

Matheus Palma Cruz

**ESTRATÉGIAS DE OFERTAS EM MERCADOS  
COMPETITIVOS DE ENERGIA ELÉTRICA COM  
PREDOMINÂNCIA DE GERAÇÃO HIDRELÉTRICA**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Elétrica.  
Orientador: Prof. Erlon Cristian Finardi, D. Eng.

Florianópolis  
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Cruz, Matheus Palma

ESTRATÉGIAS DE OFERTAS EM MERCADOS  
COMPETITIVOS DE ENERGIA ELÉTRICA COM  
PREDOMINÂNCIA DE GERAÇÃO HIDRELÉTRICA /  
Matheus Palma Cruz; orientador, Erlon Cristian Finardi, 2017.

131 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina,  
Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia  
Elétrica, Florianópolis, 2017.

Inclui referências.

1. Engenharia Elétrica. 2. Sistemas Hidrotérmicos. 3. Estratégias de Oferta. 4. Problema de Equilíbrio com Restrições de Equilíbrio. I. Finardi, Erlon Cristian. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

Matheus Palma Cruz

**ESTRATÉGIAS DE OFERTAS EM MERCADOS  
COMPETITIVOS DE ENERGIA ELÉTRICA COM  
PREDOMINÂNCIA DE GERAÇÃO HIDRELÉTRICA**

Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de “Doutor em Engenharia Elétrica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 27 de março de 2017.

---

Prof. Marcelo Lobo Heldwein, Dr.  
Coordenador do Curso

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Erlon Cristian Finardi, Dr.  
Orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Juan Pablo Cajahuanca Luna, Dr.  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

Eng. Marcelo Luís Loureiro dos Santos, Dr.  
Associação Brasileira dos Investidores em Autoprodução de Energia

---

Eng. Alexandre Nunes Zucarato, Dr.  
Engie Brasil Energia

---

Prof. Rubiapiara Cavalcante Fernandes, Dr.  
Instituto Federal de Santa Catarina

---

Eng. Vitor Luiz de Matos, Dr.  
Plan4 Engenharia Ltda



Este trabalho é dedicado aos meus pais, irmãos e minha esposa Paolla.



## AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para que a realização deste trabalho fosse possível. Para algumas delas, realço meus agradecimentos:

Ao Prof. Erlon Cristian Finardi, agradeço pela orientação ao longo desta difícil, porém compensadora jornada, e ao Prof. Edson Luiz da Silva pelo voto de confiança, incentivo e orientação nas etapas iniciais do trabalho. Agradeço a eles, não só pela orientação, mas também por sua importante contribuição para que o Laboratório de Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica – LABPLAN tenha atingido elevados níveis técnicos e reconhecimento internacional, bem como por contribuir para o excelente ambiente de trabalho do laboratório.

Ao Luiz Augusto Barroso e Alexandre Nunes Zucarato pelas conversas e sugestões, principalmente nas fases iniciais do trabalho, as quais foram fundamentais para o direcionamento desta tese. A este último, agradeço adicionalmente pela participação como membro da banca de defesa.

Aos demais integrantes da banca de qualificação e defesa: Bruno da Costa Flach, Prof. Rubiapiara Cavalcante Fernandes, Marcelo Luís Loureiro dos Santos, pelas valiosas contribuições, as quais permitiram enriquecer e aperfeiçoar o trabalho; em especial, agradeço ao colega Vitor Luiz de Matos e ao Prof. Juan Pablo Luna, por suas contribuições não apenas nas bancas de qualificação e defesa, como também pelas importantes discussões, orientações e contribuições no decorrer do desenvolvimento da tese, as quais ajudaram a moldar o trabalho em sua forma final.

À Prof<sup>a</sup>. Claudia Sagastizábal, pela avaliação, contribuições e comentários nos documentos de qualificação e defesa, embora não tenha participado formalmente das bancas de avaliação. Agradeço, também, pela participação na condição de relatora do parecer que permitiu a realização da defesa, mesmo com prazo exíguo para a execução de tal tarefa.

À Agência Nacional de Energia Elétrica – ANEEL, na figura de seus representantes, principalmente o Diretor André Pepitone da Nóbrega, pelo apoio e oportunidade de afastamento integral das atividades na Agência, o que permitiu a concretização desse objetivo.

Ao Frederico Rodrigues, que, na condição de chefe, foi o primeiro a apoiar minha candidatura ao processo que culminou com minha licença da ANEEL.

A todos os colegas que conviveram comigo no LABPLAN, representados aqui pelos amigos Daniel Tenfen, Murilo Scuzziato, Paulo Larroyd, Marcelo Benetti, Raphael Gonçalves, Edison Aranha, Fabrício Takigawa, Hermano Veronese, Paulo André, Pedro Vieira, Rodolfo Bialecki, Fábio Mantelli, Valmor Zimmer, Fernanda Zardo, Kauna Palma, Juan Caicedo, Mauro González, Ricardo Quintero, Carlos Arturo e Marco Zarzosa.

À toda a minha família, principalmente aos meus pais, Osvaldo e Miriam, por tudo, formação, amor, apoio e incentivo em todos os momentos da minha vida. Ao meu irmão Murillo, minha cunhada Vanderléia, meu afilhado Ricardo, minha irmã Mariana e meu cunhado André, pelo apoio, incentivo e convivência durante o período de licença. Ao meu sogro, sogra e cunhada, James, Salete e Julia, pelo apoio e incentivo.

E agradeço, especialmente a minha esposa Paolla, que participou comigo de toda essa caminhada, inicialmente na condição de namorada, depois noiva e esposa. Agradeço a ela por compreender e suportar a distância, durante os três primeiros anos desse trabalho, pelo apoio, motivação, incentivo, amor e ajuda necessária para enfrentar esse desafio.

## RESUMO

As regras para o despacho e formação de preços possuem características distintas nos diferentes países ou regiões onde foi implementado um processo de reestruturação da indústria de energia elétrica. Porém, um dos componentes comuns desses sistemas é o mercado de energia elétrica de curto prazo, onde ocorrem as transações de compra e venda de energia elétrica no atacado. Assim, sob o ponto de vista das empresas de energia é essencial determinar suas ofertas de modo a maximizar seus lucros, ao passo que sob a perspectiva do ente regulador é imprescindível entender como os agentes de geração tomam suas decisões e como estas impactam no mercado. Nesse sentido, este trabalho propõe uma abordagem para determinação e avaliação de estratégias de oferta de empresas geradoras competindo entre si em um mercado de energia elétrica de curto prazo com formação de preços baseada em ofertas. O foco do estudo é um sistema com predominância de geração hidrelétrica, em que o agente gerador é o responsável por gerenciar seu próprio reservatório, sendo o problema do operador (despacho do sistema) internalizado no modelo. A determinação da estratégia de oferta dos agentes de geração é representada por um modelo de otimização de dois níveis, o qual é transformado para um problema não linear de um único nível, conhecido como problema de Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio (MPEC). Por sua vez, esse MPEC é transformado em um problema de Programação Linear Inteira Mista (PLIM) e a interação entre os agentes é representada por um modelo de programação matemática, chamado de Problema de Equilíbrio com Restrições de Equilíbrio (EPEC).

**Palavras-chave:** Estratégias de Oferta, Sistemas Hidrotérmicos, Programação em Dois Níveis, Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio, Programação Linear Inteira Mista, Problema de Equilíbrio com Restrições de Equilíbrio.



## ABSTRACT

The rules for dispatch and price formation have distinct characteristics in each country or region where a restructuring process in the electricity industry has been implemented. However, one of the basic features of these systems is the short-term electricity market, where energy transactions in the wholesale market are held. Therefore, from the energy firms' point of view, it is essential to define their bids in order to maximize their profits, while from the regulator perspective it is important to understand how generation agents define their decisions and how these decisions impact the market. In this context, this work proposes an approach to determine and assess bidding strategies from generation companies competing in a short-term electricity market with price formation based on agents offers. The focus of the study is a system with predominantly hydroelectric generation, where the producer is responsible for his own reservoir management and the operator's problem (dispatch of the system) is internalized on the model. The bidding strategy of the generation companies is represented by a bi-level optimization problem, which is transformed to a single level nonlinear problem, known as a Mathematical Program with Equilibrium Constraints (MPEC). This MPEC is transformed into a Mixed Integer Linear Programming (MILP) and the interaction among agents is represented by a mathematical program called Equilibrium Problem with Equilibrium Constraints (EPEC).

**Keywords:** Bidding Strategy, Hydrothermal System, Bi-level Program, Mathematical Program with Equilibrium Constraints, Mixed Integer Linear Programming, Equilibrium Problem with Equilibrium Constraints.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Modelo <i>Pool</i> : Oferta x Demanda.....	18
Figura 2. Estrutura de um MPEC: restrições formadas por outros problemas de otimização.....	30
Figura 3. Estrutura de um MPEC: restrições formadas por condições de KKT. ....	31
Figura 4. Contextualização dos MPECs e MPCCs (RODRIGUES, 2005). ....	31
Figura 5. Processo de decisão do Agente <i>L</i> .....	57
Figura 6. Estrutura do MPEC com condições de complementariedade.....	59
Figura 7. Estrutura do MPEC com restrição de igualdade primal-dual.....	61
Figura 8. Processo iterativo.....	69
Figura 9. Usinas hidrelétricas em cascata – Sistema hidrotérmico 1. ...	78
Figura 10. Receita ao longo das iterações – Modelo de Equilíbrio do SH1.....	91
Figura 11. Receita de cada agente ao longo das iterações – Modelo de Equilíbrio do SH1. ....	92
Figura 12. Receita ao longo das iterações – Modelo de Equilíbrio do SH1 com acoplamento entre os Agentes <i>L</i> .....	93
Figura 13. Diagrama esquemático das hidrelétricas – Sistema Hidrotérmico 2. ....	95
Figura 14. Demanda do sistema em MWh – Modelo de Equilíbrio do SH2.....	96
Figura 15. Receita ao longo das iterações – Modelo de Equilíbrio do SH2.....	97
Figura 16. Ofertas médias de preço ao longo das iterações – Modelo de Equilíbrio do SH2. ....	99
Figura 17. Ofertas médias de quantidade ao longo das iterações – Modelo de Equilíbrio do SH2. ....	99
Figura 18. Despacho final ao longo do horizonte de estudo – Modelo de Equilíbrio do SH2. ....	101
Figura 19. Volume armazenado nos reservatórios das usinas hidrelétricas dos Geradores 1, 5 e 7 ao longo do horizonte de estudo – Modelo de Equilíbrio do SH2. ....	102
Figura 20. Volume armazenado no reservatório da usina hidrelétrica do Gerador 2 ao longo do horizonte de estudo – Modelo de Equilíbrio do SH2.....	102
Figura 21. Volume armazenado nos reservatórios das usinas hidrelétricas dos Geradores 3 e 4 ao longo do horizonte de estudo – Modelo de Equilíbrio do SH2. ....	102

Figura 22. Volume armazenado no reservatório da usina hidrelétrica do Gerador 6 ao longo do horizonte de estudo – Modelo de Equilíbrio do SH2. ....103

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Dados das usinas hidrelétricas do Sistema Hidrotérmico 1...	79
Tabela 2. Dados da usina termelétrica.....	79
Tabela 3. Ofertas iniciais para o Sistema Hidrotérmico 1.....	79
Tabela 4. Ofertas estratégicas para o Gerador 1.....	80
Tabela 5. Despacho do sistema. ....	80
Tabela 6. Resultados do gerenciamento do reservatório da usina H <sub>1</sub> ....	82
Tabela 7. Dados das usinas hidrelétricas do SH1 – Modelo de Equilíbrio.....	83
Tabela 8. Ofertas iniciais para o SH1 – Modelo de Equilíbrio.....	83
Tabela 9. Ofertas estratégicas para o Gerador 1 – Modelo de Equilíbrio do SH1.....	84
Tabela 10. Despacho do sistema após resolução pelo Gerador 1 – Modelo de Equilíbrio do SH1. ....	85
Tabela 11. Ofertas estratégicas para o Gerador 2 – Modelo de Equilíbrio do SH1.....	85
Tabela 12. Despacho do sistema após resolução pelo Gerador 2 – Modelo de Equilíbrio do SH1. ....	86
Tabela 13. Ofertas estratégicas para o Gerador 3 – Modelo de Equilíbrio do SH1.....	87
Tabela 14. Despacho do sistema após resolução pelo Gerador 3 – Modelo de Equilíbrio do SH1. ....	88
Tabela 15. Ofertas estratégicas para o Gerador 1 na segunda iteração – Modelo de Equilíbrio do SH1. ....	89
Tabela 16. Despacho do sistema após resolução pelo Gerador 1 – Modelo de Equilíbrio do SH1 na segunda iteração. ....	89
Tabela 17. Ofertas estratégicas para o Gerador 2 na segunda iteração – Modelo de Equilíbrio do SH1. ....	89
Tabela 18. Despacho do sistema após resolução pelo Gerador 2 – Modelo de Equilíbrio do SH1 na segunda iteração. ....	90
Tabela 19. Ofertas estratégicas para o Gerador 3 na segunda iteração – Modelo de Equilíbrio do SH1. ....	90
Tabela 20. Despacho do sistema após resolução pelo Gerador 3 – Modelo de Equilíbrio do SH1 na segunda iteração. ....	90
Tabela 21. Ofertas estratégicas finais – Modelo de Equilíbrio do SH1.	94
Tabela 22. Despacho final do sistema – Modelo de Equilíbrio do SH1.	94
Tabela 23. Balanço hídrico final – Modelo de Equilíbrio do SH1. ....	94
Tabela 24. Dados das usinas hidrelétricas.....	95
Tabela 25. Dados da usina termelétrica.....	96

Tabela 26. Receitas finais para cada gerador do SH2 – Modelo de Equilíbrio. ....	98
Tabela 27. Despacho final, em MWh, para cada gerador em cada estágio do SH2 – Modelo de Equilíbrio. ....	100

## LISTA DE SÍMBOLOS

$R_L$	Receita Líquida do Agente de geração $L$ (R\$);
$L$	agente de geração participante do mercado;
$NL$	número total de agentes de geração participantes do mercado;
$T$	número total de estágios do horizonte de estudo;
$NI$	número total de usinas termelétricas do sistema;
$NJ$	número total de usinas hidrelétricas do sistema;
$t$	índice associado aos estágios de tempo, tal que $t=1, \dots, T$ ;
$i$	índice associado às usinas termelétricas do sistema, tal que $t=1, \dots, NI$ ;
$j$	índice associado às usinas hidrelétricas do sistema, tal que $t=1, \dots, NJ$ ;
$m$	índice associado às usinas hidrelétricas localizados em uma determinada cascata do sistema;
$\alpha$	fator de penalidade associado a $ghe_{jt}$ e $gte_{it}$ ;
$\beta$	fator de penalidade associado a $gs_{jt}$
$\sigma$	fator de penalidade associado a $s_{jt}$ ;
$c$	constante com valor de $3,6 \cdot 10^{-3}$ que converte unidades de vazão ( $m^3/s$ ) para unidades de volume armazenado ( $hm^3$ ) equivalente em um período de tempo igual a uma hora;
$ch_{jt}$	custo incremental de produção associado à usina hidrelétrica $j$ no estágio $t$ (R\$/MWh);
$ct_{it}$	custo incremental de produção associado à usina termelétrica $i$ no estágio $t$ (R\$/MWh);
$d_t$	demanda do sistema no estágio $t$ (MWh);
$gh_j^{\max}$	capacidade máxima de produção da usina hidrelétrica $j$ (MWh);
$gt_i^{\max}$	capacidade máxima de produção da usina termelétrica $i$ (MWh);
$\rho_j$	produtibilidade da usina hidrelétrica $j$ (MWh/( $m^3/s$ ));
$\tau_{jm}$	tempo de viagem da água entre os reservatórios associados às usinas $m$ e $j$ (h);
$\Omega_{Mj}$	conjunto de geradores hidrelétricos localizados imediatamente a montante da usina $j$ ;

$v_j^{\min(\max)}$	limites mínimo (máximo) de volume armazenado no reservatório da usina $j$ ( $\text{hm}^3$ );
$v_{j,T+1}^{\text{meta}}$	limite mínimo de volume armazenado no reservatório da usina $j$ a ser alcançado no final do horizonte de estudo ( $\text{hm}^3$ );
$y_{jt}$	vazão afluente incremental ao reservatório da usina $j$ no estágio $t$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ );
$gh_{jt}^{\text{meta}}$	valor médio de geração associada à usina hidrelétrica $j$ no estágio $t$ , resultante dos problemas resolvidos por cada agente de geração $L$ (MWh);
$gt_{it}^{\text{meta}}$	valor médio de geração associada à usina termelétrica $i$ no estágio $t$ , resultante dos problemas resolvidos por cada agente de geração $L$ (MWh);
$gh_{jt}^L$	geração associada à usina hidrelétrica $j$ no estágio $t$ , resultante do problema resolvido pelo agente $L$ (MWh);
$gt_{it}^L$	geração associada à usina termelétrica $i$ no estágio $t$ , resultante do problema resolvido pelo agente $L$ (MWh);
$M^{gt_i}, M^{\pi gt_i},$ $M^{gh_j}, M^{\pi gh_j},$ $M^P, M^D,$ $M^{\delta t_i^{\min}}, M^{\delta t_j^{\min}},$ $M^{\delta t_i^{\max}}, M^{\delta t_j^{\max}}$	constantes positivas associadas ao problema de Programação Linear Inteira Mista (PLIM);
$\pi_t$	custo marginal de operação do sistema no estágio $t$ (R\$/MWh);
$oph_{jt}$	oferta de preço realizada pela usina hidrelétrica $j$ para suprir energia no estágio $t$ (R\$/MWh);
$opt_{it}$	oferta de preço realizada pela usina termelétrica $i$ para suprir energia no estágio $t$ (R\$/MWh);
$oqh_{jt}$	oferta de quantidade realizada pela usina hidrelétrica $j$ para suprir energia no estágio $t$ (MWh);
$oqt_{it}$	oferta de quantidade realizada pela usina termelétrica $i$ para suprir energia no estágio $t$ (MWh);
$gh_{jt}$	geração associada à usina hidrelétrica $j$ no estágio $t$ (MWh);
$gt_{it}$	geração associada à usina termelétrica $i$ no estágio $t$ (MWh);

$v_{jt}$	volume armazenado no reservatório associado à usina hidrelétrica $j$ no início do estágio $t$ ( $\text{hm}^3$ );
$q_{jt}$	vazão turbinada pela usina hidrelétrica $j$ no estágio $t$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ );
$s_{jt}$	vazão vertida pelo reservatório da usina hidrelétrica $j$ no estágio $t$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ );
$gs_{jt}$	variável de folga associada à diferença entre a geração despachada pelo OM e a geração suprida pela usina hidrelétrica $j$ no estágio $t$ (MWh);
$ghe_{jt}$	variável de folga associada à diferença entre a geração da usina hidrelétrica $j$ no estágio $t$ e o valor meta de geração dessa usina (MWh);
$gte_{it}$	variável de folga associada à diferença entre a geração da usina termelétrica $i$ no estágio $t$ e o valor meta de geração dessa usina (MWh);
$\delta t_{it}^{\min}$	multiplicador de Lagrange associado à restrição de não negatividade da variável de geração termelétrica da usina $i$ no estágio $t$ (R\$/MWh);
$\delta t_{it}^{\max}$	multiplicador de Lagrange associado à restrição de oferta de quantidade realizada pela usina termelétrica $i$ para suprir energia no estágio $t$ (R\$/MWh);
$\delta h_{jt}^{\min}$	multiplicador de Lagrange associado à restrição de não negatividade da variável de geração hidrelétrica da usina $j$ no estágio $t$ (R\$/MWh);
$\delta h_{jt}^{\max}$	multiplicador de Lagrange associado à restrição de oferta de quantidade realizada pela usina hidrelétrica $j$ para suprir energia no estágio $t$ (R\$/MWh);
$\eta t_{it}, \eta h_{jt},$ $\eta \pi_t, \eta t_{it}^\delta,$ $\eta h_{jt}^\delta, \eta q t_{it},$ $\eta q h_{jt}$	variáveis binárias associadas ao problema de Programação Linear Inteira Mista (PLIM).



## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	1
1.2 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS.....	4
1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	5
1.4 CONTRIBUIÇÕES E CARACTERÍSTICAS DO TRABALHO .....	12
1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	13
<b>CAPÍTULO 2 VISÃO GERAL DOS MERCADOS DE ENERGIA ELÉTRICA</b> .....	<b>15</b>
2.1 INTRODUÇÃO.....	15
2.2 MODELOS DE DESPACHO E FORMAÇÃO DE PREÇOS.....	16
2.2.1 Modelo <i>Pool</i> .....	16
2.2.2 Modelo Bilateral .....	19
2.3 COMPORTAMENTO DOS AGENTES DE GERAÇÃO .....	20
2.3.1 Competição Imperfeita.....	20
2.3.2 Representação do comportamento dos agentes.....	21
2.4 O CONCEITO DE PODER DE MERCADO .....	22
2.4.1 Métodos aplicados à análise de poder de mercado.....	22
2.5 MODELOS DE EQUILÍBRIO PARA MERCADOS SOB COMPETIÇÃO IMPERFEITA.....	23
2.5.1 Modelo de Cournot .....	23
2.5.2 Modelo de Bertrand .....	24
2.5.3 Modelos Baseados em Funções de Oferta.....	24
2.5.4 Modelo de Stackelberg.....	25
2.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	25
<b>CAPÍTULO 3 PROGRAMAÇÃO EM DOIS NÍVEIS E MODELOS DE EQUILÍBRIO COM RESTRIÇÕES DE EQUILÍBRIO</b> .....	<b>27</b>
3.1 INTRODUÇÃO.....	27
3.2 PROGRAMAÇÃO EM DOIS NÍVEIS .....	28
3.2.1 Formulação e Estrutura .....	28
3.2.2 Complexidade e Métodos de Solução .....	29
3.3 PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA COM RESTRIÇÕES DE EQUILÍBRIO.....	30
3.3.1 Formulação e Estrutura .....	32
3.3.2 Exemplo Ilustrativo 1 .....	33
3.3.3 Complexidade .....	34
3.3.4 Métodos de Solução .....	35
3.3.4.1 Regularização .....	35
3.3.4.2 Substituição das Restrições de Complementariedade ....	36

3.3.4.3	Penalização das Restrições de Complementariedade .....	37
3.3.4.4	Programação Inteira Mista.....	38
3.3.4.5	Utilização de Métodos de Decomposição .....	41
3.3.4.6	Utilização das Condições Fortes de Dualidade.....	41
3.3.5	Exemplo Ilustrativo 2.....	41
3.4	PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO COM RESTRIÇÕES DE EQUILÍBRIO..	43
3.5	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	45
<b>CAPÍTULO 4 ESTRATÉGIAS DE OFERTAS EM MERCADOS COMPETITIVOS DE ENERGIA ELÉTRICA COM PREDOMINÂNCIA DE GERAÇÃO HIDRELÉTRICA .....</b>		<b>47</b>
4.1	INTRODUÇÃO .....	47
4.2	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DE DOIS NÍVEIS .....	48
4.2.1	Maximização da Receita.....	50
4.2.2	Minimização do custo total de operação do sistema.....	53
4.2.3	Problema de Otimização de Dois Níveis .....	54
4.3	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA COM RESTRIÇÕES DE EQUILÍBRIO.....	57
4.3.1	Linearização da Função Objetivo do MPEC .....	62
4.3.2	Transformação do MPEC para um problema de PLIM .....	65
4.4	PROBLEMA DE EQUILÍBRIO COM RESTRIÇÕES DE EQUILÍBRIO .....	68
4.5	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	74
<b>CAPÍTULO 5 RESULTADOS COMPUTACIONAIS.....</b>		<b>77</b>
5.1	INTRODUÇÃO .....	77
5.2	RESULTADOS COMPUTACIONAIS .....	77
5.2.1	Sistema Hidrotérmico 1 .....	78
5.2.1.1	Modelo de Equilíbrio aplicado ao Sistema Hidrotérmico 1 (SH1).....	82
5.2.2	Sistema Hidrotérmico 2 .....	94
5.2.2.1	Modelo de Equilíbrio aplicado ao Sistema Hidrotérmico 2 (SH2).....	96
5.3	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	103
<b>CAPÍTULO 6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....</b>		<b>105</b>
6.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	109
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>		<b>113</b>

# **CAPÍTULO 1**

## **INTRODUÇÃO**

---

### **1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS**

O processo de liberalização e desregulamentação dos mercados de energia elétrica, iniciado há cerca de três décadas, constitui-se no objetivo primordial e comum da indústria da energia elétrica em todo o mundo. A despeito das especificidades e características inerentes a cada país ou região, tal processo de reestruturação tem o intuito de proporcionar condições favoráveis para estimular a competição e a eficiência do mercado, em benefício de toda a sociedade.

Nesse contexto, a mudança de paradigma introduzida pela liberalização dos mercados enfatizou a desverticalização de uma indústria controlada pelo Estado, com a separação das áreas de geração, transmissão, distribuição e comercialização de energia, o aumento da liberdade e estabelecimento de incentivos para participação de agentes privados no setor, bem como a mudança no modelo institucional, que implicou na implantação de novas sistemáticas de operação e regulação do mercado (HUNT e SHUTTLEWORTH, 1996; RUDNICK e ZOLEZZI, 2001; HUNT, 2002; SIOSHANSI e PFAFFENBERGER, 2006; NERY, 2012; SILVA, 2012).

Uma indústria de energia elétrica competitiva e eficiente pressupõe um modelo ou desenho de mercado com regras claras, estáveis e uma regulação adequada e efetiva, que permita uma interação equilibrada entre todos os atores envolvidos, sejam eles agentes privados, estatais, governo ou a própria sociedade. Essa interação está associada, dentre outras questões, à capacidade de um órgão regulador administrar e gerenciar interesses antagônicos. De um lado, as empresas que atuam no setor de energia (agentes de geração, distribuição, transmissão e comercialização) requerem, além de regras claras e estáveis, uma remuneração adequada e o cumprimento dos contratos. Por outro lado, os consumidores (sociedade) demandam um produto de qualidade e preço justo, enquanto o governo procura impor seus interesses estratégicos e políticas de desenvolvimento para o setor.

Entende-se por desenho (ou arquitetura) de mercado, métodos e artifícios que permitam que as transações se façam de maneira adequada. De modo mais específico, um desenho de mercado consiste de mecanismos que organizam a compra e a venda, nos canais para o fluxo de informação, nas leis e regulamentações que definem os direitos e sustentam os contratos e na cultura de mercado, suas normas auto reguladoras, códigos e convenções que governam o comportamento dos agentes (MCMILLAN, 2004). No setor elétrico, um desenho de mercado inclui a definição do serviço, lances ou requisitos de ofertas, bem como regras para precificação e liquidação financeira (BALDICK *et al.*, 2005).

Para possibilitar o desenvolvimento de um desenho de mercado adequado é necessário um amplo conhecimento acerca dos participantes, seus incentivos e o problema econômico a ser resolvido (CRAMTON, 2003).

Não obstante, um desenho de mercado deve ser consistente com a política governamental, de modo a contribuir com a estabilidade regulatória, o que traz confiança aos consumidores, à indústria de energia e aos investidores (KURI e LI, 2004). Contudo, é importante avaliar periodicamente o comportamento do mercado e promover os aperfeiçoamentos necessários para permitir que o mesmo opere com eficiência. Assim, um modelo adequado, associado a uma regulação inteligente e extensiva, contribui para solucionar os maiores problemas enfrentados pelos mercados de energia (STOFT, 2002).

Nesse sentido, a indústria de energia elétrica contemporânea enfrenta o desafio diário de desenvolver e melhorar seus desenhos de mercado, de modo a promover a eficiência e o crescimento econômico por meio da competição e da sustentabilidade da expansão da geração, com garantia de suprimento do produto energia, com qualidade, confiabilidade e custos razoáveis aos consumidores (ZUCARATO, 2009).

Com o intuito de auxiliar no enfrentamento desse desafio e contribuir para o estudo do comportamento e interação entre agentes e como suas decisões impactam o mercado, é analisado neste trabalho o problema de determinação da estratégia de oferta de agentes de geração atuantes em mercados de energia elétrica de curto prazo. Especificamente, este trabalho propõe um modelo de equilíbrio aplicado a sistemas com predominância de geração hidrelétrica, onde cada agente produtor está interessado em maximizar sua receita e o Operador do Mercado (OM)<sup>1</sup> deseja minimizar o custo total de operação do mercado ao longo do horizonte de tempo considerado (24 horas). Conforme será detalhado adiante, a determinação da estratégia de oferta pode ser representada por um modelo de otimização de dois níveis (BARD, 1982; EDMUNDS e BARD, 1991; DEMPE, 2003; COLSON *et al.*, 2005), o qual é transformado para um problema não linear de um único nível, conhecido na literatura como problema de Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio (MPEC – *Mathematical Program with Equilibrium Constraints* – em inglês) ou problema de Programação Matemática com Restrições de Complementariedade (MPCC – *Mathematical Program with Complementarity Constraints* – em inglês) (LUO *et al.*, 1996; ZHANG, 2010; GABRIEL *et al.*, 2013). Esse MPEC é então transformado para um problema de Programação Linear Inteira Mista (PLIM) (FORTUNY-AMAT e MCCARL, 1981; RUIZ e CONEJO, 2009) e a interação entre os agentes é representada por um modelo de programação matemática chamado de Problema de Equilíbrio com Restrições de Equilíbrio (EPEC – *Equilibrium Problem with Equilibrium Constraints* – em inglês) (HU e RALPH, 2007; ZHANG, 2010; GABRIEL *et al.*, 2013).

---

<sup>1</sup> Neste trabalho, o termo Operador do Mercado (OM) será utilizado para designar a instituição responsável pela determinação do equilíbrio entre oferta e demanda, que resulta no preço de equilíbrio do mercado de curto prazo e nas quantidades despachadas pelos agentes de geração.

## 1.2 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

A reestruturação da indústria de energia contribuiu para a incorporação de conceitos de mercado e a consequente introdução da competição no setor elétrico, particularmente nos segmentos de geração e comercialização. As decisões de investimento e produção por parte dos agentes do setor passaram a ter um caráter descentralizado. Criou-se a figura do produtor independente de energia<sup>2</sup> (*independent power producer*) (HUNT e SHUTTLEWORTH, 1996), que possui liberdade para atuar no mercado e tomar suas próprias decisões sobre investimento e produção, arcando com os efeitos positivos ou negativos advindos de tais decisões.

Embora as regras para o despacho e formação de preços possuam características distintas nos diferentes países onde foi implementado um processo de reestruturação, um dos componentes comuns desses sistemas é o mercado de energia de curto prazo, onde ocorrem as transações de compra e venda de energia elétrica no atacado. Atrelado a um mercado de energia de curto prazo, basicamente existem dois modelos fundamentais de despacho e formação de preços: o Modelo Bilateral e o Modelo *Pool*<sup>3</sup>.

No entanto, independentemente do modelo adotado, em um ambiente de mercado competitivo, o objetivo primordial dos agentes consiste na maximização de seus lucros. Diante disso, sob o ponto de vista das empresas de energia, um problema importante consiste em determinar suas ofertas de modo a atingir esse objetivo. Com respeito ao desenho do mercado, propriamente dito, é de interesse do órgão regulador investigar as estratégias adotadas pelos agentes envolvidos, de modo a analisar o comportamento do sistema e identificar práticas anti-competitivas que possam prejudicar o correto funcionamento e evolução do mercado.

Assim, sob a ótica do órgão regulador, para poder analisar as interações entre os agentes de um mercado de energia de curto prazo,

---

<sup>2</sup> No Setor Elétrico Brasileiro, a Lei nº 9.074, de 7 de julho de 1995, criou formalmente o produtor independente de energia (BRASIL, 1995), que pode produzir e comercializar energia por sua conta e risco e é assegurado a ele livre acesso aos sistemas de transmissão e distribuição.

<sup>3</sup> O Modelo *Pool* pode ser dividido em dois mecanismos distintos: *tight pool* e *loose pool*. Esses mecanismos, bem como o Modelo Bilateral, serão apresentados em maiores detalhes no Capítulo 2.

entender como os agentes de geração tomam suas decisões e como estas impactam no mercado como um todo, é importante inicialmente, modelar um problema de maximização da receita líquida de cada empresa de geração, e após isso, modelar a competição entre os diferentes agentes por meio da implementação de um modelo de equilíbrio.

Face ao exposto, o objetivo desta Tese é propor uma abordagem para determinação e avaliação de estratégias de oferta de empresas geradoras competindo entre si em um mercado de curto prazo de energia elétrica com formação de preços baseada em ofertas (modelo *loose pool*). O foco do estudo é um sistema com predominância de geração hidrelétrica, onde o agente gerador é o responsável por gerenciar seu próprio reservatório e cujo problema do operador do mercado (determinação da geração de cada usina do sistema) é internalizado no modelo. Além disso, características inerentes a esse tipo de sistema, como o acoplamento temporal, decorrente da disponibilidade futura de energia em função da operação dos reservatórios e afluições futuras, bem como o acoplamento espacial, oriundo da disposição de diferentes usinas na mesma cascata, são também considerados no modelo.

### 1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Existem inúmeros trabalhos na literatura destinados a estudar o problema de determinação da estratégia de oferta de agentes em mercados de energia elétrica competitivos (DAVID e WEN, 2000; VENTOSA *et al.*, 2005; ZAKERI, 2010; PRABAVATHI e GNANADASS, 2015). Esses estudos têm como objetivos principais: (i) desenvolver modelos de análise e suporte à tomada de decisão por parte das empresas que atuam no mercado; e (ii) auxiliar as entidades reguladoras na identificação de lacunas na estrutura dos mercados, as quais podem ser exploradas para o exercício de poder de mercado. Nesse segundo caso, é importante atuar no desenvolvimento de regras, capazes de mitigar tais práticas.

A maioria dos trabalhos têm sido desenvolvidos para sistemas termelétricos em um esquema onde os geradores submetem ofertas de preço e quantidade para cada hora do dia. As ofertas são recebidas pelo OM, o qual resolve um problema de otimização para cada estágio, de maneira a determinar as ofertas vencedoras e a programação da

operação para cada hora do dia. Esse problema de otimização, denominado despacho econômico (DENTON *et al.*, 2001), consiste de um simples processo de liquidação do mercado, baseado na intersecção das curvas de oferta e demanda. Nessas circunstâncias, o OM não realiza o *unit commitment*<sup>4</sup> e os geradores devem internalizar em suas ofertas todos os custos envolvidos, bem como as restrições físicas operativas (ZAKERI, 2010). Por outro lado, muitos trabalhos consideram decisões de *unit commitment*, como por exemplo, Tseng e Zhu (2010). Estes autores desenvolveram um modelo de programação ótima e estratégia de oferta com o objetivo de maximizar a renda de um gerador participante de um mercado de energia e serviços ancilares para o dia seguinte e para o tempo real.

Nas primeiras duas décadas após o início do processo de reestruturação dos mercados de energia elétrica, grande parte dos métodos utilizados para determinação da estratégia de ofertas, tanto para agentes de geração, como para grandes consumidores, baseavam-se fundamentalmente em técnicas de análise probabilística e abordagens por inteligência artificial (PRICE, 1997; DAVID e WEN, 2000; ZHOU *et al.*, 2007).

