si só é uma categoria abeliana, mas que não é uma subcategoria exata.

Teorema 5.7.4. *Seja $\mathscr{A}$ uma subcategoria cheia e não vazia de uma categoria abeliana $\mathscr{B}$. Assim, $\mathscr{A}$ é uma subcategoria exata de $\mathscr{B}$ se, e somente se, todo morfismo em $\mathscr{A}$ possui um $\mathscr{B}$-kernel e um $\mathscr{B}$-cokernel em $\mathscr{A}$ e todo par de objetos em $\mathscr{A}$ possui uma $\mathscr{B}$-soma direta em $\mathscr{A}$.*

Demonstração.

$\Longrightarrow$ Suponha que $\mathscr{A}$ é uma subcategoria exata de $\mathscr{B}$. Denotemos por I o funtor inclusão de $\mathscr{A}$ em $\mathscr{B}$. Por hipótese, I é um funtor exato, e, como é exato, é aditivo. Como $\mathscr{A}$ é abeliana, já que é uma subcategoria exata, $\mathscr{A}$ possui kernels e cokernels.

Fixando f um morfismo em $\mathscr{A}$ e k seu $\mathscr{A}$-kernel, temos pela exatidão de I que $I(k)$ é um $\mathscr{B}$-kernel de $I(f)$. Mas $I(k) = k$ e $I(f) = f$. Portanto, f possui um $\mathscr{B}$-kernel em $\mathscr{A}$, k. Similarmente, f possui um $\mathscr{B}$-cokernel em $\mathscr{A}$.

Fixando dois objetos A_1 e A_2 em $\mathscr{A}$, e $A_1 \oplus A_2$ sua $\mathscr{A}$-soma direta, como I é aditivo, $I(A_1 \oplus A_2) = A_1 \oplus A_2$ é uma $\mathscr{B}$-soma direta de $I(A_1) = A_1$ e $I(A_2) = A_2$, e temos que o par possui uma $\mathscr{B}$-soma direta em $\mathscr{A}$.

$\Longleftarrow$ Suponha que $\mathscr{A}$ possui um $\mathscr{B}$-kernel e um $\mathscr{B}$-cokernel de cada $\mathscr{A}$-morfismo, e possui uma $\mathscr{B}$-soma direta de cada par de $\mathscr{A}$-objetos. Primeiro precisamos ver que $\mathscr{A}$ é abeliana:

Objetos zero continuam sendo objetos zero em uma subcategoria cheia. Notando então que $\mathscr{A}$ é não vazia e, portanto, possui um objeto A, temos que um $\mathscr{B}$-kernel $K \longrightarrow A$ de 1_A está em $\mathscr{A}$. Mas, como 1_A é um $\mathscr{B}$-monomorfismo, K deve então ser um objeto zero de $\mathscr{B}$. K é, portanto, um objeto zero de $\mathscr{A}$.

Que somas, produtos, kernels e cokernels existem segue de $\mathscr{A}$ ser uma subcategoria cheia e das hipóteses, com as somas e os produtos sendo as $\mathscr{B}$-somas diretas em $\mathscr{A}$, e os kernels e os cokernels sendo os respectivos $\mathscr{B}$-kernels e $\mathscr{B}$-cokernels em $\mathscr{A}$.

E, dado um $\mathscr{A}$-monomorfismo f, este é um $\mathscr{B}$-monomorfismo, pois um $\mathscr{B}$-kernel de f está em $\mathscr{A}$ e é o mesmo $\mathscr{A}$-kernel de f, e este é um morfismo nulo. Assim, dado c um $\mathscr{B}$-cokernel de f que esteja em $\mathscr{A}$, temos que f é um $\mathscr{A}$-kernel de c, pois é um $\mathscr{B}$-kernel de c.

Tendo que $\mathscr{A}$ é abeliana, que a inclusão é exata é direto pela forma como são tomados os kernels e cokernels, já que o funtor é exato se, e somente se, preserva kernels e cokernels. $\square$

6 OBJETOS ESPECIAIS E O TEOREMA DE MITCHELL

Aqui finalmente poderemos enunciar o Teorema de Freyd-Mitchell. Ainda não podemos o demonstrar, pois precisaremos de vários outros recursos para isto.

Demonstraremos aqui uma versão do Teorema de Freyd-Mitchell que pede algumas hipóteses extras, o Teorema de Mitchell, e para isto passaremos por objetos projetivos, injetivos, geradores e cogeradores.

6.1 CATEGORIAS COMPLETAMENTE ABELIANAS

Antes de tudo, demonstrarei um resultado que nos ajuda a entender a utilidade do Teorema de Freyd-Mitchell.

Definição 6.1.1. *Dizemos que uma categoria $\mathscr{C}$ é* ***pequena*** *se sua classe de objetos for um conjunto.*

Proposição 6.1.2. *Dado um conjunto não vazio A de objetos de uma categoria abeliana $\mathscr{A}$, existe uma subcategoria cheia, exata e pequena de $\mathscr{A}$ que contém todos os objetos de A.*

Demonstração. Façamos uma sequência de conjuntos (A_n), com $A_0 = A$, definido indutivamente da seguinte forma:

Para cada n, dado A_n, definimos a família K_n, formada pelo domínio de algum representante do kernel de cada morfismo entre objetos de A_n, a família F_n, formada pelo contradomínio de algum representante do cokernel de cada morfismo entre objetos de A_n, e a família S_n, formada pelas somas diretas entre quaisquer dois objetos de A_n. Deste modo, definimos A_{n+1} como $A_n \cup K_n \cup F_n \cup S_n$.

A família A_n é devidamente um conjunto para todo n, pois, por indução, A_0 é um conjunto, e, dado n, supondo que A_n é um conjunto, temos que K_n e F_n são também conjuntos, possuindo a mesma cardinalidade de $\cup_{B,C\in A_n}(B,C)$, e S_n também é um conjunto, com a cardinalidade de $A_n \times A_n$, de modo que A_{n+1} sendo a união destes conjuntos é um conjunto.

Considere o conjunto $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$, e a subcategoria cheia $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$ dada por este conjunto. É claro que $\mathscr{A}'$ é pequena. Assim, vejamos que $\mathscr{A}'$ é uma subcategoria exata de $\mathscr{A}$ utilizando o Teorema 5.7.4.

Como $\mathscr{A}'$ é cheia e não vazia, basta ver que possui os kernels, cokernels e somas diretas de $\mathscr{A}$ como no teorema. Bem, para quaisquer dois objetos B e C de $\mathscr{A}'$ temos que $B \in A_n$ para algum n e $C \in A_m$ para algum m, de modo que $B, C \in A_{\max\{m,n\}}$. Assim, existe (o objeto de) uma $\mathscr{A}$-soma direta de B e C e existem (os objetos de) $\mathscr{A}$-kernels e $\mathscr{A}$-cokernels de quaisquer morfismos entre B e C em $A_{\max\{m,n\}+1}$. Estes estão, portanto, em $\mathscr{A}'$. $\square$

Em particular, podemos ver todos os diagramas que possuem apenas um conjunto de objetos numa categoria abeliana como diagramas numa subcategoria cheia, exata e pequena desta categoria abeliana.

Definição 6.1.3. *Uma categoria abeliana $\mathscr{A}$ é dita **completamente abeliana** se para toda subcategoria cheia, exata e pequena $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$ existe um anel R e uma imersão cheia e exata de $\mathscr{A}'$ para R-mod.*

Deste modo, podemos, de certa forma, ver qualquer subcategoria cheia, exata e pequena de uma categoria completamente abeliana como uma subcategoria cheia e exata da categoria de R-módulos, se a identificarmos com sua imagem pela imersão cheia e exata.

Pelo Teorema 5.6.10, várias proposições envolvendo diagramas e exatidão de sequências em uma categoria completamente abeliana podem ser demonstradas utilizando a imagem destes diagramas em R-mod, e, com o fato de que a imersão é também cheia, podemos, ainda mais, utilizar isto para demonstrar algumas proposições envolvendo existência de morfismos.

Isto é útil pois demonstrar teoremas utilizando módulos é usualmente mais simples e intuitivo que demonstrar teoremas utilizando apenas objetos e morfismos em categorias, já que módulos são dados por conjuntos, de modo que podemos utilizar seus elementos para a demonstração, utilizando técnicas como a de "diagram chasing", que farei uma pequena apresentação de como funciona no final deste trabalho.

Enunciamos enfim o Teorema de Freyd-Mitchell.

Teorema 6.1.4 (Freyd-Mitchell)**.** *Toda categoria abeliana é completamente abeliana.*

Com isto, os comentários anteriores envolvendo categorias completamente abelianas valem para quaisquer categorias abelianas. Este teorema é, portanto, um resultado poderoso para demonstrações envolvendo categorias abelianas.

6.2 PROJETIVOS E INJETIVOS

Definição 6.2.1 (Objetos Projetivos)**.** *Um objeto P em uma categoria abeliana $\mathscr{A}$ é dito **projetivo** se o funtor $(P, \_)\colon \mathscr{A} \to Ab$ é um funtor exato.*

Como $(P, \_)$ é sempre exato à esquerda, pelo Teorema 5.6.8, P é projetivo se, e somente se, o funtor for exato à direita, ou, melhor ainda, notando o comentário após este teorema, se, e somente se, o funtor preservar epimorfismos.

Equivalentemente, P é projetivo se, e somente se, o funtor $(P, \_)$ visto como um funtor para (P, P)-mod é exato, já que (P, P)-mod pode ser visto como uma subcategoria exata de Ab.

Como um exemplo de objeto projetivo, em R-mod o próprio anel R é projetivo. Na verdade, é possível mostrar que um R-módulo é projetivo se, e somente se, este pode ser visto como somando direto de alguma soma indexada por um conjunto de cópias de R.

A definição dual de um objeto projetivo é a de um objeto injetivo:

Definição 6.2.2 (Objetos Injetivos)**.** *Um objeto Q em uma categoria abeliana $\mathscr{A}$ é dito **injetivo** se o funtor $(\_, Q)\colon \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to Ab$ é um funtor exato.*

Também, como o funtor $(\_, Q)$ (visto como um funtor covariante, como na definição) é sempre exato à esquerda, podemos ver que Q é injetivo se, e somente se, o funtor contravariante $(\_, Q)$ levar monomorfismos de $\mathscr{A}$ em epimorfismos de Ab.

Como um exemplo de um objeto injetivo, $\mathbb{Q}$ é injetivo em Ab.

Seguem equivalências para objetos projetivos e objetos injetivos, respectivamente.

Proposição 6.2.3. *Um objeto P numa categoria abeliana é projetivo se, e somente se, para todo morfismo $P \xrightarrow{p} B$ e todo epimorfismo $A \xrightarrow{f} B$ temos que existe um morfismo $P \xrightarrow{\overline{p}} A$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, two heads, "f"] \\ P \arrow[ur, dotted, "\overline{p}"] \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd}$$

comuta.

Demonstração. O objeto P é projetivo se, e somente se, para todo epimorfismo f temos que (P, f) é um epimorfismo. Assim, seja $A \xrightarrow{f} B$ um epimorfismo.

Bem, (P, f) é um epimorfismo se, e somente se, é uma função sobrejetiva. Esta é uma função sobrejetiva se, e somente se, para cada morfismo $P \xrightarrow{p} B$ de (P, B) temos que existe um morfismo $\overline{p}$ em (P, A) tal que $p = (P, f)(\overline{p})$. Agora, $(P, f)(\overline{p})$ é justamente $f \circ \overline{p}$. Assim, segue a equivalência desejada. □

De forma similar,

Proposição 6.2.4. *Um objeto Q numa categoria abeliana é injetivo se, e somente se, para todo morfismo $A \xrightarrow{q} Q$ e todo monomorfismo $A \xrightarrow{f} B$ temos que existe um morfismo $B \xrightarrow{\overline{q}} Q$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "q"] \arrow[d, hook, "f"] & Q \\ B \arrow[ur, dotted, "\overline{q}"] & \end{tikzcd}$$

comuta.

Com esta equivalência para injetivos, podemos ver um exemplo de objeto injetivo em R-mod:

Exemplo 6.2.5. *Seja R um anel, e seja Q um objeto injetivo em Ab. Assim, vendo o conjunto de morfismos de grupo como um R-módulo, (R, Q), é um injetivo em R-mod.*

Demonstração. Seja $A \xrightarrow{q} (R, Q)$ um morfismo e $A \xrightarrow{f} B$ um monomorfismo. Para cada $a \in A$, denotemos o morfismo $q(a) \in (R, Q)$ como q_a. Assim, podemos considerar o morfismo de grupos $A \xrightarrow{\varphi} Q$ dado por $\varphi(a) = q_a(1)$.

Assim, pela proposição anterior, vendo aqui cada objeto como um grupo abeliano, como Q é injetivo existe $B \xrightarrow{\overline{\varphi}} Q$ tal que $\varphi = \overline{\varphi} \circ f$.

Para cada $b \in B$, defina então $\overline{q}_b : R \to Q$ por $\overline{q}_b(r) = \overline{\varphi}(r \cdot b)$. É fácil ver que este é um morfismo de grupos. Definimos então $\overline{q} : B \to (R, Q)$ por $\overline{q}(b) = \overline{q}_b$, e podemos ver que este é um morfismo de R-módulos.

Com isto, seja $a \in A$. Assim, $\overline{q} \circ f(a) = \overline{q}_{f(a)}$. Agora, $\overline{q}_{f(a)}$ é tal que $\overline{q}_{f(a)}(1) = \overline{\varphi}(1 \cdot f(a)) = \overline{\varphi} \circ f(a) = \varphi(a) = q_a(1)$, de modo que $\overline{q}_{f(a)} = q_a$, já que morfismos de R-módulos com domínio R são definidos unicamente por onde levam a unidade de R. Portanto, $\overline{q} \circ f(a) = q_a = q(a)$, e, assim, $\overline{q} \circ f = q$, de modo que pela proposição anterior (R, Q) é injetivo. □

Proposição 6.2.6. *Seja $\{P_i\}_{i\in I}$ uma família de objetos projetivos numa categoria abeliana. Assim, se $(P, \{P_i \xrightarrow{u_i} P\}_I)$ é uma soma desta família, então temos que P é projetivo.*

Demonstração. Seja $P \xrightarrow{p} B$ um morfismo, e $A \xrightarrow{f} B$ um epimorfismo. Como P é uma soma, $p = \sum_I p_i$ para morfismos $P_i \xrightarrow{p_i} B$.

Para cada $i \in I$, pela Proposição 6.2.3, como P_i é projetivo, existe um morfismo $P_i \xrightarrow{\overline{p_i}} A$ tal que $f \circ \overline{p_i} = p_i$. Consideramos então o morfismo $\overline{p} = \sum_I \overline{p_i}$.

Agora, para cada $i \in I$, temos que $f \circ \overline{p} \circ u_i = f \circ \overline{p_i} = p_i$, de modo que $f \circ \overline{p} = p$, pois $f \circ \overline{p}$ satisfaz a propriedade que define p unicamente. Que P é projetivo segue então novamente da Proposição 6.2.3. □

Dualmente,

Proposição 6.2.7. *Seja $\{Q_i\}_{i\in I}$ uma família de objetos injetivos numa categoria abeliana. Assim, se $(Q, \{Q \xrightarrow{p_i} Q_i\}_I)$ é um produto desta família, então temos que Q é injetivo.*

6.3 GERADORES E COGERADORES

Definição 6.3.1 (Objetos Geradores)**.** *Um objeto G em uma categoria abeliana $\mathscr{A}$ é dito um **gerador** se o funtor $(G, \_)\colon \mathscr{A} \to Ab$ é um funtor fiel.*

Definição 6.3.2 (Objetos Cogeradores)**.** *Um objeto C em uma categoria abeliana $\mathscr{A}$ é dito um **cogerador** se o funtor $(\_, C)\colon \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to Ab$ é um funtor fiel.*

Em R-mod, como exemplo de gerador temos o próprio anel R. Para cogeradores, o grupo abeliano $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ é um exemplo em Ab. Este é na verdade, ainda mais, um cogerador injetivo em Ab.

Proposição 6.3.3. *Um objeto G numa categoria abeliana é um gerador se, e somente se, para todo morfismo $A \longrightarrow B \neq 0$ existe um morfismo $G \longrightarrow A$ tal que $G \longrightarrow A \longrightarrow B \neq 0$.*

Demonstração. Sendo um funtor aditivo, $(G, \_)$ é fiel se, e somente se, leva morfismos não nulos em morfismos não nulos.

Assim, G é um gerador se, e somente se, para todo morfismo $A \xrightarrow{f} B \neq 0$ temos que $(G, f) \neq 0$. Como este é um morfismo de grupos, isto ocorre se, e somente se, existe algum elemento g de (G, A) tal que $(G, f)(g) \neq 0$. Assim, como $(G, f)(g) = f \circ g$, segue a equivalência desejada. □

Proposição 6.3.4. *Seja P um objeto projetivo numa categoria abeliana. Assim, P é um gerador se, e somente se, para todo objeto A não nulo existe um morfismo não nulo em (P, A).*

Demonstração. Para a ida, supondo que P é um gerador e tomando um objeto A não nulo, como A é não nulo, $1_A \neq 0$, de modo que, pela proposição anterior, existe $x \in (P, A)$ tal que $1_A \circ x \neq 0$, e, portanto, $x \neq 0$.

Agora, para a volta, seja $A \xrightarrow{f} B \neq 0$ um morfismo. Considere $i \circ c$ uma decomposição de f em que i é um monomorfismo e c é um epimorfismo, cuja existência é garantida pelo Teorema 4.2.6.

Por hipótese, temos que existe $x \in (P, B)$ um morfismo não nulo. Como P é projetivo e c é um epimorfismo, existe um morfismo $\overline{x}$ tal que $x = c \circ \overline{x}$. Vejamos que $\overline{x}$ é tal que $f \circ \overline{x} \neq 0$. De fato, $f \circ \overline{x} = i \circ c \circ \overline{x} = i \circ x$, e, como i é um monomorfismo e $x \neq 0$, segue que $f \circ \overline{x} = i \circ x \neq 0$, já que caso contrário, $i \circ x = 0 = i \circ 0$ implicaria que $x = 0$. Pela proposição anterior, segue então que P é um gerador. □

Com isto e com a Proposição 6.2.6 vemos que se $\{P_i\}_{i \in I}$ é uma família de geradores projetivos, então sua soma também é um gerador projetivo, pois para cada objeto A e índice $i \in I$ existe $f_i \in (P_i, A)$ não nulo, e $\sum_I f_i \in (P, A)$ é um morfismo não nulo.

Temos duas equivalências semelhante para seus conceitos duais:

Proposição 6.3.5. *Um objeto C numa categoria abeliana é um cogerador se, e somente se, para todo morfismo $A \longrightarrow B \neq 0$ existe um morfismo $B \longrightarrow C$ tal que $A \longrightarrow B \longrightarrow C \neq 0$.*

Proposição 6.3.6. *Seja Q um objeto injetivo numa categoria abeliana. Assim, Q é um cogerador se, e somente se, para todo objeto A não nulo existe um morfismo não nulo em (A, Q).*

E, de forma similar, um produto de cogeradores injetivos é um cogerador injetivo.

Com isto podemos ver o seguinte:

Proposição 6.3.7. *Seja R um anel, e seja Q um cogerador injetivo em Ab. Assim, (R, Q), é um cogerador injetivo em R-mod.*

Demonstração. Já vimos que como Q é injetivo, então (R, Q) é injetivo. Mostremos então que (R, Q) é um cogerador utilizando a proposição anterior. Assim, seja A um R-módulo não nulo.

Como Q é um cogerador injetivo, existe um morfismo de grupos não nulo $q \in (A, Q)$. Como q é não nulo, existe $x \in A$ tal que $q(x) \neq 0$. Definamos então $f\colon A \to (R, Q)$, dado por $f(a) = f_a$ em que $f_a(r) = q(r \cdot a)$.

Vemos que f é um morfismo de R-módulos utilizando a definição da multiplicação por escalar no conjunto de morfismos. Este morfismo é não nulo, pois $f(x) = q_x$ é um morfismo não nulo, já que $q_x(1) = q(x) \neq 0$.

Com isto, pela proposição anterior, (R, Q) é um cogerador, como desejado. □

Em particular, R-mod possui um cogerador injetivo para todo anel R. Isto será importante futuramente, pois veremos que cogeradores injetivos serão chave em alguns aspectos da demonstração do Teorema de Freyd-Mitchell. Veremos uma proposição os envolvendo que terá grande importância. Mas antes, precisamos de uma definição e uma outra proposição:

Definição 6.3.8. *Uma categoria $\mathscr{A}$ é dita **well-powered** se para todo objeto $A \in \mathscr{A}$ temos que a família de subobjetos de A é um conjunto.*

Proposição 6.3.9. *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana com um gerador. Assim, $\mathscr{A}$ é well-powered.*

Demonstração. Seja G um gerador de $\mathscr{A}$. Como $(G, \_)$ é exato à esquerda, e em particular preserva monomorfismos, podemos associar cada subobjeto $A' \xrightarrow{i} A$ de A ao subobjeto (G, i), ou (G, A'), de (G, A). Mostrarei que esta associação é injetora.

Primeiramente, como $(G, \_)$ é fiel, este leva sequências não exatas em sequências não exatas. Em particular, se um morfismo f não é um epimorfismo, então (G, f) também não o é.

Com isto em mente, sejam $A_1 \xrightarrow{i_1} A$ e $A_2 \xrightarrow{i_2} A$ dois subobjetos distintos de A. Assim, $I = A_1 \cap A_2$ está contido propriamente em A_1 ou em A_2, já que caso contrário os três seriam o mesmo subobjeto. Suponha, sem perda de generalidade, que $I \subsetneq A_1$. Digamos que o morfismo dado pela continência de I em A_1 é $I \xrightarrow{u_1} A_1$ e em A_2 é $I \xrightarrow{u_2} A_2$.

Bem, como $I \subsetneq A_1$, u_1 não é um epimorfismo, e (G, u_1), portanto, também não o é. Assim, como epimorfismos de grupos são sobrejeções, deve existir $\varphi \in (G, A_1)$ que não está na imagem de (G, u_1), ou seja, tal que não existe $f \in (G, I)$ tal que $\varphi = (G, u_1)(f) = u_1 \circ f$.

Agora, veja que $i_1 \circ \varphi$ não deve estar na imagem de (G, i_2), pois, caso estivesse, deveria existir $\varphi' \in (G, A_2)$ tal que $i_2 \circ \varphi' = (G, i_2)(\varphi') = i_1 \circ \varphi$, e, como a intersecção em uma categoria abeliana é, por construção, um pullback, de modo que (I, u_1, u_2) é um pullback de i_1 e i_2, teríamos que existe um morfismo $f \in (G, I)$ tal que, em particular, $u_1 \circ f = \varphi$, contradizendo o fato de que φ não está na imagem de (G, u_1).

