ESCOLA SECUNDÁRIA

N.º 6 — SETEMBRO — 1958

PUBLICAÇÃO TRIMESTRAL DA CADES — DIRETORIA DO ENSINO SECUNDÁRIO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA — 15.º ANDAR — RIO DE JANEIRO

TODA A CORRESPONDÊNCIA DEVE SER ENDEREÇADA A:
Redação de ESCOLA SECUNDÁRIA — CADES
Ministério da Educação e Cultura — 15.º andar — Rio de Janeiro

SUMÁRIO

MATEMÁTICA

O PERÍODO PRIMITIVO DA MATEMÁTICA

Prof. THALES MELLO CARVALHO

1. *Preliminares.* Segundo CHARLES PEGUY, na história dos povos, distinguem-se as *épocas* e os *períodos*. As primeiras são momentos de vida intensa, assinalados pelo aparecimento de concepções novas; os períodos caracterizam-se por uma evolução lenta, progressiva e regular da humanidade, através da qual se desenvolvem e se cristalizam as grandes descobertas das épocas.

Na opinião de PAUL GERMAIN, tal ocorre na história das ciências e, em particular, na da Matemática. Nela destacam-se três épocas de criações fecundas: a) a *época grega;* b) a *época cartesiana*; c) a *época moderna*.

A primeira é precedida de um *período primitivo,* pouco conhecido e mal definido, no qual, pelo empirismo e visando a fins utilitários imediatos, o espírito humano caminhou lentamente para a construção racional da ciência matemática através da abstração.

2. *Período primitivo.* E' impossível, até hoje, precisar, na obscuridade do passado remoto, a gênese do pensamento matemático. A documentação fragmentária existente deixa, contudo, entrever que, em seus primórdios, foi a Matemática tributária das condições de vida humana, subordinando-se seu desenvolvimento ao progresso material das sociedades.

Segundo PAUL MOUY, sua origem deve ser procurada no céu e na terra; no céu — onde as constelações apresentavam o "duplo enigma do número e da figura"; na terra — entre as técnicas do agrimensor e as múltiplas atividades dos calculadores.

Perdurou alguns milênios êsse caráter empírico e quase mágico da ciência, de nítida feição experimental, cujas verdades se derivavam de observações e experiências sôbre os sêres da natureza, e assumiam o aspecto de "um saber real sôbre as coisas".

Para os geômetras dêsse período, o círculo, por exemplo, era uma *realidade,* dotada de propriedades que pareciam existir fora do espírito e ditar-lhe suas leis. O sentido abstrato das noções matemáticas só será alcançado muito mais tarde pelo esplendor do gênio grego, ao estabelecer a natureza puramente racional da figura geométrica (uma *idéia* no sentido platônico do têrmo), em oposição ao caráter experimental, que, até então, lhe era atribuído.

Sem as grandes alavancas do progresso científico — a abstração, a generalização, a análise e a síntese — que assinalam, posteriormente, a epopéia do milagre helênico, o legado dos povos primitivos no âmbito da Matemática não ultrapassou os limites acanhados de uma técnica utilitária. Conheceram fatos matemáticos, raciocinaram sôbre figuras e utilizaram fórmulas; não alcançaram, todavia, uma concepção distinta da ciência teórica.

Tais conclusões decorrem da análise dos documentos encontrados (manuais e tabelas em sua maior parte) em que há ausência absoluta de demonstrações. Para moderna corrente de pesquisadores, entretanto, certos conhecimentos práticos, revelados nos papiros, só poderiam ter sido alcançados após alguma elaboração teórica. Trata-se, porém, de simples conjectura, em favor da qual fala, talvez, o caráter esotérico da ciência, cujos segredos, entre muitos povos, eram privilégio da classe sacerdotal. Apesar da tentativa retrógrada e infrutífera da escola pitagórica, coube aos gregos a glória de abolir a tradição, pela qual a verdade científica era transmitida sòmente aos 'iniciados' e sob juramento do sigilo.

Os primeiros albores da ciência raiam no berço das civilizações primitivas. "A Matemática, como a luz" — disse FRANCISCO VERA — "nasce no oriente em seus dois ramos: a Aritmética — pela necessidade de contar, e a Geometria — pela necessidade de medir."

