Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Ricardo Machado da Motta

Espaços de Lorentz e o Teorema da Interpolação de Marcinkiewicz

Florianópolis

2022

Ricardo Machado da Motta

Espaços de Lorentz e o Teorema da Interpolação de Marcinkiewicz

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção de grau de Bacharel em Matemática

Orientador: Dr. Paulo Mendes de Carvalho Neto

Florianópolis

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Motta, Ricardo Machado
Espaços de Lorentz e o Teorema da Interpolação de Marcinkiewicz / Ricardo Machado Motta ; orientador, Paulo Mendes de Carvalho Neto, 2022.
98 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Rearranjo de funções. 3. Espaços de Lorentz. 4. Interpolação de Macinkiewicz. 5. Integral fracionária. I. Mendes de Carvalho Neto, Paulo. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Matemática. III. Título.

Ricardo Machado da Motta

Espaços de Lorentz e o Teorema da Interpolação de Marcinkiewicz

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para a obtenção do título de Bacharel em Matemática, sendo aprovado em sua forma final pelo Curso de Matemática.

Florianópolis, março de 2022.

Profª. Silvia Martini de Holanda, Drª.
Coordenadora do Curso de Matemática

Banca Examinadora:

Prof. Paulo Mendes de Carvalho Neto, Dr.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Rômulo Maia Vermersch, Dr.
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Renato Fehlberg Júnior, Dr.
Avaliador
Universidade Federal do Espírito Santo

Aos meus pais

Romário & Hilda

"Oh, the little more, and how much it is!
And the little less, and what worlds away!"

Robert Browning

Resumo

O presente trabalho expõe uma teoria básica dos espaços de Lorentz. Primeiramente, são apresentados alguns fatos essenciais da teoria do rearranjo de funções, como a função de distribuição e o rearranjo não crescente de uma função mensurável. Usando esses novos conceitos, os espaços de Lorentz são definidos e suas propriedades topológicas são estudadas. Em seguida, após alguns comentários sobre operadores quase-lineares, os teoremas de interpolação de Marcinkiewicz para espaços de Lorentz são enunciados e provados. Através desses teoremas são demonstradas as desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev e Stein-Weiss, as quais garantem, em particular, a continuidade da integral fracionária vista como um operador linear entre dois espaços de Banach.

Palavras-chaves: Rearranjo de funções. Espaços de Lorentz. Interpolação de Macinkiewicz. Desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev e de Stein-Weiss. Integral fracionária.

Abstract

The present work discuss the theory of Lorentz spaces. At first we present some essential facts about the rearrangement of functions, such as the distribution function and the decreasing rearrangement of a measurable function. Using these concepts we define the Lorentz spaces and study their topological properties. Then, after some comments on quasi-linear operators, we state and prove the Marcinkiewicz interpolation theorems for Lorentz spaces. By using those theorems we prove Hardy-Littlewood-Sobolev and Stein-Weiss inequalities, which guarantee, in particular, the continuity of the fractional integral seen as a linear operator between two Banach spaces.

Keywords: Rearrangement of functions. Lorentz spaces. Macinkiewicz interpolation. Hardy-Littlewood-Sobolev and Stein-Weiss inequalities. Fractional integral.

Sumário

	Introdução	**15**
1	**Preliminares**	**17**
1.1	Medidas e funções mensuráveis	17
1.2	Teoremas clássicos de integração	19
1.3	Os espaços $L^p(X)$ e $L^p_{weak}(X)$	22
2	**Rearranjo de funções**	**27**
2.1	Função distribuição	27
2.2	Rearranjos não crescentes	31
2.3	Um breve comentário sobre $L^p(X)$ e $L^p_{weak}(X)$	38
3	**Espaços de Lorentz**	**39**
3.1	Teoria básica de $L^{p,q}(X)$	39
3.2	Propriedades topológicas	47
3.3	Condições para normabilidade	51
4	**Interpolação de operadores**	**57**
4.1	Operadores quase-lineares	57
4.2	Interpolação de Marcinkiewicz	59
4.3	Aplicações à integração fracionária	78
A	**Apêndice**	**87**
A.1	Medida contagem e medida de Lebesgue	87
A.2	Funções beta e gama	88
A.3	Espaços quase-normados	89
A.4	Núcleos homogêneos	93
	Referências	**97**

Introdução

A análise se concentra em estudar, de modo geral, espaços de funções e os operadores[1] entre esses espaços. Mais especificamente, a análise harmônica se propõe a estudar as propriedades quantitativas que uma função possui e como essas propriedades se relacionam com diferentes tipos de operadores.

Trabalhados pela primeira vez de forma sistemática por Riesz (veja [Riesz 1910]), os espaços de Lebesgue (ou simplesmente espaços L^p) possuem um papel fundamental na análise harmônica clássica, já que nesses espaços a norma de uma função pode expressar muitas de suas propriedades quantitativas. Além disso, visto que muitos problemas dessa área de pesquisa consistem em provar a limitação de operadores, existe o interesse natural de entender o comportamento de um operador definido em L^p e de desenvolver uma teoria poderosa o suficiente para garantir estimativas de limitação.

Talvez um dos maiores avanços nessa direção foi realizado no trabalho [Marcinkiewicz 1939]. Nesse pequeno artigo, Marcinkiewicz introduziu os espaços L^p_{weak} e, usando esses novos espaços, fez breves comentários sobre o teorema de interpolação que hoje leva seu nome.

Um fato interessante a respeito desse teorema é que o operador precisa satisfazer hipóteses fracas para existir a limitação desejada entre os espaços de Lebesgue. Em particular, foi possível dar demonstrações mais simples para alguns fatos já conhecidos. Isso ocorreu, por exemplo, com a prova da continuidade da integral fracionária: enquanto o argumento original dado por Hardy e Littlewood (disponível em [Hardy e Littlewood 1928]) precisa de dezenas de páginas para que todas as afirmações sejam verificadas[2], a demonstração usando interpolação de Marcinkiewicz se resume a poucas linhas.

Alguns anos após a publicação de Marcinkiewicz, Lorentz usou a teoria do rearranjo de funções (veja [Lorentz 1950] e [Lorentz 1951]) para introduzir os espaços de Lorentz (ou simplesmente $L^{p,q}$), os quais se mostraram variações naturais de L^p e L^p_{weak}. Devido as boas propriedades dos espaços $L^{p,q}$, alguns matemáticos se empenharam em estender o resultado de interpolação descoberto por Marcinkiewicz para os espaços de Lorentz. Dentre as contribuições mais significativas, podemos citar [Zygmund 1989], [Stein e Weiss 1959] e mais recentemente [Liang, Liu e Yang 2011].

Este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo principal abordar o teorema da interpolação de Marcinkiewicz para os espaços de Lorentz. Para isso, começamos fazendo

---

1 Um operador leva esse nome especial pois é um mapa que leva uma função em outra função.

2 O autor escreve isso por experiência própria, já que verificou as afirmações presentes no artigo [Hardy e Littlewood 1928] em uma Iniciação Científica no ano de 2020.

uma breve revisão de teoria da medida no Capítulo 1. No Capítulo 2, são apresentados alguns fatos essenciais da teoria do rearranjo de funções, como a função distribuição e o rearranjo não crescente de uma função mensurável. No Capítulo 3 usamos esses novos conceitos para definir os espaços de Lorentz e estudamos suas propriedades topológicas. Dedicamos o Capítulo 4 ao estudo dos operadores quase-lineares e do teorema de interpolação de Marcinkiewicz para os espaços de Lorentz.

Além disso, no final do Capítulo 4 são demonstradas as desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev e Stein-Weiss usando interpolação de operadores. Vale ressaltar que essas desigualdades garantem a continuidade da integral fracionária vista como um operador linear entre dois espaços L^p. Por fim, usamos o Apêndice para estabelecer alguns resultados específicos que usamos durante o texto. Caso o leitor seja familiarizado com a teoria dos espaços L^p e L^p_{weak}, encorajamos que a leitura se inicie no Capítulo 2.

Algumas palavras sobre notação

Em nosso texto usaremos o símbolo $\mathbb{N}$ para denotar o conjunto dos números naturais (mais especificamente $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$), $\mathbb{Z}$ para representar os inteiros, $\mathbb{Z}_+$ para denotar o conjunto dos inteiros não negativos, $\mathbb{R}$ para representar os números reais, $\mathbb{R}_+$ para representar os reais não negativos e $\mathbb{R}_{>0}$ para denotar o conjunto dos números reais positivos. Consideramos também o conjunto dos números reais estendidos, o qual é definido a partir da adição de dois elementos infinitos: $+\infty$ e $-\infty$. Em outras palavras, escrevemos $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ e consideramos todos os elementos de $\overline{\mathbb{R}}$ como "números reais".

Essa construção é útil na Teoria da Medida por permitir conjuntos com medida infinita e integrais cujo valor pode ser infinito. Adotamos ainda as convenções usuais de ordem e de soma, segundo as quais para qualquer $r \in \mathbb{R}$ valem $-\infty < r < +\infty$, $(\pm\infty) + r = \pm\infty = r + (\pm\infty)$ e $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$. Note que não definimos $+\infty + (-\infty)$ nem $(-\infty) + (+\infty)$. Para simplificar a escrita, usamos o abuso de notação $\infty \overset{def}{=} +\infty$.

Dados $t \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, dizemos que $t_n \nearrow t$ se $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ e $t_n \leq t_{n+1}$ para todo n natural. Do mesmo modo, $t_n \searrow t$ se $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ e $t_n \geq t_{n+1}$ para todo n natural.

A terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sempre representa nesse texto um espaço de medida, ou seja, X é um conjunto e $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ é uma função definida sobre uma σ-álgebra[3] $\mathcal{M}$ de X que satisfaz $\mu(\varnothing) = 0$ e

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

para qualquer sequência $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ de conjuntos disjuntos.

[3] Coleção de subconjuntos de X, incluindo o conjunto vazio, e que é fechada sobre operações contáveis de união, interseção e complemento de conjuntos.

1 Preliminares

Deixamos claro que este texto assume algum conhecimento prévio do leitor a respeito da Teoria da Medida. Contudo, usamos este capítulo para revisar alguns fatos importantes da teoria. As referências para esta discussão são [Bartle 1995] e [Folland 1999].

1.1 Medidas e funções mensuráveis

Iniciamos esta revisão relembrando as propriedades principais de uma medida positiva e os conceitos relacionados às funções mensuráveis.

Considere $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida qualquer. Decorre diretamente da definição de μ as seguintes propriedades:

(a) (**Monotonicidade**) Se $A, B \in \mathcal{M}$ e $A \subseteq B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(b) (**Subaditividade**) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$, então $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

(c) (**Continuidade por baixo**) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ e $A_n \subseteq A_{n+1}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, então $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

(d) (**Continuidade por cima**) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$, $A_{n+1} \subseteq A_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $\mu(A_1) < \infty$, então $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

As demonstrações dos itens acima se encontram em [Folland 1999], Capítulo 1§3, Teorema 1.8. Durante o texto nós usaremos também uma notação sobre o "tamanho" de μ. Se $\mu(X) < \infty$, μ é dita **finita**. Se podemos escrever $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, com $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que μ é **$\boldsymbol{\sigma}$-finita**. É evidente que toda medida finita é σ-finita.

Observação 1.1. Da mesma forma que um espaço topológico dá origem a novos espaços topológicos por meio da topologia do subespaço, podemos também gerar novas $\sigma-$álgebras usando uma ideia muito parecida. Fixado $A \in \mathcal{M}$, considere

$$\mathcal{M}_A = \{E \subseteq A \,:\, E = A \cap M, \text{ com } M \in \mathcal{M}\},$$

o qual obviamente é uma σ-álgebra e, colocando $\mu_A(E) \overset{def}{=} \mu(E)$ para cada $E \in \mathcal{M}_A$, concluímos que $(A, \mathcal{M}_A, \mu_A)$ define um espaço de medida. Além disso, se vale alguma das propriedades de "tamanho" descritas no parágrafo anterior para μ, então a mesma vale para μ_A. Para evitar uma escrita sobrecarregada de subíndices, escreveremos simplesmente (A, μ) para representar o espaço de medida $(A, \mathcal{M}_A, \mu_A)$, ficando a cargo do leitor lembrar o significado desta notação.

Diremos que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se, e somente se, $f^{-1}((r,\infty]) \in \mathcal{M}$ para cada $r \in \mathbb{R}$, com $f^{-1}((r,\infty]) \overset{def}{=} \{x \in X : f(x) > r\}$[1]. Chamaremos o conjunto de todas as funções mensuráveis de $\mathcal{M}(X)$. Note que se f for mensurável, então $|f|$ também o é.

Se $f : X \to \mathbb{R}$, ao reinterpretarmos f como uma função de X em $\overline{\mathbb{R}}$ e aplicarmos a noção anterior, obtemos: $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável se, e somente se, $f^{-1}((r,\infty)) \in \mathcal{M}$ para cada $r \in \mathbb{R}$.

Definição 1.2 (Truncamento de funções). Dada $f \in \mathcal{M}(X)$, se $r_1, r_2 \in [0,\infty]$ e $r_1 < r_2$, chamaremos a função $f\chi_{\{x\in X\,:\,r_1<|f(x)|\le r_2\}}$, em que para cada $E \subseteq X$ a função χ_E representa a **função característica**[2] em E, de um truncamento da função f.

Observe que um truncamento de $f \in \mathcal{M}(X)$ também é uma função mensurável, já que uma σ-álgebra é fechada por interseções e

$$\{x \in X : r_1 < |f(x)| \le r_2\} = \{x \in X : |f(x)| > r_1\} \cap \{x \in X : |f(x)| \le r_2\} \in \mathcal{M}.$$

As vezes precisaremos nos restringir ao conjunto das funções mensuráveis não negativas, o qual denotaremos por $\mathcal{M}^+(X)$. Um exemplo de um elemento no conjunto $\mathcal{M}^+(X)$ é uma **função simples** não negativa, isto é, uma função que pode ser escrita como uma soma finita

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{a}_k \chi_{\tilde{E}_k}(x),$$

em que, para cada $k \in \{1,\ldots,N\}$, $\tilde{a}_k \in \mathbb{R}_+$ e $\tilde{E}_k \in \mathcal{M}$. Relembramos que esta função simples φ sempre pode ser reescrita como

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}(x), \tag{1.1}$$

de forma que os novos pesos a_k formem uma sequência decrescente e $E_i \cap E_j = \varnothing$, se $i \neq j$. O próximo resultado mostra que as funções simples aproximam de forma pontual qualquer função mensurável não negativa (confira [Folland 1999], Capítulo 2§1, Teorema 2.10).

Teorema 1.3. Se $f \in \mathcal{M}^+(X)$, então existe uma sequência $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^+(X)$ de funções simples tal que $\varphi_n \nearrow f$ pontualmente. Ademais, se f for limitada em $E \subseteq X$, então a convergência é uniforme em E.

Definição 1.4 (Convergência em medida). Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $\{f_n : X \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ funções mensuráveis. Dizemos que f_n converge para f em medida (ou simplesmente $f_n \xrightarrow{\mu} f$)

[1] É interessante chamar a atenção a seguinte equivalência: $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se, e somente se, $f^{-1}([-\infty,r]) \in \mathcal{M}$ para cada $r \in \mathbb{R}$, com $f^{-1}([-\infty,r]) \overset{def}{=} \{x \in X : f(x) \le r\}$.

[2] A função característica $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ de um conjunto $E \subseteq X$ é dada por $\chi_E(x) = 1$, se $x \in E$, e $\chi_E(x) = 0$, se $x \notin E$. Consequentemente, $\chi_E(x)$ é mensurável se, e somente se, $E \in \mathcal{M}$.

se, para cada $\alpha > 0$, vale

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X \,:\, |f(x) - f_n(x)| > \alpha\}\right) = 0.$$

Por outro lado, $\{f_n : X \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é dita Cauchy em medida se para qualquer α positivo

$$\lim_{n,m\to\infty} \mu\left(\{x \in X \,:\, |f_n(x) - f_m(x)| > \alpha\}\right) = 0.$$

Uma noção que será usada neste texto é a seguinte: uma propriedade P vale em $\mu-$quase todo ponto de X, se existir um conjunto $N \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(N) = 0$ e P vale em todo ponto de $X \setminus N$. Se a omissão do conjunto X e da medida μ não causarem confusão, diremos apenas que a propriedade P vale *q.t.p.* ou que P vale em quase todo ponto.

Encerramos esta seção com um resultado que pode ser consultado em [Folland 1999], Capítulo 2§4, Teorema 2.30.

Proposição 1.5. Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy em medida. Então existe uma função mensurável f tal que $f_n \xrightarrow{\mu} f$ e existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge *q.t.p.* para f.

1.2 Teoremas clássicos de integração

Nesta seção veremos como ocorre a integração de funções mensuráveis e recapitularemos os teoremas clássicos de integração.

Usando a mesma notação da equação (1.1), definimos a integral da função simples e mensurável $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ por

$$\int_X \varphi(x)\, d\mu(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{N} a_k \mu(E_k)$$

e motivados pelo Teorema 1.3, definimos para $f \in \mathcal{M}^+(X)$

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) \overset{\text{def}}{=} \sup\left\{\int_X \varphi(x)\, d\mu(x) \,:\, \varphi \le f,\ \varphi \text{ é uma função simples não-negativa}\right\}.$$

Muitas vezes quando não existe risco de confusão, escrevemos o lado esquerdo da equação anterior como $\int_X f\, d\mu$. Caso esse supremo seja um número real, diremos que f é integrável. Em vista disso, como toda função mensurável $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ satisfaz $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, com $f^+ \overset{\text{def}}{=} \max\{f, 0\}$ e $f^- \overset{\text{def}}{=} \max\{-f, 0\}$[3], dizemos que f é **integrável** se f^+ e f^- o forem, e definimos

$$\int_X f\, d\mu \overset{\text{def}}{=} \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu.$$

[3] Note que o máximo e mínimo entre dois valores em $\overline{\mathbb{R}}$ estão bem definidos graças a relação de ordem que foi considerada em $\overline{\mathbb{R}}$ no início deste trabalho.

Denotaremos de forma provisória o espaço de todas as funções integráveis por $L^1(X)$. Um fato importante da teoria é que se $f \in L^1(X)$, então $\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu$ (cf. [Folland 1999], Capítulo 2§3, Proposição 2.22). Ademais, se $f \in L^1(X)$ então f é finita em quase todo ponto. Para demonstrar isso, podemos assumir sem perda de generalidade que f é não negativa. Dado $k \in \mathbb{N}$ defina $E_k = \{x \in X : f(x) > k\}$ e $E = \{x \in X : f(x) = \infty\}$. Sendo cada E_k um conjunto mensurável

$$\int_X f\,d\mu \geq \int_{E_k} f\,d\mu \geq k\mu(E_k)$$

e assim $\lim_{k\to\infty} \mu(E_k) = 0$, já que f é integrável. Finalmente, como $\mu(E_1) < \infty$, a continuidade por cima de μ garante que

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0.$$

Observação 1.6. Perceba que tanto a integrabilidade de uma função mensurável f quanto o valor de sua integral não se alteram quando modificamos f em um conjunto de medida nula. Consequentemente, é útil adotar a convenção de que, no contexto da integração, nossas funções sejam indefinidas em conjuntos de medida zero. Deste modo, na maioria dos casos, não existe perda de generalidade em assumir que as funções dadas assumem valores reais desde o início. Mais à frente retomaremos esta discussão.

Enunciaremos a seguir um dos mais importantes teoremas de convergência na teoria de integração (para a demonstração veja [Folland 1999], Capítulo 2§2, Teorema 2.14). Os resultados subsequentes presentes nessa seção são, em essência, aplicações desse teorema.

Teorema 1.7 (Teorema da Convergência Monótona). Considere $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^+(X)$ e $f \in \mathcal{M}^+(X)$. Se $f_n \nearrow f$ *q.t.p.*, então

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

Corolário 1.8. Seja $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^+(X)$. Então $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X g_n\,d\mu = \int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n\,d\mu$.

Observação 1.9. O Corolário 1.8 segue diretamente do Teorema da Convergência Monótona, basta definir $f_n = \sum_{k=1}^n g_k$. Embora seja um resultado simples, esse corolário nos permite, por exemplo, decompor a integral de $f \in \mathcal{M}^+(X)$ como uma soma contável de integrais. De fato, se $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, com $A_n \in \mathcal{M}$ e $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$, então

$$\int_E f\,d\mu = \int_X \chi_E \sum_{n\in\mathbb{N}} f\chi_{A_n}\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f\chi_{A_n}\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f\,d\mu.$$

Usaremos de forma implícita durante o texto esse "truque" de quebrar a integral de f como uma soma enumerável de integrais, ficando a cargo do leitor relembrar dessa justificativa.

Proposição 1.10. Dada $f \in \mathcal{M}^+(X)$, defina $\nu(E) \overset{\text{def}}{=} \int_E f\, d\mu$ para cada $E \in \mathcal{M}$. Então, ν é uma medida em $\mathcal{M}$ e, para cada $g \in \mathcal{M}^+(X)$, vale

$$\int_X g\, d\nu = \int_X fg\, d\mu. \tag{1.2}$$

Demonstração. É claro que $\nu(\varnothing) = 0$, enquanto a aditividade de ν decorre imediatamente da Observação 1.9. Para verificar (1.2), tome $\varphi = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{E_k} \in \mathcal{M}^+(X)$, com $a_k \in \mathbb{R}_+$ e $E_k \in \mathcal{M}$ para cada k. Lembrando que os conjuntos E_k são dois a dois disjuntos temos que

$$\int_X \varphi\, d\nu \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^N a_k \nu\left(E_k\right) = \sum_{k=1}^N a_k \int_{E_k} f\, d\mu = \int_X f \sum_{k=1}^N a_k \chi_{E_k}\, d\mu = \int_X f\varphi\, d\mu. \tag{1.3}$$

Finalmente, fixada $g \in \mathcal{M}^+(X)$, existe pelo Teorema 1.3 uma sequência $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funções mensuráveis simples e não negativas tal que $\varphi_n \nearrow g$. Consequentemente, como f também é não negativa, segue de (1.3) e do Teorema 1.7 que

$$\int_X g\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_X f\varphi_n\, d\mu = \int_X fg\, d\mu.$$

$\square$

A proposição anterior possui uma interessante aplicação, a qual discutiremos a seguir. Para tanto, usaremos as propriedades da medida de Lebesgue. O leitor, caso desejar, pode consultar o Apêndice A.1 para compreender melhor o exemplo abaixo.

Exemplo 1.11. Devido a Observação 1.1, $(\mathbb{R}_{>0}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}_{>0}}, m_{\mathbb{R}_{>0}})$ é um espaço de medida. Além disso, perceba que $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1/t$ é não negativa e mensurável nesse espaço[4]. Consequentemente, pela Proposição 1.10, dado $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}_{>0}}$ podemos considerar a medida $\lambda : \mathcal{L}_{\mathbb{R}_{>0}} \to [0, \infty]$ definida por

$$\lambda(E) \overset{\text{def}}{=} \int_E \frac{1}{t}\, dt.$$

Chamaremos λ de **medida logarítmica**, afinal $\lambda([a, b]) = \log(b) - \log(a)$ para qualquer $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_{>0}$. É interessante que a medida logarítmica é invariante por dilatações em $\mathbb{R}_{>0}$, tal qual a medida de Lebesgue é invariante por translações em $\mathbb{R}$. De fato, dados $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}_{>0}}$ e $\delta > 0$, temos $\delta E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}_{>0}}$ (δE é Lebesgue mensurável e $\delta E \subseteq \mathbb{R}_{>0}$). Ademais

$$\lambda(\delta E) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_{\delta E}(x)}{x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_{\delta E}(\delta t)}{\delta t} \delta\, dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_E(t)}{\delta t} \delta\, dt = \lambda(E), \tag{1.4}$$

sendo a segunda igualdade de (1.4) válida pela mudança de variável $x = \delta t$ (veja Apêndice A.1, Teorema 1). A propósito, λ também é σ-finita. Com efeito, se definirmos

$$E_n \overset{\text{def}}{=} (1/\left(n+1\right), 1/n] \cup (n, n+1],$$

temos $E_n \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}_{>0}}$, $\lambda(E_n) = 2\left(\log(n+1) - \log(n)\right) < \infty$ e $\mathbb{R}_{>0} = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$.

[4] Esse resultado é uma consequência do fato de que qualquer função $f : \mathbb{R}_{>0} \to \overline{\mathbb{R}}$ monótona é mensurável.

Lema 1.12 (Lema de Fatou). Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^+(X)$. Então $\liminf_{n\to\infty} f_n$[5] é uma função mensurável e

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Teorema 1.13 (Teorema da Convergência Dominada). Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis que converge pontualmente para uma função f. Suponha que essa sequência seja dominada por alguma função integrável g, no sentido de que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo n e para quase todo ponto $x \in X$. Então f é integrável e

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

Em particular temos que $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

As demonstrações dos últimos dois resultados estão disponíveis em [Folland 1999], Capítulo 2§2, Lema 2.18 e Capítulo 2§3, Teorema 2.24, respectivamente.

Para finalizar a seção, vamos falar sobre a medida produto. Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ são espaços de medida σ-finita, então existe uma σ-álgebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ gerada por $\{M \times N : M \in \mathcal{M}, N \in \mathcal{N}\}$ e uma única medida produto $\mu \cdot \nu : \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \to [0, \infty]$ tal que o seguinte teorema vale (cf. [Folland 1999], Capítulo 2§5, Teorema 2.37):

Teorema 1.14 (Teorema de Fubini-Tonelli). Suponha que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ são espaços de medida σ-finita, com f sendo uma função mensurável em $X \times Y$. Então

(a) ($Tonelli$) Se f é não negativa, então as integrais parciais $g(x) = \int_Y f(x, y) \, d\nu(y)$ e $h(y) = \int_X f(x, y) \, d\mu(x)$ definem funções em $\mathcal{M}^+(X)$ e $\mathcal{N}^+(Y)$, respectivamente. Ademais, vale a Fórmula de Fubini

$$\begin{aligned} &\int_{X\times Y} f(x, y) \, d(\mu \cdot \nu)(x, y) \\ &\qquad = \int_X \left[\int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \right] d\mu(x) = \int_Y \left[\int_X f(x, y) \, d\mu(x) \right] d\nu(y). \end{aligned} \tag{1.5}$$

(b) ($Fubini$) Considere f integrável em $(X \times Y)$. Sob tal hipótese, $f(x, y)$ é integrável em Y para μ-*q.t.p.* $x \in X$ e $f(x, y)$ é integrável em X para ν-*q.t.p.* $y \in Y$. Além disso, as funções definidas *q.t.p.* $g(x) = \int_Y f(x, y) \, d\nu(y)$ e $h(y) = \int_X f(x, y) \, d\mu(x)$ estão em $L^1(X)$ e $L^1(Y)$, respectivamente, valendo (1.5).

1.3 Os espaços $L^p(X)$ e $L^p_{weak}(X)$

Nesta última seção trabalharemos com os espaços p-Lebesgue integráveis e apresentaremos os espaços $L^p_{weak}(X)$.

[5] Lembramos que se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, então $\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{m\geq 1} \{\inf_{k\geq m}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}\}$.

Dado $0 < p < \infty$, chamaremos de $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis em X que assumem valores reais[6], para as quais a p-ésima potência do valor absoluto é integrável em X. Deste modo definimos a função $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(X,\mu) \to [0,\infty)$ por

$$\|f\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}. \tag{1.6}$$

Gostaríamos que $\|\cdot\|_p$ fosse uma norma em $\mathcal{L}^p(X,\mu)$. Porém observamos que existe um problema na construção dessa "norma", já que $\|f\|_p = 0$ implica apenas $f = 0$ *q.t.p.*, e não que $f = 0$ em todo ponto. Para resolver este problema, introduzimos uma relação de equivalência $\sim_\mu$ de modo que $f \sim_\mu g$ se, e somente se, $f = g$ *q.t.p.* e definimos $L^p(X,\mu)$ como sendo o conjunto de todas as classes de equivalência de funções que satisfazem (1.6). Na prática, entretanto, não existe problema em pensar nos elementos de $L^p(X,\mu)$ como funções, em vez de uma classe de equivalência; basta escolher algum de seus representantes.

Agora, para completar a construção dos espaços $L^p(X,\mu)$, introduzimos um espaço correspondente ao valor limite $p = \infty$. Se f é uma função mensurável em X, consideramos o valor

$$\|f\|_\infty = \inf\left\{s > 0 \,:\, \mu(\{x \in X \,:\, |f(x)| > s\}) = 0\right\},^{7} \tag{1.7}$$

com a convenção de que $\inf(\varnothing) = \infty$. O lado direito de (1.7) também é chamado de supremo essencial de $|f|$. Neste caso definimos

$$L^\infty(X,\mu) = \{f : X \to \mathbb{R} \,:\, \|f\|_\infty < \infty\}$$

com a identificação usual de que duas funções iguais em quase todo ponto definem o mesmo elemento em $L^\infty(X,\mu)$.

Se não existir risco de confusão, escreveremos $L^p(X)$ para representar $L^p(X,\mu)$.

Exemplo 1.15. Seja $(\mathbb{R}_{>0},\lambda)$ o espaço tratado no Exemplo 1.11. Se $0 < p < \infty$ e g é mensurável em $(\mathbb{R}_{>0},\lambda)$, decorre da Proposição 1.10 que

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R}_{>0},\lambda)} = \left(\int_0^\infty |g(t)|^p \, d\lambda(t)\right)^{1/p} = \left(\int_0^\infty |g(t)|^p \, \frac{dt}{t}\right)^{1/p}. \tag{1.8}$$

Observação 1.16. O espaço $L^\infty(X)$ corresponde ao "valor limite" de $L^p(X)$ pelo seguinte fato: se $f \in L^p(X) \cap L^\infty(X)$, para algum $0 < p < \infty$, então $\lim_{q\to\infty} \|f\|_q = \|f\|_\infty$. Com efeito, fixe $p < q < \infty$ e $f \in L^p(X) \cap L^\infty(X)$, com $\|f\|_\infty > 0$. Por um lado, temos

$$|f(x)|^q \leq \|f\|_\infty^{q-p} \, |f(x)|^p$$

[6] Indefinidas em um conjunto de medida zero, como discutimos na Observação 1.6.

[7] Alguns autores consideram $\|f\|_\infty = \sup\{s > 0 \,:\, \mu(\{x \in X \,:\, |f(x)| \leq s\}) > 0\}$, porém essa definição coincide com a da equação (1.7).

para quase todo $x \in X$. Deste modo, pela monotonicidade da integral

$$\|f\|_q^q = \int_X |f(x)|^q \, d\mu(x) \leq \|f\|_\infty^{q-p} \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) = \|f\|_\infty^{q-p} \|f\|_p^p ,$$

e assim

$$\limsup_{q\to\infty} \|f\|_q \leq \|f\|_\infty \limsup_{q\to\infty} \left(\|f\|_p / \|f\|_\infty\right)^{p/q} = \|f\|_\infty .$$

Por outro lado, seja $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$ e $E = \{x \in X \, : \, |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}$. Usando a definição de supremo essencial, concluímos que $\mu(E) > 0$. Ademais, como $f \in L^p(X)$, obtemos $\mu(E) < \infty$. Consequentemente

$$\|f\|_q = \left(\int_X |f|^q \, d\mu\right)^{1/q} \geq \left(\int_E |f|^q \, d\mu\right)^{1/q} \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon) \, \mu(E)^{1/q}$$

e portanto $\liminf_{q\to\infty} \|f\|_q \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$. Fazendo $\varepsilon \to 0$, vemos que o limite $\lim_{q\to\infty} \|f\|_q$ existe e é igual a $\|f\|_\infty$, pois nosso argumento prova as desigualdades

$$\|f\|_\infty \leq \liminf_{q\to\infty} \|f\|_q \leq \limsup_{q\to\infty} \|f\|_q \leq \|f\|_\infty .$$

Notação 1.17 (Expoentes conjugados). Seja $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o expoente conjugado de p, que será representado por p', da seguinte forma:

(a) Se $1 < p < \infty$, então $p' \overset{def}{=} p/(p-1)$. Logo $1 < p' < \infty$ e $1/p + 1/p' = 1$.

(b) Se $p = 1$, definimos $p' \overset{def}{=} \infty$. Analogamente, consideramos $p' = 1$ se $p = \infty$.

Os dois teoremas a seguir tratam das desigualdades mais clássicas em $L^p(X)$. Para as provas desses resultados, veja [Folland 1999], Capítulo 6§1, Teoremas 6.2 e 6.5, respectivamente.

Teorema 1.18 (Desigualdade de Hölder). Seja $1 \leq p \leq \infty$. Se f e g são mensuráveis em X, então $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$. Caso $1 < p < \infty$, vale a igualdade se, e somente se, $|f|^p$ e $|g|^{p'}$ são linearmente dependentes em $L^1(X)$.

Teorema 1.19 (Desigualdade de Minkowski). Se $1 \leq p \leq \infty$ e $f, g \in L^p(X)$, então

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Deste modo, quando $1 \leq p \leq \infty$, a função $\|\cdot\|_p$ se torna uma norma em $L^p(X)$. Na realidade, esse espaço vetorial normado é um espaço de Banach. Embora essa demonstração esteja presente em qualquer livro de Teoria da Medida, esse resultado decorre de um resultado mais geral que será demonstrado nos próximos capítulos.

Observação 1.20. Vale notar que a Desigualdade de Minkowski não pode ser aplicada para um p qualquer. Entretanto, em geral, essa desigualdade sempre vale a menos de um fator constante maior que 1 (o que é mais fraco que o resultado do Teorema 1.19). Para ver isso, fixe $0 < p < \infty$ e $f, g \in L^p(X)$. Temos

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p = \left(\int_X |f+g|^p \ d\mu\right)^{1/p} &\leq \left(\int_X (2\max\{|f|, |g|\})^p \ d\mu\right)^{1/p} \\ &\leq 2\left(\int_X |f|^p + |g|^p \ d\mu\right)^{1/p} = 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{1/p}\end{aligned}$$

e assim

$$\|f+g\|_p \leq 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{1/p} \leq 2\left(2\max\left\{\|f\|_p^p, \|g\|_p^p\right\}\right)^{1/p} \leq 2^{1+1/p}\left(\|f\|_p + \|g\|_p\right).$$

Exemplo 1.21. Dado $0 < p \leq \infty$, denotamos $L^p(X, \mathcal{P}(X), \#)$, com $\#$ sendo a medida contagem[8] e X um conjunto contável, por $\ell^p(X)$. Este é a versão discreta dos espaços $L^p(X)$, cujas funções mesuráveis são simplesmente sequências $f = (f(k))_{k\in X}$ e

$$\|f\|_{\ell^p(X)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k\in X} |f(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 0 < p < \infty; \\ \sup_{k\in X} |f(k)|, & \text{se } p = \infty. \end{cases} \tag{1.9}$$

Se fixarmos $0 < p < q \leq \infty$, temos a estimativa $\|f\|_{\ell^q(X)} \leq \|f\|_{\ell^p(X)}$. Consequentemente, vale a inclusão $\ell^p(X) \subseteq \ell^q(X)$.

Exemplo 1.22. Considere f mensurável em $(X, \mathcal{M}, \mu)$, com μ finita. Neste caso particular, temos $\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p-1/q}\|f\|_q$ se $0 < p < q \leq \infty$. Consequentemente $L^q(X) \subseteq L^p(X)$.