Assim, temos que há um elemento da imagem de (G, i_1), $i_1 \circ \varphi$, que não está na imagem de (G, i_2), de modo que estes descrevem subgrupos distintos, e, portanto, subobjetos distintos de (G, A), e a associação é então injetora. Como a classe de subgrupos de qualquer grupo é um conjunto, devemos ter que há apenas um conjunto de subobjetos de A. □

Como estamos numa categoria abeliana, pela bijeção que temos entre os subobjetos e os objetos quociente de um objeto dada na Proposição 4.1.4, temos que numa categoria abeliana *well-powered*, ou, em particular, numa categoria abeliana com um gerador, uma família de objetos quociente de um dado objeto é também um conjunto.

Proposição 6.3.10. *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana completa com um gerador. Assim, $\mathscr{A}$ possui um cogerador injetivo se, e somente se, para todo objeto A existe um monomorfismo de A para algum objeto injetivo.*

Demonstração.

$\Longrightarrow$ Seja C um cogerador injetivo e A um objeto qualquer. Pela Proposição 6.2.7, como C é injetivo, o produto $C' = \prod_{(A,C)} C$ também o é. Mostrarei que $\prod_{f \in (A,C)} f$ é um monomorfismo de A para C'.

Seja k o kernel de $\prod_{f \in (A,C)} f$. Assim, $\prod_{f \in (A,C)} f \circ k = 0$. Aplicando as projeções, temos para cada $f \in (A, C)$ que $f \circ k = p_f \circ \prod_{f \in (A,C)} f \circ k = 0$. Como C é um cogerador, segue pela Proposição 6.3.5 que k deve ser nulo, já que não existem morfismos de A para C cuja composição com k é não nula.

$\Longleftarrow$ Seja G um gerador para $\mathscr{A}$. Assim, pelo comentário anterior, a família de objetos quociente de G é um conjunto. Consideramos então o conjunto J formado por um representante de cada objeto quociente de G. Assim, podemos considerar o produto $P = \prod_{j \in J} Q_j$, em que Q_j é o objeto no contradomínio de j.

Por hipótese, temos um monomorfismo $P \xrightarrow{e} E$ com E injetivo. Veremos que E é um cogerador. Para isto, pela Proposição 6.3.6 basta mostrar que para todo objeto A existe um morfismo não nulo em (A, E).

Como G é um gerador, existe um morfismo f não nulo em (G, A) (por exemplo, um morfismo f tal que $1_A \circ f \neq 0$, que existe pela Proposição 6.3.3). Considere a decomposição $f = G \xrightarrow{c} I \xrightarrow{i} A$ em que i é um monomorfismo e c é um epimorfismo.

Assim, tomemos $\varphi = e \circ \prod_J \varphi_j$ em que φ_j é o isomorfismo entre I e Q_j se j representa o mesmo objeto quociente que c, e $\varphi_j = I \xrightarrow{0} Q_j$ caso contrário.

Note que φ é um monomorfismo de I para E, pois e é um monomorfismo e $\prod_J \varphi_j$ também o é, já que a composição da projeção indexada pelo epimorfismo que representa o mesmo objeto quociente que c com $\prod_J \varphi_j$ é um monomorfismo.

Como $I \xrightarrow{i} A$ é um monomorfismo e E é injetivo, existe, pela Proposição 6.2.4, um morfismo $A \xrightarrow{\overline{\varphi}} E$ tal que $\overline{\varphi} \circ i = \varphi$.

Sendo assim, vejamos então que $\overline{\varphi}$ é o morfismo não nulo em (A, E) desejado. Oras, $\overline{\varphi} \circ f = \overline{\varphi} \circ i \circ c = \varphi \circ c$, e, como $f \neq 0$, temos que $c \neq 0$, de modo que, como φ é um monomorfismo, $\varphi \circ c \neq 0$, e, portanto, segue que $\overline{\varphi} \neq 0$, como desejado. □

6.4 O TEOREMA DE MITCHELL

Enunciaremos e demonstraremos, então, o Teorema de Mitchell, que será útil para a demonstração do Teorema de Freyd-Mitchell.

Teorema 6.4.1 (Mitchell)**.** *Uma categoria abeliana cocompleta com um gerador projetivo é completamente abeliana.*

Demonstração. Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana cocompleta com um gerador projetivo, e $\mathscr{A}'$ uma subcategoria cheia, exata e pequena de $\mathscr{A}$. Seja P' um gerador projetivo de $\mathscr{A}$.

Seja $J = \bigcup_{A \in \mathscr{A}'} (P', A)$ a união de todos os conjuntos de morfismo (P', A) com A em $\mathscr{A}'$. Temos que J é devidamente um conjunto, pois $\mathscr{A}'$ é um conjunto, já que $\mathscr{A}'$ é pequena, e os conjuntos de morfismos também o são. Assim, seja $P = \sum_J P'$ a soma de J cópias de P', cuja existência é garantida pois $\mathscr{A}$ é cocompleta.

Sendo uma soma de geradores projetivos, pelo comentário após a Proposição 6.3.4, P também é um gerador projetivo. Mas, mais ainda, temos que P satisfaz uma propriedade especial: para todo $A \in \mathscr{A}'$ existe um epimorfismo $P \longrightarrow A$, como, por exemplo, o morfismo $\sum_J f_j$ em que $f_j = j$ se j é um morfismo em (P', A), e $f_j = 0$ caso contrário, que podemos ver que é um epimorfismo com argumentos similares aos feitos na ida da Proposição 6.3.10.

Considere $R = (P, P)$ o anel de endomorfismos de P. O funtor $(P, \_)$ visto como um funtor de $\mathscr{A}$ para R-mod é um funtor fiel e exato, já que P é um gerador projetivo. Denotando por I o funtor inclusão de $\mathscr{A}'$ em $\mathscr{A}$, temos que I é fiel, cheio e exato, já que $\mathscr{A}'$ é uma subcategoria cheia e exata de $\mathscr{A}$.

O funtor $F = (P, \_) \circ I$ de $\mathscr{A}'$ para R-mod será o funtor da subcategoria exata e pequena para a categoria de módulos desejado. Claramente, F é fiel e exato, sendo uma composição de funtores fieis e exatos. Basta mostrar que é cheio.

Sejam então A e B objetos de $\mathscr{A}'$, e $F(A) \xrightarrow{y} F(B)$ um morfismo qualquer em R-mod. Mostrarei que existe um morfismo $A \xrightarrow{x} B$ tal que $y = F(x)$. Note, é claro, que $F(A) = (P, A)$ e $F(B) = (P, B)$.

Considere então epimorfismos $P \longrightarrow A$ e $P \longrightarrow B$, e considere também o kernel $K \longrightarrow P$ de $P \longrightarrow A$. Assim, como $P \longrightarrow A$ é o cokernel de $K \longrightarrow P$, temos duas sequências exatas:

$$K \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

$$P \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

Como $(P, \_)$ é um funtor exato, temos que as linhas do seguinte diagrama também são sequências exatas em R-mod (lembrando que $(P, P) = R$ e $(P, 0) = 0$):

$$\begin{tikzcd}
(P,K) \arrow[r] & R \arrow[r] \arrow[d, "f"] & (P,A) \arrow[r] \arrow[d, "y"] & 0 \\
 & R \arrow[r] & (P,B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde $R \xrightarrow{f} R$ é um morfismo que faz o diagrama comutar, ou seja, um morfismo tal que $R \longrightarrow (P, A) \xrightarrow{y} (P, B) = R \xrightarrow{f} R \longrightarrow (P, B)$, cuja existência é garantida pela Proposição 6.2.3, pois R é projetivo em R-mod, e $R \longrightarrow (P, B)$ é um epimorfismo.

Agora, como R é um anel e f é um morfismo de R-módulos, veja que, para cada $r \in R$, $f(r) = f(r \cdot 1) = r \cdot f(1)$. Denotando $s = f(1)$, temos então que, para cada $r \in R$, $f(r) = r \cdot s = s \circ r = (P, s)(r)$, tendo lembrado que $R = (P, P)$ é um conjunto de morfismos e s é um morfismo neste conjunto. Assim, $(P, s) = f$, já que ambos agem da mesma forma em todo elemento de R. Observemos então o diagrama em $\mathscr{A}$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d, "s"] & A \arrow[r] & 0 \\
 & P \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Temos que $K \longrightarrow P \xrightarrow{s} P \longrightarrow B = 0$, pois F é fiel e

$$\begin{aligned}
(\mathrm{P}, K \longrightarrow P \xrightarrow{s} P \longrightarrow B) &= (P, K) \longrightarrow R \xrightarrow{f} R \longrightarrow (P, B) \\
&= (P, K) \longrightarrow R \longrightarrow (P, A) \xrightarrow{y} (P, B) \\
&= (P, K) \xrightarrow{0} (P, A) \xrightarrow{y} (P, B) = 0
\end{aligned}$$

Assim, como $P \longrightarrow A$ é o cokernel de $K \longrightarrow P$, temos que existe um morfismo $A \xrightarrow{x} B$ tal que $P \xrightarrow{s} P \longrightarrow B = P \longrightarrow A \xrightarrow{x} B$.

Aplicando $(P, \_)$ nesta última igualdade, temos então que $R \xrightarrow{f} R \longrightarrow (P, B) = R \longrightarrow (P, A) \xrightarrow{(P,x)} (P, B)$. Assim, segue que $R \longrightarrow (P, A) \xrightarrow{(P,x)} (P, B) = R \longrightarrow (P, A) \xrightarrow{y} (P, B)$. Mas, $R \longrightarrow (P, A)$ é um epimorfismo, de forma que $(P, x) = y$.

Deste modo, temos que x é tal que $F(x) = (P, x) = y$, de modo que F é um funtor cheio, como desejado. $\square$

Com este resultado, para mostrar que toda categoria abeliana é completamente abeliana basta mostrar que para toda categoria abeliana pequena existe um funtor fiel, cheio e exato para uma categoria abeliana cocompleta com um gerador projetivo, pois ela pode então ser vista como uma subcategoria cheia, exata e pequena de uma categoria completamente abeliana.

Alternativamente, basta encontrar um funtor contravariante saindo da categoria abeliana pequena para uma categoria abeliana completa com um cogerador injetivo, e que, quando visto como um funtor covariante para a (ou, equivalentemente, saindo da) categoria dual, seja fiel, cheio e exato, pois este funtor covariante para a categoria dual é justamente o funtor desejado do parágrafo anterior. Na verdade, é isto que iremos mostrar nos próximos capítulos.

Mas cada parte em seu tempo. Por enquanto esta é apenas uma motivação para os passos que seguiremos nos próximos capítulos, e estas afirmações serão devidamente demonstradas no final.

7 CATEGORIAS DE FUNTORES E A IMERSÃO DE YONEDA

Neste capítulo exibiremos um funtor contravariante de uma categoria abeliana pequena qualquer para uma categoria abeliana especial, que é, quando visto como um funtor saindo da categoria dual, cheio e fiel. Esta categoria é completa e possui um cogerador injetivo, mas infelizmente este funtor não é exato para esta categoria.

Veremos apenas no último capítulo que este funtor quando visto como um funtor para uma subcategoria desta categoria abeliana especial será exato, e que esta subcategoria também é abeliana, completa e possui um cogerador injetivo.

7.1 TRANSFORMAÇÕES NATURAIS

Para podermos definir a tal categoria abeliana especial, que será uma categoria formada por funtores, precisamos definir o conceito de transformações naturais.

Definição 7.1.1 (Transformação Natural)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ duas categorias, e $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dois funtores. Uma* ***transformação natural*** *de F para G é uma família $\eta = \{F(C) \xrightarrow{\eta_C} G(C) : C \in \mathscr{C}\}$ formada por morfismos em $\mathscr{D}$ tal que para todo morfismo $A \xrightarrow{f} B$ em $\mathscr{C}$ o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\eta_A} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \xrightarrow{\eta_B} & G(B) \end{array}$$

comuta.

Dada uma transformação natural η entre dois funtores F e G, será usualmente implícito que $\eta_C \in \eta$ é o morfismo indexado pelo objeto $C \in \mathscr{C}$ da família η.

Veremos em vários dos resultados envolvendo transformações naturais que a necessidade da comutatividade deste diagrama surge naturalmente.

Transformações naturais são como morfismos entre funtores, em que a comutatividade dos diagramas, de certo modo, os faz respeitar a aplicação dos funtores nos morfismos.

Exemplo 7.1.2. *Dado um funtor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, a família $1_F = \{1_{F(C)} : C \in \mathscr{C}\}$ é uma transformação natural de F para F.*

Exemplo 7.1.3. *Sejam η uma transformação natural entre os funtores G e H, e ξ uma transformação natural entre os funtores F e G. Temos então uma transformação natural $\eta \circ \xi \coloneqq \{\eta_C \circ \xi_C : C \in \mathscr{C}\}$ entre F e H, já que podemos ver a comutatividade dos diagramas de transformação natural pela comutatividade dos diagramas de η e de ξ.*

Assim, temos uma transformação natural identidade para cada funtor, e uma composição de transformações naturais. Já podemos esperar o desencadeamento disto numa categoria de funtores, e, realmente, isto será explorado na próxima seção.

Exemplo 7.1.4. *Dados dois objetos A e B e um morfismo $A \xrightarrow{f} B$ em uma categoria $\mathscr{C}$, a família $(f, \_) := \{(B, C) \xrightarrow{(f,C)} (A, C) : C \in \mathscr{C}\}$ é uma transformação natural entre os funtores $(B, \_)$ e $(A, \_)$, tanto vistos como funtores para Set, quanto vistos como funtores para Ab, caso $\mathscr{C}$ seja abeliana.*

Definimos então o conceito que age como isomorfismo entre funtores:

Definição 7.1.5 (Isomorfismo Natural)**.** *Seja $\eta = \{F(C) \xrightarrow{\eta_C} G(C) : C \in \mathscr{C}\}$ uma transformação natural. Dizemos que η é um* ***isomorfismo natural*** *se η_C é um isomorfismo para todo objeto C.*

Neste caso, dizemos que F e G são naturalmente isomorfos.

Vemos que dois funtores naturalmente isomorfos levam um objeto em objetos isomorfos e um morfismo em morfismos conjugados pelos isomorfismos apropriados.

Também, podemos ver que se η é um isomorfismo natural, como na definição acima, então $\eta^{-1} := \{G(C) \xrightarrow{\eta_C^{-1}} F(C) : C \in \mathscr{C}\}$ é também um isomorfismo natural. E é fácil ver que $\eta \circ \eta^{-1} = 1_G$ e $\eta^{-1} \circ \eta = 1_F$.

Funtores naturalmente isomorfos compartilham de muitas propriedades importantes. Por exemplo,

Proposição 7.1.6. *Sejam $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dois funtores, e η um isomorfismo natural entre F e G. Assim, F é fiel se, e somente se, G é fiel.*

Demonstração. Suponhamos, para a ida, que F é fiel. Sejam C e D objetos de $\mathscr{C}$, e considere o conjunto de morfismos (C, D). Assim, gostaríamos de mostrar que G restrito a (C, D) é uma função injetiva.

Como η é uma transformação natural, para todo $f \in (C, D)$, $G(f) \circ \eta_C = \eta_D \circ F(f)$, de modo que, como η é um isomorfismo natural, η_D é um isomorfismo e possui uma inversa, e, assim, $F(f) = \eta_D^{-1} \circ G(f) \circ \eta_C$.

Sendo assim, sejam $f, g \in (C, D)$, e suponha que $G(f) = G(g)$. Assim, vemos que $F(f) = \eta_D^{-1} \circ G(f) \circ \eta_C = \eta_D^{-1} \circ G(g) \circ \eta_C = F(g)$, de modo que $f = g$, pois F é fiel. Portanto, G é fiel.

A volta segue pelo que já foi demonstrado para a ida, pois η^{-1} é um isomorfismo natural entre G e F. □

Proposição 7.1.7. *Sejam $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ e $G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ dois funtores entre categorias abelianas, e η um isomorfismo natural entre F e G. Assim, F é exato à direita se, e somente se, G é exato à direita.*

Demonstração. Utilizamos também as conjugações dos morfismos. Nas hipóteses do enunciado, supondo que F é exato à direita, vamos mostrar que G também o é. Ou seja, vamos mostrar que G preserva cokernels.

Seja $f \in (A, B)$ um morfismo e $c \in (B, C)$ seu cokernel. Assim, $F(c)$ é o cokernel de $F(f)$. Vemos então que $G(c) \circ G(f) = \eta_C \circ F(c) \circ \eta_B^{-1} \circ \eta_B \circ F(f) \circ \eta_A^{-1} = \eta_C \circ F(c) \circ F(f) \circ \eta_A^{-1} = 0$.

E, se g é tal que $g \circ G(f) = 0$, temos que $g \circ \eta_B \circ F(f) \circ \eta_A^{-1} = 0$, e, compondo com η_A, vemos que $g \circ \eta_B \circ F(f) = 0$. Como $F(c)$ é o cokernel de $F(f)$, existe um único g' tal que $g \circ \eta_B = g' \circ F(c)$.

Assim, $g \circ \eta_B = g' \circ \eta_C^{-1} \circ G(c) \circ \eta_B$, e, compondo com η_B^{-1}, vemos que $g = g' \circ \eta_C^{-1} \circ G(c)$. Assim, $g' \circ \eta_C^{-1}$ é um morfismo que comuta o diagrama do kernel. A unicidade de $g' \circ \eta_C^{-1}$ segue da unicidade de g'.

Deste modo, $G(c)$ é um cokernel de $G(f)$, de modo que G preserva cokernels, e, portanto, G é exato à direita, como desejado.

A volta segue, também, pelo que já foi demonstrado para a ida, já que η^{-1} é um isomorfismo natural. □

Também, com demonstração similar a esta última, podemos ver que se um funtor é exato à esquerda, ou exato, um funtor naturalmente isomorfo a este também deve o ser.

7.2 CATEGORIA DE FUNTORES

Podemos então definir categorias de funtores, que possuem transformações naturais como morfismos.

Definição 7.2.1 (Categoria de funtores)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ uma categorias, com $\mathscr{C}$ pequena. A categoria cujos objetos são funtores de $\mathscr{C}$ para $\mathscr{D}$ e cujos morfismos são transformações naturais entre os funtores, com composição dada por $\eta \circ \xi = \{\eta_C \circ \xi_C : C \in \mathscr{C}\}$, é chamada a **categoria de funtores entre $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$**, denotada por $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$.*

Pedimos nesta definição que $\mathscr{C}$ seja uma categoria pequena pois, neste caso, dados dois funtores F e G, a família (F, G), que deveria ser o conjunto de morfismos, no caso, transformações naturais, entre os dois funtores, é realmente um conjunto como se pede nos axiomas de categoria, pois este está contido no conjunto das partes de $\bigcup_{C \in \mathscr{C}}(F(C), G(C))$, que é um conjunto, sendo uma união de conjuntos indexada por um conjunto.

Caso $\mathscr{C}$ não seja uma categoria pequena, pode ocorrer que não haja apenas um conjunto de transformações naturais. Para o que gostaríamos de fazer, pedir que esta categoria seja pequena não trará problemas, já que lidamos com subcategorias pequenas no Teorema de Freyd-Mitchell.

Podemos ver sem dificuldade que uma transformação natural η é um isomorfismo na categoria de funtores se, e somente se, é um isomorfismo natural, cuja inversa é a transformação natural $\{\eta_C^{-1} : C \in \mathscr{C}\}$.

Categorias de funtores são interessantes, pois podemos ver que muitas de suas propriedades seguem da categoria no contradomínio. Vejamos, por exemplo, que esta é abeliana caso seu contradomínio também o for.

Teorema 7.2.2. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria pequena e $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana. Assim, $(\mathscr{C}, \mathscr{A})$ é uma categoria abeliana.*

Demonstração. Mostramos os axiomas. Todos os funtores desta demonstração serão funtores de $(\mathscr{C}, \mathscr{A})$.

*A*0. O funtor 0 que leva todos os objetos de $\mathscr{C}$ num objeto zero de $\mathscr{A}$ é um objeto zero de $(\mathscr{C}, \mathscr{A})$, notando que para todo funtor F a família $\{0 \xrightarrow{0} F(C) : C \in \mathscr{C}\}$ é a única transformação natural de 0 para F, e $\{F(C) \xrightarrow{0} 0 : C \in \mathscr{C}\}$ é a única transformação natural de F para 0.

*A*1. Sejam F e G dois funtores. Assim, considere o funtor P dado nos objetos por $P(A) = F(A) \times G(A)$, e nos morfismos por, se $A \xrightarrow{f} B$ é um morfismo, $P(f) = (F(f) \circ p_{F(A)}, G(f) \circ p_{G(A)})$, com $p_{F(A)}$ e $p_{G(A)}$ as projeções do produto $F(A) \times G(A)$ em $\mathscr{A}$.

Assim, veremos que P forma um produto de F com G, junto das transformações naturais dadas pelas projeções para o funtor aplicado em cada objeto de $\mathscr{C}$, $p_F = \{F(C) \times G(C) \xrightarrow{p_{F(C)}} F(C) : C \in \mathscr{C}\}$ e $p_G = \{F(C) \times G(C) \xrightarrow{p_{G(C)}} G(C) : C \in \mathscr{C}\}$, cuja naturalidade segue diretamente da definição da aplicação de P nos morfismos.

Vejamos que (P, p_F, p_G) é um produto mostrando que, dada uma tripla da forma $(X, X \xrightarrow{\eta^1} F, X \xrightarrow{\eta^2} G)$, a família $\varphi = \{(\eta^1_C, \eta^2_C) : C \in \mathscr{C}\}$ é uma transformação natural, e é a única de X para P que comuta o diagrama do produto:

Que φ comuta o diagrama do produto e é única segue de forma simples depois de vermos que φ é uma transformação natural, já que para todo C, φ_C é o único morfismo tal que $p_{F(C)} \circ \varphi_C = \eta^1_C$ e $p_{G(C)} \circ \varphi_C = \eta^2_C$, de modo que φ deverá ser a única transformação natural cuja composição com as transformações naturais do produto será η^1 e η^2.

Para ver, então, que φ é uma transformação natural, seja $A \xrightarrow{f} B$ um morfismo. Aplicando as projeções do produto $F(B) \times G(B)$, vemos que

$$p_{F(B)} \circ \varphi_B \circ X(f) = \eta^1_B \circ X(f) = F(f) \circ \eta^1_A = F(f) \circ p_{F(A)} \circ \varphi_A = p_{F(B)} \circ P(f) \circ \varphi_A$$

e, similarmente, $p_{G(B)} \circ \varphi_B \circ X(f) = p_{G(B)} \circ P(f) \circ \varphi_A$, de modo que $\varphi_B \circ X(f)$ deve ser igual a $P(f) \circ \varphi_A$, já que ambas as composições satisfazem a propriedade que define um morfismo para $F(B) \times G(B)$ de forma única.

*A*1*. Segue por uma construção similar à do produto.

