

Luiz Marcelo Corrêa Junior

Uma Introdução ao Estudo de Topoi

Florianópolis

2022

Luiz Marcelo Corrêa Junior

Uma Introdução ao Estudo de Topoi

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática
Licenciatura em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Paulinho Demeneghi

Florianópolis
2022

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	3
2	CATEGORIAS	5
2.1	Definição e Exemplos	5
2.2	Monomorfismos, Epimorfismos e Isomorfismos	11
3	PRELIMINARES PARA TOPOS	17
3.1	Objetos iniciais e finais	17
3.2	Dualidade	19
3.3	Produtos e Coprodutos	21
3.4	Equalizadores e Co-equalizadores	29
3.5	Limites e Colimites	34
3.6	Pullback e Pushout	37
3.7	Completude	43
3.8	Exponenciação	47
4	INTRODUZINDO TOPOI	52
4.1	Subobjetos	52
4.2	Classificação de subobjetos	54
4.3	Definição de Topos	57

1 INTRODUÇÃO

Aparentemente, a noção de topos¹ surgiu de duas linhas de desenvolvimento diferentes nos campos de geometria algébrica e teoria das categorias. Por volta de 1963, Bill Lawvere estava tentando axiomatizar a categoria dos conjuntos. A ideia de Lawvere era entender as propriedades interessantes sobre conjuntos de um ponto de vista estritamente categórico. Este projeto foi interessante, pois teoria de categorias concentra-se em objetos e morfismos. Assim, analisar a teoria de conjuntos de um ponto de vista categórico força uma mudança radical de ponto de vista.

Em 1966 Lawvere encontrou um estudo de Alexander Grothendieck, que tinha surgido com um conceito de “topos” no seu trabalho em geometria algébrica. Em geometria algébrica frequentemente interessa-se não em quando algo é verdade, mas onde é verdade. Por exemplo, dadas duas funções sobre um espaço, onde elas coincidem? Então Grothendieck deu origem ao conceito dele de topos. Informalmente falando, esse conceito consiste em um “local” onde é possível trabalhar com diversos conceitos matemáticos interessantes.

Por volta de 1971, Lawvere e Myles Tierney tinham trabalhado no conceito original de topos (agora conhecido como “Topos de Grothendieck”) generalizando e destrinchando esse conceito até surgir um novo conceito de topos. Este novo conceito é, por vezes, chamado de “topos elementar”, para distinguir essa noção de topos do conceito introduzido por Grothendieck. No entanto, esse novo conceito é frequente chamado apenas de Topos e é essa nomenclatura que iremos adotar neste trabalho.

Como mencionado, um dos berços da teoria de topos é a geometria algébrica e, em particular, o estudo de feixes. Diversos matemáticos fazem estudos sobre topos através de ferramentas dadas pela teoria de feixes, porém neste trabalho iremos usar conhecimentos dados pela teoria de categorias para introduzir, definir e trabalhar com topos. Por sua vez, esse conhecimento foi dado através de leituras de livros mencionados na bibliografia e também de reflexões sobre o assunto.

O trabalho foi dividido em três capítulos. No primeiro são apresentados os conceitos básicos que usaremos durante o decorrer do texto. Já no segundo capítulo apresentamos novos conceitos e trabalhamos com eles afim de adquirir uma certa familiaridade com os mesmos. Por fim, introduzimos os últimos dois conceitos necessários para definir um topos e em seguida é dado a definição, referida anteriormente, e exemplos de topoi.

No decorrer do texto fica claro que o intuito do trabalho é dar recursos suficientes ao leitor para entender o que é um topos e conseguir verificar por si só se uma dada estrutura matemática é, ou não, um topos. Além disso, procura-se incentivar o estudo de

¹ “Topos” é uma palavra singular que, do grego, significa “lugar”. O plural de “topos” é “topoi”.

topos afim de identificar estruturas e algumas de suas propriedades.

2 CATEGORIAS

A ideia aqui é preparar o leitor para entender sobre todos os conceitos abordados na definição de topos. Sendo assim vamos introduzir uma estrutura abstrata que seja a mais genérica possível, porém que tenha algumas propriedades interessantes para podermos introduzir noções necessárias para contemplar a compreensão de todos esses conceitos desejados.

Devido a toda essa abstração a “linguagem” de categorias também é conhecida como *abstract nonsense* (abstrato sem sentido), assim originalmente nomeado pelo matemático Norman Steenrod. A razão para a escolha desse termo se dá pelo fato de que a linguagem categórica é totalmente voltada ao estudo da estrutura da mesma, e não ao significado do que representa.

Sendo assim podemos dizer que categoria é uma coleção de objetos e morfismos entre eles, satisfazendo algumas condições naturais para obtermos generalizações de estruturas conhecidas. A natureza desses objetos são indefinidas, ou seja, basicamente podemos pensar nos objetos como sendo qualquer coisa. Já os morfismos são interações entre esses objetos, que satisfazem as condições naturais citadas anteriormente. Basicamente estamos falando de “coisas que interagem com outras coisas” sem necessariamente se preocupar com o que essas “coisas” são.

2.1 DEFINIÇÃO E EXEMPLOS

Definição 2.1.1. *Uma categoria \mathcal{C} consiste em:*

- Uma classe chamada de classe dos objetos de \mathcal{C} e denotada por $\text{Obj}(\mathcal{C})$;
- Uma classe chamada de classe de morfismos em \mathcal{C} e denotada por $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$;
- Operações que atribuem a cada morfismo f em $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$ objetos A e B chamados respectivamente de domínio de f e contradomínio de f . Nesse caso representamos f como:

$$f : A \rightarrow B \text{ ou } A \xrightarrow{f} B$$

Sendo assim, também podemos dizer que $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ com $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ sendo definido como a classe de todos os morfismos de A para B em \mathcal{C} .

- Uma operação que atribui a cada par de morfismos $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, um morfismo $g \circ f : A \rightarrow C$, chamado composição de f e g , satisfazendo a seguinte condição:

Lei associativa: Se A, B, C e D são objetos de \mathcal{C} e f, g e h são morfismos de \mathcal{C} tais que $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ e $h : C \rightarrow D$ então temos que:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f). \quad (2.1)$$

- Uma operação que atribui para cada objeto A em $\text{Obj}(\mathcal{C})$ um morfismo $1_A : A \rightarrow A$ em $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$, chamado de identidade de A , satisfazendo a seguinte condição:

Lei da identidade: Se B, C são objetos de \mathcal{C} e f, g são morfismos \mathcal{C} tais que $f : B \rightarrow A$ e $g : A \rightarrow C$ então temos que:

$$1_A \circ f = f \quad e \quad g \circ 1_A = g \quad (2.2)$$

Para facilitar a leitura e compreensão sobre categorias algumas observações devem ser levadas em consideração:

Em Teoria de Categorias os morfismos também são chamados de setas, pois muitas vezes temos um certo apelo visual dos morfismos por diagramas representados por setas.

Mais precisamente, um diagrama em uma categoria \mathcal{C} qualquer é uma figura representada por setas e símbolos. Cada seta representa um morfismo e a mesma geralmente é acompanhada de um índice, o qual indica o morfismo que a seta representa. Já os símbolos ficam postos nas extremidades das setas. Se a seta representa um morfismo f em \mathcal{C} então na ponta da seta é posto o símbolo que representa o o contradomínio de f . Já na outra extremidade, da seta em questão, é posto o símbolo que representa o domínio de f .

Por exemplo, se tomarmos A, B objetos de uma categoria \mathcal{C} e $f : A \rightarrow B$, podemos representar f pelo seguinte diagrama:

$$A \xrightarrow{f} B$$

Para um outro exemplo simples tome A, B e C objetos de uma categoria \mathcal{C} e $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ morfismos em \mathcal{C} . Sendo assim, podemos representar a composição $g \circ f$ por:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ g \circ f \swarrow & & \searrow f \\ C & \xleftarrow{g} & B \end{array}$$

Quando o diagrama mencionado de fato expressa a situação desejada dizemos que o diagrama comuta.

Dados A e B objetos de uma categoria \mathcal{C} e $f : A \rightarrow B$ dizemos que “ f é um morfismo que vai de A para B ”. Além disso, como mencionado acima, chamamos A de “domínio de f ” e B de “contradomínio de f ”. Isso se dá pois os objetos lembram conjuntos e os morfismos lembram as funções entre esses conjuntos. Sendo assim carregamos as nomenclaturas de Teoria dos Conjuntos. Esse fato fica ainda mais evidente com o seguinte exemplo:

Exemplo 2.1.1. Chamamos de **Set** a categoria em que cada objeto é um conjunto, os morfismos são todas as funções entre esses conjuntos, e as composições de morfismos são as composições usuais de funções.

Veja que **Set** é de fato uma categoria, pois contém objetos e morfismos bem definidos assim como a composição entre esses morfismos. Além disso sabemos que dadas duas funções $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ temos que essas funções determinam um morfismo $f \circ g$ tal que o domínio da função $f \circ g$ é o domínio da função g e o contradomínio da função $f \circ g$ é igual ao contradomínio da função f . Sabemos também que a composição usual de funções é associativa, e a função identidade é o morfismo identidade nessa categoria.

Existem vários exemplos de categorias em que os objetos são conjuntos com propriedades adicionais, e os morfismos são funções entre esses conjuntos, que são compatíveis com as propriedades adicionais desses conjuntos, em que a composição de morfismos é a composição usual de funções. Sabemos que a composição usual de funções é bem definida e tem propriedade associativa, logo, para verificar que uma categoria com essa configuração é de fato uma categoria, basta verificarmos que existe o morfismo identidade na mesma.

Exemplo 2.1.2. **Ring** é a categoria em que os objetos são anéis com unidade, os morfismos são homomorfismos de anéis com unidade e a composição é a composição usual de funções.

Veja que para todo A anel a função identidade de A é um homomorfismo de anéis, e é tal que para qualquer outro morfismo de anéis $f : A \rightarrow B$, com B anel:

$$f \circ id_A = f = id_B \circ f$$

Logo, temos que id_A é um morfismo identidade em **Ring**. Sendo assim temos que **Ring** tem morfismo identidade, e sabemos de Teoria dos Anéis que **Ring** satisfaz as outras condições necessárias para ser uma categoria. Logo, **Ring** é de fato uma categoria.

Exemplo 2.1.3. **Top** é a categoria em que os objetos são os espaços topológicos, os morfismos são as funções contínuas entre esses espaços, e a composição de morfismos é a composição usual de funções. Veja que mais uma vez os morfismos são funções e as composições entre morfismos são composições usuais de funções. Além disso, sabemos que composições de funções contínuas são contínuas. Sendo assim basta encontrar 1_A para todo objeto A de **Top**. Porém é fácil notar que $1_A = id_A$, pois id_A é uma função contínua de A para A , e dados morfismos $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow A$ sabemos que $f \circ id_A = f$ e $id_A \circ g = g$.

Logo, id_A é de fato um morfismo identidade de A . Portanto, concluímos que **Top** é realmente uma categoria.

Exemplo 2.1.4. Seja K um corpo. Vec_K é a categoria em que os objetos são todos os espaços vetoriais sobre K , os morfismos são todas as transformações K -lineares entre esses espaços, e a composição de morfismos é a composição usual de funções. Além disso,

sabemos que a composição de transformações K -lineares é uma transformação K -linear. Mais uma vez estamos lidando com funções e composições usuais de funções, sendo assim basta mostrar que para todo objeto A de Vec_K existe um morfismo identidade de A para A . Porém, mais uma vez, a função identidade faz o papel de morfismo identidade, pois a função identidade é uma transformação K -linear e para qualquer morfismo $f : A \rightarrow B$ em Vec_K temos que:

$$f \circ id_A = f = id_B \circ f$$

Sendo assim Vec_K é uma categoria.

Exemplo 2.1.5. Outra estrutura conhecida é a categoria Pos , em que os objetos são conjuntos parcialmente ordenados, os morfismos são funções monótonas, e as composições de morfismos são composições usuais de funções. Veja que mais uma vez nos apoiamos nas funções e suas composições. Além disso sabemos que composições de funções monótonas são funções monótonas. Portanto, precisamos verificar que para todo objeto A de Pos existe um morfismo identidade de A para A . Porém, como A é um conjunto parcialmente ordenado, sabemos que a função identidade de A para A é uma função monótona que satisfaz a propriedade de um morfismo identidade de A . Portanto, Pos é mais uma categoria na nossa lista de exemplos.

Seguindo a mesma ideia dos últimos exemplos dados, podemos incluir algumas estruturas conhecidas como exemplos de categorias. Por exemplo, a categoria Grp em que os objetos são grupos, os morfismos são homomorfismos de grupos e a composição de morfismos é a composição usual de funções. Outro exemplo importante é o da categoria Mon em que os objetos são monóides, os morfismos são homomorfismos de monóides, e a composição de morfismos é a composição usual de funções.

Exemplo 2.1.6. Chamamos de $\mathbf{1}$ a categoria que tem somente um objeto A e um morfismo $f : A \rightarrow A$. Veja que não há nada de errado com essa categoria. Tudo o que precisamos é definir como se dá a composição em $\mathbf{1}$. Porém só temos uma opção, pois $f \circ f : A \rightarrow A$ é um morfismo em $\mathbf{1}$ e só existe um morfismo nessa categoria. Logo, $f \circ f = f$. Com isso, concluímos que $1_A = f$. Portanto, verificamos que $\mathbf{1}$ de fato é uma categoria.

Exemplo 2.1.7. Chamamos de $\mathbf{2}$ a categoria que tem exatamente dois objetos A, B e 3 morfismos $f : A \rightarrow A$, $g : A \rightarrow B$ e $h : B \rightarrow B$. Assim como o exemplo da categoria anterior essa categoria é um exemplo muito básico, pois nela para cada par de objetos distintos existe somente um morfismo entre eles. Com isso, é fácil notar como se dá a composição entre os morfismos. Veja que precisamos que existam os morfismos 1_A e 1_B , porém só existe um morfismo de A para A , que é o morfismo f , e um morfismo de B para B , que é o morfismo h . Logo, $1_A = f$ e $1_B = h$. Agora só precisamos descrever o que acontece compondo f com g e g com h . Mais uma vez a composição é dada de forma

imediate, pois $f = 1_A$ e $h = 1_B$. Sendo assim, pela definição de categorias, temos que $g \circ 1_A = g = 1_B \circ g$. Então de fato $\mathbf{2}$ é uma categoria.

Veja que podemos configurar a categoria $\mathbf{2}$ para que os morfismos entre os objetos sejam intuitivos devido a nossa familiaridade com o conjunto dos números naturais. Para isso chamamos os objetos A e B de 0 e 1 respectivamente. Além disso, podemos representar todo morfismo de $\mathbf{2}$ por um par em $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$, de modo que a primeira coordenada indica o domínio e a segunda indica o contradomínio desse morfismo. Sendo assim, na categoria $\mathbf{2}$, temos os morfismos $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.

Note também que podemos estender essa ideia para uma categoria com um número finito de elementos. Então para construir a categoria \mathbf{n} tomamos uma coleção de n objetos (com $n \in \mathbb{N}$) que são representados pelos números de 0 a $n - 1$, de tal forma que para cada A e B , representações de objetos dessa coleção, temos que, se $A \leq B$ existe um único morfismo (A, B) de A para B , caso contrário $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ é vazio. Veja que, se temos um par de morfismos representados pelos pares de naturais $(A, B), (B, C) \in \mathbb{N}^2$ então temos que $A \leq B \leq C$ e também que $(B, C) \circ (A, B) : A \rightarrow C$ é um morfismo de A para C , porém sabemos que só existe um morfismo de um objeto para outro, ou seja, $(B, C) \circ (A, B) = (A, C)$. Sendo assim conseguimos uma classe de categorias “parecidas”, e temos então diversos exemplos de categorias que ajudam a nos familiarizarmos com a linguagem categórica.

Exemplo 2.1.8. *Seja \mathbf{A} um conjunto e \sim uma relação sobre \mathbf{A} satisfazendo a propriedade reflexiva e a transitiva. Sendo assim, podemos construir uma categoria em que os objetos são elementos de \mathbf{A} e para cada par de objetos A e B , tal que $A \sim B$, existe um único morfismo de A para B que é o elemento $(A, B) \in \mathbf{A} \times \mathbf{A}$. Se tivermos que A não está relacionado com B pela relação \sim em \mathbf{A} então não existe morfismo de A para B . Primeiramente, podemos notar que, pela definição dessa categoria, existe um único morfismo (A, A) de A para A que será, obrigatoriamente, 1_A , pois $A \in \mathbf{A}$ e \sim é uma relação em \mathbf{A} satisfazendo a propriedade reflexiva, ou seja, $A \sim A$.*

A composição também se dá de forma intuitiva. Se tivermos A, B e C elementos de \mathbf{A} (objetos da categoria em questão) tal que $A \sim B$ e $B \sim C$ podemos compor o morfismo (A, B) com o (B, C) obtendo o morfismo $(B, C) \circ (A, B) : A \rightarrow C$ que é o par $(A, C) \in \mathbf{A} \times \mathbf{A}$, pois como $A \sim B$ e $B \sim C$ e \sim satisfaz a propriedade transitiva então $A \sim C$.

Sendo assim verificamos que de fato conseguimos construir uma categoria dados um conjunto e uma relação de reflexiva e transitiva sobre esse conjunto. Denotamos essa categoria por (\mathbf{A}, \sim) .

Veja que os exemplos das categorias \mathbf{n} são casos específicos do último exemplo mostrado. Basta tomarmos (\mathbf{A}, \sim) como sendo $(\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}, \leq)$.

Para obter mais exemplos de categorias podemos alterar estruturas já conhecidas afim de satisfazer a definição de uma categoria. Em teoria dos conjuntos, por exemplo, podemos obter um conjunto novo retirando elementos de um conjunto conhecido, assim obtendo um subconjunto do conjunto inicial. Em categorias também podemos usar essas mesmas ideias. Sendo assim podemos definir subcategorias.

Definição 2.1.2. *Seja \mathcal{C} uma categoria. Dizemos que uma coleção de objetos e morfismos \mathcal{B} é uma subcategoria de \mathcal{C} se:*

- (i) *todo objeto de \mathcal{B} é objeto de \mathcal{C} ;*
- (ii) *para todos A e B objetos quaisquer de \mathcal{B} então a coleção de morfismos de A para B em \mathcal{B} está contida na coleção de morfismos de A para B em \mathcal{C} ;*
- (iii) *dados A, B e C objetos em \mathcal{B} tal que existam morfismos $f : A \rightarrow B$, $g : C \rightarrow A$ em \mathcal{B} , temos que $f \circ g$ é um morfismo em \mathcal{B} ;*
- (iv) *dados A, B e C objetos em \mathcal{B} tal que existam morfismos $f : A \rightarrow B$, $g : C \rightarrow A$ em \mathcal{B} , temos que $f \circ g$ em \mathcal{B} é o mesmo que $f \circ g$ em \mathcal{C} .*

Definição 2.1.3. *Seja \mathcal{C} uma categoria. Dizemos que \mathcal{B} é uma subcategoria completa de \mathcal{C} se \mathcal{B} é uma subcategoria de \mathcal{C} e para quaisquer objetos A e B em \mathcal{B} tem-se que a coleção de morfismos de A para B em \mathcal{C} é igual a coleção de morfismos de A para B em \mathcal{B} .*

Exemplo 2.1.9. *Finset é a categoria em que os objetos são conjuntos finitos, os morfismos são funções entre esses conjuntos, e a composição de morfismos é a composição usual de funções (que é associativa). Perceba que para qualquer objeto A de Finset podemos tomar a função $id_A : A \rightarrow A$ tal que $id_A(x) = x$ para todo $x \in A$. Com isso temos que para qualquer B objeto de Finset e $f : A \rightarrow B$ morfismo em Finset temos que:*

$$f \circ id_A = f = id_B \circ f$$

Sendo assim temos que $id_A = 1_A$ para todo objeto A de Finset. Logo, Finset de fato é uma categoria.

*Note que todo objeto de Finset é um objeto de **Set**. Dados A, B objetos de Finset temos que a coleção de morfismos entre A e B é a coleção de todas as funções de A para B , que é exatamente a mesma coleção de morfismos de A para B em **Set**. Veja que se tomarmos mais um objeto C em Finset podemos tomar funções $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow A$, ou seja, morfismos f e g em Finset e compor g com f obtendo a função $f \circ g : C \rightarrow B$ que é um morfismo em Finset. Note que como f e g são funções entre conjuntos então f e g também são morfismos em **Set**, e como a composição em **Set** e em Finset são a mesma (composição usual de funções) então $f \circ g$ em Finset é o mesmo que $f \circ g$ em **Set**.*

*Portanto Finset é uma subcategoria completa de **Set**.*

Exemplo 2.1.10. Outra subcategoria completa de **Set** é **Nonset** que consiste em uma categoria onde os objetos são conjuntos não vazios, os morfismos são todas as funções entre esses conjuntos e a composição é a composição usual de funções. Podemos mostrar que **Nonset** é uma categoria e, em particular, uma subcategoria completa de **Set**, da mesma maneira como fizemos com **Finset**.

Analisando os exemplos de categorias podemos nos perguntar se em uma categoria pode existir mais de um morfismo identidade para algum objeto. Porém a seguinte proposição nos dá a resposta:

Proposição 2.1.1. *Seja \mathcal{C} uma categoria. Se A é um objeto qualquer de \mathcal{C} então existe um único morfismo identidade de A em \mathcal{C} .*

Demonstração. Tome \mathcal{C} uma categoria e A um objeto qualquer de \mathcal{C} . Suponha que existem $1_A, 1'_A : A \rightarrow A$ morfismos identidades de A . Sendo assim temos que:

$$1_A = 1_A \circ 1'_A = 1'_A$$

Portanto $1_A = 1'_A$. Logo, para todo objeto A de \mathcal{C} , só existe um morfismo identidade de A . \square

Vimos diversos exemplos de categorias em que os morfismos são funções, que por sua vez podemos classificar de diversas maneiras. Isso nos dá incentivo para tentar generalizar essas classificações de funções usando linguagem categórica. Esse incentivo nos leva às próximas seções.

2.2 MONOMORFISMOS, EPIMORFISMOS E ISOMORFISMOS

O foco nessa seção é reformular algumas classificações de funções obtidas em Teoria dos Conjuntos, afim de usá-las para a classificação de alguns morfismos em uma categoria. Esse raciocínio continuará sendo utilizado nos próximos capítulos, porém precisaremos do auxílio das noções a seguir.

Dados A e B conjuntos dizemos que uma função $f : A \rightarrow B$ é injetora se para cada $x, y \in A$ temos que $f(x) = f(y)$ implica em $x = y$. Já em uma categoria os objetos não necessariamente são conjuntos (assim como morfismos não necessariamente são funções), e por isso não podemos garantir que um objeto da categoria terá elementos para classificarmos o morfismo desta maneira. No entanto, a proposição a seguir nos ajudará a reformular esta definição em linguagem categórica.

Proposição 2.2.1. *Sejam A e B conjuntos e $f : A \rightarrow B$ função. Tem-se que as seguintes sentenças são equivalentes:*

(i) f é injetora;

(ii) f é cancelável à esquerda, isto é, dadas funções g, h tais que $f \circ g = f \circ h$ temos que $g = h$;

(iii) f tem inversa à esquerda, isto é, existe uma função f' tal que $f' \circ f = id_A$.