Para a prova das inclusões que foram citadas nos dois últimos exemplos, veja [Folland 1999], Capítulo 6§1, Proposições 6.11 e 6.12. O próximo resultado é o único teorema desta seção que tem a possibilidade de não ser discutido em um primeiro curso de Teoria da Medida. Sua prova pode ser encontrada em [Folland 1999], Capítulo 6§3, Teorema 6.19.

Teorema 1.23 (Desigualdade de Minkowski para integrais). Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida σ-finita. Considere h uma função mensurável em $X \times Y$.

(a) Se h é não-negativa e $1 \leq p < \infty$, então

$$\left[\int_X \left(\int_Y h(x,y)\, d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left[\int_X h(x,y)^p \, d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} d\nu(y).$$

[8] Para detalhes sobre a medida contagem veja o Apêndice A.1.

(b) Se $1 \leq p \leq \infty$, $h(\cdot, y) \in L^p(X)$ *q.t.p.* $y \in Y$ e a função $g(y) = \|h(\cdot, y)\|_p \in L^1(Y)$, então $h(x, \cdot) \in L^1(Y)$ para quase todo $x \in X$. Ademais

$$h(x) = \int f(x, y) d\nu(y) \in L^p(X)$$

e vale

$$\left|\left|\int_Y h(\cdot, y)\, d\nu(y)\right|\right|_p \leq \int_Y ||h(\cdot, y)||_p\, d\nu(y).$$

A próxima proposição é útil para as construções apresentadas no final desta seção.

Proposição 1.24 (Desigualdade de Chebyshev). Sejam $0 < p < \infty$ e $f \in L^p(X)$. Para cada α positivo vale $\alpha\mu\left(\{x \in X \,:\, |f(x)| > \alpha\}\right)^{1/p} \leq \|f\|_p$.

Demonstração. Defina $E_\alpha = \{x \in X \,:\, |f(x)| > \alpha\}$. Deste modo

$$\|f\|_p^p = \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \geq \int_{E_\alpha} |f(x)|^p \, d\mu(x) \geq \alpha^p \int_{E_\alpha} 1\, d\mu(x) = \alpha^p \mu(E_\alpha). \quad \square$$

Em vista do resultado anterior, podemos definir uma variante dos espaços $L^p(X)$:

Definição 1.25 (Espaços $L^p_{weak}(X)$). Dado $0 < p < \infty$, definimos $L^p_{weak}(X, \mu)$ como o conjunto de todas as classes de equivalências de funções mensuráveis f em X que diferem por um conjunto de medida nula, tais que seus representantes satisfazem, para cada α positivo, a desigualdade $\left(\alpha^p \mu\{x \in X \,:\, |f(x)| > \alpha\}\right)^{1/p} \leq C$, com C sendo alguma constante que independe de α. Neste espaço consideramos a função $[\cdot]_p : L^p_{weak}(X, \mu) \to \mathbb{R}_+$

$$[f]_p \stackrel{def}{=} \sup_{\alpha > 0} \left(\alpha^p \mu\{x \in X \,:\, |f(x)| > \alpha\}\right)^{1/p}.$$

Se não existir risco de confusão, escreveremos $L^p_{weak}(X)$ para representar $L^p_{weak}(X, \mu)$.

Observação 1.26. Decorre da Desigualdade de Chebyshev uma inclusão natural de $L^p(X)$ em $L^p_{weak}(X)$. Em geral, essa inclusão é estrita. Por exemplo, se definirmos $f(x) \stackrel{def}{=} |x|^{-n/p}$, sabemos da integrabilidade de $|x|^{-\alpha}$ (Proposição 2, pág. 88) que $f \notin L^p(\mathbb{R}^n)$. Afirmamos que $f \in L^p_{weak}(\mathbb{R}^n)$. Para ver isso, note que[9]

$$m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x|^{-n/p} > \alpha\right\}\right) = m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \alpha^{-p/n} > |x|\right\}\right) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(n/2 + 1\right)} \left(\alpha^{-p/n}\right)^n,$$

já que o termo central da última igualdade é volume da bola n-dimensional de raio $\alpha^{-p/n}$. Portanto

$$[f]_p = \sup_{\alpha > 0} \alpha \left(\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(n/2 + 1\right)} \left(\alpha^{-p/n}\right)^n\right)^{1/p} = \left(\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(n/2 + 1\right)}\right)^{1/p}.$$

Veremos nos próximos capítulos que $[\cdot]_p$ é na realidade uma quase-norma[10] e mostraremos que, sob certas hipóteses, $L^p_{weak}(X)$ pode ser visto como um espaço normado.

[9] Veja o Teorema 3 no Apêndice A.2, pág. 88.

[10] Para a definição de quase-norma o leitor pode consultar o Apêndice A.3, pág. 89.

2 Rearranjo de funções

Deste ponto em diante até o final do trabalho, assumimos que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ representam espaços de medida σ-finita. Definiremos na primeira seção deste capítulo a função distribuição de uma função mensurável. Na segunda seção construiremos o rearranjo não crescente. Também mostraremos, em cada uma dessas duas seções, algumas propriedades que são úteis para a construção dos espaços de Lorentz. No final deste capítulo veremos como escrever $\|\cdot\|_p$ e $[\cdot]_p$ (cf. a Seção 1.3, pág. 22) usando somente o rearranjo não crescente. As referências destas três seções são os Capítulos 2§1 de [Bennett e Sharpley 1988] e 1§4 de [Grafakos 2014].

2.1 Função distribuição

Tomando $f \in \mathcal{M}(X)$ e $0 < p < \infty$, o Teorema de Fubini-Tonelli[1] (Teorema 1.14, pág. 22) nos fornece a identidade

$$\begin{aligned}\int_X \int_0^{|f(x)|} p\alpha^{p-1}\, d\alpha\, d\mu(x) &= \int_X \int_0^{\infty} p\alpha^{p-1}\chi_{A_x}(\alpha)\, d\alpha\, d\mu(x) \\ &= \int_0^{\infty} \int_X p\alpha^{p-1}\chi_{A_x}(\alpha)\, d\mu(x)\, d\alpha = \int_0^{\infty} \int_{|f(x)|>\alpha} p\alpha^{p-1}\, d\mu(x)\, d\alpha\end{aligned}$$

com $A_x = \big[0, |f(x)|\big]$. Disso obtemos que

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p &= \int_X \int_0^{|f(x)|} \left[\frac{d}{d\alpha}\alpha^p\right] d\alpha\, d\mu(x) = \int_X \int_0^{|f(x)|} p\alpha^{p-1}\, d\alpha\, d\mu(x) \\ &= \int_0^{\infty} \int_{|f(x)|>\alpha} p\alpha^{p-1}\, d\mu(x)\, d\alpha = p\int_0^{\infty} \alpha^{p-1}\mu\left(\{x \in X \,:\, |f(x)| > \alpha\}\right) d\alpha. \qquad (2.1)\end{aligned}$$

Consequentemente, podemos escrever $\|f\|_p$ para qualquer $0 < p \leq \infty$ usando apenas a medida do conjunto $\{x \in X \,:\, |f(x)| > \alpha\}$ (lembre-se também da definição de $\|f\|_\infty$). Assim somos motivados a considerar as seguintes noções:

Definição 2.1 (Função distribuição). Se f é uma função mensurável em $(X, \mathcal{M}, \mu)$, definimos a sua função distribuição $d_f : [0, \infty) \to [0, \infty]$ por

$$d_f(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(\{x \in X \,:\, |f(x)| > \alpha\}).$$

Definição 2.2 (Funções equimensuráveis). Sejam $f \in \mathcal{M}(X)$ e $g \in \mathcal{N}(Y)$. Dizemos que f e g são equimensuráveis se $d_f(\alpha) = d_g(\alpha)$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

[1] Estamos nas hipóteses do Teorema de Fubini-Tonelli pois μ é σ-finita.

Exemplo 2.3. Considere $\varphi \in \mathcal{M}^+(X)$ simples definida por $\varphi(x) = \sum_{k=1}^N b_k \chi_{E_k}(x)$, em que $b_k > b_{k+1} > 0$ para qualquer k e $E_i \cap E_j = \varnothing$ para $i \neq j$. Se $\alpha \geq b_1$, então $d_\varphi(\alpha) = 0$. Caso contrário, o conjunto $\{b_k : \alpha < b_k,\ 1 \leq k \leq N\}$ é não vazio e admite um menor elemento, i.e., existe $i \in \{1, \ldots, N\}$ tal que b_i é este menor elemento. Deste modo, definindo $b_{N+1} = 0$, vale $b_{i+1} \leq \alpha < b_i$ e

$$\{x \in X : |\varphi(x)| > \alpha\} = \left\{x \in X : \sum_{k=1}^N b_k \chi_{E_k}(x) > \alpha\right\} = \bigcup_{k=1}^i E_k,$$

uma vez que os b_k's formam uma sequência decrescente. Portanto, se

$$m_i = \mu\left(\bigcup_{k=1}^i E_k\right) = \sum_{k=1}^i \mu(E_k),$$

podemos escrever $d_\varphi(\alpha) = \sum_{i=1}^N m_i \chi_{[b_{i+1}, b_i)}(\alpha)$.

A seguir introduzimos um resultado bastante útil para a teoria que estamos apresentando, uma vez que recorrentemente nos referiremos a ele.

Proposição 2.4. Sejam $f, \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, g$ funções mensuráveis em $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, temos que

(a) d_f é uma função não crescente e contínua pela direita em $[0, \infty)$.

(b) $d_f = d_{|f|}$ e se $|g| \leq |f|$ em quase todo ponto então $d_g \leq d_f$.

(c) Se $h = \liminf_{n\to\infty} |f_n|$ e $|f| \leq h$ *q.t.p.*, então $d_f \leq d_h \leq \liminf_{n\to\infty} d_{f_n}$.

(d) Se $|f_n| \nearrow |f|$ em quase todo ponto, então $d_{f_n} \nearrow d_f$.

(e) $d_{cf}(\alpha) = d_f(\alpha/|c|)$ para qualquer $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(f) $d_{f+g}(\alpha + \beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$.

Demonstração. (a) Se $\alpha_2 \geq \alpha_1 \geq 0$, então

$$\{x \in X : |f(x)| > \alpha_2\} \subseteq \{x \in X : |f(x)| > \alpha_1\}$$

e a primeira parte segue da monotonicidade da medida, bem como da definição de d_f. Para verificar a continuidade à direita, é suficiente provar que $\lim_{n\to\infty} d_f(t_n) = d_f(\alpha)$ para uma sequência arbitrária $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $t_n \searrow \alpha$. Por isso, definimos os conjuntos

$$E_\alpha = \{x \in X : |f(x)| > \alpha\} \qquad \text{e} \qquad E_n = \{x \in X : |f(x)| > t_n\}. \tag{2.2}$$

Afirmamos que $E_\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. A inclusão $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq E_\alpha$ é imediata. Para a outra, se $|f(x)| > \alpha$ então existe k grande o suficiente tal que $|f(x)| > t_k$, sob pena de $|f(x)| \leq \alpha$.

Deste modo, se $x \in E_\alpha$, então x pertence a E_k e consequentemente a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Como $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona não crescente, vale por (2.2) que $E_n \subseteq E_{n+1}$. Por fim, usando a continuidade por baixo de μ, obtemos

$$d_f(\alpha) = \mu(E_\alpha) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(E_n\right) = \lim_{n\to\infty} d_f(t_n).$$

(b) É imediato da definição que $d_f = d_{|f|}$. Ademais, para cada $\alpha \geq 0$ temos a inclusão

$$\{x \in X \,:\, |g(x)| > \alpha\} \subseteq \{x \in X \,:\, |f(x)| > \alpha\} \quad q.t.p.$$

(c) Para cada α não negativo e n natural, defina

$$E_\alpha = \{x \in X \,:\, |f(x)| > \alpha\}, \qquad E_{\alpha,n} = \{x \in X \,:\, |f_n(x)| > \alpha\},$$
$$F_\alpha = \{x \in X \,:\, |h(x)| > \alpha\}, \qquad I_\alpha = \bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq m} E_{\alpha,n}.$$

Fixe $\alpha \geq 0$. Por hipótese, vale a inclusão $E_\alpha \subseteq F_\alpha$ em quase todo ponto. Ademais, afirmamos que $F_\alpha \subseteq I_\alpha$[2]. De fato, caso $F_\alpha \not\subseteq I_\alpha$, deveria existir $x \in F_\alpha$ tal que, para cada $m \geq 1$, existiria $k \geq m$ satisfazendo $|f_k(x)| \leq \alpha$. Portanto $\inf_{n\geq m}|f_n(x)| \leq |f_k(x)| \leq \alpha$, o que contradiz a hipótese de $\alpha < |h(x)| = \sup_{m\geq 1}\left(\inf_{n\geq m}|f_n(x)|\right)$. Também afirmamos que

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq m} E_{\alpha,n}\right) \leq \inf_{n\geq m} \mu(E_{\alpha,n}).$$

Se isso não ocorresse, teríamos $\mu\left(\bigcap_{n\geq m} E_{\alpha,n}\right) > \inf_{n\geq m}\mu(E_{\alpha,n}) + \varepsilon$ para algum ε positivo pequeno o suficiente. Porém, pela definição de ínfimo existiria um conjunto $E_{\alpha,k}$, com $k \geq m$, satisfazendo $\inf_{n\geq m}\mu(E_{\alpha,n}) + \varepsilon > \mu(E_{\alpha,k})$. Em particular

$$\mu(E_{\alpha,k}) \geq \mu\left(\bigcap_{n\geq m} E_{\alpha,n}\right) > \inf_{n\geq m} \mu(E_{\alpha,n}) + 1/j > \mu(E_{\alpha,k}),$$

o que é um absurdo. Consequentemente

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq m} E_{\alpha,n}\right) \leq \inf_{n\geq m} \mu(E_{\alpha,n}) \leq \sup_{m\geq 1}\left(\inf_{n\geq m} \mu(E_{\alpha,n})\right) = \liminf_{n\to\infty} \mu(E_{\alpha,n})$$

e como $\bigcap_{n\geq m} E_{\alpha,n} \subseteq \bigcap_{n\geq m+1} E_{\alpha,n}$, temos da continuidade por baixo de μ a estimativa

$$\mu(I_\alpha) = \mu\left(\bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq m} E_{\alpha,n}\right) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcap_{n\geq m} E_{\alpha,n}\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(E_{\alpha,n}). \tag{2.3}$$

Combinando a desigualdade (2.3) com as inclusões $E_\alpha \subseteq F_\alpha \subseteq I_\alpha$ (válidas *q.t.p.*), obtemos

$$d_f(\alpha) = \mu(E_\alpha) \leq \mu(F_\alpha) = d_h(\alpha) \leq \mu(I_\alpha) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(E_{\alpha,n}) = \liminf_{n\to\infty} d_{f_n}(\alpha).$$

[2] Será que $F_\alpha = I_\alpha$? A resposta é não. Um contraexemplo simples pode ser obtido tomando $f_n = 1/n$ e $\alpha = 0$, pois nesse caso $F_0 = \varnothing$ e $I_0 = X$.

(d) Seja $|f_n| \nearrow |f|$. Em particular, como $|f| = \lim_{n\to\infty} |f_n| = \liminf_{n\to\infty} |f_n|$, o item anterior afirma que $d_f \leq \liminf_{n\to\infty} d_{f_n}$. Para verificar a igualdade, observamos que $d_{f_n} \leq d_{f_{n+1}} \leq d_f$ para qualquer n (devido ao item (b), pois $|f_n| \leq |f_{n+1}| \leq |f|$) e assim

$$\limsup_{n\to\infty} d_{f_n} \leq d_f \leq \liminf_{n\to\infty} d_{f_n},$$

o que garante que $\lim_{n\to\infty} d_{f_n}$ existe e é igual a d_f.

(e) Se $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $\{x \in X : |cf(x)| > \alpha\} = \{x \in X : |f(x)| > \alpha/|c|\}$. O resultado segue ao aplicarmos μ e ambos os lados desta igualdade.

(f) Se $|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| > \alpha + \beta$, então $|f(x)| > \alpha$ ou $|g(x)| > \beta$. Assim

$$\{x \in X : |(f+g)(x)| > \alpha + \beta\} \subseteq \{x \in X : |f(x)| > \alpha\} \cup \{x \in X : |g(x)| > \beta\}$$

e pela subaditividade de μ, concluímos a desigualdade $d_{f+g}(\alpha+\beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$. □

Relembrando o conceito de truncamento de funções (veja a Definição 1.2, pág. 18), podemos nos perguntar se existe uma relação entre a função distribuição de f e a função distribuição de algum de seus truncamentos. Um resultado nessa direção é expresso da seguinte forma:

Proposição 2.5. Seja $f \in \mathcal{M}(X)$, com $d_f(\alpha) < \infty$ para todo $\alpha > 0$. Fixado $a \in [0, \infty)$, defina para cada $x \in X$ os truncamentos

$$f_1(x) = f(x)\chi_{\{x\in X \,:\, |f(x)|>a\}}(x),$$
$$f_2(x) = f(x)\chi_{\{x\in X \,:\, |f(x)|\leq a\}}(x).$$

Então $f = f_1 + f_2$ e

$$d_{f_1}(u) = \begin{cases} d_f(u), & se \quad u > a, \\ d_f(a), & se \quad u \leq a, \end{cases} \qquad d_{f_2}(u) = \begin{cases} 0, & se \quad u \geq a, \\ d_f(u) - d_f(a), & se \quad u < a. \end{cases} \tag{2.4}$$

Demonstração. A igualdade $f = f_1 + f_2$ é imediata. Vamos estabelecer agora as estimativas em (2.4). Se $a = 0$, então $f = f_1$ e $f_2 = 0$. Consequentemente, temos $d_f = d_{f_1}$, $d_{f_2} = 0$ e como não existe u satisfazendo $0 \leq u < 0$, o resultado segue. Portanto, podemos concentrar nossos esforços no caso $a > 0$. Dado $u > a$, temos pela construção de f_1

$$d_{f_1}(u) = \mu(\{x \in X : |f_1(x)| > u\}) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > u\}) = d_f(u),$$

enquanto para $u \leq a$

$$\begin{aligned} d_{f_1}(u) &= \mu(\{x \in X : |f_1(x)| > a\}) + \mu(\{x \in X : a \geq |f_1(x)| > u\}) \\ &= \mu(\{x \in X : |f(x)| > a\}) + \mu(\varnothing) = d_f(a). \end{aligned}$$

Agora, se $u \geq a$, usamos a definição de f_2 para obter

$$d_{f_2}(u) = \mu\left(\{x \in X \,:\, |f_2(x)| > u\}\right) = \mu\left(\varnothing\right) = 0,$$

enquanto para $u < a$ vale

$$\begin{aligned} d_{f_2}(u) &= \mu\left(\{x \in X \,:\, |f_2(x)| > a\}\right) + \mu\left(\{x \in X \,:\, a \geq |f_2(x)| > u\}\right) \\ &= \mu\left(\{x \in X \,:\, a \geq |f_2(x)| > u\}\right) \\ &= \mu\left(\{x \in X \,:\, a \geq |f(x)| > u\}\right) \\ &= d_f(u) - d_f(a). \end{aligned}$$

□

2.2 Rearranjos não crescentes

Definição 2.6 (Rearranjo não crescente). Considere f uma função mensurável em $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Definimos o rearranjo não crescente $f^* : [0, \infty) \to [0, \infty]$ por

$$f^*(t) \overset{\text{def}}{=} \inf\left\{s > 0 \,:\, d_f(s) \leq t\right\},$$

usando aqui a convenção de que $\inf(\varnothing) = \infty$.

Exemplo 2.7. Com a mesma notação do Exemplo 2.3, calcularemos φ^* de uma função φ simples não negativa. Já provamos que $d_\varphi(\alpha) = \sum_{k=1}^{N} m_k \chi_{[b_{k+1}, b_k)}(\alpha)$. Se $m_N \leq t$ (lembre que os m_k's formam uma sequência não decrescente) então $\varphi^*(t) = 0$, pois neste caso $(0, b_N) \subseteq \{s > 0 : d_\varphi(s) \leq t\}$. Caso contrário, o conjunto $\{m_k : t < m_k,\ 1 \leq k \leq N\}$ é não vazio e admite um menor elemento m_i. Portanto, definindo $m_0 = 0$, segue de $m_{i-1} \leq t < m_i$ que

$$\{s > 0 \,:\, d_\varphi(s) \leq t\} = \left\{s > 0 \,:\, \sum_{k=1}^{N} m_k \chi_{[b_{k+1}, b_k)}(s) \leq t\right\} = \bigcup_{k=1}^{i-1} [b_{k+1}, b_k) = [b_i, b_1).$$

Consequentemente, $\varphi^*(t) = b_i$ e assim

$$\varphi^*(t) = \sum_{i=1}^{N} b_i \chi_{[m_{i-1}, m_i)}(t).$$

Exemplo 2.8. Seja f mensurável em $(X, \mathcal{P}(X), \#)$, com X contável. Sabemos que, pela definição de medida contagem, d_f é uma função com imagem em $\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$. Em particular, fixado $k \in \mathbb{Z}_+$ e $x \in [k, k+1)$, temos $\{s > 0 : d_f(s) \leq k\} = \{s > 0 : d_f(s) \leq x\}$, ou seja, $f^*(k) = f^*(x)$. Deste modo, para cada $t \in \mathbb{R}_+$, obtemos a representação

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{[k, k+1)}(t) f^*(k)$$

e assim $\{f^*(k)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ determina completamente o rearranjo f^*.

Observação 2.9. Considere $X = \mathbb{Z}_+$ no exemplo anterior e para cada $k \in X$ defina $f(k) = 1 - 1/(k+1)$. Neste caso, $d_f(\alpha)$ é igual a infinito se $0 \le \alpha < 1$ e é igual zero se $\alpha \ge 1$. Logo $f^*(t) = 1$, qualquer que seja $t \in \mathbb{R}_+$. Portanto, é incorreto afirmar que $\{f^*(k)\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ corresponde a $\{|f(k)|\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ permutada em ordem não crescente.

Teorema 2.10. Se f é mensurável, então f^* é uma função distribuição, a saber, da função mensurável d_f. Ou seja, para cada $t \in [0,\infty)$, temos

$$f^*(t) = m(\{\alpha \in [0,\infty) : d_f(\alpha) > t\}) = d_{(d_f)}(t).$$

Demonstração. Fixado $t \in [0,\infty)$, defina os conjuntos $A = \{\alpha \in (0,\infty) : d_f(\alpha) > t\}$ e $B = \{\alpha \in (0,\infty) : d_f(\alpha) \le t\}$. Veja que $A \cup B = (0,\infty)$ e $A \cap B = \varnothing$. É suficiente provar que $\inf(B) = m(A)$. De fato, se essa igualdade for válida, temos $f^*(t) = \inf(B)$ (por definição) e da aditividade da medida

$$m(A) = m\left(\{\alpha \in (0,\infty) : d_f(\alpha) > t\}\right) = m\left(\{\alpha \in [0,\infty) : d_f(\alpha) > t\}\right) = d_{(d_f)}(t).$$

já que a diferença entre os conjuntos $\{\alpha \in (0,\infty) : d_f(\alpha) > t\}$ e $\{\alpha \in [0,\infty) : d_f(\alpha) > t\}$ é no máximo o conjunto $\{0\}$. Provemos então que $\inf(B) = m(A)$.

Caso 1. $B = \varnothing$ ou $A = \varnothing$. Suponha $B = \varnothing$. Por um lado $\inf(B) = \infty$. Por outro, como $A = (0,\infty)$, temos $m(A) = \infty$. Agora, se $A = \varnothing$, então $m(A) = 0$ e

$$\inf(B) = \inf(0,\infty) = 0.$$

Caso 2. $A, B \neq \varnothing$. Daí existem $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tais que $\alpha_1 \in A$ e $\alpha_2 \in B$. Consequentemente, como d_f é não crescente (Proposição 2.4 (a)), deduzimos que $(0, \alpha_1] \subseteq A$ e que $[\alpha_2, \infty) \subseteq B$. Disso e do fato de A, B serem dois intervalos disjuntos cuja união é $\mathbb{R}_{>0}$, obtemos que $\sup(A) = \inf(B)$. Finalmente, usando a regularidade da medida de Lebesgue (veja a equação (2) no Apêndice A.1, pág. 87)

$$m(A) = \sup\{m(E) : E \subseteq A,\ E \text{ compacto}\}) = m[0, \sup(A)] = \sup(A) = \inf(B).$$

□

Corolário 2.11. Sejam $f, g, \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funções mensuráveis. Então f^* é uma função não crescente, mensurável e contínua pela direita em $[0,\infty)$. Ademais

(a) $|f|^* = f^*$ e se $|g| \le |f|$ em quase todo ponto, então $g^* \le f^*$.

(b) se $|f| \le \liminf_{n\to\infty} |f_n|$ *q.t.p.*, então

$$f^* \le (\liminf_{n\to\infty} |f_n|)^* \le \liminf_{n\to\infty} f_n^*.$$

(c) $|f_n| \nearrow |f|$ implica ${f_n}^* \nearrow f^*$.

Demonstração. A prova é imediata graças a Proposição 2.4 e ao Teorema 2.10. A título de exemplo, verificaremos apenas a propriedade (b), deixando as demais para o leitor. Sejam $\varphi = \liminf_{n\to\infty} |f_n|$ e $\psi = \liminf_{n\to\infty} d_{f_n}$. Pela Proposição 2.4 (c), sabemos que $d_f \leq d_\varphi \leq \psi$. Aplicando o item (b) da Proposição 2.4 nessa desigualdade e invocando o Teorema 2.10, obtemos

$$f^* = d_{(d_f)} \leq d_{(d_\varphi)} = \varphi^* \leq d_\psi.$$

Por fim, usando na última desigualdade a Proposição 2.4 (c) e o Teorema 2.10

$$f^* \leq \varphi^* \leq d_\psi = d_{\liminf_{n\to\infty} d_{(f_n)}} \leq \liminf_{n\to\infty} d_{(d_{f_n})} = \liminf_{n\to\infty} f_n^*.$$

□

Proposição 2.12. Vale que $f^*(0) = \|f\|_\infty = \sup_{t>0} f^*(t)$. Portanto, $f^*(t) = 0$ para todo $t > 0$ se, e somente se, $f = 0$ em quase todo ponto.

Demonstração. Da definição da norma infinito e do fato de d_f ser não negativa, obtemos

$$f^*(0) = \inf\{s > 0 \,:\, d_f(s) \leq 0\} = \inf\{s > 0 \,:\, d_f(s) = 0\} = \|f\|_\infty .$$

Como f^* é não crescente, temos $f^*(t) \leq f^*(0)$ para todo t positivo e assim

$$\sup_{t>0} f^*(t) \leq f^*(0) = \|f\|_\infty .$$

Se a desigualdade acima fosse estrita, existiria $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\sup_{t>0} f^*(t) + \varepsilon < f^*(0).$$

Mas isso implicaria que $f^*(s) + \varepsilon < f^*(0)$ para todo s positivo. Fazendo $s \to 0^+$, temos uma contradição com a continuidade à direita de f^* (cf. Corolário 2.11). Por fim, se $f = 0$ *q.t.p.*, então $d_f = 0$, de modo que $f^* = 0$. Por outro lado, se $f^*(t) = 0$ para todo t positivo, temos $\|f\|_\infty = \sup_{t>0} f^*(t) = 0$ e assim f deve ser nula em quase todo ponto. □

Exemplo 2.13. Considere f mensurável em $(X, \mathcal{M}, \mu)$, com μ finita. Deste modo, podemos calcular $f^*(\mu(X))$. Sendo $d_f \leq \mu(X)$, obtemos

$$f^*(\mu(X)) = \inf\{s > 0 \,:\, d_f(s) \leq \mu(X)\} = \inf(0, \infty) = 0.$$

Portanto, se μ for uma medida finita, temos $f^*(t) = 0$ para qualquer $t \in [\mu(X), \infty)$.

Teorema 2.14. As funções f e f^* são equimensuráveis, isto é, $d_f = d_{f^*}$.

Demonstração. Vamos provar primeiro a afirmação para funções simples. Assim, considere $\varphi(x) = \sum_{k=1}^N b_k \chi_{E_k}(x)$, em que $b_k > b_{k+1} > 0$ para qualquer k e $E_i \cap E_j = \varnothing$ para $i \neq j$. Pelos Exemplos 2.3 e 2.7, já sabemos que

$$d_\varphi(\alpha) = \sum_{k=1}^N m_k \chi_{[b_{k+1}, b_k)}(\alpha) \qquad \text{e} \qquad \varphi^*(t) = \sum_{k=1}^N b_k \chi_{[m_{k-1}, m_k)}(t),$$

com $b_{N+1} = m_0 = 0$ e $m_k = \sum_{j=1}^{k} \mu(E_j)$ para $1 \leq k \leq N$. Se $\alpha_0 \geq b_1$, então $d_{\varphi^*}(\alpha_0) = 0$. Caso contrário, o conjunto $\{b_k : \alpha_0 < b_k,\ 1 \leq k \leq N\}$ é não vazio e admite um menor elemento b_j. Portanto, de $b_{j+1} \leq \alpha_0 < b_j$, temos

$$\left\{ t \in [0, \infty) \,:\, \sum_{k=1}^{N} b_k \chi_{[m_{k-1}, m_k)}(t) > \alpha_0 \right\} = \bigcup_{k=1}^{j} [m_{k-1}, m_k) = [0, m_j)$$

e assim $d_{\varphi^*}(\alpha_0) = m_j$. Consequentemente, $d_{\varphi^*}(\alpha) = \sum_{j=1}^{N} m_j \chi_{[b_{j+1}, b_j)}(\alpha) = d_{\varphi}(\alpha)$. Agora, considere $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável qualquer. Sabemos que existe uma sequência $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples não-negativas tal que $\varphi_n \nearrow |f|$ (veja o Teorema 1.3, pág. 18). Deste modo, o Corolário 2.11 (c) implica que $\varphi_n^* \nearrow f^*$. Invocando o item (d) da Proposição 2.4, obtemos $d_{\varphi_n} \nearrow d_f$ e $d_{\varphi_n^*} \nearrow d_{f^*}$. Por fim, como $d_{\varphi_n} = d_{\varphi_n^*}$, segue que

$$d_f = \lim_{n \to \infty} d_{\varphi_n} = \lim_{n \to \infty} d_{\varphi_n^*} = d_{f^*}.$$

□

Corolário 2.15. Temos $(f^*)^* = f^*$.

Demonstração. Pela proposição anterior $d_f = d_{f^*}$. Usando essa igualdade no Teorema 2.10, concluímos que $(f^*)^* = d_{(d_{f^*})} = d_{(d_f)} = f^*$. □

Teorema 2.16 (Unicidade de f^*). Existe apenas uma função $f^* : [0, \infty) \to [0, \infty]$ não crescente, contínua pela direita e equimensurável a f.

Demonstração. Suponha por contradição que $g, h : [0, \infty) \to [0, \infty]$ são duas funções distintas, não crescentes, contínuas pela direita e equimensuráveis a f. Consequentemente, existe t_0 tal que $g(t_0) \neq h(t_0)$. Sem perda de generalidade, assuma $g(t_0) > h(t_0)$. Deste modo, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno satisfazendo $g(t_0) > h(t_0) + \varepsilon$. Sendo g contínua pela direita, existe um $\delta > 0$ tal que, se $t \in (t_0, t_0 + \delta)$, então $g(t) > h(t_0) + \varepsilon$. Como g é não crescente, temos $g(t) > h(t_0) + \varepsilon$ para qualquer $t \in [0, t_0 + \delta)$. Portanto

$$d_g(h(t_0) + \varepsilon) = \mu\left(\left\{ t \in \mathbb{R}^+ \,:\, g(t) > h(t_0) + \varepsilon \right\}\right) \geq \mu([0, t_0 + \delta)) = t_0 + \delta. \tag{2.5}$$

Por outro lado, sendo h uma função também não crescente, vale $h(t_0) \geq h(t)$ para todo $t \in [t_0, \infty)$ e assim

$$d_h(h(t_0) + \varepsilon) = \mu\left(\left\{ t \in \mathbb{R}^+ \,:\, h(t) > h(t_0) + \varepsilon \right\}\right) \leq \mu([0, t_0)) = t_0. \tag{2.6}$$

Finalmente, de (2.5) e de (2.6), chegamos em uma contradição com a hipótese de que g e h eram ambas equimensuráveis a f. Logo $g = h$ e o resultado está demonstrado. □

Exemplo 2.17. Considere a função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot \chi_{[0,1]}(x)$. Perceba que $d_f(\alpha) = m\left(\{x \in [0,1] \,:\, x > \alpha\}\right) = (1-\alpha)\chi_{[0,1)}(\alpha)$. Assim

$$\begin{aligned} f^*(t) = \inf\left\{s > 0 \,:\, (1-s)\chi_{[0,1)}(s) \le t\right\} &= \begin{cases} \inf(0,\infty), & \text{se } t \in [1,\infty) \\ \inf[1-t,\infty), & \text{se } t \in [0,1) \end{cases} \\ &= (1-t)\chi_{[0,1)}(t). \end{aligned}$$

Por outro lado, definindo $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ como $g(x) = (1-x)\chi_{[0,1]}(x)$, vemos que essa função é não crescente e contínua pela direita, de sorte que pela unicidade do rearranjo (cf. Teorema 2.16) temos $g = g^*$. Deste modo, $f^* = g^*$.

Vamos agora apresentar um último resultado que resume diversas propriedades importantes relativas a rearranjos não crescentes de funções mensuráveis.

Proposição 2.18. Sejam $0 \le t_1, t_2 < \infty$ e f uma função mensurável em $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Então são válidas as seguintes propriedades:

(a) $(cf)^* = |c| f^*$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

(b) $(f+g)^*(t_1+t_2) \le f^*(t_1) + g^*(t_2)$.

(c) $f^*(d_f(\alpha)) \le \alpha$, para qualquer $\alpha > 0$.

(d) $d_f(f^*(t)) \le t$, desde que $f^*(t_0) < \infty$ para algum $t_0 < t$.

(e) $f^*(t) > s > 0$ se, e somente se, $t < d_f(s)$.

(f) $(|f|^r)^* = (f^*)^r$, se $0 < r < \infty$.

(g) $\sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) = \sup_{\alpha>0} \alpha (d_f(\alpha))^{1/p}$, para todo $0 < p < \infty$.

Demonstração. (a) Devido ao item (e) da Proposição 2.4

$$\begin{aligned} |c| f^*(t) = |c| \inf\{s > 0 \,:\, d_f(s) \le t\} &= \inf\{|c|s > 0 \,:\, d_f(s) \le t\} \\ &= \inf\{u > 0 \,:\, d_f(u/|c|) \le t\} = \inf\{u > 0 \,:\, d_{cf}(u) \le t\} = (cf)^*(t). \end{aligned}$$

(b) Defina os conjuntos

$$A = \{s_1 > 0 \,:\, d_f(s_1) \le t_1\}, \qquad B = \{s_2 > 0 \,:\, d_g(s_2) \le t_2\}$$
$$\text{e} \qquad S = \left\{s_3 > 0 \,:\, d_{f+g}(s_3) \le t_1 + t_2\right\}.$$

Note que se $A = \varnothing$ (ou $B = \varnothing$) então $f^*(t_1) = \infty$ (ou $g^*(t_2) = \infty$), o que validaria a desigualdade trivialmente.

