



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS/CFM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Clésio Evangelista Mota

Astrofísica nuclear revisitada a partir da teoria da gravidade modificada

Florianópolis
2022

Clésio Evangelista Mota

Astrofísica nuclear revisitada a partir da teoria da gravidade modificada

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de doutor em física.
Orientadora: Débora Peres Menezes, Dra.

Florianópolis
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Mota, Clésio Evangelista

Astrofísica nuclear revisitada a partir da teoria da gravidade modificada / Clésio Evangelista Mota ; orientadora, Débora Peres Menezes, 2022.

188 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Física. 2. Relatividade geral. 3. Gravidade modificada. 4. Equação de estado. 5. Estrelas compactas. I. Peres Menezes, Débora. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

Clésio Evangelista Mota

Astrofísica nuclear revisitada a partir da teoria da gravidade modificada

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dimiter Hadjimichef, Dr.
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Luis Cesar Nunes dos Santos, Dr.
Universidade Federal da Paraíba

Prof. Tiago José Nunes da Silva, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de doutor em física.

Prof. Paulo Henrique Souto Ribeiro, Dr.
Coordenador do Programa

Débora Peres Menezes, Dra.
Orientadora

Florianópolis, 2022.

A Deus por tudo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela sua misericórdia, pela maravilhosa graça da salvação, pelo júbilo da vida e pela oportunidade do conhecimento.

Aos meus pais pelo apoio e incentivo de sempre.

À minha querida esposa, Márcia, pelo amor, pelo companheirismo e por todo o carinho.

À Prof^a. Débora, pela orientação e por todos os ensinamentos.

À CAPES, pelo apoio financeiro, pois sem ele não seria possível.

Também a minha gratidão a todos os amigos e colegas, pelos momentos agradáveis.

Enfim a todos que, de maneira direta ou indireta, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Estou-lhes grato!

*“Remember to look up at the stars and not down at your feet. Try to make sense of what you see and wonder about what makes the universe exist. Be curious.”
(S. Hawking, segundo a Internet).*

RESUMO

O estudo de situações de equilíbrio estelar em estrelas compactas, estrelas de nêutrons e magnetares, requer o uso das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkof (TOV), que são equações de equilíbrio hidrostático relativístico provenientes da relatividade geral (RG). A solução delas depende de equações de estado (EoSs), que estabelecem o comportamento da pressão e da densidade de energia para a matéria constituinte da estrela. As propriedades macroscópicas obtidas (massas e raios) a partir dessa solução são, por sua vez, confrontadas com as observadas pelos astrofísicos. A discrepância entre estas propriedades, obtidas a partir da RG com as medições astrofísicas, e o conhecimento ainda incompleto sobre o comportamento da gravidade nessas condições extremas relacionadas aos objetos compactos permitem o uso de teorias de gravidade modificada para descrever tais estrelas. Por essa razão, o objetivo desta tese é investigar as propriedades macroscópicas de estruturas estelares compactas e estáveis. Metodologicamente, utilizam-se EoS que descrevem tanto matéria de hádrons quanto de quarks, no contexto de algumas teorias de gravidade modificada. Nesse sentido, são apresentadas duas propostas distintas: uma teoria de gravidade modificada, a teoria Rastall-Rainbow (RR), e uma generalização da teoria da gravidade de Rastall. Essas teorias, quando aplicadas na descrição do interior estelar, geram equações funcionalmente análogas à TOV, porém, com quantidades p e ε repassadas por quantidades efetivas \bar{p} e $\bar{\varepsilon}$. Em face disso, constata-se que modificações substanciais nos perfis massa-raio de estrelas de nêutrons são obtidas mesmo para pequenas alterações nos parâmetros livres dessas teorias modificadas. Os resultados indicam que, a utilização de gravidade modificada no estudo de estrelas compactas fornece bons resultados para as massas e raios de alguns objetos astrofísicos importantes, por exemplo, o binário de raios-X de baixa massa (LMXB) NGC 6397 e o pulsar de milissegundo PSR J0740+6620. Além disso, os resultados de raios inferidos do Lead Radius EXperiment (PREX-2) também podem ser descritos para certos valores de parâmetros.

Palavras-chave: Relatividade geral. Gravidade modificada. Equação de estado. Estrelas compactas.

ABSTRACT

The study of stellar equilibrium situations in compact stars, neutron stars and magnetars, requires the use of the Tolman-Oppenheimer-Volkof (TOV) equations, which are relativistic hydrostatic equilibrium equations derived from general relativity (GR). Their solution depends on equations of state (EoSs), which establish the behavior of pressure and energy density for the star's constituent matter. The macroscopic properties obtained (masses and radii) from this solution are, in turn, compared with those observed by astrophysicists. The discrepancy between these properties, obtained from GR with astrophysical measurements, and the still incomplete knowledge about the behavior of gravity in these extreme conditions related to compact objects allow the use of modified gravity theories to describe such stars. For this reason, the aim of this thesis is to investigate the macroscopic properties of compact and stable stellar structures. Methodologically, EoS are used that describe both hadron and quark matter, in the context of some theories of modified gravity. In this sense, two distinct proposals are presented: a modified theory of gravity, the Rastall-Rainbow (RR) theory, and a generalization of Rastall's theory of gravity. These theories, when applied to the description of the stellar interior, generate equations functionally analogous to TOV, however, with quantities ρ and ϵ passed on by effective quantities $\bar{\rho}$ and $\bar{\epsilon}$. Because of this, it appears that substantial changes in the mass-radius profiles of neutron stars are obtained even for small changes in the free parameters of these modified theories. The results indicate that the use of modified gravity in the study of compact stars provides good results for the masses and radii of some important astrophysical objects, for example, the low-mass X-ray binary (LMXB) NGC 6397 and the pulsar of millisecond PSR J0740+6620. In addition, radii results inferred from the Lead Radius EXperiment (PREX-2) can also be described for certain parameter values.

Keywords: General relativity. Modified gravity. Equation of state. Compact stars.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Equação de estado para matéria de quarks obtida do modelo de sacola do MIT considerando $B^{1/4} = 147$ MeV.	36
Figura 2 – Equações de estado para matéria hadrônica.	41
Figura 3 – Equações de estado para matéria hadrônica obtidas a partir dos modelos QMC e $QMC_{\omega\rho}$	45
Figura 4 – Modelo para a estrutura de uma estrela de nêutrons, extraído de (YASEEN; ALBAKRY, 2020).	46
Figura 5 – Relação massa-raio para uma família de estrelas de quarks descrita pela EoS MIT.	47
Figura 6 – Relação massa-raio para uma família de estrelas hadrônicas descrita pelas EoSs IU-FSU, TM1, QMC e $QMC_{\omega\rho}$	47
Figura 7 – Relação massa-raio para uma família de estrelas hadrônicas descrita com a EoS IU-FSU. Analisamos os efeitos causados pela variação do parâmetro Rainbow Σ (superior) enquanto mantemos o outro parâmetro fixo e, os efeitos em variar o parâmetro Rastall λ (inferior) enquanto mantínhamos Σ fixo.	59
Figura 8 – EoS IU-FSU (linha sólida) e a correspondente EoS RR (linha tracejada) obtida com o parâmetro denominado $RR_{\lambda 4}$ na Tabela 3.	60
Figura 9 – Relação massa-raio para uma família de estrelas hadrônicas descrita com a EoS QMC. Analisamos os efeitos causados pela variação do parâmetro Rainbow Σ (superior) enquanto mantemos o outro parâmetro fixo e, os efeitos em variar o parâmetro Rastall λ (inferior) enquanto mantínhamos Σ fixo.	61
Figura 10 – Relação massa-raio para uma família de estrelas hadrônicas descrita com a EoS $QMC_{\omega\rho}$. Analisamos os efeitos causados pela variação do parâmetro Rainbow Σ (superior) enquanto mantemos o outro parâmetro fixo e, os efeitos em variar o parâmetro Rastall λ (inferior) enquanto mantínhamos Σ fixo.	63
Figura 11 – A pressão radial p_r (esquerda) e a pressão transversal p_t (direita) como funções da coordenada radial r para o modelo do MIT, normalizado para o valor de p_r no centro da estrela p_0	70
Figura 12 – A pressão radial p_r (esquerda) e a pressão transversal p_t (direita) como funções da coordenada radial r para o modelo IU-FSU, normalizado para o valor de p_r no centro da estrela p_0	71
Figura 13 – Pressões radial e tangencial para diferentes valores do parâmetro β	72

- Figura 14 – Relação massa-raio para uma família de estrelas de quarks descritas com a EoS MIT. Analisamos os efeitos causados pela variação do parâmetro Rainbow Σ (acima) enquanto mantemos o outro parâmetro fixo e os efeitos da variação do parâmetro Rastall λ (abaixo) enquanto mantemos Σ fixo. $\beta = 0$ em ambas as figuras. O segmento de linha vermelha e a região retangular laranja correspondem respectivamente à faixa de raio para $1,4M_{\odot}$ PSR J0030 + 0451 e $2,08 \pm 0,07M_{\odot}$ PSR J0740 + 6620. Da mesma forma, as linhas horizontais azul e rosa representam, respectivamente, as medidas de massa para PSR J1614 + 2230 e PSR J0348 + 0432. A curva roxa são soluções de estrelas para a TOV em RG. 74
- Figura 15 – Relação massa-raio para uma família de estrelas de quarks descritas com a EoS MIT. Analisamos os efeitos causados pela variação do parâmetro β . O segmento de linha vermelha e a região retangular laranja correspondem respectivamente à faixa de raio para $1,4M_{\odot}$ PSR J0030 + 0451 e $2,08 \pm 0,07M_{\odot}$ PSR J0740 + 6620. Da mesma forma, as linhas horizontais azul e rosa representam, respectivamente, as medidas de massa para PSR J1614 + 2230 e PSR J0348 + 0432. A curva roxa são soluções de estrelas para a TOV em RG. 75
- Figura 16 – Relação massa-raio para uma família de estrela de quarks anisotrópicas descritas com a EoS MIT. Analisamos os efeitos causados pela variação do parâmetro Rainbow Σ (acima), enquanto mantemos o outro parâmetro fixo, e os efeitos de variar o parâmetro Rastall λ (abaixo) enquanto mantém Σ fixo. O segmento de linha vermelha e a região retangular laranja correspondem respectivamente à faixa de raio para $1,4M_{\odot}$ PSR J0030 + 0451 e $2,08 \pm 0,07M_{\odot}$ PSR J0740 + 6620. Da mesma forma, as linhas horizontais azul e rosa representam, respectivamente, as medidas de massa para PSR J1614 + 2230 e PSR J0348 + 0432. A curva roxa são soluções de estrelas para a TOV em RG. 77

- Figura 17 – Relação massa-raio para uma família de estrelas hadrônicas descritas com a EoS IU-FSU. Analisamos os efeitos causados pela variação do parâmetro anisotrópico β . O segmento de linha vermelha e verde correspondem respectivamente à faixa de raio de $1,4M_{\odot}$ para PSR J0030 + 0451 e PREX-2. A região retangular laranja representa o intervalo de estimativas de raio para $2,08 \pm 0,07M_{\odot}$ PSR J0740 + 6620. Da mesma forma, as linhas horizontais azul e rosa representam, respectivamente, as medidas de massa para PSR J1614 + 2230 e PSR J0348 + 0432. A curva roxa são soluções de estrelas para a TOV em RG. 78
- Figura 18 – Relação massa-raio para uma família de estrelas hadrônicas descritas com a EoS IU-FSU. Analisamos os efeitos causados pela variação do parâmetro Rainbow Σ (acima), enquanto mantemos o outro parâmetro fixo, e os efeitos de variar o parâmetro Rastall λ (abaixo) enquanto mantemos Σ fixo. O segmento de linha vermelha e verde correspondem respectivamente à faixa de raio de $1,4M_{\odot}$ para PSR J0030 + 0451 e PREX-2. A região retangular laranja representa o intervalo de estimativas de raio para $2,08 \pm 0,07M_{\odot}$ PSR J0740 + 6620. Da mesma forma, as linhas horizontais azul e rosa representam, respectivamente, as medidas de massa para PSR J1614 + 2230 e PSR J0348 + 0432. A curva roxa são soluções de estrelas para a TOV em RG. 81
- Figura 19 – Relação massa-raio para uma família de estrelas hadrônicas descritas com a EoS IU-FSU. Analisamos os efeitos da variação do parâmetro α (superior) enquanto mantemos o parâmetro β nulo, ou seja, aqui temos a gravidade Rastall original, e os efeitos da variação do parâmetro β (inferior) enquanto mantemos α nulo, portanto neste caso estudamos o termo RT sozinho. Os segmentos de linha vermelha e verde correspondem respectivamente à faixa de raio de $1,4M_{\odot}$ para PSR J0030 + 0451 e PREX-2. A região retangular laranja representa o intervalo de estimativa de raio para $2,08 \pm 0,07M_{\odot}$ PSR J0740 + 6620. 91

- Figura 20 – Relação massa-raio para uma família de estrelas hadrônicas descritas com a EoS IU-FSU. Analisamos os efeitos da variação do parâmetro α (superior) enquanto mantemos o parâmetro β fixo e os efeitos da variação do parâmetro β (inferior) enquanto mantemos α fixo. Os segmentos de linha vermelha e verde correspondem respectivamente à faixa de raio de $1,4M_{\odot}$ para PSR J0030 + 0451 e PREX-2. A região retangular laranja representa o intervalo de estimativa de raio para $2,08 \pm 0,07M_{\odot}$ PSR J0740 + 6620. 94
- Figura 21 – Relação massa-raio para uma família de estrelas hadrônicas descritas com a EoS TM1. Analisamos os efeitos causados pela variação do parâmetro α (superior), mantendo o parâmetro β nulo, e os efeitos da variação do parâmetro β (inferior), mantendo α nulo. O segmento de linha verde e a região retangular laranja correspondem respectivamente à faixa de raio de $1,4M_{\odot}$ para PREX-2 e $2,08 \pm 0,07M_{\odot}$ PSR J0740 + 6620. 96
- Figura 22 – Relação massa-raio para uma família de estrelas hadrônicas descritas com a EoS TM1. Analisamos os efeitos causados pela variação do parâmetro α (superior) enquanto mantemos o parâmetro β fixo e os efeitos da variação do parâmetro β (inferior) enquanto mantemos α fixo. O segmento de linha verde e a região retangular laranja correspondem respectivamente à faixa de raio de $1,4M_{\odot}$ para PREX-2 e $2,08 \pm 0,07M_{\odot}$ PSR J0740 + 6620. 98

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades da matéria nuclear simétrica na densidade de saturação obtidas para as parametrizações IU-FSU e TM1 a temperatura zero, adaptado de (HEBELER <i>et al.</i> , 2013) e (DUTRA, M. <i>et al.</i> , 2014).	41
Tabela 2 – Propriedades da matéria nuclear simétrica obtidas com o modelo QMC, com e sem a interação $\omega\rho$. Todas as quantidades são tomadas na saturação e temperatura zero. Fonte (GRAMS <i>et al.</i> , 2017).	44
Tabela 3 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores dos parâmetros λ e Σ correspondentes ao diagrama massa-raio na figura 7. Rainbow _{1,2} (HENDI <i>et al.</i> , 2016) e Rastall _{1,001} (OLIVEIRA <i>et al.</i> , 2015).	58
Tabela 4 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores dos parâmetros λ e Σ correspondentes ao diagrama massa-raio na figura 9.	60
Tabela 5 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores dos parâmetros λ e Σ correspondentes ao diagrama massa-raio na figura 10.	62
Tabela 6 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores dos parâmetros λ e Σ correspondentes ao diagrama massa-raio na figura 14.	73
Tabela 7 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores do parâmetro β correspondente ao diagrama massa-raio na figura 15.	73
Tabela 8 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores dos parâmetros λ e Σ correspondentes ao diagrama massa-raio na figura 16.	76
Tabela 9 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores do parâmetro β correspondente ao diagrama massa-raio na figura 17.	78
Tabela 10 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores dos parâmetros λ e Σ correspondentes ao diagrama massa-raio na figura 18.	79
Tabela 11 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores dos parâmetros α e β correspondentes ao diagrama massa-raio na figura 19. As quantidades M_{max} , $R_{1,4}$, $\bar{\epsilon}_c$, C_{max} e $C_{1,4}$ são, respectivamente, à massa máxima, raio da estrela canônica, densidade de energia central e compacticidade.	90
Tabela 12 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores dos parâmetros α e β correspondentes ao diagrama massa-raio na figura 20. As quantidades M_{max} , $R_{1,4}$, $\bar{\epsilon}_c$, C_{max} e $C_{1,4}$ são, respectivamente, à massa máxima, raio da estrela canônica, densidade de energia central e compacticidade.	93

Tabela 13 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores dos parâmetros α e β correspondentes ao diagrama massa-raio na figura 21. As quantidades M_{max} , $R_{1,4}$, $\bar{\epsilon}_c$, C_{max} e $C_{1,4}$ são, respectivamente, à massa máxima, raio da estrela canônica, densidade de energia central e compacticidade.	95
Tabela 14 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores dos parâmetros α e β correspondentes ao diagrama massa-raio na figura 22. As quantidades M_{max} , $R_{1,4}$, $\bar{\epsilon}_c$, C_{max} e $C_{1,4}$ são, respectivamente, à massa máxima, raio da estrela canônica, densidade de energia central e compacticidade.	97

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	OBJETIVO E ESTRUTURA DO TRABALHO	24
2	ESTRUTURA ESTELAR RELATIVÍSTICA	26
2.1	ESPAÇO-TEMPO ESTÁTICO E ESFERICAMENTE SIMÉTRICO	26
2.2	EQUAÇÕES DE TOLMAN - OPPENHEIMER - VOLKOFF (TOV)	27
2.3	EQUAÇÕES DE ESTADO	32
2.3.1	Matéria de Quarks	34
2.3.1.1	Modelo de sacola do MIT	34
2.3.2	Matéria Hadrônica	37
2.3.2.1	Modelo de Walecka Não-Linear (NLWM)	37
2.3.2.2	Modelo Quark-Meson Coupling (QMC)	41
2.4	DIAGRAMA M-R	45
3	COMBINANDO TEORIAS ALTERNATIVAS DA GRAVIDADE: RASTALL E RAINBOW	48
3.1	GRAVIDADE RAINBOW	48
3.2	GRAVIDADE RASTALL	50
3.3	GRAVIDADE RASTALL-RAINBOW (RR)	53
3.3.1	Equações de Equilíbrio Hidrostático	53
3.4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	56
3.5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	64
3.6	EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO HIDROSTÁTICO ANISOTRÓPICAS	65
3.6.1	Resultados e Discussões	68
3.6.2	Considerações finais	79
4	GRAVIDADE RASTALL GENERALIZADA	82
4.1	GENERALIZAÇÃO	82
4.2	LIMITE NEWTONIANO	84
4.3	SOLUÇÃO DE VÁCUO COM SIMETRIA ESFÉRICA	87
4.4	EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO HIDROSTÁTICO	88
4.5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	89
4.6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	95
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	100
	REFERÊNCIAS	103
	APÊNDICE A – CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE RELATIVIDADE GERAL	121
A.1	MÉTRICA	121
A.2	CURVATURA	122
A.2.1	Tensores de Curvatura	123

APÊNDICE B – PUBLICAÇÕES	126
ANEXO A – EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN	182

1 INTRODUÇÃO

Além de nos ajudar a compreender muitos aspectos do universo, a teoria da gravidade proposta por Einstein há mais de um século passou e ainda passa por um número substancial de testes experimentais. Entre esses testes, está a precessão do periélio de Mercúrio (EINSTEIN, 1915), prevista com grande precisão, as recentes detecções de ondas gravitacionais geradas por sistema binário de buracos negros (ABBOTT, B. P. *et al.*, 2016) e fusões de estrelas de nêutrons (ABBOTT, B. P.; *AL.*, 2017) observadas pela colaboração Virgo e LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*), além da primeira imagem da sombra de um buraco negro obtida pelo projeto *Event Horizon Telescope* (EVENT HORIZON TELESCOPE COLLABORATION, 2019). Sendo assim, os resultados previstos pela relatividade geral (RG) estão em ótima concordância com os dados observacionais coletados principalmente a partir do início do século passado.

Apesar do sucesso da RG, as teorias alternativas da gravidade, ou mais comumente conhecidas na literatura como teorias de gravidade modificada, têm sido propostas nas últimas décadas (NOJIRI, Shin'ichi; ODINTSOV, Sergei D., 2003; ALLEMANDI *et al.*, 2005; NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D.; OIKONOMOU, 2017), algumas das quais estendem a RG através da introdução de termos adicionais na ação de Einstein-Hilbert. Como exemplo, temos a gravidade $f(R)$ (BUCHDAHL, 1970; DE FELICE; TSUJIKAWA, 2010; CAPOZZIELLO; DE LAURENTIS, 2011; NOJIRI, Shin'ichi; ODINTSOV, Sergei D., 2011; SOTIRIOU; FARAONI, 2010) e algumas extensões desta (HARKO, Tiberiu *et al.*, 2011; HARKO, Tiberiu; LOBO, F. S. N., 2010; ODINTSOV, Sergei D.; SÁEZ-GÓMEZ, 2013). Alguns argumentos para essas teorias vêm do pressuposto de que a velocidade de rotação (curva de rotação) das galáxias espirais poderia ser explicada sem a necessidade de matéria escura e a expansão acelerada do universo poderia ser obtida sem energia escura se atualizássemos nossa teoria da gravidade além da relatividade geral ¹ (OLMO, 2007; HUI; NICOLIS; STUBBS, 2009; BERTOLAMI *et al.*, 2007a; HARKO, T., 2010; ABDALLA; NOJIRI, Shin'ichi; ODINTSOV, Sergei D., 2005; COGNOLA *et al.*, 2008). De fato, espera-se que todas as observações astronômicas disponíveis sejam descritas pelo modelo de gravidade adotado. Dentre estas observações, destaca-se a necessidade de descrever estruturas estelares compactas e estáveis, o principal foco desta tese.

Estrelas compactas, tais como estrelas de nêutrons, não são apenas sistemas para testar teorias da gravidade, elas também são considerados importantes laboratórios astrofísicos para estudar modelos teóricos de matéria nuclear sob condições extremas de densidades (EKŞI; GÜNGÖR; TÜRKOĞLU, 2014; FOLOMEEV,

¹ Além de outras questões ainda sem respostas, como o problema do horizonte (às vezes chamado problema da homogeneidade), sendo uma das motivações para a teoria da inflação cósmica e o problema da constante cosmológica (catástrofe do vácuo), etc.

2018), podendo atingir a ordem de algumas vezes a densidade de saturação nuclear $\rho_0 \sim 10^{15} \text{ g/cm}^3$. Esses objetos são criados após o colapso gravitacional do núcleo de estrelas massivas ($> 8.0 M_\odot$) no fim do processo de fusão nuclear, o que desencadeia uma explosão de supernova tipo II ². O mecanismo detalhado de explosão das supernovas tipo II ainda não é bem compreendido (BURROWS, 2000), mas é provável que os neutrinos desempenhem um papel crucial (LATTIMER, J. M.; PRAKASH, M., 2004). Uma vez que o núcleo da estrela tenha sido completamente queimado podendo fundir até o ferro, a produção de energia cessa e o núcleo colapsa rapidamente, comprimindo elétrons e prótons para formar nêutrons e neutrinos. Os neutrinos escapam facilmente do núcleo em contração, mas os nêutrons se aproximam cada vez mais até ficarem muito próximos uns dos outros. Nesse ponto, os nêutrons ocupam o menor espaço possível (semelhante aos elétrons de uma anã branca), aplicando uma pressão que pode sustentar a estrela se o núcleo em colapso estiver entre $1.0 - 3.0 M_\odot$. Para massas acima disso, mesmo a pressão de degenerescência dos nêutrons não pode suportar a estrela contra a gravidade, e ela colapsa em um buraco negro. Estrelas sustentadas por pressão de degenerescência de nêutrons são chamadas estrelas de nêutrons.

Em resumo, o estudo de estrelas compactas é um assunto interdisciplinar que requer a compreensão de muitos tópicos de duas áreas essenciais na física: a teoria gravitacional e a física nuclear. Nos últimos anos, a física nuclear obteve avanços teóricos e experimentais acerca do conhecimento da matéria nuclear, ao ponto de atualmente prever, de forma satisfatória, o comportamento para a densidade da ordem de ρ_0 . A partir disto, ocorre a extrapolação das propriedades da matéria nuclear para densidades maiores, podendo atingir algumas vezes esse valor. Ainda assim, a descrição da matéria nuclear obtida pelas equações de estados (EoS, de *Equation of State*) ³ nessas condições, é considerada plausível.

Com a física nuclear bem estabelecida no cálculo da equação de estado que descreve o interior desses objetos, precisamos agora descrever a parte gravitacional. Como estes objetos estão submetidos a cenários de campo gravitacional intenso, precisamos utilizar a RG por meio das equações de campo de Einstein. Nesse ínterim, através de um tratamento adequado a partir da relatividade geral, conseguimos obter um conjunto de duas equações diferenciais acopladas que descrevem o equilíbrio hidrostático de objetos homogêneos, estáticos (sem rotação), isotrópicos e esfericamente simétricos, uma aproximação razoável para essas estrelas compactas. Tais equações são denominadas equações de Tolman-Oppenheimer-Volkof (TOV) (TOLMAN, 1939; OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939).

As propriedades macroscópicas obtidas (massas e raios) a partir da combinação EoS + equações TOV, são, por sua vez, confrontadas com as observadas pelos

² Para uma revisão completa acerca das supernovas, solicita-se ao leitor que veja a (MAGGIORE, 2018).

³ Doravante, a abreviação EoS denotará tanto *equação* quanto *equações* de estado.

astrofísicos. Resultados recentes da missão *Neutron Star Interior Composition Explorer* (NICER) relatou observações de pulsares (PSRs) para estrelas de nêutrons canônica (estrelas que possuem $1,4 M_{\odot}$) e massiva (estrelas com massas da ordem de $2,0 M_{\odot}$). Essas medidas fornecem uma restrição de $11,80 \text{ km} \leq R_{1,4} \leq 13,10 \text{ km}$ para $1,4 M_{\odot}$ PSR J0030+0451 (MILLER *et al.*, 2019) e $11,60 \text{ km} \leq R \leq 13,10 \text{ km}$ para uma estrela de nêutrons com massa na faixa $2,01 M_{\odot} \leq M \leq 2,15 M_{\odot}$ PSR J0740+6620 (MILLER *et al.*, 2021).

Por outro lado, do ponto de vista da física nuclear, os autores de (REED *et al.*, 2021) utilizaram a medição recente da pele de nêutrons ⁴ em ^{208}Pb pelo PREX-2 para restringir a dependência da densidade da energia de simetria da EoS. Notavelmente, pode-se conectar essa restrição às previsões de raio de estrela de nêutrons. A conexão de experimentos terrestres com observações astrofísicas leva a uma previsão do raio canônico $R_{1,4}$ de $13,25 \text{ km} \lesssim R_{1,4} \lesssim 14,26 \text{ km}$.

Anteriormente, duas estrelas massivas haviam sido descobertas em 2010 e 2013, a saber, PSR J1614+2230 (DEMOREST *et al.*, 2010) com massa $1,97 \pm 0,04 M_{\odot}$ e PSR J0348+0432 (ANTONIADIS *et al.*, 2013) com massa $2,01 \pm 0,04 M_{\odot}$. Conseguimos reproduzir os valores de massa máxima desses objetos com diferentes equações de estado. Entretanto, há alguns indícios de que os raios das estrelas de massa canônica, $1,4 M_{\odot}$, são ligeiramente menores do que os raios gerados a partir da combinação das EoS com a relatividade geral. Uma alternativa para tentar contornar este problema é explorar cenários de gravidade modificada para descrever tais estrelas compactas. Nesse sentido, na presente tese, investigamos as propriedades macroscópicas de estruturas estelares compactas estáveis, com foco em estrelas de nêutrons, no âmbito de diferentes teorias modificadas.

Nesse contexto, ao estudar as características físicas desses objetos, é comum considerar que o conteúdo de matéria na estrela é descrito por uma equação de estado de fluido perfeito isotrópico, que possui componentes de pressão radial e tangencial (ou transversal) iguais. Por outro lado, alguns astrônomos acreditam que os campos magnéticos influenciam diretamente a formação da estrutura das estrelas de nêutrons tanto quanto a atração gravitacional. Normalmente, esses objetos possuem um campo magnético da ordem de 10^{12} G e são geralmente detectados no universo como pulsares, mas alguns apresentam campos magnéticos ainda mais fortes (THOMPSON; DUNCAN, 1995, 1996; LOPES, Luiz L.; MENEZES, Debora P., 2015), da ordem de 10^{14} ou 10^{15} G na superfície e possivelmente 3 ordens de magnitude mais fortes em seus núcleos e são comumente chamados de magnetares. Nestes casos, efeitos anisotrópicos são esperados devido às tensões na matéria estelar (FOLOMEEV, 2018; CHAICHIAN *et al.*, 2000; PEREZ MARTINEZ; PEREZ ROJAS; MOSQUERA CUESTA,

⁴ Os nêutrons em núcleos mais pesados, como o chumbo, tendem a se projetar para além dos prótons do núcleo, formando uma “película” fina ao redor deles, chamada de pele de nêutrons (REED *et al.*, 2021).

2008; FERRER *et al.*, 2010).

Por outro lado, independentemente da natureza física do aparecimento da anisotropia no fluido estelar, seus efeitos levam a mudanças significativas na estrutura estelar (BOWERS; LIANG, 1974a; HEINTZMANN; HILLEBRANDT, 1975; HILLEBRANDT; STEINMETZ, 1976; BAYIN, 1982; BONDI, 1992; HERRERA; SANTOS, N. O., 1997; MAK; HARKO, T., 2003; HORVAT; ILIJIC; MARUNOVIC, 2011a; HERRERA; BARRETO, 2013). A necessidade de lidar ou não com a pressão anisotrópica, se as pressões radial e tangencial são de fato diferentes e como calcular seus efeitos ainda são questões controversas e existem diferentes prescrições na literatura (PERES MENEZES, Débora; LAERCIO LOPES, 2016; LOPES, Luiz L.; MENEZES, Debora P., 2015; CHATTERJEE *et al.*, 2015; CHATTERJEE; NOVAK; OERTEL, 2019; LOPES, Luiz L.; MENEZES, Debora P., 2020). Mencionamos a seguir algumas delas. Os trabalhos seminais que consideraram a matéria magnetizada nas equações de estado assumiram matéria isotrópica (BLANDFORD; HERNQUIST, 1982; CHAKRABARTY, 1996; BRODERICK; PRAKASH; LATTIMER, J., 2000), às vezes à custa de um campo magnético dependente da densidade que viola as equações de Maxwell (ALLOY; MENEZES, Débora P., 2017). Um segundo formalismo previu a possibilidade de que a EoS não pode ser isotrópica porque os componentes do tensor energia-momento não são iguais, resultando em diferentes contribuições para as pressões paralela e perpendicular (FELIPE *et al.*, 2008; FERRER *et al.*, 2010; HUANG *et al.*, 2010). Neste caso, no entanto, o uso das equações TOV torna-se problemático porque apenas uma pressão é aceita como *input*. Um terceiro formalismo, baseado no conceito de campo magnético caótico proposto por Zel'dovich (ZEL'DOVICH *et al.*, 1996), desenvolvido alguns anos depois, defendia que na presença de anisotropias, o conceito de pressão deve ser tomado com cuidado. De acordo com este formalismo, um campo caótico de pequena escala é considerado e o conceito de EoS isotrópica é recuperado (LOPES, Luiz L.; MENEZES, Debora P., 2015). Por fim, um código (LORENE) que calcula numericamente a EoS considerando as equações de Einstein-Maxwell e equilíbrio de forma auto consistente foi desenvolvido e novos resultados obtidos, como pode-se ver na ref. (CHATTERJEE *et al.*, 2015) e nas que estão nela contidas. Ao modelar a anisotropia da matéria superdensa, pode-se esperar que ela seja determinada pela relação entre as componentes de pressão (radial e tangencial) e a densidade de energia do fluido. Infelizmente, atualmente parece impossível encontrar uma forma concreta dessa relação a partir de primeiros princípios. A este respeito, a literatura neste campo fornece várias relações funcionais anisotrópicas mais ou menos fisicamente orientadas, que permitem transições suaves entre estados isotrópicos e anisotrópicos (BOWERS; LIANG, 1974b; HORVAT; ILIJIC; MARUNOVIC, 2011b; FOLOMEEV, 2018). Na presente tese, empregamos um modelo fenomenológico de anisotropia bem conhecido na literatura, o qual foi surgerido por Horvat et al. em (HORVAT; ILIJIC; MARUNOVIC, 2011b).

1.1 OBJETIVO E ESTRUTURA DO TRABALHO

O objetivo central do presente trabalho não é refinar as EoS, mas sim, verificar o que ocorre quando teorias de gravidade modificada são utilizadas para gerar equações análogas às equações TOV. Como já discutido, estas teorias são extensões simples da RG. Tanto o desenvolvimento analítico, quanto a aplicação dessa nova ferramenta foram objeto do estudo proposto neste trabalho. Uma vez reobtidas as equações usadas para computar as novas massas e raios das estrelas compactas, um conjunto de EoS que descrevem tanto matéria de hádrons quanto de quarks foram testadas e confrontada com os recentes resultados observacionais. Para a matéria de quarks usamos o modelo de sacola do MIT (CHODOS *et al.*, 1974) restrito a valores de parâmetros que satisfazem a conjectura de Bodmer-Witten (ITOH, 1970; BODMER, 1971a; WITTEN, 1984; TORRES, J.; MENEZES, D., 2013). Já para a matéria hadrônica, utilizamos as parametrizações IU-FSU (FATTOYEV *et al.*, 2010) e TM1 (SUGAHARA; TOKI, 1994) do modelo tipo Walecka com termos não lineares. Também utilizamos um modelo de acoplamento de mésons e quarks, *Quark-Meson Coupling* (QMC) (GUICHON, Pierre A. M., 1988), com as EoS para duas versões do modelo, com e sem a interação entre os mésons ω e ρ , respectivamente. São elas: QMC (GUICHON, Pierre A. M., 1988; SAITO; THOMAS, Anthony William, 1994, 1995; PAL *et al.*, 1999) e $QMC_{\omega\rho}$ (PANDA *et al.*, 2012; GRAMS *et al.*, 2017).

Partindo do que foi exposto acima, o presente trabalho está dividido como segue:

- **No Capítulo 2**, expomos as equações TOV, bem como sua dedução e apresentamos as equações de estado da matéria nuclear densa que utilizamos em nossos cálculos numéricos.
- **No Capítulo 3**, analisamos a primeira teoria de gravidade modificada a ser tratado aqui, a teoria Rastall-Rainbow (RR). A teoria sob consideração é proveniente da combinação de duas teorias de gravidade modificada: a teoria Rastall (RASTALL, 1972) e a teoria Rainbow (MAGUEIJO; SMOLIN, 2004). Apresentamos nossos resultados para estrelas de nêutrons. Estudamos em seguida, estrelas compactas anisotrópicas no âmbito da gravidade RR. Investigamos possíveis efeitos anisotrópicos em estrelas de quarks e hadrônicas.
- **No Capítulo 4**, discutimos o segundo modelo de gravidade modificada. Trata-se de uma generalização da teoria de Rastall. Como aplicação, realizamos uma análise cuidadosa dos efeitos da teoria na relação massa-raio de estrelas de nêutrons usando equações de estado realistas como *input*.
- **No Capítulo 5**, concluímos nossos resultados e apresentamos as perspectivas para um trabalho futuro.

- **Nos apêndices** são mostrados alguns conceitos fundamentais de relatividade geral e incluídos os artigos publicados.
- **Anexo:** a dedução das equações de campo de Einstein.

2 ESTRUTURA ESTELAR RELATIVÍSTICA

Neste capítulo, inicialmente efetuamos a dedução das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) (TOLMAN, 1939; OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939), que embora seja uma dedução padrão em muitos livros texto, será revista por ser ponto de partida para os próximos capítulos. Em seguida apresentamos as equações de estado (EoS). Estas, por sua vez, apesar de não serem o cerne da presente tese, também serão necessárias para os testes que envolvem as teorias de gravidade modificada apresentadas nos próximos capítulos.

A seguir, derivamos as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) (TOLMAN, 1939; OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939). Estas equações são deduzidas a partir das equações de campo de Einstein considerando a estrela como uma distribuição de matéria esfericamente simétrica, estática (sem rotação) e que se comporta como um fluido perfeito (CARROLL, Addison-Wesley, New York, 2003; CAMENZIND, Springer-Verlag, New York, 2007), uma aproximação razoável para estrelas compactas, tais como estrelas de nêutrons, magnetares e outros. De fato, estrelas compactas são objetos cujo campo gravitacional é extremamente intenso, de maneira que a relação de equilíbrio deve ser estabelecida no âmbito da relatividade geral (RG)¹. Na descrição desses objetos, as equações de Einstein são tratadas em regiões estáticas e isotrópicas do espaço-tempo encontradas nas regiões externa e interna destes. A região externa é uma solução de vácuo assintoticamente plana, dada em termos da métrica de Schwarzschild. Estas duas partes devem ser cuidadosamente combinadas. A superfície estelar é caracterizada por um ponto onde a pressão interior vai a zero.

2.1 ESPAÇO-TEMPO ESTÁTICO E ESFERICAMENTE SIMÉTRICO

Com base nas simetrias mencionadas acima, devemos definir uma métrica em um sistema de coordenadas apropriado que descreva o objeto em estudo. Devido ao elevado número de simetrias desses objetos, todos os elementos não-diagonais da métrica são nulos. A métrica mais geral que descreve o espaço-tempo em consideração é dada pelo elemento de linha

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1)$$

onde definimos $B \equiv B(r)$ e $A \equiv A(r)$, os quais queremos determinar com base nas equações de campo. Observe que B e A são funções dependentes apenas da coordenada radial r , de modo a satisfazer os requisitos estáticos para os campos gravitacionais. Portanto, o tensor métrico covariante $g_{\mu\nu}$ tem os seguintes componentes não nulos:

¹ Uma discussão a respeito do formalismo relativístico bem como a dedução das equações de campo de Einstein pode ser encontrada no Apêndice A e Anexo A, respectivamente.

$$g_{00} = B(r) ; \quad g_{11} = -A(r) ; \quad g_{22} = -r^2 ; \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta , \quad (2)$$

juntamente com a sua versão contravariante $g^{\mu\nu}$:

$$g^{00} = \frac{1}{B(r)} ; \quad g^{11} = \frac{-1}{A(r)} ; \quad g^{22} = \frac{-1}{r^2} ; \quad g^{33} = \frac{-1}{r^2 \sin^2 \theta} . \quad (3)$$

Existem outras maneiras de escrever a equação ((1)), por exemplo, definindo $B(r) = e^{2\Psi(r)}$ e $A(r) = e^{2\Phi(r)}$ (CARROLL, Addison-Wesley, New York, 2003; STRAUMANN, 2000; CAMENZIND, Springer-Verlag, New York, 2007). Mantemos a forma geral, $B(r)$ e $A(r)$, no curso de nossos procedimentos para facilitar a comparação com o potencial Newtoniano.

2.2 EQUAÇÕES DE TOLMAN - OPPENHEIMER - VOLKOFF (TOV)

Nesta seção, revisamos alguns dos principais procedimentos que levam à dedução das equações TOV de nosso imediato interesse. Alguns procedimentos matemáticos mais extensos podem ser encontrados em (CAMENZIND, Springer-Verlag, New York, 2007).

As equações de campo de Einstein para o interior estelar são dadas por:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} , \quad (4)$$

onde $k = 8\pi G$ é a constante gravitacional de Einstein, escolhida para manter o acordo com o limite Newtoniano e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento, responsável por descrever a matéria e energia no interior estelar. Considerando que podemos modelar a matéria da estrela como um fluido perfeito, o tensor energia-momento em um referencial comóvel pode ser escrito como

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} , \quad (5)$$

onde respectivamente ε e p representam a densidade de energia e a pressão do fluido e também são funções apenas da coordenada radial r . Como vimos anteriormente, a conexão entre pressão e densidade é fornecida por meio de uma equação de estado apropriada. O termo $u_\mu \equiv dx_\mu/d\tau$ é definido como a 4-velocidade² de um elemento do fluido, satisfazendo a condição de normalização ($u_\mu u^\mu = 1$) e, em adição temos

$$u_\mu = (\sqrt{B(r)}, 0, 0, 0) . \quad (6)$$

Portanto, as componentes de $T_{\mu\nu}$, para o u_μ , são dadas pelos elementos

$$T_{00} = \varepsilon B(r) ; \quad T_{11} = pA(r) ; \quad T_{22} = pr^2 ; \quad T_{33} = pr^2 \sin^2 \theta , \quad (7)$$

² Aqui, é conveniente mencionar que estamos considerando $d\tau = ds$.

onde por sua vez, também têm-se as contribuições contravariantes

$$T^{00} = \frac{\varepsilon}{B(r)} ; \quad T^{11} = \frac{\rho}{A(r)} ; \quad T^{22} = \frac{\rho}{r^2} ; \quad T^{33} = \frac{\rho}{r^2 \sin^2 \theta} . \quad (8)$$

Neste estágio, considerando as contribuições da métrica ((2)), as componentes não nulas para as conexões afins são obtidas com base na definição ((179)), a saber

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= \frac{B'}{2A} ; \quad \Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \frac{B'}{2B} ; \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{A'}{2A} ; \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{A} ; \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} ; \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{r \sin^2 \theta}{A} ; \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} ; \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta ; \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta , \end{aligned}$$

de modo que, as linhas denotam derivadas em relação à coordenada radial r . Com base nos resultados descritos acima, podemos escrever as componentes de $R_{\mu\nu}$. Portanto, com base na definição ((192)), tem-se, com efeito, as expressões:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{B''}{2A} - \frac{A'B'}{4A^2} - \frac{B'^2}{4AB} + \frac{B'}{rA} ; \\ R_{11} &= \frac{A'}{rA} + \frac{A'B'}{4AB} + \frac{B'^2}{4B^2} - \frac{B''}{2B} ; \\ R_{22} &= 1 - \frac{1}{A} + \frac{rA'}{2A^2} - \frac{rB'}{2AB} ; \\ R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta , \end{aligned} \quad (9)$$

no que lhe concerne, o escalar de curvatura R ,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} , \quad (10)$$

resulta na contribuição

$$R = \frac{B''}{AB} - \frac{B'}{2AB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{2}{rA} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A} \right) . \quad (11)$$

Portanto, empregando-se a definição para o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, isto é

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (12)$$

obtém-se as contribuições, a saber

$$G_{00} = \frac{A'B}{rA^2} + \frac{B}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A}\right);$$

$$G_{11} = \frac{B'}{rB} - \frac{A}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A}\right);$$

(13)

$$G_{22} = \frac{r^2 B''}{2AB} - \frac{r^2 B'}{4AB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right);$$

$$G_{33} = G_{22} \sin^2 \theta.$$

Podemos observar que $G_{\mu\nu}$ é diagonal, indicando características de um espaço isotrópico, que por sua vez implica homogeneidade, concordando com as simetrias espaço-temporais inicialmente impostas. Agora podemos escrever as equações de Einstein ((4)), para descrever como uma distribuição esfericamente simétrica da matéria considerada como um fluido perfeito deforma o espaço em seu interior. Assim, combinando os resultados dos componentes para $G_{\mu\nu}$ e para o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, obtemos 3 contribuições diferenciais acopladas:

$$\frac{A'B}{rA^2} + \frac{B}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A}\right) = 8\pi GB\varepsilon; \quad (14)$$

$$\frac{B'}{rB} - \frac{A}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A}\right) = 8\pi GA\rho; \quad (15)$$

$$\frac{r^2 B''}{2AB} - \frac{r^2 B'}{4AB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) = 8\pi Gr^2 p. \quad (16)$$

Neste estágio, é extremamente relevante ressaltarmos mais uma consequência da isotropia espaço-temporal. Resume-se no fato de as contribuições angulares resultantes das equações de campo ((4)) serem idênticas. Em decorrência disto, a componente 33 não é considerada, de modo a justificar apenas as 3 contribuições acima. Portanto, enfatiza-se então, que as equações de campo de Einstein fornecem apenas três equações diferenciais para as funções $B(r)$ e $A(r)$. A integração da equação ((14)) leva a

$$A(r) = \left(1 - \frac{2GM(r)}{r}\right)^{-1}, \quad (17)$$

com a definição

$$M(r) \equiv \int_0^R 4\pi r'^2 \varepsilon(r') dr' . \quad (18)$$

onde $r = R$ denota a superfície (raio) da estrela, isto é, uma coordenada radial em que a pressão desaparece, $p(r = R) = 0$. Segundo a definição acima para $M(r)$, a integração da densidade de massa-energia $\varepsilon(r)$ ocorre no interior estelar, é interpretada como a massa gravitacional contida no raio r . A definição ((18)) informa como a massa interna varia dependendo da coordenada radial r . É formalmente a mesma obtida de um tratamento não relativístico, ou seja, Newtoniano³, com a diferença que agora $\varepsilon(r)$ não representa simplesmente a densidade de massa bariônica, mas, devido à equivalência massa-energia, representa a densidade de energia interna total proveniente da matéria e do potencial de ligação gravitacional. Adicionalmente, para raios excedendo a distribuição de massa ($r > R$), isto é, a região externa da estrela, a solução da TOV é dada pela solução de Schwarzschild (CAMENZIND, Springer-Verlag, New York, 2007). Nesse domínio

$$A(r) = \left(1 - \frac{2GM_{sch}}{r} \right)^{-1} , \quad (19)$$

onde, M_{sch} é identificada como sendo a massa de Schwarzschild, dada pela expressão

$$M_{sch} \equiv \int_0^R 4\pi r^2 \varepsilon(r) dr . \quad (20)$$

Manipulando a equação ((15)), e empregando o resultado ((17)) com a definição $B(r) = e^{2\psi(r)}$ anteriormente mencionada, podemos escrever uma expressão para o potencial gravitacional:

$$\frac{B'(r)}{2B(r)} \equiv \psi'(r) = \frac{GM(r)}{r^2} \left(1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)} \right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{r} \right)^{-1} . \quad (21)$$

Neste estágio, recorrendo à lei de conservação para o tensor energia-momento

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 , \quad (22)$$

obtém-se

$$\psi'(r) = -\frac{p'(r)}{\varepsilon(r) + p(r)} . \quad (23)$$

Finalmente, comparando as equações ((21)) e ((23)), obtemos

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\varepsilon(r)}{r^2} \left(1 + \frac{p(r)}{\varepsilon(r)} \right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)} \right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{r} \right)^{-1} . \quad (24)$$

³ No contexto Newtoniano, ((18)) será a massa total da estrela cuja distribuição é exclusivamente dada pela densidade de massa. Entretanto, em RG, o significado da expressão ((18)) requer uma discussão mais acentuada. Neste âmbito, $M(r)$ compreende tanto a massa da estrela quanto a seu campo gravitacional devido à interação mútua existente entre espaço-tempo e matéria-energia. Ou seja, $M(r)$ detém contribuições de massa e de campo. Em vista disto, referenciamos $M(r)$ como massa gravitacional (ou massa-energia) do objeto estelar, representando em RG a massa do objeto que um observador afere no infinito.

As equações ((24)) e ((18)) representam a redução das equações de Einstein no interior de uma estrela relativística, estática, isotrópica e esfericamente simétrica. Estas são as equações de equilíbrio hidrostático para a RG, comumente referidas como TOV (TOLMAN, 1939; OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939). Este conjunto de equações diferenciais possibilita descrever algumas características astrofísicas mensuráveis de objetos compactos, tais como massa e raio. A solução da TOV parte das equações de estado (EoSs), que estabelecem o comportamento da pressão e da densidade de energia para a matéria constituinte da estrela. Aqui, novamente enfatiza-se que tais equações são provenientes dos modelos nucleares para matéria de hádrons e quarks. Portanto, na situação de equilíbrio, deve-se, determinar a relação existente entre pressão de degenerescência da matéria nuclear contida no interior da estrela e, a força gravitacional causada pelo campo gravitacional intenso.

Aplicando-se a regra da cadeia na equação ((24)), as equações TOV podem ser convenientemente reescrita como

$$4\pi r^2 dp(r) = -\frac{GM(r)dM(r)}{r^2} \left(1 + \frac{p(r)}{\varepsilon(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)}\right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{r}\right)^{-1}, \quad (25)$$

$$dM(r) = 4\pi r^2 \varepsilon(r) dr. \quad (26)$$

A interpretação das equações acima é bastante simples (GLENDENNING, 2000): consideramos uma casca esférica de matéria na estrela de raio r , espessura dr e massa $dM(r)$. A pressão da matéria na borda interna da casca é $p(r)$ e na borda externa, $p(r) + dp(r)$. O lado esquerdo da equação ((25)) configura a força resultante que a pressão interna exerce para fora sobre a casca devido à diferença de pressão $dp(r)$ entre as bordas. De outro modo, a equação como um todo representa para um dado valor de r , o balanço entre a pressão de degenerescência da matéria interna, que por sua vez empurra a casca esférica para fora, e o peso devido à atração gravitacional atuando em sentido contrário. O primeiro termo do lado direito desta representa a atração gravitacional Newtoniana e, os outros termos entre parênteses são as correções relativísticas ⁴ para o equilíbrio hidrostático Newtoniano. Assim sendo, escrevemos equação de equilíbrio hidrostático Newtoniano da seguinte maneira

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\varepsilon(r)}{r^2}. \quad (27)$$

Comparando as equações ((27)) e ((24)), nota-se que no contexto clássico a pressão cresce muito mais lentamente do que no contexto relativístico. Isso implica que configurações estáticas e esfericamente simétricas dadas em condições de equilíbrio estáveis pela gravidade Newtoniana pode colapsar-se ao considerarmos os efeitos

⁴ A presença da pressão nos termos de correção traz indicações de que no domínio relativístico, a pressão contribui para a atração gravitacional e, em adição, para a curvatura espaço-temporal imposta pela RG.

relativísticos descritos pela TOV. Isto é, a TOV prevê que estes objetos compactos estão submetidos a forças gravitacionais muito mais intensas, de modo que os resultados que provém destas equações são mais condizentes com a realidade física desta natureza. Ainda da equação ((24)), $p(r)$ decresce monotonicamente na estrela, em consequência do sinal negativo na derivada da pressão. Neste estágio, vale ressaltar ser uma propriedade da matéria que a pressão nunca decresce em função do aumento da densidade $\varepsilon(r)$. Ou seja, podemos concluir que a densidade em uma estrela também decresce monotonicamente com o incremento da coordenada radial (GLENDENNING, 2000). De fato, este resultado é claramente visto se considerarmos que $p(r)$ é função de $\varepsilon(r)$.

A equação de estado $p = p(\varepsilon)$ (ou ainda $\varepsilon = \varepsilon(p)$) é o método pelo qual as propriedades da matéria nuclear constituinte da estrela são inseridos na TOV, visto que dependendo da EoS, as soluções de ((18)) e ((24)) serão caracterizadas como estrela de nêutrons ou de quarks (ambas são foco nessa tese). Para uma dada $p = p(\varepsilon)$, existe uma única família de estrelas parametrizadas pela densidade central ε_c (ou p_c), visto que a relação entre M e ε_c (ou M e p_c) é única. Numericamente, para que as equações TOV sejam integradas, além da EoS é necessário impormos algumas condições de contorno, a saber:

No centro: $M(r = 0) = 0$, $\varepsilon(r = 0) = \varepsilon_c \implies p(r = 0) = p_c$.

Na superfície: $p(r = R) = 0 \implies M(r = R) = M$,

de modo que, a integração das equações TOV deve ser realizada até que a pressão $p(r)$ tenha um valor nulo. Como já foi discutido aqui, essa condição especifica o raio da estrela R , sendo M a massa correspondente. A partir destas considerações, resolvendo-se a TOV para diferentes valores de ε_c , obtêm-se as possíveis configurações de equilíbrio estáveis para uma família de estrelas segundo uma dada EoS. Os resultados correspondentes são ilustrados através de um diagrama da massa gravitacional *versus* o raio da estrela, intitulado diagrama massa-raio (M-R). A partir das relações massa-raio para um modelo nuclear específico, estabelece-se a massa e o raio máximo da estrela permitida a partir de sua equação de estado correspondente.

2.3 EQUAÇÕES DE ESTADO

Na presente seção, apresentamos brevemente as equações de estado (EoS) utilizadas nesta tese para descrever a matéria de quarks e a matéria hadrônica. A primeira é então usada para calcular as propriedades macroscópicas de estrelas de quarks e a última de estrelas hadrônicas, ambas comumente chamadas de estrelas de nêutrons. Para a matéria de quarks usamos o modelo de sacola do MIT (CHODOS

et al., 1974). Já para a EoS hadrônica, empregamos diferentes parametrizações de um modelo de campo médio relativística (RMFA), o chamado modelo de Walecka não-linear (NLWM, de *Non - Linear Walecka Model*). Estas são as parametrizações: IU-FSU (FATTOYEV *et al.*, 2010) e TM1 (SUGAHARA; TOKI, 1994). Também utilizamos um modelo de acoplamento de mésons e quarks, o *Quark-Meson Coupling* (QMC) (GUICHON, Pierre A. M., 1988), e apresentamos as EoS para duas versões do modelo, com e sem a interação entre os mésons ω e ρ , respectivamente. São elas: QMC (GUICHON, Pierre A. M., 1988; SAITO; THOMAS, Anthony William, 1994, 1995; PAL *et al.*, 1999) e QMC $_{\omega\rho}$ (PANDA *et al.*, 2012; GRAMS *et al.*, 2017). Para uma explicação didática e mais extensa sobre EoS, remetemos o leitor à ref. (MENEZES, Débora Peres, 2021) e suas respectivas referências.

A Cromodinâmica Quântica (QCD, de *Quantum Chromodynamics*) é atualmente a teoria fundamental para a descrição da interação nuclear forte, a qual descreve bárions e mésons constituídos por quarks interagindo via troca de píons. Uma das principais características dessa teoria é a propriedade de *liberdade assintótica*. Em essência, essa liberdade afirma que no regime de altas densidades ou de altas energias, a intensidade efetiva do acoplamento entre os quarks diminui, e graças a isso, métodos de tratamentos teóricos denominados métodos perturbativos podem ser utilizados. Para densidades da ordem da densidade nuclear, isto é, no regime de baixas energias, a interação torna-se extremamente forte fazendo que os quarks e glúons fiquem *confinados* permanentemente no interior dos hádrons. A teoria mostra-se, então, extremamente complexa, não possibilitando o uso de métodos tradicionais de aproximação. Foi a descoberta destas propriedades que tornou possível a confirmação experimental da QCD como a teoria que descreve as interações entre quarks e glúons, e é responsável pela ligação destes, nos hádrons. Enfatiza-se, então, que a QCD é presumivelmente o modelo teórico mais adequado para gerar as equações de estado. Entretanto, devido às dificuldades expostas, a solução da QCD está longe de ser possível. Este fato levou ao desenvolvimento da QCD na rede (LQCD, de *Lattice Quantum Chromodynamics*). Porém, devido a limitações computacionais e dificuldades numéricas, como o problema do sinal, por exemplo, a LQCD pode cobrir apenas uma pequena fração do diagrama de fases da QCD, restrito a potenciais químicos zero e muito baixos (MEYER, 2016; CARDOSO, P. H. G. *et al.*, 2017).

Em vista disso, uma abordagem bastante utilizada é a construção de modelos efetivos, que sugerem o uso de densidades Lagrangianas, para simular a dinâmica de partículas em sistemas sujeitos a tais interações. Por exemplo, a matéria nuclear pode ser descrita em termos de graus de liberdade hadrônicos em vez de quarks individuais. Esses modelos são chamados de Hadrodinâmica Quântica (QHD, de *Quantum Hadrodynamics*) e estão relacionados à proposta de Yukawa (1935) de gerar a força nuclear pela troca de um ou mais mésons virtuais. Portanto, apenas a força forte re-

sidual (denominada força nuclear neste caso) é considerada, de modo que o QHD constitui uma aproximação das interações fundamentais descritas pela QCD.

Existem também modelos efetivos que operam diretamente com os quarks, como é o caso do modelo do MIT (CHODOS *et al.*, 1974), usualmente empregado para descrever a matéria de quarks desconfinados. Por ser um modelo mais simples, vamos começar a descrição abaixo por ele.

2.3.1 Matéria de Quarks

2.3.1.1 Modelo de sacola do MIT

O modelo de sacola do MIT (CHODOS *et al.*, 1974) surgiu como uma alternativa para explicar a massa dos hádrons em termos dos quarks. Apesar de ser um modelo bastante simplificado, ele foi originalmente formulado de modo a garantir a propriedade de *liberdade assintótica* e *confinamento* dos quarks, contornando assim pontos problemáticos como estes em modelos mais sofisticados, como é o caso do modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961).

Segundo o modelo do MIT, os quarks encontram-se confinados no interior de uma sacola devido a uma pressão externa, embora devam ser considerados livres no interior. Dentro da sacola, uma energia potencial constante e positiva por unidade de volume, a chamada *constante da sacola ou bag* (B), é necessária para que esta região possa ser criada e mantida no vácuo. Dentro deste volume, os quarks em movimento possuem uma energia cinética e nenhuma corrente de cor sobrevive na superfície. Assim, podemos supor que os quarks contidos no interior do volume formam um gás de Fermi livre, cuja energia na borda da sacola é desprezível quando comparada com aquelas presentes dentro dela. De fato, veremos que as EoS do modelo da sacola do MIT são simplesmente as EoS obtidas para um gás de férmions relativísticos livres, acrescidas das contribuições da constante da *bag*.

A densidade lagrangiana que reproduz a dinâmica dos quarks ψ_q contidos em uma sacola de volume V delimitado pela superfície S pode ser escrita como (CHODOS *et al.*, 1974; MARQUEZ, 2018; BIESDORF, 2019):

$$\mathcal{L}_{MIT} = \sum_q [\bar{\psi}_q (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_q) \psi_q - B] \Theta_V - \frac{1}{2} \bar{\psi}_q \psi_q \delta_S, \quad (28)$$

onde, q denota os sabores dos quarks envolvidos, de massa m_q ; B é a constante da *bag*; Θ_V é a função Heaviside e o termo $\frac{1}{2} \bar{\psi}_q \psi_q \delta_S$, onde δ_S é o delta de Dirac, garante continuidade na superfície S . Para o caso da *bag* esférica de raio R , o argumento das funções Θ_V e δ_S é $(R - r)$. As equações de movimento são aqui obtidas por meio das equações de Euler-Lagrange (BJORKEN; DRELL, 1965) aplicadas à densidade lagrangiana na expressão (28).

Levando-se em conta todas as considerações acima, temos que a equação de estado para o modelo de sacola do MIT será:

$$\mathcal{E} = \frac{3}{\pi^2} \sum_q \int_0^{K_{F_q}} k^2 (m_q^2 + k^2)^{1/2} dk + B, \quad (29)$$

e

$$\rho = \frac{1}{\pi^2} \sum_q \int_0^{K_{F_q}} \frac{k^4}{(m_q^2 + k^2)^{1/2}} dk - B, \quad (30)$$

que são as expressões para densidade de energia e pressão, respectivamente. K_{F_q} é o momento de Fermi. A densidade de número bariônico, ρ , é dada por meio da equação

$$\rho = \sum_q \frac{1}{3} \rho_q = \sum_q \frac{1}{3} \frac{(K_{F_q})^3}{\pi^2}, \quad (31)$$

onde q representa os quarks ($q = u, d, s$ para a matéria estranha). Convenientemente parametrizamos as EoS em função de ρ , tal que a expressão acima pode ser convenientemente rescrita como sendo

$$K_{F_q} = \sqrt[3]{\pi^2 \rho_q}, \quad (32)$$

de modo que ρ_q é a densidade do quark de sabor q . As equações ((29) - (32)) são suficientes para descrever a matéria de quarks. No entanto, quando usado para descrever estrelas de quarks, as condições de neutralidade de carga e equilíbrio químico (equilíbrio β) também são necessárias. Para implementá-las, os léptons (elétrons e múons) devem estar presentes e entram no sistema como gases livres. As relações entre os potenciais químicos das diferentes partículas são dadas pelas condições de equilíbrio β , a saber

$$\mu_s = \mu_d = \mu_u + \mu_e, \quad \mu_e = \mu_\mu. \quad (33)$$

A expressão para a neutralidade de carga é posta da seguinte forma:

$$\rho_e + \rho_\mu = \frac{1}{3} (2\rho_u - \rho_d - \rho_s). \quad (34)$$

Quanto às densidades de elétrons e múons, tem-se:

$$\rho_l = K_{F_l}^3 / 3\pi^2. \quad (35)$$

E por fim, a densidade de energia e a pressão para os léptons são dadas por:

$$\mathcal{E}_l = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{K_{F_l}} k^2 (m_l^2 + k^2)^{1/2} dk, \quad (36)$$

e

$$\rho = \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{K_{F_l}} \frac{k^4}{(m_l^2 + k^2)^{1/2}} dk, \quad (37)$$

onde a massa do elétron é tomada como 0,511 MeV e a massa do múon é 105,66 MeV. Quanto aos valores de massa dos quarks tomamos como 5,0 MeV para os quarks u e d e 150 MeV para o quark s . Na figura 1 é apresentada a relação entre densidade de energia e pressão calculados por meio das equações ((29) - (32)) para o modelo de sacola do MIT com um valor específico de B .

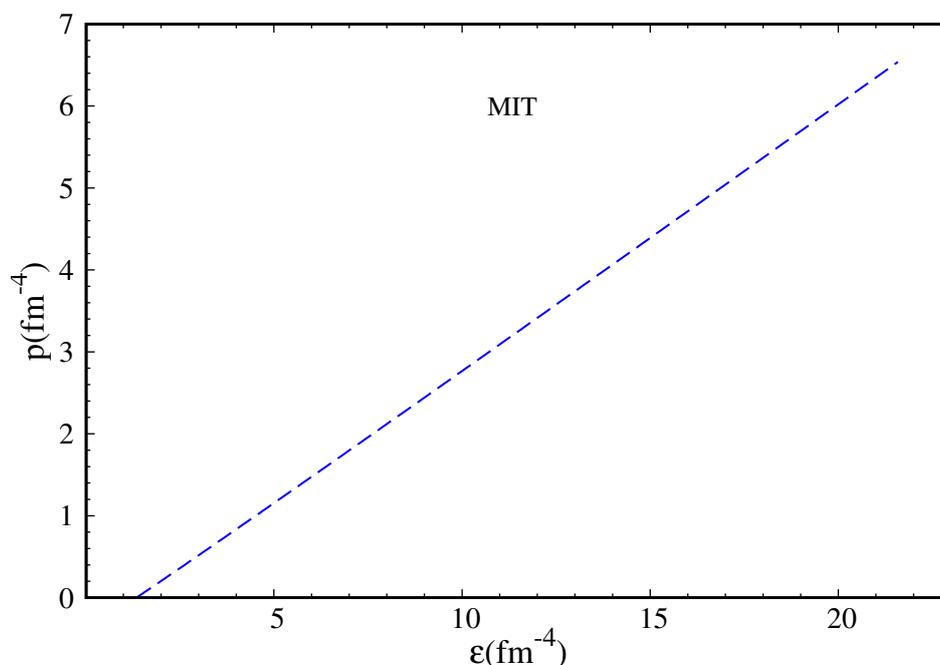


Figura 1 – Equação de estado para matéria de quarks obtida do modelo de sacola do MIT considerando $B^{1/4} = 147$ MeV.

De acordo com o modelo do MIT, entende-se que existem possíveis configurações nas quais a pressão exercida pelos quarks é maior que a pressão de sacola, resultando no rompimento desta e produzindo uma matéria de *quarks desconfinados* (também chamada QGP, de *quark-gluon plasma*) (WONG, 1995; GONCALVES; LAZZARI, 2020). Entretanto, segundo a hipótese de Bodmer-Witten, inicialmente proposta por Bodmer (BODMER, 1971b) e posteriormente reforçada por Witten (WITTEN, 1984), a matéria de quarks desconfinados contendo os quarks u , d e s , denominada matéria estranha de quarks (SQM, de *Strange Quark Matter*) é o verdadeiro estado fundamental da matéria que interage fortemente, sendo a configuração mais estável existente (GLENDENNING, 2000). Essa hipótese não pode ser testada em experimentos terrestres, mas levou à possibilidade de que os pulsares fossem constituídos por matéria de quarks desconfinados, sendo tal objeto chamado originalmente de estrelas estranhas.

Quando consideramos a hipótese de Bodmer-Witten também devemos considerar a "janela de estabilidade", sendo a janela de valores da *bag* ($B^{1/4}$) e da massa do quark s (m_s), que permite a descrição de matéria estranha estável, como indicado em (TORRES, J. R.; MENEZES, D. P., 2013). Para $m_s = 150$ MeV, o parâmetro $B^{1/4}$ deve estar no intervalo $147 \text{ MeV} \leq B^{1/4} \leq 155 \text{ MeV}$, aproximadamente (TORRES, J. R.;

MENEZES, D. P., 2013). Portanto, a equação de estado para matéria de quarks obtida do modelo de sacola do MIT considerando $B^{1/4} = 147$ MeV satisfaz a hipótese de Bodmer-Witten e conseqüentemente a descrição da matéria estranha estável.

2.3.2 Matéria Hadrônica

Nessa subseção apresentamos o modelo de Walecka Não-Linear (NLWM) e o modelo de *Quark-Meson Coupling* (QMC).

2.3.2.1 Modelo de Walecka Não-Linear (NLWM)

As EoS hadrônicas obtidas a seguir são derivadas da Hadrodinâmica Quântica (QHD) com termos não-lineares (WALECKA, J. D., 2004; SEROT; WALECKA, John Dirk, 1986; BOGUTA; BODMER, 1977), e baseadas em uma teoria de campo médio relativística (RMFA). Esse modelo descreve a interação bariônica através da troca de mésons escalares e vetoriais. A primeira versão do modelo (WALECKA, J. D., 1974) tinha apenas os mésons escalares σ e vetorial ω , suficientes para descrever a saturação nuclear. Depois disso, o méson isovetorial ρ foi incluído no modelo, o que torna possível descrever matéria nuclear assimétrica. Finalmente, para melhor reproduzir os valores de compressibilidade, massa efetiva e energia de simetria, termos não-lineares nos campos escalares e vetoriais, e termos incluindo diferentes misturas de campos foram introduzidos na densidade lagrangiana (BOGUTA; BODMER, 1977). A densidade lagrangiana completa que descreve bárions interagindo entre si via troca de mésons escalar-isoescalar (σ), vetorial-isoescalar (ω), vetorial-isovetorial (ρ) e escalar-isovetorial (δ) é dada por (AGRAWAL, 2010; DUTRA, M. *et al.*, 2014):

$$\mathcal{L}_{NLWM} = \mathcal{L}_{nm} + \mathcal{L}_{\sigma} + \mathcal{L}_{\omega} + \mathcal{L}_{\rho} + \mathcal{L}_{\delta} + \mathcal{L}_{\sigma\omega\rho}, \quad (38)$$

onde

$$\mathcal{L}_{nm} = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - M)\psi + g_{\sigma}\bar{\psi}\psi - g_{\omega}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\omega_{\mu}\psi - \frac{g_{\rho}}{2}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\vec{\rho}_{\mu} \cdot \vec{\tau}\psi + g_{\delta}\bar{\psi}\vec{\delta} \cdot \vec{\tau}\psi, \quad (39)$$

$$\mathcal{L}_{\sigma} = \frac{1}{2}(\partial^{\mu}\sigma\partial_{\mu}\sigma - m_{\sigma}^2\sigma^2) - \frac{A}{3}\sigma^3 - \frac{B}{4}\sigma^4, \quad (40)$$

$$\mathcal{L}_{\omega} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{\omega}^2\omega_{\mu}\omega^{\mu} + \frac{C}{4}(g_{\omega}^2\omega_{\mu}\omega^{\mu})^2, \quad (41)$$

$$\mathcal{L}_{\rho} = -\frac{1}{4}\vec{B}^{\mu\nu}\vec{B}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{\rho}^2\vec{\rho}_{\mu} \cdot \vec{\rho}^{\mu}, \quad (42)$$

$$\mathcal{L}_{\delta} = \frac{1}{2}(\partial^{\mu}\vec{\delta}\partial_{\mu}\vec{\delta} - m_{\delta}^2\vec{\delta}^2), \quad (43)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\sigma\omega\rho} = & g_{\sigma}g_{\omega}^2\sigma\omega_{\mu}\omega^{\mu} \left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_1'g_{\sigma}\sigma \right) + g_{\sigma}g_{\rho}^2\sigma\vec{\rho}_{\mu} \cdot \vec{\rho}^{\mu} \left(\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_2'g_{\sigma}\sigma \right) \\ & + \frac{1}{2}\alpha_3'g_{\omega}^2g_{\rho}^2\omega_{\mu}\omega^{\mu}\vec{\rho}_{\mu} \cdot \vec{\rho}^{\mu}. \end{aligned} \quad (44)$$

Na densidade Lagrangiana acima: \mathcal{L}_{nm} descreve a parte cinética dos núcleons mais os termos que representam a interação entre eles e os mésons σ , δ , ω e ρ ; os termos \mathcal{L}_j descrevem os termos livres e de auto-interação do méson j , onde $j = \sigma, \delta, \omega$, e ρ ; o último termo, $\mathcal{L}_{\sigma\omega\rho}$, é responsável pelas interações cruzadas entre os campos do méson. Os tensores de campo antisimétrico $F_{\mu\nu}$ e $\vec{B}_{\mu\nu}$ são dados por $F_{\mu\nu} = \partial_\nu\omega_\mu - \partial_\mu\omega_\nu$ e $\vec{B}_{\mu\nu} = \partial_\nu\vec{\rho}_\mu - \partial_\mu\vec{\rho}_\nu - g_\rho(\vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu)$. Finalmente, a massa do núcleon é M e as massas dos mésons são m_j .