Demonstração. ((i) \Rightarrow (ii)) Suponha que $f : A \rightarrow B$ é uma função injetora. Tome funções $g, h : C \rightarrow A$ tal que $f \circ g = f \circ h$. Sendo assim, dado um elemento qualquer $c \in C$ temos que $f(g(c)) = f(h(c))$. Porém, f é injetiva, Logo, temos que $g(c) = h(c)$. Da arbitrariedade de $c \in C$ temos que $g = h$. Portanto f é cancelável à esquerda.

((ii) \Rightarrow (iii)) Suponha que $f : A \rightarrow B$ é cancelável à esquerda. Tome um elemento fixo $a \in A$ e para cada $x \in Im(f)$ escolha um y_x tal que $f(y_x) = x$. Considere agora a função $f' : B \rightarrow A$ dada da seguinte forma:

$$f'(x) = \begin{cases} y_x, & \text{se } x \in Im(f) \\ a, & \text{se } x \notin Im(f) \end{cases}$$

Sendo assim temos que, para todo $z \in A$, pela definição da função f' , temos que $f'(f(z)) = y_{f(z)}$, pois $f(z) \in Im(f)$. Portanto,

$$(f \circ (f' \circ f))(z) = f(f'(f(z))) = f(y_{f(z)}) = f(z) = (f \circ id_A)(z), \forall z \in A.$$

Ou seja, $f \circ (f' \circ f) = f \circ id_A$. Como f é cancelável à esquerda, e $f \circ (f' \circ f) = f \circ id_A$, temos que $f' \circ f = id_A$, ou seja, f tem inversa à esquerda.

((iii) \Rightarrow (i)) Suponha que f tem inversa à esquerda e tome $x_1, x_2 \in A$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$. Se f' é uma inversa à esquerda de f , então temos que:

$$x_1 = id_A(x_1) = (f' \circ f)(x_1) = f'(f(x_1)) = f'(f(x_2)) = (f' \circ f)(x_2) = id_A(x_2) = x_2$$

Logo, para todos par de elementos $x_1, x_2 \in A$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ temos que $x_1 = x_2$. Em outras palavras, f é uma função injetora. \square

Então, de fato, uma função ser cancelável à esquerda é condição necessária e suficiente para a mesma ser injetora, e como só utilizamos composições e funções nessa caracterização, podemos transferir essa ideia para linguagem de categorias.

Definição 2.2.1. Um morfismo $f : A \rightarrow B$ em uma categoria \mathcal{C} é um monomorfismo em \mathcal{C} se para todo par de morfismos “paralelos” $g, h : C \rightrightarrows A$ em \mathcal{C} , a igualdade $f \circ g = f \circ h$ implica em $g = h$.

Exemplo 2.2.1. Na categoria **Set** sabemos que os morfismos são funções, e como a ideia de monomorfismo foi tirada das funções injetoras segue diretamente que em **Set** os monomorfismos são as funções injetoras.

Exemplo 2.2.2. *Seja \mathbf{A} um conjunto e \sim uma relação reflexiva e transitiva sobre esse conjunto. Com isso conseguimos construir a categoria (\mathbf{A}, \sim) , como feito no Exemplo 2.1.8, e ver que todo morfismo nessa categoria é um monomorfismo. Para verificar isso basta tomar A, B e $C \in \mathbf{A}$ tal que $A \sim B$ e $C \sim A$. Com isso podemos tomar um morfismo $(A, B) : A \rightarrow B$ e dois morfismos $h, h' : C \rightarrow A$ tal que $(A, B) \circ h = (A, B) \circ h'$. Porém note que, como $C \sim A$, existe um único morfismo de C para A . Logo, $h = h'$, e portanto (A, B) é cancelável à esquerda. Sendo assim, todo morfismo (A, B) em (\mathbf{A}, \sim) é um monomorfismo.*

Assim, como queríamos transferir a ideia de funções injetoras para a linguagem de categorias, agora queremos a noção de funções sobrejetoras em linguagem categórica. Sendo assim, podemos usar a mesma ideia de funções canceláveis, porém agora a direita.

Proposição 2.2.2. *Sejam A e B conjuntos e f uma função de A para B . Sendo assim são equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) f é sobrejetora;

(ii) f é cancelável à direita, isto é, dadas funções g, h tais que $g \circ f = h \circ f$ temos que $g = h$;

(iii) f tem inversa à direita, isto é, existe uma função f' tal que $f \circ f' = id_A$.

Demonstração. ((i) \Rightarrow (ii)) Suponha que $f : A \rightarrow B$ é uma função sobrejetora. Considere as funções $g, h : B \rightarrow C$ tais que $g \circ f = h \circ f$. Como f é sobrejetora, para cada $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Sendo assim $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y)$. Da arbitrariedade de $y \in B$ segue que $g = h$, ou seja, f é cancelável à direita.

((ii) \Rightarrow (iii)) Suponha que $f : A \rightarrow B$ é cancelável à direita. Sendo assim tome um elemento fixo $a \in A$ e para cada $x \in Im(f)$ escolha um y_x tal que $f(y_x) = x$. Agora, defina uma função $g : B \rightarrow A$ tal que:

$$g(x) = \begin{cases} y_x, & \text{se } x \in Im(f) \\ a, & \text{se } x \notin Im(f) \end{cases}$$

Sendo assim temos que, para todo $z \in A$, pela definição da função g , temos que $g(f(z)) = y_{f(z)}$. Portanto, $((f \circ g) \circ f)(z) = (f \circ (g \circ f))(z) = f(g(f(z))) = f(y_{f(z)}) = f(z) = (id_A \circ f)(z)$, e como f é cancelável à direita temos que $(f \circ g)(z) = id_A(z)$ para todo $z \in A$. Sendo assim g é inversa à direita de f .

((iii) \Rightarrow (i)) Suponha que f tem inversa à direita. Então existe uma função $g : B \rightarrow A$ tal que $f \circ g = id_B$. Sendo assim temos que, para cada $b \in B$, $b = id_B(b) = (f \circ g)(b) = f(g(b))$. Logo, da arbitrariedade de $b \in B$, segue que f é uma função sobrejetora. \square

Sendo assim podemos definir epimorfismos usando a caracterização de ser cancelável à direita.

Definição 2.2.2. *Seja \mathcal{C} uma categoria e f um morfismo em \mathcal{C} . Dizemos que f é um epimorfismo em \mathcal{C} se para todo par de morfismos g, h em \mathcal{C} tal que $g \circ f = h \circ f$ temos que $g = h$.*

Exemplo 2.2.3. *Mais uma vez, em **Set** podemos ver que os epimorfismos são as funções sobrejetoras, já que usamos uma caracterização dessas funções para definir epimorfismos.*

Exemplo 2.2.4. *Seja \mathbf{A} um conjunto e \sim uma relação de reflexiva e transitiva sobre \mathbf{A} . Com isso podemos construir a categoria (\mathbf{A}, \sim) e ver que todo morfismo dessa categoria é um epimorfismo. Para verificar isso basta tomar A, B e $C \in \mathbf{A}$ tal que $A \sim B$ e $B \sim C$. Com isso podemos tomar um morfismo $(A, B) : A \rightarrow B$ e dois morfismos $h, h' : B \rightarrow C$ tal que $h \circ (A, B) = h' \circ (A, B)$. Porém note que, como $B \sim C$, existe um único morfismo de B para C , Logo, $h = h'$, e portanto (A, B) é cancelável à direita. Logo, todo morfismo (A, B) em (\mathbf{A}, \sim) é um epimorfismo.*

Para finalizar este capítulo iremos caracterizar funções que são inversíveis. Para isso precisamos ter em mente a definição de função inversível, ou seja, temos que saber que uma função $f : A \rightarrow B$ é inversível se existe uma função $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$. Agora basta transferir essa noção para linguagem de categorias.

Definição 2.2.3. *Seja \mathcal{C} uma categoria e A, B objetos de \mathcal{C} . Um morfismo $f : A \rightarrow B$ em uma categoria \mathcal{C} é um isomorfismo se existir um morfismo $g : B \rightarrow A$ em \mathcal{C} tal que $g \circ f = 1_A$ e $f \circ g = 1_B$.*

Dizemos que dois objetos A, B em \mathcal{C} são isomorfos se existe um isomorfismo entre eles. Denotamos A isomorfo a B por $A \cong B$

Proposição 2.2.3. *Seja \mathcal{C} uma categoria, A, B objetos de \mathcal{C} e $f : A \rightarrow B$ um morfismo em \mathcal{C} . Se f é isomorfismo então existe um único morfismo $f' : B \rightarrow A$ tal que $f \circ f' = 1_B$ e $f' \circ f = 1_A$.*

Demonstração. Seja \mathcal{C} uma categoria, A, B objetos de \mathcal{C} e $f : A \rightarrow B$ um morfismo em \mathcal{C} . Suponha que f é isomorfismo e que existem morfismos $f' : B \rightarrow A$ e $h : B \rightarrow A$ tais que $f \circ f' = 1_B$, $f' \circ f = 1_A$, $f \circ h = 1_B$ e $h \circ f = 1_A$. Sendo assim temos que

$$h = h \circ 1_B = h \circ (f \circ f') = (h \circ f) \circ f' = 1_A \circ f' = f'$$

Logo, $h = f'$, ou seja, dado um isomorfismo $f : A \rightarrow B$ existe um único morfismo $f' : B \rightarrow A$ tal que $f \circ f' = 1_B$ e $f' \circ f = 1_A$.

□

Proposição 2.2.4. *Seja \mathcal{C} uma categoria e, A e B objetos quaisquer de \mathcal{C} . Se A é isomorfo a B então B é isomorfo a A .*

Demonstração. Seja \mathcal{C} uma categoria e, A e B objetos quaisquer de \mathcal{C} . Suponha que A é isomorfo a B . Sendo assim existe um morfismo $f : A \rightarrow B$ e um morfismo $g : B \rightarrow A$ tais que $g \circ f = 1_A$ e $f \circ g = 1_B$. Note que g é um isomorfismo, pois existe o morfismo f tal que $f \circ g = 1_B$ e $g \circ f = 1_A$. Logo, B é isomorfo a A . \square

Proposição 2.2.5. *Seja \mathcal{C} uma categoria, e A , B e C objetos de \mathcal{C} . Se A é isomorfo a B e B é isomorfo a C então A é isomorfo a C .*

Demonstração. Seja \mathcal{C} uma categoria, e A , B e C objetos de \mathcal{C} . Suponha que A é isomorfo a B e B é isomorfo a C . Do fato de que A e B são isomorfos, sabemos que existem morfismos $f : A \rightarrow B$ e $f' : B \rightarrow A$ tais que $f' \circ f = 1_A$ e $f \circ f' = 1_B$. Já do fato de que B é isomorfo a C , sabemos que existem morfismos $g : B \rightarrow C$ e $g' : C \rightarrow B$ tais que $g' \circ g = 1_B$ e $g \circ g' = 1_C$. Sendo assim podemos tomar os morfismos $g \circ f : A \rightarrow C$ e $f' \circ g' : C \rightarrow A$ e notar que $(f' \circ g') \circ (g \circ f) = ((f' \circ g') \circ g) \circ f = (f' \circ (g' \circ g)) \circ f = (f' \circ 1_B) \circ f = f' \circ f = 1_A$ e $(g \circ f) \circ (f' \circ g') = ((g \circ f) \circ f') \circ g' = (g \circ (f \circ f')) \circ g' = (g \circ 1_B) \circ g' = g \circ g' = 1_C$. Logo, $g \circ f$ é um isomorfismo de A para C , ou seja, A e C são isomorfos. \square

Em Teoria dos Grupos, dois grupos são isomorfos se existe um isomorfismo entre eles. Já em Topologia dizemos que dois espaços topológicos são isomorfos se existe um homeomorfismo entre eles. Nesses dois casos os objetos isomorfos tem propriedades e estruturas equivalentes, em outras palavras, alguns resultados obtidos em um objeto serão iguais a resultados obtidos em outro objeto isomorfo ao anterior. Em Teoria de Categorias isomorfismos funcionam da mesma forma, ou seja, dois objetos isomorfos terão diversas propriedades iguais. Sendo assim, se existirem objetos isomorfos em uma categoria, podemos escolher qualquer um deles para verificar algumas propriedades. Por esse motivo, em algumas estruturas básicas que tratam de um objeto específico podemos ter que esse objeto é único, a menos de isomorfismo. No sentido de que todo objeto que satisfaz as especificações desta estrutura é isomorfo a outro que satisfaz a mesma especificidade.

Exemplo 2.2.5. *Em \mathbf{Set} os isomorfismos são as funções bijetoras. Para verificar isto tome uma função $f : A \rightarrow B$ em \mathbf{Set} e suponha que $g : B \rightarrow A$ é uma função em \mathbf{Set} tal que $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$.*

Veja que nesse caso f tem inversa à esquerda e portanto, da Proposição 2.2.1, f é injetiva. Note também que f tem inversa à direita e portanto, da Proposição 2.2.2, f é sobrejetora. Sendo assim sabemos que f é de fato bijetora.

Agora vamos mostrar que se f é uma função bijetora então f é um isomorfismo em \mathbf{Set} . Para isso, tome uma função bijetora $f : A \rightarrow B$ e note que, pelo fato de f ser bijetora, existe uma função $f^{-1} : B \rightarrow A$ que é a inversa da função f , ou seja, $f \circ f^{-1} = 1_B$

e $f^{-1} \circ f = 1_A$. Sabemos então que f^{-1} é inversa a esquerda e a direita de f . Sendo assim, f é um isomorfismo em **Set**.

Veja que concluímos que um morfismo em **Set** que é, ao mesmo tempo, monomorfismo e epimorfismo é também isomorfismo. Porém isso nem sempre ocorre.

Exemplo 2.2.6. Tome a categoria **Ring** e considere o morfismo $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ em **Ring** tal que, para todo $z \in \mathbb{Z}$, $i(z) = z$. Para verificar que essa função é um monomorfismo tome um anel A qualquer e dois morfismos $h, h' : A \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $i \circ h = i \circ h'$, e note que para todo $z \in \mathbb{Z}$ temos que $h(z) = i(h(z)) = (i \circ h)(z) = (i \circ h')(z) = i(h'(z)) = h'(z)$, ou seja, $h = h'$. Logo, i é um monomorfismo. Já para mostrar que i é um epimorfismo tome $g, g' : \mathbb{Q} \rightarrow A$ morfismos em **Ring** tal que $g \circ i = g' \circ i$. Sendo assim dado um elemento $p \in \mathbb{Q}$, podemos tomar $m \in \mathbb{Z}$ e um $n \in \mathbb{Z}^*$ tal que $p = \frac{m}{n}$, e enfim verificar que

$$\begin{aligned} g(p) &= g\left(\frac{m}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right) \cdot g(m) = (g(n))^{-1} \cdot g(m) = (g(i(n)))^{-1} \cdot g(i(m)) = \\ &= (g'(i(n)))^{-1} \cdot g'(i(m)) = (g'(n))^{-1} \cdot g'(m) = g'\left(\frac{1}{n}\right) \cdot g'(m) = g'\left(\frac{m}{n}\right) = g'(p) \end{aligned}$$

Portanto $g(p) = g'(p)$ para todo $p \in \mathbb{Q}$, ou seja, $g = g'$. Logo, i também é um epimorfismo.

Porém veja que para existir uma inversa à esquerda, ou a direita, precisa existir um morfismo de anéis $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$, porém sabemos que tal morfismo não existe. Logo, i não tem inversa à direita e nem a esquerda, e portanto i é monomorfismo e epimorfismo mas não é isomorfismo.

No próximo exemplo nos deparamos com uma situação diferente das demais apresentadas. Veremos uma categoria em que todos os isomorfismos são somente as identidades:

Exemplo 2.2.7. Tome a categoria (\mathbb{N}, \leq) . Sabemos de 2.2.2 e 2.2.4 que todos os morfismos em (\mathbb{N}, \leq) são monomorfismos e epimorfismos. Sendo assim, tome A, B objetos de \mathbb{N} tais que $A \leq B$ e o morfismo $(A, B) : A \rightarrow B$ em (\mathbb{N}, \leq) . Suponha que (A, B) é um isomorfismo. Sendo assim existe um morfismo (B, A) de B para A que é inversa à direita e à esquerda de (A, B) . Portanto, $B \leq A$ e com isso temos que $A = B$. Sendo assim, $(A, B) = (A, A)$, ou seja, os únicos isomorfismos em (\mathbb{N}, \leq) são os morfismos identidades.

3 PRELIMINARES PARA TOPOS

3.1 OBJETOS INICIAIS E FINAIS

Assim como nos capítulos anteriores começaremos o capítulo buscando aproveitar das propriedades da Teoria de Conjuntos. A propriedade que analisaremos agora é a que caracteriza o conjunto \emptyset . Veja que para cada conjunto A que tomarmos existe uma única função de \emptyset para A (a função vazia). Essa propriedade do objeto \emptyset em **Set** pode ser observada em muitas outras categorias. Damos então o nome de objeto inicial a um objeto que tem essa mesma propriedade observada. Mais precisamente temos a seguinte definição:

Definição 3.1.1. *Seja I um objeto em uma categoria \mathcal{C} . Dizemos que I é um objeto inicial de \mathcal{C} se para todo objeto A de \mathcal{C} existe somente um morfismo $f : I \rightarrow A$ em \mathcal{C} .*

A seguir veremos que, se existir um objeto inicial então ele é único a menos de isomorfismos.

Proposição 3.1.1. *Seja \mathcal{C} uma categoria e I_1, I_2 objetos de \mathcal{C} . Se I_1, I_2 são objetos iniciais em \mathcal{C} então $I_1 \cong I_2$.*

Demonstração. Tome \mathcal{C} uma categoria. Suponha que existam I_1, I_2 objetos iniciais em \mathcal{C} . Como I_1 é inicial sabemos que existe um único morfismo $f : I_1 \rightarrow I_2$, e como I_2 é inicial sabemos que existe um único morfismo $g : I_2 \rightarrow I_1$. Com isso podemos compor os morfismos obtendo $f \circ g : I_2 \rightarrow I_2$ e $g \circ f : I_1 \rightarrow I_1$. Porém $1_{I_1} : I_1 \rightarrow I_1$ e $1_{I_2} : I_2 \rightarrow I_2$, e como I_1, I_2 são iniciais então só existe um morfismo de I_1 para I_1 e um único morfismo de I_2 para I_2 , ou seja, $f \circ g = 1_{I_2}$ e $g \circ f = 1_{I_1}$. Sendo assim temos que $f : I_1 \rightarrow I_2$ é isomorfismo em \mathcal{C} , ou seja, $I_1 \cong I_2$. \square

Proposição 3.1.2. *Sejam I um objeto inicial em uma categoria \mathcal{C} e A um objeto qualquer em \mathcal{C} . Se $A \cong I$, então A é um objeto inicial.*

Demonstração. Seja \mathcal{C} uma categoria e I um objeto inicial em \mathcal{C} . Tome um objeto A de \mathcal{C} tal que $A \cong I$. Sendo assim, existem morfismos $f : A \rightarrow I$ e $g_A : I \rightarrow A$ tais que $g_A \circ f = 1_A$ e $f \circ g_A = 1_I$. Considere B um objeto qualquer de \mathcal{C} , e veja que, como I é objeto inicial, existe um único morfismo $g_B : I \rightarrow B$. Portanto temos que $g_B \circ f$ é um morfismo que vai de A para B . Agora considere um morfismo $h : A \rightarrow B$ e perceba que $h \circ g_A$ é o único morfismo de I para B , ou seja, $h \circ g_A = g_B$. Logo, temos que $g_B \circ f = (h \circ g_A) \circ f = h \circ (g_A \circ f) = h \circ 1_A = h$, ou seja, só existe um morfismo de A para B , para todo objeto B em \mathcal{C} . Temos então que, pela definição, A é um objeto inicial. \square

Definição 3.1.2. Dizemos também que F objeto de \mathcal{C} é um objeto final de \mathcal{C} se para todo objeto B de \mathcal{C} existe somente um morfismo $f : B \rightarrow F$ em \mathcal{C} .

Proposição 3.1.3. Sejam F_1 e F_2 objetos em uma categoria \mathcal{C} . Se F_1, F_2 são objetos final em \mathcal{C} então $F_1 \cong F_2$.

Demonstração. Tome \mathcal{C} uma categoria. Suponha que existam F_1 e F_2 objetos finais em \mathcal{C} . Como F_1 é final sabemos que existe um único morfismo $f : F_2 \rightarrow F_1$, e como F_2 é final sabemos que existe um único morfismo $g : F_1 \rightarrow F_2$. Compondo os morfismos temos $f \circ g : F_1 \rightarrow F_1$ e $g \circ f : F_2 \rightarrow F_2$. Todavia $1_{F_1} : F_1 \rightarrow F_1$ e $1_{F_2} : F_2 \rightarrow F_2$, e como F_1, F_2 são terminais então só existe um morfismo de F_1 para F_1 e um único morfismo de F_2 para F_2 , ou seja, $f \circ g = 1_{F_1}$ e $g \circ f = 1_{F_2}$. Sendo assim, temos que $g : F_1 \rightarrow F_2$ é um isomorfismo em \mathcal{C} , ou seja, $F_1 \cong F_2$. \square

Proposição 3.1.4. Seja \mathcal{C} uma categoria e F um objeto final em \mathcal{C} . Dado um objeto A em \mathcal{C} , se $A \cong F$, então A é um objeto final.

Demonstração. Seja \mathcal{C} uma categoria e F um objeto final em \mathcal{C} . Tome um objeto A de \mathcal{C} tal que $A \cong F$. Sendo assim, existem morfismos $g_A : A \rightarrow F$ e $f : F \rightarrow A$ tais que $f \circ g_A = 1_A$ e $g_A \circ f = 1_F$. Considere B um objeto qualquer de \mathcal{C} , e veja que, como F é objeto final, existe um único morfismo $g_B : B \rightarrow F$. Portanto temos que $f \circ g_B$ é um morfismo que vai de B para A . Agora considere um morfismo $h : B \rightarrow A$ e perceba que $g_A \circ h$ é o único morfismo de B para F , ou seja, $g_A \circ h = g_B$. Logo, temos que $f \circ g_B = f \circ (g_A \circ h) = (f \circ g_A) \circ h = 1_A \circ h = h$, ou seja, só existe um morfismo de B para A , para todo objeto B em \mathcal{C} . Então, pela definição, A é um objeto final. \square

Exemplo 3.1.1. Dado um conjunto A arbitrário sabemos que só existe uma função do conjunto \emptyset para A . Sendo assim sabemos que \emptyset é um objeto inicial em **Set**. De fato ele é único, pois dado um conjunto X que também é objeto inicial em **Set** temos que $\emptyset = X$. Isso ocorre porque se X que é objeto inicial em **Set** então existe um isomorfismo de \emptyset para X , ou seja, existe uma bijeção de \emptyset para X . Sendo assim a cardinalidade de X tem que ser a mesma de \emptyset , ou seja, os conjuntos devem ter a mesma quantidade de elementos. Como \emptyset não tem elementos então sua cardinalidade é 0. Logo, X também tem cardinalidade 0, isso significa que X não tem elementos, ou seja, $X = \emptyset$.

Já um objeto final de **Set** é um conjunto que só tem um elemento. Para verificar que dado um conjunto unitário $A = \{a\}$ em **Set** tomamos um X arbitrário em **Set** separamos em dois casos. Um dos casos seria se $X = \emptyset$, nesse caso sabemos que só existe um morfismo de \emptyset para A , pois \emptyset é inicial. O outro caso é se $X \neq \emptyset$, sendo assim, podemos tomar uma função $f : X \rightarrow A$ qualquer, e com isso sabemos que $f(x) \in A$, e como A é unitário então $f(x) = a$, para todo $x \in X$, ou seja, só existe uma função de X para A para qualquer X em **Set**. Sendo assim temos que A é objeto final de **Set**.