Assuma então que A e B são não vazios. Da Proposição 2.4 (f), temos $A + B \subseteq S$[3] e assim

$$(f+g)^*(t_1+t_2) = \inf S \leq \inf(A+B) \leq \inf A + \inf B = f^*(t_1) + g^*(t_2).$$

(c) Seja $\alpha > 0$. Segue direto que $\alpha \in \{s > 0 : d_f(s) \leq d_f(\alpha)\}$. Logo, pela construção do rearranjo não crescente (Definição 2.6) temos $f^*(d_f(\alpha)) = \inf\{s > 0 : d_f(s) \leq d_f(\alpha)\} \leq \alpha$.

(d) Sendo $f^*(t) \leq f^*(t_0) < \infty$, o conjunto $A = \{s > 0 : d_f(s) \leq t\}$ é não vazio. Deste modo, tome $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $t_n \searrow f^*(t)$ (esta sequência existe pela definição de ínfimo). Como d_f é contínua pela direita (item (a) da Proposição 2.4), o limite $\lim_{n\to\infty} d_f(t_n)$ existe e é igual $d_f(f^*(t))$. Por fim, usando a definição de A temos $d_f(t_n) \leq t$ para todo n natural e assim $\lim_{n\to\infty} d_f(t_n) \leq t$.

(e) Se $u < f^*(t)$, então $u \notin A = \{s > 0 : d_f(s) \leq t\}$ já que $f^*(t)$ é o ínfimo de A. Portanto, $u \in A^c = \{0\} \cup \{s > 0 : d_f(s) > t\}$, de sorte que $d_f(u) > t$. Por outro lado, se $t < d_f(u)$, não podemos ter $f^*(t) \leq u$. Afinal, se isso ocorresse, seguiria do fato de d_f ser não crescente e do item anterior que $d_f(u) \leq d_f(f^*(t)) \leq t < d_f(u)$, um absurdo.

(f) Dado α positivo, temos pelo Teorema 2.14 que

$$d_{|f|^r}(\alpha) = d_f(\alpha^{1/r}) = d_{f^*}(\alpha^{1/r}) = d_{(f^*)^r}(\alpha).$$

Deste modo, como as funções $|f|^r$ e $(f^*)^r$ tem a mesma função distribuição, obtemos $(|f|^r)^* = ((f^*)^r)^* = (f^*)^r$, sendo a última igualdade válida pela unicidade do rearranjo não crescente (cf. Teorema 2.16).

(g) Vamos separar a prova em três casos.

Caso 1. Existe $t > 0$ tal que $f^*(t) = \infty$. Sendo $\{\alpha > 0 : d_f(\alpha) \leq t\}$ um conjunto vazio, temos $d_f(\alpha) > t$ para qualquer α positivo. Consequentemente

$$\sup_{\alpha>0} \alpha d_f(\alpha)^{1/p} \geq t^{1/p} \sup_{\alpha>0} \alpha = \infty = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t).$$

Caso 2. Existe $\alpha > 0$, com $d_f(\alpha) = \infty$. Sendo d_f uma função não crescente, temos para qualquer $t > 0$ que $f^*(t) = \inf\{s > 0 : d_f(s) \leq t\} \geq \alpha$. Assim

$$\sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) \geq \alpha \sup_{t>0} t^{1/p} = \infty = \sup_{\alpha>0} \alpha d_f(\alpha)^{1/p}.$$

Caso 3. Para quaisquer $\alpha, t > 0$ vale $d_f(\alpha) < \infty$ e $f^*(t) < \infty$. Vamos verificar que um termo é maior ou igual ao outro para concluir a igualdade desejada. Dado $\alpha > 0$, escolhemos ε satisfazendo $0 < \varepsilon < \alpha$. Usando a propriedade (d) da presente proposição, podemos verificar que $f^*(d_f(\alpha) - \varepsilon) > \alpha$. Em particular, vale

$$\sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) \geq (d_f(\alpha) - \varepsilon)^{1/p} f^*(d_f(\alpha) - \varepsilon) \geq (d_f(\alpha) - \varepsilon)^{1/p} \alpha.$$

[3] Usamos a notação $A + B$ para representar o conjunto $\{a + b : a \in A,\ b \in B\}$.

Assim, fazemos primeiro o limite $\varepsilon \to 0$ e então tomamos o supremo sobre todo α positivo. Por outro lado, dado $t > 0$, escolhemos $0 < \varepsilon < f^*(t)$. Usando agora a propriedade (c), concluímos que $d_f(f^*(t) - \varepsilon) > t$. Em particular

$$\sup_{\alpha > 0} \alpha (d_f(\alpha))^{1/p} \geq (f^*(t) - \varepsilon)(d_f(f^*(t) - \varepsilon))^{1/p} > (f^*(t) - \varepsilon) t^{1/p}.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ e tomando o supremo sobre todo t positivo, o resultado segue. □

Do mesmo modo que existe uma relação entre a função distribuição de f e a função distribuição de alguns de seus truncamentos (veja a Proposição 2.5), é esperado que podemos estimar o rearranjo não crescente de algum truncamento de f usando f^*. De fato, esse resultado é apresentado na

Proposição 2.19. Seja $f \in \mathcal{M}(X)$, com $d_f < \infty$. Fixado $w > 0$, construa as funções

$$\begin{aligned} f^w(x) &\overset{\text{def}}{=} f(x) \chi_{\{x \in X \,:\, |f(x)| > f^*(w)\}}(x), \\ f_w(x) &\overset{\text{def}}{=} f(x) \chi_{\{x \in X \,:\, |f(x)| \leq f^*(w)\}}(x). \end{aligned}$$

Então, temos

$$(f^w)^*(s) \leq \begin{cases} f^*(s), & se\ 0 < s < w, \\ 0, & se\ s \geq w; \end{cases} \tag{2.7}$$

$$(f_w)^*(s) \leq \begin{cases} f^*(w), & se\ 0 < s < w \\ f^*(s), & se\ s \geq w. \end{cases} \tag{2.8}$$

Demonstração. O resultado é imediato se[4] $f^*(w) = 0$. Portanto, assuma $f^*(w) > 0$. Fazendo $a = f^*(w)$ na Proposição 2.5, temos as igualdades

$$d_{f^w}(u) = \begin{cases} d_f(u), & se \quad u > f^*(w), \\ d_f(f^*(w)), & se \quad u \leq f^*(w); \end{cases} \tag{2.9}$$

$$d_{f_w}(u) = \begin{cases} 0, & se \quad u \geq f^*(w), \\ d_f(u) - d_f(f^*(w)), & se \quad u < f^*(w). \end{cases} \tag{2.10}$$

Se $s \geq w$, então por (2.9)

$$\begin{aligned} (f^w)^*(s) &= \inf \{u > 0 \,:\, d_{f^w}(u) \leq s\} \\ &\leq \inf \{u \in (0, f^*(w)] \,:\, d_{f^w}(u) \leq s\} \\ &= \inf \{u \in (0, f^*(w)] \,:\, d_f(f^*(w)) \leq s\} \\ &= \inf (0, f^*(w)] = 0 \end{aligned}$$

[4] Como vimos na Proposição 2.5, teríamos $f^w = f$ e $f_w = 0$, ou seja, $(f^w)^* = f^*$ e $(f_w)^* = 0$. Deste modo, a condição (2.8) é imediata, enquanto a condição (2.7) vale pois $f^*(w) = 0$ e o rearranjo f^* é não crescente.

e como $d_{f_w} \leq d_f$, segue da Proposição 2.4 (b) e do Teorema 2.10 que

$$(f_w)^*(s) = d_{(d_{f_w})}(s) \leq d_{(d_f)}(s) = f^*(s).$$

Agora, se $0 < s < w$, temos

$$\begin{aligned}(f^w)^*(s) &\leq \inf\{u > f^*(w) \,:\, d_{f^w}(u) \leq s\}\\ &= \inf\{u > f^*(w) \,:\, d_f(u) \leq s\}\\ &= \inf\{\{u > 0 \,:\, d_f(u) \leq s\} \cap (f^*(w), \infty)\}\\ &= \inf\{f^*(s) \cap (f^*(w), \infty)\} = f^*(s)\end{aligned}$$

e o fato de $f^*(w) \in \{u > 0 \,:\, d_{f_w}(u) \leq s\}$ (afinal $d_{f_w}(f^*(w)) = 0$ pela equação (2.10)) implica que

$$(f_w)^*(s) = \inf\{u > 0 \,:\, d_{f_w}(u) \leq s\} \leq f^*(w).$$

□

2.3 Um breve comentário sobre $L^p(X)$ e $L^p_{weak}(X)$

Vimos no Teorema 2.14 a equimesurabilidade de f e f^*, ou seja, que $d_f = d_{f^*}$. Consequentemente, dado $0 < p < \infty$, obtemos de (2.1) que

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \left(p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha)\, d\alpha\right)^{1/p} = \left(p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_{f^*}(\alpha)\, d\alpha\right)^{1/p} = \|f^*\|_{L^p(\mathbb{R}_{>0},m)} \tag{2.11}$$

e da definição da norma infinito

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} = \inf\{s > 0 \,:\, d_f(s) = 0\} = \inf\{s > 0 \,:\, d_{f^*}(s) = 0\} = \|f^*\|_{L^\infty(\mathbb{R}_{>0},m)}.$$

Perceba também que $[\cdot]_p : L^p_{weak} \to [0, \infty)$, vista na Definição 1.25 (pág. 26), pode ser escrita como $[f]_p = \sup_{\alpha>0}[\alpha^p d_f(\alpha)]^{1/p}$. Disso e da Proposição 2.18 (g), obtemos $[f]_p = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t)$. Em suma, podemos escrever as funções $\|\cdot\|_p$ e $[\cdot]_p$ avaliadas em uma função usando somente o rearranjo não crescente da mesma.

3 Espaços de Lorentz

Neste capítulo faremos uma breve introdução aos espaços de Lorentz, que serão denotados por $L^{p,q}(X)$, usando os conceitos trabalhados no Capítulo 2. Na primeira seção, definiremos esses espaços e veremos como eles possuem propriedades similares a $L^p(X)$. Já na segunda seção, veremos que os espaços de Lorentz são quase-Banach e encontraremos alguns subconjuntos densos. Na terceira seção, daremos condições necessárias para a existência de uma norma em $L^{p,q}(X)$ que satisfaz uma propriedade especial. As referências para as duas primeiras seções são os Capítulos 4§4 de [Bennett e Sharpley 1988] e 1§4 de [Grafakos 2014]. Para a última seção usaremos como referência [Hunt 1966].

3.1 Teoria básica de $L^{p,q}(X)$

Definição 3.1 (Espaços de Lorentz). Sejam $f \in \mathcal{M}(X)$, $0 < p < \infty$ e $0 < q \leq \infty$. Definimos

$$\|f\|_{L^{p,q}(X,\mu)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t) \right)^q \dfrac{dt}{t} \right)^{1/q}, & \text{se } 0 < p, q < \infty; \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t), & \text{se } 0 < p < \infty \text{ e } q = \infty. \end{cases} \tag{3.1}$$

O conjunto de todas as funções f mensuráveis tais que $\|f\|_{L^{p,q}(X,\mu)} < \infty$ é denominado espaço de Lorentz de índices p e q, sendo representado por $L^{p,q}(X,\mu)$. Para facilitar a construção da teoria, também definimos $L^{\infty,\infty}(X,\mu)$ como o próprio $L^\infty(X,\mu)$. Em qualquer um desses casos, fazemos a identificação usual de que duas funções iguais em quase todo ponto definem o mesmo elemento em $L^{p,q}(X)$.

Se estiver claro pelo contexto e se não existir risco de confusão, representaremos $L^{p,q}(X,\mu)$ simplesmente por $L^{p,q}(X)$ e $\|\cdot\|_{L^{p,q}(X,\mu)}$ apenas por $\|\cdot\|_{p,q}$.

Exemplo 3.2. Sejam $0 < p < \infty$ e $E \in \mathcal{M}$ um conjunto mensurável. Pelo Exemplo 2.7 (pág. 31), temos $(\chi_E)^*(t) = \chi_{[0,\mu(E))}(t)$ para todo t positivo e assim $\|\chi_E\|_{p,\infty} = \mu(E)^{1/p}$.

Exemplo 3.3. Dados $0 < p, q < \infty$, veremos como se comporta $\|\cdot\|_{p,q}$ quando é avaliado em uma funçao simples não negativa. Com a mesma notação do Exemplo 2.7 temos que

$$\|\varphi\|_{p,q}^q = \int_0^\infty \left(t^{1/p} \sum_{k=1}^N a_k \chi_{[m_{k-1},m_k)}(t) \right)^q \frac{dt}{t}$$
$$= \sum_{k=1}^N a_k^q \int_{m_{k-1}}^{m_k} t^{q/p-1}\, dt = \left(\frac{p}{q}\right) \sum_{k=1}^N a_k^q \left(m_k^{q/p} - m_{k-1}^{q/p} \right).$$

Em particular, fazendo $N = a_1 = 1$ (ou seja, $\varphi = \chi_{E_1}$), obtemos

$$\|\chi_{E_1}\|_{p,q} = \left(\frac{p}{q}\right)^{1/q} \left(m_1^{q/p} - m_0^{q/p}\right)^{1/q} = \left(\frac{p}{q}\right)^{1/q} \mu(E_1)^{1/p}.$$

Observação 3.4. Perceba que $L^{\infty,q}(X)$ não está definido quando $0 < q < \infty$. Isto deve-se ao fato de que ao fazermos $p = \infty$ na equação (3.1), deduzimos que $\|\cdot\|_{\infty,q}$ seria finito ao ser avaliado em uma função simples se, e somente se, essa função simples fosse nula em quase todo ponto[1]. Ademais, em virtude das considerações feitas na Seção 2.3 do Capítulo 2 (pág. 38), concluímos que $L^{p,p}(X) = L^p(X)$ e $L^{p,\infty}(X) = L^p_{weak}(X)$.

Observação 3.5. Sejam $0 < p, r < \infty$ e $0 < q \leq \infty$. Uma consequência da Definição 3.1 e da Proposição 2.18 (f) (pág. 35) é a igualdade

$$\||f|^r\|_{p,q} = \|f\|^r_{pr,qr}\,.$$

Observação 3.6. Alguns autores definem os espaços de Lorentz usando uma outra função, a qual denotamos aqui por $\|\cdot\|_{[p,q]}$. Para $f \in \mathcal{M}(X)$, $0 < p < \infty$ e $0 < q \leq \infty$, seja

$$\|f\|_{[p,q]} = \begin{cases} \left(p\displaystyle\int_0^\infty \left(d_f(\alpha)^{1/p}\alpha\right)^q \frac{d\alpha}{\alpha}\right)^{1/q}, & \text{se } 0 < q < \infty, \\ \sup_{\alpha>0} \alpha d_f(\alpha)^{1/p}, & \text{se } q = \infty, \end{cases} \tag{3.2}$$

e considere $L^{p,q}(X) \overset{def}{=} \left\{f \in \mathcal{M}(X) : \|f\|_{[p,q]} < \infty\right\}$. Afirmamos que essa construção coincide com aquela feita na Definição 3.1. Para provar tal fato, fixe $0 < q < \infty$ (o caso $q = \infty$ segue da Proposição 2.18 (g) (pág. 35)). Com a mesma notação do Exemplo 2.3 (pág. 28), considere φ uma função simples não negativa. Temos

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^q_{[p,q]} &= p\int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^N m_i\chi_{[a_{i+1},a_i)}(\alpha)\right)^{q/p} \alpha^{q-1}\,d\alpha = p\sum_{i=1}^N m_i^{q/p}\int_{a_{i+1}}^{a_i} \alpha^{q-1}\,d\alpha \\ &= \left(\frac{p}{q}\right)\sum_{i=1}^N m_i^{q/p}\left(a_i{}^q - a^q_{i+1}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)\sum_{k=1}^N a_k^q\left(m_k^{q/p} - m_{k-1}^{q/p}\right) \end{aligned}$$

e pelo Exemplo 3.3 vale $\|\varphi\|_{[p,q]} = \|\varphi\|_{p,q}$. Mais geralmente, considere f mensurável. Pelo Teorema 1.3 (pág. 18), existe uma sequência de funções simples $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^+(X)$ tal que $\varphi_n \nearrow |f|$. Graças à Proposição 2.4 (d) e ao Corolário 2.11 (c) (págs. 28 e 32, respectivamente), obtemos $d_{\varphi_n} \nearrow d_f$ e $\varphi_n^* \nearrow f^*$. Disso e do Teorema da Convergência Monótona (Teorema 1.7, pág. 20)

$$\begin{aligned} \|f\|_{[p,q]} &= \left(p\int_0^\infty \left(d_f(\alpha)^{1/p}\alpha\right)^q \frac{d\alpha}{\alpha}\right)^{1/q} = \lim_{n\to\infty}\left(p\int_0^\infty \left(d_{\varphi_n}(\alpha)^{1/p}\alpha\right)^q \frac{d\alpha}{\alpha}\right)^{1/q} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}\varphi_n^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} = \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} = \|f\|_{p,q}. \end{aligned}$$

[1] O rearranjo φ^* de uma função simples φ é uma função simples (veja o Exemplo 2.7, pág. 31), de sorte que $\varphi^* = 0$ $q.t.p$ para $\varphi \in L^{\infty,q}(X)$. Logo, pela Proposição 2.12 (pág. 33), teríamos $\varphi = 0$ $q.t.p$.

Exemplo 3.7 (Espaço $\ell^{p,q}(X)$). Sejam $0 < p, q < \infty$ e X um conjunto contável. Denotaremos $L^{p,q}(X, \mathcal{P}(X), \#)$ por $\ell^{p,q}(X)$. Se f é mensurável em $(X, \mathcal{P}(X), \#)$, obtemos, pelo Exemplo 2.8 (pág. 31), que

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{[k,k+1)}(t) f^*(k).$$

Deste modo, segue do Teorema de Fubini-Tonelli (Teorema 1.14, pág. 22) que

$$\|f\|_{p,q}^q = \int_0^\infty t^{q/p-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \chi_{[k,k+1)}(t) f^*(k) \right)^q dt = \sum_{k=0}^{\infty} (f^*(k))^q \int_k^{k+1} t^{q/p-1}\, dt$$

e pela definição de supremo

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{1/p} \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{[k,k+1)}(t) f^*(k) = \sup_{k \geq 1}\ (k+1)^{1/p} f^*(k).$$

Exemplo 3.8. Se μ for uma medida finita, temos do Exemplo 2.13 (pág. 33) que

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^{\mu(X)} \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & \text{se } 0 < p, q < \infty; \\ \sup_{0<t<\mu(X)} t^{1/p} f^*(t), & \text{se } 0 < p < \infty \text{ e } q = \infty. \end{cases}$$

Já mostramos no Capítulo 1 (Observação 1.26, pág. 26) que $L^{p,p}(X) \subseteq L^{p,\infty}(X)$. Deste modo, faz sentido perguntar se mais geralmente vale que $L^{p,q}(X) \subseteq L^{p,\infty}(X)$ quando $0 < p, q < \infty$. Felizmente, a resposta para essa questão é sim. Entretanto, para provar tal resultado, precisaremos do seguinte resultado auxiliar:

Lema 3.9. Considere $h : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_+$ uma função não crescente, $0 < \alpha < 1$ e $\beta > 0$. Se

$$\int_0^\infty t^{\alpha\beta-1} [h(t)]^\alpha\, dt < \infty,$$

então $\alpha\beta^{1-\alpha}$ é a constante ótima na seguinte desigualdade:

$$\left(\int_0^\infty t^{\beta-1} h(t)\, dt \right)^\alpha \leq \alpha\beta^{1-\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha\beta-1} (h(t))^\alpha\, dt.$$

Demonstração. Primeiramente, defina as funções $f, g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_+$ por

$$f(x) = \int_0^x t^{\alpha\beta-1} [h(t)]^\alpha\, dt$$

e $g(x) = (\alpha\beta x)^{1/\alpha}$. Seja $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$, com $c_n \nearrow \infty$, e fixe $n \in \mathbb{N}$. Por construção, f é não decrescente e absolutamente contínua[2] em $I \overset{\text{def}}{=} [0, c_n]$. Ademais, g é absolutamente

[2] Uma função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é absolutamente contínua se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para qualquer coleção finita de sub-intervalos disjuntos $\{(a_i, b_i) \subseteq [a,b] \,:\, 1 \leq i \leq N\}$

$$\sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) < \delta \quad \textit{implica} \quad \sum_{i=1}^{N} |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon.$$

contínua[3] em $J \overset{\text{def}}{=} [0, f(c_n)]$. Vamos provar que $g \circ f$ também é absolutamente contínua em I. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer coleção finita de sub-intervalos disjuntos (w_i, z_i) em J, $\sum_i (z_i - w_i) < \delta$ implica $\sum_i |g(z_i) - g(w_i)| < \varepsilon$. Como f é absolutamente contínua e não decrescente, existe $\eta > 0$ tal que, para qualquer coleção finita de sub-intervalos disjuntos (a_i, b_i) em I, $\sum_i (a_i - b_i) < \eta$ implica $\sum_i (f(b_i) - f(a_i)) < \delta$. Logo

$$\sum_i |g \circ f(b_i) - g \circ f(a_i)| = \sum_i |g(f(b_i)) - g(f(a_i))| < \varepsilon$$

Seja $y \in I$ no qual f é diferenciável. Evidentemente $g \circ f$ também é diferenciável em y e

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(y) &= \frac{1}{\alpha} \left(\alpha\beta f(y)\right)^{1/\alpha - 1} \alpha\beta h(y)^\alpha y^{\alpha\beta - 1} \\
&\geq \frac{1}{\alpha} \left(h(y)^\alpha \alpha\beta \int_0^y t^{\alpha\beta - 1}\, dt \right)^{1/\alpha - 1} \alpha\beta h(y)^\alpha y^{\alpha\beta - 1} \\
&= \frac{1}{\alpha} \left(h(y)^\alpha y^{\alpha\beta} \right)^{1/\alpha - 1} \alpha\beta h(y)^\alpha y^{\alpha\beta - 1} \\
&= \beta h(y) y^{\beta - 1}.
\end{aligned}$$

Do Teorema Fundamental do Cálculo (podemos usar esse resultado pois já provamos que $g \circ f$ é absolutamente contínua), temos

$$\beta \int_0^{c_n} t^{\beta - 1} h(t)\, dt \leq \int_0^{c_n} (g \circ f)'(y)\, dy = g(f(c_n)) - g(f(0)) = \left(\alpha\beta \int_0^{c_n} t^{\alpha\beta - 1} [h(t)]^\alpha\, dt \right)^{1/\alpha}. \tag{3.3}$$

Como (3.3) foi provada para um natural n qualquer, podemos fazer $n \to \infty$. Pelo Teorema da Convergência Monótona (Teorema 1.7, pág. 20), concluímos que

$$\left(\int_0^\infty t^{\beta - 1} h(t)\, dt \right)^\alpha \leq \alpha\beta^{1-\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha\beta - 1} [h(t)]^\alpha\, dt.$$

Por fim, para mostrar que a constante $\alpha\beta^{1-\alpha}$ é ótima, considere $h(x) = \chi_{[0,1)}(x)$. Assim

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty t^{\beta - 1} h(t)\, dt \right)^\alpha = \left(\int_0^1 t^{\beta - 1}\, dt \right)^\alpha = \beta^{-\alpha} &= \alpha\beta^{1-\alpha} \int_0^1 t^{\alpha\beta - 1}\, dt \\
&= \alpha\beta^{1-\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha\beta - 1} [h(t)]^\alpha\, dt.
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.10. Se $0 < p < \infty$ e $0 < q < r \leq \infty$, então $\|f\|_{p,r} \leq C(p,q,r) \|f\|_{p,q}$. Em particular, temos as inclusões $L^{p,q}(X) \subseteq L^{p,r}(X)$.

Demonstração. Caso 1. $r = \infty$. Sendo f^* uma função não crescente, vale

$$t^{1/p} f^*(t) = \left(\frac{q}{p} \int_0^t \left(s^{1/p} f^*(t) \right)^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q} \leq \left(\frac{q}{p} \int_0^t \left(s^{1/p} f^*(s) \right)^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q} \leq \left(\frac{q}{p} \right)^{1/q} \|f\|_{p,q} \tag{3.4}$$

[3] O Teorema Fundamental do Cálculo nos diz que $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é absolutamente contínua em $[a,b]$ se, e somente se, F' existe *q.t.p.* em $[a,b]$, $F' \in L^1[a,b]$ e vale $F(x) - F(a) = \int_0^x F'(y)\, dy$ para $a \leq x \leq b$.

e o resultado segue tomando o supremo sobre t positivo em ambos os lados de (3.4).

Caso 2. $r < \infty$. Defina $h(t) = (f^*(t))^r$, $\alpha = q/r$ e $\beta = r/p$. Pelo Lema 3.9 obtemos

$$\begin{aligned}\|f\|_{p,r}^q = \left(\int_0^\infty t^{r/p-1}(f^*(t))^r\,dt\right)^{q/r} &\le \left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^{1-q/r}\int_0^\infty t^{(q/r)(r/p)-1}[f^*(t)]^{r(q/r)}\,dt\\ &= \left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^{-q/r}\int_0^\infty t^{q/p-1}(f^*(t))^q\,dt\\ &= \left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{r}{p}\right)^{-q/r}\|f\|_{p,q}^q\,.\end{aligned}$$

□

Observação 3.11. O Exemplo 3.2 e o Lema 3.9 mostram que as constantes encontradas no Teorema 3.10 são as melhores possíveis. De fato, fazendo $f = \chi_{[0,1)}$ alcançamos a igualdade nos dois casos.

Proposição 3.12. Sejam $1 \le p_1 < p < p_2 < \infty$. Então, para cada $f \in L^{p,\infty}(X)$, existem funções $f_1 \in L^{p_1,1}(X)$ e $f_2 \in L^{p_2,1}(X)$ tais que $f = f_1 + f_2$. Ademais, valem as inclusões

$$L^p(X) \subseteq L^{p,\infty}(X) \subseteq L^{p_1,1}(X) + L^{p_2,1}(X) \subseteq L^{p_1}(X) + L^{p_2}(X). \tag{3.5}$$

Demonstração. Considere $f \in L^{p,\infty}(X)$. Se $f^*(t) = 0$ para todo t positivo, então não há nada a ser demonstrado, pois pela Proposição 2.12 (pág. 33) teríamos $f = 0$ em quase todo ponto. Assim, seja $w \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $f^*(w) > 0$. Defina

$$\begin{aligned}f_1(x) &= f(x)\chi_{\{x\in X\,:\,|f(x)|>f^*(w)\}}(x),\\ f_2(x) &= f(x)\chi_{\{x\in X\,:\,|f(x)|\le f^*(w)\}}(x).\end{aligned}$$

Como f_1 contém a "parte grande" de f e f_2 contém a "parte pequena", é intuitivo pensar que $f_1 \in L^{p_1,1}(X)$ e que $f_2 \in L^{p_2,1}(X)$. Para provar isso, usaremos as desigualdades da Proposição 2.19 (pág. 37). Por (2.7)

$$\|f_1\|_{p_1,1} = \int_0^\infty t^{1/p_1-1}(f_1)^*(t)\,dt \le \int_0^w t^{1/p_1-1}f^*(t)\,dt. \tag{3.6}$$

Estando f em $L^{p,\infty}$ por hipótese, temos $f^*(t) \le t^{-1/p}\|f\|_{p,\infty}$ para qualquer t positivo. Consequentemente, por (3.6)

$$\|f_1\|_{p_1,1} \le \int_0^w t^{1/p_1-1/p-1}\|f\|_{p,\infty}\,dt = \|f\|_{p,\infty}\left(\frac{pp_1}{p-p_1}\right)w^{1/p_1-1/p}$$

Analogamente, invocando (2.8)

$$
\begin{aligned}
\|f_2\|_{p_2,1} &= \int_0^\infty t^{1/p_2-1}(f_2)^*(t)\,dt \\
&\leq \int_0^w t^{1/p_2-1} f^*(w)\,dt + \int_w^\infty t^{1/p_2-1} f^*(t)\,dt \\
&\leq p_2 w^{1/p_2} f^*(w) + \int_w^\infty t^{1/p_2-1/p-1}\,\|f\|_{p,\infty}\,dt \\
&= p_2 w^{1/p_2-1/p} w^{1/p} f^*(w) + \left(\frac{pp_2}{p_2-p}\right) w^{1/p_2-1/p}\,\|f\|_{p,\infty} \\
&\leq p_2 w^{1/p_2-1/p}\,\|f\|_{p,\infty} + \left(\frac{pp_2}{p_2-p}\right) w^{1/p_2-1/p}\,\|f\|_{p,\infty} \\
&= \left(\frac{p_2^2}{p_2-p}\right) w^{1/p_2-1/p}\,\|f\|_{p,\infty}
\end{aligned}
$$

Deste modo, $f_1 \in L^{p_1,1}(X)$ e $f_2 \in L^{p_2,1}(X)$, de sorte que $L^{p,\infty}(X) \subseteq L^{p_1,1}(X) + L^{p_2,1}(X)$. As outras duas inclusões de (3.5) são devidas ao Teorema 3.10, pois para $i \in \{1,2\}$

$$
L^p(X) = L^{p,p}(X) \subseteq L^{p,\infty}(X) \qquad e \qquad L^{p_i,1}(X) \subseteq L^{p_i,p_i}(X) = L^{p_i}(X).
$$

□

Observação 3.13. Em particular, a Proposição 3.12 nos garante a inclusão

$$
L^{p,\infty}(X) \subseteq L^{p_1}(X) + L^{p_2}(X).
$$

Poderíamos verificar esse fato de uma outra forma. Definindo para cada α positivo

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= f(x)\chi_{\{x\in X\,:\,|f(x)|>\alpha\}}(x), \\
f_2(x) &= f(x)\chi_{\{x\in X\,:\,|f(x)|\leq\alpha\}}(x),
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

veríamos que $f_i \in L^{p_i}(X)$ para $i \in \{1,2\}$. De fato, combinando (2.1) (pág. 27) com a Proposição 2.5 (pág. 30) e repetindo as ideias da prova da Proposição 3.12, teríamos

$$
\begin{aligned}
\|f_1\|_{p_1}^{p_1} = p_1 \int_0^\infty t^{p_1-1} d_{f_1}(t)\,dt &= p_1 \left(\int_0^\alpha t^{p_1-1} d_f(\alpha)\,dt + \int_\alpha^\infty t^{p_1-1} d_f(t)\,dt\right) \\
&\leq \alpha^{p_1} d_f(\alpha) + p_1 \int_\alpha^\infty t^{p_1-1}(\|f\|_{p,\infty}^p t^{-p})\,dt \\
&\leq \alpha^{p_1-p}\|f\|_{p,\infty}^p + p_1 \cdot \|f\|_{p,\infty}^p \int_\alpha^\infty t^{p_1-p-1}\,dt \\
&= \alpha^{p_1-p}\|f\|_{p,\infty}^p + \alpha^{p_1-p}\|f\|_{p,\infty}^p \left(\frac{p_1}{p_1-p}\right) \\
&= \left(\frac{p}{p-p_1}\right) \alpha^{p_1-p}\,\|f\|_{p,\infty}^p\,,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\|f_2\|_{p_2}^{p_2} = p_2 \int_0^\infty t^{p_2-1} d_{f_2}(t)\, dt &= p_2 \left(\int_0^\alpha t^{p_2-1} \left[d_f(t) - d_f(\alpha)\right] dt + \int_\alpha^\infty t^{p_2-1} \cdot 0\, dt \right) \\
&\leq -\alpha^{p_2} d_f(\alpha) + p_2 \int_0^\alpha t^{p_2-1} (\|f\|_{p,\infty}^p t^{-p})\, dt \\
&\leq \alpha^{p_2-p} \|f\|_{p,\infty}^p + p_2 \cdot \|f\|_{p,\infty}^p \int_0^\alpha t^{p_2-p-1}\, dt \\
&= \alpha^{p_2-p} \|f\|_{p,\infty}^p + \alpha^{p_2-p} \|f\|_{p,\infty}^p \left(\frac{p_2}{p_2-p} \right) \\
&= \left(\frac{2p_2-p}{p_2-p} \right) \alpha^{p_2-p} \|f\|_{p,\infty}^p .
\end{aligned}$$

A principal vantagem da construção de (3.7) é que as funções f_1 e f_2 dependem de um parâmetro α qualquer, que não necessariamente está na imagem de f^*.

Proposição 3.14. Sejam $0 < p, q < \infty$ e $f \in L^{p,q}(X)$. Então

$$\lim_{r \to \infty} \|f\|_{p,r} = \|f\|_{p,\infty}.$$

O leitor já deve ter notado alguma semelhança desse resultado com aquele visto na Observação 1.16 (pág. 23). Antes de prosseguirmos para a demonstração, precisaremos do seguinte resultado:

Lema 3.15. Sejam $(\mathbb{R}_{>0}, \mathcal{J}, \nu)$, tal que qualquer intervalo $I = (a,b)$, com $0 < a < b$, pertence a $\mathcal{J}$ e $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^+$ uma função mensurável, contínua pela direita, com $\sup_{t>0} g(t) < \infty$. Se $\nu(I) > 0$ para cada I, então $\sup_{t>0} g(t) = \|g\|_\infty$.

Demonstração. Note que $\sup_{t>0} g(t) \geq \|g\|_\infty$ sempre ocorre (relembre da definição de supremo essencial). Portanto, para verificar a afirmação, precisamos apenas mostrar que $\sup_{t>0} g(t) \leq \|g\|_\infty$. Suponha por contradição que essa desigualdade não é válida. Então, existe $\eta > 0$ suficientemente pequeno tal que $\sup_{t>0} g(t) > \eta + \|g\|_\infty$. Por outro lado, pela definição de supremo, existe $s_0 > 0$ tal que $g(s_0) + \eta/2 > \sup_{t>0} g(t)$. Deste modo, obtemos

$$g(s_0) > \eta/2 + \|g\|_\infty . \tag{3.8}$$

Pela continuidade à direita de g, existe um $\delta > 0$ tal que se $s \in (s_0, s_0 + \delta)$, então $g(s_0) < g(s) + \eta/2$. Disso e de (3.8), obtemos $g(s) > \|g\|_\infty$ para qualquer $s \in (s_0, s_0 + \delta)$ (que tem medida positiva, por hipótese). Absurdo. $\square$

Demonstração da Proposição 3.14. Seja $f \in L^{p,q}(X)$. Devido a inclusão de $L^{p,q}(X)$ em $L^{p,\infty}(X)$ vista no Teorema 3.10, afirmamos que a função $g : \mathbb{R}_{>0} \to [0, \infty)$ definida por $g(t) = f^*(t) t^{1/p}$ é mensurável e pertence ao $L^r(\mathbb{R}_{>0}, \lambda)$ (veja o Exemplo 1.15, pág. 23) para qualquer $q \leq r \leq \infty$. A mensurabilidade de g é imediata. Além disso, se $r < \infty$, temos

$$\|f\|_{p,r} = \|g\|_{L^r(\mathbb{R}_{>0}, \lambda)} \tag{3.9}$$

(veja (1.8), Exemplo 1.15, pág. 23), enquanto a igualdade

$$\|f\|_{p,\infty} = \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}_{>0},\lambda)} \tag{3.10}$$

decorre do Lema 3.15, já que g é contínua pela direita, para quaisquer $0 < a < b$

$$\lambda((a,b)) = \log(b) - \log(a) > 0 \qquad e \qquad \sup_{t>0} g(t) = \|f\|_{p,\infty} < \infty.$$

Finalmente, usando (3.9), (3.10) e a Observação 1.16 (pág. 23), concluímos que

$$\lim_{r\to\infty} \|f\|_{p,r} = \lim_{r\to\infty} \|g\|_{L^r(\mathbb{R}_{>0},\lambda)} = \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}_{>0},\lambda)} = \|f\|_{p,\infty}.$$

□

Até agora mostramos algumas propriedades interessantes da função $\|\cdot\|_{p,q}$. Entretanto, em nenhum momento provamos se ele define uma norma ou não. O próximo exemplo será útil para pensarmos nessa questão.