As equações de movimento são obtidas via equações de Euler-Lagrange (BJORKEN; DRELL, 1965) sendo assumidas invariâncias rotacionais e translacionais. O resultado são equações não-lineares acopladas, cuja solução é uma tarefa extremamente complicada, mesmo numericamente. Uma aproximação que pode ser feita é a aproximação de campo médio relativística (RMFA), onde os campos dos mésons são substituídos por seus valores médios, ou seja:

$$\sigma \rightarrow \langle \sigma \rangle \equiv \sigma_0, \quad (45)$$

$$\omega_\mu \rightarrow \langle \omega_\mu \rangle \equiv \omega_0, \quad (46)$$

$$\vec{\rho}_\mu \rightarrow \langle \vec{\rho}_\mu \rangle \equiv \vec{\rho}_{0(3)}, \quad (47)$$

e

$$\vec{\delta} \rightarrow \langle \vec{\delta} \rangle \equiv \delta_{(3)}. \quad (48)$$

Agora podemos escrever as equações de movimento. Para o campo ψ obtemos a seguinte equação:

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - \gamma^0 V_\tau - (M + S_\tau)]\psi = 0, \quad (49)$$

para o campo σ_0 :

$$m_\sigma^2 \sigma_0 = g_\sigma \rho_s - A\sigma_0^2 - B\sigma_0^3 + g_\sigma g_\omega^2 \omega_0^2 (\alpha_1 + \alpha_1' g_\sigma \sigma) + g_\sigma g_\rho^2 \vec{\rho}_{0(3)}^2 (\alpha_2 + \alpha_2' g_\sigma \sigma), \quad (50)$$

para o campo ω_0 :

$$m_\omega^2 \omega_0 = g_\omega \rho - Cg_\omega (g_\omega \omega_0)^3 - g_\sigma g_\omega^2 \sigma_0 \omega_0 (2\alpha_1 + \alpha_1' g_\sigma \sigma) - \alpha_3' g_\omega^2 g_\rho^2 \vec{\rho}_{0(3)}^2 \omega_0, \quad (51)$$

para o campo $\vec{\rho}_{0(3)}$:

$$m_\rho^2 \vec{\rho}_{0(3)} = \frac{g_\rho}{2} \rho_3 - g_\sigma g_\rho^2 \sigma_0 \vec{\rho}_{0(3)} (2\alpha_2 + \alpha_2' g_\sigma \sigma) - \alpha_3' g_\omega^2 g_\rho^2 \vec{\rho}_{0(3)} \omega_0^2, \quad (52)$$

para o campo $\delta_{(3)}$:

$$m_\delta^2 \delta_{(3)} = g_\delta \rho_{s3}. \quad (53)$$

As densidades escalar e vetorial são dadas por:

$$\rho_s = \langle \bar{\psi} \psi \rangle = \rho_{s\rho} + \rho_{s\eta}, \quad (54)$$

$$\rho_{s3} = \langle \bar{\Psi} \tau_3 \Psi \rangle = \rho_{sp} - \rho_{sn}, \quad (55)$$

$$\rho = \langle \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi \rangle = \rho_p + \rho_n, \quad (56)$$

$$\rho_3 = \langle \bar{\Psi} \gamma^0 \tau_3 \Psi \rangle = \rho_p - \rho_n = (2y_p - 1)\rho, \quad (57)$$

com

$$\rho_{sp,n} = \frac{\gamma M_{p,n}^*}{2\pi^2} \int_0^{k_{Fp,n}} \frac{k^2 dk}{\sqrt{k^2 + M_{p,n}^{*2}}}, \quad (58)$$

$$\rho_{p,n} = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_{Fp,n}} k^2 dk = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_{Fp,n}^3, \quad (59)$$

$$V_\tau = g_\omega \omega_0 + \frac{g_\rho}{2} \bar{\rho}_{0(3)} \tau_3, \quad S_\tau = -g_\sigma \sigma_0 - g_\delta \delta_{(3)} \tau_3, \quad (60)$$

onde γ é a degenerescência de spin e $k_{Fp,n}$ o momento de Fermi. Os índices p,n representa prótons e nêutrons, respectivamente.

Enfim, após alguns procedimentos analíticos que podem ser encontrados em (DUTRA, M. *et al.*, 2014; MENEZES, Débora Peres, 2021) as seguintes expressões para densidade de energia e pressão são obtidas:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{A}{3} \sigma_0^3 + \frac{B}{4} \sigma_0^4 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 - \frac{C}{4} (g_\omega^2 \omega_0^2)^2 - \frac{1}{2} m_\rho^2 \bar{\rho}_{0(3)}^2 + g_\omega \omega_0 \rho + \frac{g_\rho}{2} \bar{\rho}_{0(3)} \rho_3 \\ & + \frac{1}{2} m_\delta^2 \delta_{(3)}^2 - g_\sigma g_\omega^2 \sigma \omega_0^2 \left(\alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_1' g_\sigma \sigma_0 \right) - g_\sigma g_\rho^2 \sigma \bar{\rho}_{0(3)}^2 \left(\alpha_2 + \frac{1}{2} \alpha_2' g_\sigma \sigma_0 \right) \\ & - \frac{1}{2} \alpha_3' g_\omega^2 g_\rho^2 \omega_0^2 \bar{\rho}_{0(3)}^2 + \mathcal{E}_{\text{kin}}^p + \mathcal{E}_{\text{kin}}^n, \end{aligned} \quad (61)$$

com

$$\mathcal{E}_{\text{kin}}^{p,n} = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_{Fp,n}} k^2 (k^2 + M_{p,n}^{*2})^{1/2} dk, \quad (62)$$

e pressão:

$$\begin{aligned} P = & -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{A}{3} \sigma_0^3 - \frac{B}{4} \sigma_0^4 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{C}{4} (g_\omega^2 \omega_0^2)^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \bar{\rho}_{0(3)}^2 + \frac{1}{2} \alpha_3' g_\omega^2 g_\rho^2 \omega_0^2 \bar{\rho}_{0(3)}^2 \\ & - \frac{1}{2} m_\delta^2 \delta_{(3)}^2 + g_\sigma g_\omega^2 \sigma \omega_0^2 \left(\alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_1' g_\sigma \sigma_0 \right) + g_\sigma g_\rho^2 \sigma \bar{\rho}_{0(3)}^2 \left(\alpha_2 + \frac{1}{2} \alpha_2' g_\sigma \sigma_0 \right) \\ & + P_{\text{kin}}^p + P_{\text{kin}}^n, \end{aligned} \quad (63)$$

com

$$P_{\text{kin}}^{p,n} = \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^{k_{Fp,n}} \frac{k^4 dk}{(k^2 + M_{p,n}^{*2})^{1/2}}. \quad (64)$$

Mais uma vez, a neutralidade de carga e o equilíbrio químico devem ser aplicados, os quais dependem da inclusão de léptons. As expressões leptônicas para densidade de energia, pressão e densidade são as mesmas dadas pelas equações (36), (37) e (35), respectivamente. A neutralidade de carga e as condições de equilíbrio β implicam que

$$\mu_p = \mu_n - \mu_e, \quad \mu_e = \mu_\mu, \quad \rho_p = \rho_e + \rho_\mu. \quad (65)$$

Há muitas possíveis parametrizações do modelo QHD. Nós escolhemos duas parametrizações amplamente utilizadas na literatura para prosseguir com nossos estudos, ou seja, IU-FSU e TM1. A parametrização IU-FSU foi proposta por Piekarewicz e co-autores em (FATTOYEV *et al.*, 2010). É utilizada aqui porque além dos testes para propriedades nucleares realizados em (DUTRA, Mariana; LOURENÇO; MENEZES, Débora P., 2016), o IU-FSU também é bem-sucedido em explicar a restrição recente que vem da observação (LOURENÇO *et al.*, 2019) da GW170817. A parametrização TM1 foi proposta em (SUGAHARA; TOKI, 1994) e apresenta uma EoS bastante rígida (*stiff*). É bem conhecido que uma EoS mais rígida leva a uma massa estelar máxima maior em contraste com uma menos rígida (*soft*). De fato, a utilização do TM1 como *input* para as equações de equilíbrio estelar produz uma massa máxima maior que $2.0 M_\odot$ e, no entanto, queremos verificar se obtemos o mesmo comportamento qualitativo para propriedades macroscópicas com parametrizações que são substancialmente diferentes.

Sempre que um modelo efetivo de física nuclear é proposto, as propriedades intrínsecas da matéria nuclear em temperatura zero e densidade de saturação nuclear ρ_0 devem ser verificadas, ou seja, em uma densidade onde a pressão é zero e onde a matéria permanecerá estacionária até que alguma força externa atue sobre ela. Essas propriedades em ρ_0 serão importantes para a determinação das constantes de acoplamento dos modelos, a partir das quais as equações de estado serão parametrizadas.

Na Tabela 1, mostramos algumas propriedades da matéria nuclear simétrica na densidade de saturação nuclear e temperatura zero correspondentes as parametrizações IUFSU e TM1 supramencionadas. Também apresentamos os valores de massa máxima estelar (M_{max}) e raio canônico ($R_{1,4M_\odot}$) de uma família de estrela de nêutrons obtida com cada modelo a partir da solução da TOV. A primeira coluna mostra a densidade bariônica dos núcleons no ponto de saturação, a segunda mostra a energia de ligação por núcleon e a terceira o módulo de compressibilidade nuclear. Na quarta coluna temos a massa efetiva relativa à massa nua do núcleon. Na quinta coluna temos a energia de simetria e na sexta o seu *slope*. Finalmente, na sétima, a massa máxima estelar e na oitava, o raio da estrela canônica.

Na figura 2 são apresentadas a equações de estado para matéria estelar, obtidas a partir do modelo de Walecka não-Linear utilizando as parametrizações IU-FSU e TM1.

Modelo	ρ_0 (fm^{-3})	B/A (MeV)	K_0 (MeV)	M^*/M	$J = S_0$ (MeV)	L_0 (MeV)	M_{max}/M_\odot	$R_{1,4M_\odot}$ (km)
IU-FSU	0.155	-16.40	231.33	0.61	31.30	47.21	1.94	12.5
TM1	0.145	-16.23	281.16	0.63	36.89	110.7	2.18	14.3

Tabela 1 – Propriedades da matéria nuclear simétrica na densidade de saturação obtidas para as parametrizações IU-FSU e TM1 a temperatura zero, adaptado de (HEBELER *et al.*, 2013) e (DUTRA, M. *et al.*, 2014).

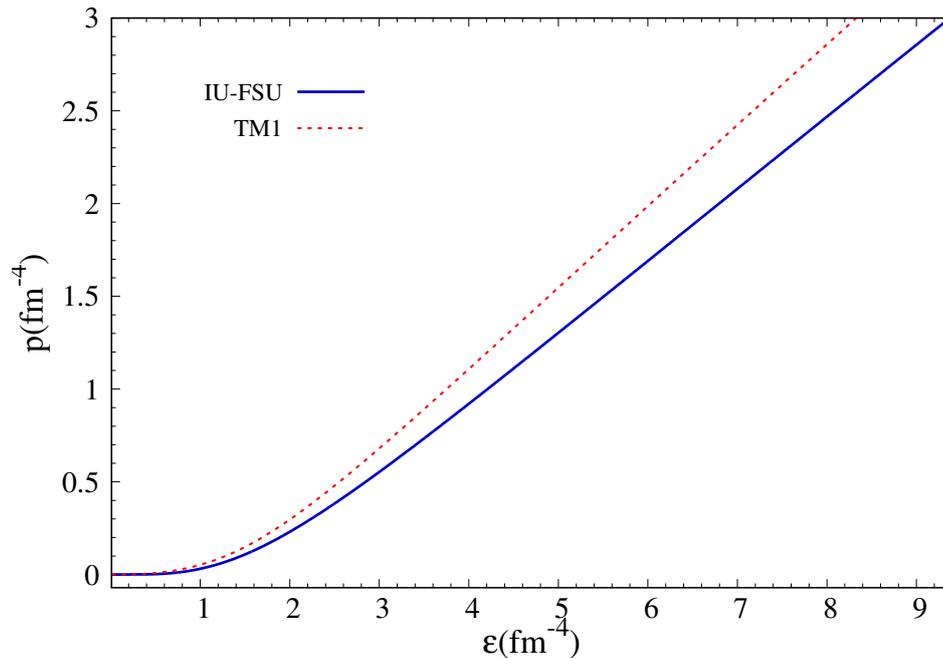


Figura 2 – Equações de estado para matéria hadrônica.

2.3.2.2 Modelo Quark-Meson Coupling (QMC)

Em 1988, Guichon (GUICHON, Pierre A. M., 1988) propôs a primeira versão do modelo Quark-Meson-Coupling (QMC). Desde então esse modelo continuou sendo investigado e passou por melhorias (FLECK *et al.*, 1990; SAITO; THOMAS, Anthony William, 1994, 1995; PAL *et al.*, 1999; SANTOS, A. M.; PANDA; PROVIDÊNCIA, 2009). Em síntese, no QMC considera-se que a matéria nuclear infinita à densidade intermediária até algumas vezes a densidade de saturação é uma distribuição uniforme de núcleons aproximados como "sacolas" esféricas e estáticas do tipo MIT (CHODOS *et al.*, 1974) não sobrepostas, onde os próprios quarks no interior dessa sacola interagem com os de outra sacola via troca de mésons escalar (σ) e vetoriais (ω e ρ). Os graus de liberdade dos quarks são explicitamente considerados, portanto, o acoplamento é determinado no nível dos quarks e não dos núcleons (como ocorre no modelo QHD), identificando um modelo efetivo com uma física mais realista. De fato, o modelo QMC fornece explicações naturais para muitas questões não respondidas na física nuclear de baixa energia, incluindo a origem das forças nucleares de muitos corpos e sua sa-

turação, interação spin-órbita e propriedades da matéria hadrônica em várias faixas de densidades até aquelas que ocorrem nos núcleos de estrelas de nêutrons (GUICHON, P. A. M.; STONE; THOMAS, A. W., 2018). Os campos mesônicos são tratados através da aproximação de campo médio relativística.

O campo dos quarks, ψ_q , dentro da sacola satisfaz a seguinte equação de movimento:

$$\left[i\partial - (m_q^0 - g_\sigma^q) - g_\omega^q \omega \gamma^0 + \frac{1}{2} g_\rho^q \tau_z \rho_0^3 \gamma^0 \right] \psi_{qB}(x) = 0, \quad (66)$$

onde q representa os quarks ($q = u, d$) de massa m_q^0 , τ_z é a projeção do spin e, g_σ^q , g_ω^q e g_ρ^q representam as constantes de acoplamento quark méson.

A energia da sacola estática, a qual descreve um núcleon (p ou n) constituído de três quarks, no estado fundamental é expressa como

$$E_{p,n}^{bag} = \sum_q n_q \frac{\Omega_{q,p,n}}{R_{p,n}} - \frac{Z_{p,n}}{R_{p,n}} + \frac{4}{3} \pi R_{p,n}^3 B_{p,n}, \quad (67)$$

tal que, $Z_{p,n}$ é um parâmetro do modelo contendo informações sobre o movimento de ponto zero do núcleon, e $B_{p,n}$ é a constante da sacola de raio $R_{p,n}$. O conjunto de parâmetros utilizados aqui foi determinado impondo a estabilidade do núcleon (aqui é a "sacola") de modo que as massas dos prótons e nêutrons tenham um único valor (SANTOS, A. M.; PANDA; PROVIDÊNCIA, 2009). A massa efetiva de um núcleon é definida como $M_{p,n}^* = E_{p,n}^{bag}$.

A condição de equilíbrio para a sacola é obtida minimizando a massa efetiva $M_{p,n}^*$ em relação ao seu raio, ou seja

$$\frac{dM_{p,n}^*}{dR_{p,n}^*} = 0. \quad (68)$$

Considera-se aqui $Z_{p,n} = 4.0050668$ e $E_{p,n}^{1/4} = 210.85$ MeV, os quais são obtidos fixando o raio da sacola em $R_{p,n} = 0.6$ fm e considerando massa nua do núcleon como sendo $M = 939$ MeV. Para mais detalhes consulte a ref. (GRAMS; SANTOS, A. M.; MENEZES, Débora P., 2016).

Por fim, após alguns cálculos analíticos que podem ser encontrados em (GRAMS; SANTOS, A. M.; MENEZES, Débora P., 2016; GRAMS *et al.*, 2017) as seguintes expressões para densidade de energia e pressão são obtidas, a saber:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_0^2 + \sum_{p,n} \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F,p,n}} k^2 (k^2 - M_{p,n}^{*2})^{1/2} dk, \quad (69)$$

e pressão,

$$P = -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_0^2 + \sum_{p,n} \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{k_{F,p,n}} \frac{k^4 dk}{(k^2 - M_{p,n}^{*2})^{1/2}}, \quad (70)$$

onde ω_0 e ρ_{03} são os campos mesônicos, determinados através das relações abaixo,

$$\omega_0 = \frac{g_\omega(\rho_p + \rho_n)}{m_\omega^2}, \quad \rho_{03} = \frac{g_\rho(\rho_p - \rho_n)}{m_\rho^2}, \quad (71)$$

em que

$$\rho_{p,n} = \sum_{p,n} \frac{Y}{6\pi^2} k_{Fp,n}^3, \quad (72)$$

é a densidade bariônica. As equações ((69) - (72)) são suficientes para descrever a matéria hadrônica no modelo QMC. Portanto, quando aplicadas no estudo de propriedades das estrelas de nêutrons, temos que implementar as condições de neutralidade de carga e equilíbrio químico, já mencionadas anteriormente. Para isto, os léptons devem estar presentes e entram no sistema como um gás de férmions livres, de modo que a lagrangiana do modelo QMC na matéria estelar é acrescida do termo

$$\mathcal{L}_{leptons} = \sum_l \bar{\psi}_l (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_l) \psi_l, \quad (73)$$

onde o índice l representa os léptons ($l = e, \mu$, elétron e múon, respectivamente) de massa m_l descrito pela função de onda ψ_l . A neutralidade de carga e as condições de equilíbrio β exigem que

$$\mu_p = \mu_n - \mu_e, \quad \mu_e = \mu_\mu, \quad \rho_p = \rho_e + \rho_\mu. \quad (74)$$

As expressões leptônicas para densidade de energia, pressão e densidade são, na devida ordem, as mesmas dadas pelas equações (36), (37) e (35).

A equação de estado para o modelo QMC foi apresentada. Agora, seguimos a discussão do modelo com a inclusão de uma interação entre os mésons vetoriais ω e ρ , ou seja, QMC $_{\omega\rho}$. Neste caso, a densidade de energia e pressão são descritas nas seguintes contribuições (GRAMS *et al.*, 2017):

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 + 3\Lambda_\nu g_\omega^2 g_\rho^2 \omega_0^2 \rho_{03}^2 \\ &+ \sum_{p,n} \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{Fp,n}} k^2 (k^2 + M_{p,n}^{*2})^{1/2} dk, \end{aligned} \quad (75)$$

e a pressão,

$$\begin{aligned} P &= -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 + \Lambda_\nu g_\omega^2 g_\rho^2 \omega_0^2 \rho_{03}^2 \\ &+ \sum_{p,n} \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{Fp,n}} \frac{k^4 dk}{(k^2 + M_{p,n}^{*2})^{1/2}}. \end{aligned} \quad (76)$$

Os campos vetoriais médios ω_0 e ρ_{03} são determinados através de

$$\omega_0 = \frac{g_\omega(\rho_p + \rho_n)}{m_\omega^{*2}}, \quad \rho_{03} = \frac{g_\rho(\rho_p - \rho_n)}{2m_\rho^{*2}}. \quad (77)$$

Modelo	ρ_0 (fm^{-3})	B/A (MeV)	K_0 (MeV)	M^*/M	$J = S_0$ (MeV)	L_0 (MeV)	M_{max}/M_\odot	$R_{1,4M_\odot}$ (km)
QMC	0.15	-16.4	295	0.77	34.5	90	2.14	13.61
QMC $_{\omega\rho}$	0.15	-16.4	295	0.77	30.9	69	2.07	12.83

Tabela 2 – Propriedades da matéria nuclear simétrica obtidas com o modelo QMC, com e sem a interação $\omega\rho$. Todas as quantidades são tomadas na saturação e temperatura zero. Fonte (GRAMS *et al.*, 2017).

A densidade bariônica, $\rho_{p,n}$, é formalmente a mesma dada pela equação (72). m_ω^* e m_ρ^* são as massas efetivas dos campos mesônicos dadas por

$$m_\omega^{*2} = m_\omega^2 + 2\Lambda_V g_\omega^2 g_\rho^2 \rho_{03}^2, \quad m_\rho^{*2} = m_\rho^2 + 2\Lambda_V g_\omega^2 g_\rho^2 \omega_0^2. \quad (78)$$

Novamente, a neutralidade de carga e o equilíbrio químico devem ser levados em consideração, que para o sistema composto por prótons, nêutrons e elétrons, essas condições implicam que:

$$\mu_p = \mu_n - \mu_e, \quad \rho_p = \rho_e. \quad (79)$$

Veja que as expressões acima são equivalentes as (74) com μ_μ e ρ_μ iguais a zero. De fato, para o modelo QMC $_{\omega\rho}$ só será considerado a região de baixas densidades das estrelas de nêutrons, onde os múons não estão presentes (GRAMS *et al.*, 2017).

Finalmente, na Tabela 2 mostramos algumas propriedades da matéria nuclear simétrica na densidade de saturação nuclear e temperatura zero para os modelos QMC e QMC $_{\omega\rho}$, além dos valores de massa máxima estelar e raio canônico de uma família de estrela de nêutrons e na figura 3 as equações de estado correspondentes.

Neste estágio, vamos abrir um parêntese para falarmos da crosta estelar. A densidade desta região varia de aproximadamente $10^{-9}\rho_0$ na camada mais externa a cerca de (no máximo) $0,5\rho_0$ na camada mais interna. A pressão é proporcional à densidade, portanto, aproximar-se da superfície da estrela significa lidar com baixas densidades. Nesse caso, não é mais razoável usar a aproximação relativística de campo médio, de modo que os resultados obtidos pelos modelos NLWM e QMC não são válidos na crosta. Portanto, é necessário construir um modelo de descrição da matéria nuclear para o domínio de baixa densidade.

Embora a crosta ocupe uma profundidade de cerca de 1-2 km nas camadas externas da estrela (ver figura 4), ela representa menos de 1% da massa total da estrela (GLENDENNING, 2000). Essa região deve afetar minimamente o conteúdo de matéria/energia de estrelas compactas. No entanto, em nome de uma maior completude teórica, incluímos na descrição das estrelas de nêutrons. Em termos instrumentais, isso será feito interpolando as equações de estado para matéria hadrônica aqui apresentadas, com uma EoS efetiva no domínio de baixa densidade. Para esse fim, utilizamos a EoS obtida por Baym, Pethick e Sutherland (BAYM; PETHICK; SUTHERLAND, 1971), denominada BPS. Por outro lado, consideramos estrelas de quarks sem

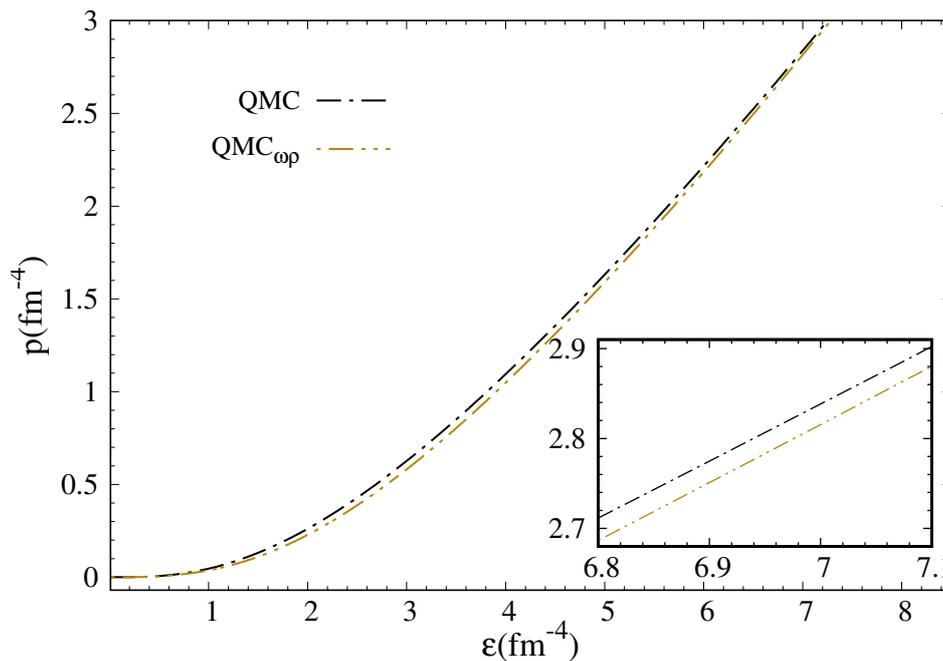


Figura 3 – Equações de estado para matéria hadrônica obtidas a partir dos modelos QMC e $QMC_{\omega\rho}$.

a região da crosta, de modo que a equação de estado correspondente é deslocada para densidades mais altas, como podemos observar na figura 1.

Agora estamos aptos a modelar estrelas compactas. De fato, na próxima subseção, usamos as EoS aqui discutidas como *input* para as equações TOV (24) e (18) e, como saída, obtemos as propriedades macroscópicas de famílias de estrelas de quarks (figura 5) e hadrônicas (figura 6). Deve ser enfatizado que o mesmo procedimento será realizado para as equações de equilíbrio hidrostático no contexto de teorias de gravidade modificada abordadas nos próximos Capítulos.

2.4 DIAGRAMA M-R

Através das equações TOV alimentadas com as EoS supra mencionadas, conseguimos relacionar a microfísica dos constituintes fundamentais da matéria nuclear em objetos compactos com as propriedades macroscópicas dos mesmos. Varrendo uma faixa de valores para densidades centrais previamente dados pela EoS, obtemos o diagrama massa-raio (M-R) correspondente.

Na figura 5, é apresentada a curva M-R para uma família de estrelas de quarks descritas a partir do modelo do MIT. Na figura 6, o mesmo diagrama é obtido para famílias de estrelas hadrônicas descritas pelas parametrizações IU-FSU, TM1, QMC e $QMC_{\omega\rho}$. Para cada valor de ϵ_c inserido nas equações TOV encontra-se a solução para uma estrela e esta, por sua vez, corresponde a um ponto no diagrama. Os pontos de máximos nas curvas ora apresentadas correspondem à massa máxima possível para

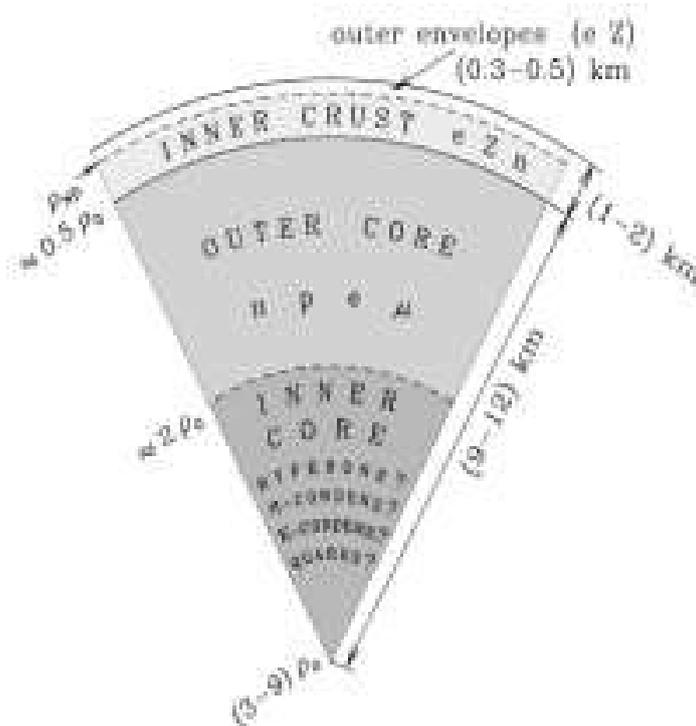


Figura 4 – Modelo para a estrutura de uma estrela de nêutrons, extraído de (YASEEN; ALBAKRY, 2020).

uma estrela cuja composição interna é estabelecida pela EoS associada. Os pontos situados à esquerda desse ponto de máximo representam estrelas com configurações de equilíbrio instáveis e, portanto, esses pontos não descrevem significados físicos de interesse aqui neste trabalho.

Em resumo, do ponto de vista astrofísico de estrelas compactas, o diagrama massa-raio é uma ferramenta de análise extremamente útil, pois nos possibilita comparar a massa máxima obtida por uma determinada EoS com vínculos macroscópicos adquiridos a partir de observações e, assim, determinar se a equação de estado descreve de modo satisfatório a matéria nuclear nesse cenário físico.

No próximo Capítulo apresentamos a primeira versão de gravidade modificada proposta nesta tese.

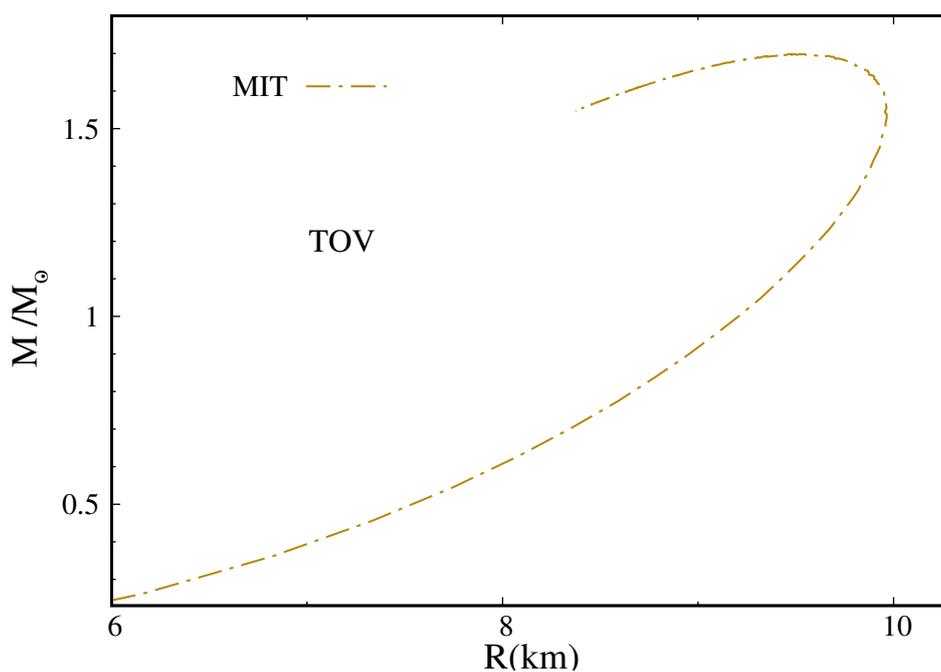


Figura 5 – Relação massa-raio para uma família de estrelas de quarks descrita pela EoS MIT.

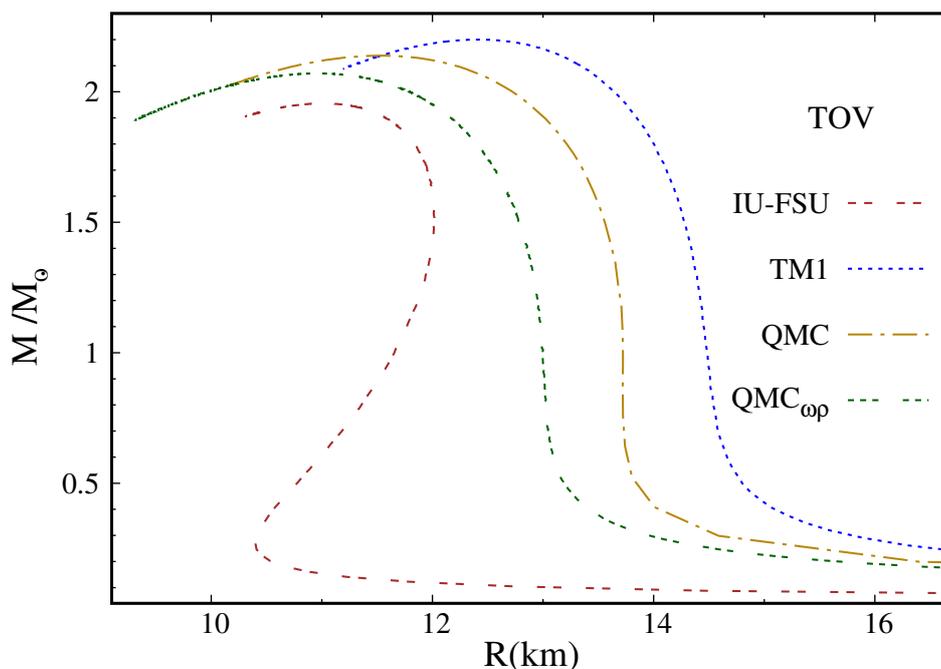


Figura 6 – Relação massa-raio para uma família de estrelas hadrônicas descrita pelas EoSs IU-FSU, TM1, QMC e $QMC_{\omega\rho}$.

3 COMBINANDO TEORIAS ALTERNATIVAS DA GRAVIDADE: RASTALL E RAINBOW

Neste Capítulo, apresentamos uma proposta de teoria de gravidade modificada, com foco na descrição do equilíbrio hidrostático de objetos compactos astrofísicos, em particular, estrelas de nêutrons. A teoria sob consideração aqui é proveniente da combinação de duas teorias de gravidade modificada: a teoria Rastall (RASTALL, 1972) e a teoria Rainbow (MAGUEIJO; SMOLIN, 2004), classificadas como extensões da relatividade geral (RG). Adicionalmente, enfatizamos que a junção destas teorias gera uma teoria da gravidade alternativa, a qual passaremos agora a chamar gravidade Rastall-Rainbow (RR), e que, portanto, esta gera equações funcionalmente análogas a TOV na descrição do equilíbrio hidrostático estelar relativístico, exatamente como a RG empreende. Com isto posto, empregamos as equações de campo de Einstein modificadas pela gravidade Rastall e, em seguida, alteramos estas equações mediante a consideração de que agora, a geometria espaço-temporal seja dependente da energia da partícula teste (EPT), implementada por um conjunto de funções no elemento de linha, tal como propõe a gravidade Rainbow. Assim, todas as grandezas que compõem as equações de campo na gravidade Rastall tornam-se dependentes desta energia. De imediato, um primeiro teste à teoria RR, derivamos um novo conjunto de equações que descrevem o equilíbrio hidrostático estelar e conseqüentemente investigamos a relação massa-raio das estrelas de nêutrons. Obtivemos as propriedades estelares de uma família de estrelas de nêutrons usando como *input* modernas equações de estado relativísticas.

3.1 GRAVIDADE RAINBOW

Em diversas teorias quânticas da gravidade, o pressuposto de um comprimento mínimo mensurável da ordem do comprimento de Planck, delimita a energia máxima que qualquer partícula pode atingir como sendo da ordem da energia de Planck. Porém, esse pressuposto fundamental poderia implicar a modificação tanto no momento linear quanto nas relações de comutação quântica, ocasionando uma relação de dispersão relativística modificada. Outrossim, a RG é válida no limite de baixa energia, enquanto em regime de alta energia a teoria de Einstein, poderia a princípio, ser aperfeiçoada. De fato, uma das abordagens pertinentes que trata naturalmente das relações de dispersão modificada é chamada relatividade especial não-linear ou relatividade especial dupla (AMELINO-CAMELIA, Giovanni, 2001, 2002; AMELINO-CAMELIA, Giovanni *et al.*, 2005). Esta relatividade caracteriza-se em uma estrutura simples, com a finalidade de codificar propriedades quânticas do espaço-tempo de Minkowski. Os princípios desta relatividade especial dupla (BRUNO; AMELINO-CAMELIA, G.; KOWALSKI-GLIKMAN, J., 2001; KOWALSKI-GLIKMAN, Jerzy, 2001; AMELINO-CAMELIA, Giovanni, 2001;

MAGUEIJO; SMOLIN, 2002, 2003) são: (i) as leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais; (ii) no limite de baixa energia, $\frac{E}{E_p} \rightarrow 0$, onde E é a energia da partícula teste, $E_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}}$ é a energia de Planck, e c é a velocidade da luz para todos os referenciais inerciais; (iii) E_p é uma constante universal para todos os referenciais inerciais. Neste cenário, E_p é a escala de energia onde os efeitos quânticos da gravidade tornam-se relevantes.

Em 2004, João Magueijo e Lee Smolin (MAGUEIJO; SMOLIN, 2004) propuseram uma generalização desta relatividade especial não-linear para espaços-tempo curvos, originando a chamada gravidade Rainbow. Ao fazer essa extensão, demonstraram como o formalismo, o qual caracteriza os princípios desta relatividade, pode ser generalizado para incorporar a curvatura (levando ao que pode ser chamada "relatividade geral dupla"). Inicialmente, eles propuseram uma realização dual desta relatividade não-linear no espaço de momento, e assim demonstraram que, para tal dual, o invariante do espaço-tempo é uma métrica dependente da energia.

De maneira geral, a gravidade Rainbow é ocasionada pela modificação da relação de dispersão relativística usual $E^2 - p^2 = m^2$ no regime de alta energia, portanto, acarreta uma modificação na geometria espaço-temporal nesse limite. Deste modo, a geometria do espaço-tempo nesta gravidade depende da EPT. Assim sendo, cada partícula teste com energia distinta sentirá uma geometria espaço-temporal também distinta. Em vista disto, em vez de uma única métrica para cada espaço-tempo como ocorre na RG, dispomos agora de uma família de métricas, isto é, uma métrica Rainbow, parametrizada por $\frac{E}{E_p}$. Evidentemente, este fato também acarreta algumas mudanças na estrutura dos objetos geométricos da RG, tais como conexão e curvatura, agora dependentes da EPT, e conseqüentemente, uma modificação simples nas equações de campo de Einstein.

Tem-se, com efeito, a modificação da relação de dispersão resultante desta gravidade, a saber

$$E^2 \Xi(x)^2 - p^2 \Sigma(x)^2 = m^2, \quad (80)$$

onde o argumento $x = \frac{E}{E_p}$ é a razão entre a energia da partícula teste e a energia de Planck E_p , ambas previamente mencionadas. Na equação ((80)) as funções $\Xi(x)$ e $\Sigma(x)$ são as funções Rainbow. Deve-se enfatizar que a escolha dessas funções é teoricamente e fenomenologicamente motivada. A saber, em (KHODADI; NOZARI; SEPANGI, 2016; AWAD; ALI; MAJUMDER, 2013) os autores obtêm soluções correspondentes a um universo não singular através da escolha de funções $\Xi(x) = 1$ e $\Sigma(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Por outro lado, uma forma exponencial de função Rainbow é aplicada no estudo da explosão de raios gama (AWAD; ALI; MAJUMDER, 2013; AMELINO-CAMELIA, G. *et al.*, 1998). Conseqüentemente, $\Xi(x)$ e $\Sigma(x)$ são escolhidas da maneira que em um regime de baixa energia, isto é, $\frac{E}{E_p} \rightarrow 0$, a relação de dispersão usual é recuperada, de modo

a satisfazer as condições:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Xi(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \Sigma(x) = 1. \quad (81)$$

Em adição, a métrica espaço-temporal no contexto da gravidade Rainbow é usualmente construída usando a seguinte métrica dependente da energia (MAGUEIJO; SMOLIN, 2004)

$$g(x) = \eta^{ab} e_\mu(x) \otimes e_\nu(x), \quad (82)$$

onde, os campos dependentes da energia $e_\mu(x)$ e $e_\nu(x)$ são relacionados aos campos independentes, denotados por $\widetilde{e}_\mu(x)$ e $\widetilde{e}_\nu(x)$, como segue:

$$e_0(x) = \frac{1}{\Xi(x)} \widetilde{e}_0(x), \quad e_\nu(x) = \frac{1}{\Sigma(x)} \widetilde{e}_\nu(x), \quad (83)$$

e identificamos $\nu = (1,2,3)$ como a parte espacial. Portanto, usando a equação ((82)) e considerando as quantidades \widetilde{e}_μ e \widetilde{e}_ν supracitadas, um espaço-tempo estático, homogêneo e esfericamente simétrico é descrito neste cenário pelo elemento de linha dependente da energia, ou seja

$$ds^2 = + \frac{B(r)}{\Xi^2(x)} dt^2 - \frac{A(r)}{\Sigma^2(x)} dr^2 - \frac{r^2}{\Sigma^2(x)} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (84)$$

e, portanto, tal como antes, $A(r)$ e $B(r)$ são funções dependentes apenas da coordenada radial r . Note que a expressão ((82)) depende da energia devido às funções Rainbow, de modo que nesta configuração, as coordenadas espaço-temporais (t, r, θ, φ) são independentes da energia das partículas teste. Em adição, nesta gravidade, as equações de campo de Einstein são substituídas por uma família de outras equações de campo, vejamos

$$G_{\mu\nu}(x) \equiv R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R(x) = k(x) T_{\mu\nu}(x), \quad (85)$$

onde, $k(x) = 8\pi G(x)$ e $G(x)$ é uma constante de Newton dependente da escala de energia, definida de modo que G_0 é a constante gravitacional newtoniana padrão (MAGUEIJO; SMOLIN, 2004). Para mais detalhes quanto a dependência energética de G , *vide* (MAGUEIJO; SMOLIN, 2004; NILSSON; DABROWSKI, 2017; JUNIOR; RODRIGUES; S. SILVA, 2020; ANBER; DONOGHUE, 2012). Consideramos aqui que G não depende da escala de energia. O próximo passo é estudar o efeito da dependência energética no contexto da gravidade Rastall. Para isso, apresentamos as principais ideias desta teoria na próxima seção.

3.2 GRAVIDADE RASTALL

A existência de leis de conservação é uma das mais importantes exigências das teorias físicas. De fato, a lei de conservação ((22)) para o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$

é um pressuposto fundamental em RG. A argumentação que remota a validade desta lei em espaços-tempo curvos resume-se no fato de esta ser válida no espaço-tempo de Minkowski, representada por $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Portanto, uma extensão contextual em RG é garantida através do repasse $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$. Porém, ao contrário do que ocorre em espaço-tempo plano onde esta lei de conservação é muito bem testada e evidenciada, em espaços-tempo curvos ainda apresenta muitos desafios. Além disto, nem mesmo a conservação para a energia gravitacional foi ainda estritamente testada em regime de campo gravitacional forte. Desse modo, nesse cenário, a implementação de leis de conservação, em específico aquelas relacionadas a $T_{\mu\nu}$ são, a priori, passíveis de serem generalizadas em relação às expressões usuais (FABRIS, 2012).

Em 1972, Peter Rastall (RASTALL, 1972) mantendo inalterada a identidade de Bianchi do tensor geométrico de Einstein ($\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$), propôs uma generalização acerca dos princípios de conservação dos tensores energia-momento, mediante a assumpção de que em espaços-tempo curvos fosse $\nabla^\mu T_{\mu\nu} \neq 0$. Em suma, ele introduziu uma quebra na forma convencional da lei de conservação ((22)), visto que esta pode ser inválida em uma geometria curva, dando origem a teoria da gravidade Rastall. Fundamentado em justificativas fenomenológicas (veja a referência (RASTALL, 1972)), Rastall considera que a divergência de $T_{\mu\nu}$ fosse proporcional a variação do escalar de Ricci R . Tal como foi originalmente posto por Rastall, esta suposição é escrita da seguinte forma:

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = \bar{\lambda} \nabla_\nu R, \quad (86)$$

onde $\bar{\lambda}$ é o parâmetro Rastall constante (DAS, D.; DUTTA; CHAKRABORTY, 2018). Contudo, segundo (ZIAIE; MORADPOUR; GHAFARI, 2019), a lei de conservação ((227)) é uma consequência do acoplamento mínimo entre matéria e gravidade ¹. Diante disto, $\bar{\lambda}$ pode ser interpretado como uma medida direta da tendência que a geometria possui em se acoplar aos campos de matéria e vice-versa (DAS, D.; DUTTA; CHAKRABORTY, 2018). A modificação inserida na equação acima é de tal forma que para $\bar{\lambda} = 0$, restituímos adequadamente ao caso da RG. Naturalmente, R desaparece em espaço-tempo plano, e assim a lei de conservação para $T_{\mu\nu}$ nesse contexto é completamente restaurada. Diante disto, cria-se uma fundamentação teórica de que em uma estrutura espaço-temporal curva, a própria curvatura contribua para a energia total do sistema (FABRIS, 2012).

Entretanto, neste cenário, as equações de campo de Einstein modificadas con-

¹ De fato, uma maneira de modificar a RG é considerar um acoplamento não-mínimo entre a geometria e os campos de matéria. Devido a esta suposição, a lei de conservação usual ((227)) não é mais válida (ZIAIE; MORADPOUR; GHAFARI, 2019; NOJIRI, Shin'ichi; ODINTSOV, Sergei D., 2004; ALLEMANDI *et al.*, 2005; KOIVISTO, 2006; BERTOLAMI *et al.*, 2007b; HARKO, Tiberiu; LOBO, F. S. N., 2014; MORADPOUR *et al.*, 2017b). Este pressuposto desempenha um papel-chave no trabalho de Rastall (RASTALL, 1972).

sistentes com a identidade de Bianchi ((232)) e com ((86)) é dada por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G (T_{\mu\nu} - \bar{\lambda}g_{\mu\nu}R) , \quad (87)$$

onde, é de considerável interesse rescrevê-la da seguinte forma

$$R_{\mu\nu} + \left(8\pi G\bar{\lambda} - \frac{1}{2}\right)g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} . \quad (88)$$

Portanto, definindo $\lambda \equiv 1 - 16\pi G\bar{\lambda}$, a equação anterior torna-se:

$$R_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} , \quad (89)$$

e, conseqüentemente, ((86)) resulta em:

$$\nabla_{\mu}T^{\mu}_{\nu} = \frac{1-\lambda}{16\pi G}\nabla_{\nu}R , \quad (90)$$

onde, λ é identificado como sendo o parâmetro Rastall ². Para $\lambda = 1$ em ((89)) e ((90)), recuperamos as equações de campo tradicionais da RG. Para $\lambda \neq \frac{1}{2}$, o traço da equação de Einstein modificada ((89)) é dado por ³

$$R = \frac{8\pi G}{1-2\lambda}T . \quad (91)$$

Daí, levando-se a cabo este resultado, e em adição, somando e subtraindo o termo $\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ no lado esquerdo de ((89)), esta pode ser reescrita como a equação usual de Einstein com um tensor energia-momento efetivo $\tau_{\mu\nu}$, isto é

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R &= 8\pi GT_{\mu\nu} - \frac{(1-\lambda)}{2}g_{\mu\nu}R, \\ &= 8\pi G\tau_{\mu\nu} , \end{aligned} \quad (92)$$

onde definimos

$$\tau_{\mu\nu} \equiv \left[T_{\mu\nu} - \frac{(1-\lambda)}{2(1-2\lambda)}g_{\mu\nu}T \right] . \quad (93)$$

Podemos observar que as modificações inseridas pela gravidade Rastall podem ser repassadas matematicamente como uma redefinição do $T_{\mu\nu}$ e do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, tal que, a forma usual das equações de campo de Einstein são preservadas. Em conexão com isto, está em prospecto na seção subsequente uma versão combinada das teorias da gravidade expostas nesta seção e na anterior.

² λ quantifica o desvio da RG. De outro modo, ele está relacionado à generalização das equações de Einstein, tal como posto em ((89)).

³ A quantidade T representa o traço de $T_{\mu\nu}$ de acordo com $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$.

3.3 GRAVIDADE RASTALL-RAINBOW (RR)

Nas seções anteriores deste Capítulo, discutimos separadamente as teorias de gravidade modificada, Rastall e Rainbow. Nosso interesse aqui é estudar ambas as teorias em um formalismo unificado. Para este propósito, nosso ponto de partida é a equação de Einstein modificada ((89)) e a lei de conservação modificada ((86)). O efeito da gravidade Rainbow é incorporado na equação ((89)) considerando uma métrica e uma constante gravitacional ambas dependentes da EPT, resultando assim nas equações de campo modificadas para a gravidade RR, as quais são dadas como segue:

$$R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R(x) = 8\pi G(x)\tau_{\mu\nu}(x) , \quad (94)$$

com o respectivo repasse para $\tau_{\mu\nu}(x)$

$$\tau_{\mu\nu}(x) = \left[T_{\mu\nu}(x) - \frac{(1-\lambda)}{2(1-2\lambda)}g_{\mu\nu}T(x) \right] , \quad (95)$$

onde, o parâmetro Rastall λ é independente desta energia. Podemos resolver a equação de campo modificada ((94)) na métrica definida pela equação ((84)), que como já foi mencionado anteriormente, este espaço-tempo pode ser usado como uma boa aproximação para modelar a estrutura interna de objetos compactos astrofísicos. Em seguida, efetuaremos os procedimentos que possibilita obter a solução destas equações na descrição do equilíbrio hidrostático estelar. De fato, tal abordagem resultará em equações TOV modificadas devido às modificações inseridas pela gravidade RR.

3.3.1 Equações de Equilíbrio Hidrostático

Com base no que foi discutido na seção anterior, espera-se que a influência da dependência energética da métrica proveniente da gravidade Rainbow e da mudança na lei de conservação do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ devido à gravidade Rastall, modifique as relações usuais do equilíbrio hidrostático estelar no interior desses objetos compactos. Consideramos o elemento de linha dado na equação ((84)) e assumimos que a matéria no interior estelar pode ser descrita pelo $T_{\mu\nu}$ para um fluido perfeito, dado segundo a expressão ((5)). Assim, efetuando procedimentos análogos aos que foram desenvolvidos no Capítulo 2, encontramos as componentes para $R_{\mu\nu}(x)$, a saber

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= \frac{B''\Sigma^2(x)}{2A\Xi^2(x)} - \frac{A'B'\Sigma^2(x)}{4A^2\Xi^2(x)} - \frac{B'^2\Sigma^2(x)}{4AB\Xi^2(x)} + \frac{B'\Sigma^2(x)}{rA\Xi^2(x)}; \\
 R_{11} &= \frac{A'}{rA} + \frac{A'B'}{4AB} + \frac{B'^2}{4B^2} - \frac{B''}{2B}; \\
 R_{22} &= 1 - \frac{1}{A} + \frac{rA'}{2A^2} - \frac{rB'}{2AB},
 \end{aligned} \tag{96}$$

que por sua vez, o escalar de curvatura $R(x)$ é,

$$R = \frac{B''\Sigma^2(x)}{AB} - \frac{B'\Sigma^2(x)}{2AB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{2\Sigma^2(x)}{rA} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{2\Sigma^2(x)}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A} \right), \tag{97}$$

de modo que, as equações de campo ((94)) resultam nas seguintes contribuições diferenciais acopladas

$$\frac{A'B\Sigma^2(x)}{rA^2\Xi^2(x)} + \frac{B\Sigma^2(x)}{r^2\Xi^2(x)} \left(1 - \frac{1}{A} \right) = 8\pi G\tau_{00}(x), \tag{98}$$

$$\frac{B'}{rB} - \frac{A}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A} \right) = 8\pi G\tau_{11}(x), \tag{99}$$

$$\frac{r^2B''}{2AB} - \frac{r^2B'}{4AB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) = 8\pi G\tau_{22}(x). \tag{100}$$

Daí, com efeito, manipulando o lado direito destas, obtém-se:

$$\tau_{00}(x) = \left[T_{00} - \frac{(1-\lambda)}{2(1-2\lambda)} g_{00} T \right] = \left[\frac{\varepsilon B}{\Xi^2(x)} - \frac{(1-\lambda)}{2(1-2\lambda)} \left(\frac{B}{\Xi^2(x)} \right) (\varepsilon - 3\rho) \right], \tag{101}$$

$$\tau_{11}(x) = \left[T_{11} - \frac{(1-\lambda)}{2(1-2\lambda)} g_{11} T \right] = \left[\frac{\rho A}{\Sigma^2(x)} - \frac{(1-\lambda)}{2(1-2\lambda)} \left(-\frac{A}{\Sigma^2(x)} \right) (\varepsilon - 3\rho) \right], \tag{102}$$

$$\tau_{22}(x) = \left[T_{22} - \frac{(1-\lambda)}{2(1-2\lambda)} g_{22} T \right] = \left[\frac{\rho r^2}{\Sigma^2(x)} - \frac{(1-\lambda)}{2(1-2\lambda)} \left(-\frac{r^2}{\Sigma^2(x)} \right) (\varepsilon - 3\rho) \right]. \tag{103}$$

Note que nos resultados acima foi utilizado a relação de traço $T = (\varepsilon - 3\rho)$ do tensor energia-momento sob consideração. Portanto, as equações ((98) - (100)) são convenientemente reescritas como

$$\frac{A'B}{rA^2} + \frac{B}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A} \right) = 8\pi GB\varepsilon, \tag{104}$$

$$\frac{B'}{rB} - \frac{A}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A}\right) = 8\pi GA\bar{\rho}, \quad (105)$$

$$\frac{r^2 B''}{2AB} - \frac{r^2 B'}{4AB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) = 8\pi Gr^2 \bar{\rho}, \quad (106)$$

onde $\bar{\rho}$ e $\bar{\varepsilon}$ são, respectivamente, pressão e densidade de energia efetivas. Tais grandezas são definidas em termos da pressão e densidade de energia reais do fluido, conforme as prescrições, a saber,

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\Sigma^2(x)} [\alpha_1 \varepsilon + 3\alpha_2 \rho], \quad (107)$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\Sigma^2(x)} [\alpha_2 \varepsilon + (1 - 3\alpha_2)\rho], \quad (108)$$

onde,

$$\alpha_1 = \frac{1 - 3\lambda}{2(1 - 2\lambda)}; \quad \alpha_2 = \frac{1 - \lambda}{2(1 - 2\lambda)}. \quad (109)$$

Podemos observar neste estágio que o conjunto de equações diferenciais acopladas ((104) - (106)) são formalmente similares às obtidas em RG. Desta forma, por uma integração direta da equação ((104)), encontramos a forma da função radial $A(r)$, fornecendo a expressão

$$A(r) = \left(1 - \frac{2GM(r)}{r}\right)^{-1}, \quad (110)$$

com a definição do termo de massa

$$M(r) = \int_0^R 4\pi r'^2 \bar{\varepsilon}(r') dr'. \quad (111)$$

Tal como antes, a interpretação da equação ((111)) é direta: A integral é executada do centro da estrela até $r = R$. Portanto, R denota o raio da estrela e $\bar{\varepsilon}$ é a densidade de energia efetiva no interior estelar. No caso em que $\lambda = 1$ e $\Sigma = 1$ temos $\bar{\varepsilon} = \varepsilon$; esta definição coincide com a definição usual da RG. Note que a massa gravitacional $M(r) \equiv M_G$ definida em ((111)) é obtida usando a densidade de energia efetiva definida na equação ((107)). Desta forma, podemos observar que a função Rainbow Σ e o parâmetro Rastall λ modificam a massa estelar nesta teoria. Manipulando a equação ((105)) e empregando o resultado ((110)), obtemos a contribuição

$$\frac{B'(r)}{2B(r)} = \frac{GM(r)}{r^2} \left(1 + \frac{4\pi r^3 \bar{\rho}(r)}{M(r)}\right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{r}\right)^{-1}. \quad (112)$$

Analogamente ao procedimento desenvolvido em RG, a contribuição $\frac{B'(r)}{2B(r)}$ pode ser interpretada como o gradiente de um potencial $\Psi(r)$, ou seja, $\Psi'(r) = \frac{B'(r)}{2B(r)}$. Porém, aqui neste contexto ocorrem as correções oriundas da teoria adotada.

Conseqüentemente, considerando a “quebra” na lei de conservação do tensor energia-momento na gravidade Rastall, tal como apresentada na equação ((90)) e, em adição, tendo em vista o escalar de Ricci escrito como uma função do traço de $T_{\mu\nu}$ segundo ((91)), escrevemos

$$\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = \frac{1-\lambda}{2(1-2\lambda)} \nabla_{\nu} T, \quad (113)$$

a qual por sua vez, resulta

$$\frac{B'(r)}{2B(r)} = -\frac{\bar{p}'(r)}{\bar{p}(r) + \bar{\varepsilon}(r)}. \quad (114)$$

Por fim, comparando as equações ((127)) e ((169)) e, em seguida isolando \bar{p}' , obtemos

$$\frac{d\bar{p}(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\bar{\varepsilon}(r)}{r^2} \left(1 + \frac{\bar{p}(r)}{\bar{\varepsilon}(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 \bar{p}(r)}{M(r)}\right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{r}\right)^{-1}. \quad (115)$$

A equação acima com a ((111)) configuram a redução das equações de Einstein modificadas ((94)) no interior de uma estrela relativística, estática, isotrópica e esfericamente simétrica. Através destas equações, obtemos informações sobre o equilíbrio hidrostático estelar no contexto da gravidade Rastall-Rainbow (RR). A pressão efetiva e a densidade de energia são grandezas físicas que dependem dos novos parâmetros λ e Σ . Comparando o equilíbrio hidrostático no contexto da RG com a equação ((115)), observamos que o parâmetro λ não pode assumir o valor $\lambda = 1/2$. Isso está relacionado ao fato de que a massa da estrela torna-se divergente para este valor. Na próxima seção, usamos a equação ((115)) para estudar o equilíbrio gravitacional de estrelas de nêutrons.

3.4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Analisamos aqui os efeitos das modificações da abordagem Rastall-Rainbow (RR) sobre as propriedades das estrelas de nêutrons, a fim de testar a nova teoria. Primeiro, examinamos separadamente os efeitos de cada componente da nova teoria, ou seja, para cada EoS usada neste trabalho, variamos apenas o parâmetro Σ , mantendo λ fixo e, em seguida, variamos λ enquanto mantemos Σ fixo. Após este teste, variamos os dois parâmetros em torno dos intervalos propostos em (OLIVEIRA *et al.*, 2015) e (HENDI *et al.*, 2016). Vale ressaltar que λ não pode assumir o valor $\lambda = 1/2$, porque neste ponto a massa da estrela torna-se divergente e, Σ tem que ser maior que 1 porque valores menores mostraram diminuir a massa estelar máxima. Nós também analisamos valores de λ menores que 1, embora eles não tenham sido considerados em (OLIVEIRA *et al.*, 2015). Verificamos que, para valores de λ inferiores a determinados valores (sempre próximos de um), \bar{p} pode tornar-se negativo, o que significa que o sistema é instável. Se pressões negativas aparecerem apenas em densidades muito baixas, típicas das presentes na crosta interna, essa parte da EoS pode ser

simplesmente eliminada. No entanto, se a pressão negativa aparecer em densidades da ordem das presentes no núcleo da EoS, a EoS gerada deve ser descartada. Um exemplo é dado e discutido nesta seção.

Em todas as Figuras apresentadas, a linha contínua corresponde à solução TOV da relatividade geral (RG) e, a massa máxima e o raio desta solução para cada EoS também pode ser vista na terceira coluna de todas as Tabelas. Utilizamos aqui a EoS BPS completa para descrever a crosta externa estelar (BAYM; PETHICK; SUTHERLAND, 1971). Em adição, não há inclusão de híperons nas EoS aqui utilizadas. Observe que para $\Sigma = 1.0$ e $\lambda = 1.0$ recuperamos a solução correspondente a RG na teoria RR.

Começamos testando a teoria RR com um modelo de aproximação relativística de campo médio, a parametrização IU-FSU proposta em (FATTOYEV *et al.*, 2010). Os resultados obtidos com vários valores de parâmetros são exibidos na Tabela 3 e na figura 7. Embora os resultados mencionados nas referências (DUTRA, Mariana; LOURENÇO; MENEZES, Débora P., 2016; LOURENÇO *et al.*, 2019) e reproduzidos aqui estejam em limites aceitáveis, a solução TOV da EoS IU-FSU produz uma massa máxima ligeiramente menor do que $2.0M_{\odot}$ esperada. O raio da estrela canônica ($1.4M_{\odot}$), no entanto, está no intervalo imposto pelas restrições GW170817, que sugerem que $R_{1.4M_{\odot}}$ deve ficar entre 10,5 e 13,4 km. Observe na Tabela 3 que, embora a teoria Rastall dificilmente afete a massa estelar máxima, ela aumenta o raio correspondente (OLIVEIRA *et al.*, 2015). A teoria Rainbow, por outro lado, funciona de tal maneira que a massa máxima pode aumentar ou diminuir, dependendo dos valores escolhidos a priori. No entanto, se a massa máxima aumenta, o mesmo acontece com o raio. Se diminuir, o raio também diminui (HENDI *et al.*, 2016). É a combinação de ambas as abordagens que permite que a massa máxima aumente ao mesmo tempo que o raio canônico da estrela diminui. Esse recurso coloca as propriedades macroscópicas obtidas com o modelo IU-FSU confortavelmente nas restrições aceitas para uma variedade de parâmetros.

Antes de investigarmos outras EoS, gostaríamos de comentar sobre o resultado obtido com o parâmetro $RR_{\lambda 4}$ e, para este propósito, a EoS modificada é mostrada na figura 8 ao lado da EoS IU-FSU original. A equação RR do tipo TOV ((115)) depende de expressões modificadas para a pressão e densidade de energia, como dadas nas equações ((107)) e ((108)) e mostrado pela curva tracejada. Podemos observar que a EoS é deslocada para densidades mais altas, com um comportamento equivalente ao que é usualmente obtido com a EoS para matéria de quarks sem uma crosta (PERES MENEZES, Debora; PROVIDENCIA; MELROSE, 2006). O diagrama massa-raio resultante é representado no painel inferior da figura 7. Todas as EoS com esse comportamento foram eliminadas de nossas análises e essa restrição está relacionada ao fato de que λ tem um valor limite mínimo na teoria RR. Este limite inferior foi

Rainbow	Modelo	TOV	Rainbow _{1.2}	Rainbow _{1.01}	RR	RR _{Σ1}	RR _{Σ2}	RR _{Σ3}	RR _{Σ4}
Parâmetros	Σ	1.0	1.2	1.01	1.01	1.05	1.1	0.95	0.90
	λ	1.0	1.0	1.0	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
IU-FSU	M_{max}	1.94 M_{\odot}	2.33 M_{\odot}	1.96 M_{\odot}	1.96 M_{\odot}	2.03 M_{\odot}	2.13 M_{\odot}	1.84 M_{\odot}	1.74 M_{\odot}
	$R_{M_{max}}$	11.22 km	13.46 km	11.33 km	11.15 km	11.59 km	12.15 km	10.49 km	9.94 km
	$R_{1.4M_{\odot}}$	12.55 km	15.08 km	12.68 km	12.28 km	12.76 km	13.34 km	11.55 km	10.92 km
		Relatividade Geral	gravidade modificada						
Rastall	Modelo	TOV	Rastall _{1.001}	Rastall _{0.999}	RR	RR _{λ1}	RR _{λ2}	RR _{λ3}	RR _{λ4}
Parâmetros	λ	1.0	1.001	0.999	0.999	1.001	1.003	1.006	0.96
	Σ	1.0	1.0	1.0	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01
IU-FSU	M_{max}	1.94 M_{\odot}	1.94 M_{\odot}	1.94 M_{\odot}	1.96 M_{\odot}	1.96 M_{\odot}	1.96 M_{\odot}	1.97 M_{\odot}	1.87 M_{\odot}
	$R_{M_{max}}$	11.22 km	11.48 km	11.05 km	11.15 km	11.60 km	12.18 km	13.21 km	10.17 km
	$R_{1.4M_{\odot}}$	12.55 km	13.18 km	12.16 km	12.28 km	13.32 km	14.87 km	18.19 km	10.70 km

Tabela 3 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores dos parâmetros λ e Σ correspondentes ao diagrama massa-raio na figura 7. Rainbow_{1.2} (HENDI *et al.*, 2016) e Rastall_{1.001} (OLIVEIRA *et al.*, 2015).

identificado em (OLIVEIRA *et al.*, 2015) como sendo menor que 1.0, mas verificamos que o valor exato é realmente dependente do modelo.

Agora, investigamos como o modelo depende dos resultados gerais e, para isso, outras EoS são usadas. As EoS QMC (GUICHON, Pierre A. M., 1988; SAITO; THOMAS, Anthony William, 1994, 1995; PAL *et al.*, 1999) e QMC $\omega\rho$ (PANDA *et al.*, 2012; GRAMS *et al.*, 2017) são obtidas com um modelo eficaz em que os hádrons são feitos de três quarks confinados em um sistema de sacolas do MIT não sobrepostas. No modelo QMC, os quarks dentro dos núcleons interagem entre si através da troca de mésons σ , ρ e ω . A diferença entre os dois modelos vem do fato de que somente no QMC $\omega\rho$ os mésons ω e ρ interagem um com o outro, enquanto no modelo QMC padrão todos os mésons interagem apenas com os quarks. Esta interação tem o efeito de diminuir a inclinação da energia de simetria do modelo e, conseqüentemente, encolher o raio canônico de $1,4M_{\odot}$. Mais detalhes dos modelos QMC e QMC $\omega\rho$ e seus efeitos sobre as propriedades das estrelas de nêutrons podem ser vistos em (GRAMS *et al.*, 2017).

As soluções TOV para os modelos QMC e QMC $\omega\rho$ fornecem massas máximas no intervalo aceitável de $2.0M_{\odot} \leq M_{max} \leq 2.3M_{\odot}$ (DEMOREST *et al.*, 2010; ANTONIADIS *et al.*, 2013; MARGALIT; METZGER, 2017; SHIBATA *et al.*, 2017; REZZOLLA; MOST; WEIH, 2018). Além disso, ambas as EoS produzem raios para estrelas canônicas $1.4M_{\odot}$ no intervalo recente obtido em (MALIK *et al.*, 2018) da ordem de $11.82\text{km} \leq R_{1.4M_{\odot}} \leq 13.72\text{ km}$, mas ligeiramente fora do intervalo proposto por (ABBOTT, B. P. *et al.*, 2017) de $10,5\text{ km} \leq R_{1.4M_{\odot}} \leq 13,4\text{ km}$.