Exemplo 3.1.2. Nas categorias \mathbf{n} e (\mathbb{N}, \leq) é fácil de ver que 0 é um objeto inicial, já que 0 é o menor elemento dos conjuntos $\{0, \dots, n-1\}$ e \mathbb{N} . Além disso, $n-1$ é um objeto final em \mathbf{n} , mas (\mathbb{N}, \leq) não tem objeto final, pois é ilimitado.

3.2 DUALIDADE

Como já mencionamos podemos analisar diversas propriedades e caracterizá-las por diagramas. No caso em que queremos mostrar que um morfismo $f : A \rightarrow B$ é um monomorfismo, consideramos morfismos $j_1, j_2 : C \rightrightarrows A$ tais que $f \circ j_1 = f \circ j_2$, para enfim analisar se dada essa igualdade concluímos que $j_1 = j_2$. Podemos representar a igualdade $f \circ j_1 = f \circ j_2$ por um diagrama da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{f} & A \\ f \uparrow & & \uparrow i_1 \\ A & \xleftarrow{i_2} & C \end{array}$$

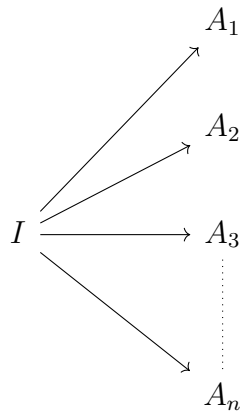
Veja que o diagrama comuta, isto é, $f \circ j_1 = f \circ j_2$. Já no caso em que procuramos por epimorfismos temos que dado um morfismo $g : B \rightarrow A$ consideramos morfismos $h_1, h_2 : A \rightrightarrows C$ tais que $h_1 \circ g = h_2 \circ g$, para então verificar se dada essa igualdade anterior concluímos que $h_1 = h_2$. Podemos representar a igualdade $h_1 \circ g = h_2 \circ g$ pelo seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & A \\ g \downarrow & & \downarrow h_2 \\ A & \xrightarrow{h_1} & C \end{array}$$

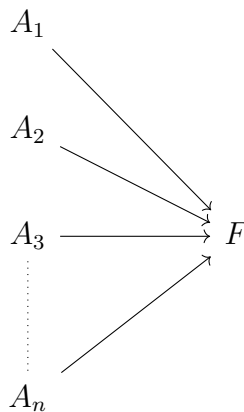
Perceba que o diagrama comuta, isto é, $f \circ h_1 = f \circ h_2$. Além de ser comutativo o diagrama é muito semelhante ao diagrama mostrado anteriormente, praticamente a única coisa que mudou foi a direção das setas.

Também vamos comparar objetos iniciais e finais:

Seja I um objeto inicial e A_1, A_2, \dots, A_n objetos em uma categoria \mathcal{C} . Como I é inicial, para cada k existe um único morfismo $f_k : I \rightarrow A_k$. Para ter uma melhor compreensão visual dessa situação podemos representá-la utilizando o seguinte diagrama:



Na situação anterior, trocando I por um objeto final F , obtemos o seguinte diagrama para representar tal situação:



Note que para passar de um diagrama para o outro basta inverter os sentidos das setas. Esses dois exemplos motivam a noção de dualidade na teoria de categorias. Sendo assim, podemos introduzir esse conceito de dualidade na teoria de categorias:

Dado uma sentença básica ξ de uma categoria temos que o dual de ξ , denotado por ξ^{op} , é a sentença obtida “substituindo domínio por contradomínio, contradomínio por domínio, e $h = g \circ f$ por $h = f \circ g$ ”. Essa noção de dual intuitivamente nos diz que epimorfismos são duais de monomorfismos. E da mesma forma nos induz a intuir que objetos finais são duais de objetos iniciais.

De fato, dado \mathcal{C} uma categoria podemos construir sua categoria dual \mathcal{C}^{op} (também chamada de categoria oposta). A construção se dá da seguinte forma:

A categoria \mathcal{C}^{op} tem os mesmos objetos que \mathcal{C} , e para cada morfismo $f : A \rightarrow B$ em \mathcal{C} incorporamos em \mathcal{C}^{op} um morfismo $f^{op} : B \rightarrow A$. E por fim, se pudermos fazer a composição de g e f morfismos em \mathcal{C} , definiremos $f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$.

Note que $\text{dom}(f^{op}) = \text{cod}(f)$ e $\text{cod}(f^{op}) = \text{dom}(f)$. Repare também que, um objeto inicial em \mathcal{C} é um objeto final em \mathcal{C}^{op} . Similarmente, se f é monomorfismo em \mathcal{C} , f^{op} é epimorfismo em \mathcal{C}^{op} . Em outras palavras, as noções de monomorfismo e epimorfismo são duais, assim como as noções de objeto inicial e objeto final.

3.3 PRODUTOS E COPRODUTOS

Agora buscaremos generalizar o produto cartesiano entre conjuntos. Como estamos usando linguagem categórica não podemos garantir que o objeto de uma categoria tem elementos. Sendo assim precisamos encontrar um meio de generalizar produto entre conjuntos somente usando objetos e morfismos.

Para isso tomamos conjuntos A e B e analisamos o conjunto $A \times B$ a fim de encontrar uma característica que o torna único na teoria de conjuntos, ou seja, sua propriedade universal. Precisaremos também considerar as funções projeções $p_A : A \times B \rightarrow A$ e $p_B : A \times B \rightarrow B$ tais que, para cada $(a, b) \in A \times B$, $p_A((a, b)) = a$ e $p_B((a, b)) = b$. Considere agora funções $f : D \rightarrow A$ e $g : D \rightarrow B$. Veja que podemos criar uma função $h : D \rightarrow A \times B$, dada por $h(x) = (f(x), g(x))$ para todo $x \in D$. Portanto, $p_A \circ h = f$ e $p_B \circ h = g$. Sendo assim, podemos dizer que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & D & & \\
 & \swarrow f & \vdots h & \searrow g & \\
 A & \xleftarrow{p_A} & A \times B & \xrightarrow{p_B} & B
 \end{array}$$

Agora vamos verificar que esse morfismo h é único a menos de isomorfismos.

Considere agora uma função $h' : D \rightarrow A \times B$ tal que $h' \circ p_A = f$ e $h' \circ p_B = g$. Veja que $p_A \circ h' = f = p_A \circ h$ e $p_B \circ h' = g = p_B \circ h$, e portanto podemos tomar um elemento $d \in D$ qualquer e notar que existem $(a_h, b_h), (a_{h'}, b_{h'}) \in A \times B$ tais que $h(d) = (a_h, b_h)$ e $h'(d) = (a_{h'}, b_{h'})$. Sendo assim

$$\begin{aligned}
 a_{h'} &= p_A((a_{h'}, b_{h'})) = p_A(h'(d)) = (p_A \circ h')(d) = f(d) = \\
 &= f(d) = (p_A \circ h)(d) = p_A(h(d)) = p_A((a_h, b_h)) = a_h
 \end{aligned}$$

Logo, $a_{h'} = a_h$. Além disso também temos que

$$\begin{aligned}
 b_{h'} &= p_B((a_{h'}, b_{h'})) = p_B(h'(d)) = (p_B \circ h')(d) = f(d) = \\
 &= (p_B \circ h)(d) = p_B(h(d)) = p_B((a_h, b_h)) = b_h
 \end{aligned}$$

E portanto $b_{h'} = b_h$. Por fim temos que $h(d) = (a_h, b_h) = (a_{h'}, b_{h'}) = h'(d)$ para todo $d \in D$, e portanto $h = h'$.

Por fim, conseguimos notar que dado o conjunto D e as funções $f : D \rightarrow A$ e $g : D \rightarrow B$ temos que existe uma única função $h : D \rightarrow A \times B$ tal que $p_A \circ h = f$ e

$p_B \circ h = g$. Com essa noção em mente podemos entender com maior clareza a definição a seguir.

Definição 3.3.1. *Seja \mathcal{C} uma categoria, A, B objetos de \mathcal{C} . Um produto de A por B em \mathcal{C} é uma tripla $(A \times B, p_A, p_B)$ em que $A \times B$ é objeto de \mathcal{C} e $p_A : A \times B \rightarrow A$, $p_B : A \times B \rightarrow B$ são morfismos de \mathcal{C} tais que para qualquer par de morfismos da forma $f : D \rightarrow A, g : D \rightarrow B$ existe somente um morfismo $(f, g) : D \rightarrow A \times B$ que resulta nas iguais $p_A \circ (f, g) = f$ e $p_B \circ (f, g) = g$, ou seja, existe um único morfismo $(f, g) : D \rightarrow A \times B$ que faz o seguinte diagrama comutar:*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & D & & \\
 & f \swarrow & \vdots & \searrow g & \\
 & A & (f, g) & & B \\
 & \xleftarrow{p_A} & \downarrow & \xrightarrow{p_B} & \\
 & A & A \times B & & B
 \end{array}$$

Sendo assim, denominamos p_A, p_B como projeções em A e B , respectivamente.

De maneira geral, se temos uma categoria \mathcal{C} e um produto $(A \times B, p_A, p_B)$ de A por B em \mathcal{C} , todo objeto E de \mathcal{C} isomorfo a $A \times B$ constitui um produto (E, e_1, e_2) , de A por B , para algum morfismo e_1 e algum morfismo e_2 de \mathcal{C} . Mais precisamente temos a seguinte proposição:

Proposição 3.3.1. *Sejam \mathcal{C} uma categoria, A, B objetos de \mathcal{C} e $(A \times B, p_A, p_B)$ um produto de A por B . Um objeto D de \mathcal{C} é isomorfo a $A \times B$ se, e somente se, existem morfismos $d_1 : D \rightarrow A$ e $d_2 : D \rightarrow B$ que constituem um produto (D, d_1, d_2) de A por B .*

Demonstração. Seja \mathcal{C} uma categoria, A e B objetos de \mathcal{C} e $(A \times B, p_A, p_B)$ um produto de A por B .

(\Rightarrow) Suponha que existe um objeto D em \mathcal{C} que é isomorfo a $A \times B$, ou seja, existe um morfismo $d : D \rightarrow A \times B$ que é um isomorfismo. Sendo assim tome os morfismos d_1 e d_2 tais que $d_1 = p_A \circ d$ e $d_2 = p_B \circ d$. Agora considere um objeto E de \mathcal{C} tal que existam morfismos $f : E \rightarrow A$ e $g : E \rightarrow B$ em \mathcal{C} e veja que pela definição de produto temos que existe um único morfismo $(f, g) : E \rightarrow A \times B$ tal que $f = p_A \circ (f, g)$ e $g = p_B \circ (f, g)$. Veja que, como $d : D \rightarrow A \times B$ é isomorfismo, podemos considerar o morfismo inverso $d' : A \times B \rightarrow D$, portanto, temos que $p_A = p_A \circ 1_{A \times B} = p_A \circ (d \circ d') = (p_A \circ d) \circ d' = d_1 \circ d'$ e $p_B = p_B \circ 1_{A \times B} = p_B \circ (d \circ d') = (p_B \circ d) \circ d' = d_2 \circ d'$. Sendo assim, temos que $f = p_A \circ (f, g) = (d_1 \circ d') \circ (f, g) = d_1 \circ (d' \circ (f, g))$ e $g = p_B \circ (f, g) = (d_2 \circ d') \circ (f, g) = d_2 \circ (d' \circ (f, g))$. Logo, pela unicidade do morfismo d' e pelo fato de (f, g) ser o único morfismo que satisfaz $f = p_A \circ (f, g)$ e $g = p_B \circ (f, g)$ então temos que $d' \circ (f, g) : E \rightarrow D$ é o único morfismo de E para D tal que $f = d_1 \circ (d' \circ (f, g))$ e $g = d_2 \circ (d' \circ (f, g))$

(\Leftarrow) Suponha que existem morfismos $d_1 : D \rightarrow A$ e $d_2 : D \rightarrow B$ que constituem um produto (D, d_1, d_2) de A por B . Sendo assim, pela definição de produto, sabemos que existe

um único morfismo $(p_A, p_B) : A \times B \rightarrow D$ tal que $d_1 \circ (p_A, p_B) = p_A$ e $d_2 \circ (p_A, p_B) = p_B$. Do mesmo modo, temos que existe um único morfismo $(d_1, d_2) : D \rightarrow A \times B$ tal que $p_A \circ (d_1, d_2) = d_1$ e $p_B \circ (d_1, d_2) = d_2$. Sendo assim temos que $p_A \circ ((d_1, d_2) \circ (p_A, p_B)) = (p_A \circ (d_1, d_2)) \circ (p_A, p_B) = d_1 \circ (p_A, p_B) = p_A$ e $p_B \circ ((d_1, d_2) \circ (p_A, p_B)) = (p_B \circ (d_1, d_2)) \circ (p_A, p_B) = d_2 \circ (p_A, p_B) = p_B$. Veja que pela definição de produto $(d_1, d_2) \circ (p_A, p_B)$ é o único morfismo de $A \times B$ para $A \times B$ tal que $p_A \circ ((d_1, d_2) \circ (p_A, p_B)) = p_A$ e $p_B \circ ((d_1, d_2) \circ (p_A, p_B)) = p_B$, porém $1_{A \times B}$ é um morfismo de $A \times B$ para $A \times B$ tal que $p_A \circ 1_{A \times B} = p_A$ e $p_B \circ 1_{A \times B} = p_B$. Portanto, pela unicidade do morfismo $(d_1, d_2) \circ (p_A, p_B)$ temos que $(d_1, d_2) \circ (p_A, p_B) = 1_{A \times B}$.

Agora de modo análogo, temos que $d_1 \circ ((p_A, p_B) \circ (d_1, d_2)) = (d_1 \circ (p_A, p_B)) \circ (d_1, d_2) = p_A \circ (d_1, d_2) = d_1$ e $d_2 \circ ((p_A, p_B) \circ (d_1, d_2)) = (d_2 \circ (p_A, p_B)) \circ (d_1, d_2) = p_B \circ (d_1, d_2) = d_2$. Concluimos então que $(p_A, p_B) \circ (d_1, d_2) = 1_D$. Logo, (p_A, p_B) é um isomorfismo de $A \times B$ para D , ou seja, $A \times B$ é isomorfo a D . \square

Em outras palavras, o produto (caso exista) é único a menos de isomorfismos. Por abuso de linguagem, por vezes usaremos o artigo definido para nos referirmos a um produto.

A definição de produto em categorias não é tão intuitiva quanto as definições apresentadas anteriormente, porém quanto mais buscarmos por produtos de objetos nas categorias, mais clara fica a definição. Sendo assim pretendemos agora estudar as noções de produto entre objetos em algumas categorias.

Exemplo 3.3.1. *Sabemos que dados dois conjuntos A e B existe o produto de conjuntos $A \times B$. Pelo que vimos anteriormente um produto de A por B em **Set** é a tripla $(A \times B, p_A, p_B)$.*

Agora vamos buscar mais exemplos de produtos em categorias diferentes para fixar essa ideia importante dessa teoria de categorias. Um outro exemplo é sobre a categoria (\mathbb{N}, \leq) :

Exemplo 3.3.2. *Tome a categoria (\mathbb{N}, \leq) e objetos A, B da mesma. Veja que um produto de A por B nessa categoria é dado por $(\min\{A, B\}, (\min\{A, B\}, A), (\min\{A, B\}, B))$, pois para qualquer objeto E de (\mathbb{N}, \leq) tal que existam morfismos (E, A) e (E, B) sabemos que existe um único morfismo de E para $\min\{A, B\}$, pois se $E \leq A$ e $E \leq B$ então $E \leq \min\{A, B\}$. Logo, temos que a tripla $(\min\{A, B\}, (\min\{A, B\}, A), (\min\{A, B\}, B))$ é de fato produto de A por B em (\mathbb{N}, \leq) .*

De maneira análoga, $(\min\{p, q\}, (\min\{p, q\}, p), (\min\{p, q\}, q))$ é de fato produto de p por q em \mathbf{n} se $p, q \in \mathbb{N}$ são tais que $0 \leq p, q \leq n - 1$.

Conforme ampliamos nossa familiaridade com a definição de produto em uma categoria, é normal que comecemos a questionar a existência do mesmo em todas as categorias. De fato, o seguinte exemplo verifica que existem categorias que não apresentam produto de quaisquer dois objetos.

Exemplo 3.3.3. Tome a categoria em que os objetos são todos os corpos e os morfismos são todos os homomorfismos de corpos. Suponha que $(P, p : P \rightarrow \mathbb{C}, q : P \rightarrow \mathbb{C})$ é um produto de \mathbb{C} por \mathbb{C} . Sendo assim considere o morfismo identidade $1_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e note que, pela definição do produto, existe um morfismo $h : \mathbb{C} \rightarrow P$ tal que $p \circ h = 1_{\mathbb{C}}$ e $q \circ h = 1_{\mathbb{C}}$. Porém, como homomorfismos entre corpos são injetores, sabemos que q e p são inversas de h , e portanto $p = q$. Agora considere o morfismo $1_{\mathbb{C}}$ e o morfismo $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ em que $f(x) = \bar{x}$ para todo $x \in \mathbb{C}$, e note que pela definição de produto deve existir um morfismo $h' : \mathbb{C} \rightarrow P$ tal que $p \circ h' = 1_{\mathbb{C}}$ e $q \circ h' = f$. Entretanto, sabemos que $p = q$, ou seja, $1_{\mathbb{C}} = p \circ h' = q \circ h' = f$, o que nos leva a uma contradição. Logo, concluímos que não existe produto de \mathbb{C} por \mathbb{C} nessa categoria.

Esse exemplo nos motiva a definir “Categoria com produtos”.

Definição 3.3.2. Seja \mathcal{C} uma categoria. Dizemos que \mathcal{C} é uma categoria com produtos se para quaisquer pares de objetos de \mathcal{C} existe um produto entre esses objetos.

Com as noções dadas acima, a respeito de produtos de categorias, é possível verificar a veracidade das seguintes proposições:

Proposição 3.3.2. Seja \mathcal{C} uma categoria e A, B objetos de \mathcal{C} . Se existe o produto de A por B em \mathcal{C} então existe o produto de B por A em \mathcal{C} e $A \times B$ é isomorfo a $B \times A$.

Demonstração. Seja \mathcal{C} uma categoria e A, B objetos de \mathcal{C} . Suponha que exista o produto da A por B em \mathcal{C} . Sendo assim sabemos que existe uma tripla $(A \times B, p_A : A \times B \rightarrow A, p_B : A \times B \rightarrow B)$ tal que para cada objeto D em \mathcal{C} tal que existam morfismos $d_1 : D \rightarrow A$ e $d_2 : D \rightarrow B$ temos que existe um único morfismo $(d_1, d_2) : D \rightarrow A \times B$ tal que $p_A \circ (d_1, d_2) = d_1$ e $p_B \circ (d_1, d_2) = d_2$.

Agora considere a tripla $(A \times B, p_B : A \times B \rightarrow B, p_A : A \times B \rightarrow A)$ e veja que, pela definição de produto de A por B , o morfismo $(d_1, d_2) : D \rightarrow A \times B$ é o único tal que $p_B \circ (d_1, d_2) = d_2$ e $p_A \circ (d_1, d_2) = d_1$. Logo, pela definição de produto, a tripla $(A \times B, p_B : A \times B \rightarrow B, p_A : A \times B \rightarrow A)$ é produto de B por A . Portanto, o produto de B por A existe, ou seja, existe a tripla $(B \times A, q_B : B \times A \rightarrow B, q_A : B \times A \rightarrow A)$, e como $(A \times B, p_B : A \times B \rightarrow B, p_A : A \times B \rightarrow A)$ também é produto de B por A , então pela Proposição 3.3.1 $A \times B$ é isomorfo a $B \times A$.

□

Proposição 3.3.3. Seja \mathcal{C} uma categoria e A, B e C objetos de \mathcal{C} . Se existirem os objetos $(A \times B) \times C$ e $A \times (B \times C)$ em \mathcal{C} então esses objetos são isomorfos.

Demonstração. Seja \mathcal{C} uma categoria e A, B e C objetos de \mathcal{C} . Suponha que existam o objetos $(A \times B) \times C$ e $A \times (B \times C)$ de \mathcal{C} . Defina um produto de A por B por C em \mathcal{C} como sendo a quádrupla $(A \times B \times C, p_A : A \times B \times C \rightarrow A, p_B : A \times B \times C \rightarrow B, p_C : A \times B \times C \rightarrow C)$, com $A \times B \times C$ objeto de \mathcal{C} e p_A, p_B e p_C morfismos em \mathcal{C} tal que, dado

um objeto D de \mathcal{C} , com morfismos $d_1 : D \rightarrow A$, $d_2 : D \rightarrow B$ e $d_3 : D \rightarrow C$, existe um único morfismo $(d_1, d_2, d_3) : D \rightarrow A \times B \times C$ tal que $p_A \circ (d_1, d_2, d_3) = d_1$, $p_B \circ (d_1, d_2, d_3) = d_2$ e $p_C \circ (d_1, d_2, d_3) = d_3$.

Sejam $(A \times B, p_A, p_B)$ um produto de A por B em \mathcal{C} e $((A \times B) \times C, t_{A \times B}, t_C)$ um produto de $(A \times B)$ por C em \mathcal{C} . Sendo assim sabemos que existem os morfismos $q_A \circ t_{A \times B} : (A \times B) \times C \rightarrow A$, $q_B \circ t_{A \times B} : (A \times B) \times C \rightarrow B$ e $t_C : (A \times B) \times C \rightarrow C$. Considere então a quádrupla $((A \times B) \times C, q_A \circ t_{A \times B}, q_B \circ t_{A \times B}, t_C)$ e veja que dado um objeto D tal que existam morfismos $d_1 : D \rightarrow A$, $d_2 : D \rightarrow B$ e $d_3 : D \rightarrow C$ então, pelo produto de A por B , temos que existe um único morfismo $(d_1, d_2) : D \rightarrow A \times B$ tal que $q_A \circ (d_1, d_2) = d_1$ e $q_B \circ (d_1, d_2) = d_2$. Já pelo produto de $A \times B$ por C temos que existe um único morfismo $((d_1, d_2), d_3) : D \rightarrow (A \times B) \times C$ tal que $t_{A \times B} \circ ((d_1, d_2), d_3) = (d_1, d_2)$ e $t_C \circ ((d_1, d_2), d_3) = d_3$. Porém veja que $(q_A \circ t_{A \times B}) \circ ((d_1, d_2), d_3) = q_A \circ (t_{A \times B} \circ ((d_1, d_2), d_3)) = q_A \circ (d_1, d_2) = d_1$, $(q_B \circ t_{A \times B}) \circ ((d_1, d_2), d_3) = q_B \circ (t_{A \times B} \circ ((d_1, d_2), d_3)) = q_B \circ (d_1, d_2) = d_2$ e $t_C \circ ((d_1, d_2), d_3) = d_3$. Sendo assim, pela definição de um produto $(A \times B \times C)$, temos que $((A \times B) \times C, q_A \circ t_{A \times B}, q_B \circ t_{A \times B}, t_C)$ é um produto de A por B por C . Usando raciocínio análogo, concluímos que existe a quádrupla $(A \times (B \times C), r_A : A \times (B \times C) \rightarrow A, r_B : A \times (B \times C) \rightarrow B, r_C : A \times (B \times C) \rightarrow C)$, com morfismos r_A , r_B e r_C em \mathcal{C} , que é também um produto de A por B por C pela definição dada acima. Por fim, pelo fato de que temos os objetos $(A \times B) \times C$ e $A \times (B \times C)$ como sendo produtos de A por B por C , podemos usar a mesma ideia da proposição 3.3.1 para concluir que $A \times (B \times C)$ e $(A \times B) \times C$ são de fato isomorfos. \square

Sabemos, da propriedade anterior, que não importa a ordem que fazemos o produto, pois o resultado será o mesmo (a menos de isomorfismo).