*A*2. Seja $F \xrightarrow{\eta} G$ uma transformação natural. Para cada $C \in \mathscr{C}$, seja k_C um kernel de η_C. Assim, $k = \{k_C : C \in \mathscr{C}\}$ é um kernel de η:

Mais especificamente, a transformação natural k sai do funtor K que leva os objetos C em $K(C)$ o domínio de k_C, e os morfismos $A \xrightarrow{f} B$ em $K(f)$ o único morfismo tal que $F(f) \circ k_A = k_B \circ K(f)$, cuja existência e unicidade é garantida pois $\eta_B \circ F(f) \circ k_A = G(f) \circ \eta_A \circ k_A = 0$, de modo que $F(f) \circ k_A$ se fatora pelo kernel de η_B.

Que k é mesmo uma transformação natural segue diretamente da definição de K nos morfismos. Além disso, é fácil ver que $\eta \circ k = 0$, já que $\eta_C \circ k_C = 0$ para todo $C \in \mathscr{C}$.

Agora, se $X \xrightarrow{\xi} F$ é uma transformação natural tal que $\eta \circ \xi = 0$, temos que $\eta_C \circ \xi_C = 0$ para todo $C \in \mathscr{C}$, e, portanto, existem únicos $k'_C \in (X(C), K(C))$ tais que $\xi_C = k_C \circ k'_C$. Assim, vejamos que $k' = \{k'_C : C \in \mathscr{C}\}$ é a única transformação natural de X para K tal que $\xi = k \circ k'$:

Tendo mostrado que k' é uma transformação natural, é direto que $\xi = k \circ k'$ e k' é a única transformação natural que satisfaz isto, notando a unicidade dos k'_C. Bem, para um morfismo $A \xrightarrow{f} B$, veja que, compondo com k_B, temos que

$$k_B \circ K(f) \circ k'_A = F(f) \circ k_A \circ k'_A = F(f) \circ \xi_A = \xi_B \circ X(f) = k_B \circ k'_B \circ X(f)$$

Com a penúltima igualdade vindo da naturalidade de ξ. Como k_B é um monomorfismo, sendo um kernel, segue que $K(f) \circ k'_A = k'_B \circ X(f)$, e k' é, portanto, uma transformação natural.

$A2^*$. Segue por uma construção similar à do kernel.

$A3$. Seja $\eta = \{\eta_C : C \in \mathscr{C}\}$ um monomorfismo. Assim, $\mathrm{Ker}(\eta) = 0$, de modo que, pela construção em $A2$, $\mathrm{Ker}(\eta_C) = 0$ para cada $C \in \mathscr{C}$. Com isto, temos que η_C monomorfismo para todo C, já que é um morfismo com kernel nulo numa categoria abeliana.

Assim, tomando um cokernel k de η, construído de forma similar à feita em $A2$, de modo que k_C é o cokernel de η_C para todo objeto C, temos que, como η_C é um monomorfismo, η_C é um kernel de k_C. Pela construção feita do kernel, vemos que η é um kernel de k, e temos o que é desejado.

$A3^*$. Segue de forma similar a $A3$.

□

Nas hipóteses do teorema acima, podemos ver que a operação de soma, que torna os conjuntos de morfismos (F, G) na categoria de funtores em grupos abelianos, é feita termo a termo. Ou seja, dadas transformações naturais η e ξ, então $\eta + \xi = \{\eta_C + \xi_C : C \in \mathscr{C}\}$.

Vemos que sequências exatas de funtores são verificadas termo a termo:

Proposição 7.2.3. *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{A}$ duas categorias, com $\mathscr{A}$ abeliana. Uma sequência de funtores $\cdots \longrightarrow F_{i-1} \xrightarrow{\eta^{i-1}} F_i \xrightarrow{\eta^i} F_{i+1} \longrightarrow \cdots$ em $(\mathscr{C}, \mathscr{A})$ é exata se, e somente se, para todo $C \in \mathscr{C}$ a sequência $\cdots \longrightarrow F_{i-1}(C) \xrightarrow{\eta_C^{i-1}} F_i(C) \xrightarrow{\eta_C^i} F_{i+1}(C) \longrightarrow \cdots$ é exata em $\mathscr{A}$.*

Demonstração. Seja $K \xrightarrow{k^i} F_i$ um kernel de η^i e $F_i \xrightarrow{c^i} C$ um cokernel de η^{i-1} construídos como no último teorema. Pela Proposição 4.3.1, a sequência é exata em F_i se, e somente se, $F_{i-1} \xrightarrow{\eta^{i-1}} F_i \xrightarrow{\eta^i} F_{i+1} = 0$ e $K \xrightarrow{k^i} F_i \xrightarrow{c^i} C = 0$.

Bem, $\eta^i \circ \eta^{i-1} = 0$ e $c^i \circ k^i = 0$ ocorre se, e somente se, para todo $C \in \mathscr{C}$ temos que $\eta_C^i \circ \eta_C^{i-1} = 0$ e $c_C^i \circ k_C^i = 0$. Agora, por construção de c^i e k^i, k_C^i é um kernel de η_C^i, e c_C^i é um cokernel de η_C^{i-1}, de modo que para cada C estas duas últimas composições serem zero é equivalente, pela Proposição 4.3.1, à exatidão da sequência $\cdots \longrightarrow F_{i-1}(C) \xrightarrow{\eta_C^{i-1}} F_i(C) \xrightarrow{\eta_C^i} F_{i+1}(C) \longrightarrow \cdots$ em $F_i(C)$. Segue, portanto, o que era desejado. □

Uma outra propriedade importante de uma categoria abeliana $\mathscr{A}$ que que podemos ver que se preserva na categoria de funtores para tal categoria é a de completude e cocompletude: se $\mathscr{A}$ é completa ou cocompleta e $\mathscr{C}$ é uma categoria qualquer, então $(\mathscr{C}, \mathscr{A})$ é, respectivamente, completa ou cocompleta. Podemos ver isto utilizando de construções parecidas com a feita em $A1$ no último teorema para o produto e o coproduto de funtores arbitrários.

Caso $\mathscr{C}$ não seja uma categoria pequena, ainda podemos definir somas, produtos e outras propriedades envolvendo funtores de $\mathscr{C}$ para uma categoria abeliana $\mathscr{A}$, ainda que possivelmente seja impossível falar da categoria de funtores de $\mathscr{C}$ para $\mathscr{A}$.

Para as construções feitas até então não houve nenhuma necessidade de que os conjuntos de morfismos sejam mesmo conjuntos, ao invés de classes. Sendo assim, utilizarei livremente de resultados já vistos anteriormente em construções envolvendo funtores saindo de categorias não necessariamente pequenas. Por exemplo, podemos ver que se F e G são funtores de $\mathscr{C}$ para $\mathscr{A}$, então o funtor $F \times G$ construído da mesma forma que fizemos em $A1$ no último teorema age como se esperaria de um produto com relação aos outros funtores de $\mathscr{C}$ para $\mathscr{A}$.

Dada uma categoria abeliana pequena qualquer $\mathscr{A}$, nosso próximo tópico de interesse será não a categoria de funtores de $\mathscr{A}$ para Ab, mas sua subcategoria cheia de funtores **aditivos** de $\mathscr{A}$ para Ab.

Denotamos a categoria de funtores aditivos de uma categoria abeliana pequena $\mathscr{A}$ para uma categoria abeliana $\mathscr{B}$ por $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$. Veremos que $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$ é a famigerada categoria abeliana especial mencionada no inicio deste capítulo.

Devemos mostrar, primeiramente, que esta é uma categoria abeliana.

Teorema 7.2.4. *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana pequena e $\mathscr{B}$ uma categoria abeliana. Assim, $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ é uma categoria abeliana.*

Demonstração. Basta ver que é uma subcategoria exata de $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$, de modo que $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ será, em particular, abeliana. Faremos isto utilizando o Teorema 5.7.4.

Para isto, vejamos então que as somas, os produtos, os kernels e os cokernels envolvendo funtores aditivos nos dão ainda funtores aditivos pela construção feita na categoria de funtores.

No caso do produto é fácil: basta ver que, utilizando a notação em $A1$ no Teorema 7.2.2, se F e G são aditivos, e x e y são dois morfismos em $(A, B)_{\mathscr{A}}$, então

$$\begin{aligned} P(x+y) &= (F(x+y)p_{F(A)}, G(x+y)p_{G(A)}) = ((F(x)+F(y))p_{F(A)}, (G(x)+G(y))p_{G(A)}) \\ &= (F(x)p_{F(A)} + F(y)p_{F(A)}, G(x)p_{G(A)} + G(y)p_{G(A)}) \\ &= (F(x)p_{F(A)}, G(x)p_{G(A)}) + (F(y)p_{F(A)}, G(y)p_{G(A)}) \\ &= P(x) + P(y) \end{aligned}$$

No caso do kernel, utilizando desta vez a notação em $A2$, e supondo que F e G são aditivos, e x e y são dois morfismos em $(A, B)_{\mathscr{A}}$, então $K(x+y)$ é o único morfismo tal que $F(x+y)k_A = k_B K(x+y)$. Agora, $K(x) + K(y)$ também satisfaz isto, pois $k_B(K(x)+K(y)) = k_B K(x) + k_B K(y) = F(x)k_A + F(y)k_A = (F(x)+F(y))k_A = F(x+y)k_A$, e, portanto, pela unicidade de tal morfismo, são iguais.

Para as somas e os cokernels segue com argumentos similares. □

Podemos ver também que $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ é completa se $\mathscr{B}$ é uma categoria completa, notando com argumentos similares que produtos arbitrários de funtores aditivos são funtores aditivos, e o mesmo vale para a cocompletude. Em particular, $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$ é completa e cocompleta.

7.3 A IMERSÃO DE YONEDA

Vejamos agora um funtor contravariante interessante saindo de uma categoria abeliana pequena $\mathscr{A}$ para $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$.

Definição 7.3.1. *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana pequena. Definimos o funtor contravariante $H\colon \mathscr{A} \to [\mathscr{A}, Ab]$ dado nos objetos por $H(A) = (A, \_)_{\mathscr{A}}$ e nos morfismos por $H(f) = (f, \_) \coloneqq \{(f, A) : A \in \mathscr{A}\}$. Este funtor é chamado a* ***imersão de Yoneda****.*

Veremos que a imersão de Yoneda é realmente uma imersão, e, mais ainda, é um funtor cheio e exato à esquerda.

Antes disto, precisaremos do Lema de Yoneda adaptado para funtores aditivos de uma categoria abeliana para Ab. Para o enunciarmos, definimos o seguinte funtor:

Definição 7.3.2. *Sejam $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ categorias, com $\mathscr{A}$ pequena, e fixe $A \in \mathscr{A}$. Definimos o funtor avaliação $E_A\colon (\mathscr{A}, \mathscr{B}) \to \mathscr{B}$ dado nos objetos por $E_A(F) = F(A)$, e nos morfismos por $E_A(\eta) = \eta_A$, se $\eta = \{\eta_X : X \in \mathscr{A}\}$.*

É fácil ver que caso $\mathscr{B}$ seja uma categoria abeliana temos que $E_A\colon (\mathscr{A}, \mathscr{B}) \to \mathscr{B}$ é um funtor aditivo para todo objeto A de $\mathscr{A}$, já que a soma de transformações naturais ocorre termo a termo. Se, também, $\mathscr{A}$ for abeliana, podemos ver um funtor avaliação E_A como um funtor saindo da subcategoria de $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ formada pelos funtores aditivos, $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$, em que E_A continua sendo um funtor aditivo, e daremos a mesma notação de E_A para esta restrição do funtor, apenas dando uma ênfase ao domínio, caso necessário.

Seguimos então com um lema que será necessário para o Lema de Yoneda.

Lema 7.3.3. *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana, e sejam $A \in \mathscr{A}$ e $F \in [\mathscr{A}, Ab]$. Assim, temos que $((A, \_)_{\mathscr{A}}, F)_{[\mathscr{A}, Ab]} \xrightarrow{y_{A,F}} F(A)$ dado por $y_{A,F}(\eta) = \eta_A(1_A)$ é um isomorfismo de grupos.*

Demonstração. Que é um morfismo de grupos, basta ver que $y_{A,F}(\eta + \mu) = (\eta + \mu)_A(1_A) = (\eta_A + \mu_A)(1_A) = \eta_A(1_A) + \mu_A(1_A) = y_{A,F}(\eta) + y_{A,F}(\mu)$.

Agora, para ver que $y_{A,F}$ é um isomorfismo, exibirei sua inversa. Para cada $x \in F(A)$, considere a família $\alpha^x = \{(A, C) \xrightarrow{\alpha^x_C} F(C) : C \in \mathscr{A}\}$, em que α^x_C é dado por $\alpha^x_C(\varphi) = F(\varphi)(x)$. Definimos então a função $\alpha\colon F(A) \to ((A, \_), F)$ dada por $\alpha(x) = \alpha^x$, e mostraremos que esta é uma inversa para $y_{A,F}$.

Antes de tudo, devemos mostrar que α^x é uma transformação natural para todo x, para que α esteja bem definida. Assim, fixemos x. Sejam então $B, C \in \mathscr{A}$ e $f \in (B, C)$. Gostaríamos de mostrar que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
(A, B) \arrow[r, "\alpha^x_B"] \arrow[d, "(A,f)"'] & F(B) \arrow[d, "F(f)"] \\
(A, C) \arrow[r, "\alpha^x_C"] & F(C)
\end{tikzcd}$$

Para isto, seja $\varphi \in (A, B)$. Vemos então que $F(f) \circ \alpha^x_B(\varphi) = F(f)(F(\varphi)(x)) = F(f) \circ F(\varphi)(x) = F(f \circ \varphi)(x) = \alpha^x_C(f \circ \varphi) = \alpha^x_C((A, f)(\varphi)) = \alpha^x_C \circ (A, f)(\varphi)$, de modo que $F(f) \circ \alpha^x_B = \alpha^x_C \circ (A, f)$, e o diagrama comuta como desejado.

Tendo mostrado que α está bem definida, mostramos que é uma inversa para $y_{A,F}$.

Seja $\eta \in ((A, \_), F)$. Assim, $\alpha(y_{A,F}(\eta)) = \alpha(\eta_A(1_A)) = \alpha^{\eta_A(1_A)}$. Vejamos que $\alpha^{\eta_A(1_A)} = \eta$: para cada objeto $B \in \mathscr{A}$, e cada $\varphi \in (A, B)$, temos que $\alpha^{\eta_A(1_A)}_B(\varphi) = F(\varphi)(\eta_A(1_A)) = (F(\varphi) \circ \eta_A)(1_A)$. Como η é uma transformação natural, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}(A,A) & \xrightarrow{\eta_A} & F(A) \\ {\scriptstyle (A,\varphi)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle F(\varphi)} \\ (A,B) & \xrightarrow{\eta_B} & F(B)\end{array}$$

Assim, $F(\varphi) \circ \eta_A = \eta_B \circ (A, \varphi)$, de modo, então, que $\alpha_B^{\eta_A(1_A)}(\varphi) = (F(\varphi) \circ \eta_A)(1_A) = (\eta_B \circ (A, \varphi))(1_A) = \eta_B(\varphi \circ 1_A) = \eta_B(\varphi)$. Deste modo, η é igual a $\alpha(y_{A,F}(\eta))$ em todos os objetos de $\mathscr{A}$, e é, portanto, a mesma transformação natural, e assim α é uma inversa à esquerda para $y_{A,F}$.

Agora, para o outro lado, seja $x \in F(A)$. Assim, $y_{A,F}(\alpha(x)) = y_{A,F}(\alpha^x) = \alpha_A^x(1_A) = F(1_A)(x) = 1_{F(A)}(x) = x$, e α é uma inversa à direita para $y_{A,F}$. Portanto, α é uma inversa para $y_{A,F}$, e $y_{A,F}$ é, então, um isomorfismo. □

E agora, demonstremos o Lema de Yoneda.

Lema 7.3.4 (Lema de Yoneda). *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana pequena. Assim,*

- *Fixado $A \in \mathscr{A}$, $y_A = \{((A, \_), F) \overset{y_{A,F}}{\longrightarrow} F(A) : F \in [\mathscr{A}, Ab]\}$ é um isomorfismo natural entre os funtores $((A, \_)_{\mathscr{A}}, \_)_{[\mathscr{A},Ab]}$ e E_A definidos de $[\mathscr{A}, Ab]$ para Ab.*
- *Fixado $F \in [\mathscr{A}, Ab]$, $y_F = \{((A, \_), F) \overset{y_{A,F}}{\longrightarrow} F(A) : A \in \mathscr{A}\}$ é um isomorfismo natural entre os funtores $(\_, F)_{[\mathscr{A},Ab]} \circ H$ e F definidos de $\mathscr{A}$ para Ab.*

Demonstração. Já vimos que $y_{A,F}$ é um isomorfismo para cada $A \in \mathscr{A}$ e $F \in [\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$. Portanto, assim que mostrarmos que y_A e y_F são transformações naturais, estes serão imediatamente isomorfismos naturais. Mostrarei isto, então.

- y_A é uma transformação natural: Seja $F \xrightarrow{\xi} G$ uma transformação natural. Gostaríamos de mostrar que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}((A,\_),F) & \xrightarrow{y_{A,F}} & F(A) \\ {\scriptstyle ((A,\_),\xi)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \xi_A} \\ ((A,\_),G) & \xrightarrow{y_{A,G}} & G(A)\end{array}$$

  Seja então $\eta \in ((A, \_), F)$. Por um lado, $\xi_A \circ y_{A,F}(\eta) = \xi_A(\eta_A(1_A)) = \xi_A \circ \eta_A(1_A)$. E, por outro lado, $y_{A,G} \circ ((A, \_), \xi)(\eta) = y_{A,G}(\xi \circ \eta) = (\xi \circ \eta)_A(1_A) = \xi_A \circ \eta_A(1_A)$, de modo que o diagrama realmente comuta.

- y_F é uma transformação natural: Seja $A \xrightarrow{f} B$ um morfismo em $\mathscr{A}$. Gostaríamos de mostrar que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}((A,\_),F) & \xrightarrow{y_{A,F}} & F(A) \\ {\scriptstyle ((f,\_),F)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ ((B,\_),F) & \xrightarrow{y_{B,F}} & F(B)\end{array}$$

  Seja então $\eta \in ((A, \_), F)$. Por um lado, $F(f) \circ y_{A,F}(\eta) = F(f) \circ \eta_A(1_A)$. Como η é uma transformação natural, o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd}
(A,A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "(A,f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\
(A,B) \arrow[r, "\eta_B"] & F(B)
\end{tikzcd}$$

Assim, em particular, $F(f) \circ \eta_A(1_A) = \eta_B \circ (A,f)(1_A) = \eta_B(f)$. Deste modo, $F(f) \circ y_{A,F}(\eta) = \eta_B(f)$. Agora, por outro lado, temos que $y_{B,F} \circ ((f,\_),F)(\eta) = y_{B,F}(\eta \circ (f,\_)) = (\eta \circ (f,\_))_B(1_B) = \eta_B \circ (f,B)(1_B) = \eta_B((f,B)(1_B)) = \eta_B(f)$, e o diagrama comuta como desejado. □

Com isto, seguimos com as demonstrações.

Teorema 7.3.5. *A imersão de Yoneda, vista como um funtor covariante saindo da categoria dual, é um funtor fiel e cheio.*

Demonstração. Devemos mostrar que para cada conjunto de morfismos (B,A) de $\mathscr{A}$ temos que a restrição $H\colon (B,A) \to ((A,\_),(B,\_))$ é uma bijeção.

Considere $y_{A,(B,\_)}$ o isomorfismo dado no lema para o Lema de Yoneda. Vejamos que esta restrição de H é uma inversa à direita para tal: dado $f \in (B,A)$, temos que $y_{A,(B,\_)}(H(f)) = y_{A,(B,\_)}((f,\_)) = (f,A)(1_A) = 1_A \circ f = f$.

Sendo uma inversa à direita para um isomorfismo, esta restrição de H é, portanto, também um isomorfismo de grupos, e, assim, uma bijeção. □

Teorema 7.3.6. *A imersão de Yoneda, vista como um funtor covariante saindo da categoria dual, é um funtor exato à esquerda.*

Demonstração. Seja $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$ uma sequência exata à esquerda em $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$. Pela Proposição 7.2.3, a sequência de funtores $(0,\_) \longrightarrow (A,\_) \longrightarrow (B,\_) \longrightarrow (C,\_)$ é exata se, e somente se, $(0,X) \longrightarrow (A,X) \longrightarrow (B,X) \longrightarrow (C,X)$ é exata para todo $X \in \mathscr{A}^{\mathrm{op}}$.

Mas esta sequência é exata, pois para todo $X \in \mathscr{A}$ o funtor $(\_,X)$ covariante saindo de $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ é exato à esquerda, como já vimos. □

Como já mencionado, infelizmente este funtor não é necessariamente exato para que possamos aplicar as ideias dadas no final do capítulo anterior.

Veremos que a soma $\sum_{A\in\mathscr{A}} H(A)$ é um gerador para a categoria de funtores aditivos, propriedade que será útil posteriormente. Segue um lema para vermos isto.

Lema 7.3.7. *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana pequena, e considere o funtor avaliação $E_A\colon [\mathscr{A}, Ab] \to Ab$ para cada objeto $A \in \mathscr{A}$. Assim, $\prod_{A\in\mathscr{A}} E_A$ é um funtor fiel.*

Demonstração. Seja $F \xrightarrow{\eta} G$ uma transformação natural, e suponha que $(\prod_{A\in\mathscr{A}} E_A)(\eta) = 0$. Como $\prod_{A\in\mathscr{A}} E_A$ é aditivo, basta mostrar que $\eta = 0$.

Para cada $B \in \mathscr{A}$, considere a projeção $p_{E_B} = \{(\prod_{A\in\mathscr{A}} E_A)(F) \xrightarrow{p_{E_B(F)}} E_B(F) : F \in [\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]\}$ do produto $\prod_{A\in\mathscr{A}} E_A$ para E_B. Como $E_B(\eta) = \eta_B$, temos que $\eta_B \circ p_{E_B(F)} = E_B(\eta) \circ p_{E_B(F)} = p_{E_B(G)} \circ (\prod_{A\in\mathscr{A}} E_A)(\eta) = 0$, da naturalidade da projeção p_{E_B}.

Agora, p_{E_B} é um epimorfismo, pois é um morfismo advindo de um produto em uma categoria abeliana, de modo que, em particular, temos que $p_{E_B(F)}$ é um epimorfismo. Desta forma, para todo $B \in \mathscr{A}$, devemos ter que, como $\eta_B \circ p_{E_B(F)} = 0$, $\eta_B = 0$. Assim, $\eta = 0$ e, portanto, $\prod_{A\in\mathscr{A}} E_A$ é fiel. □

Teorema 7.3.8. *Dada uma categoria abeliana pequena $\mathscr{A}$, a soma $\sum_{A\in\mathscr{A}} H(A)$ é um gerador em $[\mathscr{A}, Ab]$.*

Demonstração. Mostremos então que $(\sum_{A\in\mathscr{A}} H(A), \_)$ é um funtor fiel. Para isto, veremos que $(\sum_{A\in\mathscr{A}} H(A), \_)$ é naturalmente isomorfo a $\prod_{A\in\mathscr{A}} E_A$, que é um funtor fiel, de modo que a Proposição 7.1.6 nos garante o que queremos.