Devido às suas características, praticamente todos os mercados de energia podem ser considerados oligopólios (VARIAN, 1992; MAS-COLELL *et al.*, 1995; STOFT, 2002), e sendo assim, assumir que as estratégias adotadas pelos agentes de geração podem modificar o preço de liquidação do mercado é a maneira mais natural de tratar o problema. Klemperer e Meyer (1989) publicaram um trabalho pioneiro, o qual modela um oligopólio em que cada empresa determina uma curva de oferta. Tal modelagem, denominada de Equilíbrio pela Curva de Oferta (*Supply Function Equilibria – SFE*), permite que a empresa se adapte melhor às incertezas do ambiente e contrasta com modelos até então existentes na literatura econômica (VARIAN, 1992; MAS-COLELL *et al.*, 1995), como os modelos de Cournot (nos quais as empresas definem somente estratégias de quantidade) e Bertrand (empresas definem somente estratégias de preço).

---

<sup>4</sup> O problema do *Unit Commitment* está relacionado à programação de curto prazo de usinas com o objetivo de suprir a demanda de uma maneira eficiente. Neste tipo de modelo, as principais variáveis de decisão são a entrada em operação (*start-ups*) e os desligamentos (*shut-downs*) de unidades geradoras (WOOD e WOLLENBERG, 1996).

Tradicionalmente, os problemas de maximização da receita (ponto de vista do agente) e de minimização do custo de operação (ponto de vista do operador) eram solucionados separadamente, como em Zhang *et al.* (1999). Nesse trabalho, voltado para sistemas termelétricos, as ofertas dos participantes (geradores e consumidores) para um período de 24 horas são representadas por funções quadráticas e as ofertas dos rivais representadas por funções densidades de probabilidade. Uma abordagem por Relaxação Lagrangeana (GEOFFRION, 1974; FISHER, 1981; BERTSEKAS, 1999; VISWESWARAN, 2009) é utilizada para relaxar a restrição de atendimento à demanda e proporcionar ao modelo uma estrutura que permite a decomposição em problemas menores relacionados a cada agente. Como resultado da decomposição, tem-se subproblemas determinísticos para cada unidade termelétrica e um outro subproblema que engloba as ofertas dos demais agentes sendo, portanto, de natureza estocástica.

Em vez de resolver cada problema separadamente, alguns autores (SAKK *et al.*, 1997; WILSON, 1997) sugerem um processo iterativo, onde os agentes realizam ofertas e após receberem o resultado da liquidação do mercado (níveis de geração e preços) podem modificá-las. Este processo continua até que um despacho físico viável e um preço de liquidação estável sejam atingidos.

Outra maneira de formular o problema de maximização das ofertas é descrevê-lo como um procedimento de otimização de dois níveis (BARD, 1982; EDMUNDS e BARD, 1991; DEMPE, 2003; COLSON *et al.*, 2005). Uma formulação bastante utilizada consiste de um problema de maximização da receita de um agente de geração no primeiro nível e minimização do custo total de operação do sistema no segundo nível (CANDAL, 2005; PEREIRA *et al.*, 2005; BARROSO, 2006; FAMPA *et al.*, 2008; NECHAEV, 2011). No entanto, outras abordagens podem ser utilizadas (RALPH e SMEERS, 2006) como, por exemplo, um modelo iterativo em que o despacho econômico centralizado é formulado no primeiro nível, ao invés do segundo, e um problema de definição de ofertas viáveis para cada agente (baseado no *unit commitment*) é formulado no segundo nível (LI *et al.*, 1999). Weber e Overbye (1999) propõem uma formulação em que os consumidores também participam ativamente do mercado e podem fazer ofertas de compra de energia. O primeiro nível desse modelo corresponde à

maximização da receita de cada participante do mercado e no segundo, o operador resolve um problema de fluxo de potência ótimo (HUNEALUT e GALIANA, 1991), baseado na maximização do benefício social do mercado. Esse problema é solucionado por meio de um processo iterativo em que o segundo nível é resolvido para um conjunto de ofertas, e com a informação disponível é realizada uma análise de sensibilidade com relação a variações na oferta por parte do agente. Entretanto, a abordagem mais comum para solução de um problema de otimização de dois níveis é transformá-lo para um problema equivalente de apenas um nível. Isso pode ser feito por meio da representação do problema de segundo nível por suas condições de otimalidade de primeira ordem conhecidas como condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) (BAZARAA *et al.*, 1993; NOCEDAL e WRIGHT, 1999), resultando em um modelo não linear, de um único nível, denominado problema de Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio<sup>5</sup> (MPEC) (LUO *et al.*, 1996).

MPECs têm sido alvo de grande interesse (HARKER e PANG, 1988; LUO *et al.*, 1996; RAMOS *et al.*, 1999; HOBBS *et al.*, 2000; DEMPE, 2003; RALPH, 2008b), pois na sua formulação está subentendida a noção de equilíbrio, conceito presente em inúmeras situações da realidade (RODRIGUES, 2005; RALPH, 2008a).

Pelo fato de ser um problema não linear e não convexo, métodos de otimização desenvolvidos para problemas não lineares podem encontrar dificuldades para alcançar a solução do MPEC (HERSKOVITS *et al.*, 2012) e, além disso, não há garantia de otimalidade na solução encontrada (STEEGER *et al.*, 2014). Para enfrentar essas dificuldades, em diversos trabalhos (TORRE *et al.*, 2002; BAILLO *et al.*, 2004; CANDAL, 2005; PEREIRA *et al.*, 2005; BARROSO *et al.*, 2006; BARROSO, 2006; FAMPA *et al.*, 2008; HASAN *et al.*, 2008; GABRIEL e LEUTHOLD, 2009; RUIZ e CONEJO, 2009; POZO e CONTRERAS, 2011; KARDAKOS *et al.*, 2014; ALENCAR, 2015; DAI e QIAO, 2016), o MPEC é transformado para um problema de programação linear inteira mista, seguindo a metodologia introduzida por Fortuny-Amat e McCarl (1981). Mais especificamente, alguns desses trabalhos (CANDAL, 2005; PEREIRA

---

<sup>5</sup> Equivale a um problema de Programação Matemática com Restrições de Complementariedade (MPCC).

*et al.*, 2005; BARROSO *et al.*, 2006; BARROSO, 2006; FAMPA *et al.*, 2008; POZO e CONTRERAS, 2011) adotam uma abordagem via expansão binária para tratar dos produtos de variáveis de um modelo de estratégia de oferta sob incerteza aplicada a um problema associado com um sistema termelétrico de um estágio. Essa expansão binária dos produtos de variáveis transforma o MPEC em um modelo de Programação Linear Inteira Mista (PLIM), que pode ser resolvido por meio de pacotes de otimização comerciais. Ainda em Barroso (2006), o problema de PLIM é estendido para o cálculo de equilíbrios de Nash (NASH, 1951) em um modelo de teoria dos jogos (FUDENBERG e TIROLE, 1991; GIBBONS, 1992; FUDENBERG, 1998; TORRE *et al.*, 2004). Ruiz e Conejo (2009) transformam o problema não linear e não convexo em um problema de PLIM por meio do uso das condições de complementariedade e da condição forte de dualidade (DANTZIG, 1998), aliada a metodologia de Fortuny-Amat e McCarl. Uma abordagem alternativa para resolver MPECs de forma mais eficiente, baseada na transformação dos termos não lineares e não convexos utilizando decomposição de Schur e variáveis denominadas SOS do tipo 1 (*Special Ordered Sets of type 1 – SOS1*) é proposta por Siddiqui e Gabriel (2012).

Todos esses trabalhos consideram neutralidade ao risco por parte do agente de geração. Um modelo considerando análise de risco é proposto por Baringo e Conejo (2013), os quais desenvolveram um modelo multiestágio estocástico para suporte à tomada de decisão de investimentos em plantas de geração eólica. A produção das usinas (correlacionada à demanda) e os custos de investimentos são as variáveis aleatórias do problema, que toma como conhecidas às ofertas de investimento dos agentes rivais. O modelo proposto é formulado como um MPEC, transformado para um PLIM (FORTUNY-AMAT e MCCARL, 1981), o qual é resolvido por um algoritmo baseado na decomposição de Benders (KAZEMPOUR e CONEJO, 2012).

Embora a maioria dos trabalhos tenham sido aplicados a sistemas termelétricos, existem casos voltados para a determinação da estratégia de oferta de agentes participantes de sistemas hidrotérmicos (uma pesquisa mais exaustiva pode ser verificada em Steeger *et al.* (2014)). Tais sistemas possuem características peculiares que implicam no aumento da complexidade do problema a ser resolvido, quando comparados a sistemas puramente termelétricos. Por exemplo, a

operação de sistemas hidrotérmicos é acoplada no tempo, em razão da operação de uma usina hidrelétrica estar relacionada ao uso futuro da água. Além desse acoplamento, existe ainda o acoplamento espacial, ocasionado pela presença de usinas em uma mesma cascata.

Muitos trabalhos voltados para sistemas hidrotérmicos (países Nórdicos, Nova Zelândia, Brasil e alguns mercados da América do Norte) modelam o custo marginal de operação do sistema como uma variável exógena ao problema de otimização de um agente (MO *et al.*, 2001; LINO *et al.*, 2003; PRITCHARD *et al.*, 2005). A desvantagem dessa modelagem é sua aplicabilidade restrita a mercados com funcionamento próximo à concorrência perfeita, pelo fato de negligenciar a influência das decisões dos agentes no preço de liquidação do mercado, isto é, no preço *spot*.

Scott e Read (1996) foram pioneiros na aplicação de um modelo de competição que considera agentes formadores de preço (*price makers*) atuando em um mercado com predominância de geração hidrelétrica. Os autores propuseram um modelo multiestágio determinístico de médio prazo, para analisar a manipulação de mercado no sistema da Nova Zelândia. O objetivo do estudo foi analisar os efeitos da contratação bilateral como mecanismo para mitigar o exercício de poder de mercado. O modelo foi desenvolvido com base na Programação Dinâmica Dual (PDD) (PEREIRA e PINTO, 1985; PEREIRA, 1989) e equilíbrio de Cournot. Bushnell (1998) também utilizou um modelo de Cournot para avaliar o comportamento estratégico de agentes hidrelétricos no mercado da costa oeste dos Estados Unidos. Foi mostrado que os agentes hidrelétricos conseguem deslocar sua produção para períodos de demanda fora de pico, aumentando assim, o preço nos momentos de pico, e com isso, elevar seus lucros.

A extensão da metodologia adotada por Scott e Read, considerando um enfoque estocástico, é aplicada ao Setor Elétrico Brasileiro (SEB) em Kelman (1999) e seus coautores (2001) e Barroso (2000). Ainda com ênfase no SEB, Oliveira (2003) modelou o comportamento probabilístico de oferta dos agentes, de modo a verificar o exercício de poder de mercado e Zucarato (2003) propôs um modelo de simulação, em que são estabelecidas regras de operação baseadas em oferta de preços. Essas regras foram baseadas nos Relatórios do Comitê de Revitalização do Setor Elétrico Brasileiro (2002). Foi utilizado um

procedimento de Programação Dinâmica (PD) (BELLMAN, 1957) com uma representação linear inteira da função de benefício futuro. Esse modelo foi estendido por Fernandes (2006), por meio da utilização da Programação Dinâmica Estocástica (PDE) (BELLMAN, 1957). O autor ainda considera a possibilidade de oferta por parte dos consumidores. Porém, devido às limitações impostas pelo uso da PDE (fenômeno conhecido como “maldição da dimensionalidade<sup>6</sup>”), apenas um gerador hidrelétrico é considerado no modelo.

Em face desta dificuldade, Flach (2003) e Flach *et al.* (2010) utilizam a Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE) (PEREIRA, 1989; PEREIRA e PINTO, 1991), contribuindo para diminuir o esforço computacional e possibilitar o desenvolvimento de uma metodologia para oferta estratégica de uma empresa geradora com múltiplas usinas hidrelétricas, levando em consideração múltiplos estágios e a incerteza nas afluências. A abordagem proposta estende a metodologia da PDDE, até então aplicada a problemas de minimização de custo, ao problema de otimização da oferta. Porém, dado que a Função de Benefício Futuro (FBF) é não linear e descontínua, é necessário fazer uma aproximação por uma função côncava para poder utilizar a PDDE. Simba (2005) estende essa metodologia para vários agentes em um modelo de teoria dos jogos.

Baslis e Bakirtzis (2011) apresentam um modelo de PLIM estocástico de médio prazo (horizonte de um ano) aplicado à maximização da receita de um gerador hidrelétrico formador de preço. Cenários de curvas de demanda residual são utilizados para representar a interação entre o gerador e seus competidores, bem como a demanda do sistema. Por sua vez, Pousinho *et al.* (2013), utiliza a mesma estratégia em um modelo de curto prazo, onde ainda são consideradas restrições de *unit commitment*, aversão a risco por parte dos agentes e uma configuração das usinas em cascata. No entanto, a propriedade da cascata é de apenas um produtor.

Mais recentemente, é proposto um modelo de programação estocástica em dois níveis que considera uma formulação alternativa ao despacho centralizado de sistemas com predominância de geração hidrelétrica (ALMEIDA e CONEJO, 2013; CICONET, 2013;

---

<sup>6</sup> Crescimento exponencial do problema à medida que aumentam o número de cenários e estágios de tempo considerados.

ALENCAR, 2015). A estocasticidade do modelo é considerada nas afliências do sistema. A função objetivo do problema de primeiro nível corresponde à minimização de um desvio entre o volume do reservatório ao final do período de planejamento e um volume meta, o qual é previamente determinado pelo agente como o volume que maximiza sua receita esperada para o período posterior ao horizonte de planejamento. Desse modo, o preço do sistema não é modelado explicitamente. Contudo, no trabalho de Alencar (2015), é desenvolvido um segundo modelo onde o problema do produtor (primeiro nível) é formulado representando-se o preço marginal de operação. Nesses trabalhos, o problema de segundo nível corresponde à minimização da geração termelétrica agregada do sistema, sujeito às restrições de balanço hídrico (o operador do sistema gerencia os reservatórios de todos os agentes), função de produção das usinas hidrelétricas (linear) e demais restrições operativas das usinas do sistema. O problema é expresso como um EPEC, em que as usinas hidrelétricas competem entre si, sendo resolvido por um algoritmo de programação não linear em Almeida e Conejo (2013) e Cicconet (2013), enquanto Alencar (2015) resolve utilizando programação não linear inteira mista.

Finalmente, Zhang (2010) e Gabriel *et al.* (2013) apresentam diversos algoritmos e métodos de solução que podem ser aplicados aos modelos aqui discutidos.

## 1.4 CONTRIBUIÇÕES E CARACTERÍSTICAS DO TRABALHO

Este trabalho tem o propósito de contribuir no processo de formulação e solução de um problema de determinação das estratégias de ofertas de empresas participantes de um mercado competitivo de energia elétrica com predominância de geração hidrelétrica. Mais especificamente, as principais contribuições e características do modelo desenvolvido neste trabalho são as seguintes:

- (i) formulação de um modelo de programação matemática em dois níveis para determinação de ofertas de preço e quantidade de um agente de geração, proprietário de uma ou mais usinas (hidrelétricas e/ou termelétricas), operando em um mercado de curto prazo (horizonte de 24 horas) de energia elétrica;

- (ii) modelo formulado em seu caso determinístico, em que as ofertas dos concorrentes, afluências e demanda do sistema são consideradas conhecidas;
- (iii) formulação do problema de dois níveis como um problema de Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio (MPEC);
- (iv) consideração de um sistema hidrelétrico em cascata, com reservatórios gerenciados por diferentes firmas;
- (v) representação das usinas individualmente, seus limites operacionais e consideração das principais características inerentes a um sistema hidrotérmico;
- (vi) transformação do MPEC em um problema de Programação Linear Inteira Mista (PLIM); e
- (vii) competição entre os geradores modelada como um Problema de Equilíbrio com Restrições de Equilíbrio (EPEC), cuja convergência é facilitada por meio da introdução de uma abordagem baseada nas condições de não-antecipatividade (ROCKAFELLAR e WETS, 1991).

Conforme pode ser observado na seção de revisão bibliográfica, a exceção do uso da metodologia baseada nas condições de não-antecipatividade aplicada a problemas de equilíbrio, as contribuições e características elencadas nos itens (i) a (vii) já foram tratadas individualmente ou em conjunto em outros trabalhos. No entanto, segundo o conhecimento do autor, a consideração de todos esses itens em um mesmo trabalho é inédita na literatura.

## 1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O documento está organizado da seguinte maneira.

O Capítulo 2 apresenta alguns aspectos conceituais introdutórios relacionados aos modelos de despacho e formação de preços, métodos aplicados à análise de poder de mercado, bem como modelos de equilíbrio e modelos para avaliação da interação e comportamento estratégico de agentes em mercados sob competição imperfeita.

Conforme destacado na seção de Revisão Bibliográfica, os modelos de programação matemática de dois níveis, assim como os modelos de equilíbrio, têm sido cada vez mais aplicados a problemas relacionados ao setor elétrico. O Capítulo 3 é dedicado a esses modelos.

Nesse sentido, será realizada uma breve introdução e apresentação de aplicações, seguida pela definição da estrutura do problema, transformação do problema de dois níveis para um modelo de um único nível (MPEC) e apresentação de algoritmos e métodos de solução. Como se tratam de problemas não lineares e não convexos, neste capítulo serão discutidas as limitações, dificuldades e metodologias de solução desse tipo de problema. O capítulo é finalizado com uma discussão sobre modelos de equilíbrio (EPECs).

Na sequência, o Capítulo 4 apresenta a formulação do modelo de determinação da estratégia de ofertas de agentes de geração participantes de mercados de energia com predominância de geração hidrelétrica. O processo de transformação do modelo de dois níveis para um MPEC, seguido pela transformação em um problema de Programação Linear Inteira Mista (PLIM), além dos aspectos relacionados ao modelo de equilíbrio, são apresentados e discutidos em detalhes.

O Capítulo 5 traz os resultados da aplicação da metodologia desenvolvida ao longo deste trabalho. Os testes computacionais foram aplicados em dois sistemas hidrotérmicos, cujos dados e disposição das usinas hidrelétricas na cascata foram adaptados do Sistema Interligado Nacional (SIN).

Por fim, o Capítulo 6 apresenta as principais conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

## CAPÍTULO 2

### VISÃO GERAL DOS MERCADOS DE ENERGIA ELÉTRICA

---

#### 2.1 INTRODUÇÃO

A indústria de energia elétrica contemporânea tem sido guiada por forças econômicas, em que o preço da energia elétrica deixou de ser definido em função de custos, e o produto energia passou a ser tratado como uma *commodity* competitiva, cujo preço é o resultado de leis de mercado (HOGAN, 1998; ILIC *et al.*, 1998; SCHWEPPE *et al.*, 1998).

Nesse ambiente competitivo, existem diferentes arranjos relacionados ao processo de formação de preços, os quais dependem da estrutura institucional e características eletroenergéticas de cada mercado. Contudo, independentemente do arranjo comercial selecionado, os mercados de energia desregulamentados necessitam de métodos quantitativos e qualitativos direcionados para avaliar o desenho de mercado em um contexto geral. Isso inclui a verificação do comportamento dos agentes e como suas interações influenciam o funcionamento do mercado.

Face ao exposto, para alcançar os objetivos almejados neste trabalho, é oportuno apresentar alguns tópicos essenciais à contextualização do problema. Com esse propósito, as próximas seções apresentam as características principais dos diferentes modelos de

despacho e formação de preços, questões gerais relacionadas à representação do comportamento dos agentes em mercados sob concorrência perfeita e imperfeita, conceitos, definições e métodos aplicados à análise de poder de mercado e, por fim, são apresentados alguns modelos de equilíbrio voltados para avaliar o comportamento estratégico de agentes em mercados sob competição imperfeita.

## 2.2 MODELOS DE DESPACHO E FORMAÇÃO DE PREÇOS

Basicamente, existem duas filosofias de operação dos mercados de energia elétrica reestruturados, as quais diferem em termos de estrutura institucional e nível de controle que permitem aos agentes exercerem sobre as atividades comerciais. A primeira tem por base um modelo *pool*, cuja programação da geração é realizada de modo centralizado, ao passo que a segunda segue um modelo orientado exclusivamente pelo mercado, conhecido como modelo bilateral. Uma breve definição destes modelos é detalhada na sequência<sup>7</sup>.

### 2.2.1 Modelo *Pool*

O modelo de mercado *pool* é baseado no princípio de um despacho de energia centralizado, em que as transações comerciais devem ser submetidas à análise e aprovação do operador do mercado/sistema. Assim, as transações comerciais de energia são realizadas com o *pool* e não diretamente entre os agentes do sistema (HUNEAULT *et al.*, 1999; ZUCARATO, 2003; SILVA, 2012). No entanto, é permitido aos agentes negociar livremente por meio de contratos bilaterais (KHATIB e GALIANA, 2007), que são instrumentos financeiros e não implicam, necessariamente, em transações físicas de energia. A principal finalidade da contratação bilateral em um modelo *pool* é proteger os agentes das incertezas e oscilações no preço de liquidação do mercado (preço *spot*).

O modelo *pool*, cujo objetivo é minimizar o custo total de operação do sistema, pode ser classificado em dois mecanismos distintos: (i) modelo de despacho e formação de preços baseado em

---

<sup>7</sup> Esta seção foi adaptada de pesquisa realizada por este autor e constante da referência ANEEL (2014).

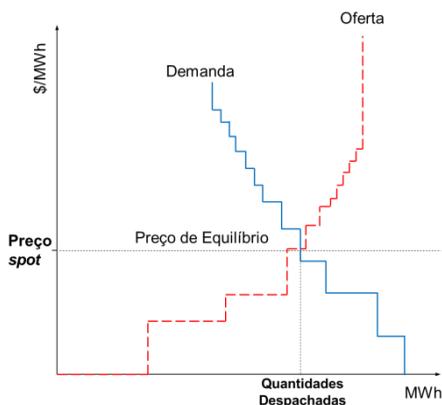
custos ou modelo *tight pool*; e (ii) modelo de despacho e formação de preços baseado em ofertas ou modelo *loose pool*.

Nos mercados onde o despacho é baseado em custos (*tight pool*), como é o caso do modelo do Setor Elétrico Brasileiro (SEB), os agentes de geração termelétrica fornecem dados técnicos sobre suas usinas, que incluem os custos variáveis de operação e suas disponibilidades, ao passo que os agentes hidrelétricos indicam a disponibilidade de suas usinas ao operador do mercado/sistema, sendo que nenhuma oferta de preço é considerada. Com base nessas informações, o operador despacha o sistema hidrotérmico ao mínimo custo esperado por meio de modelos computacionais de otimização. Com essa estratégia obtém-se assim o preço de equilíbrio, que resulta no preço *spot* do sistema, dado pelo custo marginal de operação. Matematicamente, esse custo corresponde à variável dual associada à restrição de atendimento à demanda do problema. Isso significa que o custo marginal de operação equivale à variação no custo ótimo do problema para atender um MWh incremental de demanda do sistema (DANTZIG, 1998).

No modelo de despacho e formação de preços baseado em ofertas (*loose pool*), os agentes vendedores submetem ao *pool*, suas ofertas de preço e quantidade (ou curvas de oferta) a que estão dispostos a vender energia. Ou seja, os vendedores competem pelo direito de suprir energia ao sistema e não por consumidores específicos. No caso em que o mercado permite a participação da demanda no processo de competição, os consumidores também fazem ofertas (ou curvas de oferta) de preço e quantidade a que estão dispostos a comprar energia do *pool*. Devido à natureza e complexidade desse mercado, as ofertas são realizadas com algumas horas de antecedência ao efetivo despacho (um dia ou algumas horas). De maneira geral, as ofertas são realizadas com discretização horária, considerando um período de 24 horas.

O preço ofertado pelos agentes pode não ser igual a seus respectivos custos marginais de produção ou consumo. No entanto, caso um agente de geração (consumo) ofereça um preço muito alto (baixo), pode não ser capaz de vender (comprar) energia ao (do) *pool*. Nesse mercado, os geradores mais eficientes são recompensados e a teoria microeconômica (VARIAN, 1992) nos diz que, em mercados perfeitamente competitivos as empresas tendem a ofertar seus custos marginais de produção ou consumo.

Após a finalização do período para submissão de ofertas, o operador do mercado, baseado nas ofertas dos agentes e na previsão de demanda (quando o mercado não admite ofertas por parte da demanda), resolve um problema de despacho econômico, cujo objetivo é atender a demanda ao menor custo possível (minimizar o custo total das ofertas<sup>8</sup>). Isto é feito agregando-se as ofertas dos geradores em ordem crescente de preço, para elaborar a curva de oferta. A curva de demanda é elaborada colocando-se as ofertas de preço dos consumidores, se for o caso, em ordem decrescente, como pode ser observado na Figura 1. A intersecção entre a disposição a produzir e consumir dos agentes resulta no preço de equilíbrio do mercado de curto prazo (preço *spot*) e nas quantidades despachadas (SHAHIDEHPOUR *et al.*, 2002).



**Figura 1. Modelo Pool: Oferta x Demanda.**

Uma vez finalizado esse processo, o operador do sistema (na maioria dos casos, uma única instituição é responsável tanto pela operação do mercado, como do sistema) avalia a programação da operação efetivada pelo operador do mercado e verifica os fluxos de potência na rede, de modo a garantir a estabilidade do sistema e a segurança do suprimento. Portanto, em alguns casos, é necessário modificar o despacho definido pelo OM para atender certos requisitos, como por exemplo, reserva girante e alívio no congestionamento da transmissão (ZHANG, 2010).

<sup>8</sup> Em mercados com participação da demanda, o objetivo é maximizar o benefício social do mercado, que é o resultado da soma do excedente do produtor e do consumidor.

Adicionalmente, o gerenciamento das perdas e do congestionamento da transmissão pode ser realizado com diferentes graus de complexidade. Alguns mercados, como Colômbia e Reino Unido, por exemplo, consideram que a demanda e geração total do sistema estão localizadas em uma única barra e as negociações são feitas nessa barra. Isso significa que existe um único preço *spot* no sistema. No entanto, essa configuração implica na necessidade de maiores ajustes em tempo real, para garantir que as restrições físicas sejam respeitadas e a demanda seja suprida em todas as barras do sistema.

Outra abordagem, denominada de preço marginal locacional (*locational marginal price*), considera um preço *spot* para cada barra ou nó do sistema. Os mercados da Nova Zelândia e PJM<sup>9</sup> adotam essa abordagem. No SEB e no Chile, por exemplo, é adotada uma configuração intermediária, onde o sistema é dividido por zonas e cada uma delas tem seu preço. Uma discussão sobre as vantagens e desvantagens de cada uma dessas configurações pode ser encontrada em Silva (2012).

Independentemente das particularidades de cada configuração, no processo de contabilização e liquidação das compras e vendas de energia, os agentes de consumo pagam um valor resultante do produto entre o preço *spot* da barra em que estão conectados e a energia consumida. Os agentes de geração recebem o valor resultante do produto entre o preço *spot* da barra em que estão conectados e a energia gerada.

### 2.2.2 Modelo Bilateral

No modelo bilateral, os agentes estabelecem contratos físicos de compra e venda de energia sem a necessidade de submetê-los ao *pool*. Assim, nesse mercado, assume-se que os geradores podem implementar despachos de modo a atender suas necessidades contratuais, independentemente de um operador do mercado. No entanto, de modo análogo ao modelo *pool*, todas as transações bilaterais devem ser reportadas ao operador do sistema, que analisa as contratações para cada

---

<sup>9</sup> O PJM (Pennsylvania – New Jersey – Maryland) é um mercado de energia norte-americano que iniciou suas atividades em 1927, atualmente engloba 13 estados americanos mais o Distrito de Columbia e é considerado um dos maiores e mais desenvolvidos mercados de energia do mundo (FAN *et al.*, 2010; GISIN *et al.*, 2010).

período e determina, sem discriminação e sob certas regras, quais contratos são viáveis para serem despachados de acordo com as configurações e restrições da rede de transmissão (SHAHIDEHPOUR *et al.*, 2002).

Esse modelo de mercado é predominante na Europa e em alguns estados americanos (SILVA, 2012).

### 2.3 COMPORTAMENTO DOS AGENTES DE GERAÇÃO

Conforme destacado anteriormente, em mercados perfeitamente competitivos, a interação entre compradores e vendedores resulta em um preço de equilíbrio igual ao custo de produção do último gerador despachado. O conceito de concorrência perfeita estabelece que devem existir competidores suficientes no mercado, de maneira que nenhum deles tenha capacidade de controlar parcela significativa do mesmo. Nessas circunstâncias, os agentes são denominados tomadores de preço (*price takers*), visto que não lhes resta alternativa a não ser ofertar seu próprio custo marginal de produção (VARIAN, 1992; GROSS *et al.*, 1999).

No entanto, um mercado sob concorrência perfeita não passa de um modelo teórico e todos os mercados reais apresentam algum tipo de falha que os faz distanciar em menor ou maior grau desse mercado perfeitamente competitivo.

No setor elétrico essas falhas são acentuadas pelo fato de existirem poucos competidores, principalmente em razão dos elevados custos necessários para entrar no mercado.

Diante disso, a competição no segmento de geração e comercialização de energia pode ser modelada como um mercado imperfeito ou oligopolista.

#### 2.3.1 Competição Imperfeita

Um mercado sob competição imperfeita ou oligopolista proporciona aos agentes a capacidade de atuar de maneira estratégica de modo a maximizar seus lucros. Quando isso acontece, o preço de equilíbrio do mercado torna-se maior do que aquele resultante do ambiente de concorrência perfeita, o que implica em maiores lucros e menor produção (perda de eficiência do mercado) (STOFT, 2002).

Assim, agentes de geração que controlam uma parcela significativa do mercado ou estão localizados em pontos estratégicos do sistema, podem manipular o preço *spot* do mercado, atuando individualmente ou em conjunto. Essa possibilidade de manipulação é chamada de poder de mercado e pode ser exercida por meio de um aumento no preço de oferta (uma restrição de transmissão, por exemplo, pode favorecer essa prática) ou uma redução na quantidade ofertada (BORENSTEIN *et al.*, 1995; CARDELL *et al.*, 1997; DAVID e WEN, 2001; HELMAN, 2006). Tais agentes podem atuar como formadores de preço (*price makers*) e com isso, tomar decisões de forma estratégica, manipulando o mercado na intenção de maximizar seus lucros.

No entanto, mesmo que um determinado agente (ou grupo de agentes) possa atuar como formador de preços, o resultado final alcançado depende de inúmeros fatores, tais como as ofertas realizadas por todos os outros agentes participantes do mercado.

Logo, é imprescindível representar o processo de competição no problema de oferta de agentes de geração. Um melhor entendimento dessas questões é o que se procura alcançar com o desenvolvimento do presente trabalho, o qual irá contribuir para auxiliar os geradores (comercializadores são também possíveis interessados na aplicação do modelo), em sua tomada de decisão e fornecer instrumentos para que agências reguladoras possam avaliar o comportamento do mercado.

### 2.3.2 Representação do comportamento dos agentes

A dinâmica do processo de competição entre os agentes de geração pode ser representada por meio de duas abordagens principais (BARROSO, 2006):

- (i) abordagem estocástica: o problema de otimização de ofertas de um determinado agente de geração é formulado e as ofertas dos concorrentes são representadas por meio de cenários. Neste caso, o agente de geração busca determinar a estratégia de oferta que maximize sua receita líquida esperada ao longo do horizonte, considerando todos os cenários;
- (ii) abordagem por modelos de equilíbrio ou teoria dos jogos: os problemas de otimização dos agentes são representados simultaneamente e o processo de

competição é simulado até a ocorrência de um equilíbrio (equilíbrio de Nash) onde nenhuma empresa consegue aumentar seus lucros dadas as ofertas dos concorrentes (FUDENBERG e TIROLE, 1991; GIBBONS, 1992; FERRERO *et al.*, 1998).

Ambas abordagens são ferramentas, as quais possuem a finalidade de permitir uma melhor avaliação do comportamento do mercado, seja sob a ótica dos próprios agentes de geração ou da instituição reguladora.

## 2.4 O CONCEITO DE PODER DE MERCADO

A habilidade de uma empresa estratégica de alterar o preço de equilíbrio do mercado acima de níveis competitivos (MAS-COLELL *et al.*, 1995) e com isso, maximizar seus lucros, é definida como poder de mercado. O exercício dessa habilidade por parte de um ou mais agentes, não é visto na economia como uma conduta condenável ou passível de punição, é simplesmente uma forma racional de comportamento que, no entanto, prejudica a competição, comprometendo assim, a eficiência do mercado (STOFT, 2002). Por essa razão, para o projeto de um mercado eficiente, é de suma importância o desenvolvimento de métodos capazes de identificar o exercício de poder de mercado por parte dos agentes estratégicos.

### 2.4.1 Métodos aplicados à análise de poder de mercado

Diversos fatores devem ser levados em consideração nesta tarefa de avaliar a competitividade do mercado, dentre os quais destacam-se: parcela do mercado controlada por cada participante; concentração do mercado; elasticidade da demanda; capacidade do sistema; arranjos contratuais; processo de formação de preços; facilidade de entrada no mercado; sistema de transmissão, dentre outros.

A comparação entre o preço de equilíbrio de um mercado sob concorrência perfeita e de um mercado real, seria um bom critério para avaliar o grau de exercício de poder de mercado. No entanto, é praticamente impossível determinar o preço de um mercado perfeitamente competitivo, pois as informações sobre os custos de produção dos agentes são confidenciais (DAVID e WEN, 2001). Diante

disso, outras metodologias têm sido desenvolvidas com esse propósito: (i) análise de concentração de mercado por meio de índices, como por exemplo, o HHI (Hirschmann-Herfindall); (ii) estimativa do comportamento de preço por meio de simulações baseadas no histórico; e (iii) análise de modelos de equilíbrio de oligopólios.

A principal crítica com relação a metodologia (i) é que a adoção de índices não captura aspectos importantes como a elasticidade da demanda. Com relação a metodologia (ii), não existem dados históricos e estatísticos suficientes para fazer esse tipo de avaliação. Além disso, mudanças de comportamento dos agentes, bem como ganhos de eficiência e tecnológicos ao longo dos anos podem tornar os dados históricos não factíveis às condições atuais. Mais detalhes sobre as vantagens e desvantagens de cada método são discutidas em David e Wen (2001). Assim, é consenso na literatura que a principal abordagem para análise de poder de mercado consiste no emprego de modelos de equilíbrio de oligopólios (modelos de equilíbrio para mercados sob competição imperfeita).

## 2.5 MODELOS DE EQUILÍBRIO PARA MERCADOS SOB COMPETIÇÃO IMPERFEITA

Nos próximos itens serão realizadas uma breve descrição de alguns modelos utilizados na literatura para avaliar o comportamento estratégico de agentes econômicos e, conseqüentemente, investigar a possibilidade de exercício de poder de mercado.

### 2.5.1 Modelo de Cournot

Essencialmente, o modelo clássico de Cournot, publicado em 1838, estabelece que os agentes supridores decidem a quantidade a ser ofertada e o preço do mercado é determinado pela interação entre a oferta agregada e a curva de demanda do mercado.