Proposição 3.3.4. *Seja \mathcal{C} uma categoria e A um objeto de \mathcal{C} . Se F é objeto final em \mathcal{C} então A é um produto de A por F .*

Demonstração. Seja \mathcal{C} uma categoria e A um objeto de \mathcal{C} . Suponha que existe um objeto F final em \mathcal{C} . Sabemos que existe um único morfismo $f : A \rightarrow F$ em \mathcal{C} , pois F é objeto final. Sendo assim, tome a tripla $(A, 1_A, f)$.

Portanto, podemos notar que para cada objeto D com morfismos $d_1 : D \rightarrow A$ e $d_2 : D \rightarrow F$, precisamos mostrar que existe um único morfismo de D para A tal que

$$1_A \circ d_1 = d_1 \tag{3.1}$$

$$f \circ d_1 = d_2 \tag{3.2}$$

Perceba que d_1 é o único morfismo que satisfaz (3.2) pois, como F é objeto final, f é o único morfismo de A para F e d_2 é o único morfismo de D para F . Sabemos também que, pela lei da identidade, o morfismo d_1 é o único que satisfaz (3.1). Logo, d_1 é o único

morfismo de D para A tal que $1_A \circ d_1 = d_1$ e $f \circ d_1 = d_2$. Concluimos então que a tripla $(A, 1_A, f)$ é um produto de A por F .

□

Dadas as proposições necessárias sobre produtos podemos buscar responder algumas dúvidas que são comuns de surgir ao decorrer desse capítulo. Uma das perguntas comuns é sobre como definir um produto entre mais de 2 objetos. Veja que na proposição 3.3.3 definimos um produto entre três objetos. Sendo assim, podemos expandir esse conceito e definir produto entre n objetos.

Definição 3.3.3. *Seja \mathcal{C} uma categoria e $\{A_i\}_{i=1}^n$ uma coleção de n objetos de \mathcal{C} . O produto entre os objetos de A_1 até A_n é definido por $(A_1 \times \cdots \times A_n, \{p_i : A_1 \times \cdots \times A_n \rightarrow A_i\})$, com $i \in \{1, \dots, n\}$, tal que para todo par $(D, \{d_i : D \rightarrow A_i\})$ existe um único morfismo $k : D \rightarrow A_1 \times \cdots \times A_n$ tal que $p_i \circ k = d_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Chamamos o morfismo p_i de projeção de A_i para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Além disso denotamos $\prod_{i=1}^n A_i := A_1 \times \cdots \times A_n$, ou seja, podemos escrever $(A_1 \times \cdots \times A_n, \{p_i : A_1 \times \cdots \times A_n \rightarrow A_i\})$ da seguinte forma: $(\prod_{i=1}^n A_i, \{p_i : \prod_{i=1}^n A_i \rightarrow A_i\})$

Note que em uma categoria \mathcal{C} com produtos, para qualquer coleção $\{A_i\}_{i=1}^n$ de n objetos, existe um produto $(\prod_{i=1}^n A_i, \{p_i : \prod_{i=1}^n A_i \rightarrow A_i\})$.

Uma outra pergunta comum sobre produtos é se é possível e viável definir produto entre morfismos. De fato podemos definir produto entre morfismos, e isso será importante para facilitar a compreensão de certos resultados futuros. Mais precisamente usaremos esse conceito na Seção 3.8.

Definição 3.3.4. *Seja \mathcal{C} uma categoria. Se existem morfismos $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$ e também existem os produtos $(A \times C, p_A, p_C)$ e $(B \times D, p_B, p_D)$, então o produto de f por g , denotado por $f \times g$, é o morfismo $(f \circ p_A, g \circ p_C)$. Em outras palavras, temos que $f \times g$ é o único morfismo que faz o seguinte diagrama comutar:*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \times C & & \\
 & \swarrow & \vdots & \searrow & \\
 & f \circ p_A & f \times g = (f \circ p_A, g \circ p_C) & g \circ p_C & \\
 & \swarrow & \vdots & \searrow & \\
 B & \xleftarrow{p_B} & B \times D & \xrightarrow{p_D} & D
 \end{array}$$

Também, motivados pela seção anterior, podemos pensar no dual da noção de produto, que chamaremos de coproduto, ou soma. Usando o princípio da dualidade chegamos a seguinte definição:

Definição 3.3.5. *Seja \mathcal{C} uma categoria. Um coproduto de objetos A por B em \mathcal{C} é uma tripla $(A + B, i_A : A \rightarrow A + B, i_B : B \rightarrow A + B)$, com $A + B$ objeto de \mathcal{C} e i_A, i_B morfismos em \mathcal{C} , tal que para qualquer par de morfismos da forma $f : A \rightarrow C, g : B \rightarrow C$, com C*

objeto de \mathcal{C} , existe um único morfismo $[f, g] : A + B \rightarrow C$ fazendo comutar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{i_A} & A + B & \xleftarrow{i_B} & B \\
 & \searrow f & \downarrow [f, g] & \swarrow g & \\
 & & C & &
 \end{array}$$

Assim dizemos que i_A é uma injeção de A para $A + B$, e i_B é uma injeção de B para $A + B$. Denotamos então $[f, g]$ morfismo coproduto de f e g com respeito as injeções i_A e i_B .

Assim como fizemos com produtos, também podemos definir coprodutos de n objetos e o coproduto de dois morfismos:

Definição 3.3.6. *Seja \mathcal{C} uma categoria e $\{A_j\}_{j=1}^n$ uma coleção de n objetos de \mathcal{C} . O coproduto entre os objetos de A_1 até A_n é definido por $(A_1 + \dots + A_n, \{i_j : A_j \rightarrow A_1 + \dots + A_n\})$, com $j \in \{1, \dots, n\}$, tal que para todo par $(D, \{d_j : A_j \rightarrow D\})$ existe um único morfismo $k : A_1 + \dots + A_n \rightarrow D$ tal que $k \circ i_j = d_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.*

Chamamos o morfismo i_j de injeção em A_j , para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Além disso denotamos $\sum_{j=1}^n A_j := A_1 + \dots + A_n$, ou seja, podemos escrever $(A_1 + \dots + A_n, \{i_j : A_j \rightarrow A_1 + \dots + A_n\})$ da seguinte forma: $(\sum_{j=1}^n A_j, \{i_j : A_j \rightarrow \sum_{s=1}^n A_s\})$.

Definição 3.3.7. *Seja \mathcal{C} uma categoria. Se, em \mathcal{C} , existem morfismos $f : B \rightarrow A$ e $g : D \rightarrow C$ e também existem os coprodutos $(A + C, i_A, i_C)$ e $(B + D, i_B, i_D)$, então o coproduto de f por g , denotado por $f + g$, é o morfismo $[i_A \circ f, i_C \circ g]$. Em outras palavras, temos que $f + g$ é o único morfismo que faz o seguinte diagrama comutar:*

$$\begin{array}{ccccc}
 B & \xrightarrow{i_B} & B + D & \xleftarrow{i_D} & D \\
 & \searrow i_A \circ f & \downarrow [i_A \circ f, i_C \circ g] & \swarrow i_C \circ g & \\
 & & A + C & &
 \end{array}$$

Antes trouxemos a ideia de produto entre conjuntos, da teoria de conjuntos, para linguagem categórica, e usamos a dualidade para definir o coproduto. Sendo assim podemos intuir que existe coproduto em **Set** e ele tem alguma estrutura já conhecida. Portanto, agora vamos analisar a categoria **Set** afim de encontrar essa estrutura dada pelo coproduto.

Exemplo 3.3.4. *Sejam A e B conjuntos. Considere a união disjunta de A e B como sendo o conjunto $A \dot{\cup} B := A_0 \cup B_1$, em que $A_0 = A \times \{0\}$ e $B_1 = B \times \{1\}$. Tome*

agora $i_A : A \rightarrow A \dot{\cup} B$, $i_B : B \rightarrow A \dot{\cup} B$ funções dadas, para cada $x \in A$ e $y \in B$, por $i_A(x) = (x, 0)$ e $i_B(y) = (y, 1)$.

Sendo assim tomamos a tripla $(A \dot{\cup} B, i_A, i_B)$ como uma possibilidade de coproduto de A por B em **Set**. Para verificar isto precisamos considerar um conjunto D e funções $f : A \rightarrow D$ e $g : B \rightarrow D$, e perceba que podemos construir uma função $h : A \dot{\cup} B \rightarrow D$ da seguinte forma:

$$h(y, a) = \begin{cases} f(y), & \text{se } a = 0 \\ g(y), & \text{se } a = 1 \end{cases}$$

Veja que temos então as funções $h \circ i_A : A \rightarrow D$ e $h \circ i_B : B \rightarrow D$ tais que $h \circ i_A = f$ e $h \circ i_B = g$. Suponha que existe uma função $j : A \dot{\cup} B \rightarrow D$ tal que $j \circ i_A = f$ e $j \circ i_B = g$. Veja que se $x \in A$ tal que $i_A(x) = y$ então $h(y) = h(i_A(x)) = (h \circ i_A)(x) = f(x) = (j \circ i_A)(x) = j(i_A(x)) = j(y)$. No caso em que $x \in B$ tal que $i_B(x) = y$ temos que $h(y) = h(i_B(x)) = (h \circ i_B)(x) = g(x) = (j \circ i_B)(x) = j(i_B(x)) = j(y)$. Note que todos os casos foram abrangidos, pois $A \dot{\cup} B = A_0 \cup B_1$ e $A_0 \cap B_1 = \emptyset$. Sendo assim temos que $h = j$, ou seja, dado a tripla $(A \dot{\cup} B, i_A, i_B)$ temos que para qualquer conjunto D com funções $f : A \rightarrow D$ e $g : B \rightarrow D$ existe uma única função $h : A \dot{\cup} B \rightarrow D$ tal que $h \circ i_A = f$ e $h \circ i_B = g$. Logo, pela definição de coproduto, $A \dot{\cup} B$ é coproduto de A por B .

Exemplo 3.3.5. Tome a categoria (\mathbb{N}, \leq) e objetos A, B da mesma. Veja que o coproduto de A por B nessa categoria é dado por $(\max\{A, B\}, (A, \max\{A, B\}), (B, \max\{A, B\}))$, pois para qualquer objeto E de (\mathbb{N}, \leq) tal que existam morfismos (A, E) e (B, E) sabemos que existe um único morfismo de $\max\{A, B\}$ para E , pois se $A \leq E$ e $B \leq E$ então, $\max\{A, B\} \leq E$. Logo, temos que a tripla $(\max\{A, B\}, (A, \max\{A, B\}), (B, \max\{A, B\}))$ é de fato um coproduto de A por B em (\mathbb{N}, \leq) .

De maneira análoga, $(\max\{p, q\}, (\max\{p, q\}, p), (\max\{p, q\}, q))$ é de fato um coproduto de p por q em \mathbf{n} se $p, q \in \mathbb{N}$ são tais que $0 \leq p, q \leq n - 1$.

Assim como vimos que algumas categorias não tem produtos para cada par de objetos, podemos afirmar que existem categorias em que não existe coprodutos para cada par de objetos. Esse fato é facilmente notável com o seguinte exemplo:

Exemplo 3.3.6. Tome a categoria em que os objetos são todos os corpos e os morfismos são todos os homomorfismos entre esses corpos. Suponha que $(P, p : \mathbb{C} \rightarrow P, q : \mathbb{C} \rightarrow P)$ é um coproduto de \mathbb{C} por \mathbb{C} . Sendo assim considere a função identidade $1_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e note que, pela definição do coproduto, existe um único morfismo $h : P \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $h \circ p = 1_{\mathbb{C}}$ e $h \circ q = 1_{\mathbb{C}}$. Porém, como homomorfismos entre corpos são injetores, sabemos que $p = q$. Agora considere a função $1_{\mathbb{C}}$ e a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ em que $f(x) = \bar{x}$ para todo $x \in \mathbb{C}$, e note que pela definição de produto deve existir um morfismo $h' : P \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $h' \circ p = 1_{\mathbb{C}}$ e $h' \circ q = f$. Entretanto sabemos que $p = q$, ou seja, $1_{\mathbb{C}} = h' \circ p = h' \circ q = f$, o

que nos leva a uma contradição. Logo, concluímos que não existe coproduto de \mathbb{C} por \mathbb{C} nessa categoria.

Usando o fato de que o coproduto é o dual do produto, em teoria de categorias, nos conseguimos ganhar diversas propriedades de coproduto simplesmente analisando as propriedades de produto. Considere então a seguinte lista de propriedades herdadas do produto:

Proposição 3.3.5. *Seja \mathcal{C} uma categoria e A, B objetos de \mathcal{C} e $(A + B, p_A, p_B)$ um coproduto de A por B . Um objeto D é isomorfo a $A + B$ se, e somente se, existem morfismos $d_1 : D \rightarrow A$ e $d_2 : D \rightarrow B$ tais que (D, d_1, d_2) é um coproduto de A por B .*

Proposição 3.3.6. *Seja \mathcal{C} uma categoria e A, B objetos de \mathcal{C} . Se existe o coproduto de A por B em relação a \mathcal{C} então existe o coproduto de B por A em \mathcal{C} e $A + B$ é isomorfo a $B + A$.*

Proposição 3.3.7. *Seja \mathcal{C} uma categoria e A, B e C objetos de \mathcal{C} . Se existem os objetos $(A + B) + C$ e $A + (B + C)$ de \mathcal{C} então esses objetos são isomorfos.*

Proposição 3.3.8. *Seja \mathcal{C} uma categoria, A um objeto de \mathcal{C} . Se I é um objeto inicial de \mathcal{C} , então I é um coproduto de A por I .*

3.4 EQUALIZADORES E CO-EQUALIZADORES

Antes de introduzirmos uma definição formal do que são equalizadores, vamos observar uma propriedade específica em **Set** que carrega a motivação para essa definição. Observe então que, dado um par de funções paralelas $f, g : A \rightrightarrows B$ em **Set** podemos tomar um conjunto $E = \{x : x \in A \text{ e } f(x) = g(x)\}$ e considerar a função inclusão $i : E \hookrightarrow A$. Note que $f \circ i = g \circ i$ e veremos a seguir que $Im(i)$ é o “maior” conjunto em que f e g são iguais. Em outras palavras a função i “equalizou” as funções f e g , e por isso damos o nome de “equalizador” à função i .

Tomamos agora uma função $h : C \rightarrow A$ tal que $f \circ h = g \circ h$. Veja que dado $c \in C$ temos que $h(c) \in E$, pois $f(h(c)) = g(h(c))$. Sendo assim, podemos restringir o domínio de h obtendo a função $k : C \rightarrow E$ tal que $k(c) := h(c)$, e com isso temos que $i \circ k = h$. Sendo assim, temos que a função k é única que satisfaz $i \circ k = h$, ou seja, dada uma função $h : C \rightarrow A$ tal que $f \circ h = g \circ h$ existe uma única função $k : C \rightarrow E$ que comuta o diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xleftarrow{i} & A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & B \\
 \uparrow k & \nearrow h & & & \\
 C & & & &
 \end{array}$$

Agora basta traduzir essa noção intrínseca de funções equalizadoras para morfismos equalizadores:

Definição 3.4.1. *Seja \mathcal{C} uma categoria, A, B objetos de \mathcal{C} e $f, g : A \rightrightarrows B$ morfismos em \mathcal{C} . Um equalizador de $f, g : A \rightrightarrows B$ é um morfismo $i : E \rightarrow A$ em \mathcal{C} tal que:*

(i) $f \circ i = g \circ i$, e

(ii) *Dado um morfismo $h : C \rightarrow A$ em \mathcal{C} tal que $f \circ h = g \circ h$, existe um único morfismo $k : C \rightarrow E$ tal que $i \circ k = h$.*

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xleftarrow{i} & A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & B \\
 \uparrow k & & \nearrow h & & \\
 C & & & &
 \end{array}$$

Como vimos anteriormente os equalizadores em **Set** já estão bem definidos por funções inclusões, ou seja, dado um par de funções paralelas $f, g : A \rightrightarrows B$ em **Set** sabemos que a função inclusão $i : E \hookrightarrow A$, em que $E = \{x : x \in A \text{ e } f(x) = g(x)\}$, é um equalizador de f e g . Porém podemos expandir essa noção para outras categorias já conhecidas que apresentam aspectos semelhantes, como é o caso das categorias *Top*, **Ring** e *Grp*. Mais precisamente, usando o mesmo raciocínio usado em **Set**, podemos intuir os seguintes exemplos:

Exemplo 3.4.1. *Sejam A e B objetos de *Top* e $f, g : A \rightrightarrows B$ um par de morfismos paralelos dessa categoria. Sendo assim considere $i : E \rightarrow A$ a função inclusão de E para A , em que $E = \{x : x \in A \text{ e } f(x) = g(x)\}$. Veja que E é um subespaço topológico de A e i é uma função contínua. Por fim podemos usar o mesmo raciocínio utilizado em **Set** para notar que i é um equalizador de f e g em *Top*.*

Exemplo 3.4.2. *Sejam A e B objetos de **Ring** e $f, g : A \rightrightarrows B$ um par de morfismos paralelos dessa categoria. Sendo assim considere $i : E \rightarrow A$ a função inclusão de E para A , em que $E = \{x : x \in A \text{ e } f(x) = g(x)\}$ é um subanel de A . Sendo assim podemos usar o mesmo raciocínio utilizado em **Set** para notar que i é um equalizador de f e g em **Ring**.*

Exemplo 3.4.3. *É notável que em *Grp* temos que para cada par de morfismos paralelos $f, g : A \rightrightarrows B$, com A e B objetos de *Grp*, $i : E \rightarrow A$, a função inclusão de E para A com $E = \{x : x \in A \text{ e } f(x) = g(x)\}$ subgrupo de A , é um equalizador de f e g em *Grp*.*

Veja que usando o mesmo raciocínio temos diversos exemplos de equalizadores em categorias diferentes, porém isso se deve pelo fato de os morfismos dessas categorias serem funções, e além disso a função inclusão está presente em diversas estruturas algébricas. Portanto, em cada um desses casos é fácil usar as boas propriedades da função identidade para verificar quem são os equalizadores nessas categorias.

Porém nem sempre os morfismos de determinadas categorias são funções, como é o caso do seguinte exemplo:

Exemplo 3.4.4. Tome a categoria (\mathbb{N}, \leq) , objetos A, B da mesma, e morfismos $f, g : A \rightarrow B$ dessa categoria. Como nessa categoria só existe um morfismo para cada par de objetos então $f = g$. Sendo assim considere $1_A : A \rightarrow A$ e veja que $f \circ 1_A = f = g = g \circ 1_A$. Além disso temos que se tomarmos um objeto C em (\mathbb{N}, \leq) tal que $C \leq A$ então sabemos que existe um único morfismo $h : C \rightarrow A$ e, como $f = g$, temos que $f \circ h = g \circ h$. Agora precisamos tomar um morfismo k de C para A tal que $1_A \circ k = h$, porém sabemos que só existe um morfismo de C para A , ou seja, $h = k$ e portanto k é único morfismo de C para A tal que $1_A \circ k = h$. Logo, temos que 1_A é equalizador de f e g em (\mathbb{N}, \leq) .

Além de exemplos de categorias com equalizadores também é importante ter em mente exemplos de categorias que não tem equalizadores. Sendo assim vamos a seguir apresentar uma categoria que não tem equalizadores.

Exemplo 3.4.5. Seja $(G, *)$ um grupo não trivial. Defina a categoria \mathcal{G} com um único objeto A em que os morfismos estão associados aos elementos de G , ou seja, para cada elemento $a \in G$ existe um morfismo $a : A \rightarrow A$ associado em \mathcal{G} . Já as composições são dadas através da associação com a operação em G , ou seja, se temos a, b e $c \in G$ tal que $a * b = c$ então $a \circ b = c$ em \mathcal{G} . Veja que herdamos as condições de categoria da própria definição de grupos, ou seja, a associatividade das composições são garantidas pela associatividade da operação em $(G, *)$, e o morfismo identidade $1_A : A \rightarrow A$ é garantido pelo elemento neutro de $(G, *)$.

Agora que verificamos que \mathcal{G} é de fato uma categoria vamos verificar que não há equalizadores para qualquer par de morfismos distintos em \mathcal{G} . Considere um par de morfismos $a, b : A \rightrightarrows A$ em \mathcal{G} tal que $a \neq b$ e veja que para existir um equalizador é preciso que exista pelo menos um morfismo $i : A \rightarrow A$ em \mathcal{G} tal que $a \circ i = b \circ i$, ou seja, deve existir um elemento $i \in G$ tal que $a * i = b * i$. Porém todo elemento de um grupo é inversível, e portanto, de $a * i = b * i$, temos que $a = b$ em G , ou seja, os morfismos a e b são iguais na categoria \mathcal{G} . Sendo assim, encontramos uma contradição, pois escolhemos $a \neq b$ em \mathcal{G} . Logo, não há equalizadores para quaisquer dois morfismos diferentes em \mathcal{G} .

Assim como fizemos nos tópicos anteriores iremos verificar propriedades clássicas e importantes a respeito de equalizadores para ampliar nossa familiaridade com esse objeto de estudo. Portanto, seguem as seguintes propriedades:

Proposição 3.4.1. Seja \mathcal{C} uma categoria. Todo equalizador em \mathcal{C} é um monomorfismo.

Demonstração. Tome \mathcal{C} uma categoria e k um equalizador de f e g . Considere morfismos paralelos j e l tais que $k \circ j = k \circ l$. Veja que, como k é equalizador de f e g , $f \circ (k \circ l) = f \circ (k \circ j) = (f \circ k) \circ j = (g \circ k) \circ j = g \circ (k \circ j) = g \circ (k \circ l)$. Como $f \circ (k \circ l) = g \circ (k \circ l)$ então

l é único morfismo tal que $k \circ l = (k \circ l)$, porém também temos que $f \circ (k \circ j) = g \circ (k \circ j)$, ou seja, j é único morfismo tal que $k \circ j = (k \circ j)$ e portanto $l = j$. Logo, k é cancelável à esquerda, ou seja, k é monomorfismo. \square

Vimos que, em geral, um morfismo pode ser monomorfismo e epimorfismo e ainda assim não ser um isomorfismo. Porém, o próximo resultado nos mostra que um equalizador que é epimorfismo necessariamente é um isomorfismo.

Proposição 3.4.2. *Seja \mathcal{C} uma categoria. Um equalizador em \mathcal{C} é um isomorfismo se for um epimorfismo.*

Demonstração. Seja \mathcal{C} uma categoria e $k : E \rightarrow A$ um equalizador de morfismos $f, g : A \rightrightarrows B$ em \mathcal{C} . Suponha que k é um epimorfismo. Do fato de que k é equalizador dos morfismos f e g temos que $f \circ k = g \circ k$, porém, como supomos que k é um epimorfismo, então $f = g$. Sendo assim temos que $g \circ 1_A = g = f = f \circ 1_A$ e portanto, pela definição de equalizador, temos que existe um único morfismo $h : A \rightarrow E$ tal que $k \circ h = 1_A$. Contudo podemos notar que $k \circ (h \circ k) = (k \circ h) \circ k = 1_A \circ k = k = k \circ 1_E$ e, como provamos na proposição anterior que todo equalizador é monomorfismo, então temos que k é monomorfismo e, portanto, $h \circ k = 1_E$. Logo, k tem inversa (h), ou seja, k é isomorfismo. \square

Utilizando toda a noção construída sobre os equalizadores podemos pensar no dual de um equalizador. Então a seguir analisaremos co-equalizadores juntamente com exemplos e propriedades.