Na figura 9 e Tabela 4 mostramos os efeitos da teoria RR nas propriedades de estrelas de nêutrons obtidas com a EoS QMC. Seguimos o mesmo procedimento do

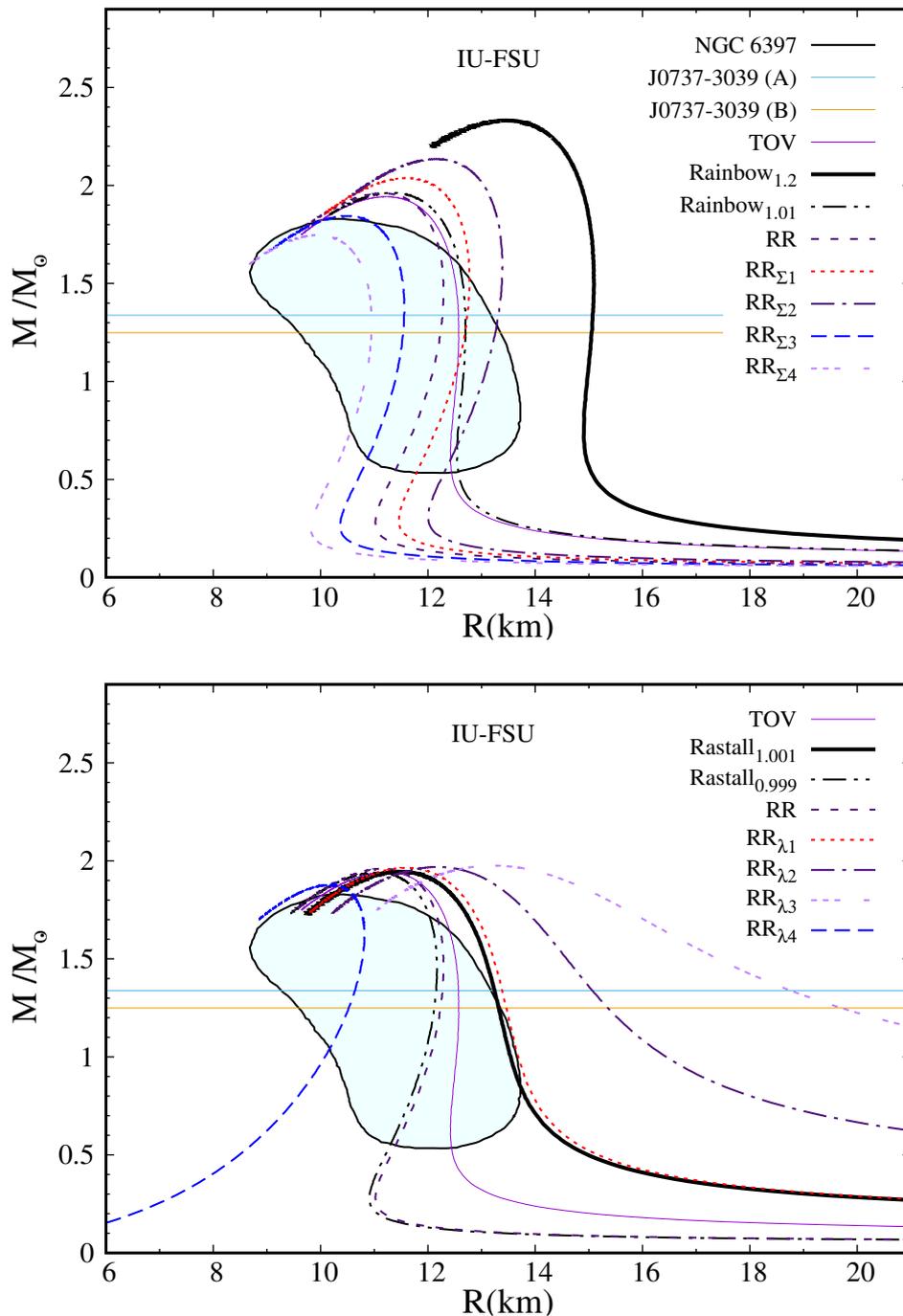


Figura 7 – Relação massa-raio para uma família de estrelas hadrônicas descrita com a EoS IU-FSU. Analisamos os efeitos causados pela variação do parâmetro Rainbow Σ (superior) enquanto mantemos o outro parâmetro fixo e, os efeitos em variar o parâmetro Rastall λ (inferior) enquanto mantínhamos Σ fixo.

modelo IU-FSU, ou seja, testamos o parâmetro Σ no intervalo de 0.7 a 1.4 e λ de 0.9 a 1.1, mas apenas os resultados próximos das restrições observacionais aceitas são mostrados. Observe que para $\lambda = 1.006$, por exemplo, já temos um raio de 20,84 km e qualquer valor maior que isso fornece resultados exorbitantes quando aplicado a estrelas de nêutrons. Já para $\lambda > 1$, as correções muito pequenas na RG não afetam a

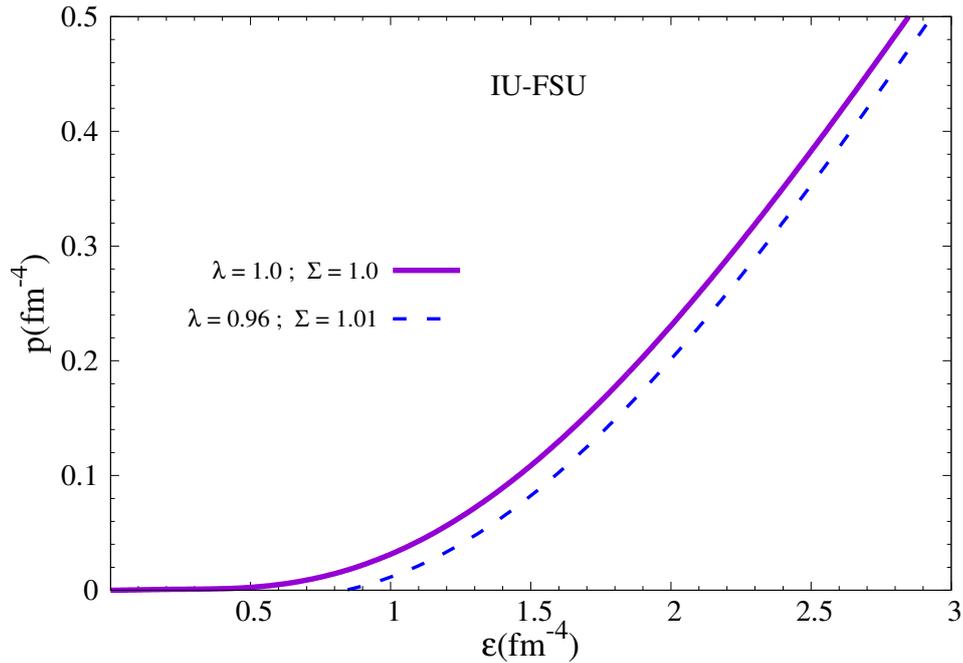


Figura 8 – EoS IU-FSU (linha sólida) e a correspondente EoS RR (linha tracejada) obtida com o parâmetro denominado $RR_{\lambda 4}$ na Tabela 3.

Rainbow	Modelo	TOV	Rainbow _{1,2} (HENDI <i>et al.</i> , 2016)	Rainbow _{1,01}	RR	RR _{Σ1}	RR _{Σ2}
Parâmetros	Σ	1.0	1.2	1.01	1.01	1.05	1.1
	λ	1.0	1.0	1.0	0.999	0.999	0.999
QMC	M_{max}	2.14 M_{\odot}	2.56 M_{\odot}	2.15 M_{\odot}	2.15 M_{\odot}	2.24 M_{\odot}	2.35 M_{\odot}
	$R_{M_{max}}$	11.53 km	13.85 km	11.65 km	11.49 km	11.95 km	12.51 km
	$R_{1.4M_{\odot}}$	13.61 km	16.44 km	13.76 km	13.28 km	13.80 km	14.46 km
		Relatividade Geral			gravidade modificada		
Rastall	Modelo	TOV	Rastall _{1,001} (OLIVEIRA <i>et al.</i> , 2015)	Rastall _{0,999}	RR	RR _{λ1}	RR _{λ2}
Parâmetros	λ	1.0	1.001	0.999	0.999	1.001	1.003
	Σ	1.0	1.0	1.0	1.01	1.01	1.01
QMC	M_{max}	2.14 M_{\odot}	2.14 M_{\odot}	2.13 M_{\odot}	2.15 M_{\odot}	2.16 M_{\odot}	2.16 M_{\odot}
	$R_{M_{max}}$	11.53 km	11.77 km	11.37 km	11.49 km	11.88 km	12.39 km
	$R_{1.4M_{\odot}}$	13.61 km	14.39 km	13.16 km	13.28 km	14.54 km	16.48 km

Tabela 4 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores dos parâmetros λ e Σ correspondentes ao diagrama massa-raio na figura 9.

massa máxima estelar, mas produzem um grande efeito no raio canônico da estrela de nêutrons de $1,4 M_{\odot}$. Este resultado concorda com (OLIVEIRA *et al.*, 2015) que concluiu que, quando confrontados com restrições de estrelas de nêutrons, apenas pequenas correções na RG vindas da teoria de Rastall são permitidas, isto é, da ordem de $\sim 1\%$. Novamente, vimos que, para certas combinações de valores para os parâmetros Σ e λ , a massa máxima aumenta e o raio estelar diminui.

Como verificação final, o modelo $QMC\omega\rho$ também é usado para testar a teoria RR e os resultados são mostrados na figura 10 e na Tabela 5. As conclusões são

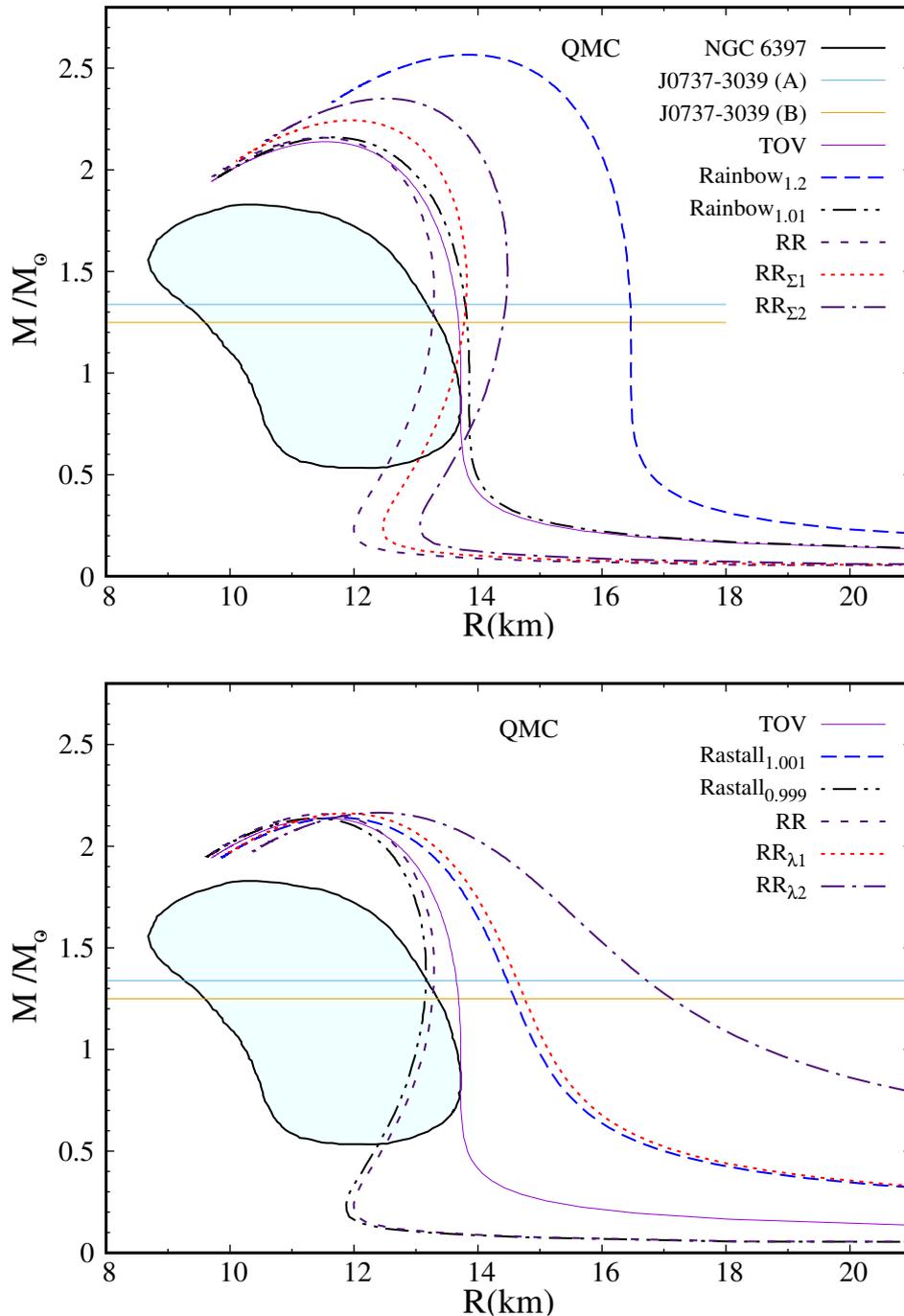


Figura 9 – Relação massa-raio para uma família de estrelas hadrônicas descrita com a EoS QMC. Analisamos os efeitos causados pela variação do parâmetro Rainbow Σ (superior) enquanto mantemos o outro parâmetro fixo e, os efeitos em variar o parâmetro Rastall λ (inferior) enquanto mantínhamos Σ fixo.

novamente as mesmas que as discutidas acima para os modelos IU-FSU e QMC.

De acordo com (ÖZEL; FREIRE, 2016; STEINER *et al.*, 2018), a estrela de nêutrons no binário de raio-X de baixa massa quiescente (LMXB) NGC 6397 (GRINDLAY *et al.*, 2001; GUILLOT; RUTLEDGE; BROWN, 2011; HEINKE *et al.*, 2014), representada como uma área sombreada verde em todas as Figs. fornece uma restrição confiável no

Rainbow	Modelo	TOV	Rainbow _{1,2} (HENDI <i>et al.</i> , 2016)	Rainbow _{1,01}	RR	RR _{Σ1}	RR _{Σ2}
Parâmetros	Σ	1.0	1.2	1.01	1.01	1.05	1.1
	λ	1.0	1.0	1.0	0.999	0.999	0.999
QMC $\omega\rho$	M_{max}	2.07 M_{\odot}	2.48 M_{\odot}	2.09 M_{\odot}	2.09 M_{\odot}	2.17 M_{\odot}	2.27 M_{\odot}
	$R_{M_{max}}$	10.96 km	13.15 km	11.07 km	10.93 km	11.36 km	11.90 km
	$R_{1.4}$	12.83 km	15.55 km	12.99 km	12.56 km	13.07 km	13.68 km
		Relatividade Geral			gravidade modificada		
Rastall	Modelo	TOV	Rastall _{1,001} (OLIVEIRA <i>et al.</i> , 2015)	Rastall _{0,999}	RR	RR _{λ1}	RR _{λ2}
Parâmetros	λ	1.0	1.001	0.999	0.999	1.001	1.003
	Σ	1.0	1.0	1.0	1.01	1.01	1.01
QMC $\omega\rho$	M_{max}	2.07 M_{\odot}	2.07 M_{\odot}	2.06 M_{\odot}	2.09 M_{\odot}	2.09 M_{\odot}	2.09 M_{\odot}
	$R_{M_{max}}$	10.96 km	11.18 km	10.82 km	10.93 km	11.29 km	11.76 km
	$R_{1.4}$	12.83 km	13.52 km	12.43 km	12.56 km	13.67 km	15.32 km

Tabela 5 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores dos parâmetros λ e Σ correspondentes ao diagrama massa-raio na figura 10.

nível de confiança de 68 % sobre a massa e raio das estrelas de nêutrons. Podemos ver claramente que, embora a curva TOV possa apenas reproduzir o limite de estrelas com raios maiores (modelos IU-FSU e QMC $\omega\rho$) ou nenhum (modelo QMC), a região de estrelas com baixas massas e baixos raios podem ser acomodadas por muitas das opções de parâmetros da teoria RR que fizemos e, obviamente, com outras que não são apresentadas.

Outro objeto estelar interessante é o sistema de nêutrons duplos J0737A/B (BURGAY *et al.*, 2003; LYNE *et al.*, 2004), considerado um laboratório muito especial para a física gravitacional (KRAMER *et al.*, 2006) devido a uma combinação de características desejáveis que torna os parâmetros pós-Kepler (PK)⁴ e atraso de Shapiro⁵ fáceis de medir, além do fato de que uma das estrelas no sistema também é um pulsar de rádio ativo, detectável por algum tempo. As massas estelares individuais deste sistema são $1.3381 \pm 0.0007 M_{\odot}$ e $1.2489 \pm 0.0007 M_{\odot}$ e também são mostradas em todas as figuras e, correspondem a raios que variam de 10,94 km a 13,46 km (IU-FSU), de 13,14 km a 14,75 km (QMC) e de 12,44 km a 13,88 km (QMC $\omega\rho$), uma vez excluídas as curvas com raios muito grandes e irrealistas. Uma combinação de métodos, medições e equações da relatividade geral (RG) leva a um diagrama de massa-massa (KRAMER *et al.*, 2006; STEINER *et al.*, 2018), com uma grande área excluída. Além disso, espera-se que todas as curvas PK se cruzem em um único ponto com um par de valores de massa, se a teoria for válida e o diagrama mencionado corrobore a RG. Um

⁴ Parâmetros pós-Kepler referem-se às correções relativísticas para a descrição kepleriana clássica do movimento de um sistema binário, descrevendo, por exemplo, uma mudança temporal no período ou orientação da órbita, ou um atraso de Shapiro adicional (LYNE *et al.*, 2004; KRAMER *et al.*, 2006).

⁵ A presença de objetos massivos causa um atraso no tempo de propagação das ondas eletromagnéticas em relação ao tempo na ausência de curvatura. Previsto por Irwin Shapiro, em 1964 (SHAPIRO, 1964), esse efeito é nomeado atraso de Shapiro.

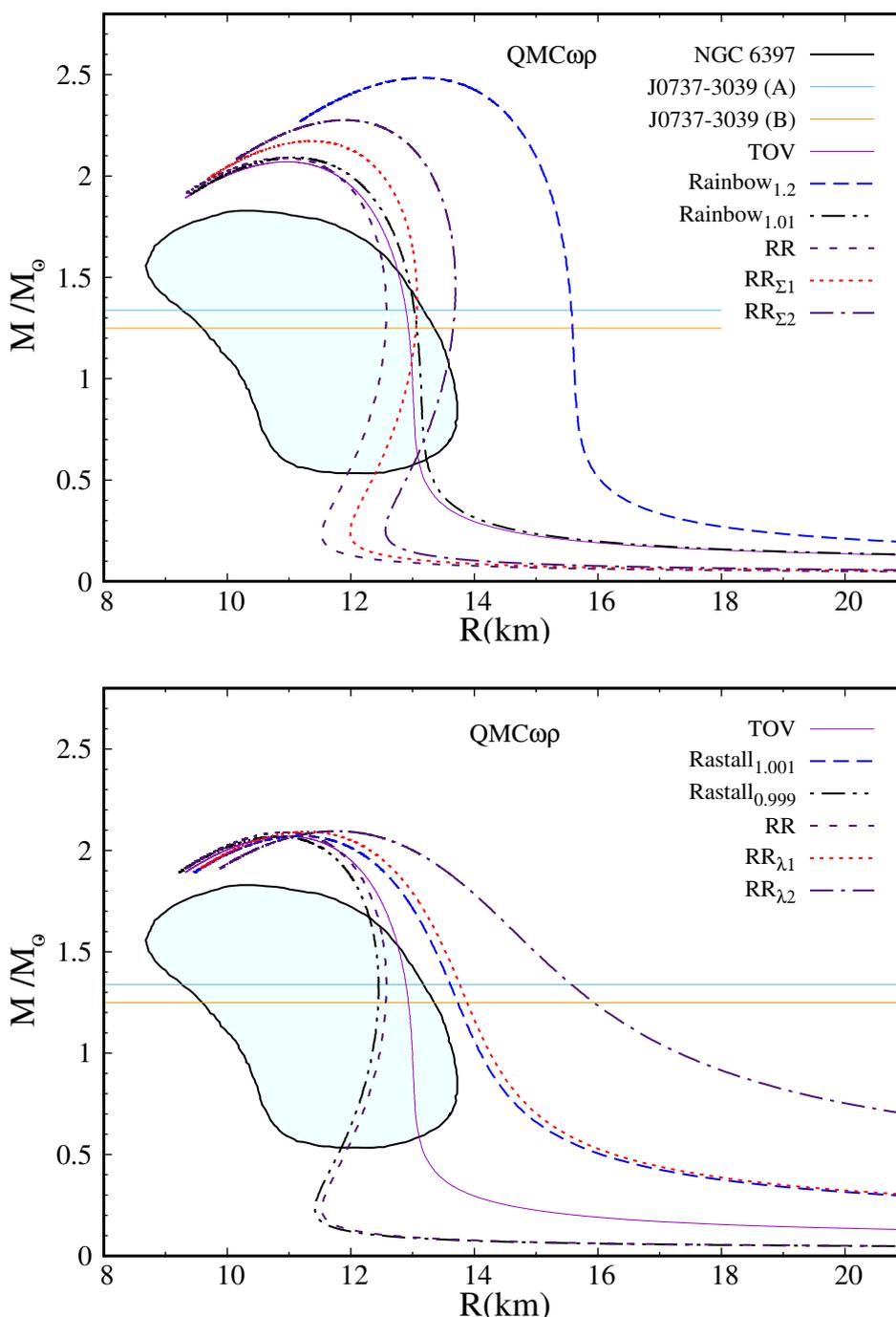


Figura 10 – Relação massa-raio para uma família de estrelas hadrônicas descrita com a EoS QMC $\omega\rho$. Analisamos os efeitos causados pela variação do parâmetro Rainbow Σ (superior) enquanto mantemos o outro parâmetro fixo e, os efeitos em variar o parâmetro Rastall λ (inferior) enquanto mantínhamos Σ fixo.

teste semelhante poderia nos dizer se a teoria RR proposta também é válida e, neste caso, os raios correspondentes às massas individuais no sistema J0737 poderiam ser usados para limitar os valores dos parâmetros λ e Σ .

3.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste Capítulo, combinamos as teorias de gravidade modificada Rastall e Rainbow e mostramos que o efeito da gravidade Rainbow pode ser incorporado nas equações de campo de Rastall considerando uma métrica e uma constante gravitacional dependente da energia da partícula teste (EPT). Consideramos um elemento de linha com simetria esférica, estática e isotrópica e, assumimos que a matéria no interior estelar pode ser descrita pelo tensor energia-momento de um fluido perfeito. Também derivamos aqui na gravidade Rastall-Rainbow (RR) as equações de equilíbrio hidrostático para uma estrela compacta, neste contexto, as equações análogas à TOV.

De modo a testar a influência da teoria de gravidade modificada RR na estrutura estelar, bem como, nos valores de massa máxima e de raio correspondente, três modelos na aproximação relativística de campo médio foram usados, ou seja, IU-FSU, QMC e QMC $\omega\rho$, todos eles já apresentando propriedades macroscópicas não muito distantes dos valores atualmente esperados. Enquanto o IU-FSU reproduz bem o raio da estrela canônica, ele não atinge o valor esperado de massa máxima estelar. Por outro lado, QMC e QMC $\omega\rho$ alcançam o valor de $2.0 M_{\odot}$, porém, os raios são um pouco excessivos.

Verificamos que, enquanto a teoria Rastall sozinha afeta muito pouco a massa estelar máxima, ela aumenta o raio correspondente, como já foi apontado em (OLIVEIRA *et al.*, 2015). Nós também confirmamos que para evitar instabilidades na pressão e conseqüentemente configurações estelares instáveis, apenas valores de λ que correspondem a um desvio de apenas 0.1% da RG são aceitos (OLIVEIRA *et al.*, 2015). No entanto, valores menores que 1 para o parâmetro λ são possíveis, mas o número exato depende do modelo. Já a teoria Rainbow sozinha funciona de tal forma que a massa estelar máxima pode aumentar ou diminuir, dependendo dos valores do parâmetro Σ escolhidos. No entanto, se a massa máxima aumenta, o mesmo acontece com o raio correspondente. Se diminuir, o raio também apresenta valores menores (HENDI *et al.*, 2016).

Verificamos então que, independentemente do modelo considerado, é a combinação de ambas as teorias que permite que a massa máxima aumente ao mesmo tempo que o raio da estrela canônica diminui. Dentro desta nova perspectiva, todos os modelos estudados podem produzir propriedades macroscópicas no intervalo atualmente aceito para uma variedade de parâmetros.

Medições recentes apontam para a existência de estrelas de nêutrons com massas em torno de $2.08 \pm 0.07 M_{\odot}$ PSR J0740+6620 (FONSECA *et al.*, 2021; MILLER *et al.*, 2021). Estas estrelas massivas sendo confirmadas, alguns modelos de campo médio relativístico atualmente aceitos podem ser excluídos se as propriedades macroscópicas forem obtidas com as equações TOV. No entanto, se as equações RR forem usadas, elas ainda podem ser úteis para descrever a estrutura estelar interna, como

pode ser visto nos valores mostrados aqui.

Este trabalho foi publicado na *Physical Review D* (MOTA, Clésio E. *et al.*, 2019). O *paper* encontra-se incluído no Apêndice B.

3.6 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO HIDROSTÁTICO ANISOTRÓPICAS

Nesta seção investigamos o equilíbrio hidrostático estelar de estrelas compactas e anisotrópicas no formalismo da gravidade RR. Neste cenário, um espaço-tempo estático, homogêneo e esfericamente simétrico é descrito pelo elemento de linha dependente da energia, a saber

$$ds^2 = -\frac{B(r)}{\Xi^2(x)} dt^2 + \frac{A(r)}{\Sigma^2(x)} dr^2 + \frac{r^2}{\Sigma^2(x)} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (116)$$

Assumimos que a matéria estelar é modelada como um fluido anisotrópico, sendo o tensor energia-momento (ARBAÑIL; MALHEIRO, 2016; SHARIF; SIDDIQA, 2018):

$$T_{\mu\nu} = p_t g_{\mu\nu} + (p_t + \varepsilon) U_\mu U_\nu + (p_r - p_t) N_\mu N_\nu, \quad (117)$$

onde $p_t(r)$, $\varepsilon(r)$ e $p_r(r)$ são, respectivamente, pressão tangencial ou transversal, densidade de energia e pressão radial do fluido. As quantidades U_μ e N_μ possui as seguintes definições:

$$U^\mu = \left(\frac{\Xi(x)}{\sqrt{B(r)}}, 0, 0, 0 \right), \quad (118)$$

$$N^\mu = \left(0, \frac{\Sigma(x)}{\sqrt{A(r)}}, 0, 0 \right), \quad (119)$$

e satisfazem às condições: $U_\mu U^\mu = -1$, $N_\mu N^\mu = 1$ e $U_\mu N^\mu = 0$.

Agora usando a definição para a métrica dependente de energia dada na equação ((116)) com o tensor energia-momento para um fluido anisotrópico ((117)), calculamos os componentes das equações de campo ((92)) e obtemos:

$$-\frac{B}{r^2 A} + \frac{B}{r^2} + \frac{A'B}{rA^2} = 8\pi GB\bar{\varepsilon}, \quad (120)$$

$$-\frac{A}{r^2} + \frac{B'}{rB} + \frac{1}{r^2} = 8\pi GA\bar{p}_r, \quad (121)$$

$$\begin{aligned} -\frac{B'^2 r^2}{4AB^2} - \frac{A'B'r^2}{4A^2 B} + \frac{B''r^2}{2AB} - \frac{A'r}{2A^2} + \frac{B'r}{2AB} \\ = 8\pi Gr^2 \bar{p}_t, \end{aligned} \quad (122)$$

onde $\bar{\varepsilon}$, \bar{p}_r e \bar{p}_t são respectivamente: densidade de energia efetiva, pressão radial efetiva e pressão tangencial efetiva, definidas como

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\Sigma(x)^2} [\alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 p_r + 2\alpha_2 p_t] , \quad (123)$$

$$\bar{p}_r = \frac{1}{\Sigma(x)^2} [\alpha_2 \varepsilon + \alpha_1 p_r - 2\alpha_2 p_t] , \quad (124)$$

$$\bar{p}_t = \frac{1}{\Sigma(x)^2} [\alpha_2 \varepsilon - \alpha_2 p_r + \alpha_3 p_t] , \quad (125)$$

sendo que

$$\alpha_1 = \frac{1-3\lambda}{2(1-2\lambda)} , \quad \alpha_2 = \frac{1-\lambda}{2(1-2\lambda)} , \quad \alpha_3 = -\frac{\lambda}{1-2\lambda} .$$

As equações de campo aqui obtidas, equações ((120) - (122)), assemelham-se as obtidas em RG para um fluido anisotrópico esfericamente simétrico e estático. A principal diferença é que agora, em vez de pressão e densidade de energia usual, temos as quantidades efetivas equivalentes. Assim, semelhante ao que é feito no caso da RG, podemos definir a função $M(r)$ na seguinte forma:

$$M(r) = \int_0^R 4\pi r'^2 \bar{\varepsilon}(r') dr' . \quad (126)$$

Da equação acima podemos concluir que $M(r)$ é a massa da estrela, e que $r = R$ é o raio estelar. Observe que a massa depende da densidade de energia efetiva $\bar{\varepsilon}$. Assim, como em nossa subseção (3.3.1), concluímos que os parâmetros da RR, λ e Σ , modificam os valores de massa. Além disso, é importante ressaltar que $\bar{\varepsilon}$ agora depende tanto da pressão radial p_r quanto da pressão tangencial p_t . Portanto, para o caso em que $p_r \neq p_t$ os valores de massa também são afetados pela anisotropia. Podemos verificar que quando $p_r = p_t$ recuperamos a definição $\bar{\varepsilon}$ obtida na subseção (3.3.1). Além disso, assumindo $\lambda = 1.0$ e $\Sigma = 1.0$ encontramos $\bar{\varepsilon} = \varepsilon$ para que a definição de massa na RG seja recuperada.

Agora, calculando a lei de conservação modificada para o tensor energia-momento ((113)), obtemos:

$$\bar{p}'_r = -(\bar{p}_r + \bar{\varepsilon}) \frac{B'}{2B} + 2 \frac{\bar{\sigma}}{r} , \quad (127)$$

sendo $\bar{\sigma} \equiv \bar{p}_t - \bar{p}_r$ o fator anisotrópico. Reorganizando a equação ((121)) e empregando a relação

$$A(r) = \left[1 - \frac{2GM(r)}{r} \right]^{-1} , \quad (128)$$

encontramos

$$\frac{B'}{2B} = \frac{GM}{r^2} \left[1 + \frac{4\pi r^3 \bar{p}_r}{M} \right] \left[1 - \frac{2GM}{r} \right]^{-1} . \quad (129)$$

Neste estágio, substituindo a equação acima na equação ((127)) de modo a eliminar a função B , encontramos:

$$\bar{\rho}'_r = -\frac{GM\bar{\varepsilon}}{r^2} \left[1 + \frac{\bar{\rho}_r}{\bar{\varepsilon}} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 \bar{\rho}_r}{M} \right] \left[1 - \frac{2GM}{r} \right]^{-1} + \frac{2}{r} \bar{\sigma}. \quad (130)$$

As equações ((130)) e ((126)) descrevem o equilíbrio hidrostático no contexto da gravidade RR modificada pela inclusão do fator anisotrópico $\bar{\sigma} = \bar{\rho}_t - \bar{\rho}_r$. Conforme discutido em (SILVA *et al.*, 2015), encontrar a forma funcional para $\sigma \equiv \rho_t - \rho_r$ depende do conhecimento das relações microscópicas existentes entre as quantidades ρ_r , ρ_t e ε . Infelizmente, não temos uma teoria microscópica que seja boa o suficiente para encontrar a forma explícita dessas relações. No entanto, efeitos anisotrópicos podem ser inseridos neste contexto pela introdução de algumas formas funcionais para σ que descrevem uma transição suave entre os regimes isotrópico e anisotrópico. Portanto, consideramos a seguir um perfil anisotrópico (HORVAT; ILIJIC; MARUNOVIC, 2011a) dado por:

$$\sigma = \beta \rho_r (1 - e^{-\lambda}), \quad (131)$$

onde β é um parâmetro livre que controla o grau de anisotropia no sistema. A expressão $\bar{\sigma} = \sigma/\Sigma(x)^2$ na equação ((130)) reflete os efeitos da anisotropia. A função métrica $e^{-\lambda}$ na equação ((131)) é identificada como:

$$e^{-\lambda} \equiv A(r)^{-1} = \left[1 - \frac{2GM(r)}{r} \right]. \quad (132)$$

Neste estágio, substituindo as quantidades ((123) - (125)) e ((131)) nas equações ((130)) e ((126)), obtemos

$$M(r) = \int_0^R \frac{2\pi r' \left((\lambda - 1)(4\beta M(r') + 3r')\rho_r(r') + r'(3\lambda - 1)\varepsilon(r') \right)}{(2\lambda - 1)\Sigma^2} dr', \quad (133)$$

e

$$\begin{aligned} \rho'_r = 2 \left(4\beta(1 - 3\lambda)\Sigma^2 M(r)^2 \rho_r - 2\pi r^4 (\rho_r + \varepsilon(r)) ((1 + \lambda)\rho_r + (-1 + \lambda)\varepsilon(r)) \right. \\ \left. + 2r^2 \beta(\lambda - 1)\Sigma^2 \rho_r M(r)' + rM(r) \left(8\pi r^2 \beta(\lambda - 1)\rho_r^2 + (1 - 2\lambda)\Sigma^2 \varepsilon(r) \right. \right. \\ \left. \left. + \rho_r \left(8\pi r^2 \beta(\lambda - 1)\varepsilon(r) + \Sigma^2(1 - 2\beta - 2\lambda + 6\beta\lambda - 4\beta(\lambda - 1)M(r)') \right) \right) \right) / \\ \left(r\Sigma^2(r - 2M(r)) \left(r \left((\lambda - 1) \frac{d\varepsilon(r)}{d\rho(r)} + \lambda + 1 \right) - 4\beta(\lambda - 1)M(r) \right) \right). \end{aligned} \quad (134)$$

Essas equações nos fornecem informações sobre o equilíbrio hidrostático de estrelas compactas anisotrópicas no formalismo da gravidade RR. Assumindo $\lambda = 1.0$, $\Sigma = 1.0$ encontramos $\bar{\varepsilon} = \varepsilon$, $\bar{\rho}_r = \rho_r$ e $\bar{\rho}_t = \rho_t$ para que as equações TOV usuais com efeitos de anisotropia sejam recuperadas. Na próxima seção, usaremos as equações ((133)) e ((134)) para estudar o equilíbrio gravitacional de estrelas de nêutrons e de quarks.

3.6.1 Resultados e Discussões

Agora apresentamos nossos resultados sobre as propriedades macroscópicas de estrelas compactas anisotrópicas, como massa e raio, no contexto da gravidade RR. Para este objetivo, é necessário usar como ingrediente principal uma EoS apropriada para modelar a matéria nuclear contida na estrela. Para tanto, utilizamos aqui dois modelos diferentes:

- O modelo de sacola do MIT (CHODOS *et al.*, 1974) para descrever matéria de quarks (ou estranha). Para tanto, utilizamos um valor para a *constante da Bag* (B) igual a $B^{1/4} = 147$ MeV, que satisfaz a janela de estabilidade para este modelo conforme os resultados mostrados em (TORRES, J. R.; MENEZES, D. P., 2013).
- A parametrização IU-FSU proposta em (FATTOYEV *et al.*, 2010) para descrever estrelas hadrônicas, sendo um modelo originado da teoria de campo médio relativística ou RMFA (de *Relativistic Mean-Field Approximation*). Além de satisfazer as restrições investigadas no (DUTRA, M. *et al.*, 2014; DUTRA, Mariana; LOURENÇO; MENEZES, Débora P., 2016), o modelo IU-FSU também reproduz satisfatoriamente a restrição astrofísica recente da observação de GW170817 (LOURENÇO *et al.*, 2019). Além disso, utilizamos a EoS BPS (BAYM; PETHICK; SUTHERLAND, 1971) completa para descrever a crosta externa da estrela, embora saibamos que existem prescrições mais sofisticadas na literatura (PEARSON; CHAMEL; POTEKHIN, 2020; FANTINA *et al.*, 2020).

Em seguida, após a escolha de uma EoS, procederemos ao ajuste do perfil anisotrópico conforme a expressão na equação ((131)). Este perfil já foi utilizado em trabalhos recentes na RG, por exemplo, em (ARBAÑIL; MALHEIRO, 2016). A escolha dos parâmetros da gravidade RR é baseada nos valores utilizados na seção (3.4) ou consequentemente em (MOTA, Clésio E. *et al.*, 2019). Nossos resultados são discutidos nos próximos parágrafos.

Neste estágio, gostaríamos de comentar que em todos os nossos modelos construídos usando as nossas EoSs, MIT e a parametrização IU-FSU, os efeitos anisotrópicos desaparecem na superfície estelar, a saber $\sigma(R) = 0$. Esta é uma consequência direta do perfil anisotrópico. Além disso, quando a pressão se torna zero na superfície da estrela, a pressão tangencial atinge automaticamente seu valor zero. Este é um resultado esperado sendo verificado em nossa integração numérica.

Nas figuras 11 e 12, para as EoSs de matéria de quarks e hadrônica, respectivamente, fixamos uma densidade central ε_0 e calculamos a pressão radial normalizada p_r e a pressão transversal p_t , ambas em função da coordenada radial r . Para tanto, selecionamos cinco valores diferentes do parâmetro β e três valores diferentes para

cada um dos parâmetros λ e Σ . Podemos observar que nos casos em análise, tanto os perfis de pressão radial quanto os de pressão transversal em uma estrela são afetados devido à anisotropia. Na verdade, podemos notar que para um raio fixo na estrela, a pressão radial e a pressão transversal aumentam (diminuem) com o incremento (diminuição) de β .

Como podemos ver, para um valor maior do parâmetro β , em particular $\beta = +1,0; +2,0$, existem soluções para as quais tanto o comportamento de ρ_r como de ρ_t não é monotônico em função da coordenada radial, ao invés, essas quantidades apresentam um máximo nas estrelas. Por outro lado, à medida que variamos os parâmetros que controlam os efeitos da gravidade RR, as quantidades ρ_r e ρ_t desaparecem em diferentes valores da coordenada radial.

Posteriormente, investigamos se os efeitos da anisotropia na gravidade RR poderia ser de relevância astrofísica, variando o parâmetro da anisotropia β na faixa de valores positivos e negativos entre ± 2.0 . Como pode ser observado nas figuras de 15 a 18 os valores negativos do parâmetro β diminuem drasticamente a massa máxima da estrela. Estes são apresentados nas Tabelas 7 e 9 apenas para fins de comparação. Em contraste, os valores positivos de β fornecem os melhores resultados para a relação massa-raio de uma família de estrelas de nêutrons, conforme as modernas restrições astrofísicas, como a estrela de nêutrons no quiescente LMXB NGC 6397 (ÖZEL; FREIRE, 2016; STEINER *et al.*, 2018), o pulsar de milissegundos extremamente massivo PSR J0740 + 6620 (MILLER *et al.*, 2021) e os resultados inferidos a partir do PREX-2 (REED *et al.*, 2021). Isso motivou uma maior exploração dos valores positivos.

Antes de discutir os resultados de relevância astrofísica, gostaríamos de comentar sobre os efeitos da gravidade RR e anisotropia na EoS, e a diferença entre as pressões radial e tangencial. Na figura 13, podemos observar as pressões radial e transversal, em função da densidade bariônica. Elas variam de cerca de $0,2 \text{ fm}^{-4}$ em densidades bariônicas de 1 fm^{-3} e $\beta = \pm 0,5$ a $3,5 \text{ fm}^{-4}$ em densidades bariônicas de $2,0 \text{ fm}^{-3}$ e $\beta = \pm 2,0$. Vamos comparar nossos resultados com os mostrados em (PAULUCCI *et al.*, 2011) e (DEXHEIMER; MENEZES, D P; STRICKLAND, 2013). Para $\mu_B = 500 \text{ MeV}$, podemos ver que para um campo magnético da ordem de 10^{18} G , a diferença entre as pressões radial e transversal é desprezível. Em contrapartida, essa diferença aumenta drasticamente para um campo magnético igual a 10^{19} G em (PAULUCCI *et al.*, 2011). O mesmo comportamento qualitativo é mostrado em (DEXHEIMER; MENEZES, D P; STRICKLAND, 2013). Para $\mu_B = 1200$ ($\mu_B = 1500$) MeV, a diferença chega a $\sim 3,5$ ($3,0$) fm^{-4} para um campo magnético igual a $3 \times 10^{18} \text{ G}$ e cerca de 20 (25) fm^{-4} para um campo magnético em torno de 10^{19} G . Portanto, é razoável dizer que os efeitos anisotrópicos que estamos analisando aqui são da mesma ordem de magnitude daqueles obtidos com um campo magnético não muito

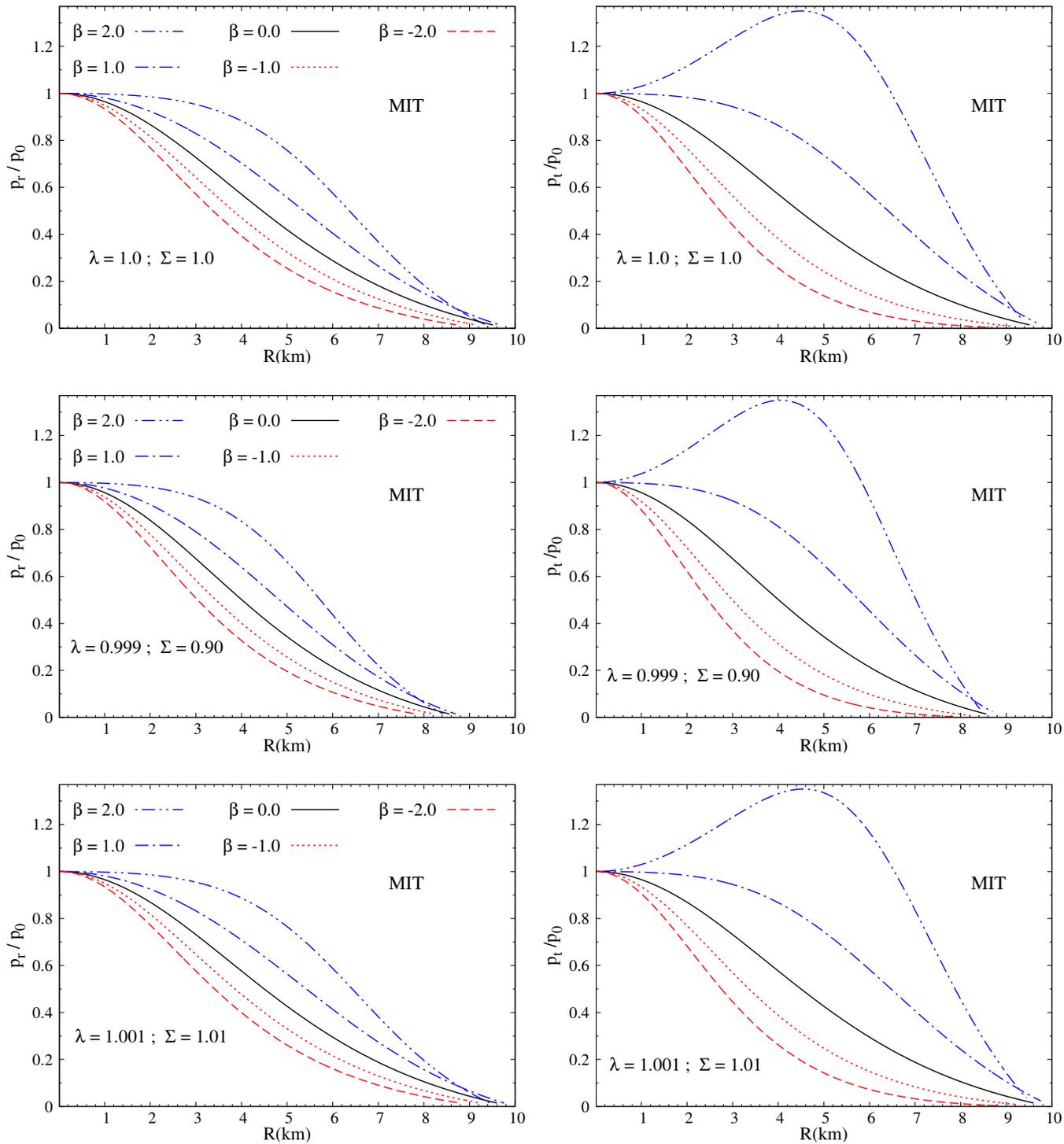


Figura 11 – A pressão radial p_r (esquerda) e a pressão transversal p_t (direita) como funções da coordenada radial r para o modelo do MIT, normalizado para o valor de p_r no centro da estrela p_0 .

maior que 10^{18} G.

Quanto às aplicações astrofísicas, discutimos e comparamos nossos resultados com observações e experimentos recentes. Como já vimos, a área sombreada em verde em todas as figuras para a massa e raio é a estrela de nêutrons no binário de

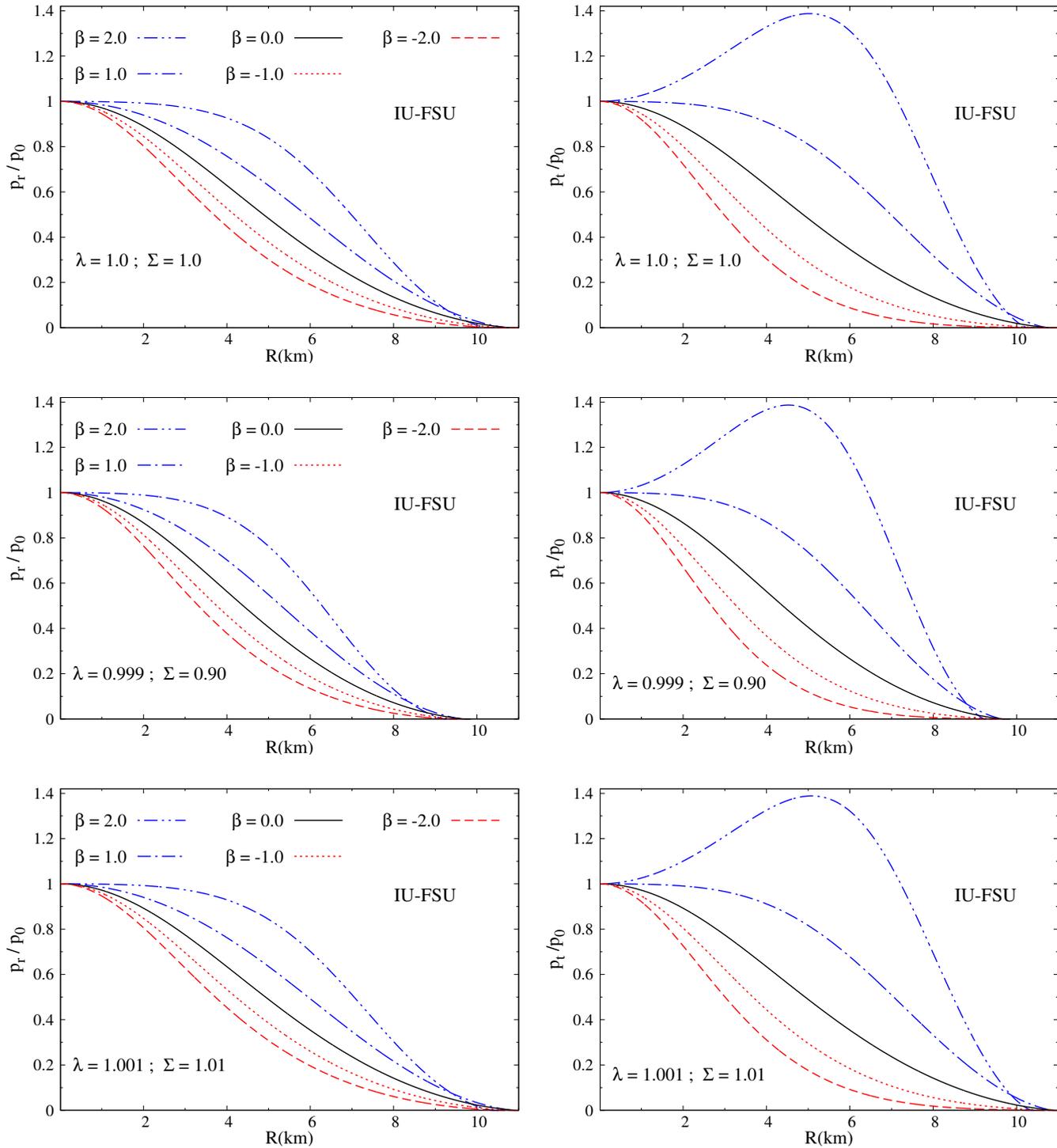


Figura 12 – A pressão radial p_r (esquerda) e a pressão transversal p_t (direita) como funções da coordenada radial r para o modelo IU-FSU, normalizado para o valor de p_r no centro da estrela p_0 .

raio-X de baixa massa quiescente (LMXB) NGC 6397 (ÖZEL; FREIRE, 2016; STEINER *et al.*, 2018). Da mesma forma, os pulsares de milissegundos estão entre os objetos astrofísicos mais úteis do Universo para testar a física fundamental, porque impõem algumas das restrições mais rigorosas à física nuclear de alta densidade no interior

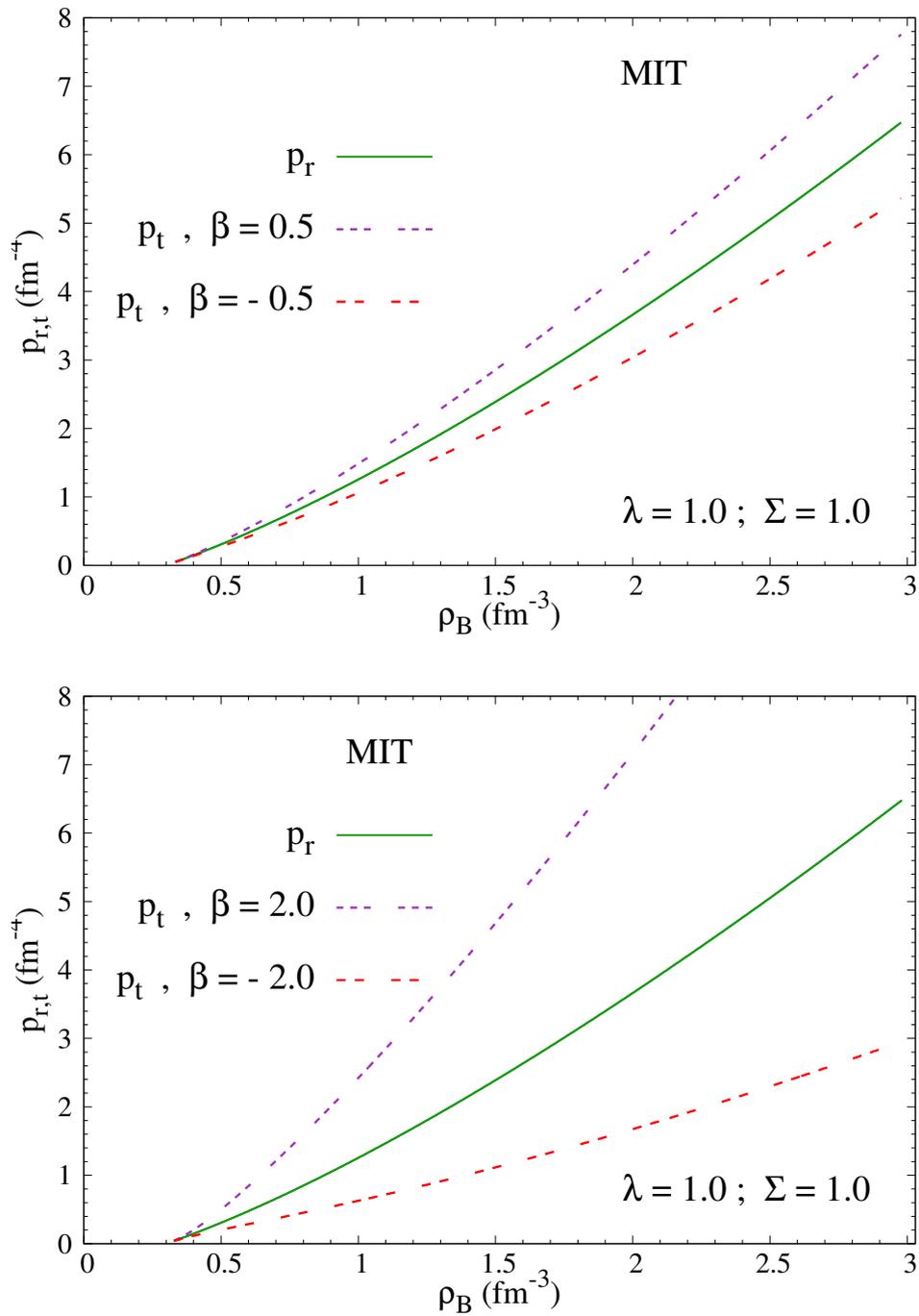


Figura 13 – Pressões radial e tangencial para diferentes valores do parâmetro β .

estelar (CROMARTIE *et al.*, 2019). Recentemente, a missão *Neutron Star Interior Composition Explorer (NICER)* relatou observações de pulsares para estrelas de nêutrons canônica ($1,4 M_\odot$) e massiva ($2,0 M_\odot$). Essas medidas fornecem uma restrição de $11,80 \text{ km} \leq R_{1,4} \leq 13,10 \text{ km}$ para $1,4 M_\odot$ PSR J0030+0451 (MILLER *et al.*, 2019) (segmento de linha horizontal na cor vermelha) e $11,60 \text{ km} \leq R \leq 13,10 \text{ km}$ para uma estrela de nêutrons com massa na faixa $2,01 M_\odot \leq M \leq 2,15 M_\odot$ PSR J0740+6620 (MILLER *et al.*, 2021) (região retangular na cor laranja). Do ponto de vista da física

Rainbow	Parâmetros	$R_{1,4}$	Rastall	Parâmetros	$R_{1,4}$
TOV	$\lambda = \Sigma = 1.0$	9.88km	TOV	$\lambda = \Sigma = 1.0$	9.88km
RR	$\Sigma = 1.01$; $\lambda = 0.999$	9.97km	RR	$\lambda = 0.999$; $\Sigma = 1.01$	9.97km
RR $_{\Sigma 1}$	$\Sigma = 1.05$; $\lambda = 0.999$	10.30km	RR $_{\lambda 1}$	$\lambda = 1.003$; $\Sigma = 1.01$	9.97km
RR $_{\Sigma 2}$	$\Sigma = 0.95$; $\lambda = 0.999$	9.44km	RR $_{\lambda 2}$	$\lambda = 0.97$; $\Sigma = 1.01$	9.97km
RR $_{\Sigma 3}$	$\Sigma = 0.90$; $\lambda = 0.999$	8.96km	RR $_{\lambda 3}$	$\lambda = 0.92$; $\Sigma = 1.01$	9.96km

Tabela 6 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores dos parâmetros λ e Σ correspondentes ao diagrama massa-raio na figura 14.

Relatividade Geral	Parâmetros	$R_{1,4}$
TOV	$\beta = 0.0$	9.88km
TOV $_{\beta 1}$	$\beta = 0.5$	10.02km
TOV $_{\beta 2}$	$\beta = 1.0$	10.14km
TOV $_{\beta 3}$	$\beta = 2.0$	10.29km
TOV $_{\beta 4}$	$\beta = -0.5$	9.67km

Tabela 7 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores do parâmetro β correspondente ao diagrama massa-raio na figura 15.

nuclear, os autores da Ref. (REED *et al.*, 2021) usaram a medição recente da pele de nêutrons em ^{208}Pb pelo PREX-2 para restringir a dependência da densidade da energia de simetria da EoS. Notavelmente, pode-se conectar essa restrição às previsões de raio de estrela de nêutrons. Na Ref. (REED *et al.*, 2021) a conexão de experimentos terrestres com observações astrofísicas leva a uma previsão do raio do canônico $1,4 M_{\odot}$ de $13,25 \text{ km} \lesssim R_{1,4} \lesssim 14,26 \text{ km}$. Confrontamos nossos resultados com essa restrição usando um segmento de linha horizontal na cor verde. Anteriormente, duas estrelas massivas haviam sido descobertas em 2010 e 2013, a saber, PSR J1614+2230 (DEMOREST *et al.*, 2010) com massa $1,97 \pm 0,04 M_{\odot}$ (linha horizontal na cor azul) e PSR J0348+0432 (ANTONIADIS *et al.*, 2013) com massa $2,01 \pm 0,04 M_{\odot}$ (linha horizontal na cor rosa). Nas próximas linhas, mostramos como nossos resultados se enquadram nas janelas estabelecidas pelas restrições observacionais discutidas anteriormente.

A princípio, para ficar claro, fizemos gráficos para as soluções TOV padrão correspondente a RG, que podem ser obtidas usando $\Sigma = 1.0$, $\lambda = 1.0$ e $\beta = 0$. Esses gráficos são representados pelas linhas contínuas roxas nas figuras 9 a 18. Também mostramos os valores dos raios correspondentes às estrelas canônicas ($1,4M_{\odot}$), calculados para todos os conjuntos de parâmetros e listados nas Tabelas de 6 a 10.

A seguir discutimos nossos resultados para o caso de estrelas de quarks. Na figura 9 e Tabela 6 mostramos apenas os efeitos da gravidade RR (ou seja, ignoramos

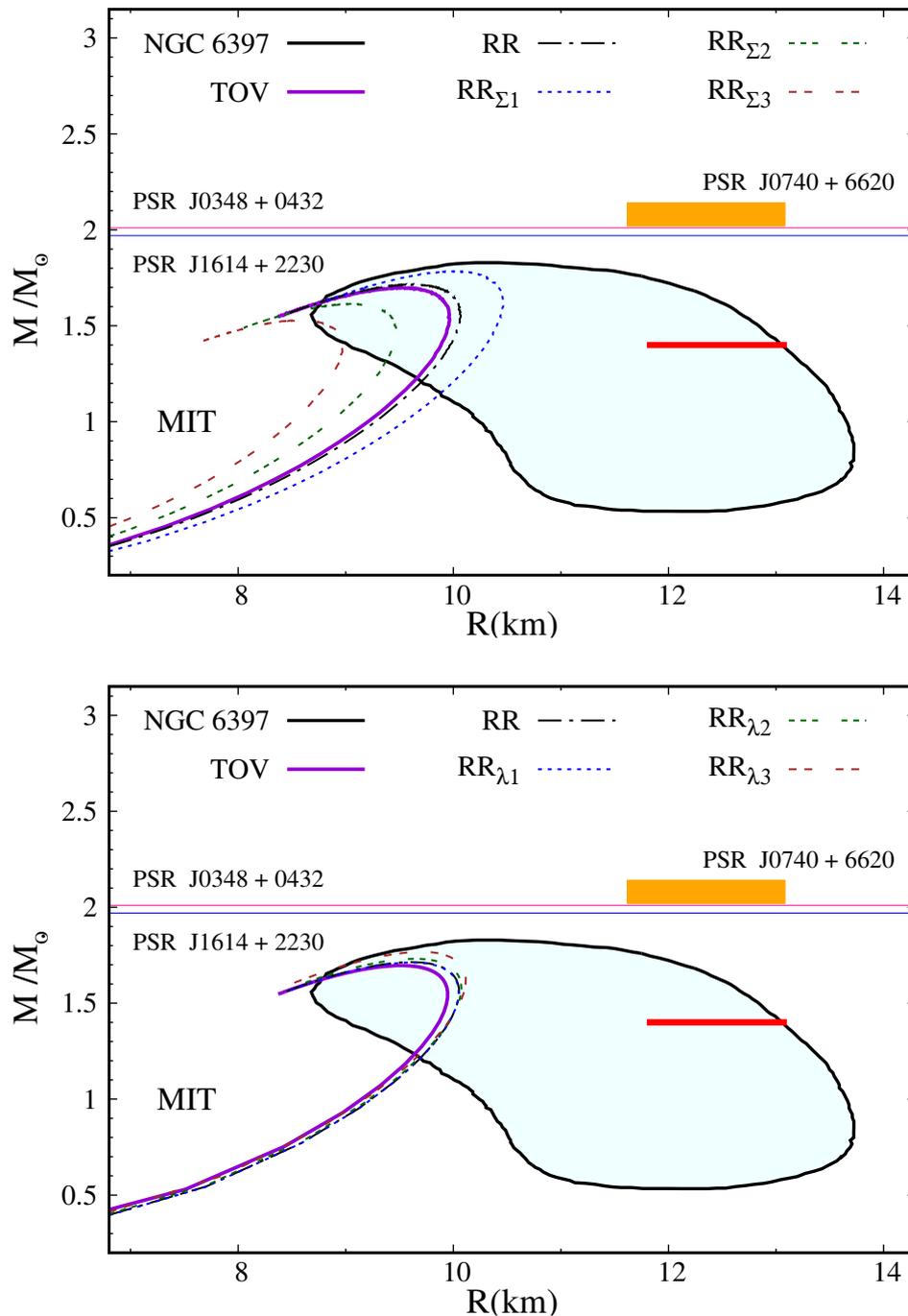


Figura 14 – Relação massa-raio para uma família de estrelas de quarks descritas com a EoS MIT. Analisamos os efeitos causados pela variação do parâmetro Rainbow Σ (acima) enquanto mantemos o outro parâmetro fixo e os efeitos da variação do parâmetro Rastall λ (abaixo) enquanto mantemos Σ fixo. $\beta = 0$ em ambas as figuras. O segmento de linha vermelha e a região retangular laranja correspondem respectivamente à faixa de raio para $1,4M_{\odot}$ PSR J0030 + 0451 e $2,08 \pm 0,07M_{\odot}$ PSR J0740 + 6620. Da mesma forma, as linhas horizontais azul e rosa representam, respectivamente, as medidas de massa para PSR J1614 + 2230 e PSR J0348 + 0432. A curva roxa são soluções de estrelas para a TOV em RG.

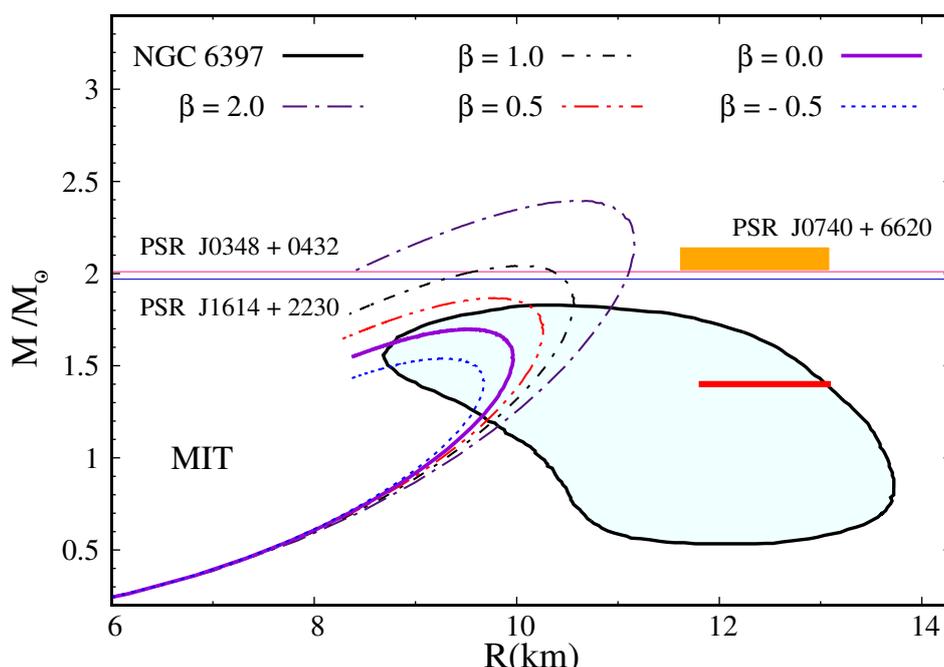


Figura 15 – Relação massa-raio para uma família de estrelas de quarks descritas com a EoS MIT. Analisamos os efeitos causados pela variação do parâmetro β . O segmento de linha vermelha e a região retangular laranja correspondem respectivamente à faixa de raio para $1,4M_{\odot}$ PSR J0030 + 0451 e $2,08 \pm 0,07M_{\odot}$ PSR J0740 + 6620. Da mesma forma, as linhas horizontais azul e rosa representam, respectivamente, as medidas de massa para PSR J1614 + 2230 e PSR J0348 + 0432. A curva roxa são soluções de estrelas para a TOV em RG.

os efeitos anisotrópicos) nas propriedades de estrela de quarks obtidas com a EoS MIT. Como podemos ver, o parâmetro associado à gravidade Rainbow tem um efeito mais forte sobre os valores da massa e do raio da estrela de quarks quando comparado com o efeito produzido pelo parâmetro da gravidade Rastall. Em contrapartida, quando consideramos apenas a RG e estudamos o efeito da anisotropia, é observado na figura 15 e na Tabela 7 que o raio de uma estrela de quarks anisotrópica aumenta com o parâmetro anisotrópico β . Finalizando, exploramos os efeitos combinados de todos os parâmetros. Podemos notar que o raio de uma estrela de quarks anisotrópica no contexto da gravidade RR aumenta quando o parâmetro β aumenta, como podemos observar na figura 16 e Tabela 8 para valores fixos de λ (esquerda) e Σ (direita). Como podemos ver, as restrições impostas pelos resultados PSR J0030 + 0451 e PSR J0740 + 6620 não podem ser descritas por este modelo, embora seja possível descrever o objeto astrofísico NGC 6397, o que já era possível com as equações TOV usuais sem efeitos de anisotropia usando o modelo do MIT.

Por outro lado, as restrições impostas pelos objetos massivos PSR J1614+2230 e PSR J0348+0432 não podem ser descritas por estrelas de quarks no contexto da

Rainbow	Parâmetros	$R_{1,4}$	Rastall	Parâmetros	$R_{1,4}$
TOV	$\lambda = \Sigma = 1.0 ; \beta = 0.0$	9.88km	TOV	$\lambda = \Sigma = 1.0 ; \beta = 0.0$	9.88km
TOV$_{\beta}$	$\lambda = \Sigma = 1.0 ; \beta = 1.0$	12.77km	TOV$_{\beta}$	$\lambda = \Sigma = 1.0 ; \beta = 1.0$	12.77km
RR	$\Sigma = 1.01 ; \lambda = 0.999 ; \beta = 0.0$	9.97km	RR	$\lambda = 0.999 ; \Sigma = 1.01 ; \beta = 0.0$	9.97km
RR$_{\beta}$	$\Sigma = 1.01 ; \lambda = 0.999 ; \beta = 1.0$	10.21km	RR$_{\beta}$	$\lambda = 0.999 ; \Sigma = 1.01 ; \beta = 1.0$	10.21km
RR$_{\beta \Sigma 1}$	$\Sigma = 1.05 ; \lambda = 0.999 ; \beta = 1.0$	10.52km	RR$_{\beta \lambda 1}$	$\lambda = 1.003 ; \Sigma = 1.01 ; \beta = 1.0$	10.21km
RR$_{\beta \Sigma 2}$	$\Sigma = 0.95 ; \lambda = 0.999 ; \beta = 1.0$	9.74km	RR$_{\beta \lambda 2}$	$\lambda = 0.97 ; \Sigma = 1.01 ; \beta = 1.0$	10.21km
RR$_{\beta \Sigma 3}$	$\Sigma = 0.90 ; \lambda = 0.999 ; \beta = 1.0$	9.32km	RR$_{\beta \lambda 3}$	$\lambda = 0.92 ; \Sigma = 1.01 ; \beta = 1.0$	10.19km

Tabela 8 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores dos parâmetros λ e Σ correspondentes ao diagrama massa-raio na figura 16.

gravidade RR, figura 9. Em contrapartida, como podemos observar na figura 16, as estrelas de quarks anisotrópicas na teoria RR podem ser acomodadas dentro dessas restrições astrofísicas por muitas das escolhas de parâmetros RR e β que fizemos, o que já era possível em RG com efeitos de anisotropia, figura 15.

Após analisarmos estrelas de quarks, estudamos os efeitos da gravidade RR e da anisotropia em estrelas hadrônicas modeladas pela EoS IU-FSU. Em primeiro lugar, no contexto da RG, investigamos os efeitos da anisotropia (isto é, ignoramos os efeitos da gravidade RR) em estrelas hadrônicas, conforme apresentado na Tabela 9 e figura 17. A EoS IU-FSU produz uma massa máxima ligeiramente menor que $2,0 M_{\odot}$ e o raio correspondente à estrela de $1,4 M_{\odot}$ satisfaz as restrições impostas pela observação do evento GW170817. Como se sabe, este evento sugere que o raio de uma estrela de nêutrons deve estar no intervalo 10,5 - 13,4 km (ABBOTT, B. P.; AL., 2017). Da Tabela 9 e figura 17 é possível ver que o aumento do parâmetro anisotrópico β produz um aumento tanto na massa quanto no raio da estrela hadrônica. Nossos testes indicam que os resultados são extremamente sensíveis à variação do parâmetro β e, para satisfazer as restrições astrofísicas de massa e raio, restringimos este parâmetro a valores em torno de $\beta = +2,0$.

Como análise final, estudamos o efeito combinado da teoria RR e da anisotropia na relação massa-raio das estrelas de nêutrons. Os resultados são mostrados na Tabela 10 e na figura 18. A teoria de Rastall dificilmente afeta a massa estelar máxima e aumenta drasticamente o raio correspondente. Por outro lado, a teoria Rainbow aumenta tanto a massa quanto o raio, dependendo dos valores escolhidos (MOTA, Clésio E. *et al.*, 2019). Observe na figura 18 que, com alguns parâmetros adequados da teoria RR, a implementação da anisotropia permite obter uma massa máxima maior do que os resultados obtidos em (MOTA, Clésio E. *et al.*, 2019). Podemos então notar que a combinação de ambas as teorias (Rastall e Rainbow) mais a introdução da

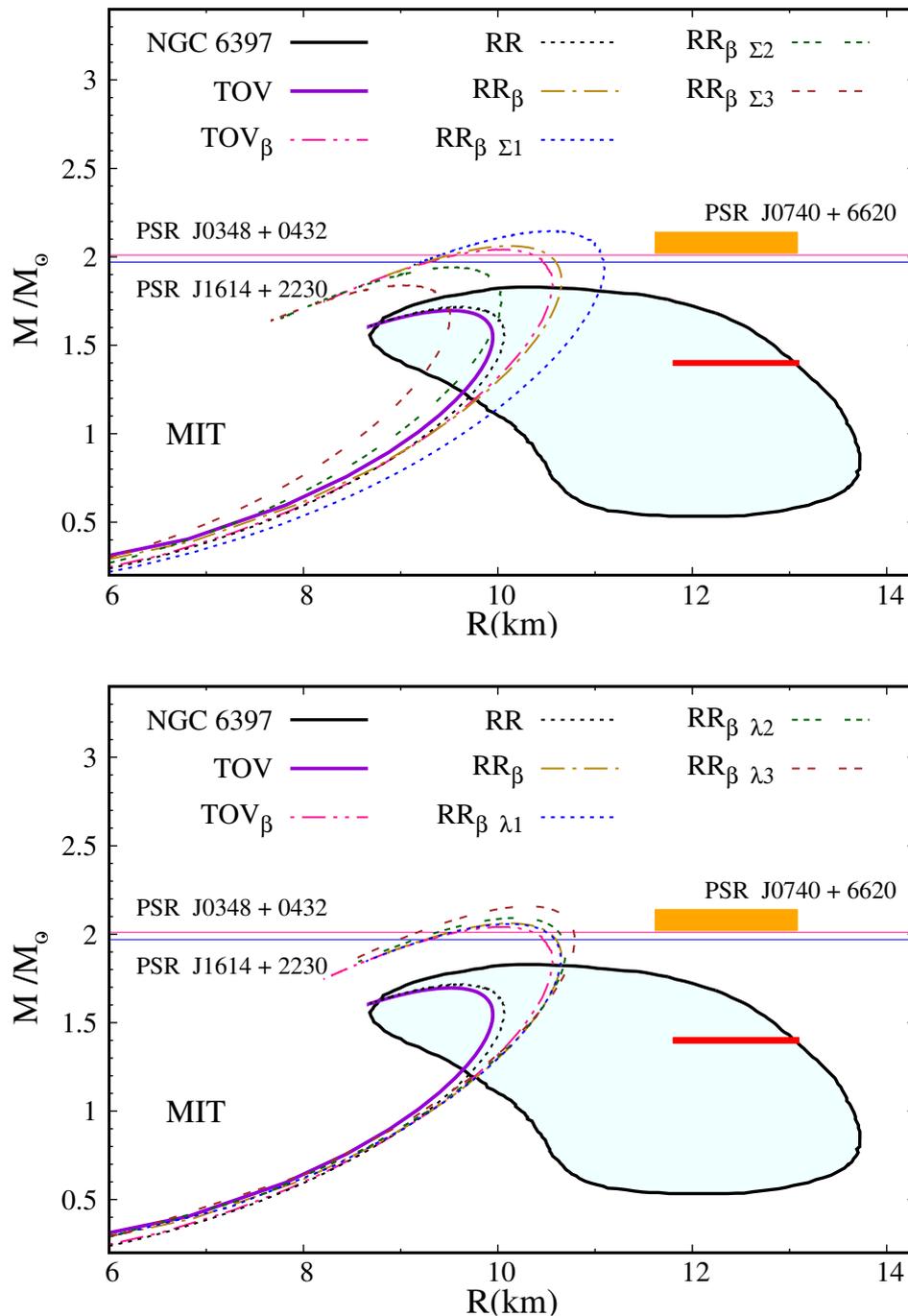


Figura 16 – Relação massa-raio para uma família de estrela de quarks anisotrópicas descritas com a EoS MIT. Analisamos os efeitos causados pela variação do parâmetro Rainbow Σ (acima), enquanto mantemos o outro parâmetro fixo, e os efeitos de variar o parâmetro Rastall λ (abaixo) enquanto mantém Σ fixo. O segmento de linha vermelha e a região retangular laranja correspondem respectivamente à faixa de raio para $1,4M_{\odot}$ PSR J0030 + 0451 e $2,08 \pm 0,07M_{\odot}$ PSR J0740 + 6620. Da mesma forma, as linhas horizontais azul e rosa representam, respectivamente, as medidas de massa para PSR J1614 + 2230 e PSR J0348 + 0432. A curva roxa são soluções de estrelas para a TOV em RG.

Relatividade Geral	Parâmetros	$R_{1,4}$
TOV	$\beta = 0.0$	12.44km
TOV_{β_1}	$\beta = 0.5$	12.62km
TOV_{β_2}	$\beta = 1.0$	12.77km
TOV_{β_3}	$\beta = 2.0$	13.04km
TOV_{β_4}	$\beta = -0.5$	12.22km

Tabela 9 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores do parâmetro β correspondente ao diagrama massa-raio na figura 17.

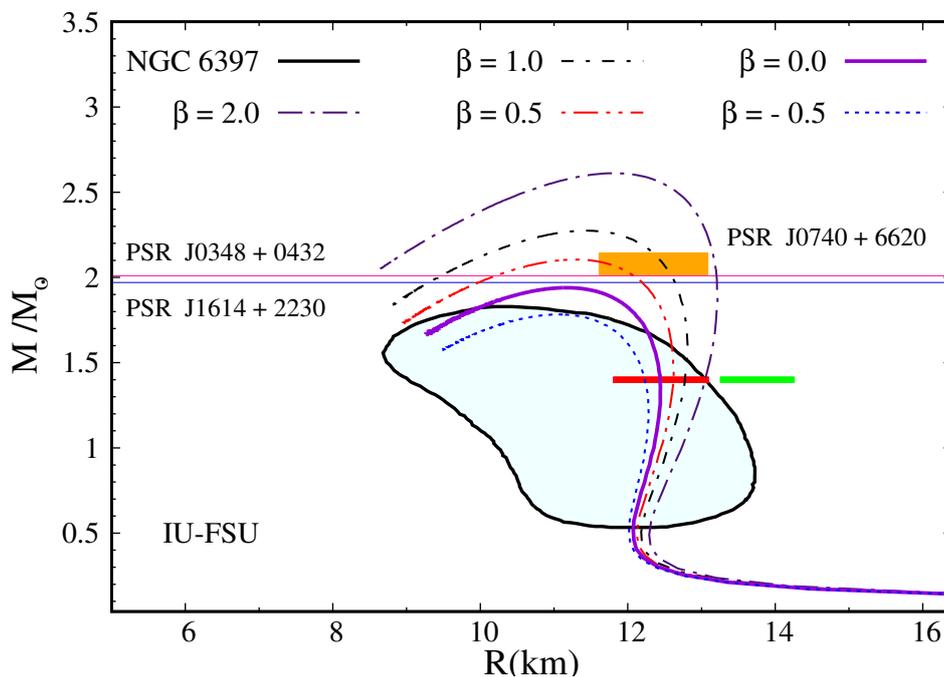


Figura 17 – Relação massa-raio para uma família de estrelas hadrônicas descritas com a EoS IU-FSU. Analisamos os efeitos causados pela variação do parâmetro anisotrópico β . O segmento de linha vermelha e verde correspondem respectivamente à faixa de raio de $1,4M_{\odot}$ para PSR J0030 + 0451 e PREX-2. A região retangular laranja representa o intervalo de estimativas de raio para $2,08 \pm 0,07M_{\odot}$ PSR J0740 + 6620. Da mesma forma, as linhas horizontais azul e rosa representam, respectivamente, as medidas de massa para PSR J1614 + 2230 e PSR J0348 + 0432. A curva roxa são soluções de estrelas para a TOV em RG.

anisotropia permite que a massa máxima aumente substancialmente e satisfaça as modernas observações astrofísicas, embora seja claro que elas ainda precisam ser refinadas com mais dados, principalmente no que diz respeito ao raio das estrelas canônicas.

Rainbow	Parâmetros	$R_{1,4}$	Rastall	Parâmetros	$R_{1,4}$
TOV	$\lambda = \Sigma = 1.0 ; \beta = 0.0$	12.44km	TOV	$\lambda = \Sigma = 1.0 ; \beta = 0.0$	12.44km
TOV$_{\beta}$	$\lambda = \Sigma = 1.0 ; \beta = 1.0$	12.77km	TOV$_{\beta}$	$\lambda = \Sigma = 1.0 ; \beta = 1.0$	12.77km
RR	$\Sigma = 1.01 ; \lambda = 0.999 ; \beta = 0.0$	12.03km	RR	$\lambda = 0.999 ; \Sigma = 1.01 ; \beta = 0.0$	12.03km
RR$_{\beta}$	$\Sigma = 1.01 ; \lambda = 0.999 ; \beta = 1.0$	12.33km	RR$_{\beta}$	$\lambda = 0.999 ; \Sigma = 1.01 ; \beta = 1.0$	12.33km
RR$_{\beta \Sigma 1}$	$\Sigma = 1.05 ; \lambda = 0.999 ; \beta = 1.0$	12.77km	RR$_{\beta \lambda 1}$	$\lambda = 1.002 ; \Sigma = 1.01 ; \beta = 1.0$	13.56km
RR$_{\beta \Sigma 2}$	$\Sigma = 0.95 ; \lambda = 0.999 ; \beta = 1.0$	11.66km	RR$_{\beta \lambda 2}$	$\lambda = 1.003 ; \Sigma = 1.01 ; \beta = 1.0$	13.93km
RR$_{\beta \Sigma 3}$	$\Sigma = 0.90 ; \lambda = 0.999 ; \beta = 1.0$	11.10km	RR$_{\beta \lambda 3}$	$\lambda = 0.97 ; \Sigma = 1.01 ; \beta = 1.0$	11.48km

Tabela 10 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores dos parâmetros λ e Σ correspondentes ao diagrama massa-raio na figura 18.

3.6.2 Considerações finais

Nesta seção, estudamos as configurações de equilíbrio de estrelas compactas anisotrópicas no âmbito da gravidade RR. Para isso, analisamos estrelas de quarks construídas usando o modelo de sacola do MIT e estrelas hadrônicas modeladas com a EoS IU-FSU. Esta última EoS hadrônica foi selecionada para concordar com as propriedades da matéria nuclear medidas em laboratório⁶ (DUTRA, M. *et al.*, 2014) que descrevem satisfatoriamente massas máximas de estrelas de nêutrons (DUTRA, Mariana; LOURENÇO; MENEZES, Débora P., 2016) e as restrições provenientes de observações de ondas gravitacionais (LOURENÇO *et al.*, 2019). Obtivemos resultados de estrutura estelar empregando as conhecidas equações relativísticas gerais da TOV e as versões modificadas para o caso da gravidade Rastall-Rainbow com efeitos anisotrópicos.

Fizemos uma exploração sistemática da janela de parâmetros da gravidade RR e para evitar valores de parâmetros muito arbitrários, escolhemos os mesmos valores obtidos na seção 3.4, com os quais estrelas massivas com raios pequenos podem ser descritas. Observamos que na gravidade RR as massas das estrelas hadrônicas podem se estender a valores próximos a $2,5 M_{\odot}$. Porém, como já apontado em 3.4, mesmo quando a massa máxima aumenta, a teoria RR permite uma diminuição do raio canônico.

Também exploramos os efeitos da anisotropia para valores fixos dos parâmetros correspondentes à gravidade RR. Mostramos que existem dois efeitos globais principais. Quando apenas a anisotropia é considerada na estrutura da RG, ela pode alterar significativamente a massa máxima estelar, mas, ao mesmo tempo, é difícil ajustar os resultados para satisfazer simultaneamente o raio da estrela de nêutrons canônica. Por

⁶ Relacionado com parâmetros nucleares empíricos, tais como: energia de saturação, densidade de saturação, energia de simetria, compressibilidade, etc.

outro lado, quando a gravidade RR e anisotropia são consideradas simultaneamente, os valores positivos de β fornecem resultados para o raio e a massa de uma estrela de nêutrons, compatíveis com recentes restrições astrofísicas, na medida em que uma EoS hadrônica é considerada.

Por fim, analisamos nossos resultados à luz do sinal de onda gravitacional GW190814 detectado recentemente pela colaboração LIGO e Virgo como resultado da coalescência de um buraco negro de $25,6 M_{\odot}$ com um objeto compacto de $2,5-2,67 M_{\odot}$ (LOPES, Luiz L; MENEZES, Debora P, 2021; ABBOTT, R. *et al.*, 2020). De fato, o objeto compacto na região do *gap* de massa $2,5 - 5,0 M_{\odot}$, tem sido estudado na literatura (DAS, H.; KUMAR; PATRA, 2021; WU *et al.*, 2021) e diferentes classes de objetos compactos têm sido propostos para interpretar o evento detectado. De acordo com os resultados obtidos no presente tópico, para estrelas hadrônicas anisotrópicas descritas com a EoS IU-FSU (figuras 17 e 18), notamos que a região do *gap* de massa pode ser alcançada para certos valores da gravidade Rastall-Rainbow e o parâmetro de anisotropia β .

Este trabalho foi publicado na *Classical and Quantum Gravity* (MOTA, Clésio E. *et al.*, 2022a). O *paper* encontra-se incluído no Apêndice B.

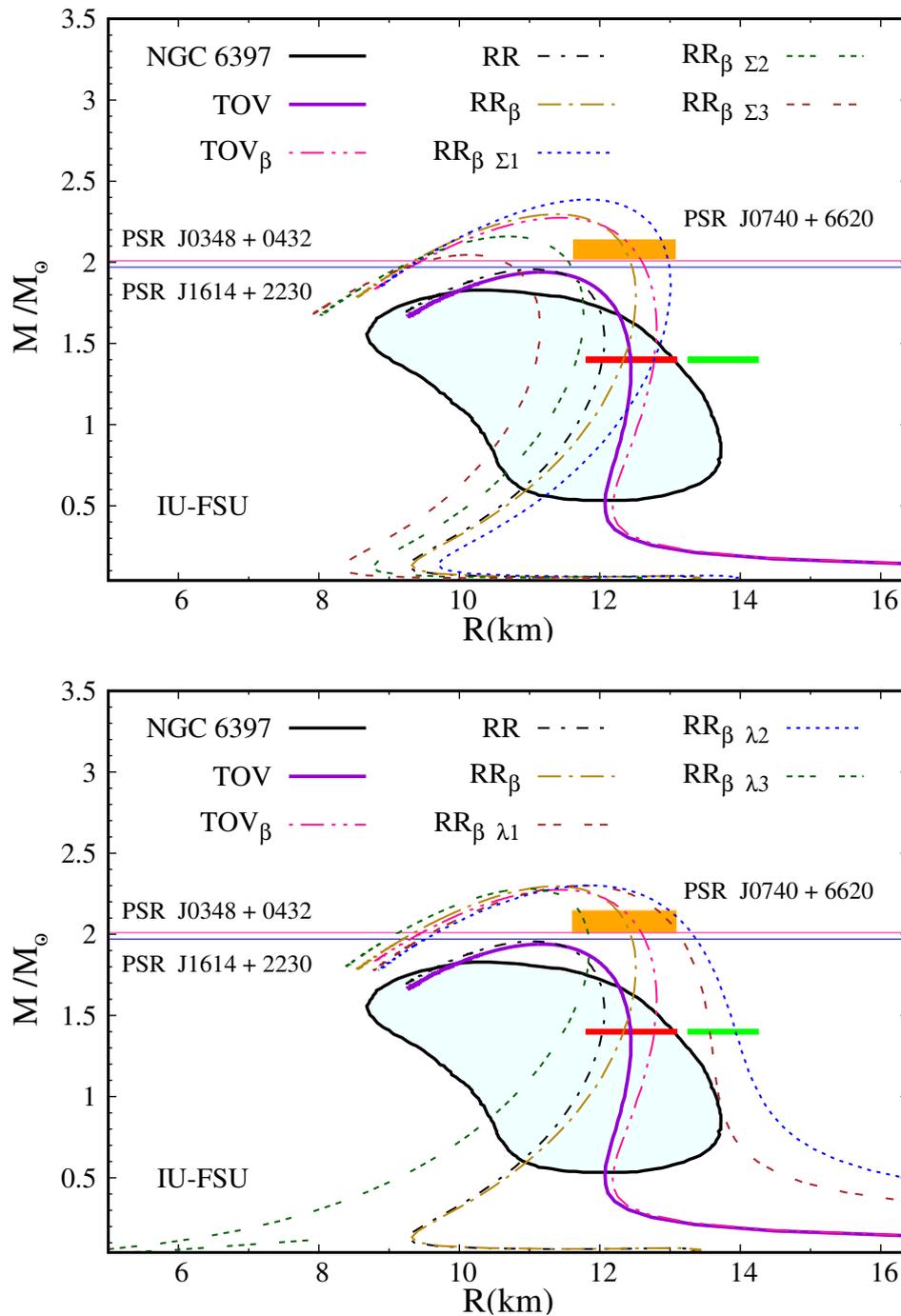


Figura 18 – Relação massa-raio para uma família de estrelas hadrônicas descritas com a EoS IU-FSU. Analisamos os efeitos causados pela variação do parâmetro Rainbow Σ (acima), enquanto mantemos o outro parâmetro fixo, e os efeitos de variar o parâmetro Rastall λ (abaixo) enquanto mantemos Σ fixo. O segmento de linha vermelha e verde correspondem respectivamente à faixa de raio de $1,4M_{\odot}$ para PSR J0030 + 0451 e PREX-2. A região retangular laranja representa o intervalo de estimativas de raio para $2,08 \pm 0,07M_{\odot}$ PSR J0740 + 6620. Da mesma forma, as linhas horizontais azul e rosa representam, respectivamente, as medidas de massa para PSR J1614 + 2230 e PSR J0348 + 0432. A curva roxa são soluções de estrelas para a TOV em RG.

4 GRAVIDADE RASTALL GENERALIZADA

Neste Capítulo, elaboramos uma modificação mais geral na lei de conservação ((22)) para o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, ainda não explorada na teoria gravitacional de Rastall (RASTALL, 1972). Em seu trabalho original, Rastall mencionou a possibilidade de relacionar esta lei de conservação a A_ν , com $A_\nu = \lambda \delta^\mu_\nu R_{,\mu}$. Uma generalização dessa abordagem poderia ser lançada na forma de uma função geral do escalar de Ricci como $A_\nu = \delta^\mu_\nu f(R)_{,\mu} = f'(R) \delta^\mu_\nu R_{,\mu}$ (onde $f'(R) \doteq df/dR$), que pode ser descrita pelas equações usuais de Rastall, porém dotado de um parâmetro de Rastall variável. Esta abordagem tem sido explorada na literatura (ver, por exemplo, (MORADPOUR *et al.*, 2017a)). Entretanto, inspirado nas modificações da gravidade $f(R, T)$ (HARKO, Tiberiu *et al.*, 2011; HOUNDJO, 2012; ODINTSOV, Sergei D.; SÁEZ-GÓMEZ, 2013), é possível escolher uma função A_ν que dependa do escalar R e, adicionalmente, do traço do tensor energia-momento T , de uma forma mais geral. Pelo fato de R estar associado à modificação da lei de conservação, é natural supor que o acoplamento entre R e T também possa contribuir para a violação da lei de conservação. Propomos escolher uma função geral A_ν como a combinação $A_\nu = (\alpha \delta^\mu_\nu R + \beta \delta^\mu_\nu RT)_{,\mu}$. Na verdade, exploramos esta modificação da lei de conservação e seus efeitos nas soluções resultantes das equações de campo modificadas. Da mesma forma, algumas categorias das teorias de gravidade modificada como a teoria $f(R, T)$ têm considerado equações de campo que dependem de uma função de R e T em que o traço poderia ser induzido por fluidos imperfeitos exóticos ou efeitos quânticos (HARKO, Tiberiu *et al.*, 2011).

Posteriormente, obtivemos as equações de campo desta teoria e as resolvemos considerando um espaço-tempo esfericamente simétrico. Mostramos que a solução externa possui duas classes de soluções possíveis com simetria esférica no vácuo na gravidade de Rastall generalizada. Em seguida, derivamos um novo conjunto de equações que descrevem o equilíbrio hidrostático estelar. Como aplicação, realizamos uma análise cuidadosa dos efeitos da teoria na relação massa-raio de estrelas de nêutrons usando equações de estado realistas como *input*.

4.1 GENERALIZAÇÃO

Discutimos agora a generalização da teoria da gravidade de Rastall. Propomos que a função geral A_ν relacionado à divergência do tensor de energia-momento em espaço-tempo curvo é dado por

$$A_\nu = (\alpha \delta^\mu_\nu R + \beta \delta^\mu_\nu RT)_{,\mu} , \quad (135)$$

isto é, tem a mesma dependência de R que no trabalho de Rastall original, além de um termo de acoplamento definido por RT . Em particular, espera-se que a forma

final das equações de campo nesta teoria incorpore os elementos desta modificação e consiga reproduzir as principais características da gravidade Rastall em um caso particular. Como um teste para a teoria, resolvemos as equações de campo que se originam de uma métrica que pode ser usada para modelar estrelas compactas no espaço-tempo, como estrelas de nêutrons, e assim analisar os possíveis efeitos no diagrama de massa *versus* raio desses objetos. Conforme mencionado, a modificação na lei de conservação de $T_{\mu\nu}$ tem a seguinte forma:

$$T^{\mu}_{\nu};_{\mu} = \alpha R_{,\nu} + \beta (RT)_{,\nu} , \quad (136)$$

onde α e β são chamados parâmetros de acoplamento, que medem o desvio da RG e quantificam a afinidade do campo de matéria acoplado à geometria. A gravidade usual de Rastall pode ser recuperada no limite apropriado $\beta \rightarrow 0$. A divergência de $T_{\mu\nu}$ dada pela equação ((136)) é proporcional aos gradientes de R em ambos os termos. Portanto, no espaço-tempo plano, quando $R = 0$, a lei de conservação usual é recuperada. A partir da equação ((136)), implementamos a seguinte expressão:

$$\left(T^{\nu}_{\mu} - \alpha \delta^{\nu}_{\mu} R - \beta \delta^{\nu}_{\mu} RT \right) ;_{\nu} = 0 . \quad (137)$$

Na verdade, assumindo a condição dada pela expressão acima, as equações de campo modificadas da gravidade Rastall generalizada podem ser escritas como

$$R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} \delta^{\nu}_{\mu} R = k \left(T^{\nu}_{\mu} - \alpha \delta^{\nu}_{\mu} R - \beta \delta^{\nu}_{\mu} RT \right) , \quad (138)$$

onde k é a constante de acoplamento gravitacional, modificada nesta teoria. Tomando o traço da equação anterior, temos

$$R = \frac{kT}{4k(\alpha + \beta T) - 1} , \quad (139)$$

o que leva à seguinte expressão

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k \tau_{\mu\nu} , \quad (140)$$

onde $\tau_{\mu\nu}$ é chamado tensor energia-momento efetivo, tendo a seguinte expressão:

$$\tau_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu} T}{4 - \frac{1}{k(\alpha + \beta T)}} . \quad (141)$$

Na próxima seção, usaremos o limite Newtoniano para obter, neste contexto, a forma da constante gravitacional k . Observe que $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento da matéria ordinária (construído a partir dos campos de matéria). Embora possamos escrever as equações de campo da Rastall Generalizada como um tensor de Einstein originado por uma função do tensor de energia-momento, isto é, um tensor energia-momento

efetivo, esta abordagem apresenta diferenças não triviais em comparação com a teoria de Einstein como será visto nas próximas seções.

Uma possível equivalência entre a abordagem original de Rastall e a teoria de Einstein foi originalmente reivindicada em (LINDBLOM; HISCOCK, 1982) e mais recentemente em (VISSER, 2018) baseado no rearranjo das equações de campo levando à conservação de um tensor energia-momento efetivo, uma propriedade que ainda pode persistir em nossa proposta generalizada. No entanto, foi demonstrado em (DARABI *et al.*, 2018) que a suposição de que as teorias de Einstein e Rastall apresentam o mesmo $T_{\mu\nu}$, ou seja, construído a partir dos campos de matéria, implica na não equivalência física dessas teorias (o mesmo argumento é válido em nosso caso). Essa não equivalência é apoiada por outros trabalhos, como (SMALLEY, L L, 1983; HANSRAJ; BANERJEE; CHANNUIE, 2019; LOBO, I. P. *et al.*, 2020). De fato, a Lagrangiana cuja variação dá origem à gravidade de Rastall também tem sido objeto de pesquisa atual. Devido à não conservação covariante do tensor energia-momento, espera-se que algum tipo de acoplamento não mínimo entre matéria e geometria possa gerar esse tipo de teoria. Alguns comentários sobre este assunto podem ser encontrados em (DARABI *et al.*, 2018; LOBO, I. P. *et al.*, 2020) e o assunto foi analisado em (SMALLEY, L. L., 1984; DE MORAES; SANTOS, A. F., 2019; SANTOS, R. V. d.; NOGALES, 2017), mas uma palavra final não foi dita sobre o tema (ver revisão (VELTEN, H.; CARAMÊS, 2021)). Portanto, também não temos uma Lagrangiana para a presente versão generalizada da gravidade de Rastall. Esperamos que um acoplamento não trivial entre a matéria e o tensor de Ricci possa ser um candidato para gerar os novos termos nesta nova proposta.

4.2 LIMITE NEWTONIANO

Em seguida, calculamos o limite Newtoniano das equações de campo de Einstein para podermos obter o valor da constante k em nossa teoria generalizada de Rastall. Para fazer isso, comparamos nossas equações de campo no regime de campo fraco com a equação de Poisson:

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G \varepsilon . \quad (142)$$

No limite Newtoniano podemos substituir o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ pelo tensor de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, em termos que multiplicam a curvatura, de modo que a equação ((138)) torna-se:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} - k\eta_{\mu\nu}(\alpha R + \beta RT) . \quad (143)$$

Neste limite temos $\varepsilon \gg \rho$, portanto, $|T_{00}| \gg |T_{ij}|$ (WEINBERG, 1972), de modo que se olharmos para o componente (00) da equação ((143)) encontramos o seguinte:

$$R_{00} - \frac{1}{2}(-1)R = k(-\varepsilon) - k(-1)(\alpha R + \beta R(-\varepsilon)) . \quad (144)$$

Usando a aproximação $R \approx \sum_{k=1}^3 R_{kk} - R_{00}$, podemos obter a relação:

$$R = \frac{2R_{00}}{1 - 6k\alpha + 6k\beta\varepsilon} , \quad (145)$$

agora, aplicando esta relação na equação ((144)) e sabendo que $R_{00} \approx -\nabla^2\varphi$, encontramos:

$$k \left(\frac{1 - 6k\alpha + 6k\beta\varepsilon}{1 - 4k\alpha + 4k\beta\varepsilon} \right) = 8\pi G . \quad (146)$$

Ao resolver esta equação para k , obtemos duas soluções possíveis, a saber:

$$k = \frac{1 + 32\pi G(\alpha - \beta\varepsilon)}{12(\alpha - \beta\varepsilon)} + \frac{\sqrt{1 + 32\pi G(\alpha - \beta\varepsilon)(32\pi G(\alpha - \beta\varepsilon) - 4)}}{12(\alpha - \beta\varepsilon)} , \quad (147)$$

e

$$k = \frac{1 + 32\pi G(\alpha - \beta\varepsilon)}{12(\alpha - \beta\varepsilon)} - \frac{\sqrt{1 + 32\pi G(\alpha - \beta\varepsilon)(32\pi G(\alpha - \beta\varepsilon) - 4)}}{12(\alpha - \beta\varepsilon)} . \quad (148)$$

A solução ((147)) diverge quando $\alpha \rightarrow 0$, enquanto ((148)) converge, sendo esta última a solução fisicamente aceitável e a qual utilizamos em nossa análise.

Em princípio, ((148)) indica a presença de uma constante de acoplamento gravitacional, k , dependente de ε , induzida por contribuições dependentes de β . Poderíamos evitar esta característica por uma análise de k em algumas situações limitantes, restringindo o alcance de β tal que mesmo para o regime extremo em que a gravidade Newtoniana deveria ser válida, como considerar a densidade máxima de anãs brancas¹ $\varepsilon_{\text{wd}}^{\text{máx}} \approx 10^7 \text{ g/cm}^3 = 2.8 \times 10^{-8} \text{ fm}^{-4}$ (em unidades naturais $\hbar = c = 1$), a condição adimensional $128\pi G \varepsilon_{\text{wd}}^{\text{máx}} |\beta| \ll 1$ é válida. Isso estabelece uma condição que suprime contribuições de β puros na determinação de k a partir do limite Newtoniano, mesmo quando os termos com α estão ausentes. Este requisito pode ser derivado expandindo-se a expressão na raiz quadrada de ((148)), a saber

$$1 + 128\pi G \beta \varepsilon + 1024\pi^2 G^2 \beta^2 \varepsilon^2 - 2048\pi^2 G^2 \alpha \beta \varepsilon + 1024\pi^2 G^2 \alpha^2 - 128\pi \alpha G . \quad (149)$$

A partir desta expressão, vê-se que mesmo quando $\alpha \rightarrow 0$, os termos proporcionais a $G \varepsilon \beta$ são suprimidos. De fato, nesse limite teríamos

¹ wd - abreviação de "white dwarf".

$$k \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{8\pi G}{3} - \frac{1}{12\beta\epsilon} + \frac{\sqrt{1 + 128\pi G\beta\epsilon + 1024\pi^2 G^2\beta^2\epsilon^2}}{12\beta\epsilon} \xrightarrow{G|\beta|\epsilon \ll 1} 8\pi G. \quad (150)$$

Além disso, se $G\alpha$ e $G\beta\epsilon_{\text{wd}}^{\text{máx}}$ são no máximo da mesma ordem de magnitude, então $k \approx 8\pi G$, desde que $G\beta\epsilon \ll 1$ no regime newtoniano.

Mas existe um limite superior para a magnitude dos termos $G\alpha$? Agora, verificamos novamente o termo na raiz quadrada de ((148)), dado por ((149)), para analisar a contribuição geral de α e sua relação com β , onde, neste caso, observamos a presença de um termo que acopla esses parâmetros, dado por $2048\pi^2 G^2\alpha\beta\epsilon$ que poderia eventualmente levar a uma amplificação do mesmo e a presença de uma dependência de densidade da constante de acoplamento ((148)). Portanto, devemos esperar que um limite em $|\alpha|$ precise ser definido para evitar uma amplificação dessa contribuição. Como $2048\pi^2 G^2\alpha\beta\epsilon = 16\pi G\alpha(128\pi G\beta\epsilon)$, devemos ter $G|\alpha| \gg 1$: por exemplo, uma condição suficiente seria $G|\alpha| \leq 1$, mas obviamente esta não é uma condição necessária, deve-se apenas estar ciente que a quantidade adimensional $2048\pi^2 G^2|\alpha||\beta|\epsilon_{\text{wd}}^{\text{máx}}$ não se aproxima de 1.

Em resumo, se assumirmos $G|\beta|\epsilon_{\text{wd}}^{\text{máx}} \ll 1$ e, por exemplo, $G|\alpha| \leq 1$ (onde $\epsilon_{\text{wd}}^{\text{máx}} \sim 10^{-8} \text{fm}^{-4}$) como condições em nosso espaço de parâmetros (α, β), então nosso limite Newtoniano não apresenta uma constante de acoplamento dependente da densidade, depende apenas de α e G sendo dada por:

$$k = \frac{1 + 32\alpha G\pi - \sqrt{1 + 32\alpha G\pi(32\alpha G\pi - 4)}}{12\alpha}. \quad (151)$$

Como $\epsilon_{\text{wd}}^{\text{máx}} \approx 2.8 \times 10^{-8} \text{fm}^{-4}$, então em um sistema de unidades em que $c = \hbar = 1$, o que implica que $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2 = 2.6 \times 10^{-40} \text{fm}^2$, teríamos encontrado $\beta \ll 10^{44} \text{fm}^2$ e $\alpha \leq 3.8 \times 10^{-41} \text{fm}^{-2}$ como condições para uma constante k . Por outro lado, em um sistema de unidades naturais em que $c = \hbar = G = 1$, as condições acima são traduzidas como $\beta \ll 10^5 \text{fm}^4$ e $\alpha \leq 1$. Este último sistema de unidades é utilizado em nossa análise numérica, quando considerarmos uma região do espaço de parâmetros (α, β) tal que as constantes de acoplamento são definidas em ((151)), como derivado do limite Newtoniano da teoria.

Além disso, podemos verificar que tomando o limite $\alpha \rightarrow 0$, recuperaremos, como seria de esperar, o valor de k para A RG, ou seja, $k = 8\pi G$. Como será visto, verificaremos o impacto dos parâmetros Rastall generalizados que obedecem a essas restrições na EoS das estrelas de nêutrons, mas que deixarão marcas perceptíveis na relação massa raio. Na próxima seção, veremos que para soluções associadas ao vácuo, existem dois espaços-tempo possíveis com simetria esférica.

4.3 SOLUÇÃO DE VÁCUO COM SIMETRIA ESFÉRICA

Neste ponto, estamos interessados em soluções das equações de campo que representam espaços-tempo esfericamente simétricos e estáticos na gravidade Rastall generalizada. Em primeiro lugar, consideramos o traço das equações de campo ((138)) no vácuo:

$$R(-1 + 4k\alpha) = 0, \quad (152)$$

sendo que esta equação é satisfeita configurando $R = 0$ ou $\alpha = 1/4k$. No primeiro caso, isto é, $R = 0$, é possível mostrar que a solução esfericamente simétrica é completamente equivalente à solução de Schwarzschild usual em RG. No segundo caso, ou seja, para $\alpha = 1/4k$, a equação ((139)) indica que o escalar de Ricci é independente da distribuição de matéria, o que pode ser inconsistente com EoSs relacionadas a estrelas compactas. Portanto, consideramos a seguir apenas o primeiro caso. Remetemos o leitor interessado a uma análise detalhada do segundo tipo de solução na gravidade Rastall, que pode ser encontrada em (OLIVEIRA; VELTEN, H. E. S.; FABRIS, 2016).

Observamos que a versão no vácuo da equação ((138)) é expressa por

$$R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{4}\delta^{\nu}_{\mu}R = 0, \quad (153)$$

e a métrica sobre a simetria de interesse, tal como antes em ((1)), pode ser escrita na forma usual

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (154)$$

com a diferença de que agora estamos usando a assinatura métrica (- + + +) em vez de (+ - - -). Do mesmo modo, $B(r)$ e $A(r)$ são funções determinadas usando as equações de campo. Desta forma, se usarmos a métrica ((154)) nas equações de campo ((153)), obtemos as seguintes equações de vácuo

$$R_{00} - g_{00}\frac{1}{4}R = 0; \quad (155)$$

$$R_{11} - g_{11}\frac{1}{4}R = 0; \quad (156)$$

$$R_{22} - g_{22}\frac{1}{4}R = 0, \quad (157)$$

onde

$$R_{00} = -\frac{1}{4}\left(\frac{B'A'}{A^2} + \frac{B'^2}{AB}\right) + \frac{1}{2}\frac{B''}{A} + \frac{B'}{rA}; \quad (158)$$

$$R_{11} = \frac{1}{4}\left(\frac{B'A'}{BA} + \frac{B'^2}{B^2}\right) - \frac{1}{2}\frac{B''}{B} + \frac{A'}{rA}; \quad (159)$$

$$R_{22} = \frac{1}{2}\frac{rA'}{A^2} - \frac{1}{2}\frac{B'r}{BA} + 1 - \frac{1}{A}. \quad (160)$$

Resolvendo as equações diferenciais obtidas na equação ((153)) para $R = 0$, obtemos o espaço-tempo com simetria esférica na gravidade Rastall generalizada que é equivalente à solução de Schwarzschild em RG. Como veremos, o efeito esperado da gravidade Rastall generalizada será observado no caso em que $T_{\mu\nu} \neq 0$.

4.4 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO HIDROSTÁTICO

Apresentamos aqui a solução das equações de Einstein modificadas para o interior de um objeto compacto, estático e esfericamente simétrico. A distribuição da matéria na estrela é descrita pelo tensor energia-momento para um fluido perfeito:

$$T_{\mu\nu} = \rho g_{\mu\nu} + (p + \varepsilon)U_\mu U_\nu, \quad (161)$$

onde p e ε são respectivamente a pressão e a densidade de energia da matéria estelar, e U_μ satisfaz a condição $U_\mu U^\mu = -1$.

Agora, trabalhando na equação ((140)) com a métrica, equação ((154)), e em adição, usando a expressão ((161)), obtemos as componentes das equações de campo de Einstein, modificadas:

$$-\frac{B}{r^2 A} + \frac{B}{r^2} + \frac{A'B}{rA^2} = 8\pi GB\bar{\varepsilon}, \quad (162)$$

$$-\frac{A}{r^2} + \frac{B'}{rB} + \frac{1}{r^2} = 8\pi GA\bar{\rho}, \quad (163)$$

$$\begin{aligned} -\frac{B'^2 r^2}{4AB^2} - \frac{A'B'r^2}{4A^2 B} + \frac{B''r^2}{2AB} - \frac{A'r}{2A^2} + \frac{B'r}{2AB} \\ = 8\pi Gr^2 \bar{\rho}, \end{aligned} \quad (164)$$

onde a densidade de energia efetiva e a pressão efetiva são definidas por

$$\bar{\varepsilon} = \frac{k}{8\pi G} \left[\varepsilon + \frac{T}{4 - \frac{1}{k(\alpha + \beta T)}} \right], \quad (165)$$

$$\bar{\rho} = \frac{k}{8\pi G} \left[\rho - \frac{T}{4 - \frac{1}{k(\alpha + \beta T)}} \right], \quad (166)$$

com $T = 3p - \varepsilon$. Observe que k nas equações acima é dado pela equação ((151)), onde podemos observar o efeito da gravidade Rastall generalizada. Da equação ((162)) podemos integrar a função A ,

$$A(r) = \left[1 - \frac{2GM(r)}{r} \right]^{-1}, \quad (167)$$

onde, tal como visto no Capítulo anterior, $M(r)$ é a massa incluída na coordenada radial r . A definição do termo de massa neste contexto é dada na seguinte forma:

$$M(r) = \int_0^R 4\pi r'^2 \bar{\varepsilon}(r') dr' . \quad (168)$$

Queremos analisar a massa e o raio das estrelas de nêutrons usando a pressão e a densidade de energia da matéria nuclear na estrela como entradas na integração das equações de equilíbrio hidrostático. A equação de massa ((168)) é uma de nossas equações, e a segunda que obtemos de uma combinação das equações ((167)) e ((163)) para completar nosso sistema:

$$\frac{B'}{2B} = \frac{GM(r)}{r^2} \left[1 + \frac{4\pi r^3 \bar{\rho}}{M(r)} \right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{r} \right]^{-1} . \quad (169)$$

A gravidade Rastall generalizada afeta diretamente a conservação do tensor energia-momento, conforme já discutido neste Capítulo. Portanto, da não conservação de T^{ν}_{μ} dada pela equação ((136)), obtemos

$$\frac{B'}{2B} = -\frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho} + \bar{\varepsilon}} . \quad (170)$$

Por fim, manipulamos às duas últimas equações para obter a seguinte relação:

$$\bar{\rho}' = -\frac{GM(r)\bar{\varepsilon}}{r^2} \left[1 + \frac{\bar{\rho}}{\bar{\varepsilon}} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 \bar{\rho}}{M(r)} \right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{r} \right]^{-1} . \quad (171)$$

As equações ((171)) e ((168)) são o equivalente das equações TOV ((24)) e ((18)) na gravidade Rastall generalizada. Na próxima seção, usaremos estas duas equações, ((171)) e ((168)) com equações de estado nuclear para obter a massa e o raio de uma família de estrelas de nêutrons no contexto de teoria de gravidade modificada apresentada neste Capítulo.

4.5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Agora estamos numa posição que nos permite usar as equações obtidas na seção anterior em conjunto com EoSs realistas para modelar estrelas de nêutrons. Como *input* para as equações de equilíbrio estelar, usamos duas EoS realistas obtidas a partir de uma abordagem de campo médio relativística (RMFA). Primeiro consideramos a parametrização IU-FSU (FATTOYEV *et al.*, 2010) porque ela consegue explicar razoavelmente bem as propriedades nucleares (LOURENÇO *et al.*, 2019) e da matéria estelar (DUTRA, Mariana; LOURENÇO; MENEZES, Débora P., 2016). Em seguida, comparamos os resultados IU-FSU com os obtidos a partir de uma EoS mais dura²

² Em uma EoS dura (*stiff*) tem-se que uma dada densidade (de energia ou bariônica) suporta uma pressão maior em comparação a uma EoS menos dura (*soft*).

		TOV	Rastall _{α1}	Rastall _{α2}	Rastall _{α3}	Rastall _{α4}	Rastall _{α5}	Rastall _{α6}
Parâmetros	α	0.0	1×10^{-5}	2×10^{-5}	2×10^{-6}	4×10^{-6}	-1×10^{-5}	-3×10^{-5}
	β	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
IU-FSU	M_{max}	$1.942 M_{\odot}$	$1.941 M_{\odot}$	$1.939 M_{\odot}$	$1.942 M_{\odot}$	$1.942 M_{\odot}$	$1.944 M_{\odot}$	$1.947 M_{\odot}$
	$R_{1,4}$	12.545 km	12.315 km	12.142 km	12.488 km	12.442 km	12.850 km	13.524 km
	$\bar{\epsilon}_c$	$6.365 fm^{-4}$	$6.366 fm^{-4}$	$6.389 fm^{-4}$	$6.364 fm^{-4}$	$6.365 fm^{-4}$	$6.343 fm^{-4}$	$6.317 fm^{-4}$
	C_{max}	0.173	0.174	0.175	0.173	0.173	0.171	0.167
	$C_{1,4}$	0.111	0.113	0.115	0.112	0.112	0.108	0.103
		Relatividade Geral	gravidade Rastall generalizada					
		TOV	(RT) _{β1}	(RT) _{β2}	(RT) _{β3}	(RT) _{β4}	(RT) _{β5}	(RT) _{β6}
Parâmetros	β	0.0	2×10^{-5}	1×10^{-4}	3×10^{-4}	5×10^{-4}	7×10^{-4}	-1×10^{-4}
	α	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
IU-FSU	M_{max}	$1.942 M_{\odot}$	$1.945 M_{\odot}$	$1.955 M_{\odot}$	$1.982 M_{\odot}$	$2.009 M_{\odot}$	$2.037 M_{\odot}$	$1.929 M_{\odot}$
	$R_{1,4}$	12.545 km	12.589 km	12.778 km	13.248 km	13.752 km	14.270 km	12.312 km
	$\bar{\epsilon}_c$	$6.365 fm^{-4}$	$6.346 fm^{-4}$	$6.251 fm^{-4}$	$6.022 fm^{-4}$	$5.812 fm^{-4}$	$5.621 fm^{-4}$	$6.480 fm^{-4}$
	C_{max}	0.173	0.172	0.172	0.170	0.168	0.166	0.174
	$C_{1,4}$	0.111	0.111	0.109	0.105	0.101	0.098	0.113

Tabela 11 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores dos parâmetros α e β correspondentes ao diagrama massa-raio na figura 19. As quantidades M_{max} , $R_{1,4}$, $\bar{\epsilon}_c$, C_{max} e $C_{1,4}$ são, respectivamente, à massa máxima, raio da estrela canônica, densidade de energia central e compacticidade.

calculada com a parametrização TM1 (SUGAHARA; TOKI, 1994). É conhecido que uma EoS mais dura leva a uma massa máxima estelar maior em contraste com uma menos dura. Para a crosta estelar, usamos a conhecida EoS BPS (BAYM; PETHICK; SUTHERLAND, 1971) que descreve bem a região de baixa densidade.

Tal como visto no Capítulo 2, as equações diferenciais ((168)) e ((171)) para a estrutura estelar podem ser integradas numericamente para às três funções desconhecidas: M , ρ e ϵ . Observe que essa integração ocorre do centro da estrela até a sua superfície, caracterizado por um ponto onde ρ desaparece. De diferentes valores de densidade central, ϵ_c , e a partir dos parâmetros da Rastall generalizada, α e β , construímos as propriedades macroscópicas, ou seja, os valores de massa e raio correspondente para uma família de estrelas de nêutrons. Os resultados são apresentados a seguir nas Tabelas e nas figuras correspondentes, perfis de massa-raio. Nas figuras (19) e (21) estudamos o efeito da gravidade Rastall (superior) e o termo adicional RT (inferior), separadamente. Enquanto nas figuras (20) e (22) analisamos o efeito da gravidade Rastall generalizada com ambos os termos incluídos. A solução correspondente a RG é numericamente obtida usando $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Ela é representada por uma linha contínua roxa nas figuras e os valores resultantes para a massa máxima e o raio correspondente para esta solução estão listados nas Tabelas.

Na figura 19, os efeitos de ambos os parâmetros que aparecem na gravidade Rastall generalizada são analisados individualmente para a EoS IU-FSU. Em seu painel superior temos os resultados correspondentes à solução da gravidade Rastall, isto é,

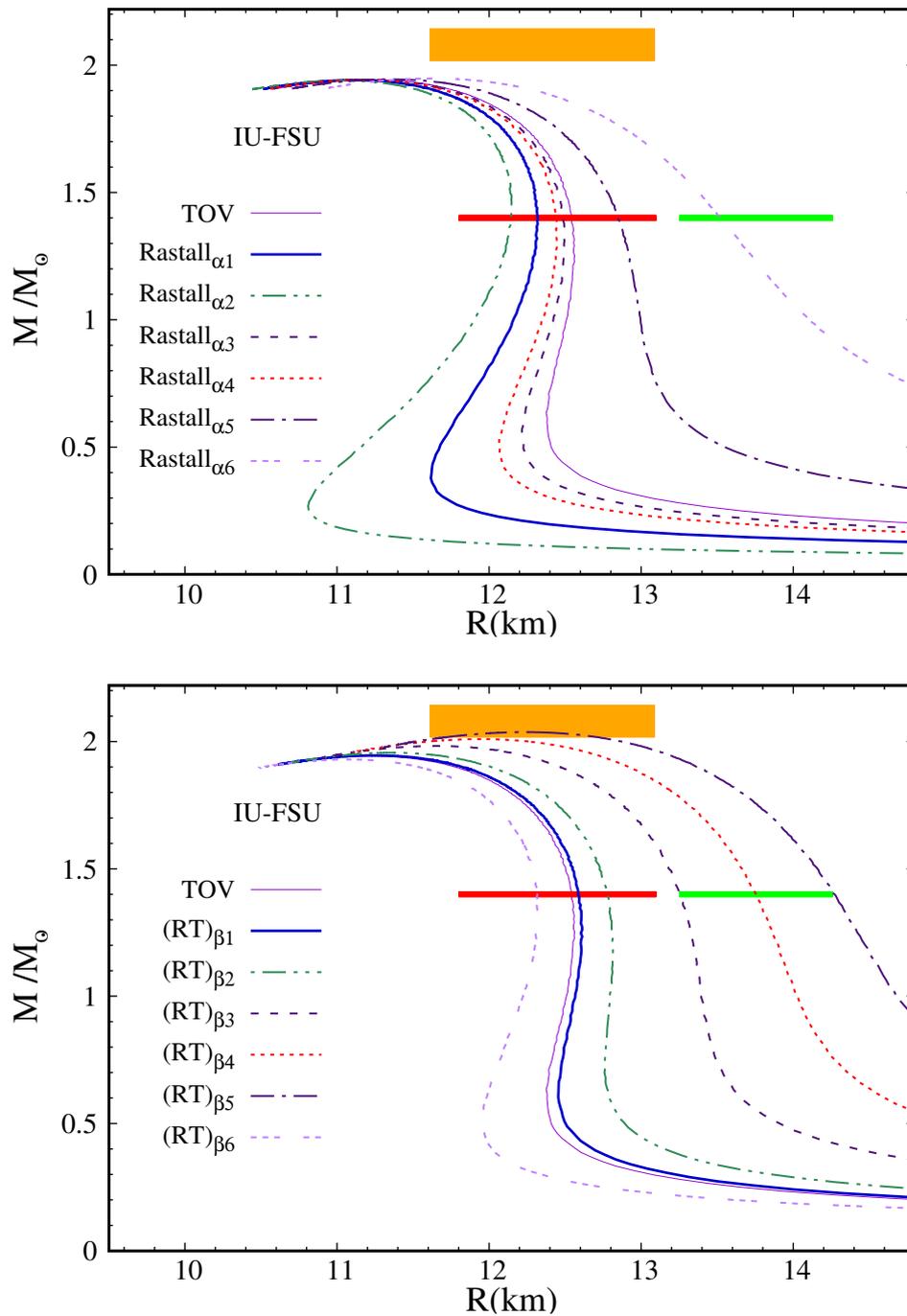


Figura 19 – Relação massa-raio para uma família de estrelas hadrônicas descritas com a EoS IU-FSU. Analisamos os efeitos da variação do parâmetro α (superior) enquanto mantemos o parâmetro β nulo, ou seja, aqui temos a gravidade Rastall original, e os efeitos da variação do parâmetro β (inferior) enquanto mantemos α nulo, portanto neste caso estudamos o termo RT sozinho. Os segmentos de linha vermelha e verde correspondem respectivamente à faixa de raio de $1,4M_{\odot}$ para PSR J0030 + 0451 e PREX-2. A região retangular laranja representa o intervalo de estimativa de raio para $2,08 \pm 0,07M_{\odot}$ PSR J0740 + 6620.

$\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$. A massa máxima dificilmente é afetada pela alteração do parâmetro da Rastall sozinho. O raio da estrela de $1,4M_{\odot}$ é consideravelmente afetado.

Observe um raio maior (menor) para os valores mais negativos (positivos) de α no intervalo mostrado na Tabela 11. No painel inferior da figura 19, investigamos os efeitos do termo RT sozinho, ou seja, $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$. Diferentemente do anterior, este parâmetro tem um efeito pequeno, mas não desprezível, sobre a massa máxima. À medida que β cresce, conseguimos reproduzir estrelas de nêutrons com massa maior, sem introduzir o parâmetro α . Nesse caso, o raio canônico aumenta com o aumento do parâmetro β . Esses resultados mostram que enquanto a teoria da gravidade Rastall por si só afeta basicamente o raio da estrela de nêutrons, o termo RT proposto neste trabalho influencia todo o perfil de massa-raio. Também é importante lembrar os efeitos da gravidade Rastall sobre os raios da estrela canônica, deslocados em relação aos obtidos com as equações TOV usuais.

Na figura 20 e Tabela 12, analisamos o efeito de ter ambos os parâmetros diferentes de zero, ainda para a EoS IU-FSU. No painel superior, fixamos $\beta = 5 \times 10^{-4}$ e variamos α . Observe que a presença de um termo fixo de RT aumenta ligeiramente a massa máxima da estrela de nêutrons, entretanto, como na figura 19, a variação de α dificilmente afeta a massa máxima. A importância do parâmetro da gravidade Rastall é claramente visto no raio de toda a família de estrelas. Como no caso anterior, α positivo resulta em raio menor. No painel inferior, fixamos $\alpha = 1 \times 10^{-5}$ e variamos β . Obtemos um aumento (diminuição) do raio da estrela de nêutrons e da massa máxima para o parâmetro mais positivo (negativo). Aqui chamamos a atenção para a curva obtida com β_1 que, embora mantenha a massa máxima da solução TOV, diminui ligeiramente o raio de $1,4M_{\odot}$. Os valores resultantes estão na faixa do trabalho recente (CAPANO *et al.*, 2020), onde combinando dados de observações de ondas gravitacionais e física nuclear, os autores obtiveram uma restrição mais rigorosa para o raio canônico da estrela de nêutrons, $R_{1.4} = 11,0^{+0,9}_{-0,6}$ km.

Observe que a solução TOV para a EoS IU-FSU está na banda inferior da restrição PSR J0030 + 0451 (linha vermelha) e não consegue reproduzir as restrições PSR J0740 + 6620 (laranja) e PREX-2 (verde). A solução GRT por sua vez impacta as curvas massa-raio de tal forma que com α mais negativo a banda inferior do PSR J0740 + 6620 é alcançada. Além disso, de α_1 a α_5 , o raio canônico está fora do PSR J0030 + 0451 e dentro da restrição PREX-2. Quando mantemos α fixo e variamos β no painel inferior da figura 20, notamos que grande parte das soluções satisfaz a restrição vermelha do PSR J0030 + 0451, com β_5 respeitando o PSR J0740 + 6620 e PREX-2. Nesse caso, nossas modificações em β aumentam o raio o suficiente para ficar na restrição PREX-2. É óbvio que as restrições representadas pelos segmentos vermelho e verde não podem ser simultaneamente satisfeitas.

Resultados recentes para estrelas de nêutrons no contexto da gravidade Rastall

		TOV	GRT _{α1}	GRT _{α2}	GRT _{α3}	GRT _{α4}	GRT _{α5}	GRT _{α6}
Parâmetros	α	0.0	1×10^{-5}	2×10^{-5}	2×10^{-6}	4×10^{-6}	-1×10^{-5}	-3×10^{-5}
	β	0.0	5×10^{-4}	5×10^{-4}	5×10^{-4}	5×10^{-4}	5×10^{-4}	5×10^{-4}
IU-FSU	M_{max}	$1.942 M_{\odot}$	$2.007 M_{\odot}$	$2.006 M_{\odot}$	$2.009 M_{\odot}$	$2.008 M_{\odot}$	$2.011 M_{\odot}$	$2.014 M_{\odot}$
	$R_{1,4}$	12.545 km	13.480 km	13.267 km	13.686 km	13.629 km	14.141 km	14.978 km
	$\bar{\epsilon}_c$	$6.365 fm^{-4}$	$5.833 fm^{-4}$	$5.836 fm^{-4}$	$5.812 fm^{-4}$	$5.832 fm^{-4}$	$5.808 fm^{-4}$	$5.783 fm^{-4}$
	C_{max}	0.173	0.169	0.170	0.168	0.168	0.166	0.162
	$C_{1,4}$	0.111	0.103	0.105	0.102	0.102	0.099	0.093
		Relatividade Geral	gravidade Rastall generalizada					
		TOV	GRT _{β1}	GRT _{β2}	GRT _{β3}	GRT _{β4}	GRT _{β5}	GRT _{β6}
Parâmetros	β	0.0	2×10^{-5}	1×10^{-4}	3×10^{-4}	5×10^{-4}	7×10^{-4}	-1×10^{-4}
	α	0.0	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}
IU-FSU	M_{max}	$1.942 M_{\odot}$	$1.943 M_{\odot}$	$1.954 M_{\odot}$	$1.980 M_{\odot}$	$2.007 M_{\odot}$	$2.035 M_{\odot}$	$1.928 M_{\odot}$
	$R_{1,4}$	12.545 km	12.358 km	12.544 km	13.004 km	13.474 km	13.970 km	12.094 km
	$\bar{\epsilon}_c$	$6.365 fm^{-4}$	$6.347 fm^{-4}$	$6.252 fm^{-4}$	$6.043 fm^{-4}$	$5.833 fm^{-4}$	$5.624 fm^{-4}$	$6.481 fm^{-4}$
	C_{max}	0.173	0.174	0.173	0.171	0.169	0.167	0.175
	$C_{1,4}$	0.111	0.113	0.111	0.107	0.103	0.100	0.115

Tabela 12 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores dos parâmetros α e β correspondentes ao diagrama massa-raio na figura 20. As quantidades M_{max} , $R_{1,4}$, $\bar{\epsilon}_c$, C_{max} e $C_{1,4}$ são, respectivamente, à massa máxima, raio da estrela canônica, densidade de energia central e compacticidade.

podem ser encontrados nas referências (OLIVEIRA *et al.*, 2015; MOTA, Clésio E. *et al.*, 2019). Verificamos que embora a gravidade Rastall afete muito pouco a massa máxima da estrela, ela aumenta consideravelmente o raio correspondente, enquanto o raio canônico da estrela também aumenta (OLIVEIRA *et al.*, 2015). Por outro lado, os autores em (MOTA, Clésio E. *et al.*, 2019) mostraram ser possível fazer com que a massa máxima aumente ao mesmo tempo que o raio canônico da estrela diminui mediante a adição de um parâmetro de uma segunda teoria, vide Capítulo 3.

Nas figuras 21 e 22 repetimos as análises anteriores com uma EoS mais rígida, TM1. Os resultados obtidos com vários valores de parâmetros são exibidos nas Tabelas 13 e 14. Os efeitos gerais dos parâmetros α e β são iguais aos obtidos com a EoS IU-FSU. Observe que a solução TOV para TM1 prevê um raio maior para a estrela canônica em comparação com as restrições de NICER e PREX-2, um efeito direto da rigidez desta EoS. Por este motivo removemos o PSR J0030 + 0451 (linha vermelha nas figuras 19 e 20) uma vez que as modificações do GRT também estão fora da faixa imposta por esta restrição. Notamos que todas as curvas com esta EoS, RG ou GRT atingem altas massas para a estrela de nêutrons. Também notamos na figura 22 que para pequenos valores positivos e negativos do parâmetro β , GRT pode-se prever raios na restrição PREX-2 com modificações desprezíveis nas massas máximas.

Deve-se notar que a EoS TM1 apresenta um raio canônico maior do que a EoS IU-FSU. No entanto, com valores de parâmetros apropriados, a gravidade Rastall generalizada fornece um raio ligeiramente menor para a estrela de nêutrons de $M =$

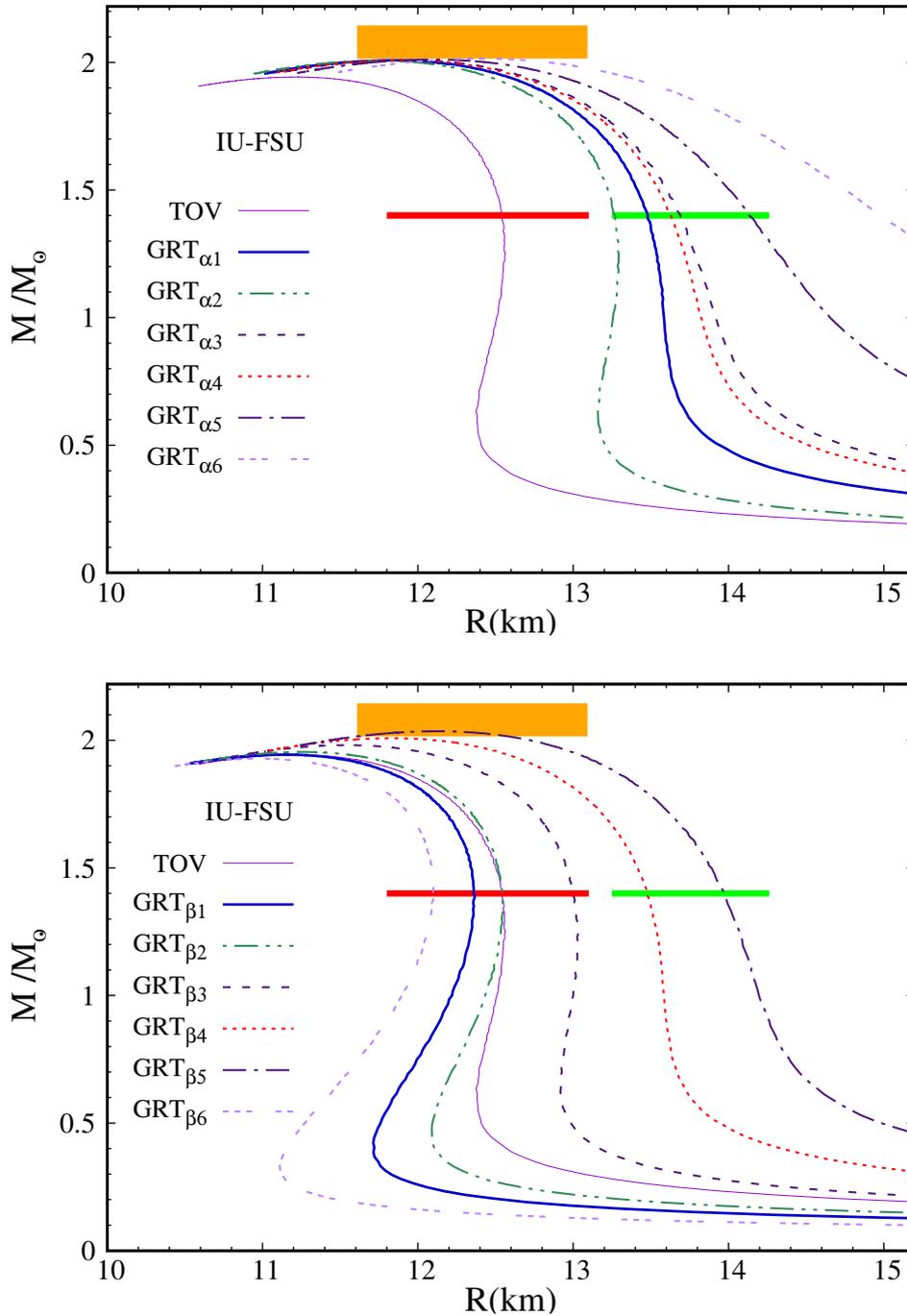


Figura 20 – Relação massa-raio para uma família de estrelas hadrônicas descritas com a EoS IU-FSU. Analisamos os efeitos da variação do parâmetro α (superior) enquanto mantemos o parâmetro β fixo e os efeitos da variação do parâmetro β (inferior) enquanto mantemos α fixo. Os segmentos de linha vermelha e verde correspondem respectivamente à faixa de raio de $1,4M_{\odot}$ para PSR J0030 + 0451 e PREX-2. A região retangular laranja representa o intervalo de estimativa de raio para $2,08 \pm 0,07M_{\odot}$ PSR J0740 + 6620.

$1,4M_{\odot}$, enquanto mantém a massa máxima acima dos $2.0 M_{\odot}$ exigidos.

É importante observar que o uso da gravidade Rastall generalizada produz

		TOV	Rastall _{α1}	Rastall _{α2}	Rastall _{α3}	Rastall _{α4}	Rastall _{α5}	Rastall _{α6}
Parâmetros	α	0.0	1×10^{-5}	2×10^{-5}	2×10^{-6}	4×10^{-6}	-1×10^{-5}	-3×10^{-5}
	β	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
TM1	M_{max}	$2.183 M_{\odot}$	$2.181 M_{\odot}$	$2.180 M_{\odot}$	$2.183 M_{\odot}$	$2.182 M_{\odot}$	$2.185 M_{\odot}$	$2.188 M_{\odot}$
	$R_{1,4}$	14.332 km	14.011 km	13.797 km	14.249 km	14.185 km	14.748 km	15.676 km
	$\bar{\epsilon}_c$	$5.347 fm^{-4}$	$5.351 fm^{-4}$	$5.380 fm^{-4}$	$5.349 fm^{-4}$	$5.350 fm^{-4}$	$5.344 fm^{-4}$	$5.313 fm^{-4}$
	C_{max}	0.176	0.177	0.178	0.176	0.176	0.174	0.170
	$C_{1,4}$	0.097	0.099	0.101	0.098	0.098	0.094	0.089
		Relatividade Geral	gravidade Rastall Generalizada					
		TOV	(RT) _{β1}	(RT) _{β2}	(RT) _{β3}	(RT) _{β4}	(RT) _{β5}	(RT) _{β6}
Parâmetros	β	0.0	2×10^{-5}	1×10^{-4}	3×10^{-4}	5×10^{-4}	8×10^{-4}	-1×10^{-4}
	α	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
TM1	M_{max}	$2.183 M_{\odot}$	$2.185 M_{\odot}$	$2.194 M_{\odot}$	$2.215 M_{\odot}$	$2.237 M_{\odot}$	$2.271 M_{\odot}$	$2.172 M_{\odot}$
	$R_{1,4}$	14.322 km	14.365 km	14.568 km	15.067 km	15.595 km	16.366 km	14.075 km
	$\bar{\epsilon}_c$	$5.347 fm^{-4}$	$5.348 fm^{-4}$	$5.267 fm^{-4}$	$5.133 fm^{-4}$	$4.974 fm^{-4}$	$4.760 fm^{-4}$	$5.427 fm^{-4}$
	C_{max}	0.176	0.176	0.175	0.173	0.171	0.169	0.177
	$C_{1,4}$	0.097	0.097	0.096	0.092	0.089	0.085	0.099

Tabela 13 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores dos parâmetros α e β correspondentes ao diagrama massa-raio na figura 21. As quantidades M_{max} , $R_{1,4}$, $\bar{\epsilon}_c$, C_{max} e $C_{1,4}$ são, respectivamente, à massa máxima, raio da estrela canônica, densidade de energia central e compacticidade.

variações semelhantes das grandezas macroscópicas (em comparação com o uso das equações TOV) sendo independentes da EoS nuclear escolhida (nas duas representativas analisadas neste Capítulo). Além disso, embora a versão generalizada da gravidade Rastall permita mais flexibilidade no cálculo das propriedades macroscópicas estelares devido à inclusão de dois parâmetros independentes, ela não corrige as advertências existentes da EoS. Portanto, uma EoS que satisfaça as propriedades da matéria nuclear medidas em laboratório ainda é necessária como *input* para as equações da Rastall generalizada.

4.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste Capítulo, generalizamos a teoria da gravidade de Rastall. A gravidade original de Rastall quebra a lei de conservação do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ fazendo $T^{\mu}_{\nu;\mu} = A_{\nu} = \lambda R_{,\nu}$, onde uma dependência do escalar de curvatura R aparece na derivada de $T^{\mu}_{\nu;\mu}$. Propusemos que esta derivada também dependa do traço do tensor energia-momento, T , ou seja, a função A_{ν} é dada agora por $A_{\nu} = (\alpha \delta^{\mu}_{\nu} R + \beta \delta^{\mu}_{\nu} RT)_{;\mu}$. Inicialmente discutimos a solução externa no caso de um espaço-tempo com simetria esférica. Salientamos que a solução com $R = 0$ representa o campo gravitacional fora de uma massa esférica em nosso sistema e, ao contrário da RG, a solução de vácuo no contexto da gravidade de Rastall generalizada fornece dois tipos de soluções espaço-temporais, dependendo da escolha do traço do tensor energia-momento. Esta

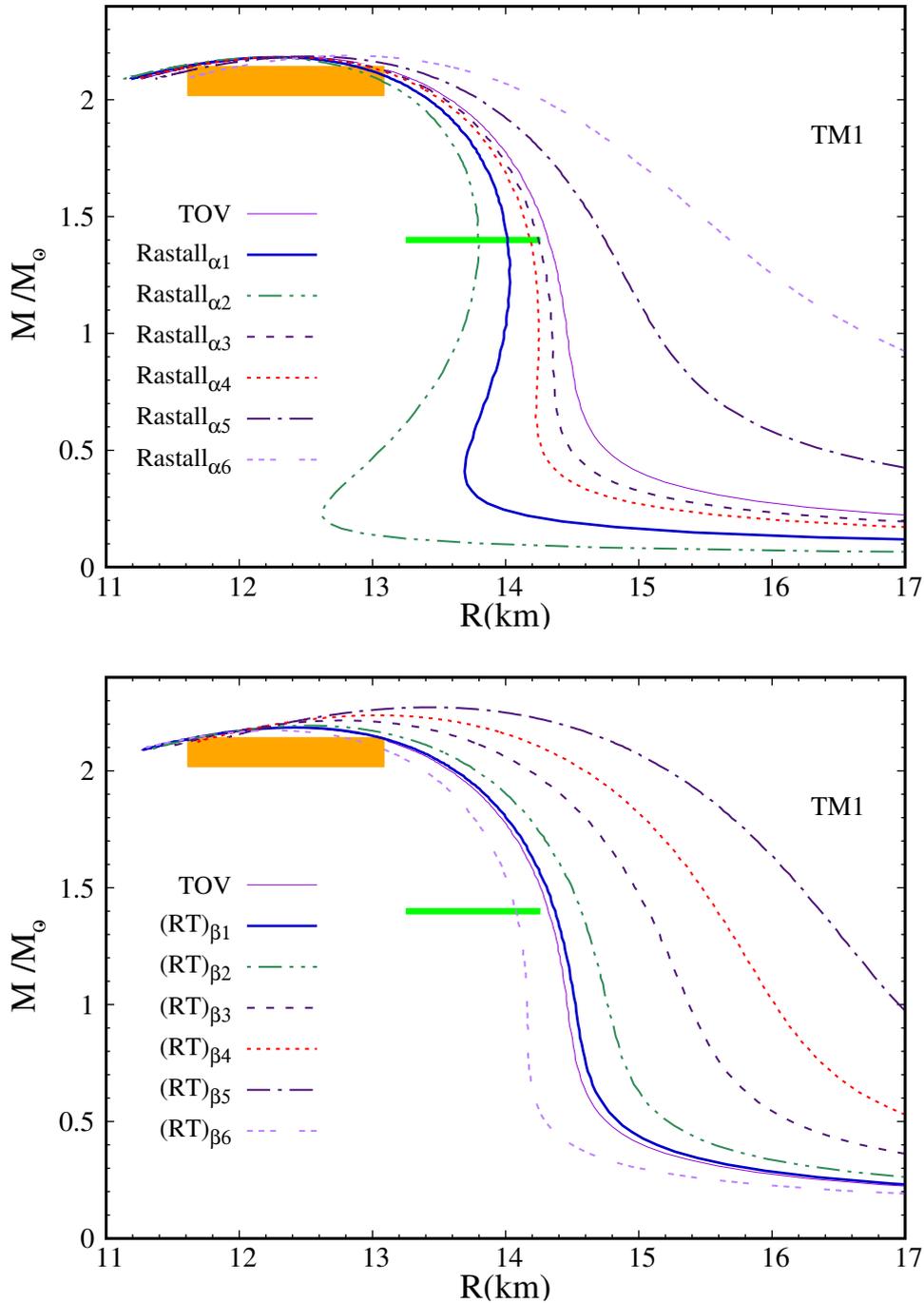


Figura 21 – Relação massa-raio para uma família de estrelas hadrônicas descritas com a EoS TM1. Analisamos os efeitos causados pela variação do parâmetro α (superior), mantendo o parâmetro β nulo, e os efeitos da variação do parâmetro β (inferior), mantendo α nulo. O segmento de linha verde e a região retangular laranja correspondem respectivamente à faixa de raio de $1,4M_{\odot}$ para PREX-2 e $2,08 \pm 0,07M_{\odot}$ PSR J0740 + 6620.

propriedade da solução externa pode ser uma característica intrínseca da teoria generalizada, visto que outras opções para quebrar a lei de conservação levam ao mesmo resultado. Além disso, estudamos cuidadosamente o limite newtoniano da teoria e mos-

		TOV	GRT _{α1}	GRT _{α2}	GRT _{α3}	GRT _{α4}	GRT _{α5}	GRT _{α6}
Parâmetros	α	0.0	1×10^{-5}	2×10^{-5}	2×10^{-6}	4×10^{-6}	-1×10^{-5}	-3×10^{-5}
	β	0.0	5×10^{-4}	5×10^{-4}	5×10^{-4}	5×10^{-4}	5×10^{-4}	5×10^{-4}
TM1	M_{max}	$2.183 M_{\odot}$	$2.236 M_{\odot}$	$2.234 M_{\odot}$	$2.237 M_{\odot}$	$2.237 M_{\odot}$	$2.239 M_{\odot}$	$2.243 M_{\odot}$
	$R_{1,4}$	14.322 km	15.221 km	14.949 km	15.493 km	15.423 km	16.130 km	17.234 km
	$\bar{\epsilon}_c$	$5.347 fm^{-4}$	$4.979 fm^{-4}$	$4.982 fm^{-4}$	$4.977 fm^{-4}$	$4.978 fm^{-4}$	$4.971 fm^{-4}$	$4.940 fm^{-4}$
	C_{max}	0.176	0.173	0.174	0.171	0.172	0.169	0.166
	$C_{1,4}$	0.097	0.091	0.093	0.090	0.090	0.086	0.081
		Relatividade Geral	gravidade Rastall Generalizada					
		TOV	GRT _{β1}	GRT _{β2}	GRT _{β3}	GRT _{β4}	GRT _{β5}	GRT _{β6}
Parâmetros	β	0.0	1×10^{-5}	1×10^{-4}	3×10^{-4}	5×10^{-4}	7×10^{-4}	-1×10^{-4}
	α	0.0	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}
TM1	M_{max}	$2.183 M_{\odot}$	$2.182 M_{\odot}$	$2.192 M_{\odot}$	$2.213 M_{\odot}$	$2.236 M_{\odot}$	$2.258 M_{\odot}$	$2.171 M_{\odot}$
	$R_{1,4}$	14.322 km	14.041 km	14.250 km	14.730 km	15.222 km	15.749 km	13.778 km
	$\bar{\epsilon}_c$	$5.347 fm^{-4}$	$5.351 fm^{-4}$	$5.297 fm^{-4}$	$5.138 fm^{-4}$	$4.979 fm^{-4}$	$4.846 fm^{-4}$	$5.431 fm^{-4}$
	C_{max}	0.176	0.177	0.176	0.174	0.173	0.171	0.178
	$C_{1,4}$	0.097	0.099	0.098	0.095	0.091	0.088	0.101

Tabela 14 – Propriedades macroscópicas para diferentes valores dos parâmetros α e β correspondentes ao diagrama massa-raio na figura 22. As quantidades M_{max} , $R_{1,4}$, $\bar{\epsilon}_c$, C_{max} e $C_{1,4}$ são, respectivamente, à massa máxima, raio da estrela canônica, densidade de energia central e compacticidade.

tramos que o parâmetro gravitacional k depende do parâmetro α em contraste com o valor constante $k = 8\pi G$ na relatividade geral e o parâmetro β deve ser desprezível no caso de um campo gravitacional fraco.