O processo de competição de um modelo de equilíbrio de Cournot pode ser descrito como um jogo em que cada gerador decide iterativamente sua quantidade ofertada, considerando conhecida a demanda do mercado e as ofertas dos rivais. O processo é repetido até que nenhum agente tenha incentivo de mudar sua quantidade ofertada, mantendo-se constantes as ofertas dos rivais. O resultado é um

equilíbrio de Nash (VARIAN, 1992; BORENSTEIN *et al.*, 1995; ZUCARATO, 2003).

O modelo de Cournot é utilizado intensamente no setor elétrico desde o início do período de reestruturação dos mercados de energia e continua sendo bastante utilizado (SCOTT e READ, 1996; BUSHNELL, 1998; KELMAN, 1999; BARROSO, 2000; HOBBS, 2001; KELMAN *et al.*, 2001; SIMBA, 2005; FLACH *et al.*, 2010). Kelman (1999) justifica a utilização desse modelo em sistemas predominantemente hidrelétricos, pois trata-se de um problema fundamentalmente quantitativo, em que os geradores hidrelétricos competem pela quantidade, visto que o preço de equilíbrio é determinado por usinas termelétricas tomadoras de preço. Contudo, como a demanda de um mercado de energia é praticamente inelástica (não responde ao preço), a competição no modelo de Cournot pode resultar em preços acima de níveis competitivos (BORENSTEIN *et al.*, 1995).

### **2.5.2 Modelo de Bertrand**

De modo análogo ao modelo anterior, ao final do processo iterativo os competidores atingem o chamado Equilíbrio de Nash, baseado na suposição de que os rivais irão manter suas ofertas. No entanto, no modelo de Bertrand, as empresas competem pelos preços, sendo a quantidade gerada o resultado do equilíbrio. Diferentemente do modelo de Cournot, neste modelo, caso não existam restrições de capacidade, o processo de competição resulta em preços de equilíbrio competitivos.

Todavia, o modelo assume que qualquer empresa pode aumentar sua produção e atender todo o mercado ao ofertar um preço menor do que os demais. Essa suposição não é verdadeira, uma vez que restrições de capacidade de geração e transmissão impactam severamente no setor elétrico (VARIAN, 1992; BORENSTEIN *et al.*, 1995; DAVID e WEN, 2001; ZUCARATO, 2003; KIRSCHEN e STRBAC, 2004).

### **2.5.3 Modelos Baseados em Funções de Oferta**

Conforme destacado, os modelos de Cournot e Bertrand tendem a apresentar características e resultados distintos. Sendo assim, sua

respectiva aplicação a determinados mercados oligopolistas deve ser avaliada com atenção.

Na tentativa de contornar as desvantagens de cada modelo e desenvolver alternativas voltadas para as particularidades de um mercado de energia, foi proposto o modelo de equilíbrio pela curva de oferta por Klemperer e Meyer (1989).

Os autores utilizam o conceito de curva de demanda residual vista pelo gerador (demanda do mercado menos oferta agregada dos rivais), para determinar uma oferta de quantidade e preço para cada cenário de realização de demanda residual. Com isso, é construída a curva de oferta do gerador. Diversos outros trabalhos abordam a metodologia de Equilíbrio pela Curva de Oferta (GREEN e NEWBERY, 1992; HOBBS *et al.*, 2000; CONEJO *et al.*, 2002; FEHR e HARBORD, 2002.; RUDKEVICH, 2005; SIOSHANSI e OREN, 2007).

#### **2.5.4 Modelo de Stackelberg**

O modelo de Stackelberg (líder-seguidor) considera a existência de um agente dominante, chamado de agente líder, cujas decisões devem levar em consideração as reações de outros agentes, denominados seguidores, os quais não possuem o conhecimento de como suas decisões afetam o agente líder. Trata-se de um modelo voltado para análise de mercados com estrutura semelhante a um mercado monopolista (DAY *et al.*, 2002; LATORRE e GRANVILLE, 2003).

### **2.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Conforme destacado neste capítulo, a maioria dos mercados de energia reestruturados adota um modelo de despacho e formação de preços baseado em ofertas. A utilização desse tipo de modelo permite que os agentes tomem suas próprias decisões, incorporando sua visão e perspectivas acerca dos custos de oportunidade, cenários futuros e demais variáveis que influenciam o mercado.

Contudo, ao buscar a maximização de seus lucros e atuar de modo estratégico, as decisões dos agentes podem comprometer a eficiência do mercado.

Diante disso, faz-se necessário dispor de técnicas e metodologias adequadas para representar a dinâmica do processo de tomada de

decisão individual e a interação entre os agentes participantes de mercados de energia competitivos.

O emprego de modelos de equilíbrio para mercados sob competição imperfeita visa cumprir essa tarefa de representação do mercado. As características principais de alguns desses modelos foram apresentadas neste capítulo.

No entanto, a avaliação do comportamento dos participantes de um mercado é um processo contínuo que deve levar em consideração as particularidades de cada mercado a ser analisado.

No caso específico deste trabalho, o interesse é formular um modelo que permita avaliar o comportamento de agentes de geração em um sistema hidrotérmico com predominância de geração hidrelétrica. A formulação do modelo a ser resolvido individualmente, por cada agente de geração, por meio de um problema de programação em dois níveis e a posterior avaliação da interação entre eles por meio de um modelo de equilíbrio com restrições de equilíbrio, será a ferramenta matemática utilizada para este fim.

No próximo capítulo será apresentada a estrutura e formulação matemática dos problemas de programação em dois níveis, aplicações, métodos de solução e uma introdução sobre modelos de equilíbrio com restrições de equilíbrio.

## CAPÍTULO 3

# PROGRAMAÇÃO EM DOIS NÍVEIS E MODELOS DE EQUILÍBRIO COM RESTRIÇÕES DE EQUILÍBRIO

---

### 3.1 INTRODUÇÃO

O problema de determinação da estratégia de oferta em sistemas de energia, assim como diversos outros problemas que envolvem um processo hierárquico de tomada de decisão, pode ser formulado como um problema de programação em dois níveis (ou multinível). Essa classe de problemas, também conhecida como problemas de programação matemática com problemas de otimização nas restrições, foi introduzida na literatura por uma série de artigos publicados por Bracken e McGill (1973; 1974c; b). Contudo, o termo “dois níveis” ou “multinível” (*bilevel* ou *multilevel*, em inglês) foi utilizado pela primeira vez por Candler e Norton (1977).

Sob certas condições, os problemas de programação em dois níveis podem ser reformulados como problemas de Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio (MPEC), cuja origem está relacionada ao modelo econômico de Stackelberg (1952), apresentado brevemente no Capítulo 2. Porém, o termo “Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio” foi introduzido por Harker e Pang (1988).

O MPEC constitui-se em uma ferramenta para modelar o comportamento de um determinado agente de geração, devido à possibilidade de considerar variáveis primais (produção das usinas) e duais (preço) simultaneamente em um mesmo problema de otimização.

Entretanto, para modelar a interação entre mais de um agente gerador participante de um mercado de energia elétrica competitivo, pode ser utilizado um modelo de programação matemática chamado de Problema de Equilíbrio com Restrições de Equilíbrio (EPEC). Ou seja, quando vários agentes de geração encaram simultaneamente seus MPECs, temos um EPEC.

A estrutura e principais características dos problemas de programação em dois níveis, MPECs e as técnicas de solução aplicáveis a esses problemas, bem como uma introdução aos EPECs, serão apresentadas neste capítulo.

## 3.2 PROGRAMAÇÃO EM DOIS NÍVEIS

### 3.2.1 Formulação e Estrutura

Um problema de dois níveis (PDN) é um problema de programação matemática com a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} F(x, y), \\ \text{sujeito a:} \end{aligned} \tag{1}$$

$$H(x, y) \leq 0,$$

em que  $y$ , para cada valor de  $x$ , é uma solução para o seguinte problema de nível inferior:

$$\begin{aligned} \min_y f(x, y), \\ \text{sujeito a:} \end{aligned} \tag{2}$$

$$h(x, y) \geq 0,$$

em que:

$$x \in \mathbb{R}^m;$$

$$y \in \mathbb{R}^n;$$

$$F, f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R};$$

$$H : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l; e$$

$$h : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

O Problema (1) é denominado de problema de primeiro nível ou problema líder e (2) é denominado problema de segundo nível ou problema seguidor. As variáveis  $x$  e  $y$  são denominadas de variáveis de nível superior e inferior, respectivamente, sendo que  $x$  é tratado como um parâmetro para a função objetivo  $f$  e as restrições  $h$  do segundo nível. A função  $F$  é chamada de função objetivo de primeiro nível e  $H$  é a restrição de primeiro nível, a qual define um conjunto compacto. Assume-se que  $F$ ,  $f$ ,  $H$  e  $h$  sejam contínuas e diferenciáveis. Considera-se ainda que o par  $(x^*, y^*)$  seja uma solução do problema de dois níveis.

A estrutura particular de um PDN facilita a formulação de uma vasta gama de problemas de ordem prática que envolvam um processo hierárquico de tomada de decisão, como problemas de planejamento de sistemas de transporte e configuração de redes (CASALI, 2012), administração e gerenciamento de negócios (BARD, 1983), aplicações no setor agrícola (CANDLER *et al.*, 1981), planejamento de sistemas de energia elétrica (ARROYO e GALIANA, 2005), planejamento militar (BRACKEN e MCGILL, 1974a), modelos econômicos e política governamental (CASSIDY *et al.*, 1971), controle de tráfego em sistemas de telecomunicações (KELLY *et al.*, 1998), dentre outros (DEMPE, 2003).

### 3.2.2 Complexidade e Métodos de Solução

Problemas de programação em dois níveis constituem uma classe de difícil solução, uma vez que o problema seguidor é definido implicitamente e a região viável do problema de dois níveis é não convexa, mesmo que as regiões viáveis de ambos os problemas líder e seguidor sejam convexas (LUO *et al.*, 1996; MACAL e HURTER, 1997; CANDAL, 2005; RALPH, 2008a; HERSKOVITS *et al.*, 2012). Diante disso, para solucionar PDNs são necessários algoritmos especializados que façam uso de processos enumerativos, *branch and bound*, penalidade exata, decomposição, dentre outros (BIALAS e KARWAN, 1982; WHITE e ANANDALINGAM, 1993; LUO *et al.*, 1996; VISWESWARAN *et al.*, 1996).

Ao assumir que o problema seguidor (2) é convexo<sup>10</sup> em  $y$  para um  $x$  fixo, pode-se substituir esse problema por suas condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) (BAZARAA *et al.*, 1993; NOCEDAL e WRIGHT, 1999). O resultado é um problema de Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio (MPEC) (LUO *et al.*, 1996). É importante frisar que nem sempre é possível formular um PDN por meio de um MPEC e, por isso, um PDN não pode ser considerado um caso especial de MPEC (ALLENDE e STILL, 2013; DEMPE e ZEMKOHO, 2014).

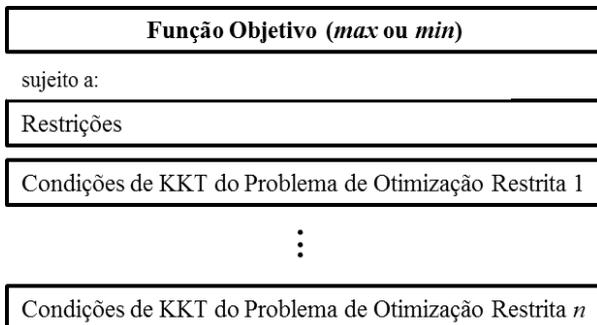
### 3.3 PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA COM RESTRIÇÕES DE EQUILÍBRIO

Um problema de Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio (MPEC) é um problema de otimização constituído por restrições, dentre as quais, representam condições de equilíbrio relacionadas a um ou mais problemas de otimização. Essas condições de equilíbrio podem ser representadas pelas condições de KKT dos respectivos problemas. Ou seja, um MPEC é um problema de otimização em que as restrições incluem outros problemas de otimização ou complementariedade relacionados. As figuras 2 e 3 ilustram essas afirmações.



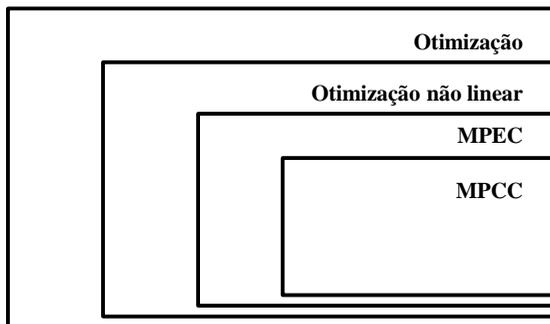
**Figura 2. Estrutura de um MPEC: restrições formadas por outros problemas de otimização.**

<sup>10</sup> Essa consideração mostra-se verdadeira em diversas aplicações na engenharia, uma vez que o problema de segundo nível normalmente representa um modelo matemático de um sistema físico (HERSKOVITS *et al.*, 2012).



**Figura 3. Estrutura de um MPEC: restrições formadas por condições de KKT.**

Um MPEC é equivalente a um problema de Programação Matemática com Restrições de Complementariedade (MPCC), quando o MPEC é formado por um único problema de segundo nível (GABRIEL *et al.*, 2013). Por esta razão, um MPCC constitui-se em uma importante subclasse dos problemas de MPEC (FUKUSHIMA e LIN, 2004).



**Figura 4. Contextualização dos MPECs e MPCCs (RODRIGUES, 2005).**

A formulação e estrutura do MPEC resultante do problema de dois níveis apresentado na seção anterior pode ser observada a seguir.

### 3.3.1 Formulação e Estrutura

Com base no equacionamento (1) e (2), o MPEC associado possui a seguinte estrutura:

$$\min_{x,y,\mu} F(x, y), \quad (3)$$

sujeito a:

$$H(x, y) \leq 0, \quad (4)$$

$$\nabla_y f(x, y) - \mu^T \nabla_y h(x, y) = 0, \quad (5)$$

$$\mu^T h(x, y) = 0, \quad (6)$$

$$h(x, y) \geq 0, \quad (7)$$

$$\mu \geq 0, \quad (8)$$

em que:

$\mu \in \mathbb{R}^p$  vetor de multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade do problema seguidor;

$\nabla_y f(x, y)$  gradiente de  $f(x, y)$  com relação à variável  $y$ ;

$\nabla_y h(x, y)$  gradiente de  $h(x, y)$  com relação à variável  $y$ .

As restrições (5) a (8) representam as condições de KKT do problema seguidor (2), as quais são condições necessárias e suficientes para a existência de um ponto de mínimo de (2), já que o problema seguidor considerado neste trabalho é linear e, portanto, convexo.

A Restrição (5) determina que o gradiente da função Lagrangeana do problema seguidor deve ser nulo na solução ótima  $(x^*, y^*)$ . A função Lagrangeana é definida como:

$$L(x, y, \mu) = f(x, y) - \mu^T h(x, y). \quad (9)$$

A Restrição (6) define que o produto interno do vetor de multiplicadores de Lagrange (associados às restrições de desigualdade do problema seguidor) e as restrições de desigualdade é nulo. As restrições (6) a (8) são conhecidas como restrições de complementariedade e também podem ser escritas da seguinte forma:

$$0 \leq \mu \perp h(x, y) \geq 0. \tag{10}$$

em que  $\perp$  indica a complementariedade ( $\mu^T h(x, y) = 0$ ).

A Restrição (7) corresponde à restrição de desigualdade do problema seguidor e (8) define que o multiplicador de Lagrange ( $\mu$ ) deve ser positivo.

Por fim, é importante destacar que a solução do problema de nível superior depende das variáveis primais  $x, y$  e das variáveis duais  $\mu$  relacionadas ao problema de segundo nível, conforme detalhado na próxima seção.

### 3.3.2 Exemplo Ilustrativo 1

Para ilustrar o processo de resolução de um PDN transformado para um MPEC, considere o problema abaixo (CONEJO *et al.*, 2006):

$$\begin{aligned} & \min_{x,y} 4y - x, \\ & \text{sujeito a:} \\ & \quad y + 2x \leq 8, \\ & \quad \min_y -y - x, \\ & \quad \text{sujeito a:} \\ & \quad \quad -y \leq 0, \\ & \quad \quad y + x \leq 7, \\ & \quad \quad -x \leq 0, \\ & \quad \quad x \leq 4. \end{aligned} \tag{11}$$

Conforme exposto, pode-se substituir o problema de segundo nível por suas condições de KKT, obtendo assim, o seguinte problema não linear de um único nível (MPEC):

$$\begin{aligned}
 & \min_{x,y,\mu_1,\mu_2} 4y - x, \\
 & \text{sujeito a:} \\
 & \quad y + 2x \leq 8, \\
 & \quad -1 - \mu_1 + \mu_2 = 0, \\
 & \quad -\mu_1 y = 0, \\
 & \quad \mu_2(y + x - 7) = 0, \\
 & \quad -y \leq 0, \\
 & \quad y + x \leq 7, \\
 & \quad -x \leq 0, \\
 & \quad x \leq 4, \\
 & \quad \mu_1, \mu_2 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

A solução desse problema de programação não linear é  $x = 1$ ,  $y = 6$ ,  $\mu_1 = 0$  e  $\mu_2 = 1$ .

### 3.3.3 Complexidade

Embora os MPECs e MPCCs sejam problemas não lineares, estes possuem algumas particularidades que contribuem para dificultar sua resolução por meio de algoritmos desenvolvidos para problemas de programação não linear.

A grande dificuldade de resolução desses problemas está nas restrições de complementariedade (6) a (8). Devido à Restrição (6), a região viável do MPEC é não convexa e, portanto, não há garantia de otimalidade da solução encontrada. Ademais, essas restrições fazem com que o MPEC não satisfaça as condições de Qualificação de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ) e de Independência Linear (LICQ)<sup>11</sup>, necessárias para garantir a existência de multiplicadores de Lagrange nas equações de KKT. Consequentemente, variáveis primais e multiplicadores que satisfaçam as condições de KKT, os chamados pontos estacionários, podem não existir (MANGASARIAN e FROMOVITZ, 1967; RALPH, 2008a; CASALI, 2012). No entanto, é

<sup>11</sup> Pelo fato de não atender as condições de qualificação MFCQ e LICQ, os gradientes das restrições ativas são linearmente dependentes, não existe trajetória central e a linearização das restrições pode ser inconsistente próximo de uma solução, o que dificulta a busca de uma solução viável para o problema de MPEC (CASALI, 2012).

válido mencionar que existe uma série de variantes de restrições de qualificação especialmente adaptadas para MPECs (GABRIEL *et al.*, 2013).

Portanto, métodos de otimização desenvolvidos para problemas não lineares, baseados nas condições de KKT, podem encontrar dificuldades quando diretamente aplicados à resolução de MPECs e MPCCs. Contudo, diversos algoritmos e métodos de solução têm sido propostos para estes problemas.

### 3.3.4 Métodos de Solução

Conforme destacado na seção anterior, em MPECs ou MPCCs, a questão fundamental é como lidar com as restrições de complementariedade, as quais introduzem não linearidades e provocam dificuldades na resolução desse tipo de problema. Diante disso, diversas metodologias, algoritmos, bem como alternativas de substituição dessas restrições têm sido desenvolvidos para contornar tais dificuldades (ANITESCU, 2000; FLETCHER e LEYFFER, 2004; FUKUSHIMA e LIN, 2004; LEYFFER *et al.*, 2006; HU *et al.*, 2008; RALPH, 2008a; DENEGRÉ e RALPHS, 2009).

Nas próximas subseções serão apresentadas algumas abordagens de ordem prática, as quais permitem a adaptação de MPECs e MPCCs para que sejam resolvidos por meio de algoritmos voltados para problemas não lineares. Definições e provas de convergência dos métodos aqui citados, bem como condições de qualificação associadas aos respectivos pontos estacionários podem ser verificadas nas referências citadas.

#### 3.3.4.1 Regularização

A primeira dessas abordagens é chamada de método de regularização (SCHOLTES, 2001; FUKUSHIMA e LIN, 2004) e consiste na resolução do MPEC (3) a (8) com as restrições de complementariedade relaxadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{x, y, \mu} F(x, y), \\ \text{sujeito a:} \end{aligned} \tag{13}$$

$$H(x, y) \leq 0, \quad (14)$$

$$\nabla_y f(x, y) - \mu^T \nabla_y h(x, y) = 0, \quad (15)$$

$$\mu^T h(x, y) \leq \varepsilon, \quad (16)$$

$$h(x, y) \geq 0, \quad (17)$$

$$\mu \geq 0, \quad (18)$$

em que:

$\varepsilon$  parâmetro de relaxação associado às restrições de complementariedade.

Ao considerar um parâmetro  $\varepsilon > 0$ , relaxa-se a restrição de complementariedade e a região viável do problema é aumentada, o que facilita a convergência do mesmo. Esse parâmetro pode ser reduzido iterativamente a cada resolução do problema não linear e à medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$  espera-se encontrar um ponto  $(x, y)$  próximo à complementariedade.

### 3.3.4.2 Substituição das Restrições de Complementariedade

O MPEC pode ser reformulado por meio da substituição das restrições de complementariedade por outras funções não lineares (LEYFFER, 2006), as quais possuem as seguintes características:  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi(a, b) = 0$  se e somente se  $a, b \leq 0$  e  $a, b \geq 0$ . Existem diversas funções destinadas a esse propósito, dentre elas destaca-se a função *Fischer-Burmeister* suavizada<sup>12</sup> (FACCHINEI *et al.*, 1999; FUKUSHIMA e PANG, 1999):

$$\phi_\varepsilon(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2 + 2\varepsilon^2}. \quad (19)$$

Sendo que a função acima é diferenciável e:

$$\phi_\varepsilon(a, b) = 0 \Leftrightarrow a > 0, b > 0, ab = \varepsilon^2. \quad (20)$$

O problema de interesse pode ser então escrito do seguinte modo:

<sup>12</sup> A função *Fischer-Burmeister* original não possui o termo  $2\varepsilon^2$ , o qual qualifica a função como “suavizada”.

$$\min_{x,y,\mu} F(x, y) \quad (21)$$

sujeito a:

$$H(x, y) \leq 0, \quad (22)$$

$$\nabla_y f(x, y) - \mu^T \nabla_y h(x, y) = 0, \quad (23)$$

$$\mu + h(x, y) - \sqrt{\mu^2 + [h(x, y)]^2} + 2\varepsilon^2 = 0, \quad (24)$$

$$h(x, y) \geq 0, \quad (25)$$

$$\mu \geq 0. \quad (26)$$

Dado que a função  $\phi_\varepsilon$  é sempre diferenciável, obtém-se uma aproximação suave do problema (3) a (8). Assim como no caso anterior, a ideia é resolver problemas não lineares iterativamente à medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , no intuito de identificar um ponto estacionário do problema original.

### 3.3.4.3 Penalização das Restrições de Complementariedade

Outra técnica que pode ser empregada é a penalização das restrições de complementariedade (HU e RALPH, 2004):

$$\min_{x,y,\mu} F(x, y) + \frac{1}{\sigma} [\mu^T h(x, y)], \quad (27)$$

sujeito a:

$$H(x, y) \leq 0, \quad (28)$$

$$\nabla_y f(x, y) - \mu^T \nabla_y h(x, y) = 0, \quad (29)$$

$$h(x, y) \geq 0, \quad (30)$$

$$\mu \geq 0, \quad (31)$$

em que:

$\sigma$  parâmetro de penalidade.

Como pode ser observado, as restrições de complementariedade são retiradas do conjunto de restrições do problema e adicionadas na função objetivo, de modo que violações dessas condições de complementariedade sejam penalizadas. Para tanto, é utilizado um

parâmetro de penalidade  $\sigma > 0$ , com a mesma função do parâmetro de relaxação  $\epsilon$  utilizado anteriormente.

Em Fukushima e Lin (2004) é proposto um método que penaliza uma função *Fischer-Burmeister* (substitui a restrição de complementariedade) e as demais restrições, tornando o problema irrestrito. Outros métodos de penalização podem ser verificados em Luo *et al.* (1996) e Huang *et al.* (2006).

#### 3.3.4.4 Programação Inteira Mista

Fortuny-Amat e McCarl (1981) propuseram uma maneira de transformar as condições de complementariedade em restrições inteiras mistas, o que, segundo os autores, permite a determinação de uma solução global para o MPEC original. O procedimento consiste em substituir as restrições de complementariedade por restrições binárias e resolver o problema utilizando um algoritmo de programação linear inteira mista.

Para ilustrar esse procedimento, podemos considerar a restrição de complementariedade (6). No produto  $\mu^T h(x,y)=0$ , se  $\mu>0$ , então a restrição primal  $h(x,y)$  está ativa ( $h(x,y)=0$ ). Caso a restrição não esteja ativa, então seu multiplicador de Lagrange é nulo ( $\mu=0$ ). Essa natureza disjuntiva permite que as restrições de complementariedade sejam substituídas por restrições com variáveis binárias.

O MPEC inteiro misto, equivalente ao original (3) a (8), é mostrado abaixo:

$$\min_{x,y,\mu} F(x,y), \quad (32)$$

sujeito a:

$$H(x,y) \leq 0, \quad (33)$$

$$\nabla_y f(x,y) - \mu^T \nabla_y h(x,y) = 0, \quad (34)$$

$$\mu \leq M\eta, \quad (35)$$

$$h(x,y) \leq M(1-\eta), \quad (36)$$

$$h(x,y) \geq 0, \quad (37)$$

$$\mu \geq 0, \quad (38)$$

$$\eta \in \{0,1\}, \quad (39)$$

em que:

- $\eta$             variável binária;
- $M$             constante positiva finita e suficientemente grande.

Pode-se notar, que se  $\eta=1$ ,  $\mu$  está limitado em  $M$  e  $h(x,y)$  está ativa, ao passo que se  $\eta=0$ ,  $\mu=0$  e  $h(x,y)$  não está ativa, sendo limitada por  $M$ .

Conforme será visto no próximo capítulo, a técnica introduzida por Fortuny-Amat e McCarl será utilizada como estratégia para tratamento das condições de complementariedade do problema proposto.

Considerando ainda um modelo de programação inteira mista, Barroso (2006) propõe uma expansão binária para lidar com os produtos de variáveis existentes no problema. A proposta consiste em aproximar variáveis de decisão contínuas por um conjunto de valores discretos. A justificativa para essa discretização está no fato de que as variáveis de decisão, como por exemplo, decisões de oferta de preço ou quantidade, geralmente assumem valores discretos dentro de um determinado intervalo. Supondo, por exemplo, um intervalo  $[\underline{\mu}; \bar{\mu}]$  para a variável  $\mu$ , pode-se escrever uma aproximação discreta para  $\mu$  de acordo com a Equação (40).

$$\mu = \underline{\mu} + \frac{(\bar{\mu} - \underline{\mu})}{2^K} \sum_{\kappa=0}^K 2^\kappa \eta_\kappa, \quad (40)$$

em que:

- $K$             inteiro não negativo, sendo que  $K+1$  resulta no número de variáveis binárias necessárias para representar  $\mu$ ;
- $\kappa$             índice associado às variáveis binárias, tal que  $\kappa = 0, \dots, K$  ;
- $\eta_\kappa$         variável binária.

Multiplicando ambos os lados da restrição acima por  $h(x,y)$  resulta em:

$$\mu \cdot h(x, y) = \underline{\mu} \cdot h(x, y) + \frac{(\bar{\mu} - \underline{\mu})}{2^K} \sum_{\kappa=0}^K 2^\kappa \eta_\kappa \cdot h(x, y). \quad (41)$$

As equações (40) e (41) permitem substituir a variável  $\mu$  e o produto  $\mu^T h(x,y)$  pelas respectivas expansões binárias. No entanto, a aplicação desses métodos baseados em programação linear inteira mista a problemas de grande porte pode ser comprometida em função do elevado número de variáveis binárias do problema resultante. Para amenizar essa dificuldade, Fortuny-Amat e McCarl (1981) já haviam recomendado uma forma equivalente para resolver o problema original. Trata-se da utilização de variáveis denominadas SOS (*Special Ordered Sets*), cuja vantagem advém do fato de possibilitar a substituição das condições de complementariedade sem expandir a região viável do problema, o que pode proporcionar uma melhor eficiência computacional na resolução do mesmo.

Nessa linha de abordagem, Siddiqui e Gabriel (2012) utilizam um método de decomposição (Schur) juntamente com variáveis SOS do tipo 1 (SOS1) para resolver um problema de grande porte. Tal problema não pôde ser resolvido pela abordagem anterior (Fortuny-Amat e McCarl). As duas abordagens foram também comparadas na resolução de problemas pequenos, sendo que os tempos computacionais foram inferiores na abordagem de Siddiqui e Gabriel. O problema equivalente proposto assume a seguinte forma:

$$\min_{x,y,\mu} F(x, y), \quad (42)$$

sujeito a:

$$H(x, y) \leq 0, \quad (43)$$

$$\nabla_y f(x, y) - \mu^T \nabla_y h(x, y) = 0, \quad (44)$$

$$u - (v^+ - v^-) = 0, \quad (45)$$

$$u = \frac{\mu + h(x, y)}{2}, \quad (46)$$

$$(v^+ - v^-) = \frac{\mu - h(x, y)}{2}, \quad (47)$$

$$h(x, y) \geq 0, \quad (48)$$

$$\mu \geq 0, \quad (49)$$

$$u, v^+, v^- \geq 0, \quad (50)$$

em que:

$u$  variável auxiliar;

$v^+, v^-$  variáveis SOS1.

### 3.3.4.5 Utilização de Métodos de Decomposição

As abordagens apresentadas tem o propósito de lidar com as restrições de complementariedade advindas das condições de KKT, as quais introduzem dificuldades na resolução dos MPECs e MPCCs. Tais dificuldades podem ser agravadas em virtude do tamanho e/ou consideração de incertezas nos problemas a serem resolvidos. Diante disso, técnicas de decomposição (KAZEMPOUR e CONEJO, 2012; GABRIEL *et al.*, 2013; LUNA, 2013) podem ser uma alternativa adicional para auxiliar na busca de soluções viáveis para os problemas de interesse.

### 3.3.4.6 Utilização das Condições Fortes de Dualidade

A última metodologia alternativa a ser apresentada neste trabalho faz uso da Condição Forte de Dualidade (DANTZIG, 1998) para substituir as condições de complementariedade de KKT. Diversos autores (CANDAL, 2005; BARROSO, 2006; POZO e CONTRERAS, 2011) utilizam essa abordagem, que consiste em substituir o problema seguidor por um conjunto de restrições compostas pelas restrições primais do problema seguidor, restrições duais e a condição de dualidade forte, também conhecida como igualdade primal-dual. A condição de dualidade forte estabelece que, considerando um problema convexo, no ponto ótimo, o valor da função objetivo do problema primal é igual ao valor da função objetivo do problema dual. Neste caso, a igualdade primal-dual equivale às condições de complementariedade de KKT do problema seguidor.

O exemplo a seguir, adaptado de Marcotte e Savard (2005) ilustra esta abordagem e permite um melhor entendimento do assunto.

### 3.3.5 Exemplo Ilustrativo 2

Considere uma empresa que deseja determinar o aumento no preço de um conjunto de produtos destinados a consumidores com requisitos específicos e opções alternativas de escolha. A questão enfrentada pela empresa é como determinar um valor de aumento que

não seja excessivo a ponto de afastar os consumidores de seus produtos, ao mesmo tempo em que não seja baixo a ponto de comprometer a receita da empresa. O problema de dois níveis correspondente é formulado da seguinte maneira:

$$\max_{p,x,y} px, \quad (51)$$

sujeito a:

$$\min_{x,y} (c + p)x + dy, \quad (52)$$

sujeito a:

$$Ax + By = b,$$

$$x, y \geq 0,$$

em que:

- $p$  vetor de decisões do primeiro nível, que representa o incremento no preço das mercadorias;
- $c, d$  vetor de preços anteriores ao incremento proposto;
- $x, y$  vetor de quantidades consumidas;
- $A, B$  matrizes de tecnologia associadas à demanda dos consumidores;
- $b$  vetor de demanda dos produtos.

O problema seguidor (52) pode ser então substituído por suas restrições primais (54) e (55), duais (56) e (57), condições de complementariedade entre restrição do primal e variável dual (58) e condições de complementariedade entre restrições do dual e variáveis primais, dadas pelas equações (59) e (60) a seguir.

$$\max_{p,x,y} px, \quad (53)$$

sujeito a:

$$Ax + By = b, \quad (54)$$

$$x, y \geq 0, \quad (55)$$

$$\lambda A \leq c + p, \quad (56)$$

$$\lambda B \leq d, \quad (57)$$

$$\lambda(Ax + By - b) = 0, \quad (58)$$

$$(c + p - \lambda A)x = 0, \quad (59)$$

$$(d - \lambda B)y = 0, \quad (60)$$

em que:

$\lambda$  vetor de variáveis duais associadas às restrições do problema seguidor.

Conforme destacado anteriormente, as restrições de complementariedade (58) a (60) são equivalentes à igualdade primal-dual. Por meio de algumas manipulações algébricas é possível confirmar que o MPEC resultante pode ser escrito da seguinte forma:

$$\max_{p,x,y} px, \quad (61)$$

sujeito a:

$$Ax + By = b, \quad (62)$$

$$x, y \geq 0, \quad (63)$$

$$\lambda A \leq c + p, \quad (64)$$

$$\lambda B \leq d, \quad (65)$$

$$(c + p)x + dy - \lambda b = 0. \quad (66)$$

A substituição das condições de complementariedade pela condição de dualidade forte ou restrição primal-dual (66) diminui o número de produtos de variáveis e o número de restrições do problema. Os produtos de variáveis  $\lambda x$ ,  $\lambda y$  e  $px$ , que existiam nas equações de complementariedade foram substituídos por apenas um conjunto de produto de variáveis ( $px$ ) em uma única restrição. Assim, as não linearidades do MPEC resultante estão presentes apenas na função objetivo e em uma das restrições. Essa maneira de representar o problema de interesse pode ser aliada às alternativas apresentadas anteriormente para lidar com produtos de variáveis (Fortuny-Amat e McCarl, Barroso e Siddiqui e Gabriel) ou mesmo a penalização dessa restrição não linear.

### 3.4 PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO COM RESTRIÇÕES DE EQUILÍBRIO

O problema de programação em dois níveis ou multinível é de grande valia para modelar uma situação envolvendo dois ou mais

agentes tomadores de decisão, cujos objetivos são muitas vezes conflitantes e cada um controla apenas determinadas variáveis desse problema. Os agentes tomadores de decisão podem ser modelados no mesmo ou em diferentes níveis hierárquicos. No exemplo da seção anterior, a empresa foi modelada no primeiro nível e os consumidores no segundo nível do problema. Já em um problema de determinação de ofertas de um gerador de energia participante de um mercado *pool*, o gerador pode ser modelado no primeiro nível e o operador do mercado/sistema no segundo.

Em ambas as situações, o agente de primeiro nível ou líder controla um conjunto de variáveis associadas as suas capacidades de produção e/ou preços ofertados, por exemplo, enquanto o(s) agente(s) de segundo nível ou seguidor(es) controla(m) outro conjunto de variáveis como níveis de produção e consumo de todos os agentes envolvidos, por exemplo.

O processo de tomada de decisão do modelo tem início com os agentes de nível superior, os quais decidem segundo seus objetivos, considerando suas restrições e as possíveis reações dos agentes seguidores. Dada essa decisão, o agente de segundo nível reage de acordo com seus próprios objetivos. Assim, as decisões do líder podem influenciar tanto as decisões dos seguidores como suas próprias. Trata-se de um processo iterativo em que as reações dos seguidores fazem com que o líder repense sua estratégia, tomando novas decisões que, por sua vez, fazem com que os agentes seguidores também repensem as suas.

