

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS BLUMENAU
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Ana Letícia Becker Gomes

Aspectos gerais da Teoria do Caos

Blumenau
2022

Ana Letícia Becker Gomes

Aspectos gerais da Teoria do Caos

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática do Campus Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.
Orientadora: Prof. Louise Reips, Dra.

Blumenau
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Gomes, Ana Leticia Becker
Aspectos gerais da Teoria do Caos / Ana Leticia Becker
Gomes ; orientadora, Louise Reips, 2022.
76 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau,
Graduação em Matemática, Blumenau, 2022.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Teoria do Caos. I. Reips, Louise .
II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em
Matemática. III. Título.

Ana Letícia Becker Gomes

Aspectos gerais da Teoria do Caos

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Licenciada em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática.

Blumenau, 27 de julho de 2022.

Prof. Francis Felix Cordova Puma , Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Louise Reips, Dra.
Orientadora
Universidade Federal de Santa Catarina - Campus Blumenau

Prof. Luiz Rafael dos Santos, Dr.
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina - Campus Blumenau

Prof. Felipe Delfini Caetano Fidalgo, Dr.
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina - Campus Blumenau

Este trabalho é dedicado aos meus pais Roseli e Ailson e ao
meu companheiro Francisco.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por todas as oportunidades que colocou em meu caminho e por me mostrar que a matemática é a linguagem em que o universo foi escrito.

Aos meus pais Roseli e Ailson, por sempre apoiarem todos os meus sonhos, me incentivarem a nunca desistir e sempre buscar mais conhecimento.

Ao meu companheiro Francisco, por estar sempre ao meu lado e me fazer sorrir nos momentos difíceis e por seu amor incondicional.

À professora Louise, primeiramente por sua amizade e também por sua orientação, dedicação e comprometimento em me ajudar a fazer este trabalho mais especial.

Aos meus professores da banca, Luiz Rafael e Felipe Fidalgo, por todos os seus ensinamentos agora e nas disciplinas ministradas.

Aos meus amigos, por todas as risadas e momentos juntos que compartilhamos durante essa fase da vida.

*"I never think of the future.
It comes soon enough."
(EINSTEIN, 1938)*

RESUMO

No século XIX a ideia Newtoniana de que se poderia descrever todos os fenômenos por equações determinísticas, mudou graças às descobertas de Henri Poincaré. Tal fato marcou o início do estudo sobre Sistemas Dinâmicos, em particular, sobre os que apresentam uma alta dependência das condições iniciais e previsões não confiáveis, se tomados intervalos de tempo muito longos. Esse comportamento - presente em alguns sistemas dinâmicos - ficou conhecido como Caos. Assim, o objetivo desse trabalho é definir esse conceito e apresentar os principais elementos e resultados da Teoria do Caos. Dentre estes, pode-se citar o Expoente de Lyapunov, os diversos tipos de Atratores e o Diagrama de Bifurcação. Para uma melhor compreensão do tema pelo leitor, este trabalho ainda perpassa por conceitos iniciais tais como: equações diferenciais ordinárias, modelos populacionais, mapa logístico, método do ponto fixo, entre outros. Como metodologia, foi feita uma revisão bibliográfica sobre o assunto e, ainda, um breve panorama histórico sobre a Teoria do Caos.

Palavras-chave: Caos. Sistemas Dinâmicos. Mapa Logístico.

ABSTRACT

In the XIX century the Newtonian idea that several phenomena could be described by deterministic equations, changed due to the discoveries of Henri Poincaré. This fact marked the beginning of the studies about Dynamical Systems, particularly, those which present a high dependency on the initial conditions and unreliable predictions considering long periods of time. This behavior - present in some dynamical systems - became known as Chaos. So, the objective of this work is to define such concept and present the main elements and results of the Chaos Theory. Among them, the Lyapunov exponent, several types of Attractors and the Bifurcation Diagram - can be mentioned. For a better understanding about the subject by the reader, this work still runs through initial concepts such as: differential equations, population models, logistic map, fixed point method, among others. As for the methodology, were made a bibliographic review about the subject and, also, a brief historical panorama about the Chaos Theory.

Keywords: Chaos. Dynamical Systems. Logistic Map.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Mapa Logístico com $a = 2, 5$	35
Figura 2 – Mapa Logístico com $a = 1$	36
Figura 3 – Mapa Logístico com $a = 5$	36
Figura 4 – Comparação dos gráficos anteriores.	37
Figura 5 – Intersecção de $f(x)$ e $y = x$ com $a = 2, 5$	38
Figura 6 – Intersecção de $f(x)$ e $y = x$ com $a = 1$	39
Figura 7 – Intersecção de $f(x)$ e $y = x$ com $a = 5$	39
Figura 8 – Comparação dos três gráficos de intersecção.	40
Figura 9 – Método do Ponto Fixo para $f(x)$ e $a = 2, 5$	40
Figura 10 – Gráfico de Cobweb (para $a = 3, 99$).	43
Figura 11 – Efeito Borboleta.	57
Figura 12 – Variação da População quando $a = 3, 3$	60
Figura 13 – Variação da População quando $a = 3, 5$	60
Figura 14 – Diagrama de Bifurcação.	62
Figura 15 – Gráfico de Cobweb (Mapa Logístico com $a = 3, 99$).	63
Figura 16 – Conjunto de Mandelbrot.	65
Figura 17 – Conjunto de Mandelbrot e Diagrama de Bifurcação.	66
Figura 18 – Conjunto de Mandelbrot rotacionado.	67

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	CONCEITOS PRELIMINARES	13
2.1	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	13
2.2	CONCEITOS DE ANÁLISE	17
3	SISTEMAS DINÂMICOS E MODELOS POPU-	
	LACIONAIS	19
3.1	SISTEMAS DINÂMICOS	19
3.2	MODELOS POPULACIONAIS	25
3.2.1	Modelo de Malthus	25
3.2.2	Modelo de Verhulst	27
3.2.3	Mapa Logístico	33
3.2.4	Relação entre o Modelo de Verhulst e o Mapa	
	Logístico	35
3.2.5	Método do Ponto Fixo	38
4	CAOS	44
4.1	CAOS	44
4.1.1	Expoente de Lyapunov	47
4.2	ATRADORES	54
4.2.1	Atrator de Lorenz	55
4.3	DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO	57
4.3.1	Conjunto de Mandelbrot	64
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	68
6	APÊNDICE	69
6.1	CÁLCULO COMPLETO DA CONTA DO MODELO	
	DE VERHULST	69
	REFERÊNCIAS	73

1 INTRODUÇÃO

Até 1886, acreditou-se que era possível descrever todos os fenômenos por equações determinísticas. Essa ideia newtoniana mudou graças às descobertas de Henri Poincaré, que ao estudar sobre integração de equações diferenciais, concluiu que estas não tinham uma solução explícita.

Tal fato deu origem aos estudos sobre Sistemas Dinâmicos, os quais apresentam uma grande sensibilidade às condições iniciais e previsões nada seguras, considerando intervalos de tempo demasiadamente longos. Tais características, presentes em alguns sistemas dinâmicos, configuram um comportamento específico que ficou conhecido como Caos e foi popularizado por Edward Lorenz, em seu estudo meteorológico.

Assim, o objetivo desse trabalho é definir esse conceito e apresentar os principais elementos e resultados da Teoria do Caos. Como metodologia, foi feita uma revisão bibliográfica sobre o assunto. No capítulo 2, são expostos alguns conceitos preliminares - de Equações Diferenciais Ordinárias e de Análise - necessários para um melhor entendimento do assunto.

No capítulo 3, é definido o que é um Sistema Dinâmico e alguns conceitos, propriedades e resultados referentes a esse conteúdo. Também são apresentados nessa parte alguns modelos populacionais. Dentre estes, o que mais tem ênfase é o Mapa Logístico, já que é neste modelo em que é aplicado o Método do Ponto Fixo, um mecanismo utilizado para determinar os pontos fixos de um sistema.

O Caos - conceito mais importante desse trabalho - está definido no capítulo 4. Nessa parte, também é mostrado um breve panorama histórico dessa teoria, bem como alguns outros elementos extremamente relevantes relacionado, entre eles o Expoente de Lyapunov,

Atratores e Diagrama de Bifurcação.

Por fim, as considerações finais elencam as dificuldades encontradas ao longo da elaboração desse trabalho e futuras perspectivas de estudo.

2 CONCEITOS PRELIMINARES

Para introduzir o objeto de estudo desse trabalho, que é a Teoria do Caos, primeiramente, torna-se necessário definir alguns termos fundamentais que permeiam tal assunto. Dessa forma, este capítulo está destinado a uma revisão bibliográfica contendo definições essenciais que envolvem Equações Diferenciais e alguns conceitos da Análise Real. Caso o leitor já tenha familiaridade com tais termos, a leitura deste capítulo não será necessária.

2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O estudo das Equações Diferenciais se originou no final do século XVIII com Newton e Leibniz, ambos motivados por problemas físicos. As Equações Diferenciais são de bastante utilidade e importância. Muitas das leis da Matemática, Física, Astronomia, Biologia, entre outras áreas, podem ser escritas como equações diferenciais.

Na Matemática, em particular, as equações diferenciais são de extrema relevância para a análise de modelos matemáticos, os quais serão vistos mais adiante. Todavia, os modelos que serão estudados estão mais relacionados com as Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de 1^a ordem.

Esta seção será dedicada à conceituação e explicação desse tema, tendo como base as obras “*Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*” [5] e “*A first course in Differential Equations with modeling applications*” [28].

Definição 1. *Uma equação é dita uma Equação Diferencial se ela contém derivadas de uma ou mais funções desconhecidas, com respeito a uma ou mais variáveis independentes.*

Definição 2. *Uma equação diferencial é dita uma Equação Dife-*

rencial Ordinária (EDO) se ela contém apenas derivadas ordinárias de uma ou mais funções desconhecidas com respeito a **uma** variável independente.

Exemplo 1. A equação abaixo é uma Equação Diferencial Ordinária.

$$\frac{dy}{dx} + 4y = 3x,$$

sendo que x é a variável independente e y é a variável dependente.

Definição 3. Uma equação diferencial é dita uma Equação Diferencial Parcial (EDP) se ela envolve derivadas parciais de uma ou mais funções desconhecidas de duas ou mais variáveis independentes.

Exemplo 2. A equação abaixo é uma Equação Diferencial Parcial.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Além de serem classificadas de acordo com o seu tipo, as Equações Diferenciais também podem ser identificadas conforme a sua ordem, como segue abaixo:

Definição 4. A Ordem de uma equação diferencial (seja uma EDO ou uma EDP) é a maior ordem de derivada que aparece na equação.

Exemplo 3. A equação

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

é uma EDP de ordem 3.

Exemplo 4. A equação

$$y^{(iv)} + 3e^t y'' - y' = t^6$$

é uma EDO de quarta ordem.

Tendo em mente as considerações acima, uma EDO de 1^a ordem pode ser escrita - no caso mais geral - como:

$$\frac{dy}{dt} = f(t; y),$$

em que f é uma função dada por duas variáveis (t e y).

Além das classificações já citadas, as EDOs também podem ser analisadas em relação à sua linearidade:

Definição 5. *Uma EDO*

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

é dita linear de ordem n se F é uma função linear nas variáveis y, y', \dots, y^n , dependentes de t . Desse modo, uma EDO de ordem n é da forma

$$a_0(t)y^n + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t).$$

Assim, com o que foi dito acima, pode-se ver que uma EDO linear de 1^a ordem é dada por

$$a_0(t)\frac{dy}{dt} + a_1(t)y = g(t).$$

Há diversos tipos de resoluções de EDO's, entretanto o único que será abordado nesse trabalho é o Método das Variáveis Separáveis visto que, mais adiante no projeto, este procedimento será utilizado.

Esse processo pode ser aplicado a EDOs específicas denominadas Equações Separáveis. Esse tipo de equações permite que algumas EDOs de primeira ordem possam ser escritas como

$$g(y)\frac{dy}{dt} = f(t).$$

Perceba que pode-se “separar” em um lado da igualdade os termos que envolvem a variável dependente (nesse caso y) e no outro lado os termos envolvendo a variável independente (nesse caso t). A seguir, um exemplo detalhado aborda a separação das variáveis e o método aplicado que permite sua resolução.

Exemplo 5. *Considere a equação*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{1 + y^2},$$

perceba que essa EDO pode ser reescrita como

$$dy = \frac{dy}{dt} dt = \frac{t^2}{1 + y^2} dt,$$

$$(1 + y^2)dy = (1 + y^2) \frac{t^2}{(1 + y^2)} dt,$$

$$(1 + y^2)dy = t^2 dt.$$

Integrando em ambos os lados da equação tem-se:

$$\int (1 + y^2)dy = \int t^2 dt,$$

o que implica

$$y + \frac{y^3}{3} = \frac{t^3}{3} + c,$$

em que c é uma constante.

Como busca-se resolver certas EDO's durante o trabalho, torna-se necessário mencionar a existência e unicidade da solução de uma equação diferencial, enunciadas no teorema a seguir:

Teorema 1. *Se as funções p e q são contínuas em um intervalo aberto $I : \alpha < t < \beta$ contendo o ponto $t = t_0$, então existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação diferencial*

$$g(t) = \frac{dy}{dt} + p(t)y.$$

A demonstração desse teorema não será desenvolvida nesse trabalho, mas ela consta na obra “*Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*” (Teorema 2.4.1 página 52) [5].