Testamos a teoria em estrelas de nêutrons usando as parametrizações IU-FSU (FATTOYEV *et al.*, 2010) e TM1 (SUGAHARA; TOKI, 1994) do modelo tipo Walecka com termos não lineares como *inputs* e notamos um efeito considerável da teoria da gravidade alternativa nas relações massa-raio de estrelas de nêutrons. Os resultados aqui apresentados mostraram que, com pequenos desvios da RG, uma mudança importante no perfil da estrela pode ser obtida dentro dos mesmos *inputs* de física nuclear.

O resultado recente do LIGO-Virgo (ABBOTT, R. *et al.*, 2020) com uma possível estrela de nêutrons de $2,5 - 2,67 M_{\odot}$ também é de particular interesse em nossa teoria. Os autores na ref. (LOPES, Luiz L; MENEZES, Debora P, 2021) discutiram que para o limite atual das restrições observacionais, há a possibilidade deste objeto massivo ser diferentes classes de objetos compactos: estrelas de nêutrons hadrônicas com apenas núcleons, estrelas hadrônicas com núcleons e híperons, estrelas híbridas com núcleons e quarks, estrelas híbridas com núcleons, híperons e quarks, e estrelas estranhas satisfazendo a conjectura de Bodmer-Witten (WITTEN, 1984).

Se tal objeto massivo for confirmado por observações futuras, será um grande desafio para a comunidade de objetos compactos descrevê-lo. Do ponto de vista da física nuclear, é necessário uma EoS muito rígida em altas densidades para suportar

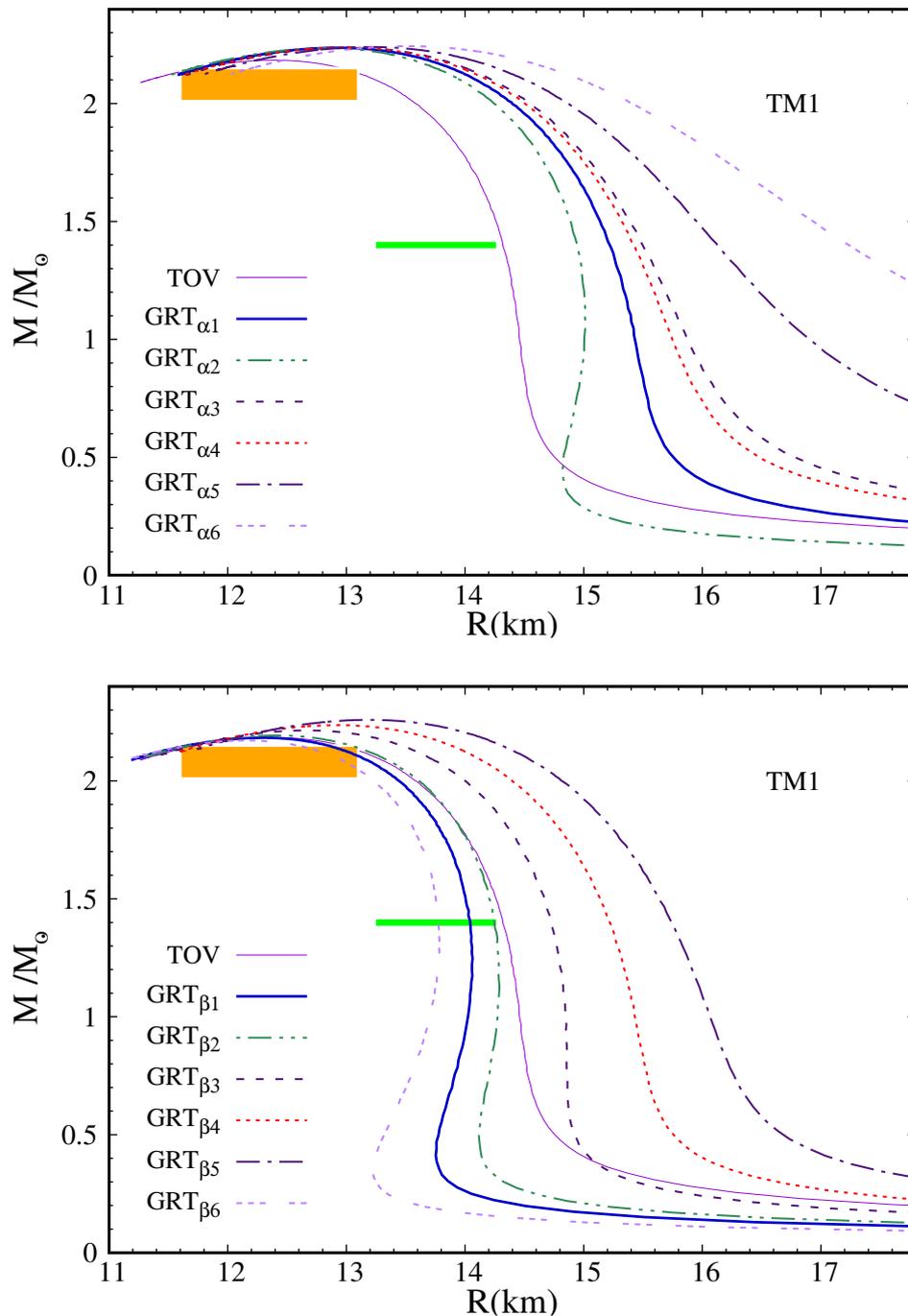


Figura 22 – Relação massa-raio para uma família de estrelas hadrônicas descritas com a EoS TM1. Analisamos os efeitos causados pela variação do parâmetro α (superior) enquanto mantemos o parâmetro β fixo e os efeitos da variação do parâmetro β (inferior) enquanto mantemos α fixo. O segmento de linha verde e a região retangular laranja correspondem respectivamente à faixa de raio de $1,4M_{\odot}$ para PREX-2 e $2,08 \pm 0,07M_{\odot}$ PSR J0740 + 6620.

uma massa máxima tão alta com uma EoS macia em baixas densidades para manter um raio da ordem de 11.0 km para a estrela canônica. Do ponto de vista da gravidade, pode-se explorar teorias além da RG, como as examinadas na presente tese. Por

fim, neste Capítulo, generalizamos os resultados encontrados em (OLIVEIRA *et al.*, 2015) e, além disso, consideramos a possibilidade de combinações mais complexas de matéria e geometria que podem ser associadas a configurações realistas da matéria em estrelas de nêutrons.

Este trabalho foi publicado no *International Journal of Modern Physics D* (IJMPD) (MOTA, Clésio E. *et al.*, 2022b). O *paper* encontra-se incluído no Apêndice B.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

No presente trabalho investigamos as propriedades macroscópicas (massas e raios) de estruturas estelares compactas estáveis, com foco em estrelas de nêutrons, no âmbito das teorias de gravidade modificada. Neste íterim, fez-se uso de duas propostas distintas: de uma teoria de gravidade modificada, a teoria Rastall-Rainbow (RR) e uma generalização da teoria da gravidade de Rastall. Para a descrição da matéria nuclear no interior desses objetos, utilizamos um conjunto de EoS que descrevem tanto matéria de quarks quanto matéria hadrônica:

- Matéria de quarks - usamos o modelo de sacola do MIT restrito a valores de parâmetros que satisfazem a conjectura de Bodmer-Witten (ITOH, 1970; BODMER, 1971a; WITTEN, 1984; TORRES, J.; MENEZES, D., 2013).
- Matéria hadrônica - fez-se uso de um modelo da hadrodinâmica quântica, o modelo de Walecka não-linear (NLWM), restrito às parametrizações IU-FSU que satisfaz diversas propriedades nucleares (DUTRA, M. *et al.*, 2014) e astrofísicas (DUTRA, Mariana; LOURENÇO; MENEZES, Débora P., 2016), e à parametrização TM1, capaz de reproduzir estrelas com massas máximas da ordem de $2.0 M_{\odot}$. Também utilizamos o modelo QMC, com as EoS para duas versões do modelo, são elas: QMC e QMC _{$\omega\rho$} .

Quanto às equações usadas para computar as massas e raios das estrelas compactas, foram obtidas primeiramente na relatividade geral e posteriormente nas gravidades alternativas. Como vimos, as equações TOV são deduzidas a partir das equações de campo de Einstein considerando a estrela como uma distribuição de matéria esfericamente simétrica, estática e que se comporta como um fluido perfeito, uma aproximação razoável para estrelas compactas. Podemos perceber que no âmbito dos modelos de gravidade modificada aqui explorados, as modificações no cenário gravitacional devido a essas teorias, podem ser repassadas por um tensor energia-momento efetivo no lado direito das equações de campo, e, portanto, quando aplicadas para o interior estelar, gera equações funcionalmente análogas a TOV com quantidades ρ e ε repassadas por meio de quantidades efetivas $\bar{\rho}$ e $\bar{\varepsilon}$.

As propriedades macroscópicas obtidas a partir da combinação EoS + equações relativística para o equilíbrio hidrostático, foram, por sua vez, confrontadas com as observadas pelos astrofísicos a partir dos seguintes resultados:

- Estrela de nêutrons no binário de raio-X de baixa massa quiescente (LMXB) NGC 6397 (GRINDLAY *et al.*, 2001; GUILLOT; RUTLEDGE; BROWN, 2011; HEINKE *et al.*, 2014), a qual fornece uma restrição com nível de confiança de 68% sobre os valores possíveis das massas e raios de estrelas de nêutrons.
- Da recente missão NICER, que relatou observações de pulsares para estrelas de nêutrons canônica ($1,4 M_{\odot}$) e massiva ($2,0 M_{\odot}$), com restrições de

$11,80 \text{ km} \leq R_{1,4} \leq 13,10 \text{ km}$ para $1,4 M_{\odot}$ PSR J0030+0451 (MILLER *et al.*, 2019) e $11,60 \text{ km} \leq R \leq 13,10 \text{ km}$ para uma estrela de nêutrons com massa na faixa $2,01 M_{\odot} \leq M \leq 2,15 M_{\odot}$ PSR J0740+6620 (MILLER *et al.*, 2021).

- Da medição recente da pele de nêutrons em ^{208}Pb pelo PREX-2 para restringir a dependência da densidade da energia de simetria da EoS (REED *et al.*, 2021), onde, notavelmente, pode-se conectar essa restrição às previsões de raio de estrela de nêutrons, o que resultou na previsão do raio canônico $R_{1,4}$ de $13,25 \text{ km} \lesssim R_{1,4} \lesssim 14,26 \text{ km}$.
- De duas estrelas massivas descobertas em 2010 e 2013, a saber, PSR J1614+2230 (DEMOREST *et al.*, 2010) com massa $1,97 \pm 0,04 M_{\odot}$ e PSR J0348+0432 (ANTONIADIS *et al.*, 2013) com massa $2,01 \pm 0,04 M_{\odot}$.

No Capítulo 3, investigamos estrelas de nêutrons na gravidade RR. Verificamos que independentemente do modelo de física nuclear considerado, é a combinação de ambas as teorias que permite que a massa máxima aumente enquanto o raio da estrela canônica diminui. Portanto, conseguimos obter configurações estelares com massa máxima acima de $2,0 M_{\odot}$, em simultâneo, conseguimos ajustar o raio da estrela canônica nas restrições impostas pelos resultados da NGC 6397. Concluimos que todos os modelos estudados podem produzir propriedades macroscópicas no intervalo atualmente aceito para uma variedade de parâmetros.

Ainda no Capítulo 3, foram estudadas estrelas compactas e anisotrópicas no formalismo da RR. Obtivemos um conjunto de parâmetros que atendem às restrições impostas pelos resultados da NGC 6397. No entanto, os novos resultados do NICER e da colaboração PREX estabeleceram restrições mais fortes no raio de estrelas compactas, nem sempre compatíveis entre si. Para a faixa de parâmetros explorada neste tópico, podemos ver que para o caso de estrelas hadrônicas, a combinação da gravidade RR e efeitos anisotrópicos pode produzir propriedades macroscópicas na faixa atualmente imposta pelas recentes observações astrofísicas. Obter os mesmos raios para estrelas massivas e canônicas é geralmente muito difícil se uma EoS realista for usada e os resultados macroscópicos forem computados com as equações TOV, como pode ser constatado pelas curvas roxas exibidas nas figs. 17 e 18. Por outro lado, no caso de estrelas de quarks, nossos resultados teóricos não são compatíveis com os dados astrofísicos mencionados. Em contraste, eles são compatíveis com estrelas massivas PSR J1614+2230 e PSR J0348+0432. Quanto a restrição imposta pelo experimento PREX, esta precisa ser confirmada com experimentos mais refinados e análises teóricas.

No Capítulo 4, analisamos estrelas de nêutrons na gravidade Rastall generalizada. Vimos que essa proposta de generalização possibilitou obter bons resultados para massas máximas e raios correspondentes, conforme os vínculos astrofísicos. Portanto, embora a versão generalizada da gravidade de Rastall permita uma maior

flexibilidade no cálculo das propriedades macroscópicas estelares devido à inclusão de dois parâmetros independentes, ela não corrige as ressalvas existentes da EoS.

Por fim, tendo por base os modelos de gravidade modificada aqui explorados, somadas a algumas EoS representativas aqui utilizadas, concluímos ser possível descrever estruturas estelares compactas e estáveis nesses cenários de gravidade, com massas e raios que reproduzem as observações astrofísicas.

Cabe salientar que os dados fornecidos pela astrofísica observacional sobre as possíveis massas e raios de estrelas compactas têm sido atualizados dinamicamente nos últimos meses. Os trabalhos publicados (Apêndice B) a partir desta pesquisa foram construídos com base nos vínculos astrofísicos disponíveis na época, e, portanto, vínculos disponíveis a partir de então só poderão ser explorados em outra análise.

A continuação natural desta tese será a aplicação dessa teoria em estrelas de nêutrons com rotação. Para esse fim, poderemos utilizar o formalismo de Hartle - Thorne (HARTLE; THORNE, 1968), formalismo este que viabiliza descrever estruturas estelares em baixa rotação.

Também como continuação podemos mencionar a utilização da metodologia de análise de referência Bayesiana para estimar os parâmetros dos modelos; e a investigação da aplicabilidade dessas gravidades em sistema regido pela física newtoniana.

REFERÊNCIAS

ABBOTT, B. P. *et al.* GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. **Phys. Rev. Lett.**, v. 119, n. 16, p. 161101, 2017. arXiv: 1710.05832 [gr-qc].

ABBOTT, B. P. *et al.* Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. **Phys. Rev. Lett.**, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016. arXiv: 1602.03837 [gr-qc].

ABBOTT, B. P.; AL., *et.* GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 119, p. 161101, 16 out. 2017.

ABBOTT, Richard *et al.* GW190814: Gravitational waves from the coalescence of a 23 solar mass black hole with a 2.6 solar mass compact object. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 896, n. 2, p. L44, 2020.

ABDALLA, M. C. B.; NOJIRI, Shin'ichi; ODINTSOV, Sergei D. Consistent modified gravity: Dark energy, acceleration and the absence of cosmic doomsday. **Class. Quant. Grav.**, v. 22, p. l35, 2005. arXiv: hep-th/0409177 [hep-th].

AGRAWAL, B. K. Asymmetric nuclear matter and neutron-skin in extended relativistic mean field model. **Phys. Rev. C**, v. 81, p. 034323, 2010. arXiv: 1003.3295 [nucl-th].

ALLEMANDI, Gianluca; BOROWIEC, Andrzej; FRANCAVIGLIA, Mauro; ODINTSOV, Sergei D. Dark energy dominance and cosmic acceleration in first order formalism. **Phys. Rev.**, v. D72, p. 063505, 2005. arXiv: gr-qc/0504057 [gr-qc].

ALLOY, Marcelo D.; MENEZES, Débora P. Maxwell equation violation by density dependent magnetic fields in neutron stars. *In*: WORLD SCIENTIFIC. INTERNATIONAL Journal of Modern Physics: Conference Series. [S.l.: s.n.], 2017. v. 45, p. 1760031.

AMELINO-CAMELIA, G.; ELLIS, John R.; MAVROMATOS, N. E.; NANOPOULOS, Dimitri V.; SARKAR, Subir. Tests of quantum gravity from observations of gamma-ray bursts. **Nature**, v. 393, p. 763–765, 1998. arXiv: astro-ph/9712103 [astro-ph].

AMELINO-CAMELIA, Giovanni. Relativity in space-times with short distance structure governed by an observer independent (Planckian) length scale. **Int. J. Mod. Phys.**, v. D11, p. 35–60, 2002. arXiv: gr-qc/0012051 [gr-qc].

AMELINO-CAMELIA, Giovanni. Testable scenario for relativity with minimum length. **Phys. Lett.**, B510, p. 255–263, 2001. arXiv: hep-th/0012238 [hep-th].

AMELINO-CAMELIA, Giovanni; KOWALSKI-GLIKMAN, Jerzy; MANDANICI, Gianluca; PROCACCINI, Andrea. Phenomenology of doubly special relativity. **Int. J. Mod. Phys.**, A20, p. 6007–6038, 2005. arXiv: gr-qc/0312124 [gr-qc].

ANBER, Mohamed M.; DONOGHUE, John F. On the running of the gravitational constant. **Phys. Rev. D**, v. 85, p. 104016, 2012. arXiv: 1111.2875 [hep-th].

ANTONIADIS, John *et al.* A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary. **Science**, v. 340, p. 6131, 2013. arXiv: 1304.6875 [astro-ph.HE].

ARBAÑIL, José D. V.; MALHEIRO, M. Radial stability of anisotropic strange quark stars. **JCAP**, v. 1611, n. 11, p. 012, 2016. arXiv: 1607.03984 [astro-ph.HE].

AWAD, Adel; ALI, Ahmed Farag; MAJUMDER, Barun. Nonsingular Rainbow Universes. **JCAP**, v. 1310, p. 052, 2013. arXiv: 1308.4343 [gr-qc].

BAYIN, Selçuk Ş. Anisotropic Fluid Spheres in General Relativity. **Phys. Rev.**, v. D26, p. 1262, 1982.

BAYM, Gordon; PETHICK, Christopher; SUTHERLAND, Peter. The Ground state of matter at high densities: Equation of state and stellar models. **Astrophys. J.**, v. 170, p. 299–317, 1971.

BERTOLAMI, Orfeu; BOEHMER, Christian G.; HARKO, Tiberiu; LOBO, Francisco S. N. Extra force in $f(R)$ modified theories of gravity. **Phys. Rev.**, v. D75, p. 104016, 2007. arXiv: 0704.1733 [gr-qc].

BERTOLAMI, Orfeu; BOEHMER, Christian G.; HARKO, Tiberiu; LOBO, Francisco S. N. Extra force in $f(R)$ modified theories of gravity. **Phys. Rev.**, v. D75, p. 104016, 2007. arXiv: 0704.1733 [gr-qc].

BIESDORF, C. **Modelos efetivos e transição de fases na cromodinâmica quântica**. Florianópolis: Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2019.

BJORKEN, James D.; DRELL, Sidney D. *Relativistic quantum fields*, 1965.

BLANDFORD, RD; HERNQUIST, L. Magnetic susceptibility of a neutron star crust. **Journal of Physics C: Solid State Physics**, IOP Publishing, v. 15, n. 30, p. 6233, 1982.

BODMER, A. R. Collapsed Nuclei. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 4, p. 1601–1606, 6 set. 1971.

BODMER, A. R. Collapsed nuclei. **Phys. Rev. D**, v. 4, p. 1601–1606, 1971.

BOGUTA, J.; BODMER, A. R. Relativistic Calculation of Nuclear Matter and the Nuclear Surface. **Nucl. Phys.**, A292, p. 413–428, 1977.

BONDI, Hermann. Anisotropic spheres in general relativity. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 259, n. 2, p. 365–368, nov. 1992. ISSN 0035-8711.

BOWERS, Richard L.; LIANG, E. P. T. Anisotropic Spheres in General Relativity. **Astrophys. J.**, v. 188, p. 657, 1974.

BOWERS, Richard L.; LIANG, E. P. T. Anisotropic Spheres in General Relativity., v. 188, p. 657, mar. 1974.

BRODERICK, A; PRAKASH, M; LATTIMER, JM. The equation of state of neutron star matter in strong magnetic fields. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 537, n. 1, p. 351, 2000.

BRUNO, N. R.; AMELINO-CAMELIA, G.; KOWALSKI-GLIKMAN, J. Deformed boost transformations that saturate at the Planck scale. **Phys. Lett.**, B522, p. 133–138, 2001. arXiv: hep-th/0107039 [hep-th].

BUCHDAHL, H. A. Non-linear Lagrangians and cosmological theory., v. 150, p. 1, jan. 1970.

- BURGAY, Marta *et al.* An Increased estimate of the merger rate of double neutron stars from observations of a highly relativistic system. **Nature**, v. 426, p. 531–533, 2003. arXiv: astro-ph/0312071 [astro-ph].
- BURROWS, A. Supernova explosions in the universe. **Nature**, v. 403, p. 727–733, 2000.
- CAMENZIND, Max. **Compact Objects in Astrophysics: White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes**, Springer-Verlag, New York, 2007.
- CAPANO, Collin D.; TEWS, Ingo; BROWN, Stephanie M.; MARGALIT, Ben; DE, Soumi; KUMAR, Sumit; BROWN, Duncan A.; KRISHNAN, Badri; REDDY, Sanjay. Stringent constraints on neutron-star radii from multimessenger observations and nuclear theory. **Nature Astron.**, v. 4, n. 6, p. 625–632, 2020. arXiv: 1908.10352 [astro-ph.HE].
- CAPOZZIELLO, Salvatore; DE LAURENTIS, Mariafelicia. Extended Theories of Gravity. **Phys. Rept.**, v. 509, p. 167–321, 2011. arXiv: 1108.6266 [gr-qc].
- CARDOSO, J. G; WHITNEY, C. K *et al.* **Advances in general relativity research**. New York: Nova Publishers, 2015.
- CARDOSO, Pedro H. G.; NUNES DA SILVA, Tiago; DEPPMAN, Airton; MENEZES, Débora P. Quark matter revisited with non extensive MIT bag model. **Eur. Phys. J. A**, v. 53, n. 10, p. 191, 2017. arXiv: 1706.02183 [nucl-th].
- CARMELI, M. **Group Theory and General Relativity**. New York: McGraw-Hill, 1977.
- CARROLL, Sean M. **Spacetime and geometry: An introduction to General Relativity**, Addison-Wesley, New York, 2003.
- CHAICHIAN, M.; MASOOD, S. S.; MONTONEN, C.; PEREZ MARTINEZ, Aurora; PEREZ ROJAS, H. Quantum magnetic and gravitational collapse. **Phys. Rev. Lett.**, v. 84, p. 5261–5264, 2000. arXiv: hep-ph/9911218 [hep-ph].
- CHAKRABARTY, Somenath. Quark matter in a strong magnetic field. **Physical Review D**, APS, v. 54, n. 2, p. 1306, 1996.

CHATTERJEE, Debarati; ELGHOZI, Thomas; NOVAK, Jerome; OERTEL, Micaela. Consistent neutron star models with magnetic field dependent equations of state. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 447, p. 3785, 2015. arXiv: 1410.6332 [astro-ph.HE].

CHATTERJEE, Debarati; NOVAK, Jérôme; OERTEL, Micaela. Magnetic field distribution in magnetars. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 99, p. 055811, 5 mai. 2019.

CHODOS, A.; JAFFE, R. L.; JOHNSON, K.; THORN, Charles B.; WEISSKOPF, V. F. A New Extended Model of Hadrons. **Phys. Rev.**, v. D9, p. 3471–3495, 1974.

COGNOLA, G.; ELIZALDE, E.; NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D.; SEBASTIANI, L.; ZERBINI, S. A Class of viable modified $f(R)$ gravities describing inflation and the onset of accelerated expansion. **Phys. Rev.**, v. D77, p. 046009, 2008. arXiv: 0712.4017 [hep-th].

CROMARTIE, H. T. *et al.* Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar. **Nature Astron.**, v. 4, n. 1, p. 72–76, 2019. arXiv: 1904.06759 [astro-ph.HE].

DARABI, F.; MORADPOUR, H.; LICATA, I.; HEYDARZADE, Y.; CORDA, C. Einstein and Rastall Theories of Gravitation in Comparison. **Eur. Phys. J. C**, v. 78, p. 25, 2018. arXiv: 1712.09307 [gr-qc].

DAS, Dipanjana; DUTTA, Sourav; CHAKRABORTY, Subenoy. Cosmological consequences in the framework of generalized Rastall theory of gravity. **Eur. Phys. J.**, v. C78, n. 10, p. 810, 2018. arXiv: 1810.11260 [gr-qc].

DAS, HC; KUMAR, Ankit; PATRA, SK. Dark matter admixed neutron star as a possible compact component in the GW190814 merger event. **Phys. Rev. D**, APS, v. 104, n. 6, p. 063028, 2021.

DE FELICE, Antonio; TSUJIKAWA, Shinji. $f(R)$ theories. **Living Rev. Rel.**, v. 13, p. 3, 2010. arXiv: 1002.4928 [gr-qc].

DE MORAES, W. A. G.; SANTOS, A. F. Lagrangian formalism for Rastall theory of gravity and Gödel-type universe. **Gen. Rel. Grav.**, v. 51, n. 12, p. 167, 2019. arXiv: 1912.06471 [gr-qc].

DEMOREST, Paul; PENNUCCI, Tim; RANSOM, Scott; ROBERTS, Mallory; HESSELS, Jason. Shapiro Delay Measurement of A Two Solar Mass Neutron Star. **Nature**, v. 467, p. 1081–1083, 2010. arXiv: 1010.5788 [astro-ph.HE].

DEXHEIMER, V; MENEZES, D P; STRICKLAND, M. The influence of strong magnetic fields on proto-quark stars. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, IOP Publishing, v. 41, n. 1, p. 015203, dez. 2013.

DIRAC, P. A. M. **General Theory of Relativity**. New Jersey: Princeton University Press, 1996.

DUTRA, M.; LOURENÇO, O.; AVANCINI, S. S.; CARLSON, B. V.; DELFINO, A.; MENEZES, D. P.; PROVIDÊNCIA, C.; TYPEL, S.; STONE, J. R. Relativistic Mean-Field Hadronic Models under Nuclear Matter Constraints. **Phys. Rev.**, v. C90, n. 5, p. 055203, 2014. arXiv: 1405.3633 [nucl-th].

DUTRA, Mariana; LOURENÇO, Odilon; MENEZES, Débora P. Stellar properties and nuclear matter constraints. **Phys. Rev.**, v. C93, n. 2, p. 025806, 2016. [Erratum: Phys. Rev.C94,no.4,049901(2016)]. arXiv: 1510.02060 [astro-ph.HE].

EINSTEIN, Albert. Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. **Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)**, p. 831–839, jan. 1915.

EKŞİ, Kazım Yavuz; GÜNGÖR, Can; TÜRKÖĞLU, Murat Metehan. What does a measurement of mass and/or radius of a neutron star constrain: Equation of state or gravity? **Phys. Rev.**, v. D89, n. 6, p. 063003, 2014. arXiv: 1402.0488 [astro-ph.HE].

EVENT HORIZON TELESCOPE COLLABORATION. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. **apjl**, v. 875, n. 1, L1, p. l1, abr. 2019. arXiv: 1906.11238 [astro-ph.GA].

FABRIS, J. C. Conservation Laws in Gravitation and Cosmology. *In*. arXiv: 1208.4649 [gr-qc].

FANTINA, A. F.; DE RIDDER, S.; CHAMEL, N.; GULMINELLI, F. Crystallization of the outer crust of a non-accreting neutron star. **Astron. Astrophys.**, v. 633, a149, 2020. arXiv: 1912.02849 [astro-ph.HE].

FATTOYEV, F. J.; HOROWITZ, C. J.; PIEKAREWICZ, J.; SHEN, G. Relativistic effective interaction for nuclei, giant resonances, and neutron stars. **Phys. Rev.**, v. C82, p. 055803, 2010. arXiv: 1008.3030 [nucl-th].

FELIPE, R González; MARTINEZ, A Perez; ROJAS, H Pérez; ORSARIA, M. Magnetized strange quark matter and magnetized strange quark stars. **Physical Review C**, APS, v. 77, n. 1, p. 015807, 2008.

FERRER, Efrain J.; INCERA, Vivian de la; KEITH, Jason P.; PORTILLO, Israel; SPRINGSTEEN, Paul L. Equation of State of a Dense and Magnetized Fermion System. **Phys. Rev.**, v. C82, p. 065802, 2010. arXiv: 1009.3521 [hep-ph].

FLECK, S.; BENTZ, W.; YAZAKI, K.; SHIMIZU, K. A Sigma omega quark model to saturate nuclear matter. **Nucl. Phys. A**, v. 510, p. 731–739, 1990.

FOLOMEEV, Vladimir. Anisotropic neutron stars in R^2 gravity. **Phys. Rev.**, v. D97, n. 12, p. 124009, 2018. arXiv: 1802.01801 [gr-qc].

FONSECA, E. *et al.* Refined Mass and Geometric Measurements of the High-mass PSR J0740+6620. **Astrophys. J. Lett.**, v. 915, n. 1, p. l12, 2021. arXiv: 2104.00880 [astro-ph.HE].

GLENDENNING, N. K. **Compact stars: Nuclear physics, particle physics, and general relativity.** [S.l.: s.n.], 2000.

GONCALVES, Victor P.; LAZZARI, Lucas da S. Uma introdução às estrelas estranhas. **Rev. Bras. Ens. de Fís.**, v. 42, p. 1806–9126, 2020.

GRAMS, Guilherme; SANTOS, Alexandre M.; MENEZES, Débora P. Equation of State Grid with the Quark-Meson-Coupling Model. **Braz. J. Phys.**, v. 46, n. 1, p. 111–119, 2016.

GRAMS, Guilherme; SANTOS, Alexandre M.; PANDA, Prafulla K.; PROVIDÊNCIA, Constança; MENEZES, Débora P. Nuclear pasta phases within the quark-meson coupling model. **Phys. Rev.**, v. C95, n. 5, p. 055807, 2017. arXiv: 1610.06011 [nucl-th].

GRINDLAY, J. E.; HEINKE, C. O.; EDMONDS, P. D.; MURRAY, S. S.; COOL, A. M. Chandra exposes the core collapsed globular cluster NGC 6397. **Astrophys. J.**, v. 563, p. l53, 2001. arXiv: astro-ph/0108265 [astro-ph].

GUICHON, P. A. M.; STONE, J. R.; THOMAS, A. W. Quark–Meson–Coupling (QMC) model for finite nuclei, nuclear matter and beyond. **Prog. Part. Nucl. Phys.**, v. 100, p. 262–297, 2018. arXiv: 1802.08368 [nucl-th].

GUICHON, Pierre A. M. A Possible Quark Mechanism for the Saturation of Nuclear Matter. **Phys. Lett.**, B200, p. 235–240, 1988.

GUILLOT, Sebastien; RUTLEDGE, Robert E.; BROWN, Edward F. Neutron Star Radius Measurement with the Quiescent Low-Mass X-ray Binary U24 in NGC 6397. **Astrophys. J.**, v. 732, p. 88, 2011. arXiv: 1007.2415 [astro-ph.GA].

HANSRAJ, Sudan; BANERJEE, Ayan; CHANNUIE, Phongpichit. Impact of the Rastall parameter on perfect fluid spheres. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 400, p. 320–345, 2019.

HARKO, T. Galactic rotation curves in modified gravity with non-minimal coupling between matter and geometry. **Phys. Rev.**, v. D81, p. 084050, 2010. arXiv: 1004.0576 [gr-qc].

HARKO, Tiberiu; LOBO, Francisco S. N. $f(R, L_m)$ gravity. **Eur. Phys. J. C**, v. 70, p. 373–379, 2010. arXiv: 1008.4193 [gr-qc].

HARKO, Tiberiu; LOBO, Francisco S. N. Generalized curvature-matter couplings in modified gravity. **Galaxies**, v. 2, n. 3, p. 410–465, 2014. arXiv: 1407.2013 [gr-qc].

HARKO, Tiberiu; LOBO, Francisco SN; NOJIRI, Shinâichi; ODINTSOV, Sergei D. $f(R, T)$ gravity. **Phys. Rev.**, APS, v. D84, n. 2, p. 024020, 2011.

HARTLE, James B.; THORNE, Kip S. Slowly Rotating Relativistic Stars. II. Models for Neutron Stars and Supermassive Stars. **Astrophys. J.**, v. 153, p. 807, 1968.

HEBELER, K.; LATTIMER, J. M.; PETHICK, C. J.; SCHWENK, A. Equation of State and Neutron Star Properties Constrained by Nuclear Physics and Observation. **Astrophysical Journal**, v. 773, 11, p. 11, ago. 2013. arXiv: 1303.4662 [astro-ph.SR].

- HEINKE, C. O. *et al.* Improved mass and radius constraints for quiescent neutron stars in ω Cen and NGC 6397. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 444, n. 1, p. 443–456, 2014. arXiv: 1406.1497 [astro-ph.HE].
- HEINTZMANN, H.; HILLEBRANDT, W. Neutron Stars with an Anisotropic Equation of State: Mass, Redshift and Stability. **Astron. Astrophys.**, v. 38, p. 51–55, 1975.
- HENDI, S. H.; BORDBAR, G. H.; PANAHA, B. Eslam; PANAHIYAN, S. Modified TOV in gravity's rainbow: properties of neutron stars and dynamical stability conditions. **JCAP**, v. 1609, n. 09, p. 013, 2016. arXiv: 1509.05145 [hep-th].
- HERRERA, L.; BARRETO, W. General relativistic polytropes for anisotropic matter: The general formalism and applications. **Phys. Rev.**, v. D88, n. 8, p. 084022, 2013. arXiv: 1310.1114 [gr-qc].
- HERRERA, L.; SANTOS, N. O. Local anisotropy in self-gravitating systems. **Phys. Rept.**, v. 286, p. 53–130, 1997.
- HILLEBRANDT, W.; STEINMETZ, K. O. Anisotropic neutron star models - Stability against radial and nonradial pulsations. **Astron. Astrophys.**, v. 53, p. 283–287, 1976.
- HORVAT, Dubravko; ILIJIC, Sasa; MARUNOVIC, Anja. Radial pulsations and stability of anisotropic stars with quasi-local equation of state. **Class. Quant. Grav.**, v. 28, p. 025009, 2011. arXiv: 1010.0878 [gr-qc].
- HORVAT, Dubravko; ILIJIC, Sasa; MARUNOVIC, Anja. Radial pulsations and stability of anisotropic stars with quasi-local equation of state. **Class. Quant. Grav.**, v. 28, p. 025009, 2011. arXiv: 1010.0878 [gr-qc].
- HOUNDJO, M.J.S. Reconstruction of $f(R, T)$ gravity describing matter dominated and accelerated phases. **Int. J. Mod. Phys. D**, v. 21, p. 1250003, 2012. arXiv: 1107.3887 [astro-ph.CO].
- HUANG, Xu-Guang; HUANG, Mei; RISCHKE, Dirk H; SEDRAKIAN, Armen. Anisotropic hydrodynamics, bulk viscosities, and r-modes of strange quark stars with strong magnetic fields. **Physical Review D**, APS, v. 81, n. 4, p. 045015, 2010.

HUI, Lam; NICOLIS, Alberto; STUBBS, Christopher. Equivalence Principle Implications of Modified Gravity Models. **Phys. Rev.**, v. D80, p. 104002, 2009. arXiv: 0905.2966 [astro-ph.CO].

ITOH, Naoki. Hydrostatic equilibrium of hypothetical quark stars. **Progress of Theoretical Physics**, Oxford University Press, v. 44, n. 1, p. 291–292, 1970.

JUNIOR, Ednaldo L. B.; RODRIGUES, Manuel E.; S. SILVA, Marcos V. de. Regular black holes in Rainbow Gravity. **Nucl. Phys. B**, v. 961, p. 115244, 2020. arXiv: 2002.04410 [gr-qc].

KHODADI, M.; NOZARI, K.; SEPANGI, H. R. More on the initial singularity problem in gravities rainbow cosmology. **Gen. Rel. Grav.**, v. 48, n. 12, p. 166, 2016. arXiv: 1602.02921 [gr-qc].

KOIVISTO, Tomi. A note on Covariant conservation of energy momentum in modified gravities. **Class. Quant. Grav.**, v. 23, p. 4289–4296, 2006. arXiv: gr-qc/0505128 [gr-qc].

KOWALSKI-GLIKMAN, Jerzy. Observer independent quantum of mass. **Phys. Lett.**, A286, p. 391–394, 2001. arXiv: hep-th/0102098 [hep-th].

KRAMER, M. *et al.* Tests of general relativity from timing the double pulsar. **Science**, v. 314, p. 97–102, 2006. arXiv: astro-ph/0609417 [astro-ph].

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **The Classical Theory of Fields**. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1975.

LATTIMER, J. M.; PRAKASH, M. The physics of neutron stars. **Science**, v. 304, p. 536–542, 2004. arXiv: astro-ph/0405262.

LINDBLOM, L.; HISCOCK, W. A. Criticism of some non-conservative gravitational theories. **J. Phys. A: Math. Gen.**, v. 15, p. 1827, 1982.

LOBO, Iarley P.; RICHARTE, Martin G.; MORAIS GRAÇA, J.P.; MORADPOUR, H. Thin-shell wormholes in Rastall gravity. **Eur. Phys. J. Plus**, v. 135, n. 7, p. 550, 2020. arXiv: 2007.05641 [gr-qc].

LOPES, Luiz L.; MENEZES, Debora P. On the nature of the mass-gap object in the GW190814 event. **arXiv preprint arXiv:2111.02247**, 2021.

LOPES, Luiz L.; MENEZES, Debora P. On Magnetized Neutron Stars. **JCAP**, v. 1508, n. 08, p. 002, 2015. arXiv: 1411.7209 [astro-ph.HE].

LOPES, Luiz L.; MENEZES, Debora P. Role of vector channel in different classes of (non) magnetized neutron stars. **Eur. J. Phys. A**, v. 56, p. 122, 2020. arXiv: 1909.05400 [astro-ph.HE].

LOURENÇO, Odilon; DUTRA, Mariana; LENZI, César H.; FLORES, César V.; MENEZES, Débora P. Consistent relativistic mean field models constrained by GW170817. **Phys. Rev.**, v. C99, n. 4, p. 045202, 2019. arXiv: 1812.10533 [nucl-th].

LYNE, A. G. *et al.* A Double - pulsar system - A Rare laboratory for relativistic gravity and plasma physics. **Science**, v. 303, p. 1153–1157, 2004. arXiv: astro-ph/0401086 [astro-ph].

MAGGIORE, Michele. **Gravitational Waves. Vol. 2: Astrophysics and Cosmology.** [S.].: Oxford University Press, mar. 2018. ISBN 978-0-19-857089-9.

MAGUEIJO, Joao; SMOLIN, Lee. Generalized Lorentz invariance with an invariant energy scale. **Phys. Rev.**, v. D67, p. 044017, 2003. arXiv: gr-qc/0207085 [gr-qc].

MAGUEIJO, Joao; SMOLIN, Lee. Gravity's rainbow. **Class. Quant. Grav.**, v. 21, p. 1725–1736, 2004. arXiv: gr-qc/0305055 [gr-qc].

MAGUEIJO, Joao; SMOLIN, Lee. Lorentz invariance with an invariant energy scale. **Phys. Rev. Lett.**, v. 88, p. 190403, 2002. arXiv: hep-th/0112090 [hep-th].

MAK, M. K.; HARKO, T. Anisotropic stars in general relativity. **Proc. Roy. Soc. Lond.**, A459, p. 393–408, 2003. arXiv: gr-qc/0110103 [gr-qc].

MALIK, Tuhin; ALAM, N.; FORTIN, M.; PROVIDÊNCIA, C.; AGRAWAL, B. K.; JHA, T. K.; KUMAR, Bharat; PATRA, S. K. GW170817: constraining the nuclear matter equation of state from the neutron star tidal deformability. **Phys. Rev.**, v. C98, n. 3, p. 035804, 2018. arXiv: 1805.11963 [nucl-th].

MARGALIT, Ben; METZGER, Brian D. Constraining the Maximum Mass of Neutron Stars From Multi-Messenger Observations of GW170817. **Astrophys. J.**, v. 850, n. 2, p. l19, 2017. arXiv: 1710.05938 [astro-ph.HE].

MARQUEZ, K. D. **Conversão de fases em estrelas compactas**. Florianópolis: Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2018.

MENEZES, Débora Peres. A Neutron Star Is Born. **Universe**, v. 7, n. 8, p. 267, 2021. arXiv: 2106.09515 [astro-ph.HE].

MEYER, Harvey B. QCD at non-zero temperature from the lattice. **PoS, LATTICE2015**, p. 014, 2016. arXiv: 1512.06634 [hep-lat].

MILLER, M. C. *et al.* The Radius of PSR J0740+6620 from NICER and XMM-Newton Data. **Astrophys. J. Lett.**, v. 918, n. 2, p. l28, 2021. arXiv: 2105.06979 [astro-ph.HE].

MILLER, M. C. *et al.* **The Astrophysical Journal**, v. 887, n. 1, p. l24, 2019.

MORADPOUR, H.; HEYDARZADE, Y.; DARABI, F.; SALAKO, Ines G. A Generalization to the Rastall Theory and Cosmic Eras. **Eur. Phys. J. C**, v. 77, n. 4, p. 259, 2017. arXiv: 1704.02458 [gr-qc].

MORADPOUR, H.; HEYDARZADE, Y.; DARABI, F.; SALAKO, Ines G. A Generalization to the Rastall Theory and Cosmic Eras. **Eur. Phys. J.**, v. C77, n. 4, p. 259, 2017. arXiv: 1704.02458 [gr-qc].

MOTA, C. E. **Funções de onda clássicas para grávitons em espaços-tempo curvos sem torção**. Joinville: Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2017.

MOTA, Clésio E.; SANTOS, Luis C. N.; GRAMS, Guilherme; SILVA, Franciele M. da; MENEZES, Débora P. Combined Rastall and Rainbow theories of gravity with applications to neutron stars. **Phys. Rev. D**, v. 100, n. 2, p. 024043, 2019. arXiv: 1905.01250 [astro-ph.HE].

MOTA, Clésio E.; SANTOS, Luis C. N.; SILVA, Franciele M. da; FLORES, Cesar V.; SILVA, Tiago J. N. da; MENEZES, Débora P. Anisotropic Compact Stars in Rastall-Rainbow Gravity. **Class. Quantum Grav.**, v. 39, n. 8, p. 085008, 2022.

MOTA, Clésio E.; SANTOS, Luis C. N.; SILVA, Franciele M. da; GRAMS, Guilherme; LOBO, Iarley P.; MENEZES, Débora P. Generalized Rastall's gravity and its effects on compact objects. **Int. J. Mod. Phys. D**, v. 31, n. 04, p. 2250023, 2022. arXiv: 2007.01968 [gr-qc].

NAMBU, Yoichiro; JONA-LASINIO, G. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. 1. **Phys. Rev.**, v. 122, p. 345–358, 1961. [,127(1961)].

NILSSON, Nils Albin; DABROWSKI, Mariusz P. Energy Scale of Lorentz Violation in Rainbow Gravity. **Phys. Dark Univ.**, v. 18, p. 115–122, 2017. arXiv: 1701.00533 [astro-ph.CO].

NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D.; OIKONOMOU, V. K. Modified Gravity Theories on a Nutshell: Inflation, Bounce and Late-time Evolution. **Phys. Rept.**, v. 692, p. 1–104, 2017. arXiv: 1705.11098 [gr-qc].

NOJIRI, Shin'ichi; ODINTSOV, Sergei D. Dark energy and cosmic speed-up from consistent modified gravity. **PoS**, WC2004, p. 024, 2004. arXiv: hep-th/0412030 [hep-th].

NOJIRI, Shin'ichi; ODINTSOV, Sergei D. Modified gravity with negative and positive powers of the curvature: Unification of the inflation and of the cosmic acceleration. **Phys. Rev.**, v. D68, p. 123512, 2003. arXiv: hep-th/0307288 [hep-th].

NOJIRI, Shin'ichi; ODINTSOV, Sergei D. Unified cosmic history in modified gravity: from $F(R)$ theory to Lorentz non-invariant models. **Phys. Rept.**, v. 505, p. 59–144, 2011. arXiv: 1011.0544 [gr-qc].

ODINTSOV, Sergei D.; SÁEZ-GÓMEZ, Diego. $f(R, T, R_{\mu\nu} T^{\mu\nu})$ gravity phenomenology and Λ CDM universe. **Phys. Lett. B**, v. 725, p. 437–444, 2013. arXiv: 1304.5411 [gr-qc].

OLIVEIRA, A. M.; VELTEN, H. E. S.; FABRIS, J. C. Nontrivial static, spherically symmetric vacuum solution in a nonconservative theory of gravity. **Phys. Rev.**, v. D93, n. 12, p. 124020, 2016. arXiv: 1602.08513 [gr-qc].

OLIVEIRA, A. M.; VELTEN, H. E. S.; FABRIS, J. C.; CASARINI, L. Neutron Stars in Rastall Gravity. **Phys. Rev.**, v. D92, n. 4, p. 044020, 2015. arXiv: 1506.00567 [gr-qc].

OLMO, Gonzalo J. Violation of the Equivalence Principle in Modified Theories of Gravity. **Phys. Rev. Lett.**, v. 98, p. 061101, 2007. arXiv: gr-qc/0612002 [gr-qc].

OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On Massive neutron cores. **Phys. Rev.**, v. 55, p. 374–381, 1939.

ÖZEL, Feryal; FREIRE, Paulo. Masses, Radii, and the Equation of State of Neutron Stars. **Ann. Rev. Astron. Astrophys.**, v. 54, p. 401–440, 2016. arXiv: 1603.02698 [astro-ph.HE].

PAL, S.; HANAUSKE, M.; ZAKOUT, I.; STOECKER, Horst; GREINER, W. Neutron star properties in the quark meson coupling model. **Phys. Rev.**, v. C60, p. 015802, 1999. arXiv: astro-ph/9905010 [astro-ph].

PANDA, Prafulla K.; SANTOS, Alexandre M. S.; MENEZES, Debora P.; PROVIDENCIA, Constanca. Compact stars within an asy-soft quark-meson-coupling model. **Phys. Rev.**, v. C85, p. 055802, 2012. arXiv: 1110.4708 [nucl-th].

PAULI, Wolfgang. **Relativity Theory**. London: Pergamon Press, 1958.

PAULUCCI, L.; FERRER, Efrain J.; INCERA, Vivian de la; HORVATH, J. E. Equation of state for the magnetic-color-flavor-locked phase and its implications for compact star models. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 83, p. 043009, 4 fev. 2011.

PEARSON, J. M.; CHAMEL, N.; POTEKHIN, A. Y. Unified equations of state for cold nonaccreting neutron stars with Brussels-Montreal functionals. II. Pasta phases in semiclassical approximation. **Phys. Rev. C**, v. 101, n. 1, p. 015802, 2020. arXiv: 2001.03876 [astro-ph.HE].

PERES MENEZES, Debora; PROVIDENCIA, C.; MELROSE, D. B. Quark stars within relativistic models. **J. Phys.**, G32, p. 1081–1096, 2006. arXiv: astro-ph/0507529 [astro-ph].

- PERES MENEZES, Débora; LAERCIO LOPES, Luiz. Quark matter under strong magnetic fields. **Eur. Phys. J.**, A52, n. 2, p. 17, 2016. [Eur. Phys. J.A52,17(2016)]. arXiv: 1505.06714 [nucl-th].
- PEREZ MARTINEZ, A.; PEREZ ROJAS, H.; MOSQUERA CUESTA, H. Anisotropic Pressures in Very Dense Magnetized Matter. **Int. J. Mod. Phys.**, v. D17, p. 2107–2123, 2008. arXiv: 0711.0975 [astro-ph].
- RASTALL, P. Generalization of the einstein theory. **Phys. Rev.**, v. D6, p. 3357–3359, 1972.
- REED, Brendan T.; FATTOYEV, F. J.; HOROWITZ, C. J.; PIEKAREWICZ, J. Implications of PREX-2 on the Equation of State of Neutron-Rich Matter. **Phys. Rev. Lett.**, v. 126, n. 17, p. 172503, 2021. arXiv: 2101.03193 [nucl-th].
- REZZOLLA, Luciano; MOST, Elias R.; WEIH, Lukas R. Using gravitational-wave observations and quasi-universal relations to constrain the maximum mass of neutron stars. **Astrophys. J.**, v. 852, n. 2, p. l25, 2018. [Astrophys. J. Lett.852,L25(2018)]. arXiv: 1711.00314 [astro-ph.HE].
- SAITO, K.; THOMAS, Anthony William. A Quark - meson coupling model for nuclear and neutron matter. **Phys. Lett.**, B327, p. 9–16, 1994. arXiv: nucl-th/9403015 [nucl-th].
- SAITO, K.; THOMAS, Anthony William. Composite nucleons in scalar and vector mean fields. **Phys. Rev.**, v. C52, p. 2789–2791, 1995. arXiv: nucl-th/9506003 [nucl-th].
- SANTOS, Alexandre M.; PANDA, Prafulla K.; PROVIDÊNCIA, Constanca. Low density instabilities in asymmetric nuclear matter within QMC with delta-meson. **Phys. Rev. C**, v. 79, p. 045805, 2009. arXiv: 0901.3243 [nucl-th].
- SANTOS, Renato Vieira dos; NOGALES, José A. C. Cosmology from a Lagrangian formulation for Rastall's theory, jan. 2017. arXiv: 1701.08203 [gr-qc].
- SCHRODINGER, Erwin. **Space-Time Structure**. Cambridge: Cambridge University Press, 1963.
- SEROT, Brian D.; WALECKA, John Dirk. The Relativistic Nuclear Many Body Problem. **Adv. Nucl. Phys.**, v. 16, p. 1–327, 1986.

SHAPIRO, Irwin I. Fourth Test of General Relativity. **Phys. Rev. Lett.**, v. 13, p. 789–791, 1964.

SHARIF, M.; SIDDIQA, Aisha. Equilibrium configurations of anisotropic polytropes in $f(R, T)$ gravity. **Eur. Phys. J. Plus**, v. 133, n. 6, p. 226, 2018.

SHIBATA, Masaru; FUJIBAYASHI, Sho; HOTOKEZAKA, Kenta; KIUCHI, Kenta; KYUTOKU, Koutarou; SEKIGUCHI, Yuichiro; TANAKA, Masaomi. Modeling GW170817 based on numerical relativity and its implications. **Phys. Rev.**, v. D96, n. 12, p. 123012, 2017. arXiv: 1710.07579 [astro-ph.HE].

SILVA, Hector O.; MACEDO, Caio F.B.; BERTI, Emanuele; CRISPINO, Luís C.B. Slowly rotating anisotropic neutron stars in general relativity and scalar–tensor theory. **Class. Quant. Grav.**, v. 32, p. 145008, 2015. arXiv: 1411.6286 [gr-qc].

SMALLEY, L L. Rastall's and related theories are conservative gravitational theories although physically inequivalent to general relativity. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, IOP Publishing, v. 16, n. 10, p. 2179–2185, jul. 1983.

SMALLEY, L. L. Variational Principle for a Prototype Rastall Theory of Gravitation. **II Nuovo Cimento B (1971-1996)**, v. 80, n. 1, p. 42, 1984.

SOTIRIOU, Thomas P.; FARAONI, Valerio. $f(R)$ Theories Of Gravity. **Rev. Mod. Phys.**, v. 82, p. 451–497, 2010. arXiv: 0805.1726 [gr-qc].

STEINER, A. W.; HEINKE, C. O.; BOGDANOV, S.; LI, C.; HO, W. C. G.; BAHRAMIAN, A.; HAN, S. Constraining the Mass and Radius of Neutron Stars in Globular Clusters. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 476, n. 1, p. 421–435, 2018. arXiv: 1709.05013 [astro-ph.HE].

STRAUMANN, N. **General Relativity and Relativistic Astrophysics**. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

SUGAHARA, Y.; TOKI, H. **Nucl. Phys. A**, v. 579, p. 557, 1994.

THOMPSON, Christopher; DUNCAN, Robert C. The Soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars - 1. Radiative mechanism for outbursts. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 275, p. 255–300, 1995.

- THOMPSON, Christopher; DUNCAN, Robert C. The Soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars. 2. Quiescent neutrino, x-ray, and Alfvén wave emission. **Astrophys. J.**, v. 473, p. 322, 1996.
- TOLMAN, Richard C. Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid. **Phys. Rev.**, v. 55, p. 364–373, 1939.
- TORRES, J. R.; MENEZES, D. P. Quark matter equation of state and stellar properties. **EPL**, v. 101, n. 4, p. 42003, 2013. arXiv: 1210.2350 [nucl-th].
- TORRES, J.R.; MENEZES, D.P. Quark matter equation of state and stellar properties. **EPL**, v. 101, n. 4, p. 42003, 2013. arXiv: 1210.2350 [nucl-th].
- VELTEN, Hermano; CARAMÊS, Thiago R. P. To conserve, or not to conserve: A review of nonconservative theories of gravity. **Universe**, v. 7, n. 2, p. 38, 2021. arXiv: 2102.03457 [gr-qc].
- VISSER, Matt. Rastall gravity is equivalent to Einstein gravity. **Phys. Lett. B**, v. 782, p. 83–86, 2018. arXiv: 1711.11500 [gr-qc].
- WALECKA, J. D. A Theory of highly condensed matter. **Annals Phys.**, v. 83, p. 491–529, 1974.
- WALECKA, J. D. **Theoretical nuclear and subnuclear physics**. London: World Scientific Publishing - 2nd. ed., 2004.
- WEINBERG, Steven. **Gravitation and Cosmology**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1972.
- WITTEN, Edward. Cosmic separation of phases. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 30, p. 272–285, 2 jul. 1984.
- WONG, C. Y. **Introduction to high-energy heavy ion collisions**. [S.l.: s.n.], 1995. ISBN 978-981-02-0263-7.
- WU, Xuhao; BAO, Shishao; SHEN, Hong; XU, Renxin. Effect of the symmetry energy on the secondary component of GW190814 as a neutron star. **Phys. Rev. C**, APS, v. 104, n. 1, p. 015802, 2021.

YASEEN, Marwa; ALBAKRY, Sundus. Determination of the Magnetogyric Ratio and Death line for the Neutron stars. ***Xi'an Jianzhu Keji Daxue Xuebao/Journal of Xi'an University of Architecture Technology***, v. XII, p. 1537, ago. 2020.

ZEL'DOVICH, I.A.B.; NOVIKOV, I.D.; THORNE, K.S.; ARNETT, W.D. ***Stars and Relativity***. [S.l.]: Dover Publications, 1996. (Dover Books on Physics). ISBN 9780486694245.

ZIAIE, A. H.; MORADPOUR, H.; GHAFARI, S. Gravitational Collapse in Rastall Gravity. ***Phys. Lett.***, B793, p. 276–280, 2019. arXiv: 1901.03055 [gr-qc].

APÊNDICE A – CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE RELATIVIDADE GERAL

A.1 MÉTRICA

No cenário da Relatividade Geral (RG) onde grupos ¹ de transformações de coordenadas, chamados de grupos de mapeamentos das variedades (GMV's), atuam, podemos representar um dado espaço-tempo curvo arbitrário pela tripla $\mathfrak{M} = (M, g_{\mu\nu}, \nabla_\lambda)$. M representa o ambiente cósmico, contínuo, quadri-dimensional e real, topologicamente representado por $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. $g_{\mu\nu}$ é a métrica ou tensor métrico, e ∇_λ é o chamado operador derivada covariante. $g_{\mu\nu}$ é uma das grandezas fundamentais da RG. Além de ser um tensor simétrico² de 2ª ordem, também é o responsável por descrever a geometria do espaço-tempo local como um resultado da solução das equações de campo da gravitação, sendo μ e ν índices concernentes as coordenadas espaço-temporais. Para estudarmos a curvatura, empregamos uma descrição matemática do comprimento quadrado de um deslocamento infinitesimal dx^μ em uma direção arbitrária entre dois pontos quaisquer no espaço-tempo. Tal informação é dado pelo elemento de linha ds^2 , sendo definida em termos de $g_{\mu\nu}$, a saber

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (172)$$

onde, x_μ são as quadri-coordenadas covariante representada por:

$$x_a = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z), \quad (173)$$

tal que, $x_0 \equiv ct$ denota a coordenada temporal, $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$ as coordenadas espaciais e c é a velocidade da luz no vácuo. Em adição, também tem-se as quadri-coordenadas contravariantes ³

$$x^a = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z), \quad (174)$$

com as devidas correspondências entre elas: $x_0 \equiv x^0 \equiv ct$, $x_1 \equiv -x^1 \equiv -x$, $x_2 \equiv -x^2 \equiv -y$ e $x_3 \equiv -x^3 \equiv -z$. A assinatura métrica espaço-temporal aqui empregada é (+ - - -). Como resultado da escolha da assinatura métrica, alguns tensores em RG sofrem variações de sinais em suas definições. No entanto, devemos obter no final sempre as mesmas equações de campo da gravitação. Também tem-se a versão contravariante (inverso) do tensor métrico, isto é, $g^{\mu\nu}$, tal que é notório a seguinte propriedade:

$$g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu, \quad (175)$$

¹ Os objetos geométricos que compõem a RG são grandezas tensoriais. Estes objetos submeter-se a leis de transformações de coordenadas homogêneas. No entanto, o conjunto destas transformações forma um grupo, denominado de grupo de mapeamento das variedades (GMV's), no qual, presumivelmente estes objetos são invariantes sob a atuação deste.

² Um objeto geométrico é dito ser simétrico se $A_{(\mu\nu)} = A_{(\nu\mu)}$ e antissimétrico se $A_{[\mu\nu]} = -A_{[\nu\mu]}$. Particularmente, a simetria de $g_{\mu\nu}$ implica que $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.

³ Sem qualquer risco de ambiguidades, denotaremos as coordenadas espaço-temporais através da correspondência: $ct \rightarrow 0$, $x \rightarrow 1$, $y \rightarrow 2$ e $z \rightarrow 3$.

no qual, por definição δ_μ^ν é o delta de Kronecker. A simetria de $g_{\mu\nu}$ implica que $g^{\mu\nu}$ também é simétrico. De maneira geral, $g_{\mu\nu}$ é um importante mecanismo matemático no contexto da RG. Além de transmitir toda a informação sobre a estrutura causal e geométrica do espaço-tempo, também gera as conexões afins que são utilizadas para construir os tensores de curvaturas. Em adição, também dispomos de um mecanismo que permite relacionar componentes tensoriais covariantes com as respectivas contravariantes e vice-versa.

A.2 CURVATURA

Como já discutido previamente, em RG relacionamos a gravidade como um efeito da curvatura espaço-temporal causada pela distribuição de matéria e energia no universo. Portanto, é necessário um objeto geométrico (um tensor) que traz uma medida sobre a curvatura do espaço-tempo em foco e, como esta sofre alteração ao passo que acrescentamos gravidade. Tal informação é caracterizada pelo tensor de curvatura. Neste âmbito, antes de prosseguirmos, precisamos introduzir o conceito de derivada covariante. A principal motivação em introduzi-las, reside no fato de que atuação do operador derivada parcial ∂_μ em qualquer sistema de coordenadas, destroi o caráter tensorial das quantidades envolvidas. A derivada covariante de um tensor em uma certa direção mede o quanto este muda em relação ao que teria sido se tivesse transportado paralelamente em uma geometria curva, visto que a derivada covariante de um tensor no qual foi transportado paralelamente durante todo o percurso é nula. Devido a esta característica geométrica, o transporte paralelo é considerado adequado tanto para visualizar o que é a curvatura de uma variedade, tanto quanto para aferi-la quantitativamente. A derivada covariante de um vetor contravariante u^λ arbitrário é dada por meio da prescrição

$$\nabla_\mu u^\lambda = \partial_\mu u^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda u^\sigma, \quad (176)$$

onde, $\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda u^\sigma$ representa a correção em relação a derivada parcial ordinária correspondente à curvatura do espaço-tempo, e ∇_μ é o operador derivada covariante mencionado anteriormente. Analogamente, para um vetor covariante u_λ , tem-se

$$\nabla_\mu u_\lambda = \partial_\mu u_\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma u_\sigma. \quad (177)$$

Em adição, utilizando a expressão ((176)), bem como a ((177)), escrevemos a expressão geral da derivada covariante para um tensor de valência arbitrária $T_{\mu\dots\lambda}^{\alpha\dots\beta}$, a saber

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T_{\mu\dots\lambda}^{\alpha\dots\beta} = & \partial_\sigma T_{\mu\dots\lambda}^{\alpha\dots\beta} - \Gamma_{\sigma\mu}^\rho T_{\rho\dots\lambda}^{\alpha\dots\beta} - \dots - \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho T_{\mu\dots\rho}^{\alpha\dots\beta} + \\ & \Gamma_{\sigma\rho}^\alpha T_{\mu\dots\lambda}^{\rho\dots\beta} + \dots + \Gamma_{\sigma\rho}^\beta T_{\mu\dots\lambda}^{\alpha\dots\rho}, \end{aligned} \quad (178)$$

onde a quantidade $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ que aparece nas expressões acima constitui uma típica conexão afim mundo (tensorial) ou afinidade, associada com ∇_{μ} , onde, seus coeficientes de conexão são comumente designados como símbolos de Christoffel, sendo definidos pela seguinte relação⁴:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}). \quad (179)$$

Pode ser observado que a conexão afim torna-se necessária quando levamos em conta que ∂_{μ} não é um bom operador diferencial de um tensor. Do mesmo modo, gostaríamos de uma derivada covariante, isto é, um operador que se reduz à derivada parcial no espaço-tempo plano, porém, se transformasse como um tensor em uma variedade arbitrária. Isto posto, definimos agora o tensor de curvatura.

A.2.1 Tensores de Curvatura

Vetores transportados paralelamente em uma geometria curva geralmente sofrem variações em suas componentes, estando estas relacionadas com a curvatura espaço-temporal em questão. O mapeamento local da curvatura é feito pelo tensor de Riemann. Um dos procedimentos usuais que viabiliza encontrar uma expressão para o tensor de curvatura de Riemann, consiste em permitir a ação do comutador entre operadores do tipo derivada covariante sobre um vetor arbitrário contravariante, a saber,

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] u^{\rho} = R_{\mu\nu\sigma}^{\rho} u^{\sigma}, \quad (180)$$

onde $R_{\mu\nu\sigma}^{\rho}$ é o aludido tensor de Riemann. Portanto, também tem-se,

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] u_{\rho} = -R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} u_{\sigma}. \quad (181)$$

Expandindo o lado esquerdo de ((180)), obtemos a seguinte contribuição,

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] u^{\rho} = (\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}) u^{\rho} = 2\nabla_{[\mu} (\nabla_{\nu]} u^{\rho}). \quad (182)$$

Neste estágio, implementando-se as prescrições ((176)) e ((177)) para diferenciais covariantes de vetores arbitrários na expressão acima, tem-se

$$\begin{aligned} [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] u^{\rho} &= \partial_{\mu} (\nabla_{\nu} u^{\rho}) - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \nabla_{\lambda} u^{\rho} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} \nabla_{\nu} u^{\sigma} - (\mu \longleftrightarrow \nu) \\ &= \left(\partial_{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \right) u^{\sigma} - 2\Gamma_{[\mu\nu]}^{\lambda} \nabla_{\lambda} u^{\rho} \\ &= \left(\partial_{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \right) u^{\sigma}, \end{aligned} \quad (183)$$

onde, os termos que se anulam nos resultados acima vem do fato de que uma típica conexão afim mundo é simétrica nos dois primeiros índices, a saber $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{(\mu\nu)}^{\lambda}$,

⁴ Neste estágio, foi empregada a chamada condição de compatibilidade métrica $\nabla_{\mu}g_{\rho\nu} = 0$, e a ausência de torção no contexto da RG tradicional, caracterizada pela simetria $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \Gamma_{(\alpha\beta)}^{\gamma}$.

e em adição, os ∂' s comutam no mesmo sistema de coordenadas. Comparando as equações ((183)) e ((180)), identifica-se a expressão para o tensor de curvatura de Riemann

$$R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}{}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}{}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}{}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}{}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}{}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}{}^\lambda, \quad (184)$$

caracterizado como o tensor mais geral no contexto da RG tradicional que pode ser construído a partir dos símbolos de Christoffel e suas derivadas. Todavia, em uso da propriedade do tensor métrico de levantamento e abaixamento de índices, define-se o tensor de Riemann covariante,

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = g_{\rho\delta} R_{\mu\nu\sigma}{}^\delta \quad (185)$$

$$= \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma\rho} - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma\rho} + \Gamma_{\mu\lambda\rho} \Gamma_{\nu\sigma}{}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda\rho} \Gamma_{\mu\sigma}{}^\lambda, \quad (186)$$

o qual, possui algumas propriedades de simetria importantes:

- Simétrico nos pares:

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\sigma\rho\mu\nu}. \quad (187)$$

- Antissimétrico no índice de cada par:

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = -R_{\nu\mu\sigma\rho} = -R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{[\mu\nu][\sigma\rho]}. \quad (188)$$

- Ciclicidade:

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} + R_{\mu\rho\nu\sigma} + R_{\mu\sigma\rho\nu} = 0, \quad (189)$$

sendo esta última propriedade equivalente à

$$R_{\mu[\nu\sigma\rho]} = 0. \quad (190)$$

Deve ser enfatizado que devido a essas propriedades de simetria, apenas 20 das componentes⁵ do tensor de curvatura de Riemann são independentes. Entretanto, é possível constituir outros tensores a partir de combinações do tensor de Riemann. No entanto, nos concentramos apenas nos que serão cruciais para compormos as equações de campo de Einstein, nomeadamente, tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e o escalar de Ricci R (traço de $R_{\mu\nu}$). Tem-se, com efeito,

$$R_{\mu\sigma} \equiv R_{\mu\nu\sigma}{}^\nu = g^{\nu\rho} R_{\mu\nu\sigma\rho}, \quad (191)$$

ou, mais explicitamente,

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\delta\nu}{}^\delta - \partial_\delta \Gamma_{\mu\nu}{}^\delta + \Gamma_{\lambda\mu}{}^\delta \Gamma_{\delta\nu}{}^\lambda - \Gamma_{\lambda\delta}{}^\delta \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda. \quad (192)$$

onde, em vista da simetria evidenciada em ((187)), $R_{\mu\nu}$ é simétrico, ou seja, $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$. Similarmente, obtém-se o escalar de Ricci

$$R \equiv R_\mu{}^\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (193)$$

⁵ $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ possui $4^4 = 256$ componentes.