Quando o problema do agente seguidor é transformado para suas condições de otimalidade e assim, internalizado no problema do líder, o modelo resultante corresponde a um MPEC ou MPCC. A maneira de resolver esses modelos foi discutida nas seções anteriores.

Contudo, caso exista mais de um agente líder (agentes geradores num mercado de energia, por exemplo) e o objetivo seja representar a situação de equilíbrio entre eles, pode ser utilizado um Problema de Equilíbrio com Restrições de Equilíbrio (EPEC) (HU e RALPH, 2007; ZHANG, 2010; GABRIEL *et al.*, 2013). Esse modelo matemático é utilizado para encontrar um ponto de equilíbrio que resolva simultaneamente diversos MPECs, os quais são parametrizados por variáveis de decisão de outros MPECs. Trata-se de uma abordagem por teoria dos jogos, conforme destacado no Capítulo 2. O ponto de

equilíbrio encontrado equivale a um equilíbrio de Nash e corresponde ao ponto no qual nenhum líder consegue melhorar o valor de sua função objetivo atuando de forma unilateral (FUDENBERG e TIROLE, 1991; GIBBONS, 1992). Ou seja, nenhum agente líder consegue melhorar sua situação, dadas as ofertas dos demais líderes e as reações dos seguidores. No caso de um mercado de energia, os líderes podem ser os geradores participantes do sistema e o seguidor o OM, comum a todos os líderes. Nesse caso, existem múltiplos líderes (agentes de geração) e apenas um seguidor, e o modelo pode ser definido como um jogo de múltiplos líderes e um seguidor comum (do inglês, *multi-leader-common-follower game*) (LEYFFER e MUNSON, 2010).

Um procedimento bastante utilizado para resolver Problemas de Equilíbrio com Restrições de Equilíbrio, e que será empregado neste trabalho, é conhecido como método de diagonalização (HOBBS *et al.*, 2000) e consiste na resolução de  $n$  MPECs, cada um por vez, em um processo iterativo até que uma solução de equilíbrio seja encontrada.

Outra maneira de solucionar um EPEC é resolver os MPECs simultaneamente (BAUTISTA *et al.*, 2007; LEYFFER e MUNSON, 2010). De um modo geral, isto é atingido por meio da consideração simultânea das condições de otimalidade de todos os MPECs em um único problema, o qual pode ser resolvido com a utilização das técnicas para tratamento das condições de complementariedade de KKT, discutidas anteriormente.

### 3.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A motivação principal deste capítulo foi apresentar as ferramentas matemáticas que serão utilizadas na formulação proposta nesta Tese, que tem o objetivo geral de estudar o processo de determinação de estratégias de oferta em mercados de energia. Esse processo envolve a participação efetiva de diversos agentes tomadores de decisão e a ferramenta escolhida para a formulação do problema foi a programação matemática em dois níveis, juntamente com a solução de um modelo de equilíbrio.

A forma mais utilizada na literatura para resolver um problema de programação matemática em dois níveis consiste em transformá-lo para um MPEC. A formulação, estrutura, aplicações, complexidades e técnicas de solução desses problemas foram abordadas neste capítulo,

em que foi enfatizada a dificuldade de solução e existência de diferentes métodos, os quais buscam contornar tais dificuldades. Ao final do capítulo, foram também apresentados os EPECs, que consistem de um modelo em que são resolvidos diversos MPECs iterativamente ou de uma única vez.

O conceito de equilíbrio, presente nos modelos, está também presente na natureza, sobretudo nas relações econômicas e sociais entre diferentes indivíduos. Matematicamente, a noção de equilíbrio está relacionada com as condições de complementariedade, advindas da transformação dos modelos de dois níveis para modelos de MPEC ou MPCC. Com relação aos EPECs, esse conceito refere-se ao equilíbrio entre as soluções dos problemas dos diferentes agentes.

Embora esses modelos possuam características de problemas não lineares, conforme explorado, alguns aspectos técnicos relacionados às condições de complementariedade fazem com que o desenvolvimento de métodos eficientes de solução seja uma tarefa árdua e desafiante.

Nesse contexto, aspectos práticos relacionados a cada tipo de problema modelado, bem como a própria maneira de formular os problemas, devem ser levados em consideração na definição das técnicas de abordagem a serem aplicadas na resolução dos mesmos.

Assim, na sequência deste trabalho, cujo sistema em foco é um mercado de energia com predominância de geração hidrelétrica, o problema será formulado e uma abordagem de solução será proposta.

## **CAPÍTULO 4**

### **ESTRATÉGIAS DE OFERTAS EM MERCADOS**

### **COMPETITIVOS DE ENERGIA ELÉTRICA COM**

### **PREDOMINÂNCIA DE GERAÇÃO HIDRELÉTRICA**

---

#### **4.1 INTRODUÇÃO**

Neste capítulo será abordado o problema da determinação de ofertas de agentes de geração em mercados de energia elétrica de curto prazo, em que o foco do estudo é o caso de sistemas com predominância de geração hidrelétrica. Esse problema pode ser formulado como um problema de otimização de dois níveis, transformado para um MPEC, o qual pode ser resolvido por meio de algoritmos específicos, de acordo com o que foi discutido no capítulo anterior. No entanto, conforme será detalhado adiante, o MPEC resultante possui uma estrutura que permite a transformação do modelo não linear para um problema de PLIM. Esse modelo de PLIM é resolvido por cada participante do mercado e a interação entre eles pode ser avaliada por meio da resolução sequencial desses problemas até que um equilíbrio seja atingido. Para facilitar a convergência do modelo, é proposta uma abordagem baseada nas restrições de não-antecipatividade (utilizada em modelos de programação estocástica), as quais atuam de modo a acoplar as decisões

de despacho resultantes dos problemas solucionados por cada agente de geração participante do mercado, contribuindo assim para atingir o equilíbrio do modelo. A formulação do problema e todas essas questões serão discutidas na sequência.

#### 4.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DE DOIS NÍVEIS

Ao operar em um mercado de curto prazo de energia elétrica, o agente vendedor é confrontado diariamente com o desafio de determinar sua oferta de preço e quantidade de energia, a fim de obter o maior retorno possível e maximizar seus lucros ao longo do tempo. Todavia, além de seus próprios custos e restrições de produção, sua receita está sujeita, principalmente, às ofertas dos outros agentes participantes do mercado.

Uma vez definidas, todas essas ofertas passam a ser conhecidas por um Operador do Mercado (OM), que irá determinar a geração de cada usina de modo a atender a demanda para o próximo período de 24 horas ao menor custo de operação possível. Diante dessas circunstâncias, a estrutura do problema de determinação da oferta ótima do agente em estudo pode ser formulada por um problema de dois níveis. Assumindo as ofertas dos concorrentes conhecidas, sob o ponto de vista desse agente, tal formulação permite antecipar as decisões a serem tomadas pelo OM, ou seja, os resultados do mercado.

No primeiro nível, também denominado de problema líder, encontra-se o problema de maximização da receita líquida do Agente  $L$ <sup>13</sup>, sujeita aos limites de produção e restrições operativas de suas usinas, restrições operativas dos reservatórios associados a essas usinas, bem como restrições de *unit commitment* (WOOD e WOLLENBERG, 1996). Adicionalmente, neste problema de primeiro nível também é modelado como restrição, o problema do OM, o qual refere-se à minimização do custo total de operação do sistema. Por sua vez, no segundo nível, encontra-se este próprio problema do OM, denominado de problema seguidor.

---

<sup>13</sup> Como a maximização da receita de um dado agente corresponde ao problema de primeiro nível ou problema líder, chamaremos de Agente (ou Empresa) Líder  $L$ , ou simplesmente Agente  $L$ , a empresa para a qual queremos determinar a maximização da receita.

Em linhas gerais, o problema de dois níveis possui a seguinte estrutura:

max *Receita Líquida do Agente Líder L*

sujeito a:

*Limites de geração ofertada pelas usinas pertencentes a L*

*Restrições operativas das usinas e reservatórios pertencentes a L*

*Restrições de Unit Commitment das usinas pertencentes a L*

min *Custo Total de Operação do Sistema* (67)

sujeito a:

*Restrição de atendimento à demanda*

*Limites de geração das usinas do sistema*

*Restrições de transmissão*

O detalhamento da formulação dos problemas líder (maximização da receita) e seguidor (minimização do custo total de operação do sistema) será mostrado, de forma separada, nas próximas duas subseções. Após isso, será apresentada a formulação completa do problema de dois níveis, seguida pela transformação para um problema de otimização não linear de um único nível, que corresponde ao MPEC, e pela transformação desse MPEC para um problema de PLIM. A última seção do capítulo (antes das considerações finais) trata da competição entre os agentes modelada por meio da implementação de um problema de equilíbrio.

Neste trabalho, o problema de otimização de ofertas, a ser resolvido por um agente específico (Agente *L*), será formulado em seu caso determinístico, em que as ofertas dos concorrentes, afluências para cada reservatório e demanda do sistema serão consideradas conhecidas para todo o horizonte de estudo. Porém, não serão consideradas restrições de *unit commitment*, bem como restrições de transmissão. Essas últimas podem incluir não convexidades ao problema seguidor e com isso, não há garantia de que seja possível transformar o problema de dois níveis em um MPEC, conforme metodologia utilizada nesse trabalho (ALLENDE e STILL, 2013; DEMPE e ZEMKOHO, 2014).

### 4.2.1 Maximização da Receita

Em um ambiente de mercado, a cada estágio de tempo, as usinas do sistema são remuneradas pelo produto entre o custo marginal de operação e a quantidade de energia despachada. Ao abaterem os custos totais de produção (produto entre o custo incremental de produção e a energia despachada), cada usina obtém sua receita líquida, dada por:

$$R_{kt} = \pi_t \cdot g_{kt} - c_{kt} \cdot g_{kt} = (\pi_t - c_{kt}) \cdot g_{kt}, \quad (68)$$

em que:

- $R_{kt}$       receita líquida da usina  $k$  no estágio  $t$  (R\$);  
 $\pi_t$         custo marginal de operação do sistema no estágio  $t$  (R\$/MWh);  
 $g_{kt}$         geração despachada na usina  $k$  no estágio  $t$  (MWh);  
 $c_{kt}$         custo incremental de produção associado a usina  $k$  no estágio  $t$  (R\$/MWh).

Conforme destacado anteriormente, neste trabalho tem-se o interesse em resolver o problema de maximização da receita do Agente  $L$ , que pode possuir em seu portfólio, tanto usinas de geração termelétricas,  $i$ , como usinas hidrelétricas,  $j$ . Dessa maneira, sua receita líquida total equivale à soma da receita líquida de todas as suas usinas ( $i, j \in L$ ) em todos os períodos.

A formulação do problema do primeiro nível é dada por:

$$\max R_L = \sum_{t=1}^T \left[ \sum_{j \in L} (\pi_t - ch_{jt}) \cdot gh_{jt} + \sum_{i \in L} (\pi_t - ct_{it}) \cdot gt_{it} \right], \quad (69)$$

sujeito a:

$$0 \leq oqt_{it} \leq gt_i^{\max}, \quad (70)$$

$$0 \leq oqh_{jt} \leq gh_j^{\max}, \quad (71)$$

$$v_{j,t+1} = v_{jt} - c \cdot \left[ q_{jt} + s_{jt} - \sum_{m \in \Omega_{M_j}} (q_{m,t-\tau_{jm}} + s_{m,t-\tau_{jm}}) - y_{jt} \right], \quad (72)$$

$$gh_{jt} = \rho_j \cdot q_{jt}, \quad (73)$$

$$v_j^{\min} \leq v_{j,t+1} \leq v_j^{\max}, \quad v_{j,T+1} \geq v_j^{\text{meta}}. \quad (74)$$

em que:

$R_L$	Receita Líquida do Agente de geração $L$ (R\$);
$L$	agente de geração participante do mercado;
$T$	número total de estágios do horizonte de estudo;
$t$	índice associado aos estágios de tempo, tal que $t=1, \dots, T$ ;
$NJ$	número total de usinas hidrelétricas do sistema;
$j$	índice associado às usinas hidrelétricas do sistema, tal que $t=1, \dots, NJ$ ;
$NI$	número total de usinas termelétricas do sistema;
$i$	índice associado às usinas termelétricas do sistema, tal que $t=1, \dots, NI$ ;
$ch_{jt}$	custo incremental de produção associado à usina hidrelétrica $j$ no estágio $t$ (R\$/MWh);
$gh_{jt}$	geração associada à usina hidrelétrica $j$ no estágio $t$ (MWh);
$ct_{it}$	custo incremental de produção associado à usina termelétrica $i$ no estágio $t$ (R\$/MWh);
$gt_{it}$	geração associada à usina termelétrica $i$ no estágio $t$ (MWh);
$oqh_{jt}$	oferta de quantidade realizada pela usina hidrelétrica $j$ para suprir energia no estágio $t$ (MWh);
$oqt_{it}$	oferta de quantidade realizada pela usina termelétrica $i$ para suprir energia no estágio $t$ (MWh);
$gh_j^{\max}$	capacidade máxima de produção da usina hidrelétrica $j$ (MWh);
$gt_i^{\max}$	capacidade máxima de produção da usina termelétrica $i$ (MWh);
$v_{jt}$	volume armazenado no reservatório associado à usina hidrelétrica $j$ no início do estágio $t$ ( $\text{hm}^3$ );
$c$	constante com valor de $3,6 \cdot 10^{-3}$ que converte unidades de vazão ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) para unidades de volume armazenado ( $\text{hm}^3$ ) equivalente em um período de tempo igual a uma hora;
$q_{jt}$	vazão turbinada pela usina hidrelétrica $j$ no estágio $t$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ );
$s_{jt}$	vazão vertida pelo reservatório da usina hidrelétrica $j$ no estágio $t$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ );
$m$	índice associado às usinas hidrelétricas localizados em

	uma determinada cascata do sistema;
$\Omega_{Mj}$	conjunto de geradores hidrelétricos localizados imediatamente a montante da usina $j$ ;
$\tau_{jm}$	tempo de viagem da água entre os reservatórios associados às usinas $m$ e $j$ (h);
$y_{jt}$	vazão afluente incremental ao reservatório da usina $j$ no estágio $t$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ );
$\rho_j$	produtibilidade da usina hidrelétrica $j$ ( $\text{MWh}/(\text{m}^3/\text{s})$ );
$v_j^{\min(\max)}$	limites mínimo (máximo) de volume armazenado no reservatório da usina $j$ ( $\text{hm}^3$ );
$v_{j,T+1}^{\text{meta}}$	limite mínimo de volume armazenado no reservatório da usina $j$ a ser alcançado no final do horizonte de estudo ( $\text{hm}^3$ ).

As equações (70) e (71) determinam que as ofertas de quantidade realizadas pelo agente  $L$  estão limitadas pela capacidade máxima de produção das respectivas usinas.

A equação de conservação da massa d'água ou equação de balanço hídrico é formulada em (72). Essa equação estabelece que o volume de cada reservatório no estágio  $t+1$  é o resultado do volume no estágio anterior, acrescido da afluência incremental, vazão turbinada e vertimento das usinas a montante, subtraído da vazão turbinada e vertimento do reservatório dessa usina considerada. Esta equação relaciona as decisões entre estágios sucessivos. Assume-se que a vazão turbinada e vertida são variáveis não negativas.

A equação (73) representa a função de produção da usina hidrelétrica e os limites de volume armazenado nos reservatórios são representados em (74).

Devido às características de sistemas predominantemente hidrelétricos, o despacho ótimo do sistema deve levar em consideração o custo de oportunidade em utilizar de imediato a água acumulada nos reservatórios ou deixá-la disponível para utilização futura. Conforme destacado, a equação de balanço hídrico faz essa consideração entre as etapas do horizonte de estudo. No entanto, faz-se necessário considerar um acoplamento com horizonte de mais longo prazo. Assim, ao final do horizonte considerado no modelo de curto prazo desenvolvido, devem ser inseridas informações acerca do custo de oportunidade da água. Tais

informações podem ser introduzidas por um conjunto de restrições calculadas por procedimentos de PDDE (FINARDI, 2003; GONÇALVES, 2007; RODRIGUES, 2009; TAKIGAWA, 2010) ou mesmo por um limite mínimo de volume (ARISTIZÁBAL, 2012) que garante manter uma quantidade de água predefinida em cada reservatório ao final do horizonte de estudo. Sabe-se que ambas as opções podem influenciar diretamente as decisões tomadas no horizonte de curto prazo considerado no modelo. Diante disso, seriam necessárias análises mais aprofundadas para avaliar os impactos, vantagens e desvantagens de cada uma dessas opções. Contudo, considera-se que estas análises devem ser realizadas em estudos posteriores. Logo, dado que é necessário realizar a coordenação entre o modelo de curto prazo e horizontes de mais longo prazo, sem, no entanto, dispor de critérios qualitativos e quantitativos que justifiquem a utilização de uma alternativa em relação à outra, optou-se por considerar um limite mínimo de volume a ser atingido no final do período de estudo. Esse limite mínimo é denominado volume meta ( $v_{j,T+1}^{meta}$ ).

Finalmente, é importante frisar que o preço do sistema ou custo marginal de operação e a geração efetiva de cada usina em cada estágio dependem das ofertas de preço e quantidade de todos os participantes do mercado (inclusive do Agente  $L$ ) e são resultantes do problema de minimização do custo total de operação do sistema realizado pelo OM, o qual é detalhado na sequência.

#### 4.2.2 Minimização do custo total de operação do sistema

O problema de minimização do custo total de operação do sistema ao longo do horizonte de estudo pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\min \sum_{t=1}^T \left[ \sum_{j=1}^{NJ} oph_{jt} \cdot gh_{jt} + \sum_{i=1}^{NI} opt_{it} \cdot gt_{it} \right], \quad (75)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{NJ} gh_{jt} + \sum_{i=1}^{NI} gt_{it} = d_t \quad (76)$$

$$0 \leq gt_{it} \leq oqt_{it}, \quad (77)$$

$$0 \leq gh_{jt} \leq oqh_{jt}, \quad (78)$$

em que:

- $oph_{jt}$  oferta de preço realizada pela usina hidrelétrica  $j$  para suprir energia no estágio  $t$  (R\$/MWh);
- $opt_{it}$  oferta de preço realizada pela usina termelétrica  $i$  para suprir energia no estágio  $t$  (R\$/MWh);
- $d_t$  demanda do sistema no estágio  $t$  (MWh).

O problema anterior é resolvido pelo OM, que recebe as ofertas de preço e quantidade das usinas do sistema, para cada intervalo de tempo, e com base na previsão de demanda, realiza o despacho das usinas de modo a minimizar o custo total de operação ao longo do horizonte de estudo.

A equação (76) representa a restrição de atendimento à demanda do sistema. Já as equações (77) e (78) definem como limites de produção das usinas suas próprias ofertas de geração. Portanto, o OM irá respeitar a oferta de quantidade de geração de cada usina, que por sua vez, obedece aos limites físicos de geração das mesmas, conforme observado nas restrições (70) e (71).

### 4.2.3 Problema de Otimização de Dois Níveis

Antes de apresentar a formulação completa do problema de dois níveis, é importante enfatizar que as restrições de balanço hídrico, função de produção das usinas e limites de armazenamento dos reservatórios (restrições (72) a (74)) pertencem ao problema correspondente ao Agente  $L$ . Portanto, o modelo desenvolvido nesse trabalho, difere de um modelo centralizado, como é o caso do SEB, por exemplo, onde o operador do mercado/sistema é o responsável pela operação e gerenciamento dos reservatórios. Isso significa que a geração despachada ( $gh_{jt}$  e  $gt_{it}$ ) pelo OM, depende apenas das ofertas de preço e quantidade ofertada pelos agentes e da demanda do sistema.

Contudo, pelo fato do OM não gerenciar os reservatórios das usinas hidrelétricas, é necessário considerar que essas usinas nem sempre estarão aptas a produzir a quantidade de energia definida pelo OM. Assim, de modo a considerar a possibilidade de haver uma diferença entre a energia despachada pelo OM (resultante do problema de segundo nível) e a real produção da usina hidrelétrica, faz-se

necessário modificar a equação (73), introduzindo uma nova variável  $gs_{jt}$ , cujo valor resulta da seguinte equação:

$$gs_{jt} = gh_{jt} - \rho_j \cdot q_{jt}, \quad (79)$$

em que:

$gs_{jt}$  variável de folga associada à diferença entre a geração despachada pelo OM e a geração suprida pela usina hidrelétrica  $j$  no estágio  $t$  (MWh).

Por outro lado, de modo a garantir que a produção da usina hidrelétrica ( $\rho_j \cdot q_{jt}$ ) possa atender a determinação do OM, este desvio é penalizado na função objetivo do problema, por meio da introdução de um novo termo:  $-\sum_{t=1}^T \sum_{j \in L} \beta \cdot |gs_{jt}|$ , em que  $\beta$  é um parâmetro positivo. Este novo termo e a restrição (79) são equivalentes às restrições  $gh_{jt} - \rho_j \cdot q_{jt} \leq gs_{jt}$ ,  $-(gh_{jt} - \rho_j \cdot q_{jt}) \leq gs_{jt}$ ,  $gs_{jt} \geq 0$  e o termo  $-\sum_{t=1}^T \sum_{j \in L} \beta \cdot gs_{jt}$  na função objetivo do problema. Além de contribuir para que a produção da usina hidrelétrica atenda a decisão de despacho do OM, esta abordagem contribui para desacoplar o primeiro e o segundo nível do problema. Isso acontece pelo fato de que, mesmo  $gh_{jt}$  estando presente em ambos os níveis do problema, ao relaxarmos a restrição (73), esta variável deixa de ser diretamente controlada pelas decisões tomadas no problema de primeiro nível. Ou seja, esta abordagem contribui para manter a independência entre os dois níveis do problema.

Com esses arranjos, a formulação completa do problema de dois níveis é dada por:

$$\max R_L = \sum_{t=1}^T \left[ \sum_{j \in L} (\pi_t - ch_{jt}) \cdot gh_{jt} + \sum_{i \in L} (\pi_t - ct_{it}) \cdot gt_{it} \right] - \sum_{t=1}^T \sum_{j \in L} \beta \cdot gs_{jt}, \quad (80)$$

sujeito a:

$$0 \leq oqt_{it} \leq gt_i^{\max}, \quad (81)$$

$$0 \leq oqh_{jt} \leq gh_j^{\max}, \quad (82)$$

$$v_{j,t+1} = v_{jt} - c \cdot \left[ q_{jt} + s_{jt} - \sum_{m \in \Omega_{M_j}} (q_{m,t-\tau_{jm}} + s_{m,t-\tau_{jm}}) - y_{jt} \right], \quad (83)$$

$$gh_{jt} - \rho_j \cdot q_{jt} \leq gs_{jt}, \quad (84)$$

$$-(gh_{jt} - \rho_j \cdot q_{jt}) \leq gs_{jt}, \quad (85)$$

$$gs_{jt} \geq 0, \quad (86)$$

$$v_j^{\min} \leq v_{j,t+1} \leq v_j^{\max}, \quad v_{j,T+1} \geq v_j^{\text{meta}}, \quad (87)$$

$$\min \sum_{t=1}^T \left[ \sum_{j=1}^{NJ} oph_{jt} \cdot gh_{jt} + \sum_{i=1}^{NI} opt_{it} \cdot gt_{it} \right], \quad (88)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{NJ} gh_{jt} + \sum_{i=1}^{NI} gt_{it} = d_t, \quad (89)$$

$$0 \leq gt_{it} \leq oqt_{it}, \quad (90)$$

$$0 \leq gh_{jt} \leq oqh_{jt}. \quad (91)$$

O objetivo do Agente  $L$  é determinar a cada hora, uma combinação ótima de oferta de preço e quantidade de energia de modo a maximizar seus lucros. No entanto, o lucro do agente, determinado pelo problema líder ou de primeiro nível (80) a (87), depende da quantidade de energia produzida por suas usinas (variáveis primais) e do preço *spot* do sistema (variável dual), resultantes do problema seguidor ou problema de segundo nível (88) a (91) executado pelo OM.

O preço *spot* do sistema corresponde a variável dual ou multiplicador de Lagrange,  $\pi_t$ , também denominado de preço sombra, associada à restrição de atendimento a demanda do sistema para cada estágio  $t$  (89). O valor da variável dual fornece uma informação sobre a sensibilidade do valor ótimo da função objetivo (88) com respeito a uma variação infinitesimal na demanda do mercado, dada pela restrição (89).

Para solucionar o problema de segundo nível, que é comum a todos os agentes de geração e tem como resultado a energia produzida pelas usinas e o preço *spot* do sistema, é necessário que o OM receba as ofertas de todos os agentes participantes do mercado. No entanto, ao determinar sua estratégia de oferta, cada agente desconhece a oferta de preço e quantidade dos demais, que são conhecidas apenas pelo OM.

Assim, sob o ponto de vista de um determinado agente (Agente  $L$ ), o processo de decisão pode ser resumido no fluxograma abaixo:

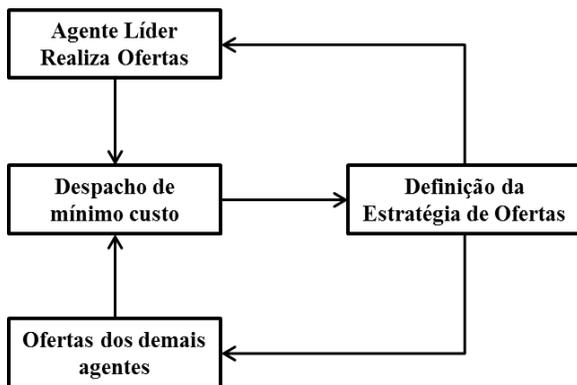


Figura 5. Processo de decisão do Agente  $L$ .

#### 4.3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA COM RESTRIÇÕES DE EQUILÍBRIO

Neste trabalho, o problema de despacho de mínimo custo (problema seguidor) é linear e, conseqüentemente, convexo, possui região viável limitada e não vazia e, portanto, pode ser substituído por suas condições de otimalidade.

Assim, de acordo com a formulação teórica apresentada no Capítulo 3, o problema de programação matemática em dois níveis, formulado na subseção anterior, pode ser transformado para um modelo não linear de um único nível, conhecido como MPEC, que equivale a um MPCC.

Este problema é apresentado matematicamente pelo seguinte equacionamento:

$$\max R_L = \sum_{t=1}^T \left[ \sum_{j \in L} (\pi_t - ch_{jt}) \cdot gh_{jt} + \sum_{i \in L} (\pi_t - ct_{it}) \cdot gt_{it} \right] - \sum_{t=1}^T \sum_{j \in L} \beta \cdot gs_{jt}, \quad (92)$$

sujeito a:

$$0 \leq oqt_{it} \leq gt_i^{\max}, \quad (93)$$

$$0 \leq oqh_{jt} \leq gh_j^{\max}, \quad (94)$$

$$v_{j,t+1} = v_{jt} - c \cdot \left[ q_{jt} + s_{jt} - \sum_{m \in \Omega_{M_j}} (q_{m,t-\tau_{jm}} + s_{m,t-\tau_{jm}}) - y_{jt} \right], \quad (95)$$

$$gh_{jt} - \rho_j \cdot q_{jt} \leq gs_{jt}, \quad (96)$$

$$-(gh_{jt} - \rho_j \cdot q_{jt}) \leq gs_{jt}, \quad (97)$$

$$gs_{jt} \geq 0, \quad (98)$$

$$v_j^{\min} \leq v_{j,t+1} \leq v_j^{\max}, \quad v_{j,T+1} \geq v_j^{\text{meta}}, \quad (99)$$

$$\sum_{j=1}^{NJ} gh_{jt} + \sum_{i=1}^{NI} gt_{it} = d_t, \quad (100)$$

$$0 \leq gt_{it} \leq oqt_{it}, \quad (101)$$

$$0 \leq gh_{jt} \leq oqh_{jt}, \quad (102)$$

$$\pi_t - \delta t_{it}^{\min} + \delta t_{it}^{\max} \leq opt_{it}, \quad (103)$$

$$\pi_t - \delta h_{jt}^{\min} + \delta h_{jt}^{\max} \leq oph_{jt}, \quad (104)$$

$$\delta t_{it}^{\min}; \delta h_{jt}^{\min}; \delta t_{it}^{\max}; \delta h_{jt}^{\max} \leq 0, \quad (105)$$

$$gt_{it} \cdot (\pi_t - \delta t_{it}^{\min} + \delta t_{it}^{\max} - opt_{it}) = 0, \quad (106)$$

$$gh_{jt} \cdot (\pi_t - \delta h_{jt}^{\min} + \delta h_{jt}^{\max} - oph_{jt}) = 0, \quad (107)$$

$$\pi_t \cdot \left( \sum_{j=1}^{NJ} gh_{jt} + \sum_{i=1}^{NI} gt_{it} - d_t \right) = 0, \quad (108)$$

$$\delta t_{it}^{\min} \cdot gt_{it} = 0, \quad (109)$$

$$\delta h_{jt}^{\min} \cdot gh_{jt} = 0, \quad (110)$$

$$\delta t_{it}^{\max} \cdot (oqt_{it} - gt_{it}) = 0, \quad (111)$$

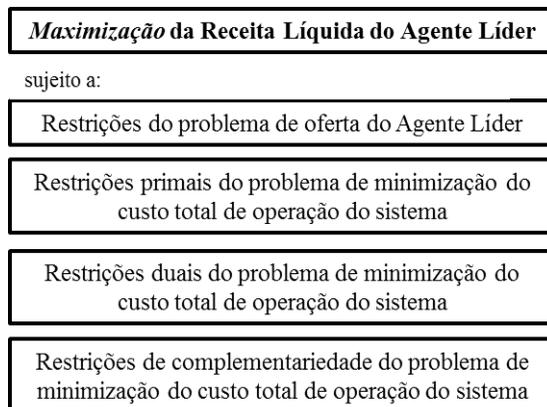
$$\delta h_{jt}^{\max} \cdot (oqh_{jt} - gh_{jt}) = 0, \quad (112)$$

em que:

- $\delta t_{it}^{\min}$  multiplicador de Lagrange associado à restrição de não negatividade da variável de geração termelétrica da usina  $i$  no estágio  $t$  (90) (R\$/MWh);
- $\delta t_{it}^{\max}$  multiplicador de Lagrange associado à restrição de oferta de quantidade realizada pela usina termelétrica  $i$  para suprir energia no estágio  $t$  (90) (R\$/MWh);
- $\delta h_{jt}^{\min}$  multiplicador de Lagrange associado à restrição de não negatividade da variável de geração hidrelétrica da usina  $j$  no estágio  $t$  (91) (R\$/MWh);

$\delta h_{jt}^{\max}$  multiplicador de Lagrange associado à restrição de oferta de quantidade realizada pela usina hidrelétrica  $j$  para suprir energia no estágio  $t$  (91) (R\$/MWh).

Conforme exposto no Capítulo 3, o problema seguidor, que corresponde ao problema de minimização do custo total de operação do sistema, pode ser substituído por um conjunto de restrições compostas pelas restrições primais desse problema seguidor, as restrições do problema dual e as condições de complementariedade do problema associado. A estrutura do problema de maximização da receita do Agente  $L$  (92) a (112) pode ser visualizada abaixo:



**Figura 6. Estrutura do MPEC com condições de complementariedade.**

O conjunto de restrições (93) a (99) corresponde às restrições do problema de oferta do Agente  $L$ . As equações (100) a (102) e (103) a (105) são, respectivamente, as restrições primais e duais do problema de minimização do custo total de operação. Por sua vez, as equações (106) a (112) correspondem às condições de complementariedade desse problema.

Além das não linearidades (produtos de variáveis) já presentes na função objetivo do modelo ( $\pi_i \cdot gt_{it}$  e  $\pi_i \cdot gh_{jt}$  para  $i, j \in L$ ), as restrições de complementariedade (106) a (112) introduzem um outro conjunto de não linearidades ( $\pi_i \cdot gt_{it}$ ,  $\delta t_{it}^{\min} \cdot gt_{it}$ ,  $\delta t_{it}^{\max} \cdot gt_{it}$ ,  $\pi_i \cdot gh_{jt}$ ,  $\delta h_{jt}^{\min} \cdot gh_{jt}$ ,

$\delta h_{jt}^{\max} \cdot gh_{jt}$  para  $\forall i, \forall j$ , e  $opt_{it} \cdot gt_{it}$ ,  $\delta t_{it}^{\max} \cdot oqt_{it}$ ,  $oph_{jt} \cdot gh_{jt}$ ,  $\delta h_{jt}^{\max} \cdot oqh_{jt}$  para  $i, j \in L$ ) no MPEC resultante.

Conforme verificado anteriormente, as condições de complementariedade podem ser substituídas pela condição de dualidade forte, também conhecida como igualdade primal-dual (valor da função objetivo do problema primal é igual ao valor da função objetivo do problema dual):

$$\sum_{t=1}^T \left[ \sum_{i=1}^{NI} opt_{it} \cdot gt_{it} + \sum_{j=1}^{NJ} oph_{jt} \cdot gh_{jt} \right] = \sum_{t=1}^T \left[ d_t \cdot \pi_t + \sum_{i=1}^{NI} oqt_{it} \cdot \delta t_{it}^{\max} + \sum_{j=1}^{NJ} oqh_{jt} \cdot \delta h_{jt}^{\max} \right]. \quad (113)$$

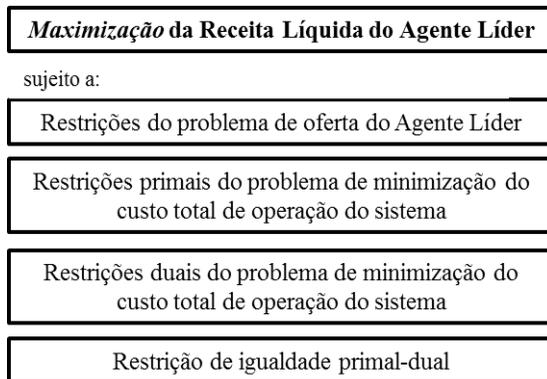
Na equação (113),  $opt_{it}$ ,  $oph_{jt}$ ,  $oqt_{it}$  e  $oqh_{jt}$  são variáveis para o Agente  $L$  ( $i, j \in L$ ) e valores conhecidos para os demais agentes ( $i, j \notin L$ ). Com o uso dessa restrição em substituição às condições de complementariedade, a quantidade de produtos de variáveis pode ser reduzida ( $opt_{it} \cdot gt_{it}$ ,  $\delta t_{it}^{\max} \cdot oqt_{it}$ ,  $oph_{jt} \cdot gh_{jt}$ ,  $\delta h_{jt}^{\max} \cdot oqh_{jt}$  para  $i, j \in L$ ) e presente em apenas uma restrição, além da função objetivo do problema. Essa estrutura pode ser visualizada na Figura 7. A formulação resultante é mostrada abaixo:

$$\max R_L = \sum_{t=1}^T \left[ \sum_{j \in L} (\pi_t - ch_{jt}) \cdot gh_{jt} + \sum_{i \in L} (\pi_t - ct_{it}) \cdot gt_{it} \right] - \sum_{t=1}^T \sum_{j \in L} \beta \cdot gs_{jt}, \quad (114)$$

sujeito a:

$$(93) - (105), \quad (115)$$

$$\sum_{t=1}^T \left[ \sum_{i=1}^{NI} opt_{it} \cdot gt_{it} + \sum_{j=1}^{NJ} oph_{jt} \cdot gh_{jt} - d_t \cdot \pi_t - \sum_{i=1}^{NI} oqt_{it} \cdot \delta t_{it}^{\max} - \sum_{j=1}^{NJ} oqh_{jt} \cdot \delta h_{jt}^{\max} \right] = 0. \quad (116)$$



**Figura 7. Estrutura do MPEC com restrição de igualdade primal-dual.**

Ao analisarmos o MPEC resultante de ambas as formulações, fica claro o aumento do número de restrições e variáveis em comparação ao problema de dois níveis equivalente. As restrições do problema dual associado ao problema de segundo nível (seguidor) passaram a ser incorporadas ao modelo proposto, o que fez com que os multiplicadores de Lagrange (variáveis duais) passem a ser explicitados neste modelo. Esse fato é de suma importância, uma vez que a receita do agente depende diretamente da variável dual associada à restrição de atendimento a demanda (preço *spot*). Em termos práticos, ao invés do problema de segundo nível, temos agora dois outros problemas como restrição do problema de primeiro nível, quais sejam, o problema primal e o dual associado ao seguidor, sendo que ofertas de preço e quantidade que satisfaçam esses dois problemas, satisfazem também o problema original de segundo nível. Isso significa que a solução de equilíbrio entre esse problema primal do seguidor e seu dual passa a ser a solução ótima do problema de despacho de mínimo custo. A Figura 7 evidencia essa questão ao mostrar que a igualdade entre a função objetivo do problema primal e dual (igualdade primal-dual), bem como suas respectivas restrições estão representadas na formulação, em substituição ao problema de segundo nível.