2.2 CONCEITOS DE ANÁLISE

Algumas definições importantes para o melhor entendimento do trabalho são: Conjunto Compacto, Fecho, Vizinhança e Bola Aberta. Entretanto, estas dependem de outros conceitos, os quais serão definidos primeiro. Antes disso, vale destacar que tais considerações foram baseadas na obra “*Análise Real volume 1 - funções de uma variável*” [14].

Definição 6. *Um ponto a é interior ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$, quando existe $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ está contido em X .*

Definição 7. *O conjunto de todos os pontos interiores de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se interior de X e é denotado por $\text{int}(X)$.*

Definição 8. *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ chama-se aberto quando $A = \text{int}(A)$, ou seja, quando todos os pontos do conjunto são interiores de A .*

Definição 9. *O ponto a é aderente ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando a é limite de alguma sequência de pontos $\{x_n\} \in \mathbb{R}$.*

Definição 10. O Fecho de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é o conjunto formado por todos os pontos aderentes a X , que é denotado por \bar{X} .

Definição 11. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $r > 0$ um número real positivo. A Bola Aberta de raio r e centro a é o conjunto

$$B(a; r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r.\}$$

Definição 12. Seja B um conjunto real. A ε - Vizinhança de um elemento x de B se refere a todos os elementos y que estão próximos de x a um raio ε , isto é,

$$N_\varepsilon(B) = \{x \in B : \text{dist}(x, y) < \varepsilon\}.$$

Logo, percebe-se que a noção de ε - Vizinhança está diretamente ligada ao conceito de uma Bola Aberta, apresentada na Definição 11.

Definição 13. Um conjunto é dito fechado quando $X = \bar{X}$. Ou seja, quando o fecho do conjunto é o próprio conjunto. Também pode ser dito que todo ponto aderente a X pertence a X .

Definição 14. Um conjunto é dito limitado se estiver contido em alguma bola aberta.

Definição 15. Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é dito compacto quando é limitado e fechado.

Definição 16. Uma função é dita diferenciável por partes se ela for diferenciável em todo o domínio e se estiver definida por partes.

3 SISTEMAS DINÂMICOS E MODELOS POPULACIONAIS

Neste capítulo serão apresentados alguns aspectos dos Sistemas Dinâmicos e de alguns Modelos Populacionais. Tais conceitos são importantes, pois é justamente neles em que pode-se observar manifestações do caos. Por exemplo, o caos determinístico é uma característica de sistemas dinâmicos não-lineares.

3.1 SISTEMAS DINÂMICOS

Os Sistemas Dinâmicos são importantes para modelar fenômenos biológicos, para estudar dinâmicas populacionais e econômicas e para resolver problemas de astronomia, mecânica, entre outras áreas do conhecimento. Tal teoria teve início no século XIX, quando Henri Poincaré - ao procurar uma solução explícita para equações diferenciais - percebeu que a maioria dessas equações não poderia ser resolvida utilizando fórmulas. Assim, ele analisou as EDOs utilizando ferramentas como a Geometria Diferencial e a Topologia.

Este capítulo foi baseado - principalmente - nas obras “*Chaos: an introduction to Dynamical Systems*” [1], “*Uma Abordagem sobre o Caos e Sistemas não lineares para a Graduação*” [16] e “*Crescimento Populacional*” [22].

Definição 17. *Um Sistema Dinâmico é um conjunto de possíveis estados dependentes do tempo, no qual uma lei determina o estado presente em termos do estado passado.*

Em outras palavras, os Sistemas Dinâmicos têm uma configuração específica a cada instante do tempo. Além disso, eles podem muitas vezes ser regidos por leis determinísticas, isto é, ela determina o estado presente unicamente a partir do estado passado [1].

Uma discussão algébrica de Sistema Dinâmico pode ser encontrada em “*Dynamical Systems on Monoids: Toward a General Theory of Deterministic Systems and Motion*” [8].

Há dois tipos de Sistemas Dinâmicos, os quais serão apresentados a seguir: os de Tempo Discreto e os de Tempo Contínuo.

Definição 18. *Um Sistema Dinâmico é dito de Tempo Discreto quando a lei associada se aplica num tempo discreto.*

Em outros termos, considerando um intervalo de tempo específico, como por exemplo, os instantes $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$, o estado permanece constante entre esses tempos, sendo alterado apenas nos instantes exatos $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$.

Sistemas Dinâmicos Discretos - também denominados dessa forma - são muitas vezes vistos como equações de diferença, relações de recorrência, mapas interativos e/ou mapas [16].

Definição 19. *Um Sistema Dinâmico de Tempo Contínuo é o limite do Sistema Dinâmico Discreto, quando as evoluções são cada vez menores. Nesse sistema, tem-se que a lei regente é um conjunto de equações diferenciais.*

Perceba que, para esses sistemas, o estado evolui continuamente, sendo regido por uma regra fixa. Muitos dos fenômenos relacionados aos Sistemas Dinâmicos são mais simples de serem descritos e compreendidos quando vistos no contexto de mapas. Por conseguinte, essa será a próxima definição.

Definição 20. *Um mapa (ou aplicação) é uma função de evolução utilizada para criar um sistema dinâmico de tempo discreto.*

Um Mapa Unidimensional é chamado assim porque todos os pontos x_n (perceba que x_1 se refere à primeira iteração, x_2 à segunda

iteração, até que x_n é a n -ésima iteração de x) pertencem ao espaço unidimensional dos números reais. Além disso, mapas podem ser vistos como ferramentas para analisar equações diferenciais, modelos de fenômenos naturais ou como simples exemplos de caos [26].

As definições que seguem estão relacionadas ao conceito de mapa.

Definição 21. *Seja x um ponto e f um mapa. A Órbita de x sob f é o conjunto de pontos $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$. O ponto inicial x para a órbita é denominado de Valor Inicial da Órbita.*

Definição 22. *Um ponto p é dito um Ponto Fixo do mapa f se $f(p) = p$.*

Um mapa pode conter pontos fixos estáveis e/ou instáveis. Num Sistema Dinâmico Discreto os pontos fixos são ditos estáveis se os pontos ao seu redor são atraídos por ele. São ditos pontos fixos instáveis se os pontos ao seu redor são afastados ou repelidos por ele. Sistemas que têm pontos fixos estáveis possuem maior estabilidade. Já aqueles em que os pontos fixos são instáveis, ao sofrerem perturbações, têm suas órbitas movidas para longe dos pontos fixos [1].

Voltando à questão da proximidade entre os pontos e os pontos fixos, tem-se que essa “proximidade” é referente a todos os números reais pertencentes à $N_\varepsilon(B)$, definida anteriormente na seção 2.2 [1].

Como dito anteriormente, o que distingue os pontos fixos uns dos outro é sua estabilidade. Serão apresentados, então, dois tipos de pontos fixos, como segue.

Definição 23. *Seja f um mapa nos \mathbb{R} e seja p um número real tal que $f(p) = p$. Se os pontos próximos de p forem atraídos por ele, ou seja, se para todo $x \in N_\varepsilon(B)$, com $\varepsilon > 0$ e com $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = p$ então p é um Ponto Fixo de Atração. Caso contrário, ele é um Ponto Fixo de Repulsão.*

Outra maneira de classificar os pontos fixos como de atração ou repulsão será dada pelo próximo teorema. Mas, antes deste, é preciso definir o conceito de Função Suave.

Definição 24. *Uma Função Suave é aquela em que as derivadas de todas as ordens existem e são contínuas.*

Teorema 2. *Seja f um mapa suave em \mathbb{R} , e assuma que p é um ponto fixo de f .*

a) *Se $|f'(p)| < 1$ então p é um ponto fixo de atração.*

b) *Se $|f'(p)| > 1$ então p é um ponto fixo de repulsão.*

Demonstração. a) Como f é uma função suave e p é um ponto fixo, claramente, existe a derivada nesse ponto, que é $f'(p)$. Por hipótese $|f'(p)| < 1$. Seja um número a qualquer tal que $|f'(p)| < a < 1$.

Aplicando a definição de derivada tem-se

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} = |f'(p)|.$$

De acordo com a Definição 11, existe $\varepsilon > 0$ e uma vizinhança $N_\varepsilon(B)$ associada de tal que

$$\frac{|f(x) - p|}{|x - p|} < a \quad \forall x \in N_\varepsilon(B), x \neq p. \quad (1)$$

Como $a < 1$, conclui-se que $f(x)$ está mais próximo de p do que de x . Logo, se $x \in N_\varepsilon(B)$, então $f(x) \in N_\varepsilon(B)$, assim como $f^2(x)$, $f^3(x)$ e sucessivamente.

Assim, através do método da indução matemática, pretende-se demonstrar que:

$$|f^k(x) - p| < a^k |x - p| \quad \forall x \in N_\varepsilon.$$

O caso $k = 1$ já foi demonstrado acima em (1).

Agora, para provar que o caso $k + 1$ é válido, supõem-se que a relação $|f^k(x) - p| < a^k|x - p|$ é válida para algum k genérico.

Considerando

$$\begin{aligned} |f^{k+1}(x) - p| &= |f(f^k(x)) - f(p)| \\ &< a|f^k(x) - p| \\ &\leq a(a^k|x - p|) = a^{k+1}|x - p|. \end{aligned}$$

Evidentemente, como $0 < a < 1 \quad \forall x \in N_\varepsilon(B)$ tem-se que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f^k(x) - p| = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = p,$$

de modo que p é um ponto fixo de atração.

b) Novamente, como f é suave e p é um ponto fixo, então existe a derivada de p : $f'(p)$. Por hipótese, $|f'(p)| > 1$.

Com isso, tem-se que $\exists a$ tal que $1 < a < |f'(p)|$.

Aplicando a definição de derivada tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} = |f'(p)|.$$

Como no caso anterior, $\exists \varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{|f(x) - p|}{|x - p|} > a \quad \forall x \in N_\varepsilon(B), x \neq p.$$

Isso implica que, com as restrições de a , $f(x)$ é mais distante de p do que de x . A partir de

$$|f(x) - p| > a|x - p|,$$

também pode-se concluir que se $x, f(x), \dots, f^k(x) \in N_\varepsilon(B)$, então

$$|f^k(x) - p| > a^k |x - p|.$$

Agora, busca-se um k_0 tal que

$$|f^{k_0}(x) - p| > \varepsilon.$$

Como

$$|f^{k_0}(x) - p| > a^{k_0} |x - p|,$$

toma-se

$$a^{k_0} |x - p| = \varepsilon,$$

tal que

$$\frac{\varepsilon}{|x - p|} = a^{k_0}.$$

Aplicando o logaritmo natural nos dois lados da igualdade obtem-se

$$\ln \left(\left| \frac{\varepsilon}{x - p} \right| \right) = \ln a^{k_0}.$$

Pelas propriedades dos logaritmos,

$$\ln \left(\left| \frac{\varepsilon}{x - p} \right| \right) = k_0 \ln(a).$$

Portanto

$$k_0 = \frac{\ln \left(\left| \frac{\varepsilon}{x - p} \right| \right)}{\ln a}.$$

Logo, como foi encontrado um k_0 de forma que

$$|f^{k_0}(x) - p| > \varepsilon,$$

conclui-se que todos os pontos próximos de p saem da vizinhança - pois a distância está aumentando - e, assim, p é um ponto fixo de repulsão.

□

3.2 MODELOS POPULACIONAIS

Serão abordados nessa seção dois modelos populacionais: o Modelo de Verhulst e o Mapa Logístico. Todavia, como o Modelo de Verhulst é uma versão aprimorada do Modelo de Malthus, este será discutido primeiro, de modo breve.

Definição 25. *Um Modelo Matemático é uma representação ou interpretação de um sistema, através de equações matemáticas.*

Os modelos matemáticos também buscam retratar a maneira como ocorre as mudanças do sistema, pois explicam de modo quantitativo e qualitativo os fenômenos da realidade. Assim, pode-se dizer que o propósito mais significativo de um modelo é permitir uma representação e compreensão mais simplificada do sistema [22].

3.2.1 Modelo de Malthus

Em 1798, Thomas Malthus - interessado na manutenção do padrão de vida da população - publicou um artigo sobre o crescimento populacional humano, o qual foi a primeira tentativa de analisar a dinâmica populacional usando matemática. A teoria malthusiana também foi a primeira das teorias demográficas [20].

De acordo com Thomas Malthus, a população cresceria segundo uma progressão geométrica e os recursos naturais cresceriam segundo uma progressão aritmética. Assim, Malthus via que se a taxa de natalidade fosse maior do que a taxa de mortalidade a população cresceria demasiadamente. Caso essa superpopulação não fosse reduzida por doenças ou predadores, haveria uma escassez de alimentos [7].

A partir do que foi dito, pode-se montar a seguinte equação:

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot N(t), \quad (2)$$

em que $N(t)$ é o tamanho da população em função do tempo e r é a diferença entre a taxa de natalidade e mortalidade.

No entanto, as previsões feitas por Malthus não se concretizaram por diversos fatores, mas, em geral, pode-se dizer que este modelo supõe que o meio ambiente não exerce influência sobre a população. Logo, ele funciona melhor como um indicador de potencial de sobrevivência e de crescimento de uma certa espécie, do que como um modelo para mostrar o que realmente ocorre [7].

Voltando a analisar a Equação (2), que é a equação de Malthus, esta pode ser reescrita como:

$$\frac{dN}{N} = r dt.$$

Aqui vale ressaltar que $r > 0$ e que será utilizado N ao invés de $N(t)$, para facilitar a notação. Além disso, percebe-se que a Equação (2) foi escrita de modo a utilizar o método de variáveis separáveis, que consta na Seção 2.1.