Pelo Lema de Yoneda 7.3.4, temos que $(H(A), \_) \cong E_A$, de modo que o funtor $\prod_{A\in\mathscr{A}}(H(A), \_)$ é naturalmente isomorfo a $\prod_{A\in\mathscr{A}} E_A$. Assim, basta mostrar que $(\sum_{A\in\mathscr{A}} H(A), \_)$ é naturalmente isomorfo a $\prod_{A\in\mathscr{A}}(H(A), \_)$.

Estarei denotando por u_A e p_A os morfismos que acompanham respectivamente a definição da soma e do produto indexados pelo objeto A de $\mathscr{A}$ de todas as somas e produtos que aparecerem nesta demonstração. Também omitirei os conjuntos de indexação para melhor visualização, já que serão todos indexados por $\mathscr{A}$.

Considere $\varphi = \{(\sum H(A), F) \xrightarrow{\varphi_F} \prod(H(A), F) : F \in [\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]\}$ com φ_F dada nos elementos de $(\sum H(A), F)$ por $\varphi_F(\eta) = (\eta \circ u_A)_{\mathscr{A}} \in \prod(H(A), F)$. Mostrarei que este é um isomorfismo natural.

Para cada funtor F, φ_F é devidamente um morfismo de grupos, pois $\varphi_F(\eta + \mu) = ((\eta + \mu) \circ u_A)_{\mathscr{A}} = (\eta \circ u_A + \mu \circ u_A)_{\mathscr{A}} = (\eta \circ u_A)_{\mathscr{A}} + (\mu \circ u_A)_{\mathscr{A}} = \varphi_F(\eta) + \varphi_F(\mu)$.

Vejamos que φ é devidamente uma transformação natural: Seja $F \xrightarrow{\eta} G$ uma transformação natural. Devemos ver que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
(\sum H(A), F) \arrow[r, "\varphi_F"] \arrow[d, "(\sum H(A),\eta)"'] & \prod(H(A), F) \arrow[d, "\prod(H(A),\eta)"] \\
(\sum H(A), G) \arrow[r, "\varphi_G"] & \prod(H(A), G)
\end{tikzcd}$$

Dado $\mu \in (\sum H(A), F)$, temos que $(\varphi_G \circ (\sum H(A), \eta))(\mu) = \varphi_G(\eta \circ \mu) = (\eta \circ \mu \circ u_A)_{\mathscr{A}}$. Para mostrar que a outra composição é igual, mostrarei que $\prod(H(A), \eta) \circ \varphi_F$ satisfaz a propriedade que define este morfismo unicamente: Para cada $X \in \mathscr{A}$ temos que

$$\begin{aligned}
(p_X \circ \textstyle\prod(H(A), \eta) \circ \varphi_F)(\mu) &= (p_X \circ \textstyle\prod(H(A), \eta))((\mu \circ u_A)_{\mathscr{A}}) \\
&= ((H(X), \eta) \circ p_X)((\mu \circ u_A)_{\mathscr{A}}) = (H(X), \eta)(p_X((\mu \circ u_A)_{\mathscr{A}})) \\
&= (H(X), \eta)(\mu \circ u_X) = \eta \circ \mu \circ u_X
\end{aligned}$$

De modo que $(\prod(H(A), \eta) \circ \varphi_F)(\mu) = (\eta \circ \mu \circ u_A)_{\mathscr{A}}$, e, portanto, $\prod(H(A), \eta) \circ \varphi_F = \varphi_G \circ (\sum H(A), \eta)$.

Tendo mostrado que φ é uma transformação natural, mostremos que é um isomorfismo natural. Faremos isto construindo uma inversa para cada φ_F. Para cada F, considere $\psi_F \colon \prod(H(A), F) \to (\sum H(A), F)$ dada por, para cada $x = (x_A)_{\mathscr{A}} \in \prod(H(A), F)$, $\psi_F(x) = \sum x_A$.

A função ψ_F é uma inversa à esquerda para φ_F, pois $\psi_F(\varphi_F(\eta)) = \psi_F((\eta \circ u_A)_{\mathscr{A}}) = \sum(\eta \circ u_A) = \eta$. E é uma inversa à direita pois $\varphi_F(\psi_F((x_I)_{\mathscr{A}})) = \varphi_F(\sum x_I) = ((\sum x_I) \circ u_A)_{\mathscr{A}} = (x_A)_{\mathscr{A}}$ (que é igual a $(x_I)_{\mathscr{A}}$). Portanto, φ_F é um isomorfismo para cada F, e φ é um isomorfismo natural como desejado. □

8 CATEGORIAS DE GROTHENDIECK E ENVELOPES INJETIVOS

Ainda não falamos de cogeradores injetivos, e nem sequer sabemos por enquanto se $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$ possui um (não que isto importe, já que estaremos interessados em uma subcategoria desta). Este capítulo construirá uma ferramenta que ajudará a mostrar a existência de um cogerador injetivo, dentre outros resultados importantes.

Aqui definiremos categorias de Grothendieck e mostraremos que toda categoria de Grothendieck com um gerador é tal que todo objeto possui um envelope injetivo (que também serão definidos). Em particular, isto implica que de todo objeto há um monomorfismo para um objeto injetivo, que, pela Proposição 6.3.10, implica que a categoria possui um cogerador injetivo.

Veremos que $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$ é uma categoria de Grothendieck, e, portanto, abusa destas propriedades.

8.1 CATEGORIAS DE GROTHENDIECK

Comecemos definindo categorias de Grothendieck.

Definição 8.1.1 (Categoria de Grothendieck)**.** *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana bicompleta e well-powered. Dizemos que $\mathscr{A}$ é uma **categoria de Grothendieck** se possui a propriedade de Grothendieck:*

Para qualquer conjunto $\{A_i\}_I$ de subobjetos de um objeto A, totalmente ordenado pela continência, e qualquer subobjeto B de A temos que

$$B \cap \left(\textstyle\bigcup_I A_i\right) = \textstyle\bigcup_I (B \cap A_i)$$

A união de um conjunto arbitrário de subobjetos de um objeto A está bem definida neste caso, pois uma categoria de Grothendieck é, em particular, uma categoria cocompleta, e o Teorema 4.2.12 nos garante isto.

A propriedade de Grothendieck, ainda que óbvia para Set, já que a união e a intersecção de subobjetos é justamente a união e a intersecção destes vistos como conjuntos, não é necessariamente verdadeira para outras categorias.

A categoria Ab possui esta propriedade, pois a união de famílias totalmente ordenadas pela continência de subgrupos é justamente a união destes vistos como conjuntos, e a intersecção de grupos também o é. Portanto, como Ab é uma categoria abeliana bicompleta e *well-powered*, temos que Ab é uma categoria de Grothendieck.

Da mesma forma, R-mod também é de Grothendieck.

Veremos como uma proposição este próximo exemplo que terá bastante importância, mas que é um pouco menos trivial.

Proposição 8.1.2. *Dada uma categoria abeliana pequena $\mathscr{A}$, temos que $[\mathscr{A}, Ab]$ é uma categoria de Grothendieck.*

Demonstração. A categoria $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$ é bicompleta, pois Ab é bicompleta. Também, pela Proposição 6.3.9, $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$ é *well-powered*, pois possui um gerador, como visto no Teorema 7.3.8. Basta mostrar então a propriedade de Grothendieck.

Lembre que a construção de uma união de uma família arbitrária de subobjetos $\{\iota^i\}_I$ de um dado objeto é feita utilizando a imagem do morfismo $\sum_I \iota^i$. Podemos ver que, na categoria de funtores, em que os morfismos ι^i são transformações naturais, temos que $\sum_I \iota^i = \{\sum_I \iota^i_A : A \in \mathscr{A}\}$. Como a imagem de um morfismo numa categoria abeliana é o kernel do cokernel do morfismo, e a construção de kernels e cokernels na categoria de funtores para uma categoria abeliana é feita objeto a objeto, podemos ver, então, que a união $\cup_I \iota^i$ será dada também de forma pontual, por uma transformação natural da forma $\{\cup_I \iota^i_A : A \in \mathscr{A}\}$.

Por argumentos de construção parecidos, podemos ver que a intersecção de subobjetos numa categoria de funtores é, também, feita de forma pontual.

Tendo isto, seja $\{f^i\}_I$ um conjunto totalmente ordenado pela continência de subobjetos de um funtor F, e h um subobjeto qualquer de F. Assim, vemos que $h \cap (\cup_I f^i)$ é um subobjeto tal que para cada $A \in \mathscr{A}$ temos que $(h \cap (\cup_I f^i))_A = h_A \cap (\cup_I f^i)_A = h_A \cap (\cup_I f^i_A)$.

Assim, como podemos ver, também, que $\{f^i_A\}_I$ é um conjunto de subobjetos totalmente ordenado pela continência em Ab, temos que, como Ab é de Grothendieck, $h_A \cap (\cup_I f^i_A) = \cup_I (h_A \cap f^i_A)$, de modo que $(h \cap (\cup_I f^i))_A = \cup_I (h_A \cap f^i_A) = \cup_I (h \cap f^i)_A = (\cup_I (h \cap f^i))_A$.

Desta forma, $h \cap (\cup_I f^i)$ é o mesmo subobjeto que $\cup_I (h \cap f^i)$, e temos, então, a propriedade de Grothendieck. □

8.2 EXTENSÕES

Para falarmos de envelopes injetivos, precisamos primeiro trabalhar no conceito de extensões.

Definição 8.2.1 (Extensões)**.** *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana, e A um objeto de $\mathscr{A}$. Uma **extensão** de A é um monomorfismo $A \longrightarrow B$. Quando o monomorfismo for implícito, chamaremos B de uma extensão de A.*

A identidade de todo objeto A é uma extensão de A. Usualmente ao mencionarmos A como uma extensão de si mesmo, estaremos nos referindo à extensão 1_A de A.

Uma extensão é dita **própria** se não for um isomorfismo.

Estaremos pelo restante desta seção assumindo que as categorias em questão sejam categorias abelianas.

Definição 8.2.2 (Extensões Essenciais)**.** *Uma **extensão essencial** de um objeto A é uma extensão $A \longrightarrow B$ de A tal que para todo monomorfismo não nulo $B' \longrightarrow B$ temos que a intersecção de suas imagens (ou seja, dos subobjetos que os monomorfismos representam) é não nula.*

As identidades são claramente extensões essenciais.

Uma proposição que nos ajuda em demonstrações envolvendo extensões essenciais, dentre outras demonstrações, é a seguinte:

Proposição 8.2.3. *Sejam $A \longrightarrow B$ e $K \longrightarrow B$ dois subobjetos de um objeto B, e seja $B \longrightarrow F$ um morfismo cujo kernel é $K \longrightarrow B$. Assim, temos que $A \cap K = 0$ se, e somente se, $A \longrightarrow B \longrightarrow F$ é um monomorfismo.*

Demonstração. Pelo Corolário 4.2.10, a intersecção $A \cap K$ é igual ao kernel do morfismo $A \longrightarrow B \longrightarrow F$. Assim, $A \cap K = 0$ se, e somente se, o kernel de $A \longrightarrow B \longrightarrow F$ é zero, que ocorre se, e somente se, este é um monomorfismo. □

Definição 8.2.4 (Extensões Triviais). *Uma **extensão trivial** de um objeto A é uma extensão $A \longrightarrow B$ de A tal que existe um morfismo $B \longrightarrow A$ tal que $A \longrightarrow B \longrightarrow A = A \xrightarrow{1_A} A$.*

As identidades são claramente extensões triviais.

É fácil ver também que o morfismo $B \longrightarrow A$ na definição será um epimorfismo.

Proposição 8.2.5. *Dada uma extensão $A \longrightarrow B$ e seu cokernel $B \longrightarrow C$, então $A \longrightarrow B$ é trivial se, e somente se, podemos ver B como uma soma direta de A com C em que $A \longrightarrow B$ é a inclusão de A na primeira coordenada.*

Demonstração. Denotemos por ι o morfismo $A \longrightarrow B$ e por p seu cokernel como no enunciado.

Para a volta, vendo B apenas como uma soma de A com C, a estendemos para um sistema de soma direta, e assim a projeção para A é tal que composta com ι é igual a 1_A.

Agora, para a ida, considere m um morfismo tal que $m \circ \iota = 1_A$. Considere também $K \xrightarrow{k} B$ o kernel de m. Assim, pela Proposição 8.2.3, $A \cap K = 0$, pois $m \circ \iota$ é um monomorfismo.

Também pela Proposição 8.2.3, mas olhando por outro lado, como $K \cap A = 0$ e ι é um kernel de p, temos que $p \circ k$ é um monomorfismo. Com um argumento parecido utilizando o dual da Proposição 8.2.3, podemos ver que $p \circ k$ é um epimorfismo. Portanto, $p \circ k$ é um isomorfismo, com inversa, digamos, φ.

Com isto, vejamos que (B, ι, ψ, m, p) forma um sistema de soma direta de A com C, em que $\psi = k \circ \varphi$. Para ver isto utilizarei a segunda equivalência do Teorema 4.6.13.

Bem, que $m \circ \iota = 1_A$ é claro. Pela definição de φ, $p \circ \psi = p \circ k \circ \varphi = 1_C$. A exatidão das sequências segue de forma bem direta também, já que p é o cokernel de ι, e ψ é facilmente visto como um kernel de m, já que é um monomorfismo equivalente a k. Segue então o que queríamos. □

Proposição 8.2.6. *Toda extensão trivial e essencial é um isomorfismo.*

Demonstração. Seja $A \longrightarrow B$ uma extensão trivial e essencial. Sendo uma extensão trivial, existe $B \longrightarrow A$ tal que $A \longrightarrow B \longrightarrow A = 1_A$.

Seja $K \longrightarrow B$ um kernel de $B \longrightarrow A$. Assim, como $A \longrightarrow B \longrightarrow A = 1_A$ é um monomorfismo, pela Proposição 8.2.3, temos que $A \cap K = 0$. Como $A \longrightarrow B$ é essencial, temos então que $K = 0$, de modo que $B \longrightarrow A$ é um monomorfismo.

Como $B \longrightarrow A$ é um epimorfismo, pois 1_A o é, temos que este é um isomorfismo. Assim, $A \longrightarrow B$ é, portanto, também um isomorfismo. □

Podemos então caracterizar injetivos a partir de extensões.

Proposição 8.2.7. *Um objeto é injetivo se, e somente se, possui apenas extensões triviais.*

Demonstração. Para a ida, seja Q um objeto injetivo. Pela Proposição 6.2.4, dada uma extensão i de Q, e considerando 1_Q, temos que, da injetividade de Q, existe um morfismo m tal que $1_Q = m \circ i$, e a extensão é, portanto, trivial.

Agora, para a volta, suponha que Q é um objeto que possui apenas extensões triviais. Utilizaremos também a Proposição 6.2.4. Sejam então $A \xrightarrow{q} Q$ um morfismo e $A \xrightarrow{f} B$ um monomorfismo. Considere, assim, um quadrado pushout destes morfismos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"] & B \arrow[d, "y"] \\ Q \arrow[r, "x"] & P \end{tikzcd}$$

Pelo Teorema 4.6.12, temos que x é um monomorfismo. Por hipótese, x é uma extensão trivial de Q. Assim, existe $P \xrightarrow{m} Q$ tal que $m \circ x = 1_Q$.

Vejamos então que o morfismo $\overline{q} := m \circ y$ é tal que $\overline{q} \circ f = q$: bem, $\overline{q} \circ f = m \circ y \circ f = m \circ x \circ q = 1_Q \circ q = q$. Segue então que Q é injetivo. □

Lema 8.2.8. *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria de Grothendieck. Para toda extensão $A \longrightarrow B$ de um objeto A de $\mathscr{A}$ existe uma extensão essencial $A \longrightarrow F$ de A que se fatora por $A \longrightarrow B$.*

Ou seja, existe um morfismo $B \longrightarrow F$ tal que $A \longrightarrow B \longrightarrow F$ é uma extensão essencial de A.

Demonstração. Informalmente, o morfismo $B \longrightarrow F$ será, em suma, o quociente de B por um "maior possível" subobjeto de B cuja intersecção com a imagem de $A \longrightarrow B$ é nula, para, de certa forma, remover toda a parte não essencial da extensão. Formalizaremos isto.

Considere $\mathscr{F}$ a classe de subobjetos de B cuja intersecção com a imagem de $A \longrightarrow B$ é nula, parcialmente ordenada pela inclusão. Como $\mathscr{A}$ é de Grothendieck, $\mathscr{A}$ é *well-powered*, de modo que $\mathscr{F}$ é um conjunto.

Seja $\{B_i\}_I$ uma cadeia ascendente em $\mathscr{F}$. Como argumentado anteriormente, como $\mathscr{A}$ é de Grothendieck, a união dos subobjetos desta cadeia, $\bigcup_J B_i$ existe como um subobjeto de B. Agora, denotando por A também a imagem de $A \longrightarrow B$, temos pela propriedade de Grothendieck que $A \cap \bigcup_I B_i = \bigcup_I (A \cap B_i) = \bigcup_I 0 = 0$, de forma que $\bigcup_I B_i \in \mathscr{F}$. A cadeia possui, portanto, uma cota superior em $\mathscr{F}$, $\bigcup_I B_i$.

Assim, temos que toda cadeia ascendente em $\mathscr{F}$ possui uma cota superior. Pelo Lema de Zorn, segue que $\mathscr{F}$ possui um elemento maximal, digamos K. Podemos notar que se um subobjeto de B está contido em K, então este subobjeto tem intersecção nula com A.

Considere então um cokernel $B \longrightarrow F$ de $K \longrightarrow B$, e o objeto quociente F representado pelo mesmo. Pela Proposição 8.2.3, como $A \cap K = 0$, $A \longrightarrow B \longrightarrow F$ é um monomorfismo, e é, portanto, uma extensão de A. Resta mostrar que esta extensão é essencial.

Seja então F_S um subobjeto de F e suponha que $A \cap F_S = 0$. Gostaríamos de mostrar que $F_S = 0$. Considere o cokernel $F \longrightarrow F_Q$ de $F_S \longrightarrow F$. Assim, também pela Proposição 8.2.3, temos que $A \longrightarrow F \longrightarrow F_Q$ é um monomorfismo.

Agora, apenas mudando a perspectiva para que vejamos F_Q como um objeto quociente de B que está contido em F, temos que

$$A \longrightarrow F \longrightarrow F_Q = A \longrightarrow B \longrightarrow F \longrightarrow F_Q = A \longrightarrow B \longrightarrow F_Q$$

Vemos então que o kernel $F_K \longrightarrow B$ de $B \longrightarrow F_Q$ é tal que, agora como subobjetos de B, $A \cap F_K = 0$, já que $A \longrightarrow B \longrightarrow F_Q$ é um monomorfismo, de modo que $F_K \in \mathscr{F}$.

Novamente como subobjetos de B, temos então que K está contido em F_K, pois $K \longrightarrow B \longrightarrow F \longrightarrow F_Q = 0$ e F_K é o kernel de $B \longrightarrow F \longrightarrow F_Q$. Como K é maximal em $\mathscr{F}$, devemos ter que estes subobjetos são iguais. Ou seja, que $K = F_K$.

Deste modo, os cokernels dos monomorfismos representantes de K e F_K, F e F_Q, são o mesmo objeto quociente de B. Assim, o morfismo $F \longrightarrow F_Q$ é um isomorfismo e, em particular, um monomorfismo.

Assim, como $F_S \longrightarrow F$ é o kernel de $F \longrightarrow F_Q$, temos que $F_S = 0$.

Portanto, o único subobjeto de F cuja intersecção com A é nula é o subobjeto nulo, e F é então uma extensão essencial de A. $\square$

Teorema 8.2.9. *Numa categoria de Grothendieck, um objeto é injetivo se, e somente se, não possui extensões essenciais próprias.*

Demonstração.

$\Longrightarrow$ Suponha que E é injetivo, e considere alguma extensão essencial de E. Assim, pela Proposição 8.2.7, temos que esta extensão é trivial. Pela Proposição 8.2.6, esta extensão é um isomorfismo e, portanto, não é própria. Assim, nenhuma extensão essencial de E é própria.

$\Longleftarrow$ Suponha que E não possui extensões essenciais próprias. Seja $E \longrightarrow B$ uma extensão. Pelo lema anterior, existe um morfismo $B \longrightarrow F$ tal que $E \longrightarrow B \longrightarrow F$ é uma extensão essencial de E. Por hipótese, esta extensão não é própria, e é, portanto, um isomorfismo.

Assim, existe um morfismo $F \longrightarrow E$ tal que $E \longrightarrow B \longrightarrow F \longrightarrow E$ é a identidade. Por definição, $E \longrightarrow B$ é então uma extensão trivial. Como era uma extensão arbitrária, toda extensão de E é, portanto, trivial. Pela Proposição 8.2.7, segue que E é injetivo. $\square$

8.3 ENVELOPES INJETIVOS

Definição 8.3.1. *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana, e A um objeto de $\mathscr{A}$. Um **envelope injetivo** de A é uma extensão essencial $A \longrightarrow E$ em que E é injetivo.*

Como mencionado no começo deste capítulo, em uma categoria de Grothendieck com um gerador todos os objetos possuem envelopes injetivos, e é isto que mostraremos nesta seção. Segue um lema para melhor entendimento da construção que faremos.

Lema 8.3.2. *Seja $A \longrightarrow B$ uma extensão essencial de A, e seja $B \longrightarrow C$ uma extensão de B. Assim, $B \longrightarrow C$ é essencial se, e somente se, $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ é uma extensão essencial de A.*

Demonstração.

$\Longrightarrow$ A composição de monomorfismos é um monomorfismo, e, portanto, $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ é devidamente uma extensão de A. Mostremos então que é essencial.

Seja $C' \longrightarrow C$ um monomorfismo não nulo. Queremos mostrar que a intersecção dos subobjetos representados por $C' \longrightarrow C$ e $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ é não nula.

Bem, como $B \longrightarrow C$ é essencial, $B' := C' \cap B \neq 0$. Agora, como $A \longrightarrow B$ é essencial, vistos como subobjetos de B, temos que $A' := B' \cap A \neq 0$.

Assim, agora vendo todos os subobjetos como subobjetos de C, como $A' \subseteq B'$ e $B' \subseteq C'$, A' está contido em C', e, portanto, como também $A' \subseteq A$, temos que

$A' \subseteq C' \cap A$. Como $A' \neq 0$, segue então que $C' \cap A \neq 0$, e, portanto, $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ deve ser essencial.