Definição 3.4.2. *Sejam \mathcal{C} uma categoria, A, B objetos de \mathcal{C} e $f, g : B \rightrightarrows A$ morfismos em \mathcal{C} . Um co-equalizador de f e g é um morfismo $i : A \rightarrow E$ em \mathcal{C} tal que:*

(i) $i \circ f = i \circ g$, e

(ii) *Dado um morfismo $h : A \rightarrow C$ em \mathcal{C} tal que $h \circ f = h \circ g$, existe um único morfismo $k : E \rightarrow C$ tal que $k \circ i = h$.*

$$\begin{array}{ccccc}
 B & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & A & \xrightarrow{i} & E \\
 & & & \searrow h & \downarrow k \\
 & & & & C
 \end{array}$$

Exemplo 3.4.6. *Em **Set** temos que o co-equalizador de duas funções $f, g : A \rightarrow B$ é um morfismo $q : B \rightarrow B/\approx$ em que \approx é uma relação de equivalência gerada pela relação \sim definida a seguir:*

Dados $x, y \in B$, $x \sim y$ se uma das três seguintes opções ocorre:

- $x = f(a)$ e $y = g(a)$ para algum $a \in A$;

- $x = g(b)$ e $y = f(b)$ para algum $b \in A$;
- $x = y$.

Ou seja, $x \approx y$ se, e somente se, existe $n \geq 2$ e $b_1, \dots, b_n \in B$ tais que $b_1 = x$, $b_n = y$ e $b_i \sim b_{i+1}$ para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Para verificar que q é um co-equalizador para f e g , tome a função $q : B \rightarrow B/\approx$ definida como $q(y) = [y]$ para todo $y \in B$. Veja que dado um $a \in A$ qualquer, temos que $[f(a)] = [g(a)]$. Portanto, $(q \circ f)(a) = q(f(a)) = [f(a)] = [g(a)] = q(g(a)) = (q \circ g)(a)$, ou seja, $q \circ f = q \circ g$.

Agora considere uma função $h : B \rightarrow C$ tal que $h \circ f = h \circ g$. Sendo assim precisamos encontrar uma função k tal que $k \circ q = h$, ou seja, precisamos de uma função $k : B/\approx \rightarrow C$ tal que para todo $x \in B$ temos que $h(x) = (k \circ q)(x) = k(q(x)) = k([x])$. Portanto, só existe uma maneira de definir a função $k : B/\approx \rightarrow C$ para que ela satisfaça a composição $k \circ q = h$. Essa maneira é dada por $k([x]) = h(x)$.

Para verificar que k está bem definido, tome $[x], [y] \in B/\approx$ tal que $[x] = [y]$. Vamos analisar inicialmente os cenários possíveis em que $x \sim y$.

Se $x \in \text{Im}(f)$ e $y \in \text{Im}(g)$ então $x = f(a)$ e $y = g(a)$ para algum $a \in A$. E portanto, temos $k([x]) = h(x) = h(f(a)) = h(g(a)) = h(y) = k([y])$.

O caso em que $x \in \text{Im}(g)$ e $y \in \text{Im}(f)$ é análogo ao anterior.

Veja que os casos $x \in (\text{Im}(f) \cup \text{Im}(g))$ e $y \in (B - (\text{Im}(f) \cup \text{Im}(g)))$ ou, $x \in (B - (\text{Im}(f) \cup \text{Im}(g)))$ e $y \in (\text{Im}(f) \cup \text{Im}(g))$ não são possíveis, pois $[x] = [y]$.

Perceba que em todos os outros casos temos que $x = y$, e portanto temos que é claro que $k([x]) = k([y])$.

Agora, suponha que $x \approx y$. Portanto, existe um $n \geq 2$ e $b_1, \dots, b_n \in B$ tais que $b_1 = x$, $b_n = y$ e $b_i \sim b_{i+1}$ para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Logo,

$$k([x]) = k([b_1]) = k([b_2]) = \dots = k([b_n]) = k([y]).$$

Por fim temos que para o par de morfismos f, g o morfismo q satisfaz a seguinte igualdade de composições $q \circ f = q \circ g$. Além disso, dado um morfismo h tal que $h \circ f = h \circ g$ existe um único morfismo k tal que $k \circ q = h$. Logo q é um co-equalizador de f e g .

Exemplo 3.4.7. Tome a categoria (A, \sim) , objetos A e B da mesma, e morfismos $f, g : A \rightarrow B$ dessa categoria. Como só existe um morfismo para cada par de objetos nessa categoria, então $f = g$. Sendo assim, considere 1_B e veja que $1_B \circ f = f = g = 1_B \circ g$. Além disso, dado um morfismo $h : B \rightarrow C$ em (A, \sim) tal que $h \circ f = h \circ g$, temos que h é o único morfismo de B para C , e $h \circ 1_B = h$.

Logo, 1_B é co-equalizador de f e g em (A, \sim) .

É notável que \mathcal{G} não tem co-equalizadores pelo mesmo motivo que não tem equalizadores. Agora que apresentamos alguns exemplos podemos mantê-los em mente para entender melhor os conceitos abordados a seguir.

3.5 LIMITES E COLIMITES

Nas definições de produtos e equalizadores nos são mostradas uma noção de uma propriedade “universal”, isto é, uma noção de que essas estruturas são as principais que satisfazem as propriedades requeridas. No caso de um equalizador de dois morfismos ele é único morfismo com a propriedade de “equalizar” os morfismos em questão. No caso de produto de A e B a propriedade universal é de ser um objeto que é domínio de um par de morfismos que tem contradomínios A e B . Tendo isso em mente podemos buscar propriedades universais em diagramas. Mais precisamente podemos tomar um diagrama \mathcal{D} em uma categoria \mathcal{C} e buscar propriedades universais desses diagramas, ou seja, dados uma coleção de objetos D_i, D_j, \dots de \mathcal{D} e uma coleção de morfismos entre esses objetos (pode haver mais de um morfismo entre dois objetos, porém pode não haver morfismo algum) procuramos por um objeto C e uma coleção de morfismos $f_i : C \rightarrow D_i$ que constituam um cone universal para \mathcal{D} . Para entender melhor esse conceito precisamos saber o que é, de fato, um cone para \mathcal{D} .

Definição 3.5.1. *Seja \mathcal{C} uma categoria e \mathcal{D} um diagrama em \mathcal{C} . Um cone para um diagrama \mathcal{D} consiste em um objeto C munido de morfismos $f_i : C \rightarrow D_i$ para todo objeto D_i em \mathcal{D} , tal que para todo morfismo $g : D_i \rightarrow D_j$ em \mathcal{D} então $g \circ f_i = f_j$, ou seja, para quaisquer morfismos $g : D_i \rightarrow D_j$ em \mathcal{D} o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc}
 D_i & \xrightarrow{g} & D_j \\
 & \swarrow f_i & \nearrow f_j \\
 & C &
 \end{array}$$

Denotamos um cone para \mathcal{D} por $\{f_i : C \rightarrow D_i\}$.

Agora que introduzimos um novo conceito podemos buscar por uma propriedade universal relacionada (assim como fizemos com produtos e equalizadores). Sendo assim, dado um diagrama, queremos um cone que seja o cone “principal”. Com isso em mente podemos partir para a definição dessa estrutura.

Definição 3.5.2. *Seja \mathcal{C} uma categoria e \mathcal{D} um diagrama em \mathcal{C} . Um limite para um diagrama \mathcal{D} é um cone $\{f_i : C \rightarrow D_i\}$ para \mathcal{D} , tal que para qualquer outro cone $\{f'_i : C' \rightarrow D_i\}$ para \mathcal{D} existe somente um morfismo $f : C' \rightarrow C$ que satisfaz a igualdade $f_i \circ f = f'_i$, ou seja, existe um único morfismo $f : C' \rightarrow C$ que faz comutar o seguinte diagrama:*

$$\begin{array}{ccc}
 & D_i & \\
 f'_i \nearrow & & \nwarrow f_i \\
 C' & \xrightarrow{f} & C
 \end{array}$$

Se uma categoria tem limites para qualquer diagrama nela, então dizemos que essa categoria é “com limite”, ou completa.

A partir de agora iremos ver exemplos que nos ajudarão a entender a noção de limites e as noções de futuros conceitos abordados neste texto.

Exemplo 3.5.1. *Seja \mathcal{C} uma categoria com limites. Considere o diagrama nulo \mathcal{D} , ou seja, $\mathcal{D} = \emptyset$. Sendo assim, um cone para esse diagrama é um objeto C munido de morfismos que vão de C para objetos do diagrama \mathcal{D} . Porém \mathcal{D} não tem objetos. Isso significa que um cone para o diagrama \mathcal{D} é um objeto qualquer de \mathcal{C} .*

Podemos então notar que um limite para o diagrama \mathcal{D} é um objeto F tal que para qualquer objeto C de \mathcal{C} existe um único morfismo de C para F . Em outras palavras, um limite para o diagrama nulo é um objeto final de \mathcal{C} .

Veja que o exemplo acima nos dá o seguinte resultado interessante: Se uma categoria é categoria com limites, então existe objeto final nessa categoria.

Porém, podemos também notar a importância desse resultado olhando para sua contrapositiva: Se uma categoria não tem objeto final então ela não é uma categoria com limites. Em particular, pelo Exemplo 3.1.2, a categoria (\mathbb{N}, \leq) não é uma categoria com limites (finitos).

No próximo exemplo podemos encontrar outro resultado tão importante quanto.

Exemplo 3.5.2. *Seja \mathcal{C} uma categoria com limites. Considere o diagrama $\mathcal{D} = \{A, B\}$. Veja que um limite para esse diagrama é um cone, constituído de um objeto C munido de morfismos $f_A : C \rightarrow A$ e $f_B : C \rightarrow B$, tal que para todo cone $\{g_A : E \rightarrow A, g_B : E \rightarrow B\}$ para esse diagrama existe um único morfismo $p : E \rightarrow C$ tal que $f_A \circ p = g_A$ e $f_B \circ p = g_B$. Sendo assim a tripla (C, f_A, f_B) é um produto de A por B , ou seja, dada uma categoria com limites sabemos que existe um produto para qualquer par de objetos dessa categoria.*

Do exemplo acima tiramos o seguinte resultado: Se uma categoria não é uma categoria com produtos então ela não é uma categoria com limites.

Vimos que objetos finais e produtos podem ser vistos como limites para diagramas específicos em uma categoria. Sabemos também que se em uma categoria temos dois objetos finais, então eles são isomorfos. E o mesmo acontece com produtos. Sendo assim, é de se esperar que aconteça o mesmo com limites. Mais precisamente temos a seguinte proposição que mostra o que temos mencionado:

Proposição 3.5.1. *Dado \mathcal{C} uma categoria e \mathcal{D} um diagrama em \mathcal{C} se $\{f_i : C \rightarrow D_i\}$ e $\{f'_i : C' \rightarrow D_i\}$ são, ambos, limites para \mathcal{D} então C é isomorfo a C' .*

Demonstração. Tome \mathcal{C} uma categoria e \mathcal{D} um diagrama em \mathcal{C} . Suponha que $\{f_i : C \rightarrow D_i\}$ e $\{f'_i : C' \rightarrow D_i\}$ são limites para \mathcal{D} . Como $\{f_i : C \rightarrow D_i\}$ é limite para \mathcal{D} e $\{f'_i : C' \rightarrow D_i\}$ é um cone para \mathcal{D} então existe um único morfismo $f : C' \rightarrow C$ tal que $f_i \circ f = f'_i$. Por outro lado, como $\{f'_i : C' \rightarrow D_i\}$ é limite para \mathcal{D} e $\{f_i : C \rightarrow D_i\}$ é cone para \mathcal{D} então existe um único morfismo $g : C \rightarrow C'$ tal que $f'_i \circ g = f_i$. Então podemos considerar os

morfismos $f \circ g : C \rightarrow C$ e $g \circ f : C' \rightarrow C'$, e note que $f_i \circ (f \circ g) = (f_i \circ f) \circ g = f'_i \circ g = f_i$ e $f'_i \circ (g \circ f) = (f'_i \circ g) \circ f = f_i \circ f = f'_i$. Sendo assim, como $\{f_i : C \rightarrow D_i\}$ é limite e também é um cone para \mathcal{D} , temos que $f \circ g$ é o único morfismo de C para C tal que $f_i \circ (f \circ g) = f_i$. Porém, veja que 1_C também satisfaz a composição $f_i \circ 1_C = f_i$, ou seja, pela unicidade mostrada acima, $f \circ g = 1_C$. Agora, perceba que $g \circ f : C' \rightarrow C'$ é o único morfismo de C' para C' tal que $f'_i \circ (g \circ f) = f'_i$. Portanto, $g \circ f = 1_{C'}$ pois, sabemos que $f'_i \circ 1_{C'} = f'_i$ e $g \circ f$ é o único morfismo que satisfaz essa composição. Logo temos que $f \circ g = 1_C$ e $g \circ f = 1_{C'}$. Em outras palavras, C é isomorfo a C' . \square

Assim como fizemos com as estruturas anteriores, podemos tomar a definição de limite em uma categoria e construir o dual da mesma. Sendo assim tomamos uma categoria \mathcal{C} e um diagrama \mathcal{D} em \mathcal{C} com objetos D_i, D_j, \dots em \mathcal{D} . Sabemos que um limite para esse diagrama é um cone $\{f_i : C \rightarrow D_i\}$ com C objeto de \mathcal{C} tal que se existir um outro cone $\{f'_i : C' \rightarrow D_i\}$ para o diagrama \mathcal{D} então existe um único morfismo f de C para C' tal que $f_i \circ f = f'_i$. Sendo assim, por dualidade, podemos definir o colimite “invertendo o sentido das setas” do cone $\{f_i : C \rightarrow D_i\}$ para \mathcal{D} . Mais precisamente temos que definir um co-cone com a propriedade universal, ou seja, um co-cone principal para esse diagrama. Sendo assim chegamos na seguinte definição.

Definição 3.5.3. *Seja \mathcal{C} uma categoria e \mathcal{D} um diagrama em \mathcal{C} . Um co-cone para um diagrama \mathcal{D} consistem em um objeto C munido de morfismos $f_i : D_i \rightarrow C$, para todo objeto D_i em \mathcal{D} , tal que para todo morfismo $g : D_i \rightarrow D_j$ em \mathcal{D} então $f_j \circ g = f_i$, ou seja, para todos morfismos $g : D_i \rightarrow D_j$ em \mathcal{D} o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} D_i & \xrightarrow{g} & D_j \\ & \searrow f_i & \swarrow f_j \\ & & C \end{array}$$

Denotamos um co-cone para \mathcal{D} , com objeto C munido de morfismos $f_i : D_i \rightarrow C$, por $\{f_i : D_i \rightarrow C\}$.

Portanto um co-limite é um co-cone principal para \mathcal{D} . Mais precisamente temos a seguinte definição:

Definição 3.5.4. *Seja \mathcal{C} uma categoria e \mathcal{D} um diagrama em \mathcal{C} . Um colimite para um diagrama \mathcal{D} é um co-cone $\{f_i : D_i \rightarrow C\}$ para \mathcal{D} tal que para qualquer outro co-cone $\{f'_i : D_i \rightarrow C'\}$ para \mathcal{D} existe somente um morfismo $f : C \rightarrow C'$ que satisfaz a igualdade $f \circ f_i = f'_i$, ou seja, existe um único morfismo $f : C \rightarrow C'$ que faz comutar o seguinte diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} & D_i & \\ f_i \swarrow & & \searrow f'_i \\ C & \xrightarrow{f} & C' \end{array}$$

Se uma categoria tem colimites para qualquer diagrama nela, então dizemos que essa categoria é “com colimite”, ou co-completa.

Vejam alguns exemplos:

Exemplo 3.5.3. *Seja \mathcal{C} uma categoria com co-limites. Considere o diagrama nulo \mathcal{D} . Sendo assim, um co-cone para esse diagrama é um objeto C munido de morfismos que vão de objetos do diagrama \mathcal{D} para C . Porém \mathcal{D} não tem objetos. Isso significa que um co-cone para o diagrama \mathcal{D} é um objeto qualquer de \mathcal{C} .*

Podemos então notar que um co-limite para o diagrama \mathcal{D} é um objeto I tal que para qualquer objeto C de \mathcal{C} existe um único morfismo de I para C . Em outras palavras, um co-limite para o diagrama nulo é um objeto inicial de \mathcal{C} .

Veja que no exemplo acima nos diz que uma categoria que não tem objetos iniciais não é uma categoria com co-limites. Também temos que o co-limite de um diagrama nulo (um objeto inicial) é o dual do limite de um diagrama nulo (um objeto final). Levando em consideração que toda construção de co-limites foi feita tomando o dual do limite, esse resultado não era para ser inesperado.

Sendo assim, para o próximo exemplo, também temos um resultado que não deve ser inesperado:

Exemplo 3.5.4. *Seja \mathcal{C} uma categoria com colimites. Considere o diagrama $\mathcal{D} = \{A, B\}$. Veja que um co-limite para esse diagrama é um co-cone, constituído de um objeto C munido de morfismos $f_A : A \rightarrow C$ e $f_B : B \rightarrow C$, tal que para todo co-cone $\{g_A : A \rightarrow E, g_B : B \rightarrow E\}$ para esse diagrama existe um único morfismo $p : C \rightarrow E$ tal que $p \circ f_A = g_A$ e $p \circ f_B = g_B$. Sendo assim a tripla (C, f_A, f_B) é um co-produto de A para B , ou seja, dada uma categoria com co-limites sabemos que existe um co-produto para qualquer par de objetos dessa categoria.*

Note que o resultado desse exemplo pode ser visto como: Uma categoria que não tem co-produtos não é uma categoria com co-limites.

Agora que temos uma noção melhor de como limites são em categorias, iremos apresentar novos conceitos chamados “pullback” e “pushout”.

3.6 PULLBACK E PUSHOUT

Em uma categoria \mathcal{C} um pullback de um par de morfismos $f : A \rightarrow C$ e $g : B \rightarrow C$ em \mathcal{C} , que possuem o mesmo contradomínio, é um limite em \mathcal{C} para o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ & \downarrow g & \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

Um cone para esse diagrama é um objeto D munido de 3 morfismos (h, f', g') tal que comuta o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{f'} & B \\
 g' \downarrow & \searrow h & \downarrow g \\
 A & \xrightarrow{f} & C
 \end{array}$$

Para isso precisamos que os morfismos satisfaçam a seguinte igualdade:

$$h = f \circ g' = g \circ f'.$$

Veja que não precisamos levar o morfismo h em consideração, pois no diagrama temos a composição $f \circ g'$ e $g \circ f'$ que sempre serão igual ao morfismo h se o diagrama comutar. Sendo assim, só precisamos de um objeto D munido de 2 morfismos f' e g' tais que $f \circ g' = g \circ f'$, ou seja, precisamos de D objeto de \mathcal{C} e f', g' morfismos em \mathcal{C} que façam comutar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{f'} & B \\
 g' \downarrow & & \downarrow g \\
 A & \xrightarrow{f} & C
 \end{array}$$

Com isso em mente, é mais direto a ideia da seguinte definição:

Definição 3.6.1. *Seja \mathcal{C} uma categoria, A, B e C objetos de \mathcal{C} e $f : A \rightarrow C, g : B \rightarrow C$ morfismos em \mathcal{C} . Um pullback de um par de morfismos $f : A \rightarrow C$ e $g : B \rightarrow C$ é uma tripla $(D, f' : D \rightarrow B, g' : D \rightarrow A)$, com D objeto de \mathcal{C} e f', g' morfismos em \mathcal{C} , tal que:*

(i) $f \circ g' = g \circ f'$, e

(ii) *para toda tripla $(E, h : E \rightarrow A, j : E \rightarrow B)$ com E objeto de \mathcal{C} e h, j morfismos em \mathcal{C} tal que $f \circ h = g \circ j$, tem-se que existe um único morfismo $k : E \rightarrow D$ tal que $h = g' \circ k$ e $j = f' \circ k$. Em outras palavras, podemos dizer que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & j \\
 & & & & \curvearrowright \\
 E & & & & B \\
 & \searrow k & & \xrightarrow{f'} & \\
 & & D & & \\
 & & \downarrow g' & & \downarrow g \\
 & & A & \xrightarrow{f} & C \\
 & \searrow h & & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

Veja que pullback nada mais é do que um limite para um diagrama específico em uma categoria, porém esse conceito é de extrema importância para introduzirmos a definição de Topos. Já a escolha do nome “pullback” foi feita pois é um termo em inglês que significa “puxe para trás”, assim podemos imaginar que o diagrama é um “quadrado” e f' é “criado puxando f para trás ao longo de g ” assim como g' é “criado puxando g para trás ao longo de f ”.

Exemplo 3.6.1. Em **Set** tome objetos A , B e C em que C é um subconjunto não vazio de B e considere morfismos $f : A \rightarrow B$ e $i : C \hookrightarrow B$ em que $i(x) = x$ para todo $x \in C$. Um pullback para os morfismos f e i em **Set** é a tripla $(f^{-1}(C), f' : f^{-1}(C) \rightarrow C, j : f^{-1}(C) \hookrightarrow A)$ em que $f^{-1}(C) = \{x \in A; f(x) \in C\}$, $f'(y) = f(y)$ para todo $y \in f^{-1}(C)$, e $j(z) = z$ para todo $z \in f^{-1}(C)$. Para verificar que essa tripla mencionada é de fato um pullback para os morfismos f e i em **Set** precisamos notar que, para todo $w \in f^{-1}(C)$, $(f \circ j)(w) = f(j(w)) = f(w) = f'(w) = f'(i(w)) = (f' \circ i)(w)$, ou seja, temos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(C) & \xleftarrow{j} & A \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ C & \xleftarrow{i} & B \end{array}$$

Além disso precisamos tomar uma tripla $(D, g : D \rightarrow A, h : D \rightarrow C)$ tal que $f \circ g = i \circ h$ e mostrar que existe um único morfismo $k : D \rightarrow f^{-1}(C)$ tal que $j \circ k = g$ e $f' \circ k = h$. Como $f \circ g = i \circ h$ então dado um $d \in D$ $f(g(d)) = (f \circ g)(d) = (i \circ h)(d) = i(h(d)) = h(d)$ e como $h(d) \in C$ então $f(g(d)) \in C$ e $g(d) \in f^{-1}(C)$. Sendo assim, veja que para que $j \circ k = g$, devemos ter que, dado $d \in D$, $g(d) = (j \circ k)(d) = j(k(d)) = k(d)$, ou seja, necessariamente $k = g$. Além disso, como $g(d) \in f^{-1}(C)$ para todo $d \in D$, $(f' \circ k)(d) = f'(k(d)) = f'(g(d)) = f(g(d)) = h(d)$. Em outras palavras, $k : D \rightarrow f^{-1}(C)$ é o único morfismo tal que $j \circ k = g$ e $f' \circ k = h$. Logo, $(f^{-1}(C), f' : f^{-1}(C) \rightarrow C, j : f^{-1}(C) \hookrightarrow A)$ é de fato um pullback para os morfismos f e i em **Set**.