Continuando, pode-se integrar em ambos os lados da igualdade

$$\int \frac{dN}{N} = \int r dt,$$

que calculando, chega-se em

$$\ln(N) = rt + c.$$

E tomando a exponencial para isolar N obtém-se

$$N = e^c \cdot e^{kt}.$$

Como c é uma constante, então e^c também é. Assim, tomando essa constante como N_0 , tal que $N_0 = N(0)$, tem-se que

$$N(t) = N_0 e^{kt}.$$

Um exemplo de fenômeno que é descrito por equações desse tipo é o decaimento radioativo.

Exemplo 6. *Tem-se que o número de núcleos que decaem por unidade de tempo em elementos radioativos é proporcional ao valor total (P) de núcleos radioativos. Tal fato é dado pela expressão*

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P,$$

em que α é a constante de desintegração, estritamente menor do que zero.

O decaimento radioativo também é chamado de meia-vida e permite prever por quanto tempo uma partícula produzirá emissões radioativas. Tal conceito é importante na arqueologia e na medicina nuclear [9].

3.2.2 Modelo de Verhulst

O matemático Pierre-François Verhulst propôs uma modificação no modelo de Malthus, levando em conta os fatores limitadores de uma população. Ele supôs a existência de uma população limite L caso o tempo fosse demasiadamente grande, ou seja, t tendendo ao infinito [22]. Antes de apresentar suas hipóteses, vale destacar que o passo a passo completo das contas que seguem abaixo, está no apêndice. Suas conjecturas foram:

1. A taxa de variação da população relativa ao tempo seria proporcional à população atual;
2. A taxa de variação da população em relação ao tempo seria proporcional à fração da população que ainda não foi atingida até o momento da análise, identificada como $\frac{L-N(t)}{L}$. Essa fração

da população é denominada Fator de Correção. Vale ressaltar que $N(t)$ é o tamanho da população.

Assim, pode-se montar a EDO:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left[\frac{L - N(t)}{L} \right],$$

em que r é a diferença entre a taxa de natalidade e mortalidade.

É preciso analisar o que ocorre com essa derivada nos pontos de equilíbrio da função, ou seja, quando $N(t) \rightarrow 0$ e quando $N(t) \rightarrow L$.

No caso de $N(t) \rightarrow 0$ então, $\frac{L - N(t)}{L} \rightarrow 1$.

E quando $N(t) \rightarrow L$, tem-se que $\frac{L - N(t)}{L} \rightarrow 0$. Assim, a taxa de variação da população tende a decrescer, ou seja, $\frac{dN}{dt} \rightarrow 0$.

Tem-se que a EDO

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \frac{L - N(t)}{L},$$

pode ser reescrita como

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N(t)}{L} \right) N(t).$$

Perceba que, se $L \rightarrow \infty$, então, $\frac{N(t)}{L} \rightarrow 0$ e, assim, tem-se a equação de Malthus. Ou seja, o meio não teria uma limitação quanto aos recursos naturais.

Esta equação é não-linear porque a variável de estado $N = N(t)$ aparece com um expoente diferente de 1.

O número L , chamado de Capacidade Máxima do Ambiente, é o número máximo de indivíduos que o meio permite - como sugerido anteriormente. A reta $N(t) = L$ é uma assíntota horizontal para a curva sigmóide, a qual é uma curva que começa com um crescimento exponencial mas depois vai se estabilizando, tendo, assim, um formato de “S”.

Agora, para resolver a EDO não-linear

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N(t)}{L} \right) N(t),$$

será usado o Método das Variáveis Separáveis.

Substituindo $N(t)$ por N , para facilitar a notação, pode-se reescrever a equação como

$$\frac{dN}{\left(1 - \frac{N}{L} \right) N} = r dt, \quad (3)$$

e decompondo em frações parciais tem-se

$$\left[\frac{1}{N} + \left(\frac{\frac{1}{L}}{1 - \frac{N}{L}} \right) \right] dN = r dt.$$

Integrando em ambos os lados da igualdade obtém-se

$$\ln|N| + \frac{1}{L} \int \frac{dN}{1 - \frac{N}{L}} = rt + c, \quad (4)$$

em que c é uma constante.

Para resolver a integral em (4) será utilizado o Método da Substituição, tomando $u = 1 - \frac{N}{L}$ chega-se em

$$\ln \left| \frac{N}{1 - \frac{N}{L}} \right| = rt + c, \quad (5)$$

pelas propriedades dos logaritmos.

Aplicando a exponencial em ambos os lados da equação:

$$\left| \frac{N}{1 - \frac{N}{L}} \right| = e^{rt} \cdot e^c. \quad (6)$$

Tomando $t = 0$ segue que $N(0) = N_0$ e

$$\frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{L}} = e^{r \cdot 0} \cdot e^c.$$

Agora, usa-se o logaritmo natural nos dois lados da expressão:

$$\ln \left| \frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{L}} \right| = c.$$

Fazendo a respectiva substituição em (6):

$$\frac{N}{1 - \frac{N}{L}} = e^{rt} \cdot e^{\ln \left| \frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{L}} \right|}.$$

Como a exponencial e o logaritmo natural são funções inversas uma da outra, chega-se em

$$\frac{N}{1 - \frac{N}{L}} = e^{rt} \cdot \left| \frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{L}} \right|,$$

ou seja,

$$\frac{N}{1 - \frac{N}{L}} = \frac{N_0 \cdot e^{rt}}{1 - \frac{N_0}{L}}.$$

A parte do lado direito da igualdade será denominada M para facilitar os cálculos e deixar as equações menos poluídas. Perceba que, após realizar todas as operações, o valor de M voltará a ser substituído na equação principal.

Após a substituição, a equação terá a seguinte forma

$$\frac{N}{1 - \frac{N}{L}} = M.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $(1 - \frac{N}{L})$ e aplicando a propriedade distributiva:

$$N = M - \frac{M}{L}N.$$

Por fim, somando $N(\frac{M}{L})$ nos dois lados, obtém-se

$$M = N \left(1 + \frac{M}{L} \right),$$

permitindo encontrar N , como segue:

$$N = \frac{M}{1 + \frac{M}{L}}.$$

Substituindo o valor de M de volta na expressão chega-se em

$$\begin{aligned} N &= \frac{\frac{N_0 e^{rt}}{1 - \frac{N_0}{L}}}{1 + \frac{\frac{N_0 e^{rt}}{1 - \frac{N_0}{L}}}{L}} = \frac{\frac{N_0 e^{rt}}{1 - \frac{N_0}{L}}}{L + \frac{N_0 e^{rt}}{1 - \frac{N_0}{L}}}, \\ N &= \frac{\frac{LN_0 e^{rt}}{1 - \frac{N_0}{L}}}{\frac{L(1 - \frac{N_0}{L}) + N_0 e^{rt}}{1 - \frac{N_0}{L}}}. \end{aligned}$$

Simplificando, tem-se que

$$N = \frac{LN_0 e^{rt}}{L(1 - \frac{N_0}{L}) + N_0 e^{rt}}.$$

$$N = \frac{N_0 e^{rt}}{(1 - \frac{N_0}{L}) + \frac{N_0 e^{rt}}{L}} = \frac{N_0 e^{rt}}{1 + \frac{N_0}{L}(e^{rt} - 1)}.$$

E, reescrevendo, consegue-se

$$N = \frac{LN_0 e^{rt}}{L + N_0(e^{rt} - 1)}.$$

Portanto,

$$N(t) = \frac{LN_0 e^{rt}}{L + N_0(e^{rt} - 1)}.$$

Equivalentemente,

$$N(t) = \frac{N_0 L}{N_0 + (L - N_0)e^{-rt}}. \quad (7)$$

De (7), em particular, se $N_0 = 0$, então $N(t) = 0$ para todo t . Dessa forma, se $N_0 > 0$ e t tendendo a infinito, na equação (7), obtemos

$$N_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{LN_0 e^{rt}}{L + N_0(e^{rt} - 1)}.$$

Isso implica que

$$N_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{LN_0}{Le^{-rt} + N_0(1 - e^{-rt})}.$$

Logo, quando $t \rightarrow \infty$ tem-se que $e^{-rt} \rightarrow 0$, e se $N(0) \neq 0$, então

$$N_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = L.$$

Com o objetivo de analisar a estabilidade de N , será investigado o que acontece nos pontos críticos do modelo, os quais são $N = 0$ e $N = L$. A solução $N = L$ é assintoticamente estável, já que as outras soluções permanecem próximas desta. A solução $N = 0$ é instável, pois todas as outras soluções divergem dela. Para maiores detalhes sobre a estabilidade de $N(t)$, pode-se consultar a obra “*Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*” [5].

Tal modelo é bastante útil para análise de populações estáveis. No entanto, para populações instáveis - como a dos humanos - os resultados não são muito confiáveis, principalmente em intervalos de tempo muito grandes [22].

Além disso, pode-se dizer que Verhulst definiu a Equação Logística (a qual é um exemplo de Crescimento Logístico, conceito que será definido ao longo do trabalho). A Equação Logística é uma equação diferencial não-linear, e sua solução é chamada Solução Logística. A Equação Logística é embasada na ideia de que a taxa de crescimento da população é proporcional à população e à quantidade de recursos disponíveis no meio [19].

O modelo de Verhulst, leva em consideração as restrições do ambiente como uma função da taxa de variação da população. A taxa relativa de crescimento demográfico diminui com o aumento da população, sendo zerada caso a população limite - a qual é estipulada pelas restrições do meio - seja atingida. A taxa de crescimento da equação diferencial não linear modificada, foi adaptada para verificar ao mesmo tempo o crescimento e o decréscimo da população [19].

Se uma espécie não encontrasse nenhuma resistência do meio e/ou nenhuma limitação de recursos, esta população cresceria exponencialmente. Mesmo se a população inicial fosse muito pequena. Entretanto, isso não pode acontecer, pois os meios do ambiente são limitados [1].

Logo, levando em consideração essas restrições do ambiente, tem-se que uma população cresceria exponencialmente até um valor limite e não mudaria mais. Ou seja, a população se estabilizaria. No entanto, isso aconteceria mesmo que a população inicial fosse bem pequena [1].

Definição 26. *Crescimento Logístico é quando há um crescimento exponencial de uma população, seguido de um período de estabilização. Ou seja, ela cresce até um valor limite e não muda mais. Levando, assim, as restrições do ambiente em consideração.*

3.2.3 Mapa Logístico

O modelo de crescimento de uma espécie - tido como um modelo de sistema não-linear - afirma que a geração sucessiva é diretamente proporcional à geração atual [16]. Isto é:

$$x_{n+1} = ax_n,$$

em que a é a taxa de crescimento populacional.

Com isso, tem-se que:

$$x_1 = ax_0$$

$$x_2 = ax_1 = a^2x_0$$

$$x_3 = ax_2 = a^3x_0$$

$$\vdots$$

$$x_n = a^n x_0,$$

onde x_0 é o tamanho da população inicial.

Dessa forma, se

1. $a > 0$ a população tende ao infinito;
2. $a < 0$ a população tende à extinção;
3. $a = 1$ a população não varia.

Porém, uma população não tem como tender ao infinito, significando que ela tem limitações. E é justamente isso que o Mapa Logístico faz, ele considera as restrições do meio [16]. Por isso, sua equação é dada por:

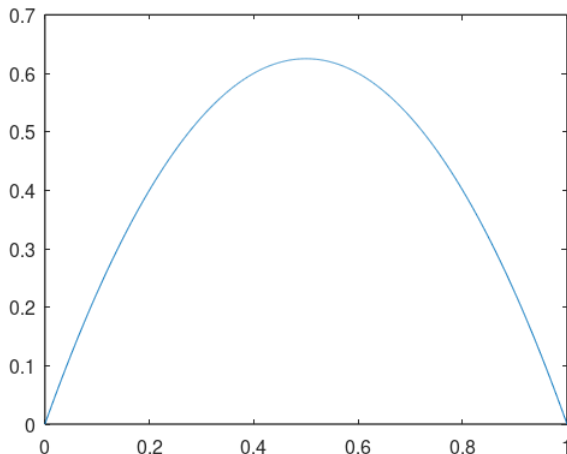
$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n).$$

Entretanto, para entender o crescimento ou decréscimo de uma população por esse modelo, é mais simples analisar a Função Logística:

$$f(x) = ax(1 - x).$$

Analisando esse mapa, observa-se que quando $x_n = 1$, tem-se $x_{n+1} = 0$ [16]. Ou seja, uma população saturada leva a extinção da espécie.

Para plotar o gráfico desta parábola, foi utilizado o *software* OCTAVE. Tal fato pode ser visto na Figura 1, onde foi optado por limitar o gráfico no intervalo $x \in [0, 1]$, para $a = 2,5$. Aqui vale ressaltar que o eixo x representa a população atual e o eixo y indica o tamanho da geração sucessiva, isso também vale para as Figuras 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10.

Figura 1 – Mapa Logístico com $a = 2,5$.

Fonte: Elaborada pela autora.

Nota-se que o gráfico tem dois pontos de intersecção com o eixo x , os quais são as raízes da função f . Também deve ser destacada a influência que a exerce sobre $f(x)$. Mais pra frente, serão apresentadas outras equações variando o valor de a na função logística - utilizando também as linguagens Julia e Python - de modo a enfatizar a importância desse valor para a determinação dos pontos fixos envolvidos.