$\Longleftarrow$ Seja $C' \longrightarrow C$ um subobjeto não nulo de C. Mostremos então que a intersecção $C' \cap B$ é diferente de zero.

Bem, veja que $A' := C' \cap A \neq 0$, pois $A \longrightarrow C$ é essencial. Como temos que $A' \subseteq A \subseteq B$ e $A' \subseteq C'$, então $A' \subseteq C' \cap B$. Assim, $C' \cap B \neq 0$, e, portanto, $B \longrightarrow C$ é essencial. $\square$

O procedimento para mostrar a existência de envelopes injetivos para todo objeto A será, de certo modo, feito por formar uma sequência de extensões essenciais de A que apenas se estaciona quando chega num envelope injetivo e mostrar que ela deve se estacionar caso a categoria de Grothendieck possua um gerador.

Façamos então as preparações para esta demonstração.

Para cada objeto A numa categoria de Grothendieck $\mathscr{A}$, pelo restante desta seção, denotaremos a seguinte relação entre extensões de A: Dadas extensões E_1 e E_2 de A, diremos que $E_1 \leq E_2$ se existe uma extensão $E_1 \longrightarrow E_2$ tal que $A \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 = A \longrightarrow E_2$.

Note que, neste caso, se E_1 e E_2 são extensões essenciais, então, pelo lema anterior, $E_1 \longrightarrow E_2$ é também uma extensão essencial.

Diremos que uma família $\{A \longrightarrow E_\gamma\}$ de extensões de um objeto A indexada por ordinais é uma sequência de extensões de A se sempre que $\alpha \leq \beta$, então $E_\alpha \leq E_\beta$. Dizemos que esta sequência é limitada se os índices são todos menores (ou menores ou iguais) que algum ordinal γ_0, ou seja, se a família for um conjunto.

Repare que, dada uma sequência de extensões $\{A \xrightarrow{e_\gamma} E_\gamma\}$, existe uma família associada de extensões $\{E_\alpha \xrightarrow{i_{\alpha,\beta}} E_\beta : \alpha \leq \beta\}$ dadas pela continência de E_α em E_β quando $\alpha \leq \beta$, ou seja, uma família tal que $e_\beta = i_{\alpha,\beta} \circ e_\alpha$ sempre que $\alpha \leq \beta$.

Diremos que uma sequência de extensões $\{A \longrightarrow E_\gamma\}$ satisfaz a propriedade conectiva se existe uma família associada de extensões $\{E_\alpha \xrightarrow{i_{\alpha,\beta}} E_\beta : \alpha \leq \beta\}$, como no parágrafo anterior, tal que sempre que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ temos que $E_\alpha \xrightarrow{i_{\alpha,\beta}} E_\beta \xrightarrow{i_{\beta,\gamma}} E_\gamma = E_\alpha \xrightarrow{i_{\alpha,\gamma}} E_\gamma$.

Para formar a sequência de extensões essenciais mencionada há alguns parágrafos, faremos uma construção de uma extensão essencial que limite superiormente qualquer sequência limitada de extensões essenciais.

Lema 8.3.3. *Sejam A um objeto numa categoria de Grothendieck e E uma extensão de A. Seja $\{E_\gamma\}_\gamma$ um conjunto totalmente ordenado de subobjetos de E que contém o subobjeto A tal que $\{A \longrightarrow E_\gamma\}$ é uma sequência limitada de extensões essenciais. Assim, $\cup_\gamma E_\gamma$ é uma extensão essencial de A.*

Demonstração. Seja S um subobjeto não nulo de $\cup_\gamma E_\gamma$. Assim, vistos como subobjetos de E, $S = S \cap \cup_\gamma E_\gamma$, que, pela propriedade de Grothendieck, é igual a $\cup_\gamma (S \cap E_\gamma)$. Como esta união é não nula, segue que $S \cap E_\gamma \neq 0$ para algum γ.

Como $A = E_\gamma \cap A$, já que $A \subseteq E_\gamma$, temos que $S \cap A = S \cap (E_\gamma \cap A) = (S \cap E_\gamma) \cap A$, que é não nulo, pois $S \cap E_\gamma$ é um subobjeto de E_γ não nulo e E_γ é uma extensão essencial de A. Segue então que $\cup_\gamma E_\gamma$ é uma extensão essencial de A. $\square$

Lema 8.3.4. *Numa categoria abeliana, seja $S \xrightarrow{\varphi} S$ um morfismo tal que $\varphi \circ \varphi = \varphi$, e seja $K \xrightarrow{k} S$ seu kernel. Assim, se $S \xrightarrow{f} E$ é um morfismo cujo kernel contém k, então $f \circ \varphi = \varphi$.*

Demonstração. Seja $\varphi_i \circ \varphi_c$ uma fatoração de φ em um monomorfismo composto com um epimorfismo, dado pelo Teorema 4.2.6. Note que $\varphi_i \circ \varphi_c \circ \varphi_i \circ \varphi_c = \varphi \circ \varphi = \varphi = \varphi_i \circ \varphi_c$, de modo que, como φ_i é um monomorfismo, temos que $\varphi_c \circ \varphi_i \circ \varphi_c = \varphi_c$.

Como k está contido no kernel de f, temos que $f \circ k = 0$, de modo que f se fatora pelo cokernel de k. Como φ_c representa a coimagem de φ, temos que este é um cokernel do kernel de φ, ou seja, que φ_c é um cokernel de k. Assim, temos que existe f' tal que $f = f' \circ \varphi_c$.

Deste modo, temos que $f \circ \varphi = f' \circ \varphi_c \circ \varphi_i \circ \varphi_c = f' \circ \varphi_c = f$, e temos o que era desejado. □

Teorema 8.3.5. *Sejam A um objeto numa categoria de Grothendieck e $\{A \longrightarrow E_\gamma\}$ uma sequência limitada de extensões de A que satisfaz a propriedade conectiva, com, digamos, a família $\{E_\alpha \xrightarrow{i_{\alpha,\beta}} E_\beta : \alpha \leq \beta\}$ associada.*

Assim, existe uma extensão $A \longrightarrow E$ tal que existe uma família de monomorfismos $\{E_\gamma \xrightarrow{i_{\gamma,E}} E\}$ em que $A \longrightarrow E_\gamma \xrightarrow{i_{\gamma,E}} E = A \longrightarrow E$ e sempre que $\alpha \leq \beta$ temos que $i_{\beta,E} \circ i_{\alpha,\beta} = i_{\alpha,E}$.

Demonstração. Seja $(S, \{E_\gamma \xrightarrow{u_\gamma} S\})$ uma soma de todos os E_γ da sequência.

Para cada γ indexando a sequência, considere o morfismo $S \xrightarrow{h_\gamma} S$ definido de forma única pela composição com cada u_α por $h_\gamma \circ u_\alpha = E_\alpha \xrightarrow{i_{\alpha,\gamma}} E_\gamma \xrightarrow{u_\gamma} S$, se $\alpha < \gamma$, e por $h_\gamma \circ u_\alpha = u_\alpha$ se $\gamma \leq \alpha$. Considere também para, cada γ, o kernel k_γ de h_γ.

Veja que para todo $\alpha \leq \beta$ temos que $h_\beta \circ h_\alpha = h_\beta$, já que, compondo as inclusões $u_{\alpha'}$, se $\alpha' < \alpha$ temos que $h_\beta \circ h_\alpha \circ u_{\alpha'} = h_\beta \circ u_\alpha \circ i_{\alpha',\alpha} = u_\beta \circ i_{\alpha,\beta} \circ i_{\alpha',\alpha} = u_\beta \circ i_{\alpha',\beta} = h_\beta \circ u_{\alpha'}$, e, se $\alpha' \geq \alpha$, $h_\beta \circ h_\alpha \circ u_{\alpha'} = h_\beta \circ u_{\alpha'}$.

Com isto, vemos que $\{k_\gamma\}$ é uma família ascendente de subobjetos de S, já que se $\alpha \leq \beta$ temos que $k_\alpha \subseteq k_\beta$, pois $h_\beta \circ k_\alpha = h_\beta \circ h_\alpha \circ k_\alpha = 0$.

Considere $k = \cup_\gamma k_\gamma$, quando vistos como subobjetos de S. Assim, seja $S \xrightarrow{h} E$ um morfismo qualquer cujo kernel é k. Mostrarei que podemos ver E como uma extensão de A, que será a extensão desejada. Vejamos primeiramente que, para cada α, $E_\alpha \xrightarrow{i_{\alpha,E}} E :=$ $E_\alpha \xrightarrow{u_\alpha} S \xrightarrow{h} E$ é um monomorfismo:

Pela Proposição 8.2.3, basta mostrar que $E_\alpha \cap k = 0$. Bem, pela propriedade de Grothendieck, vistos como subobjetos de S, $E_\alpha \cap k = E_\alpha \cap \cup_\gamma k_\gamma = \cup_\gamma (E_\alpha \cap k_\gamma)$, que é zero se, e somente se, $E_\alpha \cap k_\gamma = 0$ para todo γ. Agora, pela mesma proposição, isto ocorre se, e somente se, para todo γ tivermos que $h_\gamma \circ u_\alpha$ é um monomorfismo, e este é um monomorfismo em ambos os casos da construção de h_γ.

Sendo assim, vejamos que para cada $\alpha \leq \beta$ temos que $i_{\beta,E} \circ i_{\alpha,\beta} = i_{\alpha,E}$. Note primeiramente que, pelo lema anterior, $h \circ h_\gamma = h$ para todo γ, já que $h_\gamma \circ h_\gamma = h_\gamma$ e o kernel de h_γ está contido no kernel de h. Assim, temos que $i_{\beta,E} \circ i_{\alpha,\beta} = h \circ u_\beta \circ i_{\alpha,\beta} = h \circ h_\beta \circ u_\alpha = h \circ u_\alpha = i_{\alpha,E}$.

Tomando então, por exemplo, a extensão $A \longrightarrow E = A \longrightarrow E_0 \longrightarrow E$, é simples de se verificar que a família $\{E_\gamma \xrightarrow{i_{\gamma,E}} E\}$ satisfaz o que era desejado. □

No caso, seguindo a notação do teorema acima, esta família de monomorfismos é uma família que garante que para todo γ temos que $E_\gamma \leq E$ como extensões de A. E, mais ainda, temos que a família dada pela união desta família com $\{E_\alpha \xrightarrow{i_{\alpha,\beta}} E_\beta : \alpha \leq \beta\}$ nos garante que a sequência de extensões dada ao incluir E no final da sequência de extensões $\{A \longrightarrow E_\gamma\}$ continua possuindo a propriedade conectiva.

Uma interpretação similar pode ser feita com o próximo corolário.

Corolário 8.3.6. *Sejam A um objeto numa categoria de Grothendieck e $\{A \longrightarrow E_\gamma\}$ uma sequência limitada de extensões essenciais de A que satisfaz a propriedade conectiva, com, digamos, a família $\{E_\alpha \stackrel{i_{\alpha,\beta}}{\longrightarrow} E_\beta : \alpha \leq \beta\}$ associada.*

Assim, existe uma extensão essencial $A \longrightarrow E'$ tal que existe uma família de monomorfismos $\{E_\gamma \stackrel{i_{\gamma,E'}}{\longrightarrow} E'\}$ em que $A \longrightarrow E_\gamma \stackrel{i_{\gamma,E'}}{\longrightarrow} E' = A \longrightarrow E'$ e sempre que $\alpha \leq \beta$ temos que $i_{\beta,E'} \circ i_{\alpha,\beta} = i_{\alpha,E'}$.

Demonstração. O teorema anterior nos garante que existe uma extensão E tal que $E_\gamma \leq E$ para todo $\gamma < \gamma_0$, e que existe uma família $\{E_\gamma \stackrel{i_{\gamma,E}}{\longrightarrow} E\}$ em que $A \longrightarrow E_\gamma \stackrel{i_{\gamma,E}}{\longrightarrow} E = A \longrightarrow E$ e sempre que $\alpha \leq \beta$ temos que $i_{\beta,E} \circ i_{\alpha,\beta} = i_{\alpha,E}$.

Podemos então ver a sequência de extensões de outro modo: como uma sequência de subobjetos de E. Mais precisamente, vemos a família $\{E_\gamma \stackrel{i_{\gamma,E}}{\longrightarrow} E\}$ como tal sequência de subobjetos. A propriedade conectiva nos garante que sempre que $\alpha \leq \beta$ temos que $i_{\alpha,E} \subseteq i_{\beta,E}$, de forma que esta é uma sequência totalmente ordenada de subobjetos de E que contém A.

Estamos então nas hipóteses do Lema 8.3.3. Desta forma, $E' = \cup E_\gamma$ é uma extensão essencial de A. Digamos que o subobjeto E' de E é representado por um monomorfismo e.

Seja, para cada γ, $i_{\gamma,E'}$ algum monomorfismo dado pela continência de $i_{\gamma,E}$ em E' como subobjetos de E, ou seja, um morfismo tal que $e \circ i_{\gamma,E'} = i_{\gamma,E}$. Considere então a família $\{E_\gamma \stackrel{i_{\gamma,E'}}{\longrightarrow} E'\}$. Vejamos que, para $\alpha \leq \beta$, temos que $i_{\beta,E'} \circ i_{\alpha,\beta} = i_{\alpha,E'}$.

Bem, com $\alpha \leq \beta$, temos que $e \circ i_{\beta,E'} \circ i_{\alpha,\beta} = i_{\beta,E} \circ i_{\alpha,\beta} = i_{\alpha,E} = e \circ i_{\alpha,E'}$, de modo que, como e é um monomorfismo, $i_{\beta,E'} \circ i_{\alpha,\beta} = i_{\alpha,E'}$, como desejado.

É simples ver, então, que a extensão E' junto da família $\{E_\gamma \stackrel{i_{\gamma,E'}}{\longrightarrow} E'\}$ satisfaz o que era desejado. □

Pelo Teorema 8.2.9, cada objeto não injetivo possui uma extensão essencial própria. Pelo axioma da escolha global, podemos definir uma função E que leva cada objeto A não injetivo de uma categoria de Grothendieck num objeto $E(A)$ desta categoria tal que existe uma extensão essencial própria $A \longrightarrow E(A)$, e leva cada objeto injetivo I nele mesmo, associando a este a extensão essencial $I \stackrel{1_I}{\longrightarrow} I$.

Assim, fixado um objeto A numa categoria de Grothendieck $\mathscr{A}$, definiremos, para cada ordinal γ, uma sequência limitada de extensões essenciais de A que satisfaz a propriedade conectiva e possui cardinalidade $\gamma + 1$.

Para $\gamma_0 = 0$, definimos $A \longrightarrow E_0$ como a extensão $A \longrightarrow E(A)$. Assim, definimos a família $F_0 := \{A \longrightarrow E_0\}$, que é claramente uma sequência de extensões essenciais satisfazendo a propriedade conectiva.

Para cada $\gamma_0 > 0$, definimos por recursão transfinita[1]: suponha que para todo $\gamma < \gamma_0$ temos que $A \longrightarrow E_\gamma$ está definida e é uma extensão essencial de A, e de modo que $F_\gamma := \{A \longrightarrow E_\alpha : \alpha \leq \gamma\}$ é uma sequência limitada de extensões essenciais que satisfaz a propriedade conectiva.

[1] A recursão transfinita é como uma recursão usual, mas percorrendo todos os ordinais, ao invés de apenas os naturais! O leitor que não é familiarizado pode consultar o site https://pt.wikipedia.org/wiki/Indução_transfinita, por exemplo.

Suponha, ainda mais, que, para cada $\gamma < \gamma_0$, tenhamos fixada uma família $C_\gamma = \{E_\alpha \overset{i_{\alpha,\beta}}{\longrightarrow} E_\beta : \alpha \leq \beta \leq \gamma\}$ associada a F_γ, dada pois F_γ satisfaz a propriedade conectiva, e que tenhamos que sempre que $\alpha \leq \gamma$ temos que $C_\alpha \subseteq C_\gamma$.

Neste caso, a família $F_{\gamma_0}^{<} := \{A \longrightarrow E_\alpha : \alpha < \gamma_0\}$ é uma sequência limitada de extensões essenciais que satisfaz a propriedade conectiva, pois $\cup_{\gamma<\gamma_0} C_\gamma$ é uma família associada a esta sequência que garante tal propriedade.

Considere então $A \longrightarrow I_{\gamma_0}$ uma extensão essencial de A que limita superiormente todas as extensões de $F_{\gamma_0}^{<}$, como no Corolário 8.3.6, construída utilizando a família $\cup_{\gamma<\gamma_0} C_\gamma$, e seja $\{E_\gamma \overset{i_{\gamma,I_{\gamma_0}}}{\longrightarrow} I_{\gamma_0}\}$ a família de extensões para I_{γ_0} provinda do mesmo corolário.

Assim, definimos a extensão essencial $A \longrightarrow E_{\gamma_0}$ como $A \longrightarrow I_{\gamma_0} \longrightarrow E(I_{\gamma_0})$, cuja essencialidade se dá por ser uma composição de extensões essenciais, e consideramos a família $C'_{\gamma_0} = \{E_\gamma \overset{i_{\gamma,I_{\gamma_0}}}{\longrightarrow} I_{\gamma_0} \longrightarrow E_{\gamma_0}\}$, que podemos ver que satisfaz propriedades análogas às de $\{E_\gamma \overset{i_{\gamma,I_{\gamma_0}}}{\longrightarrow} I_{\gamma_0}\}$.

Desta forma, vejamos que a família $F_{\gamma_0} := \{A \longrightarrow E_\alpha : \alpha \leq \gamma_0\}$ é uma sequência de extensões essenciais que satisfaz a propriedade conectiva, e construamos a família associada C_{γ_0} que satisfaz a hipótese feita de que $C_\alpha \subseteq C_{\gamma_0}$ para todo $\alpha \leq \gamma_0$:

É claro que a família F_{γ_0} é uma sequência de extensões essenciais, dado que $F_{\gamma_0}^{<}$ é uma sequência de extensões essenciais, e que E_{γ_0} é uma extensão essencial contendo todas as extensões E_γ quando $\gamma < \gamma_0$, por sua construção.

Fixamos, então, a família $C_{\gamma_0} = (\cup_{\gamma<\gamma_0} C_\gamma) \cup C'_{\gamma_0}$ associada a F_{γ_0}. Pode se ver que família satisfaz as propriedades que garantem que F_{γ_0} possua a propriedade conectiva, e é tal que $C_\alpha \subseteq C_{\gamma_0}$ para todo $\alpha < \gamma_0$, completando o argumento por indução transfinita.

Com isto, temos definido para cada ordinal γ uma sequência F_γ de extensões essenciais que satisfaz a propriedade conectiva.

Lema 8.3.7. *Dado um objeto A numa categoria de Grothendieck, algum ordinal γ, e a sequência de extensões essenciais F_γ construída como acima, então dados α e β com $\alpha < \beta < \gamma$, temos que $E_\alpha \longrightarrow E_\beta$, extensão essencial dada pelo fato de que $E_\alpha < E_\beta$, é própria se, e somente se, E_α não é injetivo.*

Demonstração. A ida segue diretamente do Teorema 8.2.9, pois E_α possuir uma extensão essencial própria implica em E_α não ser injetivo.

Agora suponha por outro lado que E_α não é injetivo. Veja que, seguindo como na notação dada na construção de F_β, temos que $A \longrightarrow E_\alpha \in F_\beta^{<}$, de modo que, pela construção de E_β e de I_β, podemos escrever $E_\alpha \longrightarrow E_\beta$ como uma composição de extensões essenciais $E_\alpha \longrightarrow I_\beta \longrightarrow E(I_\beta)$. Caso uma destas extensões da composição seja própria, devemos ter que a composição também é própria.

Se $E_\alpha \longrightarrow I_\beta$ for uma extensão própria, segue diretamente o resultado. Supomos então que esta não é uma extensão própria. Neste caso, este é um isomorfismo, de modo que I_β também não deve ser injetivo. Assim, pela construção de E, $I_\beta \longrightarrow E(I_\beta)$ é uma extensão própria, também nos garantindo o resultado. $\square$

Assim, no momento em que encontrarmos ordinais α e β tais que $E_\alpha \longrightarrow E_\beta$ for um isomorfismo, podemos concluir que E_α é injetivo, e, como $A \longrightarrow E_\alpha$ é essencial, este será um envelope injetivo para A.

Lema 8.3.8. *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana, G um gerador e R o anel de endomorfismos (G, G). Assim, $(G, \_)$, visto como um funtor para R-mod, preserva extensões essenciais.*

Demonstração. Seja $A \xrightarrow{f} B$ é uma extensão essencial em $\mathscr{A}$. Queremos mostrar que $(G, A) \overset{(G,f)}{\longrightarrow} (G, B)$ é uma extensão essencial em R-mod.

Claramente, (G, f) é um monomorfismo, pois $(G, \_)$ é exata à esquerda. Seja, deste modo, M um submódulo não nulo de (G, B). Gostaríamos de mostrar que sua intersecção com (G, f) é não nula. Pela Proposição 8.2.3, isto é o mesmo que encontrar um morfismo $(G, B) \longrightarrow P$ cujo kernel é (G, f) mas $M \longrightarrow (G, B) \longrightarrow P$ não é um monomorfismo.

Considere um morfismo $B \xrightarrow{\pi} F$ cujo kernel é o monomorfismo f. Como $(G, \_)$ é exata à esquerda, o kernel de (G, π) é (G, f). Mostrarei que $M \longrightarrow (G, B) \overset{(G,\pi)}{\longrightarrow} (G, F)$ não é um monomorfismo, ou seja, que a restrição de (G, π) ao submódulo M não é um monomorfismo.

Como M é não nulo, existe $x \neq 0 \in M \subseteq (G, B)$. Notando que x é um morfismo de G para B, seja k o kernel de $\pi \circ x$. Considere também a fatoração de x por sua imagem, $G \longrightarrow I \longrightarrow B$.

Começarei mostrando que $x \circ k \neq 0$. Suponha por contradição que $x \circ k = 0$. Bem, neste caso, temos que $\mathrm{Ker}(x) = \mathrm{Ker}(\pi \circ x)$, pois um está contido no outro. Assim, $\mathrm{Coim}(\pi \circ x) = \mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}(\pi \circ x)) = \mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}(x)) = \mathrm{Coim}(x) = G \longrightarrow I$. Agora, $G \xrightarrow{x} B \xrightarrow{\pi} F$ $= G \longrightarrow I \longrightarrow B \xrightarrow{\pi} F$, de modo que, como $G \longrightarrow I$ é a coimagem de $\pi \circ x$, pelo Teorema 4.2.6, $I \longrightarrow B \longrightarrow F$ é um monomorfismo. Neste caso, pela Proposição 8.2.3, como f é o kernel de π, temos que $I \cap A = 0$. Mas $I \neq 0$, pois $x \neq 0$, o que nos dá uma contradição, já que f é essencial.