3. *A Aritmética no período primitivo.*

A necessidade de contar, sentida ainda na fase nômade, levou cedo o homem à utilização do número natural. Se seu conceito exige certo grau de abstração, como, por exemplo, a definição de *classe* da Lógica Simbólica, a idéia de tal ou qual número natural assume aspecto elementar, decorrente das mais simples experiências. A criança, como o primitivo, sabe mostrar com os dedos quantas bolas possui, sem que seu espírito imaturo alcance o sentido da correspondência biunívoca através da qual se depreende o conceito de número natural.

Provàvelmente é, também, remota a noção de *ordem de unidade,* imperativo decorrente das limitações sentidas pelo homem na contagem pelos dedos. Dêsse hábito primitivo são documentos indiscutíveis não sòmente os sistemas de numeração de bases, 5, 10 e 20, observados em diferentes culturas (1), como também, certos fatos lingüísticos bem expressivos. (2).

A precariedade dos recursos materiais para a representação dos números naturais (pedras, nós em cordas, etc.) ocasionou o prematuro desenvolvimento dos sistemas de numeração escrita. Certos papiros testemunham a existência de um sistema decimal no Egito cêrca de trinta séculos antes da era cristã, constituído de símbolos que representavam as diversas ordens de unidade e eram repetidos e combinados segundo o princípio aditivo.

Fato curioso assinala-se entre os babilônios: construíram um misto de sistema decimal e sexagesimal, onde empregaram o *princípio de posição,* cuja descoberta é geralmente atribuída aos indianos por volta do século VI. A ausência de unidades era representada, ora por um espaço vazio, ora por um símbolo que corresponderia ao zero em nosso atual sistema. Em documentos que datam de época localizada entre os séculos XXIII A.C. e XVI A.C., há uma tábua de quadrados dos inteiros de 1 a 60, onde aparecem, por exemplo. para os quadrados de 8 e 9, respectivamente, expressões do tipo 1.4 e 1.21, o que só teria sentido dentro da hipótese formulada

$$(1.4 = 1 \times 60 + 4;\ 1.21 = 1 \times 60 + 21).$$

Todavia, a estrutura dos sistemas de numeração, tanto no período primitivo como na época grega, jamais atingiu a perfeição do sistema indiano, o que constituiu sério entrave ao progresso da Aritmética. Tolhida pela precariedade de um equipamento inadequado à representação do número para fins de cálculo, a elasticidade mental do homem

(1) O sistema quinário (de base 5) foi encontrado entre os esquimós e em tribos da América do Norte, da Africa e do norte da Sibéria. O sistema vigesimal (de base 20) floresceu, sobretudo, na América. As expressões quatre-vingts e quatre-vingt-dix do idioma francês são remanescentes celtas dêsse último.

(2) Em muitas línguas oceânicas, na dos índios americanos e na dos malaios, por exemplo, as palavras cinco e mão têm a mesma origem; entre os Kumana no Sudão Oriental, seis significa literalmente mão e um; entre os Zulus da Africa do Sul, nove significa deixe um (dedo) abaixo; os esquimós da baía de Hudson empregavam as expressões um homem e cinco homens para representar, respectivamente, vinte e cem; etc. (Cfr. E. FETTWEIS, Wie man eins tens rechnete).

expandiu-se no âmbito da Geometria, cujo florescimento, mais tarde, alcançou a meta do ideal científico. Assim se compreende a qualificação *geômetra* dada aos cultores da Matemática na Antigüidade. (3).

E' provável, também, a origem remota das operações aritméticas sôbre inteiros, motivadas pela necessidade de combinação das grandezas discretas (reunião de duas ou mais coleções; reunião de coleções contendo o mesmo número de objetos; etc.).

A impropriedade dos sistemas de numeração subordinou inevitàvelmente o cálculo numérico aos recursos mecânicos. Ao invés de algoritmos para as operações fundamentais, existiram processos de utilização dos *ábacos*, desde sua rudimentar forma de tábua com seixos soltos (4) até o *quadro* de contar, cujos vestígios já se acham nas rotas da cultura megalítica. Êsse aspecto 'impuro' do processo aritmético justifica, posteriormente, a aversão dos filósofos gregos pela *logística*, denominação por êles dada à arte de calcular para diferenciá-la da ciência dos números.

Através do papiro RHIND, documento de época incerta (seguramente não posterior ao século XVI A.C.) e de natureza duvidosa (5), conhecem-se alguns processos utilizados pelos egípcios no cálculo numérico. Para a multiplicação de inteiros, por exemplo, adotavam o recurso das duplicações sucessivas, baseado na propriedade relativa à decomposição dos inteiros em somas de potências de 2. Assim, o produto de um número por 7 era dado pela soma dêsse número, de seu dôbro e de seu quádruplo, o que decorre da fórmula:

$$7n = (1+2+2^2)n.$$

Obtinham o quociente de uma divisão, ou por tabelas prèviamente confeccionadas (processo direto) ou pelo processo indireto (operação *sequem*), segundo o qual efetuavam, por tentativas, multiplicações parciais sucessivas pelo divisor até obter o dividendo.