Exemplo 3.16. Sejam $0 < p, q < \infty$ e considere as funções f, g definidas no Exemplo 2.17 (pág. 35). Assim, fixado $t \in \mathbb{R}_{>0}$, temos $f^*(t) = g^*(t) = (1-t)\chi_{[0,1)}(t)$. Portanto[4]

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}_+,m)} + \|g\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}_+,m)} &= 2\left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}(1-t)\chi_{[0,1]}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\ &= 2\left(\int_0^1 t^{q/p-1}(1-t)^{q+1-1}\,dt\right)^{1/q} = 2\left(\frac{\Gamma(q/p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(q/p+q+1)}\right)^{1/q},\end{aligned}$$

sendo que a última igualdade válida pelo Teorema 3 (Apêndice A.2, pág. 88). Por outro lado, em vista do Exemplo 3.3, obtemos

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}_+,m)} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}(f+g)^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\ &= \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}(\chi_{[0,1]})^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} = \left(\frac{p}{q}\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Consequentemente, se vale a desigualdade triangular para estas funções, devemos ter

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{1/q} = \|f+g\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}_+,m)} \le \|f\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}_+,m)} + \|g\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}_+,m)} = 2\left(\frac{\Gamma(q/p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(q/p+q+1)}\right)^{1/q},$$

ou seja

$$\frac{1}{2^q} \le \frac{q}{p}\frac{\Gamma(q/p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(q/p+q+1)} = \frac{\Gamma(q/p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(q/p+q+1)},$$

o que nem sempre ocorre (tome $p \in \mathbb{N}$ e $q = kp$, com k natural suficientemente grande).

Assim, a função $\|\cdot\|_{p,q}$ não define necessariamente uma norma. Mostraremos na próxima seção que a desigualdade triangular vale a menos de um fator constante maior ou igual a 1, de sorte que $\|\cdot\|_{p,q}$ é uma quase-norma em $L^{p,q}(X)$. O leitor que ainda não é familiarizado com o conceito de quase-norma e de espaços quase-normados pode consultar o Apêndice A.3 (pág. 89).

[4] $\Gamma(\alpha)$ é a função Gama no ponto α (veja o Apêndice A.2, pág. 88).

3.2 Propriedades topológicas

Teorema 3.17. Dados $0 < p < \infty$ e $0 < q \leq \infty$, o espaço $(L^{p,q}(X), \|\cdot\|_{p,q})$ é um espaço quase-normado.

Demonstração. É claro que $\|\cdot\|_{p,q}$ é uma função não negativa para qualquer $0 < p < \infty$ e $0 < q \leq \infty$. Para o que se segue, fixe $f, g \in L^{p,q}(X)$ e $c \in \mathbb{R}$.

Caso 1. $q = \infty$. Como $\sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) = 0$ se, e somente se, $f^*(t) = 0$ para qualquer t positivo, segue da Proposição 2.12 (pág. 33) que $\|f\|_{p,\infty} = 0$ se, e só se, $f = 0$ em quase todo ponto. Ademais, pelo item (a) da Proposição 2.18 (pág. 35)

$$\|cf\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{1/p}(cf)^*(t) = \sup_{t>0} t^{1/p}|c|f^*(t) = |c| \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) = |c| \, \|f\|_{p,\infty} .$$

Finalmente, usando novamente a Proposição 2.18 (b), concluímos que

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{1/p}(f+g)^*(t) &\leq \sup_{t>0} t^{1/p} \left(f^*(t/2) + g^*(t/2)\right) \\
&= \sup_{u>0} (2u)^{1/p} \left(f^*(u) + g^*(u)\right) \\
&\leq 2^{1/p} \left(\sup_{u>0} u^{1/p} f^*(u) + \sup_{u>0} u^{1/p} g^*(u) \right) \\
&= 2^{1/p} (\|f\|_{p,\infty} + \|g\|_{p,\infty}).
\end{aligned}$$

Caso 2. $q < \infty$. Se $\|f\|_{p,q} = 0$, então $\|f\|_{p,\infty} = 0$ (cf. Teorema 3.10) e pelo caso anterior $(q = \infty)$ temos $f = 0$ *q.t.p.* A igualdade $\|cf\|_{p,q} = |c| \, \|f\|_{p,q}$ também é imediata. Ademais

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{p,q} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}(f+g)^*(t)\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
&\leq \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}(f^*(t/2) + g^*(t/2))\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
&= \left(\int_0^\infty \left[t^{1/p}\delta_{1/2}(f^*)(t) + t^{1/p}\delta_{1/2}(g^*)(t)\right]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},
\end{aligned}$$

em que $\delta_{1/2}$ é a dilatação[5] pelo fator $1/2$. Consequentemente, usando a Observação 1.20 (pág. 25) para $L^q(\mathbb{R}_{>0}, \lambda)$, concluímos que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^\infty \left[t^{1/p}\delta_{1/2}(f^*)(t) + t^{1/p}\delta_{1/2}(g^*)(t)\right]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
&\quad \leq 2^{1+1/q} \left[\left(\int_0^\infty \left[t^{1/p}\delta_{1/2}(f^*)(t)\right]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} + \left(\int_0^\infty \left[t^{1/p}\delta_{1/2}(g^*)(t)\right]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right]. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

[5] Para cada $h : \mathbb{R}_{>0} \to [0, \infty]$ e $t \in \mathbb{R}_{>0}$, temos

$$\delta_{1/2}(h)(t) = h(t/2).$$

Como $\mathbb{R}_{>0}$ é fechado por dilatações positivas, vemos que $\delta_r(\cdot)$ está bem definida para cada r positivo.

Finalmente, usando a definição de $\delta_{1/2}(\cdot)$ e fazendo a mudança de variável $t/2 = s$, obtemos

$$\|f+g\|_{p,q} \leq 2^{1+1/p+1/q}\left(\|f\|_{p,q} + \|g\|_{p,q}\right). \tag{3.12}$$

$\square$

Lema 3.18. Sejam $0 < p < \infty$, $0 < q \leq r \leq \infty$. Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy em $L^{p,q}(X)$, então $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy em $L^{p,r}(X)$. Ademais, se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy em $L^{p,\infty}(X)$, então $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Demonstração. A primeira parte é imediata pelo Teorema 3.10. Para a segunda, fixe α positivo. Dado $0 < \varepsilon < \alpha$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para quaisquer $m, n > n_0$

$$\sup_{s>0} d_{(f_m - f_n)}(s)^{1/p} s = \|f_m - f_n\|_{p,\infty} < \varepsilon^{1+1/p}.$$

Em particular, temos $d_{(f_m-f_n)}(\varepsilon)^{1/p}\varepsilon < \varepsilon^{1+1/p}$ e a convergência em medida segue dessa desigualdade notando que a função distribuição é não crescente:

$$d_{(f_m-f_n)}(\alpha) < d_{(f_m-f_n)}(\varepsilon) < \varepsilon.$$

$\square$

Corolário 3.19. Sejam $0 < p < \infty$ e $0 < q \leq \infty$. Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy em $L^{p,q}(X)$, então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge *q.t.p.* para uma função mensurável f.

Demonstração. Basta combinar o Lema 3.18 com a Proposição 1.5 (pág. 19). $\square$

Teorema 3.20. Para quaisquer $0 < p < \infty$ e $0 < q \leq \infty$, os espaços $L^{p,q}(X)$ são completos em relação à sua quase-norma e, portanto, são espaços Quase-Banach.

Demonstração. Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy em $L^{p,q}(X)$. Pelo Corolário 3.19, existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge *q.t.p.* para uma função mensurável f. Em particular, para qualquer M natural fixado, temos $\lim_{k\to\infty} |f_{n_k} - f_{n_M}| = |f - f_{n_M}|$ para quase todo ponto, seguindo do Corolário 2.11 (b) (pág. 32)

$$(f - f_{n_M})^*(t) \leq \liminf_{k\to\infty} (f_{n_k} - f_{n_M})^*(t). \tag{3.13}$$

Caso 1. $q = \infty$. Multiplicando ambos os lados de (3.13) por $t^{1/p}$ e tomando o supremo sobre todo t positivo, obtemos[6]

$$\begin{aligned}
\|f - f_{n_M}\|_{p,\infty} &\leq \sup_{t>0}\left(\liminf_{k\to\infty} t^{1/p}(f_{n_k} - f_{n_M})^*(t)\right) \\
&\leq \liminf_{k\to\infty}\left(\sup_{t>0} t^{1/p}(f_{n_k} - f_{n_M})^*(t)\right) = \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f_{n_M}\|_{p,\infty}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

[6] Como a estimativa $t^{1/p}(f_{n_k} - f_{n_M})^*(t) \leq \sup_{t>0} t^{1/p}(f_{n_k} - f_{n_M})^*(t)$ vale para cada k natural e t positivo, temos $\inf_{k\geq j} t^{1/p}(f_{n_k} - f_{n_M})^*(t) \leq \inf_{k\geq j}\left(\sup_{t>0} t^{1/p}(f_{n_k} - f_{n_M})^*(t)\right)$. Portanto

$$\lim_{j\to\infty}\inf_{k\geq j} t^{1/p}(f_{n_k} - f_{n_M})^*(t) \leq \lim_{j\to\infty}\inf_{k\geq j}\sup_{t>0} t^{1/p}(f_{n_k} - f_{n_M})^*(t)$$

e a desigualdade anterior é preservada se tomarmos o supremo sobre t positivo em ambos os lados.

Por fim, fazendo $M \to \infty$ em (3.14) e usando o fato da sequência ser Cauchy em $L^{p,\infty}(X)$

$$\lim_{M\to\infty} \|f - f_{n_M}\|_{p,\infty} \leq \lim_{M\to\infty} \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f_{n_M}\|_{p,\infty} = 0.$$

Caso 2. $q < \infty$. Elevando ambos os lados de (3.13) à potência q, multiplicando por $t^{q/p-1}$ e integrando em $[0,\infty)$ com respeito à medida de Lebesgue, obtemos

$$\|f - f_{n_M}\|_{p,q}^q \leq \int_0^\infty \left(t^{1/p} \liminf_{k\to\infty} (f_{n_k} - f_{n_M})^*(t)\right)^q \frac{dt}{t} \leq \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f_{n_M}\|_{p,q}^q,$$

sendo a última desigualdade válida pelo Lema de Fatou (cf. Lema 1.12, pág. 22). Por fim

$$\lim_{M\to\infty} \|f - f_{n_M}\|_{p,q}^q \leq \lim_{M\to\infty} \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f_{n_M}\|_{p,q}^q = 0.$$

Portanto, em qualquer um dos casos anteriores, $\lim_{M\to\infty} \|f - f_{n_M}\|_{p,q} = 0$. Em particular, tomando M_1 grande o suficiente tal que $\left\|f - f_{n_{M_1}}\right\|_{p,q} \leq 1$, concluímos que $f \in L^{p,q}(X)$. De fato, sendo $\|\cdot\|_{p,q}$ uma quase-norma

$$\|f\|_{p,q} \leq C(p,q) \left(\left\|f - f_{n_{M_1}}\right\|_{p,q} + \left\|f_{n_{M_1}}\right\|_{p,q}\right) \leq C(p,q) \left(1 + \left\|f_{n_{M_1}}\right\|_{p,q}\right) < \infty.$$

A conclusão segue notando que, de modo geral, se uma sequência de Cauchy tem uma subsequência convergente em um espaço quase-normado, então a sequência é convergente para o mesmo limite. □

Definição 3.21. A classe das combinações lineares finitas de funções características de conjuntos com medida finita será representada por $S(X)$. Em outros termos

$$S(X) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{k=1}^N c_k \chi_{E_k} \,:\, N \in \mathbb{N},\, c_k \in \mathbb{R} \text{ e } \mu(E_k) < \infty \text{ para todo } k \in \{1, 2, \ldots, N\} \right\}.$$

Denotaremos $S(X)$ como o conjunto das **funções simples finitas**. Também definiremos

$$S_0^+(X) \overset{\text{def}}{=} \Bigg\{ f : X \to \mathbb{R} \,:\, \exists\, i, j \in \mathbb{Z},\, i \leq j,\, E_k \subseteq X \;\; e \;\; \mu(E_k) < \infty$$

$$\text{para } k \in \{i, i+1, \ldots, j\},\;\; de\ modo\ que\ f = \sum_{k=i}^j 2^{-k} \chi_{E_k} \Bigg\}$$

e $S_0(X) \overset{\text{def}}{=} \left\{ g : X \to \mathbb{R} \,:\, \exists\, f_1, f_2 \in S_0^+(X) \;\; tais\ que\ g = f_1 - f_2 \right\}$.

Observação 3.22. É importante notar que se $f, g \in S_0(X)$, então $f + g \in S_0(X)$. Além disso, $S_0(X)$ é fechado por truncamento de funções (veja a Definição 1.2, pág. 18). Porém, o fato de $f \in S_0(X)$ não garante que $cf \in S_0(X)$ para um número real c qualquer.

Teorema 3.23. Suponha que $0 < p, q < \infty$. Então $S_0(X)$ é denso em $L^{p,q}(X)$.

Demonstração. Sejam $0 < p, q < \infty$ e $f \in L^{p,q}(X)$. Suponha primeiro que f é não negativa. Devido ao Teorema 3.10 temos $f \in L^{p,\infty}(X)$. Portanto, vale que

$$\begin{aligned} d_f(\alpha) &\le [\|f\|_{[p,\infty]}/\alpha]^p < \infty, \\ f^*(t) &\le \|f\|_{p,\infty} t^{-1/p} < \infty, \end{aligned}$$

para cada $\alpha, t > 0$ (veja a Observação 3.6). Daí, deduzimos que o conjunto

$$A_t = \{\alpha > 0 \,:\, d_f(\alpha) \le t\}$$

é não vazio. Assim, fixado $n \in \mathbb{N}$, existe $b_n \in A_{2^{-n}}$. Em particular, podemos tomar $k_n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $2^{k_n} \in A_{2^{-n}}$ (pois, sendo d_f não crescente, vale $d_f(2^{k_n}) \le d_f(b_n) \le 2^{-n}$). Escrevendo de outra forma, temos

$$\mu\left(\left\{x \in X \,:\, f(x) > 2^{k_n}\right\}\right) \le 2^{-n}. \tag{3.15}$$

Defina o conjunto $E_n = \left\{x \in X \,:\, 2^{-n} < f(x) \le 2^{k_n}\right\}$. Segue por definição que $\mu(E_n) \le d_f(2^{-n}) < \infty$. Dada a função $f\chi_{E_n}$, considere g_n uma de suas representações[7] na base 2, isto é, $g_n(x) = \sum_{j=-k_n}^{\infty} d_j(x)2^{-j}$, em que $d_j \in \{0, 1\}$. Agora, para cada $j \ge -k_n$, defina $B_j = \{x \in E_n \,:\, d_j(x) = 1\}$. Claramente $\mu(B_j) \le \mu(E_n)$ e $g_n = \sum_{j=-k_n}^{\infty} \chi_{B_j} 2^{-j}$. Construa

$$f_n(x) = \sum_{j=-k_n}^{n} 2^{-j}\chi_{B_j}(x). \tag{3.16}$$

Por construção, $f_n \in S_0^+(X)$ e $f_n \le g_n = f\chi_{E_n} \le f$. Se $x \in E_n$, então $g_n(x) = f(x)$ e assim

$$|f(x) - f_n(x)| = \sum_{j=n+1}^{\infty} \chi_{B_j} 2^{-j} \le \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-n}.$$

Caso contrário, isto é, se $x \notin E_n$ ($f(x) \le 2^{-n}$ ou $f(x) > 2^{k_n}$) temos $f_n(x) = 0$. Em particular, $f_n \le f$ e assim $f_n^*(t) \le f^*(t)$. Ademais

$$d_{f-f_n}(2^{-n}) = \mu(\underbrace{\left\{x \in E_n \,:\, |f(x) - f_n(x)| > 2^{-n}\right\}}_{\varnothing}) + \mu(\left\{x \in E_n^c \,:\, |f(x) - f_n(x)| > 2^{-n}\right\})$$

---

[7] Dizemos que um número real não negativo r está escrito na base b, com b natural maior que 1, se existem $N \in \mathbb{N}$ e $d_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ tais que $r = \sum_{k=-N}^{\infty} d_k b^{-k}$. Em nosso argumento, estamos usando o fato de que qualquer número real r não negativo admite uma representação na base 2. Para ver isso, considere n_0 o maior inteiro satisfazendo $n_0 \le r$. Por indução, escolha para cada $k \in \mathbb{N}$ o maior número $d_k \in \{0, 1\}$ satisfazendo $n_0 + \sum_{i=1}^{k} d_i 2^{-i} \le r$. Como existe $\beta \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 = \sum_{i=-\beta}^{0} d_i 2^{-i}$ (qualquer inteiro não negativo pode ser escrito como uma soma de potências de 2), obtemos

$$r = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i=-\beta}^{k} d_i 2^{-i}.$$

Em geral, não temos unicidade na representação, afinal $2^0 = 1 = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}$. Escrevendo $f\chi_{E_n}$ em base 2, a maior potência não nula de 2 que aparecerá é k_n, em razão de $f(x)\chi_{E_n}(x) \le 2^{k_n}$ para todo $x \in X$.

e pelas observações anteriores, bem como de (3.15), obtemos $d_{f-f_n}(2^{-n}) \leq 2^{-n}$. Portanto, dado $2^{-n} \leq t < \infty$, temos $2^{-n} \in \{s > 0 \,:\, d_{f-f_n}(s) \leq t\}$ e

$$(f - f_n)^*(t) \leq (f - f_n)^*(2^{-n}) = \inf\left\{s > 0 \,:\, d_{f-f_n}(s) \leq 2^{-n}\right\} \leq 2^{-n}.$$

Mas isso implica que $(f - f_n)^*(t) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Finalmente, usando a Proposição 2.18 (b) (pág. 35), obtemos $(f - f_n)^*(t) \leq f^*(t/2) + f_n^*(t/2) \leq 2f^*(t/2)$ e nossa tese para funções não negativas segue do Teorema da Convergência Dominada (cf. Teorema 1.13, pág. 22)

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{p,q} = \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} \lim_{n\to\infty} (f - f_n)^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} = 0.$$

Em geral, dada $f \in L^{p,q}(X)$, faça a decomposição $f = f^+ - f^-$ (vista no Capítulo 1). Construa sequências $\{f_{(n,1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{f_{(n,2)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $S_0^+(X)$ que aproximam f^+ e f^-, respectivamente. Defina a sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in S_0(X)$ por $f_n = f_{(n,1)} - f_{(n,2)}$. Logo

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{p,q} \leq \lim_{n\to\infty} C(p,q)\left(\left\|f^+ - f_{(n,1)}\right\|_{p,q} + \left\|f^- - f_{(n,2)}\right\|_{p,q}\right) = 0.$$

□

Corolário 3.24. Se $0 < p, q < \infty$, então $S(X)$ é denso em $L^{p,q}(X)$.

Demonstração. Basta usar o resultado anterior, notando que $S_0(X) \subseteq S(X)$. □

3.3 Condições para normabilidade

No Teorema 9 do Apêndice A.3 provamos que todo espaço $(X, \|\cdot\|)$ quase-normado admite uma métrica, a qual é proveniente de uma potência de uma quase-norma α-subaditiva equivalente a $\|\cdot\|$. Como já conhecemos algumas propriedades da função distribuição e do rearranjo não crescente, podemos nos perguntar se podemos fazer algo melhor para os espaços de Lorentz. Nesta seção estaremos interessados em dar condições suficientes para a existência de uma norma que seja equivalente à quase-norma $\|\cdot\|_{p,q}$.

Lema 3.25. Seja E um subconjunto de X com $\mu(E) < \infty$. Suponha que $f \in L^{p,\infty}(X)$ para algum $0 < p < \infty$. Então, para cada $0 < q < p$, temos

$$\int_E |f|^q \, d\mu \leq \left(\frac{p}{p-q}\right) \mu(E)^{1-q/p} \|f\|_{p,\infty}^q \tag{3.17}$$

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos assumir que $\mu(E) > 0$ (já que se $\mu(E) = 0$, como $1 - q/p > 0$, o resultado é trivial) e $\|f\|_{p,\infty} > 0$ (já que o resultado é óbvio se $\|f\|_{p,\infty} = 0$, pois como $\|\cdot\|_{p,\infty}$ é quase-norma teríamos $f = 0$ *q.t.p.*). Primeiramente, como $\sup_{\alpha>0} \alpha d_{\chi_E f}(\alpha)^{1/p} = \|\chi_E f\|_{p,\infty} \leq \|f\|_{p,\infty}$, temos para qualquer $\alpha > 0$

$$d_{\chi_E f}(\alpha) \leq \min\left\{\mu(E), \alpha^{-p} \|f\|_{p,\infty}^p\right\}.$$

Portanto, definindo $\delta = \mu(E)^{-1/p} \|f\|_{p,\infty} > 0$ e usando a igualdade vista em (2.1) (pág. 27)

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|^q \, d\mu(x) &= q \int_0^\infty \alpha^{q-1} d_{\chi_E f}(\alpha) \, d\alpha \\ &\leq q \int_0^\delta \alpha^{q-1} \mu(E) \, d\alpha + q \int_\delta^\infty \alpha^{q-1} \left(\alpha^{-p} \|f\|_{p,\infty}^p \right) \, d\alpha \\ &= \mu(E)^{1-q/p} \|f\|_{p,\infty}^q + \|f\|_{p,\infty}^p \left(\frac{q}{p-q} \right) \mu(E)^{1-q/p} \|f\|_{p,\infty}^{q-p} \\ &= \left(\frac{p}{p-q} \right) \mu(E)^{1-q/p} \|f\|_{p,\infty}^q .\end{aligned}$$

□

Teorema 3.26 (Normabilidade de $L^{p,\infty}(X)$). Considere $1 < p < \infty$. A função $\|\cdot\|_{(p,\infty)} : L^{p,\infty}(X) \to [0, \infty]$ definida por

$$\|f\|_{(p,\infty)} \stackrel{def}{=} \sup_{0<\mu(E)<\infty} \mu(E)^{1/p-1} \int_E |f| \, d\mu$$

é uma norma em $L^{p,\infty}(X)$ que é equivalente à quase-norma $\|\cdot\|_{p,\infty}$, isto é, para cada $f \in L^{p,\infty}(X)$ temos que

$$\|f\|_{p,\infty} \leq \|f\|_{(p,\infty)} \leq \left(\frac{p}{p-1} \right) \|f\|_{p,\infty} . \tag{3.18}$$

Demonstração. Antes de verificar que $\|\cdot\|_{(p,\infty)}$ é uma norma, vamos provar as desigualdades dadas em (3.18). Para $\alpha > 0$, definimos $A_\alpha = \{x \in X : |f(x)| > \alpha\}$. Como $f \in L^{p,\infty}(X)$, temos $\mu(A_\alpha) = d_f(\alpha) < \infty$. Se $d_f(\alpha) = 0$, então $d_f(\alpha)^{1/p}\alpha \leq \|f\|_{(p,\infty)}$. Se $d_f(\alpha) > 0$, então $\mu(A_\alpha) > 0$, de sorte que

$$\|f\|_{(p,\infty)} \geq \mu(A_\alpha)^{1/p-1} \int_{A_\alpha} |f| \, d\mu \geq \mu(A_\alpha)^{1/p-1} \mu(A_\alpha)\alpha = \alpha d_f(\alpha)^{1/p}$$

e a primeira desigualdade segue tomando o supremo sobre todo α positivo. Para a segunda, invocamos o Lema 3.25 (com $q = 1$) e obtemos para qualquer conjunto E com $0 < \mu(E) < \infty$

$$\mu(E)^{1/p-1} \int_E |f| \, d\mu \leq \left(\frac{p}{p-1} \right) \|f\|_{p,\infty} .$$

Verificaremos agora que $\|f\|_{(p,\infty)}$ é uma norma. Se $\|f\|_{(p,\infty)} = 0$ temos por (3.18) que $f = 0$ *q.t.p.* (pois $\|\cdot\|_{p,\infty}$ é quase-norma). Além disso, a propriedade $\|cf\|_{(p,\infty)} = |c| \, \|f\|_{(p,\infty)}$ é óbvia para qualquer $c \in \mathbb{R}$. Por fim, dado $\varepsilon > 0$, existe um conjunto E_ε, com $0 < \mu(E_\varepsilon) < \infty$, tal que

$$\|f + g\|_{(p,\infty)} < \varepsilon + \mu(E_\varepsilon)^{1/p-1} \int_{E_\varepsilon} |f + g| \, d\mu$$

e pela Desigualdade de Minkowski (Teorema 1.19, pág. 24)

$$\begin{aligned}\|f + g\|_{(p,\infty)} &< \varepsilon + \mu(E_\varepsilon)^{1/p-1} \int_{E_\varepsilon} |f + g| \, d\mu \\ &\leq \varepsilon + \mu(E_\varepsilon)^{1/p-1} \int_{E_\varepsilon} |f| \, d\mu + \mu(E_\varepsilon)^{1/p-1} \int_{E_\varepsilon} |g| \, d\mu \leq \varepsilon + \|f\|_{(p,\infty)} + \|g\|_{(p,\infty)} .\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, o resultado está demonstrado. $\square$

Vimos no teorema anterior uma condição suficiente para a normabilidade dos espaços $L^{p,\infty}(X)$. Naturalmente, podemos nos perguntar quais condições são suficientes para garantir que os espaços $L^{p,q}(X)$, com $q < \infty$, são normáveis. Para responder essa questão, precisaremos de diversos outros resultados.

Lema 3.27. Dado $E \in \mathcal{M}$ e $f \in \mathcal{M}(X)$, temos

$$\int_E |f|\, d\mu \leq \int_0^{\mu(E)} f^*(t)\, dt.$$

Demonstração. Primeiramente, usando a equação (2.11) (veja pág. 38) temos

$$\int_E |f|\, d\mu = \int_X |f\chi_E|\, d\mu = \int_0^\infty (f\chi_E)^*(t)\, dt.$$

Em consequência de $|f\chi_E| \leq |f|$, vale $(f\chi_E)^* \leq f^*$. Além disso, como $d_{(f\chi_E)}(\alpha) \leq \mu(E)$ para qualquer α positivo, obtemos $(f\chi_E)^*(t) = 0$ se $t > \mu(E)$. Combinando esses resultados

$$\int_E |f|\, d\mu = \int_0^\infty (f\chi_E)^*(t)\, dt = \int_0^{\mu(E)} (f\chi_E)^*(t)\, dt \leq \int_0^{\mu(E)} f^*(t)\, dt.$$

$\square$

Lema 3.28. Considere $f : \mathbb{R}_+ \to [0,\infty]$ uma função não crescente. Então, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+$, com $0 < x \leq y$, vale

$$\frac{1}{y}\int_0^y f(s)\, ds \leq \frac{1}{x}\int_0^x f(s)\, ds.$$

Demonstração. Sendo f monótona não crescente e não negativa, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y}\int_0^y f(s)\, ds &= \frac{1}{y}\left(\int_0^x f(s)\, ds + \int_x^y f(s)\, ds\right) \\
&\leq \frac{1}{x}\left(\frac{x}{y}\int_0^x f(s)\, ds + \frac{1}{y}(y-x)xf(x)\right) \\
&\leq \frac{1}{x}\left(\frac{x}{y}\int_0^x f(s)\, ds + \frac{(y-x)}{y}\int_0^x f(s)\, ds\right) = \frac{1}{x}\int_0^x f(s)\, ds.
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 3.29. Dada $f \in \mathcal{M}(X)$, temos para qualquer t positivo

$$\sup_{t \leq \mu(E) < \infty} \frac{1}{\mu(E)}\int_E f^*(s)\, ds = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\, ds$$

Demonstração. Fixe $t \in \mathbb{R}_{>0}$ e considere $E \subseteq \mathbb{R}_+$, com $t \leq \mu(E) < \infty$. Segue do Lema 3.27, do Corolário 2.15 (veja pág. 34) e do Lema 3.28 que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f^*(s)\, ds \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_0^{\mu(E)} (f^*)^*(s)\, ds = \frac{1}{\mu(E)} \int_0^{\mu(E)} f^*(s)\, ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)\, ds. \tag{3.19}$$

Agora, defina $A = [0, t]$. Por construção, temos $A \subseteq \mathbb{R}_+$ e $t \leq \mu(A) < \infty$. Consequentemente, tomando o supremo sobre os conjuntos E em (3.19), obtemos

$$\frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)\, ds = \frac{1}{\mu(A)} \int_A f^*(s)\, ds \leq \sup_{t \leq \mu(E) < \infty} \frac{1}{\mu(E)} \int_E f^*(s)\, ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)\, ds.$$

□

Teorema 3.30 (Normabilidade de $L^{p,q}(X)$). Sejam $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$. Dada $f \in L^{p,q}(X)$, considere $f^{**} : \mathbb{R}_{>0} \to [0, \infty]$ definida por

$$f^{**}(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \displaystyle\sup_{t \leq \mu(E) < \infty} \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f|\, d\mu, & \text{se } t < \mu(X); \\ \displaystyle\frac{1}{t} \int_X |f|\, d\mu, & \text{se } t \geq \mu(X). \end{cases} \tag{3.20}$$

Então $\|\cdot\|_{(p,q)} : L^{p,q}(X) \to [0, \infty]$ dada por

$$\|f\|_{(p,q)} \overset{\text{def}}{=} \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \tag{3.21}$$

é uma norma em $L^{p,q}(X)$ que satisfaz

$$\|f\|_{p,q} \leq \|f\|_{(p,q)} \leq \left(\frac{p}{p-1} \right) \|f\|_{p,q}. \tag{3.22}$$

Demonstração. Seja $f \in L^{p,q}(X)$. Usando o Teorema 3.10 vemos que $d_f(\alpha) < \infty$ para qualquer α positivo, afinal $f \in L^{p,\infty}(X)$. Dado $t > 0$, vamos provar que

$$f^*(t) \leq f^{**}(t) \leq (f^*)^{**}(t). \tag{3.23}$$

Caso 1. $t > \mu(X)$. Pelo Exemplo 2.13 (pág. 33), temos $f^*(t) = 0$ e assim a primeira desigualdade de (3.23) é imediata. Para estabelecer a segunda, combinamos o Lema 3.27 com o Lema 3.29:[8]

$$\begin{aligned} f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_X |f|\, d\mu \leq \frac{1}{t} \int_0^{\mu(X)} f^*(s)\, ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)\, ds& \\ = \sup_{t \leq \mu(E) < \infty} \frac{1}{\mu(E)} \int_E f^*(s)\, ds = (f^*)^{**}(t).& \end{aligned} \tag{3.24}$$

[8] Vale ressaltar que a última igualdade de (3.24) é válida pela definição de $(f^*)^{**}$, já que f^* está naturalmente definida em um conjunto de medida infinita.

Caso 2. $t \leq \mu(X)$. Novamente a primeira desigualdade é imediata caso $f^*(t) = 0$. Assumindo que $f^*(t) > 0$, construímos $E_t = \{x \in X : |f(x)| \geq f^*(t)\}$. Por construção, temos

$$\mu(E_t) \leq d_f(f^*(t)/2) < \infty.$$

Por outro lado, definindo $a_n \overset{\text{def}}{=} f^*(t) - [f^*(t)/(2n)]$ para cada n natural, obtemos

$$E_t = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : |f(x)| > a_n\},$$

seguindo da continuidade por cima de μ que $\mu(E_t) = \lim_{n\to\infty} d_f(a_n)$. Consequentemente, devemos ter $\mu(E_t) \geq t$, sob pena de existir algum $N \in \mathbb{N}$ que satisfaz a estimativa $d_f(a_N) < t$, contradizendo a definição de $f^*(t)$:

$$f^*(t) = \inf\{s > 0 : d_f(s) \leq t\} \leq a_N < f^*(t).$$

Portanto, usando o fato de $t \leq \mu(E_t) < \infty$ concluímos a primeira desigualdade de (3.23):

$$f^{**}(t) \geq \frac{1}{\mu(E_t)} \int_{E_t} |f|\, d\mu \geq \frac{1}{\mu(E_t)} \mu(E_t) f^*(t) = f^*(t).$$

A segunda desigualdade de (3.23) é uma mera consequência dos Lemas 3.27 e 3.29, afinal

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E |f|\, d\mu \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_0^{\mu(E)} f^*(s)\, ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)\, ds = (f^*)^{**}(t).$$

Agora que o resultado de (3.23) foi provado, usaremos tais estimativas para estabelecer (3.22). A primeira desigualdade de (3.22) é imediata, pois basta combinar (3.21) e (3.23). Para a segunda, invocamos o Lema 3.29

$$\begin{aligned} \|f\|_{(p,q)} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} (f^*)^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} = \left(\int_0^\infty t^{-(q-q/p)-1} \left(\int_0^t f^*(s)\, ds \right)^q dt \right)^{1/q} \end{aligned} \tag{3.25}$$

e aplicamos a primeira desigualdade de Hardy (Corolário 18, pág 95) em (3.25)

$$\|f\|_{(p,q)} \leq \left(\frac{q}{q - q/p} \right) \left(\int_0^\infty t^{q-(q-q/p)-1} [f^*(t)]^q \, dt \right)^{1/q} = \left(\frac{p}{p-1} \right) \|f\|_{p,q}.$$

Resta ainda verificar que $\|\cdot\|_{(p,q)}$ satisfaz todas as condições de uma norma. Se $\|f\|_{(p,q)} = 0$, então (3.22) garante que $f = 0$ em quase todo ponto. Dado $c \in \mathbb{R}$, a igualdade $\|cf\|_{(p,q)} = |c|\, \|f\|_{(p,q)}$ segue da definição. Verificaremos agora a desigualdade triangular. Fixado t positivo, obtemos para cada $\varepsilon > 0$ um conjunto E_ε, com $t \leq \mu(E_\varepsilon) < \infty$, tal que

$$\begin{aligned} (f+g)^{**}(t) &< \varepsilon + \frac{1}{\mu(E_\varepsilon)} \int_{E_\varepsilon} |f+g|\, d\mu \\ &\leq \varepsilon + \frac{1}{\mu(E_\varepsilon)} \int_{E_\varepsilon} |f|\, d\mu + \frac{1}{\mu(E_\varepsilon)} \int_{E_\varepsilon} |g|\, d\mu \leq \varepsilon + f^{**}(t) + g^{**}(t) \end{aligned}$$

Consequentemente, fazendo $\varepsilon \to 0^+$, temos $(f+g)^{**}(t) \le f^{**}(t) + g^{**}(t)$. Logo

$$\|f+g\|_{(p,q)} = \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}(f+g)^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \le \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}f^{**}(t) + t^{1/p}g^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}, \tag{3.26}$$

de sorte que a desigualdade triangular de $\|\cdot\|_{(p,q)}$ segue de (3.26) e da Desigualdade de Minkowski para $L^q(\mathbb{R}_{>0}, \lambda)$ (cf. Teorema 1.19, pág. 24):

$$\|f+g\|_{(p,q)} \le \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} + \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}g^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} = \|f\|_{(p,q)} + \|g\|_{(p,q)}.$$

□

Observação 3.31. Alguns autores definem $f^{**} : (0,\infty) \to [0,\infty]$ de uma forma diferente:

$$f^{**}(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\, ds, \tag{3.27}$$

ou seja, eles preferem usar somente f^* para definir f^{**}. O Lema 3.29 garante que (3.27) coincide com (3.20) se usarmos f^* no lugar de f. Entretanto, devemos nos lembrar que o rearranjo não crescente f^* está naturalmente definido em $\mathbb{R}_+$. Em geral, a construção de (3.27) pode ser feita se o espaço estiver munido de uma medida ressonante[9], aparecendo complicações na demonstração do Teorema 3.30 se esse não for o caso. Por isso optamos pela construção de (3.20), devido ao seu caráter menos restritivo.