Com isto, $x \circ k \neq 0$. Assim, como G é um gerador, pela Proposição 6.3.3, existe um morfismo $G \xrightarrow{k'} K$ tal que $x \circ k \circ k' \neq 0$, ou, como $k \circ k' \in (G, G) = R$, utilizando a notação da multiplicação de R-módulos, $(k \circ k') \cdot x \neq 0$. Agora, como M é um submódulo, $(k \circ k') \cdot x \in M$, sendo um múltiplo de um elemento de M, e, também, $(G, \pi)((k \circ k') \cdot x) = (G, \pi)(x \circ k \circ k') = \pi \circ x \circ k \circ k' = 0$, de modo que temos um elemento não nulo de M que (G, π) mapeia para zero, e $M \longrightarrow (G, B) \overset{(G,\pi)}{\longrightarrow} (G, F)$ não é, portanto, um monomorfismo. $\square$

Teorema 8.3.9. *Em uma categoria de Grothendieck $\mathscr{A}$ com um gerador todo objeto possui um envelope injetivo.*

Demonstração. Seja G um gerador em $\mathscr{A}$. Denotando R como o anel (G, G), vemos $(G, \_)$ como um funtor de $\mathscr{A}$ para R-mod.

Seja $A \in \mathscr{A}$. Pela Proposição 6.3.10, como R-mod possui um cogerador injetivo, existe uma extensão $(G, A) \longrightarrow Q$ para um objeto injetivo Q em R-mod.

Sendo um R-módulo, Q possui apenas um conjunto de subobjetos. Seja então γ_0 um ordinal maior que a cardinalidade do conjunto de subobjetos de Q, e considere $F_{\gamma_0} = \{A \longrightarrow E_\gamma : \gamma \leq \gamma_0\}$ a sequência de extensões essenciais de A satisfazendo a propriedade conectiva com família associada C_{γ_0}, que foi definida nesta seção.

Pela Proposição 6.2.4, como Q é injetivo e $(G, A) \longrightarrow (G, E_{\gamma_0})$ é um monomorfismo, temos que $(G, A) \longrightarrow Q$ se fatora como $(G, A) \longrightarrow (G, E_{\gamma_0}) \longrightarrow Q$.

Vejamos que $(G, E_{\gamma_0}) \longrightarrow Q$ é um monomorfismo: a intersecção de seu kernel com $(G, A) \longrightarrow (G, E_{\gamma_0})$ é, pelo Corolário 4.2.10, o kernel de $(G, A) \longrightarrow (G, E_{\gamma_0}) \longrightarrow Q$. Agora, $(G, A) \longrightarrow Q$ é um monomorfismo, de modo que seu kernel é zero. Como, pelo lema anterior, $(G, A) \longrightarrow (G, E_{\gamma_0})$ é uma extensão essencial, pois $A \longrightarrow E_{\gamma_0}$ é essencial, devemos ter que o kernel de $(G, E_{\gamma_0}) \longrightarrow Q$ é zero, e este deve então ser um monomorfismo.

Desta forma, vemos (G, E_{γ_0}) como um subobjeto de Q. Podemos ver, mais ainda, (G, E_γ) como um subobjeto de Q para todo $\gamma < \gamma_0$, dado por $(G, E_\gamma) \longrightarrow (G, E_{\gamma_0}) \longrightarrow Q$, em que $E_\gamma \longrightarrow E_{\gamma_0}$ é um morfismo de C_{γ_0}.

Note que se $\alpha \leq \beta$, então, como subobjetos de Q, temos que $(G, E_\alpha) \subseteq (G, E_\beta)$, pois $(G, E_\alpha) \longrightarrow (G, E_{\gamma_0}) \longrightarrow Q = (G, E_\alpha) \longrightarrow (G, E_\beta) \longrightarrow (G, E_{\gamma_0}) \longrightarrow Q$, já que $E_\alpha \longrightarrow E_{\gamma_0} = E_\alpha \longrightarrow E_\alpha \longrightarrow E_{\gamma_0}$, dada a propriedade conectiva.

Assim, podemos definir uma função $F_{\gamma_0} \to \{\text{subobjetos de } Q\}$ que leva a extensão $A \longrightarrow E_\gamma$ no subobjeto (G, E_γ) de Q. Esta função não pode ser injetiva, pois a cardinalidade do domínio é maior que a do contradomínio. Assim, existem α e β tais que $(G, E_\alpha) = (G, E_\beta)$ como subobjetos de Q.

Agora, veja que se $E_\alpha \longrightarrow E_\beta$ é uma extensão própria, então $(G, E_\alpha) \longrightarrow (G, E_\beta)$ também é própria, pois $(G, \_)$ é fiel, de modo que, pelo Teorema 5.5.5, deve levar não isomorfismos em não isomorfismos. Olhando por outro lado, isto nos diz que se $(G, E_\alpha) \longrightarrow (G, E_\beta)$ não é própria, então $E_\alpha \longrightarrow E_\beta$ também não o é.

Neste caso, como o morfismo $(G, E_\alpha) \longrightarrow (G, E_\beta)$ é um morfismo dado pela continência de (G, E_α) em (G, E_β), segue pela Proposição 3.3.2 que este é um isomorfismo, de modo que não é uma extensão própria. Com isto, $E_\alpha \longrightarrow E_\beta$ também não é própria.

Pelo Lema 8.3.7, temos então que E_α deve ser injetivo, e assim $A \longrightarrow E_\alpha$ é, portanto, um envelope injetivo de A. □

Corolário 8.3.10. *Dada uma categoria abeliana pequena $\mathscr{A}$, temos que em $[\mathscr{A}, Ab]$ todo objeto possui um envelope injetivo.*

Demonstração. Pela Proposição 8.1.2, temos $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$ é de Grothendieck. Pelo Teorema 7.3.8, $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$ possui um gerador. Assim, o Teorema 8.3.9 nos garante o que queremos. □

Em particular, pela Proposição 6.3.10, uma categoria de Grothendieck com um gerador possui um cogerador injetivo, e, portanto, a categoria de funtores de uma categoria abeliana pequena para Ab possui um cogerador injetivo.

9 O TEOREMA DE FREYD-MITCHELL

Neste capítulo finalmente desmontaremos o Teorema de Freyd-Mitchell. Dada uma categoria abeliana pequena, encontramos dois capítulos atrás um funtor contravariante saindo dela que, quando visto como um funtor covariante saindo da categoria dual, é fiel e cheio, e cujo contradomínio é uma categoria abeliana completa. Vimos neste último capítulo que esta categoria abeliana completa, ainda mais, possui um cogerador injetivo. Infelizmente, este funtor para esta categoria não é necessariamente exato, mas apenas exato à esquerda.

O funtor em questão é a imersão de Yoneda, e esta pode ser vista como um funtor para a subcategoria cheia da categoria de funtores aditivos formada pelos funtores exatos à esquerda, pois os funtores Hom covariantes são exatos à esquerda.

O fato é que a categoria de funtores exatos à esquerda de uma categoria abeliana pequena para Ab é, na verdade, uma categoria abeliana por si só, que continua sendo completa e possuindo um cogerador injetivo, e, mais ainda, a imersão de Yoneda para esta categoria é um funtor exato. O trabalho maior deste capítulo será mostrar estes fatos, em especial que a categoria de funtores exatos à esquerda é abeliana. Com estes resultados em mão, será, então, uma tarefa simples demonstrar o Teorema de Freyd-Mitchell.

Para isto, precisaremos de diversas ferramentas e resultados ainda. Neste capítulo serão definidos diversos conceitos que, ainda que pudessem ter sido definidos em outros capítulos, não teriam sido aproveitados pelo restante deste trabalho, de modo que é mais apropriado os introduzir por aqui.

Assumiremos neste capítulo que $\mathscr{A}$ será uma categoria abeliana pequena quando não dito de outra forma.

9.1 OBJETOS MONO

Definição 9.1.1 (Funtores Mono)**.** *Um funtor é dito **mono** se preserva monomorfismos.*

Utilizaremos a subcategoria cheia de $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$ formada pelos funtores mono para auxiliar no trabalho a ser feito na subcategoria formada pelos funtores exatos à esquerda, que podemos ver que está contida na mesma.

Lema 9.1.2. *Seja $M \xrightarrow{\eta} E$ uma extensão essencial de um funtor mono M em $[\mathscr{A}, Ab]$. Assim, E também é um funtor mono.*

Demonstração. Nas hipóteses do enunciado, seja $A \xrightarrow{f} B$ um monomorfismo em $\mathscr{A}$. Queremos mostrar que $E(f)$ é um monomorfismo em Ab. Seja $a \in E(A)$ tal que $E(f)(a) = 0$. Construiremos um funtor que será um subobjeto de E que nos auxiliará a mostrar que $a = 0$.

Para cada $X \in \mathscr{A}$ considere o subconjunto $Q_X = \{E(\alpha)(a) : \alpha \in (A, X)\}$ de $E(X)$. Este é, de fato, um subgrupo de $E(X)$, pois, se $x, y \in Q_X$, temos que existem α_x e α_y tais que $E(\alpha_x)(a) = x$ e $E(\alpha_y)(a) = y$, e vemos que $\alpha_x - \alpha_y$ é tal que $E(\alpha_x - \alpha_y)(a) = (E(\alpha_x) - E(\alpha_y))(a) = E(\alpha_x)(a) - E(\alpha_y)(a) = x - y$, já que E é aditivo, de modo que $x - y \in Q_X$.

Definimos então um funtor $Q \in [\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$ dado nos objetos por $Q(X) = Q_X$ e nos morfismos por $Q(X \xrightarrow{x} Y)$ é a restrição de $E(x)$ a Q_X no domínio e a Q_Y no contradomínio.

É possível fazer esta restrição no contradomínio sem problemas, pois se $q \in Q_X$, então existe $\alpha_x \in (A, X)$ tal que $E(\alpha_x)(a) = q$, e $E(x \circ \alpha_x)(a) = (E(x) \circ E(\alpha_x))(a) = E(x)(E(\alpha_x)(a)) = E(x)(q)$, de modo que $E(x)(q)$ devidamente pertence a Q_Y.

A inclusão ι_X dos subgrupos Q_X em $E(X)$ para cada X nos dá então claramente uma transformação natural ι de Q para E. Mais ainda, nos dá um monomorfismo em $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$ de Q para E, já que todas as inclusões são monomorfismos.

Considere então a intersecção $\iota \cap \eta$. Mostrarei que ela é nula. Como intersecções em $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$ são feitas ponto a ponto, basta ver que a intersecção de ι_X com η_X é nula para todo $X \in \mathscr{A}$. Fixado então um objeto $X \in \mathscr{A}$, considere x um elemento na imagem de algum morfismo representante de $\iota_X \cap \eta_X$. Ou seja, x é um elemento na intersecção da imagem de η_X com Q_X em $E(X)$.

O elemento x é, portanto, tal que existe $\alpha_x \in (A, X)$ tal que $E(\alpha_x)(a) = x$, já que está em Q_X, e é tal que existe $m_x \in M(X)$ tal que $\eta_X(m_x) = x$, já que está na imagem de η_X. Considere então um quadrado pushout de f e α_x em $\mathscr{A}$,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_x"] & B \arrow[d, "\hat{\alpha_x}"] \\ X \arrow[r, "\hat{f}"] & P \end{tikzcd}$$

Note que, pela naturalidade de η, temos que $\eta_P \circ M(\hat{f}) = E(\hat{f}) \circ \eta_X$, de modo que

$$(\eta_P \circ M(\hat{f}))(m_x) = (E(\hat{f}) \circ \eta_X)(m_x) = E(\hat{f})(\eta_X(m_x)) = E(\hat{f})(x)$$

Assim, vemos que

$$\begin{aligned}(\eta_P \circ M(\hat{f}))(m_x) &= E(\hat{f})(x) = E(\hat{f})(E(\alpha_x)(a)) = (E(\hat{f}) \circ E(\alpha_x))(a) = E(\hat{f} \circ \alpha_x)(a) \\ &= E(\hat{\alpha_x} \circ f)(a) = E(\hat{\alpha_x})(E(f)(a)) = E(\hat{\alpha_x})(0) = 0\end{aligned}$$

Como η_P é um monomorfismo, pois η o é, e $M(\hat{f})$ é um monomorfismo, pois M é um funtor mono e $\hat{f}$ é um monomorfismo pelo Teorema 4.6.12, já que f o é, temos que $\eta_P \circ M(\hat{f})$ é um monomorfismo, de modo que, então, $m_x = 0$, e, portanto, $x = \eta_X(m_x) = 0$.

Com isto, a intersecção de ι com η é nula. Como η é uma extensão essencial de M, segue então que ι deve ser o subobjeto nulo, e Q deve ser, portanto, um funtor nulo. Em particular, devemos ter que $Q_A = Q(A) = 0$, de modo que, como $a \in Q_A$, já que $E(1_A)(a) = 1_{E(A)}(a) = a$, temos que $a = 0$, e, portanto, $E(f)$ deve ser injetivo, e, então, um monomorfismo, e E é, assim, um funtor mono. □

Proposição 9.1.3. *Se $E \in [\mathscr{A}, Ab]$ é injetivo, então E é um funtor exato à direita.*

Demonstração. Seja $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ uma sequência exata à direita em $\mathscr{A}$. Como a imersão de Yoneda é exata à esquerda, temos que a sequência

$$0 \longrightarrow H(C) \longrightarrow H(B) \longrightarrow H(A)$$

é exata. Agora, como E é injetivo, o funtor $(\_, E)$ é exato, de modo que a sequência

$$(H(A), E) \longrightarrow (H(B), E) \longrightarrow (H(C), E) \longrightarrow 0$$

é também exata. Agora, como pelo Lema de Yoneda $(\_, E) \circ H$ é naturalmente isomorfo a E, segue pela Proposição 7.1.7 que a sequência

$$E(A) \longrightarrow E(B) \longrightarrow E(C) \longrightarrow 0$$

é exata, e temos o que é desejado. □

Em particular, temos que um envelope injetivo de um funtor mono é um funtor exato, já que é um funtor mono e exato à esquerda.

Denotaremos por $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ a subcategoria cheia de $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$ formada pelos funtores mono aditivos. Este categoria não será necessariamente abeliana, mas se provará útil na demonstração de que a categoria de funtores exatos à esquerda é abeliana.

Proposição 9.1.4. *$\mathscr{M}(\mathscr{A})$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Se $F \longrightarrow M$ é um monomorfismo em $[\mathscr{A}, Ab]$, e $M \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$, então $F \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$*

2. *Se $\{M_i\}_I$ é uma família de funtores em $\mathscr{M}(\mathscr{A})$, então seu produto $\prod_I M_i$ está em $\mathscr{M}(\mathscr{A})$.*

3. *Se $M \longrightarrow F$ é uma extensão essencial em $[\mathscr{A}, Ab]$, e $M \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$, então $F \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$.*

Ou seja, $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ é fechada por subobjetos, produtos e extensões essenciais.

Demonstração.

1. Seja $F \xrightarrow{\iota} M$ um monomorfismo em $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$ com $M \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$. Assim, ι_A é um monomorfismo para todo $A \in \mathscr{A}$. Considere então um monomorfismo $A \xrightarrow{f} B$ em $\mathscr{A}$.

   Como ι é uma transformação natural, segue que $\iota_B \circ F(f) = M(f) \circ \iota_A$. Agora, $M(f) \circ \iota_A$ é um monomorfismo, já que $M(f)$ e ι_A o são. Assim, pela Proposição 3.2.3, $F(f)$ é um monomorfismo, já que $\iota_B \circ F(f)$ o é, e, portanto, F é mono.

2. Seja $\{M_i\}_I$ uma família de funtores mono, e $A \xrightarrow{f} B$ um monomorfismo em $\mathscr{A}$. Queremos mostrar que $G \coloneqq \prod_I M_i$ é tal que $G(f)$ é um monomorfismo. Considere então k o kernel de $G(f)$.

   Pela construção do produto arbitrário de funtores, da naturalidade das projeções para cada M_i, temos, para cada $i \in I$, que $M_i(f) \circ p_i \circ k = p_i \circ G(f) \circ k = 0$. Como $M_i(f)$ é um monomorfismo, já que M_i é mono, segue que $p_i \circ k = 0$. Deste modo, temos então que $k = \prod_I 0 = 0$. Como k é o kernel de $G(f)$, e $k = 0$, segue, portanto, que $G(f)$ é um monomorfismo, e G é então mono, como desejado.

3. Foi demonstrado no Lema 9.1.2. $\square$

Trabalharemos com um caso mais geral para maior simplicidade de notação: pelo restante deste capítulo, $\mathscr{B}$ será uma categoria de Grothendieck que possui envelopes injetivos, e $\mathscr{M}$ será uma subcategoria cheia e não vazia de $\mathscr{B}$ que satisfaz estas três propriedades, e nomearemos os objetos de $\mathscr{M}$ como **objetos mono**.

Um caso fora da categoria de funtores é o de Ab, em que a subcategoria cheia de grupos abelianos livres de torção satisfaz todas estas propriedades. Isto também motiva a nomenclatura que será dada mais para a frente para os objetos de torção, que seriam os equivalentes aos grupos de torção em Ab.

9.2 OBJETOS ABSOLUTAMENTE PUROS

Novamente, estamos fixando uma categoria de Grothendieck que possui envelopes injetivos $\mathscr{B}$, e uma subcategoria cheia e não vazia $\mathscr{M}$ de $\mathscr{B}$ que é fechada por subobjetos, produtos e extensões essenciais.

Aqui traremos o conceito de objetos absolutamente puros com relação a $\mathscr{M}$, e veremos que a subcategoria cheia de objetos absolutamente puros com relação a $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ é justamente a subcategoria cheia de funtores exatos à esquerda de $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$.

Definição 9.2.1 (Subobjetos Puros)**.** *Dado $M \in \mathscr{M}$, dizemos que um subobjeto representado por um monomorfismo ι de M é puro se para todo cokernel $M \xrightarrow{f} F$ de ι temos que $F \in \mathscr{M}$.*

Definição 9.2.2 (Objetos Absolutamente Puros)**.** *Dado $A \in \mathscr{M}$, dizemos que A é absolutamente puro se sempre que $A \xrightarrow{\iota} M$ é um monomorfismo para um objeto $M \in \mathscr{M}$, ι representa um subobjeto puro.*

Denotarei a subcategoria cheia da categoria $\mathscr{B}$ formada pelos objetos absolutamente puros com relação a $\mathscr{M}$ por $\mathscr{L}$.

Demonstrarei alguns lemas envolvendo objetos absolutamente puros.

Lema 9.2.3. *Todo objeto mono injetivo é absolutamente puro.*

Demonstração. Seja E um objeto mono injetivo, $E \longrightarrow M$ um monomorfismo com M mono, e $M \longrightarrow F$ um cokernel deste monomorfismo. Gostaríamos de mostrar que F é mono.

Pela Proposição 8.2.7, $E \longrightarrow M$ é uma extensão trivial de E, e, pela Proposição 8.2.5, segue que M é uma soma direta de E e F. Em particular, podemos ver F como um subobjeto de M, e, como M é mono, F também o é. □

Lema 9.2.4. *Se a sequência $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{b_1} B \xrightarrow{b_2} M_2 \longrightarrow 0$ é exata, e M_1 e M_2 são mono, então B é mono.*

Demonstração. Seja $M_1 \xrightarrow{e} E$ um envelope injetivo. Como M_1 é mono, segue que E é mono. Assim, como E e M_2 são mono, segue que $E \oplus M_2$ também o é. Como E é injetivo, e b_1 é um monomorfismo, temos que existe e' tal que $e = e' \circ b_1$.

Considere então $B \xrightarrow{(e', b_2)} E \oplus M_2$. Temos que (e', b_2) é um monomorfismo, pois $p_1 \circ (e', b_2) = e'$ também o é. Assim, como a subcategoria de objetos mono é fechada por subobjetos, segue que B é também um objeto mono. □

Lema 9.2.5. *Seja $P \xrightarrow{a} A$ um monomorfismo. Assim, se este representa um subobjeto puro de A, e A é absolutamente puro, então P é absolutamente puro.*

Demonstração. Nas hipóteses do lema, seja $P \xrightarrow{m} M$ um monomorfismo, com M mono.

Considere um quadrado pushout de a e m:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "a"] \arrow[d, "m"] & A \arrow[d, "r_A"] \\ M \arrow[r, "r_M"] & R \end{tikzcd}$$

Pelo Teorema 4.6.12, como a e m são monomorfismos, temos que r_A e r_M também o são.

Considere $A \longrightarrow A/P$ e $R \longrightarrow R/M$ os cokernels respectivos de a e r_M. Como P é um subobjeto puro de A, A/P é mono. Agora, pela Proposição 4.2.8, A/P é isomorfo a R/M, e, portanto, R/M também é mono.

Desta forma, como M e R/M são mono, segue do Lema 9.2.4 que R é mono.

Considerando então também $M \longrightarrow M/P$ e $R \longrightarrow R/A$ os cokernels respectivos de m e r_A, como A é absolutamente puro, e R é mono, segue que A é um subobjeto puro de R e R/A é então também mono. Agora, também pela Proposição 4.2.8, R/A é isomorfo a M/P, de forma que M/P deve ser mono.

Assim, m representa um subobjeto puro de M. Como m era um monomorfismo arbitrário, segue que P é absolutamente puro, como desejado. □

Para então relacionarmos objetos absolutamente puros com os funtores exatos à esquerda, voltamos, momentaneamente, para a situação em que $\mathscr{B} = [\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$ e $\mathscr{M} = \mathscr{M}(\mathscr{A})$, com os objetos absolutamente puros definidos com relação a estas categorias.

Lema 9.2.6. *Seja E um funtor exato à esquerda. Assim, um monomorfismo $P \longrightarrow E$ representa um subobjeto puro de E se, e somente se, P for um funtor exato à esquerda.*

Demonstração. Seja E um funtor exato à esquerda e $P \longrightarrow E$ um subobjeto de E. Seja $E \longrightarrow M$ um cokernel de $P \longrightarrow E$, de modo que a sequência $0 \longrightarrow P \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$ é exata em $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$.

Seja $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$ uma sequência exata em $\mathscr{A}$. Assim, temos o seguinte diagrama comutativo, cuja comutatividade em cada quadrado é dada pela propriedade das transformações naturais entre funtores.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & P(A) \arrow[r] \arrow[d] & P(B) \arrow[r] \arrow[d] & P(C) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & E(A) \arrow[r] \arrow[d] & E(B) \arrow[r] \arrow[d] & E(C) \\
0 \arrow[r] & M(A) \arrow[r] \arrow[d] & M(B) \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Note que pela Proposição 7.2.3 temos que as colunas são todas exatas, já que a sequência $0 \longrightarrow P \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$ é exata. Também, note que a linha do meio é exata, pois E é, por hipótese, exato à esquerda. Pelo Lema 4.4.1, segue então que a primeira linha do diagrama é exata se, e somente se, a última linha é exata.