Além disso, conforme exposto, as duas formulações apresentadas possuem os mesmos termos não lineares na função objetivo. O que as diferencia são os termos não lineares presentes nas restrições do problema. Na formulação (114) a (116), as não linearidades são reduzidas e concentradas na restrição de igualdade primal-dual (116), ao

passo que na formulação (92) a (112), as não linearidades estão presentes nas restrições de complementariedade (106) a (112).

Com relação à função objetivo do problema, de modo a contribuir para a redução das não linearidades presentes, e com isso facilitar o processo de solução, é possível realizar algumas transformações algébricas (baseadas em Ruiz e Conejo (2009)) para linearizar essa função. Figura 7

No tocante aos termos não lineares presentes nas restrições, conforme apresentado no Capítulo 3, é possível transformar as condições de complementariedade em restrições inteiras mistas por meio do uso da abordagem proposta por Fortuny-Amat e McCarl (1981). É possível também aplicar uma expansão binária (BARROSO, 2006) nos produtos de variáveis ( $\pi_i \cdot gt_{it}$  e  $\pi_i \cdot gh_{jt}$  para  $i, j \in L$ ) da restrição de igualdade primal-dual. No entanto, a aproximação de variáveis contínuas por valores discretos, realizada nessa última abordagem, requer um elevado número de variáveis binárias, o que eleva o tempo necessário à solução do problema, comprometendo a convergência do mesmo, conforme pôde ser observado em alguns testes iniciais. Todavia, pelo fato das variáveis binárias estarem relacionadas a discretização das variáveis referentes a apenas o Agente  $L$ , o número de variáveis binárias depende apenas do grau de discretização que se quer dar ao modelo e não do número de agentes, o que pode tornar essa abordagem interessante para problemas com um grande número de agentes formadores de preço.

Contudo, considerando a magnitude do problema a ser resolvido nesse trabalho, optou-se por empregar a técnica introduzida por Fortuny-Amat e McCarl para tratamento das condições de complementariedade em conjunto com a linearização da função objetivo do problema, de modo a transformar o modelo em um problema de PLIM.

As próximas subseções apresentarão esse desenvolvimento.

### 4.3.1 Linearização da Função Objetivo do MPEC

Os produtos de variáveis (bilinearidades)  $\pi_i \cdot gh_{jt}$  e  $\pi_i \cdot gt_{it}$ , presentes na função objetivo do problema, podem ser linearizados por meio da utilização da restrição de igualdade primal-dual, combinada com algumas condições de KKT, conforme demonstrado por Ruiz e Conejo (2009).

O processo de linearização da função objetivo do MPEC pode ser iniciado com a restrição de igualdade primal-dual (116) reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=1}^T \sum_{i \in L} opt_{it} \cdot gt_{it} + \sum_{t=1}^T \sum_{j \in L} oph_{jt} \cdot gh_{jt} & (117) \\
 & - \sum_{t=1}^T \sum_{i \in L} oqt_{it} \cdot \delta t_{it}^{\max} - \sum_{t=1}^T \sum_{j \in L} oqh_{jt} \cdot \delta h_{jt}^{\max} = \\
 & - \sum_{t=1}^T \sum_{i \notin L} opt_{it} \cdot gt_{it} - \sum_{t=1}^T \sum_{j \notin L} oph_{jt} \cdot gh_{jt} + \sum_{t=1}^T d_t \cdot \pi_t \\
 & + \sum_{t=1}^T \sum_{i \notin L} oqt_{it} \cdot \delta t_{it}^{\max} + \sum_{t=1}^T \sum_{j \notin L} oqh_{jt} \cdot \delta h_{jt}^{\max}.
 \end{aligned}$$

Por meio de (117) pode-se verificar que os termos não lineares referem-se ao Agente  $L$  ( $i, j \in L$ ) e constam do lado esquerdo da equação, enquanto que os termos do lado direito da equação (117) são todos lineares. Para possibilitar a substituição dos termos não lineares ( $\pi_t \cdot gt_{it}$  e  $\pi_t \cdot gh_{jt}$ ) da função objetivo do problema, é preciso encontrar uma relação entre  $\pi_t \cdot gt_{it}$ ,  $\pi_t \cdot gh_{jt}$  e os termos não lineares da equação acima (lado esquerdo da equação).

Para tanto, multiplicando ambos os lados de desigualdade (103) por  $gt_{it}$  e considerando apenas as usinas pertencentes ao Agente  $L$ , temos:

$$\sum_{i \in L} opt_{it} \cdot gt_{it} \geq \sum_{i \in L} \pi_t \cdot gt_{it} - \sum_{i \in L} \delta t_{it}^{\min} \cdot gt_{it} + \sum_{i \in L} \delta t_{it}^{\max} \cdot gt_{it}. \quad (118)$$

O mesmo procedimento em (104) resulta na seguinte inequação:

$$\sum_{j \in L} oph_{jt} \cdot gh_{jt} \geq \sum_{j \in L} \pi_t \cdot gh_{jt} - \sum_{j \in L} \delta h_{jt}^{\min} \cdot gh_{jt} + \sum_{j \in L} \delta h_{jt}^{\max} \cdot gh_{jt}. \quad (119)$$

De (109) e (110), temos:

$$\sum_{i \in L} \delta t_{it}^{\min} \cdot gt_{it} = 0, \quad (120)$$

$$\sum_{j \in L} \delta h_{jt}^{\min} \cdot gh_{jt} = 0. \quad (121)$$

Utilizando as equações (111) e (112), obtemos:

$$\sum_{j \in L} \delta t_{it}^{\max} \cdot oqt_{it} = \sum_{j \in L} \delta t_{it}^{\max} \cdot gt_{it}, \quad (122)$$

$$\sum_{i \in L} \delta h_{jt}^{\max} \cdot oqh_{jt} = \sum_{i \in L} \delta h_{jt}^{\max} \cdot gh_{jt}. \quad (123)$$

Substituindo (120) e (122) em (118) e considerando todo o horizonte de planejamento:

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i \in L} opt_{it} \cdot gt_{it} \geq \sum_{t=1}^T \sum_{i \in L} \pi_t \cdot gt_{it} + \sum_{t=1}^T \sum_{j \in L} \delta t_{it}^{\max} \cdot oqt_{it}, \quad (124)$$

Da mesma forma, substituindo (121) e (123) em (119) e considerando todo o horizonte de planejamento:

$$\sum_{t=1}^T \sum_{j \in L} oph_{jt} \cdot gh_{jt} \geq \sum_{t=1}^T \sum_{j \in L} \pi_t \cdot gh_{jt} + \sum_{t=1}^T \sum_{i \in L} \delta h_{jt}^{\max} \cdot oqh_{jt}. \quad (125)$$

Note que as equações (124) e (125) permitem, respectivamente, escrever os termos não lineares  $opt_{it} \cdot gt_{it}$  e  $oph_{jt} \cdot gh_{jt}$  em função de  $\pi_t \cdot gt_{it}$  e  $\pi_t \cdot gh_{jt}$ , bem como de  $oqt_{it} \cdot \delta t_{it}^{\max}$  e  $oqh_{jt} \cdot \delta h_{jt}^{\max}$ .

Entretanto, para eliminar os termos não lineares  $oqt_{it} \cdot \delta t_{it}^{\max}$  e  $oqh_{jt} \cdot \delta h_{jt}^{\max}$  é necessário substituir (124) e (125) em (117), resultando na equação (126)<sup>14</sup>:

---

<sup>14</sup> A despeito de (124) e (125) serem desigualdades, a consideração da igualdade (126) vai ao encontro do desenvolvimento apresentado por Ruiz e Conejo (2009) e não acarreta problemas ao processo de linearização. De fato, os resultados e testes numéricos realizados comprovam essa equivalência.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=1}^T \sum_{i \in L} \pi_t \cdot gt_{it} + \sum_{t=1}^T \sum_{j \in L} \pi_t \cdot gh_{jt} = \\
 & - \sum_{t=1}^T \sum_{i \notin L} opt_{it} \cdot gt_{it} - \sum_{t=1}^T \sum_{j \in L} oph_{jt} \cdot gh_{jt} + \sum_{t=1}^T d_t \cdot \pi_t \\
 & + \sum_{t=1}^T \sum_{i \notin L} oqt_{it} \cdot \delta t_{it}^{\max} + \sum_{t=1}^T \sum_{j \in L} oqh_{jt} \cdot \delta h_{jt}^{\max}.
 \end{aligned} \tag{126}$$

Portanto, os termos não lineares da função objetivo do Agente  $L$  (lado esquerdo de (126)), podem ser substituídos por termos lineares (lado direito de (126)), haja vista que as ofertas de preço e quantidade dos demais agentes ( $i, j \notin L$ ), bem como a demanda do sistema são consideradas conhecidas.

Dessa forma, a receita líquida do Agente  $L$  (equação não linear (114)), pode ser substituída pela seguinte equação linear:

$$\begin{aligned}
 R_L = - \sum_{t=1}^T \left[ \sum_{i \notin L} opt_{it} \cdot gt_{it} + \sum_{j \in L} oph_{jt} \cdot gh_{jt} - d_t \cdot \pi_t - \sum_{i \notin L} oqt_{it} \cdot \delta t_{it}^{\max} \right. \\
 \left. - \sum_{j \in L} oqh_{jt} \cdot \delta h_{jt}^{\max} + \sum_{j \in L} ch_{jt} \cdot gh_{jt} + \sum_{i \in L} ct_{it} \cdot gt_{it} + \sum_{j \in L} \beta \cdot gs_{jt} \right].
 \end{aligned} \tag{127}$$

Com o tratamento algébrico exposto acima, foi possível encontrar uma relação entre os termos não lineares  $opt_{it} \cdot gt_{it}$ ,  $oph_{jt} \cdot gh_{jt}$  e  $\pi_t \cdot gt_{it}$ ,  $\pi_t \cdot gh_{jt}$  e eliminar  $oqt_{it} \cdot \delta t_{it}^{\max}$  e  $oqh_{jt} \cdot \delta h_{jt}^{\max}$  da equação (117), permitindo substituir as não linearidades da função objetivo do problema ( $\pi_t \cdot gt_{it}$  e  $\pi_t \cdot gh_{jt}$ ) por uma expressão linear (lado direito de (126)), simplificando assim o modelo.

### 4.3.2 Transformação do MPEC para um problema de PLIM

O procedimento para transformar as condições de complementariedade em restrições inteiras mistas, conforme metodologia introduzida por Fortuny-Amat e McCarl, e de acordo com o que foi apresentado no Capítulo 3 (subseção 3.3.4.5), consiste em substituir as restrições de complementariedade por restrições binárias e,

desse modo, possibilitar a resolução do problema por algoritmos eficientes de programação inteira mista.

A aplicação desse procedimento nas restrições (106) a (112), considerando ainda a função objetivo linearizada (127), resulta no seguinte problema de PLIM:

$$\begin{aligned} \max R_L = & - \sum_{t=1}^T \left[ \sum_{i \in L} opt_{it} \cdot gt_{it} + \sum_{j \in L} oph_{jt} \cdot gh_{jt} - d_t \cdot \pi_t \right. \\ & - \sum_{i \in L} oqt_{it} \cdot \delta t_{it}^{\max} - \sum_{j \in L} oqh_{jt} \cdot \delta h_{jt}^{\max} \\ & \left. + \sum_{j \in L} ch_{jt} \cdot gh_{jt} + \sum_{i \in L} ct_{it} \cdot gt_{it} + \sum_{j \in L} \beta \cdot gs_{jt} \right], \end{aligned} \quad (128)$$

sujeito a:

$$(93) - (105), \quad (129)$$

$$0 \leq gt_{it} \leq M^{gt_i} \cdot (1 - \eta t_{it}), \quad (130)$$

$$0 \leq -\pi_t + \delta t_{it}^{\min} - \delta t_{it}^{\max} + opt_{it} \leq M^{\pi^{gt_i}} \cdot \eta t_{it}, \quad (131)$$

$$0 \leq gh_{jt} \leq M^{gh_j} \cdot (1 - \eta h_{jt}), \quad (132)$$

$$0 \leq -\pi_t + \delta h_{jt}^{\min} - \delta h_{jt}^{\max} + oph_{jt} \leq M^{\pi^{gh_j}} \cdot \eta h_{jt}, \quad (133)$$

$$0 \leq \pi_t \leq M^P \cdot (1 - \eta \pi_t) \quad (134)$$

$$0 \leq \sum_{j=1}^{NJ} gh_{jt} + \sum_{i=1}^{NI} gt_{it} - d_t \leq M^D \cdot \eta \pi_t, \quad (135)$$

$$0 \leq gt_{it} \leq M^{gt_i} \cdot (1 - \eta t_{it}^{\delta}), \quad (136)$$

$$0 \leq -\delta t_{it}^{\min} \leq M^{\delta t_{it}^{\min}} \cdot \eta t_{it}^{\delta}, \quad (137)$$

$$0 \leq gh_{jt} \leq M^{gh_j} \cdot (1 - \eta h_{jt}^{\delta}), \quad (138)$$

$$0 \leq -\delta h_{jt}^{\min} \leq M^{\delta h_{jt}^{\min}} \cdot \eta h_{jt}^{\delta}, \quad (139)$$

$$0 \leq oqt_{it} - gt_{it} \leq M^{gt_i} \cdot (1 - \eta qt_{it}), \quad (140)$$

$$0 \leq -\delta t_{it}^{\max} \leq M^{\delta t_{it}^{\max}} \cdot \eta qt_{it}, \quad (141)$$

$$0 \leq oqh_{jt} - gh_{jt} \leq M^{gh_j} \cdot (1 - \eta qh_{jt}), \quad (142)$$

$$0 \leq -\delta h_{jt}^{\max} \leq M^{\delta h_{jt}^{\max}} \cdot \eta qh_{jt}, \quad (143)$$

$$\eta t_{it}, \eta h_{jt}, \eta \pi_t, \eta t_{it}^{\delta}, \eta h_{jt}^{\delta}, \eta qt_{it}, \eta qh_{jt} \in \{0, 1\}. \quad (144)$$

em que:

$$\begin{aligned} \eta_{it}, \eta_{jt}, \eta_{\pi_i}, \eta_{\pi_j}, \eta_{t_{it}}^{\delta}, \eta_{t_{jt}}^{\delta}, \eta_{qt_{it}}, \eta_{qh_{jt}} & \text{ variáveis binárias;} \\ M^{gt_i}, M^{\pi_{gt_i}}, M^{gh_j}, M^{\pi_{gh_j}}, M^P, & \text{ constantes} \hspace{15em} \text{positivas} \\ M^D, M^{\delta_{i_i}^{\min}}, M^{\delta_{h_j}^{\min}}, M^{\delta_{i_i}^{\max}}, M^{\delta_{h_j}^{\max}} & \text{ suficientemente elevadas.} \end{aligned}$$

Conforme já explicado no Capítulo 3 (subseção 3.3.4.5), nas restrições (130) e (131), por exemplo, se  $\eta_{it}=0$ ,  $gt_{it}$  é um valor positivo limitado em  $M^{gt_i}$  e a expressão  $-\pi_i + \delta_{it}^{\min} - \delta_{it}^{\max} + opt_{it}$  resulta em um valor nulo. Se  $\eta_{it}=1$ ,  $gt_{it}$  é nulo e o resultado de  $-\pi_i + \delta_{it}^{\min} - \delta_{it}^{\max} + opt_{it}$  é um valor positivo limitado em  $M^{\pi_{gt_i}}$ . Diante disso,  $M^{gt_i}$  e  $M^{\pi_{gt_i}}$  devem ser valores grandes o suficiente para que as restrições (130) e (131) sejam relaxadas quando  $\eta_{it}=0$  e  $\eta_{it}=1$ , respectivamente. A definição desses parâmetros é de suma importância para a modelagem e implementação de modelos de programação linear inteira mista.

No caso da variável primal  $gt_{it}$ , sabe-se que a mesma é limitada fisicamente pela capacidade máxima de produção da respectiva usina termelétrica. Portanto,  $gt_{it}^{\max}$  corresponde a um valor adequado para a constante  $M^{gt_i}$ .

Contudo, no tocante à seleção de valores para as constantes relacionadas às variáveis duais, a escolha não é tão direta. Para o valor de  $M^{\pi_{gt_i}}$ , ao considerarmos que a oferta de preço dos agentes é limitada ao preço teto ( $Pcap$ ) estabelecido para o respectivo mercado, sugere-se utilizar esse limite de preço multiplicado por um determinado fator. Conforme será visto no próximo capítulo, foram utilizados valores de  $Pcap \times 10$  nas simulações realizadas.

O mesmo raciocínio pode ser aplicado nas demais restrições. Após essa análise, chega-se a conclusão de que a constante  $M^{gh_j}$  pode assumir o valor da capacidade máxima de produção da respectiva usina,  $M^P$  pode assumir o valor do preço teto,  $M^D$  um valor próximo a zero e as demais constantes ( $M^{\pi_{gh_j}}$ ,  $M^{\delta_{i_i}^{\min}}$ ,  $M^{\delta_{h_j}^{\min}}$ ,  $M^{\delta_{i_i}^{\max}}$  e  $M^{\delta_{h_j}^{\max}}$ ) podem ser definidas da mesma maneira que  $M^{\pi_{gt_i}}$ .

#### 4.4 PROBLEMA DE EQUILÍBRIO COM RESTRIÇÕES DE EQUILÍBRIO

A competição entre os agentes de geração é modelada por meio de um Problema de Equilíbrio com Restrições de Equilíbrio (EPEC), que pode ser resolvido por um procedimento denominado de método de diagonalização (HOBBS *et al.*, 2000). Trata-se de um processo iterativo em que, inicialmente, de modo a definir sua melhor estratégia de ofertas para o horizonte de planejamento, o agente estratégico 1 resolve o seu problema de PLIM, (128) a (144), como agente líder (Agente *L*), considerando as ofertas dos concorrentes como parâmetros conhecidos. Na sequência, o agente estratégico 2 resolve seu problema de ofertas como o novo líder, atualizando as ofertas definidas pelo agente 1 e considerando as ofertas dos demais como parâmetros conhecidos, conforme passo anterior. Ou seja, o agente considera as últimas ofertas disponíveis para resolver o seu problema. Da mesma forma, cada produtor atua como líder para definir suas próprias ofertas. A primeira iteração é finalizada quando o último agente resolve o seu problema considerando as ofertas definidas por todos os outros agentes nos passos anteriores. Esse processo, ilustrado na Figura 8, é repetido até que um equilíbrio seja atingido (valores das ofertas permanecem constantes dentro de uma determinada tolerância). Como resultado, embora não seja provado matematicamente<sup>15</sup> neste trabalho, espera-se atingir numericamente um Equilíbrio de Nash (NASH, 1951), considerando que, nesse ponto, nenhum agente pode melhorar sua renda atuando de forma unilateral.

O método de diagonalização tem sido o procedimento mais utilizado na literatura para a resolução desses modelos de equilíbrio (EPEC). Comparado à resolução simultânea dos MPECs, este método possui a vantagem de resolver problemas menores. No entanto, o número de iterações necessárias para a convergência do problema pode ser elevado ou mesmo pode não haver convergência. Contudo, é importante ressaltar que, independentemente do método de solução empregado, as características dos EPECs contribuem para que nenhuma,

---

<sup>15</sup> Uma prova matemática da existência de um Equilíbrio de Nash está fora do escopo desse trabalho.

ou mesmo múltiplas soluções de equilíbrio sejam encontradas na solução desses modelos.

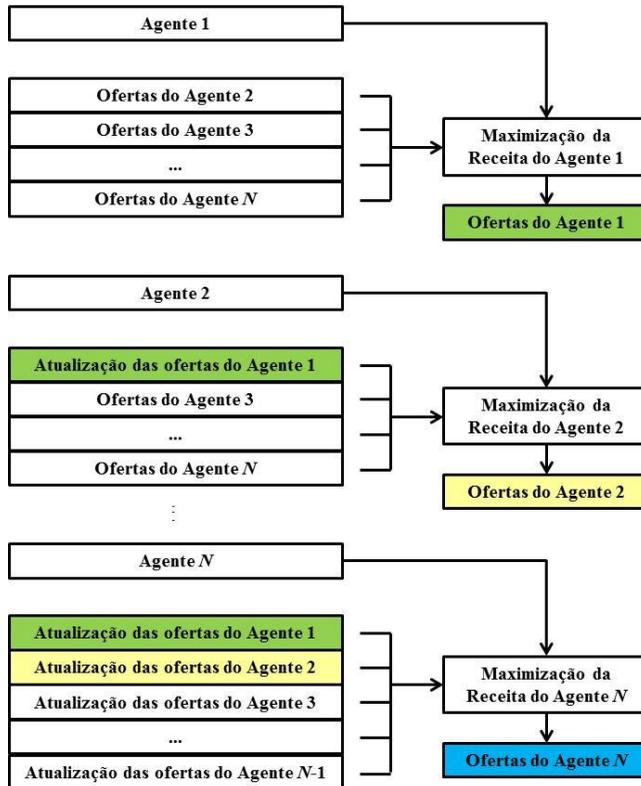


Figura 8. Processo iterativo.

Conforme exposto, a condição para o equilíbrio é que as ofertas de preço e quantidade definidas por cada agente do mercado, para cada estágio do horizonte de estudo, mantenham-se estáveis (constantes dentro de uma tolerância pré-definida) ao longo das iterações. Desse modo, com as mesmas ofertas, o resultado do despacho (decisão do OM internalizada no MPEC) do sistema deve ser o mesmo sob o ponto de vista de cada agente do mercado. Isso equivale a dizer que a geração definida para cada usina em cada estágio de tempo ( $gh_{jt}$  e  $gt_{it}$ ) deve ser a mesma ao se resolver o problema de PLIM para cada agente de geração.

Contudo, na resolução dos EPECs ao longo das etapas de desenvolvimento do presente trabalho, foi constatado (será discutido no próximo capítulo) que na grande maioria das simulações realizadas, os agentes alteram suas ofertas a cada iteração, sem que as mesmas converjam para um determinado valor. Mesmo nas simulações em que as ofertas permaneceram constantes após um determinado número de iterações, o resultado do despacho observado na resolução do problema de PLIM para cada agente não converge para os mesmos valores. Diante dessa constatação, de modo a permitir a obtenção de um despacho único, e dessa maneira, contribuir para a correta solução do EPEC, é proposto nesse trabalho, uma metodologia baseada nas restrições de não-antecipatividade (ROCKAFELLAR e WETS, 1991).

O conceito de não-antecipatividade é aplicado na programação estocástica e está associado ao fato de que uma decisão deve ser única para cada estágio em todos os cenários que compartilham as mesmas realizações (SANTOS, 2010; GONÇALVES, 2011; VERONESE, 2013). De modo análogo, no presente trabalho, a decisão do OM deve ser única para todos os problemas de PLIM (resolvidos pelos agentes) que compartilham as mesmas decisões de ofertas. De outra maneira, se o problema de PLIM resolvido por cada agente é indistinguível em termos de ofertas ( $oph_{jt}$ ,  $opt_{it}$ ,  $oqh_{jt}$ ,  $oqt_{it}$ ) de todos os agentes, então a solução do despacho econômico deve ser a mesma ao se resolver o problema sob o ponto de vista de cada agente.

Essa abordagem baseada no conceito de não-antecipatividade pode ser também entendida como um artifício para acoplar os problemas dos agentes participantes do mercado, fazendo com que o despacho determinado pelo problema do OM, internalizado no problema resolvido por cada agente de geração, convirja para o mesmo resultado. Dito de outra forma, as restrições adicionadas ao modelo formulado, fazem a coordenação entre os problemas de cada Agente  $L$ , mantendo a interligação (acoplamento) entre os respectivos despachos e os forçando gradualmente a um valor comum. A necessidade de aplicação dessa abordagem será evidenciada ao longo das simulações apresentadas no próximo capítulo.

Face ao exposto, com o intuito de aplicar essa abordagem e contribuir para a convergência do EPEC, devem ser incluídas novas restrições ao problema de PLIM a ser resolvido por cada agente:

$$gh_{jt} - gh_{jt}^{\text{meta}} \leq ghe_{jt}, \quad (145)$$

$$-(gh_{jt} - gh_{jt}^{\text{meta}}) \leq ghe_{jt}, \quad (146)$$

$$gt_{it} - gt_{it}^{\text{meta}} \leq gte_{it}, \quad (147)$$

$$-(gt_{it} - gt_{it}^{\text{meta}}) \leq gte_{it}, \quad (148)$$

$$ghe_{jt}, gte_{it} \geq 0, \quad (149)$$

em que:

- $gh_{jt}^{\text{meta}}$  valor médio de geração associada à usina hidrelétrica  $j$  no estágio  $t$ , resultante dos problemas resolvidos por cada agente de geração  $L$  (MWh);
- $gt_{it}^{\text{meta}}$  valor médio de geração associada à usina termelétrica  $i$  no estágio  $t$ , resultante dos problemas resolvidos por cada agente de geração  $L$  (MWh);
- $ghe_{jt}$  variável de folga associada à diferença entre a geração da usina hidrelétrica  $j$  no estágio  $t$  e o valor meta de geração dessa usina (MWh);
- $gte_{it}$  variável de folga associada à diferença entre a geração da usina termelétrica  $i$  no estágio  $t$  e o valor meta de geração dessa usina (MWh).

De modo semelhante ao realizado na subseção 4.2.3, as variáveis  $ghe_{jt}$  e  $gte_{it}$  são penalizadas na função objetivo do problema de PLIM mediante a introdução do seguinte termo:  $-\alpha \cdot \sum_{t=1}^T \left( \sum_{j=1}^{NJ} ghe_{jt} + \sum_{i=1}^{NI} gte_{it} \right)$ , em que  $\alpha$  é um parâmetro positivo, que deve ser atualizado iterativamente, de modo a propiciar a convergência do modelo.

A média das variáveis de geração hidrelétrica e termelétrica associadas à resolução do problema para cada agente de geração, dadas, respectivamente, pelos valores de  $gh_{jt}^{\text{meta}}$  e  $gt_{it}^{\text{meta}}$  são denominadas de geração meta e podem ser calculadas por meio das seguintes expressões:

$$gh_{jt}^{\text{meta}} = \frac{1}{NL} \sum_{L=1}^{NL} gh_{jt}^L, \quad (150)$$

$$gt_{it}^{\text{meta}} = \frac{1}{NL} \sum_{L=1}^{NL} gt_{it}^L, \quad (151)$$

em que:

- $NL$  número total de agentes de geração participantes do mercado;
- $gh_{jt}^L$  geração associada à usina hidrelétrica  $j$  no estágio  $t$ , resultante do problema resolvido pelo agente  $L$  (MWh);
- $gt_{it}^L$  geração associada à usina termelétrica  $i$  no estágio  $t$ , resultante do problema resolvido pelo agente  $L$  (MWh).

Esses valores de geração meta podem ser calculadas ao final da primeira iteração e sua atualização é realizada após a resolução do problema de PLIM por cada agente de geração. Por sua vez, os valores de  $gh_{jt}^L$  e  $gt_{it}^L$  correspondem ao despacho resultante do problema resolvido por cada um desses agentes de geração. Ou seja, de modo a possibilitar o cálculo da geração meta, ao se resolver o problema para um determinado Agente  $L$ , o resultado de  $gh_{jt}$  é atribuído à  $gh_{jt}^L$  e de  $gt_{it}$  à  $gt_{it}^L$  ( $gh_{jt}^L = gh_{jt}$  e  $gt_{it}^L = gt_{it}$ ).

Considerando a abordagem para resolução do problema de equilíbrio, conforme disposto nessa seção, o modelo de PLIM completo pode ser visualizado abaixo:

$$\begin{aligned} \max R_L = & - \sum_{t=1}^T \left[ \sum_{i \in L} opt_{it} \cdot gt_{it} + \sum_{j \in L} oph_{jt} \cdot gh_{jt} - d_t \cdot \pi_t \right. \\ & - \sum_{i \in L} oqt_{it} \cdot \delta t_{it}^{\max} - \sum_{j \in L} oqh_{jt} \cdot \delta h_{jt}^{\max} \\ & + \sum_{j \in L} ch_{jt} \cdot gh_{jt} + \sum_{i \in L} ct_{it} \cdot gt_{it} \\ & \left. + \sum_{j \in L} \beta \cdot gs_{jt} + \alpha \cdot \left( \sum_{j=1}^{NJ} ghe_{jt} + \sum_{i=1}^{NI} gte_{it} \right) \right], \end{aligned} \quad (152)$$

sujeito a:

$$0 \leq oqt_{it} \leq gt_i^{\max}, \quad (153)$$

$$0 \leq oqh_{jt} \leq gh_j^{\max}, \quad (154)$$

$$v_{j,t+1} = v_{jt} - c \cdot \left[ q_{jt} + s_{jt} - \sum_{m \in \Omega_{M_j}} (q_{m,t-\tau_{jm}} + s_{m,t-\tau_{jm}}) - y_{jt} \right], \quad (155)$$

$$gh_{jt} - \rho_j \cdot q_{jt} \leq gs_{jt}, \quad (156)$$

$$-(gh_{jt} - \rho_j \cdot q_{jt}) \leq gs_{jt}, \quad (157)$$

$$gh_{jt} - gh_{jt}^{\text{meta}} \leq ghe_{jt}, \quad (158)$$

$$-(gh_{jt} - gh_{jt}^{\text{meta}}) \leq ghe_{jt}, \quad (159)$$

$$gt_{it} - gt_{it}^{\text{meta}} \leq gte_{it}, \quad (160)$$

$$-(gt_{it} - gt_{it}^{\text{meta}}) \leq gte_{it}, \quad (161)$$

$$gs_{jt}, ghe_{jt}, gte_{it} \geq 0, \quad (162)$$

$$v_j^{\min} \leq v_{j,t+1} \leq v_j^{\max}, \quad v_{j,T+1} \geq v_j^{\text{meta}}, \quad (163)$$

$$\sum_{j=1}^{NJ} gh_{jt} + \sum_{i=1}^{NI} gt_{it} = d_t, \quad (164)$$

$$0 \leq gt_{it} \leq oqt_{it}, \quad (165)$$

$$0 \leq gh_{jt} \leq oqh_{jt}, \quad (166)$$

$$\pi_t - \delta t_{it}^{\min} + \delta t_{it}^{\max} \leq opt_{it}, \quad (167)$$

$$\pi_t - \delta h_{jt}^{\min} + \delta h_{jt}^{\max} \leq oph_{jt}, \quad (168)$$

$$\delta t_{it}^{\min}, \delta h_{jt}^{\min}, \delta t_{it}^{\max}, \delta h_{jt}^{\max} \leq 0, \quad (169)$$

$$gt_{it} \leq M^{gt_i} \cdot (1 - \eta t_{it}), \quad (170)$$

$$-\pi_t + \delta t_{it}^{\min} - \delta t_{it}^{\max} + opt_{it} \leq M^{\pi gt_i} \cdot \eta t_{it}, \quad (171)$$

$$gh_{jt} \leq M^{gh_j} \cdot (1 - \eta h_{jt}), \quad (172)$$

$$-\pi_t + \delta h_{jt}^{\min} - \delta h_{jt}^{\max} + oph_{jt} \leq M^{\pi gh_j} \cdot \eta h_{jt}, \quad (173)$$

$$0 \leq \pi_t \leq M^P \cdot (1 - \eta \pi_t), \quad (174)$$

$$0 \leq \sum_{j=1}^{NJ} gh_{jt} + \sum_{i=1}^{NI} gt_{it} - d_t \leq M^D \cdot \eta \pi_t, \quad (175)$$

$$gt_{it} \leq M^{gt_i} \cdot (1 - \eta t_{it}^{\delta}), \quad (176)$$

$$-\delta t_{it}^{\min} \leq M^{\delta t_i^{\min}} \cdot \eta t_{it}^{\delta}, \quad (177)$$

$$gh_{jt} \leq M^{gh_j} \cdot (1 - \eta h_{jt}^{\delta}), \quad (178)$$

$$-\delta h_{jt}^{\min} \leq M^{\delta h_j^{\min}} \cdot \eta h_{jt}^{\delta}, \quad (179)$$

$$oqt_{it} - gt_{it} \leq M^{gt_i} \cdot (1 - \eta qt_{it}), \quad (180)$$

$$-\delta_{it}^{\max} \leq M^{\delta_{it}^{\max}} \cdot \eta qt_{it}, \quad (181)$$

$$oqh_{jt} - gh_{jt} \leq M^{gh_j} \cdot (1 - \eta qh_{jt}), \quad (182)$$

$$-\delta_{jt}^{\max} \leq M^{\delta_{jt}^{\max}} \cdot \eta qh_{jt}, \quad (183)$$

$$\eta t_{it}, \eta h_{jt}, \eta \pi_i, \eta t_{it}^{\delta}, \eta h_{jt}^{\delta}, \eta qt_{it}, \eta qh_{jt} \in \{0, 1\}. \quad (184)$$

em que:

$$gh_{jt}^{\text{meta}} = \frac{1}{NL} \sum_{L=1}^{NL} gh_{jt}^L, \quad (185)$$

$$gt_{it}^{\text{meta}} = \frac{1}{NL} \sum_{L=1}^{NL} gt_{it}^L. \quad (186)$$

#### 4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em um mercado de energia elétrica com características de oligopólio, em que os agentes podem realizar ofertas de preços e quantidades de energia a que estão dispostos a oferecer ao mercado, o processo de formação de preços é fortemente influenciado pela atuação individual dos agentes de geração.