Com exceção de 2/3, os egípcios consideravam sòmente as frações de numerador 1. As demais eram, para êles, simples 'divisões a serem efetuadas'. Por processos até hoje desconhecidos, construíram uma tabela para decomposição dos 'quocientes' da forma

$2n+1$ (desde $n=1$ até $n=49$)

em 'frações' (no seu sentido restrito), como, por exemplo,

$$\frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}$$

Como já dominavam o processo de redução das frações $2/2n$ à forma $1/n$, a tábua atendia satisfatòriamente às necessidades práticas.

Dêsse modo, a multiplicação de frações assumia um aspecto peculiar, tal como:

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$$

regra assim enunciada por AHMES: "Fazer os 2/3 de uma fração — se te dizem que são os 2/3 de 1/5, faze seu duas vêzes, seu seis vêzes. Seus 2/3 são isso. Fazer o mesmo para qualquer outra fração que se apresente."

O domínio do cálculo fracionário, mediante êsses recursos, permitiu aos egíp-

(3) "Não entre se não é geômetra" era o dístico afixado na porta da academia de PLATÃO.

(4) Consistia em uma tábua dividida em regiões (geralmente colunas) onde se colocavam pedras, cujo valor 1, 10, 100... dependia da coluna em que estava localizada. Uma frase, atribuída a SOLON, ilustra essa afirmação: "Uma pessoa amiga de tiranos é como uma pedra no cálculo: ora vale muito, ora vale pouco."

(5) Para EISENLOHR e CANTOR era um manual prático de ensino tal como sugere seu título 'Regra para chegar ao conhecimento de tôdas as coisas obscuras, de todos os segredos contidos nos objetos'; para REVILLOUT era um simples caderno de aluno, dada a espécie de erros nêle contidos. Foi escrito por um certo Aãhmesu, que, seguindo RAJA GABAGLIA, traduziremos por AHMES.

cios resolver os problemas do *hau* (*hau*: montão, acervo) que, modernamente, seriam solucionados por via algébrica através de equações do primeiro grau da forma

$$x + \frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \ldots = s$$

"Hau, seu sétimo, êle mesmo faz 19", problema que corresponderia à equação

$$x + \frac{x}{7} = 19$$

teve a solução correta (133/8) dada por AHMES na forma habitual:

$$16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\,.$$

Os exemplos citados são suficientes para ilustrar as dificuldades do cálculo numérico na antigüidade, de que foram inseparáveis auxiliares os ábacos e as tabelas. As escavações de Nipur exumaram numerosas tábuas dos babilônios (de multiplicação, de inversos, de quadrados e de cubos), elaboradas para auxiliar seus trabalhos de Astronomia.

O problema do *hau* e as soluções empíricas dadas pelos babilônios aos que, hoje, denominaríamos 'problemas do 3.º grau', são por alguns autores considerados precursores da Álgebra, o que, de certo modo, empana a glória de pioneiro nesse campo, atribuída ao matemático grego DIOFANTE (século III).

4. *A Geometria no período primitivo.* As técnicas de agrimensura, desenvolvidas no Egito pela necessidade de demarcação de terras após as inundações do Nilo (6), deve-se o progresso da Geometria naquele país, o que explica o sentido etimológico de seu nome (medida da terra). Não chegou, todavia, a constituir uma estrutura lógica, de princípios sistematizados em um corpo de doutrina. Assinalam-se, apenas, conhecimentos esparsos, especialmente sôbre propriedades métricas das figuras planas e dos sólidos.

O triângulo de lados 3, 4, 5 e alguns de seus equivalentes já aparecem em documentos do período primitivo, sem evidência, contudo, de ter sido alcançada a propriedade geral que estabelece a relação entre os lados do triângulo retângulo (teorema de PITÁGORAS). Os agrimensores egípcios marcavam ângulos retos no terreno por meio de um triângulo de corda, cujos lados mediam, respectivamente, 3, 4 e 5 unidades de comprimento.