Sendo assim, é fácil ver que P é exato à esquerda se, e somente se, M é mono, já que P leva sequências exatas à esquerda em sequências exatas à esquerda se, e somente se, M leva os monomorfismos destas sequências em monomorfismos. Portanto, P é exato à esquerda se, e somente se, for um subobjeto puro de E, como desejado. □

Teorema 9.2.7. *Um funtor mono é absolutamente puro se, e somente se, é exato à esquerda.*

Demonstração. Seja M um funtor mono. Tome um envelope injetivo de M, $M \longrightarrow E$. Vimos que E é exato, de modo que, em particular, E é exato à esquerda. Também, pelo Lema 9.2.3, vemos que E é absolutamente puro.

Supondo por um lado que M é absolutamente puro, temos que $M \longrightarrow E$ representa um subobjeto puro de E, de forma que, pelo Lema 9.2.6, M é exato à esquerda.

Por outro lado, se M é exato à esquerda, o Lema 9.2.6 nos diz que $M \longrightarrow E$ representa um subobjeto puro de E, de modo que o Lema 9.2.5 nos diz, então, que M é absolutamente puro. □

Com isto, encontramos outra forma de descrever a subcategoria cheia de funtores exatos à esquerda, como a subcategoria cheia de objetos absolutamente puros com relação à subcategoria de funtores mono de $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$. Denotaremos por $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ esta subcategoria cheia de $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$ formada pelos funtores exatos à esquerda.

Veremos na próxima seção como usar isto a nosso favor, exibindo reflexões para estas subcategorias.

9.3 REFLEXÕES

Saímos por um momento de $\mathscr{B}$ para falar um pouco sobre reflexões.

Definição 9.3.1. *Dada uma categoria $\mathscr{C}$ e uma subcategoria cheia $\mathscr{C}'$ da mesma, e dados objetos $C \in \mathscr{C}$ e $C' \in \mathscr{C}'$, dizemos que um morfismo $C \longrightarrow C'$ é uma* ***reflexão*** *de C em $\mathscr{C}'$ se para todo morfismo $C \longrightarrow C''$ com $C'' \in \mathscr{C}'$ temos que existe um único morfismo $C' \longrightarrow C''$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & C' \arrow[d] \\ C \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & C'' \end{tikzcd}$$

comuta.

Dizemos que $\mathscr{C}'$ é uma ***subcategoria reflexiva*** *de $\mathscr{C}$ se para todo objeto $C \in \mathscr{C}$ existe uma reflexão de C em $\mathscr{C}'$.*

Definição 9.3.2. *Dada uma categoria $\mathscr{C}$ e uma subcategoria reflexiva $\mathscr{C}'$ da mesma, associando a cada $C \in \mathscr{C}$ uma reflexão $C \longrightarrow F(C)$ em $\mathscr{C}'$, isto nos induz um funtor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$, que leva os morfismos $C \longrightarrow D$ no único morfismo $F(C) \longrightarrow F(D)$ que comuta o diagrama*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] & F(C) \arrow[d] \\ D \arrow[r] & F(D) \end{tikzcd}$$

em que $C \longrightarrow F(C)$ e $D \longrightarrow F(D)$ são as respectivas reflexões de C e D. Chamaremos um funtor assim induzido por reflexões de um ***refletor****.*

Note que dado $C \in \mathscr{C}'$ com $\mathscr{C}'$ uma subcategoria de $\mathscr{C}$, a identidade de C é uma reflexão de C em $\mathscr{C}'$. Assim, dadas reflexões em todos os objetos fora de $\mathscr{C}'$, podemos escolher as identidades para cada objeto de $\mathscr{C}'$ para determinar um refletor que seja o funtor identidade quando restrito a $\mathscr{C}'$.

Algo que precisaremos de refletores é ver que em categorias abelianas estes preservam somas diretas. Para isto, verificamos a seguinte proposição:

Proposição 9.3.3. *Dada uma categoria abeliana $\mathscr{A}$, uma subcategoria reflexiva $\mathscr{A}'$ da mesma e um refletor $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$, então, com a mesma operação de soma de $\mathscr{A}$ em $\mathscr{A}'$, temos que $F(x+y) = F(x) + F(y)$ para todos os pares morfismos x e y apropriados.*

Demonstração. Sejam $A \xrightarrow{x} B$ e $A \xrightarrow{y} B$ dois morfismos. Sejam $A \xrightarrow{a} F(A)$ e $B \xrightarrow{b} F(B)$ as reflexões associadas a F e aos objetos A e B.

Assim, vejamos que $F(x) + F(y)$ satisfaz a propriedade que define $F(x+y)$ unicamente. Ou seja, vejamos que $(F(x) + F(y)) \circ a = b \circ (x+y)$.

Bem, notando que $F(x) \circ a = b \circ x$ e $F(y) \circ a = b \circ y$ por definição de $F(x)$ e $F(y)$, vemos facilmente que

$$(F(x) + F(y)) \circ a = F(x) \circ a + F(y) \circ a = b \circ x + b \circ y = b \circ (x+y)$$

E segue o que era desejado. □

Com isto, vendo o refletor F, como no enunciado da última proposição, como um funtor de $\mathscr{A}$ para $\mathscr{A}$, este é um funtor aditivo entre duas categorias abelianas, de modo que, pelo Teorema 5.4.3, temos que F preserva somas diretas, já que uma soma direta na categoria maior será uma soma direta em sua subcategoria cheia.

Voltemos então ao contexto em que $\mathscr{B}$ é uma categoria de Grothendieck com envelopes injetivos e $\mathscr{M}$ é uma subcategoria cheia e não vazia de $\mathscr{B}$ que é fechada por subobjetos, produtos e extensões essenciais. Vamos, assim, construir algumas reflexões relevantes envolvendo estas categorias.

PARA A SUBCATEGORIA DE OBJETOS MONO

Proposição 9.3.4. *Todo objeto $B \in \mathscr{B}$ possui um objeto quociente $B \longrightarrow B'$ com $B' \in \mathscr{M}$ tal que sempre que $B \longrightarrow M$ representa um objeto quociente e $M \in \mathscr{M}$, então $M \subseteq B'$.*

Demonstração. Como $\mathscr{B}$ é de Grothendieck, a família de objetos quociente de B é um conjunto. Consideramos então o subconjunto deste formado pelos objetos quociente representados por objetos em $\mathscr{M}$, e o denotamos por I (note que I é não vazio, pois o objeto quociente nulo está em I). Escolhemos daí para cada objeto quociente N de I um epimorfismo representante f_N, e consideramos então o morfismo $f = \prod_{N \in I} f_N$.

Seja assim a fatoração $f = B \xrightarrow{c} B' \xrightarrow{i} \prod_{N \in I} N$ em um monomorfismo composto por um epimorfismo, com c representando sua coimagem e i representando sua imagem, dada pelo Teorema 4.2.6. Mostrarei que c representa o objeto quociente desejado.

Bem, como $\prod_{N \in I} N \in \mathscr{M}$, já que $\mathscr{M}$ é fechado por produtos e $N \in \mathscr{M}$ para todo $N \in I$, e como i representa um subobjeto de $\prod_{N \in I} N$, segue que $B' \in \mathscr{M}$, já que $\mathscr{M}$ é fechado por subobjetos.

Basta então mostrar que c contém todos os objetos quociente representados por objetos em $\mathscr{M}$. Seja então $M \in I$, e tomemos seu representante f_M. Queremos então encontrar um morfismo $B' \xrightarrow{m} M$ tal que $m \circ c = f_M$.

Bem, considere a projeção p_M de $\prod_{N\in I} N$ para M. Assim, tomando $m = p_M \circ i$, vemos que

$$m \circ c = p_M \circ i \circ c = p_M \circ f = f_M$$

Portanto, M está contido em B' e temos o que era desejado. $\square$

Proposição 9.3.5. *Para todo $B \in \mathscr{B}$, existe uma reflexão $B \longrightarrow M$ de B em $\mathscr{M}$.*

Demonstração. Vemos que o representante $B \xrightarrow{c} B'$ para o objeto quociente construído acima é uma reflexão de $B \in \mathscr{M}$.

O objeto B' está em $\mathscr{M}$ por construção. Seja então $B \xrightarrow{f} M$ um morfismo qualquer com $M \in \mathscr{M}$. Queremos mostrar que existe um único morfismo m tal que $m \circ c = f$.

Considere então a fatoração $f = i_f \circ c_f$ em um monomorfismo composto por um epimorfismo. Pela definição de c, c_f está contido em c, e, portanto, existe m' tal que $m' \circ c = c_f$. Definimos então m como $i_f \circ m'$. Assim,

$$m \circ c = i_f \circ m' \circ c = i_f \circ c_f = f$$

Além disso, m é único pois c é, por construção, um epimorfismo, de modo que se m_2 é tal que $m_2 \circ c = f$ segue que $m = m_2$. $\square$

Como para todo objeto $B \in \mathscr{B}$ existe uma reflexão de B em $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}$ é uma subcategoria reflexiva de $\mathscr{B}$, e associando a cada objeto de $\mathscr{B}$ esta reflexão aqui construída, temos então um refletor de $\mathscr{B}$ para $\mathscr{M}$. Denotaremos este funtor por M. Por simplicidade, assumiremos que este refletor é a identidade em $\mathscr{M}$.

PARA A SUBCATEGORIA DE OBJETOS ABSOLUTAMENTE PUROS

Antes de começarmos a construir a reflexão para $\mathscr{L}$, trarei o conceito de objetos de torção com relação a $\mathscr{M}$.

Novamente, relembro que estamos denotando M como o refletor de $\mathscr{B}$ para $\mathscr{M}$.

Definição 9.3.6 (Objetos de Torção)**.** *Um objeto $T \in \mathscr{B}$ é dito um **objeto de torção** se (T, M) possui apenas o morfismo nulo para todo $M \in \mathscr{M}$.*

Proposição 9.3.7. *Um objeto T é de torção se, e somente se, $M(T) = 0$.*

Demonstração. Para a ida, suponha que T é de torção. Por construção, a reflexão associada, $T \longrightarrow M(T)$, é um epimorfismo. Agora, $M(T) \in \mathscr{M}$, de modo que esta reflexão é o morfismo nulo. Sendo um epimorfismo nulo, segue que $M(T)$ deve ser um objeto zero.

Para a volta, suponha que $M(T) = 0$. Assim, seja $M \in \mathscr{M}$ e $T \longrightarrow M$ um morfismo qualquer. Como $M(T) = 0$, $T \longrightarrow 0$ é a reflexão de T em $\mathscr{M}$. Sendo uma reflexão, segue que existe $0 \longrightarrow M$ tal que $T \longrightarrow M = T \longrightarrow 0 \longrightarrow M$. Ou seja, $T \longrightarrow M = 0$, e T é, portanto, de torção. $\square$

Proposição 9.3.8. *Se $K \xrightarrow{k} B$ é o kernel da reflexão $B \xrightarrow{c} M(B)$ de um objeto B de $\mathscr{B}$ em $\mathscr{M}$, então K é de torção.*

Demonstração. Seja M um objeto mono e $K \xrightarrow{f} M$ um morfismo. Gostaríamos de mostrar que $f = 0$.

Tome um envelope injetivo $M \xrightarrow{e} E$. Como k é um monomorfismo e E é injetivo, e considerando o morfismo $e \circ f$, temos pela Proposição 6.2.4 que existe um morfismo q tal que $e \circ f = q \circ k$.

Como $E \in \mathscr{M}$ e c é uma reflexão, seja q' o único morfismo tal que $q' \circ c = q$. Assim, vemos que

$$e \circ f = q \circ k = q' \circ c \circ k = 0$$

com a última igualdade dada pois k é o kernel de c. Assim, como e é um monomorfismo, segue que $f = 0$, como desejado. □

Trabalhemos então na construção da reflexão.

Teorema 9.3.9 (Teorema de Reconhecimento)**.** *Se a sequência* $0 \longrightarrow M \xrightarrow{r} R \xrightarrow{t} T \longrightarrow 0$ *é exata, M é mono, R é absolutamente puro e T é de torção, então $M \xrightarrow{r} R$ é uma reflexão de M em $\mathscr{L}$.*

Demonstração. Seja $L \in \mathscr{L}$, e $M \xrightarrow{f} L$ um morfismo. Queremos mostrar que existe um único morfismo $R \longrightarrow L$ tal que $M \xrightarrow{r} R \longrightarrow L = M \xrightarrow{f} L$.

Considere então $L \xrightarrow{e} E$ um envelope injetivo de L, e $E \xrightarrow{c} C$ seu cokernel. Temos assim o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"] & R \arrow[r, "t"] \arrow[d, "r_E"] & T \arrow[r] \arrow[d, "c_T"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "e"] & E \arrow[r, "c"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

em que r_E é um morfismo que comuta o diagrama cuja existência é garantida pela Proposição 6.2.4, já que E é injetivo e r é um monomorfismo, e c_T é um morfismo que comuta o diagrama cuja existência é garantida pois $c \circ r_E$ se fatora por t, já que $c \circ r_E \circ r = c \circ e \circ f = 0$ e t é o cokernel de r.

Como L é mono, já que é absolutamente puro, segue que seu envelope injetivo, E, também o é. Como L é absolutamente puro, segue que C deve ser mono. Assim, sendo T de torção, devemos ter que $c_T = 0$. Deste modo, $c \circ r_E = c_T \circ t = 0$, e r_E deve se fatorar pelo kernel de c, e. Seja então r'_E tal que $r_E = e \circ r'_E$.

Assim, vemos que $e \circ r'_E \circ r = r_E \circ r = e \circ f$. Como e é um monomorfismo, segue que $r'_E \circ r = f$. Basta agora então mostrar que r'_E é o único morfismo que satisfaz esta propriedade.

Seja então f' tal que $f' \circ r = f$. Considere $d = f' - r'_E$. Temos que $d \circ r = 0$, de modo que d se fatora pelo cokernel de r. Ou seja, $R \xrightarrow{d} L = R \xrightarrow{t} T \longrightarrow L$ para algum morfismo $T \longrightarrow L$. Mas, $T \longrightarrow L = 0$, pois T é de torsão e L é mono, de modo que $d = 0$, e, portanto, $f' = r'_E$. □

Teorema 9.3.10 (Teorema de Construção)**.** *Para todo $M \in \mathscr{M}$, existe uma reflexão $M \longrightarrow R$ de M em $\mathscr{L}$.*

Demonstração. Tome um envelope injetivo $M \longrightarrow E$ de M. Construímos daí o seguinte diagrama comutativo com linhas e colunas exatas:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & M(C) \arrow[r] \arrow[d] & M(C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Fazemos isto da seguinte maneira:

- Começamos com a linha do meio, feita tomando um cokernel de $M \longrightarrow E$. Sua exatidão é direta.
- A primeira coluna é formada justamente pela identidade de M, e é simples ver que é exata.
- Feito isto, criamos a terceira coluna, utilizando a reflexão $C \longrightarrow M(C)$ para $\mathscr{M}$, que é um epimorfismo por construção, e seu kernel $T \longrightarrow C$. Sua exatidão também é direta.
- Construímos então a linha de baixo com a identidade de $M(C)$, cuja exatidão é mais uma vez imediata.
- Para a coluna do meio, $E \longrightarrow M(C)$ é justamente $E \longrightarrow C \longrightarrow M(C)$, e tomamos seu kernel $R \longrightarrow E$. Como $E \longrightarrow M(C)$ é uma composição de epimorfismos, é também um epimorfismos, de modo que a exatidão desta coluna também é direta.
- Temos completos os dois quadrados de baixo, que vemos a comutatividade facilmente por construção.
- Os morfismos da linha de cima são dados pela fatoração de $M \longrightarrow M \longrightarrow E$ pelo kernel de $E \longrightarrow M(C)$ e pela fatoração de $R \longrightarrow E \longrightarrow C$ pelo kernel de $C \longrightarrow M(C)$. Os quadrados de cima são então imediatamente comutativos. A exatidão da linha de cima segue então do Lema dos Nove 4.4.2, já que todas as outras linhas e colunas são exatas e o diagrama é comutativo.

Como M é mono, E é mono, e, portanto, absolutamente puro, já que é injetivo. Agora, $M(C) \in \mathscr{M}$, de modo que $R \longrightarrow E$ representa um subobjeto puro de E. Pelo Lema 9.2.5, então, R é absolutamente puro.

Como $T \longrightarrow C$ é o kernel da reflexão de C em $\mathscr{M}$, segue pela Proposição 9.3.8 que T é de torção.

Com isto, como $M \in \mathscr{M}$, $R \in \mathscr{L}$, T é de torção, e a primeira linha do diagrama é exata, segue do Teorema de Reconhecimento demonstrado logo acima que $M \longrightarrow R$ é uma reflexão de M em $\mathscr{R}$, como desejado. $\square$

Deste modo, segue que $\mathscr{L}$ é uma subcategoria reflexiva de $\mathscr{M}$. Note que, por esta construção, uma reflexão de um objeto de $\mathscr{M}$ em $\mathscr{L}$ é um monomorfismo.

Vejamos, mais ainda, que $\mathscr{L}$ é uma subcategoria reflexiva de $\mathscr{B}$.

Proposição 9.3.11. *Seja $B \in \mathscr{B}$. Se $B \xrightarrow{m} M$ é uma reflexão de B em $\mathscr{M}$, e $M \xrightarrow{r} R$ é uma reflexão de M em $\mathscr{L}$, então $r \circ m$ é uma reflexão de B em $\mathscr{L}$.*

Demonstração. Bem, seja $B \xrightarrow{f} R'$ um morfismo com $R' \in \mathscr{L}$. Como m é uma reflexão e $R' \in \mathscr{M}$, existe f' tal que $f' \circ m = f$. Agora, como r é uma reflexão, existe f'' tal que $f'' \circ r = f'$. Assim, f'' é tal que $f'' \circ r \circ m = f' \circ m = f$. Falta então mostrar a unicidade.

Seja g tal que $g \circ r \circ m = f$. Temos então que $g \circ r \circ m = f' \circ m$. Como m é uma reflexão, da unicidade do morfismo que satisfaz isto, segue que $g \circ r = f'$. Similarmente, como r é uma reflexão, segue então que $g = f''$. □

Denotaremos então por R o refletor de $\mathscr{B}$ para $\mathscr{L}$ dado pelas reflexões construídas pela composição como acima. Mais uma vez, por simplicidade, assumiremos que R é a identidade em $\mathscr{L}$.

9.4 O TEOREMA DE FREYD-MITCHELL

Temos finalmente todas as ferramentas para demonstrar que $\mathscr{L}$ é abeliana e possui todas as propriedades desejadas para a demonstração do Teorema de Freyd-Mitchell.

Relembro que estamos trabalhando com uma categoria de Grothendieck $\mathscr{B}$ que possui envelopes injetivos, e considerando uma subcategoria cheia e não vazia de objetos mono $\mathscr{M}$ e sua subcategoria cheia de objetos absolutamente puros $\mathscr{L}$.

Também relembro a notação dos refletores M de $\mathscr{B}$ para $\mathscr{M}$ e R de $\mathscr{B}$ para $\mathscr{L}$ que, reitero também, são as os funtores identidade quando restritos a $\mathscr{M}$ e $\mathscr{L}$, respectivamente.

Teorema 9.4.1. *$\mathscr{L}$ é uma categoria abeliana.*

Demonstração. Mostremos os axiomas.

*A*0. O objeto nulo de $\mathscr{B}$ é claramente absolutamente puro, e é um objeto nulo de $\mathscr{L}$.

*A*1. e *A*1*. Sejam A e B em $\mathscr{L}$. Seja então $A \oplus B$ uma soma direta de A e B em $\mathscr{B}$. Tomamos então $R(A \oplus B)$. Como já foi visto, como R é um refletor, esta é uma soma direta em $\mathscr{L}$, e, em particular, forma uma soma e um produto de A e B em $\mathscr{L}$.

*A*2. Os kernels de $\mathscr{L}$ são os mesmos de $\mathscr{B}$: seja $L_1 \xrightarrow{f} L_2$ um morfismo em $\mathscr{L}$, e considere seu $\mathscr{B}$-kernel, $K \xrightarrow{k} L_1$.

Vejamos que $K \in \mathscr{L}$: o $\mathscr{B}$-cokernel $L_1 \longrightarrow F$ de k é justamente a $\mathscr{B}$-coimagem de f. Pelo Teorema do Isomorfismo 4.2.6, F pode ser então visto como um subobjeto de L_2. Como $L_2 \in \mathscr{L}$, $L_2 \in \mathscr{M}$, e, com isto, $F \in \mathscr{M}$.

Segue então que k representa um subobjeto puro de L_1. Assim, pelo Lema 9.2.5, segue que K é absolutamente puro. Com isto, k é realmente um morfismo em $\mathscr{L}$, e é bastante direto de se ver daí que k é um $\mathscr{L}$-kernel de f.

*A*2*. Aqui as coisas mudam e vemos que os cokernels são não são necessariamente os mesmos. Seja $L_1 \xrightarrow{f} L_2$ um morfismo em $\mathscr{L}$, e considere seu $\mathscr{B}$-cokernel, $L_2 \xrightarrow{c} C$. Vejamos que $L_2 \xrightarrow{c} C \xrightarrow{r} R(C)$ é um $\mathscr{L}$-cokernel de f.

É claro que este é um morfismo em $\mathscr{L}$, já que $R(C) \in \mathscr{L}$. Que $r \circ c \circ f = 0$ também é claro, já que $c \circ f = 0$. Seja então $L_2 \xrightarrow{g} G$ um morfismo em $\mathscr{L}$ tal que $g \circ f = 0$.

Assim, vistos como morfismos em $\mathscr{B}$, temos que existe um único $C \xrightarrow{g'} G$ tal que $g = g' \circ c$.

Agora, como $G \in \mathscr{L}$ e r é uma reflexão, temos que existe um único g'' tal que $g' = g'' \circ r$. Com isto, $g = g' \circ c = g'' \circ r \circ c$, e g, portanto, se fatora por $r \circ c$ de forma única, e este é então o cokernel de f, como desejado.

$A3$. Seja $L_1 \xrightarrow{f} L_2$ um monomorfismo em $\mathscr{L}$. Considere seu $\mathscr{L}$-cokernel como construído em $A2^*$, $L_2 \xrightarrow{c} F \xrightarrow{r} R(F)$. Vejamos que f é um $\mathscr{L}$-kernel de $r \circ c$.

Como L_1 é absolutamente puro, f representa um subobjeto puro de L_2. Deste modo, como, por construção, c é um $\mathscr{B}$-cokernel de f segue que $F \in \mathscr{M}$. Como $F \in \mathscr{M}$, r é então, por sua construção, um monomorfismo.

Com isto, pela Proposição 3.4.9, temos que o $\mathscr{B}$-kernel de $r \circ c$ é o mesmo morfismo que o $\mathscr{B}$-kernel de c, f. Como vimos em $A2$., o $\mathscr{L}$-kernel de $r \circ c$ é, portanto, f.