Com o objetivo de propor uma metodologia capaz de contribuir para um melhor entendimento desse processo, foi apresentado nesse capítulo o desenvolvimento de um modelo voltado para a determinação da estratégia de oferta de preços e quantidades de energia de um agente de geração, bem como a interação entre todos os agentes participantes de um mercado de curto prazo com predominância de geração hidrelétrica.

O modelo foi apresentado em detalhes, desde a formulação do problema de otimização de dois níveis, passando pela transformação para um modelo de um único nível, não linear, denominado de problema de Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio, onde a função objetivo foi linearizada e as restrições de complementariedade transformadas para restrições binárias, resultando em um problema de Programação Linear Inteira Mista. Até essa etapa, o modelo de otimização formulado é destinado ao estudo da melhor estratégia de oferta de energia sob o ponto de vista de um agente específico.

Na etapa seguinte, o modelo foi extrapolado para propiciar o estudo do mercado como um todo, por meio de um Problema de Equilíbrio com Restrições de Equilíbrio, que leva em consideração a interação entre os agentes do mercado. Ao final, uma metodologia para coordenar os problemas resolvidos por cada agente de geração e assim facilitar a convergência do modelo de equilíbrio foi também apresentada.

Uma vez apresentada a formulação e modelagem do problema de interesse, bem como a proposta de metodologia para solução do mesmo, o próximo capítulo irá tratar das implementações computacionais realizadas com vistas a demonstrar a aplicação da metodologia proposta neste trabalho.



## **CAPÍTULO 5**

### **RESULTADOS COMPUTACIONAIS**

---

#### **5.1 INTRODUÇÃO**

As implementações computacionais apresentadas neste capítulo têm o propósito de ilustrar a aplicação da metodologia desenvolvida neste trabalho. Para tanto, serão utilizados dois sistemas hidrotérmicos, cujos dados e configuração (disposição das usinas na cascata) referentes às usinas hidrelétricas e reservatórios correspondem a dados reais adaptados do Sistema Interligado Nacional (SIN). O primeiro sistema (Sistema Hidrotérmico 1) possui três agentes de geração e um horizonte de estudo de três estágios, enquanto que o segundo sistema (Sistema Hidrotérmico 2) é um pouco mais complexo e possui sete agentes de geração e um horizonte de estudo de 24 estágios de uma hora cada. O detalhamento e os resultados dos testes realizados em cada um desses sistemas serão apresentados na próxima seção.

#### **5.2 RESULTADOS COMPUTACIONAIS**

Todos os testes foram executados em um computador Intel Core i5 2,53 GHz e o pacote de otimização utilizado foi o Gurobi versão 6.0.5 (GUROBI OPTIMIZATION, 2015).

### 5.2.1 Sistema Hidrotérmico 1

O primeiro sistema é composto de uma usina termelétrica e três usinas hidrelétricas na mesma cascata, conforme pode ser observado na Figura 9. Cada usina hidrelétrica pertence a agentes distintos, sendo que a usina hidrelétrica  $H_1$  e a termelétrica  $T_1$  pertencem ao mesmo agente. Além disso, cada usina hidrelétrica está associada a um reservatório e uma unidade geradora equivalente.

O horizonte de estudo é de três horas e o tempo de viagem da água entre duas usinas é de uma hora.

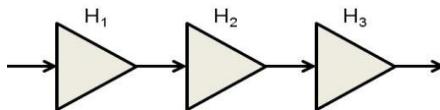


Figura 9. Usinas hidrelétricas em cascata – Sistema hidrotérmico 1.

Inicialmente, com o intuito de facilitar o acompanhamento dos resultados e validar a metodologia desenvolvida, bem como permitir a avaliação dos impactos de determinados parâmetros e variáveis no modelo, será resolvido o PLIM para esse primeiro sistema teste sob o ponto de vista do Agente de Geração 1 (Gerador 1), proprietário da usina hidrelétrica  $H_1$  e termelétrica  $T_1$ . Após essa etapa, será solucionado um modelo de equilíbrio (EPEC) considerando a interação entre os agentes de geração.

Assim, para o Sistema Hidrelétrico 1, as informações das usinas hidrelétricas, referentes às afluições incrementais aos reservatórios, volume inicial e limites mínimo e máximo de volume armazenado, produtividade e capacidade máxima de geração são apresentadas na Tabela 1. É importante destacar que as afluições incrementais aos reservatórios ( $y_i$ ) foram consideradas constantes para cada estágio e os custos incrementais de produção associados às usinas hidrelétricas ( $ch_{it}$ ) foram considerados nulos.

A Tabela 2 apresenta o custo incremental de produção e a capacidade máxima de geração associada à usina termelétrica. A demanda do sistema foi considerada no valor de 3000 MWh, constante para cada estágio de tempo. Conforme já observado, considera-se um sistema barra única neste trabalho, ou seja, restrições de transmissão não são consideradas.

**Tabela 1. Dados das usinas hidrelétricas do Sistema Hidrotérmico 1.**

	$y_t$ (m <sup>3</sup> /s)	$v_1$ (hm <sup>3</sup> )	$v^{\min}$ (hm <sup>3</sup> )	$v^{\max}$ (hm <sup>3</sup> )	$v^{\text{meta}}$ (hm <sup>3</sup> )	$\rho$ (MWh/m <sup>3</sup> /s)	$gh^{\max}$ (MWh)
<b>H<sub>1</sub></b>	370	1400	1320	1477	1380	1,58	880
<b>H<sub>2</sub></b>	475	2795	2283	3340	2786	0,87	1140
<b>H<sub>3</sub></b>	669	4700	4300	5100	4696	0,91	1450

**Tabela 2. Dados da usina termelétrica.**

	$ct$ (R\$/MWh)	$gt^{\max}$ (MWh)
<b>T<sub>1</sub></b>	400	1000

Neste primeiro exemplo, as ofertas iniciais de preço (*oph*) e quantidade (*oqh*) para as usinas H<sub>2</sub> e H<sub>3</sub>, de propriedade, respectivamente, dos geradores 2 e 3 são apresentadas na Tabela 3. Como pode ser observado, esses geradores ofertaram sua capacidade máxima de geração e uma oferta de preço no valor de 500 R\$/MWh para os três estágios de tempo considerados no modelo.

**Tabela 3. Ofertas iniciais para o Sistema Hidrotérmico 1.**

<b>Estágio</b>	<b>Gerador 2</b>		<b>Gerador 3</b>	
	<i>oph</i> (R\$/MWh)	<i>oqh</i> (MWh)	<i>oph</i> (R\$/MWh)	<i>oqh</i> (MWh)
<b>1</b>	500	1140	500	1450
<b>2</b>	500	1140	500	1450
<b>3</b>	500	1140	500	1450

A solução do problema de PLIM (128) a (144) para o Gerador 1 resulta nas ofertas de preço e quantidade apresentadas na Tabela 4, as quais maximizam o lucro para suas usinas hidrelétrica e termelétrica, considerando as ofertas dos concorrentes. Com esse conjunto de ofertas (Tabelas 3 e 4) realizadas pelos agentes de mercado, o resultado do despacho do Sistema Hidrotérmico 1 pode ser observado na Tabela 5.

**Tabela 4. Ofertas estratégicas para o Gerador 1.**

Estágio	Gerador 1			
	<i>oph</i> (R\$/MWh)	<i>opt</i> (R\$/MWh)	<i>oqh</i> (MWh)	<i>oqt</i> (MWh)
1	499,99	0	880	1000
2	499,99	0	880	1000
3	499,99	0	880	1000

**Tabela 5. Despacho do sistema.**

Estágio	Gerador 1		Gerador 2	Gerador 3
	<i>gh</i> (MWh)	<i>gt</i> (MWh)	<i>gh</i> (MWh)	<i>gh</i> (MWh)
1	880	1000	492,97	627,03
2	880	1000	492,97	627,03
3	880	1000	492,97	627,03

O preço teto ( $Pcap$ ) utilizado no modelo foi de 1000 R\$/MWh.

As constantes  $M^{\pi_{gt_i}}$ ,  $M^{\pi_{gh_j}}$ ,  $M^{\delta_{t_i}^{\min}}$ ,  $M^{\delta_{j}^{\min}}$ ,  $M^{\delta_{t_i}^{\max}}$  e  $M^{\delta_{j}^{\max}}$  assumiram o valor de  $Pcap \times 10$  (nos testes realizados, observou-se uma estabilidade da solução para fatores maiores ou iguais a 5),  $M^P = Pcap$ ,  $M^D = 1 \times 10^{-3}$ , ao passo que  $M^{gt_i}$  e  $M^{gh_j}$  assumiram os valores das respectivas capacidades máximas de produção das usinas do sistema. O valor do fator de penalidade  $\beta$ , suficiente para que a variável de folga  $gs$  fosse nula para o Gerador 1 nos três estágios de tempo, foi de  $1 \times 10^{-6}$ . No entanto, considerando que em um mercado de energia, ao não atender a determinação do OM, o gerador poderá ficar exposto à quantidade de energia elétrica não produzida valorada até o limite de preço do mercado, optou-se por considerar  $\beta = Pcap$ .

A estratégia para maximização da renda líquida adotada pelo Gerador 1 consistiu em realizar uma oferta de preço abaixo dos demais geradores, de modo que fosse possível despachar a capacidade máxima de suas usinas ( $H_1$  e  $T_1$ ). Com essa estratégia, o custo marginal de operação do sistema foi de 500 R\$/MWh para os três estágios, resultando numa receita líquida para o Gerador 1 de R\$  $1,62 \times 10^6$ .

O valor do custo marginal de operação corresponde as ofertas dos Geradores 2 e 3. É interessante notar que, como as ofertas de preço desses dois agentes foram idênticas, passou a ser indiferente para o OM despachar um ou outro gerador, sendo que o resultado do modelo foi equivalente ao despacho dos 1120 MWh (demanda menos geração de  $H_1$  e  $T_1$ ) necessários para atender a demanda, de forma proporcional entre eles, baseado na capacidade máxima de geração (1140 MWh para a usina  $H_2$  e 1450 MWh para a usina  $H_3$ ).

Outro ponto de destaque é o fato de que o Gerador 1 poderia reduzir sua oferta de quantidade, elevando a oferta de preço até o preço teto do mercado, já que a soma da capacidade máxima de produção de seus concorrentes (2590 MWh) não é suficiente para atender a demanda (3000 MWh) do sistema. Contudo, esse não foi o resultado do modelo, uma vez que nesse caso, o agente geraria 410 MWh na usina  $H_1$  ao preço de 1000 R\$/MWh, resultando em um valor total de R\$  $1,23 \times 10^6$ , inferior ao valor de receita obtida (R\$  $1,62 \times 10^6$ ). Para que essa estratégia fosse viável, seria necessário que o preço teto do modelo fosse superior a 1317 R\$/MWh. Ou seja, um preço teto acima desse valor possibilitaria o exercício de poder de mercado por parte do Gerador 1.

A respeito do gerenciamento do reservatório relacionado à usina  $H_1$ , a Tabela 6 traz os valores de volume armazenado no início de cada estágio ( $v$ ), em  $\text{hm}^3$ , vazão turbinada ( $q$ ) e vazão vertida ( $s$ ) em cada estágio, ambas em  $\text{m}^3/\text{s}$ . Além da vazão turbinada ter sido o valor necessário para geração de 880 MWh, considerando a produtibilidade da usina, observa-se que as restrições de volume foram atendidas, sendo que o limite mínimo de volume ao final do horizonte de estudo ( $v^{meta}$ ) foi atingido. Com relação à vazão vertida, observou-se um valor não nulo no segundo estágio de tempo, sendo que a decisão mais adequada seria armazenar essa quantidade de água no reservatório para uso futuro, ao invés de verter. Com isso, o valor do volume final do reservatório seria superior ao  $v^{meta}$ , mas ainda assim, estaria dentro dos limites estabelecidos para o reservatório em questão. Contudo, a explicação para essa tomada de decisão por parte do agente está relacionada ao fato do modelo considerar um horizonte de estudo até o terceiro estágio. Assim, o que acontece após esse período não é levado em consideração pelo modelo. A única informação do futuro é dada pelo  $v^{meta}$ , e esse foi atendido. Além disso, não existe um incentivo, que poderia ser uma penalização na função objetivo, para que o gerador minimize o

vertimento, já que pode necessitar dessa água no futuro. Esse é um ponto que não foi considerado na presente formulação, mas que deve ser melhor investigado em desenvolvimentos futuros. No entanto, com o intuito de testar a utilização desse incentivo para o gerador armazenar água no reservatório ao invés de verter, a vazão vertida foi penalizada na função objetivo do problema, por meio da inclusão da parcela  $-\sum_{t=1}^T \sum_{j \in L} \sigma \cdot s_{jt}$ , em que  $\sigma$  é um parâmetro positivo e seu valor foi estabelecido em  $1,5xPcap$ . Esse valor foi utilizado pelo fato de que, embora valores de  $\sigma$  muito pequenos ( $1x10^{-9}$ , por exemplo) tenham sido suficientes para transformar a vazão vertida em valores nulos, cada  $m^3/s$  vertido poderia ser valorado até o limite de preço multiplicado pela produtividade da usina. Como consequência dessa penalização, o volume disponível no reservatório para ser utilizado a partir do estágio 4 passou a ser de  $1397,97 \text{ hm}^3$  ( $17,97 \text{ hm}^3$  superior ao valor anterior). Os resultados das demais variáveis do problema não foram alterados.

**Tabela 6. Resultados do gerenciamento do reservatório da usina H<sub>1</sub>.**

Estágio	H <sub>1</sub>		
	$v$ ( $\text{hm}^3$ )	$q$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	$s$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ )
1	1400	558	0
2	1399,32	558	4991,56
3	1380,68	558	0
4	1380	-	-

### 5.2.1.1 Modelo de Equilíbrio aplicado ao Sistema Hidrotérmico 1 (SH1)

O modelo de equilíbrio permite a realização de uma avaliação acerca do comportamento e interação dos agentes e o consequente resultado para o mercado de energia. Os resultados apresentados abaixo consideram o sistema descrito anteriormente, com algumas alterações nos parâmetros relacionados a usina hidrelétrica do Gerador 2 (H<sub>2</sub>). Nessa simulação, as afluições incrementais ( $y_t$ ) ao reservatório da usina H<sub>2</sub> foram consideradas nulas para os três períodos de tempo e a meta de volume final do reservatório ( $v^{meta}$ ) foi considerada igual ao valor do

volume inicial (2795 hm<sup>3</sup>). Dessa forma, a usina H<sub>2</sub> poderá gerar energia somente se H<sub>1</sub> turbinar e/ou verter água de seu reservatório, levando em consideração ainda que o tempo de viagem da água entre os dois reservatórios é de uma hora. Para facilitar a visualização, os dados do modelo de equilíbrio relacionados aos reservatórios das usinas hidrelétricas são apresentados na Tabela 7, com destaque para os valores dos parâmetros alterados. O custo incremental de produção e a capacidade máxima de geração associada à usina T<sub>1</sub> são os mesmos apresentados na Tabela 2. A demanda do sistema foi reduzida para 1000 MWh para os três estágios de tempo considerados. O preço teto do mercado foi reduzido para o valor de 500 R\$/MWh e os valores das constantes utilizadas nas restrições binárias foram mantidas inalteradas. A penalização para o vertimento foi mantida para a resolução desse modelo de equilíbrio ( $\sigma = 1,5 \times P_{cap}$ ). As ofertas de preço (*oph*) e quantidade (*oqh*) consideradas inicialmente para as usinas H<sub>2</sub> e H<sub>3</sub> são apresentadas na Tabela 8. Pelo fato de sua geração depender do despacho de outro agente a montante da cascata, foram consideradas ofertas nulas para o Gerador 2, enquanto que para o Gerador 3 foi considerada oferta de preço nula e capacidade máxima de geração para oferta de quantidade.

**Tabela 7. Dados das usinas hidrelétricas do SH1 – Modelo de Equilíbrio.**

	$y_t$ (m <sup>3</sup> /s)	$v_1$ (hm <sup>3</sup> )	$v^{\min}$ (hm <sup>3</sup> )	$v^{\max}$ (hm <sup>3</sup> )	$v^{\text{meta}}$ (hm <sup>3</sup> )	$\rho$ (MWh/m <sup>3</sup> /s)	$gh^{\max}$ (MWh)
<b>H<sub>1</sub></b>	370	1400	1320	1477	1380	1,58	880
<b>H<sub>2</sub></b>	<b>0</b>	2795	2283	3340	<b>2795</b>	0,87	1140
<b>H<sub>3</sub></b>	669	4700	4300	5100	4696	0,91	1450

**Tabela 8. Ofertas iniciais para o SH1 – Modelo de Equilíbrio.**

Estágio	Gerador 2		Gerador 3	
	<i>oph</i> (R\$/MWh)	<i>oqh</i> (MWh)	<i>oph</i> (R\$/MWh)	<i>oqh</i> (MWh)
<b>1</b>	0	0	0	1450
<b>2</b>	0	0	0	1450
<b>3</b>	0	0	0	1450

A Tabela 9 apresenta as ofertas de preço e quantidade resultantes da resolução do problema para o Gerador 1. Faz-se necessário destacar que inicialmente, o EPEC está sendo resolvido sem considerar o acoplamento entre os problemas solucionados por cada agente de geração (metodologia análoga às restrições de não-antecipatividade, conforme discutido e proposto no Capítulo anterior), o que equivale a resolver o problema de PLIM (152) a (184) com um parâmetro  $\alpha$  nulo.

Como pode ser observado, as ofertas de preço e quantidade foram nulas para ambas usinas do Gerador 1 em todos os períodos de tempo, resultando em uma receita também nula para esse gerador. Dadas as ofertas iniciais dos concorrentes, onde apenas o Gerador 3 se dispôs a gerar até o limite de sua capacidade máxima (nesse caso superior a própria demanda) a preços nulos, é natural que o Gerador 1 não se disponha a acionar suas usinas, visto que não receberá nada por isso. Portanto, a decisão mais acertada é escolher não gerar, e dessa forma armazenar água no reservatório, na expectativa de auferir uma receita futura. Dessa maneira, toda afluência incremental é armazenada no reservatório para posterior utilização, resultando num volume de 1404 hm<sup>3</sup> ao final do horizonte considerado no modelo. O despacho resultante das ofertas realizadas pelos três geradores é mostrado na Tabela 10. Conforme esperado, o Gerador 3 é o único despachado e, com isso, o custo marginal de operação do sistema, dado pela oferta desse gerador, é nulo para todos os estágios.

**Tabela 9. Ofertas estratégicas para o Gerador 1 – Modelo de Equilíbrio do SH1.**

Estágio	Gerador 1			
	<i>oph</i> (R\$/MWh)	<i>opt</i> (R\$/MWh)	<i>oqh</i> (MWh)	<i>oqt</i> (MWh)
<b>1</b>	0	0	0	0
<b>2</b>	0	0	0	0
<b>3</b>	0	0	0	0

**Tabela 10. Despacho do sistema após resolução pelo Gerador 1 – Modelo de Equilíbrio do SH1.**

Estágio	Gerador 1		Gerador 2	Gerador 3
	<i>gh</i> (MWh)	<i>gt</i> (MWh)	<i>gh</i> (MWh)	<i>gh</i> (MWh)
1	0	0	0	1000
2	0	0	0	1000
3	0	0	0	1000

Na resolução do problema para o Gerador 2 são consideradas as ofertas definidas pelo Gerador 1 na resolução anterior (Tabela 9) e as ofertas iniciais (Tabela 8) do Gerador 3. Como não houve vertimento nem turbinamento por parte do Gerador 1, esses parâmetros são considerados nulos na execução do problema para o Gerador 2. Assim, conforme já destacado, não é possível despachar o Gerador 2 e suas ofertas refletem essa condição. Desse modo, sua receita é nula e o volume do reservatório se mantém em 2795 hm<sup>3</sup> ao longo do período de estudo. Novamente, apenas o Gerador 3 é despachado e o custo marginal de operação é nulo para os três estágios. As ofertas realizadas pelo Gerador 2 e o despacho resultante do sistema são mostrados, respectivamente, nas tabelas abaixo.

**Tabela 11. Ofertas estratégicas para o Gerador 2 – Modelo de Equilíbrio do SH1.**

Estágio	Gerador 2	
	<i>oph</i> (R\$/MWh)	<i>oqh</i> (MWh)
1	0	0
2	0	0
3	0	0

**Tabela 12. Despacho do sistema após resolução pelo Gerador 2 – Modelo de Equilíbrio do SH1.**

Estágio	Gerador 1		Gerador 2	Gerador 3
	<i>gh</i> (MWh)	<i>gt</i> (MWh)	<i>gh</i> (MWh)	<i>gh</i> (MWh)
1	0	0	0	1000
2	0	0	0	1000
3	0	0	0	1000

A primeira iteração do modelo de equilíbrio é finalizada com a resolução do problema de PLIM para o Gerador 3, que atualiza as ofertas realizadas pelos Geradores 1 e 2 (Tabelas 9 e 11) e considera a vazão incremental e vertida pelo Gerador 2 (com um atraso de uma hora), nesse caso, todas nulas. As ofertas resultantes do Gerador 3, bem como o despacho do sistema, são apresentados nas Tabelas 13 e 14. As decisões ótimas dos Geradores 1 e 2, de não declarar disponibilidade de oferta, permitiram ao Gerador 3 declarar uma oferta de quantidade de 1000 MWh, ao maior valor de preço possível (preço teto), exercendo assim poder de mercado. Diante disso, o custo marginal de operação foi de 500 R\$/MWh para os três estágios. Contudo, como não houve geração e muito menos vertimento por parte do gerador a montante do Gerador 3, o balanço hídrico do reservatório não permitiu o turbinamento na totalidade necessária para atender a carga nos três estágios (3289,655 m<sup>3</sup>/s). O volume total disponível para turbinamento, dado pela diferença entre o volume inicial e o volume meta ( $v_1 - v^{meta} = 4 \text{ hm}^3$ ), acrescido das afluições incrementais (2007 m<sup>3</sup>/s), resulta no valor de 3118,11 m<sup>3</sup>/s. Desse modo, no estágio 1, a vazão turbinada pela usina H<sub>3</sub> resultou em uma geração de 843,56 MWh, faltando ainda 156,44 MWh para atender o despacho de 1000 MWh. Esse valor de 156,44 MWh foi penalizado na função objetivo do problema por meio do parâmetro de penalidade  $\beta$ . Assim, o agente optou por fazer uma oferta de quantidade de 1000 MWh, mesmo sabendo que iria gerar apenas parte disso. O valor desse parâmetro de penalidade foi definido como sendo o mesmo valor do preço teto do mercado (500 R\$/MWh). É importante associar um custo elevado ao parâmetro de penalidade, de modo a permitir que a variável de folga  $gs_{jt}$  seja diferente de zero somente quando não houver outra alternativa. Na prática, essa

penalidade pode ser entendida como uma exposição negativa do gerador, que corresponde a um valor a que o mesmo estará sujeito a arcar caso não atenda ao despacho do OM. Despacho esse, que está relacionado com a própria oferta de quantidade realizada pelo agente. Ou seja, o Gerador 3 optou por ficar exposto e fazer uma oferta de 1000 MWh, mesmo sabendo que não poderia atendê-la em sua plenitude. No entanto, devido a formulação do modelo, qualquer que fosse o valor de  $\beta$ , não seria suficiente para incentivar o Gerador 3 a atender o despacho do OM, mesmo porque não há água suficiente para tal. Qualquer valor para o parâmetro  $\beta$  faria com que a usina do agente fosse despachada de modo a atender a restrição de demanda. Dessa forma, mesmo tendo prejuízo (receita negativa em função do parâmetro de penalidade) a usina H<sub>3</sub> seria despachada. Contudo, na prática isso não é verdadeiro, já que o gerador em questão iria preferir não gerar, caso sua receita fosse negativa. Por outro lado, caso o modelo formulado permitisse a possibilidade de um corte de carga, por meio da modelagem de uma função de custo do déficit, por exemplo, o valor da penalidade  $\beta$  poderia fazer com que o Gerador 3 não realizasse uma oferta para atendimento da demanda total.

Nessa simulação, considerando o valor da penalidade igual ao preço teto, a receita líquida obtida pelo Gerador 3 foi de R\$ 1,422 x 10<sup>6</sup>. A vazão turbinada para o primeiro período foi de 925,01 m<sup>3</sup>/s e 1096,55 m<sup>3</sup>/s para os dois períodos seguintes. O vertimento foi nulo, devido a penalização utilizada ( $\sigma = 1,5 \times Pcap$ ), e o volume armazenado no reservatório no início dos períodos 2 a 4 foi, respectivamente, 4699,08, 4697,54 e 4696 hm<sup>3</sup>. Esse último, igual ao valor do volume meta, conforme já destacado.

**Tabela 13. Ofertas estratégicas para o Gerador 3 – Modelo de Equilíbrio do SH1.**

Estágio	Gerador 3	
	<i>oph</i> (R\$/MWh)	<i>ogh</i> (MWh)
<b>1</b>	500	1000
<b>2</b>	500	1000
<b>3</b>	500	1000

**Tabela 14. Despacho do sistema após resolução pelo Gerador 3 – Modelo de Equilíbrio do SH1.**

Estágio	Gerador 1		Gerador 2	Gerador 3
	<i>gh</i> (MWh)	<i>gt</i> (MWh)	<i>gh</i> (MWh)	<i>gh</i> (MWh)
1	0	0	0	1000
2	0	0	0	1000
3	0	0	0	1000

Na segunda iteração, ao considerar as ofertas dos concorrentes na iteração passada, o Gerador 1 realiza suas ofertas de modo a atender a demanda do sistema somente com suas usinas, deslocando assim, o Gerador 3 da ordem de mérito. O custo marginal de operação para os três estágios é de 500 R\$/MWh e a receita auferida pelo Gerador 1 é de R\$  $1,356 \times 10^6$ . As ofertas de preço e quantidade, bem como o despacho do sistema após decisão do Gerador 1 são apresentadas nas duas tabelas seguintes (Tabelas 15 e 16). É importante destacar que o custo marginal resultante corresponde a oferta de preço do Gerador 3, pois um incremento infinitesimal na demanda do sistema seria atendida por esse gerador. Outra questão relevante é o fato de apenas as usinas do Gerador 1 terem sido despachadas, mesmo quando o preço ofertado foi igual ao do Gerador 3. Isso acontece, pois no problema de segundo nível (problema do OM), internalizado no problema resolvido pelo Agente *L*, não existe uma priorização de despacho quando as ofertas de preço são idênticas. Isto é, sob o ponto de vista do OM, há uma indiferença quanto à usina a ser despachada em casos onde são realizadas as mesmas ofertas de preço. No entanto, como nesse caso o Agente *L* é o próprio Gerador 1, e sua receita está diretamente relacionada a sua geração, este tende a priorizar o despacho de suas usinas, em detrimento da geração das usinas do Gerador 3 (quando os agentes ofertam o mesmo preço). O mesmo pode acontecer para os demais agentes atuando como líderes. Contudo, a aplicação do conceito de não-antecipatividade (será realizada adiante) corrige essa distorção ao fazer com que o despacho visto por qualquer um dos Agentes *L* convirja para os mesmos valores. Em outras palavras, as restrições de não-antecipatividade não permitem que múltiplas estratégias de oferta estejam associadas ao mesmo preço *spot*.

**Tabela 15. Ofertas estratégicas para o Gerador 1 na segunda iteração – Modelo de Equilíbrio do SH1.**

Estágio	Gerador 1			
	<i>oph</i> (R\$/MWh)	<i>opt</i> (R\$/MWh)	<i>oqh</i> (MWh)	<i>oqt</i> (MWh)
1	500	500	880	120
2	0	500	880	120
3	0	0	880	120

**Tabela 16. Despacho do sistema após resolução pelo Gerador 1 – Modelo de Equilíbrio do SH1 na segunda iteração.**

Estágio	Gerador 1		Gerador 2	Gerador 3
	<i>gh</i> (MWh)	<i>gt</i> (MWh)	<i>gh</i> (MWh)	<i>gh</i> (MWh)
1	880	120	0	0
2	880	120	0	0
3	880	120	0	0

Na resolução do problema pelo Gerador 2, considerando que nessa iteração a vazão turbinada pela usina hidrelétrica a montante ( $H_1$ ) atinge o reservatório da usina  $H_2$  no segundo e terceiro estágio, é possível utilizar essa água para realizar ofertas de geração. As ofertas e o despacho do sistema após decisão do Gerador 2 são mostradas abaixo. Novamente, o custo de operação é de 500 R\$/MWh. A receita do Gerador 2 é de R\$  $0,485 \times 10^6$ .

**Tabela 17. Ofertas estratégicas para o Gerador 2 na segunda iteração – Modelo de Equilíbrio do SH1.**

Estágio	Gerador 2	
	<i>oph</i> (R\$/MWh)	<i>oqh</i> (MWh)
1	500	850,44
2	500	120
3	500	0

**Tabela 18. Despacho do sistema após resolução pelo Gerador 2 – Modelo de Equilíbrio do SH1 na segunda iteração.**

Estágio	Gerador 1		Gerador 2	Gerador 3
	<i>gh</i> (MWh)	<i>gt</i> (MWh)	<i>gh</i> (MWh)	<i>gh</i> (MWh)
<b>1</b>	29,56	120	850,44	0
<b>2</b>	880	0	120	0
<b>3</b>	880	120	0	0

O Gerador 3, diferentemente da primeira iteração, oferta agora preços nulos para os três estágios, de modo a garantir que suas ofertas de quantidade sejam atendidas. Nessa iteração, o agente não ficou sujeito ao pagamento de penalidades em razão do não atendimento ao despacho do OM. Os resultados são apresentados a seguir. O custo marginal de operação foi de 500 R\$/MWh para os dois primeiros estágios e nulo para o terceiro. A receita auferida foi de R\$ 0,56 x 10<sup>6</sup>.

**Tabela 19. Ofertas estratégicas para o Gerador 3 na segunda iteração – Modelo de Equilíbrio do SH1.**

Estágio	Gerador 3	
	<i>oph</i> (R\$/MWh)	<i>oqh</i> (MWh)
<b>1</b>	0	1000
<b>2</b>	0	120
<b>3</b>	0	0

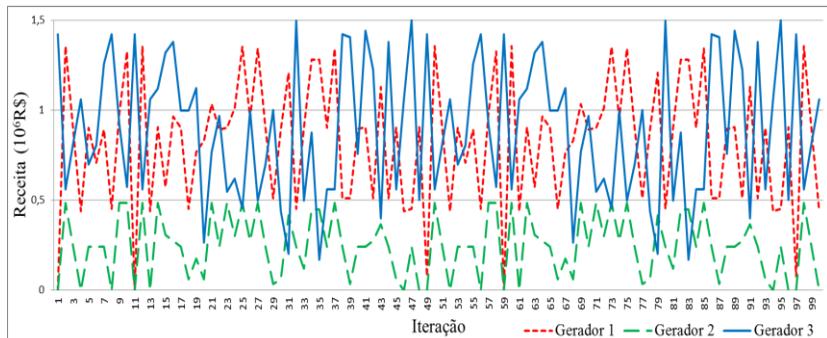
**Tabela 20. Despacho do sistema após resolução pelo Gerador 3 – Modelo de Equilíbrio do SH1 na segunda iteração.**

Estágio	Gerador 1		Gerador 2	Gerador 3
	<i>gh</i> (MWh)	<i>gt</i> (MWh)	<i>gh</i> (MWh)	<i>gh</i> (MWh)
<b>1</b>	0	0	0	1000
<b>2</b>	880	0	0	120
<b>3</b>	880	120	0	0

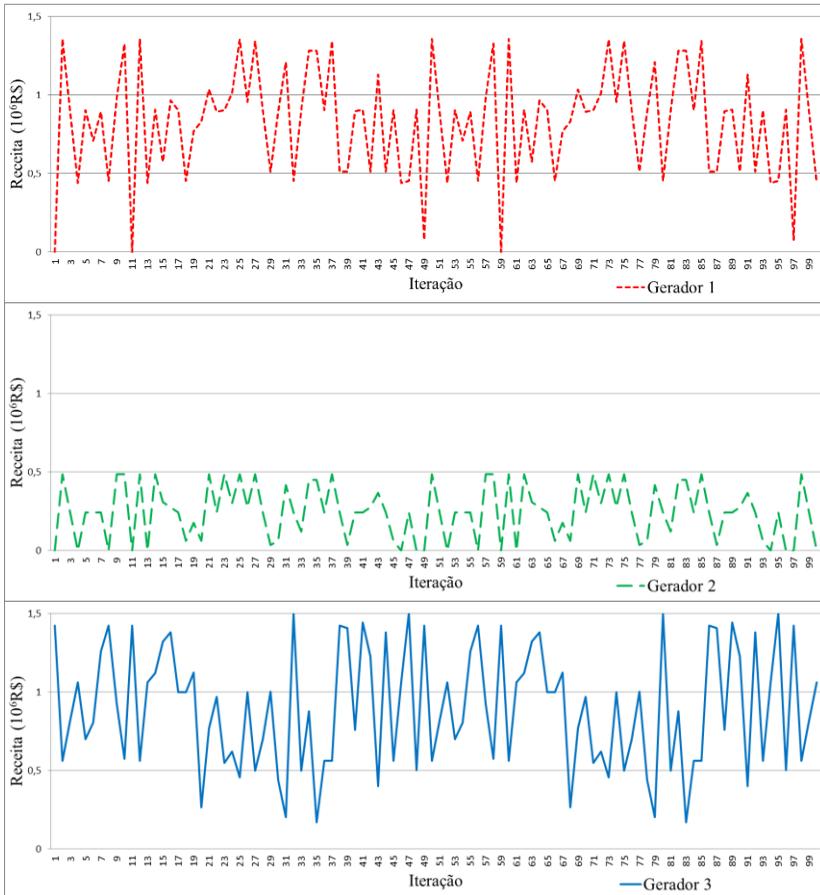
Como mostrado nessas duas primeiras iterações, na tentativa de maximizar sua receita, cada agente toma uma decisão alterando o despacho do sistema, e na iteração seguinte, uma nova decisão é tomada em função das ofertas dos concorrentes. Espera-se que, em algum momento desse processo iterativo, as decisões dos agentes convirjam para um equilíbrio, onde nenhum deles tenha o incentivo de alterar sua decisão, aumentando assim sua receita. No entanto, ao longo das iterações executadas para o modelo de equilíbrio do Sistema Hidrotérmico 1, não se percebe uma convergência das ofertas. A Figura 10 mostra as receitas dos agentes ao longo de 100 iterações do modelo. Para facilitar a visualização, a receita de cada agente é mostrada separadamente na Figura 11.

Pela análise das figuras, é possível verificar que o modelo não converge para um equilíbrio, onde as receitas permaneceriam constantes ao longo das iterações. É importante observar ainda que os valores de receita de cada agente apresentam um comportamento oscilatório que passa a se repetir a partir da iteração 49.

Diante disso, de modo a contribuir para que o sistema atinja o equilíbrio, pode-se aplicar o acoplamento entre os problemas resolvidos por cada agente de mercado, conforme metodologia proposta neste trabalho. Para atingir esse objetivo, a penalidade dada pelo fator  $\alpha$  deve ser inicializada e atualizada ao longo das iterações.