De fato, R relaciona cada ponto do espaço-tempo a um número real, determinando assim a curvatura intrínseca existente nesse ponto. Portanto, com a curvatura completamente quantificada em termos dos tensores $R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho$, $R_{\mu\nu}$ e R , neste momento estamos aptos a relacionar a curvatura com a matéria, imposta pela equações de campo de Einstein.

APÊNDICE B – PUBLICAÇÕES

Combined Rastall and rainbow theories of gravity with applications to neutron stars

Clésio E. Mota,^{1,*} Luis C. N. Santos,^{2,†} Guilherme Grams,^{1,‡} Franciele M. da Silva,^{1,§} and Débora P. Menezes^{1,¶}

¹*Departamento de Física, CFM-Universidade Federal de Santa Catarina;
C.P. 476, CEP 88.040-900, Florianópolis, SC, Brazil*

²*Departamento de Física, CCEN-Universidade Federal da Paraíba;
C.P. 5008, CEP 58.051-970, João Pessoa, PB, Brazil*



(Received 8 May 2019; published 22 July 2019)

The possibility of modifications on general relativity is investigated. We propose an alternative theory of gravity constructed with the combination of Rastall and rainbow theories. The hydrostatic equilibrium equations are obtained in order to test the new theory in neutron stars, whose mass-radius diagrams are obtained using modern equations of state of nuclear matter derived from relativistic mean field models and compared with the ones computed by the Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations. Different sets of parameters are used and the obtained results confronted with accepted masses and radii values, including important astrophysical objects as the quiescent LMXB NGC 6397 and the double neutron system J0737. We conclude that substantial modifications are obtained even for very small alterations on the two free parameters, making the reproduction of astrophysical observations an easier task.

DOI: 10.1103/PhysRevD.100.024043

I. INTRODUCTION

The study of compact objects is an interdisciplinary subject that requires the understanding of many topics and two essential areas are gravitational theory and nuclear physics. Neutron stars equilibrium conditions are guaranteed by the balance between the nuclear degeneracy pressure and the strong gravitational field, produced by its very dense matter that works in order to hold stellar matter together.

The theory of gravity proposed by Einstein one century ago has helped us to comprehend many aspects of the universe and it keeps passing in every test [1] up to today. Notice the recent observation of gravitational waves by binary black hole [2] and neutrons star [3] mergers and the first photography of a black hole obtained by the Event Horizon Telescope [4]. Despite the success of general relativity (GR), alternative theories of gravity have been proposed in the last decades [5–8]. Some arguments for these theories come from the assumption that the equivalence principle (necessary to Einstein GR) could cease to be valid at large distances. Moreover, it has been hypothesized that the rotation velocity of our galaxy could be explained without dark matter and the accelerated expansion of the Universe could be obtained without dark energy

if we upgraded our theory of gravity beyond general relativity [9–14].

In 1972 Peter Rastall proposed a generalization of Einstein GR [15]. Rastall questioned the validity of the conservation law of the energy-momentum tensor in curved space time. In this new theory of gravity the covariant derivative of $T_{\mu\nu}$ does not vanish and depends on the curvature R and on a free parameter. We show in Sec. II B the main ideas underlying the modifications on Einstein theory proposed by Rastall.

In [16] the authors investigated the effects of Rastall theory on neutron stars modeled with both polytropic and nonrelativistic equations of state (EoS). They concluded that only small deviations of GR are consistent with neutron star constraints and only values of the free parameter λ bigger than one were tested due to considerations on the energy conditions. We will go back to this point when testing our model.

In 2004, another theory called gravity rainbow, which is an extension of the doubly (or nonlinear or deformed) special relativity for curved space-times was proposed by João Magueijo and Lee Smolin [17]. The principles of the doubly special relativity [18–22] are (i) the laws of physics are the same in all inertial frames; (ii) in the limit $\frac{E}{E_p} \rightarrow 0$, where $E_p = \frac{\sqrt{\hbar c^5}}{G}$ is the Planck energy, the speed of massless quanta goes to c , for all inertial frames; (iii) E_p is an universal constant for all inertial frames. By making this extension they concluded that the geometry of the space-time becomes energy dependent, so that families of

*clesio200915@hotmail.com

†luis.santos@ufsc.br

‡grams.guilherme@gmail.com

§franmdasilva@gmail.com

¶debora.p.m@ufsc.br

one-parameter metrics parametrized by $\frac{E}{E_p}$ are possible, where each family can be referred as a rainbow metric. In this new theory, the authors obtained a cosmological solution that leads to an energy dependent age for the universe, which could solve the horizon problem. They also obtained a solution analogue to the Schwarzschild solution, in which the area of the event horizon is energy dependent, with important consequences on the black-hole thermodynamics.

In [23,24] the authors obtained Tolman-Oppenheimer-Volkof (TOV)-like solutions to this theory and one of their conclusions was that in gravity rainbow neutron stars with maximum masses larger than $2 M_\odot$ are easily attainable, as expected from observational results [25,26].

The proposal of this work is to merge Rastall and rainbow theory in a new post-GR theory, which we call from now on Rastall-rainbow (RR) theory. We consider the Einstein's field equations modified by Rastall and then change these field equations so that the space-time metric becomes dependent on the test particles energy, in accordance with rainbow gravity. Thus, all the quantities that compose the Rastall field equations become dependent on the particles energy.

As a first test to Rastall-Rainbow theory we derive a new set of equations that describe the star equilibrium and investigate the mass-radius relation of neutron stars. We obtain the stellar properties of a family of neutron stars using as input modern relativistic equations of state.

From the microphysics point of view, the nuclear physics community has made a big effort in the past years to construct appropriate equations of state (EoS) to describe stellar matter which generates the nuclear pressure that holds the neutron stars from gravitational collapse. For this task, one can work with different formalisms, and the two most common ways to obtain EoS are the non relativistic [27], which usually use a modified liquid drop model with Skyrme interaction to simulate the nucleon interaction, and the relativistic nuclear models [28–30], which are originated from mean-field theory (MFT) applied to Lagrangian densities. For the present work, we choose 3 different EoS constructed with relativistic models. The microphysics of our *gravity lab* will be modeled with one EoS derived from the Walecka model corrected to include nonlinear terms [28,29], the IU-FSU model [31] and two EoS derived from the quark-meson coupling (QMC) model [30], a relativistic nuclear model that takes into account quark degrees freedom.

We use the above mentioned EoS to compute the macroscopic properties of neutron stars by testing a new alternative theory of gravity (RR) because they have already been confronted with nuclear matter bulk properties and stellar constraints [32–40].

The paper is organized as follows: In Sec. II we make a brief review of the original Rastall and rainbow theories and present the formalism that allows us to construct a new

theory that results from the combination of the two alternative gravity theories. Section II C is reserved to deduce the new equilibrium conditions for neutron stars. We show our results and discussions in Sec. III and draw the final conclusions in Sec. IV.

II. FORMALISM

In this section we discuss the unification of Rastall and rainbow theories. The idea is to generalize the Rastall gravity to an energy dependent Rastall theory. Of course, the final form of the field equation is an expression that captures elements of both theories. It is expected that the resulting theory will be able to reproduce the key features of rainbow gravity as the modification of the dispersion relation near the Planck scale besides explaining astronomical and cosmological phenomena such as the threshold anomalies of ultra high energy cosmic rays. In addition, the field equations must incorporate the change in the conservation law of the energy-momentum tensor according to the Rastall theory. As a test for the theory, we solve the field equation originated from the unification of Rastall and rainbow theories to study mass and radii of neutron stars.

A. Rainbow gravity

Doubly special relativity theory with an invariant energy scale may be generalized to general relativity curved space-time. Initially, we consider a deformation of the usual dispersion relation

$$E^2 \Xi(x)^2 - p^2 \Sigma(x)^2 = m^2, \quad (1)$$

where the argument $x = E/E_p$ is the ratio of the energy of a probe particle to the Planck energy E_p . In Eq. (1) the functions Ξ and Σ are called rainbow functions. In the literature, the choice of these functions is theoretically and phenomenologically motivated. For example, in [41,42] the authors obtain solutions corresponding to a nonsingular universe through the choice of functions $\Xi = 1$ and $\Sigma = \sqrt{1 + x^2}$. On the other hand, an exponential form of rainbow is applied in the study of gamma ray burst [42,43]. It is important to note that in the infrared limit the standard energy-momentum dispersion relation is recovered in this type of theory. In this way, the functions Ξ and Σ satisfy the conditions:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Xi(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \Sigma(x) = 1. \quad (2)$$

In the absence of gravity, the space-time acquires a geometry that depends on the energy of the particles. In the presence of gravity, the space-time metric can be constructed using the following energy dependent metric [17]

$$g(x) = \eta^{ab} e_a(x) \otimes e_b(x), \quad (3)$$

where the energy dependent frame fields $e_a(x)$ are related to the energy independent frame fields, denoted by \tilde{e}_a , as follows:

$$e_0(x) = \frac{1}{\Xi(x)} \tilde{e}_0, \quad e_i(x) = \frac{1}{\Sigma(x)} \tilde{e}_i. \quad (4)$$

In rainbow gravity, the Einstein equations are replaced by one parameter family of field equations due to the modification of the dispersion relation. Therefore, by using Eq. (3) and considering the usual general relativity quantities \tilde{e}_i , we obtain an energy dependent metric with spherical symmetry in the form

$$ds^2 = -\frac{B(r)}{\Xi^2} dt^2 + \frac{A(r)}{\Sigma^2} dr^2 + \frac{r^2}{\Sigma^2} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5)$$

where $A(r)$ and $B(r)$ are radial functions. Thus, the spherically symmetric metric depends on the energy due to the rainbow functions. Note that in this configuration the coordinates r , t , θ and ϕ are independent of the energy of the probe particles. The next step is to study the effect of the energy dependence in the context of Rastall gravity. For this purpose we introduce the main ideas of this theory in the following pages.

B. Rastall gravity

It is true that the left side of the usual Einstein's field equations satisfies $G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$, which can be easily verified by using the Bianchi identities. This relation is in accordance with the right side of the field equation if $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$. However, there is another way to write the covariant derivative of the energy-moment tensor keeping both sides of the Einstein's equation coherent with each other. Peter Rastall proposed a modification of the conservation law of the energy-momentum tensor in curved space-time in the form [15]:

$$T^{\nu}{}_{\mu;\nu} = \bar{\lambda} R_{,\mu}, \quad (6)$$

where $\bar{\lambda}$ is an undetermined constant. From Eq. (6), we can write

$$(T^{\nu}{}_{\mu} - \bar{\lambda} \delta^{\nu}{}_{\mu} R)_{;\nu} = 0. \quad (7)$$

In fact, the assumption (6) is consistent with the field equations

$$R^{\nu}{}_{\mu} - \frac{1}{2} \delta^{\nu}{}_{\mu} R = 8\pi G (T^{\nu}{}_{\mu} - \bar{\lambda} \delta^{\nu}{}_{\mu} R), \quad (8)$$

a modified Einstein's field equation. It is useful to rewrite this equation so that only the energy-moment tensor stays on the right side, i.e.,

$$R^{\nu}{}_{\mu} - \frac{\lambda}{2} \delta^{\nu}{}_{\mu} R = 8\pi G T^{\nu}{}_{\mu}, \quad (9)$$

where we have defined $\bar{\lambda} = \frac{1-\lambda}{16\pi G}$. When $\lambda = 1$, the usual field equation is reobtained. Thus, the parameter λ is related to the generalization of the Einstein's equation. In the flat space-time, when $R = 0$, Eq. (6) recovers the usual conservation law. The change proposed by Rastall has effects in the case of general space-time.

C. Rastall-rainbow theory

Above we have discussed the modified gravitational theories separately. It is interesting to study both theories in a unified formalism. For this purpose, the starting point is the modified Einstein's equation given in Eq. (9) and the modified conservation law (6). The effect of rainbow gravity can be incorporated into Eq. (9) by considering an energy dependent metric and an energy dependent gravitational constant $G(x)$, resulting in the Rastall-rainbow field equations in the form

$$R^{\nu}{}_{\mu}(x) - \frac{\lambda}{2} \delta^{\nu}{}_{\mu} R(x) = 8\pi G(x) T^{\nu}{}_{\mu}(x), \quad (10)$$

where the Rastall parameter λ is energy independent. We may solve Eq. (10) in the energy dependent metric with spherical symmetry defined in Eq. (5). This space-time can be used to model the internal structure of a star, and we next obtain a new set of equations that describe stellar equilibrium, i.e., the modification of the Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV) equations [44,45] due to the Rastall-rainbow gravity. When we consider the usual general relativity (GR), the solution of Einstein's field equation allows us to understand the hydrostatic equilibrium of homogeneous, static, isotropic and spherically symmetric objects. In particular, we are interested in compact objects such as neutron stars. It is expected that the influence of the energy dependence of the metric and of the change in the conservation law of the energy-moment tensor, will modify the usual relations of the hydrostatic equilibrium inside these compact objects. As discussed above, we consider a line element with spherical symmetry as given in Eq. (5). We assume that matter in the stellar interior can be described by the tensor energy-moment of a perfect fluid in a comoving frame, usually written as

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (p + \rho) U_{\mu} U_{\nu}, \quad (11)$$

where $p(r)$ and $\rho(r)$ are respectively the pressure and the energy density of the fluid. The term U_{μ} , that satisfies $U_{\mu} U^{\mu} = -1$, is the 4-velocity of the fluid element defined as

$$U_{\mu} = \left(\frac{\Xi(x)}{\sqrt{B(r)}}, 0, 0, 0 \right). \quad (12)$$

Adding and subtracting the term $(1/2)g_{\mu\nu}R$ to the left side of Eq. (10), in its covariant form, it can be written as the usual Einstein equation with an effective energy-moment tensor, i.e.,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G\tau_{\mu\nu}, \quad (13)$$

where we have defined

$$\tau_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{(1-\lambda)}{2(1-2\lambda)}g_{\mu\nu}T. \quad (14)$$

Note that the trace of the energy-moment tensor $T = (1-2\lambda)R/8\pi G$ has been used to replace R on the right side. Now the usual energy-moment tensor of a perfect fluid (11) together with expression for the 4-velocity (12) may be used on the right side of the field equation (13). The result reads:

$$-\frac{B}{r^2A} + \frac{B}{r^2} + \frac{A'B}{rA^2} = 8\pi GB\bar{\rho}, \quad (15)$$

$$-\frac{A}{r^2} + \frac{B'}{rB} + \frac{1}{r^2} = 8\pi GA\bar{p}, \quad (16)$$

$$-\frac{B'^2r^2}{4AB^2} - \frac{A'B'r^2}{4A^2B} + \frac{B''r^2}{2AB} - \frac{A'r}{2A^2} + \frac{B'r}{2AB} = 8\pi Gr^2\bar{p}, \quad (17)$$

where $\bar{\rho}$ and \bar{p} are effective pressure and energy density defined in the form

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\Sigma(x)^2}[\alpha_1\rho + 3\alpha_2p], \quad (18)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{\Sigma(x)^2}[\alpha_2\rho + (1-3\alpha_2)p], \quad (19)$$

where

$$\alpha_1 = \frac{1-3\lambda}{2(1-2\lambda)}; \quad \alpha_2 = \frac{1-\lambda}{2(1-2\lambda)}.$$

The set of coupled differential equations (15)–(17) are similar to the ones obtained in the GR. In this way, it is possible to find the form of the function $A(r)$ through a direct integration of Eq. (15), providing the expression

$$A(r) = \left[1 - \frac{2GM(r)}{r}\right]^{-1}, \quad (20)$$

together with the definition of the mass term

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \bar{\rho}(r') dr'. \quad (21)$$

The interpretation of Eq. (21) is direct: The integral is performed from the stellar center to $r = R$. Therefore, R denotes the radius of the star, where $\bar{\rho}$ is an effective energy density in the star interior. In the case where $\lambda = 1$ and

$\Sigma = 1$ we have $\bar{\rho} = \rho$, then this definition coincides with the usual definition of the GR. Note that the gravitational mass $M(r) \equiv M_G$ defined in (21) is obtained using the effective density defined in Eq. (18). In this way, the rainbow function Σ and Rastall parameter λ modify the stellar mass in this formalism. At this stage, we make use of the modified conservation law for the energy-momentum tensor $T^\nu_{\mu;\nu} = \bar{\lambda}R_{,\mu}$ to obtain

$$\frac{B'}{2B} = -\frac{\bar{p}'}{\bar{p} + \bar{\rho}}. \quad (22)$$

Manipulating Eq. (16), employing the result (20), we derive the equation

$$\frac{B'}{2B} = \frac{GM}{r^2} \left[1 + \frac{4\pi r^3 \bar{p}}{M}\right] \left[1 - \frac{2GM}{r}\right]^{-1}. \quad (23)$$

Finally, we can eliminate function B by identifying Eq. (22) with Eq. (23) and then isolating the term \bar{p}' . The result is

$$\bar{p}' = -\frac{GM\bar{\rho}}{r^2} \left[1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}\right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 \bar{p}}{M}\right] \left[1 - \frac{2GM}{r}\right]^{-1}, \quad (24)$$

This equation gives us information about the stellar hydrostatic equilibrium within the context of Rastall-rainbow gravity. The effective pressure and density are physical quantities that depend on the new parameters λ and Σ . By comparing the hydrostatic equilibrium from the GR with Eq. (24), we observe that the parameter λ cannot assume the value $\lambda = 1/2$. This is related to the fact that the star mass becomes divergent in this point. In the next section we use Eq. (24) to study the gravitational equilibrium of neutron stars.

III. RESULTS AND DISCUSSION

We next analyze the effects of the modifications of Rastall-rainbow approach on neutron star properties in order to test the new theory. We first analyze separately the effects of each component of the new theory, i.e., for each EoS used in this work, we vary just the Σ parameter while keeping λ fixed and then we vary λ while keeping Σ fixed. After this test, both parameters are allowed to vary around the ranges proposed in [16] and [24]. Notice that λ cannot assume the value $\lambda = 1/2$, because at this point the star mass becomes divergent and Σ has to be larger than 1 because lower values were shown to decrease the maximum stellar mass. We have also analyzed values of λ smaller than 1, although they were not considered in [16]. We have checked that for λ values lower than certain values (always close to one), \bar{p} may become negative, which means that the system is unstable. If negative pressures appear only at very low densities, typical of the ones present in the inner crust, this part of the EoS can simply be eliminated. However, if the negative pressure appears at densities of the order of the ones present in the core of the EoS, the

TABLE I. Macroscopic properties for different values of the λ and Σ parameters corresponding to the mass-radius diagram in Fig. 1.

<i>Rainbow</i>	Model	TOV	Rainbow _{1,2} [24]	Rainbow _{1,01}	RR	RR _{Σ1}	RR _{Σ2}	RR _{Σ3}	RR _{Σ4}
Parameters	Σ	1.0	1.2	1.01	1.01	1.05	1.1	0.95	0.90
	λ	1.0	1.0	1.0	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
IU-FSU	M_{\max}	1.94 M_{\odot}	2.33 M_{\odot}	1.96 M_{\odot}	1.96 M_{\odot}	2.03 M_{\odot}	2.13 M_{\odot}	1.84 M_{\odot}	1.74 M_{\odot}
	$R_{M_{\max}}$	11.22 km	13.46 km	11.33 km	11.15 km	11.59 km	12.15 km	10.49 km	9.94 km
	$R_{1.4}$	12.55 km	15.08 km	12.68 km	12.28 km	12.76 km	13.34 km	11.55 km	10.92 km
		General Relativity				Modified Gravity			
<i>Rastall</i>	Model	TOV	Rastall _{1,001} [16]	Rastall _{0,999}	RR	RR _{λ1}	RR _{λ2}	RR _{λ3}	RR _{λ4}
Parameters	λ	1.0	1.001	0.999	0.999	1.001	1.003	1.006	0.96
	Σ	1.0	1.0	1.0	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01
IU-FSU	M_{\max}	1.94 M_{\odot}	1.94 M_{\odot}	1.94 M_{\odot}	1.96 M_{\odot}	1.96 M_{\odot}	1.96 M_{\odot}	1.97 M_{\odot}	1.87 M_{\odot}
	$R_{M_{\max}}$	11.22 km	11.48 km	11.05 km	11.15 km	11.60 km	12.18 km	13.21 km	10.17 km
	$R_{1.4}$	12.55 km	13.18 km	12.16 km	12.28 km	13.32 km	14.87 km	18.19 km	10.70 km

generated EoS has to be discarded. One example is given and discussed next.

In all presented figures the continuum line corresponds to the general relativity TOV solution and the maximum mass and radius of GR solution for each EoS can also be seen in the third column of all Tables. In the present paper we have used the full Baym-Pethick-Sutherland EoS to describe the outer crust [46] and no hyperons are included in the EoS used next. Note that we recover GR solution in Rastall-rainbow theory using $\Sigma = 1.0$ and $\lambda = 1.0$.

We start by testing the RR theory with one RMF model, the IU-FSU parametrization proposed in [31]. Besides the tests performed in [40], IU-FSU is also successful in explaining the recent constraint that comes from the GW170817 observation [47]. The results obtained with various parameter values are displayed in Table I and Fig. 1. Although the results mentioned in the references above and reproduced in the present paper lie within acceptable ranges, the TOV solution of the IU-FSU EoS yields a

maximum mass slightly smaller than the expected 2.0 solar masses. The radius of the canonical star (1.4 M_{\odot}), however, lies inside the range imposed by the GW170817 constraints, which suggest that $R_{1.4}$ should lie between 10.5 and 13.4 km. Notice from Table I that, while the Rastall theory hardly affects the maximum stellar mass, it increases the corresponding radius [16]. The rainbow theory, on the other hand, works in such a way that the maximum mass can either increase or decrease, depending on the values chosen. However, if the maximum mass increases, so does the radius. If it decreases, the radius also decreases [24]. It is the combination of both approaches that allows the maximum mass to increase at the same time that the canonical star radius decreases. This feature puts the macroscopic properties obtained with the IU-FSU model comfortably within the accepted constraints for a variety of parameters.

Before we investigate other EoS, we would like to comment on the result obtained with the parameter $RR_{\lambda 4}$

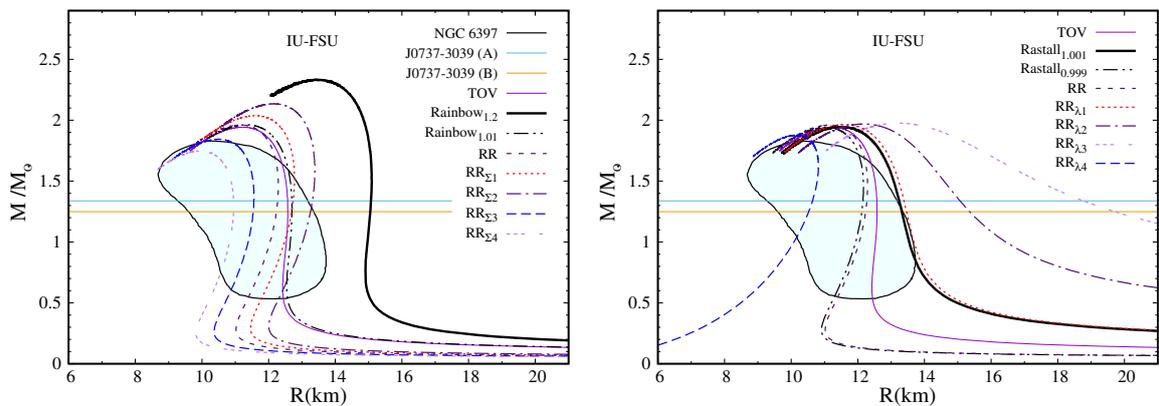


FIG. 1. Mass-radius relation for a family of hadronic stars described with the IU-FSU EoS. We analyze the effects caused by varying the Rainbow parameter Σ (left) while keeping the other parameter fixed and the effects of varying the Rastall parameter λ (right) while keeping Σ fixed.

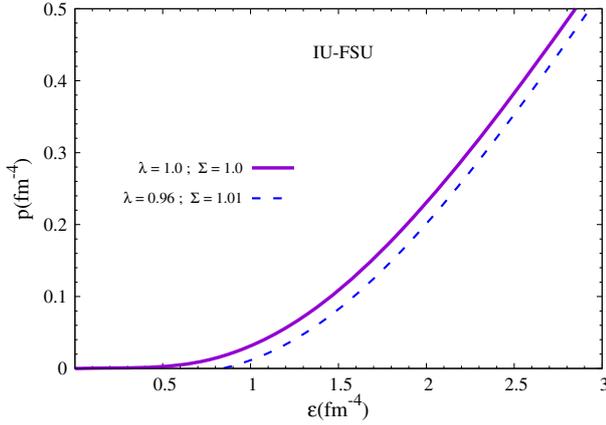


FIG. 2. IU-FSU EoS (solid line) and corresponding RR EoS (dashed line) obtained with the parameters named RR_{λ} in Table I.

and, for this purpose, the modified EoS is shown in Fig. 2 alongside the original IU-FSU EoS. The RR TOV-like equation Eq. (24) depends on modified expressions for the pressure and energy density, as given in Eq. (19) and shown by the dashed curve. We can observe that the EoS is shifted towards higher densities, with a behavior equivalent to what is usually obtained with quark matter EoS without a crust [48]. As a consequence, the resulting mass-radius diagram, depicted in Fig. 1 right presents the typical shape of a quark star curve. All EoS with this behavior will be eliminated from our analyses and this restriction is related to the fact that λ has a lower limit in RR theory. This lower limit was identified in [16] as being lower than 1.0, but we have verified that the exact value is actually model dependent.

We now investigate how model dependent the overall results are and for this purpose, other EoS are used. The QMC [30,49–51] and QMC $\omega\rho$ [37,38] EoS are obtained with an effective model in which the hadrons are made of three quarks confined in a system of nonoverlapping MIT bags. In the QMC models the quarks inside the nucleons

interact with each other through the exchange of σ , ρ and ω mesons. The difference between the two models comes from the fact that only in the QMC $\omega\rho$ the mesons ω and ρ interact with each other, while in the standard QMC model all mesons interact just with the quarks. This interaction has the effect of decreasing the slope of the symmetry energy of the model and as a consequence shrink the canonical $1.4 M_{\odot}$ radius. More details of the QMC and QMC $\omega\rho$ models and their effects on neutron star properties can be seen in [38].

The TOV solutions for the QMC and QMC $\omega\rho$ models give maximum masses within the acceptable range of $2.0 \leq M_{\max} \leq 2.3$ [25,26,52–54]. Also, both EoS produce canonical $1.4 M_{\odot}$ radii within the recent range obtained in [55] of $11.82 \text{ km} \leq R_{1.4 M_{\odot}} \leq 13.72 \text{ km}$ but slightly out of the range proposed by [3] of $10.5 \text{ km} \leq R_{1.4 M_{\odot}} \leq 13.4 \text{ km}$.

In Fig. 3 and Table II we show the effects of RR theory in neutron star properties obtained with the QMC EoS. We have followed the same procedure as for the IU-FSU model, i.e., we have tested the Σ parameter from 0.7 to 1.4 and λ from 0.9 to 1.1, but just the results close to the accepted observational constraints are shown. For $\lambda = 1.006$, for instance, we have already a radius of 20.84 km and any value bigger than this provides unreasonable results when applied to neutron stars. For $\lambda > 1$ the very small corrections on GR show no effect on the maximum stellar mass, but produce a big effect on the canonical $1.4 M_{\odot}$ neutron star radius. This result is in agreement with [16] that concluded that, when confronted with neutron star constraints, just small corrections of GR coming from Rastall theory are allowed. Again, we have seen that for certain combinations, the maximum mass increases and the stellar radius decrease.

As a final check, the QMC $\omega\rho$ model is also used to test the RR theory and the results are shown in Table III and Fig. 4. The conclusions are again the same as the ones discussed above for the IU-FSU and QMC models.

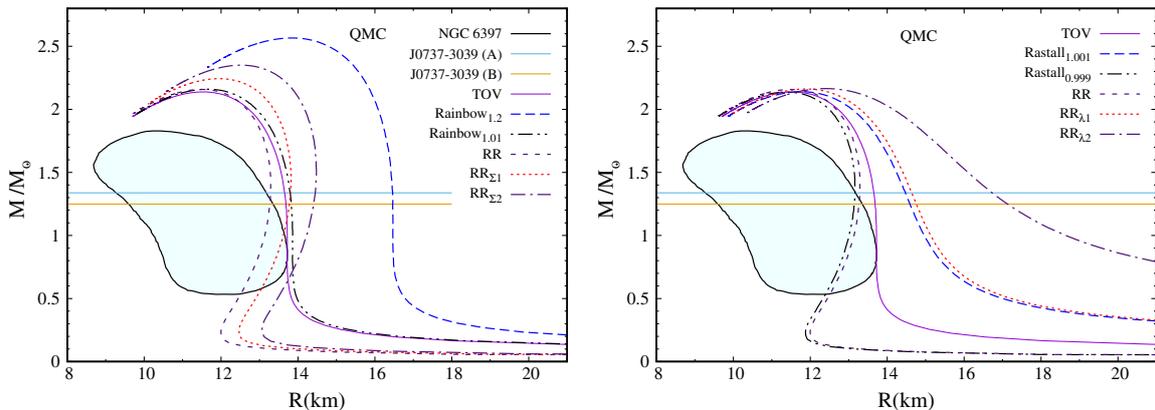


FIG. 3. Mass-radius relation for a family of hadronic stars described with the QMC EoS. We analyze the effects caused by varying the rainbow parameter Σ (left) while keeping the other parameter fixed and the effects of varying the Rastall parameter λ (right) while keeping Σ fixed.

TABLE II. Macroscopic properties for different values of the λ and Σ parameters corresponding to the mass-radius diagram in Fig. 3.

<i>Rainbow</i>	Model	TOV	Rainbow _{1,2} [24]	Rainbow _{1,01}	RR	RR _{Σ1}	RR _{Σ2}
Parameters	Σ	1.0	1.2	1.01	1.01	1.05	1.1
	λ	1.0	1.0	1.0	0.999	0.999	0.999
QMC	M_{\max}	2.14 M_{\odot}	2.56 M_{\odot}	2.15 M_{\odot}	2.15 M_{\odot}	2.24 M_{\odot}	2.35 M_{\odot}
	$R_{M_{\max}}$	11.53 km	13.85 km	11.65 km	11.49 km	11.95 km	12.51 km
	$R_{1,4}$	13.61 km	16.44 km	13.76 km	13.28 km	13.80 km	14.46 km
		General Relativity			Modified Gravity		
<i>Rastall</i>	Model	TOV	Rastall _{1,001} [16]	Rastall _{0,999}	RR	RR _{λ1}	RR _{λ2}
Parameters	λ	1.0	1.001	0.999	0.999	1.001	1.003
	Σ	1.0	1.0	1.0	1.01	1.01	1.01
QMC	M_{\max}	2.14 M_{\odot}	2.14 M_{\odot}	2.13 M_{\odot}	2.15 M_{\odot}	2.16 M_{\odot}	2.16 M_{\odot}
	$R_{M_{\max}}$	11.53 km	11.77 km	11.37 km	11.49 km	11.88 km	12.39 km
	$R_{1,4}$	13.61 km	14.39 km	13.16 km	13.28 km	14.54 km	16.48 km

According to [56,57], the neutron star in the quiescent low-mass X-ray binary (LMXB) NGC 6397 [58–60] provides a reliable constraint, which is depicted as a green shaded area in all Figures already presented at the 68% confidence level over the neutron star mass and radius. We can clearly see that, although the TOV curve can only reproduce the boundary of stars with larger radii (IU-FSU and QMC $\omega\rho$ models) or not at all (QMC model), the region of low masses with low radii stars can be accommodated by many of the RR parameter choices we have made and obviously with others we do not show.

Another interesting stellar object is the double neutron system J0737A/B [61,62], considered a very special laboratory for gravitational physics [63] due to a combination of desirable features that allow post-Keplerian (PK) and Shapiro delay parameters easy to measure, besides the fact that one of the stars in the system is also an active radio pulsar, detectable some of the time. The individual stellar

masses of this system are 1.3381 M_{\odot} and 1.2489 M_{\odot} also shown in all figures and they correspond to radii varying from 10.94 km to 13.46 km (IU-FSU), from 13.14 km to 14.75 km (QMC) and from 12.44 km to 13.88 km (QMC $\omega\rho$), once the curves with very large and unrealistic radii are excluded. A combination of methods, measurements and GR equations lead to a mass-mass diagram [57,63], with a large excluded area. Moreover, all PK curves are expected to intersect in a single point at a pair of mass values if the theory is valid and the mentioned diagram corroborates GR. A similar test could tell us whether the proposed RR theory is also valid and in this case, the radii corresponding to the individual masses in the J0737 system could be used to limit the λ and Σ parameter values.

IV. FINAL REMARKS

In this paper, we have combined the Rastall and rainbow theories of modified gravity and shown that the effect of

 TABLE III. Macroscopic properties for different values of the λ and Σ parameters corresponding to the mass-radius diagram in Fig. 4.

<i>Rainbow</i>	Model	TOV	Rainbow _{1,2} [24]	Rainbow _{1,01}	RR	RR _{Σ1}	RR _{Σ2}
Parameters	Σ	1.0	1.2	1.01	1.01	1.05	1.1
	λ	1.0	1.0	1.0	0.999	0.999	0.999
QMC $\omega\rho$	M_{\max}	2.07 M_{\odot}	2.48 M_{\odot}	2.09 M_{\odot}	2.09 M_{\odot}	2.17 M_{\odot}	2.27 M_{\odot}
	$R_{M_{\max}}$	10.96 km	13.15 km	11.07 km	10.93 km	11.36 km	11.90 km
	$R_{1,4}$	12.83 km	15.55 km	12.99 km	12.56 km	13.07 km	13.68 km
		General Relativity			Modified Gravity		
<i>Rastall</i>	Model	TOV	Rastall _{1,001} [16]	Rastall _{0,999}	RR	RR _{λ1}	RR _{λ2}
Parameters	λ	1.0	1.001	0.999	0.999	1.001	1.003
	Σ	1.0	1.0	1.0	1.01	1.01	1.01
QMC $\omega\rho$	M_{\max}	2.07 M_{\odot}	2.07 M_{\odot}	2.06 M_{\odot}	2.09 M_{\odot}	2.09 M_{\odot}	2.09 M_{\odot}
	$R_{M_{\max}}$	10.96 km	11.18 km	10.82 km	10.93 km	11.29 km	11.76 km
	$R_{1,4}$	12.83 km	13.52 km	12.43 km	12.56 km	13.67 km	15.32 km

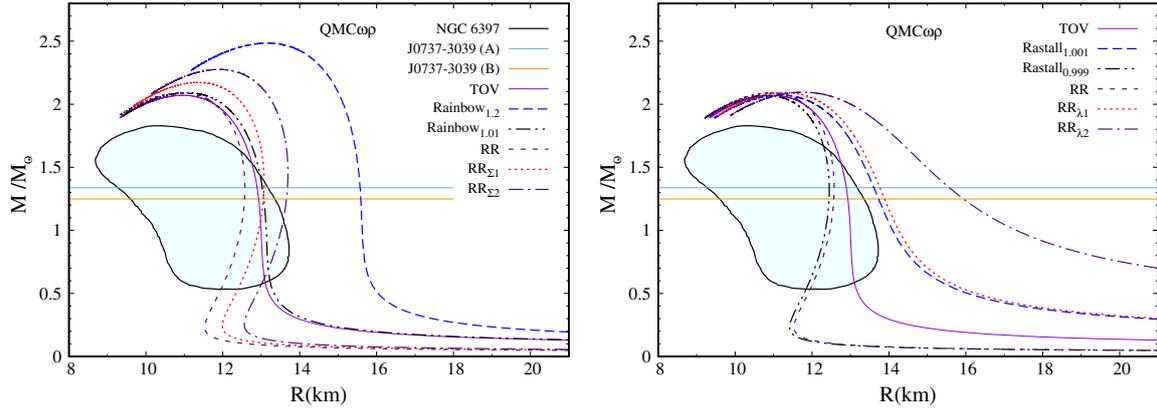


FIG. 4. Mass-radius relation for a family of hadronic stars described with the $QMCop$ EoS. We analyze the effects caused by varying the Rainbow parameter Σ (left) while keeping the other parameter fixed and the effects of varying the Rastall parameter λ (right) while keeping Σ fixed.

rainbow gravity can be incorporated into the Rastall field equations by considering an energy dependent metric and an energy dependent gravitational constant. We consider a line element with spherical symmetry and assume that the matter in the stellar interior can be described by the tensor energy-moment of a perfect fluid. In this work, we have also derived the TOV-analogue for a compact star described by hydrostatic equilibrium equations within the proposed Rastall-rainbow gravity.

Three RMF models have been used to test the new theory, namely IU-FSU, QMC and $QMCop$, all of them already presenting macroscopic properties not too far away from the currently expected values. While IU-FSU reproduces well the canonical star radius, it does not reach the maximum stellar mass. On the other hand, QMC and $QMCop$ reach the $2 M_{\odot}$ mass value, but the radii are a bit too large.

We have checked that while the Rastall theory alone affects very little the maximum stellar mass, it increases the corresponding radius, as already pointed out in [16]. We have also confirmed that to avoid instabilities in the pressure, only values of λ within 0.1% of difference from general relativity are accepted [16]. Nevertheless, values smaller than 1 for the λ parameter are possible, but the exact number is model dependent.

The rainbow theory alone works in such a way that the maximum stellar mass can either increase or decrease, depending on the Σ values chosen. However, if the maximum mass increases, so does the radius. If it decreases, the radius also presents smaller values [24].

We have then verified that, independently of the model considered, it is the combination of both theories that allows the maximum mass to increase at the same time that the canonical star radius decreases. Within this new framework, all models studied can produce macroscopic properties within the currently accepted range for a variety of parameters.

Recent measurements point to the existence of NS with masses around $2.07\text{--}2.28 M_{\odot}$ [64]. These massive stars being confirmed, some RMF models currently accepted may be excluded if the macroscopic properties are obtained with the TOV equations. However, if the RR equations are used instead, they can still be used to describe the internal stellar structure, as can be seen from the values shown in the present work.

Finally, an important consideration on the hyperon puzzle should be made. In all EoS discussed in the present work, only nucleons (and leptons to insure charge neutrality and β -equilibrium) were considered. However, in very dense matter as the one existing in the interior of neutron stars, hyperons are indeed expected to appear, but their inclusion are known to soften the EoS and hence, produce lower maximum masses. One possible way to reconcile the recent measurements of massive stars with relatively small radii, is to incorporate either strange mesons or a new degree of freedom (not necessarily known) in the calculations [65]. Had we included hyperons in our calculations with all three models investigated in the present work, they would all fail to describe $2 M_{\odot}$ stars. A clear way of circumventing this puzzle is the use of the RR theory we propose in the present work.

ACKNOWLEDGMENTS

This work is a part of the project CNPq-INCT-FNA Proc. No. 464898/2014-5. D. P. M. acknowledges partial support from CNPq (Brazil) under Grant No. 301155/2017-8, C. E. M. and F. M. S. have a scholarship paid by Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes, Brazil) and L. C. N. S. would like to thank Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) for partial financial support through the research Project No. 155361/2018-0.

- [1] C. M. Will, *Living Rev. Relativity* **9**, 3 (2006).
- [2] B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific and Virgo Collaborations), *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016).
- [3] B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific and Virgo Collaborations), *Phys. Rev. Lett.* **119**, 161101 (2017).
- [4] <https://eventhorizontelescope.org/>.
- [5] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, and C. Skordis, *Phys. Rep.* **513**, 1 (2012).
- [6] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **68**, 123512 (2003).
- [7] G. Allemandi, A. Borowiec, M. Francaviglia, and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **72**, 063505 (2005).
- [8] S. Nojiri, S. D. Odintsov, and V. K. Oikonomou, *Phys. Rep.* **692**, 1 (2017).
- [9] G. J. Olmo, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 061101 (2007).
- [10] L. Hui, A. Nicolis, and C. W. Stubbs, *Phys. Rev. D* **80**, 104002 (2009).
- [11] O. Bertolami, C. G. Bohmer, T. Karko, and F. S. N. Lobo, *Phys. Rev. D* **75**, 104016 (2007).
- [12] T. Karko, *Phys. Rev. D* **81**, 084050 (2010).
- [13] M. C. B. Abdalla, S. Nojiri, and S. D. Odintsov, *Classical Quantum Gravity* **22**, L35 (2005).
- [14] G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, L. Sebastiani, and S. Zerbini, *Phys. Rev. D* **77**, 046009 (2008).
- [15] P. Rastall, *Phys. Rev. D* **6**, 3357 (1972).
- [16] A. M. Oliveira, H. E. S. Velten, J. C. Fabris, and L. Casarini, *Phys. Rev. D* **92**, 044020 (2015).
- [17] J. Magueijo and L. Smolin, *Classical Quantum Gravity* **21**, 1725 (2004).
- [18] N. R. Bruno, G. Amelino-Camelia, and J. Kowalski-Glikman, *Phys. Lett. B* **522**, 133 (2001).
- [19] J. Kowalski-Glikman, *Phys. Lett. A* **286**, 391 (2001).
- [20] G. Amelino-Camelia, *Phys. Lett. B* **510**, 255 (2001).
- [21] J. Magueijo and L. Smolin, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 190403 (2002).
- [22] J. Magueijo and L. Smolin, *Phys. Rev. D* **67**, 044017 (2003).
- [23] R. Garattini and G. Mandanici, in *The Fourteenth Marcel Grossmann Meeting* (World Scientific, Singapore, 2017), p. 1635–1640, https://doi.org/10.1142/9789813226609_0160.
- [24] S. H. Hendi, G. H. Bordbar, B. Eslam Panah, and S. Panahiyan, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **09** (2016) 013.
- [25] P. B. Demorest, T. Pennucci, S. M. Ransom, M. S. E. Roberts, and J. W. T. Hessels, *Nature (London)* **467**, 1081 (2010).
- [26] J. Antoniadis *et al.*, *Science* **340**, 1233232 (2013).
- [27] M. Dutra, O. Lourenço, J. S. Sá Martins, A. Delfino, J. R. Stone, and P. D. Stevenson, *Phys. Rev. C* **85**, 035201 (2012).
- [28] B. D. Serot and J. D. Walecka, *Adv. Nucl. Phys.* **16**, 1 (1986).
- [29] J. Boguta and A. R. Bodmer, *Nucl. Phys. A* **292**, 413 (1977).
- [30] P. A. M. Guichon, *Phys. Lett. B* **200**, 235 (1988).
- [31] F. J. Fattoyev, C. J. Horowitz, J. Piekarewicz, and G. Shen, *Phys. Rev. C* **82**, 055803 (2010).
- [32] S. Weissenborn, D. Chatterjee, and J. Schaffner-Bielich, *Nuc. Phys. A* **881**, 62 (2012).
- [33] M. Orsaria, H. Rodrigues, F. Weber, and G. A. Contrera, *Phys. Rev. C* **89**, 015806 (2014).
- [34] F. J. Fattoyev, J. Piekarewicz, and C. J. Horowitz, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 172702 (2018).
- [35] T. Miyatsu, M. Cheoun, and K. Saito, *Phys. Rev. C* **88**, 015802 (2013).
- [36] P. Panda, D. P. Menezes, and C. Providência, *Phys. Rev. C* **69**, 025207 (2004).
- [37] P. Panda, A. M. Santos, D. P. Menezes, and C. Providência, *Phys. Rev. C* **85**, 055802 (2012).
- [38] G. Grams, A. M. Santos, P. Panda, C. Providência, and D. P. Menezes, *Phys. Rev. C* **95**, 055807 (2017).
- [39] M. Dutra, O. Lourenço, S. S. Avancini, B. V. Carlson, A. Delfino, D. P. Menezes, C. Providência, S. Typel, and J. R. Stone, *Phys. Rev. C* **90**, 055203 (2014).
- [40] M. Dutra, O. Lourenço, and D. P. Menezes, *Phys. Rev. C* **93**, 025806 (2016); **94**, 049901(E) (2016).
- [41] M. Khodadi, K. Nozari, and H. R. Sepangi, *Gen. Relativ. Gravit.* **48**, 166 (2016).
- [42] A. Awad, A. F. Ali, and B. Majumder, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **10** (2013) 052.
- [43] G. Amelino-Camelia, J. Ellis, N. E. Mavromatos, D. V. Nanopoulos, and S. Sarkar, *Nature (London)* **393**, 763 (1998).
- [44] R. C. Tolman, *Phys. Rev.* **55**, 364 (1939).
- [45] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, *Phys. Rev.* **55**, 374 (1939).
- [46] G. Baym, C. Pethick, and P. Sutherland, *Astrophys. J.* **170**, 299 (1971).
- [47] O. Lourenço, M. Dutra, C. Lenzi, C. V. Flores, and D. P. Menezes, *Phys. Rev. C* **99**, 045202 (2019).
- [48] D. P. Menezes, C. Providencia, and D. B. Melrose, *J. Phys. G* **32**, 1081 (2006).
- [49] K. Saito and A. W. Thomas, *Phys. Lett. B* **327**, 9 (1994).
- [50] K. Saito and A. W. Thomas, *Phys. Rev. C* **52**, 2789 (1995).
- [51] S. Pal, M. Hanauske, I. Zakout, H. Stöcker, and W. Greiner, *Phys. Rev. C* **60**, 015802 (1999).
- [52] B. Margalit and B. D. Metzger, *Astrophys. J. Lett.* **850**, L19 (2017).
- [53] M. Shibata, S. Fujibayashi, K. Hotokezaka, K. Kiuchi, K. Kyutoku, Y. Sekiguchi, and M. Tanaka, *Phys. Rev. D* **96**, 123012 (2017).
- [54] L. Rezzolla, E. R. Most, and L. R. Weih, *Astrophys. J. Lett.* **852**, L25 (2018).
- [55] T. Malik, N. Alam, M. Fortin, C. Providência, B. K. Agrawal, T. K. Jha, B. Kumar, and S. K. Patra, *Phys. Rev. C* **98**, 035804 (2018).
- [56] F. Özel and P. Freire, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **54**, 401 (2016).
- [57] A. W. Steiner, C. O. Heinke, S. Bogdanov, C. K. Li, W. C. G. Ho, A. Bahramian, and S. Han, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **476**, 421 (2018).
- [58] J. E. Grindlay, C. O. Heinke, P. D. Edmonds, S. S. Murray, and A. M. Cool, *Astrophys. J.* **563**, L53 (2001).
- [59] S. Guillot, R. E. Rutledge, and E. F. Brown, *Astrophys. J.* **732**, 88 (2011).
- [60] C. O. Heinke *et al.*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **444**, 443 (2014).
- [61] M. Burgay *et al.*, *Nature (London)* **426**, 531 (2003).
- [62] A. G. Lyne *et al.*, *Science* **303**, 1153 (2004).
- [63] M. Kramer *et al.*, *Science* **314**, 97 (2006).
- [64] H. T. Cromartie *et al.*, [arXiv:1904.06759](https://arxiv.org/abs/1904.06759).
- [65] L. Lopes and D. P. Menezes, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **05** (2018) 038.

Anisotropic compact stars in Rastall–Rainbow gravity

Clésio E Mota^{1,*} , Luis C N Santos²,
Franciele M da Silva³ , César V Flores^{4,5},
Tiago J N da Silva¹  and Débora P Menezes¹ 

¹ Departamento de Física, CFM—Universidade Federal de Santa Catarina, C.P. 476, CEP 88.040-900, Florianópolis, SC, Brazil

² Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, C.P.5008, CEP 58.059-900, João Pessoa, PB, Brazil

³ Núcleo Cosmo-Ufes & Departamento de Física, Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), Av. Fernando Ferrari, 540, Vitória 29075-910, Brazil

⁴ Centro de Ciências Exatas, Naturais e Tecnológicas, CCENT - Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão, C.P. 1300, CEP 65901-480, Imperatriz, MA, Brazil

⁵ Departamento de Física, CCET—Universidade Federal do Maranhão, Campus Universitário do Bacanga, CEP 65080-805, São Luís, MA, Brazil

E-mail: clesio200915@hotmail.com, luis.santos@ufsc.br, franmdasilva@gmail.com, cesarvofsky@gmail.com, t.j.nunes@ufsc.br and debora.p.m@ufsc.br

Received 11 October 2021, revised 10 February 2022

Accepted for publication 2 March 2022

Published 24 March 2022



CrossMark

Abstract

In this work, we investigate anisotropic effects on the equations of state (EoS) used to describe neutron and quark stars in the framework of Rastall–Rainbow gravity. All our calculations are computed using two different EoS to describe the matter contained within the star: the MIT bag model for quark stars and the IU-FSU parameterisation for the standard hadronic matter. From the values of masses and radii obtained, we can conclude that anisotropic pressure has significant consequences on the structure of compact objects. Specifically, when anisotropy is considered within general relativity, it significantly modifies the maximum stellar mass. On the other hand, when Rastall–Rainbow gravity and anisotropy are simultaneously considered, they provide the best results for the masses and radii of some important astrophysical objects such as the low-mass x-ray binary (LMXB) NGC 6397 and the extremely massive millisecond pulsating source of radio (PSR) J0740 + 6620, for instance. Radii results inferred from the Lead Radius Experiment (PREX-2) and the compact object in the mass-gap of GW190814 event can also be described for certain values of the Rastall–Rainbow and anisotropy parameters.

*Author to whom any correspondence should be addressed.

Keywords: general relativity, Rastall–Rainbow gravity, NSs, quark stars

(Some figures may appear in colour only in the online journal)

1. Introduction

General relativity (GR) is widely accepted as the standard theory of gravity and has changed our understanding of the nature of space and time, at the same time it has passed a substantial number of experimental tests. Among these tests, lies the precession of the Mercury perihelion, which has been predicted with great precision, the recent detection of gravitational waves generated by a binary neutron star (NS) system observed by the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) and Virgo collaboration [1] and the first observation of a black hole shadow obtained by the project Event Horizon Telescope [2].

However, although predictive in a wide range of situations, GR has some limitations, and there are still some questions that it cannot explain satisfactorily, both in the cosmological and astrophysical context, for instance, we have the dark matter problem, the dark energy problem, and the early inflation [3, 4]. These limitations have led to the proposal of the so-called modified theories of gravity, some of which extend GR through the introduction of additional terms in the Einstein–Hilbert action. Between all the modified theories of gravity, we can mention the Rastall [5] and Rainbow theories [6], built by changing some fundamental concepts of gravity and principles of GR. These two theories have been combined in recent work and shown to provide a good description of both massive and low radii observations of NS [7]. Gravity modification is expected to affect several important physical characteristics of NS, such as mass and radius, for which observations are becoming more and more accurate. The launching of NASA’s Neutron star Interior Composition Explorer (NICER) telescope [8] in 2017 has promised precise values for masses and radii in a near future.

NS are not only systems to test the standard theory of gravity, they are also considered important astrophysical laboratories to study theoretical models of nuclear matter under extreme physical conditions [9, 10]. From the theoretical/phenomenological point of view, one needs to combine modern equations of state (EoS) that model neutron nuclear matter with an appropriate description of gravity. When studying the physical characteristics of NS it is usual to consider that the matter content within the star is described by an isotropic perfect fluid equation of state, which possesses equal radial and tangential pressure components. On the other hand, some astronomers believe that magnetic fields directly influence the formation of the structure of NS as much as the gravitational attraction. Usually, these objects have a magnetic field of the order of 10^{12} G and are generally detected in the Universe as pulsars, but some present even stronger magnetic fields [11], of the order of 10^{14} or 10^{15} G at the surface and possibly three orders of magnitude stronger in their cores and are commonly called magnetars. In these cases, anisotropic effects are expected due to tensions in stellar matter [10, 12–14]. On the other hand, regardless of the physical nature of the appearance of anisotropy in stellar fluid, its effects lead to significant changes in the star structure [15–23]. The necessity of dealing or not with anisotropic pressure, whether radial and tangential pressures are indeed different and how to compute their effects are still controversial issues and there are different prescriptions in the literature [11, 24–27]. We mention next some of them. The seminal works that considered the magnetized matter in the EoS assumed isotropic matter [28–30], sometimes at the expense of a density-dependent magnetic field that violates Maxwell equations [31]. A second formalism envisaged the possibility that the EoS cannot be isotropic because the

components of the energy–momentum tensor are not equal, resulting in different contributions to the parallel and perpendicular pressures [14, 32, 33]. Besides this fact, the rotational symmetry $O(3)$ breaks under strong magnetic fields. In this case, however, the use of the Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV) [34, 35] equations becomes problematic because only one pressure is accepted as input. A third formalism, based on the concept of chaotic magnetic field proposed by Zel’dovich [36], developed some years later, advocated that in the presence of anisotropies, the concept of pressure has to be taken with care. According to this formalism, a small scale chaotic field is considered and the concept of isotropic EoS is recovered [11]. Finally, a code (LORENE) that computes numerically the EoS by taking into account Einstein–Maxwell equations and equilibrium self consistently was developed and new results obtained [25] (and references therein).

Recently the limits of validity of GR are being probed by important experimental tests in regions of extreme gravity. The GR prediction that gravitational waves travel at the speed of light has been recently verified by the multi-messenger observation of the GW170817 event [1], which has excluded some proposed theories of modified gravity. At the same time there are recent observations of NS with masses above $2.0M_{\odot}$ [37]. Motivated by this context, we next study anisotropic compact stars in the framework of the Rastall–Rainbow model of gravity (RR), as proposed in [7]. We investigate possible anisotropic effects both on quark and hadronic stars. Quark matter is obtained with the MIT bag model [38] constrained to parameter values that satisfy the Bodmer–Witten conjecture [39–42]. The hadronic matter is described with the IU-FSU parameterization [43] of the Walecka-type model with nonlinear terms.

This work is divided as follows: in section 2 we review the RR model and the resulting TOV-like equations for anisotropic compact stars are obtained; in section 3 we present the EoS used in the present work; our main results and discussions are presented in section 4 and we conclude in section 5.

2. Rastall–Rainbow gravity and stellar structure equations

2.1. Rastall–Rainbow theory

The RR gravity model [7] comes from the combination of two modified theories of gravity, namely the Rastall theory [5] and the Rainbow theory [6]. In the next lines, we will briefly discuss both theories and how it is possible to establish a framework where their union is valid.

In 2004, João Magueijo and Lee Smolin [6] proposed a generalization of nonlinear (or deformed) special relativity to curved space-time. They have shown how the formalism, which characterizes the principles of this deformed special relativity can be generalized to incorporate curvature, leading to what may be called *double* GR. Initially, they proposed a dual realization of this nonlinear relativity in the momentum space, and thus demonstrated that for such case, the space-time invariant becomes an energy dependent metric, let us see this aspect with more detail. At first, at the core of Rainbow gravity, at the high energy regime, there exist a modification of the usual relativistic relation $E^2 - p^2 = m^2$, this modification is induced by two arbitrary functions (Rainbow functions) $\Xi(x)$ and $\Sigma(x)$, satisfying

$$E^2\Xi(x)^2 - p^2\Sigma(x)^2 = m^2, \quad (1)$$

where $x = E/E_p$, is the ratio between the energy of the test particle E and the Planck energy $E_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}}$. The quantities m and p are the particle mass and momentum respectively. Consequently, $\Xi(x)$ and $\Sigma(x)$ are chosen so that, under a low energy regime $x = E/E_p \rightarrow 0$, the usual

dispersion relation is recovered so as to satisfy:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Xi(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \Sigma(x) = 1. \quad (2)$$

The space-time in this context is usually constructed using the following energy dependent metric [6]

$$g(x) = \eta^{ab} e_a(x) \otimes e_b(x), \quad (3)$$

where $e_a(x)$ and $e_b(x)$ are the energy dependent fields and are related to the independent fields, denoted by \tilde{e}_a and \tilde{e}_b , according to the following expressions:

$$e_0(x) = \frac{1}{\Xi(x)} \tilde{e}_0, \quad e_b(x) = \frac{1}{\Sigma(x)} \tilde{e}_b. \quad (4)$$

We identify $b = (1, 2, 3)$ as the indices for the spatial coordinates. We use Einstein's field equations modified by Rainbow gravity, under the assumption that the space-time geometry depends on the energy of the test particle. Thus in this alternative theory of gravity, the field equations become dependent on this energy, and then, the standard Einstein's field equations are replaced by the expression below

$$G_{\mu\nu}(x) \equiv R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) R(x) = k(x) T_{\mu\nu}(x), \quad (5)$$

where $k(x) = 8\pi G(x)$.

In 1972, Peter Rastall [5] maintaining the validity of the gravitational Bianchi identity of the Einstein geometric tensor ($\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$), proposed an alternative theory of gravity in which the conservation principle of the energy–momentum tensor is modified, i.e. $\nabla^\mu T_{\mu\nu} \neq 0$. Based on phenomenological justifications, Rastall considered that the divergence of $T_{\mu\nu}$ was proportional to the variation of the Ricci scalar R . He postulated that the curvature itself contributed to the total energy of the system. The modification of the conservation law of the energy–momentum tensor in curved space-time is written as [7]:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \bar{\lambda} \nabla_\nu R, \quad (6)$$

with $\bar{\lambda} = \frac{1-\lambda}{16\pi G}$, where λ is a constant called Rastall parameter, which measures the coupling between geometry and the matter fields [44]. As we can see, the modification inserted in equation (6) is such that for $\bar{\lambda} = 0$, or, equivalently, $\lambda = 1$, we adequately recover GR. The Ricci scalar R vanishes in flat space-time, and thus the conservation law for $T_{\mu\nu}$ in this context is restored, which reinforces that Rastall's theory proposes a non-conservation of $T_{\mu\nu}$ only in curved space-time. It was argued in [45] and previously also in [46], that Rastall gravity is equivalent to Einstein gravity. However, there are works such as that of Darabi *et al* [47] in which a comparison of the two theories is made and it is shown that these theories are not physically equivalent. This non-equivalence is supported by other works, such as [48–50].

Modified Einstein field equations consistent with equation (6) can be written in the simplified form

$$R_{\mu}{}^{\nu} - \frac{\lambda}{2} \delta_{\mu}{}^{\nu} R = 8\pi G T_{\mu}{}^{\nu}, \quad (7)$$

which are the field equations modified by Rastall's gravity.

The RR model unifies the effects of Rainbow gravity with the effects of Rastall gravity, under a single formalism. The field equations in this unified formalism are written as follows:

$$R_{\mu}{}^{\nu}(x) - \frac{\lambda}{2}\delta_{\mu}{}^{\nu}(x)R(x) = k(x)T_{\mu}{}^{\nu}(x), \quad (8)$$

where the Rastall parameter λ is independent of the test particle energy. In the next section we will describe how to obtain the system of equations that describe the hydrostatic equilibrium. We will call these equations as the modified TOV equations [34, 35] due to the modifications inserted by RR gravity. It is worth noting that the Lagrangian whose variation gives rise to Rastall's gravity is a matter of current research. Some comments about this topic can be found in the papers [47, 50] and the subject has been analyzed in [51–53] but a general agreement has not been reached on the matter (see review [54]). As a consequence, a Lagrangian formulation for the RR gravity remains an open problem.

2.2. Stellar structure

In order to study compact objects, we assume spherical symmetry for the metric. This way, by replacing the usual GR quantities \tilde{e}_i for spherical symmetry into equation (3), we obtain:

$$ds^2 = -\frac{B(r)}{\Xi^2(x)}dt^2 + \frac{A(r)}{\Sigma^2(x)}dr^2 + \frac{r^2}{\Sigma^2(x)}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (9)$$

where $A(r)$ and $B(r)$ are radial functions. We can see that our metric depends on the rainbow functions $\Xi(x)$ and $\Sigma(x)$, that is, it depends on the energy of the probe particles. However, note that the coordinates r , t , θ and ϕ do not have this dependency.

We assume that stellar matter can be described as an anisotropic fluid represented by the following energy–momentum tensor [55–57]:

$$T_{\mu\nu} = p_t g_{\mu\nu} + (p_t + \rho)U_{\mu}U_{\nu} + (p_r - p_t)N_{\mu}N_{\nu}, \quad (10)$$

where $p_t(r)$, $\rho(r)$ and $p_r(r)$ are respectively the tangential or transverse pressure, the energy density and the radial pressure of the fluid. The quantities U_{μ} and N_{μ} represent respectively the four velocity and radial unit vector, whose definitions are:

$$U^{\mu} = \left(\frac{\Xi(x)}{\sqrt{B(r)}}, 0, 0, 0 \right), \quad (11)$$

$$N^{\mu} = \left(0, \frac{\Sigma(x)}{\sqrt{A(r)}}, 0, 0 \right). \quad (12)$$

These quantities obey the conditions: $U_{\nu}U^{\nu} = -1$, $N_{\nu}N^{\nu} = 1$ and $U_{\nu}N^{\nu} = 0$.

Suitable rewriting equation (7) in its covariant form and rearranging its terms, with the Einstein tensor on the left-hand side, we obtain the usual Einstein equation with an effective energy–momentum tensor, as follows:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G\tau_{\mu\nu}, \quad (13)$$

where

$$\tau_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{(1-\lambda)}{2(1-2\lambda)}g_{\mu\nu}T. \quad (14)$$

Now, by using the definitions for the energy dependent spherically symmetric metric given in equation (9) and the energy–momentum tensor for an anisotropic fluid shown in equation (10), we calculate the components of the field equation (13), and obtain:

$$-\frac{B}{r^2 A} + \frac{B}{r^2} + \frac{A'B}{rA^2} = 8\pi GB\bar{\rho}, \quad (15)$$

$$-\frac{A}{r^2} + \frac{B'}{rB} + \frac{1}{r^2} = 8\pi GA\bar{p}_r, \quad (16)$$

$$-\frac{B'^2 r^2}{4AB^2} - \frac{A'B'r^2}{4A^2 B} + \frac{B''r^2}{2AB} - \frac{A'r}{2A^2} + \frac{B'r}{2AB} = 8\pi Gr^2\bar{p}_t, \quad (17)$$

where $\bar{\rho}$, \bar{p}_r and \bar{p}_t are the effective energy density, the effective radial pressure and the effective tangential pressure respectively, which are defined as

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\Sigma(x)^2} [\alpha_1 \rho + \alpha_2 p_r + 2\alpha_2 p_t], \quad (18)$$

$$\bar{p}_r = \frac{1}{\Sigma(x)^2} [\alpha_2 \rho + \alpha_1 p_r - 2\alpha_2 p_t], \quad (19)$$

$$\bar{p}_t = \frac{1}{\Sigma(x)^2} [\alpha_2 \rho - \alpha_2 p_r + \alpha_3 p_t], \quad (20)$$

where

$$\alpha_1 = \frac{1-3\lambda}{2(1-2\lambda)}, \quad \alpha_2 = \frac{1-\lambda}{2(1-2\lambda)}, \quad \alpha_3 = -\frac{\lambda}{1-2\lambda}.$$

The field equations obtained here, equations (15)–(17), resemble those achieved in GR for a static spherically symmetric anisotropic fluid. The main difference is that now instead of the usual pressures and energy density, we have the equivalent effective quantities. Thus, similar to what is done in the GR case, we can redefine the function $A(r)$ in terms of a new function $M(r)$ as follows:

$$A(r) = \left[1 - \frac{2GM(r)}{r} \right]^{-1}, \quad (21)$$

By making this replacement in equation (15), we can solve the $M(r)$ equation by direct integration so that

$$M(r) = \int_0^R 4\pi r'^2 \bar{\rho}(r') dr'. \quad (22)$$

From the equation above we can conclude that $M(r)$ is the stellar mass, and that $r = R$ is the stellar radius. Note that the mass depends on the effective energy density $\bar{\rho}$. Thus, as in our previous work, we conclude that the RR λ and Σ parameters modify the mass values. Also, it is important to point out that $\bar{\rho}$ depends on both the radial pressure p_r and the tangential pressure p_t . Therefore, in the case analysed here where $p_r \neq p_t$ the mass values are also affected by the anisotropy. We can verify that in the case where $p_r = p_t$ we recover the definition of $\bar{\rho}$ from our previous article [7]. Moreover, by assuming $\lambda = 1.0$ and $\Sigma = 1.0$ we find $\bar{\rho} = \rho$ so that the GR mass definition is retrieved.

By calculating the modified conservation law for the energy–momentum tensor $T_{\mu;\nu}^\nu = \bar{\lambda}R_\mu$, we get:

$$\bar{p}'_r = -(\bar{p}_r + \bar{\rho})\frac{B'}{2B} + 2\frac{\bar{\sigma}}{r}, \quad (23)$$

where $\bar{\sigma} \equiv \bar{p}_t - \bar{p}_r$. Rearranging equation (16) and employing the relation shown in equation (21), we find

$$\frac{B'}{2B} = \frac{GM}{r^2} \left[1 + \frac{4\pi r^3 \bar{p}_r}{M} \right] \left[1 - \frac{2GM}{r} \right]^{-1}. \quad (24)$$

Now, we can replace the equation above into equation (23) to eliminate the function B , in order to get:

$$\bar{p}'_r = -\frac{GM\bar{\rho}}{r^2} \left[1 + \frac{\bar{p}_r}{\bar{\rho}} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 \bar{p}_r}{M} \right] \left[1 - \frac{2GM}{r} \right]^{-1} + \frac{2}{r} \bar{\sigma}, \quad (25)$$

where, after simplifying the terms in brackets, the above equation becomes:

$$\bar{p}'_r = -(\bar{p}_r + \bar{\rho})\frac{M + 4\pi Gr^3 \bar{p}_r}{r(r - 2M)} + \frac{2}{r} \bar{\sigma}. \quad (26)$$

Equations (22) and (25) describe the hydrostatic equilibrium in the context of RR gravity modified by the inclusion of the anisotropy factor $\bar{\sigma} = \bar{p}_t - \bar{p}_r$. As explained in [58], finding the functional form for the anisotropy $\sigma \equiv p_t - p_r$ depends on the knowledge of the microscopic relations existing among the quantities p_r , p_t and ρ . Unfortunately, we do not have a microscopic theory that is good enough to find the explicit form of these relations. However, anisotropic effects can be inserted in this context by the introduction of some functional forms for σ that describe a smooth transition between the isotropic and the anisotropic regimes. Therefore, we consider next an anisotropic profile [59] given by:

$$\sigma = \beta p_r (1 - e^{-\lambda}), \quad (27)$$

where β is a free parameter that controls the degree of anisotropy in the system. The expression $\bar{\sigma} = \sigma/\Sigma(x)^2$ in equation (25) reflects the effects of anisotropy. The metric function $e^{-\lambda}$ in equation (27) is identified as:

$$e^{-\lambda} \equiv A(r)^{-1} = \left[1 - \frac{2GM(r)}{r} \right]. \quad (28)$$

At this stage, by substituting the quantities (18)–(20) and (27) into equations (22) and (25), we obtain:

$$M(r) = \int_0^R \frac{2\pi r' ((\lambda - 1)(4\beta M(r') + 3r')p_r(r') + r'(3\lambda - 1)\rho(r'))}{(2\lambda - 1)\Sigma^2} dr'. \quad (29)$$

and

$$\begin{aligned}
p_r' = & 2 \left(4\beta(1 - 3\lambda)\Sigma^2 M(r)^2 p_r - 2\pi r^4 (p_r + \rho(r))((1 + \lambda)p_r + (-1 + \lambda)\rho(r)) \right. \\
& + 2r^2 \beta(\lambda - 1)\Sigma^2 p_r M(r)' + rM(r) \left(8\pi r^2 \beta(\lambda - 1)p_r^2 + (1 - 2\lambda)\Sigma^2 \rho(r) \right. \\
& \left. \left. + p_r \left(8\pi r^2 \beta(\lambda - 1)\rho(r) + \Sigma^2(1 - 2\beta - 2\lambda + 6\beta\lambda - 4\beta(\lambda - 1)M(r)') \right) \right) \right) / \\
& \left(r\Sigma^2(r - 2M(r)) \left(r \left((\lambda - 1)\frac{d\rho(r)}{dr} + \lambda + 1 \right) - 4\beta(\lambda - 1)M(r) \right) \right). \quad (30)
\end{aligned}$$

These equations give us information about the stellar hydrostatic equilibrium of compact anisotropic stars in the formalism of RR gravity. By assuming $\lambda = 1.0$, $\Sigma = 1.0$ we find $\bar{\rho} = \rho$, $\bar{p}_r = p_r$ and $\bar{p}_t = p_t$ so that the usual TOV equations with anisotropy effects are recovered. In the section 4, we use equations (29) and (30) to study the gravitational equilibrium of quark and NSs.