Exemplo 3.6.2. De modo mais genérico podemos tomar objetos A , B e C e morfismos $f : A \rightarrow C$ e $g : B \rightarrow C$ afim de encontrar um pullback para os morfismos f e g . Para isso considere o conjunto $I = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}$ e as funções $\pi_A : I \rightarrow A$ e $\pi_B : I \rightarrow B$ tais que $\pi_A((a, b)) = a$ e $\pi_B((a, b)) = b$ para todo $(a, b) \in I$. Veja que, para todo $(a, b) \in I$, $(f \circ \pi_A)(a, b) = f(\pi_A((a, b))) = f(a) = g(b) = g(\pi_B((a, b))) = (g \circ \pi_B)(a, b)$. Sendo assim, $f \circ \pi_A = g \circ \pi_B$, ou seja, (I, π_A, π_B) é um candidato a pullback para os morfismos f e g . Para verificar se (I, π_A, π_B) é de fato um pullback para os morfismos f e g , considere uma tripla $(D, h : D \rightarrow A, j : D \rightarrow B)$ tal que $f \circ h = g \circ j$. Veja que, se existe um morfismo $k : D \rightarrow I$ tal que $\pi_A \circ k = h$ e $\pi_B \circ k = j$, então podemos tomar $(a_d, b_d) \in I$ tal que $k(d) = (a_d, b_d)$, para todo $d \in D$, e verificar que $h(d) = (\pi_A \circ k)(d) = \pi_A(k(d)) = \pi_A(a_d, b_d) = a_d$ e $j(d) = (\pi_B \circ k)(d) = \pi_B(k(d)) = \pi_B((a_d, b_d)) = b_d$. Como

$k(d) = (a_d, b_d)$, para todo $d \in D$, então obrigatoriamente $k(d) = (h(d), g(d))$, ou seja, k , dado pela regra $k(d) = (h(d), g(d))$ para todo $d \in D$, é o único morfismo tal que $\pi_A \circ k = h$ e $\pi_B \circ k = j$. Logo, (I, π_A, π_B) é de fato um pullback para os morfismos f e g .

Veja que a mesma demonstração acima serviria para a categoria $Finset$, ou seja, $Finset$ também é uma categoria que tem pullback para qualquer par de morfismos.

Exemplo 3.6.3. Em (\mathbb{N}, \leq) , considere objetos $p, q, m \in \mathbb{N}$ e morfismos $(p, m), (q, m)$. Isso significa que $p, q \leq m$. Vejamos que a tripla $(\min\{p, q\}, (\min\{p, q\}, p), (\min\{p, q\}, p))$ é um pullback de (p, m) e (q, m) . De fato, temos que

$$(p, m) \circ (\min\{p, q\}, p) = (\min\{p, q\}, m) = (q, m) \circ (\min\{p, q\}, q).$$

Além disso, se $(d, (d, p), (d, q))$ é uma tripla qualquer tal que $(p, m) \circ (d, p) = (q, m) \circ (d, q)$, então em particular devemos ter que $d \leq p, q$ e, portanto, existe um único morfismo $(d, \min\{p, q\})$. Finalmente, veja que $(\min\{p, q\}, p) \circ (d, \min\{p, q\}) = (d, p)$ e que $(\min\{p, q\}, q) \circ (d, \min\{p, q\}) = (d, q)$.

De forma análoga verifica-se que na categoria \mathbf{n} , se $p, q, m \in \{0, \dots, n-1\}$, temos que $(\min\{p, q\}, (\min\{p, q\}, p), (\min\{p, q\}, q))$ é um pullback de (p, m) e (q, m) .

Assim como fizemos com as estruturas anteriores podemos construir um novo conceito usando a ideia de dualidade e a definição de pullback, assim obtemos pushout. Como pullback é um limite então o seu dual, o pushout, será um co-limite. Iremos ver que pushout é um co-limite para um diagrama específico em uma categoria. E dessa vez o nome pushout, que significa “empurre para fora”, é atribuído pois podemos imaginar que “empurrando um morfismo ao longo de outro criamos um novo morfismo”. Para visualizar essa ideia de “empurrar” o morfismo podemos tomar uma categoria \mathcal{C} e um diagrama \mathcal{D} com objetos A, B e C e morfismos $f : A \rightarrow B, g : A \rightarrow C$. Em seguida tomamos a tripla $(D, f' : B \rightarrow D, g' : C \rightarrow D)$ como um pushout do par de morfismos f e g . Por fim temos que o diagrama, que comuta, formado por \mathcal{D} e seu colimite (D, f', g') nos dá o auxílio visual necessário para entender a ideia de “empurrar f ao longo de g para obter f' ” e “empurrar g ao longo de f para obter g' ”:

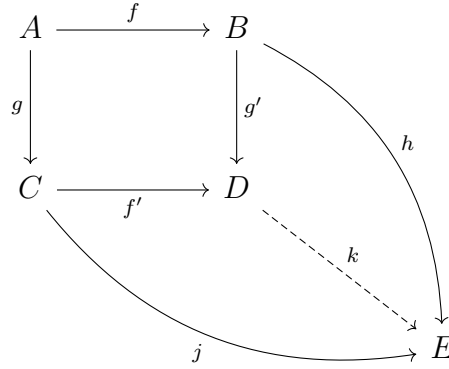
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow g & & \downarrow g' \\ C & \xrightarrow{f'} & D \end{array}$$

Mais precisamente temos a seguinte definição:

Definição 3.6.2. Seja \mathcal{C} uma categoria, A, B e C objetos de \mathcal{C} e $f : A \rightarrow B, g : A \rightarrow C$ morfismos em \mathcal{C} . Um pushout de um par de morfismos $f : A \rightarrow B$ e $g : A \rightarrow C$ é uma tripla $(D, f' : B \rightarrow D, g' : C \rightarrow D)$, com D objeto de \mathcal{C} e f', g' morfismos em \mathcal{C} , tal que:

(i) $g' \circ f = f' \circ g$, e

(ii) para toda tripla $(E, h : B \rightarrow E, j : C \rightarrow E)$ com E objeto de \mathcal{C} e h, j morfismos em \mathcal{C} tal que $h \circ f = j \circ g$, tem-se que existe um único morfismo $k : D \rightarrow E$ tal que $h = k \circ g'$ e $j = k \circ f'$. Em outras palavras, podemos dizer que o seguinte diagrama comuta:



Vimos anteriormente que **Set** tem pullback para morfismos f e g com mesmo contradomínio. No exemplo a seguir veremos que dados morfismos f e g com mesmo domínio teremos um pushout para f e g .

Exemplo 3.6.4. Tome em **Set** morfismos $f : C \rightarrow A$ e $g : C \rightarrow B$. Defina o conjunto $A \dot{\cup} B := A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$.

Dados $(a, b), (c, d) \in A \dot{\cup} B$, podemos definir uma relação \sim em que $(a, b) \sim (c, d)$ se, e somente se, um dos seguintes casos ocorre:

- $(a, b) = (c, d)$;
- $b = 0, d = 1$ e existe $c' \in C$ tal que $f(c') = a$ e $g(c') = c$;
- $b = 1, d = 0$ e existe $c' \in C$ tal que $g(c') = a$ e $f(c') = c$.

Infelizmente essa relação não é de equivalência. Mas, podemos considerar a relação de equivalência \approx gerada pela relação \sim . Ou seja, $(a, b) \approx (c, d)$ se, e somente se, existe $n \geq 2$ e $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in A \dot{\cup} B$ tais que $a_1 = a, b_1 = b, a_n = c, b_n = d$ e $(a_i, b_i) \sim (a_{i+1}, b_{i+1})$ para $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Sendo assim, considere a tripla $(A \dot{\cup} B / \approx, q_A : A \rightarrow A \dot{\cup} B / \approx, q_B : B \rightarrow A \dot{\cup} B / \approx)$ em que $q_A(a) = [(a, 0)]$ e $q_B(b) = [(b, 1)]$ para todos elementos $a \in A$ e $b \in B$. Veja que, dado $c \in C$, $(q_A \circ f)(c) = q_A(f(c)) = [f(c), 0] = [g(c), 1] = q_B(g(c)) = (q_B \circ g)(c)$, ou seja, $q_A \circ f = q_B \circ g$. Portanto, considere outra tripla $(E, e_A : A \rightarrow E, e_B : B \rightarrow E)$ tal que $e_A \circ f = e_B \circ g$. E agora precisamos encontrar um morfismo $k : A \dot{\cup} B / \approx \rightarrow E$ tal que $k \circ q_A = e_A$ e $k \circ q_B = e_B$. Todavia, se existir um tal morfismo k , dados $a \in A$ e $b \in B$, temos que $e_A(a) = (k \circ q_A)(a) = k(q_A(a)) = k([(a, 0)])$ e $e_B(b) = (k \circ q_B)(b) = k(q_B(b)) = k([(b, 1)])$. Logo, obrigatoriamente, temos que o morfismo $k : A \dot{\cup} B / \approx \rightarrow E$ é definido da seguinte forma:

$$k([(x, y)]) = \begin{cases} e_A(x), & y = 0 \\ e_B(x), & y = 1 \end{cases}$$

Vamos mostrar que k está bem definido. Sejam (x, y) e (z, w) elementos pertencentes a $A \dot{\cup} B / \approx$ tais que $[(x, y)] = [(z, w)]$. Considere inicialmente que $(x, y) \sim (z, w)$. E assim temos os seguintes casos:

- Se $(x, y) = (z, w)$ então é evidente que $k([(x, y)]) = k([(z, w)])$;
- Se $y = 0$ e $w = 1$ então existe $c \in C$ tal que $f(c) = x$ e $g(c) = z$. Portanto, $k([(x, y)]) = k([(f(c), 0)]) = e_a(f(c)) = (e_a \circ f)(c) = (e_b \circ g)(c) = e_b(g(c)) = k([(g(c), 1)]) = k([(z, w)])$.
- Se $y = 1$ e $w = 0$ então existe $c \in C$ tal que $f(c) = z$ e $g(c) = x$. Portanto, $k([(x, y)]) = k([(g(c), 1)]) = e_b(g(c)) = (e_b \circ g)(c) = (e_a \circ f)(c) = e_a(f(c)) = k([(f(c), 0)]) = k([(z, w)])$.

Ou seja, se $(x, y) \sim (z, w)$, então $k([(x, y)]) = k([(z, w)])$. Suponha agora que $(x, y) \approx (z, w)$ e assim existem $n \geq 2$ e $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in A \dot{\cup} B$ tais que $a_1 = x$, $b_1 = y$, $a_n = z$, $b_n = w$ e $(a_i, b_i) \sim (a_{i+1}, b_{i+1})$ para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Logo,

$$k([(x, y)]) = k([(a_1, b_1)]) = \dots = k([(a_n, b_n)]) = k([(z, w)]).$$

Portanto, k está bem definida.

Por fim, temos que k é único morfismo tal que $k \circ q_A = e_A$ e $k \circ q_B = e_B$, ou seja, pela definição de pushout, a tripla $(A \dot{\cup} B / \approx, q_A : A \rightarrow A \dot{\cup} B / \approx, q_B : B \rightarrow A \dot{\cup} B / \approx)$ é um pushout para os morfismos f e g .

Mais uma vez temos, como consequência da demonstração acima, o fato de que \mathbf{Finset} é um categoria com pushout.

Exemplo 3.6.5. Em (\mathbb{N}, \leq) , considere objetos $p, q, m \in \mathbb{N}$ e morfismos $(m, p), (m, q)$. Isso significa que $m \leq p, q$. Vejamos que a tripla $(\max\{p, q\}, (p, \max\{p, q\}), (q, \max\{p, q\}))$ é um pushout de (m, p) e (m, q) . De fato, temos que

$$(p, \max\{p, q\}) \circ (m, p) = (m, \max\{p, q\}) = (q, \max\{p, q\}) \circ (m, q).$$

Além disso, se $(d, (p, d), (q, d))$ é uma tripla qualquer tal que $(p, d) \circ (m, p) = (q, d) \circ (m, q)$, então em particular devemos ter que $p, q \leq d$ e, portanto, existe um único morfismo $(\max\{p, q\}, d)$. Finalmente, veja que $(\max\{p, q\}, d) \circ (p, \max\{p, q\}) = (p, d)$ e que $(\max\{p, q\}, d) \circ (q, \max\{p, q\}) = (q, d)$.

De forma análoga verifica-se que na categoria \mathbf{n} , se $p, q, m \in \{0, \dots, n-1\}$, temos que $(\max\{p, q\}, (p, \max\{p, q\}), (q, \max\{p, q\}))$ é um pushout de (m, p) e (m, q) .

É perceptível que encontrar um pullback ou um pushout em uma categoria, nem sempre é uma tarefa fácil. Como pullback é um limite para um diagrama específico e pushout um co-limite para um diagrama específico, então podemos concluir e notar que encontrar limites e colimites em categorias é uma tarefa ainda mais difícil. Porém existem categorias que tem limites para qualquer diagrama dessa categoria. Essa propriedade será de extrema importância para conclusão desse trabalho. Sendo assim iremos definir alguns conceitos baseados em tudo que temos visto até então. Afim de compreender melhor as categorias e tentar achar características e propriedades que nos indique como se dá a estrutura de uma categoria desejada.

3.7 COMPLETEUDE

Uma categoria \mathcal{C} é completa se todo diagrama em \mathcal{C} tiver um limite em \mathcal{C} . Já uma categoria co-completa é o dual de uma categoria completa, ou seja, uma categoria é dita co-completa se para cada diagrama dessa categoria houver um colimite, nessa categoria, para esse diagrama. Dizemos também que uma categoria é bi-completa se é completa e co-completa. Essas nomenclaturas serão interessante para compactar ideias e conseguir novas propriedades para teoria de categorias.

“Diagrama finito”, “categoria finitamente completa”, “categoria finitamente co-completa” e “categoria finitamente bi-completa” também são nomenclaturas muito importantes. Um diagrama finito é um diagrama com um número finito de objetos e um número finito de morfismos entre esses objetos. Já uma categoria finitamente completa é uma categoria que tem limite para todo diagrama finito. Sendo assim, usando dualidade, temos que uma categoria finitamente co-completa é uma categoria que co-limite para todo diagrama finito. E por fim temos que uma categoria finitamente bi-completa é uma categoria finitamente completa e finitamente co-completa.

Agora podemos usar esse novo conceito para verificar de que maneira ele se relaciona com os outros conceitos apresentados anteriormente. Para isso iremos demonstrar uma série de resultados que irão culminar em características necessárias e suficientes para uma categoria \mathcal{C} ser finitamente completa.

Proposição 3.7.1. *Seja \mathcal{C} uma categoria. Se \mathcal{C} tem um objeto final e tem pullback para cada par de morfismos em \mathcal{C} com mesmo contradomínio, então \mathcal{C} é uma categoria com produtos.*

Demonstração. Tome \mathcal{C} uma categoria. Suponha que \mathcal{C} tem um objeto final F e tem pullback para cada par de morfismos em \mathcal{C} . Dados A e B objetos em \mathcal{C} , sabemos que existem morfismos $a_F : A \rightarrow F$ e $b_F : B \rightarrow F$, pois f é objeto final em \mathcal{C} . Como \mathcal{C} é uma categoria com pullback para cada par de morfismos em \mathcal{C} , então podemos tomar $(E, e_A : E \rightarrow A, e_B : E \rightarrow B)$ um pullback para os morfismos a_F e b_F . Veja que se tomarmos

uma tripla $(D, d_A : E \rightarrow A, d_B : E \rightarrow B)$ qualquer, obrigatoriamente $a_F \circ d_A = b_F \circ d_B$, pois existe um único morfismo de D para F . Assim, existe um único morfismo $k : D \rightarrow E$ tal que $e_A \circ k = d_A$ e $e_B \circ k = d_B$. Note então que $(E, e_A : E \rightarrow A, e_B : E \rightarrow B)$ é um produto de A por B em que e_A e e_B são projeções em A e B respectivamente. Logo, vimos que, se \mathcal{C} tem um objeto final e tem pullback para cada par de morfismos em \mathcal{C} , então \mathcal{C} é uma categoria com produtos. □

Proposição 3.7.2. *Seja \mathcal{C} uma categoria. Se \mathcal{C} é uma categoria com produtos, e tem um pullback para qualquer par de morfismos em \mathcal{C} com mesmo contradomínio, então \mathcal{C} tem um equalizador para qualquer par de morfismos paralelos.*

Demonstração. Tome \mathcal{C} uma categoria. Suponha que \mathcal{C} é uma categoria com produtos, e tem um pullback para quaisquer par de morfismos em \mathcal{C} . Sendo assim considere um par de morfismos paralelos $f, g : A \rightarrow B$ em \mathcal{C} . E como \mathcal{C} é uma categoria com produtos, podemos tomar um produto $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ de A por B . Tomando os morfismos 1_A e f , considere o morfismo $(1_A, f) : A \rightarrow A \times B$. De modo análogo, podemos considerar o morfismo $(1_A, g) : A \rightarrow A \times B$. Como \mathcal{C} é uma categoria com pullback para qualquer par de morfismos, podemos tomar $(D, p : D \rightarrow A, q : D \rightarrow A)$, um pullback para os morfismos $(1_A, f)$ e $(1_A, g)$.

Agora note que

$$\begin{aligned} p &= 1_A \circ p = (\pi_A \circ (1_A, f)) \circ p = \pi_A \circ ((1_A, f) \circ p) = \\ &= \pi_A \circ ((1_A, g) \circ q) = (\pi_A \circ (1_A, g)) \circ q = 1_A \circ q = q, \end{aligned}$$

ou seja, $p = q$. Sendo assim, $(1_A, f) \circ p = (1_A, g) \circ p$ e, portanto,

$$f \circ p = (\pi_B \circ (1_A, f)) \circ p = \pi_B \circ ((1_A, f) \circ p) = \pi_B \circ ((1_A, g) \circ p) = (\pi_B \circ (1_A, g)) \circ p = g \circ p.$$

Agora, para mostrar que p é um equalizador de f e g , considere um morfismo $r : C \rightarrow A$ tal que $f \circ r = g \circ r$ e note que $\pi_A \circ (1_A, f) \circ r = 1_A \circ r = \pi_A \circ (1_A, g) \circ r$ e $\pi_B \circ (1_A, f) \circ r = f \circ r = g \circ r = \pi_B \circ (1_A, g) \circ r$. Logo, pela unicidade na definição de produto, temos que $(1_A, f) \circ r = (1_A, g) \circ r$.

Como (D, p, p) é um pullback para os morfismos $(1_A, f)$ e $(1_A, g)$, existe um único morfismo $k : C \rightarrow D$ tal que $p \circ k = r$.

Concluimos então que p é um equalizador de f e g , ou seja, para qualquer par de morfismos paralelos em \mathcal{C} existe um equalizador desses morfismos em \mathcal{C} . □

Já sabemos que se uma categoria é finitamente completa então ela tem objeto final e existe um pullback para cada par de morfismos com o mesmo contradomínio. Agora iremos ver que a recíproca também é verdadeira.

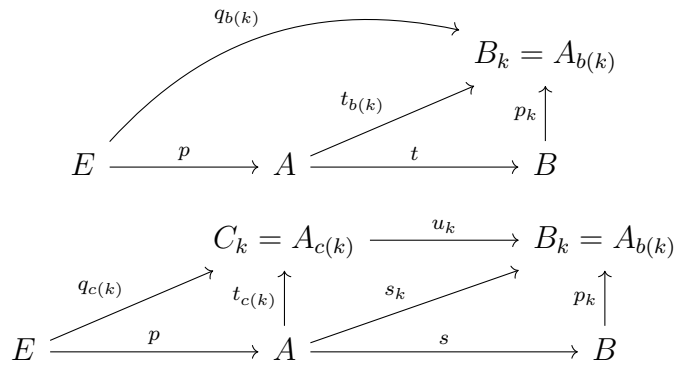
Teorema 3.7.1. *Seja \mathcal{C} uma categoria. Se existir um objeto final em \mathcal{C} e para cada par de morfismos em \mathcal{C} com mesmo contradomínio existir um pullback, então \mathcal{C} é finitamente completa.*

Demonstração. Tome \mathcal{C} uma categoria. Suponha que existe um objeto final em \mathcal{C} e para cada par de morfismos em \mathcal{C} com contradomínios iguais existe um pullback. Por 3.7.1 sabemos que \mathcal{C} é uma categoria com produtos. Já por 3.7.2 sabemos que \mathcal{C} tem um equalizador para quaisquer par de morfismos paralelos. Considere então um diagrama \mathcal{D} que é composto por $\{A_i\}_{i=1}^n$ uma coleção finita de objetos A_i de \mathcal{C} , e $\{u_k : C_k \rightarrow B_k\}_{k=1}^m$ uma coleção finita de morfismos. Repare que para cada $k \in \{1, \dots, m\}$ existem únicos $b(k), c(k) \in \{1, \dots, n\}$ tais que $B_k = A_{b(k)}$ e $C_k = A_{c(k)}$. Assim, existem funções $b, c : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ tais que $B_k = A_{b(k)}$ e $C_k = A_{c(k)}$.

Tome então o produto $(A, \{t_i : A \rightarrow A_i\}_{i=1}^n)$ com t_i as projeções em A_i e $A = \prod_{i=1}^n A_i$. E tome também $(B, \{p_k : B \rightarrow B_k\}_{k=1}^m)$ com $B = \prod_{k=1}^m B_k$. Para cada $k \in \{1, \dots, m\}$ defina um morfismo $s_k : A \rightarrow B_k$ como $s_k = u_k \circ t_{c(k)}$. Portanto, temos um morfismo de A para cada B_k , ou seja, pela propriedade universal do produto, temos que existe um único morfismo $s : A \rightarrow B$ tal que $p_k \circ s = s_k$ para todo $k \in \{1, \dots, m\}$.

Agora para cada $k \in \{1, \dots, m\}$ temos um morfismo $t_{b(k)} : A \rightarrow B_k$. Sendo assim, pela propriedade universal do produto, existe um único morfismo $t : A \rightarrow B$ tal que $p_k \circ t = t_{b(k)}$ para todo $k \in \{1, \dots, m\}$.

Note que agora temos o par de morfismos paralelos $s, t : A \rightarrow B$. Sendo assim sabemos que existe um equalizador $p : E \rightarrow A$ para os morfismos s e t e portanto também sabemos que $t \circ p = s \circ p$. Sendo assim, para cada objeto A_i de \mathcal{D} , temos um morfismo $q_i : E \rightarrow A_i$ em que $q_i = t_i \circ p$. Veja que, para uma visualização melhor, podemos dizer que os seguintes diagramas comutam:



Assim, para cada k temos que

$$q_{b(k)} = t_{b(k)} \circ p = p_k \circ t \circ p = p_k \circ s \circ p = s_k \circ p = u_k \circ t_{c(k)} \circ p = u_k \circ q_{c(k)}.$$

Isso quer dizer que, para cada morfismo $u_k : C_k \rightarrow B_k$ em \mathcal{D} o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 & E & \\
 q_{c(k)} \swarrow & & \searrow q_{b(k)} \\
 C_k & \xrightarrow{u_k} & B_k
 \end{array}$$

Portanto, $(E, \{q_i : L \rightarrow A_i\})$ é um cone para \mathcal{D} . Precisamos mostrar agora que $(E, \{q_i : L \rightarrow A_i\})$ é um limite para \mathcal{D} . Sendo assim, tome $(F, \{r_i : F \rightarrow A_i\})$ um cone para \mathcal{D} . Veja que, pela definição de produto, existe um único morfismo $r : F \rightarrow A$ tal que $t_i \circ r = r_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Perceba então que, para todo $k \in \{1, \dots, m\}$,

$$p_k \circ s \circ r = s_k \circ r = u_k \circ t_{c(k)} \circ r = u_k \circ r_{c(k)}.$$

Como $(F, \{r_i : F \rightarrow A_i\})$ é um cone,

$$u_k \circ r_{c(k)} = r_{b(k)} = t_{b(k)} \circ r = p_k \circ t \circ r$$

ou seja $p_k \circ s \circ r = p_k \circ t \circ r$ para todo $k \in \{1, \dots, m\}$. Logo, pela unicidade na definição de produto, $s \circ r = t \circ r$. Porém, p é um equalizador de s e t . Sendo assim, existe um único morfismo $l : F \rightarrow E$ tal que $r = p \circ l$. Finalmente, note que l é único morfismo, de F para E , tal que $q_i \circ l = (t_i \circ p) \circ l = t_i \circ (p \circ l) = t_i \circ r = r_i$. Concluimos então que $(E, \{q_i : L \rightarrow A_i\})$ é um limite para o diagrama \mathcal{D} . \square

Uma aplicação direta desse teorema está em **Set**, pois já vimos **Set** tem objeto final e sabemos do Exemplo 3.6.2 que **Set** tem pullback para qualquer par de morfismos. Sendo assim, usando o Teorema anterior, podemos perceber que **Set** é uma categoria que tem limite para qualquer diagrama finito, ou seja, **Set** é uma categoria finitamente completa.