$A3^*$. Seja $L_1 \xrightarrow{f} L_2$ um epimorfismo em $\mathscr{L}$. Considere seu kernel $K \xrightarrow{k} L_1$ (que é seu kernel em ambos $\mathscr{B}$ e $\mathscr{L}$). Vejamos que f é um $\mathscr{L}$-cokernel de k.

Bem, como vimos em $A2^*$, como f é um $\mathscr{B}$-cokernel de k, temos que o morfismo $L_1 \xrightarrow{f} L_2 \xrightarrow{r} R(L_2)$ é um $\mathscr{L}$-cokernel de k. Agora, $r = 1_{L_2}$, pois $L_2 \in \mathscr{L}$. Assim, $f = 1_{L_2} \circ f$ é o $\mathscr{L}$-cokernel de k, como desejado.

□

Proposição 9.4.2. *Em $\mathscr{L}$, todo objeto possui um monomorfismo para um objeto injetivo.*

Demonstração. Seja $L \in \mathscr{L}$. Construímos um envelope injetivo $L \longrightarrow E$ em $\mathscr{B}$. Vemos pelo Lema 9.2.3 que $E \in \mathscr{L}$, pois E é mono, já que L é mono.

Note que os morfismos em $\mathscr{L}$ são $\mathscr{L}$-monomorfismos se, e somente se, são $\mathscr{B}$ monomorfismos, pois seus $\mathscr{L}$-kernels são os mesmos que seus $\mathscr{B}$-kernels.

Assim, vemos facilmente que E é injetivo em $\mathscr{L}$, pois se f é um $\mathscr{L}$-monomorfismo, é também um $\mathscr{B}$-monomorfismo, de modo que (f, E) é um epimorfismo, já que E é injetivo em $\mathscr{B}$. Também com isto, vemos que $L \longrightarrow E$ é um $\mathscr{L}$-monomorfismo, e esta é, portanto, uma extensão de L para um objeto injetivo em $\mathscr{L}$, como desejado. □

Proposição 9.4.3. *Se $\mathscr{B}$ possui um gerador, então $\mathscr{L}$ possui um cogerador injetivo.*

Demonstração. Seja G um gerador de $\mathscr{B}$. Vejamos que $R(G)$ é um gerador para $\mathscr{L}$ utilizando a equivalência na Proposição 6.3.3.

Seja então $A \xrightarrow{f} B$ um morfismo não nulo em $\mathscr{L}$. Como G é um gerador, existe um morfismo $G \xrightarrow{g} A$ tal que $f \circ g \neq 0$.

Denotando por r a reflexão de G para $R(G)$, como $A \in \mathscr{L}$, existe um morfismo $R(G) \xrightarrow{g'} A$ tal que $g' \circ r = g$.

O morfismo g' é então o morfismo desejado tal que $f \circ g' \neq 0$, pois caso contrário teríamos que $f \circ g = f \circ g' \circ r = 0$. Com isto, segue que $R(G)$ é um gerador em $\mathscr{L}$.

Como $\mathscr{L}$ possui então um gerador, e como a proposição anterior nos garante que nesta categoria todo objeto possui um monomorfismo para um objeto injetivo, temos, assim, pela Proposição 6.3.10, que $\mathscr{L}$ possui um cogerador injetivo, como desejado. □

Agora, para continuar com os argumentos, voltamos à categoria de funtores aditivos. Segue um corolário para solidificarmos o que temos para tal categoria.

Corolário 9.4.4. *Dada uma categoria abeliana pequena $\mathscr{A}$, a categoria $\mathscr{L}(\mathscr{A})$, formada pelos funtores exatos à esquerda de $\mathscr{A}$ para Ab, é uma categoria abeliana que possui um cogerador injetivo.*

Demonstração. Como $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$ é de Grothendieck e possui envelopes injetivos, e $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ é a subcategoria de $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$ formada pelos objetos absolutamente puros com relação a $\mathscr{M}(\mathscr{A})$, temos pelo Teorema 9.4.1 que $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ é uma categoria abeliana.

Como, também, $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$ possui um gerador, temos pela Proposição 9.4.3 que $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ possui um cogerador injetivo. □

Proposição 9.4.5. *Dada uma categoria abeliana pequena $\mathscr{A}$, temos que $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ é completa.*

Demonstração. Seja $\{F_i\}_I$ uma família de funtores exatos à esquerda. Como $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$ é completa, temos que o produto $G = \prod_{i \in i} F_i$ existe em $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$. Se mostrarmos que este é um funtor exato à esquerda, este será então um produto em $\mathscr{L}(\mathscr{A})$, e estará mostrada sua completude. Farei isto mostrando que este funtor preserva kernels.

Seja $A \xrightarrow{f} B$ um morfismo em $\mathscr{A}$ e k seu kernel. Gostaríamos de mostrar que $G(k)$ é um kernel de $G(f)$. Que $G(f) \circ G(k) = 0$ é claro, pois $G(f) \circ G(k) = G(f \circ k) = G(0) = 0$, dada a aditividade de G.

Seja então $K' \xrightarrow{k'} G(A)$ um morfismo em Ab tal que $G(f) \circ k' = 0$. Como $G(A) = \prod_{i \in i} F_i(A)$, temos uma coleção $\{k'_i\}_I$ tal que $k' = \prod_I k'_i$.

Pela definição de $G(f)$, com p_i sendo a projeção adequada para cada produto envolvido, para cada $i \in I$ temos que $p_i \circ G(f) = F_i(f) \circ p_i$. Assim, fixado i, temos que $F_i(f) \circ k'_i = F_i(f) \circ p_i \circ k' = p_i \circ G(f) \circ k' = 0$. Deste modo, k'_i se fatora de forma única por $F_i(k)$ como $k'_i = F_i(k) \circ k''_i$, já que $F_i(k)$ é o kernel de $F_i(f)$, pois F_i é exato à esquerda.

Mostramos então que $k'' \coloneqq \prod_I k''_i$ é o único morfismo tal que $k' = G(k) \circ k''$. Bem, vemos que para cada i temos que $p_i \circ G(k) \circ k'' = F_i(f) \circ p_i \circ k'' = F_i(f) \circ k''_i = k'_i$, de modo que $G(k) \circ k''$ satisfaz a propriedade do produto que define k'' unicamente, e, portanto, realmente, $k' = G(k) \circ k''$.

Para a unicidade, se $\overline{k''}$ é um morfismo tal que $k' = G(k) \circ \overline{k''}$, então devemos ter que, para cada i, $F_i(f) \circ p_i \circ \overline{k''} = p_i \circ G(f) \circ \overline{k''} = p_i \circ k' = k'_i$, e, portanto, $p_i \circ \overline{k''}$ satisfaz a propriedade que define k''_i de forma única. E assim, como então $p_i \circ \overline{k''} = k''_i$, segue que $\overline{k''} = k''$.

Deste modo, como $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ é abeliana, possui equalizadores e, portanto, como possui produtos arbitrários, como acabamos de verificar, é uma categoria completa, como desejado. □

Como os funtores da forma $(A, \_)$ são exatos à esquerda para qualquer $A \in \mathscr{A}$, temos que a imersão de Yoneda pode ser vista como um funtor para $\mathscr{L}(\mathscr{A})$. Vejamos que ela é, ainda mais, um funtor exato para tal categoria.

Teorema 9.4.6. *Dada uma categoria abeliana pequena $\mathscr{A}$, temos que a imersão de Yoneda $H \colon A^{\mathrm{op}} \to \mathscr{L}(\mathscr{A})$, vista como um funtor saindo da categoria dual para $\mathscr{L}(\mathscr{A})$, é um funtor fiel, cheio e exato.*

Demonstração. Que H é fiel e cheio é direto, pois já vimos que o é para a categoria de funtores aditivos. Mostremos então que é exato.

Seja $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ uma sequência exata em A^{op}. Queremos mostrar que $0 \longrightarrow (A, \_) \longrightarrow (B, \_) \longrightarrow (C, \_) \longrightarrow 0$ é exata em $\mathscr{L}(\mathscr{A})$.

Bem, considere E um cogerador injetivo em $\mathscr{L}(\mathscr{A})$. Assim, o funtor $(\_, E)$ é um funtor exato e fiel. Pelo Teorema 5.6.10, a sequência cuja exatidão queremos mostrar é exata se, e somente se,

$$0 \longrightarrow ((A, \_), E) \longrightarrow ((B, \_), E) \longrightarrow ((C, \_), E) \longrightarrow 0$$

for exata. Pelo Lema de Yoneda 7.3.4, $(\_, E) \circ H$ é naturalmente isomorfo a E, de modo que, pelo comentário após a Proposição 7.1.7, isto ocorre se, e somente se,

$$0 \longrightarrow E(A) \longrightarrow E(B) \longrightarrow E(C) \longrightarrow 0$$

for exata.

Agora, E é um objeto injetivo. Por argumentos similares aos da Proposição 9.1.3, mas em $\mathscr{L}(\mathscr{A})$, vemos que E é exato à direita, já que a imersão de Yoneda continua sendo exata à esquerda para $\mathscr{L}(\mathscr{A})$, pois os kernels são os mesmos de $[\mathscr{A}, \mathrm{Ab}]$. Como $E \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$, E é exato à esquerda. Assim, E é um funtor exato.

Desta forma, a última sequência é exata, e temos o que era desejado. □

Teorema 9.4.7 (Freyd-Mitchell)**.** *Toda categoria abeliana é completamente abeliana.*

Demonstração. Utilizamos as ideias do fim do capítulo em que é demonstrado o Teorema de Mitchell. Dada uma categoria abeliana $\mathscr{B}$ qualquer, seja $\mathscr{A}$ uma subcategoria cheia, exata e pequena de $\mathscr{B}$.

A imersão de Yoneda $H \colon \mathscr{A} \to \mathscr{L}(\mathscr{A})$ é um funtor contravariante para uma categoria abeliana completa com um cogerador injetivo, que, visto como um funtor covariante saindo de $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$, é fiel, cheio e exato. Assim, ao ver H como um funtor covariante de $\mathscr{A}$ para $\mathscr{L}(\mathscr{A})^{\mathrm{op}}$, é simples de se ver que este é também fiel, cheio e exato.

Como $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ é completa e possui um cogerador injetivo, temos que $\mathscr{L}(\mathscr{A})^{\mathrm{op}}$, é cocompleta e possui um gerador projetivo. Pelo Teorema de Mitchell 6.4.1, segue que $\mathscr{L}(\mathscr{A})^{\mathrm{op}}$ é completamente abeliana.

Deste modo, seja $\mathscr{A}'$ uma subcategoria cheia, exata e pequena de $\mathscr{L}(\mathscr{A})^{\mathrm{op}}$ contendo o conjunto de todos os objetos da imagem de H, cuja existência é garantida pela Proposição 6.1.2.

Sendo assim, existe um anel R tal que existe uma imersão cheia e exata $F \colon \mathscr{A}' \to R$-mod. Considerando H' a corestrição de H em seu contradomínio a $\mathscr{A}'$, é fácil ver que H' é uma imersão cheia e exata, já que $\mathscr{A}'$ é uma subcategoria cheia e exata.

Assim, é também simples de se ver que $F \circ H'$ é uma imersão cheia e exata de $\mathscr{A}$ para R-mod, de modo que $\mathscr{B}$ é, portanto, completamente abeliana, como desejado. □

9.5 APLICAÇÕES PARA FREYD-MITCHELL

Com o Teorema de Freyd-Mitchell finalmente em mãos, podemos o utilizar para demonstrar diversos resultados envolvendo diagramas e exatidão de sequências em categorias abelianas utilizando a técnica de "diagram chasing" numa categoria de módulos, como o Lema dos Nove, o Lema da Cobra, o Lema dos Cinco, o Lema dos Quatro, o Lema Zig-zag, dentre muitos outros.

Para fins de comparação, demonstrarei novamente o Lema 4.4.1, mas, desta vez, utilizando esta técnica, para ilustrar sua utilidade na demonstração de teoremas de uma forma mais simples e intuitiva, mostrando, também, como o Teorema de Freyd-Mitchell nos garante que este lema vale para categorias abelianas quaisquer.

Lema 9.5.1. *Dado um anel R, suponha que o diagrama comutativo em R-mod a seguir é tal que a linha do meio e todas suas colunas são sequências exatas.*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & A_{11} \arrow[r, "r_{11}"] \arrow[d, "d_{11}"'] & A_{12} \arrow[r, "r_{12}"] \arrow[d, "d_{12}"'] & A_{13} \arrow[d, "d_{13}"'] \\
0 \arrow[r] & A_{21} \arrow[r, "r_{21}"] \arrow[d, "d_{21}"'] & A_{22} \arrow[r, "r_{22}"] \arrow[d, "d_{22}"'] & A_{23} \\
0 \arrow[r] & A_{31} \arrow[r, "r_{31}"] \arrow[d] & A_{32} \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Assim, a linha de baixo é exata se, e somente se, a linha de cima é exata.

Demonstração. Suponha primeiramente a exatidão da linha de cima. Mostremos, então, a exatidão da linha de baixo em A_{31}. Ou seja, mostremos que r_{31} é um morfismo de R-módulos injetivo. Seja, assim, $x \in A_{31}$ tal que $r_{31}(x) = 0$.

Como d_{21} é sobrejetivo, temos que existe $x' \in A_{21}$ tal que $d_{21}(x') = x$. Vemos então que $d_{22}(r_{21}(x')) = r_{31}(d_{21}(x')) = r_{31}(x) = 0$, de modo que $r_{21}(x')$ está no kernel de d_{22}, Como a segunda coluna é exata, temos que $r_{21}(x')$ está na imagem de d_{12}, de modo que existe $x'' \in A_{12}$ tal que $d_{12}(x'') = r_{21}(x')$.

Assim, vemos que, como $d_{13}(r_{12}(x'')) = r_{22}(d_{12}(x'')) = r_{22}(r_{21}(x')) = 0$, e d_{13} é injetivo, temos que $r_{12}(x'') = 0$ e $x'' \in \mathrm{Ker}(r_{12})$, de modo que, pela exatidão da linha de cima, $x'' \in \mathrm{Im}(r_{11})$, e existe $x''' \in A_{11}$ tal que $r_{11}(x''') = x''$.

Como $r_{21}(d_{11}(x''')) = d_{12}(r_{11}(x''')) = d_{12}(x'') = r_{21}(x')$ e r_{21} é injetivo, temos que $d_{11}(x''') = x'$. Assim, segue que $x = d_{21}(x') = d_{21}(d_{11}(x''')) = 0$, e, portanto, r_{31} é injetivo, garantindo a exatidão da linha de baixo.

Para o outro lado, suponha então que a linha de baixo é exata.

A exatidão em A_{11} segue pois se $r_{11}(x) = 0$, então $r_{21}(d_{11}(x)) = d_{12}(r_{11}(x)) = d_{12}(0) = 0$, de modo que, como r_{21} é injetivo, $d_{11}(x) = 0$, e, como d_{11} é injetivo, $x = 0$.

Para a exatidão em A_{12}, mostremos que $\mathrm{Ker}(r_{12}) = \mathrm{Im}(r_{11})$. Para uma continência, seja $x \in \mathrm{Im}(r_{11})$. Assim, existe $x' \in A_{11}$ tal que $r_{11}(x') = x$. Deste modo, vemos que $d_{13}(r_{12}(x)) = d_{13}(r_{12}(r_{11}(x'))) = r_{22}(r_{21}(d_{11}(x'))) = 0$, dada a exatidão da segunda linha, de modo que, como d_{13} é injetivo, temos que $r_{12}(x) = 0$, e, portanto, $x \in \mathrm{Ker}(r_{12})$.

Para mostrar a outra continência, seja $x \in \mathrm{Ker}(r_{12})$. Assim, como $r_{22}(d_{12}(x)) = d_{13}(r_{12}(x)) = 0$ e a segunda linha é exata, temos que $d_{12}(x) \in \mathrm{Im}(r_{21})$, e, portanto, existe $x' \in A_{21}$ tal que $r_{21}(x') = d_{12}(x)$.

Vemos então que $r_{31}(d_{21}(x')) = d_{22}(r_{21}(x')) = d_{22}(d_{12}(x)) = 0$, dada a exatidão da coluna do meio. Assim, como a linha de baixo é exata, r_{31} é injetivo, de modo que $d_{21}(x') = 0$. Como a primeira coluna é exata, temos, então, que existe $x'' \in A_{11}$ tal que $d_{11}(x'') = x'$.

Assim, vemos que $r_{11}(x'') = x$, pois $d_{12}(r_{11}(x'')) = r_{21}(d_{11}(x'')) = r_{21}(x') = d_{12}(x)$ e d_{12} é injetivo, de modo que $x \in \mathrm{Im}(r_{11})$.

Portanto, $\mathrm{Ker}(r_{12}) = \mathrm{Im}(r_{11})$, e a linha de cima é exata em A_{12}, e, então, é exata, como desejado. □

Lema 9.5.2. *Suponha que o diagrama comutativo em uma categoria abeliana $\mathscr{A}$ a seguir é tal que a linha do meio e todas suas colunas são sequências exatas.*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & A_{11} \arrow[r] \arrow[d] & A_{12} \arrow[r] \arrow[d] & A_{13} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & A_{21} \arrow[r] \arrow[d] & A_{22} \arrow[r] \arrow[d] & A_{23} \\
0 \arrow[r] & A_{31} \arrow[r] \arrow[d] & A_{32} \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Assim, a linha de baixo é exata se, e somente se, a linha de cima é exata.

Demonstração. Dado o diagrama comutativo acima, considere $\mathscr{A}'$ uma subcategoria cheia, exata e pequena de $\mathscr{A}$ que possui todos os objetos do diagrama, cuja existência é garantida pela Proposição 6.1.2.

Pelo Teorema de Freyd-Mitchell, $\mathscr{A}$ é completamente abeliana, de modo que existe um anel R e uma imersão cheia e exata $F\colon \mathscr{A}' \to R$-mod. Assim, supondo que a linha de baixo é exata, temos que o diagrama em R-mod

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & F(A_{11}) \arrow[r] \arrow[d] & F(A_{12}) \arrow[r] \arrow[d] & F(A_{13}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & F(A_{21}) \arrow[r] \arrow[d] & F(A_{22}) \arrow[r] \arrow[d] & F(A_{23}) \\
0 \arrow[r] & F(A_{31}) \arrow[r] \arrow[d] & F(A_{32}) \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

possui a linha do meio, a linha de baixo e as colunas exatas, já que F é um funtor exato, de modo que, pelo lema anterior, a linha de cima é exata.

Como F é fiel e exato, temos, pelo Teorema 5.6.10, que, como a linha de cima da imagem do diagrama é exata, a linha de cima do diagrama original também o é.

Com argumentos similares, supondo que a linha de cima do diagrama é exata, temos que a linha de baixo do mesmo é exata. □

Note que não usamos na demonstração anterior que o funtor F é cheio, de modo que poderíamos utilizar argumentos idênticos caso apenas tivéssemos que o funtor fosse um funtor fiel e exato.

Um teorema que Freyd demonstra em seu livro, mas que não me dei ao trabalho de demonstrar neste trabalho, é o de que para toda categoria abeliana pequena existe uma imersão exata desta categoria abeliana pequena para a categoria de grupos abelianos.

Poderíamos, então, demonstrar este lema mostrando apenas que o lema é válido na categoria de grupos abelianos e utilizando esta imersão exata.

Apesar disto, o funtor para a categoria de módulos ser cheio nos dá um certo portfólio de resultados que requerem isto para sua demonstração desta forma.

Por exemplo, temos o Lema da Cobra, que não irei demonstrar nas categorias de módulos, pois a demonstração é um tanto longa, mas mostrarei como o funtor ser cheio é chave para sua demonstração em uma categoria abeliana arbitrária, supondo sua veracidade na categoria de módulos.

Lema 9.5.3. *Considere o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas em uma categoria abeliana $\mathscr{A}$:*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' & \end{tikzcd}$$

Se $K_a \longrightarrow A$, $K_b \longrightarrow B$ e $K_c \longrightarrow C$ são kernels, respectivamente, de a, b e c, e $A' \longrightarrow F_a$, $B' \longrightarrow F_b$ e $C' \longrightarrow F_c$ são cokernels, respectivamente, de a, b e c, então temos que existe uma sequência exata

$$K_a \longrightarrow K_b \longrightarrow K_c \longrightarrow F_a \longrightarrow F_b \longrightarrow F_c$$

Demonstração. Tomando uma subcategoria cheia, exata e pequena de $\mathscr{A}$ contendo os objetos do diagrama e os objetos destes kernels e cokernels, e utilizando Freyd-Mitchell para que tenhamos um anel R e uma imersão fiel, cheia e exata, F, desta subcategoria para R-mod, temos que a imagem do diagrama por este funtor é um diagrama comutativo que possui linhas exatas, já que é um funtor exato.

Como F é exato, preserva kernels e cokernels, de modo que o funtor aplicado nos kernels dos morfismos a, b e c nos dará, respectivamente, kernels de $F(a)$, $F(b)$ e $F(c)$, e similarmente para os cokernels. Teremos então, supondo que o lema da cobra vale para R-mod, que existe uma sequência exata

$$F(K_a) \longrightarrow F(K_b) \longrightarrow F(K_c) \longrightarrow F(F_a) \longrightarrow F(F_b) \longrightarrow F(F_c)$$

Como F é um funtor cheio, existe um morfismo $K_a \longrightarrow K_b$ em $\mathscr{A}$ cuja imagem por F é $F(K_a) \longrightarrow F(K_b)$, e similarmente para os outros morfismos na sequência acima. Com isto, considere a sequência destes morfismos em $\mathscr{A}$,

$$K_a \longrightarrow K_b \longrightarrow K_c \longrightarrow F_a \longrightarrow F_b \longrightarrow F_c$$

Como a imagem desta sequência por F é uma sequência exata, e F é fiel e exato, pelo Teorema 5.6.10, esta sequência é exata, e temos o que é desejado. $\square$

REFERÊNCIAS

ALUFFI, P. *Algebra: Chapter 0*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2009. (Graduate Studies in Mathematics).

FREYD, P. *Abelian Categories: An Introduction to the Theory of Functors*. 1. ed. New York, Evanston, and London: Harper & Row, 1964. (Harper's Series in Modern Mathematics).

GOLDBLATT, R. *Topoi: The Categorial Analysis of Logic*. revised. New Zealand: Elsevier, 1984. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 98).

JUNHAN, A. T. *The Freyd-Mitchell Embedding Theorem*. 2019.

MITCHELL, B. *Theory of Categories*. Columbia University, New York: Elsevier Science, 1965.

SWAN, R. G. *Algebraic K-theory*. 1. ed. University of Chicago, Chicago, Illinois: Springer, 1968. (Lecture Notes in Mathematics).

WEIBEL, C. A. *An introduction to homological algebra*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1994. (Cambridge studies in advanced mathematics 38).