Observação 3.32. Nesta seção exibimos condições suficientes para a normabilidade dos espaços de Lorentz. Vimos que $L^{p,q}(X)$ é normável se

- $p = q = 1$ e $p = q = \infty$ (pela Desigualdade de Minkowski - Teorema 1.19, pág. 24).
- $1 < p < \infty$ e $q = \infty$ (pela normabilidade de $L^{p,\infty}(X)$ - Teorema 3.26);
- $1 < p < \infty$ e $1 \le q < \infty$ (pela normabilidade de $L^{p,q}(X)$ - Teorema 3.30);

Na realidade, essas condições também são necessárias. Com efeito, os espaços $L^{p,q}(\mathbb{R}_{>0}, m)$ não admitem uma norma equivalente a $\|\cdot\|_{p,q}$ nas outras combinações de p e q. A prova da inexistência dessa norma equivalente pode ser encontrada nas páginas 260 e 261 da Seção 2 de [Hunt 1966].

[9] Dado $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, um conjunto $A \in \mathcal{M}$ é chamado de átomo se $\mu(A) > 0$ e se para cada $B \in \mathcal{M}$, com $B \subseteq A$ e $\mu(B) < \mu(A)$, temos $\mu(B) = 0$. Uma medida μ é dita não atômica se ela não possui átomos. O espaço $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é dito "ressonante" se μ for σ-finita e não atômica ou se X é uma união (no máximo enumerável) de átomos com igual medida.

4 Interpolação de operadores

Neste capítulo falaremos um pouco sobre interpolação de operadores nos espaços de Lorentz. Na primeira seção apresentaremos o conceito de operador quase-linear e definiremos os "tipos" de um operador. Na segunda, apresentaremos os resultados centrais desse trabalho: duas versões do Teorema da Interpolação de Marcinkiewicz. Na terceira seção faremos algumas aplicações da interpolação de Marcinkiewicz à teoria de integração fracionária. As referências para as duas primeiras seções são [Liang, Liu e Yang 2011] e o livro [Grafakos 2014] (Capítulo 1§4). Para a última seção usaremos como referências [Hardy e Littlewood 1928] (veja §4), [Stein e Weiss 1958] (veja §3) e as notas de aula [Carneiro 2015] (veja §3).

4.1 Operadores quase-lineares

Definição 4.1 (Operador quase-linear). Um operador $T : D \subseteq \mathcal{M}(X) \to \mathcal{N}(Y)$ é dito quase-linear se existe uma constante $K \geq 1$ para a qual valem as estimativas

$$|T(cf)(y)| = |c||T(f)(y)| \qquad \text{e} \qquad |T(f+g)(y)| \leq K(|T(f)(y)| + |T(g)(y)|) \tag{4.1}$$

para todo $y \in Y$, $c \in \mathbb{R}$ e para quaisquer $f, g \in D$. Se $K = 1$, diremos que T é **sub-linear**.

Até o final do presente capítulo, T representará um operador quase-linear, D será um subespaço linear de $\mathcal{M}(X)$ fechado por truncamento de funções (cf. Definição 1.2, pág. 18) que contém $S_0(X)$ e K será a constante do operador T como na definição acima.

Exemplo 4.2. Sejam $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ e $f : Y \to \mathbb{R}$ uma função em $\mathcal{N}(Y)$. Defina $T : S(X) \to \mathcal{N}(Y)$ por $T(\varphi)(y) = \|\varphi\|_{p,q} f(y)$. Como $\|\cdot\|_{p,q}$ é uma quase-norma (Teorema 3.17, pág. 47), existe uma constante $K \geq 1$ tal que para quaisquer $y \in Y$, $c \in \mathbb{R}$, $\varphi, \psi \in S(X)$ vale

$$\begin{aligned} |T(\varphi+\psi)(y)| = \|\varphi+\psi\|_{p,q} |f(y)| &\leq K \left(\|\varphi\|_{p,q} + \|\psi\|_{p,q} \right) |f(y)| \\ &= K \left(\|\varphi\|_{p,q} |f(y)| + \|\psi\|_{p,q} |f(y)| \right) = K \left(|T(\varphi)(y)| + |T(\psi)(y)| \right). \end{aligned}$$

Do mesmo modo $|T(c\varphi)(y)| = |c||T(\varphi)(y)|$, de sorte que T é um operador quase-linear.

Definição 4.3 (Operador limitado). Assuma que $0 < p, q < \infty$ e $0 < r, s \leq \infty$. Então $T : L^{p,r}(X) \to L^{q,s}(Y)$ é dito limitado se existe uma constante C tal que para qualquer função $f \in L^{p,r}(X)$ vale

$$\|T(f)\|_{q,s} \leq C \|f\|_{p,r}.$$

Definição 4.4 (Regularidade de um operador). Sejam $0 < p, q \leq \infty$. Diremos que T é de **tipo forte** (p, q) se existe uma constante C tal que

$$\|T(f)\|_q \leq C \|f\|_p$$

para toda $f \in D \cap L^p(X)$. De modo análogo, diremos que T é de **tipo fraco** (p, q) se existe uma constante C tal que, para qualquer $f \in D \cap L^p(X)$, vale

$$\|T(f)\|_{q,\infty} \leq C \|f\|_p .$$[1]

Por fim, T é dito de **tipo fraco restrito** (p, q) se existe uma constante C que satisfaz

$$\|T(\chi_A)\|_{q,\infty} \leq C \|\chi_A\|_p$$

para todo $A \subseteq X$ de medida finita. Quando $p < \infty$ a última desigualdade se traduz em

$$\|T(\chi_A)\|_{q,\infty} \leq C\mu(A)^{1/p}.$$

Na definição anterior diremos que a constante C é a constante do tipo do operador (*por exemplo, T é de tipo fraco (p, q) com constante C*). Pelo Teorema 3.10 (pág. 42) todo operador de tipo forte (p, q) é de tipo fraco (p, q). Evidentemente todo operador de tipo fraco (p, q) é de tipo fraco restrito (p, q). O contrário nem sempre é válido, pois:

- existe T de tipo fraco restrito (p, q) que não é de tipo fraco (p, q);
- existe T de tipo fraco (p, q) que não é de tipo forte (p, q).

A prova da afirmação acima pode ser encontrada no apêndice de [Stein e Weiss 1959]. Entretanto, podemos nos perguntar o que ocorre com o operador T se ele satisfaz estimativas do tipo fraco restrito em dois pontos distintos (p_0, q_0) e (p_1, q_1). Para pensarmos nesse problema, começaremos com o seguinte resultado:

Proposição 4.5. Sejam $0 < p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, com (p_0, q_0) distinto de (p_1, q_1). Suponha que T é de tipo fraco restrito (p_0, q_0) e (p_1, q_1) com constantes M_0 e M_1, respectivamente. Dado $0 < \varphi < 1$, defina

$$\frac{1}{p_2} = \frac{(1-\varphi)}{p_0} + \frac{\varphi}{p_1} \qquad e \qquad \frac{1}{q_2} = \frac{(1-\varphi)}{q_0} + \frac{\varphi}{q_1}.$$

Então T é de tipo fraco restrito (p_2, q_2) com constante $M_0^{1-\varphi} M_1^{\varphi}$.

Demonstração. Considere $A \subseteq X$ com medida finita e assuma sem perda de generalidade que $q_0 \leq q_1$. Vamos separar a prova em casos:

[1] Veja que T é do tipo fraco (p, ∞) se, e somente se, T é do tipo forte (p, ∞).

Caso 1. $q_0 < q_1 < \infty$. Usando a definição de $\|\cdot\|_{p,\infty}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|T(\chi_A)\|_{q_2,\infty} &= \sup_{t>0} t^{1/q_2} \left(T(\chi_A)\right)^* (t) \\
&= \sup_{t>0} \left(t^{1/q_0} \left(T(\chi_A)\right)^* (t)\right)^{(1-\varphi)} \left(t^{1/q_1} \left(T(\chi_A)\right)^* (t)\right)^{\varphi} \\
&\leq \sup_{t>0} \left(t^{1/q_0} \left(T(\chi_A)\right)^* (t)\right)^{(1-\varphi)} \sup_{s>0} \left(s^{1/q_1} \left(T(\chi_A)\right)^* (s)\right)^{\varphi} \\
&\leq \left(\sup_{t>0} t^{1/q_0} \left(T(\chi_A)\right)^* (t)\right)^{(1-\varphi)} \left(\sup_{s>0} s^{1/q_1} \left(T(\chi_A)\right)^* (s)\right)^{\varphi}. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Combinando (4.2) com o fato de T ser de tipo fraco restrito (p_i, q_i) para $i \in \{0,1\}$

$$\begin{aligned}
\|T(\chi_A)\|_{q_2,\infty} &\leq \|T(\chi_A)\|_{q_0,\infty}^{1-\varphi} \|T(\chi_A)\|_{q_1,\infty}^{\varphi} \\
&\leq M_0^{1-\varphi} \|\chi_A\|_{p_0}^{(1-\varphi)} M_1^{\varphi} \|\chi_A\|_{p_1}^{\varphi} \\
&= M_0^{1-\varphi} M_1^{\varphi} \|\chi_A\|_{p_2}.
\end{aligned}$$

Caso 2. $q_0 < q_1 = \infty$. Temos[2]

$$\begin{aligned}
\|T(\chi_A)\|_{q_2,\infty} &= \sup_{t>0} \left(t^{1/q_0} \left(T(\chi_A)\right)^* (t)\right)^{(1-\varphi)} \left(\left(T(\chi_A)\right)^* (t)\right)^{\varphi} \\
&\leq \left(\sup_{t>0} t^{1/q_0} \left(T(\chi_A)\right)^* (t)\right)^{(1-\varphi)} \left(\sup_{s>0} \left(T(\chi_A)\right)^* (s)\right)^{\varphi} \\
&= \|T(\chi_A)\|_{q_0,\infty}^{1-\varphi} \|T(\chi_A)\|_{\infty,\infty}^{\varphi} \leq M_0^{1-\varphi} M_1^{\varphi} \|\chi_A\|_{p_2}.
\end{aligned}$$

Caso 3. $q_0 = q_1 = \infty$. Aqui o resultado é imediato, pois

$$\|T(\chi_A)\|_{q_2,\infty} = \|T(\chi_A)\|_{\infty}^{1-\varphi} \|T(\chi_A)\|_{\infty}^{\varphi} \leq M_0^{1-\varphi} M_1^{\varphi} \|\chi_A\|_{p_2}.$$

□

Na realidade vale algo muito mais forte: $T|_{S_0(X)}$ é de tipo forte (p_2, q_2) (estamos usando a mesma notação da Proposição 4.5). Dedicaremos a próxima seção para provarmos este poderoso resultado e para entendermos os possíveis ganhos de regularidade de T quando ocorre uma combinação de certas propriedades de limitação mais fracas.

4.2 Interpolação de Marcinkiewicz

Lema 4.6. Sejam $0 < p, r, q, s < \infty$ e $0 < A, B < \infty$. Suponha que T é um operador quase-linear que satisfaz as estimativas[3]

$$\|T(f)\|_{q,s} \leq B \|f\|_{p,r} \qquad e \qquad \|T(f) - T(g)\|_{q,s} \leq A \|T(f-g)\|_{q,s} \qquad (4.3)$$

[2] Relembre que pela Proposição 2.12 $\sup_{t>0}(T(\chi_A))^*(t) = \|T(\chi_A)\|_\infty$.

[3] A segunda desigualdade da equação (4.3) expressa uma condição extra de "regularidade" que T deve ter. Qualquer operador linear ou sublinear não negativo satisfaz essa estimativa.

para quaisquer funções $f, g \in D$. Então T admite uma extensão $\tilde{T} : L^{p,r}(X) \to L^{q,s}(Y)$ para a qual vale

$$\|\tilde{T}(f)\|_{q,s} \leq 2^{2+1/p+1/q+1/r+1/s} B \|f\|_{p,r},$$

com f sendo qualquer função em $L^{p,r}(X)$.

Demonstração. Tome $f \in L^{p,r}(X)$. Como $0 < r < \infty$, segue do Teorema 3.23 (pág. 49) que existe uma sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S_0(X)$ que converge para f na quase-norma $\|\cdot\|_{p,r}$. Em particular, fixados $k, m \in \mathbb{N}$, temos por (4.3) e pelo Teorema 3.17

$$\begin{aligned}
\|T(f_k) - T(f_m)\|_{q,s} &\leq A \|T(f_k - f_m)\|_{q,s} \\
&\leq AB \|f_k - f_m\|_{p,r} \\
&\leq 2^{1/p+1/r+1} AB \left(\|f - f_k\|_{p,r} + \|f - f_m\|_{p,r} \right),
\end{aligned}$$

ou seja, $\{T(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência Cauchy em $L^{q,s}(Y)$. Pela completude dos espaços de Lorentz (veja o Teorema 3.20, pág. 48), existe $g \in L^{q,s}(Y)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|g - T(f_n)\|_{q,s} = 0. \tag{4.4}$$

Defina $\tilde{T}(f) = g$. Note que $\tilde{T}$ está bem definido, isto é, $\tilde{T}(f)$ não depende da escolha da sequência que aproxima a função f. De fato, se existe uma outra sequência $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S_0(X)$ que converge para f em $L^{p,r}(X)$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - \varphi_n\|_{p,r} \leq \lim_{n\to\infty} 2^{1/p+1/r+1} \left(\|f - f_n\|_{p,r} + \|f - \varphi_n\|_{p,r} \right) = 0. \tag{4.5}$$

Combinando a desigualdade quase-triangular de $\|\cdot\|_{q,s}$ (veja (3.12), pág. 48) com (4.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\|\tilde{T}(f) - T(\varphi_n)\|_{q,s} &\leq 2^{1/q+1/s+1} \left(\|\tilde{T}(f) - T(f_n)\|_{q,s} + \|T(f_n) - T(\varphi_n)\|_{q,s} \right) \\
&\leq 2^{1/q+1/s+1} \left(\|\tilde{T}(f) - T(f_n)\|_{q,s} + A \|T(f_n - \varphi_n)\|_{q,s} \right) \\
&\leq 2^{1/q+1/s+1} \left(\|\tilde{T}(f) - T(f_n)\|_{q,s} + AB \|f_n - \varphi_n\|_{p,r} \right).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Deste modo, segue de (4.4), (4.5) e (4.6) que $T(\varphi_n) \to \tilde{T}(f)$ em $L^{q,s}(Y)$, provando a boa definição do operador. Por fim, temos

$$\begin{aligned}
\|\tilde{T}(f)\|_{q,s} &\leq 2^{1/q+1/s+1} \left(\|\tilde{T}(f) - T(f_n)\|_{q,s} + \|T(f_n)\|_{q,s} \right) \\
&\leq 2^{1/q+1/s+1} \left(\|\tilde{T}(f) - T(f_n)\|_{q,s} + B \|f_n\|_{p,r} \right)
\end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned}
\|\tilde{T}(f)\|_{q,s} &\leq \lim_{n\to\infty} 2^{1/q+1/s+1} B \|f_n\|_{p,r} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} 2^{1/q+1/s+1} B 2^{1/p+1/r+1} \left(\|f - f_n\|_{p,r} + \|f\|_{p,r} \right) \\
&= 2^{2+1/p+1/q+1/r+1/s} B \|f\|_{p,r}.
\end{aligned}$$

□

Lema 4.7. Sejam $0 < p < \infty$ e $0 < q \leq \infty$. Suponha que T é um operador quase-linear definido em $S(X)$ e que T é de tipo fraco restrito (p, q) com constante M. Então, para todo α satisfazendo

$$0 < \alpha < \min \left\{ q, \frac{\log(2)}{\log(2K)} \right\},$$

existe uma constante $C(p, q, \alpha, K)$[4] positiva tal que

$$\|T(f)\|_{q,\infty} \leq C(p, q, \alpha, K) M \|f\|_{p,\alpha}, \tag{4.7}$$

para qualquer função $f \in S_0(X)$. Ademais, podemos escolher

$$C(p, q, \alpha, K) = 2^{1+2/\alpha+2/p+2/q} K^2 \left(\frac{q}{q-\alpha} \right)^{1/\alpha} \big((1 - 2^{-\alpha}) \log(2) \big)^{-1/\alpha}, \quad \text{para } q < \infty, \tag{4.8}$$

e $C(p, \infty, \alpha, K)$ como o valor limite da constante anterior quando fazemos $q \to \infty$.

Demonstração. Inicialmente vamos encontrar uma estimativa para $f \in S_0^+(X)$. Considere

$$f = \sum_{j=m}^{n} 2^{-j} \chi_{E_j}, \tag{4.9}$$

em que $m \leq n$ e E_j é subconjunto de X com medida finita para $j \in \{m, m+1, \ldots, n\}$.
Passo 1. Suponha que f é nula em quase todo ponto. Afirmamos que $\|T(f)\|_{q,\infty} = 0$ e, portanto, não precisamos demonstrar a estimativa em questão. Para provarmos esse fato, usaremos primeiro a quase-linearidade de T e o fato de $\|\cdot\|_{q,\infty}$ ser uma quase-norma:

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_{q,\infty} &= \left\| T \left(\sum_{j=m}^{n} 2^{-j} \chi_{E_j} \right) \right\|_{q,\infty} \\ &\leq \left\| K^{n-m} \sum_{j=m}^{n} \left| T(2^{-j} \chi_{E_j}) \right| \right\|_{q,\infty} \\ &= K^{n-m} \left\| \sum_{j=m}^{n} 2^{-j} \left| T(\chi_{E_j}) \right| \right\|_{q,\infty} \\ &\leq K^{n-m} \left(2^{1/q} \right)^{n-m} \sum_{j=m}^{n} 2^{-j} \left\| T(\chi_{E_j}) \right\|_{q,\infty}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Combinando (4.10) com a desigualdade do tipo fraco restrito (p, q) que T satisfaz, obtemos[5]

$$\|T(f)\|_{q,\infty} \leq K^{n-m} 2^{(n-m)/q} \sum_{j=m}^{n} 2^{-j} M \mu(E_j)^{1/p} = 0.$$

[4] Vale relembrar que a constante $K \geq 1$ presente na constante $C(p, q, \alpha, K)$ é proveniente da quase-linearidade de T; veja (4.1).

[5] Note que o fato de $f = 0$ *q.t.p.* implica que cada E_j tem medida nula.

Passo 2. Vamos agora concentrar nossos esforços no caso em que f não é nula *q.t.p.*, ou seja, existe um conjunto E_j de medida positiva na decomposição (4.9). Como f é em particular uma função simples, podemos escrever

$$f = \sum_{j=1}^{l} a_j \chi_{H_j},$$

com $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \cdots \subseteq H_l$, $0 < a_j < \infty$ e $0 < \mu(H_j) < \infty$ para $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Claramente

$$f^* = \sum_{j=1}^{l} a_j \chi_{[0,\mu(H_j))}$$

Sendo $f^*(t) = 0$, se $t > \mu(H_l)$, e $f^*(t) = \sum_{j=1}^{l} a_j$, se $t \in [0, \mu(H_1))$, existe $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^*(2^k) = 0$ quando $k > N$ e $f^*(2^k)$ é uma constante positiva quando $k < -N$. Deste modo, se definirmos para cada $k \in \mathbb{Z}$ o conjunto mensurável

$$A_k = \left\{x \in X \,:\, f^*(2^{k+1}) < |f(x)| \leq f^*(2^k)\right\},$$

temos $A_k = \varnothing$ se $|k| > N$. Assim, valem as seguintes igualdades em quase todo ponto:

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\chi_{A_k} = \sum_{|k| \leq N} f\chi_{A_k}. \tag{4.11}$$

Definindo

$$g = \sum_{|k| \leq N} \sum_{j=m}^{n} 2^{-j} \chi_{E_j \cap A_k}, \tag{4.12}$$

temos por (4.9) e (4.11) a igualdade $f = g$ válida em quase todo ponto. Além disso, pela construção de g temos $g \in S_0^+(X)$ e $f - g \in S_0^+(X)$. Portanto, usando o resultado visto no *Passo 1*

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_{q,\infty} &\leq \|K\left(|T(g)| + |T(f-g)|\right)\|_{q,\infty} \\ &\leq K2^{1/q}\left(\|T(g)\|_{q,\infty} + \|T(f-g)\|_{q,\infty}\right) \\ &= K2^{1/q}\left(\|T(g)\|_{q,\infty} + 0\right) = K2^{1/q}\,\|T(g)\|_{q,\infty}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Consequentemente, é suficiente provar

$$\|T(g)\|_{q,\infty} \leq C(p, q, \alpha, K) M \|f\|_{p,\alpha}$$

para verificar (4.7). Com o objetivo de demonstrar a última estimativa, construímos

$$W \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{\chi_{E_j \cap A_k} \,:\, m \leq j \leq n \;\; e \;\; |k| \leq N\right\}$$

e consideramos V o espaço vetorial gerado por W sobre $\mathbb{R}$. Sendo $T : S(X) \to \mathcal{N}(Y)$ um operador de tipo fraco restrito, dada $\chi_{E_j \cap A_k} \in W$, existe um subconjunto $C_{(j,k)}$ de Y, com medida nula, tal que $|T(\chi_{E_j \cap A_k})(y)| < \infty$ para todo $y \in Y \setminus C_{(j,k)}$. Fixe $y \in Y \setminus C$, em que

$$C \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{|k| \leq N} \bigcup_{j=m}^{n} C_{(j,k)}$$

é um conjunto de medida nula. Como a função $|T(\cdot)(y)| : V \to \mathbb{R}_+$ satisfaz todas as hipóteses do Teorema de Aoki-Rolewicz (veja o Teorema 8, pág. 90), vale

$$|T(\varphi_1 + \cdots + \varphi_i)(y)| \leq 4^{1/\alpha_1} \left(\sum_{k=1}^{i} |T(\varphi_k)(y)|^{\alpha_1} \right)^{1/\alpha_1}$$

para $\alpha_1 = \log(2)/\log(2K)$ e para quaisquer $\{\varphi_k\}_{k=1}^{i} \subseteq V$, com i natural. Se fixarmos $\alpha \in (0, \min\{\alpha_1, q\})$, obtemos da monotonicidade de $\ell^p(\mathbb{N})$ com respeito a p (veja o Exemplo 1.21, pág. 25) que

$$|T(\varphi_1 + \cdots + \varphi_i)(y)| \leq 4^{1/\alpha_1} \left(\sum_{k=1}^{i} |T(\varphi_k)(y)|^{\alpha_1} \right)^{1/\alpha_1} \leq 4^{1/\alpha} \left(\sum_{k=1}^{i} |T(\varphi_k)(y)|^{\alpha} \right)^{1/\alpha}. \tag{4.14}$$

Em particular, estando $2^{-j}\chi_{E_j \cap A_k}$ em V para quaisquer $m \leq j \leq n$ e $|k| \leq N$ (pela construção de V), temos por (4.12) e por (4.14)

$$|T(g)(y)| \leq 4^{1/\alpha} \left(\sum_{|k| \leq N} \sum_{j=m}^{n} \left| T(2^{-j}\chi_{E_j \cap A_k})(y) \right|^{\alpha} \right)^{1/\alpha}. \tag{4.15}$$

Como (4.15) vale para todo $y \in Y \setminus C$ (um conjunto de medida total em Y), obtemos

$$\|T(g)\|_{q,\infty} \leq \left\| 4^{1/\alpha} \left(\sum_{|k| \leq N} \sum_{j=m}^{n} \left| T(2^{-j}\chi_{E_j \cap A_k}) \right|^{\alpha} \right)^{1/\alpha} \right\|_{q,\infty}. \tag{4.16}$$

Afirmação: Dado $0 < q \leq \infty$, temos

$$\|T(g)\|_{q,\infty} \leq 4^{1/\alpha} C_0 \left(\sum_{|k| \leq N} \sum_{j=m}^{n} \left\| T(2^{-j}\chi_{E_j \cap A_k}) \right\|_{q,\infty}^{\alpha} \right)^{1/\alpha}, \tag{4.17}$$

com $C_0 = C_0(q, \alpha)$ sendo uma constante que depende somente de q e α.

Caso 1. $q = \infty$. Sendo $\|\cdot\|_{\infty,\infty}$ uma norma ($\|\cdot\|_{\infty,\infty} \overset{def}{=} \|\cdot\|_{\infty}$), segue de (4.16) que [6]

$$\begin{aligned}
\|T(g)\|_{\infty} &\leq \left\| 4^{1/\alpha} \left(\sum_{|k| \leq N} \sum_{j=m}^{n} \left| T(2^{-j}\chi_{E_j \cap A_k}) \right|^{\alpha} \right)^{1/\alpha} \right\|_{\infty} \\
&\leq 4^{1/\alpha} \left\| \sum_{|k| \leq N} \sum_{j=m}^{n} \left| T(2^{-j}\chi_{E_j \cap A_k}) \right|^{\alpha} \right\|_{\infty}^{1/\alpha} \\
&\leq 4^{1/\alpha} \left(\sum_{|k| \leq N} \sum_{j=m}^{n} \left\| \left| T(2^{-j}\chi_{E_j \cap A_k}) \right|^{\alpha} \right\|_{\infty} \right)^{1/\alpha} \\
&\leq 4^{1/\alpha} \left(\sum_{|k| \leq N} \sum_{j=m}^{n} \left\| T(2^{-j}\chi_{E_j \cap A_k}) \right\|_{\infty}^{\alpha} \right)^{1/\alpha}
\end{aligned}$$

[6] Dada $h \in L^\infty(Y)$ e $r > 0$, temos $|h(y)|^r \leq (\|h\|_\infty)^r$ em quase todo $y \in Y$ e assim $\||h|^r\|_\infty \leq (\|h\|_\infty)^r$.

e tomando $C_0 = 1$, o resultado está provado.

Caso 2. $q < \infty$. Como $1 < q/\alpha$, obtemos do Teorema 3.26 que existe uma norma $\|\cdot\|_{(q/\alpha,\infty)}$ para a qual valem as estimativas

$$\|\cdot\|_{q/\alpha,\infty} \le \|\cdot\|_{(q/\alpha,\infty)} \le \left(\frac{q}{q-\alpha}\right) \|\cdot\|_{q/\alpha,\infty}. \tag{4.18}$$

Consequentemente, usando a Observação 3.5 da pág. 40 em (4.16) (com $r = 1/\alpha$) e invocando as desigualdades de (4.18), temos

$$\begin{aligned}
\|T(g)\|_{q,\infty} &\le \left\| 4^{1/\alpha} \left(\sum_{|k|\le N} \sum_{j=m}^{n} \left|T(2^{-j}\chi_{E_j\cap A_k})\right|^{\alpha} \right)^{1/\alpha} \right\|_{q,\infty} \\
&= 4^{1/\alpha} \left\| \sum_{|k|\le N} \sum_{j=m}^{n} \left|T(2^{-j}\chi_{E_j\cap A_k})\right|^{\alpha} \right\|_{q/\alpha,\infty}^{1/\alpha} \\
&\le 4^{1/\alpha} \left(\left\| \sum_{|k|\le N} \sum_{j=m}^{n} \left|T(2^{-j}\chi_{E_j\cap A_k})\right|^{\alpha} \right\|_{(q/\alpha,\infty)} \right)^{1/\alpha} \\
&\le 4^{1/\alpha} \left(\sum_{|k|\le N} \sum_{j=m}^{n} \left\| \left|T(2^{-j}\chi_{E_j\cap A_k})\right|^{\alpha} \right\|_{(q/\alpha,\infty)} \right)^{1/\alpha} \\
&\le 4^{1/\alpha} \left(\sum_{|k|\le N} \sum_{j=m}^{n} \left(\frac{q}{q-\alpha}\right) \left\| \left|T(2^{-j}\chi_{E_j\cap A_k})\right|^{\alpha} \right\|_{q/\alpha,\infty} \right)^{1/\alpha} \\
&\le 4^{1/\alpha} \left(\frac{q}{q-\alpha}\right)^{1/\alpha} \left(\sum_{|k|\le N} \sum_{j=m}^{n} \left\| T(2^{-j}\chi_{E_j\cap A_k}) \right\|_{q,\infty}^{\alpha} \right)^{1/\alpha}.
\end{aligned}$$

A afirmação segue fazendo $C_0 = (q/(q-\alpha))^{1/\alpha}$.

Estando estabelecida (4.17), podemos combinar essa estimativa com o fato de T ser quase-linear e de tipo fraco-restrito (p, q) para obter

$$\begin{aligned}
\|T(g)\|_{q,\infty} &\le 4^{1/\alpha} C_0 \left(\sum_{|k|\le N} \sum_{j=m}^{n} 2^{-j\alpha} \left\| T(\chi_{E_j\cap A_k}) \right\|_{q,\infty}^{\alpha} \right)^{1/\alpha} \\
&\le 4^{1/\alpha} C_0 \left(\sum_{|k|\le N} \sum_{j=m}^{n} 2^{-j\alpha} M^{\alpha} \mu(E_j \cap A_k)^{\alpha/p} \right)^{1/\alpha} \\
&= 4^{1/\alpha} C_0 M \left(\sum_{k\in G} \sum_{j=m}^{n} 2^{-j\alpha} \mu(E_j \cap A_k)^{\alpha/p} \right)^{1/\alpha},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

em que

$$G \stackrel{def}{=} \{|k| \le N \,:\, \exists j \in \{m, \dots, n\} \ \ tal\ que\ \mu(E_j \cap A_k) > 0\}.$$

Se[7] $k \in G$, temos por (4.9) que $2^{-m} \leq \|f\chi_{A_k}\|_\infty$ e pela construção de A_k vale

$$2^{-m} \leq \|f\chi_{A_k}\|_\infty \leq f^*(2^k). \tag{4.20}$$

Ademais, pela Proposição 2.18 (d) (pág. 35), temos

$$\mu(A_k) \leq d_f(f^*(2^{k+1})) \leq 2^{k+1}. \tag{4.21}$$

Usando (4.20) e (4.21) em (4.19), obtemos

$$\begin{aligned}
\|T(g)\|_{q,\infty} &\leq 4^{1/\alpha} C_0 M \left(\sum_{k\in G} \sum_{j=m}^{n} 2^{-j\alpha} \mu(E_j \cap A_k)^{\alpha/p} \right)^{1/\alpha} \\
&\leq 4^{1/\alpha} C_0 M \left(\sum_{k\in G} 2^{-m\alpha} \sum_{j=0}^{n-m} 2^{-j\alpha} \mu(A_k)^{\alpha/p} \right)^{1/\alpha} \\
&\leq 4^{1/\alpha} C_0 M \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\alpha} \right)^{1/\alpha} \left(\sum_{k\in G} \left[f^*(2^k) 2^{(k+1)/p} \right]^\alpha \right)^{1/\alpha} \\
&= 4^{1/\alpha} C_0 M \left(1 - 2^{-\alpha}\right)^{-1/\alpha} 2^{1/p} \left(\sum_{k\in G} \left[f^*(2^k) 2^{k/p} \right]^\alpha \right)^{1/\alpha} \\
&\leq 4^{1/\alpha} C_0 M \left(1 - 2^{-\alpha}\right)^{-1/\alpha} 2^{1/p} \left(\sum_{k\in \mathbb{Z}} \left[f^*(2^k) 2^{k/p} \right]^\alpha \right)^{1/\alpha}. \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

Para dar uma cota superior a soma de (4.22), vamos usar a definição de $\|\cdot\|_{p,\alpha}$:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{p,\alpha}^\alpha = \int_0^\infty \left[f^*(t) t^{1/p} \right]^\alpha t^{-1}\, dt &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2^{k-1}}^{2^k} \left[f^*(t) t^{1/p} \right]^\alpha t^{-1}\, dt \\
&\geq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[f^*(2^k) 2^{(k-1)/p} \right]^\alpha \int_{2^{k-1}}^{2^k} t^{-1}\, dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[f^*(2^k) 2^{(k-1)/p} \right]^\alpha \log(2),
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[f^*(2^k) 2^{k/p} \right]^\alpha \right)^{1/\alpha} \leq 2^{1/p} (\log(2))^{-1/\alpha} \|f\|_{p,\alpha}. \tag{4.23}$$

Portanto, substituindo (4.23) em (4.22) e usando (4.13), temos

$$\|T(f)\|_{q,\infty} \leq C' M \|f\|_{p,\alpha}, \tag{4.24}$$

com[8] $C' \overset{\text{def}}{=} 2^{2/\alpha + 2/p + 1/q} K C_0 \left[(1 - 2^{-\alpha}) \log(2) \right]^{-1/\alpha}$.

Passaremos agora ao caso geral $f \in S_0(X)$. Escrevemos $f = h_1 - h_2$, com

$$h_1 = \sum_i 2^{-i} \chi_{A_i} \in S_0^+(X) \qquad \text{e} \qquad h_2 = \sum_j 2^{-j} \chi_{B_j} \in S_0^+(X).$$

[7] G é diferente do conjunto vazio já que estamos assumindo que f não é nula em quase todo ponto.

[8] Lembre que $C_0 = (q/(q-\alpha))^{1/\alpha}$ se $q < \infty$ e $C_0 = 1$ caso contrário.

Considere a decomposição $f_1 = \max\{f, 0\}$ e $f_2 = \max\{-f, 0\}$. Afirmamos que, nesse caso, temos $f_1, f_2 \in S_0^+(X)$. A título de exemplo, notaremos que

$$f_1 = \sum_{i\,:\,A_i \cap (\cup_j B_j = \varnothing)} 2^{-i}\chi_{A_i} + \sum_{(i,j)\,:\, i<j \text{ e } A_i \cap B_j \neq \varnothing} (2^{-i} - 2^{-j})\chi_{A_i \cap B_j} \in S_0^+(X).$$

Como a segunda soma da igualdade anterior é igual a $\sum_{l=i+1}^{j} 2^{-l}\chi_{A_i \cap B_j}$, concluímos que $f_1 \in S_0^+(X)$. Para explicitarmos as constantes, separaremos nossa análise em dois casos, mas estaremos sempre usando o fato de T ser quase-linear e de que

$$\|f_j\|_{p,\alpha} \leq \|f\|_{p,\alpha} \text{ para } j \in \{1, 2\}.$$

Caso 1. $q = \infty$. Se C' é a constante encontrada em (4.24), temos

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_\infty \leq K \left\| \sum_{j=1}^{2} |T(f_j)| \right\|_\infty &\leq K \sum_{j=1}^{2} \|T(f_j)\|_\infty \\ &\leq KC'M \left(\sum_{j=1}^{2} \|f_j\|_{p,\alpha} \right) \leq 2KC'M \|f\|_{p,\alpha} = CM \|f\|_{p,\alpha}, \end{aligned}$$

e a constante C procurada é igual a

$$C(p, q, \alpha, K) = 2^{1+2/\alpha+2/p} K^2 \left((1 - 2^{-\alpha}) \log(2) \right)^{-1/\alpha}.$$

Caso 2. $q < \infty$. Se C' é a constante vista em (4.24), temos

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_{q,\infty} \leq 2^{1/q} K \sum_{j=1}^{2} \|T(f_j)\|_{q,\infty} &\leq 2^{1/q} KC'M \left(\sum_{j=1}^{2} \|f_j\|_{p,\alpha} \right) \\ &\leq 2^{1/q+1} KC'M \|f\|_{p,\alpha} = CM \|f\|_{p,\alpha}, \end{aligned}$$

e a constante C procurada é igual a

$$C(p, q, \alpha, K) = 2^{1+2/\alpha+2/p+2/q} K^2 \left(\frac{q}{q-\alpha} \right)^{1/\alpha} \left((1 - 2^{-\alpha}) \log(2) \right)^{-1/\alpha}.$$

□

Observação 4.8. A prova do último lema é devida ao autor e é uma modificação sutil da demonstração apresentada em [Grafakos 2014] (Capítulo 1§4, Lema 1.4.20, pág. 62). Tais modificações evitam os problemas técnicos da demonstração original, como a desigualdade[9] presente na linha 23 da página 63 de [Grafakos 2014].