Outra aplicação direta desse teorema está em **n** pois vimos no Exemplo 3.1.2 que $n - 1$ é objeto final em **n** e sabemos do Exemplo 3.6.3 que **n** tem pullback para qualquer par de morfismos. Sendo assim, usando o Teorema anterior, podemos perceber que **n** é uma categoria que tem limite para qualquer diagrama finito, ou seja, **n** é uma categoria finitamente completa.

Usando a dualidade conseguimos resultados importantes a respeito do que acabamos de mostrar nas Proposições 3.7.1 e 3.7.2, e no Teorema 3.7.1.

Proposição 3.7.3. *Seja \mathcal{C} uma categoria. Se \mathcal{C} tem um objeto inicial e tem pushout para cada par de morfismos em \mathcal{C} com mesmo domínio, então \mathcal{C} é uma categoria com coprodutos.*

Proposição 3.7.4. *Seja \mathcal{C} uma categoria. Se \mathcal{C} é uma categoria com coprodutos, e tem um pushout para qualquer par de morfismos em \mathcal{C} com mesmo domínio, então \mathcal{C} tem um co-equalizador para qualquer par de morfismos paralelos.*

Teorema 3.7.2. *Seja \mathcal{C} uma categoria. Se existir um objeto inicial em \mathcal{C} e para cada par de morfismos em \mathcal{C} com mesmo domínio existir um pushout, então \mathcal{C} é finitamente co-completa.*

Veja que **Set** tem objeto inicial e para cada par de morfismos, com domínios iguais, existe um co-equalizador. Sendo assim, além de finitamente completa, **Set** é uma categoria finitamente co-completa, ou seja, **Set** é uma categoria finitamente bi-completa.

Também, vimos no Exemplo 3.1.2 que 0 é objeto inicial em \mathbf{n} e em (\mathbb{N}, \leq) e sabemos do Exemplo 3.6.5 que \mathbf{n} e (\mathbb{N}, \leq) tem pushout para qualquer par de morfismos. Sendo assim, usando o Teorema anterior, podemos perceber que \mathbf{n} e (\mathbb{N}, \leq) são categorias que tem limite para qualquer diagrama finito, ou seja, \mathbf{n} e (\mathbb{N}, \leq) são categorias finitamente co-completas.

Até esse momento \mathbf{n} , *Finset*, *Vect_K*, **Ring**, *Grp* são categorias que, assim como **Set** tem todas as boas construções. Já a categoria (\mathbb{N}, \leq) não será tão interessante, pois ela não é finitamente completa, já que não tem objeto final.

Um outro conceito, que também é um dos requisitos para compreender o que é um topos, é o de exponenciação em categorias. Sendo assim, começaremos a próxima seção dando foco nesse conceito que é um dos últimos que precisamos antes de definir o que são topos.

3.8 EXPONENCIAÇÃO

Nesse começo desse capítulo voltaremos a nos apoiar em teoria dos conjuntos. Mais especificamente, dados A e B conjuntos, nos apoiaremos no conjunto B^A que nos remete a ideia de exponenciação de conjuntos (B elevado a A). O conjunto B^A é definido da forma $B^A = \{f : A \rightarrow B; f \text{ é uma função}\}$, mas o que queremos de fato é a propriedade universal da importante função $v : B^A \times A \rightarrow B$ dada pela seguinte lei de formação:

$$v(f, x) = f(x)$$

Essa função v é chamada de “função de avaliação”, pois pega um par da forma (f, x) , tal que $f : A \rightarrow B$ é uma função e um $x \in A$, e toma o valor de x pela função f , obtendo $f(x) \in B$.

Veja que v é uma função que tem $B^A \times A$ como domínio e B como contradomínio. Vamos considerar então uma função $g : C \times A \rightarrow B$ e tentar achar uma função $k : C \rightarrow B^A$ tal que $v \circ (k \times 1_A) = g$. Em outras palavras, queremos uma função de $C \times A$ para $B^A \times A$ que não altere a segunda coordenada e quando composta com v resulte em g .

Sendo assim, precisamos que $g(c, a) = (v \circ (k \times 1_A))(c, a) = v((k \times 1_A)(c, a)) = v(k(c), a)$. A única forma de obtermos isso é definindo, para todo $c \in C$, uma função $g_c : A \rightarrow B$ tal que $g_c(a) = g(c, a)$ e, dessa forma, podemos definir k como $k(c) = g_c$ para todo $c \in C$. Por fim temos que, dado $(c, a) \in C \times A$, $(v \circ (k \times 1_A))(c, a) = v((k \times 1_A)(c, a)) = v(g_c, a) = g_c(a) = g(c, a)$, ou seja, k é única função de C para B^A tal que $v \circ (k \times 1_A) = g$, e essa é a propriedade universal da função avaliação.

Agora podemos transferir essa noção para linguagem de categorias. Em seguida definimos um “morfismo de avaliação” v da seguinte forma:

Definição 3.8.1. Dizemos que \mathcal{C} é uma categoria com exponenciação se \mathcal{C} é uma categoria com produtos e para cada par de objetos A e B existe um objeto B^A e um morfismo $v : B^A \rightarrow B$ tal que para qualquer objeto C , com um morfismo $g : C \times A \rightarrow B$ existe um único morfismo $\hat{g} : C \rightarrow B^A$ tal que $v \circ (\hat{g} \times 1_A) = g$, ou seja, existe um único morfismo $\hat{g} : C \rightarrow B^A$ que faz comutar o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc}
 B^A \times A & & \\
 \uparrow \hat{g} \times 1_A & \searrow v & \\
 C \times A & & B \\
 & \nearrow g &
 \end{array}$$

O objeto B^A é chamado de exponencial, ou de “ B elevado a A ” e o morfismo v é chamado de “morfismo de avaliação”.

Uma categoria finitamente completa com exponenciais é chamada de categoria cartesiana fechada.

Como usamos uma ideia trazida de **Set**, para definir categorias com exponenciação, é claro que **Set** é uma categoria com exponenciação. Porém o mesmo pode ser percebido para *Finset*, uma vez que todas as noções usadas em **Set** podem ser usadas em *Finset*.

Agora, podemos mostrar, e demonstrar, algumas proposições afim de ter afinidade com o conceito de exponenciação em linguagem categórica.

Proposição 3.8.1. Seja \mathcal{C} uma categoria e A, B e C objetos de \mathcal{C} . Se \mathcal{C} é uma categoria com exponenciação, então existe uma bijeção de classes entre as classes $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C \times A, B)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B^A)$ dada pela regra $\phi(f) = \hat{f}$ em que $\hat{f} : C \rightarrow B^A$ tal que $v \circ (\hat{f} \times 1_A) = f$.

Demonstração. Seja \mathcal{C} uma categoria com objetos A, B e C . Suponha que \mathcal{C} é uma categoria com exponenciação. Para verificar a tese da proposição, tome dois elementos g e h em $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C \times A, B)$ tais que $\phi(g) = \phi(h)$. Assim, temos que $g = v \circ (\phi(g) \times 1_A) = v \circ (\phi(h) \times 1_A) = h$, ou seja, ϕ é injetiva. Agora para verificar a sobrejetividade tome um morfismo j em $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B^A)$ e tome $g = v \circ (j \times 1_A)$. Pela unicidade na definição de categoria com exponenciação, existe um único morfismo $\hat{g} : C \rightarrow B^A$ tal que $j = \hat{g}$. Logo, ϕ é uma bijeção entre as classes $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C \times A, B)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B^A)$. \square

Com esse novo conceito em mente, podemos perceber que, pelo que temos visto, **Set** e *Finset* são categorias cartesianas fechadas. Além disso, podemos usar as exponenciais em categorias para demonstrar alguns teoremas:

Teorema 3.8.1. *Seja \mathcal{C} uma categoria cartesiana fechada com objeto inicial I . Se F é um objeto final de \mathcal{C} , então para qualquer objeto A de \mathcal{C} são válidas as seguintes afirmações:*

- (1) I é isomorfo a $I \times A$;
- (2) Se existe um morfismo $i : A \rightarrow I$, então A é isomorfo a I ;
- (3) Se I é isomorfo a F , então \mathcal{C} é uma categoria degenerada, isto é, todos objetos de \mathcal{C} são isomorfos;
- (4) Todo morfismo de I para A é monomorfismo;
- (5) A e A^F são isomorfos;
- (6) A^I e F são isomorfos;
- (7) F^A e F são isomorfos.

Demonstração. Seja \mathcal{C} uma categoria cartesiana fechada com um objeto inicial I , um objeto final F e um objeto qualquer A .

- (1) Sabemos pela Proposição 3.8.1 que, para qualquer objeto B em \mathcal{C} , existe uma bijeção entre $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, B^A)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(I \times A, B)$. Porém $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, B^A)$ só tem um elemento, pois I é objeto inicial. Sendo assim, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(I \times A, B)$ também tem um único elemento, ou seja, para qualquer objeto B de \mathcal{C} existe um único morfismo $i_B : I \times A \rightarrow B$. Logo, $I \times A$ é um objeto inicial, e pela Proposição 3.1.1, temos que I é isomorfo a $I \times A$.
- (2) Suponha que existe um morfismo $i : A \rightarrow I$ em \mathcal{C} . Seja $(I \times A, p_I : I \times A \rightarrow I, p_A : I \times A \rightarrow A)$ um produto de I por A . Sabemos do item (1) que I é isomorfo a $I \times A$, e portanto $I \times A$ é um objeto inicial. Se considerarmos os morfismos i e 1_A , temos que existe um único morfismo $(i, 1_A) : A \rightarrow I \times A$ tal que $p_I \circ (i, 1_A) = i$ e $p_A \circ (i, 1_A) = 1_A$.

Por outro lado, veja que $(i, 1_A) \circ p_A$ é um morfismo de $I \times A$ para $I \times A$, e como $I \times A$ é objeto inicial, existe um único morfismo de $I \times A$ para ele mesmo, a identidade $1_{I \times A}$. Sendo assim, temos que $(i, 1_A) \circ p_A = 1_{I \times A}$ e $p_A \circ (i, 1_A) = 1_A$, ou seja, $(i, 1_A)$ é um isomorfismo de A para $I \times A$. Como A é isomorfo a $I \times A$, então A é isomorfo a I .

- (3) Suponha que I é isomorfo a F . Sendo assim, sabemos que existe um único morfismo de A para F , para todo objeto A de \mathcal{C} . Porém, como I é isomorfo a F , existe um morfismo de A para I . Portanto, de (2) do Teorema 3.8.1, temos que A é isomorfo a I , para todo objeto A de \mathcal{C} . Logo, da Proposição 2.2.5, todo objeto de \mathcal{C} é isomorfo, ou seja, \mathcal{C} é uma categoria degenerada.
- (4) Dado o único morfismo $f : I \rightarrow A$ considere morfismos $g, h : B \rightarrow I$ tais que $f \circ g = f \circ h$. Como existe um morfismo de B para I então, de (2) do Teorema 3.8.1, B é isomorfo a I , e portanto, da Proposição 3.1.2, B é um objeto inicial. Sendo assim, existe um único morfismo de B para I , ou seja, $g = h$. Logo, f é cancelável a esquerda, ou seja, f é um monomorfismo.

- (5) Para cada B em \mathcal{C} denote f_B como sendo o único morfismo de B para F . Sabemos da Proposição 3.3.4 que $(A^F, 1_{A^F}, f_{A^F})$ é um produto de A^F por F e também que $(A, 1_A, f_A)$ é um produto de A por F . Seja $v : A^F \rightarrow A$ morfismo de avaliação. Como temos os morfismos v e f_{A^F} , pelo produto de A por F , existe um único morfismo $(v, f_{A^F}) : A^F \rightarrow A$ tal que $1_A \circ (v, f_{A^F}) = v$ e $f_A \circ (v, f_{A^F}) = f_{A^F}$ (pois A é um produto de A por F). Veja que $v = 1_A \circ (v, f_{A^F}) = (v, f_{A^F})$.

Por outro lado, como A^F é exponencial, sendo assim considerando um morfismo $g : A \rightarrow A$, sabemos que existe um único morfismo $\hat{g}_A : A \rightarrow A^F$ tal que $v \circ (\hat{g}_A \times 1_A) = g$. Portanto, pelo produto de A^F por F , existe um único morfismo $(\hat{g}_A, f_A) : A \rightarrow A^F$ tal que $1_{A^F} \circ (\hat{g}_A, f_A) = \hat{g}_A$ e $f_{A^F} \circ (\hat{g}_A, f_A) = f_A$ (pois A^F é um produto de A^F por F). Perceba que $\hat{g}_A = 1_{A^F} \circ (\hat{g}_A, f_A) = (\hat{g}_A, f_A)$ e portanto, $f_{A^F} \circ \hat{g}_A = f_A$.

Contudo, $\hat{g}_A \circ v$ é um morfismo de A^F para A^F tal que $1_{A^F} \circ (\hat{g}_A \circ v) = (\hat{g}_A \circ v)$ e $f_{A^F} \circ (\hat{g}_A \circ v) = (f_{A^F} \circ \hat{g}_A) \circ v = f_A \circ v = f_{A^F}$. Porém, também temos que $1_{A^F} \circ 1_{A^F} = 1_{A^F}$ e $f_{A^F} \circ 1_{A^F} = f_{A^F}$. Logo, pela unicidade dada pelo produto de A^F por F , $\hat{g}_A \circ v = 1_{A^F}$. De modo análogo, concluímos que $v \circ \hat{g}_A = 1_A$, ou seja, A é isomorfo a A^F .

- (6) Da Proposição 3.8.1, sabemos que existe uma bijeção entre $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C \times I, A)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A^I)$ para todo objeto C em \mathcal{C} . Porém, da Proposição 3.3.2, de (1) do Teorema 3.8.1 e da Proposição 3.1.2, temos que $C \times I$ é um objeto inicial. Portanto, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C \times I, A)$ só tem um elemento, e como existe uma bijeção entre $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C \times I, A)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A^I)$, então $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A^I)$ também só tem um elemento. Logo, como para cada C em \mathcal{C} , $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A^I)$ só tem um elemento, então para todo objeto de \mathcal{C} existe um único morfismo desse objeto para A^I , ou seja, A^I é um objeto final em \mathcal{C} .
- (7) Da Proposição 3.8.1, sabemos que existe uma bijeção entre $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C \times A, F)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, F^A)$ para todo objeto C em \mathcal{C} . Porém, como F é objeto final, temos que

$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C \times A, F)$ tem somente um elemento, ou seja, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, F^A)$ também só tem um elemento para todo objeto C em \mathcal{C} . Logo, para todo objeto C em \mathcal{C} , existe um único morfismo de C para F^A , ou seja, F^A é um objeto final, e portanto, da Proposição 3.1.3, F^A é isomorfo a F .

□

Exemplo 3.8.1. *Vamos agora analisar a categoria Grp . É fácil notar que um grupo trivial é um objeto inicial e final em Grp , porém sabemos que Grp não é uma categoria degenerada, pois existem grupos que não são isomorfos. Logo, pelo Teorema 3.8.1, Grp não é categoria cartesiana fechada.*

Pelo mesmo motivo do exemplo anterior é possível notar, por exemplo, que Vect_K e **Ring** também não são categorias cartesianas fechadas. Mas veremos que as categorias **n** são cartesianas fechadas. Isso quer dizer que **n** é uma categoria mais parecida com **Set** do que as categorias Vect_K e **Ring**.

Exemplo 3.8.2. *As categorias **n** são categorias com exponenciação. De fato, dados $p, q \in \{0, \dots, n-1\}$, defina:*

$$q^p = \begin{cases} n-1 & \text{se } p \leq q \\ q & \text{se } q < p \end{cases}$$

Lembrando que $a \times b = \min\{a, b\}$, repare que, se $p \leq q$, então $q^p \times p = (n-1) \times p = p \leq q$ e se $q < p$, então $q^p \times p = q \times p = q$. Sendo assim, defina $v : q^p \times p \rightarrow q$ como

$$v = \begin{cases} (p, q) & \text{se } p \leq q \\ (q, q) & \text{se } q < p \end{cases}$$

e verifiquemos que v é um morfismo de avaliação. De fato, dado um morfismo $g = (\min\{c, p\}, q)$ de $c \times p$ para q , devemos ter $\min\{c, p\} \leq q$. No caso em que $p \leq q$, podemos tomar $\hat{g} : c \rightarrow q^p$ como o morfismo $(c, n-1)$, pois certamente $c \leq n-1$ e assim teremos

$$v \circ (\hat{g} \times 1_p) = (p, q) \circ ((c, n-1) \times (p, p)) = (p, q) \circ (\min\{c, p\}, p) = (\min\{c, p\}, q) = g.$$

E no caso em que $q < p$, como $\min\{c, p\} \leq q$, devemos ter $c < q = q^p$ e assim podemos tomar $\hat{g} : c \rightarrow q^p$ como o morfismo (c, q) e assim teremos

$$v \circ (\hat{g} \times 1_p) = (q, q) \circ ((c, q) \times (p, p)) = (q, q) \circ (\min\{c, p\}, q) = (\min\{c, p\}, q) = g.$$

Em qualquer caso, verifica-se que v é de fato um morfismo exponencial.

Para demonstrar o teorema anterior, foi necessário diversos conhecimentos introduzidos anteriormente. Vemos então que toda a teoria apresentada pode ser relacionada. Porém, ainda precisamos de mais um conceito antes de definir topos. Esse conceito, por sua vez, precisa de uma outra noção que também não foi apresentada ainda neste texto. Sendo assim, começaremos o próximo capítulo construindo essas noções aos poucos para que fique claro a ligação e definição dos mesmos.

4 INTRODUZINDO TOPOI

Como dito anteriormente, nesse capítulo iremos introduzir novas definições que irão fazer parte da definição de um topos. Mais precisamente, precisamos entender o que é de fato um “classificador de subobjetos”. Sendo assim, para entender o que isso significa, precisamos deixar claro o que são subobjetos.

4.1 SUBOBJETOS

Quando tomamos A um subconjunto de B em **Set**, podemos dizer que a função inclusão $A \hookrightarrow B$ é injetiva (ou monomorfismo). Porém, é notável que qualquer função injetiva $f : C \rightarrow B$ determina um conjunto $Im(f) = \{f(x); x \in C\}$ que é um subconjunto de B . Sendo assim, podemos relacionar cada função $f : C \rightarrow B$ injetiva com sua imagem, pois sabemos que a imagem é um subconjunto de B . Entretanto, sabemos que podemos tomar uma função $g : C' \rightarrow B$ injetiva, com $C \neq C'$, tal que $Im(f) = Im(g)$. Portanto, duas funções diferentes representariam subconjuntos iguais. Para que isso não aconteça, quando tomarmos esse conceito em linguagem categórica, vamos considerar a seguinte definição.

Definição 4.1.1. *Seja \mathcal{C} uma categoria e A um objeto de \mathcal{C} . Dados monomorfismos $i_1 : B_1 \rightarrow A$ e $i_2 : B_2 \rightarrow A$ de \mathcal{C} , dizemos que $i_1 \subset i_2$ se existe um morfismo $f : B_1 \rightarrow B_2$ tal que $i_1 = i_2 \circ f$.*

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 i_1 \nearrow & & \nwarrow i_2 \\
 B_1 & \xrightarrow{f} & B_2
 \end{array}$$

Dizemos que $i_1 \sim i_2$ se $i_1 \subset i_2$ e $i_2 \subset i_1$

Agora queremos mostrar que \sim é uma relação de equivalência, e também que, se $i_1 \sim i_2$, com $i_1 : B_1 \rightarrow A$ e $i_2 : B_2 \rightarrow A$ monomorfismos em uma categoria \mathcal{C} , $B_1 \cong B_2$ em \mathcal{C} .

Proposição 4.1.1. *A relação \sim definida por $f \sim g$ se $f \subset g$ e $g \subset f$, com f e g monomorfismos com mesmo contradomínio, é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Tome \mathcal{C} uma categoria e $f : A_1 \rightarrow B$, $g : A_2 \rightarrow B$ e $h : A_3 \rightarrow B$ monomorfismos nessa categoria. Considere a relação \sim definida acima.

Perceba que $f \subset f$, pois existe 1_{A_1} e $f = f \circ 1_{A_1}$. Sendo assim temos que $f \sim f$, satisfazendo a propriedade reflexiva.

Suponha agora que $f \sim g$, ou seja, $f \subset g$ e $g \subset f$. Sendo assim, podemos dizer que $g \subset f$ e $f \subset g$, e isso significa que $g \sim f$. Assim \sim também satisfaz a propriedade simétrica.

Agora suponha que $f \sim g$ e $g \sim h$. De $f \sim g$ temos que $f \subset g$ e $g \subset f$, ou seja, existem morfismos $i : A_1 \rightarrow A_2$ e $i' : A_2 \rightarrow A_1$ tais que $f = g \circ i$ e $g = f \circ i'$. Já de $g \sim h$ temos que $g \subset h$ e $h \subset g$, ou seja, existem morfismos $j : A_2 \rightarrow A_3$ e $j' : A_3 \rightarrow A_2$ tais que $g = h \circ j$ e $h = g \circ j'$. Portanto, existem morfismos $(j \circ i) : A_1 \rightarrow A_3$ e $(i' \circ j') : A_3 \rightarrow A_1$ tais que $f = g \circ i = (h \circ j) \circ i = h \circ (j \circ i)$ e $h = g \circ j' = (f \circ i') \circ j' = f \circ (i' \circ j')$. Logo, temos que $f \subset h$ e $h \subset f$, ou seja, $f \sim h$ e $h \sim f$. Assim \sim também satisfaz a propriedade transitiva.