3. Equations of state

In this section, we briefly mention the EoS used in the present work to describe quark matter and hadronic matter. The first is then used to compute the macroscopic properties of quark stars and the latter of NSs. For a didactic and more extensive explanation on EOS, we refer the reader to ref. [60] and references therein. The EoS described next will be the input to equations (29) and (30).

3.1. Quark matter

To investigate quark stars we use a simple relativistic model to describe quark matter, the MIT bag model [38]. The MIT bag model confines the quarks in a volume space delimited by a certain pressure. Inside the bag, a constant positive potential energy per unit volume, namely *the bag constant* (B), is necessary so that the bag can be created and kept in the vacuum. Inside this volume, the moving quarks have kinetic energy and no colour currents survive on the surface. Hence, we assume the quarks in the interior of the bag as a Fermi gas whose energy at the border of the bag is negligible when compared with the energies inside it. The Lagrangian that reproduces the dynamics of the quarks ψ_q contained in a bag of volume V delimited by the surface S can be written as

$$\mathcal{L}_{\text{MIT}} = \sum_q [\bar{\psi}_q(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_q)\psi_q - B] \Theta_V - \frac{1}{2} \bar{\psi}_q \psi_q \delta_S, \quad (31)$$

where the q denotes the flavours of the quarks involved with masses m_q , and B is the bag constant. Θ_V is the Heaviside function and the term $\frac{1}{2} \bar{\psi}_q \psi_q \delta_S$, where δ_S is the Dirac delta, ensures continuity on the surface S .

The MIT bag model energy density reads

$$\varepsilon = \frac{3}{\pi^2} \sum_q \int_0^{P_{Fq}} k^2 (m_q^2 + k^2)^{1/2} dk + B, \quad (32)$$

and the pressure

$$p = \frac{1}{\pi^2} \sum_q \int_0^{P_{Fq}} \frac{k^4}{(m_q^2 + k^2)^{1/2}} dk - B. \quad (33)$$

The baryonic density is

$$\rho_B = \sum_q \frac{(P_{F_q})^3}{3\pi^2}. \quad (34)$$

The above three equations are enough to describe quark matter. However, when used to describe quark stars, charge neutrality and chemical β equilibrium equations are also necessary. To implement them, leptons (electrons and muons) have to be present and they enter the system as free gases. The relations between the chemical potentials of the different particles are given by the β -equilibrium conditions

$$\mu_s = \mu_d = \mu_u + \mu_e, \quad \mu_e = \mu_\mu. \quad (35)$$

For charge neutrality we must impose

$$\rho_e + \rho_\mu = \frac{1}{3}(2\rho_u - \rho_d - \rho_s). \quad (36)$$

The electron and muon densities read

$$\rho_l = P_{F_l}^3 / 3\pi^2. \quad (37)$$

The energy density and pressure for the leptons are given by

$$\varepsilon_l = \frac{3}{\pi^2} \int_0^{P_{F_l}} k^2 (m_l^2 + k^2)^{1/2} dk, \quad (38)$$

and

$$p = \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{P_{F_l}} \frac{k^4}{(m_l^2 + k^2)^{1/2}} dk, \quad (39)$$

where the electron mass is taken as 0.511 MeV and the muon mass is 105.66 MeV.

The value of the bag constant B used in the present work is discussed later on.

3.2. Hadronic matter

The hadronic EoS is derived from the quantum hadrodynamical model with nonlinear terms [61–63], which is based on a relativistic mean-field theory and describes the baryon interaction through the exchange of scalar and vector mesons. The first version of the model [64] had just the scalar σ and vector ω mesons, which are enough to describe the nuclear saturation. Thereafter the isovector meson ρ was included on the model, which makes it possible to describe asymmetric nuclear matter. Finally, to better reproduce the compressibility, effective mass and symmetry energy values, non linear terms on the scalar and vector fields and terms including different mixtures of fields were introduced in the Lagrangian model [63]. The complete Lagrangian density that describes baryons interacting among each other by exchanging scalar–isoscalar (σ), vector–isoscalar (ω), vector–isovector (ρ) and scalar–isovector (δ) mesons reads [60, 65, 66]:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{nm}} + \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_\omega + \mathcal{L}_\rho + \mathcal{L}_\delta + \mathcal{L}_{\sigma\omega\rho}, \quad (40)$$

which are defined as

$$\mathcal{L}_{\text{nm}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi + g_\sigma\sigma\bar{\psi}\psi - g_\omega\bar{\psi}\gamma^\mu\omega_\mu\psi - \frac{g_\rho}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\rho}_\mu\cdot\vec{\tau}\psi + g_\delta\bar{\psi}\vec{\delta}\cdot\vec{\tau}\psi, \quad (41)$$

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2}(\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - m_\sigma^2\sigma^2) - \frac{A}{3}\sigma^3 - \frac{B}{4}\sigma^4, \quad (42)$$

$$\mathcal{L}_\omega = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu + \frac{C}{4}(g_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu)^2, \quad (43)$$

$$\mathcal{L}_\rho = -\frac{1}{4}\vec{B}^{\mu\nu}\vec{B}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2\vec{\rho}_\mu\cdot\vec{\rho}^\mu, \quad (44)$$

$$\mathcal{L}_\delta = \frac{1}{2}(\partial^\mu\vec{\delta}\partial_\mu\vec{\delta} - m_\delta^2\vec{\delta}^2), \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\sigma\omega\rho} &= g_\sigma g_\omega^2 \sigma \omega_\mu \omega^\mu \left(\alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_1' g_\sigma \sigma \right) + g_\sigma g_\rho^2 \sigma \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu \left(\alpha_2 + \frac{1}{2} \alpha_2' g_\sigma \sigma \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha_3' g_\omega^2 g_\rho^2 \omega_\mu \omega^\mu \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu. \end{aligned} \quad (46)$$

In the above Lagrangian density: \mathcal{L}_{nm} describe the kinetic part of the nucleons plus the terms standing for the interaction between them and mesons σ , δ , ω , and ρ ; the terms \mathcal{L}_j describe the free and self-interacting terms of the meson j , where $j = \sigma, \delta, \omega$, and ρ ; the last term, $\mathcal{L}_{\sigma\omega\rho}$, accounts for crossing interactions between the meson fields. The antisymmetric field tensors $F_{\mu\nu}$ and $\vec{B}_{\mu\nu}$ are given by $F_{\mu\nu} = \partial_\nu\omega_\mu - \partial_\mu\omega_\nu$ and $\vec{B}_{\mu\nu} = \partial_\nu\vec{\rho}_\mu - \partial_\mu\vec{\rho}_\nu - g_\rho(\vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu)$. Finally, the nucleon mass is M and the meson masses are m_j .

Within the usual relativistic mean field (RMF) approximation, the meson fields are treated as classical fields, and the substitution below is performed:

$$\sigma \rightarrow \langle \sigma \rangle \equiv \sigma_0, \quad \omega_\mu \rightarrow \langle \omega_0 \rangle \equiv \omega_0, \quad \vec{\rho}_\mu \rightarrow \langle \vec{\rho}_0 \rangle \equiv \vec{\rho}_{0(3)}, \quad \vec{\delta} \rightarrow \langle \vec{\delta} \rangle \equiv \delta_{(3)}. \quad (47)$$

The equations of motion are obtained via Euler–Lagrange equations and rotational and translational invariance are assumed. They are given by:

$$\begin{aligned} m_\sigma^2\sigma_0 &= g_\sigma\rho_3 - A\sigma_0^2 - B\sigma_0^3 + g_\sigma g_\omega^2\omega_0^2(\alpha_1 + \alpha_1'g_\sigma\sigma_0) \\ &\quad + g_\sigma g_\rho^2\vec{\rho}_{0(3)}^2(\alpha_2 + \alpha_2'g_\sigma\sigma_0), \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} m_\omega^2\omega_0 &= g_\omega\rho - Cg_\omega(g_\omega\omega_0)^3 - g_\sigma g_\omega^2\sigma_0\omega_0(2\alpha_1 + \alpha_1'g_\sigma\sigma_0) \\ &\quad - \alpha_3'g_\omega^2g_\rho^2\vec{\rho}_{0(3)}^2\omega_0, \end{aligned} \quad (49)$$

$$m_\rho^2\vec{\rho}_{0(3)} = \frac{g_\rho}{2}\rho_3 - g_\sigma g_\rho^2\sigma_0\vec{\rho}_{0(3)}(2\alpha_2 + \alpha_2'g_\sigma\sigma_0) - \alpha_3'g_\omega^2g_\rho^2\vec{\rho}_{0(3)}\omega_0^2, \quad (50)$$

$$m_\delta^2\delta_{(3)} = g_\delta\rho_{s3}, \quad (51)$$

and

$$[i\gamma^\mu\partial_\mu - \gamma^0V_\tau - (M + S_\tau)]\psi = 0, \quad (52)$$

where we identified:

$$\rho_s = \langle \bar{\psi} \psi \rangle = \rho_{sp} + \rho_{sn}, \quad (53)$$

$$\rho_{s3} = \langle \bar{\psi} \tau_3 \psi \rangle = \rho_{sp} - \rho_{sn}, \quad (54)$$

$$\rho = \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle = \rho_p + \rho_n, \quad (55)$$

$$\rho_3 = \langle \bar{\psi} \gamma^0 \tau_3 \psi \rangle = \rho_p - \rho_n = (2y_p - 1)\rho, \quad (56)$$

with

$$\rho_{sp,n} = \frac{\gamma M_{p,n}^*}{2\pi^2} \int_0^{k_{Fp,n}} \frac{k^2 dk}{\sqrt{k^2 + M_{p,n}^{*2}}}, \quad (57)$$

$$\rho_{p,n} = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_{Fp,n}} k^2 dk = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_{Fp,n}^3, \quad (58)$$

$$V_\tau = g_\omega \omega_0 + \frac{g_\rho}{2} \bar{\rho}_{0(3)} \tau_3, \quad S_\tau = -g_\sigma \sigma_0 - g_\delta \delta_{(3)} \tau_3, \quad (59)$$

where γ is the spin degeneracy.

After some analytical calculations that can be found in [60, 66] the following expressions for energy density and pressure are obtained:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{A}{3} \sigma_0^3 + \frac{B}{4} \sigma_0^4 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 - \frac{C}{4} (g_\omega^2 \omega_0^2)^2 - \frac{1}{2} m_\rho^2 \bar{\rho}_{0(3)}^2 + g_\omega \omega_0 \rho \\ & + \frac{g_\rho}{2} \bar{\rho}_{0(3)} \rho_3 + \frac{1}{2} m_\delta^2 \delta_{(3)}^2 - g_\sigma g_\omega^2 \sigma \omega_0^2 \left(\alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_1' g_\sigma \sigma_0 \right) \\ & - g_\sigma g_\rho^2 \sigma \bar{\rho}_{0(3)}^2 \left(\alpha_2 + \frac{1}{2} \alpha_2' g_\sigma \sigma_0 \right) - \frac{1}{2} \alpha_3' g_\omega^2 g_\rho^2 \omega_0^2 \bar{\rho}_{0(3)}^2 + \mathcal{E}_{\text{kin}}^p + \mathcal{E}_{\text{kin}}^n, \end{aligned} \quad (60)$$

with

$$\mathcal{E}_{\text{kin}}^{p,n} = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_{Fp,n}} k^2 (k^2 + M_{p,n}^{*2})^{1/2} dk, \quad (61)$$

and pressure:

$$\begin{aligned} P = & -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{A}{3} \sigma_0^3 - \frac{B}{4} \sigma_0^4 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{C}{4} (g_\omega^2 \omega_0^2)^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \bar{\rho}_{0(3)}^2 \\ & + \frac{1}{2} \alpha_3' g_\omega^2 g_\rho^2 \omega_0^2 \bar{\rho}_{0(3)}^2 - \frac{1}{2} m_\delta^2 \delta_{(3)}^2 + g_\sigma g_\omega^2 \sigma_0 \omega_0^2 \left(\alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_1' g_\sigma \sigma_0 \right) \\ & + g_\sigma g_\rho^2 \sigma \bar{\rho}_{0(3)}^2 \left(\alpha_2 + \frac{1}{2} \alpha_2' g_\sigma \sigma_0 \right) + P_{\text{kin}}^p + P_{\text{kin}}^n, \end{aligned} \quad (62)$$

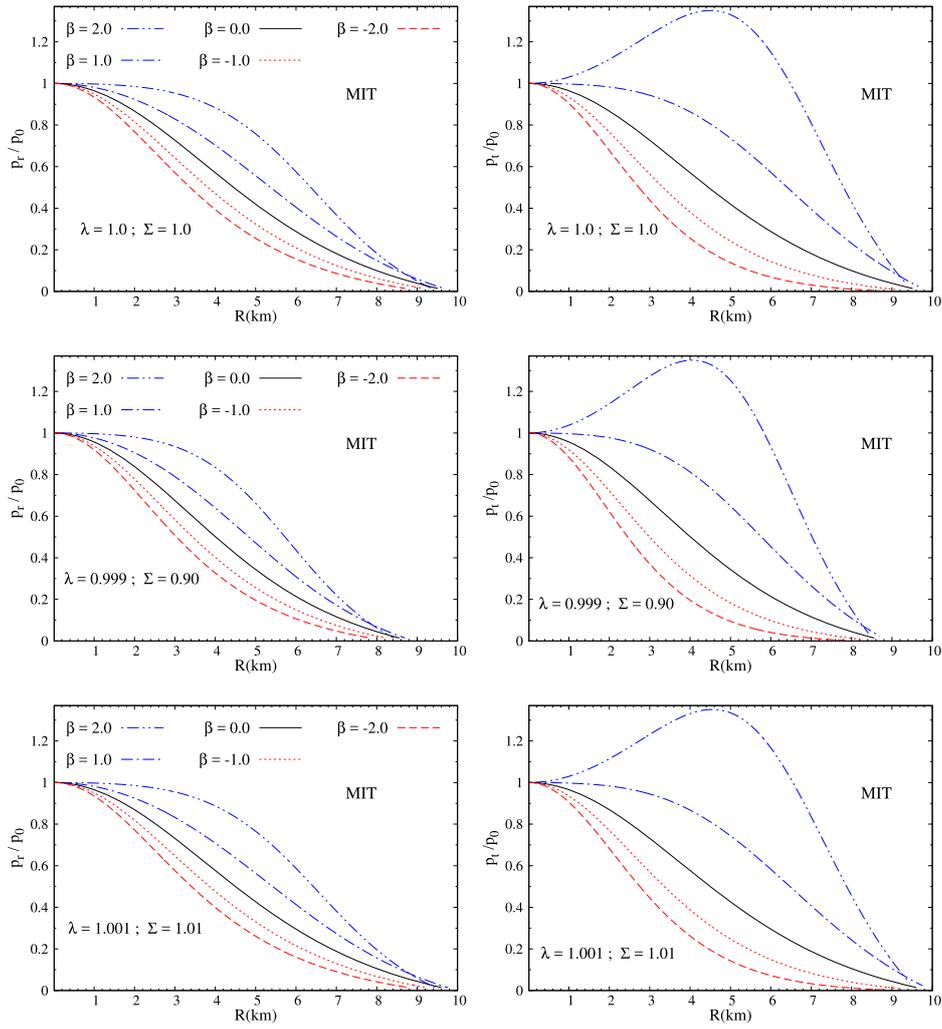


Figure 1. The radial pressure p_r (left) and the transverse pressure p_t (right) as functions of the radial coordinate r for the model MIT EoS, normalized to the value of p_r at the center of the star p_0 .

with

$$P_{\text{kin}}^{p,n} = \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^{k_{F,p,n}} \frac{k^4 dk}{(k^2 + M_{p,n}^{*2})^{1/2}}. \quad (63)$$

Once again, charge neutrality and chemical equilibrium have to be enforced, which depend on the inclusion of leptons. The leptonic expressions for energy density, pressure and density are the same as given in the last subsection. Charge neutrality and β -equilibrium conditions imply that

$$\mu_p = \mu_n - \mu_e, \quad \mu_e = \mu_\mu, \quad \rho_p = \rho_e + \rho_\mu. \quad (64)$$

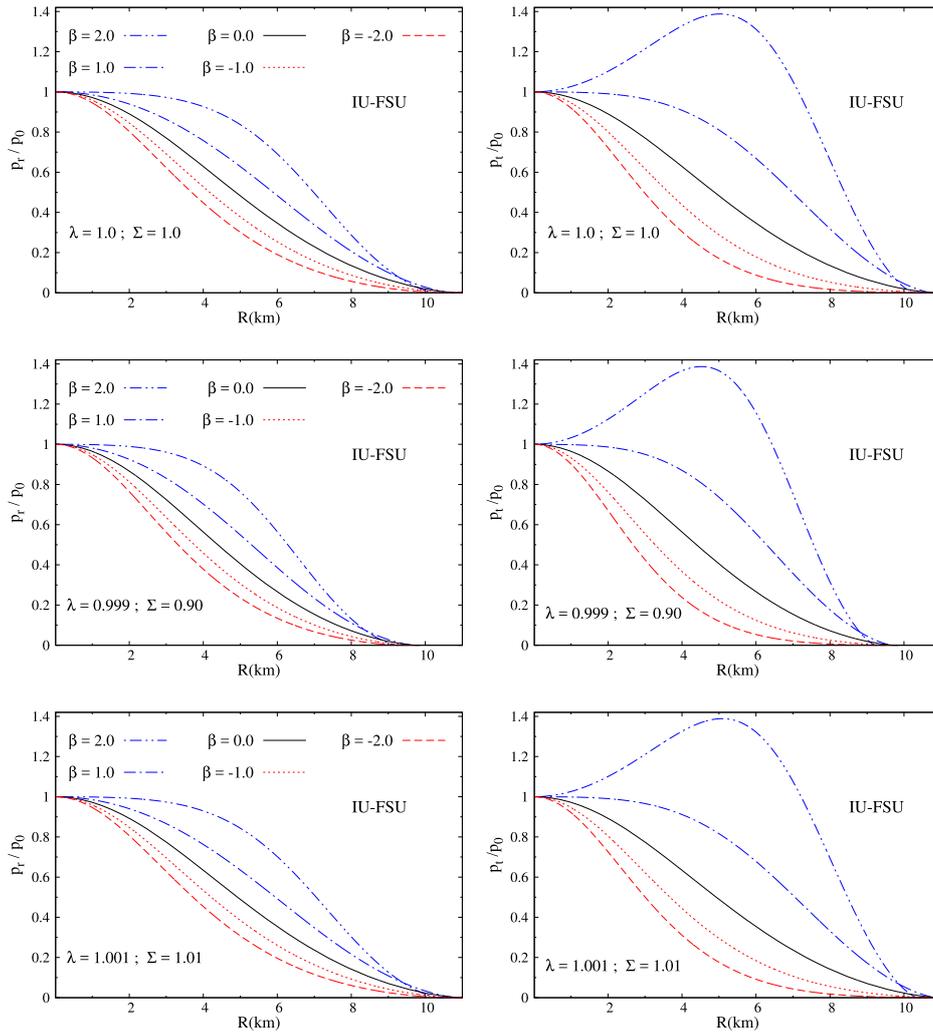


Figure 2. The radial pressure p_r (left) and transverse pressure p_t (right) as functions of the radial coordinate r for the model IU-FSU EoS, normalized to the value of p_r at the center of the star p_0 .

Now we can model the stars. We solve equations (32), (33), (35) and (36) and use them as input to the TOV-like equations (29) and (30) to obtain the mass–radius properties of a family of quarks stars. To obtain hadronic star macroscopic properties, we solve equations (60), (62) and (64) and follow the same procedure, i.e. use them as input to (29) and (30) to obtain as output the mass–radius properties of the star.

4. Results and discussion

We now present our results on macroscopic properties of anisotropic compact stars, such as mass and radius, in the context of RR gravity. For this objective, it is necessary to use as a main ingredient an appropriate EoS which is used to model the nuclear matter contained within the

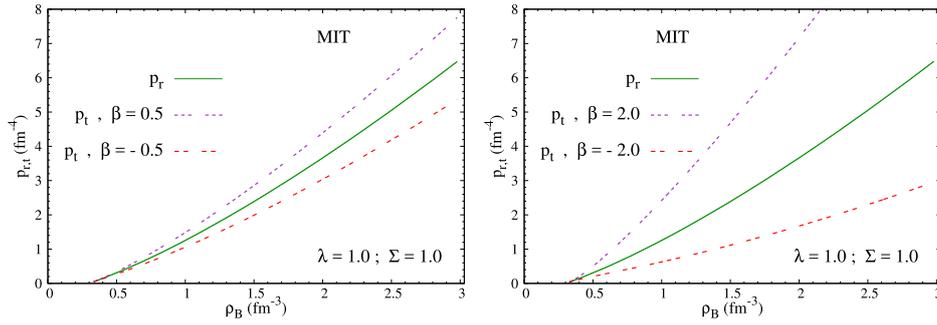


Figure 3. Radial and tangential pressures for different values of the parameter β .

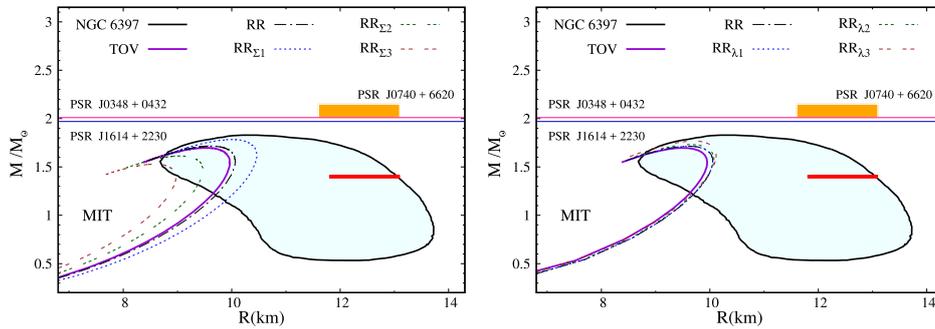


Figure 4. Mass–radius relation for a family of quark stars described with the MIT EoS. We analyse the effects caused by varying the Rainbow parameter Σ (left) while keeping the other parameter fixed and the effects of varying the Rastall parameter λ (right) while keeping Σ fixed, in both figures $\beta = 0$. The red line segment and orange rectangular region correspond respectively to the radius range for the $1.4M_{\odot}$ NS PSR J0030 + 0451 and the $2.08 \pm 0.07M_{\odot}$ NS PSR J0740 + 6620. Similarly, the blue and pink horizontal lines stand respectively for the mass measurements of NS PSR J1614 + 2230 and NS PSR J0348 + 0432. The purple curve represents stars from standard TOV solutions in GR.

star. For this purpose, we use two different models, one that describes quark (or strange) matter and another one for hadronic matter. Then, after the choice of a suitable EoS, we will proceed to set the anisotropic profile according to the expression in equation (27).

Different models have been used to describe quark matter. The most common are the MIT bag model [38] and the Nambu–Jona–Lasinio model [67]. Other models include more detailed assumptions about quark matter, e.g. density-dependent quark masses [68–70]. According to the Bodmer–Witten hypothesis [41], the true fundamental state of matter at high densities can be formed by deconfined quark matter. The possibility of the existence of quark (or strange) stars was initially proposed by Itoh [71] and Bodmer in [40], later analysed by Witten in [41] and investigated with the MIT bag model at zero temperature [72]. Hence in the framework of the MIT bag model [38] quarks are confined in a volume space called the bag, for which it is necessary a positive and constant potential energy per unit of volume, namely the *bag constant* (B). Inside this volume, the quarks behave as free particles and no colour currents survive on the bag surface. Therefore, the quarks inside the bag can be modelled with a free Fermi gas, where the energy at the border of the bag is negligible when compared with the

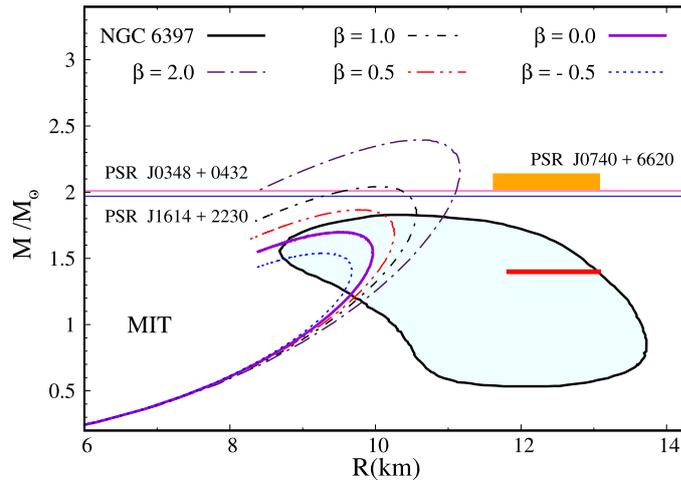


Figure 5. Mass–radius relation for a family of anisotropic quark stars described with the MIT EoS. We analyse the effects caused by varying the anisotropic parameter β . The red line segment and orange rectangular region correspond respectively to the radius range for the $1.4M_{\odot}$ NS PSR J0030 + 0451 and the $2.08 \pm 0.07M_{\odot}$ NS PSR J0740 + 6620. Similarly, the blue and pink horizontal lines stand respectively for the mass measurements of NS PSR J1614 + 2230 and NS PSR J0348 + 0432. The purple curve represents stars from standard TOV solutions in GR.

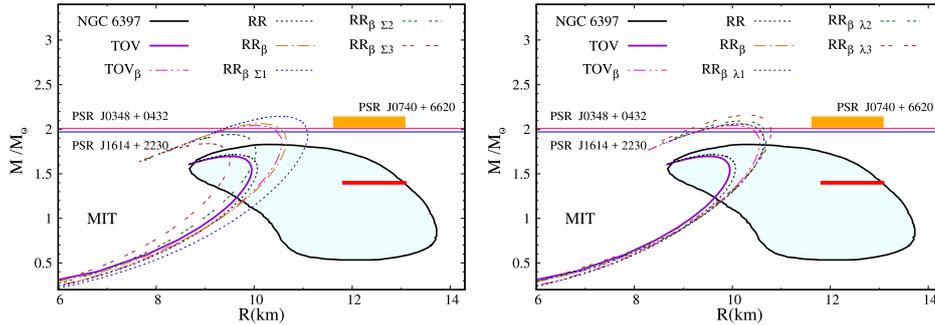


Figure 6. Mass–radius relation for a family of anisotropic quark stars described with the MIT EoS. We analyse the effects caused by varying the Rainbow parameter Σ (left) while keeping the other parameter fixed and the effects of varying the Rastall parameter λ (right) while keeping Σ fixed. The red line segment and orange rectangular region correspond respectively to the radius range for the $1.4M_{\odot}$ NS PSR J0030 + 0451 and the $2.08 \pm 0.07M_{\odot}$ NS PSR J0740 + 6620. Similarly, the blue and pink horizontal lines stand respectively for the mass measurements of NS PSR J1614 + 2230 and NS PSR J0348 + 0432. The purple curve represents stars from standard TOV solutions in GR.

energy contained inside it. We next use the MIT bag model to build strange quark stars. For this purpose, we use a value for the bag constant equal to $B^{1/4} = 147 \text{ MeV}$, which satisfies the stability window for this model according to the results shown in [42]. To describe hadronic stars we use the IU-FSU parameterization proposed in [43], which is a model originated from the relativistic mean-field theory (RMF). In addition to satisfying the constraints investigated

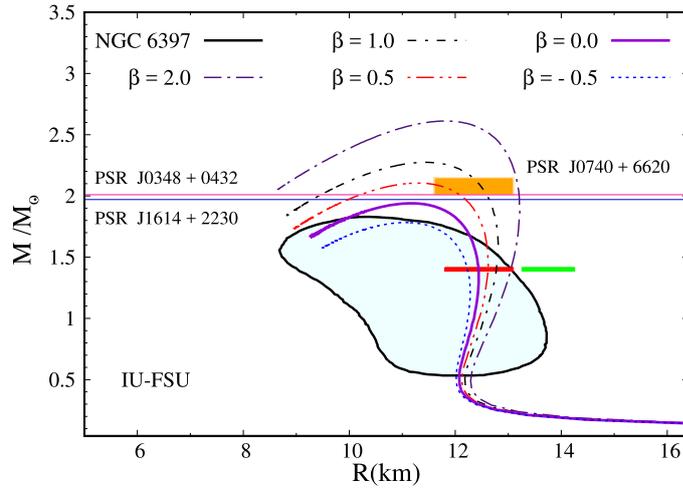


Figure 7. Mass–radius relation for a family of anisotropic hadronic stars described with the IU-FSU EoS. We analyse the effects caused by varying the anisotropic parameter β . The red and green line segments correspond respectively to the radius range of the $1.4M_{\odot}$ NS for PSR J0030 + 0451 and PREX-2. The orange rectangular region represents the interval of radius estimates for the $2.08 \pm 0.07M_{\odot}$ NS PSR J0740 + 6620. Similarly, the blue and pink horizontal lines stand respectively for the mass measurements of NS PSR J1614 + 2230 and NS PSR J0348 + 0432. The purple curve represents stars from standard TOV solutions in GR.

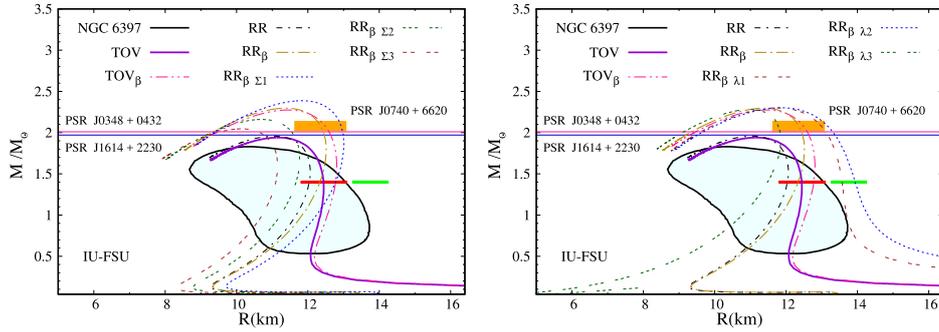


Figure 8. Mass–radius relation for a family of anisotropic hadronic stars described with the IU-FSU EoS. We analyse the effects caused by varying the Rainbow parameter Σ (left) while keeping the other parameter fixed and the effects of varying the Rastall parameter λ (right) while keeping Σ fixed. The red and green line segment correspond respectively to the radius range of the $1.4M_{\odot}$ NS for PSR J0030 + 0451 and PREX-2. The orange rectangular region represents the interval of radius estimates for the $2.08 \pm 0.07M_{\odot}$ NS PSR J0740 + 6620. Similarly, the blue and pink horizontal lines stand respectively for the mass measurements of NS PSR J1614 + 2230 and NS PSR J0348 + 0432. The purple curve represents stars from standard TOV solutions in GR.

in [66, 73], the IU-FSU model also satisfactorily reproduces the recent astrophysical constraint from the observation of GW170817 [74]. Additionally, we use the full BPS EoS to describe the star outer crust [75], although we are aware that more sophisticated prescriptions exist in

the literature [76, 77]. As was initially mentioned at the beginning of this section, to describe compact stars we will use the MIT bag model and the IU-FSU parameterization. Our results are discussed in the next paragraphs.

We modelled the anisotropic profile σ according to equation (27). This profile has already been used in recent works in GR. e.g. [55]. The choice of parameters of the RR gravity is based on values used in [7].

At first, we would like to comment that in all our models built using the MIT EoS and the IU-FSU parameterization, the anisotropic effects vanish at the stellar surface, namely $\sigma(R) = 0$. This is a direct consequence of the anisotropic profile. Also, when the pressure becomes zero at the star surface, the tangential pressure automatically reaches its zero value. This is an expected result and was verified in our numerical integration.

In figures 1 and 2, for the quark and the hadronic EoS respectively, we fixed a central density ρ_0 and computed the normalized radial pressure p_r and the transverse pressure p_t , as a function of the radial coordinate r . For this purpose we selected five different values of parameter β and three different values for each one of the parameters λ and Σ . We can observe that in the cases under analysis, both the radial pressure and the transverse pressure profiles in a star are affected due to the anisotropy. We can note that for a fixed radius inside the star, the radial pressure and the transverse pressure increase (decrease) with the increment (diminution) of β . As we can see, for a larger value of the parameter β , in particular, $\beta = +1.0; +2.0$, there exist solutions for which both the behaviour of p_r and p_t is not monotonic as a function of the radial coordinate, instead, these quantities present a maximum inside the stars. On the other hand, as we vary the parameters which control the effects of RR gravity, the quantities p_r and p_t vanish at different values of the radial coordinate.

Afterwards, we investigated whether anisotropy effects on the RR theories could be of astrophysical relevance by varying anisotropy parameter β in the range of positive and negative values between ± 2.0 . As can be observed in figures 5–8 the negative values of the parameter β drastically decrease the maximum stellar mass. These are presented in the tables 2 and 4 only for comparison reasons. In contrast, positive values of β provide the best results for the mass–radius relation of the NSs family, in agreement with modern astrophysical constraints such as the NS in the quiescent LMXB NGC 6397 [78, 79], the extremely massive millisecond pulsar PSR J0740 + 6620 [80] and the ones inferred from PREX-2 [81]. This motivated further exploration of the positive values.

Before discussing results of astrophysical relevance, we would like to comment on the effects of RR gravity and anisotropy on the EoS, and the difference between the radial and tangential pressures. In figure 3, we can see both the radial and transverse pressures, as a function of the baryonic density. They vary from around 0.2 fm^{-4} at baryonic densities of 1 fm^{-3} and $\beta = \pm 0.5$ to 3.5 fm^{-4} at baryonic densities of 2.0 fm^{-3} and $\beta = +2.0$. Let us compare our results with the ones shown in [82, 83]. For $\mu_B = 500 \text{ MeV}$, one can see that for a magnetic field of the order of 10^{18} G , the difference between the radial and transverse pressures is negligible. In contrast, that difference rises drastically for a magnetic field equal to 10^{19} G in [82]. The same qualitative behaviour is shown in [83]. For a $\mu_B = 1200$ ($\mu_B = 1500$) MeV, the difference reaches 3.5 (3.0) fm^{-4} for a magnetic field equal to $3 \times 10^{18} \text{ G}$ and about 20 (25) fm^{-4} for a magnetic field around 10^{19} G . Hence, it is reasonable to say that the anisotropic effects we are analyzing in the present work are of the same order of magnitude as the ones obtained with a magnetic field not much larger than 10^{18} G .

Concerning astrophysical applications, we will discuss and compare our results with recent observations. According to [78, 79], the NS in the LMXB NGC 6397, depicted as a green shaded area in all figures shown for mass and radius, provides a constraint at 68% confidence level over the possible values of the masses and corresponding radii of the NS. Similarly, the

Table 1. Macroscopic properties for different values of the λ and Σ parameters corresponding to the mass–radius diagram in figure 4.

Rainbow	Parameters	$R_{1.4}$ (km)	Rastall	Parameters	$R_{1.4}$ (km)
TOV	$\lambda = \Sigma = 1.0$	9.88	TOV	$\lambda = \Sigma = 1.0$	9.88
RR	$\Sigma = 1.01; \lambda = 0.999$	9.97	RR	$\lambda = 0.999; \Sigma = 1.01$	9.97
RR$_{\Sigma 1}$	$\Sigma = 1.05; \lambda = 0.999$	10.30	RR$_{\lambda 1}$	$\lambda = 1.003; \Sigma = 1.01$	9.97
RR$_{\Sigma 2}$	$\Sigma = 0.95; \lambda = 0.999$	9.44	RR$_{\lambda 2}$	$\lambda = 0.97; \Sigma = 1.01$	9.97
RR$_{\Sigma 3}$	$\Sigma = 0.90; \lambda = 0.999$	8.96	RR$_{\lambda 3}$	$\lambda = 0.92; \Sigma = 1.01$	9.96

Table 2. Macroscopic properties for different values of the β parameter corresponding to the mass–radius diagram in figure 5.

General relativity	Parameters	$R_{1.4}$ (km)
TOV	$\beta = \mathbf{0.0}$	9.88
TOV $_{\beta 1}$	$\beta = \mathbf{0.5}$	10.02
TOV $_{\beta 2}$	$\beta = \mathbf{1.0}$	10.14
TOV $_{\beta 3}$	$\beta = \mathbf{2.0}$	10.29
TOV $_{\beta 4}$	$\beta = \mathbf{-0.5}$	9.67

millisecond pulsars are among the most useful astrophysical objects in the Universe for testing fundamental physics, because they impose some of the most stringent constraints on high-density nuclear physics in the stellar interior. Recent measurements coming from PSRs based on fits of rotating hot spot patterns by the NICER and x-ray multi-mirror (XMM-Newton) x-ray observations, tidal deformability constraints from two gravitational wave events, radius measurement of PSR J0030 + 0451 and the masses of two other pulsars of ~ 2.0 solar masses (M_{\odot}), provide data for radius and mass values at $\sim 1, 5 - 3$ times the nuclear saturation density inside NSs [80]. The mass measurement and radius estimates provided for these objects, are $11.80 \text{ km} \leq R_{1.4} \leq 13.1 \text{ km}$ for the $1.4M_{\odot}$ NS PSR J0030 + 0451 (horizontal line segment in red colour shown in all figures 4–8) and $11.60 \text{ km} \leq R \leq 13.1 \text{ km}$ for a NS with mass between $2.01M_{\odot} \leq M \leq 2.15M_{\odot}$ PSR J0740 + 6620 (the rectangular region in orange colour shown in all figures 4–8). However, according to the recent results found by the PREX-2 [81], the radius of a NS with a mass of $1.4M_{\odot}$ lies between $13.25 \text{ km} \lesssim R_{1.4} \lesssim 14.26 \text{ km}$ (horizontal line segment in green colour shown in figures 7 and 8). Previously, two massive stars had been discovered in 2010 and 2013, namely, PSR J1614 + 2230 [84] with mass $1.97 \pm 0.04M_{\odot}$ (horizontal line in blue colour shown in all figures 4–8) and PSR J0348 + 0432 [85] with mass $2.01 \pm 0.04M_{\odot}$ (horizontal line in pink colour shown in all figures 4–8). In the next lines, we show how our results fall inside the windows established by the observational constraints previously discussed.

At first, in order to be clear, we made plots for the corresponding standard TOV solutions from GR, which can be obtained using $\Sigma = 1.0$, $\lambda = 1.0$ and $\beta = 0$. These plots are represented by the continuous purple lines in the figures 4–8. We also show the radius values corresponding to the canonical stars ($1.4M_{\odot}$), which are computed for all parameter sets and are listed on tables 1–5.

We further discuss our results for the case of quark stars. In figure 4 and table 1 we only show the effects of RR gravity (i.e. we ignore the anisotropic effects) on quark star properties obtained with the MIT EoS (Note that, to the best of our knowledge, the RR gravity effects on quark stars has not been investigated yet). As we can see the parameter associated with

Table 3. Macroscopic properties for different values of the λ and Σ parameters corresponding to the mass–radius diagram in figure 6.

Rainbow	Parameters	$R_{1.4}$ (km)	Rastall	Parameters	$R_{1.4}$ (km)
TOV	$\lambda = \Sigma = 1.0; \beta = 0.0$	9.88	TOV	$\lambda = \Sigma = 1.0; \beta = 0.0$	9.88
TOV$_{\beta}$	$\lambda = \Sigma = 1.0; \beta = 1.0$	10.14	TOV$_{\beta}$	$\lambda = \Sigma = 1.0; \beta = 1.0$	10.14
RR	$\Sigma = 1.01; \lambda = 0.999; \beta = 0.0$	9.97	RR	$\lambda = 0.999; \Sigma = 1.01; \beta = 0.0$	9.97
RR$_{\beta}$	$\Sigma = 1.01; \lambda = 0.999; \beta = 1.0$	10.21	RR$_{\beta}$	$\lambda = 0.999; \Sigma = 1.01; \beta = 1.0$	10.21
RR$_{\beta \Sigma 1}$	$\Sigma = 1.05; \lambda = 0.999; \beta = 1.0$	10.52	RR$_{\beta \lambda 1}$	$\lambda = 1.003; \Sigma = 1.01; \beta = 1.0$	10.21
RR$_{\beta \Sigma 2}$	$\Sigma = 0.95; \lambda = 0.999; \beta = 1.0$	9.74	RR$_{\beta \lambda 2}$	$\lambda = 0.97; \Sigma = 1.01; \beta = 1.0$	10.21
RR$_{\beta \Sigma 3}$	$\Sigma = 0.90; \lambda = 0.999; \beta = 1.0$	9.32	RR$_{\beta \lambda 3}$	$\lambda = 0.92; \Sigma = 1.01; \beta = 1.0$	10.19

Table 4. Macroscopic properties for different values of the β parameter corresponding to the mass–radius diagram in figure 7.

General relativity	Parameters	$R_{1.4}$ (km)
TOV	$\beta = 0.0$	12.44
TOV $_{\beta 1}$	$\beta = 0.5$	12.62
TOV $_{\beta 2}$	$\beta = 1.0$	12.77
TOV $_{\beta 3}$	$\beta = 2.0$	13.04
TOV $_{\beta 4}$	$\beta = -0.5$	12.22

Table 5. Macroscopic properties for different values of the λ and Σ parameters corresponding to the mass–radius diagram in figure 8.

Rainbow	Parameters	$R_{1.4}$ (km)	Rastall	Parameters	$R_{1.4}$ (km)
TOV	$\lambda = \Sigma = 1.0; \beta = 0.0$	12.44	TOV	$\lambda = \Sigma = 1.0; \beta = 0.0$	12.44
TOV$_{\beta}$	$\lambda = \Sigma = 1.0; \beta = 1.0$	12.77	TOV$_{\beta}$	$\lambda = \Sigma = 1.0; \beta = 1.0$	12.77
RR	$\Sigma = 1.01; \lambda = 0.999; \beta = 0.0$	12.03	RR	$\lambda = 0.999; \Sigma = 1.01; \beta = 0.0$	12.03
RR$_{\beta}$	$\Sigma = 1.01; \lambda = 0.999; \beta = 1.0$	12.33	RR$_{\beta}$	$\lambda = 0.999; \Sigma = 1.01; \beta = 1.0$	12.33
RR$_{\beta \Sigma 1}$	$\Sigma = 1.05; \lambda = 0.999; \beta = 1.0$	12.77	RR$_{\beta \lambda 1}$	$\lambda = 1.002; \Sigma = 1.01; \beta = 1.0$	13.56
RR$_{\beta \Sigma 2}$	$\Sigma = 0.95; \lambda = 0.999; \beta = 1.0$	11.66	RR$_{\beta \lambda 2}$	$\lambda = 1.003; \Sigma = 1.01; \beta = 1.0$	13.93
RR$_{\beta \Sigma 3}$	$\Sigma = 0.90; \lambda = 0.999; \beta = 1.0$	11.10	RR$_{\beta \lambda 3}$	$\lambda = 0.97; \Sigma = 1.01; \beta = 1.0$	11.48

the Rainbow gravity has a stronger effect on the values of the quark star mass and radius when compared with the effect produced by the Rastall gravity parameter. In contrast, when we considered the general relativistic case and studied the effect of anisotropy, it is observed in figure 5 and table 2 that the radius of an anisotropic quark star increases along with the anisotropic parameter β . Finalizing, we explored the combined effects of all the parameters. We can note that the radius of an anisotropic quark star in the context of RR gravity increases when the parameter β increases, as we can see in figure 6 and table 3 for fixed values of λ (left) and Σ (right). As we can see, the constraints imposed by the results from NSs PSR J0030 + 0451 and PSR J0740 + 6620 cannot be described by this model, although it is possible to describe the astrophysical object NGC 6397, which was already possible with usual TOV equations without anisotropy effects using the MIT model.

On the other hand, the constraints imposed by the massive stars PSR J1614 + 2230 and PSR J0348 + 0432 cannot be described by quark stars in the context of RR gravity, figure 4.

In contrast, as we can see in figure 6, the anisotropic quark stars in RR theory can be accommodated within these astrophysical constraints by many of the RR and β parameters choices we have made, which was already possible in GR with anisotropy effects, figure 5.

After studying quark stars, we studied the effects of RR gravity and anisotropy on hadronic stars modelled by the IU-FSU EoS. At first, in the context of GR, we investigated the effects of anisotropy (i.e. we ignored the effects of RR gravity) on hadronic stars, as presented in table 4 and figure 7. The IU-FSU EoS yields a maximum mass slightly smaller than $2.0M_{\odot}$ and the radius corresponding to the canonical star ($1.4M_{\odot}$) satisfies the restrictions imposed by the observation of event GW170817. As it is known, this event suggests that the NS radius has to be in the interval 10.5–13.4 km [1]. The electromagnetic counterpart to this event has shown to have a very good agreement with theoretical kilonova models [86], which are models that predict that the merger of two NSs or a NS and a black-hole produce a roughly isotropic optical/near-infrared transient powered by the radioactive decay of heavy elements synthesized in the merger ejecta. Using simple arguments from this kilonova modelling together with the quasi-universal relation that sets the constraint on the maximum mass that can be supported through uniform rotation to be $M_{\max} = (1.20^{+0.02}_{-0.02}) M_{\text{TOV}}$ independently of the EoS [87] (this relation seems to hold for Rastall gravity as well, as can be seen in [88]) it was possible to impose restrictions on the maximum mass of a non-rotating star to be $2.01^{+0.04}_{-0.04} \leq M_{\text{TOV}}/M_{\odot} \lesssim 2.16^{+0.17}_{-0.15}$ [89] were the lower limit of this range is obtained from observations of massive pulsars in binary systems [90]. From table 4 and figure 7 it is possible to see that the increase of the anisotropic parameter β produces an increase in both the mass and radius of the hadronic star. Our tests indicate that the results are extremely sensitive to the variation of the parameter β and, to satisfy the astrophysical constraints for mass and radius, we restrict this parameter to values around $\beta = +2.0$.

As a final check, we studied the combined effect of the RR theory and anisotropy on the NS mass–radius relation. The results are shown in table 5 and figure 8. The Rastall theory hardly affects the maximum stellar mass and dramatically increases the corresponding radius. On the other hand, the Rainbow theory increases both, mass and radius, depending on the values chosen [7]. Notice in figure 8 that, with some suitable parameters of RR theory, the implementation of the anisotropy makes it possible to obtain a larger maximum mass than the results obtained in [7]. We can then note that the combination of both theories (Rastall and Rainbow) plus the introduction of the anisotropy allows for the maximum mass to increase substantially and to satisfy modern astrophysical observations, although it is clear that they still need to be refined with more data, mainly concerning the radius of canonical stars.

As one can see, we have obtained a set of parameters that satisfy the constraints imposed by the NGC 6397 results. However, the new results from NICER and the PREX collaboration have established new stronger constraints on the radius of compact stars, not always compatible with each other, and therefore it is of valuable importance to analyze our results in light of this new context. For the range of parameters explored in this work, we can clearly see that for the case of hadronic stars, the combination of RR gravity and anisotropic effects can produce macroscopic properties within the currently accepted range imposed by the recent astrophysical observations. Obtaining the same radii for both massive and canonical stars is generally very difficult if a realistic EoS is used and the macroscopic results are computed with the TOV equations, as can be seen by the purple curves displayed in figures 7 and 8. On the other hand, in the case of quarks stars, our theoretical results are not compatible with the mentioned astrophysical data. In contrast, they are compatible with massive stars PSR J1614 + 2230 and PSR J0348 + 0432. The stronger constraint imposed by the PREX experiment needs to be confirmed with more refined experiments and theoretical analysis.

Finally, we comment on the gravitational wave signal GW190814 detected recently by the LIGO and Virgo collaboration as the result of a coalescence of a $25.6M_{\odot}$ black hole with a $2.5\text{--}2.67M_{\odot}$ compact object [91, 92]. Indeed, the compact object in the mass-gap region $2.5\text{--}5M_{\odot}$, has been studied in the literature [93, 94] and different classes of compact objects have proposed to interpret the detected event. Under the light of the obtained results in the present paper, for anisotropic hadronic stars described with the IU-FSU EoS (figures 7 and 8), we note that the mass-gap region can be reached for certain values of the Rastall–Rainbow gravity and the anisotropy parameter β .

5. Concluding remarks

In this work, we studied the equilibrium configurations of anisotropic compact stars in the framework of RR gravity.

For this purpose, we have analyzed quark stars built using the MIT bag model and hadronic stars modelled with the IU-FSU EoS, this last hadronic EoS was selected to agree with bulk nuclear matter properties [66] that satisfactorily describe NS maximum masses [73] and the constraints coming from gravitational-wave observations [74]. We obtained stellar structure results employing the well known general relativistic TOV equations and the modified versions for the case of Rastall–Rainbow gravity with anisotropic effects.

We made a systematic exploration of the parameter window of RR gravity and to avoid very arbitrary parameter values, we have chosen the same values obtained in a previous paper with which both massive and small radii stars could be described [7]. We observed that in RR gravity NS masses can extend to values next to $2.5M_{\odot}$. As already pointed out in [7], even when the maximum mass increases, the RR theory allows a decrease in the canonical NS radius.

We also explored the anisotropy effects for fixed values of the parameters corresponding to RR gravity. We showed that there exist two main global effects. When only anisotropy is considered in the usual GR framework, it can significantly alter the maximum stellar mass but at the same time, it is difficult to adjust the results to simultaneously satisfy the radius of the canonical NS. On the other hand, when RR gravity and anisotropy are considered simultaneously, the positive β values provide results for the radius and mass of an NS, which are compatible with recent astrophysical constraints, as far as a hadronic EoS is considered. We concluded that it is possible to obtain stellar configurations that, when combining the effects of RR and anisotropy, satisfy astrophysical constraints.

Finally, it is worth mentioning that all of our results were motivated by previous works [7, 95] in which the dependence of the Rainbow functions with the energy scale of the star was not considered, but rather taken as effective parameters. This consideration is justified because the energy dependence of the previously mentioned functions is not very well known. This technical detail can be translated into a more complex form of the resulting field equations and we plan to work on this problem in future work.

Acknowledgments

This work is a part of the project CNPq-INCT-FNA Proc. No. 464898/2014-5. DPM acknowledges partial support from CNPq (Brazil) under Grant No. 303490/2021-7, CEM is supported by Capes (Brazil) scholarship, LCNS would like to thank Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) for partial financial support through the research Project No. 164762/2020-5 and FMS would like to thank CNPq for financial support through the research Project No. 165604/2020-4.

Data availability statement

All data that support the findings of this study are included within the article (and any supplementary files).

ORCID iDs

Clésio E Mota  <https://orcid.org/0000-0002-8616-0894>

Franciele M da Silva  <https://orcid.org/0000-0003-2568-2901>

Tiago J N da Silva  <https://orcid.org/0000-0001-8044-4055>

Débora P Menezes  <https://orcid.org/0000-0003-0730-6689>

References

- [1] Abbott B P *et al* ((LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 161101
- [2] Event Horizon Telescope Collaboration 2019 *Astrophys. J.* **875** L1
- [3] Sotiriou T P and Faraoni V 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 451
- [4] Aparicio Resco M, de la Cruz-Dombriz Á, Llanes Estrada F J and Zapatero Castrillo V 2016 *Phys. Dark Univ.* **13** 147
- [5] Rastall P 1972 *Phys. Rev. D* **6** 3357
- [6] Magueijo J and Smolin L 2004 *Class. Quantum Grav.* **21** 1725
- [7] Mota C E, Santos L C N, Grams G, da Silva F M and Menezes D P 2019 *Phys. Rev. D* **100** 024043
- [8] Gendreau K C 2016 The Neutron star Interior Composition Explorer (NICER): design and development *Proc. SPIE* **9905** 99051H
- [9] Ekşi K Y, Güngör C and Türkoğlu M M 2014 *Phys. Rev. D* **89** 063003
- [10] Folomeev V 2018 *Phys. Rev. D* **97** 124009
- [11] Lopes L and Menezes D 2015 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **JCAP08(2015)002**
- [12] Chaichian M, Masood S S, Montonen C, Pérez Martínez A and Pérez Rojas H 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 5261
- [13] Pérez Martínez A, Pérez Rojas H and Mosquera Cuesta H J 2008 *Int. J. Mod. Phys. D* **17** 2107
- [14] Ferrer E J, de la Incera V, Keith J P, Portillo I and Springsteen P L 2010 *Phys. Rev. C* **82** 065802
- [15] Bowers R L and Liang E P T 1974 *Astrophys. J.* **188** 657
- [16] Heintzmann H and Hillebrandt W 1975 *Astron. Astrophys.* **38** 51
- [17] Hillebrandt W and Steinmetz K O 1976 *Astron. Astrophys.* **53** 283
- [18] Bayin S Ş 1982 *Phys. Rev. D* **26** 1262
- [19] Bondi H 1992 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **259** 365
- [20] Herrera L and Santos N O 1997 *Phys. Rep.* **286** 53
- [21] Mak M K and Harko T 2003 *Proc. R. Soc. A* **459** 393
- [22] Horvat D, Ilijić S and Marunović A 2011 *Class. Quantum Grav.* **28** 025009
- [23] Herrera L and Barreto W 2013 *Phys. Rev. D* **88** 084022
- [24] Peres Menezes D and Laércio Lopes L 2016 *Eur. Phys. J. A* **52** 17
- [24] Peres Menezes D and Laércio Lopes L 2016 *Eur. Phys. J. A* **52** 17
- [25] Chatterjee D, Elghozi T, Novak J and Oertel M 2015 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **447** 3785
- [26] Chatterjee D, Novak J and Oertel M 2019 *Phys. Rev. C* **99** 055811
- [27] Lopes L L and Menezes D P 2020 *Eur. Phys. J. A* **56** 122
- [28] Blandford R D and Hernquist L 1982 *J. Phys. C: Solid State Phys.* **15** 6233
- [29] Chakrabarty S 1996 *Phys. Rev. D* **54** 1306
- [30] Broderick A, Prakash M and Lattimer J M 2000 *Astrophys. J.* **537** 351
- [31] Alloy M D and Menezes D P 2017 *Int. J. Mod. Phys.: Conf. Ser.* **45** 1760031 (Singapore: World Scientific)
- [32] Felipe R G, Martinez A P, Rojas H P and Orsaria M 2008 *Phys. Rev. C* **77** 015807
- [33] Huang X-G, Huang M, Rischke D H and Sedrakian A 2010 *Phys. Rev. D* **81** 045015

- [34] Tolman R C 1939 *Phys. Rev.* **55** 364
- [35] Oppenheimer J R and Volkoff G M 1939 *Phys. Rev.* **55** 374
- [36] Zel'dovich I, Novikov I, Thorne K and Arnett W 1996 *Stars and Relativity (Dover Books on Physics)* (New York: Dover)
- [37] Cromartie H T et al 2019 *Nat. Astron.* **4** 72
- [38] Chodos A, Jaffe R L, Johnson K, Thorn C B and Weisskopf V F 1974 *Phys. Rev. D* **9** 3471
- [39] Itoh N 1970 *Prog. Theor. Phys.* **44** 291
- [40] Bodmer A R 1971 *Phys. Rev. D* **4** 1601
- [41] Witten E 1984 *Phys. Rev. D* **30** 272
- [42] Torres J R and Menezes D P 2013 *Europhys. Lett.* **101** 42003
- [43] Fattoyev F J, Horowitz C J, Piekarewicz J and Shen G 2010 *Phys. Rev. C* **82** 055803
- [44] Das D, Dutta S and Chakraborty S 2018 *Eur. Phys. J. C* **78** 810
- [45] Visser M 2018 *Phys. Lett. B* **782** 83
- [46] Lindblom L and Hiscock W A 1982 *J. Phys. A: Math. Gen.* **15** 1827
- [47] Darabi F, Moradpour H, Licata I, Heydarzade Y and Corda C 2018 *Eur. Phys. J. C* **78** 1
- [48] Smalley L L 1983 *J. Phys. A: Math. Gen.* **16** 2179
- [49] Hansraj S, Banerjee A and Channuie P 2019 *Ann. Phys., NY* **400** 320
- [50] Lobo I P, Richarte M G, Graca J M and Moradpour H 2020 *Eur. Phys. J. Plus* **135** 1
- [51] Smalley L L 1984 *Nuovo Cimento B* **80** 42
- [52] De Moraes W and Santos A 2019 *Gen. Relativ. Gravit.* **51** 1
- [53] Santos R V d and Nogales J A 2017 arXiv:1701.08203
- [54] Velten H and Caramês T R P 2021 *Universe* **7** 38
- [55] Arbañil J D V and Malheiro M 2016 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP11(2016)012
- [56] Garattini R and Mandanici G 2017 *Eur. Phys. J. C* **77** 57
- [57] Sharif M and Siddiq A 2018 *Eur. Phys. J. Plus* **133** 226
- [58] Silva H O, Macedo C F B, Berti E and Crispino L C B 2015 *Class. Quantum Grav.* **32** 145008
- [59] Horvat D, Ilijic S and Marunovic A 2011 *Class. Quantum Grav.* **28** 025009
- [60] Menezes D P 2021 *Universe* **7** 267
- [61] Walecka J D 2004 *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics* 2nd edn (Singapore: World Scientific)
- [62] Serot B D and Walecka J D 1986 *Adv. Nucl. Phys.* **16** 1
- [63] Boguta J and Bodmer A R 1977 *Nucl. Phys. A* **292** 413
- [64] Walecka J D 1974 *Ann. Phys., NY* **83** 491
- [65] Agrawal B K 2010 *Phys. Rev. C* **81** 034323
- [66] Dutra M, Lourenco O, Avancini S, Carlson B V, Delfino A, Menezes D, Providência C, Typel S and Stone J 2014 *Phys. Rev. C* **90** 055203
- [67] Nambu Y and Jona-Lasinio G 1961 *Phys. Rev.* **122** 345
- [68] Fowler G, Raha S and Weiner R 1981 *Z. Phys. C* **9** 271
- [69] Peng G X, Chiang H C and Ning P Z 2000 *Phys. Rev. C* **62** 025801
- [70] Backes B C, Hafemann E, Marzola I and Menezes D P 2021 *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **48** 055104
- [71] Itoh N 1970 *Prog. Theor. Phys.* **44** 291
- [72] Farhi E and Jaffe R L 1984 *Phys. Rev. D* **30** 2379
- [73] Dutra M, Lourenço O and Menezes D P 2016 *Phys. Rev. C* **93** 025806
Dutra M, Lourenço O and Menezes D P 2016 *Phys. Rev. C* **94** 049901 erratum
- [74] Lourenço O, Dutra M, Lenzi C H, Flores C V and Menezes D P 2019 *Phys. Rev. C* **99** 045202
- [75] Baym G, Pethick C and Sutherland P 1971 *Astrophys. J.* **170** 299
- [76] Pearson J M, Chamel N and Potekhin A Y 2020 *Phys. Rev. C* **101** 015802
- [77] Fantina A F, De Ridder S, Chamel N and Gulminelli F 2020 *Astron. Astrophys.* **633** A149
- [78] Özel F and Freire P 2016 *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **54** 401
- [79] Steiner A W, Heinke C O, Bogdanov S, Li C K, Ho W C G, Bahramian A and Han S 2018 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **476** 421
- [80] Miller M C et al 2021 arXiv:2105.06979
- [81] Reed B T, Fattoyev F J, Horowitz C J and Piekarewicz J 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 172503
- [82] Paulucci L, Ferrer E J, de la Incera V and Horvath J E 2011 *Phys. Rev. D* **83** 043009
- [83] Dexheimer V, Menezes D P and Strickland M 2013 *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **41** 015203
- [84] Demorest P B, Pennucci T, Ransom S M, Roberts M S E and Hessels J W T 2010 *Nature* **467** 1081
- [85] Antoniadis J et al 2013 *Science* **340** 448
- [86] Cowperthwaite P et al 2017 *Astrophys. J. Lett.* **848** L17

- [87] Breu C and Rezzolla L 2016 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **459** 646
- [88] da Silva F M, Santos L C N and Barros C C 2021 *Class. Quantum Grav.* **38** 165011
- [89] Rezzolla L, Most E R and Weih L R 2018 *Astrophys. J.* **852** L25
- [90] Antoniadis J *et al* 2013 *Science* **340**
- [91] Lopes L L and Menezes D P 2021 arXiv:2111.02247
- [92] Abbott R *et al* 2020 *Astrophys. J. Lett.* **896** L44
- [93] Das H, Kumar A and Patra S 2021 *Phys. Rev. D* **104** 063028
- [94] Wu X, Bao S, Shen H and Xu R 2021 *Phys. Rev. C* **104** 015802
- [95] Hendi S H, Bordbar G H, Panah B E and Panahiyan S 2016 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **JCAP09(2016)013**

Generalized Rastall's gravity and its effects on compact objects

Clésio E. Mota^{*,**}, Luis C. N. Santos^{†,††}, Franciele M. da Silva^{‡,‡‡},
Guilherme Grams^{§,§§}, Iarley P. Lobo^{¶,||,¶¶} and Débora P. Menezes^{*,|||}

**Departamento de Física,
CFM — Universidade Federal de Santa Catarina, C.P. 476,
CEP 88.040-900 Florianópolis, SC, Brazil*

*†Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba
C.P.5008, CEP 58.059-900, João Pessoa, PB, Brazil*

*‡Departamento de Física, CCE — Universidade Federal do Espírito Santo,
CEP 29.075-910, Vitória, ES, Brazil*

*§University Lyon, University Claude Bernard Lyon 1,
CNRS/IN2P3, IP2I Lyon, UMR 5822, F-69622 Villeurbanne, France*

*¶Department of Chemistry and Physics, Federal University of Paraíba,
Rodovia BR 079 — Km 12, 58397-000 Areia-PB, Brazil*

*||Physics Department, Federal University of Lavras
Caixa Postal 3037, 37200-000 Lavras-MG, Brazil*

***clesio200915@hotmail.com*

††luis.santos@ufsc.br

‡‡franmdasilva@gmail.com

§§grams.guilherme@gmail.com

¶¶lobofisica@gmail.com

|||debora.p.m@ufsc.br

Received 25 September 2021

Revised 11 December 2021

Accepted 11 December 2021

Published 11 February 2022

In this paper, we present a generalization of Rastall's gravity in which the conservation law of the energy–momentum tensor is altered, and as a result, the trace of the energy–momentum tensor is taken into account together with the Ricci scalar in the expression for the covariant derivative. Afterwards, we obtain the field equations in this theory and solve them by considering a spherically symmetric spacetime. We show that the external solution has two possible classes of solutions with spherical symmetry in the vacuum in generalized Rastall's gravity, and we analyze one of them explicitly. The generalization, in contrast to constant value $k = 8\pi G$ in general relativity, has a gravitational parameter k that depends on the Rastall constant α . As an application, we perform a careful analysis of the effects of the theory on neutron stars using realistic equations of state (EoS) as input. Our results show that important differences on the profile of neutron stars are obtained within two representatives EoS.

Keywords: Generalization; Rastall's gravity; neutron stars.

1. Introduction

Although general relativity (GR) has been successfully tested in many aspects, some open problems exist in both cosmology and astrophysics. Since the discovery of the discrepancy between the predicted rotation curves of galaxies and the observed motion,¹ and the “missing mass” of galaxy clusters,² the dark matter hypothesis remains open. Moreover, the accelerated expansion of the universe observed today suggests the existence of the so-called dark energy.^{3,4} Modified theories of gravity have gained attention because they may offer a way to solve these problems considering that these exotic forms of matter and energy are effects of a generalization of the GR due to a modified gravity.

In this sense, Rastall’s theory of gravity, which may be obtained through a reinterpretation of the conservation law on the energy–momentum tensor in curved spaces, couples the geometry to the matter in a modified way. Rastall argued that the usual conservation law on the energy–momentum tensor $T^\mu_{\nu;\mu} = 0$ is tested only in the Minkowski spacetime such that in curved spacetime it is possible to generalize this expression to $T^\mu_{\nu;\mu} = A_\nu$, where the functions A_ν vanish in flat spacetime. Indeed, one possible implication of the modified conservation law in Rastall’s gravity is to see the condition $T^\mu_{\nu;\mu} \neq 0$ as a consequence of the creation of particles in a cosmological context.⁵ In astrophysics, the extra degree of freedom due to the modified expression for the divergence of the energy–momentum tensor has been explored in the study of neutron stars,^{6,7} where the authors concluded that substantial modifications for the mass-radius relation are obtained even for very small alterations on the parameter of Rastall’s theory. We refer the reader to the following review on nonconservative theories of gravity.⁸

Although the field equations in Rastall’s theory are a generalization of the field equations in GR, it is well known that the static spherical symmetry solution in vacuum obtained with Rastall’s theory coincides with the vacuum solution in GR.⁹ In fact, it has been shown that there are two possible classes of solutions with spherical symmetry in vacuum in the Rastall’s gravity. The first class of solutions is completely equivalent to the Schwarzschild solution while the second class of solutions has the same structure of the Schwarzschild–de Sitter solution in the GR.⁹ But the effect of Rastall’s theory is more evident and interesting in the presence of matter or electric charge, that is, $T_{\mu\nu} \neq 0$. Several works involving charged static spherically symmetric black holes and black hole solutions surrounded by fluid,^{10–16} cosmological problems,^{17–21} and other theoretical works^{22–25} have been explored in the Rastall’s theory.

Some authors point out difficulties in describing the accelerated expansion of the universe from the usual Rastall gravity,^{17,26} which indicates the need for generalizing Rastall’s approach.^{27,28} In this work, we intend to study a more general modification of the conservation law not yet explored in the usual Rastall gravitational theory. In his original work, Rastall already mentioned the possibility of relating the conservation law of the energy–momentum tensor to A_ν with $A_\nu = \lambda\delta^\mu_\nu R_{,\mu}$.

A generalization of this approach could be cast in the form of a general function of the Ricci scalar as $A_\nu = \delta^\mu_\nu f(R)_{;\mu} = f'(R)\delta^\mu_\nu R_{;\mu}$ (where $f'(R) \doteq df/dR$), which can be described by the usual Rastall equations, however endowed with a variable Rastall parameter. This approach has been explored in the literature (see, for instance).²⁷ However, inspired by $f(R, T)$ modifications of gravity,^{29–31} it is possible to choose a function A_ν that depends on the scalar R and, additionally, on the trace of the energy–momentum tensor T in a more general way. Due to the fact that R is associated to the modification of the conservation law, it is natural to assume that the coupling between R and T could also contribute to breaking the conservation law. We propose to choose a general function A_ν as the combination $A_\nu = (\alpha\delta^\mu_\nu R + \beta\delta^\mu_\nu RT)_{;\mu}$. Indeed, we explore this modification of the conservation law and its effects on the resulting solutions of the modified field equations. Similarly, some categories of modified theories of gravity as the $f(R, T)$ theory have considered field equations that depends on a function of R and T in which the trace could be induced by exotic imperfect fluids or quantum effects.²⁹

In order to test the theory, we use a well-known astrophysical lab, the neutron stars. The death of a massive star in a core-collapse supernova can leave as remnant a neutron star or a black hole. A typical neutron star has about $1.4 M_\odot$, a radius of the order of 11–13 km and produces a strong gravitational field that can be used to test new gravity theories in extreme conditions. Additionally to the theoretical point of view, new experiments and observations like the NICER mission,^{32–34} the LIGO-Virgo gravitational waves observations from neutron star merges^{35,36} together with their electromagnetic counterpart^{37,38} are making the astrophysical constraints to these objects continuously more restrictive, which makes these compact objects even more suitable to be used in tests of alternative gravity theories.

This paper is organized as follows. In Sec. 2, we review Rastall's theory of gravity and then expand the original work by considering a conservation relation that depends on the trace of energy–momentum tensor and on the Ricci scalar. We obtain the Newtonian limit of the field equations and study vacuum solutions with spherical symmetry. Neutron stars are considered in Sec. 3, where we analyze the effects of the modified gravity on neutron stars mass and radius profiles using a soft and stiff realistic EoS. Finally, in Sec. 4, we show our results.

2. Generalization of Rastall's Theory of Gravity

In order to expand the original work and consider a conservation relation that depends on the trace of energy–momentum tensor, we will briefly review the original theory.³⁹ Then, we will show how to modify Einstein field equations such that the nonconservative aspect of generalized theory will be taken into account.

2.1. Rastall's theory

The left-hand side of the usual Einstein field equations satisfies $G^\mu_{\nu;\mu} = 0$, which may be easily verified by using the Bianchi identities. In fact, this relation is in

accordance with the right-hand side of the field equations if one considers the conservation law $T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$. However, in Rastall's gravity,³⁹ it is argued that this equation, in a general spacetime, may be replaced by the modified relation $T^\mu{}_{\nu;\mu} = \lambda R_{,\nu}$ where λ is a constant. After rewriting the terms of this equation, we obtain the relation

$$(T^\nu{}_\mu - \lambda\delta^\nu{}_\mu R)_{;\nu} = 0. \quad (1)$$

In this way, Eq. (1) can be used to generalize the Einstein field equations so that the term in brackets in this equation is used on the right side of the field equations. The result is

$$R^\nu{}_\mu - \frac{1}{2}\delta^\nu{}_\mu R = k(T^\nu{}_\mu - \lambda\delta^\nu{}_\mu R), \quad (2)$$

where k is Rastall's coupling constant.