**Figura 10. Receita ao longo das iterações – Modelo de Equilíbrio do SH1.**



**Figura 11. Receita de cada agente ao longo das iterações – Modelo de Equilíbrio do SH1.**

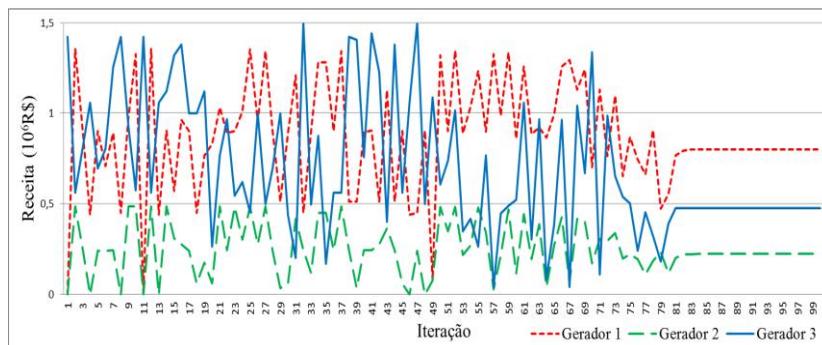
A questão fundamental é como proceder à atualização desse parâmetro de penalidade. Para o presente problema, podemos tirar proveito do comportamento da receita apresentado ao longo das iterações e iniciar a atualização do parâmetro  $\alpha$ , a partir do momento em que as receitas dos agentes começam a repetir de valores, ou seja, a partir da iteração 49. Então, a partir dessa iteração,  $\alpha$  deixa de ser nulo e passa a ser inicializado com o valor unitário. Na iteração seguinte, esse valor é multiplicado por um fator de 1,2, e assim sucessivamente, até que essa penalização na função objetivo do problema, aliada à

atualização dos valores médios de geração ( $gh_{ji}^{meta}$  e  $gt_{ii}^{meta}$  são atualizados após a resolução do PLIM por cada agente), resultantes do despacho solucionado por cada Agente  $L$ , force o modelo a atingir o equilíbrio. Quando isso ocorre, as ofertas dos agentes mantêm-se constantes, o despacho do sistema visto por qualquer um dos Agentes  $L$  passa a ser o mesmo e conseqüentemente a receita de cada agente converge para um determinado valor. A Figura 12 apresenta esses resultados. A partir da iteração 81, as receitas mantem-se praticamente constantes. Porém, na iteração 85 o sistema atinge o equilíbrio, onde as decisões dos agentes permanecem inalteradas. A receita final obtida pelos Geradores 1, 2 e 3, foi respectivamente, R\$ 801,39 x 10<sup>3</sup>, 223,19 x 10<sup>3</sup> e 475,42 x 10<sup>3</sup>. O preço final do mercado foi de 500 R\$/MWh, que equivale ao preço teto estipulado, indicando que houve um exercício de poder de mercado por parte dos geradores. Nesse sentido, a interação entre os produtores resultou em um pagamento total por parte da carga no valor de R\$ 1,5 x 10<sup>6</sup>. Caso apenas a usina termelétrica tivesse sido despachada, considerando seu custo incremental de 400 R\$/MWh, a demanda pagaria um valor de R\$ 1,2 x 10<sup>6</sup> (20% inferior).

As ofertas de preço e quantidade finais para cada estágio, realizadas por cada agente, são apresentadas na Tabela 21. A

Tabela 22 apresenta o despacho final decorrente dessas ofertas e a Tabela 23 os resultados associados ao gerenciamento dos reservatórios das três usinas hidrelétricas.

O tempo computacional necessário para a convergência do modelo de equilíbrio foi de 5 segundos.



**Figura 12. Receita ao longo das iterações – Modelo de Equilíbrio do SH1 com acoplamento entre os Agentes  $L$ .**

**Tabela 21. Ofertas estratégicas finais – Modelo de Equilíbrio do SH1.**

Estágio	Gerador 1				Gerador 2		Gerador 3	
	<i>oph</i> (R\$/ MWh)	<i>opt</i> (R\$/ MWh)	<i>oqh</i> (MWh)	<i>oqt</i> (MWh)	<i>oph</i> (R\$/ MWh)	<i>oqh</i> (MWh)	<i>oph</i> (R\$/ MWh)	<i>oqh</i> (MWh)
1	500	500	349,05	0	500	295,89	500	355,06
2	500	500	460,65	0	500	91,14	500	448,21
3	0	0	793,09	0	500	59,35	500	147,56

**Tabela 22. Despacho final do sistema – Modelo de Equilíbrio do SH1.**

Estágio	Gerador 1		Gerador 2	Gerador 3
	<i>gh</i> (MWh)	<i>gt</i> (MWh)	<i>gh</i> (MWh)	<i>gh</i> (MWh)
1	349,05	0	295,89	355,06
2	460,65	0	91,14	448,21
3	793,09	0	59,35	147,56

**Tabela 23. Balanço hídrico final – Modelo de Equilíbrio do SH1.**

Está gio	Gerador 1 (H <sub>1</sub> )			Gerador 2 (H <sub>2</sub> )			Gerador 3 (H <sub>3</sub> )		
	<i>v</i> (hm <sup>3</sup> )	<i>q</i> (m <sup>3</sup> / s)	<i>s</i> (m <sup>3</sup> / s)	<i>v</i> (hm <sup>3</sup> )	<i>q</i> (m <sup>3</sup> / s)	<i>s</i> (m <sup>3</sup> / s)	<i>v</i> (hm <sup>3</sup> )	<i>q</i> (m <sup>3</sup> / s)	<i>s</i> (m <sup>3</sup> / s)
1	1400	221,33	0	2795	340,28	0	4700	389,34	0
2	1400,54	292,09	0	2793,78	104,82	0	4701,01	491,48	0
3	1400,82	502,89	0	2794,19	68,25	0	4702,87	161,81	0
4	1400,34	-	-	2795,00	-	-	4705,07	-	-

### 5.2.2 Sistema Hidrotérmico 2

O segundo sistema, mostrado na Figura 13, possui uma usina termelétrica e sete usinas hidrelétricas em cascata. O horizonte de estudo é de 24 horas com discretização horária. Assim como no problema anterior, cada usina hidrelétrica pertence a agentes distintos, sendo que a usina hidrelétrica H<sub>1</sub> e a termelétrica T<sub>1</sub> pertencem ao mesmo agente. Cada usina hidrelétrica está associada a um reservatório e uma unidade

geradora equivalente e o tempo de viagem da água entre duas usinas é de uma hora.

As informações das usinas hidrelétricas, referentes às afluições incrementais aos reservatórios, volume inicial e limites mínimo e máximo de volume armazenado, produtividade e capacidade máxima de geração são apresentadas na Tabela 24. As afluições incrementais aos reservatórios ( $v_i$ ) foram consideradas constantes para cada estágio de tempo ao longo do horizonte simulado e os custos incrementais de produção associados às usinas hidrelétricas ( $ch_{it}$ ) foram considerados nulos.

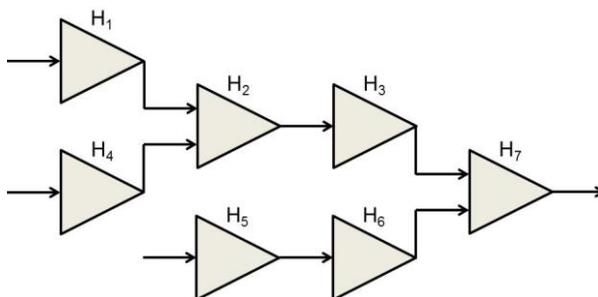


Figura 13. Diagrama esquemático das hidrelétricas – Sistema Hidrotérmico 2.

Tabela 24. Dados das usinas hidrelétricas.

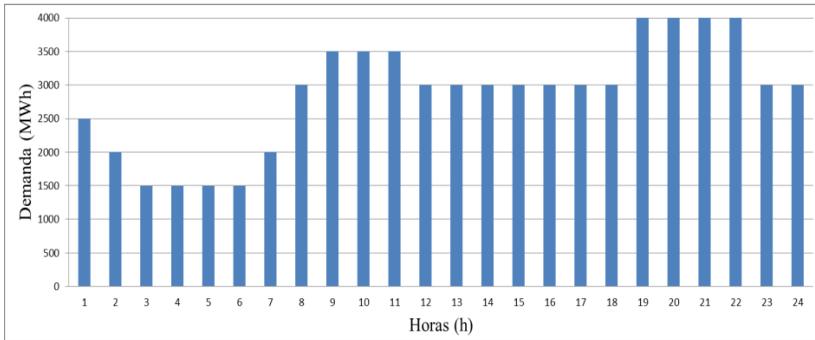
	$y_t$ ( $m^3/s$ )	$v_1$ ( $hm^3$ )	$v^{min}$ ( $hm^3$ )	$v^{max}$ ( $hm^3$ )	$v^{meta}$ ( $hm^3$ )	$\rho$ ( $MWh/m^3/s$ )	$gh^{max}$ ( $MWh$ )
<b>H<sub>1</sub></b>	370	1400	1320	1477	1380	1,58	880
<b>H<sub>2</sub></b>	475	2795	2283	3340	2786	0,87	1140
<b>H<sub>3</sub></b>	669	4700	4300	5100	4696	0,91	1450
<b>H<sub>4</sub></b>	400	4300	2711,8	4904,5	4270	1,36	700
<b>H<sub>5</sub></b>	50	1515	185	1589	1497	2,17	226
<b>H<sub>6</sub></b>	0	135	126,9	150,48	133,2	0,55	74
<b>H<sub>7</sub></b>	533	1350	1275,7	1513	1350	0,46	855

As informações referentes à usina termelétrica (custo incremental de produção e capacidade máxima de geração) são apresentadas na Tabela 25. A demanda do sistema ao longo das 24 horas é mostrada na Figura 14. O preço teto ( $Pcap$ ) utilizado foi de 500 R\$/MWh e os

valores dos parâmetros e constantes foram os seguintes:  $M^{gt_i} = gt^{max}$ ,  $M^{gh_j} = gh^{max}$ ,  $M^{\pi_{gt_i}}$ ,  $M^{\pi_{gh_j}}$ ,  $M^{\delta_i^{min}}$ ,  $M^{\delta_j^{min}}$ ,  $M^{\delta_i^{max}}$ ,  $M^{\delta_j^{max}} = Pcap \times 10$ ,  $M^P = Pcap$ ,  $M^D = 1 \times 10^{-3}$  e  $\beta = Pcap$ . Não foi considerada a penalização do vertimento para a resolução do SH2.

**Tabela 25. Dados da usina termelétrica.**

	$ct$	$gt^{max}$
	(R\$/MWh)	(MWh)
<b>T<sub>1</sub></b>	400	4000



**Figura 14. Demanda do sistema em MWh – Modelo de Equilíbrio do SH2.**

*5.2.2.1 Modelo de Equilíbrio aplicado ao Sistema Hidrotérmico 2 (SH2)*

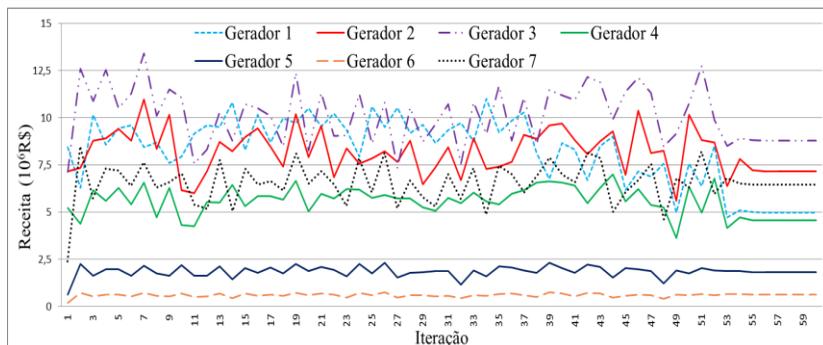
As ofertas de preço iniciais consideradas para a resolução do SH2 foram de 400 R\$/MWh para os Geradores 2 a 7, para cada um dos 24 estágios. Para as ofertas de quantidade, foram consideradas as respectivas capacidades máximas de geração, conforme valores constantes da última coluna da Tabela 24.

De acordo com a metodologia proposta no presente trabalho, a competição entre os sete agentes do SH2 é simulada por meio de um procedimento iterativo e, assim como na simulação realizada para o SH1, houve a necessidade de aplicar a metodologia de acoplamento entre os problemas de PLIM executados por cada gerador. Para tanto, o fator  $\alpha$  foi inicializado com o valor unitário a partir da décima iteração, sendo atualizado por um fator de 1,15 a cada iteração sucessiva até o

limite de 150, quando passou a ser incrementado com o valor de 15 a cada iteração. Cabe destacar que a atualização desse parâmetro é um processo heurístico e deve ser realizada em função das características do problema. Nesse caso, observou-se que a inicialização desse parâmetro com valores excessivamente elevados forçava os agentes a tomarem suas decisões de modo que o despacho resultante da execução de seus respectivos problemas de PLIM fosse o mesmo logo no início do processo iterativo (na primeira ou segunda iteração). Contudo, esse comportamento não pode ser considerado um processo natural de competição. Por sua vez, valores muito baixos não levavam à convergência do modelo. Dessa maneira, em vez de considerar um valor fixo, optou-se por atualizar esse parâmetro iterativamente, sem incrementos muito elevados, de forma que a convergência fosse obtida gradualmente ao longo do processo iterativo.

O comportamento da receita de cada agente ao longo do processo é mostrado na Figura 15. Após a iteração 57, o modelo atinge o equilíbrio e os valores de receita passam a ser constantes para todos os agentes (variação inferior a 0,2 % com relação à iteração 56). Os valores finais são mostrados na Tabela 26.

O tempo computacional necessário para a convergência foi de 54 segundos.



**Figura 15. Receita ao longo das iterações – Modelo de Equilíbrio do SH2.**

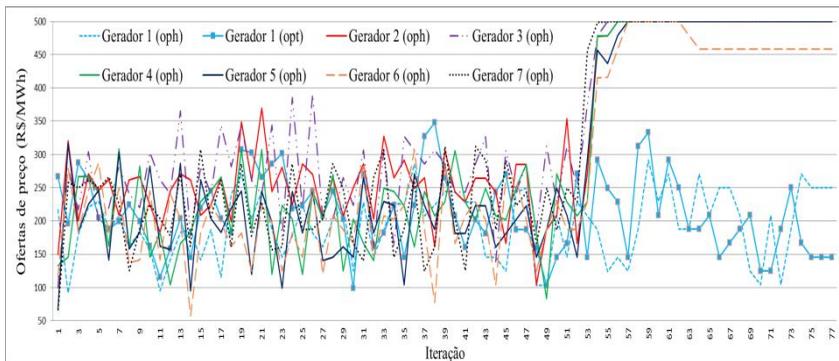
**Tabela 26. Receitas finais para cada gerador do SH2 – Modelo de Equilíbrio.**

<b>Gerador</b>	<b>Receita (10<sup>6</sup> R\$)</b>
<b>1</b>	4,98
<b>2</b>	7,17
<b>3</b>	8,80
<b>4</b>	4,57
<b>5</b>	1,81
<b>6</b>	0,64
<b>7</b>	6,46

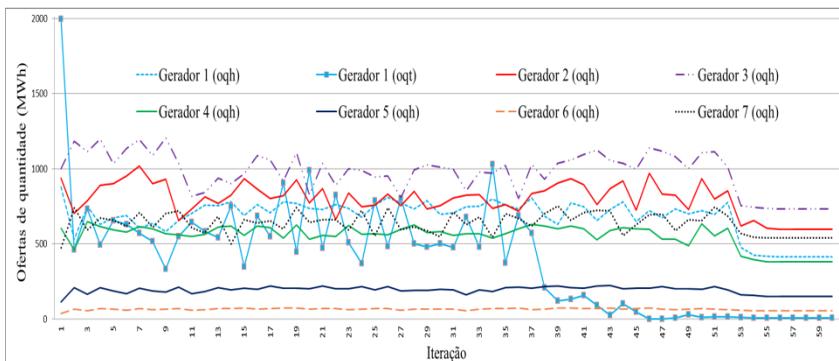
As ofertas de preço e quantidade ao longo das iterações são apresentadas nos gráficos das Figura 16 e Figura 17. As ofertas são mostradas em valores médios (média dos 24 estágios para cada usina em cada iteração) de modo a facilitar a visualização. É possível notar que as ofertas de preço, a exceção das ofertas referentes às usinas do Gerador 1 ( $H_1$  e  $T_1$ ), passam a se manter constantes após a iteração 57 (a oferta do Gerador 6 cai na iteração 64, mantendo-se constante a partir desse ponto). O mesmo acontece com as ofertas de quantidade para todos os agentes. As ofertas de preço do Gerador 1 continuam oscilando, sem, no entanto, alterar o despacho e a receita do sistema, até a iteração 75, quando também passam a ser constantes. Ou seja, após a iteração 57, o Gerador 1 e os demais agentes não conseguem alterar sua receita agindo de forma unilateral. Portanto, o estado de equilíbrio do SH2 é atingido nessa iteração.

Como pode ser observado na Figura 16, as ofertas de preço dos Geradores 2 a 7 convergem para o preço teto do mercado. Dessa maneira, o preço de liquidação, para os 24 estágios foi de 500 R\$/MWh, o que denota, assim como o modelo de equilíbrio do SH1, o exercício de poder de mercado por parte dos agentes de geração. Todavia, sabe-se que a existência de múltiplos equilíbrios é uma característica dessa classe de problemas e, portanto, o equilíbrio encontrado pode não ser único. Porém, a possibilidade de se identificar equilíbrios resultantes de práticas anti-competitivas realizadas pelos agentes de geração é uma

importante ferramenta de auxílio ao desenvolvimento de desenhos de mercado mais adequados.



**Figura 16. Ofertas médias de preço ao longo das iterações – Modelo de Equilíbrio do SH2.**

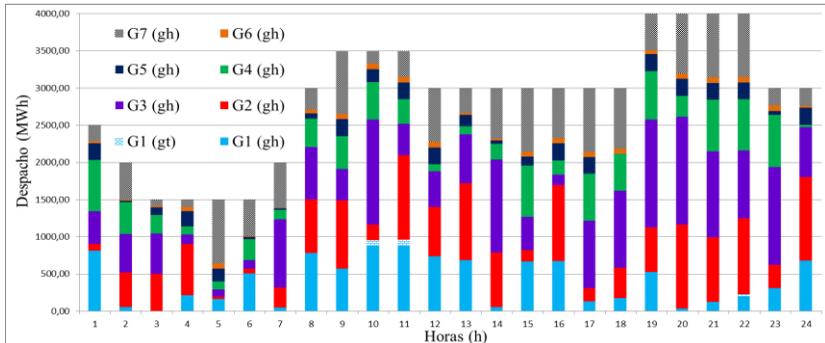


**Figura 17. Ofertas médias de quantidade ao longo das iterações – Modelo de Equilíbrio do SH2.**

No equilíbrio, o despacho resultante, sob a perspectiva de cada Agente  $L$ , assim como do OM, tende a ser o mesmo. Dessa maneira, o despacho final do sistema, após a iteração 57, pode ser observado na Tabela 27. A Figura 18 traz esses valores graficamente.

**Tabela 27. Despacho final, em MWh, para cada gerador em cada estágio do SH2 – Modelo de Equilíbrio.**

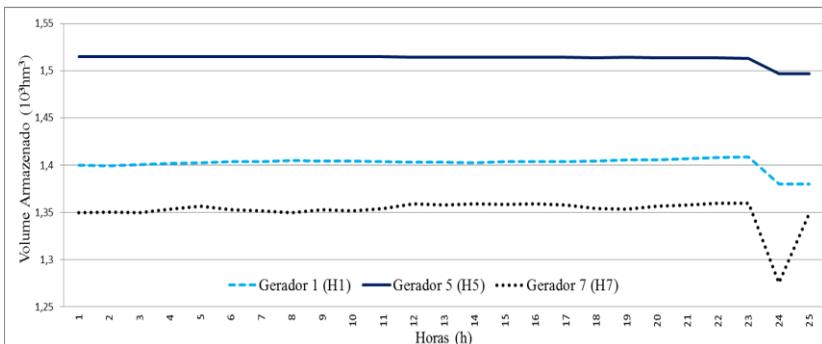
Está- gios	G1		G2	G3	G4	G5	G6	G7
	<i>gh</i>	<i>gt</i>	<i>gh</i>	<i>gh</i>	<i>gh</i>	<i>gh</i>	<i>gh</i>	<i>gh</i>
<b>1</b>	812	0	90	442	690	223	23	220
<b>2</b>	54	0	468	518	424	18	16	502
<b>3</b>	18	0	482	543	251	98	23	85
<b>4</b>	214	0	689	127	107	206	60	97
<b>5</b>	164	0	28	100	105	174	74	855
<b>6</b>	507	0	66	114	280	33	13	487
<b>7</b>	43	7	269	918	128	15	8	612
<b>8</b>	785	0	720	700	386	65	54	290
<b>9</b>	573	0	917	423	441	226	74	846
<b>10</b>	880	77	211	1410	505	171	74	172
<b>11</b>	876	84	1140	421	327	226	74	352
<b>12</b>	737	0	666	476	97	225	73	726
<b>13</b>	685	0	1036	658	110	152	25	334
<b>14</b>	56	0	736	1246	214	42	27	679
<b>15</b>	667	0	156	443	691	118	70	855
<b>16</b>	671	0	1025	139	195	226	74	670
<b>17</b>	128	0	180	911	630	222	74	855
<b>18</b>	174	0	410	1036	494	4	69	813
<b>19</b>	524	0	601	1450	655	224	57	489
<b>20</b>	36	0	1129	1447	285	226	74	803
<b>21</b>	126	0	866	1157	696	226	74	855
<b>22</b>	203	24	1018	918	688	226	74	849
<b>23</b>	311	0	309	1320	698	53	74	235
<b>24</b>	677	0	1125	672	34	225	28	239



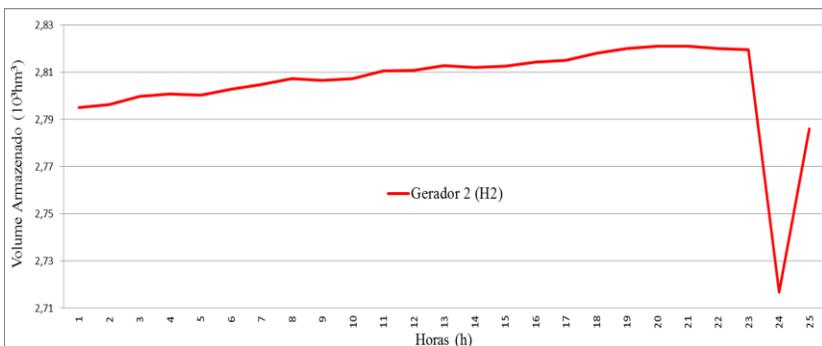
**Figura 18. Despacho final ao longo do horizonte de estudo – Modelo de Equilíbrio do SH2.**

Com relação aos resultados do balanço hídrico, as Figura 19 a Figura 22 mostram o perfil de armazenamento nos reservatórios de cada agente de geração ao longo do período de estudo. É possível notar que em todos os reservatórios ocorre um elevado decaimento do volume armazenado no estágio 23. Conforme discutido anteriormente, isso acontece pelo fato da vazão vertida não ter sido penalizada na resolução do SH2, ou seja, a formulação utilizada não estimula a minimização dos vertimentos (acúmulo de água nos reservatórios). Assim, nesse estágio a vazão vertida em todos os reservatórios deixou de ser nula (o vertimento foi nulo nos demais estágios, a exceção dos reservatórios das usinas  $H_6$  e  $H_7$  no estágio 24), de modo que os valores de volume finais foram iguais aos valores meta para cada reservatório. A vazão turbinada, em  $m^3/s$ , pode ser obtida dividindo-se os valores de geração despachada constantes na Tabela 27, pela respectiva produtibilidade ( $\rho$ ) referente a cada usina hidrelétrica (penúltima coluna da Tabela 24).

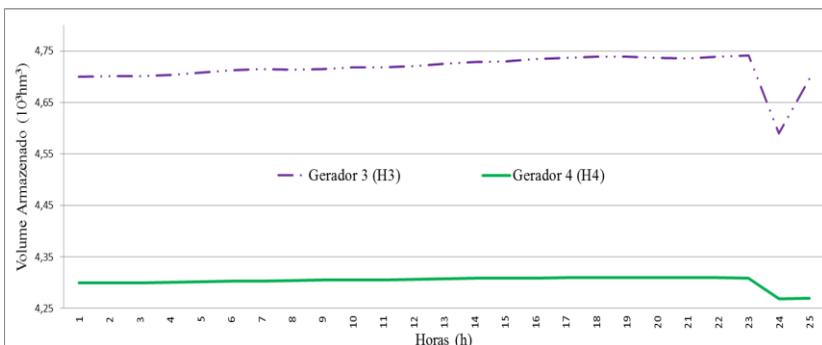
Por meio da análise desses resultados, pode-se observar que, caso um determinado gerador optasse por reduzir sua oferta de preço, o mesmo teria capacidade (água disponível e/ou capacidade de geração) de aumentar sua geração e, com isso, auferir uma maior receita ao deslocar da ordem de mérito um gerador concorrente. Contudo, essa decisão unilateral levaria a um novo processo iterativo de disputa entre os agentes, cuja estabilização da solução, conforme pôde ser verificada neste trabalho, foi possível apenas após a aplicação das restrições de não-antecipatividade (metodologia de acoplamento entre os problemas de PLIM executados por cada gerador).



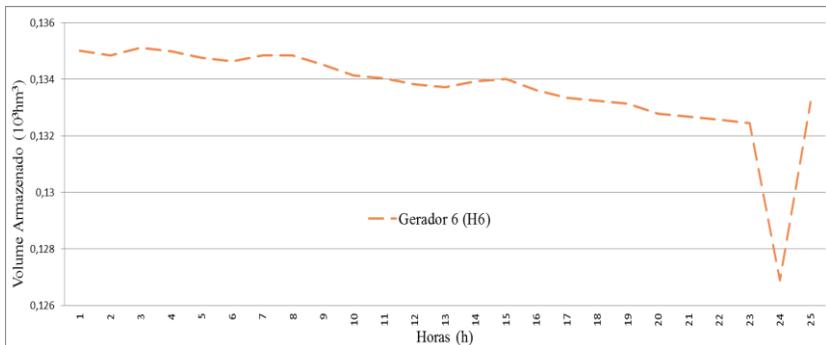
**Figura 19.** Volume armazenado nos reservatórios das usinas hidrelétricas dos Geradores 1, 5 e 7 ao longo do horizonte de estudo – Modelo de Equilíbrio do SH2.



**Figura 20.** Volume armazenado no reservatório da usina hidrelétrica do Gerador 2 ao longo do horizonte de estudo – Modelo de Equilíbrio do SH2.



**Figura 21.** Volume armazenado nos reservatórios das usinas hidrelétricas dos Geradores 3 e 4 ao longo do horizonte de estudo – Modelo de Equilíbrio do SH2.



**Figura 22. Volume armazenado no reservatório da usina hidrelétrica do Gerador 6 ao longo do horizonte de estudo – Modelo de Equilíbrio do SH2.**

### 5.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A metodologia desenvolvida neste trabalho foi implementada em dois sistemas testes, de modo a propiciar um melhor entendimento acerca de sua aplicabilidade e utilização. Para o primeiro sistema teste, composto por três agentes de geração e um horizonte de estudo de três estágios, foi apresentada inicialmente a resolução do problema de PLIM sob o ponto de vista de um único agente. Em seguida, foi solucionado o modelo de equilíbrio considerando a interação entre os três agentes de geração. A implementação foi apresentada passo a passo em detalhes, o que contribuiu para facilitar o acompanhamento dos resultados obtidos.

Para o segundo sistema teste, o qual possui sete agentes de geração e um horizonte de estudo de 24 estágios, foram apresentados os principais resultados da aplicação do modelo de equilíbrio.

Em ambos os sistemas, o equilíbrio foi atingido somente após a realização do acoplamento entre os problemas de PLIM de cada agente, por meio da metodologia baseada no conceito de não-antecipatividade. Ainda para os dois sistemas, no equilíbrio alcançado, a interação entre os agentes resultou em um preço de liquidação do mercado igual ao preço teto definido.

A resolução desses problemas de equilíbrio mostrou que a interação entre os agentes é um processo de difícil previsão, principalmente pelo fato das características do modelo matemático permitirem a existência de nenhum ou mesmo diversos equilíbrios resultantes da competição entre eles.

Nesse sentido, ao mesmo tempo em que os resultados obtidos para os modelos de equilíbrio simulados indicam que a competição entre os agentes não acarretou em benefícios ao consumidor, resultados como esse são importantes para permitir a identificação e posterior correção de possíveis falhas de mercado, contribuindo assim para torná-lo mais eficiente.

## **CAPÍTULO 6**

### **CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

---

O objetivo primordial deste trabalho é contribuir para a formulação, bem como o procedimento de solução e análise de um modelo matemático voltado para a determinação de estratégias de oferta de agentes de geração participantes de um mercado de curto prazo de energia elétrica. É vasta a literatura no que tange a trabalhos destinados a esse fim. Isso ocorre principalmente pelo fato da grande maioria dos países que vivenciaram uma reestruturação da indústria de energia, terem adotado um processo de formação de preços baseado em ofertas, em que o preço do produto energia é o resultado da interação entre os agentes de mercado. Porém, a maioria dos trabalhos têm sido desenvolvidos para sistemas cuja predominância dos recursos de geração é de origem termelétrica. Contudo, o presente trabalho tem sua aplicação voltada para sistemas com predominância de geração hidrelétrica, em que as principais características desses sistemas são incorporadas ao modelo.

Um modelo focado em sistemas hidrotérmicos deve levar em consideração as consequências futuras das decisões tomadas em cada instante de tempo, ou seja, o acoplamento temporal existente entre as decisões, e também o acoplamento espacial, relacionado à presença de usinas hidrelétricas em uma mesma cascata, cujas decisões de geração podem afetar umas às outras. Essas questões essenciais, incorporadas na

equação de conservação da massa d'água, também conhecida como restrição de balanço hídrico, foram consideradas no modelo formulado. No entanto, diferentemente de um despacho centralizado, onde o operador do mercado/sistema é o responsável por gerenciar os reservatórios, como é o caso do Sistema Elétrico Brasileiro, no modelo proposto o agente gerador é o responsável por gerenciar seu próprio reservatório. A atuação do operador (Operador do Mercado – OM) limita-se então a realizar o despacho do sistema por ordem de mérito econômico até que a demanda seja atendida em cada intervalo de tempo considerado. A incerteza relacionada às vazões naturais afluentes aos reservatórios, bem como à demanda de energia do mercado, as quais exercem grande influência no planejamento da operação do sistema, não foram modeladas. Todavia, em horizontes de estudo de curto prazo, como é o caso deste trabalho, as previsões de afluências e demanda tornam-se mais confiáveis e, portanto, essa influência perde relevância.

O agente gerador participante de um mercado de curto prazo de energia elétrica com formação de preços baseada em ofertas está interessado em maximizar sua receita, enquanto o OM deseja minimizar o custo total de operação do sistema ao longo do horizonte de tempo considerado. Esses interesses conflitantes foram modelados como um modelo de otimização de dois níveis, onde o primeiro nível representa o problema de maximização da receita do gerador e o segundo nível corresponde ao problema enfrentado pelo OM (minimização do custo total de operação). Dessa forma, o problema do OM (determinação do equilíbrio entre oferta e demanda) foi internalizado no modelo. Ainda, com o intuito de contribuir para manter a independência entre os dois níveis e permitir uma resolução adequada ao tornar o modelo mais realista, foi introduzida uma abordagem por meio da qual desvios em relação à energia despachada pelo OM e a real produção da usina hidrelétrica são penalizados na função objetivo do problema.

Por meio da representação do problema de segundo nível por suas condições de otimalidade de primeira ordem (condições de KKT) esse problema de otimização de dois níveis é transformado para um problema não linear de um único nível, denominado de problema de Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio (MPEC). Foram apresentadas duas estruturas para esse MPEC. Em uma delas (Figura 7), as restrições de complementariedade oriundas do problema de segundo nível podem ser substituídas por uma única restrição não linear, que corresponde à

igualdade entre a função objetivo dos problemas primal e dual referente ao segundo nível. Neste ponto, é importante destacar que no decorrer do desenvolvimento do presente trabalho foi publicado artigo técnico (CRUZ *et al.*, 2016) no jornal científico *Electric Power Systems Research*, da editora Elsevier. Nesse artigo, foi considerado um MPEC com tal estrutura (restrição primal-dual ao invés das restrições de complementariedade), onde as não linearidades se fazem presentes na função objetivo do problema e na restrição de igualdade primal-dual. A interação entre os agentes foi modelada como um EPEC, resolvido pelo método de diagonalização. Contudo, optou-se por utilizar nesta tese a estrutura com condições de complementariedade (Figura 6), pelo fato de ser possível eliminar as não linearidades desse modelo, transformando o MPEC em um problema de PLIM.

Assim, no MPEC considerado nesta tese, os produtos de variáveis presentes na função objetivo do problema foram linearizados por meio da utilização da restrição de igualdade primal-dual, combinada com algumas condições de KKT, conforme demonstrado por Ruiz e Conejo (2009), de modo que a função objetivo do problema pôde ser transformada para uma função linear. Com relação as não linearidades presentes nas restrições de complementariedade, foi possível transformá-las em restrições inteiras mistas por meio do uso da abordagem proposta por Fortuny-Amat e McCarl (1981). Esse MPEC passou a ser então um problema de PLIM a ser resolvido por cada agente formador de preço, de modo a maximizar sua receita.

No entanto, a receita obtida por um determinado agente não depende apenas das decisões realizadas por ele. Depende também das decisões de oferta realizadas pelos demais agentes de mercado, os quais são seus concorrentes e da mesma forma, desejam maximizar seus retornos. Diante disso, é fundamental entender como os agentes tomam suas decisões e como ocorre a interação entre eles. Assim, o estudo do processo para determinação de estratégias de oferta de agentes de geração tem papel relevante para um melhor entendimento acerca da dinâmica de funcionamento dos mercados de energia elétrica competitivos.

Nesse sentido, o Capítulo 2, além de apresentar aspectos conceituais relacionados aos modelos de despacho e formação de preços e métodos aplicados à análise de poder de mercado, destacou que as principais abordagens utilizadas na literatura para representar a dinâmica

do processo de competição entre os agentes de geração podem ser classificadas em abordagem por incerteza e abordagem por Teoria dos Jogos.

Na abordagem por incerteza ou estocástica, o problema de maximização da receita do Agente  $L$  incorpora as ofertas dos concorrentes por meio de cenários. Neste caso, o agente de geração busca determinar a estratégia de oferta que maximize sua receita líquida esperada ao longo do horizonte, considerando uma dada árvore de cenários.

A abordagem por Teoria dos Jogos, apresentada com mais detalhes ao final do Capítulo 3, equivale à resolução de um Problema de Equilíbrio com Restrições de Equilíbrio (EPEC), que consiste na resolução de vários problemas de Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio (MPEC), de modo iterativo ou simultâneo, até a possível convergência para um ponto de equilíbrio entre os problemas resolvidos por todos os agentes.