3.2.4 Relação entre o Modelo de Verhulst e o Mapa Logístico

Foi visto anteriormente que no Modelo de Verhulst pode-se montar a EDO

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left[\frac{L - N(t)}{L} \right]. \quad (8)$$

Tem-se que, quando $L = 1$, pode-se tomar as seguintes relações:

$$N(t) = \frac{x(t)}{L},$$

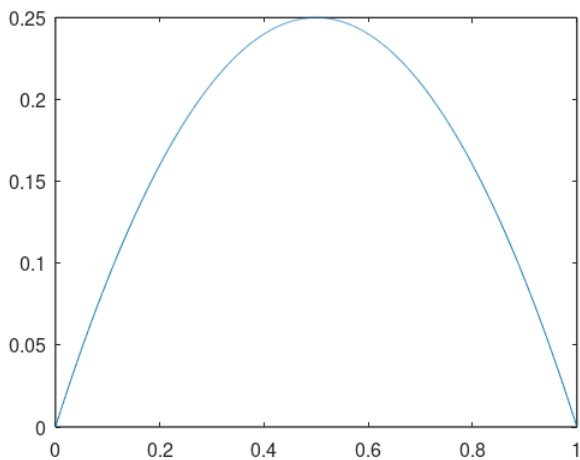


Figura 2 – Mapa Logístico com $a = 1$.
Fonte: Elaborada pela autora.

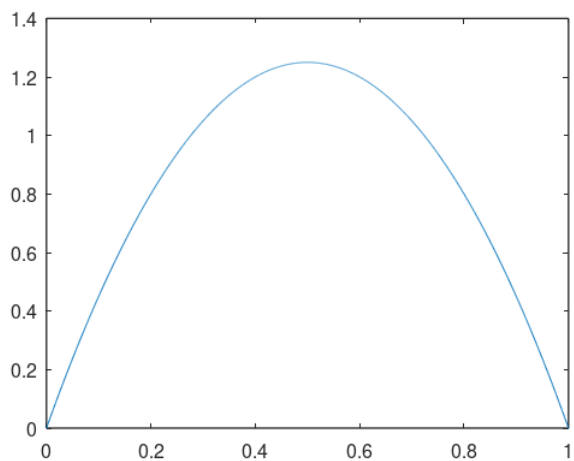


Figura 3 – Mapa Logístico com $a = 5$.
Fonte: Elaborada pela autora.

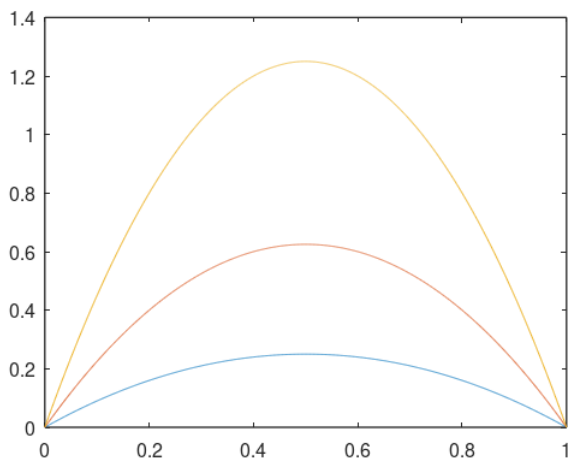


Figura 4 – Comparação dos gráficos anteriores.
Fonte: Elaborada pela autora.

a qual implica que

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{L} \cdot \frac{dx}{dt}. \quad (9)$$

Igualando as equações (8) e (9), obtém-se

$$\frac{1}{L} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{r}{L} \cdot N[L - N].$$

Escrevendo $\frac{r}{L} = a$, para simplificar a notação, chega-se em

$$\frac{dx}{dt} = L \cdot a \cdot N[L - N] = L \cdot a \cdot \frac{x}{L} \left[L - \frac{x}{L} \right].$$

Fazendo as devidas simplificações, chega-se em

$$ax \left[L - \frac{x}{L} \right].$$

Mas, quando $L \rightarrow 1$, tem-se que a expressão acima fica

$$ax(1 - x),$$

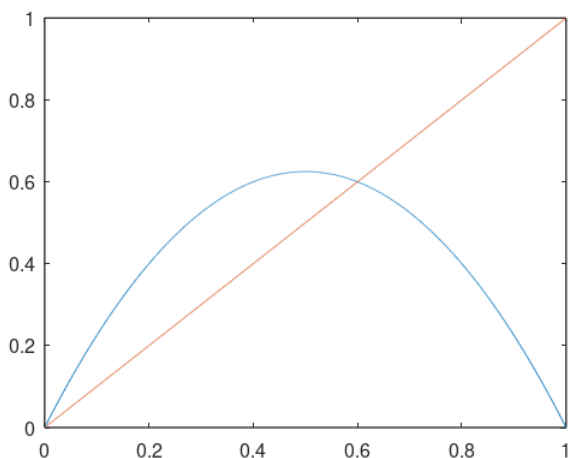


Figura 5 – Intersecção de $f(x)$ e $y = x$ com $a = 2,5$.
Fonte: Elaborada pela autora.

que é a Função Logística.

Logo, quando $L = 1$, conclui-se que a equação diferencial do Modelo de Verhulst leva à função do Mapa Logístico. Percebe-se, assim, que ambos são o mesmo modelo populacional - para esse valor específico de L .

3.2.5 Método do Ponto Fixo

Como dito previamente, a será de extrema importância para determinar os pontos fixos do Mapa Logístico, pois é o valor de a que determina se e quantos pontos de intersecção há entre a função logística e a reta $y = x$, os quais são - justamente - os pontos fixos do mapa. Isso pode ser visto nas Figuras 5, 6, 7 e 8 e também pelo Método do Ponto Fixo, o qual será tratado mais adiante.

Para introduzir o Método do Ponto Fixo - todavia - é necessário,

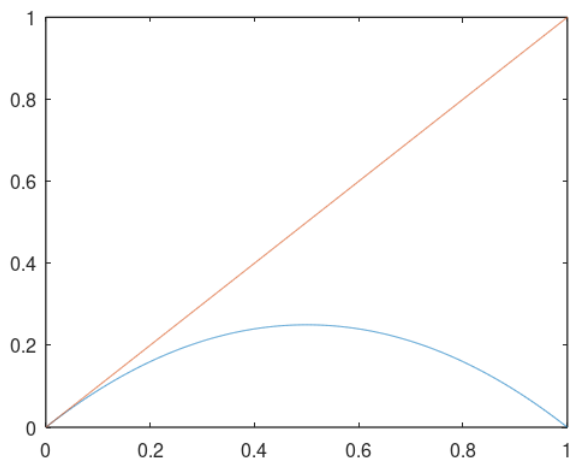


Figura 6 – Intersecção de $f(x)$ e $y = x$ com $a = 1$.
Fonte: Elaborada pela autora.

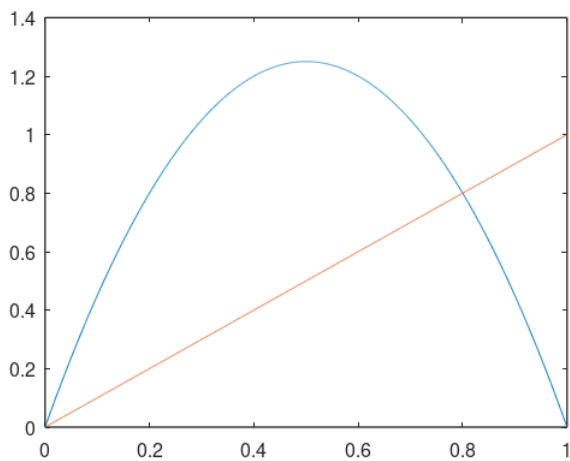


Figura 7 – Intersecção de $f(x)$ e $y = x$ com $a = 5$.
Fonte: Elaborada pela autora.

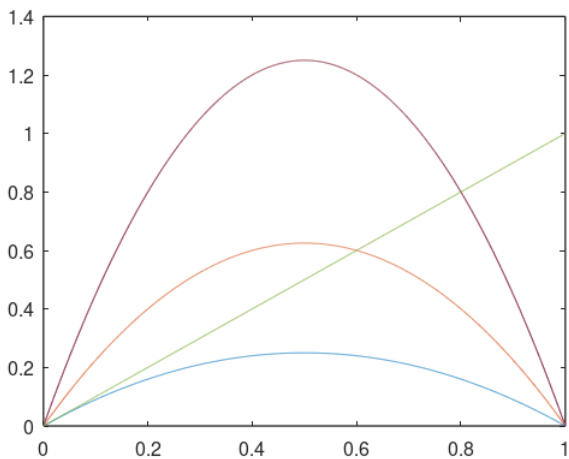


Figura 8 – Comparação dos três gráficos de intersecção.
 Fonte: Elaborada pela autora.

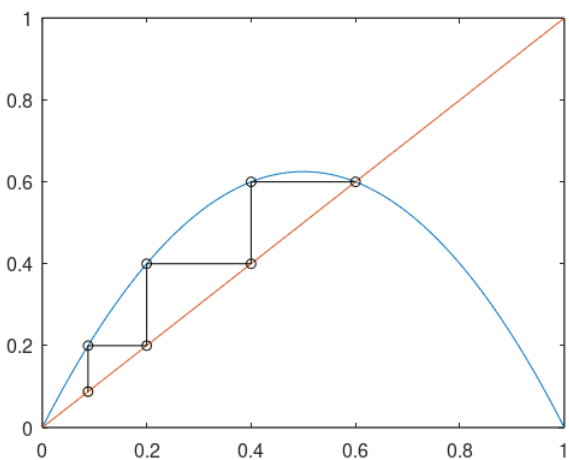


Figura 9 – Método do Ponto Fixo para $f(x)$ e $a = 2,5$.
 Fonte: Elaborada pela autora.

primeiro, falar sobre iteração composicional.

Define-se

$$f^2 := f \circ f.$$

De tal modo que

$$f^n := f \circ f \circ \dots \circ f,$$

é a n -ésima iteração de f . Isto é, f^n é composta com ela mesma n vezes [16]. Perceba que essa iteração composicional já foi abordada brevemente na seção 3.1.

Com isso, introduz-se o Método do Ponto Fixo, o qual consiste de encontrar pontos fixos de uma função ou mapa, a partir de um valor x_0 , que é um “chute inicial” [16].

Uma maneira de identificar os pontos fixos é pelo seguinte método: para um “chute inicial” x_0 encontra-se um valor $f(x_0) = x_1$. Com x_1 itera-se $f(x)$ mais uma vez obtendo um novo valor $f(x_1) = x_2$ e assim sucessivamente [16].

Matematicamente

$$x_1 := f(x_0),$$

$$x_2 := f(x_1),$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1} := f(x_n).$$

Em que x_n é a n -ésima iteração de x_0 . O conjunto de todas as iterações de uma função será o mapa desta função. Logo, o conjunto de iterações da função logística será o mapa logístico. Se o “chute inicial” for conveniente, e também dependendo do valor de a , o método convergirá, ou seja, cada iteração estará mais próxima da solução procurada [16]. Tal processo pode ser visto na Figura 9, onde foi tomado o “chute inicial” como $x_0 = 0,09$.

Ainda na Figura 9, vê-se que a reta $y = x$ intersecta a parábola duas vezes. Isso quer dizer que existem dois pontos fixos, os quais são os pontos de intersecção dos dois gráficos. Desse modo, pode-se ver que há um ponto fixo de atração e um ponto fixo de repulsão, sendo este $x^* = 0$, o qual é denominado Ponto Fixo Trivial.

Como dito anteriormente, se o “chute inicial” for conveniente, o método convergirá, ou seja, a cada iteração os pontos se aproximam de um dos ponto fixos - assim como pode ser visto na Figura 9. E isso acontece, justamente, pois este ponto fixo é de atração.

Entretanto, apesar das iterações sempre convergirem para o ponto fixo de atração, e apesar do “chute inicial” ser conveniente, mudando o valor de a podem ser necessárias muitas mais iterações para obter a convergência do método.

Tal fato pode ser observado na Figura 10, em que o Método do Ponto Fixo está sendo aplicado na função logística, com o mesmo “chute inicial” conveniente, mas, agora, com $a = 3,99$. Essa figura formada é denominada Gráfico de Cobweb.

Assim, foram apresentadas as principais definições e resultados relacionados à Sistemas Dinâmicos e Modelos Populacionais. Com isso, ficará mais clara a relação entre o caos e esses sistemas e modelos, evidenciada no próximo capítulo.

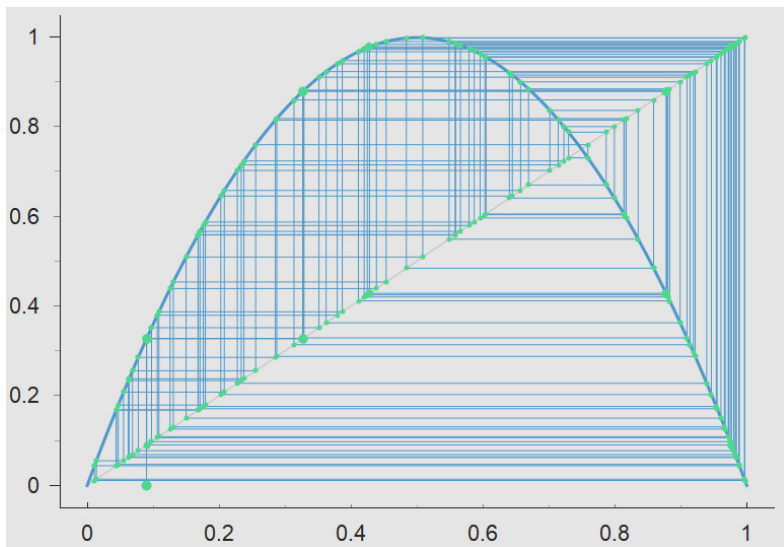


Figura 10 – Gráfico de Cobweb (para $a = 3,99$).
 Fonte: Elaborada pela autora.