2.2. Generalized Rastall's theory

We discuss now the generalization of Rastall's theory of gravity. We propose that the general function A_ν related to the divergence of the energy–momentum tensor in curved spacetime is given by $A_\nu = (\alpha\delta^\mu{}_\nu R + \beta\delta^\mu{}_\nu RT)_{;\mu}$, i.e. it has the same dependence on R as in the original Rastall work, in addition to a coupling term defined by RT , where T is the trace of the energy–momentum tensor $T_{\mu\nu}$. In particular, it is expected that the final form of the field equations in this theory will incorporate the elements of this modification and will be able to reproduce the main features of Rastall's gravity in a particular case. As a test for the theory, we solve the field equations that originate from a metric that can be used to model spacetime compact stars, such as neutron stars, and thus analyze the possible effects on the mass versus radius diagrams of these objects. As mentioned, the modification in the energy–momentum conservation law has the following form:

$$T^\mu{}_{\nu;\mu} = \alpha R_{,\nu} + \beta(RT)_{,\nu}, \quad (3)$$

where α and β are called coupling parameters, which measure the deviation from standard theory of GR and quantify the affinity of the matter field coupled with geometry.

The usual Rastall's gravity can be recovered in the appropriate limit of $\beta \rightarrow 0$. The divergence of $T_{\mu\nu}$ given by Eq. (3) is proportional to the gradients of R in both terms. Therefore, in the flat spacetime, when $R = 0$, the usual conservation law is recovered. From Eq. (3), we implement the following expression:

$$(T^\nu{}_\mu - \alpha\delta^\nu{}_\mu R - \beta\delta^\nu{}_\mu RT)_{;\nu} = 0. \quad (4)$$

In fact, assuming the condition given by the above expression, the modified field equations of generalized Rastall's gravity can be written as

$$R^\nu{}_\mu - \frac{1}{2}\delta^\nu{}_\mu R = k(T^\nu{}_\mu - \alpha\delta^\nu{}_\mu R - \beta\delta^\nu{}_\mu RT), \quad (5)$$

where k is the modified gravitational coupling constant in this theory. Taking the trace of the previous equation, we have

$$R = \frac{kT}{4k(\alpha + \beta T) - 1}, \quad (6)$$

which leads to the following expression:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = k\tau_{\mu\nu}, \quad (7)$$

where $\tau_{\mu\nu}$ is called effective energy–momentum tensor having the following expression^a:

$$\tau_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}T}{4 - \frac{1}{k(\alpha + \beta T)}}. \quad (8)$$

In Sec. 2.3, we use the Newtonian limit to obtain in this context the form of the gravitational constant k .

Note that $T_{\mu\nu}$ is the energy–momentum tensor of ordinary matter (built from the matter fields).

Although we are able to write the generalized Rastall's field equations as the Einstein tensor sourced by a function of the energy–momentum tensor (an effective “energy–momentum tensor”), this approach presents nontrivial differences in comparison to Einstein's theory as shall be seen in Sec. 2.3.

A possible equivalence between the original Rastall's approach and Einstein's theory has been originally claimed in Ref. 40 (and more recently in Ref. 41) based on the rearrangement of the field equations leading to the conservation of an effective energy–momentum tensor, a property that could still persist in our generalized proposal. However, it has been shown in Ref. 22 that the assumption that Einstein and Rastall's theories present the same energy–momentum tensor, i.e. built from the matter fields, implies in the physical unequivalence of these theories (the same argument is valid in our case). In fact, the Lagrangian whose variation gives rise to Rastall's gravity has also been a matter of current research. Due to the covariant nonconservation of the stress-energy tensor, it is expected that some kind of non-minimal coupling between matter and geometry could generate this kind of theory. In fact, some comments about this issue can be found in Refs. 22 and 42 and the subject has been analyzed in Refs. 43–45, but a final word has not been stated on the matter (see Ref. 8). Hence, we do not have a Lagrangian for the present generalized version of Rastall gravity either. We expect a nontrivial coupling between matter and the Ricci tensor could be a candidate for generating the new terms in this new proposal.

^aSince we assume small departures from GR, divergences arising from this description in terms of an effective energy–momentum tensor shall not emerge at the scale of neutron stars analyzed in this paper.

2.3. Newtonian limit

Next we calculate the Newtonian limit of Einstein field equations so that we can obtain the value of the constant k in our generalized Rastall's theory. To do this, we compare our field equations in the weak field regime with Poisson's equation:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho. \quad (9)$$

In the Newtonian limit, we can replace the metric tensor $g_{\mu\nu}$ by the Minkowski tensor $\eta_{\mu\nu}$, in terms that multiply the curvature, so that Eq. (5) reads

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} - k\eta_{\mu\nu}(\alpha R + \beta RT). \quad (10)$$

In this limit, we have $\rho \gg p$ and therefore $|T_{00}| \gg |T_{ij}|$,⁴⁶ so that if we look at the (00) component of Eq. (10) we find the following:

$$R_{00} - \frac{1}{2}(-1)R = k(-\rho) - k(-1)(\alpha R + \beta R(-\rho)). \quad (11)$$

Using the approximation $R \approx \sum_{k=1}^3 R_{kk} - R_{00}$, we can obtain the following relation:

$$R = \frac{2R_{00}}{1 - 6k\alpha + 6k\beta\rho}. \quad (12)$$

Using this relation in Eq. (11) and knowing that $R_{00} \approx -\nabla^2\phi$, we will find

$$k \left(\frac{1 - 6k\alpha + 6k\beta\rho}{1 - 4k\alpha + 4k\beta\rho} \right) = 8\pi G. \quad (13)$$

When solving this equation for k , we obtain two possible solutions. However, one of these solutions diverges when $\alpha \rightarrow 0$, so that the physically acceptable solution is given by the following expression:

$$k = \frac{1 + 32\pi G(\alpha - \beta\rho)}{12(\alpha - \beta\rho)} - \frac{\sqrt{1 + 32\pi G(\alpha - \beta\rho)(32\pi G(\alpha - \beta\rho) - 4)}}{12(\alpha - \beta\rho)}. \quad (14)$$

In principle, this equation would indicate the presence of a ρ -dependent gravitational coupling constant, k , induced by β -dependent contributions. We could avoid this feature by an analysis of k in some limiting situations by restricting the range of β such that even for the extreme regime in which Newtonian gravity should be valid, like considering the maximum density of white dwarfs $\rho_{\text{wd}}^{\text{max}} \approx 10^7 \text{ g/cm}^3 = 2.8 \times 10^{-8} \text{ fm}^{-4}$ (in natural units $\hbar = c = 1$), the dimensionless condition $128\pi G\rho_{\text{wd}}^{\text{max}}|\beta| \ll 1$ is valid. This sets a condition that suppresses pure- β contributions in the determination of k from the Newtonian limit even when α -terms are absent. This requirement can be derived by expanding the expression

in the square root of (14) as

$$1 + 128\pi G\beta\rho + 1024\pi^2 G^2 \beta^2 \rho^2 - 2048\pi^2 G^2 \alpha\beta\rho + 1024\pi^2 G^2 \alpha^2 - 128\pi\alpha G. \quad (15)$$

From this expression, one sees that even when $\alpha \rightarrow 0$, the terms proportional to $G\rho\beta$ are suppressed. In fact, in this limit, we would have

$$k \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{8\pi G}{3} - \frac{1}{12\beta\rho} + \frac{\sqrt{1 + 128\pi G\beta\rho + 1024\pi^2 G^2 \beta^2 \rho^2}}{12\beta\rho} \xrightarrow{G|\beta|\rho \ll 1} 8\pi G. \quad (16)$$

Besides that, if $G\alpha$ and $G\beta\rho_{\text{wd}}^{\text{max}}$ are at most of the same order of magnitude, then $k \approx 8\pi G$, since $G\beta\rho \ll 1$ in the Newtonian regime.

But is there an upper limit to the magnitude of $G\alpha$ terms? Now, we check again the term in the square root of (14), given by (15), to analyze the general α contribution and its relation with β , where in this case, we see the presence of a term that couples these parameters, given by $2048\pi^2 G^2 \alpha\beta\rho$ that could eventually lead an amplification of this term and the presence of a density-dependence of the coupling constant (14). So, we should expect that a bound on $|\alpha|$ would need to be set in order to avoid an amplification of this contribution. Since $2048\pi^2 G^2 \alpha\beta\rho = 16\pi G\alpha(128\pi G\beta\rho)$, we should have $G|\alpha| \not\gg 1$: for instance, a sufficient condition would be $G|\alpha| \leq 1$, but obviously this is not a necessary condition, one should only be aware that the dimensionless quantity $2048\pi^2 G^2 |\alpha| |\beta| \rho_{\text{wd}}^{\text{max}}$ does not approach 1.

In summary, if we assume $G|\beta|\rho_{\text{wd}}^{\text{max}} \ll 1$ and, for instance, $G|\alpha| \leq 1$ (where $\rho_{\text{wd}}^{\text{max}} \sim 10^{-8} \text{ fm}^{-4}$) as conditions in our parameter space (α, β) , then our Newtonian limit does not present a density-dependent coupling constant, it depends only on α and G and is given by

$$k = \frac{1 + 32\alpha G\pi - \sqrt{1 + 32\alpha G\pi(32\alpha G\pi - 4)}}{12\alpha}. \quad (17)$$

Since $\rho_{\text{wd}}^{\text{max}} \approx 2.8 \times 10^{-8} \text{ fm}^{-4}$, then in a system of units in which $c = \hbar = 1$, which implies that $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2 = 2.6 \times 10^{-40} \text{ fm}^2$, we would have found $\beta \ll 10^{44} \text{ fm}^2$ and $\alpha \leq 3.8 \times 10^{-41} \text{ fm}^{-2}$ as the conditions for a constant k . On the other hand, in a system of natural units in which $c = \hbar = G = 1$, the above conditions are translated as $\beta \ll 10^5 \text{ fm}^4$ and $\alpha \leq 1$. This last system of units will be used later on in Sec. 4 of this paper, when we consider a region of the parameter space (α, β) such that the coupling constants are defined in (17), as derived from the Newtonian limit of the theory.

In addition, we can verify that taking the limit $\alpha \rightarrow 0$, we will recover, as would be expected, the value of k for the GR, that is $k = 8\pi G$. As will be seen, we shall verify the impact of generalized Rastall parameters that obey these restrictions on the equation of state of neutron stars, which nevertheless shall leave perceivable imprints. In Sec. 2.4, we will see that for solutions associated with the vacuum, there are two possible spacetimes with spherical symmetry.

2.4. Vacuum solution with spherical symmetry

At this point, we are interested in solutions of the field equations that represent static spherically symmetric spacetimes in generalized Rastall's gravity. In the first place, we consider the trace of the field equations (5) in vacuum: $R(-1 + 4k\alpha) = 0$, this equation is satisfied either by setting $R = 0$ or $\alpha = 1/4k$. In the first case, it is possible to show that the spherical symmetric solution is completely equivalent to the usual Schwarzschild solution in GR. In the second case, i.e. for $\alpha = 1/4k$, Eq. (6) indicates that the Ricci scalar is independent of matter distribution what could be inconsistent with EoSs related to compact stars. Hence, we next consider only the first solution. We refer the interested reader to a detailed analysis of the second type of solution in Rastall's gravity, which can be found in Ref. 9.

We observe that the vacuum version of Eq. (5) reads

$$R^\nu{}_\mu - \frac{1}{4}\delta^\nu{}_\mu R = 0, \quad (18)$$

and the metric on the symmetry of interest, can be written in the usual form

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (19)$$

where $B(r)$ and $A(r)$ are functions that are determined using the field equations. In this way, if one uses the metric (19) in the field equations (18), one obtains the following vacuum equations:

$$R_{tt} - g_{tt}\frac{1}{4}R = 0, \quad (20)$$

$$R_{rr} - g_{rr}\frac{1}{4}R = 0, \quad (21)$$

$$R_{\theta\theta} - g_{\theta\theta}\frac{1}{4}R = 0, \quad (22)$$

where

$$R_{tt} = -\frac{1}{4}\left(\frac{B'A'}{A^2} + \frac{B'^2}{AB}\right) + \frac{1}{2}\frac{B''}{A} + \frac{B'}{rA}, \quad (23)$$

$$R_{rr} = \frac{1}{4}\left(\frac{B'A'}{BA} + \frac{B'^2}{B^2}\right) - \frac{1}{2}\frac{B''}{B} + \frac{A'}{rA}, \quad (24)$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{1}{2}\frac{rA'}{A^2} - \frac{1}{2}\frac{B'r}{BA} + 1 - \frac{1}{A}. \quad (25)$$

Solving the differential equations obtained from Eq. (18) for $R = 0$, we obtain the usual spacetime with spherical symmetry in generalized Rastall's gravity which is equivalent to the Schwarzschild solution in GR. As we will see, the expected effect of generalized Rastall's gravity will be observed in the case of $T_{\mu\nu} \neq 0$.

3. Neutron Stars

The study of neutron stars is interesting from a nuclear physics point of view, thanks to the extremely dense matter and possible phase transitions inside the stars, as well as a good test for alternative theories of gravity, due to the intense gravitational field created by this object.

Therefore, in order to test the generalized Rastall's gravity, in Sec. 3.1, we derive the equations that describe neutron stars within this theory.

3.1. Internal solution

Here we present the solution of the modified Einstein equations for the interior of a compact, static and spherically symmetric object.

The distribution of matter inside the star can be described by the energy-momentum tensor of a perfect fluid, given by the following expression:

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p + \rho)U_\mu U_\nu, \quad (26)$$

where p and ρ are, respectively, the pressure and the energy density of the stellar matter, and U_μ is the 4-velocity of the fluid element, which satisfies $U_\mu U^\mu = -1$.

Now we can work on Eq. (7) together with the metric, Eqs. (19) and (26) to obtain the components of the modified Einstein field equations

$$-\frac{B}{r^2 A} + \frac{B}{r^2} + \frac{A'B}{rA^2} = 8\pi GB\bar{\rho}, \quad (27)$$

$$-\frac{A}{r^2} + \frac{B'}{rB} + \frac{1}{r^2} = 8\pi GA\bar{p}, \quad (28)$$

$$-\frac{B'^2 r^2}{4AB^2} - \frac{A'B'r^2}{4A^2 B} + \frac{B''r^2}{2AB} - \frac{A'r}{2A^2} + \frac{B'r}{2AB} = 8\pi Gr^2\bar{p}, \quad (29)$$

where the effective energy and pressure read

$$\bar{\rho} = \frac{k}{8\pi G} \left[\rho + \frac{T}{4 - \frac{1}{k(\alpha + \beta T)}} \right], \quad (30)$$

$$\bar{p} = \frac{k}{8\pi G} \left[p - \frac{T}{4 - \frac{1}{k(\alpha + \beta T)}} \right], \quad (31)$$

with $T = 3p - \rho$. Note that k in the above equations is given by Eq. (17), where we can see the effect of generalized Rastall's gravity.

From Eq. (27) we can integrate A ,

$$A(r) = \left[1 - \frac{2GM(r)}{r} \right]^{-1}, \quad (32)$$

and $M(r)$ is the mass included in the radial coordinate r . The definition of the mass term is

$$M(r) = \int_0^R 4\pi r'^2 \bar{\rho}(r') dr', \quad (33)$$

where R is the radius of the star, which is defined as the radial coordinate at which the pressure vanishes, i.e. $R \equiv r'(p = 0)$. Therefore, the total gravitational mass of the neutron stars is $M \equiv M(R)$.

We want to analyze the mass and radius of neutron stars using the pressure and energy density of the nuclear matter inside the star as inputs. The mass equation (33) is one of our equations, and the second one we obtain from a combination of Eqs. (28) and (32) to complete our system:

$$\frac{B'}{2B} = \frac{GM(r)}{r^2} \left[1 + \frac{4\pi r^3 \bar{p}}{M(r)} \right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{r} \right]^{-1}. \quad (34)$$

The generalized Rastall's gravity directly affects the energy–momentum conservation, as explained in the previous section. Therefore, from the nonconservation of T^ν_μ given by Eq. (3), we obtain

$$\frac{B'}{2B} = -\frac{\bar{p}'}{\bar{p} + \bar{\rho}}. \quad (35)$$

We manipulate the last two equations to obtain the following relation:

$$\bar{p}' = -\frac{GM(r)\bar{\rho}}{r^2} \left[1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 \bar{p}}{M(r)} \right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{r} \right]^{-1}. \quad (36)$$

Equations (33) and (36) are the equivalent of the Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV)^{47,48} equations in the generalized Rastall's gravity. In Sec. 3.2, we use these two equations together with the nuclear equation of state to obtain the mass and radius of a family of neutron star in the context of the modified theory of gravity presented in this work.

3.2. Numerical results

We are now in a position that allows us to use the equations obtained in the previous section together with realistic equations of state (EoS) to model neutron stars. All of the analyses done in this section are in units $c = \hbar = G = 1$, so the parameter α is dimensionless and β has units of fm⁴.

As input to the stellar equilibrium equations, we use two realistic EoS obtained from a relativistic mean field (RMF) approach. We first consider the IU-FSU⁴⁹ parametrization because it is able to explain reasonably well both nuclear⁵⁰ and

stellar matter properties.⁵¹ We then compare the IU-FSU results with the ones obtained with a stiffer EoS calculated with the TM1 parametrization.⁵² It is well known that a stiffer EoS leads to a bigger NS maximum mass in contrast to a softer one. For the neutron star crust, we use the well-known BPS⁵³ EoS that describes well the low density region.

The differential equations (33) and (36) for the stellar structure can be integrated numerically for the three unknown functions m , p and ρ . Note that this integration occurs from the center to its surface, which is characterized by a point where p vanishes. From different values of the EoS input central density, ρ_c , and from the generalized Rastall's parameters, α and β , we construct the macroscopic properties, i.e. the values of mass and corresponding radius for a family of neutron stars. The results are shown below in the tables and in the corresponding figures (mass-radius profiles). In Figs. (1) and (3), we study the effect of Rastall (left) and the additional RT term (right) alone, while in Figs. (2) and (4), we analyze the effect of the generalized Rastall gravity with both terms included. The solutions for the standard case of GR are obtained numerically by using $\alpha = 0$ and $\beta = 0$. They are represented by continuous purple lines in the figures and the resulting values for the maximum mass and the corresponding radius for this solution are listed in the tables.

Concerning astrophysical applications, we compare our results with recent observations and experiments. According to Ref. 56, the millisecond pulsars are among the most useful astrophysical objects in the Universe for testing fundamental physics because they impose some of the most stringent constraints on high-density nuclear physics in the stellar interior. Recently, the NICER mission reported pulsar observations for canonical ($1.4 M_\odot$) and massive ($2.0 M_\odot$) NS. These measurements provide a constraint of $11.80 \text{ km} \leq R_{1.4} \leq 13.10 \text{ km}$ for the $1.4 M_\odot$ NS PSR J0030+0451³² (horizontal line segment in red color shown in Figs. 1 and 2) and $11.60 \text{ km} \leq R \leq 13.10 \text{ km}$ for an NS mass in the range $2.01 M_\odot \leq M \leq 2.15 M_\odot$ PSR J0740+6620⁵⁷ (the rectangular region in orange color shown in Figs. 1–4). From the nuclear physics point of view, the authors of Ref. 58 used the recent measurement of neutron skin on ^{208}Pb by PREX-2 to constrain the density dependence of the symmetry energy of the EoS. Remarkably, one can connect this constraint to NS radius predictions. In Ref. 58, the connection of terrestrial experiments with astrophysical observations leads to a prediction of the radius of the canonical $1.4 M_\odot$ of $13.25 \text{ km} \lesssim R_{1.4} \lesssim 14.26 \text{ km}$. We confront our results with this constraint using a horizontal line segment in green color shown in all Figs. 1–4.

In Fig. 1, the effects of both parameters appearing in the generalized Rastall's gravity are individually analyzed for the IU-FSU EoS. In the left panel, we have the results corresponding to Rastall's gravity solution, i.e. $\alpha \neq 0$ and $\beta = 0$. The maximum mass is hardly affected by changing Rastall's parameter alone. The radius of the canonical NS ($M = 1.4 M_\odot$) is considerably affected. Note a bigger (smaller) radius for the most negative (positive) values of α within the range shown in Table 1.

In the right panel of Fig. 1, we investigate the effects of the RT term alone, i.e. $\alpha = 0$ and $\beta \neq 0$. Differently from the previous one, this parameter has a small, but nonnegligible effect on the maximum mass. As β grows, we are able to reproduce more massive neutron stars, without introducing the parameter α . In this case, the radius of the canonical NS increases with the increase of the β parameter. These results show that while Rastall's theory alone affects basically the NS radius, the RT term proposed in this work has an influence on the whole NS profiles. It is also important to remember the effects of the Rastall theory on the radii of the canonical star, which are displaced with respect to the ones obtained with the TOV equations.

In Fig. 2 and Table 2, we analyze the effect of having both parameters different from zero, still for the IU-FSU EoS. On the left panel, we fix $\beta = 5 \times 10^{-4}$ and vary α . Note that the presence of a fixed RT term slightly increases the NS maximum mass, however, as in Fig. 1, the variation of α hardly affects the maximum mass. The importance of the Rastall parameter is clearly seen on the NS radius of the whole family of stars. As in the previous case, the most positive α gives the smaller radius. On the right panel, we fix $\alpha = 1 \times 10^{-5}$ and vary β . We obtain an increase (decrease) of both NS radius and maximum mass for the most positive (negative) parameter. Here we call attention to the curve obtained with β_1 that, while keeping the same maximum mass as the TOV solution, slightly decreases the $1.4 M_\odot$ radius. The resulting values lie inside the range of the recent work,⁵⁹ where by combining data from multi-messenger observations and nuclear physics, the authors obtained the most stringent constraint to the canonical neutron star radius, $R_{1.4} = 11.0^{+0.9}_{-0.6}$ km. Note that the TOV solution for IU-FSU EoS lies in the lower band of the PSR J0030 (red line) constraint and fails to reproduce the PSR J040 (orange) and PREX-2 (green) constraints. The GRT solution impacts the mass-radius curves in such a way that with a more negative α the lower band of PSR J040 is achieved. Also, for

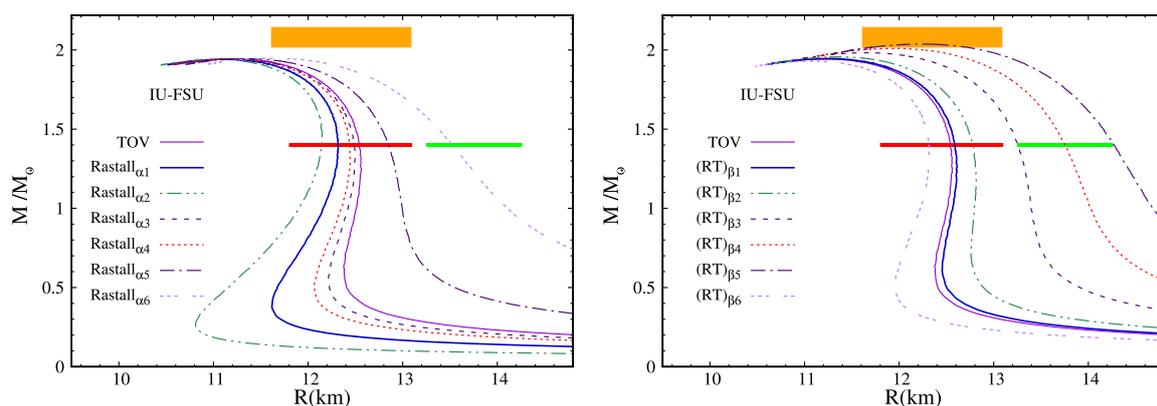


Fig. 1. (Color online) Mass-radius relation for a family of hadronic stars described with the IU-FSU EoS. We analyze the effects of varying the parameter α (left) while keeping the parameter β null, i.e. here we have the original Rastall theory, and the effects of varying the parameter β (right) while keeping α null, therefore in this case we study the RT term alone. The red and green line segments correspond, respectively, to the radius range of the $1.4 M_\odot$ NS for PSR J0030+0451 and PREX-2. The orange rectangular region represents the interval of radius estimate for the $2.08 \pm 0.07 M_\odot$ NS PSR J0740+6620. See text for details.

Table 1. Macroscopic properties for different values of the α and β parameters corresponding to the mass-radius diagram in Fig. 1. The quantities M_{\max} , $R_{1.4}$, $\bar{\rho}_c$, C_{\max} and $C_{1.4}$ correspond, respectively, to maximum mass, canonical star radius, central energy density and compactness. α is dimensionless and β has dimensions fm^4 .

		TOV	Rastall $_{\alpha 1}$	Rastall $_{\alpha 2}$	Rastall $_{\alpha 3}$	Rastall $_{\alpha 4}$	Rastall $_{\alpha 5}$	Rastall $_{\alpha 6}$
Parameters	α	0.0	1×10^{-5}	2×10^{-5}	2×10^{-6}	4×10^{-6}	-1×10^{-5}	-3×10^{-5}
	β	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
IU-FSU	M_{\max}	$1.942 M_{\odot}$	$1.941 M_{\odot}$	$1.939 M_{\odot}$	$1.942 M_{\odot}$	$1.942 M_{\odot}$	$1.944 M_{\odot}$	$1.947 M_{\odot}$
	$R_{1.4}$	12.545 km	12.315 km	12.142 km	12.488 km	12.442 km	12.850 km	13.524 km
	$\bar{\rho}_c$	6.365 fm^{-4}	6.366 fm^{-4}	6.389 fm^{-4}	6.364 fm^{-4}	6.365 fm^{-4}	6.343 fm^{-4}	6.317 fm^{-4}
	C_{\max}	0.173	0.174	0.175	0.173	0.173	0.171	0.167
	$C_{1.4}$	0.111	0.113	0.115	0.112	0.112	0.108	0.103
		General relativity	Generalized Rastall's gravity					
		TOV	(RT) $_{\beta 1}$	(RT) $_{\beta 2}$	(RT) $_{\beta 3}$	(RT) $_{\beta 4}$	(RT) $_{\beta 5}$	(RT) $_{\beta 6}$
Parameters	β	0.0	2×10^{-5}	1×10^{-4}	3×10^{-4}	5×10^{-4}	7×10^{-4}	-1×10^{-4}
	α	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
IU-FSU	M_{\max}	$1.942 M_{\odot}$	$1.945 M_{\odot}$	$1.955 M_{\odot}$	$1.982 M_{\odot}$	$2.009 M_{\odot}$	$2.037 M_{\odot}$	$1.929 M_{\odot}$
	$R_{1.4}$	12.545 km	12.589 km	12.778 km	13.248 km	13.752 km	14.270 km	12.312 km
	$\bar{\rho}_c$	6.365 fm^{-4}	6.346 fm^{-4}	6.251 fm^{-4}	6.022 fm^{-4}	5.812 fm^{-4}	5.621 fm^{-4}	6.480 fm^{-4}
	C_{\max}	0.173	0.172	0.172	0.170	0.168	0.166	0.174
	$C_{1.4}$	0.111	0.111	0.109	0.105	0.101	0.098	0.113

Table 2. Macroscopic properties for different values of the α and β parameters corresponding to the mass-radius diagram in Fig. 2. The quantities M_{\max} , $R_{1.4}$, $\bar{\rho}_c$, C_{\max} and $C_{1.4}$ correspond, respectively, to maximum mass, canonical star radius, central energy density and compactness. α is dimensionless and β has dimensions fm^4 .

		TOV	GRT $_{\alpha 1}$	GRT $_{\alpha 2}$	GRT $_{\alpha 3}$	GRT $_{\alpha 4}$	GRT $_{\alpha 5}$	GRT $_{\alpha 6}$
Parameters	α	0.0	1×10^{-5}	2×10^{-5}	2×10^{-6}	4×10^{-6}	-1×10^{-5}	-3×10^{-5}
	β	0.0	5×10^{-4}	5×10^{-4}	5×10^{-4}	5×10^{-4}	5×10^{-4}	5×10^{-4}
IU-FSU	M_{\max}	$1.942 M_{\odot}$	$2.007 M_{\odot}$	$2.006 M_{\odot}$	$2.009 M_{\odot}$	$2.008 M_{\odot}$	$2.011 M_{\odot}$	$2.014 M_{\odot}$
	$R_{1.4}$	12.545 km	13.480 km	13.267 km	13.686 km	13.629 km	14.141 km	14.978 km
	$\bar{\rho}_c$	6.365 fm^{-4}	5.833 fm^{-4}	5.836 fm^{-4}	5.812 fm^{-4}	5.832 fm^{-4}	5.808 fm^{-4}	5.783 fm^{-4}
	C_{\max}	0.173	0.169	0.170	0.168	0.168	0.166	0.162
	$C_{1.4}$	0.111	0.103	0.105	0.102	0.102	0.099	0.093
		General relativity	Generalized Rastall's gravity					
		TOV	GRT $_{\beta 1}$	GRT $_{\beta 2}$	GRT $_{\beta 3}$	GRT $_{\beta 4}$	GRT $_{\beta 5}$	GRT $_{\beta 6}$
Parameters	β	0.0	2×10^{-5}	1×10^{-4}	3×10^{-4}	5×10^{-4}	7×10^{-4}	-1×10^{-4}
	α	0.0	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}
IU-FSU	M_{\max}	$1.942 M_{\odot}$	$1.943 M_{\odot}$	$1.954 M_{\odot}$	$1.980 M_{\odot}$	$2.007 M_{\odot}$	$2.035 M_{\odot}$	$1.928 M_{\odot}$
	$R_{1.4}$	12.545 km	12.358 km	12.544 km	13.004 km	13.474 km	13.970 km	12.094 km
	$\bar{\rho}_c$	6.365 fm^{-4}	6.347 fm^{-4}	6.252 fm^{-4}	6.043 fm^{-4}	5.833 fm^{-4}	5.624 fm^{-4}	6.481 fm^{-4}
	C_{\max}	0.173	0.174	0.173	0.171	0.169	0.167	0.175
	$C_{1.4}$	0.111	0.113	0.111	0.107	0.103	0.100	0.115

Table 3. Macroscopic properties for different values of the α and β parameters corresponding to the mass-radius diagram in Fig. 3. The quantities M_{\max} , $R_{1.4}$, $\bar{\rho}_c$, C_{\max} and $C_{1.4}$ correspond, respectively, to maximum mass, canonical star radius, central energy density and compactness. α is dimensionless and β has dimensions fm^4 .

		TOV	Rastall $_{\alpha 1}$	Rastall $_{\alpha 2}$	Rastall $_{\alpha 3}$	Rastall $_{\alpha 4}$	Rastall $_{\alpha 5}$	Rastall $_{\alpha 6}$
Parameters	α	0.0	1×10^{-5}	2×10^{-5}	2×10^{-6}	4×10^{-6}	-1×10^{-5}	-3×10^{-5}
	β	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
TM1	M_{\max}	$2.183 M_{\odot}$	$2.181 M_{\odot}$	$2.180 M_{\odot}$	$2.183 M_{\odot}$	$2.182 M_{\odot}$	$2.185 M_{\odot}$	$2.188 M_{\odot}$
	$R_{1.4}$	14.332 km	14.011 km	13.797 km	14.249 km	14.185 km	14.748 km	15.676 km
	$\bar{\rho}_c$	5.347 fm^{-4}	5.351 fm^{-4}	5.380 fm^{-4}	5.349 fm^{-4}	5.350 fm^{-4}	5.344 fm^{-4}	5.313 fm^{-4}
	C_{\max}	0.176	0.177	0.178	0.176	0.176	0.174	0.170
	$C_{1.4}$	0.097	0.099	0.101	0.098	0.098	0.094	0.089
		General relativity	Generalized Rastall's gravity					
		TOV	(RT) $_{\beta 1}$	(RT) $_{\beta 2}$	(RT) $_{\beta 3}$	(RT) $_{\beta 4}$	(RT) $_{\beta 5}$	(RT) $_{\beta 6}$
Parameters	β	0.0	2×10^{-5}	1×10^{-4}	3×10^{-4}	5×10^{-4}	8×10^{-4}	-1×10^{-4}
	α	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
TM1	M_{\max}	$2.183 M_{\odot}$	$2.185 M_{\odot}$	$2.194 M_{\odot}$	$2.215 M_{\odot}$	$2.237 M_{\odot}$	$2.271 M_{\odot}$	$2.172 M_{\odot}$
	$R_{1.4}$	14.322 km	14.365 km	14.568 km	15.067 km	15.595 km	16.366 km	14.075 km
	$\bar{\rho}_c$	5.347 fm^{-4}	5.348 fm^{-4}	5.267 fm^{-4}	5.133 fm^{-4}	4.974 fm^{-4}	4.760 fm^{-4}	5.427 fm^{-4}
	C_{\max}	0.176	0.176	0.175	0.173	0.171	0.169	0.177
	$C_{1.4}$	0.097	0.097	0.096	0.092	0.089	0.085	0.099

Table 4. Macroscopic properties for different values of the α and β parameters corresponding to the mass-radius diagram in Fig. 4. The quantities M_{\max} , $R_{1.4}$, $\bar{\rho}_c$, C_{\max} and $C_{1.4}$ correspond, respectively, to maximum mass, canonical star radius, central energy density and compactness. α is dimensionless and β has dimensions fm^4 .

		TOV	GRT $_{\alpha 1}$	GRT $_{\alpha 2}$	GRT $_{\alpha 3}$	GRT $_{\alpha 4}$	GRT $_{\alpha 5}$	GRT $_{\alpha 6}$
Parameters	α	0.0	1×10^{-5}	2×10^{-5}	2×10^{-6}	4×10^{-6}	-1×10^{-5}	-3×10^{-5}
	β	0.0	5×10^{-4}	5×10^{-4}	5×10^{-4}	5×10^{-4}	5×10^{-4}	5×10^{-4}
TM1	M_{\max}	$2.183 M_{\odot}$	$2.236 M_{\odot}$	$2.234 M_{\odot}$	$2.237 M_{\odot}$	$2.237 M_{\odot}$	$2.239 M_{\odot}$	$2.243 M_{\odot}$
	$R_{1.4}$	14.322 km	15.221 km	14.949 km	15.493 km	15.423 km	16.130 km	17.234 km
	$\bar{\rho}_c$	5.347 fm^{-4}	4.979 fm^{-4}	4.982 fm^{-4}	4.977 fm^{-4}	4.978 fm^{-4}	4.971 fm^{-4}	4.940 fm^{-4}
	C_{\max}	0.176	0.173	0.174	0.171	0.172	0.169	0.166
	$C_{1.4}$	0.097	0.091	0.093	0.090	0.090	0.086	0.081
		General relativity	Generalized Rastall's gravity					
		TOV	GRT $_{\beta 1}$	GRT $_{\beta 2}$	GRT $_{\beta 3}$	GRT $_{\beta 4}$	GRT $_{\beta 5}$	GRT $_{\beta 6}$
Parameters	β	0.0	1×10^{-5}	1×10^{-4}	3×10^{-4}	5×10^{-4}	7×10^{-4}	-1×10^{-4}
	α	0.0	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}
TM1	M_{\max}	$2.183 M_{\odot}$	$2.182 M_{\odot}$	$2.192 M_{\odot}$	$2.213 M_{\odot}$	$2.236 M_{\odot}$	$2.258 M_{\odot}$	$2.171 M_{\odot}$
	$R_{1.4}$	14.322 km	14.041 km	14.250 km	14.730 km	15.222 km	15.749 km	13.778 km
	$\bar{\rho}_c$	5.347 fm^{-4}	5.351 fm^{-4}	5.297 fm^{-4}	5.138 fm^{-4}	4.979 fm^{-4}	4.846 fm^{-4}	5.431 fm^{-4}
	C_{\max}	0.176	0.177	0.176	0.174	0.173	0.171	0.178
	$C_{1.4}$	0.097	0.099	0.098	0.095	0.091	0.088	0.101

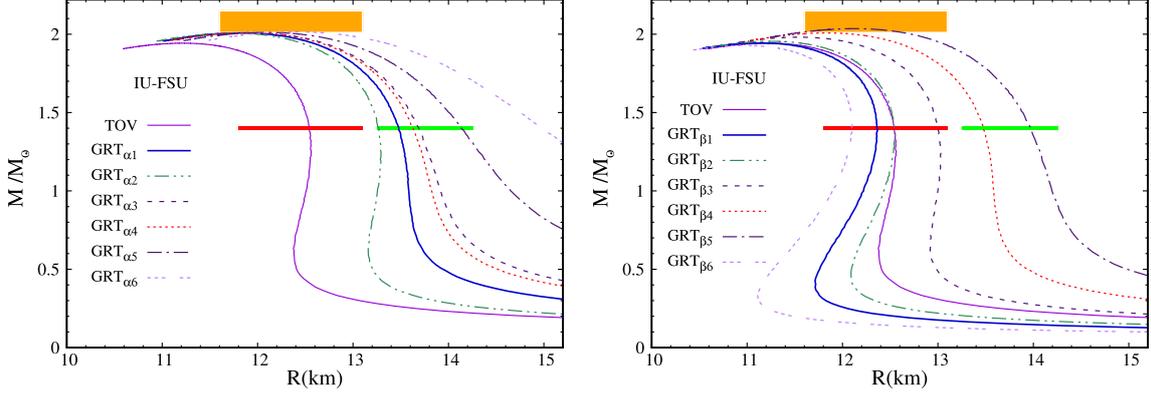


Fig. 2. (Color online) Mass-radius relation for a family of hadronic stars described with the IU-FSU EoS. We analyze the effects of varying the parameter α (left) while keeping the parameter β fixed and the effects of varying the parameter β (right) while keeping α fixed. The red and green line segments correspond, respectively, to the radius range of the $1.4M_{\odot}$ NS for PSR J0030+0451 and PREX-2. The orange rectangular region represents the interval of radius estimates for the $2.08 \pm 0.07M_{\odot}$ NS PSR J0740+6620.

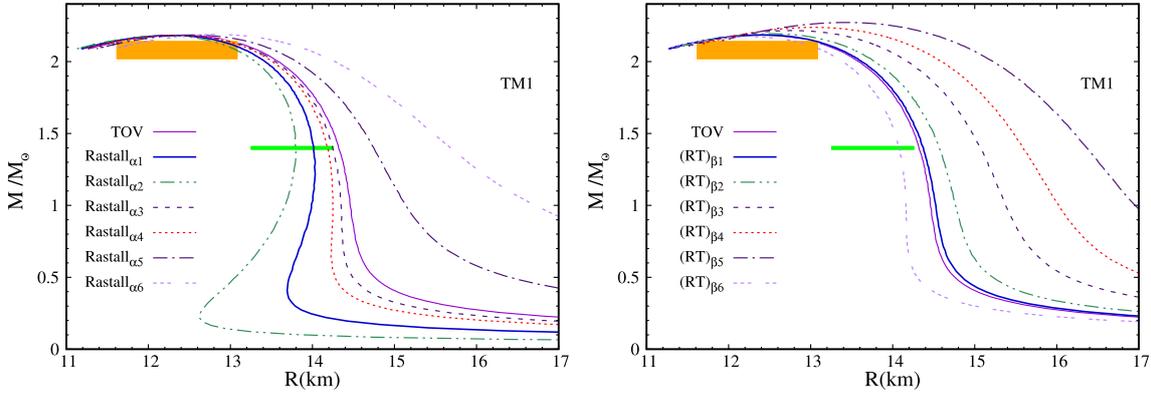


Fig. 3. (Color online) Mass-radius relation for a family of hadronic stars described with the TM1 EoS. We analyze the effects caused by varying the parameter α (left) while keeping the parameter β null and the effects of varying the parameter β (right) while keeping α null. The green line segment and orange rectangular region correspond, respectively, to the radius range for the $1.4M_{\odot}$ NS PREX-2 and the $2.08 \pm 0.07M_{\odot}$ NS PSR J0740+6620.

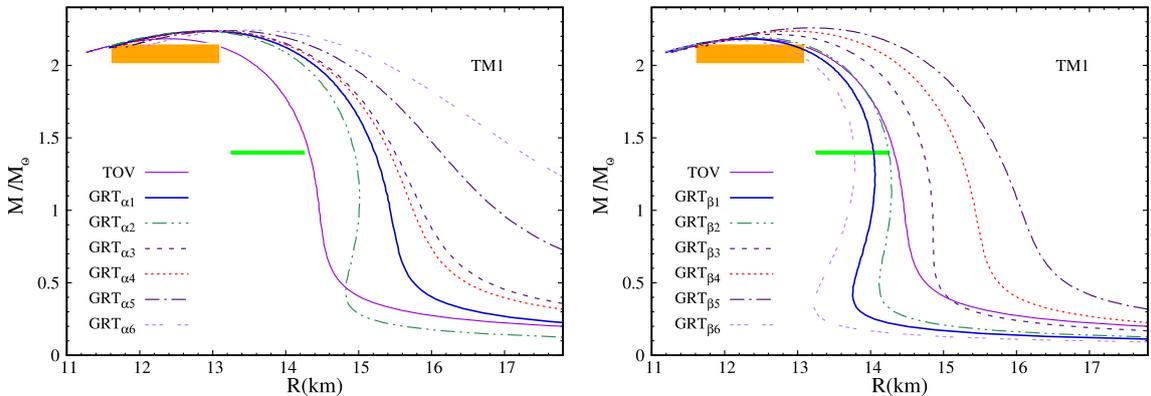


Fig. 4. (Color online) Mass-radius relation for a family NS within the TM1 EoS. We analyze the effects caused by varying the parameter α (left) while keeping the parameter β fixed and the effects of varying the parameter β (right) while keeping α fixed. The green line segment and orange rectangular region correspond, respectively, to the radius range for the $1.4M_{\odot}$ NS PREX-2 and the $2.08 \pm 0.07M_{\odot}$ NS PSR J0740+6620.

α_1 to α_5 , the canonical NS radius is outside the PSR J0030 (red) and inside the PREX-2 (green) constraint. When we keep α fixed and vary β in the right panel of Fig. 2, we note most solutions inside the red constraint of PSR J0030 with β_5 respecting PSR J0740 and PREX-2. In this case, our modifications on β increase the radius enough to be inside PREX-2 constraint. It is obvious that the constraints represented by the red and green segments cannot be both satisfied.

Recent results for neutron stars in the context of Rastall’s theory can be found in Refs. 6 and 7. We have checked that although the Rastall’s gravity alone affects very little the maximum stellar mass, it considerably increases the corresponding radius, while the canonical radius of the star also increases.⁶ On the other hand, the authors in Ref. 7 have shown that it is possible to cause the maximum stellar mass to increase at the same time that the canonical radius of the star decreases, however, at the expense of adding a parameter of a second theory. In contrast, we show in our results that regardless of the two EoS tested, we reproduce results similar to those present in Ref. 7, however, within the same theory of gravity.

In Figs. 3 and 4, we repeat the previous analyzes with a stiffer EoS, TM1. The results obtained with various parameter values are displayed in Tables 3 and 4. The general effects of the parameters α and β are the same as the ones obtained with the IU-FSU EoS. Note that the TOV solution for TM1 predicts a bigger radius for the canonical NS as compared with the constraints from NICER and PREX-2, a direct effect of the stiffness of this EoS. For this reason we have removed the PSR J0030 (red line on Figs. 1 and 2) since the modifications of GRT are also outside of the range imposed by this constraint. We note that all curves with this EoS, GR or GRT, achieve high NS masses. We also note in Fig. 4 that for small positive and negative values of the parameter β GRT can predict NS radius inside the PREX-2 constraint with negligible modifications on the maximum masses.

One should notice that TM1 shows a bigger canonical radius than the IU-FSU. However, with appropriate parameters, the generalized Rastall’s gravity gives a

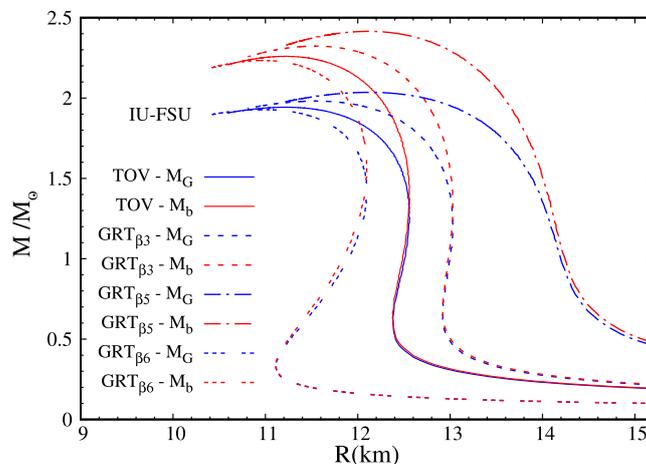


Fig. 5. (Color online) Comparison of gravitational mass (blue) and baryon mass (red) for the TOV solutions (continuous lines) and several generalized Rastall (dashed).

slightly smaller radius for the NS of $M = 1.4 M_\odot$ while keeping the maximum mass above the required $2 M_\odot$.

It is important to remark that the use of the generalized Rastall's theory yields similar variations of the macroscopic quantities (as compared with the used of the TOV equations) which are independent of the chosen nuclear EoS (within the two representative ones analyzed in this work). Moreover, although the generalized version of the Rastall's gravity allows more flexibility in the calculation of the macroscopic stellar properties due to the inclusion of two independent parameters, it does not fix existing caveats of the EoS. Hence, an EoS that satisfies bulk nuclear matter properties is still required as input to the generalized Rastall's equations.

Last, we analyze whether the results obtained in this theory provide stars that are gravitationally bound which, according to Refs. 61 and 62, occurs when the gravitational mass M_G is smaller than the rest mass M_b (baryonic mass). We have computed the two masses and compared their values for all mass-radius solutions calculated in this work and we add some typical results in Fig. 5, as an example. The figure shows the TOV solutions in continuous lines and generalized Rastall in dashed lines. Blue lines show the gravitational mass, while the red ones show baryon mass. We can see that M_b is always bigger than M_G . Note that the region where the blue and red lines are close refer to very low mass NS where stable solutions may not exist. The lightest NS ever measured has $1.17 M_\odot$.⁶³

4. Conclusions

In this work, we have generalized Rastall's theory of gravity. Original Rastall's gravity breaks the energy–momentum conservation making $T^\mu_{\nu;\mu} = A_\nu = \lambda R_{,\nu}$, where a dependence on the curvature R appears on the derivative of $T^\mu_{\nu;\mu}$. We propose that this derivative also depends on the trace of the energy–momentum tensor, T , i.e. the function A_ν is given now by $A_\nu = (\alpha\delta^\mu_\nu R + \beta\delta^\mu_\nu RT)_{;\mu}$. Initially, we have discussed the external solution in the case of a spacetime with spherical symmetry. We have pointed out that the solution with $R = 0$ represents the gravitational field outside a spherical mass in our system, and unlike the GR, the vacuum solution in the context of the generalized Rastall's gravity gives two types of spacetime solutions, depending on the choice of the trace of the energy–momentum tensor. This property of the external solution can be regarded as an intrinsic feature of the generalized theory since other choices for breaking the conservation law lead to the same result. In addition, we have carefully studied the Newtonian limit of the theory and shown that the gravitational parameter k depends on the parameter α in contrast to the constant value $k = 8\pi G$ in GR and the parameter β must be negligible in the case of a weak gravitational field.

We tested the theory in neutron stars using two different RMF EoS as inputs and noted a considerable effect of the alternative gravity theory in the NS mass-radius diagrams. The results presented here show that, with small deviations from the GR case, an important change on the NS profile can be obtained within the same nuclear physics inputs.

The recent result of LIGO-Virgo⁶⁰ with a possible NS of $2.6 M_{\odot}$ is also of particular interest. If such massive NS is confirmed by future observations it will be a big challenge for the compact objects community to describe it. From the nuclear physics point of view, one needs a very stiff EoS at high densities to support such a high maximum mass together with a soft EoS at low densities to keep a radius of the order of 11 km for the canonical $1.4 M_{\odot}$ NS. From the gravity point of view, one can explore theories beyond GR such as the one examined in this paper. Our work generalizes the results found in Ref. 6 and, furthermore we take into account the possibility of more complex combinations of matter and geometry that can be associated to realistic configurations of the matter inside NS. The generalization opens a new line of research in the context of nonconservative gravitational theories in which various choices of the conservation law can be tested in different astrophysical and cosmological problems.

In future works, it would be interesting to study gravitational effects in astrophysical and cosmological systems due to the choice of other combinations of R and T and/or to investigate further effects of the interplay between nonconservative gravitational theories and Planck scale phenomenological approaches.⁷ Moreover, the application of this present formalism in anisotropic stars is the next step towards a more realistic description of these compact objects.

At the formal level, it would be of interest to the community the search for a Lagrangian for Rastall and generalized Rastall formalisms, which could allow one to deal with other aspects of field theory, like investigation about the presence of ghosts. Regarding the post-Newtonian corrections, it is worth mentioning that theories with nonzero divergence of the energy–momentum tensor which satisfy certain consistency conditions can be subject to experimental verification in the post-Newtonian expansions.⁶⁴ A detailed analysis of post-Newtonian terms in the context of Rastall’s gravity can be found in Ref. 65. We believe that in future works, a similar study can be done with the help of the present generalized version of Rastall’s gravity.

Acknowledgments

This work is a part of the project INCT-FNA Proc. No. 464898/2014-5, partially supported by Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) under Grant No. 301155/2017-8 (D.P.M.). C.E.M is supported by Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) with M.Sc. scholarships. LCNS would like to thank Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) for partial financial support through the research Project No. 164762/2020-5, FMS would like to thank CNPq for financial support through the research Project No. 165604/2020-4 and IPL would like to acknowledge the National Council for Scientific and Technological Development — CNPq grant 306414/2020-1.

References

1. V. C. Rubin and W. K. Ford Jr, *Astrophys. J.* **159** (1970) 379.
2. F. Zwicky, *Helv. Phys. Acta* **6** (1933) 110.
3. Supernova Cosmology Project (S. Perlmutter *et al.*), *Astrophys. J.* **517** (1999) 565.
4. V. Sahni, *Lect. Notes Phys.* **653** (2004) 141.
5. Y. Heydarzade and F. Darabi, *Phys. Lett. B* **771** (2017) 365.
6. A. M. Oliveira, H. E. S. Velten, J. C. Fabris and L. Casarini, *Phys. Rev. D* **92** (2015) 044020.
7. C. E. Mota, L. C. N. Santos, G. Grams, F. M. da Silva and D. P. Menezes, *Phys. Rev. D* **100** (2019) 024043.
8. H. Velten and T. R. P. Caramês, *Universe* **7** (2021) 38.
9. A. M. Oliveira, H. E. S. Velten and J. C. Fabris, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 124020.
10. Z. Xu, X. Hou, X. Gong and J. Wang, *Eur. Phys. J. C* **78** (2018) 513.
11. E. Spallucci and A. Smailagic, *Int. J. Mod. Phys. D* **27** (2017) 1850003.
12. Y. Heydarzade, H. Moradpour and F. Darabi, *Can. J. Phys.* **95** (2017) 1253.
13. K. A. Bronnikov, J. C. Fabris, O. F. Piattella and E. C. Santos, *Gen. Relativ. Gravit.* **48** (2016) 162.
14. G. Abbas and M. R. Shahzad, *Eur. Phys. J. A* **54** (2018) 211.
15. J. P. Morais Graça and I. P. Lobo, *Eur. Phys. J. C* **78** (2018) 101.
16. I. P. Lobo, H. Moradpour, J. P. Morais Graça and I. Salako, *Int. J. Mod. Phys. D* **27** (2018) 1850069.
17. M. Capone, V. F. Cardone and M. L. Ruggiero, *Nuovo Cimento B* **125** (2011) 1133.
18. J. C. Fabris, O. F. Piattella, D. C. Rodrigues, C. E. Batista and M. H. Daouda, *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.* **18** (2012) 67.
19. J. P. Campos, J. C. Fabris, R. Perez, O. F. Piattella and H. Velten, *Eur. Phys. J. C* **73** (2013) 2357.
20. J. C. Fabris, M. H. Daouda and O. F. Piattella, *Phys. Lett. B* **711** (2012) 232.
21. H. Moradpour, *Phys. Lett. B* **757** (2016) 187.
22. F. Darabi, H. Moradpour, I. Licata, Y. Heydarzade and C. Corda, *Eur. Phys. J. C* **78** (2018) 25.
23. T. R. P. Carams, M. H. Daouda, J. C. Fabris, A. M. Oliveira, O. F. Piattella and V. Strokov, *Eur. Phys. J. C* **74** (2014) 3145.
24. I. G. Salako and A. Jawad, *Astrophys. Space Sci.* **359** (2015) 46.
25. A. S. Al-Rawaf and M. O. Taha, *Gen. Relativ. Gravit.* **28** (1996) 935.
26. C. Batista, J. Fabris and M. Daouda, *Nuovo Cimento B* **125** (2010) 957.
27. H. Moradpour, Y. Heydarzade, F. Darabi and I. G. Salako, *Eur. Phys. J. C* **77** (2017) 259.
28. K. Lin and W.-L. Qian, *Eur. Phys. J. C* **80** (2020) 561.
29. T. Harko, F. S. Lobo, S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 024020.
30. M. Houndjo, *Int. J. Mod. Phys. D* **21** (2012) 1250003.
31. S. D. Odintsov and D. Sáez-Gómez, *Phys. Lett. B* **725** (2013) 437.
32. M. C. Miller *et al.*, *Astrophys. J.* **887** (2019) L24.
33. S. Bogdanov *et al.*, *Astrophys. J.* **887** (2019) L25.
34. S. Bogdanov *et al.*, *Astrophys. J.* **887** (2019) L26.
35. The LIGO Scientific Collab. and the Virgo Collab. (B. P. Abbott *et al.*), *Phys. Rev. Lett.* **121** (2018) 161101.
36. B. P. Abbott *et al.*, *Astrophys. J.* **892** (2020) L3.
37. M. Soares-Santos *et al.*, *Astrophys. J.* **848** (2017) L16.
38. S. Valenti *et al.*, *Astrophys. J.* **848** (2017) L24.
39. P. Rastall, *Phys. Rev. D* **6** (1972) 3357.

40. L. Lindblom and W. A. Hiscock, *J. Phys. A: Math. Gen.* **15** (1982) 1827.
41. M. Visser, *Phys. Lett. B* **782** (2018) 83.
42. I. P. Lobo, M. G. Richarte, J. Morais Graça and H. Moradpour, *Eur. Phys. J. Plus* **135** (2020) 550.
43. L. L. Smalley, *Nuovo Cimento B* **80** (1984) 42.
44. W. A. G. De Moraes and A. F. Santos, *Gen. Relativ. Gravit.* **51** (2019) 167.
45. R. V. d. Santos and J. A. C. Nogales, [arXiv:1701.08203 [gr-qc]].
46. S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley & Sons, 1972).
47. R. C. Tolman, *Phys. Rev.* **55** (1939) 364.
48. J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, *Phys. Rev.* **55** (1939) 374.
49. F. J. Fattoyev, C. J. Horowitz, J. Piekarewicz and G. Shen, *Phys. Rev. C* **82** (2010) 055803.
50. O. Lourenço, M. Dutra, C. H. Lenzi, C. V. Flores and D. P. Menezes, *Phys. Rev. C* **99** (2019) 045202.
51. M. Dutra, O. Lourenço and D. P. Menezes, *Phys. Rev. C* **93** (2016) 025806.
52. Y. Sugahara and H. Toki, *Nucl. Phys. A* **579** (1994) 557.
53. G. Baym, C. Pethick and P. Sutherland, *Astrophys. J.* **170** (1971) 299.
54. P. Demorest et al., *Nature* **467** (2010) 1081.
55. J. Antoniadis et al., *Science* **340** (2013) 6131.
56. H. T. Cromartie et al., *Nat. Astron.* **4**(1) (2019) 72–76.
57. M. C. Miller et al., arXiv:2105.06979 (2021).
58. B. T. Reed, F. J. Fattoyev, C. J. Horowitz and J. Piekarewicz, *Phys. Rev. Lett.* **126** (2021) 172503.
59. C. D. Capano, I. Tews, S. M. Brown, B. Margalit, S. De, S. Kumar, D. A. Brown, B. Krishnan and S. Reddy, *Nat. Astron.* **4** (2020) 625.
60. R. Abbott et al., *Astrophys. J.* **896** (2020) L44.
61. N. K. Glendenning, *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity*, Astronomy and Astrophysics Library, 2nd edn (Springer, New York, 2000).
62. P. Haensel, A. Y. Potekhin and D. G. Yakovlev, *Neutron Stars 1: Equation of State and Structure* (Springer Science and Business Media, 2007).
63. J. G. Martinez, K. Stovall, P. C. C. Freire, J. S. Deneva, F. A. Jenet, M. A. McLaughlin, M. Bagchi, S. D. Bates and A. Ridolfi, *Astrophys. J.* **812** (2015) 143.
64. L. L. Smalley, *Phys. Rev. D* **12** (1975) 376.
65. L. L. Smalley, *Found. Phys.* **8** (1978) 59.

ANEXO A – EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN

Retirado da ref. (MOTA, C. E., 2017).

A Relatividade Geral (RG) nos fornece um conjunto de dez equações diferenciais parciais não-lineares de segunda ordem (do tipo hiperbólicas), denominadas de equações de campo da gravitação, ou mais comumente conhecidas na literatura como as equações de Einstein. Estas equações exprimem uma relação direta entre curvatura e distribuição de matéria-energia no espaço-tempo. Um dos procedimentos usuais que leva a obtenção destas equações de campo é efetuado utilizando-se um princípio variacional ou, como é mais popularmente conhecido na literatura, a partir de um princípio de mínima ação $\delta S = 0$, onde S é o funcional adotado, intitulado ação de Einstein-Hilbert.

De maneira geral, uma ação S em quatro dimensões espaço-temporais tem a seguinte forma:

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x, \quad (194)$$

onde \mathcal{L} representa a densidade Lagrangiana do sistema a qual, presumivelmente, é invariante sob a atuação dos chamados grupos de mapeamentos das variedades (GMV's). Tem-se que Ω , que aparece em ((194)), representa um quadrivolume, uma região limitada em \mathfrak{M} , e d^4x é um elemento de Ω cuja expressão (CARDOSO, J. G.; WHITNEY *et al.*, 2015) é dada na seguinte forma:

$$d^4x = \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\sigma, \quad (195)$$

com o símbolo \wedge denotando o produto cunha (ou produto exterior). No contexto da RG, no vácuo e na ausência de termos cosmológicos (PAULI, 1958; DIRAC, 1996; SCHRODINGER, 1963; CARMELI, 1977), a ação S_T que leva às equações de Einstein é definida por:

$$S_T = k \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} R. \quad (196)$$

O termo $\sqrt{-g}$ envolve o determinante g do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ de \mathfrak{M} a partir de $g = |g_{\mu\nu}|$, tal que $\sqrt{-g} d^4x$ é um elemento de volume invariante de \mathfrak{M} . Agora, considerando um universo além de curvatura, preenchido por matéria, S_T torna-se:

$$S_T = \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left[\mathcal{L}_m(g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu}) + \frac{1}{16\pi G} R \right], \quad (197)$$

onde $\mathcal{L}_m(g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu})$ representa a densidade Lagrangiana da matéria e energia. Ou seja, assim, tem-se informação sobre o conteúdo do universo. A quantidade G é a constante gravitacional de Newton. Enfatizamos que S_T ainda pode ser vista como a soma de duas contribuições, uma destas sendo a ação do campo gravitacional representada por S_g e a outra sendo a ação do campo de matéria S_m , de acordo com

$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_g, \quad (198)$$

e

$$S_m = \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (199)$$

com $\mathcal{L}_g(g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu})$ sendo a densidade Lagrangiana do campo gravitacional. É imprescindível ressaltarmos que a ação deve ser invariante frente as transformações de Lorentz, isto é, um escalar (LANDAU; LIFSHITZ, 1975). Das expressões ((198)) e ((199)), escrevemos

$$S_T = S_g + S_m = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} R + \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (200)$$

onde a convenção de unidades $c = 1$ está sendo adotada. Utilizando-se a definição ((193)) para o escalar de Ricci, reescrevemos ((200)) como

$$S_T = S_g + S_m = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m. \quad (201)$$

Neste estágio, faremos uma pequena perturbação na ação S_T e analisaremos separadamente o efeito em cada contribuição presente em ((201)). Estamos interessados na resposta da ação S_T ao se realizar pequenas variações com respeito a métrica g_{ab} . Com efeito,

$$S_T \longrightarrow S_T + \delta S_T, \quad (202)$$

onde obtemos a variação da contribuição S_g , a saber

$$\delta S_g = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Omega} d^4x (R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu}). \quad (203)$$

Agora, vamos encontrar a contribuição $\delta \sqrt{-g}$. Utilizaremos a seguinte análise com base na álgebra de matrizes. Para uma matriz A , inversível, tem-se a propriedade⁽¹⁾.

$$\ln[\det(A)] = \text{Tr}[\ln(A)], \quad (204)$$

tal que aplicando δ nesta expressão, obtemos

$$\frac{\delta \det(A)}{\det(A)} = \text{Tr}(A^{-1} \delta A). \quad (205)$$

Renomeando A como $g_{\mu\nu}$ e A^{-1} como $g^{\mu\nu}$, tem-se a equação

$$\frac{\delta g}{g} = \text{Tr}(g^{\mu\lambda} \delta g_{\lambda\nu}) = g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (206)$$

de modo que

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (207)$$

¹ A propriedade ((204)) é originada da identidade $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$.

Portanto, para $\delta\sqrt{-g}$, tem-se

$$\begin{aligned}\delta\sqrt{-g} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta(-g) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} (-g) g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu},\end{aligned}\quad (208)$$

onde, em vista da propriedade $g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$, obtemos

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.\quad (209)$$

Daí, reescrevemos ((203)) como segue

$$\delta S_g = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{16\pi G} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}.\quad (210)$$

É necessário que encontremos a variação $\delta R_{\mu\nu}$ presente na expressão ((210)). Portanto, utilizando a definição do tensor de Riemann covariante $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ dada em ((186)) e a definição ((191)) para $R_{\mu\nu}$, encontramos

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_{\rho} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \partial_{\nu} \delta \Gamma_{\mu\rho}^{\rho} + \delta \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \delta \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \delta \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda}.\quad (211)$$

Segundo (WEINBERG, 1972), pode ser mostrado que uma típica conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ não se transforma homogeneamente mediante a mudança de sistemas de coordenadas em \mathfrak{M} , ou seja, $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ não é um tensor. Entretanto, a variação $\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ é um tensor, pois é a diferença de duas conexões. Esta diferença carrega um caráter tensorial. Assim sendo, definimos a derivada covariante da quantidade $\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ da seguinte forma

$$\nabla_{\rho} (\delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) = \partial_{\rho} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} + \Gamma_{\gamma\rho}^{\rho} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\gamma} - \Gamma_{\nu\rho}^{\gamma} \delta \Gamma_{\gamma\mu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\gamma} \delta \Gamma_{\nu\gamma}^{\rho},\quad (212)$$

onde, fazendo a substituição de ((212)) em ((211)), encontramos

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\rho} (\delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - \nabla_{\nu} (\delta \Gamma_{\mu\rho}^{\rho}).\quad (213)$$

Portanto, substituindo este resultado no segundo termo em ((210)), tem-se

$$\int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} [\nabla_{\rho} (\delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - \nabla_{\nu} (\delta \Gamma_{\mu\rho}^{\rho})] g^{\mu\nu}.\quad (214)$$

Da condição de compatibilidade métrica, tem-se que $\nabla_{\lambda} g^{\mu\nu} = 0$. Deste modo, podemos mover índices tensoriais de quantidades sujeitas à derivadas covariantes facilmente sem a necessidade de quaisquer compensadores diferenciais. Portanto,

$$\int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} [\nabla_{\rho} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - \nabla_{\nu} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\rho}^{\rho})].\quad (215)$$

onde, efetuando uma substituição indicial ($\rho \longleftrightarrow \nu$) apenas no segundo termo entre colchetes no lado direito da igualdade, tem-se com efeito

$$\int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\rho} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - g^{\mu\rho} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\nu}),\quad (216)$$

tal que podemos utilizar o teorema de Gauss na forma covariante, a saber

$$\int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\kappa} u^{\kappa} = \oint_{\partial\Omega} d^3x_{\kappa} \sqrt{-g} u^{\kappa}, \quad (217)$$

e transformar a integral de volume ((216)) em uma integral de superfície, ou seja,

$$\int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\rho} (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\nu\mu}{}^{\rho} - g^{\mu\rho} \delta\Gamma_{\mu\nu}{}^{\nu}) = \oint_{\partial\Omega} d^3x_{\mu} \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\nu\mu}{}^{\rho} - g^{\mu\rho} \delta\Gamma_{\mu\nu}{}^{\nu}), \quad (218)$$

onde, $\sqrt{-g} d^3x_{\mu}$ é um elemento covariante de hipersuperfície, $\partial\Omega$ representa a fronteira de Ω , região no qual a integral será feita. Em princípio, a prescrição variacional da teoria em pauta realça a condição de que a variação da métrica δg_{ab} é tomada como uma quantidade arbitrária (CARDOSO, J. G.; WHITNEY *et al.*, 2015) em Ω e por hipótese $\delta g_{ab} \equiv 0$ sobre a fronteira $\partial\Omega$. Deste modo, o lado direito da igualdade acima é nula em $\partial\Omega$, e conseqüentemente, o segundo termo de ((210)) é nulo enquanto que a variação da ação do campo gravitacional δS_g resulta ser apenas

$$\delta S_g = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (219)$$

No que segue, analisaremos a variação da ação do campo de matéria S_m dada em ((199)). Foi posto que estamos variando com respeito a $g_{\mu\nu}$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \delta S_m &= \int_{\Omega} d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) = \int_{\Omega} d^4x \left(\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \mathcal{L}_m \delta \sqrt{-g} \right) \\ &= \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_m g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (220)$$

Usualmente, o tensor energia momentum $T_{\mu\nu}$ é convenientemente definido como (LANDAU; LIFSHITZ, 1975),

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} = g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (221)$$

tal que

$$\delta S_m = \int_{\Omega} d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (222)$$

A obtenção explícita do termo $\delta \mathcal{L}_m$ depende da forma específica da densidade Lagrangiana em uso. Portanto, deixemos $\delta \mathcal{L}_m$ da forma que está, representando a variação de uma densidade Lagrangiana geral. Substituindo os resultados ((219)) e ((222)) em ((201)), e aplicando agora o princípio da mínima ação para a ação total

$$\delta S_{\mathcal{T}} = \delta S_g + \delta S_m = 0, \quad (223)$$

escrevemos

$$\delta S_{\mathcal{T}} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - 8\pi G T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} = 0, \quad (224)$$

visto que a variação δg_{ab} é tomada como uma quantidade arbitrária em Ω , com base no princípio de mínima ação da RG. Assim, para que a expressão acima seja satisfeita, é necessário que tenhamos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - 8\pi GT_{\mu\nu} = 0, \quad (225)$$

ou ainda,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu}, \quad (226)$$

onde $k = 8\pi G$ é a constante gravitacional de Einstein que aparece na introdução desta seção, $G_{\mu\nu}$ é o tensor geométrico de Einstein. As equações ((226)) são as equações de Einstein, ou as equações de campo da gravitação mencionadas na introdução deste Capítulo. O lado esquerdo destas equações está associado com a geometria de \mathfrak{M} , e o lado direito com o conteúdo de matéria-energia. Em outras palavras, a RG descreve o campo gravitacional em termos da curvatura espaço-temporal e de uma distribuição física de matéria-energia representada por $T_{\mu\nu}$, representando quantitativamente o efeito da gravitação tal como expresso em ((226)).

Um importante resultado que ainda pode ser obtido das equações de Einstein é a lei de conservação para $T_{\mu\nu}$ (WEINBERG, 1972) representada pela equação

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (227)$$

Esta lei de conservação é facilmente verificada realizando-se o seguinte procedimento:

$$\begin{aligned} \nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) &= \nabla^\mu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^\mu R, \\ &= g^{\mu\lambda}\nabla_\lambda R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\nabla_\nu R, \\ &= g^{\mu\lambda}\nabla_\lambda (g^{\sigma\rho}R_{\sigma\mu\rho\nu}) - \frac{1}{2}\nabla_\nu R, \end{aligned} \quad (228)$$

onde, em vista das propriedades de simetrias de R_{abcd} dadas em ((187)) e ((188)) e da identidade de Bianchi gravitacional

$$\nabla_{[\mu}R_{\nu\sigma]\rho\lambda} = 0 \Rightarrow \nabla_\mu R_{\nu\sigma\rho\lambda} + \nabla_\nu R_{\sigma\mu\rho\lambda} + \nabla_\sigma R_{\mu\nu\rho\lambda} = 0, \quad (229)$$

a qual

$$\begin{aligned} g^{\lambda\sigma}g^{\rho\mu} \left(\nabla_\mu R_{\nu\sigma\rho\lambda} + \nabla_\nu R_{\sigma\mu\rho\lambda} + \nabla_\sigma R_{\mu\nu\rho\lambda} \right) &= 0, \\ \nabla^\rho R_{\nu\rho} &= \frac{1}{2}\nabla_\nu R, \end{aligned} \quad (230)$$

conclui-se que

$$\begin{aligned} \nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) &= \frac{1}{2}\nabla_\nu R - \nabla^\mu R_{\mu\nu}, \\ &= -\nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right). \end{aligned} \quad (231)$$

De imediato, têm-se

$$\nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = 0 = \nabla^\mu G_{\mu\nu} \Rightarrow \nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (232)$$

No vácuo, $T_{\mu\nu} \equiv 0$, as equações de Einstein reduzem-se à:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (233)$$