Teorema 4.9 (Interpolação de Marcinkiewicz - formulação em $L^{p,r}(X)$). Considere $0 < p_0 \neq p_1 \leq \infty$ e $0 < q_0 \neq q_1 \leq \infty$. Assuma que T é um operador quase-linear definido

[9] A desigualdade em questão é $2^{-m} \leq \|f\chi_A\|_\infty$. No contexto da prova original, essa estimativa só é verdadeira se supormos que $f\chi_A$ é não nula em quase todo ponto.

em $S(X)$ e que para $0 < M_0, M_1 < \infty$ as seguintes estimativas de tipo fraco-restrito são válidas para cada conjunto mensurável $A \subseteq X$ de medida finita:

$$\|T(\chi_A)\|_{q_0,\infty} \leq M_0 \|\chi_A\|_{p_0},$$
$$\|T(\chi_A)\|_{q_1,\infty} \leq M_1 \|\chi_A\|_{p_1}.$$

Fixado $0 < \theta < 1$, defina

$$\frac{1}{p} = \frac{(1-\theta)}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \qquad e \qquad \frac{1}{q} = \frac{(1-\theta)}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Então, dado $0 < r \leq \infty$, existe uma constante $C_* = C_*(p_0, p_1, q_0, q_1, K, r, \theta)$ tal que

$$\|T(f)\|_{q,r} \leq C_* M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{p,r}. \tag{4.25}$$

para toda função $f \in S_0(X)$. Adicionalmente, suponha que $0 < r < \infty$ e que a estimativa

$$\|T(f) - T(g)\|_{q,r} \leq A \|T(f-g)\|_{q,r}$$

vale para quaisquer funções $f, g \in S_0(X)$, com A sendo uma constante fixada. Então o operador T pode ser estendido a um operador $\tilde{T} : L^{p,r}(X) \to L^{q,r}(Y)$ limitado que satisfaz

$$\|\tilde{T}(f)\|_{q,r} \leq 2^{2+1/p+1/q+2/r} C_* M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{p,r}$$

para toda $f \in L^{p,r}(X)$.

Demonstração. Podemos assumir que $p_0 < p_1$, pois o caso $p_1 < p_0$ segue deste primeiro com uma simples mudança de índices. Fixe $f \in S_0(X)$.

Caso 1. $p_1, r < \infty$. Dado $t \in (0, \infty)$, faça a decomposição $f = f^t + f_t$ dada por

$$f^t(x) = f(x)\chi_{\{x \in X \,:\, |f(x)| > f^*(\delta t^\sigma)\}}(x),$$
$$f_t(x) = f(x)\chi_{\{x \in X \,:\, |f(x)| \leq f^*(\delta t^\sigma)\}}(x), \tag{4.26}$$

em que δ é um número real positivo a ser determinado e σ é o número real não nulo

$$\sigma \stackrel{def}{=} \frac{1/q_0 - 1/q}{1/p_0 - 1/p} = \frac{1/q - 1/q_1}{1/p - 1/p_1}, \tag{4.27}$$

isto é, σ é o coeficiente angular do segmento de reta que liga o ponto $(1/p_0, 1/q_0)$ ao ponto $(1/p_1, 1/q_1)$. Pela Proposição 2.19 (pág. 37), valem as seguintes desigualdades para cada s positivo

$$(f^t)^*(s) \leq \begin{cases} f^*(s), & se\ 0 < s < \delta t^\sigma, \\ 0, & se\ s \geq \delta t^\sigma; \end{cases} \tag{4.28}$$

$$(f_t)^*(s) \leq \begin{cases} f^*(\delta t^\sigma), & se\ 0 < s < \delta t^\sigma \\ f^*(s), & se\ s \geq \delta t^\sigma. \end{cases} \tag{4.29}$$

Usando a quase-linearidade do operador T e a Proposição 2.18 (b) (pág. 35), bem como a desigualdade (3.11) do Teorema 3.17 (pág. 47), obtemos[10]

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_{q,r} &= \left(\int_0^\infty (t^{1/q}|T(f^t+f_t)|^*(t))^r \frac{dt}{t}\right)^{1/r} \\
&\leq K\left(\int_0^\infty \left[t^{1/q}(|T(f^t)|+|T(f_t)|)^*(t)\right]^r \frac{dt}{t}\right)^{1/r} \\
&\leq K\left(\int_0^\infty \left[t^{1/q}(|T(f^t)|^*(t/2)+|T(f_t)|^*(t/2))\right]^r \frac{dt}{t}\right)^{1/r} \\
&\leq K2^{1+1/r}\left(\left[\int_0^\infty \left(t^{1/q}\left[T(f^t)\right]^*(t/2)\right)^r \frac{dt}{t}\right]^{1/r}\right. \\
&\qquad \left. + \left[\int_0^\infty \left(t^{1/q}[T(f_t)]^*(t/2)\right)^r \frac{dt}{t}\right]^{1/r}\right). \qquad (4.30)
\end{aligned}$$

Afirmação 1. Dado $i \in \{0,1\}$, vamos provar que existem M_i' e m reais positivos tais que[11] para qualquer $g \in S_0(X) \cap L^{p_i,m}(X)$ vale

$$t^{1/q}[T(g)]^*(t/2) \leq 2^{1/q_i} t^{1/q-1/q_i} M_i' \|g\|_{p_i,m}. \qquad (4.31)$$

A prova desse fato é simples. Como $0 < p_0 < p_1 < \infty$, podemos invocar o Lema 4.7. Deste modo, obtemos para qualquer $g \in S_0(X)$

$$\|T(g)\|_{q_i,\infty} \leq M_i' \|g\|_{p_i,m},$$

com $M_i' = C(p_i, q_i, K, m)M_i$, $C(p,q,K,m)$ sendo a constante explicitada em (4.8) e

$$m = \frac{1}{2}\min\left\{q_0, q_1, \frac{\log(2)}{\log(2K)}, 2r\right\}.$$

Disso, segue que para quaisquer $t > 0$ e $g \in S_0(X) \cap L^{p_i,m}(X)$

$$t^{1/q_i}[T(g)]^*(t/2) \leq 2^{1/q_i} \sup_{s>0} s^{1/q_i}[T(g)]^*(s) \leq 2^{1/q_i} M_i' \|g\|_{p_i,m}, \qquad (4.32)$$

e assim (4.31) está demonstrada, afinal

$$t^{1/q}[T(g)]^*(t/2) = t^{1/q-1/q_i} t^{1/q_i}[T(g)]^*(t/2) \leq 2^{1/q_i} t^{1/q-1/q_i} M_i' \|g\|_{p_i,m}.$$

---

[10] É bastante tentador usar o fato de $\|\cdot\|_{q,r}$ ser uma quase-norma para concluir que

$$2^{1+1/q+1/r}\left(\left[\int_0^\infty \left(\left[T(f^t)\right]^*(t)t^{1/q}\right)^r \frac{dt}{t}\right]^{1/r} + \left[\int_0^\infty \left([T(f_t)]^*(t)t^{1/q}\right)^r \frac{dt}{t}\right]^{1/r}\right)$$

é um majorante para a equação (4.30). Entretanto, essa conclusão não pode ser usada, pois tanto $|T(f^t)|$ quanto $|T(f_t)|$ dependem do parâmetro de integração t, o que não ocorre na desigualdade provada para a quase-norma.

[11] Aqui o mesmo m deve satisfazer (4.31) para $i = 0$ e $i = 1$.

Substituindo (4.31) em (4.30) e usando (4.27), concluímos que

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_{q,r} &\leq K2^{1+1/r}\left[2^{1/q_0}M_0'\left(\int_0^\infty \left(t^{1/q-1/q_0}\left\|f^t\right\|_{p_0,m}\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{1/r}\right.\\
&\qquad\left. + 2^{1/q_1}M_1'\left(\int_0^\infty \left(t^{1/q-1/q_1}\left\|f_t\right\|_{p_1,m}\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{1/r}\right]\\
&\leq K2^{1+1/r}\left[2^{1/q_0}M_0'\left(\int_0^\infty \left(t^{-\sigma(1/p_0-1/p)}\left\|f^t\right\|_{p_0,m}\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{1/r}\right.\\
&\qquad\left. + 2^{1/q_1}M_1'\left(\int_0^\infty \left(t^{\sigma(1/p-1/p_1)}\left\|f_t\right\|_{p_1,m}\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{1/r}\right].
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Agora iremos majorar as duas integrais que apareceram em (4.33). Para a primeira integral, começaremos usando a estimativa (4.28):

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^\infty \left[t^{-\sigma(1/p_0-1/p)}\left\|f^t\right\|_{p_0,m}\right]^r\frac{dt}{t}\right)^{1/r}\\
&\quad=\left(\int_0^\infty\left(t^{-\sigma(1/p_0-1/p)}\left[\int_0^\infty\left((f^t)^*(s)s^{1/p_0}\right)^m\frac{ds}{s}\right]^{1/m}\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{1/r}\\
&\quad\leq\left(\int_0^\infty\left(t^{-\sigma(1/p_0-1/p)}\left[\int_0^{\delta t^\sigma}\left(f^*(s)s^{1/p_0}\right)^m\frac{ds}{s}\right]^{1/m}\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{1/r}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Fazendo a mudança de variável $u=\delta t^\sigma$ (veja o Teorema 1 no Apêndice A.1), temos

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^\infty\left(t^{-\sigma(1/p_0-1/p)}\left[\int_0^{\delta t^\sigma}\left(f^*(s)s^{1/p_0}\right)^m\frac{ds}{s}\right]^{1/m}\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{1/r}\\
&\qquad\leq\frac{\delta^{(1/p_0-1/p)}}{|\sigma|^{1/r}}\left(\int_0^\infty u^{-r(1/p_0-1/p)-1}\left(\int_0^u\left[f^*(s)\right]^m s^{m/p_0-1}\,ds\right)^{r/m}du\right)^{1/r}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Neste momento, iremos aplicar a primeira desigualdade de Hardy[12] (Corolário 18, pág. 95) no lado direito de (4.35). Fazendo isso, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta^{(1/p_0-1/p)}}{|\sigma|^{1/r}}\left(\int_0^\infty u^{-r(1/p_0-1/p)-1}\left(\int_0^u\left[f^*(s)\right]^m s^{m/p_0-1}\,ds\right)^{r/m}du\right)^{1/r}\\
&\leq\frac{\delta^{(1/p_0-1/p)}}{|\sigma|^{1/r}}\left(\frac{r/m}{r(1/p_0-1/p)}\right)^{1/m}\left(\int_0^\infty x^{r/m-r(1/p_0-1/p)-1}\left[(f^*(x))^m x^{m/p_0-1}\right]^{r/m}dx\right)^{1/r}\\
&=\frac{\delta^{(1/p_0-1/p)}}{|\sigma|^{1/r}m^{1/m}(1/p_0-1/p)^{1/m}}\left(\int_0^\infty x^{r/p-1}\left[f^*(x)\right]^r\,dx\right)^{1/r}\\
&=\frac{\delta^{(1/p_0-1/p)}}{|\sigma|^{1/r}m^{1/m}(1/p_0-1/p)^{1/m}}\left\|f\right\|_{p,r}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

[12] Usando $r=r(1/p_0-1/p)$, $h(s)=\left[f^*(s)\right]^m s^{m/p_0-1}$ e $p=r/m$.

Usando (4.34), (4.35) e (4.36), conseguimos majorar a primeira integral de (4.33) por

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{-\sigma(1/p_0-1/p)} \left\|f^t\right\|_{p_0,m}\right)^r \frac{dt}{t}\right)^{1/r} \leq \frac{\delta^{(1/p_0-1/p)}}{|\sigma|^{1/r} m^{1/m}(1/p_0-1/p)^{1/m}} \|f\|_{p,r} \,. \tag{4.37}$$

Para analisar a segunda integral de (4.33), faremos a decomposição

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^\infty \left[t^{\sigma(1/p-1/p_1)} \|f_t\|_{p_1,m}\right]^r \frac{dt}{t}\right)^{1/r} \\
&\quad = \left(\int_0^\infty \left[t^{m\sigma(1/p-1/p_1)} \int_0^{\delta t^\sigma} \left[s^{1/p_1}(f_t)^*(s)\right]^m \frac{ds}{s}\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + t^{m\sigma(1/p-1/p_1)} \int_{\delta t^\sigma}^\infty \left[s^{1/p_1}(f_t)^*(s)\right]^m \frac{ds}{s}\right]^{r/m} \frac{dt}{t}\right)^{1/r}.
\end{aligned}$$

Segue de (4.29) e da mudança $u = \delta t^\sigma$, bem como da desigualdade triangular em $L^p(\mathbb{R}_{>0}, \lambda)$ (com $p = r/m \geq 1$), que o lado direito da última igualdade é majorado por

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|\sigma|^{1/r}\delta^{(1/p-1/p_1)}} \left(\int_0^\infty \left[u^{m(1/p-1/p_1)} \int_0^u \left[s^{1/p_1} f^*(u)\right]^m \frac{ds}{s}\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + u^{m(1/p-1/p_1)} \int_u^\infty \left[s^{1/p_1} f^*(s)\right]^m \frac{ds}{s}\right]^{r/m} \frac{du}{u}\right)^{1/r} \\
&\leq \frac{1}{|\sigma|^{1/r}\delta^{(1/p-1/p_1)}} \left(\left[\int_0^\infty u^{r(1/p-1/p_1)} \left(\int_0^u \left[s^{1/p_1} f^*(u)\right]^m \frac{ds}{s}\right)^{r/m} \frac{du}{u}\right]^{m/r}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left[\int_0^\infty u^{r(1/p-1/p_1)} \left(\int_u^\infty \left[s^{1/p_1} f^*(s)\right]^m \frac{ds}{s}\right)^{r/m} \frac{du}{u}\right]^{m/r}\right)^{1/m}.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Vamos dar cotas superiores para as duas integrais de (4.38). Por um lado, temos

$$\begin{aligned}
&\left[\int_0^\infty u^{r(1/p-1/p_1)} \left(\int_0^u \left[s^{1/p_1} f^*(u)\right]^m \frac{ds}{s}\right)^{r/m} \frac{du}{u}\right]^{m/r} \\
&\quad = \left[\int_0^\infty u^{r(1/p-1/p_1)-1} [f^*(u)]^r \left(\int_0^u s^{m/p_1-1}\, ds\right)^{r/m} du\right]^{m/r} \\
&\quad = \left[\int_0^\infty u^{r(1/p-1/p_1)-1} [f^*(u)]^r \left(\left(\frac{p_1}{m}\right) u^{m/p_1}\right)^{r/m} du\right]^{m/r} \\
&\quad = \left(\frac{p_1}{m}\right) \left[\int_0^\infty \left(u^{1/p} f^*(u)\right)^r \frac{du}{u}\right]^{m/r} = \left(\frac{p_1}{m}\right) \|f\|_{p,r}^m \,.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Por outro lado, é de fácil verificação que

$$\begin{aligned}
&\left[\int_0^\infty u^{r(1/p-1/p_1)} \left(\int_u^\infty \left[s^{1/p_1} f^*(s)\right]^m \frac{ds}{s}\right)^{r/m} \frac{du}{u}\right]^{m/r} \\
&\quad = \left[\int_0^\infty u^{r(1/p-1/p_1)-1} \left(\int_u^\infty [f^*(s)]^m s^{m/p_1-1}\, ds\right)^{r/m} du\right]^{m/r}.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Portanto, ao aplicarmos a segunda desigualdade de Hardy (Corolário 18, pág. 95) em (4.40)

$$\left[\int_0^\infty u^{r(1/p-1/p_1)-1}\left(\int_u^\infty [f^*(s)]^m\, s^{m/p_1-1}\, ds\right)^{r/m} du\right]^{m/r}$$
$$\leq \left(\frac{r/m}{r(1/p_0-1/p)}\right)\left(\int_0^\infty x^{r/m+r(1/p-1/p_1)-1}\left[(f^*(x))^m x^{m/p_1-1}\right]^{r/m}\, dx\right)^{m/r}$$
$$= \frac{1}{m(1/p-1/p_1)}\left(\int_0^\infty x^{r/p-1}\,[f^*(x)]^r\, dx\right)^{m/r} = \frac{1}{m(1/p-1/p_1)}\,\|f\|_{p,r}^m. \quad (4.41)$$

Substituindo (4.39) e (4.41) em (4.38), conseguimos majorar a segunda integral de (4.33):

$$\left(\int_0^\infty \left[t^{\sigma(1/p-1/p_1)}\,\|f_t\|_{p_1,m}\right]^r \frac{dt}{t}\right)^{1/r}$$
$$\leq \frac{1}{|\sigma|^{1/r}\delta^{(1/p-1/p_1)}}\left(\left(\frac{p_1}{m}\right)\|f\|_{p,r}^m + \frac{1}{m(1/p-1/p_1)}\,\|f\|_{p,r}^m\right)^{1/m}$$
$$= \frac{1}{|\sigma|^{1/r}m^{1/m}\delta^{(1/p-1/p_1)}}\left(\frac{p_1/p}{1/p-1/p_1}\right)^{1/m}\|f\|_{p,r}. \quad (4.42)$$

Combinando (4.33), (4.37) e (4.42), concluímos que

$$\|T(f)\|_{q,r} \leq \frac{K2^{1/r+1}}{m^{1/m}|\sigma|^{1/r}}\,\|f\|_{p,r}\left[2^{1/q_0}M_0'\frac{\delta^{1/p_0-1/p}}{(1/p_0-1/p)^{1/m}}\right.$$
$$\left. + 2^{1/q_1}M_1'\frac{1}{\delta^{(1/p-1/p_1)}}\left(\frac{p_1/p}{1/p-1/p_1}\right)^{1/m}\right]. \quad (4.43)$$

Agora vamos escolher δ positivo de modo que os termos entre os colchetes de (4.43) se tornem iguais. Para isso, é suficiente considerar

$$\delta = \left(\left[\frac{(p_1/p)}{(1/p-1/p_1)}\,(1/p_0-1/p)\right]^{1/m}\frac{2^{1/q_1}M_1'}{2^{1/q_0}M_0'}\right)^{1/(1/p_0-1/p_1)}. \quad (4.44)$$

Essa escolha "aparentemente mística" pode ser verificada substituindo (4.44) em (4.43), usando sempre a relação $\omega = \theta - 1$ para facilitar as contas, com

$$\omega \overset{\text{def}}{=} \frac{1/p_1-1/p}{1/p_0-1/p_1} \qquad e \qquad \theta = \frac{1/p_0-1/p}{1/p_0-1/p_1}.$$

Pela escolha feita em (4.44), vemos que os termos de (4.43) se tornam ambos iguais a

$$\left(2^{1/q_0}M_0'\right)^{1-\theta}\left(2^{1/q_1}M_1'\right)^{\theta}\left(\frac{p_1/p}{1/p-1/p_1}\right)^{\theta/m}\frac{1}{(1/p_0-1/p)^{(1-\theta)/m}}.$$

Consequentemente, o resultado segue ao considerarmos C_* igual a

$$C_*(p_0,p_1,q_0,q_1,K,r,\theta) = \frac{2^{2+1/r}K}{m^{1/m}|\sigma|^{1/r}}\left[\frac{2^{1/q}(p_1/p)^{\theta/m}C(p_0,q_0,K,m)^{1-\theta}C(p_1,q_1,K,m)^{\theta}}{(1/p-1/p_1)^{\theta/m}\,(1/p_0-1/p)^{(1-\theta)/m}}\right] \quad (4.45)$$

Caso 2. $p_1 < \infty$ e $r = \infty$. A ideia aqui é utilizar o caso anterior para remover a restrição $r < \infty$. Note que fazendo $r \to \infty$ em (4.45)

$$\lim_{r\to\infty} C_* = \frac{2^2 K}{m^{1/m}} \left[\frac{2^{1/q}(p_1/p)^{\theta/m} C(p_0, q_0, K, m)^{1-\theta} C(p_1, q_1, K, m)^{\theta}}{(1/p - 1/p_1)^{\theta/m} (1/p_0 - 1/p)^{(1-\theta)/m}} \right] < \infty.$$

Portanto, definimos

$$C_*(p_0, p_1, q_0, q_1, K, \infty, \theta) \stackrel{def}{=} \lim_{r\to\infty} C_*(p_0, p_1, q_0, q_1, K, r, \theta).$$

Como $0 < \theta < 1$, segue que $0 < p, q < \infty$. Logo, pela[13] Proposição 3.14 (pág. 45), temos

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_{q,\infty} &= \lim_{r\to\infty} \|T(f)\|_{q,r} \\
&\le \lim_{r\to\infty} C_*(p_0, p_1, q_0, q_1, K, r, \theta) M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{p,r} \\
&= C_*(p_0, p_1, q_0, q_1, K, \infty, \theta) M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{p,\infty}.
\end{aligned}$$

Caso 3. $p_1 = \infty$. Tome $p_2 > p$, com $p_2 < \infty$. Graças à Proposição 4.5, vemos que T é de tipo fraco restrito (p_2, q_2) com constante $M_0^{1-\varphi} M_1^{\varphi}$, em que φ é dada por

$$\frac{1}{p_2} = \frac{(1-\varphi)}{p_0} + \frac{\varphi}{p_1} \qquad e \qquad \frac{1}{q_2} = \frac{(1-\varphi)}{q_0} + \frac{\varphi}{q_1}. \tag{4.46}$$

Utilizando o resultado provado para $p_1 < \infty$, com p_2 no lugar de p_1, obtemos

$$\|T(f)\|_{q,r} \le C_*(p_0, p_2, q_0, q_2, K, r, \rho) M_0^{1-\rho} \left(M_0^{1-\varphi} M_1^{\varphi}\right)^{\rho} \|f\|_{p,r} \tag{4.47}$$

com C_* sendo a constante encontrada nos casos anteriores e

$$\frac{1}{p} = \frac{(1-\rho)}{p_0} + \frac{\rho}{p_2} \qquad e \qquad \frac{1}{q} = \frac{(1-\rho)}{q_0} + \frac{\rho}{q_2}. \tag{4.48}$$

Combinando (4.46) com (4.48) temos

$$\frac{\rho(1-\varphi)}{p_0} = \frac{\rho}{p_2} = \frac{1}{p} - \frac{(1-\rho)}{p_0},$$

que é o mesmo que

$$\frac{1-\rho\varphi}{p_0} = \frac{1}{p} = \frac{(1-\theta)}{p_0}.$$

Em outros termos, concluímos a igualdade $\theta = \rho\varphi$. Consequentemente, por (4.47)

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_{q,r} &\le C_*(p_0, p_2, q_0, q_2, K, r, \rho) M_0^{1-\varphi\rho} M_1^{\varphi\rho} \|f\|_{p,r} \\
&= C_*(p_0, p_2, q_0, q_2, K, r, \rho) M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{p,r}.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

[13] Podemos aplicar tal proposição pois, estando f em $S_0(X)$, vale $f \in L^{p,r}(X)$ para qualquer $0 < p, r \le \infty$.

Fixando φ qualquer real satisfazendo $1 - p_0/p < \varphi < 1$ (para garantir a condição $p < p_2 < \infty$ que foi utilizada em nossa construção) e

$$C_*(p_0, \infty, q_0, q_1, K, r, \theta) = C_*\left(p_0, \left(\frac{p_0}{1-\varphi}\right), q_0, \left(\frac{(1-\varphi)}{q_0} + \frac{\varphi}{q_1}\right)^{-1}, K, r, \frac{\theta}{\varphi}\right),$$

a desigualdade desejada segue por (4.49).

Passaremos agora ao resultado de extensão de T. Tendo em vista que o operador T satisfaz todas as hipóteses do Lema 4.6 (usando $s = r$), concluímos que a sua extensão $\tilde{T} : L^{p,r}(X) \to L^{q,r}(Y)$ dada pelo referido lema satisfaz

$$\|\tilde{T}(f)\|_{q,r} \leq 2^{2+1/p+1/q+2/r} C_* M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{p,r}\,.$$

para qualquer $f \in L^{p,r}(X)$. Consequentemente, $\tilde{T} : L^{p,r}(X) \to L^{q,r}(Y)$ é limitado. $\square$

Observação 4.10. Faça as mesmas hipóteses do Teorema 4.9. Se uma das estimativas de tipo fraco-restrito for satisfeita com constante igual a 0, i.e., se existe $i \in \{0, 1\}$ tal que

$$\|T(\chi_A)\|_{q_i,\infty} = 0 \tag{4.50}$$

para qualquer subconjunto de medida finita A de X, então $\|T(f)\|_{q,r} = 0$ para toda função $f \in S_0(X)$. Para ver isso, assuma sem perda de generalidade que (4.50) é válida para $i = 0$. Nesse caso, a estimativa do tipo fraco-restrito (p_0, q_0) é satisfeita com qualquer constante positiva ε. Aplicando o Teorema 4.9 usando ε no lugar de M_0, obtemos por (4.25) que

$$\|T(f)\|_{q,r} \leq C_*(\varepsilon)^{1-\theta}(M_1)^{\theta} \|f\|_{p,r}\,.$$

Como a constante C_* não depende de ε, obtemos que

$$\|T(f)\|_{q,r} = \lim_{\varepsilon\to 0} \|T(f)\|_{q,r} \leq \lim_{\varepsilon\to 0} C_*(\varepsilon)^{1-\theta}(M_1)^{\theta} \|f\|_{p,r} = 0.$$

Exemplo 4.11. Sejam $0 < p < q < \infty$, $0 < r < \infty$ e X contável. Usaremos o teorema anterior para provar que $\ell^{p,r}(X) \subseteq \ell^{q,r}(X)$ (reveja o Exemplo 3.7, pág. 41). Considere o operador inclusão $\iota : \ell^{p,r}(X) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$ e defina $T = \iota|_{S(X)}$. Claramente podemos encontrar $0 < p_0, p_1, q_0, q_1 < \infty$, com $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$, $p_i < q_i$ para $i \in \{0, 1\}$ e $0 < \theta < 1$ tais que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \qquad e \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Pelo Exemplo 1.21 (pág. 25), temos para qualquer subconjunto A de X de medida finita

$$\|T(\chi_A)\|_{q_i,\infty} = \|\chi_A\|_{q_i,\infty} \leq \|\chi_A\|_{q_i,q_i} = \|\chi_A\|_{q_i} \leq \|\chi_A\|_{p_i} \qquad i \in \{0, 1\}$$

(a primeira desigualdade acima segue pelo Teorema 3.10, pág. 42). Ou seja, T é de tipo fraco-restrito (p_0, q_0) e (p_1, q_1) com constantes $M_0 = M_1 = 1$. Pelo Teorema 4.9, existe uma constante $C_* = C_*(p_0, p_1, q_0, q_1, r, \theta)$ que satisfaz a estimativa

$$\|\varphi\|_{q,r} = \|T(\varphi)\|_{q,r} \leq C_* \|\varphi\|_{p,r}$$

para toda $\varphi \in S_0(X)$. Sendo T linear, a segunda parte do Teorema da Interpolação de Marcinkiewicz - versão $L^{p,r}$ implica que esse operador admite uma extensão $\tilde{T}$ para a qual

$$\|\tilde{T}(f)\|_{q,r} \leq \tilde{C}_* \|f\|_{p,r},$$

em que $\tilde{C}_* = 2^{2+1/p+1/q+2/r} C_*$ e f é uma função qualquer em $\ell^{p,r}(X)$. Finalmente, como é de fácil verificação que $\tilde{T}(f) = \iota(f)$, obtemos

$$\|f\|_{q,r} = \|\iota(f)\|_{q,r} = \|\tilde{T}(f)\|_{q,r} \leq \tilde{C}_* \|f\|_{p,r}.$$

Observação 4.12. O Teorema da Interpolação de Marcinkiewicz leva este nome em homenagem ao matemático Józef Marcinkiewicz (1910-1940), já que a versão inicial desse resultado nos espaços L^p apareceu em [Marcinkiewicz 1939]. Porém, antes de chegarmos na versão apresentada no Teorema 4.9 para espaços de Lorentz, houve uma contribuição significativa de outros matemáticos que trabalharam para enfraquecer hipóteses e generalizar esse teorema de interpolação. Dentre essas contribuições, podemos citar [Zygmund 1989], [Stein e Weiss 1959], [Grafakos 2014] e [Liang, Liu e Yang 2011].

Teorema 4.13 (Interpolação de Marcinkiewicz - formulação em $L^p(X)$). Considere $1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty$ para $i \in \{0,1\}$, com $q_0 \neq q_1$. Assuma que T é um operador quase-linear definido em $D = L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X)$ que satisfaz estimativas de tipo fraco (p_0, q_0) e (p_1, q_1) com constantes reais positivas M_0 e M_1, respectivamente. Fixado $0 < \theta < 1$, defina

$$\frac{1}{p} = \frac{(1-\theta)}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \qquad\qquad \frac{1}{q} = \frac{(1-\theta)}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Então existe uma constante $C = C(p_0, p_1, q_0, q_1, M_0, M_1, K, \theta)$ para a qual

$$\|T(f)\|_q \leq C \|f\|_p$$

vale para toda função $f \in L^p(X)$, ou seja, T é de tipo forte (p, q).

Demonstração. Devido a inclusão $L^p(X) \subseteq L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X)$ vista na Proposição 3.12 (pág. 43), T está bem definido em $L^p(X)$. Sem perda de generalidade, assumiremos $p_0 \leq p_1$.

Caso 1. $p_0 < p_1$. Defina $r = q$ e fixe $f \in L^p(X)$. A ideia aqui é repetir os passos realizados nos casos 1 e 3 da demonstração do Teorema 4.9, trocando evidentemente as aparições de $S_0(X)$ por $L^p(X)$. Primeiro fazemos a decomposição de (4.26). As funções f^t e f_t da decomposição de f estão, pela Proposição 3.12, em $L^{p_0,1}(X)$ e $L^{p_1,1}(X)$, respectivamente. Deste modo, podemos copiar linha por linha a demonstração do Teorema 4.9, havendo apenas uma exceção: a desigualdade (4.31) da *Afirmação 1.* Para verificarmos ela com nossas atuais hipóteses, vamos usar o fato de que T satisfaz para qualquer $i \in \{0,1\}$

$$\|T(g)\|_{q,\infty} \leq M_i \|g\|_{p_i},$$

em que $g \in L^{p_i}(X)$. Como $1 \leq p_0 < p_1$, o Teorema 3.10 (pág. 42), garante que

$$\|T(g)\|_{q_i,\infty} \leq \left(\frac{1}{p_i}\right) M_i \|g\|_{p_i,1}$$

para $i \in \{0,1\}$ e para toda $g \in L^{p_i,1}(X)$. Consequentemente, tomando os valores $m = 1$ e $M_i' = C(p_i, q_i, K, m) M_i$, com $C(p_i, q_i, K, m) = 1/p_i$, obtemos (4.31) copiando os passos a partir de (4.32). Finalizando a demostração, concluímos que

$$\|T(f)\|_q = \|T(f)\|_{q,q} \leq C_* M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{p,q},$$

com a constante para $p_1 < \infty$ sendo, pela adaptação de (4.45), igual a

$$C_*(p_0, p_1, q_0, q_1, K, \theta) = \frac{2^{2+2/q} K}{|\sigma|^{1/q}} \left[\frac{(p_1/p)^{\theta} (1/p_0)^{1-\theta} (1/p_1)^{\theta}}{(1/p - 1/p_1)^{\theta} (1/p_0 - 1/p)^{(1-\theta)}} \right]. \tag{4.51}$$

Finalmente, pelo Teorema 3.10 (pág. 42)

$$\|T(f)\|_q \leq C_* M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{p,q} \leq \left(\frac{p}{q}\right)^{1/q} C_* M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{p,p} = \left(\frac{p}{q}\right)^{1/q} C_* M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_p.$$

Podemos dar uma interpretação geométrica para o resultado do caso $p_0 < p_1$ com a Figura 1 abaixo[14]:

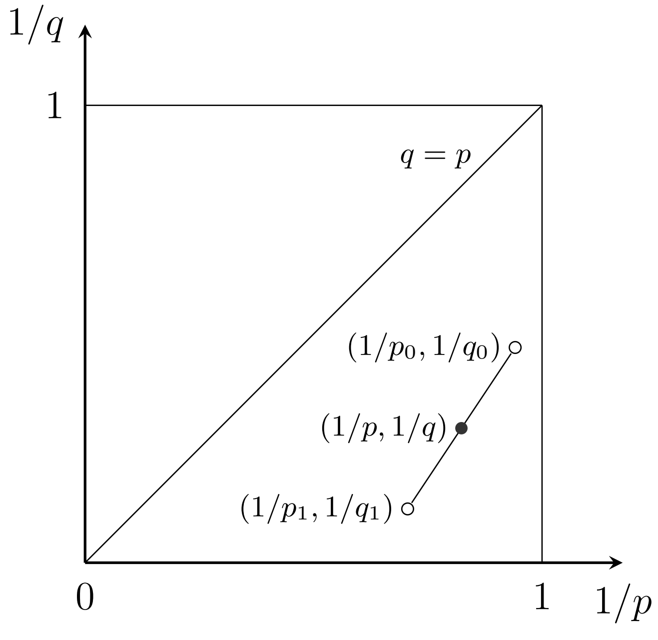

Figura 1 – Interpolação de Marcinkiewicz - caso $p_0 < p_1$.

Nesta figura, as bolinhas abertas representam $a_0 = (1/p_0, 1/q_0)$ e $b_0 = (1/p_1, 1/q_1)$ em que as estimativas de tipo fraco são válidas nos recíprocos. O caso que acabamos de

[14] Essa imagem é meramente ilustrativa, já que o coeficiente angular do segmento de reta que liga a_0 a b_0 pode ser tanto positivo (caso da imagem) quanto negativo.

demonstrar garante que qualquer ponto cujo recíproco está no segmento "aberto" de reta que liga a_0 e b_0 satisfaz a estimativa de tipo forte. Como $p_0 < p_1$, o segmento de reta nunca é paralelo ao eixo $1/q$ e sendo $p_i \leq q_i$ para $i \in \{0,1\}$, esse segmento deve estar sobre a diagonal $q = p$ do quadrado de Riesz ou abaixo dela.

Caso 2. $p_0 = p_1$. Fixe $f \in L^p(X)$. Como $p = p_0 = p_1$, podemos assumir sem perda de generalidade que $q_0 \leq q_1$. No que se segue, estaremos usando várias vezes de forma implícita a Proposição 2 (Apêndice A.1, pág. 87).

Se $q_1 = \infty$, as estimativas de tipo fraco de T implicam[15] que para qualquer $t > 0$

$$\begin{aligned} t^{1/q_0}[T(f)]^*(t) &\leq \sup_{s>0} s^{1/q_0}[T(f)]^*(s) = \|T(f)\|_{q_0,\infty} \leq M_0 \|f\|_p\,, \\ [T(f)]^*(t) &\leq \sup_{s>0}\, [T(f)]^*(s) = \|T(f)\|_\infty \leq M_1 \|f\|_p\,. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Como $q_0 < q$, segue de (4.52) que

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_q^q = \int_0^\infty ([T(f)]^*(t))^q\,dt &\leq \int_0^1 (M_1\|f\|_p)^q\,dt + \int_1^\infty (t^{-1/q_0}M_0\|f\|_p)^q\,dt \\ &= (M_1\|f\|_p)^q + (M_0\|f\|_p)^q \int_1^\infty t^{-q/q_0}\,dt \\ &= (M_1\|f\|_p)^q - (M_0\|f\|_p)^q\left(\frac{1}{-q/q_0+1}\right) \\ &= (M_1\|f\|_p)^q + (M_0\|f\|_p)^q\left(\frac{q_0}{q-q_0}\right) \\ &= \|f\|_p^q\left(M_0^q + \left(\frac{q_0}{q-q_0}\right)M_1^q\right). \end{aligned} \tag{4.53}$$

Extraindo a raiz q-ésima em (4.53) e usando o fato de $\ell^1(\mathbb{N}) \subseteq \ell^q(\mathbb{N})$ (veja o Exemplo 1.21)

$$\|T(f)\|_q \leq \|f\|_p\left(M_0^q + \left[\left(\frac{q_0}{q-q_0}\right)^{1/q}M_1\right]^q\right)^{1/q} \leq \|f\|_p\left(M_0 + \left(\frac{q_0}{q-q_0}\right)^{1/q}M_1\right).$$

Agora assuma que $q_1 < \infty$. As estimativas de tipo fraco que T satisfaz implicam que para todo t positivo e $i \in \{0,1\}$

$$t^{1/q_i}[T(f)]^*(t) \leq \sup_{s>0} s^{1/q_i}[T(f)]^*(s) = \|T(f)\|_{q_i,\infty} \leq M_i\|f\|_p\,.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_q^q = \int_0^\infty ([T(f)]^*(t))^q\,dt &\leq \int_0^1 (t^{-1/q_1}M_1\|f\|_p)^q\,dt + \int_1^\infty (t^{-1/q_0}M_0\|f\|_p)^q\,dt \\ &= (M_1\|f\|_p)^q\int_0^1 t^{-q/q_1}\,dt + (M_0\|f\|_p)^q\int_1^\infty t^{-q/q_0}\,dt \end{aligned}$$

[15] Relembre que, pela Proposição 2.12, $\sup_{t>0}(T(f))^*(t) = \|T(f)\|_\infty$.

e, como $q_0 < q < q_1$, temos

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_q^q &\leq (M_1 \|f\|_p)^q \left(\frac{1}{-q/q_1+1}\right) - (M_0 \|f\|_p)^q \left(\frac{1}{-q/q_0+1}\right) \\
&= (M_1 \|f\|_p)^q \left(\frac{q_1}{q_1-q}\right) + (M_0 \|f\|_p)^q \left(\frac{q_0}{q-q_0}\right) \\
&= \|f\|_p^q \left[\left(\frac{q_1}{q_1-q}\right) M_1^q + \left(\frac{q_0}{q-q_0}\right) M_0^q\right].
\end{aligned}$$

Assim, a inclusão $\ell^1(\mathbb{N}) \subseteq \ell^q(\mathbb{N})$ garante que

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_q &\leq \|f\|_p \left(\left[\left(\frac{q_0}{q-q_0}\right)^{1/q} M_0\right]^q + \left[\left(\frac{q_1}{q_1-q}\right)^{1/q} M_1\right]^q\right)^{1/q} \\
&\leq \|f\|_p \left[\left(\frac{q_0}{q-q_0}\right)^{1/q} M_0 + \left(\frac{q_1}{q_1-q}\right)^{1/q} M_1\right].
\end{aligned}$$

Pensaremos agora na interpretação geométrica do caso $p_0 = p_1$ que acabamos de demonstrar. Primeiramente, o segmento que liga $(1/p_0, 1/q_0)$ a $(1/p_1, 1/q_1)$ deve ser paralelo ao eixo $1/q$. Ademais, como $p_i \leq q_i$ para $i \in \{0, 1\}$, a extremidade superior desse segmento deve estar sobre a diagonal principal $q = p$ do quadrado de Riesz ou abaixo dela:

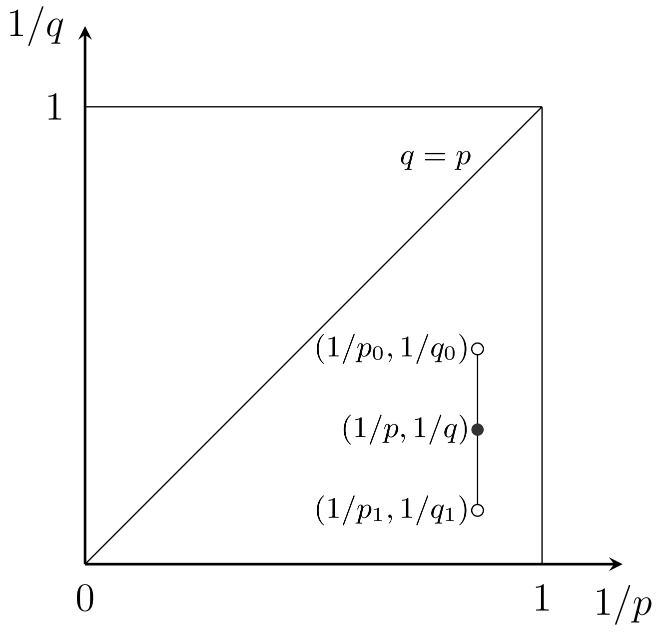

Figura 2 – Interpolação de Marcinkiewicz - caso $p_0 = p_1$.

$\square$

Observação 4.14. É importante notar que todas as constantes C's que aparecem na demonstração do Teorema 4.13 padecem de singularidades nos pontos (p_0, q_0) e (p_1, q_1).

Isso já era esperado, pois o operador T é somente de tipo fraco nesses pontos. Em geral não conseguimos aumentar a regularidade de T em (p_0, q_0) e (p_1, q_1) sem hipóteses adicionais.

Exemplo 4.15. Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e H uma função mensurável no espaço produto $X \times Y$ para a qual existe uma constante C positiva que satisfaz as estimativas

$$\int_X |H(x,y)|\, d\mu(x) \leq C \;\; q.t.p. \; y \in Y \tag{4.54}$$

$$\int_Y |H(x,y)|\, d\nu(y) \leq C \;\; q.t.p. \; x \in X. \tag{4.55}$$

Vamos utilizar o Teorema 4.13 para provar que o operador $T : L^p(X) \to \mathcal{M}(X)$ dado por

$$T(f)(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \int_Y |H(x,y)f(y)|\, d\nu(y)$$

é de tipo (p,p) forte. Primeiro, note que T é de tipo $(1,1)$ forte com constante C por (4.54) e pelo Teorema de Fubini-Tonelli (Teorema 1.14, pág. 22). Além disso, T é de tipo (∞,∞) forte com constante C por (4.55) e pela Desigualdade de Hölder (Teorema 1.18, pág. 24). Deste modo, pelo Teorema da Interpolação de Marcinkiewicz - formulação em L^p concluímos que T também é de tipo forte (p,p) para cada $1 < p < \infty$.

4.3 Aplicações à integração fracionária

Definição 4.16 (Produto convolução). Sejam f e g funções mensuráveis em $\mathbb{R}^n$. A convolução de f e g é a função definida por

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy, \tag{4.56}$$

para todo x tal que a integral do lado direito de (4.56) existe. Obviamente, $f*g(x) = g*f(x)$.

Teorema 4.17 (Desigualdade de Young para $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ - formulação fraca). Considere $1 < p \leq \infty$ e $1 < q, r < \infty$ satisfazendo a relação

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \tag{4.57}$$

Então, existe uma constante $\tilde{C}(p,q,r)$ tal que para quaisquer $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$

$$\|f * g\|_{r,\infty} \leq \tilde{C}(p,q,r)\, \|g\|_{q,\infty}\, \|f\|_p\, .$$

Demonstração. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\|g\|_{q,\infty}$ e $\|f\|_p$ são ambas positivas. Considere α um real positivo (a ser determinado) e construa

$$g_1(x) = g(x)\chi_{\{x\in X \,:\, |g(x)|>\alpha\}}(x),$$

$$g_2(x) = g(x)\chi_{\{x\in X \,:\, |g(x)|\leq\alpha\}}(x).$$

Pela Observação 3.13 (pág. 44), temos para quaisquer $1 \leq q_1 < q < q_2 < \infty$

$$\|g_1\|_{q_1} \leq \left[\left(\frac{q}{q-q_1}\right)\alpha^{q_1-q}\|g\|_{q,\infty}^q\right]^{1/q_1}, \tag{4.58}$$

$$\|g_2\|_{q_2} \leq \left[\left(\frac{2q_2-q}{q_2-q}\right)\alpha^{q_2-q}\|g\|_{q,\infty}^q\right]^{1/q_2}. \tag{4.59}$$

Seja $s \in \mathbb{R}_{>0}$. Como $g * f = g_1 * f + g_2 * f$, a Proposição 2.4 (f) (pág. 28) afirma que

$$d_{g*f}(s) \leq d_{g_1*f}(s/2) + d_{g_2*f}(s/2). \tag{4.60}$$

Deste modo, precisamos apenas estimar as funções de distribuição que apareceram no lado direito de (4.60). Começamos notando que pela Desigualdade de Minkowski para integrais (veja o Teorema 1.23, pág. 25)[16]

$$\|f * g_1\|_p = \left\|\int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot - y)g_1(y)\,dy\right\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^n} |g_1(y)|\,\|\tau_y f\|_p\,dy = \|g_1\|_1\,\|f\|_p.$$

Portanto, usando (4.58) e a Desigualdade de Chebyshev (Proposição 1.24, pág. 26)

$$d_{f*g_1}(s/2) \leq \left(\frac{\|f*g_1\|_p}{s/2}\right)^p \leq \left(\left(\frac{2}{s}\right)\left(\frac{q}{q-1}\right)\alpha^{1-q}\|g\|_{q,\infty}^q\|f\|_p\right)^p. \tag{4.61}$$

Nos preocuparemos agora com $d_{f*g_2}(s/2)$. Se $p = 1$, então a construção de g_2 implica que

$$|f * g_2(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g_2(y)|\,dy \leq \alpha\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,dy = \alpha\,\|f\|_p. \tag{4.62}$$

Se[17] $p' < \infty$, usamos a relação (4.57) para garantir que $q < p' < \infty$. Assim, combinando a Desigualdade de Hölder (Teorema 1.18, pág. 24) com (4.59), obtemos

$$|f * g_2(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g_2(y)|\,dy \leq \|g_2\|_{p'}\|f\|_p \leq \left[\left(\frac{2p'-q}{p'-q}\right)\alpha^{p'-q}\|g\|_{q,\infty}^q\right]^{1/p'}\|f\|_p. \tag{4.63}$$

O truque será tomar o α do começo da demonstração de modo que o lado direito de (4.62) (ou de (4.63)) seja igual a $s/2$. Para isso, fazemos

$$\alpha = \frac{s}{2\,\|f\|_p} \tag{4.64}$$

se $p' = \infty$, enquanto para $p' < \infty$ tomamos

$$\alpha = \left[\left(\frac{s}{2}\right)^{p'}\left(\frac{p'-q}{2p'-q}\right)\|g\|_{q,\infty}^{-q}\|f\|_p^{-p'}\right]^{1/(p'-q)}. \tag{4.65}$$

Consequentemente, vale $|f * g_2(x)| \leq s/2$ e

$$d_{f*g_2}(s/2) = m\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |f * g_2(x)| > s/2\}\right) = 0. \tag{4.66}$$

[16] No que se segue $\tau_y f$ é a função definida por $\tau_y f(x) = f(x-y)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

[17] Relembre a notação de expoentes conjugados (Notação 1.17, pág. 24).

Por um lado, combinando (4.60), (4.61), (4.66) e (4.64) obtemos[18]

$$\begin{aligned} d_{f*g}(s) \leq d_{f*g_2}(s/2) &\leq \left(\frac{2}{s}\right)\left(\frac{q}{q-1}\right)\left(\frac{s}{2\left\|f\right\|_1}\right)^{1-q}\left\|g\right\|_{q,\infty}^q\left\|f\right\|_1 \\ &= \left[\left(\frac{2}{s}\right)\left(\frac{q}{q-1}\right)^{1/q}\left\|g\right\|_{q,\infty}\left\|f\right\|_1\right]^r, \end{aligned}$$

concluindo assim o caso $p = 1$:

$$\left\|f*g\right\|_{r,\infty} = \sup_{s>0}\ d_{f*g}(s)^{1/r}s \leq 2\left(\frac{q}{q-1}\right)^{1/q}\left\|g\right\|_{q,\infty}\left\|f\right\|_1.$$

Por outro lado, combinando (4.57), (4.60), (4.61), (4.66) e (4.65) temos[19]

$$\begin{aligned} d_{f*g}(s) &\leq d_{f*g_2}(s/2) \\ &\leq \left(\left(\frac{2}{s}\right)\left(\frac{q}{q-1}\right)\left[\left(\frac{s}{2}\right)^{p'}\left(\frac{p'-q}{2p'-q}\right)\left\|g\right\|_{q,\infty}^{-q}\left\|f\right\|_p^{-p'}\right]^{(1-q)/(p'-q)}\left\|g\right\|_{q,\infty}^q\left\|f\right\|_p\right)^p \\ &= \left(\frac{q}{q-1}\right)^p\left(\frac{2p'-q}{p'-q}\right)^{p(q-1)/(p'-q)} 2^r s^{-r}\left\|g\right\|_{q,\infty}^r\left\|f\right\|_p^r, \end{aligned}$$

concluindo portanto o caso $p' < \infty$:

$$\left\|f*g\right\|_{r,\infty} = \sup_{s>0}\ d_{f*g}(s)^{1/r}s \leq \left(\frac{q}{q-1}\right)^{p/r}\left(\frac{2p'-q}{p'-q}\right)^{p(q-1)/[r(p'-q)]}\left\|g\right\|_{q,\infty}\left\|f\right\|_p.$$

□

Teorema 4.18 (Desigualdade de Young para $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ - formulação forte). Sejam $1 < p, q, r < \infty$ tais que

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \tag{4.67}$$

Então, existe uma constante $C(p, q, r)$ tal que para quaisquer $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$

$$\left\|f*g\right\|_r \leq C(p,q,r)\left\|g\right\|_{q,\infty}\left\|f\right\|_p.$$

Demonstração. Fixe $1 < p, q, r < \infty$ e $g \in L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Defina $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ por $T(f)(x) = f*g(x)$. Claramente T é um operador sublinear. Pela relação (4.67) temos $p < r$. Além disso, como p e r estão no aberto $(1, \infty)$, podemos encontrar $1 < p_0 < p < p_1 < \infty$ e $1 < r_0 < r < r_1 < \infty$, tais que

$$1 + \frac{1}{r_i} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q} \quad \textit{para } i \in \{0, 1\},$$

[18] Se $p = 1$, a equação (4.57) nos diz que $r = q$.

[19] Se $p' < \infty$, a equação (4.57) garante as igualdades

$$p + \frac{p'p(q-1)}{(p'-q)} = \frac{qp(p'-1)}{(p'-q)} = \frac{qp'}{(p'-q)} = r = \frac{qp'}{(p'-q)} = \frac{qp(p'-1)}{(p'-q)} = qp + \frac{qp(q-1)}{(p'-q)}.$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \qquad e \qquad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}.$$

Usando o Teorema 4.17, concluímos que para $i \in \{0,1\}$ o operador T é de tipo fraco (p_i, r_i) com constante[20] $\tilde{C}(p_i, q, r_i) \|g\|_{q,\infty}$. Pelo Teorema da Interpolação de Marcinkiewicz - versão L^p (Teorema 4.13), existe uma constante $C_*(p_0, p_1, r_0, r_1, 1, \theta)$ (veja a equação (4.51)) para a qual

$$\|f * g\|_r = \|T(f)\|_r \leq \left(\frac{p}{r}\right)^{1/r} C_* \left(\tilde{C}(p_0, q, r_0) \|g\|_{q,\infty}\right)^{1-\theta} \left(\tilde{C}(p_1, q, r_1) \|g\|_{q,\infty}\right)^{\theta} \|f\|_p .$$

Finalmente o resultado segue ao definirmos

$$C(p,q,r) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{p}{r}\right)^{1/r} C_*(p_0, p_1, r_0, r_1, 1, \theta) \tilde{C}(p_0, q, r_0)^{1-\theta} \tilde{C}(p_1, q, r_1)^{\theta}.$$

□

Teorema 4.19 (Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev). Considere $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, com $0 < \alpha < n$. Se $1 < p, r < \infty$ satisfazem a relação

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{n-\alpha}{n}, \tag{4.68}$$

então existe uma constante $C(p, r, \alpha)$ tal que para qualquer $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\left\| f * |x|^{\alpha-n} \right\|_r \leq C \|f\|_p .$$

Demonstração. Fixados $1 < p, r < \infty$ como em (4.68), vamos invocar o Teorema 4.18 fazendo $q \stackrel{\text{def}}{=} n/(n-\alpha)$. Para isso, precisaríamos verificar se $|x|^{\alpha-n} \in L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$, mas essa verificação já foi feita na Observação 1.26[21] (pág. 26). Assim, concluímos que

$$\left\| f * |x|^{\alpha-n} \right\|_r \leq C_0 \left\| |x|^{\alpha-n} \right\|_{q,\infty} \|f\|_p = C \|f\|_p .$$

□

Observação 4.20. Poderíamos ter invocado o Teorema 4.17 para provar que o operador $L^1(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto f * |x|^{\alpha-n}$ é de tipo fraco $(1, n/(n-\alpha))$. Entretanto, não necessariamente vale $f * |x|^{\alpha-n} \in L^{n/(n-\alpha)}(\mathbb{R}^n)$ para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, de sorte que esse operador não é de tipo forte $(1, n/(n-\alpha))$. Para mais detalhes veja [Stein 1970], Capítulo 5§1, pág. 119.

Definição 4.21 (Integral Fracionária). Dada uma função f mensurável em $\mathbb{R}_{>0}$ e $\alpha > 0$

$$I_\alpha(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty \frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\, dy,$$

para cada ponto $x \in \mathbb{R}_{>0}$ em que a integral acima existe. Do mesmo modo, definimos a integral fracionária de Riemann–Liouville de ordem α de f por

$$f_\alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(y)(x-y)^{\alpha-1}\, dy.$$

[20] $\tilde{C}$ é a constante encontrada no próprio Teorema 4.17

[21] Basta considerar $p = n/(n-\alpha)$ na Observação 1.26.

Observação 4.22. Se $I_\alpha(f)(x)$ existe no ponto x, então $f_\alpha(x) \leq I_\alpha(f)(x)$. Logo, se $I_\alpha(f)$ existe *q.t.p.*, então qualquer cota superior para a norma $\|I_\alpha(f)\|_p$ também é, a menos do fator $1/\Gamma(\alpha)$, cota superior para $\|f_\alpha\|_p$.

Corolário 4.23. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, com $0 < \alpha < 1$. Se $1 < p, q < \infty$ satisfazem a relação

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha, \tag{4.69}$$

então existe uma constante $C(p, r, \alpha)$ tal que para qualquer $f \in L^p(\mathbb{R}_{>0})$

$$\|I_\alpha(f)\|_q \leq C \|f\|_p .$$

Demonstração. Tome $n = 1$ no Teorema 4.19 e use a inclusão $\iota : L^p(\mathbb{R}_{>0}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R})$. □

Observação 4.24. G. H. Hardy e J. Littlewood, na demonstração original do Corolário 4.23 (cf. [Hardy e Littlewood 1928], Teorema 4 na pág. 575), fixam $1 < p < \infty$ e definem:

$$q = \frac{p}{1 - p\alpha}.$$

Porém, para assegurar que essa condição é equivalente a de (4.69), eles fazem a hipótese de $0 < \alpha < 1/p$. Essa última desigualdade para α está "escondida" em (4.69) e é necessária para garantir que $1 < q < \infty$.

Teorema 4.25. Sejam $1 < r, s < \infty$, com $1/r + 1/s > 1$. Se $\lambda = 2 - 1/r - 1/s$, então existe uma constante $C = C(r, s)$ tal que para quaisquer $f \in L^r(\mathbb{R}_{>0})$ e $g \in L^s(\mathbb{R}_{>0})$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)g(y)|}{|x - y|^\lambda}\, dy\, dx \leq C\|f\|_r\|g\|_s. \tag{4.70}$$

Demonstração. Sejam $f \in L^r(\mathbb{R}_{>0})$, $g \in L^s(\mathbb{R}_{>0})$ e $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} 1/r + 1/s - 1$. É de verificação imediata que $0 < \alpha < 1/s$ e

$$r' = \frac{s}{1 - s\alpha}. \tag{4.71}$$

Estando estabelecida a relação (4.71), podemos invocar o Corolário 4.23:

$$\|I_\alpha(g)\|_{r'} \leq C(r, s) \|g\|_s . \tag{4.72}$$

Por fim, aplicando o Teorema de Fubini-Tonelli (Teorema 1.14, pág. 22) e a Desigualdade de Hölder (Teorema 1.18, pág. 24) no lado esquerdo de (4.70), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)g(y)|}{|x - y|^\lambda}\, dy\, dx &= \int_0^\infty |f(x)| \int_0^\infty \frac{|g(y)|}{|x - y|^{1-\alpha}}\, dy\, dx \\ &\leq \|f\|_r \|I_\alpha(g)\|_{r'} \leq C(r, s) \|f\|_r \|g\|_s ,\end{aligned}$$

sendo a última desigualdade válida por (4.72). □

Observação 4.26. Quando $s = r'$, vale um análogo do Teorema 4.25 devido a Riesz[22]: se $D(\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \, : \, |x-y| \geq \varepsilon\right\}$ para cada $\varepsilon > 0$, então

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{D(\varepsilon)} \frac{|f(x)g(y)|}{x-y}\, dy\, dx \leq C(r) \left\|f\right\|_r \left\|g\right\|_{r'}. \tag{4.73}$$

O lado esquerdo da equação anterior é chamado de *valor principal de Cauchy* (abreviado por *p.v.*) da integral sobre $D(\varepsilon)$. Perceba que esse resultado é bem diferente do provado no Teorema 4.25. Isso porque a integral do lado esquerdo de (4.70) é absolutamente convergente (devido ao decaimento de $|x-y|^{-\lambda}$), enquanto em (4.73) o limite existe graças ao cancelamento de valores positivos e negativos do núcleo $N(x,y) = 1/(x-y)$ em $D(\varepsilon)$.

Observação 4.27. O próximo teorema a ser provado foi enunciado inicialmente em [Hardy e Littlewood 1928] (§4, Teorema 6, pág. 579). Contudo, a prova dada na época usa um argumento incorreto, já que pressupõe a existência de uma cota inferior positiva para a função $h(x,y) = x/|x-y|$ definida no conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \, : \, x > 2y\}$. Este erro foi observado em [Stein e Weiss 1958], sendo que esse trabalho foi importante não apenas por relatar a falha acima, mas também por apresentar uma demonstração que contornava o problema e que estendia o resultado para dimensões superiores. Apresentaremos essas ideias de Stein e Weiss para dimensão 1 com o seguinte teorema:

Teorema 4.28 (Desigualdade de Stein-Weiss). Sejam $1 < r, s < \infty$, com $1/r + 1/s > 1$. Se $h, k, \lambda \in \mathbb{R}$ satisfazem $\lambda = 2 - 1/r - 1/s$, $h + k \geq 0$, $h < 1 - 1/r$ e $k < 1 - 1/s$, então existe $C = C(h,k,r,s)$ tal que para quaisquer funções $f \in L^r(\mathbb{R}_{>0})$ e $g \in L^s(\mathbb{R}_{>0})$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)g(y)|}{x^h y^k |x-y|^{\lambda-h-k}}\, dx\, dy \leq C \|f\|_r \|g\|_s. \tag{4.74}$$

O mesmo resultado é válido se considerarmos $r > 1$ e $s = r'$, com a necessária adição da desigualdade estrita $h + k > 0$ nas hipóteses. Neste último caso, a constante ótima que satisfaz (4.74) é

$$C(h,k,r,s) = \frac{\pi \Gamma(h+k)}{\Gamma(h+1/r)\, \Gamma(k+1/s)} \left(\frac{1}{\sin(\pi(h+1/r))} + \frac{1}{\sin(\pi(k+1/s))} \right).^{23} \tag{4.75}$$

Demonstração. Caso 1. $s = r'$. Resulta como consequência do Teorema 14 (Apêndice A.4, pág. 93). De fato, definindo $N(x,y) \overset{\text{def}}{=} x^{-h} y^{-k} |x-y|^{-\lambda+h+k}$, vemos que $N(x,y)$ é um núcleo homogêneo de grau -1 e

$$\int_0^\infty N(x,1) x^{-1/r}\, dx = C(h,k,r,s). \tag{4.76}$$

Vale ressaltar que a constante C do caso $r = s'$ em (4.75) foi estabelecida pelo presente autor e difere[24] daquela enunciada em [Hardy e Littlewood 1928] (cf. Teorema 6,

[22] Veja [Riesz 1928], Teorema IV', pág. 240.

[23] Decorre das hipóteses que $h + k$, $h + 1/r$ e $k + 1/s$ estão no intervalo $(0,1)$. Deste modo, como $\sin(\pi x)$ não se anula e nem $\Gamma(z)$ tem polos neste domínio, a constante está bem definida.

[24] Veja os argumentos da função gama no denominador da fração.

pág. 579). Isso pois Hardy e Littlewood cometeram um pequeno equívoco no artigo original. A título de exemplo, para provarmos que a constante de (4.75) está correta, calcularemos a integral de (4.76). De $h + k > 0$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty & N(x,1)x^{-1/r}\,dx \\ &= \int_0^1 x^{-h-1/r}(1-x)^{h+k-1}\,dx + \int_1^\infty x^{-h-1/r}(x-1)^{h+k-1}\,dx \\ &= \int_0^1 x^{(1-1/r-h)-1}(1-x)^{(h+k)-1}\,dx + \int_1^\infty x^{-(h+k)-(1/r-k)}(x-1)^{(h+k)-1}\,dx,\end{aligned}$$

e pelo Teorema 3 (pág. 88), segue da equação anterior que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty N(x,1)x^{-1/r}\,dx &= \mathrm{B}\left(1-1/r-h, h+k\right) + \mathrm{B}\left(1/r-k, h+k\right) \\ &= \frac{\Gamma(1-1/r-h)\Gamma(h+k)}{\Gamma\left(k+1-1/r\right)} + \frac{\Gamma(1/r-k)\Gamma(h+k)}{\Gamma\left(h+1/r\right)} \\ &= \frac{\Gamma(h+k)}{\Gamma\left(k+1-1/r\right)\Gamma\left(h+1/r\right)}\left[\Gamma\left(h+1/r\right)\Gamma\left(1-(h+1/r)\right)\right. \\ &\qquad \left. + \Gamma\left(k+1-1/r\right)\Gamma\left(1/r-k\right)\right].\end{aligned}$$

Finalmente, como s é o expoente conjugado de r, obtemos do Teorema 3 a igualdade

$$\begin{aligned}\int_0^\infty N(x,1)x^{-1/r}\,dx &= \frac{\Gamma(h+k)}{\Gamma\left(k+1/s\right)\Gamma\left(h+1/r\right)}\left[\Gamma\left(h+1/r\right)\Gamma\left(1-(h+1/r)\right)\right. \\ &\qquad \left. + \Gamma\left(k+1/s\right)\Gamma\left(1-(k+1/s)\right)\right] \\ &= \frac{\Gamma(h+k)}{\Gamma\left(h+1/r\right)\Gamma\left(k+1/s\right)}\left[\frac{\pi}{\sin\left(\pi(h+1/r)\right)} + \frac{\pi}{\sin\left(\pi(k+1/s)\right)}\right].\end{aligned}$$

Caso 2. $s \neq r'$. Tentando facilitar a prova, usaremos a estratégia *dividir para conquistar*. Escrevemos $E \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ como a união de três regiões disjuntas R_1, R_2 e R_3:

$$\begin{aligned}R_1 = \left\{(x,y) \in E : x/2 < y < 2x\right\}, \qquad R_2 = \left\{(x,y) \in E : 2x \leq y\right\}, \\ R_3 = \left\{(x,y) \in E : 2y \leq x\right\}.\end{aligned} \tag{4.77}$$

Agora, escrevemos a integral do lado esquerdo de (4.74) como $S_1 + S_2 + S_3$, em que

$$S_i = \iint_{R_i} \frac{|f(x)g(y)|}{x^h y^k |x-y|^{\lambda-h-k}}\,dx\,dy \quad \text{para cada } i \in \{1,2,3\}. \tag{4.78}$$

É suficiente provar que $S_i \leq C\|f\|_r\|g\|_s$ para cada $i \in \{1,2,3\}$. Dado $(x,y) \in R_1$, temos de (4.77) a desigualdade $x/2 < y < 2x$ e assim $|x-y| < 3x$. Disso e da hipótese de $h+k \geq 0$

$$|x-y|^{h+k} \leq 3^{h+k}x^{h+k} = 3^{h+k}x^h x^k \leq 3^{h+k}x^h 2^{|k|}y^k,$$

de sorte que

$$\iint_{R_1} \frac{|f(x)g(y)|}{x^h y^k |x-y|^{\lambda-h-k}}\, dx\, dy$$
$$\leq 3^{h+k} 2^{|k|} \iint_{R_1} \frac{|f(x)g(y)|}{|x-y|^{h+k}|x-y|^{\lambda-h-k}}\, dx\, dy = C_1 \iint_{R_1} \frac{|f(x)g(y)|}{|x-y|^{\lambda}}\, dx\, dy. \quad (4.79)$$

Usando (4.78), (4.79) e o Teorema 4.25

$$S_1 \leq C_1 \iint_{R_1} \frac{|f(x)g(y)|}{|x-y|^{\lambda}}\, dx\, dy \leq C_1 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)g(y)|}{|x-y|^{\lambda}}\, dx\, dy \leq C_1 C_2 \|f\|_r \|g\|_s.$$

Examinaremos agora a limitação de S_2, sendo análoga a estimativa para S_3. Para qualquer $(x,y) \in R_2$, temos $|x-y| = y - x \geq y - y/2 = y/2$ e assim

$$|x-y|^{-(\lambda-h-k)} \leq 2^{\lambda-h-k} y^{-(\lambda-h-k)}.$$

Dessa última desigualdade e do Teorema de Fubini (Teorema 1.14, pág. 22), concluímos

$$S_2 \leq 2^{\lambda-h-k} \iint_{R_2} \frac{|f(x)g(y)|}{x^h y^{\lambda-h}}\, dx\, dy$$
$$\leq C_1 \int_0^\infty \int_0^{y/2} \frac{|f(x)g(y)|}{x^h y^{\lambda-h}}\, dx\, dy \leq C_1 \int_0^\infty y^{h-\lambda} |g(y)| \int_0^y |f(x)| x^{-h}\, dx\, dy. \quad (4.80)$$

Definindo

$$V_h f(y) \stackrel{def}{=} y^{h-\lambda} \int_0^y |f(x)| x^{-h}\, dx,$$

temos por (4.80) e pela Desigualdade de Hölder (Teorema 1.18, pág. 24) que

$$S_2 \leq C_1 \int_0^\infty |g(y)| \left(y^{h-\lambda} \int_0^y |f(x)| x^{-h}\, dx \right) dy = C_1 \int_0^\infty |g(y)| \left(y^{1-\lambda} V_h f(y) \right) dy$$
$$\leq C_1 \|g\|_s \left(\int_0^\infty \left(y^{1-\lambda} V_h f(y) \right)^{s'} dy \right)^{1/s'}.$$

Por conseguinte, precisamos apenas mostrar a estimativa

$$\left(\int_0^\infty \left(y^{1-\lambda} V_h f(y) \right)^{s'} dy \right)^{1/s'} \leq C \|f\|_r.$$

para alguma constante C. Tendo isso em mente, escrevemos

$$\int_0^\infty \left(V_h f(y) y^{1-\lambda} \right)^{s'} dy = \int_0^\infty \left(V_h f(y) \right)^r V_h f(y)^{s'-r} y^{s'(1-\lambda)}\, dy. \quad (4.81)$$

Como $h < 1/r'$, obtemos do Lema 19 (pág. 95) que

$$V_h f(y)^{s'-r} y^{s'(1-\lambda)} \leq C_2 \|f\|_r^{s'-r} y^{-(s'-r)/r} y^{s'(1-\lambda)} = C_2 \|f\|_r^{s'-r} y^{-s'/r+1+s'-s'\lambda} = C_2 \|f\|_r^{s'-r}, \quad (4.82)$$

pois $-s'/r + 1 + s' - s'\lambda = 0$. Combinando (4.81) e (4.82) com o Lema 19 (pág. 95)

$$\int_0^\infty \left(V_h f(y) y^{1-\lambda} \right)^{s'} dy \leq C_2 \|f\|_r^{s'-r} \int_0^\infty \left(V_h f(y) \right)^r dy \leq C_1 C_2 \|f\|_r^{s'-r} \|f\|_r^r = C \|f\|_r^{s'}.$$

$\square$

Observação 4.29. Pode-se demonstrar que as desigualdades presentes na hipótese do Teorema 4.28 para h e k são as melhores possíveis. Para mais detalhes, veja o Teorema 6 na página 579 de [Hardy e Littlewood 1928].

Teorema 4.30 (Continuidade da Integral Fracionária). Sejam $s, h, k \in \mathbb{R}$ tais que $s > 1$, $k < 1 - 1/s$ e $h + k \geq 0$. Se α satisfaz

$$h + k < \alpha < \min\{h + k + 1/s, k + 1/s\},$$

então, definindo $q \stackrel{\text{def}}{=} s/(1 - s(\alpha - h - k))$, existe uma constante $C = C(s, \alpha, h, k)$ tal que para qualquer f função mensurável em $\mathbb{R}_{>0}$, com $x^k f(x) \in L^s(\mathbb{R}_{>0})$, vale

$$\left(\int_0^\infty |x^{-h} f_\alpha(x)|^q \, dx\right)^{1/q} \leq C_{s,\alpha,h,k} \left(\int_0^\infty |x^k f(x)|^s \, dx\right)^{1/s}.$$

Resultado análogo é válido se $h + k > 0$ e $\alpha = h + k$.

Demonstração. A ideia aqui é aplicar o Teorema 4.28, mas para isso precisamos verificar suas hipóteses. Defina $1/r \stackrel{\text{def}}{=} 1 - 1/s - h - k + \alpha$, isto é, r é tal que

$$r' = \frac{s}{1 - s(\alpha - h - k)} = q.$$

Também considere $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} 2 - 1/r - 1/s$. A desigualdade $\alpha < k + 1/s$ nos fornece a estimativa $h < 1 - 1/r$. Ademais, como $0 < \alpha - h - k < 1/s$, temos da definição de $1/r$ que

$$0 < (1/r - 1 + 1/s + h + k) - h - k < 1/s$$

ou seja, $0 < 1/r + 1/s - 1 < 1/s$. Portanto, concluímos que $1 < 1/r + 1/s$ e que $1/r - 1 < 0$. Como $1 < s < \infty$, as últimas duas desigualdades nos fornecem $1 < r < \infty$. Agora, considere $\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^k f(x) \in L^s(\mathbb{R}_{>0})$ e defina

$$\begin{aligned} \varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^{-h} \int_0^x \psi(y) y^{-k} (x - y)^{h+k-\lambda} \, dy &= x^{-h} \int_0^x f(y)(x - y)^{h+k-\lambda} \, dy \\ &= x^{-h} \int_0^x f(y)(x - y)^{(h+k-\lambda+1)-1} \, dy \\ &= x^{-h} f_{h+k-\lambda+1}(x) = x^{-h} f_\alpha(x). \end{aligned} \tag{4.83}$$

Pelo Teorema 4.28, temos para qualquer $g \in L^r(\mathbb{R}_{>0})$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\varphi(x) g(x)| \, dx &\leq \int_0^\infty x^{-h} \int_0^x \frac{|\psi(y) g(x)|}{y^k (x - y)^{\lambda - h - k}} \, dy \, dx \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|\psi(y) g(x)|}{x^h y^k |x - y|^{\lambda - h - k}} \, dy \, dx \leq C \|\psi\|_s \|g\|_r, \end{aligned} \tag{4.84}$$

seguindo de (4.83), de (4.84) e do Teorema 16 (pág. 94)

$$\left(\int_0^\infty \left|x^{-h} f_\alpha(x)\right|^{r'} dx\right)^{1/r'} = \|\varphi\|_{r'} \leq C \|\psi\|_s = C \left(\int_0^\infty \left|x^k f(x)\right|^s dx\right)^{1/s}.$$

A prova do caso $\alpha = h + k > 0$ é análoga e será omitida. $\square$

A Apêndice

A.1 Medida contagem e medida de Lebesgue

Nosso objetivo nesta seção é apresentar as propriedades da medida contagem e da medida de Lebesgue. O leitor interessado pode consultar o Capítulo 9§7 de [Isnard 2009] para mais detalhes sobre a medida contagem. Para a medida de Lebesgue, vale a pena conferir os Capítulos 11-17 de [Bartle 1995] e o Capítulo 2 de [Folland 1999].

Seja X um conjunto não vazio, $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X e $f : X \to [0, \infty]$ uma função qualquer. Podemos construir uma medida μ em $\mathcal{P}(X)$ pela fórmula

$$\mu(E) = \sum_{x \in E} f(x), \tag{1}$$

com $E \subseteq \mathcal{P}(X)$. Caso X seja um conjunto não-enumerável, temos que dar sentido a soma presente em (1). Fazemos isso definindo

$$\sum_{x \in X} f(x) = \sup \left\{ \sum_{x \in F} f(x) \ : \ F \subseteq X, \ F \text{ finito} \right\}.$$

A medida contagem $\# : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ é construída tomando a função f constante igual a 1 em (1). Note que $\#$ é σ-finita se, e somente se, X for um conjunto contável.

Para $n \in \mathbb{N}$, o espaço $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m^n)$ representa o espaço real n-dimensional $(\mathbb{R}^n)$ munido da σ-álgebra de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ $(\mathcal{L}^n)$ e da medida de Lebesgue n-dimensional (m^n). Por uma questão de notação, escrevemos somente $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$ para representar esse espaço, ficando a cargo do leitor lembrar o que isso significa. Uma propriedade importante de m é a **regularidade**, i.e., se E é mensurável em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$ então $m(E)$ é igual a

$$\inf \{ m(U) \ : \ E \subseteq U, U \ \textit{aberto de } \mathbb{R}^n \} = \sup \{ m(C) \ : \ C \subseteq E, C \ \textit{compacto de } \mathbb{R}^n \} \tag{2}$$

Dada $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ Lebesgue mensurável, representaremos $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dm(x)$ simplesmente por $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$. Temos para a integral de Lebesgue outros dois resultados importantes:

Teorema 1 (Teorema da mudança de variável). Seja T uma matriz com entradas reais de ordem n que seja inversível. Se f é uma função Lebesgue mensurável em $\mathbb{R}^n$, o mesmo vale para $f \circ T$. Ademais, se f é não negativa ou se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} f \circ T(x)\, dx.$$

Em particular, se $E \in \mathcal{L}$ então $T(E) \in \mathcal{L}$ e $m(T(E)) = |\det T|\ m(E)$. Consequentemente, temos $m(E + x) = m(E)$ e $m(\delta E) = \delta^n m(E)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ e $E \in \mathcal{L}$.

Proposição 2 (Integrabilidade de $|x|^{-\alpha}$). Sejam c e C duas constantes positivas, e seja $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < c\}$. Suponha que f é uma função mensurável em $\mathbb{R}^n$.

(a) Se $|f(x)| \leq C|x|^{-\alpha}$ em B para algum $\alpha < n$, então $f \in L^1(B, m)$. Entretanto, se $|f(x)| \geq C|x|^{-n}$ em B, então $f \notin L^1(B, m)$.

(b) Se $|f(x)| \leq C|x|^{-\alpha}$ em B^c para algum $\alpha > n$, então $f \in L^1(B^c, m)$. Entretanto, se $|f(x)| \geq C|x|^{-n}$ em B^c, então $f \notin L^1(B^c, m)$.

As provas das identidades dadas em (2), do Teorema 1 e da Proposição 2 podem ser encontradas em [Folland 1999], Teorema 2.40, Teorema 2.44 e Corolário 2.51, respectivamente.

A.2 Funções beta e gama

Dedicaremos esta seção à apresentação das propriedades básicas das funções gama e beta, já que essas funções são importantes para a integral fracionária (cf. Definição 4.21, pág. 81). Dado $x \in \mathbb{R}_{>0}$, definimos a função gama no ponto x por

$$\Gamma(x) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Pode-se mostrar que $\Gamma(x)$ é uma integral absolutamente convergente para cada x positivo. Essa função Γ real se estende para uma função holomorfa no semi-plano $\Re(z) > 0$ e esta última extensão, por sua vez, tem uma continuação analítica para uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ cujas únicas singularidades são polos simples nos inteiros negativos (cf. 6§1 de [Stein e Shakarchi 2010]. Portanto, sempre que falarmos da função gama estaremos falando desta função meromorfa. Dados $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$, definimos a função beta por

$$\mathrm{B}(y, x) \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}\, dt.$$

Dessas definições, obtemos propriedades muito interessantes que são condensadas no seguinte resultado:

Teorema 3. Dados $z, w \in \mathbb{C}$, com $\Re(z) > 0$, valem as igualdades

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad e \quad \Gamma(w)\Gamma(1-w) = \frac{\pi}{\sin(\pi w)}. \tag{3}$$

Ademais, para $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ temos que $B(y, x) = B(x, y)$ e

$$\frac{\Gamma(y)\,\Gamma(x)}{\Gamma(y+x)} = \mathrm{B}(y, x) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{y+x}}\, du = \int_1^\infty \frac{(u-1)^{x-1}}{u^{y+x}}\, du. \tag{4}$$

Finalmente, dado $r > 0$, o volume n-dimensional da bola $B_r \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ é

$$m(B_r) = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma(n/2+1)}. \tag{5}$$

Demonstração. Para a prova de (3) veja [Stein e Shakarchi 2010] (Capítulo 6§1, Lema 1.2 e Teorema 1.4, respectivamente). A demonstração da primeira igualdade de (4) pode ser encontrada em [Grafakos 2014] (Apêndice A§2, pág. 564), enquanto as outras igualdades seguem a partir da primeira, mediante simples mudanças de variáveis. Para a prova de (5) veja [Folland 1999] (Capítulo 2§7, Corolário 2.55). □

A.3 Espaços quase-normados

Usaremos esta seção para desenvolver os conceitos de quase-norma e de espaço quase-Banach, os quais serão imprescindíveis para construir os teoremas da seção 3.2 (pág. 47). Usaremos para isso o livro [Wilansky 1978] como referência. Além disso, provaremos o Teorema 8, resultado fundamental para a seção 4.2 (pág. 59). A nossa prova do Teorema 8 tem como referência o livro [Kalton, Peck e Roberts 1984] (Lema 1.1 da pág. 3).

Definição 4 (Quase-norma). Considere X um espaço vetorial real. Dizemos que uma função $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ é uma quase-norma se

($\mathcal{Q}_1$) $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

($\mathcal{Q}_2$) $\|cx\| = |c| \|x\|$ para quaisquer $c \in \mathbb{R}$, $x \in X$.

($\mathcal{Q}_3$) Existe uma constante $K \geq 1$, tal que, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$, vale

$$\|x_1 + x_2\| \leq K \left(\|x_1\| + \|x_2\|\right). \tag{6}$$

Chamaremos o par $(X, \|\cdot\|)$ de **espaço quase-normado**.

Definição 5. Sejam $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_*$ duas quase-normas em X. Dizemos que essas quase-normas são **equivalentes** se existem $0 < c \leq C < \infty$ tais que

$$c \|x\|_* \leq \|x\| \leq C \|x\|_* \qquad \forall x \in X.$$

Definição 6. Dado $\alpha \in (0, 1]$, dizemos que uma quase-norma $\|\cdot\|$ é **α-subaditiva** se

$$\|x + y\|^\alpha \leq \|x\|^\alpha + \|y\|^\alpha$$

para quaisquer $x, y \in X$.

O leitor deve ter percebido que uma quase-norma $\|\cdot\|$ pode ser uma norma quando ocorrer de: $K = 1$ ou quando $\|\cdot\|$ for uma quase-norma α-subaditiva com $\alpha = 1$. Tendo isso em mente, gostaríamos de extrair uma topologia de uma quase-norma que preservasse a noção de "distância" dada por essa quase-norma.

Definição 7 (Espaço Vetorial Topológico). Um espaço vetorial topológico (ou simplesmente TVS) é um espaço vetorial X munido de uma topologia τ, na qual as operações de soma $S : X \times X \to X$ ($S(x_1, x_2) = x_1 + x_2$) e de multiplicação por escalar $M : \mathbb{R} \times X \to X$ ($M(c, x_1) = cx_1$) são funções contínuas.

No que se segue, vamos introduzir uma topologia vetorial em X, a qual extrai as propriedades da quase-norma $\|\cdot\|$. Para isso, defina

$$U_n = \{x \in X \; : \; \|x\| < 1/n\}$$

e considere a coleção $\mathscr{B}_0 \stackrel{def}{=} \{U_n \; : \; n \in \mathbb{N}\}$. Seja

$$\tau \stackrel{def}{=} \{G \subseteq X \; : \; \forall g \in G, \exists \; U \in \mathscr{B}_0 \text{ tal que } g + U \subseteq G\} \cup \{\varnothing\}$$

Com essa construção o par (X, τ) é um TVS. A prova desse fato será omitida aqui, mas ela pode ser encontrada no Capítulo 4§3 de [Wilansky 1978] (cf. Teorema 4.3.5, pág. 45).

Lema 8 (Aoki/Rolewicz). Seja $\|\cdot\|$ uma função não negativa em um espaço vetorial X. Se existe $K \geq 1$ que satisfaz

$$\|x + y\| \leq K\left(\|x\| + \|y\|\right)$$

para quaisquer $x, y \in X$, então, definindo α como a solução da equação $(2K)^\alpha = 2$, temos

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} x_k\right\| \leq 4^{1/\alpha}\left(\sum_{k=1}^{N} \|x_k\|^\alpha\right)^{1/\alpha}$$

para qualquer N natural e quaisquer $\{x_k\}_{k=1}^{N} \in X$.

Demonstração. Primeiramente, provaremos por indução que para todo $N \in \mathbb{N}$ vale

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} x_k\right\| \leq \max_{1 \leq k \leq N}\left\{(2K)^k \|x_k\|\right\}.$$

O caso base é imediato. Agora, assumindo a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{N+1} x_k\right\| \leq K\left(\|x_1\| + \left\|\sum_{k=2}^{N+1} x_k\right\|\right) &\leq (2K)\max\left\{\|x_1\|, \left\|\sum_{k=1}^{N} x_{k+1}\right\|\right\} \\
&\leq (2K)\max\left\{\|x_1\|, \max_{1 \leq k \leq N}\left\{(2K)^k \|x_{k+1}\|\right\}\right\} \\
&= \max\left\{(2K)\|x_1\|, \max_{1 \leq k \leq N}\left\{(2K)^{k+1}\|x_{k+1}\|\right\}\right\} \\
&= \max_{0 \leq k \leq N}\left\{(2K)^{k+1}\|x_{k+1}\|\right\} = \max_{1 \leq k \leq N+1}\left\{(2K)^k \|x_k\|\right\}.
\end{aligned}$$

Para cada $k \in \mathbb{Z}$, construa o conjunto

$$A_k = \left\{x \in X \,:\, 2^{k-1} < \|x\|^\alpha \leq 2^k\right\}$$

e defina $H : X \to \mathbb{R}$ como

$$H(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k/\alpha}\chi_{A_k}(x).$$

Claramente

$$\|x\| \leq H(x) \leq 2^{1/\alpha}\,\|x\|$$

para todo $x \in X$. Provaremos por indução forte sobre N que

$$\left\|\sum_{j=1}^{N} x_j\right\|^\alpha \leq 2\left(\sum_{j=1}^{N} H(x_j)^\alpha\right). \tag{7}$$

Suponha que esta afirmação é verdadeira quando $N = m$. Provaremos que o resultado vale para $N = m+1$. Assuma, sem perda de generalidade, que $\|x_j\| \geq \|x_{j+1}\|$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Em particular, vale $H(x_j) \geq H(x_{j+1})$.

Caso 1. O conjunto $\{H(x_j) \,:\, 1 \leq j \leq m+1\}$ contém elementos todos distintos entre si. Deste modo, como $H(x_{j+1})^\alpha \leq 2H(x_j)^\alpha$ vale para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, nós obtemos

$$2^{(j-1)/\alpha}H(x_j) \leq H(x_1).$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=1}^{m+1} x_j\right\|^\alpha &\leq \left(\max_{1\leq j\leq m+1}(2K)^j\,\|x_j\|\right)^\alpha \\
&\leq \left(\max_{1\leq j\leq m+1}(2K)^j H(x_j)\right)^\alpha \\
&\leq \left(\max_{1\leq j\leq m+1}(2K)^j 2^{-j/\alpha}2^{1/\alpha}H(x_1)\right)^\alpha \\
&= 2H(x_1)^\alpha\left(\max_{1\leq j\leq m+1}((2K)^\alpha/2)^j\right) = 2H(x_1)^\alpha \leq 2\left(\sum_{j=1}^{m+1} H(x_j)^\alpha\right).
\end{aligned}$$

Caso 2. $H(x_i) = H(x_i+1)$ para algum $1 \leq i \leq m$. Neste caso existe um inteiro r tal que

$$2^{r-1} < \|x_{i+1}\|^\alpha \leq \|x_i\|^\alpha \leq 2^r$$

e $H(x_i) = 2^{r/\alpha}$. Assim, valem as desigualdades

$$\|x_i + x_{i+1}\|^\alpha \leq K^\alpha\left(\|x_i\| + \|x_{i+1}\|\right)^\alpha \leq K^\alpha(22^r)^\alpha = 2^{r\alpha+1}\left((2K)^\alpha/2\right) \leq 2^{r+1}.$$

Portanto $H(x_i + x_{i+1})^\alpha \leq 2^{r+1} = 2^r + 2^r = H(x_i)^\alpha + H(x_{i+1})^\alpha$. Finalmente

$$\left\|\sum_{j=1}^{m+1} x_j\right\|^\alpha \leq 2\left(H(x_i + x_{i+1})^\alpha + \sum_{i\notin\{j,j+1\}} H(x_j)^\alpha\right) \leq 2\left(\sum_{j=1}^{m+1} H(x_j)^\alpha\right).$$

$\square$

Teorema 9. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço quase-normado. Então existe $\alpha \in (0,1]$ e uma quase-norma $\|\cdot\|_*$ α-subaditiva equivalente a $\|\cdot\|$. Em particular, se definirmos a função $d : X \times X \to [0, \infty)$ por $d(x,y) = \|x-y\|_*^\alpha$, d é uma métrica invariante por translações em X. Ademais, temos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ na topologia τ TVS de X se, e só se, vale

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Demonstração. Considere $\alpha \in (0,1]$, obtido usando a quase-norma $\|\cdot\|$ como a função não negativa do Teorema de Aoki/Rolewicz (Teorema 8). Para $x \in X$, defina

$$\|x\|_* = \inf\left\{\left(\sum_{k=1}^{N}\|x_k\|^\alpha\right)^{1/\alpha} : \sum_{k=1}^{N} x_k = x,\ N \in \mathbb{N} \text{ e } x_k \in X,\ \forall k \in \{1,\dots,N\}\right\}.$$

Fixe $\varepsilon > 0$ e $x, y \in X$. Pela definição de ínfimo, existem $\{x_m\}_{m=1}^M$ e $\{y_n\}_{n=1}^N$ representações de x e y, respectivamente, tais que

$$\sum_{m=1}^{M}\|x_m\|^\alpha < \|x\|_*^\alpha + \varepsilon/2 \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{N}\|y_n\|^\alpha < \|y\|_*^\alpha + \varepsilon/2.$$

Agora, defina $\{z_k\}_{k=1}^{M+N}$ como a seguinte representação de $x+y$:

$$z_k \overset{def}{=} \begin{cases} x_k, & \text{se } 1 \le k \le M; \\ y_{k-M}, & \text{se } M < k \le M+N. \end{cases}$$

Deste modo, temos

$$\sum_{k=1}^{M+N}\|z_k\|^\alpha = \sum_{k=1}^{M}\|x_k\|^\alpha + \sum_{k=M+1}^{M+N}\|y_{k-M}\|^\alpha = \sum_{k=1}^{M}\|x_k\|^\alpha + \sum_{k=1}^{N}\|y_k\|^\alpha \le \|x\|_*^\alpha + \|y\|_*^\alpha + \varepsilon$$

e assim $\|x+y\|_*^\alpha \le \|x\|_*^\alpha + \|y\|_*^\alpha + \varepsilon$. Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos a desigualdade triangular. Além disso, as 2 primeiras propriedades de quase-norma são imediatas. Para a terceira

$$\|x+y\|_* \le \left(\|x\|_*^\alpha + \|y\|_*^\alpha\right)^{1/\alpha} \le \left(2\max\{\|x\|_*^\alpha, \|y\|_*^\alpha\}\right)^{1/\alpha} \le 2^{1/\alpha}\left(\|x\|_* + \|y\|_*\right).$$

Finalmente, vamos verificar a equivalência entre $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_*$. Como x é uma representação de si mesmo (redundante, não?), temos $\|x\|_* \le (\|x\|^\alpha)^{1/\alpha} = \|x\|$. Ademais, se $\{x_k\}_{k=1}^N$ é uma representação arbitrária de x, obtemos pelo Teorema de Aoki/Rolewicz (Teorema 8)

$$\|x\| = \left\|\sum_{k=1}^{N} x_k\right\| \le 4^{1/\alpha}\left(\sum_{k=1}^{N}\|x_k\|^\alpha\right)^{1/\alpha},$$

e assim $\|x\|_* \le \|x\| \le 4^{1/\alpha}\|x\|_*$. É de verificação imediata que a função d, definida como no enunciado, é uma métrica que preserva a noção de convergência da topologia τ. $\square$

Definição 10. Dizemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ é **Cauchy** no espaço quase-normado $(X, \|\cdot\|)$ se, com a mesma notação do Teorema 9, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ for Cauchy no espaço métrico (X, d).

Definição 11. Um espaço quase-normado $(X, \|\cdot\|)$ é dito **Quase-Banach** se, com a mesma notação do Teorema 9, (X, d) for um espaço métrico completo.

Observação 12. Para verificar que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy em $(X, \|\cdot\|)$, teríamos que mostrar que essa sequência é Cauchy na métrica d. Porém, pela construção de d a partir de uma quase-norma $\|\cdot\|_*$ (a qual é equivalente a $\|\cdot\|$), isso é o mesmo que provar $\lim_{m,n\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$. Do mesmo modo, se queremos provar que $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço Quase-Banach, basta considerar uma sequência de Cauchy na métrica d e provar que existe $x \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Esse fato será usado implicitamente durante todo o nosso trabalho, ficando a cargo do leitor relembrar desta observação.

A.4 Núcleos homogêneos

Apresentaremos nesta seção algumas desigualdades úteis para a teoria desenvolvida na seção 4.3 (78). O único resultado que não demonstraremos é o Lema 15, pois ele está relacionado com a dualidade dos espaços L^p. O leitor interessado nessa prova do caráter de dualidade de L^p pode consultar o Lema 4.2 na página 14 de [Stein e Shakarchi 2011].

Definição 13 (Núcleo homogêneo). Dizemos que uma função $N(x, y)$ mensurável em $(\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}, m)$ é um núcleo homogêneo de grau $-k$ se, para quaisquer $\beta, x, y \in \mathbb{R}_{>0}$

$$N(\beta x, \beta y) = \beta^{-k} N(x, y).$$

Teorema 14. Sejam $1 \leq p \leq \infty$, f, g duas funções mensuráveis em $\mathbb{R}_{>0}$ e $N(x, y)$ um núcleo homogêneo não negativo de grau -1 tal que[1]

$$\int_0^\infty N(x, 1) x^{-1/p}\, dx = C < \infty. \tag{8}$$

Sob tais hipóteses, temos

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |f(x)g(y)N(x, y)|\, dx\, dy \leq C\|f\|_p \|g\|_{p'}. \tag{9}$$

Em particular, se definirmos

$$N(f)(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty N(x, y) f(x)\, dx, \qquad N(g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty N(x, y) g(y)\, dy,$$

então $N(f)$ e $N(g)$ existem para quase todo ponto e valem as estimativas[2]

$$\|N(f)\|_p \leq C\|f\|_p, \qquad \|N(g)\|_{p'} \leq C\|g\|_{p'}. \tag{10}$$

[1] Estamos realizando um abuso de notação quando $p = \infty$. Nesse caso, consideramos simplesmente $x^{-1/p} = 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

[2] Veja a Definição 1.17 de expoentes conjugados na página 24.

Lema 15 (Caráter de dualidade de L^p). Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida σ-finita. Se g é integrável em todos os conjuntos de medida finita, $1 \leq p \leq \infty$ e

$$\sup_{\substack{\|f\|_p \leq 1 \\ f \text{ simples}}} \left| \int_X f(x)g(x)\, dx \right| = C < \infty,$$

então $g \in L^{p'}(X)$ e $\|g\|_{p'} = C$.

Lema 16. Considere $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida σ-finita, φ uma função mensurável, $1 \leq q \leq \infty$ e $C \in \mathbb{R}_+$. Vale $\|\varphi\|_q \leq C$ se, e somente se, tivermos para qualquer $g \in L^{q'}(X)$

$$\int_X |\varphi(x)g(x)|\, dx \leq C \cdot \|g\|_{q'}. \tag{11}$$

Demonstração. A ida é devido à Desigualdade de Hölder (cf. Teorema 1.18, pág. 24). Para a volta, note que φ é integrável sobre qualquer conjunto E de medida finita, pois tomando $g = \chi_E \in L^{q'}(X)$ em (11)

$$\int_E |\varphi(x)|\, dx = \int_X |\varphi(x)\chi_E(x)|\, dx \leq C \cdot \|\chi_E\|_{q'} < \infty,$$

Além disso, temos

$$\sup_{\substack{\|g\|_{q'} \leq 1 \\ g \text{ simples}}} \left| \int_X \varphi(x)g(x)\, dx \right| \leq \sup_{\substack{\|g\|_{q'} \leq 1 \\ g \text{ simples}}} \int_X |\varphi(x)g(x)|\, dx \leq \sup_{\substack{\|g\|_{q'} \leq 1 \\ g \text{ simples}}} C \cdot \|g\|_{q'} = C,$$

seguindo do Lema 15 que $\|\varphi\|_q \leq C$. □

Demonstração do Teorema 14. Podemos assumir $f \in L^p(\mathbb{R}_{>0})$ e $g \in L^{p'}(\mathbb{R}_{>0})$, pois caso contrário não há nada para provar. Pelo Teorema de Fubini-Tonelli (pág. 22)[3]

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^\infty |f(x)g(y)N(x,y)|\, dx\, dy &= \int_0^\infty \int_0^\infty y|f(yw)g(y)|N(yw,y)\, dw\, dy \\
&= \int_0^\infty N(w,1) \left(\int_0^\infty |f(yw)g(y)|\, dy \right) dw \\
&\leq \int_0^\infty N(w,1)\|\delta_w f\|_p \|g\|_{p'}\, dw,
\end{aligned} \tag{12}$$

sendo que em (12) usamos a Desigualdade Hölder (Teorema 1.18, pág. 24). Neste momento, fixamos $w \in \mathbb{R}_{>0}$ e separamos a prova em dois casos.

Caso 1. $1 \leq p < \infty$. Após a mudança de variável $x = yw$, obtemos do Teorema 1 (pág. 87)

$$\|\delta_w f\|_p = \left(\int_0^\infty |f(yw)|^p\, dx \right)^{1/p} = w^{-1/p} \left(\int_0^\infty |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p} = w^{-1/p}\|f\|_p. \tag{13}$$

O resultado segue substituindo (13) em (12), invocando (8).

Caso 2. $p = \infty$. Aqui a conclusão é imediata, afinal $\|\delta_w f\|_\infty = \|f\|_\infty$.

Por fim, as estimativas de (10) decorrem de (9) e do Teorema 16 (pág. 94). □

[3] Dado $r \in \mathbb{R}_{>0}$, definimos a função $\delta_r f$ por $\tau_r f(x) = f(rx)$ para cada $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Observação 17. Se $N(x,y)$ é um núcleo homogêneo de grau -1, então

$$\int_0^\infty N(x,1)x^{-1/p}\,dx = \int_0^\infty N(1,y)y^{-1/p'}\,dy$$

De fato, usando a homogeneidade de $N(x,y)$ e fazendo a mudança de variável $y = 1/x$

$$\int_0^\infty N(x,1)x^{-1/p}\,dx = \int_0^\infty N(1,1/x)x^{-1-1/p}\,dx = \int_0^\infty N(1,y)y^{1+1/p}y^{-2}\,dy.$$

Corolário 18 (Desigualdades de Hardy). Suponha que $1 \le p < \infty$, $r > 0$ e que h é uma função mensurável não negativa definida em $(0,\infty)$. Então

$$\int_0^\infty x^{-r-1}\left(\int_0^x h(y)\,dy\right)^p dx \le \left(\frac{p}{r}\right)^p \int_0^\infty x^{p-r-1}h(x)^p\,dx, \tag{14}$$

$$\int_0^\infty x^{r-1}\left(\int_x^\infty h(y)\,dy\right)^p dx \le \left(\frac{p}{r}\right)^p \int_0^\infty x^{p+r-1}h(x)^p\,dx. \tag{15}$$

Chamaremos (14) de a **primeira desigualdade de Hardy** e (15) de a **segunda desigualdade de Hardy**.

Demonstração. Para provar as duas desigualdades, invocaremos o Teorema 14. Para verificar (14), basta considerar o núcleo $N(x,y) = x^{-(r+1)/p}\cdot y^{(r+1)/p-1}\cdot\chi_{(0,x)}(y)$ e a função $h(x) = x^{1-(r+1)/p}f(x)$. Já para provarmos a desigualdade (15), podemos definir o núcleo $N(x,y) = x^{(r-1)/p}\cdot y^{-1-(r-1)/p}\cdot\chi_{(x,\infty)}(y)$ e a função $h(x) = x^{1+(r-1)/p}f(x)$. $\square$

Lema 19. Considere $1 < p < \infty$ e $\delta < 1/p'$. Para $f \in L^p(\mathbb{R}_{>0})$, defina $V_\delta f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$

$$V_\delta f(y) \overset{\text{def}}{=} y^{\delta-1}\int_0^y x^{-\delta}|f(x)|\,dx.$$

Então, existem constantes C_1 e C_2, com $C_i = C_i(p,\delta)$ para $i \in \{1,2\}$, tais que

$$\|V_\delta f\|_p \le C_1\|f\|_p \quad e \quad V_\delta f(y) \le C_2 y^{-1/p}\|f\|_p.$$

Demonstração. Note que $V_\delta f(y) = \int_0^\infty N(x,y)f(x)\,dx$, com $N(x,y) \overset{\text{def}}{=} x^{-\delta}y^{\delta-1}\chi_{(0,y)}(x)$ sendo um núcleo homogêneo de grau -1. Temos

$$C_1 \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty N(x,1)x^{-1/p}\,dx = \int_0^1 x^{-\delta}x^{-1/p}\,dx = \int_0^1 x^{1/p'-\delta-1}\,dx = \frac{p'}{1-p'\delta} < \infty$$

e pelo Teorema 14 vale $\|V_\delta f\|_q \le C\|f\|_q$. Para provar a segunda desigualdade, observamos que pela Desigualdade de Hölder (Teorema 1.18, pág. 24)

$$V_\delta f(y) = y^{\delta-1}\int_0^y x^{-\delta}|f(x)|\,dx \le y^{\delta-1}\left(\int_0^y x^{-\delta p'}\,dx\right)^{1/p'}\|f\|_p \tag{16}$$

e sendo $-1 < -\delta p'$

$$\left(\int_0^y x^{-\delta p'}\,dx\right)^{1/p'} = \left(\frac{1}{1-\delta p'}\right)^{1/p'} y^{(1-\delta p')/p'} = C_2\; y^{-1/p}. \tag{17}$$

De (16) e de (17), a prova do lema está completa. $\square$

Referências

[Bartle 1995]BARTLE, R. G. *The elements of integration and Lebesgue measure.* New York: New York: Wiley, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 87.

[Bennett e Sharpley 1988]BENNETT, C.; SHARPLEY, R. *Interpolation of Operators.* Orlando, Florida: Academic Press, 1988. 469 p. (Pure and Applied Mathematics, 129). ISBN 978-0-12-088730-9. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 39.

[Carneiro 2015]CARNEIRO, E. Interpolação de operadores. *Notas de aula - Análise Harmônica*, IMPA, 2015. Citado na página 57.

[Folland 1999]FOLLAND, G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* 2nd. ed. New York: Wiley-Interscience, 1999. 416 p. (Pure and Applied Mathematics). ISBN 0-471-31716-0. Citado 10 vezes nas páginas 17, 18, 19, 20, 22, 24, 25, 87, 88 e 89.

[Grafakos 2014]GRAFAKOS, L. *Classical Fourier Analysis.* 3nd. ed. New York: Springer-Verlag New York, 2014. 492 p. (Graduate Texts in Mathematics, 249). ISBN 978-1-4419-1855-0. Citado 6 vezes nas páginas 27, 39, 57, 66, 74 e 89.

[Hardy e Littlewood 1928]HARDY, G. H.; LITTLEWOOD, J. E. Some properties of fractional integrals. I. *Mathematische Zeitschrift*, v. 27, p. 565–606, 1928. Disponível em: <eudml: doc/167995>. Citado 5 vezes nas páginas 15, 57, 82, 83 e 86.

[Hunt 1966]HUNT, R. On $L(p, q)$ spaces. *Einseignement Math*, v. 2, n. 12, p. 249–276, 1966. Disponível em: <doi: 10.5169/seals-40747>. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 56.

[Isnard 2009]ISNARD, C. *Introdução à Medida e Integração.* 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. (Projeto Euclides). Citado na página 87.

[Kalton, Peck e Roberts 1984]KALTON, N. J.; PECK, N. T.; ROBERTS, J. W. *An F-space Sampler.* Cambridge University Press, 1984. (London Mathematical Society Lecture Note Series). Disponível em: <doi: 10.1017/CBO9780511662447>. Citado na página 89.

[Liang, Liu e Yang 2011]LIANG, Y. Y.; LIU, L. G.; YANG, D. C. An off-diagonal Marcinkiewicz interpolation theorem on Lorentz spaces. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, v. 27, n. 8, p. 1477–1488, 2011. Disponível em: <doi: 10.1007/s10114-011-0287-1>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 57 e 74.

[Lorentz 1950]LORENTZ, G. G. Some New Functional Spaces. *Annals of Mathematics*, v. 51, n. 1, p. 37–55, 1950. Disponível em: <doi: 10.2307/1969496>. Citado na página 15.

[Lorentz 1951]LORENTZ, G. G. On the theory of spaces Λ. *Pacific Journal of Mathematics*, v. 1, n. 3, p. 411 – 429, 1951. Disponível em: <doi: 10.2140/pjm.1951.1.411>. Citado na página 15.

[Marcinkiewicz 1939]MARCINKIEWICZ, J. Sur l'interpolation d'operations. *C. R. Acad. Sci. Paris*, v. 208, p. 1272—-1273, 1939. Disponível em: <gallica: 12148/bpt6k6238835z/f16>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 74.

[Riesz 1910]RIESZ, F. Untersuchungen über systeme integrierbarer funktionen. *Mathematische Annalen*, v. 69, p. 449–497, 1910. Disponível em: <doi: 10.1007/BF01457637>. Citado na página 15.

[Riesz 1928]RIESZ, M. Sur les fonctions conjuguées. *Mathematische Zeitschrift*, v. 27, p. 218–244, 1928. Disponível em: <doi: 10.1007/BF01171098>. Citado na página 83.

[Stein e Shakarchi 2010]STEIN, E.; SHAKARCHI, R. *Complex Analysis*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2010. (Princeton lectures in analysis). ISBN 9781400831159. Citado 2 vezes nas páginas 88 e 89.

[Stein e Weiss 1958]STEIN, E.; WEISS, G. Fractional integrals on n-dimensional euclidean space. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 7, p. 503–514, 1958. ISSN 0022-2518. Disponível em: <jstor: 24900519>. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 83.

[Stein 1970]STEIN, E. M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1970. 304 p. (Princeton Mathematical Series, 30). ISBN 9780691080796. Citado na página 81.

[Stein e Shakarchi 2011]STEIN, E. M.; SHAKARCHI, R. *Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2011. (Princeton Lectures in Analysis, 4). ISBN 9780691113876. Citado na página 93.

[Stein e Weiss 1959]STEIN, E. M.; WEISS, G. An extension of a theorem of marcinkiewicz and some of its applications. *Journal of Mathematics and Mechanics*, Indiana University Mathematics Department, v. 8, n. 2, p. 263–284, 1959. ISSN 00959057. Disponível em: <jstor: 24900560>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 58 e 74.

[Wilansky 1978]WILANSKY, A. *Modern Methods in Topological Vector Spaces*. United States of America: McGraw-Hill, 1978. ISBN 0-07-070180-6. Citado 2 vezes nas páginas 89 e 90.

[Zygmund 1989]ZYGMUND, A. S. *On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1989. 214–239 p. ISBN 978-94-009-1045-4. Disponível em: <doi: 10.1007/978-94-009-1045-4>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 74.