Veja que \sim é uma relação que satisfaz a propriedade reflexiva, a propriedade simétrica e também a transitiva. Conclui-se então que \sim é uma relação de equivalência. \square

Proposição 4.1.2. *Seja \mathcal{C} uma categoria e \sim a relação de equivalência dada na Definição 4.1.1. Se f e g são monomorfismos com mesmo contradomínio tais que $f \sim g$, então $\text{dom}(f) \cong \text{dom}(g)$.*

Demonstração. Tome \mathcal{C} uma categoria e \sim a relação de equivalência definida na Definição 4.1.1. Considere os monomorfismos $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow B$ e suponha que $f \sim g$. Pela definição, sabemos que existem morfismos $h : A \rightarrow C$ e $h' : C \rightarrow A$ tal que $f = g \circ h$ e $g = f \circ h'$. Sendo assim, temos que $g \circ 1_C = g = f \circ h' = (g \circ h) \circ h' = g \circ (h \circ h')$ e $f \circ 1_A = f = g \circ h = (f \circ h') \circ h = f \circ (h' \circ h)$, porém f e g são monomorfismos, logo $1_C = (h \circ h')$ e $1_A = (h' \circ h)$. Portanto, h é um isomorfismo de A para C , ou seja, A e C são isomorfos. \square

Veja que a recíproca não é verdadeira, pois se, em **Set**, tomarmos as funções inclusões $i_1 : \{0\} \rightarrow \{0, 1\}$ e $i_2 : \{1\} \rightarrow \{0, 1\}$ temos que $\{0\} \cong \{1\}$, mas $i_1 \not\sim i_2$. Mas geralmente, temos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.1.1. *Sejam $f : B \rightarrow A$ e $g : C \rightarrow A$ funções injetivas. Temos que f e g são equivalentes, pela relação de equivalência definida na Definição 4.1.1, se, e somente se, $\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$. Para demonstrar isso suponha, primeiramente, que f e g são equivalentes pela relação mencionada acima. Sendo assim, existem morfismos $h : B \rightarrow C$ e $j : C \rightarrow B$ tais que $f = g \circ h$ e $g = f \circ j$. Assim, temos que $f = g \circ h = (f \circ j) \circ h = f \circ (j \circ h)$ e $g = f \circ j = (g \circ h) \circ j = g \circ (h \circ j)$. Como f e g são injetivas, então $j \circ h = 1_B$ e $h \circ j = 1_C$, ou seja, h e j são bijetivas. Agora veja que $\text{Im}(f) = \{f(x) | x \in B\} = \{g(h(x)) | x \in B\}$, e como h é bijetiva, temos que $\text{Im}(f) = \{g(h(x)) | x \in B\} = \{g(y) | y \in C\} = \text{Im}(g)$.*

Para mostrar que se $\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$, então f e g são equivalentes, suponha agora que $\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$. Sendo assim, para todo $x \in B$ existe um $y_x \in C$ tais que $f(x) = g(y_x)$. Podemos definir então a função $k : B \rightarrow C$ em que $k(x) = y_x$ para todo $x \in B$. Portanto, $f(x) = g(y_x) = g(k(x))$ para todo $x \in B$, ou seja, temos que $f \subset g$, pois $f = g \circ k$. Por

outro lado, como $Im(f) = Im(g)$, para todo $y \in C$ existe um $x_y \in B$ tais que $g(y) = f(x_y)$. Podemos definir então a função $k' : C \rightarrow B$ em que $k'(y) = x_y$ para todo $y \in C$. Portanto, $g(y) = g(x_y) = g(k'(y))$ para todo $y \in C$, ou seja, temos que $g \subset f$, pois $g = f \circ k'$. Logo, $f \sim g$, ou seja, f e g são equivalentes, pela relação de equivalência definida na Definição 4.1.1.

A partir de agora, quando falarmos de uma relação \sim em uma categoria, estamos nos referindo a relação de equivalência definida na Definição 4.1.1. Com isso em mente, podemos definir o que iremos chamar de subobjetos.

Definição 4.1.2. *Seja \mathcal{C} uma categoria, A um objeto em \mathcal{C} . Um subobjeto de A é uma classe de equivalência de monomorfismos $[f]$, dada pela relação de equivalência \sim , em que $cod(f) = A$.*

Denotamos a classe de todos subobjetos de A por $sub(A)$.

Exemplo 4.1.2. *Em \mathbf{Set} podemos tomar um conjunto A e para cada subconjunto K de A chamar de $i_K : K \rightarrow A$ a função inclusão. Sendo assim, podemos definir uma função $g : \mathcal{P}(A) \rightarrow sub(A)$ da forma $g(K) = [i_K]$ para todo $K \subset A$.*

Veja que, se tivermos $g(K_1) = g(K_2)$ então $[i_{K_1}] = [i_{K_2}]$, e pelo Exemplo 4.1.1, temos que $K_1 = Im(i_{K_1}) = Im(i_{K_2}) = K_2$. Logo, g é uma função injetora.

Por outro lado, se tomarmos $[f] \in sub(A)$ sabemos que f é uma função injetora de algum conjunto D para A . Portanto, $Im(f) \subset A$. Isso significa que existe a função $i_{Im(f)} : Im(f) \rightarrow A$, e assim temos que $g(Im(f)) = [i_{Im(f)}] = [f]$, pois $Im(f) = Im(i_{Im(f)})$. Logo, g é uma função sobrejetora.

Concluimos então que g é uma bijeção entre $\mathcal{P}(A)$ e $sub(A)$, ou seja, $\mathcal{P}(A) \cong sub(A)$.

4.2 CLASSIFICAÇÃO DE SUBOBJETOS

Em \mathbf{Set} , se tomarmos um conjunto A podemos caracterizar o conjunto $\mathcal{P}(A)$ por $\mathbf{2}^A$, com $\mathbf{2} = \{0, 1\}$. Isso se deve ao fato de que $\mathcal{P}(A) \cong \mathbf{2}^A$ para todo A em \mathbf{Set} . Sendo assim, dado um subconjunto B de A podemos definir a função $x_B : A \rightarrow \mathbf{2}$ da seguinte maneira:

$$x_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

Veja que se tivermos subconjuntos B e C de A tal que $B \neq C$ então, sem perda de generalidade, existe um $b \in B$ tal que $b \notin C$. Logo $x_B(b) \neq x_C(b)$, ou seja, se $x_B = x_C$ então $B = C$. Isso significa que a função $f : \{x_B : A \rightarrow \mathbf{2}; B \subset A\} \rightarrow A$ dada por $f(x_B) = B$ é injetiva.

Note também que f é sobrejetiva, pois para qualquer D subconjunto de A temos que existe a função $x_D \in \{x_B : A \rightarrow \mathbf{2}; B \subset A\}$. Portanto, f é bijetiva.

Com essa ideia podemos notar que, para todo $B \subset A$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{i_B} & A \\ \downarrow g & & \downarrow x_B \\ \{1\} & \xleftarrow{\mathcal{T}} & \mathbf{2} \end{array}$$

em que i_B e \mathcal{T} são funções inclusão, e g é o único morfismo de B para $\{1\}$ (pois $\{1\}$ é objeto final em **Set**). Além disso, (B, i_B, g) é um pullback para os morfismos \mathcal{T} e x_B , pois dado $b \in B$ temos que $(x_B \circ i_B)(b) = x_B(i(b)) = x_B(b) = 1 = \mathcal{T}(1) = \mathcal{T}(g(b)) = (\mathcal{T} \circ g)(b)$, ou seja, $x_B \circ i_B = \mathcal{T} \circ g$. Além disso, se tomarmos (E, e_1, e_2) tal que $x_B \circ e_1 = \mathcal{T} \circ e_2$, temos que existe uma única função $k : E \rightarrow B$, dada por $k(x) = e_1(x)$ para todo $x \in E$, tal que $i_B \circ k = e_1$, pois dado $x \in E$ qualquer, temos que $(i_B \circ k)(x) = i_B(k(x)) = k(x) = e_1(x)$. E perceba que $g \circ k = e_2$, pois $\{1\}$ é objeto final em **Set**. Sendo assim, temos que (B, i_B, g) é de fato um pullback para os morfismos \mathcal{T} e x_B .

Agora podemos transferir essa noção para linguagem categórica da seguinte forma.

Definição 4.2.1. *Seja \mathcal{C} uma categoria com um objeto final F . Um classificador de objetos para \mathcal{C} é uma dupla $(\Omega, \mathcal{T} : F \rightarrow \Omega)$ que satisfaz o seguinte axioma:*

- **Axioma** - Ω . *Para todo monomorfismo $f : A \rightarrow D$ existe um único morfismo $x_f : D \rightarrow \Omega$ tal que $(A, f, g : A \rightarrow F)$ é um pullback para os morfismos x_f e \mathcal{T} .*

O morfismo x_f é chamado de morfismo característico de f .

Perceba que em todo classificador de subobjetos $(\Omega, \mathcal{T} : F \rightarrow \Omega)$, para uma categoria \mathcal{C} , o morfismo \mathcal{T} é um monomorfismo, pois dados $g, h : A \rightarrow F$ tais que $\mathcal{T} \circ g = \mathcal{T} \circ h$ temos que, pelo fato de F ser objeto final em \mathcal{C} , $g = h$.

Proposição 4.2.1. *Seja \mathcal{C} uma categoria com classificador de subobjetos. Se $(\Omega, \mathcal{T} : F \rightarrow \Omega)$ e $(\Omega', \mathcal{T}' : F \rightarrow \Omega')$ são classificadores de objetos em \mathcal{C} , então $\Omega \cong \Omega'$.*

Demonstração. Tome \mathcal{C} uma categoria com classificador de subobjetos. Suponha que $(\Omega, \mathcal{T} : F \rightarrow \Omega)$ e $(\Omega', \mathcal{T}' : F \rightarrow \Omega')$ são classificadores de objetos em \mathcal{C} . Perceba que \mathcal{T} e \mathcal{T}' são monomorfismos, pois F é objeto final em \mathcal{C} . Como $(\Omega', \mathcal{T}' : F \rightarrow \Omega')$ é classificador de objetos temos que existe um único morfismo $x'_{\mathcal{T}} : \Omega \rightarrow \Omega'$ tal que $(F, \mathcal{T}, 1_F)$, com F sendo um objeto final em \mathcal{C} , é um pullback para $x'_{\mathcal{T}}$ e \mathcal{T}' . Por outro lado, como $(\Omega, \mathcal{T} : F \rightarrow \Omega)$ é classificador de objetos temos que existe um único morfismo $x_{\mathcal{T}'} : \Omega' \rightarrow \Omega$ tal que $(F, \mathcal{T}', 1_F)$ é um pullback para $x_{\mathcal{T}'}$ e \mathcal{T} . Sendo assim, temos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{\mathcal{T}} & \Omega \\
 1_F \downarrow & & \downarrow x'_T \\
 F & \xrightarrow{\mathcal{T}'} & \Omega' \\
 1_F \downarrow & & \downarrow x_{\mathcal{T}'} \\
 F & \xrightarrow{\mathcal{T}} & \Omega
 \end{array}$$

Seja $(D, d_1 : D \rightarrow \Omega, d_2 : D \rightarrow F)$ uma tripla tal que $x_{\mathcal{T}'} \circ x'_T \circ d_1 = \mathcal{T} \circ d_2$. Assim, $(D, x'_T \circ d_1, d_2)$ é tal que $x_{\mathcal{T}'} \circ (x'_T \circ d_1) = \mathcal{T} \circ d_2$.

Como $(F, \mathcal{T}', 1_F)$ é um pullback de $x_{\mathcal{T}'}$ e \mathcal{T} , existe um único morfismo $k : D \rightarrow F$ tal que $1_F \circ k = d_2$ e $\mathcal{T}' \circ k = x'_T \circ d_1$. Isso significa que $k = d_2$ e $\mathcal{T}' \circ d_2 = x'_T \circ d_1$.

Como $(F, \mathcal{T}, 1_F)$ é pullback de x'_T e \mathcal{T}' , existe um único morfismo $k' : D \rightarrow F$ tal que $1_F \circ k' = d_2$ e $\mathcal{T} \circ k' = d_1$. Sendo assim, $k' = d_2$ e $\mathcal{T} \circ d_2 = d_1$. Logo, $(F, \mathcal{T}, 1_F)$ é um pullback para os morfismos $x_{\mathcal{T}'} \circ x'_T$ e \mathcal{T} .

Porém, pela definição de classificador de subobjeto, $x_{\mathcal{T}'} \circ x'_T$ é único tal que é um pullback para os morfismos $x_{\mathcal{T}'}$ e x'_T e \mathcal{T} . Por outro lado, 1_Ω é o único morfismo tal que $(F, \mathcal{T}, 1_F)$ é um pullback para os morfismos 1_Ω e \mathcal{T} . Portanto, $x_{\mathcal{T}'} \circ x'_T = 1_\Omega$.

De maneira análoga mostramos que $x'_T \circ x_{\mathcal{T}'} = 1_{\Omega'}$. Logo, x'_T é um isomorfismo entre Ω e Ω' , ou seja, Ω é isomorfo a Ω' .

□

Quando falamos em classificadores de objetos costumamos usar morfismos que tem como contradomínio um objeto final. Por esse motivo, vamos definir que, para F objeto final em \mathcal{C} e A objeto qualquer em \mathcal{C} , ϕ_A é a notação que usaremos para denotar o morfismo de A para F .

Proposição 4.2.2. *Se \mathcal{C} é uma categoria e $(\Omega, \mathcal{T} : F \rightarrow \Omega)$ é um classificador de subobjetos para \mathcal{C} , então são válidas as seguintes afirmações:*

- (1) *O morfismo característico de $\mathcal{T} : F \rightarrow \Omega$ é o morfismo 1_Ω ;*
- (2) *Em \mathcal{C} temos a igualdade $x_{1_\Omega} = \mathcal{T} \circ \phi_\Omega$;*
- (3) *Para todo morfismo $f : A \rightarrow B$ temos que $\mathcal{T} \circ (\phi_B \circ f) = \mathcal{T} \circ \phi_A$.*

Demonstração. (1) O morfismo característico de $\mathcal{T} : F \rightarrow \Omega$ é um morfismo $x_{\mathcal{T}} : \Omega \rightarrow \Omega$ tal que $(F, \mathcal{T}, 1_F)$ é um pullback para $x_{\mathcal{T}}$ e \mathcal{T} . Sendo assim, temos que $x_{\mathcal{T}} \circ \mathcal{T} = \mathcal{T} \circ 1_F$, ou seja, $x_{\mathcal{T}} \circ \mathcal{T} = \mathcal{T}$. Porém, veja que se tomarmos 1_Ω temos que $(F, \mathcal{T}, 1_F)$ é um pullback para 1_Ω e \mathcal{T} , pois dado uma tripla $(A, f : A \rightarrow \Omega, \phi_A)$, tal que $f \circ 1_\Omega = \phi_A \circ \mathcal{T}$, temos que existe um único morfismo ϕ_A tal que $\mathcal{T} \circ \phi_A = f$ e $1_F \circ \phi_A = \phi_A$. Logo, pela unicidade do morfismo $x_{\mathcal{T}}$, $x_{\mathcal{T}} = 1_\Omega$.

- (2) Em \mathcal{C} temos que o morfismo característico de 1_Ω , o morfismo x_{1_Ω} , é o único morfismo tal que $(\Omega, 1_\Omega, \phi_\Omega)$ é um pullback para os morfismos x_{1_Ω} e \mathcal{T} . Sendo assim, temos a igualdade $x_{1_\Omega} \circ 1_\Omega = \mathcal{T} \circ \phi_\Omega$, ou seja, $x_{1_\Omega} = \mathcal{T} \circ \phi_\Omega$ como queríamos demonstrar.
- (3) Tome um morfismo $f : A \rightarrow B$ qualquer e veja que, como F é objeto final, $\phi_A = \phi_B \circ f$. Logo, temos que $\mathcal{T} \circ (\phi_B \circ f) = \mathcal{T} \circ \phi_A$ como queríamos demonstrar.

Agora que trabalhamos um pouco com classificadores de objetos podemos nos familiarizar com essa noção e finalmente definir um topos.

Chegou o momento que deixamos as categorias \mathbf{n} para trás, pois, a seguir, veremos que elas não tem classificador de subobjetos.

Exemplo 4.2.1. *As categorias \mathbf{n} não tem classificador de subobjetos. De fato, suponha que \mathbf{n} tem um classificador de subobjetos. Note que o objeto final de \mathbf{n} é $n - 1$ e o único morfismo com domínio igual a $n - 1$ é o morfismo identidade. Logo, obrigatoriamente devemos ter $\Omega = n - 1$ e $\mathcal{T} = (n - 1, n - 1)$. Considere agora um morfismo $f = (a, d)$ em \mathbf{n} , de modo que $a \leq d$. Assim, obrigatoriamente devemos ter $x_f = (d, n - 1)$, pois este é o único morfismo de d para $\Omega = n - 1$. Isso significa que $(a, (a, d), (a, n - 1))$ é um pullback para $x_f = (d, n - 1)$ e $\mathcal{T} = (n - 1, n - 1)$. Mas, como visto no Exemplo 3.6.3, o pullback de $(d, n - 1)$ e $(n - 1, n - 1)$ é dado por $(d, (d, d), (d, n - 1))$, de modo que se escolhermos $a < d$, a tripla $(a, (a, d), (a, n - 1))$ não será um pullback para $x_f = (d, n - 1)$ e $\mathcal{T} = (n - 1, n - 1)$.*

□

4.3 DEFINIÇÃO DE TOPOS

Definição 4.3.1. *Um topos é uma categoria \mathcal{C} tal que:*

- (1) \mathcal{C} é completa;
- (2) \mathcal{C} é co-completa;
- (3) \mathcal{C} é categoria com exponenciação;
- (4) \mathcal{C} tem classificador de subobjetos.

A definição acima podia ser dada de outra maneira, porém dessa forma ganhamos um método de verificação passo a passo. Basta verificar separadamente cada um dos itens necessários.

Exemplo 4.3.1. *Já verificamos que \mathbf{Set} é uma categoria, com exponenciação, completa, co-completa e que tem classificador de subobjetos. Sendo assim, com o auxílio de tudo que viemos mostrando sobre \mathbf{Set} , concluímos que \mathbf{Set} é de fato um topos.*

Exemplo 4.3.2. Sabemos que em \mathbf{Finset} existem objetos finais e pullback para quaisquer par de morfismos, ou seja, pelo Teorema 3.7.1, temos que \mathbf{Finset} é finitamente completa. Também sabemos que \emptyset é objeto inicial em \mathbf{Finset} e para quaisquer par de morfismos existe um pushout, ou seja, pelo Teorema 3.7.2, temos que \mathbf{Finset} é finitamente co-completa. Além disso, já vimos que \mathbf{Finset} é uma categoria com exponenciação. Por fim, podemos tomar o classificador de subobjetos em \mathbf{Set} e ver que ele também é um classificador de subobjetos em \mathbf{Finset} . Logo, \mathbf{Finset} é um topos.

Exemplo 4.3.3. A categoria \mathbf{Set}^2 tem como objetos os pares (A, B) tais que A e B são objetos em \mathbf{Set} . E para cada par de morfismos, $f : A \rightarrow C$ e $g : B \rightarrow D$ em \mathbf{Set} , existe um morfismo $f \times g : (A, B) \rightarrow (C, D)$ em \mathbf{Set}^2 .

Sendo assim, o par (F, F) , em que F é objeto final de \mathbf{Set} , é um objeto final em \mathbf{Set}^2 , pois dados A e B em \mathbf{Set} existem únicos morfismos $f : A \rightarrow F$ e $g : B \rightarrow F$, ou seja, existe um único morfismo $f \times g$ de (A, B) para (F, F) .

Além disso, dados dois morfismos $f \times g : (A_1, B_1) \rightarrow (C, D)$ e $h \times k : (A_2, B_2) \rightarrow (C, D)$, sabemos que existe um pullback $(P, i : P \rightarrow A_2, j : P \rightarrow A_1)$, em \mathbf{Set} , para os morfismos f e h , e também um pullback $(Q, u : Q \rightarrow B_1, v : Q \rightarrow B_2)$, em \mathbf{Set} , para os morfismos g e k . Portanto, $((P, Q), j \times u, i \times v)$ é um pullback para os morfismos $f \times g$ e $h \times k$, pois dado a tripla $((R, S), r_1 \times s_1, r_2 \times s_2)$ tal que $(f \times g) \circ (r_1 \times s_1) = (h \times k) \circ (r_2 \times s_2)$ sabemos que $f \circ r_1 = h \circ r_2$ e $g \circ s_1 = k \circ s_2$. Além disso, sabemos que temos o pullback (P, i, j) para os morfismos f e h e o pullback (Q, u, v) para os morfismos g e k , então existem únicos morfismos $k_1 : R \rightarrow P$ e $k_2 : S \rightarrow Q$ tais que $i \circ k_1 = r_1$, $j \circ k_1 = r_2$, $u \circ k_2 = s_1$ e $v \circ k_2 = s_2$. Sendo assim, $k_1 \times k_2$ é o único morfismo de (R, S) para (P, Q) tal que $(j \times u) \circ (k_1 \times k_2) = r_1 \times s_1$ e $(i \times v) \circ (k_1 \times k_2) = r_2 \times s_2$, ou seja, $((P, Q), j \times u, i \times v)$ é, de fato, um pullback para os morfismos $f \times g$ e $h \times k$.

Com raciocínio análogo chegamos a conclusão que \mathbf{Set}^2 tem objeto inicial, e também tem pushout para quaisquer pares de morfismos com mesmo domínio. Logo, pelo Teorema 3.7.1 e pelo Teorema 3.7.2, temos que \mathbf{Set}^2 é finitamente completa e co-completa.

Um exponencial $(C, D)^{(A, B)}$ em \mathbf{Set}^2 é o objeto (C^A, D^B) em que o morfismo avaliação é dado por um morfismo $e \times v$ de $(C, D)^{(A, B)} \times (A, B) = (C^A \times A, D^B \times B)$ para (C, D) tal que $e : C^A \times A \rightarrow C$ e $v : D^B \times B \rightarrow D$ são morfismos avaliação em \mathbf{Set} .

Por fim, o classificador de subobjetos em \mathbf{Set}^2 é dado por $(\mathcal{T}, \mathcal{T}) : (F, F) \rightarrow (\mathbf{2}, \mathbf{2})$, em que F é objeto final em \mathbf{Set} .

Concluimos então que \mathbf{Set}^2 é de fato um topos.

Veja que no exemplo anterior não usamos a natureza dos objetos e morfismos, ou seja, não precisamos do fato de que os objetos em \mathbf{Set} são conjuntos e os morfismos são funções. Sendo assim, \mathbf{Set} não é especial nesse exemplo. Isso significa que, se \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 são topoi quaisquer, então $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ é um topos.

Agora podemos analisar categorias afim de descobrir se ela é, ou não, um topos.

Por exemplo, sabemos que Set^2 é um topos, e que \mathbf{Set} também é, ou seja, temos que $Set^2 \times Set = Set^3$ é um topos. Logo, é notável que Set^n e $Finset^n$ são topoi para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$. Também é claro que combinações do tipo $Set^n \times Finset^m$ e $Finset^n \times Set^m$ são topoi para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}^*$.

Os topoi podem ser analisados de diversas maneiras, que por sua vez, dependem da ótica do matemático que estiver a estudando. Na lógica intuicionista, por exemplo, é usado como uma base formal para o intuicionismo de Brouwer. Os resultados obtidos com essa base formal não preservam apenas os resultados da lógica, mas também suas justificativas, contribuindo para o construtivismo matemático.

Assim, finalmente conseguimos definir e dar exemplos de topoi para continuar estudando e procurando por propriedades que nos interessem dentro dessas estruturas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GOLDBLATT, R. *Topoi, The Categorical Analysis of Logic: Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. Volume 98. Elsevier Science Publishers B.V., 1984.

ALUFFI, P. *ALGEBRA, Chapter 0*. Volume 104. American Mathematical Society, 2009.

MAC LANE, S. *Categories for the Working Mathematician*. Second Edition. United States: Springer Science, 1998.

MAC LANE, S; Moerdijk, I. *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. United States: Springer Science+Business Media New York, 1992.

MUNKRES, James R. *Topology*. Second Edition. United States: Prentice Hall, 2000.

HUNGERFORD, Thomas W. *Algebra: Graduate Texts in Mathematics*. United States: Springer Science, 1974.