4 CAOS

4.1 CAOS

Nesta seção será definido propriamente o termo Caos e, também, serão apresentados os principais elementos e teorias que envolvem esse conceito. Contudo, antes disso, será feito um breve panorama histórico. Todavia, vale ressaltar que nem todos os termos e fatos apresentados nessa parte histórica, serão desenvolvidos no decorrer do trabalho.

Desde a época de Newton, acreditou-se que vários fenômenos poderiam ser descritos por equações, as quais tinham uma caráter determinístico. Entretanto, em 1886 Henri Poincaré ao estudar sobre integração de equações diferenciais - usando ferramentas geométricas - concluiu que estas não tinham uma solução analítica geral [4].

Sua motivação era um problema da mecânica celeste: a estabilidade do sistema solar. Para tentar solucionar essa questão, ele reduziu esse sistema para um sistema de três corpos. O que ele verificou é que este possuía um comportamento caótico, ou seja, tinha uma sensibilidade às condições iniciais [4].

Poincaré também percebeu que para esse sistema era possível fazer previsões para pequenos intervalos de tempo, mas não grandes. Por ser o primeiro a detectar tais características em um sistema, tem-se que tal matemático é considerado o fundador do estudo sobre sistemas dinâmicos e das propriedades fundamentais do caos [4].

Depois disso, vários matemáticos ingressaram no estudo sobre sistemas dinâmicos e caos. Um nome que merece destaque é A. M. Lyapunov, o qual foi responsável por determinar o Expoente de Lyapunov (1892). Além de contribuir também no estudo da estabilidade do movimento [4].

Passado um bom tempo, em 1954 Vladimir Arnold, junto com seus colaboradores, esboçaram a primeira ideia do Teorema de KAM.

Este teorema refere-se à estabilidade dos regimes quase-periódicos em sistemas conservativos [4].

Além disso, tal enunciado complementa as ideias de Poincaré, expondo que existem condições iniciais para as quais - perante pequenas perturbações - as soluções são estruturalmente estáveis [4]. Vale ressaltar que esse teorema só foi completamente demonstrado em 1963.

Entre as décadas de 1960 e 1970, o matemático Stephen Smale percebeu que certos sistemas dinâmicos possuem comportamento caótico. Ele propôs um modelo de atrator estranho: o Atrator de Solenoide. Sua abordagem geométrica estava relacionada com a de Poincaré [4].

Outra contribuição de Smale foi o desenvolvimento do sistema de três corpos de Poincaré, no qual ele fez uma simplificação da geometria utilizada originalmente. Esse sistema, embora seja determinístico, apresenta alguns sinais de aleatoriedade. Tal sistema ficou conhecido como a “Ferradura de Smale” [25].

Nesse mesmo período, Smale e Arnold concluíram que as enigmáticas soluções encontradas por Poincaré, eram conseqüências dos atratores estranhos e que a estrutura destes revela uma peculiaridade dos sistemas caóticos. Essa característica significa que tais sistemas podem ser previstos a curto prazo, mas não a longo prazo [25].

Nessa mesma época, em 1963, Edward Norton Lorenz - cujo objetivo era fazer um modelo atmosférico - elaborou um sistema de equações com três variáveis, o qual era uma aproximação de equações mais complexas. Ele descobriu que as soluções oscilavam de modo irregular e que mudanças mínimas nas condições iniciais geravam soluções bem diferentes. Esse comportamento foi denominado por Lorenz de Efeito Borboleta [25].

No ano seguinte (1964), Oleksandr Mykolaiiovych Sharkovskii, publicou um teorema - o qual ficou conhecido como Teorema de Shar-

kovskii - sobre padrões nas soluções periódicas de sistemas dinâmicos discretos. Também tem-se que Arnold e Sharkovskii determinaram outros exemplos do tipo da “ferradura de Smale” [25].

Em 1969, Michel Hénon em parceria com Carl Heiles encontraram uma solução para os problemas dos três corpos de Poincaré. Ademais, outro fato que merece destaque é que em 1971, David Ruelle e Floris Takens descobriram uma aplicação física dos atratores estranhos. Esta estava relacionada ao problema do fluxo turbulento de um fluido [25].

Ruelle e Takens propuseram que a turbulência é um exemplo de atrator estranho. Tal afirmação provocou uma corrida experimental para descobrir a existência de comportamentos caóticos experimentais [4].

Em 1975, Mitchel Feigenbaum começou a estudar sobre a duplicação de período no mapa logístico. Primeiro, ele desenvolveu uma “teoria da função geradora” para prever a_n , isto é, o valor de a onde um ciclo de período 2^n apareceria pela primeira vez. Para verificar sua teoria, ele fez um programa que computava diferentes valores para a_n [26].

Enquanto a calculadora trabalhava, Feigenbaum conseguiu prever onde a próxima bifurcação ocorreria. Ele percebeu que a_n convergia geometricamente, com a distância entre transições sucessivas diminuindo a um fator constante, que será estudado mais adiante [26].

O último fato que vale chamar a atenção, é que - também - em 1975 James Yorke e Tien-Yien Li fizeram uma simplificação do Teorema de Sharkovskii e introduziram o termo “caos” na comunidade acadêmica [25].

Com isso, pode-se definir o que é o Caos:

Definição 27. *O Caos é identificado como um comportamento aperiódico e com sensível dependência das condições iniciais.*

Tem-se que o caos é determinístico, isto é, o sistema tem leis determinísticas que parecem ser aleatórias, mas não são [16]. Isso significa que apesar de poderem ser feitas previsões, estas não são confiáveis a logo prazo. Tal definição não está atrelada à nenhuma seção em particular, por ser um conceito essencial à todos os outros apresentados daqui em diante.

Outra maneira de analisar o caos, é que este é definido por um Expoente de Lyapunov maior do que zero, conceito que será apresentado abaixo. Contudo, destaca-se que nem todos os resultados da seguinte seção serão demonstrados, já que fogem do escopo do trabalho.

4.1.1 Expoente de Lyapunov

Para introduzir esse conceito, segue o exemplo: se x_1 é um ponto fixo de um mapa unidimensional f e $f'(x_1) = b > 1$, então a órbita de cada ponto x próximo a x_1 , vai se separar de x_1 a uma taxa multiplicativa de aproximadamente b por iteração. Ou seja, a distância entre $f^n(x)$ e $f^n(x_1) = x_1$ vai ser ampliada para aproximadamente $b > 1$, para cada iteração [1]. Em outras palavras, a cada iteração de f a distância de x , $f(x)$, $f^2(x)$, ..., $f^n(x)$ vai aumentar $b > 1$ de x_1 .

Para um ponto periódico de período k , tem-se que analisar a derivada da k -ésima iteração do mapa que, pela Regra da Cadeia, é o produto das derivadas nos k pontos da órbita. Suponha que esse produto de derivadas é $B > 1$. Então a órbita de cada ponto x perto de um ponto periódico x_1 , se afasta de x_1 a uma taxa B , aproximadamente [1].

Essa é uma quantidade cumulativa de separações. Sendo que é preciso k iterações para separar a uma distância B . Assim, pode-se definir que a média da taxa multiplicativa de separação é $B^{1/k}$ [1]. Isto é, a cada iteração a órbita de x se afasta de x_1 a uma taxa $B^{1/k}$.

Logo, depois de k iterações a órbita de x está a uma distância B de x_1 .

Tais noções são importantes, pois o Número de Lyapunov é introduzido para quantificar essa média da taxa multiplicativa de separação dos pontos x próximos à x_1 . E o Expoente de Lyapunov nada mais é que o logaritmo natural do Número de Lyapunov, ou seja, ele é o logaritmo natural da média por iterações ao longo da órbita [1].

Se o Número de Lyapunov for 2 para a órbita de x_1 - isto é, o Expoente de Lyapunov é $\ln 2$ - então a distância entre as órbitas de x_1 e x , com x sendo um ponto próximo de x_1 , dobra a cada iteração, na média [1]. Isso ocorre por causa do limite que é tomado depois de k iterações.

Para um ponto periódico x_1 de período k , isso significa que

$$|(f^k)'(x_1)| = 2^k,$$

ou seja, a distância dobra a cada iteração.

Agora, busca-se considerar esse conceito quando x_1 não é um ponto fixo ou um ponto periódico. Por exemplo, se o Número de Lyapunov for $\frac{1}{2}$, isso significa que a distância está diminuindo pela metade a cada iteração, de modo que as órbitas de x e x_1 estão se aproximando [1].

A importância do conceito do Número de Lyapunov é que este pode ser aplicado para órbitas não periódicas. Assim, definir-se-á este conceito propriamente:

Definição 28. *Seja f um mapa suave na reta real \mathbb{R} . O Número de Lyapunov $L(x_1)$ da órbita x_1, x_2, \dots é definido como*

$$L(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (|f'(x_1)| \dots |f'(x_n)|)^{1/n},$$

se esse limite existir.

Com isso, pode-se definir o Expoente de Lyapunov relacionado.

Definição 29. *O Expoente de Lyapunov $h(x_1)$ é definido como*

$$h(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) [\ln |f'(x_1)| + \dots + \ln |f'(x_n)|],$$

caso esse limite exista.

Vale destacar que h existe se, e somente se, L existe e $\ln(L) = h$. Ademais, o Expoente de Lyapunov não está definido apenas para órbitas, mas sim, determina o comportamento e a trajetória da órbita. De modo a estar relacionado com a estabilidade.

Todavia, os Números e Expoentes de Lyapunov podem não estar definidos para algumas órbitas. Em particular, para uma órbita com um ponto x_i tal que $f'(x_i) = 0$, pois isso faria com que o Expoente de Lyapunov ficasse indefinido [1].

Segue da definição que o Número de Lyapunov de um ponto fixo x_1 - para um mapa unidimensional - é $|f'(x_1)|$ e o Expoente de Lyapunov é $h = \ln |f'(x_1)|$ [1]. Isso ocorre pois o limite de muitas iterações "retorna" para função.

Se x_1 é um ponto periódico de período k , o Expoente de Lyapunov desse valor vai ser

$$h(x_1) = \frac{\ln |f'(x_1)| + \dots + \ln |f'(x_k)|}{k}.$$

Para uma órbita periódica o Número de Lyapunov $e^{h(x_1)}$ descreve a média local de prolongamento, numa base - por iteração - perto de um ponto da órbita [1]. Em outras palavras, o Expoente de Lyapunov é difícil de calcular já que não é possível simplificar mais e expressão e por ter derivadas da função no limite $n \rightarrow \infty$.

Agora, serão apresentadas algumas definições e considerações acerca das órbitas.

Definição 30. *Seja p um ponto. Se $f^k(p) = p$ e k é menor inteiro positivo possível, então p é um Ponto Periódico. A órbita que tem ponto inicial p (e k pontos) é uma Órbita Periódica de período k .*

Por exemplo, uma órbita convergindo com período 2 $\{p_1, p_2\}$ converge primeiro para p_1 e depois p_2 , alternadamente.

Com isso, tem-se a seguinte definição:

Definição 31. *Seja f um mapa e assumamos que p é um ponto de período k . Assim, a órbita de período k é uma Órbita de Atração se p for um ponto fixo de atração no mapa de f^k . Tal órbita vai ser uma Órbita de Repulsão se p for de repulsão no mapa de f^k .*

Com relação à estabilidade das órbitas periódicas, tem-se que a chave está no fato de que um ponto periódico de f é um ponto fixo de f^k . Assim, pode-se usar o Teorema 2 da seção 3.1 para estudar a estabilidade da órbita periódica, aplicando o teorema no mapa de f^k ao invés de f [1].

Analogamente, também existe o Teste para Órbitas Periódicas:

A órbita periódica $\{p_1, \dots, p_k\}$ é de atração se

$$|f'(p_k) \dots f'(p_1)| < 1,$$

e de repulsão se

$$|f'(p_k) \dots f'(p_1)| > 1.$$

Definição 32. *Seja f um mapa suave. Uma órbita $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ é denominada Assintoticamente Periódica se ela converge para uma órbita periódica, conforme $n \rightarrow \infty$.*

Isso significa que existe $\{y_1, y_2, \dots, y_k, y_1, y_2, \dots\}$, uma órbita periódica, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0.$$

Ou seja, a distância entre as órbitas tende para zero conforme n tende ao infinito.

Também tem-se que qualquer órbita que é atraída para um ponto fixo de atração é assintoticamente periódica. Além disso, para uma órbita exatamente periódica (isto é, quando a órbita chega precisamente a uma órbita periódica, de modo que elas coincidem) usa-se o termo Eventualmente Periódica [1].

Teorema 3. *Seja f um mapa na reta real \mathbb{R} . Se a órbita $\{x_1, x_2, \dots\}$ de f satisfaz $f'(x_i) \neq 0, \forall i$ e é assintoticamente periódica à órbita $\{y_1, y_2, \dots\}$, então ambas as órbitas têm expoente de Lyapunov, os quais são iguais - assumindo que ambos existam.*

A demonstração desse teorema não será desenvolvida neste trabalho, mas poderá ser encontrada em “*Chaos: an introduction to dynamical systems*” (Teorema 3.4 página 108) [1].

Definição 33. *Dado um mapa suave em \mathbb{R} , uma órbita $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ é Caótica se*

- $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ não for assintoticamente periódica;
- o expoente de Lyapunov for positivo, isto é, $h > 0$.

Não serão apresentados casos de órbitas caóticas neste trabalho, mas existe, por exemplo, o Mapa de Tenda, que envolve conceitos de variedade instável e variedade estável. Maiores detalhes podem ser encontrados em “*Chaos: an introduction to Dynamical Systems*” [1].

Uma outra característica das órbitas caóticas é a sensível dependência das condições iniciais. A eventual separação das órbitas que estão perto das condições iniciais ocorre quando o sistema avança no tempo. Também poderia definir órbita caótica tal que esta não tende a periodicidade e que o Número de Lyapunov é maior do que um [1].

Além disso, vale ressaltar que a órbita $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ não é limitada. Uma órbita limitada que não é assintoticamente periódica e que não mostra sensível dependência das condições iniciais, é dita uma órbita Quase-Periódica [1].

Teorema 4. *O mapa logístico tem infinitas órbitas caóticas.*

Não será desenvolvida nesse trabalho a demonstração deste teorema, mas ela pode ser encontrada em “*Chaos: an introduction to dynamical systems*” (Teorema 3.13 página 121) [1].

Como dito anteriormente, órbitas caóticas apresentam sensibilidade às condições iniciais. Logo, pelo teorema acima, conclui-se que o mapa logístico também apresenta esse comportamento.

Teorema 5 (Teorema do Ponto Fixo). *Seja f um mapa contínuo em \mathbb{R} e seja $I = [a, b]$ um intervalo tal que $I \subseteq f(I)$. Então f tem um ponto fixo em I .*

Demonstração. Como $f(I)$ contém valores maiores do que b e menores do que a , então existe:

- um ponto em I tal que $f(x) - x \geq 0$;
- um ponto em I tal que $f(x) - x \leq 0$.

Pelo Teorema do Valor Médio, $\exists c \in I$ de modo que

$$f(c) - c = 0.$$

□

Definição 34. *Seja f um mapa em \mathbb{R}^n e seja p um ponto fixo de atração ou um ponto fixo periódico de f . A Bacia de Atração de p , é o conjunto de pontos x tal que $|f^k(x) - f^k(p)| \rightarrow 0$ conforme $k \rightarrow \infty$.*

A seguir, é apresentado um teorema útil para encontrar bases de pontos fixos de atração em alguns mapas simples de \mathbb{R} .

Teorema 6. *Seja f um mapa contínuo em \mathbb{R} :*

1. *Se $f(b) = b$ e $x < f(x) < b \forall x \in [a, b)$, então $f^k(a) \rightarrow b$.*
2. *Se $f(b) = b$ e $b < f(x) < x \forall x \in (b, c]$, então $f^k(c) \rightarrow b$.*

Demonstração. 1) Seja $x_0 = a$ e $x_{i+1} = f(x_i)$, para $i \geq 0$. Se $x \in [a, b)$, então $f(x) \in [a, b)$. De fato, $a \leq x < f(x) < b$. Logo, todos os $x_i \in [a, b)$. Além disso, a sequência x_i é estritamente crescente e limitada superiormente por b .

Como seqüências monótonas e limitadas são convergentes, tem-se que $x_i \rightarrow x^*$, para algum $x^* \in [a, b]$. Tomando o limite obtém-se:

$$x^* = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{i+1} = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = f(x^*),$$

pela continuidade de f .

Como b é o único ponto fixo de $[a, b]$, conclui-se que $x^* = b$.

2) Seja $x_0 = c$ e $x_{i+1} = f(x_i)$, com $i \geq 0$. Se $x \in (b, c]$, então $f(x) \in (b, c]$. A valer, $b < f(x) < x \leq c$. Assim, tem-se que todos os $x_i \in (b, c]$. Ademais, a sequência x_i é estritamente decrescente e limitada inferiormente por b .

Sabe-se que seqüências monótonas e limitadas são convergentes, logo, $x_i \rightarrow x^*$, para algum $x^* \in [b, c]$. Calculando o limite, chega-se em

$$x^* = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{i+1} = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = f(x^*),$$

pela continuidade de f .

Desse modo, conclui-se que $x^* = b$, já que b é o único ponto fixo de $[b, c]$ □

Proposição 1. *O mapa logístico $f(x) = ax(1 - x)$, onde $0 \leq a \leq 4$, tem no máximo um ponto periódico de atração.*

Apesar de estar expresso como uma proposição, este resultado está enunciado (e demonstrado) como um corolário na obra “*Chaos: an introduction to dynamical systems*” (Corolário 3.30, referente ao Teorema 3.29, página 134) [1]. A demonstração não será feita, por fugir do escopo do trabalho.

4.2 ATRADORES

Nesta seção será visto outro conceito bem importante para a Teoria do Caos, que é o de Atratores.

Definição 35. *Um Atrator é um conjunto compacto com uma vizinhança tal que, para quase todas as condições iniciais nessa vizinhança o conjunto limite da órbita é o atrator, conforme $t \rightarrow \infty$.*

Definição 36. *Uma Bacia de Atração de um Atrator é o fecho do conjunto de condições iniciais que se aproxima do atrator, conforme $t \rightarrow \infty$.*

Agora, serão vistos alguns dos diferentes tipos de atratores que existem:

Definição 37. *Um Atrator Estranho é um atrator que não é um conjunto finito de pontos e também não é diferenciável por partes. Diz-se que o atrator é diferenciável por partes se ele for uma curva ou uma superfície diferenciável por partes, ou se ele for um volume limitado por uma superfície fechada diferenciável por partes.*

Definição 38. *Um Atrator Caótico é aquele que as órbitas típicas no atrator tem expoente de Lyapunov positivo.*

Na definição acima, usa-se o conceito de órbitas “típicas” no atrator. Isto é, assume-se que para quase qualquer condição inicial na

bacia de atração, os maiores expoentes de Lyapunov - gerados por estas (típicas) condições iniciais - existem e são idênticos [11].

A dinâmica de uma órbita típica num atrator é caótica no sentido de que órbitas próximas umas das outras, divergem exponencialmente conforme o tempo passa. Analogamente, pode-se dizer que há uma “sensível dependência das condições iniciais”. Quando isso ocorre, diz-se que o atrator é caótico [11].

De modo geral, tem-se que caótico diz respeito à dinâmica do atrator. Já estranho refere-se à estrutura geométrica do atrator. Há diversos exemplos de atratores que são caóticos e estranhos. Tais como o Mapa de Henón, que tem a estrutura do Conjunto de Cantor e exhibe que trajetórias vizinhas divergem exponencialmente [11].

Porém, também existem casos de atratores caóticos que não são estranhos. Como exemplo, pode-se citar o mapa logístico, o qual tem atratores caóticos para certos valores de a num conjunto de medida positiva. E esses atratores são compostos por um número finito de intervalos disjuntos em $0 \leq x \leq 1$. Da mesma forma, existem atratores estranhos que não são caóticos [11].

4.2.1 Atrator de Lorenz

Continuando a definir os tipos de atratores presentes na Teoria do Caos, falar-se-á agora, sobre um tipo mais específico de atrator: o Atrator de Lorenz.

Em 1963, o meteorologista Edward Norton Lorenz observava pela primeira vez o caos em sistemas determinísticos não-lineares. Lorenz verificou que ao mudar minimamente a condição inicial de seu modelo para previsão do tempo, isso causaria uma mudança considerável no comportamento de sua solução [16].

Assim, ele propôs um sistema de comportamento caótico com atratores estranhos, que ficou conhecido como o Atrator de Lorenz.

O Sistema de Lorenz, ou as Equações de Lorenz - como também são denominados - é dado abaixo:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= \rho x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

em que os parâmetros σ, ρ, β são constantes positivas que podem ser alteradas. Os termos x, y e z correspondem à variáveis envolvidas no sistema físico: x é a representação do movimento convectivo, y a diferença de temperatura e z a distorção da temperatura no modelo de sistemas climáticos de Lorenz.

Outro termo definido a partir dessa descoberta é o Efeito Borboleta, o qual é uma típica representação de um sistema com sensível dependência das condições iniciais. Geralmente descrito pela frase dita por Lorenz, em 1972 “O bater de asas de uma borboleta no Brasil causaria um tornado no Texas” [17].

A imagem característica do Sistema de Lorenz e do Efeito Borboleta, aparenta que as trajetórias se cruzam. Porém, isso apenas ocorre porque está sendo feita a análise de uma figura tridimensional num plano bidimensional. No plano de três dimensões é possível ver que não ocorrem intersecções entre as trajetórias [16]. A Figura 11 é a representação desse fato.

Dessa forma, percebe-se que prever o futuro a longo prazo pode ser quase impossível. Isso causou grande impacto na comunidade científica, pois até então o determinismo era a garantia de previsão matemática para sistemas de condições iniciais [16].

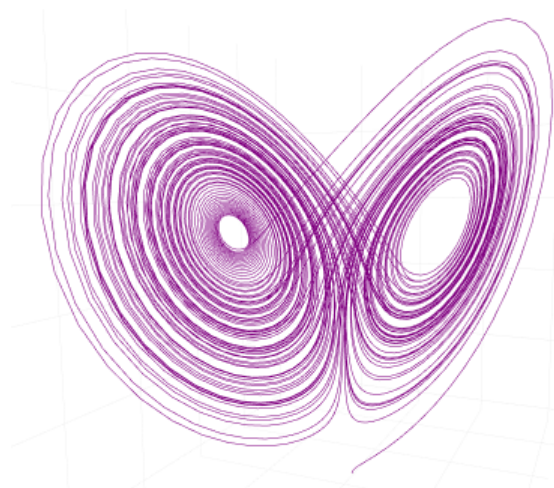


Figura 11 – Efeito Borboleta.
Fonte: Elaborada pela autora.

Isso resultou no fato de que equações determinísticas não-lineares podem fazer previsões para pequenos intervalos de tempo, mas não há garantias de que o mesmo ocorra para longos períodos de tempo. Essa noção é o que define o Caos Determinístico [16].

4.3 DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO

Nesse momento voltar-se-á a falar sobre o Mapa Logístico, relacionado com o assunto principal dessa seção que é o Diagrama de Bifurcação. Por isso, serão feitas algumas considerações sobre esse tópico, primeiramente.

As Bifurcações representam a repartição do gráfico de uma função, e elas ocorrem quando os pontos fixos são criados, destruídos, ou tem sua estabilidade alterada. Os valores do parâmetro nos quais as bifurcações ocorrem são chamados de Pontos de Bifurcação. Em

outras palavras, as bifurcações representam modelos com transições e instabilidades, quando algum parâmetro de transição é oscilado [16].

Existem alguns tipos de bifurcações, os quais estão nomeados na sequência:

- Sela-nó: nesse caso os pontos fixos são criados ou destruídos. Conforme o parâmetro é variado os pontos fixos vão se movendo em direção e em sentidos contrários, colidindo e se aniquilando mutuamente.
- Transcrítica: encontradas em sistemas que possuem um ponto fixo para todos os valores do parâmetro e nunca podem ser destruídos. Essa bifurcação se dá através da mudança de estabilidade do ponto fixo na origem do sistema.
- Forquilha: relacionada a problemas físicos com simetria. Nela, os pontos fixos aparecem e desaparecem em pares simétricos.

O tipo de bifurcação encontrada no mapa logístico é a bifurcação transcrítica [16].

Agora, tem-se que a função logística é

$$f(x) = ax(1 - x).$$

De modo que sua derivada é

$$f'(x) = a(1 - 2x).$$

Para que o ponto fixo seja de atração $|f'(p)| < 1$ - de acordo com o Teorema 2. Dessa forma, no caso do ponto fixo $p = 0$ tem-se que $f'(p) = a(1 - 2 \cdot (0)) = a$ e, portanto, $|f'(p)| < 1$. Isso implica que $a < 1$. Logo, as órbitas próximas a esse ponto fixo serão atraídas para $p = 0$. Em outras palavras, isso significa que para $a < 1$ a população tende a decrescer pois são atraídas para $p = 0$ [1].

Contudo, da mesma maneira, se $a > 1$ as órbitas serão repelidas. Para $1 < a < 3$ tem-se dois pontos fixos no mapa logístico. Claramente, para $p = 0$, $f'(0) = a > 1$. Já ao atribuir $p = 1 - \frac{1}{a}$ na derivada de f obtém-se

$$f'(x) = a(1 - 2x)$$

$$f'\left(1 - \frac{1}{a}\right) = a\left(1 - 2\left(\frac{a-1}{a}\right)\right) = a\left(1 - 2 + \frac{2}{a}\right) = a\left(-1 + \frac{2}{a}\right).$$

Portanto,

$$f'\left(1 - \frac{1}{a}\right) = -a + 2.$$

Desse modo, se $1 < a < 3$ o mapa logístico tem um ponto fixo de atração em $p = \frac{a-1}{a}$ e a solução diverge para $p = 0$, fazendo com que a população cresça e se estabilize. Isso pode ser verificado na Figura 9. Já para $a > 3$, o ponto fixo $p = \frac{a-1}{a}$ é instável, pois $|f'(x)| > 1$, de modo que o tamanho da população fique oscilando [1].

Logo, quando $a = 3$, tem-se que a população volta a aumentar, mas logo em seguida diminui. Assim, há uma oscilação sobre o estado antigo, de modo que o tamanho da população cresce em uma geração e decresce na seguinte. Esse tipo de oscilação, em que x_n se repete a cada duas iterações é chamada de Ciclo de Dois Períodos [26]. Tal fenômeno pode ser observado na Figura 12, em que o tempo está indicado pelo eixo x e a evolução de x_n pelo eixo y . Além disso, o tamanho da população no tempo zero é 0,03. Tais considerações também são válidas para a Figura 13.

Tomando um valor de a um pouco maior, supondo $a = 3,5$, tem-se que a população se aproxima de um ciclo que se repete a cada quatro gerações. Logo, percebe-se que o ciclo anterior dobrou seu período para um Ciclo de Quatro Períodos [26]. Assim como pode ser visto na Figura 13.

Conforme a aumenta, vão ocorrendo Duplicações de Período mais distantes para ciclos de período 8, 16, 32, Dessa forma, pode-se

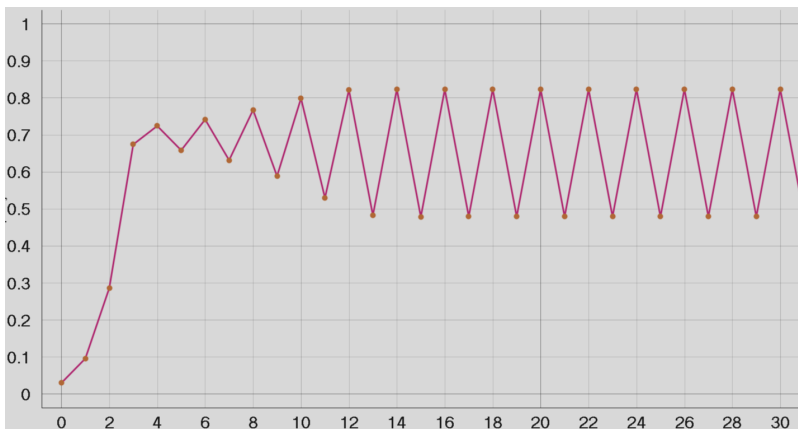


Figura 12 – Variação da População quando $a = 3,3$.
 Fonte: Elaborada pela autora.

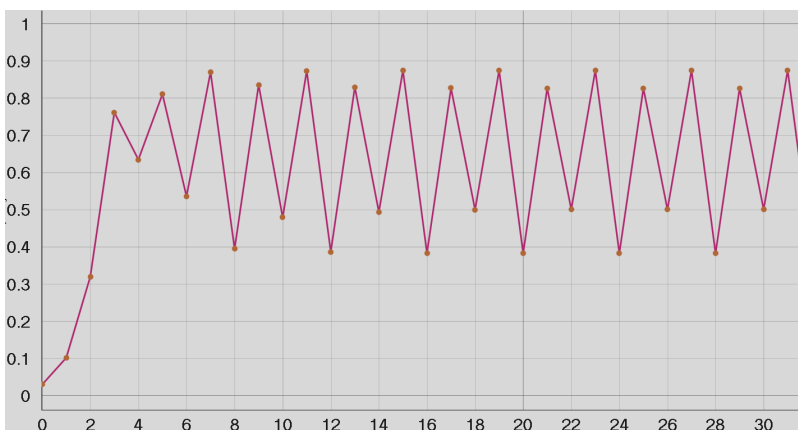


Figura 13 – Variação da População quando $a = 3,5$.
 Fonte: Elaborada pela autora.

considerar a_n o valor de a onde um ciclo de período 2^n aparece pela primeira vez [26].

Logo,

$a_1 = 3$	período 2 inicia
$a_2 = 3,449\dots$	4
$a_3 = 3,54409\dots$	8
$a_4 = 3,5644\dots$	16
$a_5 = 3,568759\dots$	32
\vdots	\vdots
$a_\infty = 3,569946\dots$	∞ .

Note que essas bifurcações sucessivas ocorrem para intervalos de tempo cada vez menores, de maneira que a_n converge para o valor limite de a_∞ . Vê-se que tal convergência é - sobretudo - geométrica. Pois, no limite para valores de n grandes, a distância entre transições sucessivas diminui a uma taxa constante:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = 4,669\dots,$$

também conhecida como constante de Feigenbaum.

Assim, conforme a vai crescendo várias órbitas periódicas comecem a existir. A Figura 14 - denominada Diagrama de Bifurcação do Mapa Logístico - mostra esse comportamento para os valores de a com $1 < a < 4$, representados no eixo x e no eixo y tem-se o equilíbrio populacional. Os pontos obtidos a partir dessas iterações da função do mapa logístico, vão se aproximar de pontos fixos de atração, de pontos periódicos (de atração) ou de outros conjuntos atratores [1].

Aqui vale ressaltar que um Conjunto Atrator é um conjunto de valores para os quais o sistema se direciona com o tempo. Se a função for contínua ela convergirá diretamente, se for discreta esse processo será por iterações. Assim, um conjunto atrator pode ser um ponto fixo, uma coleção de pontos, uma órbita, entre outros [6]

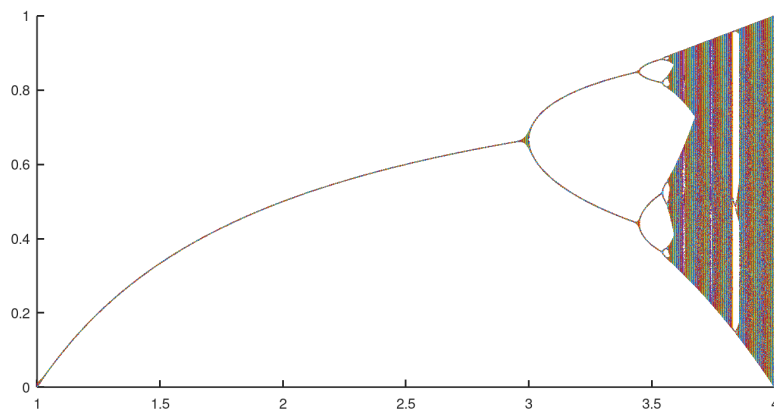


Figura 14 – Diagrama de Bifurcação.
Fonte: Elaborada pela autora.

Em $a = 3$ é possível observar que os dois ramos (bifurcações), indicam que o atrator é um ciclo de período dois. À medida que a aumenta, os dois ramos se separam - bifurcam - revelando um ciclo de período quatro. Essas bifurcações são as Duplicações de Período, mencionadas anteriormente [26].

Tal fato é denominado Cascata de Período Duplo, na qual observa-se sequências inteiras de pontos fixos de atração periódicos para cada período 2^n , $n = 1, 2, 3, \dots$ [1].

Essas cascatas ocorrem até $a = a_\infty \approx 3,57$, quando o atrator muda de um conjunto finito de pontos para um conjunto infinito, fazendo com que o mapa se torne caótico [26]. Isso pode ser observado tanto na Figura 14, quanto na Figura 15, a qual mostra que as muitas iterações do mapa logístico quando $a = 3,99$, revelam um comportamento caótico.

Esse evento mostra porções do Diagrama de Bifurcação em detalhes. Além disso, esses conjuntos atratores também são chamados

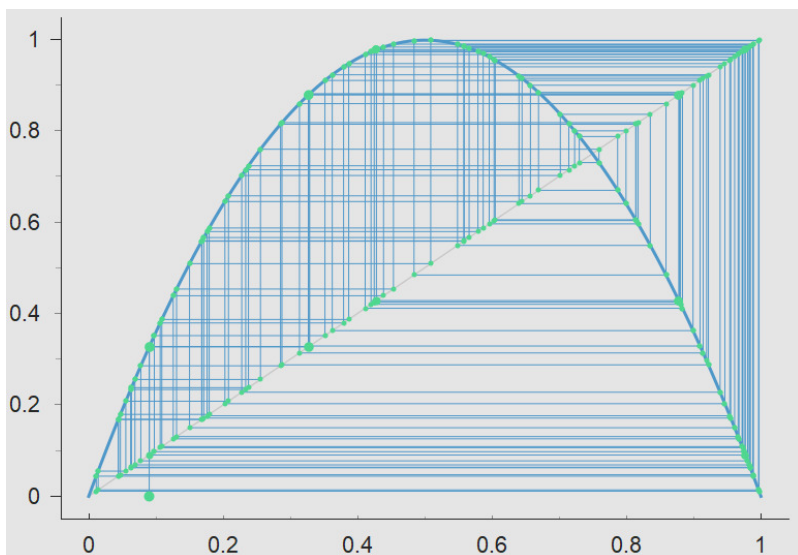


Figura 15 – Gráfico de Cobweb (Mapa Logístico com $a = 3,99$).
Fonte: Elaborada pela autora.

de Atratores Caóticos, os quais podem aparecer, desaparecer ou mudar de tamanho descontinuamente. Esse fenômeno é denominado Crise e ocorre para diferentes valores de a . Por exemplo, quando $a = 4$, há uma crise que faz os atratores caóticos desaparecerem. Contudo, para $a > 4$, não existem mais conjuntos atratores [1].

Entretanto, para $a > a_\infty$ a sucessão de explosões de bifurcações (no Diagrama de Bifurcação) revelam as Janelas Periódicas, as quais estão intercaladas entre aglomerados de pontos aleatórios e imprevisíveis, as Nuvens Caóticas. Essas referem-se a um conjunto de valores parâmetro onde há um ponto fixo periódico de atração [1].

Sobre essa parte vale ressaltar que Atratores Periódicos são pontos “visitados” pelas órbitas repetidas vezes. Desse modo, as Janelas Periódicas são atratores periódicos que não ocorrem simultaneamente.

4.3.1 Conjunto de Mandelbrot

Nesta sessão será apresentada - a título de curiosidade - a relação existente entre o Diagrama de Bifurcação e o fractal conhecido como Conjunto de Mandelbrot. Todavia, para poder explicar melhor o que é este conjunto é preciso, primeiro, ver o que é um fractal.

Tem-se que fractais são objetos que têm sua estrutura mantida, conforme sua escala é alterada, devido à recursividade de um mesmo processo [15]. Tal noção é bem geral, pois não existe uma definição formal para esse termo. No entanto, pode-se conceituar as principais propriedades comuns a todos os fractais e que os caracterizam.

A primeira delas é a auto-semelhança. Tem-se que esta aparece em qualquer escala, de modo que uma porção do fractal vai se assemelhar com uma outra porção maior ou com o fractal completo [21]. Ou seja, uma parte do fractal pode ser vista como uma cópia do todo, só que numa escala menor. A outra propriedade, a complexidade infinita, refere-se ao fato de que o procedimento que gera um fractal é recursivo [3].

Descoberto em 1980 por Benoit Mandelbrot, o conjunto que leva seu nome é um fractal considerado como um dos objetos mais magníficos e complexos da matemática, assim como pode ser visto na Figura 16 [21].

Este fractal é simétrico em relação ao eixo real, mas não ao eixo complexo. Sua parte maior é formada por um carióide, na qual está agregada partes menores, denominadas discóides. O tamanho e forma destes varia, com excessão do maior, o qual é um disco circular [21].

Em cada discóide estão acoplados discóides menores, dos quais partem prolongamentos delgados, denominados dendrites. As dendrites vão se ramificando, formando cópias bem pequenas do Conjunto de Mandelbrot. Nesse momento é possível ver a auto-semelhança acon-

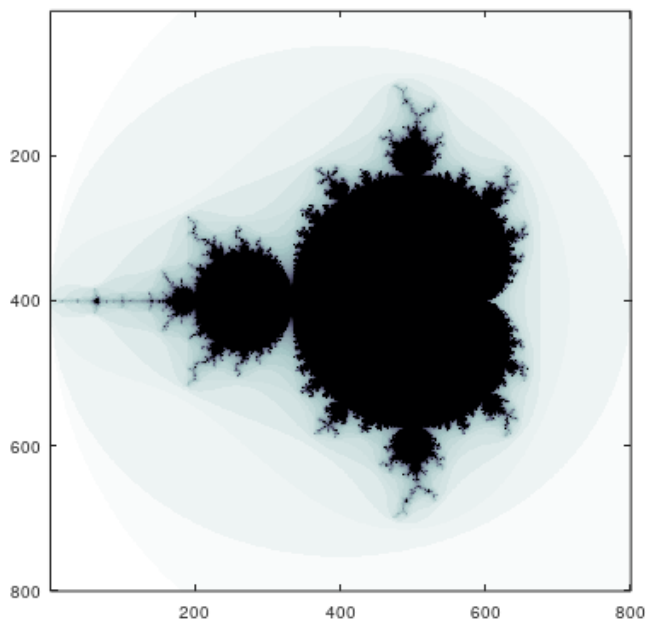


Figura 16 – Conjunto de Mandelbrot.
Fonte: Elaborada pela autora.

tecendo [21].

O Conjunto de Mandelbrot é definido pela equação iterativa

$$z_{n+1} = z_n + c.$$

Se o parâmetro c é um ponto exterior ao Conjunto de Mandelbrot, sua órbita vai para o infinito. Porém, se c fizer parte do conjunto, a órbita converge para algum outro valor dentro do conjunto. Ou seja, se o número z_{n+1} é finito depois de ilimitadas iterações, então c faz parte do conjunto. Caso contrário, se z_{n+1} tender ao infinito, c não faz parte do conjunto.

Agora, rotacionando os eixos pode-se observar o fractal por outro ângulo, no qual é possível ver que o Diagrama de Bifurcação faz parte do Conjunto de Mandelbrot - assim como mostram as Figuras 17 e 18 - sendo que esta era a relação que desejava-se explicitar.



Figura 17 – Conjunto de Mandelbrot e Diagrama de Bifurcação.
Fonte: Elaborada pela autora.

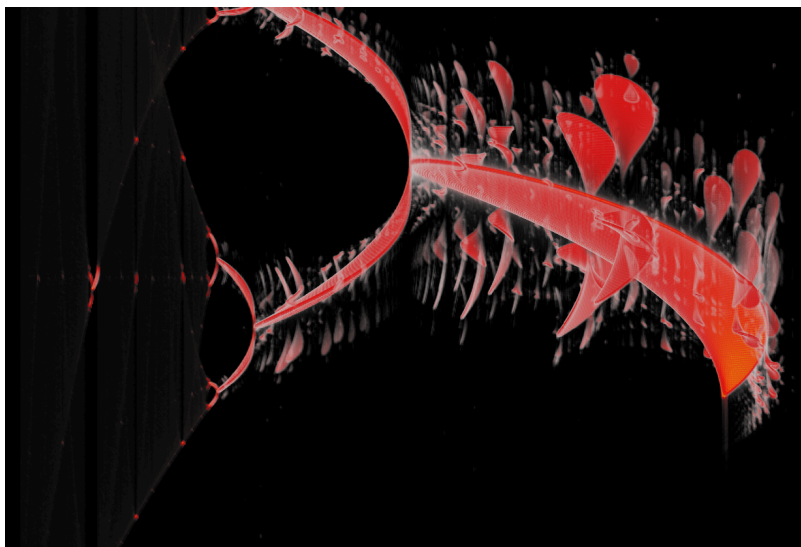


Figura 18 – Conjunto de Mandelbrot rotacionado.
Fonte: Elaborada pela autora.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram apresentados os principais elementos sobre a Teoria do caos, popularizada por Lorenz através de seu estudo meteorológico. Bem como um contexto histórico e os conceitos necessários para a compreensão desse assunto, tais como: sistemas dinâmicos, modelos populacionais, expoentes de Lyapunov, diagrama de bifurcação, entre outros.

O estudo sobre esse conteúdo é de extrema relevância, já que contribui nas áreas de biologia, física, astronomia, economia, entre outras. Afinal, todas estas apresentam fenômenos que podem ser descritos por leis determinísticas e outros com comportamento aleatório. Como exemplo disso, foram feitas diversas análises sobre o mapa logístico, o qual se aproxima mais da realidade por conter um parâmetro que prevê um limite no crescimento populacional.

Tais assuntos não são abordados nas disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, o que gerou uma curiosidade ainda maior sobre o tema. As principais dificuldades do trabalho foram: o tempo, que não permitiu que nenhum dos temas fosse aprofundado e a ordem dos materiais analisados, as quais diferiam muito umas das outras, sendo assim de difícil escolha a ordem em que os conteúdos apareceriam no texto.

Logo, tem-se que o objetivo deste trabalho, o qual era apresentar os aspectos gerais da Teoria do Caos, foi cumprido. Sendo que tal propósito foi desenvolvido a partir do mapa logístico, com o auxílio de *softwares* como MATLAB, Julia e Python para programar os gráficos nos quais foram feitas as análises.

6 APÊNDICE

6.1 CÁLCULO COMPLETO DA CONTA DO MODELO DE VERHULST

Nesta seção, serão feitas detalhadamente as contas sobre o Modelo de Verhulst, presentes no texto.

Dada a EDO:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left[\frac{L - N(t)}{L} \right],$$

tem-se que esta pode ser reescrita como

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N(t)}{L} \right) N(t).$$

Para resolver esta equação diferencial ordinária não-linear será utilizado o Método das Variáveis Separáveis.

Para facilitar a notação, a equação será reformulada da seguinte forma:

$$\frac{dN}{\left(1 - \frac{N(t)}{L} \right) N(t)} = r dt. \quad (10)$$

Arrumando o denominador de (8) por frações parciais obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{L} \right)} &= \frac{A}{N(t)} + \frac{B}{\left(1 - \frac{N(t)}{L} \right)} \\ \frac{1}{N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{L} \right)} &= \frac{A \left(1 - \frac{N(t)}{L} \right) + BN(t)}{N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{L} \right)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$A \left(1 - \frac{N(t)}{L} \right) + BN(t) = 1.$$

Assim, como $N(t)$ está entre um valor próximo de zero e o valor suporte, há duas opções:

1. se $N(t) \cong 0$ então $A = 1$.
2. se $N(t) = L$ então $BL = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{L}$.

Substituindo $N(t)$ por N para deixar a notação mais limpa, chega-se em

$$\left[\frac{1}{N} + \left(\frac{\frac{1}{L}}{1 - \frac{N}{L}} \right) \right] dN = r dt.$$

Integrando em ambos os lados da igualdade obtém-se

$$\int \frac{dN}{N} + \int \frac{\frac{1}{L}}{1 - \frac{N}{L}} dN = \int r dt.$$

Como $\frac{1}{L}$ é uma constante, pode-se retirar este termo da integral:

$$\int \frac{dN}{N} + \frac{1}{L} \int \frac{dN}{1 - \frac{N}{L}} = \int r dt.$$

Logo,

$$\ln|N| + \frac{1}{L} \int \frac{dN}{1 - \frac{N}{L}} = rt + c, \quad (11)$$

em que c é uma constante.

Utilizando o Método da Substituição com $u = 1 - \frac{N}{L}$, resolve-se a integral remanescente em (11). Com isso, chega-se em

$$\ln|N| - \ln \left| 1 - \frac{N}{L} \right| = rt + c.$$

Pelas propriedades dos logaritmos, obtém-se

$$\ln \left| \frac{N}{1 - \frac{N}{L}} \right| = rt + c.$$

Empregando a exponencial em ambos os lados da igualdade, chega-se em

$$\left| \frac{N}{1 - \frac{N}{L}} \right| = e^{(rt+c)} = e^{rt} \cdot e^c, \quad (12)$$

pelas propriedades da exponencial.

No instante $t = 0$ tem-se que $N(0) = N_0$. Substituindo N_0 por N para fazer a análise nesse instante, chega-se

$$\frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{L}} = e^{r \cdot 0} \cdot e^c.$$

Agora, nos dois lados da equação aplica-se o logaritmo natural:

$$\ln \left| \frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{L}} \right| = c.$$

Fazendo a respectiva substituição em (12):

$$\begin{aligned} \frac{N}{1 - \frac{N}{L}} &= e^{rt} \cdot e^{\ln \left| \frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{L}} \right|} \\ \frac{N}{1 - \frac{N}{L}} &= e^{rt} \cdot \left| \frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{L}} \right| \\ \frac{N}{1 - \frac{N}{L}} &= \frac{N_0 \cdot e^{rt}}{1 - \frac{N_0}{L}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Para facilitar os cálculos, usar-se-á

$$M = \frac{N_0 \cdot e^{rt}}{1 - \frac{N_0}{L}}.$$

Depois que todas as operações forem realizadas, o valor de M voltará a ser substituído na equação principal.

Voltando em (13):

$$\frac{N}{1 - \frac{N}{L}} = M.$$

Multiplicando em ambos os lados da expressão por $(1 - \frac{N}{L})$ tem-se que

$$N = M \left(1 - \frac{N}{L} \right).$$

Fazendo a distributiva,

$$N = M - \frac{M}{L}N,$$

e somando $N(\frac{M}{L})$ nas duas partes da igualdade, obtém-se

$$M = N \left(1 + \frac{M}{L} \right).$$

Isolando N

$$N = \frac{M}{1 + \frac{M}{L}},$$

e recolocando o valor de M na equação tem-se que

$$N = \frac{\frac{N_0 e^{rt}}{1 - \frac{N_0}{L}}}{1 + \frac{\frac{N_0 e^{rt}}{1 - \frac{N_0}{L}}}{L}} = \frac{\frac{N_0 e^{rt}}{1 - \frac{N_0}{L}}}{L + \frac{N_0 e^{rt}}{1 - \frac{N_0}{L}}} = \frac{\frac{LN_0 e^{rt}}{1 - \frac{N_0}{L}}}{L(1 - \frac{N_0}{L}) + N_0 e^{rt}}.$$

Continuando com as simplificações:

$$N = \frac{LN_0 e^{rt}}{L(1 - \frac{N_0}{L}) + N_0 e^{rt}} = \frac{N_0 e^{rt}}{(1 - \frac{N_0}{L}) + \frac{N_0 e^{rt}}{L}} = \frac{N_0 e^{rt}}{1 + \frac{N_0}{L}(e^{rt} - 1)}.$$

Portanto,

$$N(t) = \frac{LN_0 e^{rt}}{L + N_0(e^{rt} - 1)}.$$

Analisando $N(t)$ quando $t \rightarrow \infty$ tem-se que

$$N_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t).$$

Logo,

$$N_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{LN_0 e^{rt}}{L + N_0(e^{rt} - 1)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{LN_0}{Le^{-rt} + N_0(1 - e^{-rt})}.$$

Dessa forma,

$$N_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = L.$$

REFERÊNCIAS

- [1] Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer e James A. Yorke. *Chaos: an introduction to dynamical systems*. Nova York: Springer, 1996.
- [2] Joselito Elias de Araujo. *Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações*. Brasil, 2011.
- [3] Thiago Albuquerque de Assis, José Garcia Vivas Miranda, Fernando de Brito Mota, Roberto Fernandes Silva Andrade e Caio Mário Castro de Castilho. “Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais”. Em: *Revista brasileira de ensino de física* 30.2 (2008), pp. 1–10.
- [4] Pierre Bergé, Yves Pomeau e Monique Dubois - Gance. *Dos ritmos ao caos*. São Paulo: Editora UNESP, 1996.
- [5] William Boyce e Richard DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- [6] Fernando Portela Câmara. *Glossário de Dinâmica Não-Linear*. Rio de Janeiro: ABP, 2007.
- [7] Geraldo Campos. *Modelos Pioneiros com Dinâmica Populacional: uma breve análise*. Brasil, 2019.
- [8] *Dynamical Systems on Monoids: Toward a General Thoery of Deterministc Systems and Motion*. Fifth National Conference

- of the Italian Systems Society, Marche Polytechnic University. Ancona, 2012.
- [9] Robson Fernandes de Farias. “A química do tempo: carbono 14”. Em: *Química nova na escola* 1.16 (2002), pp. 1–3.
- [10] Franki Terto Fires. *Estudo de Bifurcações para uma Família de Equações Diferenciais Ordinárias com mais que um Parâmetro: uma introdução à estabilidade e aos sistemas dinâmicos*. Brasil, 2018.
- [11] Celso Grebogi, Edward Ott, Steven Pelikan e James A. Yorke. “Strange Attractor that are not Chaotic”. Em: *Physica D* 13.2 (1984), pp. 261–268.
- [12] Eliane Alves de Igliori e Sonia Barbosa Camargo. “Ensino e Aprendizagem de Equações Diferenciais: um levantamento preliminar da produção científica”. Em: *Teia - Revista de Educação Matemática e Tecnologia Iberoamericana* 4.2 (2013), pp. 1–24.
- [13] IMPA. *Sistemas Dinâmicos e Teoria Ergódica*. IMPA. 2021. Disp. em: <https://impa.br/pesquisa/sistemas-dinamicos-e-teoria-ergodica/> (acesso em 07/02/2021).
- [14] Elon Lages Lima. *Análise Real volume 1 - funções de uma variável*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2014.
- [15] Benoit B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. Nova York: W. H. Freeman e company, 1982.

- [16] Alex Clésio Nunes Martins. *Uma Abordagem Sobre Caos e Sistemas Não-lineares para Graduação*. Brasil, 2016.
- [17] Adilson Motter. “Chaos at Fifty”. Em: *Physics Today* 5.66 (2013), pp. 27–50.
- [18] Rodrigo Porcionato. *Aplicação de Poincaré no estudo local de Sistemas Dinâmicos*. Brasil, 2010.
- [19] Isis dos Santos Costa, Simone Taiane Gameleira, Orlando Alves Gondim Sobrinho, Karla Honorina de Lima Gomes e Otávio Paulino Lavor. “Crescimento Logístico: o modelo de Verhulst com variação na emigração e imigração”. Em: *Congresso Nacional de Pesquisa e Ensino em Ciências* 2.1 (2017), pp. 1–2.
- [20] Eduardo dos Santos Ferreira. *Estudo sobre os fatores que explicam e influenciam a taxa de natalidade no Brasil*. Brasil, 2010.
- [21] Celso Penteado Serra e Elizabeth Wegner Karas. *Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos*. Curitiba: Champagnat, 1997.
- [22] Ulysses Sodré. *Crescimento Populacional*. Brasil, 2007. Disp. em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/crescpop.pdf>.
- [23] Ulysses Sodré. *Modelos Matemáticos*. Brasil, 2007. Disp. em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/modelos.pdf>.

-
- [24] Gabriela Rios Stahelin. *Um Estudo Envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias Lineares De 2a Ordem E Temas Relacionados*. Brasil, 2007.
- [25] Ian Stewart. *Em busca do infinito*. Rio de Janeiro: Zahar, 2008.
- [26] Steven H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering*. Nova York: Perseus Book, 1994.
- [27] USP. *Sítio Arqueológico Tag*. Monumento nacional ruínas engenho São Jorge dos Erasmos. 2018. Disp. em: <http://www.engenho.prceu.usp.br/tag/sitio-arqueologico/> (acesso em 08/02/2022).
- [28] Dennis G. Zill. *A first course in differential equations with modeling applications*. Boston: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2012.