Ambas abordagens podem ser utilizadas com o intuito de avaliar o comportamento estratégico dos agentes de geração. Contudo, tendo em vista a dificuldade de se gerar cenários de ofertas para os agentes concorrentes e a escassez de modelos de equilíbrio (EPEC) voltados para a maximização da receita de agentes de geração em sistemas hidrotérmicos considerando múltiplos estágios em um mercado de curto prazo, considerou-se prudente utilizar apenas a abordagem por meio de modelos de equilíbrio (Teoria dos Jogos) para avaliar o comportamento dos agentes. Adicionalmente, nesse momento, a utilização de abordagens diversificadas poderia tornar o modelo excessivamente abrangente, comprometendo assim, o entendimento pontual de aspectos relevantes do problema.

Portanto, a interação entre os agentes foi representada por um EPEC. O Capítulo 4 apresentou desde a formulação do problema de dois níveis até a transformação para o problema de PLIM, culminando com a apresentação do EPEC. O método utilizado para resolver o EPEC é denominado de diagonalização e consiste na resolução cíclica dos problemas de PLIM referentes a cada agente de geração, tomando as ofertas de preço e quantidade dos demais como conhecidas, até que um equilíbrio seja atingido. A resolução do problema, tratada no Capítulo 5, demonstrou a dificuldade em resolver esses problemas até o equilíbrio. Diferentemente dos casos apresentados no artigo publicado no decorrer

do desenvolvimento desse trabalho, onde o equilíbrio foi atingido para a resolução sequencial dos MPECs não lineares, os exemplos apresentados neste documento atingiram o equilíbrio somente após a utilização de uma abordagem trazida da resolução de modelos de programação estocástica. Tal abordagem é baseada no conceito de não-antecipatividade, as quais atuam de modo a acoplar as decisões de despacho resultantes dos problemas solucionados por cada Agente  $L$ , contribuindo assim para atingir o equilíbrio do modelo. A utilização das restrições de não-antecipatividade envolve o emprego de heurísticas necessárias para determinar a evolução do parâmetro de penalidade. As implementações computacionais apresentadas no Capítulo 5 foram realizadas em dois sistemas teste hidrotérmicos, com dados e configuração reais adaptadas do Sistema Interligado Nacional (SIN) e tiveram o propósito de validar e demonstrar a aplicabilidade da metodologia desenvolvida neste trabalho. Nos modelos de equilíbrio simulados, observou-se que as ofertas de preço convergiram para o preço teto estipulado para o mercado. Espera-se que a convergência alcançada numericamente corresponda a um Equilíbrio de Nash, no entanto, a prova matemática da existência desse equilíbrio não faz parte do escopo desse trabalho. Sabe-se, entretanto, que o equilíbrio encontrado pode não ser único, pois a existência de múltiplas soluções é inerente a modelos dessa natureza. Nesse sentido, sob o ponto de vista do ente regulador, a possibilidade de se identificar soluções de equilíbrio que conduzam ao maior preço de liquidação do mercado é de fundamental importância, pois permite a avaliação de comportamentos extremos e com isso, um conhecimento mais apurado sobre como os agentes tomam suas decisões. Diante desse conhecimento, cabe ao regulador avaliar possíveis medidas a serem adotadas com o objetivo de contribuir para o correto funcionamento e evolução do mercado.

## 6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestão para continuação dos estudos referentes a metodologia aqui proposta, pode-se enumerar, dentre outros, os seguintes tópicos:

- Formulação de um modelo de equilíbrio a ser resolvido por meio de um EPEC simultâneo;

- Resolução de um EPEC único por meio de métodos de decomposição, como por exemplo, a Relaxação Lagrangeana;
- Implementação da abordagem estocástica para representar a dinâmica do processo de competição entre os agentes de geração;
- Estudo de heurísticas relacionadas à atualização do parâmetro de penalização das restrições referentes ao acoplamento entre os problemas de PLIM de cada agente de geração;
- Consideração da possibilidade de participação da demanda no processo de competição, por meio da submissão de ofertas de preço e quantidade a que estão dispostos a comprar energia;
- Análise de possíveis medidas a serem adotadas pelo órgão regulador, de modo a evitar o poder de mercado exercido pelos geradores do sistema;
- Consideração de contratação bilateral no modelo formulado;
- Representação de diferentes perfis de risco para os agentes de mercado, por meio da incorporação de métricas de risco, como o modelo CVaR (*Conditional Value at Risk*) (ROCKAFELLAR e URYASEV, 2002), por exemplo;
- Análise relativa à substituição da informação de futuro dada pela restrição de volume mínimo ao final do horizonte de estudo por uma Função de Benefício Futuro;
- Avaliação da necessidade de penalização da vazão vertida aos reservatórios em sistemas com usinas na mesma cascata pertencentes a agentes de geração em comum;
- Análise da utilização de outras técnicas para tratamento das bilinearidades presentes no MPEC, como por exemplo, variáveis do tipo SOS1 ou expansão binária;
- Incorporação de incertezas nas afluências e demanda do sistema;
- Incorporação de restrições de *unit commitment* no problema de primeiro nível do agente de geração;
- Modelagem da rede de transmissão no problema do operador (segundo nível);

- Utilização de uma função de produção não linear para as usinas hidrelétricas; e
- Consideração do custo de produção das usinas termelétricas como uma função não linear.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALENCAR, H. J. D. O. **Análise de soluções de equilíbrio na programação da operação de médio prazo**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC, 2015.

ALLENDE, G. B.; STILL, G. Solving bilevel programs with the KKT-approach. **Mathematical Programming**, p.1-24. 2013.

ALMEIDA, K. C.; CONEJO, A. J. Medium-Term Power Dispatch in Predominantly Hydro Systems: An Equilibrium Approach. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.28, n.3, p.2384-2394. 2013.

Agência Nacional de Energia Elétrica – ANEEL. Nota Técnica: Limites máximo e mínimo do Preço de Liquidação das Diferenças – PLD. Disponível em:  
[http://www2.aneel.gov.br/aplicacoes/consulta\\_publica/documentos/NT\\_86\\_2014\\_Metodologia\\_Limites\\_PLD.pdf](http://www2.aneel.gov.br/aplicacoes/consulta_publica/documentos/NT_86_2014_Metodologia_Limites_PLD.pdf), 2014

ANITESCU, M. On solving mathematical programs with complementarity constraints as nonlinear programs. **Preprint ANL/MCS-P864-1200, Argonne National Laboratory, Argonne, IL**, v.3. 2000.

ARISTIZÁBAL, J. D. C. **Técnicas de Dualidade e Programação Não-linear Inteira-mista Aplicadas ao Programa Diário da Operação Eletroenergética**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC, 2012.

ARROYO, J. M.; GALIANA, F. D. On the solution of the bilevel programming formulation of the terrorist threat problem. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.20, n.2, p.789-797. 2005.

BAILLO, A.; VENTOSA, M.; RIVIER, M.; RAMOS, A. Optimal offering strategies for generation companies operating in electricity spot markets. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.19, n.2, p.745-753. 2004.

BALDICK, R.; HELMAN, U.; HOBBS, B. F.; O'NEILL, R. P. Design of Efficient Generation Markets. **Proceedings of the IEEE**, v.93, n.11, p.1998-2012. 2005.

BARD, J. F. Optimization in Multilevel Systems. In: **American Control Conference, 1982**. 14-16 June 1982, p.403-408. 1982.

BARD, J. F. Coordination of a multidivisional organization through two levels of management. **Omega**, v.11, n.5, p.457-468. 1983.

BARINGO, L.; CONEJO, A. J. Risk-Constrained Multi-Stage Wind Power Investment. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.28, n.1, p.401-411. 2013.

BARROSO, L. A.; CARNEIRO, R. D.; GRANVILLE, S.; PEREIRA, M. V.; FAMPA, M. H. Nash equilibrium in strategic bidding: A binary expansion approach. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v.21, n.2, p.629-638. 2006.

BARROSO, L. A. N. **Esquemas competitivos em sistemas hidrotérmicos: comportamento estratégico de agentes geradores em ambiente de mercado**. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2000.

BARROSO, L. A. N. **Estratégias de Ofertas Ótimas sob Incerteza e Cálculos de Equilíbrios de Nash de Agentes Geradores em Mercados de Curto Prazo de Energia Elétrica: uma Abordagem por Programação Linear Inteira**. Tese de Doutorado. Engenharia de Sistemas e Computação, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2006.

BASLIS, C. G.; BAKIRTZIS, A. G. Mid-term stochastic scheduling of a price-maker hydro producer with pumped storage. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v.26, n.4, p.1856-1865. 2011.

BAUTISTA, G.; ANJOS, M. F.; VANNELLI, A. Formulation of oligopolistic competition in AC power networks: An NLP approach. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.22, n.1, p.105-115. 2007.

BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. **Nonlinear Programming, Theory and Applications**. John Wiley & Sons, New York. 1993.

BELLMAN, R. **Dynamic Programming**. 151 p., Princeton University Press. 1957.

BERTSEKAS, D. P. **Nonlinear programming**. Second Edition. Athena Scientific. 1999.

BIALAS, W.; KARWAN, M. On two-level optimization. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.27, n.1, p.211-214. 1982.

BORENSTEIN, S.; BUSHNELL, J.; KAHN, E.; STOFT, S. Market power in California electricity markets. **Utilities Policy**, v.5, n.3, p.219-236. 1995.

BRACKEN, J.; MCGILL, J. T. Mathematical programs with optimization problems in the constraints. **Operations Research**, v.21, n.1, p.37-44. 1973.

\_\_\_\_\_. Defense applications of mathematical programs with optimization problems in the constraints. **Operations Research**, v.22, n.5, p.1086-1096. 1974a.

\_\_\_\_\_. Equivalence of Two Mathematical Programs with Optimization Problems in the Constraints. **Operations Research**, v.22, n.5, p.1102-1104. 1974b.

\_\_\_\_\_. A Method for Solving Mathematical Programs with Nonlinear Programs in the Constraints. **Operations Research**, v.22, n.5, p.1097-1101. 1974c.

BRASIL. Lei nº 9.074, de 7 de julho de 1995: Diário Oficial da União, Poder Executivo, Brasília. 1995.

BUSHNELL, J. B. **Water and power: Hydroelectric resources in the era of competition in the western US**. Program on Workable Energy Regulation. 1998.

CANDAL, D. **Estratégia Ótima de Oferta em Mercados Competitivos de Energia**. Tese de Doutorado. COPPE-Sistemas. Rio de Janeiro, 2005.

CANDLER, W.; NORTON, R. D. **Multi-level programming**. World Bank Development Research Center. Washington D.C. 1977

CANDLER, W.; FORTUNY-AMAT, J.; MCCARL, B. The potential role of multilevel programming in agricultural economics. **American Journal of Agricultural Economics**, v.63, n.3, p.521-531. 1981.

CARDELL, J. B.; HITT, C. C.; HOGAN, W. W. Market power and strategic interaction in electricity networks. **Resource and Energy Economics**, v.19, n.1, p.109-137. 1997.

CASALI, R. M. **Um novo tratamento para restrições de equilíbrio em problemas de programação matemática**. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2012.

CASSIDY, R.; KIRBY, M.; RAIKE, W. Efficient distribution of resources through three levels of government. **Management Science**, v.17, n.8, p.B-462-B-473. 1971.

CICCONET, F. **Estudo Sobre a Operação Descentralizada de Sistemas com Predomínio de Geração Hidrelétrica**. Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2013.

COLSON, B.; MARCOTTE, P.; SAVARD, G. Bilevel programming: A survey. **4OR**, v.3, n.2, p.87-107. 2005.

Comitê de revitalização do Setor Elétrico Brasileiro – Relatório de Progresso nº 2. Anexo H (Formação de preços por oferta). 2002.

CONEJO, A. J.; CONTRERAS, J.; ARROYO, J. M.; DE LA TORRE, S. Optimal response of an oligopolistic generating company to a competitive pool-based electric power market. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.17, n.2, p.424-430. 2002.

CONEJO, A. J.; CASTILLO, E.; GARCÍA-BERTRAND, R.; MÍNGUEZ, R. **Decomposition techniques in mathematical programming: engineering and science applications**. Springer Berlin. 2006.

CRAMTON, P. Electricity market design: the good, the bad, and the ugly. In: **Proceedings of the 36th Annual Hawaii International Conference on System Sciences, 2003**. 6-9 Jan. 2003, p.8 pp. 2003.

CRUZ, M. P.; FINARDI, E. C.; DE MATOS, V. L.; LUNA, J. P. Strategic bidding for price-maker producers in predominantly hydroelectric systems. **Electric Power Systems Research**, v.140, p.435-444. 11/. 2016.

DAI, T.; QIAO, W. Finding Equilibria in the Pool-Based Electricity Market with Strategic Wind Power Producers and Network Constraints. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.PP, n.99, p.1-1. 2016.

DANTZIG, G. B. **Linear programming and extensions**. Princeton university press. 1998.

DAVID, A. K.; WEN, F. Strategic bidding in competitive electricity markets: a literature survey. In: **IEEE Power Engineering Society Summer Meeting**. 2000, v.4, p.2168-2173 vol. 4. 2000.

\_\_\_\_\_. Market power in electricity supply. **IEEE Transactions on Energy Conversion**, v.16, n.4, p.352-360. 2001.

DAY, C. J.; HOBBS, B. F.; PANG, J. S. Oligopolistic competition in power networks: a conjectured supply function approach. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.17, n.3, p.597-607. 2002.

DEMPE, S. Annotated bibliography on bilevel programming and mathematical programs with equilibrium constraints. 2003.

DEMPE, S.; ZEMKOHO, A. B. KKT Reformulation and Necessary Conditions for Optimality in Nonsmooth Bilevel Optimization. 2014.

DENEGRE, S.; RALPHS, T. K. A branch-and-cut algorithm for integer bilevel linear programs. In: (Ed.). **Operations Research and Cyber-Infrastructure**: Springer, 2009. A branch-and-cut algorithm for integer bilevel linear programs, p.65-78.

DENTON, M. J.; RASSENTI, S. J.; SMITH, V. L. Spot market mechanism design and competitiveness issues in electric power. **Journal of Economic Behavior & Organization**, v.44, n.4, p.435-453. 2001.

EDMUNDS, T. A.; BARD, J. F. Algorithms for nonlinear bilevel mathematical programs. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, v.21, n.1, p.83-89. 1991.

FACCHINEI, F.; JIANG, H.; QI, L. A smoothing method for mathematical programs with equilibrium constraints. **Mathematical programming**, v.85, n.1, p.107-134. 1999.

FAMPA, M.; BARROSO, L. A.; CANDAL, D.; SIMONETTI, L. Bilevel optimization applied to strategic pricing in competitive electricity markets. **Computational Optimization and Applications**, v.39, n.2, p.121-142. 2008/03/01. 2008.

FAN, Z.; HORGER, T.; BASTIAN, J. Current and emerging challenges in PJM energy market. In: **IEEE Transmission and Distribution Conference and Exposition**, p.1-7. 2010.

FEHR, N.-H. V. D.; HARBORD, D. **Competition in electricity spot markets: economic theory and international experience**. EconWPA. 2002.

FERNANDES, R. C. **Avaliação do comportamento estratégico de geradores hidrelétricos em sistemas hidrotérmicos**. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2006.

FERRERO, R. W.; RIVERA, J. F.; SHAHIDEHPOUR, S. M. Application of games with incomplete information for pricing electricity in deregulated

power pools. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.13, n.1, p.184-189. 1998.

FINARDI, E. C. **Alocação de Unidades Geradoras Hidrelétricas em Sistemas Hidrotérmicos Utilizando Relaxação Lagrangeana e Programação Quadrática Sequencial**. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2003.

FISHER, M. L. The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems. **Management Science**. 1981.

FLACH, B.; BARROSO, L.; PEREIRA, M. Long-term optimal allocation of hydro generation for a price-maker company in a competitive market: latest developments and a stochastic dual dynamic programming approach. **IET generation, transmission & distribution**, v.4, n.2, p.299-314. 2010.

FLACH, B. D. C. **Estratégia de ofertas de agentes hidroelétricos com múltiplos estágios e múltiplos cenários**. Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2003.

FLETCHER, R.; LEYFFER, S. Solving mathematical programs with complementarity constraints as nonlinear programs. **Optimization Methods and Software**, v.19, n.1, p.15-40. 2004.

FORTUNY-AMAT, J.; MCCARL, B. A representation and economic interpretation of a two-level programming problem. **Journal of the operational Research Society**, p.783-792. 1981.

FUDENBERG, D.; TIROLE, J. **Game theory**. MIT Press. 1991.

FUDENBERG, D. A. **The theory of learning in games**. MIT Press. 1998.

FUKUSHIMA, M.; PANG, J.-S. Convergence of a Smoothing Continuation Method for Mathematical Programs with Complementarity Constraints. In: (Ed.). **Ill-posed Variational Problems and Regularization Techniques**:

Springer, 1999. Convergence of a Smoothing Continuation Method for Mathematical Programs with Complementarity Constraints, p.99-110.

FUKUSHIMA, M.; LIN, G.-H. Smoothing methods for mathematical programs with equilibrium constraints. In: **International Conference on Informatics Research for Development of Knowledge Society Infrastructure, 2004.**: IEEE, p.206-213. 2004.

GABRIEL, S. A.; LEUTHOLD, F. U. Solving discretely-constrained MPEC problems with applications in electric power markets. **Energy Economics**, v.32, n.1, p.3-14. 2009.

GABRIEL, S. A.; CONEJO, A. J.; FULLER, J. D.; HOBBS, B. F.; RUIZ, C. **Complementarity modeling in energy markets**. New York: Springer. International Series in Operations Research & Management Science. 2013.

GEOFFRION, A. M. **Lagrangean relaxation for integer programming**. Springer. 1974.

GIBBONS, R. **Game theory for applied economists**. Princeton University Press. 1992.

GISIN, B.; GU, Q.; MITSCHKE, J. V.; TAM, S.; CHEN, H. “Perfect Dispatch”-as the measure of PJM real time grid operational performance. In: **IEEE Power and Energy Society General Meeting, 2010**, p.1-8. 2010.

GONÇALVES, R. E. C. **Análise comparativa entre diferentes métodos de otimização estocástica na solução do problema de planejamento da operação de curto prazo**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina. 2007.

GONÇALVES, R. E. C. **Desenvolvimento de Modelos de Programação Estocástica Aplicados à Programação Mensal da Operação Energética: Uma Análise Comparativa de Desempenho Computacional**. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC, 2011.

GREEN, R. J.; NEWBERY, D. M. Competition in the British electricity spot market. **Journal of political economy**, p.929-953. 1992.

GROSS, G.; FINLAY, D. J.; DELTAS, G. Strategic bidding in electricity generation supply markets. In: **Power Engineering Society 1999 Winter Meeting, IEEE**: IEEE, v.1, p.309-315. 1999.

GUROBI OPTIMIZATION, I. Gurobi Optimizer Reference Manual. **URL: <http://www.gurobi.com>**. 2015.

HARKER, P. T.; PANG, J.-S. Existence of optimal solutions to mathematical programs with equilibrium constraints. **Operations Research Letters**, v.7, n.2, p.61-64. 1988.

HASAN, E.; GALIANA, F. D.; CONEJO, A. J. Electricity markets cleared by merit order—Part I: Finding the market outcomes supported by pure strategy Nash equilibria. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.23, n.2, p.361-371. 2008.

HELMAN, U. Market power monitoring and mitigation in the US wholesale power markets. **Energy**, v.31, n.6, p.877-904. 2006.

HERSKOVITS, J.; TANAKA FILHO, M.; LEONTIEV, A. An interior point technique for solving bilevel programming problems. **Optimization and Engineering**, p.1-14. 2012.

HOBBS, B. F.; METZLER, C. B.; PANG, J.-S. Strategic gaming analysis for electric power systems: An MPEC approach. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.15, n.2, p.638-645. 2000.

HOBBS, B. F. Linear complementarity models of Nash-Cournot competition in bilateral and POOLCO power markets. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.16, n.2, p.194-202. 2001.

HOGAN, W. W. Competitive electricity market design: A wholesale primer. **December, John F. Kennedy School of Government, Harvard University**. 1998.

HU, J.; MITCHELL, J. E.; PANG, J.-S.; BENNETT, K. P.; KUNAPULI, G. On the global solution of linear programs with linear complementarity constraints. **SIAM Journal on Optimization**, v.19, n.1, p.445-471. 2008.

HU, X.; RALPH, D. Convergence of a penalty method for mathematical programming with complementarity constraints. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v.123, n.2, p.365-390. 2004.

HU, X.; RALPH, D. Using EPECs to model bilevel games in restructured electricity markets with locational prices. **Operations research**, v.55, n.5, p.809-827. 2007.

HUANG, X.; YANG, X.; TEO, K. Partial augmented Lagrangian method and mathematical programs with complementarity constraints. **Journal of Global Optimization**, v.35, n.2, p.235-254. 2006.

HUNEAULT, M.; GALIANA, F. D. A survey of the optimal power flow literature. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.6, n.2, p.762-770. 1991.

HUNEAULT, M.; GALIANA, F.; GROSS, G. A review of restructuring in the electricity business. In: **Proceedings of 13th Power Systems Computation Conference**, p.19-31. 1999.

HUNT, S.; SHUTTLEWORTH, G. **Competition and choice in electricity**. Chichester: John Wiley & Sons Ltd. 1996.

HUNT, S. **Making competition work in electricity**. John Wiley & Sons. v.146 2002.

ILIC, M. D.; GALIANA, F.; FINK, L. **Power systems restructuring: engineering and economics**. Springer. v.448. 1998.

KARDAKOS, E. G.; SIMOGLU, C. K.; BAKIRTZIS, A. G. Hydrothermal producer offering strategy in a transmission-constrained electricity market: An MPEC approach. In: **Innovative Smart Grid Technologies Conference Europe (ISGT-Europe), 2014 IEEE PES: IEEE**, p.1-6. 2014.

KAZEMPOUR, S. J.; CONEJO, A. J. Strategic Generation Investment Under Uncertainty Via Benders Decomposition. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.27, n.1, p.424-432. 2012.

KELLY, F. P.; MAULLOO, A. K.; TAN, D. K. Rate control for communication networks: shadow prices, proportional fairness and stability. **Journal of the Operational Research Society**, v.49, n.3, p.237-252. 1998.

KELMAN, R. **Esquemas Competitivos em sistemas hidrotérmicos: eficiência econômica e comportamento estratégico**. COPPE/UFRJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro. 1999.

KELMAN, R.; BARROSO, L. A. N.; PEREIRA, M. V. F. Market power assessment in hydrothermal systems. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.16, n.3, p.354-359. 2001.

KHATIB, S. E.; GALIANA, F. D. Negotiating Bilateral Contracts in Electricity Markets. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.22, n.2, p.553-562. 2007.

KIRSCHEN, D.; STRBAC, G. **Fundamentals of Power System Economics**. Chichester, England. 2004.

KLEMPERER, P. D.; MEYER, M. A. Supply function equilibria in oligopoly under uncertainty. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, p.1243-1277. 1989.

KURI, B.; LI, F. Effective design for competitive electricity markets. In: **39th International Universities Power Engineering Conference, 2004.**, v.3, p.1034-1038 vol. 2. 2004.

LATORRE, M. D. L.; GRANVILLE, S. The Stackelberg equilibrium applied to AC power systems-a noninterior point algorithm. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.18, n.2, p.611-618. 2003.

LEYFFER, S. Complementarity constraints as nonlinear equations: Theory and numerical experience. In: (Ed.). **Optimization with Multivalued**

**Mappings:** Springer, 2006. Complementarity constraints as nonlinear equations: Theory and numerical experience, p.169-208

LEYFFER, S.; LÓPEZ-CALVA, G.; NOCEDAL, J. Interior methods for mathematical programs with complementarity constraints. **SIAM Journal on Optimization**, v.17, n.1, p.52-77. 2006.

LEYFFER, S.; MUNSON, T. Solving multi-leader–common-follower games. **Optimisation Methods & Software**, v.25, n.4, p.601-623. 2010.

LI, C.; SVOBODA, A. J.; XIAOHONG, G.; SINGH, H. Revenue adequate bidding strategies in competitive electricity markets. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.14, n.2, p.492-497. 1999.

LINO, P.; BARROSO, L. A. N.; PEREIRA, M. V.; KELMAN, R.; FAMPA, M. H. Bid-based dispatch of hydrothermal systems in competitive markets. **Annals of Operations Research**, v.120, n.1-4, p.81-97. 2003.

LUNA, J. P. **Decomposition and Approximation Methods for Variational Inequalities, with Applications to Deterministic and Stochastic Energy Markets**. Tese de Doutorado. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2013.

LUO, Z.-Q.; PANG, J.-S.; RALPH, D. **Mathematical programs with equilibrium constraints**. Cambridge University Press (Cambridge and New York). 1996.

MACAL, C. M.; HURTER, A. P. Dependence of bilevel mathematical programs on irrelevant constraints. **Computers & operations research**, v.24, n.12, p.1129-1140. 1997.

MANGASARIAN, O. L.; FROMOVITZ, S. The Fritz John necessary optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v.17, n.1, p.37-47. 1967.

MARCOTTE, P.; SAVARD, G. Bilevel programming: A combinatorial perspective. In: (Ed.). **Graph Theory and Combinatorial Optimization:**

Springer, 2005. Bilevel programming: A combinatorial perspective, p.191-217.

MAS-COLELL, A.; WHINSTON, M. D.; GREEN, J. R. **Microeconomic theory**. Oxford university press New York. 1995.

MCMILLAN, J. **A Reinvenção do Bazar: uma História dos Mercados**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed. 2004.

MO, B.; GJELSVIK, A.; GRUNDT, A.; KARESEN, K. Optimisation of hydropower operation in a liberalised market with focus on price modelling. In: **IEEE Power Tech Proceedings, 2001.**, v.1, 2001.

NASH, J. Non-cooperative games. **The Annals of Mathematics**, v.54, n.2, p.286-295. 1951.

NECHAEV, I. Generation scheduling based on two-level optimization problem. In: **IEEE Proceedings of the 3rd International Youth Conference on Energetics, 2011**, p.1-7. 2011.

NERY, E. **Mercados e Regulação de Energia Elétrica**. Rio de Janeiro. 2012.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical optimization**. New York: Springer. v.2. 1999.

OLIVEIRA, A. M. D. **Estratégia Ótima de Oferta de Preços no Mercado de Curto Prazo em Sistemas com Predominância Hidrelétrica**. Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica. Rio de Janeiro, 2003.

PEREIRA, M.; PINTO, L. Stochastic optimization of a multireservoir hydroelectric system: a decomposition approach. **Water resources research**, v.21, n.6, p.779-792. 1985.

PEREIRA, M. Optimal stochastic operations scheduling of large hydroelectric systems. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v.11, n.3, p.161-169. 1989.

PEREIRA, M.; PINTO, L. M. Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning. **Mathematical Programming**, v.52, n.1-3, p.359-375. 1991.

PEREIRA, M. V.; GRANVILLE, S.; FAMPA, M. H. C.; DIX, R.; BARROSO, L. A. Strategic bidding under uncertainty: a binary expansion approach. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.20, n.1, p.180-188. 2005.

POUSINHO, H. M.; CONTRERAS, J.; BAKIRTZIS, A. G.; CATALAO, J. P. Risk-constrained scheduling and offering strategies of a price-maker hydro producer under uncertainty. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v.28, n.2, p.1879-1887. 2013.

POZO, D.; CONTRERAS, J. Finding multiple Nash equilibria in pool-based markets: A stochastic EPEC approach. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.26, n.3, p.1744-1752. 2011.

PRABAVATHI, M.; GNANADASS, R. Energy bidding strategies for restructured electricity market. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v.64, p.956-966. 2015.

PRICE, T. C. Using co-evolutionary programming to simulate strategic behaviour in markets. **Journal of Evolutionary Economics**, v.7, n.3, p.219-254. 1997.

PRITCHARD, G.; PHILPOTT, A. B.; NEAME, P. J. Hydroelectric reservoir optimization in a pool market. **Mathematical Programming**, v.103, n.3, p.445-461. 2005/07/01. 2005.

RALPH, D.; SMEERS, Y. EPECs as models for electricity markets. In: **Power Systems Conference and Exposition, 2006. PSCE '06. 2006 IEEE PES**. Oct. 29 2006-Nov. 1 2006, p.74-80. 2006.

RALPH, D. Mathematical programs with complementarity constraints in traffic and telecommunications networks. **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v.366, n.1872, p.1973-1987. 2008a.

\_\_\_\_\_. Nonlinear programming advances in mathematical programming with complementarity constraints. 2008b.

RAMOS, A.; VENTOSA, M.; RIVIER, M. Modeling competition in electric energy markets by equilibrium constraints. **Utilities Policy**, v.7, n.4, p.233-242. 1999.

ROCKAFELLAR, R. T.; WETS, R. J.-B. Scenarios and policy aggregation in optimization under uncertainty. **Mathematics of operations research**, v.16, n.1, p.119-147. 1991.

ROCKAFELLAR, R. T.; URYASEV, S. Conditional value-at-risk for general loss distributions. **Journal of Banking & Finance**, v.26, n.7, p.1443-1471. 2002.

RODRIGUES, H. S. **Problema de otimização com restrições de complementaridade: uma aplicação ao mercado de energia eléctrica**. Tese de Doutorado. Escola de Ciências, Universidade do Minho. Minho, 2005.

RODRIGUES, R. N. **Um modelo para a programação da operação de sistemas hidrotérmicos baseado em relaxação lagrangeana**. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2009.

RUDKEVICH, A. On the supply function equilibrium and its applications in electricity markets. **Decision Support Systems**, v.40, n.3, p.409-425. 2005.

RUDNICK, H.; ZOLEZZI, J. Electric sector deregulation and restructuring in Latin America: lessons to be learnt and possible ways forward. **IEEE Proceedings-Generation, Transmission and Distribution**, v.148, n.2, p.180-184. 2001.

RUIZ, C.; CONEJO, A. J. Pool Strategy of a Producer With Endogenous Formation of Locational Marginal Prices. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.24, n.4, p.1855-1866. 2009.

SAKK, E.; THOMAS, R. J.; ZIMMERMAN, R. Power system bidding tournaments for a deregulated environment. In: **IEEE Proceedings of the Thirtieth Hawaii International Conference on System Sciences, 1997**, v.5, p.681-686. 1997.

SANTOS, M. L. L. D. **Modelagem e Solução do Problema de Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos de Curto Prazo no Contexto da Programação Estocástica: Uma Aplicação do Método Progressive Hedging**. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC, 2010.

SCHOLTES, S. Convergence properties of a regularization scheme for mathematical programs with complementarity constraints. **SIAM Journal on Optimization**, v.11, n.4, p.918-936. 2001.

SCHWEPPE, F.; CARAMANIS, M.; TABORS, R.; BOHN, R. Spot price of electricity. 1998.

SCOTT, T. J.; READ, E. G. Modelling hydro reservoir operation in a deregulated electricity market. **International Transactions in Operational Research**, v.3, n.3-4, p.243-253. 1996.

SHAHIDEHPOUR, M.; YAMIN, H.; LI, Z. **Market Operations in Electric Power Systems: Forecasting, Scheduling, and Risk Management**. 2002.

SIDDIQUI, S.; GABRIEL, S. A. An SOS1-based approach for solving MPECs with a natural gas market application. **Networks and Spatial Economics**, p.1-23. 2012.

SILVA, E. L. D. **Formação de preços em mercados de energia elétrica**. Edição do Autor. 2012.

SIMBA, J. C. C. **Despacho e Formação de Preços de Energia Elétrica Através de Leilões Em Sistemas Predominantemente Hidráulicos**. Tese de Doutorado. COPPE-Sistemas, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2005.

SIOHANSI, F. P.; PFAFFENBERGER, W. **Electricity market reform: an international perspective**. Elsevier Ltd. 2006.

SIOHANSI, R.; OREN, S. How good are supply function equilibrium models: an empirical analysis of the ERCOT balancing market. **Journal of Regulatory Economics**, v.31, n.1, p.1-35. 2007.

STACKELBERG, H. V. **The Theory of Market Economy**. Oxford: Oxford University Press. 1952.

STEEGER, G.; BARROSO, L. A.; REBENNACK, S. Optimal bidding strategies for hydro-electric producers: A literature survey. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v.29, n.4, p.1758-1766. 2014.

STOFT, S. **Power System Economics**. 1. ed. New York: IEEE/Wiley-Interscience. 2002.

TAKIGAWA, F. Y. K. **Desenvolvimento de um modelo computacional para o problema da programação diária da operação de sistemas hidrotérmicos**. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2010.

TORRE, S.; ARROYO, J. M.; CONEJO, A. J.; CONTRERAS, J. Price maker self-scheduling in a pool-based electricity market: a mixed-integer LP approach. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.17, n.4, p.1037-1042. 2002.

TORRE, S. D. L.; CONTRERAS, J.; CONEJO, A. J. Finding multiperiod Nash equilibria in pool-based electricity markets. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.19, n.1, p.643-651. 2004.

TSENG, C.-L.; ZHU, W. Optimal self-scheduling and bidding strategy of a thermal unit subject to ramp constraints and price uncertainty. **IET generation, transmission & distribution**, v.4, n.2, p.125-137. 2010.

VARIAN, H. R. **Microeconomic analysis**. New York: Norton. v.2 1992.

VENTOSA, M.; BAILLO, A.; RAMOS, A.; RIVIER, M. Electricity market modeling trends. **Energy policy**, v.33, n.7, p.897-913. 2005.

VERONESE, H. D. **Um Modelo de Otimização Estocástica Baseado em Progressive Hedging para Definição de Estratégia de Contratação de Energia no Ambiente Regulado**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC, 2013.

VISWESWARAN, V.; FLOUDAS, C.; IERAPETRITOU, M.; PISTIKOPOULOS, E. A decomposition-based global optimization approach for solving bilevel linear and quadratic programs. **State of the art in global optimization**, v.139. 1996.

VISWESWARAN, V. **Decomposition Techniques for MILP: Lagrangian Relaxation**. 2009.

WEBER, J. D.; OVERBYE, T. J. A two-level optimization problem for analysis of market bidding strategies. In: **IEEE Power Engineering Society Summer Meeting, 1999**, v.2, p.682-687. 1999.

WHITE, D. J.; ANANDALINGAM, G. A penalty function approach for solving bi-level linear programs. **Journal of Global Optimization**, v.3, n.4, p.397-419. 1993.

WILSON, R. Activity rules for the power exchange. **Report to the California Trust for Power Industry Restructuring**, v.14. 1997.

WOOD, A. J.; WOLLENBERG, B. F. **Power generation, operation, and control**. 2nd ed.: John Wiley & Sons. 1996.

ZAKERI, G. A Survey of Utilization of Optimization for Generation in Wholesale Electricity Markets. 2010.

ZHANG, D.; WANG, Y.; LUH, P. B. Optimization based bidding strategies in the deregulated market. In: **IEEE International Conference on Power Industry Computer Applications, 1999**. Jul 1999, p.63-68. 1999.

ZHANG, X.-P. **Restructured Electric Power Systems: Analysis of Electricity Markets with Equilibrium Models**. John Wiley & Sons. v.71 2010.

ZHOU, Z.; CHAN, W. K. V.; CHOW, J. H. Agent-based simulation of electricity markets: a survey of tools. **Artificial Intelligence Review**, v.28, n.4, p.305-342. 2007.

ZUCARATO, A. N. **Simulação de mercados de energia elétrica com predominância de geração hidrelétrica**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2003.

\_\_\_\_\_. **Mecanismos de Capacidade em Sistemas de Energia Elétrica com Predominância de Geração Hidrelétrica**. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina. 2009.