Os babilônios sabiam traçar o hexágono regular inscrito no círculo, pròvàvelmente como fruto de observação e não como decorrência de demonstração matemática. Solucionaram alguns problemas de quadratura e de cubatura. Em uma tábua do século XX A.C., aparece o cálculo exato do volume do tronco de pirâmide quadrangular regular, igualmente conhecido dos egípcios, como o demonstra o papiro de Moscou, que data do Império Médio (1900 A.C. a 1800 A.C.).

Em tais problemas, apresentaram os egípcios alguns resultados interessantes, como, por exemplo, a área do círculo dada pelo quadrado de 8/9 do diâmetro (o que equivaleria a atribuir a 'pi' o valor aproximado 3,16), a área de um quadrilátero convexo de lados a, b, c, d (a oposto a c) dada por

$$\frac{1}{4}\,(a + c)\,(b + d)\ (7),\ \text{etc.}$$

(6) Segundo HERÓDOTO, o rei SESOSTRIS (século XIII A.C.) dividira em partes iguais entre agricultores egípcios as terras do vale do Nilo. Cada diminuição de terra, provocada pelo rio, ocasionava nova demarcação por parte dos agrimensores oficiais, a fim de serem cobrados os impostos proporcionalmente às áreas cultivadas.

(7) Seria uma aproximação da fórmula exata S igual 1/4 (ad. senA mais ba. senB mais cb. senC mais dc. senD) supostos os ângulos A, B, C, D, próximos de 90 graus.

Na opinião dominante, a Geometria do período primitivo se reduzia a um conjunto de preceitos práticos, de caráter empírico, aplicáveis às artes de agrimensura e construção. Entretanto, não é totalmente rejeitada a hipótese de ter havido algum aspecto científico, suficiente para justificar a realização dos grandes monumentos e a reputação das escolas sacerdotais, especialmente no Egito, onde estudaram eminentes matemáticos gregos.

Defendem êsse ponto de vista certos egiptólogos que tentaram descobrir o enigma da construção da pirâmide de CHEOPS.

Baseados no testemunho de HERÓDOTO (8), JAROLIMEK KLEPPISCH sustentam a tese de que a pirâmide é um monumento ao *número de ouro*. Para outros, porém, a idéia mestra de seu traçado seria inspirada no problema da retificação da circunferência: o perímetro de sua base equivaleria ao comprimento da circunferência cujo raio é a altura da pirâmide (9).

Assinalemos, por fim, que os egípcios construíram um sistema de unidades de medida, estabelecendo entre elas uma correlação, repetida, muitos séculos mais tarde, pelos autores do sistema métrico decimal em seu plano inicial: da unidade de comprimento (côvado) derivavam-se as de área e de volume, e desta última a de massa (massa de água contida na unidade de volume).

5. *Conclusão.* A documentação existente evidencia a natureza empírica e a finalidade utilitária dos conhecimentos dos povos primitivos, apesar das conjecturas relativas a possíveis elaborações teóricas mais avançadas. Todavia, segundo FRANCISCO VERA, após as etapas de caráter analítico, manifestou-se um "esfôrço de generalização", que teria sido o ponto de partida para a maravilhosa construção racional da ciência matemática grega.

(8) Diz êsse historiador ter aprendido com os sacerdotes egípcios que, pelo plano elaborado para sua construção, "o quadrado de lado igual à altura da pirâmide era equivalente a cada uma de suas faces laterais". Dessa relação decorre que a razão da área total para a área lateral e a razão desta para a área da base são iguais ao número de ouro (1,618...).

(9) Nessa hipótese, a razão da altura para o apótema da base seria o quádruplo do inverso de 'pi' (1,273...) e não a raiz quadrada do número de ouro (1,272...) como pretendem os defensores da outra tese.

O MATERIAL DIDÁTICO NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Prof. MANUEL JAIRO BEZERRA

I. *Preliminares*

São os acessórios de ensino 'atratores de atenção' extremamente úteis para a eficiência do ensino, além de constituírem uma fonte poderosa de elementos e recursos motivadores.

"O seu emprêgo conjuntamente com a instrução e ensino de quaquer ciência", diz Elliot Downing, "é um tópico tão extenso, que já existem vários livros, apenas a seu respeito".

O têrmo 'acessório de ensino' ou 'material didático' é usado por uns como todo e qualquer acessório material usado pelo professor (quadro negro, giz, apagador, livro-texto, cadernos, instrumentos ou ferramentas); outros entretanto, incluem nessa denominação acessórios materiais especiais (filmes, discos, diapositivos e diafilmes, imitações, quadros murais, figuras e modelos).

Êstes últimos justificam o uso dos '*acessórios de ensino*' pelas seguintes razões: