ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA,

POR

A. M. LE GENDRE;

TRADUZIDOS DO FRANCEZ, E DEDICADOS

AO

PRINCIPE REGENTE
NOSSO SENHOR

POR

MANOEL FERREIRA DE ARAUJO GUIMARÃES

Capitão do Real Corpo de Engenheiros, Lente de Mathematica na Academia Real dos Guardas-Marinhas.

La Geometrie ne sauroit exister que pour les esprits droits.

La Croix.

RIO DE JANEIRO.

NA IMPRESSÃO REGIA. 1809.

Por Ordem de S. A. R.

SENHOR.

NO momento em que o Brazil dobrou reverente o joelho na Presença de V. A. R., brotou para este Continente huma fonte perenne de felicidades. As Sciencias, companheiras inseparaveis da prosperidade do Estado, e que, ao estrondo das armas, se aco-

lhêrão espavoridas debaixo da Protecção de V. A. R., vierão fixar o seu domicilio no terreno mais fertil e mais abundante. A Bahia teve a honra de offerecer as primicias de submissão e homenagem ao Mais Amavel dos Soberanos com aquella effusão de prazer e alegria, que só podião inspirar as Virtudes que adornão a Sublime Alma de V. A. R. He tambem hum filho seu (o mais rude e o mais inhabil) que tem a fortuna de alçar a sua fraca voz na Primeira Cadeira de Mathematica de huma Academia até agora desconhecida na America Porgueza; e he elle mesmo que, com o mais humilde respeito, se anima a offerecer a V. A. R. a primeira Obra Mathematica, impressa na Sua Regia Officina Typografica, estimulo para outros mais habeis que hum dia illustrarão a Nação com os seus escritos immortaes.

Sirvão estes motivos de obter aquelle gasalhado com que V. A. R. se tem dignado de acolher as tenues fadigas que já virão a luz debaixo dos Seus Reaes Auspicios, argumento decisivo de que V. A. R. attende menos á escassa offerta, do que ao sincero coração que a dedica.

A minha gratidão, sobejamente empenhada por este novo beneficio, animará a sincera confissão, que tantas vezes tenho feito, e repetirei até o ultimo instante, de que tenho a gloria de ser

DE VOSSA ALTEZA REAL

O mais humilde e fiel Vassallo

Manoel Ferreira de Araujo Guimarães.

PROLOGO DO TRADUCTOR.

NÃo pertendo fazer o elogio da Obra; nem do Author. Depois do que tem dito em seu abono la Grange, la Croix, e outros Sabios, ficão inuteis as singelas expressões de hum fraco Traductor. Por tanto, nada avançando ácêrca dos presentes Elementos, recommendados de sobra por si mesmos, limitar-me-hei a dizer poucas palavras sobre a Traducção.

Sei que muitos presumidos Sabios olhão com desprezo para semelhantes trabalhos, a que nunca se dedicarão, e dos quaes por consequencia ignorão todo o pezo. Aquelle que sacrifica as horas do seu descanso a communicar aos seus compatriotas conhecimentos, que, sem elle, lhes serião vedados, ou ao menos pouco vulgares, se considera como hum servil copista, que não tem fadiga alguma, salvo a de transcrever as palavras do Author, empreza, segundo elles, muito facil. Eu não faço a minha apologia, nem a satira delles. Contento-me com ser util e lhes deixo o vão officio de declamadores. Se hum dia lhes couber igual sorte, eu ficarei assás vingado dos seus sarcasmos.

Outros, para diminuirem o preço das boas traducções (no numero das quaes estou bem longe de collocar as minhas) affirmão que não se devem transcrever as expressões do Author, e acarretão para corroborar esta opininião o *nec verbum verbo* de *Horacio*, e o *non ut interpers* de *Cicero*, passagens, cujo verdadeiro sentido depõe contra a asserção imprudente dos inimigos das traducções fieis. Não he propria deste lugar huma dissertação. E persuadido de que nada se póde accrescentar ao que diz *Beauzée* no artigo *Traducção* da Nova Encyclopedia, a elle remetto aquelles que desejarem conhecer toda a extensão desta frase singular = *Traducção livre.*

Intimamente persuadido da pequenez de minhas forças, e tendo antes a franqueza de confessar os meus tenues conhecimentos (1) do que a inchada presumpção de sabio, que tão barato comprão homens, aos quaes parece que as sciencias se offerecem sem difficuldade, e que, hontem ignorantes dos primeiros elementos, hoje desafião os Newtons, e os Eulers; eu não podia dar ao Publico alguma producção minha que

---

(1) Quam bellum est confiteri nescire quod nescias, quam ista effutientem nauseare, atque ipsum tibi displicere! Cicero.

rastejasse com os chefes d'obra de tantos Authores celebres que tem ornado este seculo: eu julguei mais sensato trasladar o que elles ensinarão do que cansar o leitor com as minhas bagatellas.

Devo fazer aqui huma advertencia sobre a edição. Eu comecei a servir-me da 3.ª (de 1800), até que hum Official, muito estudioso e muito erudito, teve a bondade de me franquear a 5.ª (de 1804), e por esta conferi a presente traducção. Nesta ultima edição, o A. ommittio o Prologo das precedentes, do qual creio dever dar hum resumo. Elle declara haver seguido o methodo de *Archimedes* e de *Euclides*, como mais proprio para pôr em evidencia as verdades geometricas; aperfeiçoando porém quanto aquelles grandes Mestres deixarão imperfeito, principalmente a theoria dos solidos. Expoem depois a divisão da sua Geometria em 8 livros na ordem seguinte:

„ O livro 1.º, intitulado *Principios* contém as propriedades das linhas rectas que „ se encontrão, as das perpendiculares, o „ theorema sobre a somma dos angulos de „ hum triangulo, a theoria das parallelas, etc.

„ O livro 2.º, intitulado *Circulo* trata „ das propriedades mais simplices do circulo, „ das cordas, dos tangentes, e da medida „ dos angulos por arcos de circulo.

„ Estes dois primeiros livros rematão na

„ solução de alguns problemas ácêrca da cons-
„ trucção das figuras.
„ O livro 3.º, intitulado *Proporções das*
„ *figuras* contém a medida das superficies, a
„ sua comparação, as propriedades do trian-
„ gulo rectangulo, as dos triangulos equian-
„ gulos, das figuras semelhantes, etc... Este
„ livro termina com huma serie de proble-
„ mas relativos aos objectos que nelle se
„ tratão.
„ O livro 4.º trata dos *Polygonos regu-*
„ *lares e da medida do circulo.* Dois lemmas
„ servem de base a esta medida que he de-
„ monstrada á maneira de *Archimedes.* Se-
„ guem-se dois methodos de approximação,
„ hum dos quaes he de *Jacob Grégory,*
„ A este livro acompanha hum appen-
„ dice, no qual se demonstra que o circulo
„ he maior que qualquer figura isoperimetra.
„ O livro 5.º contém as propriedades dos
„ *planos* e dos *angulos solidos*... O 6.º trata
„ dos *polyedros.* Este livro he escrito de
„ hum modo inteiramente novo.
„ O livro 7.º he hum tratado resumido
„ da *esfera* e dos *triangulos esfericos.*
„ O appendice aos livros 6.º e 7.º tem
„ por objecto os *polyedros regulares*; materia
„ tratada por *Euclides* com muita exten-
„ são.
„ O livro 8.º trata dos *tres corpos re-*
„ *dondos*, que são, *a esfera*, *o cône*, *e o cy-*
„ *lindro*; as superficies e solidezes destes cor-

„ pos são medidas por hum methodo analogo
„ ao de *Archimedes*. „

Depois de expôr a divisão dos seus Elementos, o Author falla das Notas, que elle divide em tres classes: „ humas, diz elle,
„ contém indagações relativas á perfeição dos
„ Elementos; outras (e são as mais essen-
„ ciaes) contém demonstrações rigorosas que
„ na segunda leitura se deveráõ substituir a
„ outras demonstrações menos completas, ou
„ menos exactas, que deixámos em alguns
„ lugares do texto, para não fazermos de-
„ masiadamente difficil a primeira leitura dos
„ Elementos; outras, finalmente, contém as
„ soluções analyticas de diversos problemas
„ de Geometria, uteis, ou curiosos. Os
„ que pertenderem só a parte elementar,
„ podem prescindir destas notas. „

No corpo da Geometria ha certas passagens menos necessarias, que na presente edição distinguimos por este signal „. O Leitor que não quizer profundar a sciencia, póde passar adiante sem detrimento.

Quanto á trigonometria, e ás addicções que eu fui obrigado a fazer em razão das differentes divisões do circulo, darei conta na Introducção á aquelle excellente Tratado, que talvez he abocanhado por quem o não entende.

Havendo fallado ácêrca da Obra, só resta huma palavra sobre a edição. Posso affirmar que empreguei nella toda a actividade, e desvelo de que sou capaz, e aquella intelligencia que me podião grangear alguns annos de applicação em semelhantes trabalhos. Póde ser que nella se encontrem muitos defeitos, parte procedidos da brevidade com que desempenhei esta tarefa, parte da minha ignorancia nos preceitos da arte (1). Sem embargo, ouso gabar-me de ser o primeiro que fiz apparecer neste Clima huma Obra desta natureza á custa de trabalhos, de que (infelizmente) he prova a minha saude assás incommodada. O Leitor intelligente, attendendo ás minhas pequenas forças, agradecerá com tudo os meus desejos.

Ut desint vires, tamen est laudanda voluntas.

Ovid.

Para os outros he escusada qualquer desculpa.

---

(1) Aut operae celeris nimium, cura que carentis,
Aut ignoratae premit artis crimine turpi.

Horat.

ERRATAS.

DA GEOMETRIA.

Pag.	*Linha*	*Erros*	*Emendas.*
17	33	AL	AC
21	28	em O	em E.
30	ult.	aigus e bem . .	iguaes bem
37	9	. . . .	depois de CG ponha-ſe (fig. 51.)
38	3	fig. 53	fig. 52.
42	19	exteriormente . .	interiormente
43	11	ABC	ACB.
56	2	ACD	AOD.
58	16	meno	menos
63	23	77 . . . . , .	97
72	29	obre	ſobre
73	3	dupla	duplo
84	25	no ponto . . .	nos pontos
85	36	$BD \times DC$ . . .	$BD \times BC$
99	15	(50)	(30)
116	ult.	inteiro	primo
128	15	B4	$B = 4$
130	21	ſe o angulo . .	ſe for o angulo
132	8	$b =$	$b' =$
133	26	eſte calculo . .	por eſte calculo
167	20	todas polyedros .	todas polygonos
197	15	expreſſo	expreſſa
203	11	os quatro vertices homologos	quatro vertices
224	16	ſemi-circumferencia	circumferencia
228	6	QEF	QFE.
255	29	multiplicada . .	multiplicado
269	7	do polygono . .	de polygono
270	4	D*c*	D*u*
ib.	5	D*u* × *circ.* AD .	DE × *circ.* AC

ERRATAS

DAS NOTAS DE GEOMETRIA.

Pag.	*Linha*	*Erros*	*Emendas*
285	24	elle convem . .	ella convem
296	10	Ψ (A , &c. . .	Φ (A , &c.
298	25	$=$	$= k$.
299	29	ultimo p . . .	ultimo termo x.
300	12	de a	de a'
304			no valor da tang x os dois ultimos x devem ser $x.^2$
313	10	$a+b+c+d$:	$a+b+c-d$
314	4	$(c+d)$ . . .	$(c+d)^2$
317	1	$\underline{\text{sen } a + \&c.}$	$\text{sen}\underline{^a + \&c.}$

ELEMENTOS DE GEOMETRIA.

LIVRO PRIMEIRO.

PRINCIPIOS.

DEFINIÇÕES.

I. GEOMETRIA he huma ſciencia, que tem por objecto a medida da extensão.

A extensão tem tres dimensões, comprimento, largura e altura.

II. *Linha* he comprimento ſem largura.

As extremidades da linha ſe chamão pontos: logo o ponto não tem extensão.

III. *Linha recta* he o caminho mais curto de hum ponto a outro.

IV. *Linha curva* he aquella que não he recta, nem composta de rectas.

AB he huma recta, (fig. 1.), ACDB huma *linha quebrada*, ou composta de linhas rectas, e AEB huma curva.

V. *Superficie* he o que tem comprimento e largura ſem groſſura ou altura.

VI. *Plano* he huma ſuperficie, na qual tomando dois pontos á vontade, e ajuntando-os por huma recta, eſta fica toda dentro da ſuperficie.

VII. A ſuperficie, que nem he plana, nem compoſta de ſuperficies planas, he huma *ſuperficie curva.*

VIII. *Solido* ou *Corpo* he o que reune as tres dimensões da extensão.

IX. Quando duas rectas AB, AC (fig. 2.) ſe encontrão, a quantidade maior ou menor que ellas ſe affaſtão huma da outra ſe chama *angulo*; o ponto de encontro, ou de *interſecção*, A he o vertice do angulo; as linhas AB, AC são os *lados*.

O angulo ſe denota humas vezes só pela letra do vertice, outras por tres letras BAC ou CAB, havendo cuidado em pôr no meio a letra do vertice.

Os angulos são, como todas as quantidades, capazes de addição, ſubtracção, multiplicação, e divisão. Aſſim o angulo DCE (fig. 20.) he a ſomma dos dois angulos DCB, BCE, e o angulo DCB he a differença dos dois angulos DCE, BCE.

X. Quando a linha recta AB (fig. 3.) encontra outra recta CD, de maneira que os angulos adjacentes BAC, BAD ſejão iguaes entre si, cada angulo deſtes ſe chama *angulo recto*, e a linha AB ſe diz *perpendicular* ſobre CD.

XI. O angulo BAC (fig. 4.), menor que hum angulo recto, he hum *angulo agudo*; o angulo maior DEF he *angulo obtuſo.*

XII. Chamão-ſe *parallelas* duas linhas, que, eſtando ſituadas no meſmo plano, não ſe podem encontrar, a qualquer diſtancia que ſe imaginem prolongadas.

XIII. *Figura plana* he hum plano terminado de todas as partes por linhas.

Se as linhas são rectas, o eſpaço que ellas fechão ſe chama *figura rectilinea* ou *polygono*, e as mefmas linhas todas formão o contorno ou *perimetro* do polygono.

XIV. De todos os polygonos o mais fimples he o de tres lados, que fe chama *triangulo*; o de quatro lados fe chama *quadrilatèro*: o de cinco, *pentagono*; o de feis *hexagono*, &c.

XV. Chama-fe triangulo *equilatero* aquelle que tem os tres lados iguaes (fig. 7.); o triangulo *ifofceles* tem só dois lados iguaes (fig. 8.); triangulo *fcaleno* he o que tem os tres lados defiguaes (fig. 9.)

XVI. Triangulo *rectangulo* he aquelle que tem hum angulo recto. O lado oppofto ao angulo recto fe chama hypoténufa. ABC (fig. 10.) he hum triangulo rectangulo em A, o lado BC he a fua hypoténufa.

XVII. Entre os quadrilateros fe diftingue:

O *quadrado* (fig. 11.) que tem os lados iguaes e os angulos rectos. (Vê a prop. XXI. Liv. I.)

O *rectangulo* (fig. 12.) que tem os angulos rectos e não tem os lados iguaes. (Vê a mefma prop.).

O *parallelogrammo* ou *rhombo* (fig. 13.) que tem os lados oppoftos parallelos.

O *lofango* (fig. 14.) que tem os lados iguaes, mas os angulos não são rectos.

Finalmente o *trapezio* (fig. 16.) que só tem dois lados parallelos.

XVIII. Chama-fe *diagonal* a linha que une os vertices de dois angulos não adjacentes. Tal he AC (fig. 42.).

XIX. Polygono *equilatero* he aquelle que tem todos os lados iguaes; polygono equiangulo o que tem todos os angulos iguaes.

XX. Dois polygonos são *equilateros entre si* quando tem os lados iguaes cada hum a cada hum, e poftos na mefma ordem, quer dizer, quando feguindo os feus contornos no mefmo fentido, o primeiro lado de hum he igual ao primeiro do outro, o segundo de hum ao segundo do outro, o terceiro ao terceiro, e assim em diante. Do mesmo modo se percebe o que significão dois polygonos *equiangulos entre si*.

Em ambos os casos, os lados iguaes ou os angulos iguaes se chamão lados ou angulos *homologos*.

N. B. Nos quatro primeiros livros não se tratará senão de figuras planas ou traçadas sobre huma superficie plana.

Explicação dos termos e dos signais.

Axioma he huma proposição evidente por si mesma.

Theorema he huma verdade que vem a ser evidente por meio de hum raciocinio que se chama *demonstração*.

Problema he huma questão proposta que requer huma *solução*.

Lemma he huma verdade empregada subsidiariamente para demonstração de hum theorema ou solução de hum problema.

O nome commum de *proposição* se attribue indifferentemente aos theoremas, problemas e lemmas.

Corollario he a consequencia que se deduz de huma ou de muitas proposições.

Scholio he huma advertencia ácêrca de huma ou de muitas proposições precedentes, que tende a fazer perceber o seu encadeamento, a sua utilidade, a sua restricção ou a sua extensão.

Hypothese he huma supposição feita, quer no enunciado da proposição, quer no decurso de huma demonstração.

O signal $=$ he o signal de igualdade; assim a expressão $A = B$ quer dizer que A he igual a B.

Para exprimir que A he menor que B, se escreve $A < B$.

Para exprimir que A he maior que B, ſe eſcreve $A > B$.

O ſignal $+$ ſe pronuncia mais; indica a addição.

O ſignal $-$ ſe pronuncia menos; indica a ſubtracção. Aſſim $A + B$ repreſenta a ſomma das quantidades A e B; $A - B$ repreſenta a ſua differença, ou o que fica quando ſe tira B de A; do meſmo modo $A - B + C$, ou $A + C - B$, quer dizer que ſe deve ſommar A e C, e do todo ſubtrahir B.

O ſignal $\times$ indica multiplicação; aſſim $A \times B$ repreſenta o producto de A multiplicado por B. Em vez do ſignal $\times$ tambem ſe emprega hum ponto; aſſim $A.B$ he o meſmo que $A \times B$. Tambem se indica o meſmo producto ſem algum ſignal intermedio por A B, porém esta expressão sómente se deve empregar quando ao meſmo tempo se não houver de usar da expressão da linha A B, distancia dos pontos A e B.

A expressão $A \times (B + C - D)$ representa o producto de A pela quantidade $B + C - D$. Se se devesse multiplicar $A + B$ por $A - B + C$, indicar-se hia assim o producto $(A + B) \times (A - B + C)$: tudo que fica fexado entre parenthesis se reputa por huma só quantidade.

Hum numero posto antes de huma linha ou de huma quantidade serve de multiplicador a esta linha ou a esta quantidade; assim para exprimir que a linha AB ſe toma tres vezes, ſe eſcreve 3AB; para notar a metade do angulo A, ſe eſcreve $\frac{1}{2}$ A.

O quadrado da linha AB ſe marca por $\overline{AB}^2$; o ſeu cubo por $\overline{AB}^3$. A ſeu tempo explicaremos o que querem dizer rigoroſamente quadrado ou cubo de huma linha.

O ſignal $\sqrt{}$ indica huma raiz que ſe ha-de extrahir; aſſim $\sqrt{2}$ he a raiz quadrada de 2; $\sqrt{A \times B}$ he a raiz quadrada do producto $A \times B$, ou a meia proporcional entre A e B.

Axiomas.

1. Duas quantidades iguaes a huma terceira são iguaes entre si.

2. O todo he maior que a sua parte.

3. O todo he igual á somma das partes em que elle está dividido.

4. De hum ponto a outro não se póde tirar mais de huma linha recta.

5. Duas grandezas, linha, superficie ou solido, são iguaes, quando postas huma sobre a outra, coincidem em toda a sua extensão.

PROPOSIÇÃO I.

THEOREMA.

Os angulos rectos são todos iguaes entre si.

Seja a linha recta CD perpendicular a AB, e GH a EF (fig. 16.); digo que os angulos ACD, EGH serão iguaes entre si.

Tomem-se as quatro distancias iguaes CA, CB, GE, GF, a distancia AB será igual á distancia EF, e poder-se-ha pôr a linha EF sobre AB, de maneira que o ponto E caia em A, e o ponto F em B. Estas duas linhas postas desta maneira coincidirão inteiramente huma com a outra; porque, a não ser assim, haveria duas linhas rectas de A para B, o que he impossivel (axio. 4.); logo o ponto G, meio de EF, cahirá sobre o ponto C, meio de AB. Applicando-se desta sorte o lado GE sobre CA, digo que o lado GH cahirá sobre CD; porque, supponhamos, se he possivel, que cahe sobre huma linha CK, differente de CD; como, por hypothese (def. 10.), o angulo EGH = HGF, deveria ser ACK = KCB. Mas o angulo ACK he maior que ACD, o angulo KCB he menor que

BCD; demais, por hypothefe, ACD = BCD; logo ACK he maior que KCB; logo a linha GH não póde cahir fobre huma linha CK differente de CD; logo ella cahe fobre CD, e o angulo EGH fobre ACD; logo todos os angulos rectos são iguaes entre si.

PROPOSIÇÃO II.

THEOREMA.

Toda a linha recta CD (fig. 17.), *que encontra outra* AB, *faz com esta dois angulos adjacentes* ACD, BCD, *cuja somma he igual a dois angulos rectos.*

No ponto C, levante-fe fobre AB a perpendicular CE. O angulo ACD he a fomma dos angulos ACE, ECD; logo ACD + BCD ferá a fomma dos trez ACE, DCE, BCD. O primeiro he recto, os outros dois juntos fazem o angulo recto BCE; logo a fomma dos dois angulos ACD, BCD he igual a dois angulos rectos.

Corollario I. Se hum dos angulos ACD, BCD, for recto, o outro o ferá igualmente.

Corollario II. Se a linha DE (fig. 18.) for perpendicular a AB, reciprocamente AD ferá perpendicular a DE.

Porque, de fer DE perpendicular a AB, fe fegue que o angulo ACD he igual ao feu adjacente DCB, e que ambos são rectos. Mas de fer recto o angulo ACD fegue-fe que o feu adjacente ACE tambem he recto; logo o angulo ACE = ACD; logo AB he perpendicular a DE.

Corollario III. Todos os angulos confecutivos BAC, CAD, DAE, EAF (fig. 34.) formados do mefmo lado da recta BF, valem em fomma dois angulos rectos; porque a fomma delles he igual a dos dois angulos BAC, CAF.

PROPOSIÇÃO III.

THEOREMA.

Duas linhas rectas que tem dois pontos communs coincidem em toda a sua extensão, e formão huma só e a mesma recta.

Sejão os dois pontos communs A e B (fig. 19.); primeiro as duas linhas devem fazer huma só entre A e B; porque, senão fora assim, haveria duas rectas de A para B, o que he impossivel (axiom. 4.). Supponhamos depois que prolongando estas linhas, ellas começão a separar-se no ponto C, vindo huma a ficar CD, e a outra CE. Tiremos pelo ponto C a linha CF, que faça com CA o angulo recto ACF. Como a linha ACD he recta, o angulo FCD será recto (prop. 2; cor. 1.); como a linha ACE he recta, o angulo FCE será igualmente recto. Mas a parte FCE, não póde ser igual ao todo FCD; logo as linhas rectas que tem dois pontos A e B communs, não podem separar-se em ponto algum do seu prolongamento; logo ellas formão huma só e a mesma recta.

PROPOSIÇÃO IV.

THEOREMA.

Se dois angulos adjacentes ACD, DCB (fig. 20.) *valerem em somma dois angulos rectos, os dois lados exteriores* AC, CB, *estarão em linha recta.*

Porque, se CB não for o prolongamento de AC, seja CE este prolongamento, então a linha ACE sendo recta, a somma dos angulos ACD, DCE, será igual a dois rectos (prop. 2.). Mas, por hypothese, a somma dos angulos ACD, DCB, tambem he igual a dois rectos; logo ACD + DCB seria igual a ACD + DCE; tirando de huma e outra parte ACD, ficaria a parte DCB igual ao todo DCE, o que he impossivel. Logo CB he o prolongamento de AC.

PROPOSIÇÃO V.

THEOREMA.

Quando duas rectas AB, DE (fig. 21.) *se cortão, os angulos oppostos verticalmente são iguaes.*

Porque, como a linha DE he recta, a somma dos angulos ACD, ACE, he igual a dois rectos; e como a linha AB he recta, a somma dos angulos ACE, BCE, tambem he igual a dois rectos. Logo a somma ACD + ACE he igual á somma ACE + BCE. Tirando de huma e outra parte o mesmo angulo ACE, ficará o angulo ACD igual ao seu opposto BCE.

Demonstrar-se-hia do mesmo modo que o angulo ACE he igual ao seu opposto BCD.

Scholio. Os quatro angulos formados em torno de hum ponto por duas linhas rectas que se cortão, valem em somma quatro angulos rectos. Porque os angulos ACE, BCE, juntos, valem dois angulos rectos; e os outros dois ACD, BCD tem o mesmo valor.

Em geral, se qualquer numero de rectas CA, CB, &c. (fig. 22.), se encontrarem em hum ponto C, a somma de todos os angulos consecutivos ACB, BCD, DCE, ECF, FCA, será igual a quatro angulos rectos. Porque, se formassemos no ponto C quatro angulos rectos, tirando duas linhas perpendiculares entre si, encher-se-hia o mesmo espaço, quer pelos quatro angulos rectos, quer pelos angulos successivos ACB, BCD, &c.

PROPOSIÇÃO VI.

THEOREMA.

Dois triangulos são iguaes, quando tem hum angulo igual comprehendido entre lados iguaes, cada hum a cada hum.

Seja o angulo A (fig. 23.) igual ao angulo D, o lado AB igual a DE, o lado AC igual a DF; digo que os triangulos ABC, DEF serão iguaes.

Com effeito, estes triangulos se podem pôr hum sobre o outro, de maneira que coincidão perfeitamente. Primeiramente, se puzermos o lado DE sobre o seu igual AB, o ponto D cahirá em A, e o ponto E em B. Mas como o angulo D he igual ao angulo A, ajustando-se DE sobre AB, o lado DF tomará a direcção AC. Além disto DF he igual a AC; logo o ponto F cahirá em C, e o terceiro lado EF cobrirá exactamente o terceiro lado BC; logo o triangulo DEF he igual ao triangulo ABC (ax. 5.).

Corollario. Havendo tres cousas iguaes em dois triangulos, a saber, o angulo A = D, o lado AB = DE, e o lado AC = DF, se pode concluir que as outras tres tambem são iguaes, a saber, o angulo B = E, o angulo C = F, e o lado BC = EF.

PROPOSIÇÃO VII.

THEOREMA.

Dois triangulos são iguaes quando tem hum lado igual adjacente a dois angulos iguaes, cada hum a cada hum.

Seja o lado BC (fig. 23.) igual ao lado EF, o angulo B igual ao angulo E, e o angulo C igual ao angulo F ; digo que o triangulo DEF ferá igual ao triangulo ABC.

Porque, para effeituarmos a fobrepofição, ponhamos EF fobre o feu igual BC, o ponto E cahirá em B, e o ponto F em C. Como o angulo E he igual ao angulo B, o lado ED tomará a direcção de BA ; affim o ponto D fe achará fobre algum ponto da linha BA. Da mefma forte, como o angulo F he igual ao angulo C, a linha FD tomará a direcção de CA, e o ponto D fe achará fobre algum ponto do lado CA ; logo o ponto D que deve ficar ao mefmo tempo nas duas linhas BA, CA, cahirá na fua interfecção A ; logo os dois triangulos ABC, DEF, coincidem hum com o outro, e são perfeitamente iguaes.

Corollario. Havendo tres coufas iguaes em dois triangulos, a faber, BC = EF, B = E, C = F, fe póde concluir que as outras tres tambem são iguaes, a faber, AB = DE, AC = DF, A = D.

PROPOSIÇÃO VIII.

THEOREMA.

Em todo o triangulo, qualquer lado he menor que a fomma dos outros dois.

Porque a recta BC (fig. 23.), por exemplo he o mais curto caminho de B para C (def. 3.) ; logo BC he menor que BA + AC.

PROPOSIÇÃO IX.

THEOREMA.

Se de hum ponto O (fig. 24.) *tomado dentro do triangulo* ABC, *tirarmos ás extremidades de hum lado* BC *as linhas* OB, OC, *a fomma deftas linhas ferá menor que a fomma dos outros dois lados* AB, AC.

Prolonguemos BO até o encontro do lado AC em D, a linha recta OC he mais curta que OD + DC (prop. ant.); ajuntando a cada parte BO, teremos BO + OC $<$ BO + OD + DC, ou BO + OC $<$ BD + DC.

Temos igualmente BD $<$ BA + AD; ajuntando DC a cada parte, teremos BD + DC $<$ BA + AC. Mas já provámos que BO + OC $<$ BD + DC; logo, com mais forte razão, BO + OC $<$ BA + AC.

PROPOSIÇÃO X.

THEOREMA.

Se os dois lados AB, AC (fig. 25.), *do triangulo* ABC, *forem iguaes aos dois lados* DE, DF, *do triangulo* DEF, *cada hum a cada hum; se ao mesmo tempo o angulo* BAC *comprehendido pelos primeiros, for maior que o angulo* EDF *comprehendido pelos segundos; digo que o terceiro lado* BC *do primeiro triangulo será maior que o terceiro* EF *do segundo.*

Faça-se o angulo CAG = D, tome-se AG = DE, e ajunte-se CG, o triangulo GAC será igual ao triangulo DEF, porque tem, por construcção, hum angulo igual comprehendido entre lados iguaes (pr. 6.), logo será CG = EF. Agora podem acontecer tres casos, segundo o ponto G cahir fóra do triangulo ABC, ou sobre o lado BC, ou dentro do mesmo triangulo.

Primeiro caso. A linha recta CG (fig. 25.) he mais curta que GI + IC, a linha recta AB he mais curta que AI + IB; logo GC + AB he menor que GI + AI + IC + IB, ou, que he o mesmo, GC + AB $<$ AG + BC. Tirando de huma parte AB e da outra a sua igual AG, ficará GC $<$ BC; ora GC = EF; logo EF $<$ BC.

Segundo caso. Se o ponto G (fig. 26.) cahe sobre o lado BC, he evidente que GC ou o ſeu igual EF ſerá menor que BC.

Terceiro caſo. Finalmente, ſe o ponto G cahe dentro do triangulo ABC (fig. 27.), ter-ſe-ha, ſegundo o theorema precedente, AG + GC < AB + BC. Tirando de huma parte AG e da outra a ſua igual AB, ficará GC < BC, ou EF < BC.

PROPOSIÇÃO XI.

THEOREMA.

Dois triangulos são iguaes, quando tem os tres lados iguaes cada hum a cada hum.

Seja o lado AB = DE (fig. 23.), AC = DF, BC = EF, digo que ſerá o angulo A = D, B = E, C = F.

Porque, ſe o angulo A foſſe maior que o angulo D, como os lados AB, AC são iguaes aos lados DE, DF, cada hum a cada hum, ſeguir-ſe-hia pelo theorema precedente, que o lado BC he maior que EF; e ſe o angulo A foſſe menor que o angulo D, ſeguir-ſe-hia que o lado BC he menor que EF; ora BC he igual a EF; logo o angulo A não póde ſer nem maior nem menor que o angulo D; logo lhe he igual. Do meſmo modo ſe provará que o angulo B = E, e o angulo C = F.

Scholio. Póde-ſe notar que os angulos iguaes são oppoſtos a lados iguaes. Aſſim os angulos iguaes A e D são oppoſtos aos lados iguaes BC, EF.

PROPOSIÇÃO XII.

THEOREMA.

Em hum triangulo isosceles os angulos oppostos aos lados iguaes são iguaes.

Seja o lado AB = AC (fig. 28.), digo que será o angulo C = B.

Tire-se a linha AD do *vertice* A ao ponto D, meio da *base* BC; os dois triangulos ABD, ADC, terão os tres lados iguaes cada hum a cada hum; a saber, AD commum, AB = AC, por hypothese, e BD = DC, por construcção; logo, em virtude do theorema precedente, o angulo B he igual ao angulo C.

Corollario. Hum triangulo equilatero he ao mesmo tempo equiangulo, isto he, tem os seus angulos iguaes.

Scholio. A igualdade dos triangulos ABD, ACD, prova ao mesmo tempo que o angulo BAD = DAC, e que o angulo BDA = ADC; logo estes ultimos são rectos; *logo a linha tirada do vertice de hum triangulo isosceles ao meio da base, he perpendicular a esta base, e divide o angulo do vertice em duas partes iguaes.*

Em hum triangulo não isosceles se toma indifferentemente por *base* hum lado qualquer, e então o seu *vertice* he o do angulo opposto. No triangulo isosceles se toma particularmente por *base* o lado que não he igual aos outros.

PROPOSIÇÃO XIII.

THEOREMA.

Reciprocamente, se dois angulos forem iguaes em hum triangulo, os lados oppostos serão iguaes; e o triangulo será isosceles.

Seja o angulo ABC = ACB (fig. 29.), digo que o lado AC será igual ao lado AB.

Porque, se estes lados não são iguaes, seja AB o maior. Tome-se BD = AC, e tire-se DC. Como, por construcção, o triangulo BCD he isosceles, teremos (pr. 12.) o angulo BCD = DBC; mas por hypothese, o angulo DBC = ACB; logo seria a parte BCD igual ao todo BCA, o que he impossivel. Logo os lados AB, AC são iguaes, e o triangulo ABC he isosceles.

PROPOSIÇÃO XIV.

THEOREMA.

De dois lados de hum triangulo he maior aquelle que he opposto ao maior angulo, e reciprocamente, de dois angulos de hum triangulo he maior aquelle que he opposto ao maior lado.

1.° Seja o angulo C > B (fig. 30.) digo que o lado AB opposto ao angulo C, he maior que o lado AC opposto ao angulo B.

Faça-se o angulo BCD = B; no triangulo BDC ter-se-ha (pr. 13.) BD = DC. Mas a linha recta AC he mais curta que AD + DC, e AD + DC = AD + DB = AB. Logo AB he maior que AC.

2.° Seja o lado AB > AC, digo que o angulo C opposto ao lado AB será maior que o angulo B, opposto ao lado AC.

Porque se fosse C < B, seguir-se-hia, pelo que fica demonſtrado, que AB < AC, o que he contra a ſuppoſição. Se foſſe C = B, ſeguir-ſe-hia (pr. 13.) que AB = AC, o que tambem he contra a ſuppoſição. Logo o angulo C deve ſer maior que B.

PROPOSIÇÃO XV.

THEOREMA.

De hum ponto A (fig. 31.) *dado fóra de huma recta* DE, *não ſe póde tirar mais de huma perpendicular a eſta recta.*

Porque, ſupponhamos que ſe podem tirar duas AB e AC; prolonguemos huma dellas AB huma quantidade BF = AB, e tiremos FC.

O triangulo CBF he igual ao triangulo ABC. Porque o angulo CBF he recto, bem como CBA, o lado CB he commum, e o lado BF = AB. Logo eſtes triangulos são iguaes (pr. 6.), e ſegue-ſe que o angulo BCF = BCA. O angulo BCA he recto por hypotheſe, logo o angulo BCF tambem he recto. Mas, ſe os angulos adjacentes BCA, BCF valem juntos dois angulos rectos, a linha ACF deve ſer recta (pr. 4.); donde reſulta que entre os meſmos dois pontos A e F, poderiamos tirar duas linhas rectas ABF, ACF; ora iſto he impoſſivel (ax. 4.), logo he igualmente impoſſivel tirar duas perpendiculares de hum meſmo ponto ſobre huma linha recta.

Scholio. Por hum meſmo ponto C (fig. 17.) dado ſobre a linha AB, he igualmente impoſſivel tirar duas perpendiculares a eſta linha. Porque ſe CD e CE foſſem eſtas perpendiculares, o angulo DCB ſeria recto, bem como BCE, e a parte ſeria igual ao todo, o que he impoſſivel (ax. 2.)

PROPOSIÇÃO XVI.

THEOREMA.

Se de hum ponto A (fig. 31.), *situado fora de huma recta* DE, *tirarmos a perpendicular* AB *sobre esta recta, e differentes obliquas* AE, AC, AD, &c. *a differentes pontos da mesma recta*,

1.° *A perpendicular* AB *será mais curta que qualquer obliqua.*

2.° *As duas obliquas* AC, AE, *tiradas de huma e outra parte da perpendicular, em distancias iguaes* BC, BE, *serão iguaes.*

3.° *De duas obliquas* AC e AD, *ou* AE e AD, *tiradas como se quiser, a que se affastar mais da perpendicular, será a mais comprida.*

Prolongue-se a perpendicular AB huma quantidade BF = AB, e ajuntem-se FC, FD.

1.° O triangulo BCF he igual ao triangulo BCA; porque o angulo recto CBF = CBA, o lado CB he commum, e o lado BF = BA, logo o terceiro lado (pr. 6.) CF he igual ao terceiro AC. Ora ABF, linha recta, he mais curta que ACF, linha quebrada, logo AB, metade de ABF he mais curta que AC, metade de ACF. Logo 1.° a perpendicular he mais curta que qualquer obliqua.

2.° Se suppozermos BE = BC, como temos alem disto AB commum, e o angulo ABE = ABC, segue-se que o triangulo ABE he igual ao triangulo ABC. Logo os lados AE, AC são iguaes. Logo 2.° duas obliquas que se affastão igualmente da perpendicular são iguaes.

3.° No triangulo ADF a somma das linhas AC, CF he menor (pr. 9.) que a somma dos lados AD, DF. Logo AL, metade da linha ACF, he mais curta que AD, metade de ADF. Logo 3.° as obliquas que se affastão mais da perpendicular são mais compridas.

Corollario I. A perpendicular mede a verdadeira diſtancia de hum ponto a huma linha, porque he mais curta que qualquer obliqua.

II. De hum meſmo ponto não ſe podem tirar a huma meſma linha tres rectas iguaes. Porque, ſe aſſim fôra, haveria do meſmo lado da perpendicular duas obliquas iguaes, o que he impoſſivel.

PROPOSIÇÃO XVII.

THEOREMA.

Se pelo ponto C, (fig. 32.), *meio da linha* AB, *levantarmos a perpendicular* EF *ſobre eſta linha; 1.° cada ponto da perpendicular eſtará igualmente diſtante das duas extremidades da linha* AB; *2.° todo o ponto ſituado fóra da perpendicular eſtará deſigualmente diſtante das meſmas extremidades* A e B.

Porque 1.° como ſe ſuppõe AC = CB, as duas obliquas AD, DB ſe affaſtão igualmente da perpendicular; logo são iguaes. O meſmo acontece ás duas obliquas AE, EB, ás duas AF, FB, &c. Logo 1.° qualquer ponto da perpendicular eſtá igualmente diſtante dos extremos A e B.

2.° Seja I hum ponto fóra da perpendicular; ſe ajuntarmos IA, IB, huma deſtas linhas cortará a perpendicular em D, donde tirando DB, teremos DB = DA. Mas a linha recta IB he menor que a linha quebrada ID + DB, e ID + DB = ID + DA = IA; logo IB < IA; logo 2.° todo o ponto fóra da perpendicular eſtará deſigualmente diſtante dos extremos A e B.

PROPOSIÇÃO XVIII.

THEOREMA.

Dois triangulos rectangulos são iguaes quando tem a hypoténusa igual, e hum lado igual.

Seja a hypoténusa AC = DF (fig. 33.), e o lado AB = DE, digo que o triangulo rectangulo ABC será igual ao triangulo rectangulo DEF.

Seria manifesta a igualdade, se o terceiro lado BC fosse igual ao terceiro EF: supponhamos, se he possivel, que estes lados não são iguaes, e que seja BC o maior. Tome-se BG = EF, e ajunte-se AG. O triangulo ABG he igual ao triangulo DEF; porque o angulo recto B he igual ao angulo recto E, o lado AB = DE, e o lado BG = EF; logo estes dois triangulos são iguaes (pr. 6.), e por consequencia AG = DF: mas, por hypothese, DF = AC; logo AG = AC. Porém a obliqua AC não póde ser igual a AG (pr. 16.), porque está mais affastada da perpendicular AB; logo he impossivel que BC difira de EF; logo o triangulo ABC he igual ao triangulo DEF.

PROPOSIÇÃO XIX.

LEMMA.

A somma dos tres angulos de hum triangulo não póde exceder a dois angulos rectos.

Seja, se he possivel, ACB (fig. 35.) hum triangulo no qual a somma dos tres angulos he maior que dois angulos rectos.

Sobre AC prolongado tome-se CE = AC; faça-se o angulo ECD = CAB, o lado CD = AB; ajuntem-se DE e BD. O triangulo CDE será igual ao triangulo BAC, porque tem hum angulo igual comprehendido entre lados iguaes cada hum a cada hum (pr. 6.); logo teremos o angulo CED = ACB, o angulo CDE = ABC, e o terceiro lado ED igual ao terceiro BC.

Como a linha ACE he recta, a somma dos angulos ACB, BCD, DCE he igual a dois angulos rectos (pr. 2. cor. 3.); ora suppomos que a somma dos angulos do triangulo ABC he maior que dois angulos rectos, logo teremos CAB + ABC + ACB > ACB + BCD + ECD; tirando de huma e outra parte ACB commum e CAB = ECD, ficará ABC > BCD; e porque os lados AB, BC do triangulo ABC, são iguaes aos lados CD, CB do triangulo BCD, segue-se que o terceiro lado AC he maior que o terceiro BD (pr. 10.).

Imaginemos agora que se prolongue indefinidamente a linha AC, e da mesma maneira a serie dos triangulos iguaes e semelhantemente dispostos ABC, CDE, EFG, GHI, &c.; se ajuntarmos os vertices visinhos pelas rectas BD, DF, FH, HK, &c., formaremos ao mesmo tempo huma serie de triangulos intermedios BCD, DEF, FGH, &c. que serão todos iguaes entre si, porque terão hum angulo igual comprehendido entre lados iguaes cada hum a cada hum. Logo teremos BD = DF = FH = HK, &c.

Isto posto, como temos AC > BD, seja a differença AC — BD = D; he claro que 2D será a differença entre a linha recta ACE igual a 2AC, e a linha recta ou quebrada BDF igual a 2BD; de sorte que teremos AE — BF = 2D. Do mesmo modo teremos AG — BH = 3D, AI — BK = 4D, e assim em diante. Ora, por mais pequena que seja a differença D, he evidente que esta differença*, repetida hum numero de vezes sufficiente, virá a ser maior que hum comprimento dado. Logo poderemos suppôr a serie dos triangulos prolongada tão longe que seja AP — BQ > 2AB; e assim teriamos AP > BQ + 2AB. Ora, pelo contrario, a linha recta

AP he menor que a linha angulofa ABQP, que ajunta os mefmos extremos A e P, de maneira que teremos fempre AP $<$ AB $+$ BQ $+$ QP, ou AP $<$ BQ $+$ 2AB. Logo a hypothefe, de que partimos, he abfurda: logo a fomma dos tres angulos do triangulo ABC não póde exceder a dois angulos rectos.

PROPOSIÇÃO XX.

THEOREMA.

Em todo o triangulo, a fomma dos trez angulos he igual a dois angulos rectos.

Havendo já provado que a fomma dos trez angulos de hum triangulo não póde exceder a dois angulos rectos, refta demonftrar que efta mefma fomma não póde fer menor do que dois angulos rectos.

Seja ABC (fig. 35. a) o triangulo propofto, e feja, fe he poffivel, a fomma dos feus angulos $=$ 2P — Z, marcando P hum angulo recto, e fendo Z effa quantidade qualquer que fe fuppoem faltar á fomma dos angulos para que efta feja igual a dois rectos.

Seja A o menor dos angulos do triangulo ABC; fobre o lado oppofto BC faça-fe o angulo BCD $=$ ABC, e o angulo CBD $=$ ACB; os triangulos BCD, ABC, ferão iguaes (pr. 7.), porque tem hum lado igual BC adjacente a dois angulos iguaes, cada hum a cada hum. Pelo ponto D tire-fe huma recta qualquer EF, que encontre em O e em F os dois lados do angulo A prolongados (1).

---

(1) Supponho que A he o menor angulo do triangulo ABC, e por confequencia menor ou não maior que dois terços do angulo recto, a fim de fazer mais fenfivel a poffibilidade de que huma recta tirada pelo ponto D, encontre ao mefmo tempo os dois lados AB, AC, prolongados.

Como a ſomma dos angulos de cada hum deſtes triangulos ABC, BCD he 2P — Z, e a de cada triangulo EBD, DCF não póde exceder a 2P (prop. 19.), ſegue-ſe que a ſomma dos angulos dos quatro triangulos ABC, BCD, EBD, DCF, não paſſa de 4P — 2Z + 4P, ou 8P — 2Z. Se deſta ſomma tirarmos a dos angulos em B, C, D, que he 6P, porque a ſomma dos angulos formados em cada ponto B, C, D, he 2P (pr. 2. cor. 3.), o reſto ſerá igual á ſomma dos angulos do triangulo AEF. Logo a ſomma dos angulos do triangulo AEF não paſſa de 8P — 2Z — 6P, ou 2P — 2Z.

Aſſim em quanto he neceſſario ajuntar Z á ſomma dos angulos do triangulo ABC para que ella chegue a dois rectos, cumpre ao menos ajuntar 2Z á ſomma dos angulos do triangulo AEF para completar os meſmos dois rectos.

Por meio do triangulo AEF ſe conſtruirá ſemelhantemente hum terceiro triangulo, tal que ſeja miſter ajuntar ao menos 4Z á ſomma dos ſeus tres angulos, para que o todo ſeja igual a dois angulos rectos; e por meio do terceiro, ſe conſtruirá da meſma maneira hum quarto, tal que ſe deva ajuntar ao menos 8Z á ſomma dos ſeus angulos para que o todo ſeja igual a dois angulos rectos, e aſſim em diante.

Ora, por mais pequeno que ſeja Z a reſpeito do angulo recto P, a ſerie Z, 2Z, 4Z, 8Z, cujos termos creſcem em razão dupla, conduzirá bem depreſſa a hum termo igual a 2P, ou maior que 2P. Logo então ſe chegará a hum triangulo tal que ſeja neceſſario ajuntar á ſomma dos ſeus angulos huma quantidade igual ou maior que 2P, para que a ſomma total foſſe ſómente 2P. Eſta conſequencia he viſivelmente abſurda; logo não póde ſubſiſtir a hypotheſe de que partimos; quer dizer, que he impoſſivel que a ſomma dos angulos do triangulo ABC, ſeja menor que dois angulos rectos: ella não póde ſer maior em virtude da propoſição precedente, logo he igual a dois angulos rectos.

Corollario I. Sendo dados dois angulos de hum triangulo, ou sómente a sua somma, conhecer-se-ha o terceiro, subtrahindo de dois angulos rectos a somma destes angulos.

II. Se dois angulos de hum triangulo forem iguaes a dois angulos de outro triangulo, cada hum a cada hum, o terceiro será igual ao terceiro, e os triangulos serão equiangulos entre si.

III. Não póde haver em hum triangulo mais do que hum angulo recto, porque, se houvesse dois, o terceiro angulo viria a ser nullo. Com maior razão, hum triangulo não póde ter mais do que hum só angulo obtuso.

IV. Em hum triangulo rectangulo a somma dos dois angulos agudos he igual a hum angulo recto.

V. Em hum triangulo equilatero cada angulo he igual a hum terço de dois angulos rectos, ou aos dois terços de hum angulo recto; de maneira que exprimindo por 1 o angulo recto, será expresso por $\frac{2}{3}$ o angulo do triangulo equilatero.

VI. Em qualquer triangulo ABC (fig. 41.) se prolongarmos o lado CA para D, o angulo externo BAD será igual á somma dos dois internos oppostos B e C: porque, ajuntando a huma e outra parte BAC, as duas sommas serão iguaes a dois angulos rectos.

PROPOSIÇÃO XXI.

THEOREMA.

A somma de todos os angulos internos de hum polygono, he igual a tantas vezes dois angulos rectos quantas unidades houver no numero dos lados menos dois.

Seja ABCDEF (fig. 42.) &c. o polygono proposto; se do vertice de hum mesmo angulo A, tirarmos a todos os vertices dos angulos oppoſtos diagonaes AC, AD, AE, &c., he facil de vêr que o polygono ficará repartido em cinco triangulos, ſe elle tiver ſete lados; em ſeis triangulos, ſe elle tiver oito lados; e em geral em tantos triangulos quantos forem os lados do polygono menos dois; porque eſtes triangulos ſe podem conſiderar como tendo por vertice commum o ponto A, e por baſe os differentes lados do polygono, excepto os dois que formão o angulo A. Vê-ſe ao mèſmo tempo que a ſomma dos angulos de todos eſtes triangulos não differe da ſomma dos angulos do polygono; logo eſta ultima ſomma he igual a tantas vezes dois rectos quantos são os triangulos, quer dizer, quantas unidades ha no numero dos lados do polygono menos dois.

Corollario I. A ſomma dos angulos de hum quadrilatero he igual a dois angulos rectos multiplicados por 4 — 2, o que faz quatro angulos rectos. Logo, ſe todos os angulos do quadrilatero forem iguaes, cada hum delles ſerá recto; o que juſtifica a def. XVII., na qual ſuppozemos que os quatro angulos de hum quadrilatero são rectos no caſo do rectangulo e do quadrado.

II. A ſomma dos angulos de hum pentagono he 2 angulos rectos, multiplicados por 5 — 2, o que faz 6 angulos rectos. Logo quando hum pentagono for *equiangulo*, quer dizer, quando os ſeus angulos forem iguaes huns aos outros, cada hum delles ſerá igual ao quinto de ſeis angulos rectos ou aos $\frac{6}{5}$ de hum angulo recto.

III. A ſomma dos angulos de hum hexagono he 2 × (6 — 2) ou 8 angulos rectos; logo no hexagono equiangulo, cada angulo he o ſexto de 8 angulos rectos ou os $\frac{4}{3}$ de hum angulo recto; e aſſim em diante.

Scholio. Se quizessemos applicar esta proposição a hum polygono que tivesse hum ou mais angulos *reintrantes*, deveriamos considerar cada angulo reintrante como maior que dois angulos rectos. Mas para evitar todo o embaraço, aqui, e para o futuro, só consideraremos os polygonos de angulos *salientes*, que se podem por outro nome chamar polygonos *convexos*. Todo o polygono convexo he tal que huma linha recta, tirada como se quizer, não póde encontrar o contorno deste polygono em mais de dois pontos.

PROPOSIÇÃO XXII.

THEOREMA.

Se duas linhas rectas, AC, ED (fig. 36.) *forem perpendiculares a huma terceira* AE, *estas duas linhas serão parallelas, quer dizer, que se não poderão encontrar a qualquer distancia que se prolonguem.*

Porque, se ellas se encontrassem em hum ponto O, haveria duas perpendiculares OA, OE, abaixadas do mesmo ponto O sobre huma mesma linha AE, o que he impossivel (pr. 15).

PROPOSIÇÃO XXIII.

THEOREMA.

Se duas linhas rectas, AC, BD (fig. 36.) *fizerem com huma terceira* AB *dous angulos internos* CAB, ABD, *cuja somma seja igual a dous angulos rectos, as linhas* AC, BD *serão parallelas.*

Se os angulos CAB, ABD fossem iguaes entre si, serião rectos ambos, e estariamos no caso da proposição antecedente; supponhamos por tanto que estes dois angulos sejão desiguaes, e pelo ponto A abaixemos AE perpendicular sobre BD.

No triangulo rectangulo ABE, a somma dos dois angulos agudos ABE, BAE he igual a hum angulo recto (pr. 20. cor. 4.); ſubtrahindo eſta ſomma da ſomma dos angulos ABE, BAC, que, por hypotheſe, he igual a dois angulos rectos, ficará o angulo CAE igual a hum angulo recto. Logo as duas linhas AC, BD são perpendiculares a huma meſma linha AE; logo são parallelas (pr. 22.).

PROPOSIÇÃO XXIV.

THEOREMA.

Se duas linhas rectas AF, BD (fig. 36. a) *fizerem com huma terceira* AB *dois angulos internos* FAB, ABD, *cuja ſomma ſeja menor ou maior que dois angulos rectos, digo que as duas linhas* AF, BD, *prolongadas ſufficientemente, ſe hão de encontrar.*

Tire-ſe AC de maneira que a ſomma dos angulos CAB + ABD ſeja igual a dois angulos rectos; podem acontecer dois caſos, ſegundo for o angulo BAF menor ou maior que BAC, quer dizer, ſegundo for a ſomma dada FAB + ABD menor ou maior que dois angulos rectos.

Seja 1.° o angulo BAF $<$ BAC; tire-ſe pelo ponto A huma obliqua qualquer AM que encontre BD em M, o angulo AMB ſerá igual a MAC, porque ajuntando a huma e outra parte huma meſma quantidade MAB + ABM, as duas ſommas são iguaes cada huma a dois angulos rectos. Tome-ſe agora MN = AM, e ajunte-ſe AN, o angulo AMB externo ao triangulo MAN, he igual á ſomma dos dois internos oppoſtos MAN, ANM (pr. 20.); eſtes são iguaes entre ſi, porque AM = MN; logo o angulo AMB, ou o seu igual MAC, he duplo de MAN; logo a linha AN divide em duas partes iguaes o angulo CAM, e encontra a linha BD em hum ponto N ſituado em diſtancia MN = AM. Da meſma demonſtração ſe ſegue que, ſe tomarmos ſemelhantemente ſobre a linha BD, NP = AN, teremos o ponto P, onde ha de hir ter a linha recta, que divide em duas partes iguaes o angulo CAN. Logo desta maneira se póde tomar successivamente a metade, o quarto, o oitavo, o decimo-sexto, &c. do angulo CAM, e as linhas que effeituão estas divisões, encontrarão a linha BD em pontos cada vez mais distantes, porém faceis de determinar, porque teremos successivamente $MN = AM$, $NP = AN$, $PQ = AP$, &c. Até se póde advertir que cada distancia de hum ponto de intersecção ao ponto A, não he absolutamente dupla da distancia da intersecção precedente; porque AN, por exemplo, he menor que $AM + MN$, ou que o duplo de AM, igualmente $AP < 2\,AN$, $AQ < 2\,AP$, e assim em diante. Mas continuando a subdividir o angulo CAM em razão dupla, chegaremos facilmente a hum angulo CAZ menor que o angulo dado CAF, e ainda será verdade que AZ prolongada encontra BD em hum ponto determinado; logo com mais forte razão, a linha AF, situada no angulo BAZ, encontrará BD. Logo, se os dois angulos BAF, ABD juntos fizerem huma somma menor que dois angulos rectos, as linhas AF, BD, prolongadas sufficientemente se hão de encontrar.

Supponhamos 2.° que os dois angulos FAB, ABD (fig. 36. b.) fação huma somma maior que dois angulos rectos; se prolongarmos FA para G, e BD para E, a somma dos quatro angulos FAB, BAG, ABD, ABE, será igual a quatro angulos rectos (pr. 2); e se tirarmos della $FAB + ABD$ maior que dois angulos rectos, o resto $BAG + ABE$ será menor que dois angulos rectos. Logo, seguindo o primeiro caso, as linhas AG, BE, prolongadas sufficientemente, se devem encontrar.

Corollario. Por hum ponto dado A não se póde tirar mais de huma parallela á linha dada BD; porque só a linha AC he que faz a somma dos dois angulos $BAC + ABD$ igual a dois angulos rectos, e esta he a parallela pedida; qualquer outra linha AF faria a somma dos dois angulos $BAF + ABD$, menor ou maior que dois angulos rectos; logo ella encontraria a linha BD.

PROPOSIÇÃO XXV.

THEOREMA.

Se duas linhas parallelas AB, CD (fig. 37.) *forem encontradas por huma secante* EF, *a somma dos dois angulos internos* AGO, GOC, *será igual a dois angulos rectos.*

Porque, se ella fosse maior ou menor, as duas linhas AB, CD, se havião de encontrar de hum ou de outro lado, e não serião parallelas.

Corollario I. Se o angulo GOC he recto, AGO tambem ha de ser recto; logo *toda a linha perpendicular á huma das parallelas he perpendicular á outra.*

Corollario II. Como AGO + GOC he igual a dois angulos rectos, e GOD + GOC tambem he igual a dois angulos rectos, tirando de ambas as partes GOC, ficará o angulo AGO = GOD. Por consequencia os quatro angulos agudos EGB, AGO, GOD, COF são iguaes entre si, o mesmo acontece aos quatro angulos obtusos AGE, OGB, COG, DOF; e ao mesmo tempo, se ajuntarmos hum dos quatro angulos agudos a hum dos quatro obtusos, a somma fará sempre dois angulos rectos.

Scholio. Ordinariamente se dão nomes particulares a alguns destes angulos comparados dois a dois. Já chamámos aos angulos AGO, GOC, *internos da mesma parte*; os angulos BGO, GOD tem o mesmo nome. Os angulos AGO, GOD se chamão *alternos-internos*; ou simplesmente *alternos*; o mesmo he com os angulos BGO, GOC. Os angulos EGB, GOD, se chamão *internos-externos*, e em fim os angulos EGB, COF tomão o nome de *alternos-externos*. Por tanto podemos considerar como demonstradas as seguintes proposições.

I. Os angulos internos da mesma parte, valem em somma dois angulos rectos.

II. Os angulos alternos-externos são iguaes.

III. Os angulos internos-externos são iguaes.

IV. Os angulos alternos-internos são iguaes.

Reciprocamente, se forem iguaes os angulos notados em hum destes casos, poderemos concluir que as linhas a que elles se referem são parallelas. Seja, por exemplo, o angulo AGO = GOD; como GOC + GOD he igual a dois rectos, teremos tambem AGO + COG igual a dois rectos; logo (pr. 24) as linhas AG, CO são parallelas.

PROPOSIÇÃO XXVI.

THEOREMA.

Duas linhas AB, CD, (fig. 38.) *parallelas a huma terceira* EF, *são parallelas entre si.*

Tire-se a secante PQR perpendicular a EF. Como AB he parallela a EF, PR será perpendicular a AB (pr. 25. cor. 1.); do mesmo modo, como CD he parallela a EF, a secante PR será perpendicular a CD; logo AB e CD são perpendiculares á mesma linha PQ, logo são parallelas (pr. 20).

PROPOSIÇÃO XXVII.

THEOREMA.

Duas parallelas são em toda a parte igualmente distantes.

Entre as duas parallelas AC, BD, tirem-se, onde se quizer, as duas perpendiculares AB, CD (fig. 39.), digo que estas duas perpendiculares são iguaes.

As linhas AB, CD, perpendiculares a huma das parallelas, são ao mesmo tempo perpendiculares a outra (pr. 25); e se tirarmos EF perpendicular sobre o meio de AC, EF tambem será perpendicular a BD, de maneira que todos os angulos em A, E, C, B, F, D ſeráo rectos. Iſto poſto, eu digo que o quadrilatero AEFB póde ſer poſto exactamente ſobre o quadrilatero CEFD; porque o lado EF he commum, o angulo AEF he igual a FEC, e o lado EA he igual a EC, por conſtrucçáo; logo o ponto A cahirá em C. Mas o angulo EAB he igual a ECD; logo AB e CD eſtaráo na meſma direcçáo. De mais, o angulo EFB = EFD; logo FB e FD eſtaráo tambem na meſma direcçáo; logo os dois quadrilateros coincidiráo inteiramente hum com o outro, e teremos por conſequencia, AB = CD.

PROPOSIÇÁO XXVIII.

THEOREMA.

Se dois angulos BAC, DEF (fig. 40.) *tiverem os lados parallelos cada hum a cada hum, e dirigidos no meſmo ſentido, eſtes dois angulos ſeráo iguaes.*

Prolongue-ſe, ſe for neceſſario, DE até ao encontro de AC em G; o angulo DEF he igual a DGC; porque EF he parallela a GC (pr. 25.); o angulo DGC he igual a BAC, porque DG he parallela a AB, logo o angulo DEF he igual a BAC.

Scholio. Eſta propoſiçáo tem a reſtricçáo de que EF ſeja dirigido no meſmo ſentido que AC; e ED no meſmo ſentido que AB; porque, ſe prolongarmos FE para H, o angulo DEH terá os ſeus lados parallelos aos do angulo BAC; mas eſtes angulos náo ſeráo iguaes, porque EH e AC ſáo dirigidos em ſentidos contrarios: neſte caſo, o angulo DEH, e o angulo BAC fariáo em ſomma dois angulos rectos.

PROPOSIÇÁO XXIX.

THEOREMA.

Os lados oppoſtos de hum parallelogrammo ſáo aigus ebem como os angulos oppoſtos.

Tire-se a diagonal BD (fig. 44.), os dois triangulos ADB, DBC, tem o lado commum BD; de mais, por causa das parallelas AD, BC, o angulo ADB = DBC (pr. 25.), e por causa das parallelas AB, CD, o angulo ABD = BDC. Logo os dois triangulos ADB, DBC, são iguaes (pr. 7.); logo o lado AB, opposto ao angulo ADB, he igual ao lado DC, opposto ao angulo igual DBC, e igualmente, o terceiro lado AD he igual ao terceiro BC; logo os lados oppostos do parallelogrammo são iguaes.

Em segundo lugar, da igualdade dos mesmos triangulos se segue que o angulo A he igual ao angulo C, e tambem que o angulo ADC, composto dos dois angulos ADB, BDC, he igual ao angulo ABC, composto dos dois angulos DBC, ABD; logo os angulos oppostos de hum parallelogrammo são iguaes.

Corollario. Logo duas parallelas AB, CD, comprehendidas entre outras duas parallelas AD, BC, são iguaes.

PROPOSIÇÃO XXX.

THEOREMA.

Se em hum quadrilatero ABCD (fig. 44.) *os lados oppostos forem iguaes, de maneira que seja* AB = CD, e AD = BC, *os lados iguaes serão parallelos, e a figura será hum parallelogrammo.*

Porque, tirando a diagonal BD, os dois triangulos ABD, BDC, terão os tres lados iguaes, cada hum a cada hum, logo serão iguaes; logo o angulo ADB, opposto ao lado AB, he igual ao angulo DBC, opposto ao lado CD; logo (pr. 25.) o lado AD he parallelo a BC. Por semelhante razão, AB, he parallelo a CD; logo o quadrilatero ABCD he hum parallelogrammo.

PROPOSIÇÃO XXXI.

THEOREMA.

Se os dois lados oppostos AB, CD, *de hum quadrilatero forem iguaes e parallelos, os outros dois lados, serão tambem iguaes e parallelos, e a figura* ABCD *será hum parallelogrammo.*

Tire-se a diagonal BD; como AB he parallela a CD, os angulos alternos ABD, BDC, são iguaes (pr. 25.), além disto o lado AB = DC, o lado DB he commum; logo o triangulo ABD he igual ao triangulo DBC (pr. 6.); logo o lado AD = BC, o angulo ADB = DBC, e por consequencia AD he parallela a BC; logo a figura ABCD he hum parallelogrammo.

PROPOSIÇÃO XXXII.

THEOREMA.

As duas diagonaes AC, DB (fig. 45.) *de hum parallelogrammo se cortão mutuamente em duas partes iguaes no ponto* O.

Porque, comparando o triangulo ADO com o triangulo COB, se acha o lado AD = CB, o angulo ADO = CBO (pr. 25.), e o angulo DAO = OCB; logo estes dois triangulos são iguaes (pr. 7.); logo AO, lado opposto ao angulo ADO, he igual a OC, lado opposto ao angulo OBC; logo tambem DO = OB.

Scholio. No caso do losango, os lados AB, BC sendo iguaes, os triangulos AOB, OBC, tem os trez lados iguaes, cada hum a cada hum, e por consequencia são iguaes; donde se segue que o angulo AOB = BOC, e assim as duas diagonaes de hum losango se cortão mutuamente em angulos rectos.

LIVRO II.

O CIRCULO, E A MEDIDA DOS ANGULOS.

Definições.

I. *Circumferencia de circulo* he huma linha curva (fig. 46.) que tem todos os ſeus pontos igualmente diſtantes de hum ponto interior que ſe chama *centro*.

Circulo he o eſpaço fechado por eſta curva.

„ NB. Muitas vezes no diſcurſo ſe confunde o circulo com a circumferencia; mas ſerá ſempre facil reſtabelecer a exactidão das expreſsões a quem ſe lembrar que o circulo he huma ſuperficie que tem comprimento e largura, e a circumferencia he huma linha. „

II. Toda a linha recta CA, CE, CD, &c. tirada do centro á circumferencia, ſe chama *raio* ou *ſemi-diametro*. Toda a linha, como AB, que paſſa pelo centro, e termina de ambas as partes na circumferencia, ſe chama *diametro*.

Em virtude da definição do circulo todos os raios ſão iguaes; todos os diametros ſão iguaes e duplos do raio.

III. Chama-ſe *arco* huma porção de circumferencia como FHG.

Corda ou *ſubtendente* do arco he a linha recta FG que une os ſeus dois extremos.

IV. *Segmento* he a ſuperficie ou porção do circulo comprehendida entre o arco e a corda.

„ NB. A' meſma corda FG correſpondem ſempre dois arcos FHG, FEG, e por conſequencia tambem dois segmentos; mas sempre se falla do mais pequeno, salvo quando se adverte o contrario. ,,

V. *Sector* he a parte do circulo comprehendida entre hum arco DE, e os dois raios CD, CE, tirados aos extremos deste arco.

VI. Chama-se *linha inscrita no circulo* aquella que tem os extremos na circumferencia, como AB (fig. 47.):

Angulo inscrito aquelle, como BAC, que tem o vertice na circumferencia, e he formado por duas cordas:

Triangulo inscrito aquelle, como ABC, cujos tres angulos tem os seus vertices na circumferencia:

E em geral *figura inscrita* aquella cujos angulos tem todos os seus vertices na circumferencia: ao mesmo tempo se diz que o circulo está *circunscrito* a esta figura.

VII. Chama-se *secante* huma linha que encontra a circumferencia em dois pontos, como AB (fig. 48.).

VIII. *Tangente* he huma linha que só tem hum ponto commum com a circumferencia, como CD.

O ponto commum M se chama *ponto de contacto*.

IX. Igualmente duas circumferencias são *tangentes* huma a outra quando tem só hum ponto commum.

X. Hum polygono he *circunscrito a hum circulo* quando todos os seus lados são tangentes á circumferencia; no mesmo caso se diz que o circulo está *inscrito* no polygono.

PROPOSIÇÃO I.

THEOREMA.

Todo o diametro AB (fig. 49.) *divide o circulo e a sua circumferencia em duas partes iguaes.*

Porque, se aplicarmos a figura AEB sobre AFB, conservando a base commum AB, a linha curva AEB deve cahir exactamente sobre a linha curva AFB, pois, a não ser assim, haveria em huma, ou em outra pontos desigualmente distantes do centro, o que he contra a definição do circulo.

PROPOSIÇÃO II.

THEOREMA.

Toda a corda he menor que o diametro.

Porque se aos extremos da corda AD tirarmos os raios AC, CD, teremos $AD < AC + CD$, ou $AD < AB$.

Corollario. Logo a maior linha recta que se pódo inscrever em hum circulo he igual ao seu diametro.

PROPOSIÇÃO III.

THEOREMA.

Huma linha recta não póde encontrar huma circumferencia em mais de dois pontos.

Porque, se a encontrasse em tres, estes tres pontos estarião igualmente distantes do centro; logo haveria tres rectas iguaes tiradas de hum mesmo ponto sobre a mesma linha recta, o que he impossivel (pr. 16. liv. 1).

PROPOSIÇÃO IV.

THEOREMA.

No mesmo circulo ou em circulos iguaes, arcos iguaes são subtendidos por cordas iguaes, e reciprocamente cordas iguaes subtendem arcos iguaes.

Sendo o raio AC (fig. 50.) igual ao raio EO, e o arco AMD igual ao arco ENG, digo que a corda AD será igual á corda EG.

Porque, sendo o diametro AB igual ao diametro EF o semi-circulo AMDB poderá aplicar-se exactamente sobre o semi-circulo ENGF, e a linha curva AMDB coincidirá inteiramente com a linha curva ENGF. Mas suppomos a porção AMD igual á porção ENG; logo o ponto D cahirá sobre o ponto G; logo a corda AD he igual á corda EG.

Reciprocamente, suppondo sempre o raio AC = EO, se a corda AD = EG, digo que o arco AMD será igual ao arco ENG.

Porque, tirando os raios CD, OG, os dois triangulos ACD, EOG, terão os tres lados iguaes cada hum a cada hum, a saber, AC = EO, CD = OG, e AD = EG, logo estes triangulos serão iguaes (11. 1.); logo o angulo ACD = EOG. Mas, pondo o semicirculo ADB sobre o seu igual EGF, como o angulo ACD = EOG, he claro que o raio CD cahirá sobre o raio OG, e o ponto D sobre o ponto G; logo o arco AMD he igual ao arco ENG.

PROPOSIÇÃO V.

THEOREMA.

No mesmo circulo ou em circulos iguaes, o maior arco he subtendido pela maior corda, e reciprocamente (com tanto que os arcos de que se trata sejão menores que a semi-circumferencia).

Porque, seja o arco AH maior que AD (fig. 50.), e sejão tiradas as cordas AD, AH, e os raios CD, CH; os dois lados AC, CH, do triangulo ACH são iguaes aos dois lados AC, CD do triangulo ACD: o angulo ACH he maior que ACD; logo o terceiro lado AH he maior que o terceiro AD (10. 1.); logo a corda que subtende o maior arco he a maior.

Reciprocamente, se a corda AH se suppõe maior que AD, concluir-se-ha dos mesmos triangulos que o angulo ACH he maior que ACD, e que assim o arco AH he maior que AD.

Scholio. Nós suppomos que os arcos de que se trata são menores que a ſemi-circumferencia. Se foſſem maiores, teria lugar a propriedade contraria: augmentando o arco, diminuiria a corda, e reciprocamente. Aſſim o arco AKBD ſendo maior que AKBH, a corda AD do primeiro he menor que a corda AH do ſegundo.

PROPOSIÇÃO VI.

THEOREMA.

O raio CG, *perpendicular a huma corda* AB, *divide eſta corda, e o arco ſubtendido* AGB, *cada hum em duas partes iguaes.*

Tirem-ſe os raios AC, CB; eſtes raios são, ácerca da perpendicular CD, duas obliquas iguaes; logo ellas ſe affaſtão igualmente da perpendicular (16. 1.) logo AD = DB.

Em ſegundo lugar, como AD = DB, GC he huma perpendicular levantada ao meio de AB; logo (17. 1.) cada ponto deſta perpendicular deve eſtar igualmente diſtante dos dois extremos A e B. O ponto G he hum deſtes pontos; logo a diſtancia AG = GB. Mas, ſe a corda AG for igual á corda GB, o arco AG ſerá igual ao arco GB (pr. 4.); logo o raio CG, perpendicular á corda AB, divide o arco ſubtendido por eſta corda em duas partes iguaes no ponto G.

Scholio. O centro C, o meio D da corda AB, e o meio G do arco ſubtendido por eſta corda, são tres pontos ſituados na meſma linha perpendicular á corda. Ora baſtão dois pontos para determinar a poſição de huma linha; logo toda a linha que paſſa por dois dos pontos mencionados, paſſará neceſſariamente pelo terceiro, e ſerá perpendicular á corda.

Tambem ſe ſegue que *a perpendicular levantada ao meio da corda paſſa pelo centro, e pelo meio do arco ſubtendido por eſta corda.*

Porque eſta perpendicular he a mesma que se abaixaria do centro ſobre a meſma corda, porque ellas paſsão ambas pelo meio de corda.

PROPOSIÇÃO VII.

THEOREMA.

Por tres pontos A, B, C (fig. 53.), *não em linha recta, se póde sempre fazer passar huma circumferencia, mas não se póde fazer passar mais de huma.*

Ajuntem-se AB, BC, e dividão-se estas duas linhas em duas partes iguaes pelas perpendiculares DE, FG; digo primeiro que estas perpendiculares se hão de encontrar em hum ponto O.

Porque as linhas DE, FG, se cortaráõ necessariamente, se não forem parallelas. Ora supponhamos que são parallelas, a linha AB perpendicular a DE seria perpendicular a FG (25. 1.), e o angulo K seria recto; mas BK, prolongamento de BD, he differente de BF, porque os tres pontos A, B, C, não estão em linha recta; logo haveria duas perpendiculares BF, BK, abaixadas de hum mesmo ponto sobre a mesma linha, o que he impossivel; logo as perpendiculares DE, FG se cortaráõ sempre em hum ponto O.

Agora o ponto O, como pertencente á perpendicular DE, está em igual distancia dos dois pontos A e B (17. 1.); o mesmo ponto O, como pertencente á perpendicular FG, está em igual distancia dos dois pontos B e C; logo as tres distancias OA, OB, OC, são iguaes; logo a circumferencia descrita do centro O, e com o raio OB passará pelos tres pontos dados A, B, C.

Isto prova que sempre se póde fazer passar huma circumferencia por tres pontos dados, não em linha recta; digo mais que não se póde fazer passar mais de huma.

Porque, se houvesse outra circumferencia que passasse pelos tres pontos dados A, B, C, o seu centro não poderia estar fóra da linha DE (17. 1.), porque então estaria desigualmente distante de A e de B; não poderia tambem eſtar fóra da linha FG por ſemelhanlhante razão ; logo eſtaria ao meſmo tempo nas duas linhas DE , FG. Ora duas linhas rectas não ſe podem cortar em mais de hum ponto ; logo ſó huma circumferencia póde paſſar por tres pontos dados.

Corollario. Duas circumferencias não ſe podem encontrar em mais de dois pontos ; porque , ſe tiveſſem tres pontos communs , terião o meſmo centro , e farião huma ſó e a meſma circumferencia.

PROPOSIÇÃO VIII.

THEOREMA.

Duas cordas iguaes são igualmente diſtantes do centro , e de duas cordas deſiguaes , a menor he a mais diſtante do centro.

I. Seja a corda AB = DE (fig. 53.) : dividão-ſe eſtas cordas em duas igualmente pelas perpendiculares CF , CG , e tirem-ſe os raios CA , CD.

Os triangulos rectangulos CAF , DCG , tem as hypotenuſas CA , CD iguaes ; de mais o lado AF , metade de AB , he igual ao lado DG , metade de DE ; logo eſtes triangulos são iguaes (18. 1.) , e o terceiro lado CF he igual ao terceiro CG ; logo 1.º as duas cordas iguaes AB , DE , eſtão igualmente diſtantes do centro.

II. Seja a corda AH maior que DE , o arco AKH ſerá maior que o arco DME (pr. 5.) ; ſobre o arco AKH tome-ſe a parte ANB = DME , tire-ſe a corda AB , e abaixe-ſe CF , perpendicular ſobre eſta corda , e CI perpendicular ſobre AH ; he claro que CF he maior que CO , e CO maior que CI (16. 1.) ; logo com mais forte razão CF > CI. Mas CF = CG , porque as cordas AB , DE são iguaes ; logo temos CG > CI ; logo de duas cordas deſiguaes a menor he a mais diſtante do centro.

PROPOSIÇÃO IX.

THEOREMA.

A perpendicular BD, *tirada ao extremo do raio* CA (fig. 54.) *he tangente á circumferencia.*

Porque toda a obliqua CE he mais comprida que a perpendicular CA (16. 1.); logo o ponto E eſtá fóra do circulo, logo a linha BD tem ſó o ponto A commum com a circumferencia; logo BD he tangente (def. 8.).

Scholio. Não ſe póde tirar por hum ponto dado A mais de huma tangente AD á circumferencia; porque, ſe ſe podeſſe tirar outra, eſta não ſeria já perpendicular ao raio CA; logo ácerca deſta nova tangente, o raio CA ſeria huma obliqua, e a perpendicular, abaixada do centro ſobre eſta tangente, ſeria mais curta que CA; logo eſta pertendida tangente entraria no circulo, e ſeria huma ſecante.

PROPOSIÇÃO X.

THEOREMA.

Duas parallelas AB, DE (fig. 55.) *interceptão ſobre a circumferencia arcos iguaes* MN, PQ.

Podem acontecer tres caſos.

I. Se as duas parallelas forem ſecantes, tire-ſe o raio CH perpendicular á corda MP, elle ſerá ao meſmo tempo perpendicular á ſua parallela NQ (25. 1.); logo o ponto H ſerá ao meſmo tempo meio do arco MHP, e do arco NHQ (6.); logo teremos o arco MH = HP, e o arco NH = HQ; daqui reſulta MH — NH = HP — HQ, quer dizer MN = PQ.

II. Se das duas parallelas AB, DE (fig. 56.) huma for ſecante, e outra tangente, tire-ſe ao ponto de contacto H o raio CH; eſte raio ſerá perpendicular á tangente DE (9.), e tambem á ſua parallela MP. Mas como CH he perpendicular á corda MP, o ponto H he meio do arco MHP; logo os arcos MH, HP, comprehendidos entre as parallelas AB, DE, são iguaes.

III. Finalmente, ſe as duas parallelas DE, IL, forem tangentes, huma em H, outra em K, tire-ſe a ſecante parallela AB, teremos, pelo que fica demonſtrado, MH = HP e MK = KP; logo o arco inteiro HMK = HPK, e de mais he claro que cada hum deſtes arcos he huma ſemi-circumferencia.

PROPOSIÇÃO XI.

THEOREMA.

Se duas circumferencias ſe cortarem em dois pontos, a linha que paſſar pelos ſeus centros, ſerá perpendicular á corda que une os pontos da interſecção, e a dividirá em duas partes iguaes.

Porque, a linha AB, que ajunta os pontos de interſecção, he huma corda commum aos dois circulos (fig. 57, e 58.). Ora, ſe ao meio deſta corda levantarmos huma perpendicular, ella deve paſſar por cada hum dos dois centros C e D (6.). Mas por dois pontos dados não ſe póde tirar mais de huma linha recta; logo a linha recta, que paſſar pelos centros, ſerá perpendicular ao meio da corda commum.

PROPOSIÇÃO XII.

THEOREMA.

Se a diſtancia dos dois centros for mais curta que a ſomma dos raios, e ſe ao meſmo tempo o raio maior for menor que a ſomma do menor e da diſtancia dos centros, os dois circulos ſe cortarão.

Porque, para ter lugar a interſecção, he neceſſario que o triangulo CAD (fig. 57, e 58.) ſeja poſſivel. Logo não ſómente deve ſer $CD < AC + AD$

(fig. 57.), mas tambem o raio maior AD deve ser $<$ AC + CD (fig. 58.). Ora todas as vezes que se poder construir o triangulo CAD, he claro que as circumferencias descritas dos centros C e D, se cortaráõ em A e B.

PROPOSIÇÃO XIII.

THEOREMA.

Se a distancia CD (fig. 59.) *dos centros de dois circulos for igual á somma dos seus raios* CA, AD, *estes dois circulos se tocarão exteriormente.*

He claro que terão o ponto A commum; mas terão só este ponto; porque, para terem dois pontos communs, deveria a distancia dos centros ser menor que a somma dos raios.

PROPOSIÇÃO XIV.

THEOREMA.

Se a distancia CD (fig. 60.) *dos centros de dois circulos for igual á differença dos seus raios* CA, AD, *estes circulos se tocarão exteriormente.*

Primeiramente he claro que elles tem o ponto A commum: mas não podem ter outro; porque, para isso, o raio maior AD deveria ser menor que a somma do raio AC e da distancia dos centros CD (12.), o que não tem lugar.

Corollario. Logo, se dois circulos se tocão, quer interiormente, quer exteriormente, os centros e o ponto de contacto ficão na mesma recta.

Scholio. Todos os circulos que tem os seus centros sobre a recta CD (fig. 59, e 60.), e que passão pelo ponto A, são tangentes huns aos outros; só tem commum entre si o ponto A. E se pelo ponto A tirarmos AE perpendicular a CD, a recta AE será huma tangente commum a todos estes circulos.

PROPOSIÇÃO XV.

THEOREMA.

No mesmo circulo ou em circulos iguaes, os angulos iguaes ACB, DCE (fig. 61.), *que tem o vertice no centro, interceptão sobre a circumferencia arcos iguaes* AB, DE.

Reciprocamente, se os arcos AB, DE, *forem iguaes, os angulos* ABC, DCE *serão tambem iguaes.*

Porque, 1.° se o angulo ACB for igual ao angulo DCE, estes dois angulos poderão pôr-se hum sobre o outro; e como os seus lados são iguaes, he claro que o ponto A ha-de cahir em D, e o ponto B em E. Mas então o arco AB deve tambem cahir sobre o arco DE; porque, se os dois arcos não se confundissem em hum só, haveria em hum ou em outro pontos desigualmente distantes do centro, o que he impossivel; logo o arco AB = DE.

2.° Se suppozermos AB = DE, digo que o angulo ACB será igual a DCE; porque se estes angulos não forem iguaes, seja ACB o maior, e tomemos ACI = DCE; teremos, pelo que fica demonstrado, AI = DE; mas, por hypothese, o arco AB = DE; logo seria AI = AB, ou a parte igual ao todo, o que he impossivel; logo o angulo ACB = DCE.

PROPOSIÇÃO XVI.

THEOREMA.

No mesmo circulo ou em circulos iguaes, se dois angulos no centro ACB, DCE (fig. 62.) *forem entre* *ſi como dois numeros inteiros, os arcos interceptos* AB, DE, *eſtarão entre ſi como os meſmos numeros, e teremos eſta proporção*:

Angulo ACB : angulo DCE : : arco AB : arco DE.

Supponhamos, por exemplo, que os angulos ACB, DCE, eſtejão entre si como 7 para 4; ou, que vem a ſer o meſmo, ſupponhámos que o angulo M, que ha-de ſervir de commum medida, ſe contenha ſete vezes no angulo ACB, e quatro no angulo DCE. Os angulos parciaes AC*m*, *m*C*n*, *n*C*p*, &c. DC*x*, *x*C*y*, &c. ſendo iguaes entre si, os arcos parciaes A*m*, *mn*, *np*, &c. D*x*, *xy*, &c. ſerão tambem iguaes entre ſi (15.); logo o arco inteiro AB eſtará para o arco inteiro DE, como 7 eſtá para 4. Ora he evidente que o meſmo raciocinio teria lugar, quando em vez de 7 e 4 tiveſſemos outros numeros quaeſquer; logo ſe a razão dos angulos ACB, DCE, poder ſer expreſſa em numeros inteiros, os arcos AB, DE, eſtarão entre ſi como os angulos ACB, DCE.

Scholio. Reciprocamente, ſe os arcos AB, DE, eſtiveſſem entre ſi como dois numeros inteiros, os angulos ACB, DCE, eſtarião entre ſi como os meſmos numeros, e teriamos ſempre ACB : DCE : : AB : DE. Porque, ſendo iguaes os arcos parciaes A*m*, *mn*, &c. D*x*, *xy*, &c. os angulos parciaes AC*m*, *m*C*n*, &c., DC*x*, *x*C*y*, &c. são tambem iguaes.

PROPOSIÇÃO XVII.

THEOREMA.

Qualquer que ſeja a razão dos dois angulos ACB, ACD (fig. 63.), *eſtes dois angulos eſtarão ſempre entre ſi, como os arcos* AB, AD, *interceptos entre os ſeus lados e deſcritos dos ſeus vertices como centros com raios iguaes.*

Supponhamos o menor angulo poſto no maior:

ſe não for verdadeira a proporção enunciada, o angulo ACB ſerá para o angulo ACD, como o arco AB eſtá para hum arco maior ou menor que AD. Supponhamos eſte arco maior, e repreſentemo-lo por AO, teremos aſſim:

Angulo ACB : angulo ACD : : arco AB : arco AO.

Imaginemos agora que o arco AB eſteja dividido em partes iguaes, cada huma das quaes ſeja menor que DO, haverá ao menos hum ponto de divisão entre D e O: ſeja I eſte ponto, e ajuntemos CI; os arcos AB, AI eſtarão entre ſi como dois numeros inteiros, e teremos, em virtude do theorema precedente,

Angulo ACB : angulo ACI : : arco AB : arco AI.

Cotejemos eſſas duas proporções, e notando que os antecedentes são os meſmos, concluiremos que os conſequentes são proporcionaes, e aſſim,

Angulo ACD : angulo ACI : : arco AO : arco AI.

Mas o arco AO he maior que o arco AI, logo, para que a proporção ſubſiſtiſſe, ſeria neceſſario que o angulo ACD foſſe maior que o angulo ACI; ora ao contrario he menor; logo he impoſſivel que o angulo ACB ſeja para o angulo ACD, como o arco AB eſtá para hum arco maior que AD.

Demonſtrar-ſe-hia por hum raciocinio inteiramente ſemelhante, que o quarto termo da proporção não póde ſer menor que AD; logo he exactamente AD; logo temos a proporção:

Angulo ACB : angulo ACD : : arco AB : arco AD.

Corollario. Como o angulo no centro do circulo, e o arco intercepto entre os ſeus lados tem huma tal ligação que, quando hum augmenta ou diminue em qualquer razão, o outro augmenta ou diminue na meſma razão, podemos eſtabelecer huma deſtas grandezas para medida da outra. Aſſim, daqui em diante tomaremos o arco AB por medida do angulo ACB. Cumpre sómente obſervar, na comparação dos angulos entre ſi, que os arcos que lhes ſervem de medida, devem ſer deſcritos com raios iguaes; porque iſto ſuppoem todas as propoſições precedentes.

Scholio I. Parece mais natural medir huma quantidade por outra quantidade da meſma eſpecie, e ſobre eſte principio conviria referir todos os angulos ao angulo recto. Aſſim, ſendo o angulo recto a unidade de medida, hum angulo agudo ſeria expreſſo por hum numero comprehendido entre o e 1, e hum angulo obtuſo por hum numero entre 1 e 2. Mas eſta maneira de exprimir os angulos não ſeria a mais commoda no uſo; achou-ſe muito mais ſimples medillos por arcos de circulo, pela facilidade de fazer arcos iguaes a arcos dados, e por muitas outras razões. Em fim, ſe a medida dos angulos pelos arcos de circulo he de alguma ſorte indirecta, nem por iſſo he menos facil alcançar por meio della a medida directa e abſoluta. Porque, ſe compararmos o arco que ſerve de medida à hum angulo com o quarto da circumferencia, teremos a razão do angulo dado para o angulo recto, que he a medida abſoluta.

Scholio II. Tudo que ſe demonſtrou nas tres propoſições precedentes, para comparação dos angulos com os arcos, tem lugar igualmente para comparar ſectores com arcos; porque os ſectores são iguaes quando os angulos o são, e em geral são proporcionaes aos angulos, logo *dois ſectores* ACB, ACD, *tomados no meſmo circulo ou em circulos iguaes, eſtão entre ſi, como os arcos* AB, AD, *baſes deſtes meſmos ſectores.*

Daqui ſe vê que os arcos de circulo que ſervem de medida aos angulos podem tambem ſervir de medida aos differentes ſectores do meſmo circulo ou de circulos iguaes.

PROPOSIÇÃO XVIII.

THEOREMA.

O angulo inſcrito BAD, (fig. 64.) *tem por medida a metade do arco* BD *comprehendido entre os ſeus lados.*

Supponhamos primeiro que o centro do circulo eſteja ſituado no angulo BAD, tire-ſe o diametro AE e os raios CB, CD. O angulo BCE, externo ao triangulo ABC, he igual á ſomma dos dois internos CAB, ABC (20. 1.): mas o triangulo BAC he iſoſceles, e o angulo CAB = ABC; logo o angulo BCE he duplo de BAC. O angulo BCE, como angulo central, tem por medida o arco BE; logo o angulo BAC tem por medida metade de BE. Pela meſma razão o angulo CAD terá por medida a metade de ED; logo BAC + CAD ou BAD terá por medida a metade de BE + ED ou a metade de BD.

Logo todo o angulo inſcrito tem por medida a metade do arco comprehendido entre ſeus lados.

Corollario I. Todos os angulos BAC, BDC, (fig. 66.) inſcritos no meſmo ſegmento ſão iguaes; porque tem por medida a metade do arco BOC.

II. Todo o angulo BAD (fig. 67.) inſcrito no ſemi-circulo he recto, porque tem por medida metade da ſemi-circumferencia BOD, ou o quarto da circumferencia.

Para demonſtrar a meſma couſa de outra maneira, tire-ſe o raio AC; o triangulo BAC he iſoſceles, aſſim o angulo BAC = ABC; o triangulo CAD tambem he iſoſceles; logo o angulo CAD = ADC; logo BAC + CAD, ou BAD = ABD + ADB; mas ſe os dois angulos B e D do triangulo ABD valem juntos o terceiro BAD, os tres angulos do triangulo valerão duas vezes o angulo BAD, mas elles valem dois rectos; logo o angulo BAD he recto.

III. Todo o angulo BAC (fig. 66.) inscrito em hum segmento maior que o semi-circulo he agudo; porque tem por medida a metade do arco BOC menor que a semi-circumferencia.

E todo o angulo BOC inscrito em hum segmento menor que o semi-circulo he obtuso; porque tem por medida a metade do arco BAC maior que a semi-circumferencia.

IV. Os angulos oppostos A e C de hum quadrilatero inscrito ABCD (fig. 68.) valem dois angulos rectos; porque o angulo BAD tem por medida a metade do arco BCD, o angulo BCD tem por medida a metade do arco BAD; logo os dois angulos BAD, BCD, em somma, tem por medida a metade da circumferencia; logo a sua somma equivale a dois angulos rectos.

PROPOSIÇÃO XIX.

THEOREMA.

O angulo BAC (fig. 69.) *formado por huma tangente e huma corda, tem por medida a metade do arco* ADC *comprehendido entre os seus lados.*

Ao ponto de contacto A tire-se o diametro AD; o angulo BAD he recto (9.), elle tem por medida a metade da semi-circumferencia AMD; o angulo DAC tem por medida a metade de DC; logo BAD + DAC ou BAC tem por medida a metade de AMD mais a metade de DC, ou a metade do arco inteiro ADC.

Demonstrar-se-hia do mesmo modo que o angulo CAE tem por medida a metade do arco AC comprehendido entre os seus lados.

Problemas relativos aos dois primeiros Livros.

PROBLEMA I.

Dividir a linha dada AB (fig. 70.) *em duas partes iguaes.*

Dos pontos A e B, como centros, com hum raio maior que a metade de AB, defcrevão-fe dois arcos que fe cortem em D; o ponto D ferá igualmente diftante dos pontos A e B. Marque-fe do mefmo modo acima ou abaixo da linha AB hum fegundo ponto E, igualmente diftante dos pontos A e B. Pelos dois pontos D, E, tire-fe a linha DE, digo que DE cortará a linha AB em duas partes iguaes no ponto C.

Porque, eftando os dois pontos D e E cada hum igualmente diftante dos extremos A e B, devem achar-fe ambos na perpendicular levantada fobre o meio de AB. Mas por dois pontos dados não póde paffar mais de huma linha recta; logo a linha DE ferá a perpendicular que corta a linha AB em duas partes iguaes no ponto C.

PROBLEMA II.

Por hum ponto A (fig. 71.), *dado fobre a linha* BC, *levantar huma perpendicular a efta linha.*

Tomem-fe os pontos B e C em igual diftancia de A, depois dos pontos B e C, como centros, e com hum raio maior que BA, defcrevão-fe dois arcos que fe cortem em D; tire-fe AD, que ferá a perpendicular pedida.

Porque, eftando o ponto D igualmente diftante de B e de C, pertence á perpendicular levantada fobre o meio de BC; logo AD he efta perpendicular.

Scholio. A meſma conſtrucçáo ſerve para fazer hum angulo recto BAD em hum ponto dado A, ſobre huma linha dada BC.

PROBLEMA III.

De hum ponto A, (fig. 72.) *dado fóra da recta* BD, *abaixar huma perpendicular ſobre eſta recta.*

Do ponto A, como centro, e com hum raio ſufficientemente grande, deſcreva-ſe hum arco que corte a linha BD nos dois pontos B e D. Marque-ſe depois hum ponto E igualmente diſtante dos pontos B e D, e tire-ſe AE que ſerá a perpendicular pedida.

Porque, os dois pontos A e E eſtáo cada hum igualmente diſtantes dos pontos B e D; logo a linha AE he perpendicular ao meio de BD.

PROBLEMA IV.

No ponto A *da linha* AB, (fig. 73.) *fazer hum angulo igual ao angulo dado* K.

Do vertice K, como centro, e com hum raio arbitrario, deſcreva-ſe o arco IL, terminado nos dois lados do angulo. Do ponto A, como centro, e com hum raio AB igual a KI, deſcreva-ſe o arco indefinido BO. Tome-ſe depois hum raio igual á corda LI; do ponto B, como centro, e com eſte raio, deſcreva-ſe hum arco que corte em D o arco indefinido BO; tire-ſe AD e o angulo DAB ſerá igual ao angulo dado K.

Porque, os dois arcos BD, LI, tem raios iguaes, e cordas iguaes; logo ſáo iguaes (4. 2.); logo o angulo BAD = IKL.

PROBLEMA V.

Dividir hum angulo ou hum arco dado em duas partes iguaes.

1.° Se houvermos de dividir o arco AB (fig. 74.) em duas partes iguaes, dos pontos A e B, como centros, e com o meſmo raio, deſcreveremos dois arcos que ſe cortem em D. Pelo ponto D e pelo centro C tiremos CD, que cortará o arco AB em duas partes iguaes no ponto E.

Porque, os dois pontos C e D eſtão cada hum igualmente diſtantes dos extremos A e B da corda AB; logo a linha CD he perpendicular ſobre o meio deſta corda; logo ella divide o arco AB em duas partes iguaes no ponto E (6. 2.).

2.° Se houvermos de dividir em duas partes iguaes o angulo ACB, começaremos por deſcrever do vertice C, como centro, o arco AB, e o reſto como diſſemos. He claro que a linha CD dividirá em duas partes iguaes o angulo ACB.

Scholio. Pela meſma conſtrucção ſe póde dividir cada metade AE, EB, em duas partes iguaes; aſſim, por ſubdivisões ſucceſſivas, dividiremos hum angulo ou hum arco dado em quatro partes iguaes, em oito, em dezeſeis, &c.

PROBLEMA VI.

Por hum ponto dado A (fig. 75.) *tirar huma linha parallela á linha dada* BC.

Do ponto A, como centro, e com hum raio ſufficientemente grande, deſcreva-ſe o arco indefinido EO; do ponto E, como centro, e com o meſmo raio, deſcreva-ſe o arco AF, tome-ſe ED = AF, e tire-ſe AD que ſerá a parallela pedida.

Porque, ajuntando AE, ſe vê que os angulos alternos AEF, EAD, ſão iguaes; logo as linhas AD, EF, ſão parallelas (25. 1.).

PROBLEMA VII.

Sendo dados dois angulos A e B *de hum triangulo, achar o terceiro.*

Tire-se a linha indefinida DEF (fig. 76.), faça-se no ponto E o angulo DEC = A, e o angulo CEH = B: o angulo restante HEF será o terceiro angulo pedido; porque estes tres angulos juntos valem dois angulos rectos.

PROBLEMA VIII.

Sendo dados dois lados B e C (fig. 77.) *de hum triangulo e o angulo* A *que elles comprehendem, descrever o triangulo.*

Havendo tirado a linha indefinida DE, faça-se no ponto D o angulo EDF igual ao angulo dado A; tome-se depois DG = B, DH = C, e tire-se GH; DGH será o triangulo pedido.

PROBLEMA IX.

Sendo dados hum lado e dois angulos de hum triangulo, descrever o triangulo.

Os dois angulos dados serão ou ambos adjacentes ao lado dado, ou hum adjacente, e o outro opposto. Neste ultimo caso procure-se o terceiro, e deste modo se terão os dois angulos adjacentes. Isto posto, tire-se a recta DE igual ao lado dado (fig. 78.), faça-se no ponto D o angulo EDF igual a hum dos angulos adjacentes, e no ponto E o angulo DEG, igual ao outro; as duas linhas DF, EG, se cortaráõ em H, e DEH será o triangulo pedido.

PROBLEMA X.

Sendo dados os tres lados A, B, C, (fig. 79.) *de hum triangulo, descrever o triangulo.*

Tire-ſe DE igual ao lado A; do ponto E como centro, e com hum raio igual ao ſegundo lado B, deſcreva-ſe hum arco; do ponto D, como centro, e com hum raio igual ao terceiro lado C, deſcreva-ſe outro arco, que corte o primeiro em F; tirem-ſe DF, EF, e DEF ſerá o triangulo pedido.

Scholio. Se hum dos lados foſſe maior que a ſomma dos outros dois, os arcos não ſe cortarião; mas a ſolução ſerá ſempre poſſivel, ſe a ſomma de dois lados, tomados como ſe quizer, for maior que o terceiro.

PROBLEMA XI.

Sendo dados dois lados A e B *de hum triangulo, com o angulo* C *oppoſto ao lado* B, *deſcrever o triangulo.*

Ha dois caſos: 1.° ſe o angulo C (fig. 80.) he recto ou obtuſo, faça-ſe o angulo EDF igual ao angulo C; tome-ſe DE = A, do ponto E, como centro, e com hum raio igual ao lado dado B, deſcreva-ſe hum arco que corte em F a linha DF; tire-ſe EF, e DEF ſerá o triangulo pedido.

Neſte primeiro caſo he neceſſario que o lado B ſeja maior que A, porque o angulo C ſendo recto ou obtuſo, he o maior dos angulos do triangulo; logo o lado oppoſto deve ſer o maior.

2.° Se o angulo C for agudo (fig. 81.), e B for maior que A, a meſma conſtrucção tem lugar, e DEF he o triangulo pedido.

Mas ſe, o angulo C ſendo agudo, o lado B (fig. 82.) for menor que A, então o arco deſcrito do centro E com o raio EF = B, cortará o lado DF em dois pontos F e G, ſituados do meſmo lado de D: logo haverá dois triangulos DEF, DEG, que ſatisfarão igualmente ao problema.

Scholio. O problema ſeria impoſſivel em todos os caſos, ſe o lado B foſſe menor que a perpendicular abaixada de E ſobre a linha DF.

PROBLEMA XII.

Sendo dados os lados adjacentes A e B (fig. 83.) *de hum parallelogrammo com o angulo* C *que elles comprehendem, deſcrever o parallelogrammo.*

Tire-ſe a linha DE = A, faça-ſe no ponto D o angulo FDE = C, tome-ſe DF = B; deſcreváo-ſe dois arcos hum do ponto F, como centro, e com hum raio FG = DE, outro do ponto E, como centro, e com hum raio EG = DF; no ponto G, em que eſtes dois arcos ſe cortáo, tirem ſe FG, EG; e DEGF ſerá o parallelogrammo pedido.

Porque, por conſtrucção, os lados oppoſtos são iguaes; logo a figura deſcrita he hum parallelogrammo (29. 1.), e eſte parallelogrammo he formado com os lados e o angulo dados.

Corollario. Se o angulo dado foſſe recto, a figura ſeria hum rectangulo; e ſe além diſſo os lados foſſem iguaes, ſeria hum quadrado.

PROBLEMA XIII.

Achar o centro de hum circulo ou de hum arco dado.

Tomem-ſe arbitrariamente na circumferencia ou no arco tres pontos A, B, C, (fig.84.) ajuntem-ſe, ou imaginem-ſe juntos AB e BC, dividáo-ſe eſtas duas linhas em duas partes iguaes pelas perpendiculares DE, FG; o ponto O em que eſtas perpendiculares ſe encontrarem, ſerá o centro procurado.

Scholio. A meſma conſtrucção ſerve para fazer paſſar huma circumferencia pelos tres pontos dados, A, B, C, e tambem para deſcrever huma circumferencia na qual fique inſcrito o triangulo dado ABC.

PROBLEMA XIV.

Por hum ponto dado tirar huma tangente a hum circulo dado.

Se o ponto dado A (fig. 85.) eſtiver na circumferencia, tire-ſe o raio CA, e conduza-ſe AD perpendicular a CA; AD ſerá a tangente pedida (9. 2.).

Se o ponto A (fig. 86.) eſtiver fóra do circulo, ajunte-ſe o ponto A e o centro pela linha recta CA; divida-ſe CA em duas partes iguaes no ponto O; do ponto O, como centro, e com o raio OC, deſcreva-ſe huma circumferencia que cortará a circumferencia dada no ponto B; tire-ſe AB, e eſta ſerá a tangente pedida.

Porque, tirando CB, o angulo CBA inſcrito no ſemi-circulo, he recto (18. 2.); logo AB he perpendicular ao extremo do raio CB; logo he tangente.

Scholio. Eſtando o ponto A fóra do circulo, vê-ſe que ha ſempre duas tangentes iguaes, AB, AD, que paſsão pelo ponto A: são iguaes, porque os triangulos rectangulos CBA, CDA, tem a hypotenuſa CA commum, e o lado CB = CD. Logo são iguaes (18. 1.); logo AD = AB, e ao meſmo tempo o angulo CAD = CAB.

PROBLEMA XV.

Inſcrever hum circulo em hum triangulo dado ABC (fig. 87.).

Dividão-ſe os angulos A e B em dois iguaes pelas linhas AO e BO, que ſe encontrarão em O; do ponto O abaixem-ſe as perpendiculares OD, OE, OF, ſobre os tres lados do triangulo; digo que eſtas perpendiculares ſerão iguaes entre ſi; porque, por construcção, o angulo DAO $=$ OAF, o angulo recto ADO $=$ AFO; logo o terceiro angulo ACD he igual ao terceiro AOF. Além disto, o lado AO he commum aos dois triangulos AOD, AOF, e os angulos adjacentes ao lado igual são iguaes; logo DO $=$ OF. Provar-se-ha do mesmo modo que os dois triangulos EOD, BOE, são iguaes; logo OD $=$ OE; logo as tres perpendiculares OD, OE, OF, são iguaes entre si.

Agora, se do ponto O, como centro, e com o raio OD, descrevermos huma circumferencia, he claro que ella ficará inscrita no triangulo ABC; porque o lado AB, perpendicular ao extremo do raio OD, he tangente; o mesmo acontece aos lados BC, AC.

Scholio. As tres linhas que dividem igualmente em dois os tres angulos, concorrem em hum mesmo ponto.

PROBLEMA XVI.

Sobre huma recta dada AB (fig. 88. e 89.), *descrever hum segmento* capaz *do angulo dado* C, *quer dizer, hum segmento tal que todos os angulos nelle inscritos sejão iguaes ao angulo dado* C.

Prolongue-se AB para D, faça-se no ponto B o angulo DBE $=$ C, tire-se BO perpendicular a BE, e GO perpendicular ao meio de AB; do ponto de encontro O, como centro, e com o raio OB, descreva-se hum circulo, o segmento pedido será AMB.

Porque, como BF he perpendicular ao extremo do raio OB, BF he tangente, e o angulo ABF tem por medida metade do arco AKB (19. 2.); demais, o angulo AMB, como angulo inscrito, tem tambem por medida metade do arco AKB; logo o angulo AMB $=$ ABF $=$ EBD $=$ C; logo todos os angulos inscritos no segmento AMB são iguaes ao angulo dado C.

Scholio. Se o angulo dado fosse recto, o segmento buscado seria o semi-circulo descrito sobre o diametro AB.

PROBLEMA XVII.

Achar a razão numerica de duas linhas rectas dadas AB, CD, (fig. 90.) *se estas linhas tiverem entre si medida commum.*

Leve-se a menor CD sobre a maior AB tantas vezes quantas nella se contiver; por exemplo duas vezes com o resto BE.

Leve-se o resto BE sobre a linha CD tantas vezes quantas nella se contiver, por exemplo, huma vez com o resto DF.

Leve-se o segundo resto DF sobre o primeiro BE, quantas vezes nelle se contiver, huma vez por exemplo, com o resto BG.

Leve-se o terceiro resto BG sobre o segundo DF quantas vezes nelle se contiver.

Continue-se desta maneira até haver hum resto que se contenha hum numero exacto de vezes no precedente.

Então este ultimo resto será a medida commum das linhas propostas, e considerando-o como unidade, achar-se-hão facilmente os valores dos restos precedentes, e finalmente os das linhas propostas, donde se concluirá a sua razão em numeros.

Por exemplo, se acharmos que GB se contém duas vezes exactas em FD, BG será a medida commum das duas linhas propostas. Seja BG = 1, teremos FD = 2; mas EB contém huma vez FD mais GB; logo EB = 3; CD contém huma vez EB mais FD; logo CD = 5; em fim AB contém duas vezes CD mais EB; logo AB = 13; logo a razão das duas linhas AB, CD he a de 13 para 5. Se tomassemos a linha CD por unidade, a linha AB ſeria $\frac{13}{5}$, e ſe a linha AB foſſe a unidade, a linha CD ſeria $\frac{5}{13}$.

Scholio. O methodo explicado he o meſmo que enſina a arithmetica para achar o commum diviſor de dois numeros; aſſim elle não ha miſter outra demonſtração.

Póde ſer que por mais longe que ſe continue a operação, nunca ſe ache hum reſto que ſe contenha hum numero de vezes exacto no precedente. Então as duas linhas não tem medida commum, e são o que ſe chama *incommenſuraveis*: depois veremos hum exemplo na razão da diagonal para o lado do quadrado. Logo não ſe póde neſſe caſo achar a razão exacta em numeros; mas deſpreſando o ultimo reſto, ſe achará huma razão mais ou menos approximada, conforme ſe levar a operação mais ou menos longe.

PROBLEMA XVIII.

Sendo dados dois angulos A *e* B (fig. 91.), *achar a ſua medida commum, ſe a tiverem, e por ella a ſua razão em numeros.*

Deſcrevão-ſe com raios iguaes os arcos CD, EF, que ſervem de medida a eſtes angulos; depois proceda-ſe para a comparação dos arcos CD, EF, como no problema precedente, porque hum arco ſe póde ajuſtar ſobre outro arco do meſmo raio, como huma recta ſobre outra. Chegar-ſe-ha por eſte modo á medida commum dos arcos CD, EF, ſe a tiverem, e á ſua razão em numeros. Eſta razão ſerá a meſma que a dos angulos dados (17. 2.); e ſe DO for a medida commum dos arcos, DAO ſerá a dos angulos.

Scholio. Deſta maneira ſe póde achar o valor abſoluto de hum angulo, comparando o arco que lhe ſerve de medida com a circumferencia toda: por exemplo, se o arco CD for para a circumferencia como 3 para 25, o angulo A será os $\frac{3}{25}$ de quatro angulos rectos, ou $\frac{12}{25}$ de hum angulo recto.

Tambem poderá acontecer que os arcos comparados não tenhão medida commum; então haverá sómente para os angulos razões em numeros, mais ou menos approximadas, conforme se levar a operação mais ou menos longe.

LIVRO III.

PROPORÇÕES DE FIGURAS.

DEFINIÇÕES.

I. CHamarei *figuras equivalentes* aquellas cujas superficies são iguaes.

Duas figuras podem ser equivalentes, ainda que sejão muito dissimilhantes, por exemplo, hum circulo póde ser equivalente a hum quadrado, hum triangulo a hum rectangulo, &c.

A denominação de figuras iguaes se reserva para aquellas, que aplicadas huma sobre a outra, coincidem em todos os seus pontos. Taes são dois circulos que tem os raios iguaes, dois triangulos que tem os tres lados iguaes, cada hum a cada hum, &c.

II. Duas figuras são *semelhantes*, quando tem os angulos iguaes cada hum a cada hum, e os lados *homologos* proporcionaes. Entendo por lados homologos aquelles, que tem a mesma posição nas duas figuras, ou que são adjacentes a angulos iguaes. Estes mesmos angulos se chamão *angulos homologos*.

Duas figuras iguaes sempre são semelhantes; mas duas figuras semelhantes podem ser muito desiguaes.

III. Em dois circulos differentes chamão-se *arcos semelhantes*, *sectores semelhantes*, *segmentos semelhantes*, aquelles que correspondem a angulos centraes iguaes.

Aſſim, ſendo o angulo A igual ao angulo O, (fig. 92.) o arco BC he ſemelhante ao arco DE, o ſector AEC ao ſector ODE, &c.

IV. *Altura* de hum parallelogrammo he a perpendicular EF (fig. 93.) que mede a diſtancia dos dois lados ou *baſes* oppoſtas AB, CD.

V. *Altura* de hum triangulo he a perpendicular AD (fig. 94.) abaixada do vertice de hum angulo A ſobre o lado oppoſto BC, que ſe chama *baſe*.

VI. *Altura* do trapezio he a perpendicular EF (fig. 95.) tirada entre as ſuas duas *baſes* parallelas AB, CD.

VII. *A'rea*, ou ſuperficie de huma figura são termos quaſi ſynonimos. A'rea denota mais particularmente a quantidade ſuperficial da figura, em quanto ella he medida ou comparada com outras ſuperficies.

,, NB. Para intelligencia deſte Livro e dos ſeguintes, cumpre ter preſente a theoria das proporções, para o que remettemos aos tratados ordinarios de arithmetica e de algebra. Faremos ſómente huma advertencia, que he muito importante para fixar o verdadeiro ſentido das propoſições, e diſſipar toda a eſcuridade, quer no enunciado, quer nas demonſtrações.

Se tivermos a proporção A : B :: C : D, ſabemos que o producto dos extremos A $\times$ D he igual ao producto dos meios B $\times$ C.

Eſta verdade he incontraſtavel quanto aos numeros; e igualmente ácerca de grandezas quaesquer, huma vez que ſe exprimão, ou ſe imaginem expreſſas em numeros; o que ſempre ſe póde ſuppôr: por exemplo, ſe A, B, C, D forem linhas, ſe póde imaginar que huma deſtas quatro linhas, ou huma quinta linha, ſe quizermos, ſirva a todas de commum medida, e ſe tome por unidade; então A, B, C, D repreſentão cada huma certo numero de unidades, inteiro, ou quebrado, commenſuravel ou incommenſuravel; e a proporção entre as linhas A, B, C, D, vem a ſer huma proporção de numeros.

O producto das linhas A e D, que tambem ſe chama o ſeu rectangulo, não he por tanto outra couſa mais do que o numero de unidades lineares contidas em A, multiplicado pelo numero de unidades lineares, contidas em B; e facilmente ſe comprehende que eſte producto póde e deve ſer igual ao que reſulta ſemelhantemente das linhas B e C.

As grandezas A e B podem ſer da meſma eſpecie, por exemplo, linhas, e as grandezas C e D de outra eſpecie, por exemplo, ſuperficies; então cumpre conſiderar ſempre eſtas grandezas como numeros: A e B ſe exprimirão em unidades lineares, C e D em unidades ſuperficiaes, e o producto $A \times D$ ſerá hum numero como o producto $B \times C$.

Em geral, em todas as operações que fizermos ſobre as proporções, devemos ſempre conſiderar os termos deſtas proporções como outros tantos numeros, cada hum da eſpecie que lhe convem, e não cuſtará a comprehender eſtas operações, e as conſequencias que dellas reſultão.

Devemos tambem advertir que muitas das noſſas demonſtrações são fundadas em algumas das regras mais ſimplices da algebra, as quaes tambem são fundadas ſobre axiomas ſabidos: aſſim ſe tivermos $A = B + C$, e multiplicarmos cada membro por huma meſma quantidade M, daqui ſe conclue $A \times M = B \times M + C \times M$. Igualmente, ſe tivermos $A = B + C$ e $D = E - C$, e ſommarmos as quantidades iguaes, apagando $+ C$ e $- C$ que ſe deſtroem, daqui concluiremos $A + D = B + E$, e aſſim dos mais. Tudo iſto he muito evidente por ſi meſmo; mas em caſo de difficuldade ſerá bom conſultar os livros de algebra, e entremear aſſim o eſtudo das duas ſciencias „

PROPOSIÇÃO I.

THEOREMA.

Os parallelogrammos que tem bases iguaes e alturas iguaes, são equivalentes.

Seja AB (fig. 96.) a base commum dos dois parallelogrammos ABCD, ABEF; como suppomos que elles tem a mesma altura, as bases superiores DC, FE, estarão situadas sobre huma mesma linha parallela a AB. Ora temos, pela natureza dos parallelogrammos, AD = BC, e AF = BE; pela mesma razão, temos DC = AB, e FE = AB; logo DC = EF; logo tirando DC e FE da mesma linha DE, os restos CE e DF serão iguaes. Daqui se segue, que os triangulos DAF, CBE são equilateros entre si, e por consequencia iguaes (11. 1).

Mas, se do quadrilatero ABED tirarmos o triangulo ADF, fica o parallelogrammo ABEF; e se do mesmo quadrilatero ABED tirarmos o triangulo CBE, fica o parallelogrammo ABCD. Logo os dois parallelogrammos ABCD, ABEF, que tem a mesma base e a mesma altura, são equivalentes.

Corollario. Todo o parallelogrammo ABCD (fig. 77.) he equivalente ao rectangulo ABEF da mesma base e da mesma altura.

PROPOSIÇÃO II.

THEOREMA.

Todo o triangulo ABC (fig. 98.) *he metade do parallelogrammo da mesma base e da mesma altura.*

Porque os triangulos ABC, ACD, são iguaes (31. 1.).

Corollario I. Logo hum triangulo ABC he metade do rectangulo BCEF que tem a mesma base

BC e a mesma altura AO ; porque o rectangulo BCEF he equivalente ao parallelogrammo ABCD.

Corollario II. Todos os triangulos que tem bases iguaes e alturas iguaes, são equivalentes.

PROPOSIÇÃO III.

THEOREMA.

Dois rectangulos da mesma altura estão entre si como as suas bases.

Sejão ABCD, AEFD, (fig. 99.) dois rectangulos que tem por altura commum AD; digo que elles estão entre si como as suas bases AB, AE.

Supponhamos primeiro que as bases AB, AE, sejão commensuraveis entre si, e que sejão, por exemplo, como os numeros 7 e 4: se dividirmos AB em sete partes iguaes, AE conterá quatro destas partes; levante-se a cada ponto de divisão, huma perpendicular á base, formar-se-hão desta maneira sete rectangulos parciaes, que serão iguaes entre si, porque terão a mesma base e a mesma altura. O rectangulo ABCD conterá sete rectangulos parciaes, em quanto AEFD conterá quatro. Logo o rectangulo ABCD está para o rectangulo AEFD, como 7 para 4, ou como AB está para AE. O mesmo raciocinio se póde aplicar a qualquer outra razão que não seja a de 7 para 4; logo, qualquer que seja esta razão, com tanto que seja commensuravel, teremos

ABCD : AEFD :: AB : AE.

Supponhamos em segundo lugar, que as bases AB, AE (fig. 100.); sejão incommensuraveis, digo que nem por isso deixará de ser

ABCD : AEFD :: AB : AE.

Porque, se esta proposição não for verdadeira, ficando os mesmos os tres primeiros termos, o quarto será maior ou menor que AE. Supponhamos que seja maior, e que tenhamos

ABCD : AEFD :: AB : AO.

Divida-ſe a linha AB em partes iguaes menores que EO, haverá ao menos hum ponto de divisão I entre E e O; por eſte ponto levante-ſe a perpendicular IK; as baſes AB, AI ſeráõ commenſuraveis entre ſi; e aſſim teremos, pelo que fica demonſtrado,

ABCD : AIKD :: AB : AI.

Mas temos, por hypotheſe

ABCD : AEFD :: AB, AO.

Neſtas duas proporções, os antecedentes são iguaes; logo os conſequentes são proporcionaes, e daqui reſulta

AIKD : AEFD :: AI : AO.

Mas AO he maior que AI; logo para que eſta proporção ſubſiſtiſſe, deveria o rectangulo AEFD ſer maior que AIKD: ora ao contrario elle he menor; logo a proporção he impoſſivel, logo ABCD não póde ſer para AEFD como AB he para huma linha maior que AE.

Por hum raciocinio inteiramente ſemelhante, ſe provaria que o quarto termo da proporção não póde ſer menor que AE; logo he igual a AE.

Logo, qualquer que ſeja a razão das baſes, dois rectangulos da meſma altura ABCD, AEFD, eſtão entre ſi como as ſuas baſes AB, AE.

PROPOSIÇÃO IV.

THEOREMA.

Dois rectangulos quaeſquer ABCD, AEGF (fig 101.) *eſtão entre ſi como os productos das baſes multiplicadas pelas alturas, de ſorte que temos* ABCD : AEGF :: AB × AD : AE × AF.

Havendo diſpoſto os dois rectangulos, de maneira, que os angulos em A ſejão verticalmente oppoſtos, prolonguem-ſe os lados GE, CD, até o ſeu encontro em H; os dois rectangulos ABCD, AEHD tem a meſma altura AD; logo eſtão entre ſi como as ſuas baſes AB, AE: da meſma ſorte os dois rectangulos

AEHD, AEGF, tem a meſma altura AE; logo eſtão entre ſi como as ſuas baſes AD, AF, aſſim teremos as duas proporções.

ABCD : AEHD :: AB : AE.

AEHD : AEGF :: AD : AF.

Multiplicando ordenadamente eſtas proporções, e reparando que o meio termo AEHD póde ſer ommittido como multiplicador commum ao antecedente e ao conſequente, teremos

ABCD : AEGF :: AB$\times$AD : AE$\times$AF.

Scholio. Logo póde-ſe tomar por medida de hum rectangulo o producto da ſua baſe pela ſua altura, comtantoque ſe entenda por eſte producto o de dois numeros, que são o numero de unidades lineares contidas na baſe, e o numero de unidades lineares contidas na altura.

Eſta medida não he abſoluta, mas ſómente relativa; ella ſuppõe que ſe avalia ſemelhantemente outro rectangulo, medindo os ſeus lados pela meſma unidade linear; aſſim ſe conſegue hum ſegundo producto, e a razão dos dois productos he igual á dos rectangulos, conforme a propoſição demonſtrada.

Por exemplo, ſe a baſe do rectangulo A for de tres unidades, e a ſua altura de dez, o rectangulo ſerá repreſentado pelo numero 3×10, ou 30, numero que aſſim iſolado nada ſignifica; mas, ſe tivermos outro rectangulo B, cuja baſe ſeja de 12 unidades, e a altura de 7, o ſegundo rectangulo ſerá repreſentado pelo numero 7×12, ou 84: daqui concluiremos que os dois rectangulos A e B eſtão entre ſi como 30 para 84; logo ſe convieſſemos em tomar o rectangulo A por unidade de medida nas ſuperficies, o rectangulo B teria então por medida abſoluta $\frac{84}{30}$, quer dizer que ſeria igual a $\frac{84}{30}$ unidades ſuperficiaes.

He mais ordinario, e mais ſimples tomar o quadrado por unidade de ſuperficie, e ſe eſcolhe o quadrado, cujo lado he a unidade de comprimento; então a medida, que havemos confiderado fimplesmente como relativa, vem a fer abfoluta: por exemplo, o numero 30, pelo qual medimos o rectangulo A, reprefenta 30 unidades fuperficiaes, ou 30 dos quadrados cujo lado he igual á unidade, como mostra a figura 102.

Muitas vezes fe confunde em geometria o producto de duas linhas com o feu *rectangulo*, e efta expressão paffou á arithmetica para notar o producto de dois numeros defiguaes, como fe emprega o de *quadrado* para exprimir o producto de hum numero multiplicado por fi mefmo.

Os quadrados dos numeros 1, 2, 3, &c. são 1, 4, 9, &c. Affim vê-fe, que o quadrado feito fobre huma linha dupla he quadruplo, fobre huma linha tripla, he nove vezes maior, e affim em diante (fig. 103.).

PROPOSIÇÃO V.

THEOREMA.

A área de hum parallelogrammo qualquer he igual ao producto da fua bafe pela fua altura.

Porque o parallelogrammo ABCD (fig. 97.) he equivalente ao rectangulo ABEF, que tem a mefma bafe AB, e a mefma altura BE (1.); ora efte tem por medida AB $\times$ BE (4.). Logo AB $\times$ BE he igual á area do parallelogrammo ABCD.

Corollario. Os parallelogrammos da mefma bafe eftão entre fi como as fuas alturas, e os parallelogrammos da mefma altura eftão entre fi como as fuas bafes: porque fendo A, B, C tres grandezas quaesquer, temos geralmente A $\times$ C : B $\times$ C : : A : B.

PROPOSIÇÃO VI.

THEOREMA.

A área de hum triangulo he igual ao producto da sua base pela metade da sua altura.

Porque o triangulo ABC (fig. 104.) he metade do parallelogrammo ABCE; que tem a mesma base BC, e a mesma altura AD (2.): ora a superficie do parallelogrammo = BC × AD (5.); logo a do triangulo = $\frac{1}{2}$ BC × AD, ou BC × $\frac{1}{2}$ AD.

Corollario. Dois triangulos da mesma altura estão entre si como as suas bases, e dois triangulos da mesma base estão entre si como as suas alturas.

PROPOSIÇÃO VII.

THEOREMA.

A área do trapezio ABCD (fig. 105.) *he igual á sua altura* EF, *multiplicada pela semi-somma das bases parallelas* AB, CD.

Pelo ponto I, meio do lado CB, tire-se KL parallela ao lado opposto AD, e prolongue-se DC até o encontro de KL.

Nos triangulos IBL, ICK temos o lado IB = IC por construcção, o angulo LIB = CIK, e o angulo IBL = ICK, porque CK e BL são parallelas (25. 1.); logo estes triangulos são iguaes (7. 1.); logo o trapezio ABCD he equivalente ao parallelogramo ADKL, e tem por medida EF × AL.

Mas temos AL = DK, e como o triangulo IBL he igual ao triangulo KCI, o lado BL = CK: logo AB + CD = AL + DK = 2 AL, e assim AL he a semi-somma das bases AB, CD; logo emfim a área do trapezio ABCD he igual á altura EF multiplicada pela semi-somma das bases AB, CD, o que ſe exprime aſſim: $ABCD = EF \times (\frac{AB + CD}{2})$.

Scholio. Se pelo ponto I, meio de BC, tirarmos IH parallela á baſe AB, o ponto H ſerá tambem o meio de AD; porque a figura AHIL he hum parallelogrammo, bem como DHIK, porque os lados oppoſtos são parallelos; logo temos $AH = IL$ e $DH = IK$: ora $IL = IK$, porque os triangulos BIL, CIK são iguaes; logo $AH = DH$.

Póde-ſe notar que a linha $HI = AL = \frac{AB + CD}{2}$; logo a área do trapezio ſe póde tambem exprimir por $EF \times HI$. Logo he igual á altura do trapezio multiplicada pela linha que ajunta os meios dos lados não parallelos.

PROPOSIÇÃO VIII.

THEOREMA.

Se huma linha AC (fig. 106.) *for dividida em duas partes* AB, BC, *o quadrado feito ſobre a linha inteira* AC *conterá o quadrado feito ſobre huma parte* AB, *mais o quadrado feito ſobre a outra parte* BC, *mais duas vezes o rectangulo comprehendido debaixo das duas partes* AB, BC, *o que ſe exprime aſſim*, $\overline{AC}^2$ *ou* $(AB + BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC$.

Conſtrua-ſe o quadrado ACDE, tome-ſe $AF = AB$, tire-ſe FG parallela a AC, e BH parallela a AE.

O quadrado ABCD eſtá dividido em quatro partes: a primeira ABIF he o quadrado feito ſobre AB; porque tomámos $AF = AB$; a ſegunda IGDH he o quadrado feito ſobre BC; porque como temos $AC = AE$, e $AB = AF$, a differença $AC - AB$ he igual á differença $AE - AF$, o que dá $BC = EF$. Mas por cauſa das parallelas $IG = BC$, e $DG = EF$;

logo HIGD he igual ao quadrado feito ſobre BC. Tirando eſtas duas partes do quadrado total, ficão os dois rectangulos BCGI, EFIH, que tem cada hum por medida AB $\times$ BC. Logo o quadrado feito ſobre AC, &c.

Scholio. Eſta propoſição ſe reduz á que ſe demonſtra na algebra para formação do quadrado de hum binomio, e que ſe exprime aſſim: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

PROPOSIÇÃO IX.

THEOREMA.

Se a linha AC (fig. 107.) *for a differença de duas linhas* AB, BC, *o quadrado feito ſobre* AC *conterá o quadrado de* AB *mais o quadrado de* BC, *menos duas vezes o rectangulo feito ſobre* AB e BC; *quer dizer que teremos* $\overline{AC}^2$ *ou* $(AB-BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AB \times BC$.

Conſtrua-ſe o quadrado ABIF, tome-ſe AE = AC, tire-ſe CG parallella a BI, HK parallela a AB, e acabe-ſe o quadrado EFLK.

Os dois rectangulos CBIG, GLKD, tem cada hum por medida AB $\times$ BC; ſe os tirarmos da figura inteira ABILKEA, que tem por valor $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, he claro que ficará o quadrado ACDE; logo, &c.

Scholio. Eſta propoſição vem a ſer a fórmula de algebra $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

PROPOSIÇÃO X.

THEOREMA.

O rectangulo feito sobre a somma e a differença de duas linhas, he igual á differença dos quadrados destas linhas: assim temos (fig. 108.) $(AB + BC) \times (AB - BC) = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$.

Construão-se sobre AB e AC os quadrados ABIF, ACDE, prolongue-se AB huma quantidade $BK = BC$, e acabe-se o rectangulo AKLE.

A base AK do rectangulo he a somma das duas linhas AB, BC, a sua altura AE he a differença destas mesmas linhas; logo o rectangulo $AKLE = (AB + BC) \times (AB - BC)$. Mas este rectangulo he composto de duas partes $ABHE + BHLK$; e a parte BHLK he igual ao rectangulo EDGF, porque $BH = ED$ e $BK = EF$, logo $AKLE = ABHE + EDGF$. Ora estas duas partes fórmão o quadrado ABIF menos o quadrado DHIG, que he o quadrado feito sobre BC; logo finalmente $(AB + BC) \times (AB - BC) = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$.

Scholio. Esta proposição se reduz á fórmula de algebra $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

PROPOSIÇÃO XI.

THEOREMA.

O quadrado feito sobre a hypoténusa de hum triangulo rectangulo he igual á somma dos quadrados feitos sobre os outro dois lados.

Seja ABC (fig. 109.) hum triangulo rectangulo em A; formando quadrados sobre os tres lados, abaixe-se do angulo recto sobre a hypotenusa a perpendicular AD, a qual se prolongará até E; depois tirem-se as diagonaes AF, CH.

O angulo ABF he composto do angulo ABC mais o angulo recto CBF; o angulo CBH he composto do mesmo angulo ABC mais o angulo recto ABH; logo o angulo ABF = HBC. Mas AB = BH como lados do mesmo quadrado, e BF = BC pela mesma razão. Logo os triangulos ABF, HBC tem hum angulo igual comprehendido entre lados iguaes; logo são iguaes (6. 1.).

O triangulo ABF he metade do rectangulo BDEF, (ou por brevidade BE) que tem a mesma base BF e a mesma altura BD (pr. 2.). O triangulo HBC he igualmente a metade do quadrado AH, porque sendo recto o angulo BAC assim como BAL, AC e AL fazem huma mesma linha recta parallela a HB; logo o triangulo HBC e o quadrado AH, que tem a base commum BH, tem tambem a altura commum AB. Logo o triangulo he a metade do quadrado.

Já provámos que o triangulo ABF he igual ao triangulo HBC; logo o rectangulo BDEF, duplo do triangulo ABF, he equivalente ao quadrado AH, duplo do triangulo HBC. Demonstra-se do mesmo modo que o rectangulo CDEG he equivalente ao quadrado AI; mas os dois rectangulos BD F, CDEG, tomados em somma, fazem o quadrado BCGF; logo o quadrado BCGF, feito sobre a hypotenusa, he gual á somma dos quadrados ABHL, ACIK, feitos obre os outros dois lados; ou, em outros termos,

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

Corollario. I. Logo o quadrado de hum dos lados do angulo recto he igual ao quadrado da hypotenusa menos o quadrado do outro lado, o que se exprime assim: $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$.

Corollario II. Seja ABCD (fig. 118.) hum quadrado, AC a sua diagonal; como o triangulo ABC he rectangulo e iſoſceles, teremos $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}^2$. Logo o *quadrado feito ſobre a diagonal* AC *he dupla do quadrado feito ſobre o lado* AB.

Póde-ſe fazer ſenſivel eſta propriedade, tirando pelos pontos A e C parallellas a BD, e pelos pontos B e D parallelas a AC; formar-ſe-ha deſte modo hum novo quadrado EFGH que ſerá o quadrado de AC. Ora he claro que EFGH contém oito triangulos iguaes a ABE, e que ABCD contém quatro; logo o quadrado EFGH he duplo de ABCD.

Como $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: 2 : 1$, temos, extrahindo a raiz quadrada, $AC : AB :: \sqrt{2} : 1$. Logo a *diagonal do quadrado he incommenſuravel com o ſeu lado.* O que ſe deſenvolverá melhor em outra occaſião.

Corollario III. Demonſtrámos que o quadrado AH (fig. 109.) he equivalente ao rectangulo BDEF; ora, por cauſa da altura commum BF, o quadrado BCGF eſtá para o rectangulo BDEF, como a baſe BC eſtá para a baſe BD; logo,

$$\overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 :: BC : BD.$$

Logo *o quadrado da hypotenuſa eſtá para o quadrado de hum dos lados do angulo recto como a hypotenuſa eſtá para o ſegmento adjacente a eſte lado.* Chama-ſe aqui *ſegmento* a parte da hypotenuſa, determinada pela perpendicular abaixada do angulo recto; aſſim BD he o ſegmento adjacente ao lado AB, e DC o ſegmento adjacente ao lado AC. Teriamos ſemelhantemente

$$\overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 :: BC : CD.$$

Corollario IV. Os rectangulos BDEF, DCGE, que tambem tem a meſma altura, eſtão entre ſi como as ſuas baſes BD, CD. Ora eſtes rectangulos são equivalentes aos quadrados $\overline{AB}^2$, $\overline{AC}^2$; logo

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC.$$

Logo *os quadrados dos dois lados do angulo recto estão entre si como os segmentos da hypotenusa adjacentes a estes lados.*

PROPOSIÇÃO XII.

THEOREMA.

Em hum triangulo ABC (fig. 110.), *se o angulo* C *for agudo, o quadrado do lado opposto será menor que a somma dos quadrados dos lados que comprehendem o angulo* C; *e se abaixarmos* AD *perpendicular sobre* BC, *a differença será igual ao duplo do rectangulo* BC × CD; *de sorte que teremos*

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD.$$

Ha dois casos 1°. Se a perpendicular cahir dentro do triangulo ABC, teremos $BD = BC - CD$, e por consequencia (9.) $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2BC \times CD$. Ajuntando a huma e outra parte $\overline{AD}^2$, e reparando que os triangulos rectangulos ABD, ADC, dão $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$, e $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$, teremos $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC \times CD$.

2.° Se a perpendicular AD cahir fóra do triangulo ABC, teremos $BD = CD - BC$, e por consequencia (9.) $\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{CB}^2 - 2CD \times BC$ Ajuntando a huma e outra parte $\overline{AD}^2$, concluiremos da mesma maneira,

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC \times CD.$$

PROPOSIÇÃO XIII.

THEOREMA.

Em hum triangulo ABC (fig. 111.), *se o angulo* C *for obtuso, o quadrado do lado opposto* AB *será maior que a somma dos quadrados dos lados que comprehendem o angulo* C, *e se abaixarmos* AD *perpendicular sobre* BC, *a differença será igual ao duplo do rectangulo* BC × CD; *de sorte que teremos*

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CD.$$

A perpendicular não póde cahir dentro do triangulo; porque, se cahisse, por exemplo em E, o triangulo ACE teria ao mesmo tempo o angulo recto E e o angulo obtuso C, o que he impossivel (20. 1.); logo ella cahe fóra, e teremos $DB = BC + CD$. Daqui resulta (8.) $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2BC \times CD$. Ajuntando de huma e outra parte $\overline{AD}^2$, e fazendo as reducções, como no theorema precedente, concluiremos $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC \times CD$.

Scholio. O triangulo rectangulo he o unico em que a somma dos quadrados dos dois lados he igual ao quadrado do terceiro; porque, se o angulo comprehendido por estes lados for agudo, a somma de seus quadrados será maior que o quadrado do lado opposto; se for obtuso, será menor.

PROPOSIÇÃO XIV.

THEOREMA.

Em hum triangulo qualquer ABC (fig. 112.), *se tirarmos do vertice ao meio da base a linha* AE, *digo que teremos* $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2$.

Abaixe-se a perpendicular AD sobre a base BC, o triangulo AEC dará pelo theorema XII.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2 - 2EC \times ED.$$

O triangulo ABE dará pelo theorema XIII.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 + 2EB \times ED.$$

Logo, sommando, e advertindo que EB = EC, teremos

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{EB}^2.$$

Corollario. Logo *em todo o parallelogrammo a somma dos quadrados dos lados he igual á somma dos quadrados das diagonaes.*

Porque, as diagonaes AC, BD (fig. 113.) se cortão mutuamente em duas partes iguaes no ponto E (32. 1.); assim o triangulo ABC dá

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2.$$

O triangulo ADC dá igualmente,

$$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{DE}^2.$$

Ajuntando membro a membro, e notando que BE = DE, teremos

$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 = 4\overline{AE}^2 + 4\overline{DE}^2.$$

Mas $4\overline{AE}^2$ he o quadrado de 2AE ou de AC; $4\overline{DE}^2$ he o quadrado de BD; logo a ſomma dos quadrados dos lados he igual á ſomma dos quadrados das diagonaes.

PROPOSIÇÃO XV.

THEOREMA.

A linha DE, (fig. 114.) *tirada parallelamente á baſe de hum triangulo* ABC, *divide os lados* AB, AC, *proporcionalmente, de ſorte que temos* AD : DB : : AE : EC.

Ajuntem-ſe BE e DC; os dois triangulos BDE, DEC, tem a meſma baſe DE; tambem tem a meſma altura, porque os vertices B e C eſtão ſituados ſobre huma parallela á baſe. Logo eſtes triangulos são equivalentes (2).

Os triangulos ADE, BDE, que tem o vertice commum E, tem a meſma altura, e eſtão entre ſi como as ſuas baſes AD, DB (6.), aſſim temos,

ADE : BDE : : AD : DB.

Os triangulos ADE, DEC, que têm o vertice commum D, tem igualmente a meſma altura, e eſtão entre ſi como as ſuas baſes AE, EC; logo

ADE : DEC : : AE : EC.

Mas o triangulo BDE $=$ DEC; logo, por cauſa da razão commum neſtas duas proporções, concluiremos AD : DB : : AE : EC.

Corollario I. Daqui reſulta *componendo* AD $+$ DB : AD : : AE $+$ EC : AE, ou AB : AD : : AC : AE, e tambem AB : BD : : AC : CE.

Corollario II. Se entre duas rectas AB, CD, (fig. 115.) *tirarmos quantas parallelas quiſermos,* AC, EF, GH, BD, &c., *eſtas rectas ſerão cortadas proporcionalmente, e teremos* AE : CF : : EG FH : : GB : HD.

• Porque, seja O o ponto de concurso das rectas AB, CD; no triangulo OEF, em que a linha AC se conduz parallelamente á base EF, teremos OE : AE : : OF : CF, ou OE : OF : : AE : CF. No triangulo OGH, teremos semelhantemente OE : EG : : OF : FH, ou OE : OF : : EG : FH. Logo por causa da razáo commum, OE : OF, estas duas proporções dão AE : CF : : EG : FH.

Demonstrar-se-ha da mesma maneira que EG : FH : : GB : HD, e assim em diante. Logo as linhas AB, CD, estáo cortadas proporcionalmente pelas parallelas EF, GH, &c.

PROPOSIÇÁO XVI.

THEOREMA.

Reciprocamente, se os lados AB, AC, (fig. 116.) *forem cortados proporcionalmente pela linha* DE, *de sorte que seja* AD : DB : : AE : EC, *digo que a linha* DE *será parallela á base* BC.

Porque, se DE não for parallela a BC, supponhamos que o seja DO; então, segundo o theorema precedente, teremos AD : BD : : AO : OC. Mas, por hypothese, AD : DB : : AE : EC : logo seria AO : OC : : AE : EC; proporção impossivel, porque de huma parte o antecedente AE he maior que AO, e da outra o consequente EC he menor que OC. Logo a parallela a BC tirada pelo ponto D não póde differir de DE; logo DE he esta parallela.

Scholio. A mesma conclusáo teria lugar, se suppozessemos a proporção AB : AD : : AC : AE. Porque esta proporçáo daria AB — AD : AD : : AC — AE : AE, ou BD : AD : : CE : AE.

PROPOSIÇÃO XVII.

THEOREMA.

A linha AD, (fig. 117.) *que divide em duas partes iguaes o angulo* BAC *de hum triangulo, dividirá a base* BC *em dois segmentos* BD, DC, *proporcionaes aos lados adjacentes* AB, AC; *de sorte que teremos* BD : DC : : AB : AC.

Pelo ponto C tire-se CE parallela a AD até encontrar BA prolongado.

No triangulo BCE, a linha AD he parallela á base CE, o que dá esta proporção (15.),

BD : DC : : AB : AE.

Mas o triangulo ACE he isosceles; porque, em razão das parallelas AD, CE, o angulo ACE = DAC, e o angulo AEC = BAD (25. 1.): ora, por hypothese, DAC = BAD; logo o angulo ACE = AEC, e por consequencia AE = AC (13. 1.); logo, substituindo AC em vez de AE na proporção precedente, teremos

BD : DC : : AB : AC.

PROPOSIÇÃO XVIII.

THEOREMA.

Dois triangulos equiangulos tem os lados homologos proporcionaes, e são semelhantes.

Sejão ABC, CDE, (fig. 119.) dois triangulos que tem os angulos iguaes cada hum a cada hum, a saber BAC=CDE, ABC=DCE, e ACB=DEC; digo que os lados homologos ou adjacentes aos angulos iguaes serão proporcionaes, de sorte que teremos BC : CE : : AB : CD : : AC : DE.

Ponhão-se os lados homologos BC, CE na mesma direcção; e prolonguem-se os lados BA, ED, até se encontrarem em F.

Como BCE he huma linha recta, e o angulo BCA = CED, segue-se que AC he parallela a DE (25. 1.). Igualmente, como o angulo ABC = DCE, a linha AB he parallela a DC. Logo a figura ACDF he hum parallelogrammo.

No triangulo BFE a linha AC he parallela á base FE; assim temos BC : CE : : BA : AF (15.). Em lugar de AF pondo a sua igual CD, teremos.

BC : CE : : BA : CD.

No mesmo triangulo BFE, se considerarmos BF como base, CD he parallela a esta base, e temos a proporção BC : CE : : FD : DE. Em lugar de FD, pondo a sua igual AC, teremos

BC : CE : : AC : DE.

Finalmente destas duas proporções que contém a mesma razão, BC : CE, se póde tambem concluir

AC : DE : : BA . CD.

Logo os triangulos equiangulos BAC, CDE, tem os lados homologos proporcionaes; mas, segundo a definição II., duas figuras são semelhantes quando tem os angulos iguaes, cada hum a cada hum, e os lados homologos proporcionaes; logo os triangulos equiangulos BAC, CDE, são duas figuras semelhantes.

Corollario. Para que dois triangulos sejão semelhantes basta que tenhão dois angulos iguaes cada hum a cada hum, porque então o terceiro será igual em huma e outra parte, e os dois triangulos serão equiangulos.

Scholio. Note-se que nos triangulos semelhantes, os lados homologos são oppostos a angulos iguaes; assim, por ser o angulo ACB igual a DEC, o lado AB he homologo a DC; do mesmo modo AC e DE são homologos, como oppostos aos angulos iguaes ABC, DCE: reconhecendo-se os lados homologos, se formão logo as proporções.

AB : DC : : AC : DE : : BC : CE.

PROPOSIÇÃO XIX.

THEOREMA.

Dois triangulos que tem os lados homologos proporcionaes são equiangulos e ſemelhantes.

Supponhamos que ſeja BC : EF : : AB : DE : : AC : DF ; (fig. 120.) ; digo que os triangulos ABC, DEF, terão os angulos iguaes, a ſaber, A = D, B = E, C = F.

Faça-ſe no ponto E o angulo FEG = B, e no ponto F o angulo EFG = C, o terceiro G ſerá igual ao terceiro A, e os dois triangulos ABC, EFG, ſerão equiangulos. Logo teremos, pelo theorema precedente, BC : EF : : AB: EG : mas, por hypotheſe, BC : EF : : AB : DE; logo EG = DE. Tambem teremos, pelo meſmo theorema, BC : EF : : AC : FG ; ora temos, por hypotheſe, BC : EF : : AC : DF ; logo FG = DF ; logo os triangulos EGF, DEF, tem os tres lados iguaes, cada hum a cada hum ; logo são iguaes (II. I.). Mas, por conſtrucção, o triangulo EGF he equiangulo ao triangulo ABC ; logo tambem os triangulos DEF, ABC, são equiangulos e ſemelhantes.

Scholio I. Eſtas duas ultimas propoſições moſtrão que nos triangulos a igualdade dos angulos he huma conſequencia da proporcionalidade dos lados, e reciprocamente, de ſorte que huma das condições baſta para provar a ſemelhança dos triangulos. Não acontece o meſmo nas figuras de mais de tres lados; porque, logo que ſe trata ſómente dos quadrilateros, ſe póde, ſem mudar os angulos, alterar a proporção dos lados, ou ſem alterar os lados, mudar os angulos ; aſſim a proporcionalidade dos lados não póde ſer conſequencia da igualdade dos angulos, nem *viceverſa*. Vemos, por exemplo, que tirando EF (fig. 121.) parallela a BC, os angulos do quadrilatero AEFD são iguaes aos do quadrilatero ABCD ;

mas a proporção dos lados he differente: do mesmo modo, sem mudar os quatro lados AB, BC, CD, AD, se póde avisinhar ou affastar o ponto B do ponto D, o que ha de alterar os angulos.

Scholio II. As duas proposições precedentes, que propriamente fazem huma só, juntas á do quadrado da hypoténusa, são as proposições mais importantes e mais fecundas da Geometria; ellas bastão quasi sós a todas as applicações e á resolução de todos os problemas: a razão he porque todas as figuras se podem repartir em triangulos, e qualquer triangulo em dois triangulos rectangulos. Assim as propriedades geraes dos triangulos abrangem implicitamente as de todas as figuras.

PROPOSIÇÃO XX.

THEOREMA.

Dois triangulos que tem hum angulo igual comprehendido entre lados proporcionaes, são semelhantes.

Seja o angulo A = D, e supponhamos que seja AB : DE : : AC : DF; (fig. 122.); digo que o triangulo ABC he semelhante a DEF.

Tome-se AG = DE, e tire-se GH parallella a BC, o angulo AGH será igual ao angulo ABC (25. 1.), e o triangulo AGH será equiangulo ao triangulo ABC; logo teremos AB : AG : : AC : AH: mas, por hypothese, AB : DE : : AC : DF: e por construcção, AG = DE; logo AH = DF. Logo os dois triangulos AGH, DEF, tem hum angulo igual comprehendido entre lados iguaes; logo são iguaes. Ora o triangulo AGH he semelhante a ABC, logo DEF tambem he semelhante a ABC.

PROPOSIÇÃO XXI.

THEOREMA.

Dois triangulos que tem os lados homologos parallelos, ou perpendiculares, cada hum a cada hum, são ſemelhantes.

Porque 1.° Se o lado AB (fig. 123.) for parallelo a DE, e BC a EF, o angulo ABC ſerá igual a DEF (28. 1.), ſe demais AC for parallela a DF, o angulo ACB ſerá igual a DFE, e tambem BAC a EDF; logo os triangulos ABC, DEF são equiangulos; logo são ſemelhantes.

2.° Seja o lado DE (fig. 124.) perpendicular a AB, e o lado DF a AC; no quadrilatero AIDH os dois angulos I e H ſerão rectos; os quatro angulos valem em ſomma quatro angulos rectos (21. 1.); logo os dois reſtantes IAH, IDH, valem dois angulos rectos. Mas os dois angulos EDF, IDH tambem valem dois angulos rectos; logo o angulo EDF he igual a IAH ou BAC. Igualmente, ſe o terceiro lado EF for perpendicular ao terceiro BC, demonſtraremos que o angulo DFE $=$ C, e DEF $=$ B. Logo os dois triangulos ABC, DEF, que tem os lados perpendiculares cada hum a cada hum, são equiangulos e ſemelhantes.

Scholio. No caſo dos lados parallelos, os lados homologos são os lados parallelos, e no dos lados perpendiculares, são os perpendiculares. Aſſim neſte caſo, DE he homologo a AB, DF a AC, e EF a BC.

O caſo dos lados perpendiculares poderia offerecer huma ſituação relativa dos dois triangulos, diſferente da que ſe ſuppoz na fig. 124.: mas a igualdade dos angulos reſpectivos ſe demonſtraria ſempre, quer por quadrilateros, taes como AIDH, que tem dois angulos rectos, quer pela comparação de dois triangulos que, com angulos verticalmente oppoſtos, terião cada hum hum angulo recto. Tambem poderiamos sempre suppôr construido dentro do triangulo ABC hum triangulo DEF, que tivesse os lados parallelos aos do triangulo comparado com ABC, e então a demonstração entraria no caso da fig. 124.

PROPOSIÇÃO XXII.

THEOREMA.

As linhas AF, AG, &c. (fig. 125.) *tiradas como se quizer pelo vertice de hum triangulo, dividem proporcionalmente a base* BC *e a sua parallela* DE, *de maneira que he* DI : BF :: IK : FG :: KL : GH, &c.

Porque, como DI he parallela a BF, o triangulo ADI he equiangulo a ABF, e temos a proporção DI : BF :: AI : AF. Do mesmo modo, sendo IK parallela a FG, temos AI : AF :: IK : FG. Logo, por causa da razão commum AI : AF, teremos DI : BF :: IK : FG. Acharemos semelhantemente IK : FG :: KL : GH, &c. Logo a linha DE está dividida nos pontos I, K, L, como a base BC está nos pontos F, G, H.

Corollario. Logo, se BC estivesse dividida em partes iguaes nos pontos F, G, H, a parallela DE estaria dividida do mesmo modo em partes iguaes no ponto I, K, L.

PROPOSIÇÃO XXIII.

THEOREMA.

Se do angulo recto A (fig. 126.) *de hum triangulo rectangulo abaixarmos a perpendicular* AD *sobre a hypotenusa;*

1.° *Os dois triangulos parciaes* ABD, ADC *serão semelhantes entre si, e ao triangulo total* ABC.

2.° *Cada lado* AB *ou* AC *será meio proporcional entre a hypoténusa* BC *e o segmento adjacente* BD *ou* DC.

3.° *A perpendicular* AD *será meia proporcional entre os dois segmentos* BD, DC.

Porque, 1.° O triangulo BAD e o triangulo BAC tem o angulo commum B; demais o angulo recto BDA he igual ao angulo recto BAC; logo o terceiro angulo BAD de hum he igual ao terceiro C do outro. Logo os dois triangulos são equiangulos e semelhantes. Demonstrar-se-ha do mesmo modo que o triangulo DAC he semelhante ao triangulo BAC; logo os tres triangulos são equiangulos e semelhantes entre si.

2.° Como o triangulo BAD he semelhante ao triangulo BAC, os seus lados homologos são proporcionaes. Ora, o lado BD no pequeno triangulo he homologo a BA no grande, porque são oppostos a angulos iguaes, BAD, BCA; a hypoténusa BA do pequeno he homologa á hypoténusa BC do grande; logo podemos formar a proporção BD : BA : : BA : BC. Teriamos da mesma maneira DC : AC : : AC : BC. Logo 2.° cada lado AB, AC, he meio proporcional entre a hypoténusa e o segmento adjacente a este lado.

3.° Em fim, a semelhança dos triangulos ABD, ADC, dá, comparando os lados homologos, BD : AD : : AD : DC. Logo 3.° a perpendicular AD he meia proporcional entre os segmentos BD, DC, da hypoténusa.

Scholio. A proporção BD : AB : : AB : BC dá, igualando o producto dos extremos ao dos meios, $\overline{AB}^2 = BD \times BC$. Do mesmo modo temos $\overline{AC}^2 = DC \times BC$; logo $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BD \times DC + DC \times BC$; o segundo membro he o mesmo que

$(BD + DC) \times BC$, e se reduz a $BC \times BC$ ou $\overline{BC}^2$; logo temos $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$; logo o quadrado feito sobre a hypoténusa BC he igual á somma dos quadrados feitos sobre os outros dois lados AB, AC. Deste modo vimos a cahir na proposição do quadrado da hypotènusa por hum caminho muito differente do que haviamos seguido; donde se vê que, propriamente fallando, a proposição do quadrado da hypoténusa he huma consequencia da proporcionalidade dos lados nos triangulos equiangulos; assim as proposições fundamentaes da Geometria se reduzem, para assim dizer, a esta só, que os triangulos equiangulos tem os seus lados homologos proporcionaes.

Acontece muitas vezes, como acabamos de ver neste exemplo, que tirando consequencias de huma ou de muitas proposições, se recahe em proposições já demonstradas. Em geral, o que caracteriza particularmente os theoremas da Geometria, e o que he huma prova invencivel da sua certeza, he que combinando-os de qualquer maneira, com tanto que se discorra com acerto, sempre se cahe em resultados exactos. Não seria o mesmo se alguma proposição fosse falsa, ou só fosse verdadeira pouco mais ou menos; aconteceria muitas vezes que, pela combinação das proposições entre si, o erro cresceria, e se faria sensivel. Disto vimos exemplos em todas as demonstrações em que nos servimos da *reducção a absurdo.* Estas demonstrações, nas quaes temos por fim provar que duas quantidades são iguaes, consistem em mostrar, que, se houvesse entre ellas a menor desigualdade, a continuação dos raciocinios nos conduziria a hum absurdo manifesto e palpavel, donde se conclue forçosamente que estas duas quantidades são iguaes.

Corollario. Se de hum ponto A da circumferencia (fig. 127.) tirarmos as duas cordas AB, AC aos extremos do diametro BC, o triangulo BAC será rectangulo em A (18. 2.). Logo 1.° *a perpendicular* AD *he meia proporcional entre os dois segmentos do diametro* BD , DC , ou , que vem a ser o mesmo , o quadrado $\overline{AD}^2$ he igual ao rectangulo $BD \times DC$.

2.° *A corda* AB *he meia proporcional entre o diametro* BC *e o segmento adjacente* BD , ou , que vem a ser o mesmo , $\overline{AB}^2 = BD \times BC$. Semelhantemente temos $\overline{AC}^2 = CD \times BC$; logo $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC$; e se compararmos $\overline{AB}^2$ com $\overline{BC}^2$, teremos $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: BD : BC$; teriamos da mesma maneira $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 :: DC : BC$. Estas razões dos quadrados dos lados , quer entre si , quer com o quadrado da hypotenusa , já se deduzirão nos corol. III. e IV. da prop. XI.

PROPOSIÇÃO XXIV.

THEOREMA.

Dois triangulos que tem hum angulo igual estão entre si como os rectangulos dos lados que comprehendem o angulo igual. Assim o triangulo ABC (fig. 128.) *está para o triangulo* ADE , *como o rectangulo* $AB \times AC$ *está para o rectangulo* $AD \times AE$.

Tire-se BE ; os dois triangulos ABE , ADE , que tem o vertice commum E , tem a mesma altura , e estão entre si como as suas bases AB , AD (6.) ; logo

$$ABE : ADE :: AB : AD.$$

Do mesmo modo

$$ABC : ABE :: AC : AE.$$

Multiplicando ordenadamente estas duas proporções, e ommittindo o termo commum ABE, teremos

$$ABC : ADE :: AB \times AC : AD \times AE.$$

Corollario. Logo os dois triangulos feriáõ equivalentes, fe o rectangulo $AB \times AC$ foffe igual ao rectangulo $AD \times AE$, ou fe tiveffemos $AB : AD :: AE : AC$, o que teria lugar, fe a linha DC foffe parallela a BE.

PROPOSIÇÃO XXV.

THEOREMA.

Dois triangulos femelhantes eftão entre fi como os quadrados dos lados homologos.

Seja o angulo $A = D$ (fig. 122.), e o angulo $B = E$; primeiramente os angulos iguaes A e D darão, pela propofição precedente,

$$ABC : DEF :: AB \times AC : DE \times DF.$$

Mas, temos tambem, pela femelhança dos triangulos,

$$AB : DE :: AC : DF.$$

E fe multiplicarmos efta proporção, termo por termo, pela proporção identica

$$AC : DF :: AC : DF,$$

refultará

$$AB \times AC : DE \times DF :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2.$$

Logo

$$ABC : DEF :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2.$$

Logo dois triangulos femelhantes ABC, DEF, eftão entre fi como os quadrados dos lados homologos AC, DF, ou como os quadrados de outros dois lados homologos quaesquer.

PROPOSIÇÃO XXVI.

THEOREMA.

Dois polygonos semelhantes são compostos do mesmo numero de triangulos semelhantes cada hum a cada hum, e semelhantemente dispostos.

No polygono ABCDE (fig. 129.), tirem-se do mesmo angulo A as diagonaes AC, AD, aos outros angulos. No outro polygono FGHIK, tirem-se semelhantemente do angulo F, homologo ao angulo A, as diagonaes FH, FI, aos outros angulos.

Como os polygonos são semelhantes, o angulo BAC he igual ao seu homologo FGH (def. 2.), e os lados AB, BC, são proporcionaes aos lados FG, GH; de sorte que temos AB : FG :: BC : GH. Daqui se segue que os triangulos ABC, FGH, tem hum angulo igual, comprehendido entre lados proporcionaes; logo são semilhantes (20.); logo o angulo BCA he igual a GHF. Subtrahindo estes angulos iguaes dos angulos iguaes BCD, GHI, os restos ACD, FHI serão iguaes. Mas como os triangulos ABC, FGH são semilhantes, temos AC : FH :: BC : GH. Da semilhança dos polygonos se deduz BC : GH :: CD : HI (def. 2); logo AC : FH :: CD : HI. Mas já vimos que o angulo ACD = FHI; logo os triangulos ACD, FHI, tem hum angulo igual comprehendido entre lados proporcionaes; logo são semilhantes. Da mesma maneira se continuaria a demonstrar a semilhança dos triangulos seguintes, qualquer que fosse o numero dos lados dos polygonos propostos, logo dois polygonos semilhantes são compostos do mesmo numero de triangulos semilhantes e semilhantemente dispostos.

Scholio. A proposição inversa he igualmente verdadeira: *se dois polygonos forem compostos do mesmo numero de triangulos semilhantes e semilhantemente dispostos, estes dois polygonos serão semilhantes.*

Porque a femilhança dos triangulos respectivos dará o angulo ABC = FGH, BCA = GHF, ACD = FHI; logo BCD = GHI, do mefmo modo CDE = HIK, &c. De mais, teremos AB : FG :: BC : GH :: AC : FH :: CD : HI, &c. Logo os dois polygonos tem os angulos iguaes, e os lados proporcionaes; logo são femilhantes.

PROPOSIÇÃO XXVII.

THEOREMA.

Os contornos ou perimetros dos polygonos femilhantes eftão como os lados homologos, e as fuas fuperficies como os quadrados dos lados homologos.

Porque, I. como temos, pela natureza das figuras femilhantes (fig. 129), AB : FG :: BC : GH :: CD : HI, &c., podemos concluir defta serie de razões iguaes: a fomma dos antecedentes AB + BC + CD, &c., perimetro da primeira figura, eftá para a fomma dos confequentes FG + GH + HI, &c., perimetro da fegunda figura, como hum antecedente eftá para o seu confequente, ou como o lado AB eftá para o feu homologo FG.

II. Como os triangulos ABC, FGH são femelhantes, temos (25.) ABC : FGH :: $\overline{AC}^2$: $\overline{FH}^2$; do mefmo modo os triangulos femelhantes ACD, FHI, dão ACD : FHI :: $\overline{AC}^2$. $\overline{FH}^2$; logo, por caufa da razão commum $\overline{AC}^2$: $\overline{FH}^2$, temos

ABC : FGH :: ACD : FHI.

Por hum femelhante raciocinio teriamos

ACD : FHI :: ADE : FIK.

E affim em diante, fe houveffe maior numero de triangulos. Defta ferie de razões iguaes concluiremos; a fomma dos antecedentes ABC + ACD + ADE, ou o polygono ABCD, eftá para a fomma dos conſequentes FGH + FHI + FIK, ou o polygono FGHIK, como hum antecedente ABC eſtá para o ſeu conſequente FGH, ou como $\overline{AB}^2$ eſtá para $\overline{FG}^2$; logo os polygonos ſemelhantes eſtão entre ſi como os quadrados dos lados homologos.

Corollario. Se conſtruirmos tres figuras ſemelhantes, que tenhão os lados homologos iguaes aos tres lados de hum triangulo rectangulo, a figura feita ſobre o maior lado ſerá igual á ſomma das outras duas. Porque eſtas tres figuras são proporcionaes aos quadrados dos ſeus lados homologos; ora o quadrado da hypoténuſa he igual á ſomma dos quadrados dos outros dois lados; logo, &c.

PROPOSIÇÃO XXVIII.

THEOREMA.

As partes de duas cordas AB, CD, (fig. 130.) *que ſe cortão em hum circulo, são reciprocamente proporcionaes, quer dizer, que temos* AO : DO :: CO : OB.

Ajuntem-ſe AC e BD: nos triangulos ACO, BOD, os angulos em O são iguaes, como verticalmente oppoſtos; o angulo A he igual ao angulo D, porque ſão inſcritos no meſmo ſegmento (18. 2.); pela meſma razão o angulo C = B; logo eſtes triangulos ſão ſemelhantes; e os lados homologos dão eſta proporcão AO : DO :: CO : OB.

Corollario. Daqui ſe tira AO × OB = DO × CO; logo o rectangulo das duas partes de huma das cordas he igual ao rectangulo das duas partes da outra.

PROPOSIÇÃO XXIX.

Theorema.

Se de hum meſmo ponto O, (fig. 131.) tomado fóra do circulo, tirarmos as ſecantes OB, OC, terminadas no arco concavo BC, as ſecantes inteiras ſerão reciprocamente proporcionaes ás ſuas partes exteriores, quer dizer, que ſerá OB : OC : : OD : OA.

Porque, ajuntando AC, BD, os triangulos OAC, OBD, tem o angulo O commum; e mais, o angulo B = C (18. 2.); logó eſtes triangulos são ſemeanelhantes, e os lados homologos dão a proporção

OB : OC : : OD : OA.

Corollario. Logo o rectangulo OA × OB he igual ao rectangulo OC × OD.

Scholio. Note-ſe que eſta propoſição tem muita analogia com a precedente, e ſó differe em ſe cortarem fóra do circulo as duas cordas AB, CD, em vez de ſe cortarem dentro. A propoſição ſeguinte tambem ſe póde conſiderar como hum caſo particular deſta.

PROPOSIÇÃO XXX.

Theorema.

Se de hum meſmo ponto O, tomado fóra do circulo (fig. 132.) *tirarmos huma tangente* OA *e huma ſecante* OC, *a tangente ſerá meia proporcional entre a ſecante e a ſua parte exterior; de ſorte que teremos* OC : OA : : OA : OD, *ou, que vem a ſer o meſmo,*

$\overline{OA}^2 = OC \times OD$.

Porque, ajuntando AD e AC, os triangulos OAD, OAC, tem o angulo O commum; de mais o angulo OAD formado por huma tangente e huma corda (19. 2.), tem por medida a metade do arco

AD, e o angulo C tem a mesma medida; logo o angulo $OAD = C$; logo os dois triangulos são semelhantes, e temos a proporção

$$OC : OA :: OA : OD,$$

que dá $\overline{OA}^2 = OC \times OD$.

PROPOSIÇÃO XXXI.

THEOREMA.

„ *Em hum triangulo* ABC, (fig. 133.) *se dividirmos o angulo* A *em duas partes iguaes pela linha* AD, *o rectangulo dos lados* AB, AC, *será igual ao rectangulo dos segmentos* BD, DC, *mais o quadrado da secante* AD.

Faça-se passar huma circumferencia pelos tres pontos A, B, C, prolongue-se AD até a circumferencia, e tire-se CE.

O triangulo BAD he semelhante ao triangulo EAC; porque, por hypothese, o angulo $BAD = EAC$; de mais, o angulo $B = E$, porque tem ambos por medida a metade do arco AC; logo estes triangulos são semelhantes, e os lados homologos dão a proporção $BA : AE :: AD : AC$. Daqui resulta $BA \times AC = AE \times AD$; mas $AE = AD + DE$, e multiplicando em huma e outra parte por AD, temos $AE \times AD = \overline{AD}^2 + DE \times AD$; porém $AD \times DE = BD \times DC$ (28.); logo finalmente

$$BA \times AC = \overline{AD}^2 + BD \times DC.$$

PROPOSIÇÃO XXXII.

THEOREMA.

,, *Em todo o triangulo ABC, (fig. 134.) o rectangulo dos dois lados AB, AC, he igual ao rectangulo comprehendido pelo diametro CE do circulo circunscrito e a perpendicular AD abaixada sobre o terceiro lado BC.*

Porque, ajuntando AE, os triangulos ABD, AEC, são rectangulos, hum em D, outro em A; demais o angulo B = E; logo estes triangulos são semelhantes, e dão a proporção AB : CE : : AD : AC; donde resulta AB × AC = CE × AD.

Corollario. Se multiplicarmos estas quantidades iguaes pela mesma quantidade BC, teremos AB × AC × BC = CE × DA × BC. Ora, AD × BC he o dobro da superficie do triangulo (6.); logo o *producto dos tres lados de hum triangulo he igual á sua superficie multiplicada pelo dobro do diametro do circulo circunscrito.*

O producto de tres linhas se chama algumas vezes *solido*, por huma razão que logo se verá. O seu valor se comprehende facilmente, imaginando que as linhas estão reduzidas a numeros, e multiplicando os numeros de que se trata.

Scholio. Tambem se póde demonstrar que a *superficie de hum triangulo he igual ao seu perimetro multiplicado por metade do raio do circulo inscrito.*

Porque, os triangulos (fig. 87.) AOB, BOC, AOC, que tem o seu vertice commum em O, tem por altura commum o raio do circulo inscrito: logo a somma destes triangulos será igual á somma das bases AB, BC, AC, multiplicada por metade do raio OD; logo o triangulo ABC he igual ao seu perimetro multiplicado por metade do raio do circulo inscrito.

PROPOSIÇÃO XXXIII.

THEOREMA.

„ *Em todo o quadrilatero inscrito* ABCD, (fig. 135.) *o rectangulo das duas diagonaes* AC, BD, *he igual á somma dos rectangulos dos lados oppostos, de sorte que temos*

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$

Tome-se o arco CO = AD, e tire-se BO que encontre a diagonal AC em I.

O angulo ABD = CBI, porque hum tem por medida a metade de AD, e outro a metade de CO igual a AD. O angulo ADB = BCI, porque são inscritos no mesmo segmento AOB; logo o triangulo ABD he semelhante ao triangulo IBC, e temos a proporção AD : CI :: BD : BC; donde resulta AD × BC = CI × BD. Agora digo que o triangulo ABI he semelhante ao triangulo BDC; porque o arco AD sendo igual a CO, se ajuntarmos a cada hum OD, teremos o arco AO = DC; logo o angulo ABI = DBC; de mais o angulo BAI = BDC porque são inscritos no mesmo segmento; logo os triangulos ABI, DBC são semelhantes, e os lados homologos dão a proporção AB : BD :: AI : CD; donde resulta AB × CD = AI × BD.

Ajuntando os dois resultados achados, e notando que AI × BD + CI × BD = (AI + CI) × BD = AC × BD, teremos AD × BC + AB × CD = AC × BD.

Scholio. Póde-se demonstrar da mesma maneira outro theorema sobre o quadrilatero inscrito.

O triangulo ABD semelhante a BIC, dá a proporção BD : BC :: AB : BI, donde resulta BD × BI = BC × AB. Se tirarmos CO, o triangulo ICO, semelhante a ABI, será semelhante a BDC, e dará a proporção BD : CO :: DC : OI; donde resulta OI × BD = CO × DC, ou, porque CO = AD, OI × BD = AD × DC. Sommado os dois resultados, e notando que $BI \times BD + OI \times BD$ se reduz á $BO \times BD$, teremos

$$BO \times BD = AB \times BC + AD \times DC$$

Se tomassemos $BP = AD$, e tirassemos CKP, achariamos por semelhantes raciocinios

$$CP \times CA = AB \times AD + BC \times CD.$$

Mas, sendo o arco $BP = AD$; se ajuntarmos a cada hum BC, teremos o arco $CBP = BCO$; logo a corda CP he igual á corda BO, e por consequencia os rectangulos $BO \times BD$, $CP \times CA$ estão entre si como BD está para CA; logo

$$BD : CA :: AB \times BC + AD \times DC : AD \times AB + BC \times CD.$$

Logo *as duas diagonaes de hum quadrilatero inscrito estão entre si como as summas dos rectangulos dos lados que tendem aos seus extremos.*

Estes dois theoremas podem servir para achar as diagonaes quando forem conhecidos os lados.

PROPOSIÇÃO XXXIV.

THEOREMA.

„ *Seja* P (fig. 136.) *hum ponto dado dentro do circulo sobre o raio* AC, *e tome-se hum ponto* Q *fóra sobre o prolongamento do mesmo raio, de sorte que seja* $CP : CA :: CA : CQ$; *se de hum ponto qualquer* M *da circumferencia tirarmos aos dois pontos* P *e* Q *as rectas* MP, MQ, *digo que estas rectas estarão em toda a parte na mesma razão, e que será* $MP : MQ :: AP : AQ$.

Porque, temos, por hypothese, $CP : CA :: CA : CQ$; pondo CM em lugar de CA, teremos $CP : CM :: CM : CQ$; logo os triangulos CPM, CQM, tem hum angulo igual C, comprehendido entre lados proporcionaes (20. 3.); logo são semelhantes; logo o terceiro lado MP está para o terceiro MQ, como CP está para CM ou CA. Mas a proporção $CP : CA :: CA : CQ$ dá, *dividendo*, $CP : CA :: CA —$

CP : CQ — CA, ou CP : CA :: AP : AQ ; logo MP : MQ :: AP : AQ.

Probl... relativos ao Livro III.

PROBLEMA I.

Dividir huma li..a recta dada em quantas partes iguaes se quizer ou em partes proporcionaes a linhas dadas.

I. Seja propos.. dividir a linha AB (fig. 137.) em cinco partes igua..; pelo extremo A tire-se a recta indefinida AG, e ..omando AC de huma grandeza qualquer, leve-se AC cinco vezes sobre AG. Ajunte-se o ultimo ponto ..e ..ivisão G e o extremo B pela linha GB, depo.. tire-se CI parallela a GB; digo que AI será a quinta parte da linha AB, e assim levando AI cinco vezes sobre AB, a linha AB ficará dividida em cinco partes iguaes.

Porque, como CI he parallela a GB, os lados AG, AB, estão cortados proporcionalmente em C e em I. Mas AC he a quinta parte de AG; logo AI he a quinta parte de AB.

II. Seja proposto dividir a linha AB (fig. 138.) em partes proporcionaes ás linhas dadas P, Q, R. Pelo extremo A tire-se a indefinida AG, tome-se AC = P, CD = Q, DE = R, ajuntem-se os extremos E e B, e pelos pontos C e D, tirem-se CI, DK, parallelas a EB; digo que a linha AB ficará dividida em partes AI, IK, KB, proporcionaes ás linhas dadas P, Q, R.

Porque, por causa das parallelas CI, DK, EB, as partes AI, IK, KB, são proporcionaes ás partes AC, CD, DE (15.) e por construcção estas são iguaes ás linhas dadas P, Q, R.

PROBLEMA II.

Achar huma quarta proporcional a tres linhas dadas A, B, C.

Tirem-ſe as duas linhas indefinidas DE, DF, (fig. 139.) que façaõ qualquer angulo. Sobre DE tome-ſe DA $=$ A e DB $=$ B, ſobre DF tome-ſe DC $=$ C, ajunte-ſe AC, e pelo ponto B tire-ſe BX parallela a AC, digo que DX ſerá a quarta proporcional pedida. Porque, como BX he parallela a AC, temos a proporçáo DA : DB : : DC : DX; ora os tres primeiros termos deſta proporçáo ſáo iguaes ás tres linhas dadas; logo DX he a quarta proporcional pedida.

Corollario. Achar-ſe-ha do meſmo modo huma terceira proporcional ás duas linhas dadas A, B, porque ella ſerá a meſma que a quarta proporcional ás tres linhas A, B, B.

PROBLEMA III.

Achar huma meia proporcional entre duas linhas dadas A *e* B.

Sobre a linha indefinida DF (fig. 140.) tome-ſe DE $=$ A, e EF $=$ B; ſobre a linha total DF como diametro deſcreva-ſe a ſemi-circumferencia DGF; no ponto E levante-ſe ſobre o diametro a perpendicular EG, que encontre a circumferencia em G; digo que EG ſerá a meia proporcional pedida.

Porque a perpendicular GE, abaixada de hum ponto da circumferencia ſobre o diametro, he meia proporcional entre os dois ſegmentos do diametro DE, EF (23.): ora eſtes ſegmentos ſão iguaes ás linhas dadas A e B.

PROBLEMA IV.

Dividir a linha dada AB (fig. 141.) *em duas partes, de maneira que a maior ſeja meia proporcional entre a linha inteira e a outra parte.*

Ao extremo B da linha AB levante-ſe a perpendicular BC igual á metade de AB; do ponto C como centro, e com o raio CB deſcreva-ſe huma circumferencia; tire-ſe AC que cortará a circumferencia em D, e tome-ſe AF = AD: digo que a linha AB ficará dividida no ponto F da maneira pedida, quer dizer que teremos AB : AF :: AF : FB.

Porque AB, que he perpendicular ao extremo do raio CB, he huma tangente; e ſe prolongarmos AC até encontrar de novo a circumferencia em E, teremos (50.) AE : AB :: AB : AD; logo, *dividendo*, AE—AB : AB :: AB—AD : AD. Mas como o raio BC he metade de AB, o diametro DE he igual á AB, e por conſequencia AE — AB = AD = AF: tambem temos, porque AF = AD, AB — AD = FB; logo AF : AB :: FB : AD ou AF, logo, *invertendo*, AB : AF :: AF : FB.

Scholio. Eſta ſorte de diviſão da linha AB ſe chama diviſão em *media e extrema razão*. Veremos alguns uſos. Note-ſe que a ſecante AE eſtá dividida em media e extrema razão no ponto D; porque, como AB = DE, temos AE : DE :: DE : AD.

PROBLEMA V.

Por hum ponto dado A (fig. 142.) *no angulo dado* BCD *tirar a linha* BD, *de maneira que as partes* AB, AD, *comprehendidas entre o ponto* A *e os dois lados do angulo, ſejão iguaes.*

Pelo ponto A tire-ſe AE parallella a CD, tome-ſe BE = CE, e pelos pontos B e A tire-ſe BAD, que ſerá a linha pedida.

Porque, ſendo AE parallela a CD, temos BE : EC :: BA : AD. Ora BE = EC, logo BA = AD.

PROBLEMA VI.

Fazer hum quadrado equivalente a hum parallelogrammo ou a hum triangulo dado.

1.° Seja ABCD (fig. 143.) o parallelogrammo dado, AB a ſua baſe, DE a ſua altura. Entre AB e DE procure-ſe huma meia proporcional XY (pr. 3.); digo que o quadrado feito ſobre XY ſerá equivalente ao parallelogrammo ABCD. Porque, por conſtrucção,

$AB : XY :: XY : DE$; logo $\overline{XY}^2 = AB \times DE$. Ora $AB \times DE$ he a medida do parallelogrammo, e

$\overline{XY}^2$ a do quadrado; logo ſão equivalentes.

2.° Seja ABC o triangulo dado (fig. 144.), BC a ſua baſe, AD a ſua altura. Tome-ſe huma meia proporcional entre BC e a metade de AD, e ſeja XY eſta media; digo que o quadrado feito ſobre XY ſerá equivalente ao triangulo ABC.

Porque, como $BC : XY :: XY : \frac{1}{2} AD$, daqui

reſulta $\overline{XY}^2 = BC \times \frac{1}{2} AD$; logo o quadrado feito ſobre XY he equivalente ao triangulo ABC.

PROBLEMA VII.

Fazer ſobre a linha dada AD (fig. 145.) *hum rectangulo* ADEX *equivalente ao rectangulo dado* ABFC.

Procure-ſe huma quarta proporcional ás tres linhas AD, AB, AC, e ſeja AX eſta quarta proporcional, digo que o rectangulo feito ſobre AD e AX ſerá equivalente ao rectangulo ABFC.

Porque, como temos $AD : AB :: AC : AX$; daqui reſulta $AD \times AX = AB \times AC$; logo o rectangulo ADEX he equivalente ao rectangulo ABFC.

PROBLEMA VIII.

Achar em linhas a razão do rectangulo das duas linhas dadas A, B (fig. 148.) *para o rectangulo das duas linhas dadas C, D.*

Seja X huma quarta proporcional ás tres linhas B, C, D; digo que a razão das duas linhas A e X ſerá igual á dos dois rectangulos $A \times B$, $C \times D$.

Porque, como temos $B : C :: D : X$, daqui reſulta $C \times D = B \times X$; logo $A \times B : C \times D :: A \times B : B \times X :: A : X$.

Corollario. Logo, para ter a razão dos quadrados feitos ſobre as linhas dadas A e C, procure-ſe huma terceira proporcional X ás linhas A e C, de ſorte que ſeja $A : C :: C : X$, e ter-ſe-ha $A^2 : C^2 :: A : X$.

PROBLEMA IX.

Achar em linhas a razão do producto das tres linhas dadas A, B, C (fig. 149.) *para o producto das tres linhas dadas* P, Q, R.

A's tres linhas dadas P, A, B, procure-ſe huma quarta proporcional X; ás tres linhas dadas C, Q, R, procure-ſe outra quarta proporcional Y. As duas linhas X, Y eſtarão entre ſi como os productos $A \times B \times C$, $P \times Q \times R$.

Porque, como $P : A :: B : X$, temos $A \times B = P \times X$; e multiplicando ambos os membros por C, $A \times B \times C = C \times P \times X$. Do meſmo modo, como $C : Q :: R : Y$, daqui reſulta $Q \times R = C \times Y$; e multiplicando ambos os membros por P, temos $P \times Q \times R = P \times C \times Y$; logo o producto $A \times B \times C$ eſtá para o producto $P \times Q \times R$ como $C \times P \times X$ eſtá para $P \times C \times Y$, ou como X eſtá para Y.

PROBLEMA X.

Achar hum triangulo equivalente a hum polygono dado.

Seja ABCDE (fig. 146.) o polygono dado. Tire-se a diagonal CE, que corta o triangulo CDE; pelo ponto D tire-se DF parallela a CE até o encontro de AE prolongado; ajunte-se CF, e o polygono ABCDE será equivalente ao polygono ABCF que tem menos hum lado.

Porque, os triangulos CDE, CFE tem a base commum CE; tambem tem a mesma altura, porque os seus vertices D, F, estão situados sobre huma linha DF parallela á base; logo estes triangulos são equivalentes. Ajuntando a cada parte a figura ABCE, ter-se-ha de huma parte o polygono ABCDE, e da outra o polygono ABCF, que serão equivalentes.

Póde-se igualmente cortar o angulo B, substituindo ao triangulo ABC o triangulo equivalente AGC, e assim o pentagono ABCDE ficará convertido em hum triangulo equivalente GCF.

O mesmo se praticará com qualquer outra figura, porque, diminuindo de cada vez hum lado, se virá a formar o triangulo equivalente.

Scholio. Já vimos que todo o triangulo se póde converter em hum quadrado equivalente (pr. 6.), assim sempre se achará hum quadrado equivalente a huma figura rectilinea dada. A isto se chama *quadrar* a figura rectilinea, ou achar a sua *quadratura.*

O problema da *quadratura do circulo* consiste em achar hum quadrado equivalente a hum circulo, cujo diametro he dado.

PROBLEMA XI.

Fazer hum quadrado que ſeja igual á ſomma ou á differença de dois quadrados dados.

Sejão A e B (fig. 147.) os lados dos quadrados dados :

1.° Se quizermos achar hum quadrado igual á ſomma deſtes quadrados, tiraremos as duas linhas indefinidas ED, EG em angulo recto ; tomaremos ED = A e EG = B, uniremos DG, e DG ſerá o lado do quadrado pedido.

Porque, ſendo rectangulo o triangulo DEG, o quadrado feito ſobre DG he igual á ſomma dos quadrados feitos ſobre ED, e EG.

2.° Se quizermos achar hum quadrado igual á differença dos quadrados dados, formaremos da meſma maneira o angulo recto FEH, tomaremos GE igual ao menor dos lados A e B ; do ponto G como centro, e com hum raio GH igual ao outro lado, deſcreveremos hum arco que corte EH em H ; digo que o quadrado feito ſobre EH ſerá igual á differença dos quadrados feitos ſobre as linhas A e B.

Porque o triangulo GEH he rectangulo, a hypoténuſa GH = A, e o lado GE = B ; logo o quadrado feito ſobre EH, &c.

Scholio. Deſta maneira ſe acha hum quadrado igual á ſomma de quantos quadrados ſe quizer ; porque a conſtrucção que reduz dois a hum, reduzirá tres a dois, e eſtes a hum, e aſſim dos mais. O meſmo ſeria ſe alguns dos quadrados ſe deveſſem ſubtrahir da ſomma dos outros.

PROBLEMA XII.

Conſtruir hum quadrado que ſeja para o quadrado dado ABCD, (fig. 150.) *como a linha* M *eſtá para a linha* N.

Sobre linha indefinida EG, tome-ſe EF $=$ M e FG $=$ N; ſobre EG, como diametro, deſcreva-ſe huma ſemi-circumferencia, e no ponto F levante-ſe ſobre o diametro a perpendicular FH. Do ponto H tirem-ſe as cordas HG, HE, que ſe prolongaráõ indefinidamente: ſobre a primeira tome-ſe HK igual ao lado AB do quadrado dado, e pelo ponto K tire-ſe KI parallela a EG; digo que HI ſerá o lado do quadrado pedido.

Porque, em virtude das parallelas KI, GE, temos HI : HK : : HE : HG, logo $\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 :: \overline{HE}^2 : \overline{HG}^2$; mas no triangulo rectangulo EHG (23.), o quadrado de HE eſtá para o quadrado de HG como o ſegmento EF eſtá para o ſegmento FG, ou como M eſtá para N; logo $\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 ::$ M : N. Mas HK $=$ AB; logo o quadrado feito ſobre HI eſtá para o quadrado feito ſobre AB como M eſtá para N.

PROBLEMA XIII.

Sobre o lado FG (fig. 129.), *homologo a* AB, *deſcrever hum polygono ſemelhante ao polygono dado* ABCDE.

No polygono dado tirem-ſe as diagonaes AC, AD. No ponto F faça-ſe o angulo GFH $=$ BAC, e no ponto G o angulo FGH $=$ ABC; as linhas FH, GH ſe cortaráõ em H, e FGH ſerá hum triangulo ſemelhante a ABC: do meſmo modo, ſobre FH, homologo a AC, conſtrua-ſe o triangulo FIH ſemelhante a ADC, e ſobre FI, homologo a AD, conſtrua-ſe o triangulo FIK ſemelhante a ADE. O polygono FGHIK ſerá o polygono pedido, ſemelhante a ABCDE.

Porque, eſtes dois polygonos ſão compoſtos do meſmo numero de triangulos ſemelhantes e ſemelhantemente diſpoſtos (26.).

PROBLEMA XIV.

Sendo dadas duas figuras ſemelhantes, conſtruir huma figura ſemelhante que ſeja igual á ſua ſomma, ou á ſua differença.

Sejão A e B dois lados homologos das figuras dadas; procure-ſe hum quadrado igual á ſomma ou á differença dos quadrados feitos ſobre A e B; ſeja X o lado deſte quadrado, X ſerá na figura pedida o lado homologo a A e a B nas figuras dadas. Depois conſtruir-ſe-ha a figura pelo problema precedente.

Porque, as figuras ſemelhantes ſão como os quadrados dos lados homologos; ora o quadrado do lado X he igual á ſomma ou á differença dos quadrados feitos ſobre os lados homologos A e B; logo a figura feita ſobre o lado X he igual á ſomma ou á differença das figuras ſemelhantes feitas ſobre os lados A e B.

PROBLEMA XV.

Conſtruir huma figura ſemelhante a huma figura dada, e que eſteja para eſta figura na razão dada de M *para* N.

Seja A hum lado da figura dada, X o lado homologo na figura procurada; o quadrado de X deverá ſer para o quadrado de A como M he para N (27.). Logo achar-ſe-ha X pelo problema XII; conhecendo X, ſe completará o mais pelo problema XIII.

PROBLEMA XVI.

Conſtruir huma figura ſemelhante á figura P (fig. 151.) *e equivalente á figura* Q.

Procure-ſe o lado M do quadrado equivalente á figura P, e o lado N do quadrado equivalente á figura Q. Seja X huma quarta proporcional ás tres linhas dadas M, N, AB; ſobre o lado X, homólogo a AB, deſcreva-ſe huma figura ſemelhante á figura P; digo que ella tambem ha de ſer equivalente á figura Q.

Porque, chamando Y a figura feita ſobre o lado X, teremos $P : Y :: \overline{AB}^2 : \overline{X}^2$; mas, por conſtrucção, $AB : X :: M : N$ ou $\overline{AB}^2 : X^2 :: M^2 : N^2$. Logo $P : Y :: M^2 : N^2$. Mas tambem temos por conſtrucção, $M^2 = P$, e $N^2 = Q$; logo $P : Y :: P : Q$; logo $Y = Q$; logo a figura Y he ſemelhante á figura P, e equivalente á figura Q.

PROBLEMA XVII.

Conſtruir hum rectangulo equivalente a hum quadrado dado C, *e cujos lados adjacentes fação huma ſomma dada* AB (fig. 152.).

Sobre AB, como diametro, deſcreva-ſe huma ſemi-circumferencia; tire-ſe parallelamente ao diametro a linha DE a huma diſtancia AD igual ao lado do quadrado dado C.

Do ponto E, em que a parallela corta a circumferencia, abaixe-ſe ſobre o diametro a perpendicular EF; digo que AF e BF ſerão os lados do rectangulo pedido.

Porque, a ſua ſomma he igual a AB, e o ſeu rectangulo AF × FB he igual ao quadrado de EF (23.), ou ao quadrado de AD; logo eſte rectangulo he equivalente ao quadrado dado C.

Scholio. Para que ſeja poſſivel o problema, he neceſſario que a diſtancia AD não ſeja maior que o raio, iſto he, que o lado do quadrado C não exceda a metade da linha AB.

PROBLEMA XVIII.

Conſtruir hum rectangulo equivalente a hum quadrado C (*fig.* 153.), *e cujos lados adjacentes tenhão entre ſi a differença dada* AB.

Sobre a linha dada AB, como diametro, deſcreva-ſe huma circumferencia; ao extremo do diametro tire-ſe a tangente AD igual ao lado do quadrado C. Pelo ponto D e o centro O tire-ſe a ſecante DE; digo que DE e DF ſerão os lados adjacentes do rectangulo pedido.

Porque, 1.° a differença deſtes lados he igual ao diametro EF ou AB; 2.° o rectangulo DE × DF he igual a $\overline{AD}^2$ (39.); logo eſte rectangulo ſerá equivalente ao quadrado dado C.

PROBLEMA XIX.

Achar a commum medida, ſe a houver, entre a diagonal e o lado do quadrado.

Seja ABCG (fig. 154.) hum quadrado qualquer, AC a ſua diagonal.

Leve-ſe CB ſobre CA tantas vezes quantas nella ſe contiver (prob. 17, liv. 2.), e para iſto, deſcreva-ſe do centro C e com o raio CB o ſemicirculo DBE; he claro que CB ſe contém huma vez em AC com o reſto AD; logo o reſultado da primeira operação he o quociente 1 com o reſto AD, que ſe deve comparar com BC ou ſua igual AB.

Póde-ſe tomar AF = AD, e levar realmente AF ſobre AB; achar-ſe-hia que ſe contém duas vezes com hum reſto; mas como eſte reſto e os ſeguintes vão diminuindo, e bem depreſſa eſcaparião pela ſua pequenez, ſeria eſte hum meio mechanico imperfeito, do qual nada ſe poderia concluir para decidir ſe as linhas AC, CB, tem ou não tem, entre ſi medida commum; ora ha hum meio muito ſimples de evitar as linhas decreſcentes, e de empregar linhas que ficão ſempre da meſma grandeza.

Com effeito, o angulo ABC ſendo recto, AB he tangente e AE ſecante tiradas do meſmo ponto; de ſorte que temos (30.) AD : AB : : AB : AE. Aſſim na ſegunda operação, em que ſe trata de comparar AD com AB, ſe póde, em vez da razão de AD para AB, tomar a de AB : AE; ora AB ou ſua igual CD ſe contém duas vezes em AE com o reſto AD; logo o reſultado da ſegunda operação he o quociente 2 com o reſto AD que ſe deve comparar com AB.

A terceira operação, que conſiſte em comparar AD com AB, ſe reduzirá do meſmo modo a comparar AB ou ſua igual CD com AE, e ſerá 2 o quociente e AD o reſto.

Iſto moſtra que a operação nunca terminará, e que portanto não ha medida commum entre a diagonal e o lado do quadrado; verdade já conhecida pela arithmetica (porque eſtas duas linhas eſtão entre ſi : : $\sqrt{2} : 1$ (11.)), mas que adquire maior gráo de clareza na reſolução geometrica.

Scholio. Logo não he poſſivel tambem achar a razão exacta em numeros da diagonal para o lado do quadrado; mas póde-ſe approximar quanto ſe quizer por meio da fracção continua, que he igual a eſta razão. A primeira operação deo por quociente 1; a ſegunda e todas as outras ao infinito dão 2; aſſim a fracção de que ſe trata he

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{\&c. ao infinito.}}}}}$$

Por exemplo, ſe calcularmos eſta fracção até o quarto termo inclusivamente, se acha que o seu valor he $1\frac{12}{29}$ ou $\frac{41}{29}$; de sorte que a razão approximada da diagonal para o lado do quadrado he . : 41 : 29. Achar-se-hia huma razão mais approximada, calculando maior numero de termos.

LIVRO IV.

POLYGONOS REGULARES, E MEDIDA DO CIRCULO.

DEFINIÇÃO.

Chama-se *polygono regular* aquelle que he ao mesmo tempo equiangulo e equilatero.

Ha polygonos regulares de todo o numero de lados. O triangulo equilatero he o de tres lados, e o quadrado o de quatro.

PROPOSIÇÃO I.

THEOREMA.

Dois polygonos regulares do mesmo numero de lados são duas figuras semelhantes.

Sejão, por exemplo, os dois hexagonos regulares (fig. 155.) ABCDEF, *abcdef*; a somma dos angulos he a mesma em huma e outra figura; ella he igual a oito angulos rectos (21. 1.). O angulo A he a sexta parte desta somma, bem como o angulo *a*; logo os dois angulos A e *a* são iguaes; por consequencia o mesmo acontece aos angulos B e *b*, aos angulos C e *c*, &c.

Demais, como, pela natureza destes polygonos, os lados AB, BC, CD, &c. são iguaes, bem como *ab*, *bc*, *cd*, &c., he claro que temos as proporções AB : *ab* : : BC : *bc* : : CD : *cd*, &c.; logo [illegible] figuras de que se trata tem os angulos iguaes e os lados homologos proporcionaes; logo são semelhantes ([illegible] liv. 3.).

Corollario. Os perimetros de dois polygonos regulares do mesmo numero de lados estão entre si como os lados homologos, e as suas superficies estão como os quadrados d'esses mesmos lados (27. 3.).

Scholio. O angulo de hum polygono regular se determina pelo numero dos seus lados, como o de hum polygono equiangulo. *Vê a prop.* XXI. *livr.* I.

PROPOSIÇÃO II.

THEOREMA.

Todo o polygono regular póde ser inscrito no circulo, e póde ser circunscrito ao mesmo circulo.

Seja ABCDE, &c. (fig. 156.) o polygono de que se trata; imaginemos que passa huma circumferencia pelos tres pontos A, B, C; seja O o seu centro, e OP a perpendicular abaixada sobre o meio do lado BC; ajunte-se AO e OD.

O quadrilatero OPCD e o quadrilatero OPBA podem ser sobrepostos; com effeito o lado OP he commum, o angulo OPC = OPB, porque são rectos; logo o lado PC se applicará sobre o seu igual PB, e o ponto C cahirá em B. De mais, pela natureza do polygono, o angulo PCD = PBA; logo CD tomará a direcção BA, e como CD = BA, o ponto D cahirá em A, e os dois quadrilateros coincidirão inteiramente hum com outro. Logo a distancia OD he igual a AO, e por consequencia a circumferencia que passa pelos tres pontos A, B, C, passará tambem pelo ponto D. Mas, por hum raciocinio semelhante, se provará que a circumferencia que passa pelos tres pontos B, C, D, passará pelo vertice seguinte E, e assim em diante;

logo a mesma circumferencia que passa pelos pontos A, B, C, passa por todos os vertices dos angulos do polygono, e o polygono está inscrito nesta circumferencia.

Em segundo lugar, a respeito desta circumferencia, todos os lados AB, BC, &c. são cordas iguaes, logo distão igualmente do centro (8, 2.); logo se do ponto O, como centro, e com o raio OP, descrevermos huma circumferencia, ella tocará o lado BC e todos os outros lados do polygono cada hum no meio, e a circumferencia ficará inscrita no polygono, ou o polygono circunscrito á circumferencia.

Scholio I. O ponto O, centro commum do circulo inscrito e do circulo circunscrito, se póde tambem considerar como centro do polygono, e por esta razão se chama *angulo central* o angulo AOB formado pelos dois raios tirados aos extremos do mesmo lado AB.

Como todas as cordas AB, BC, &c. são iguaes, he claro que todos os angulos centraes são iguaes, e assim o valor de cada hum se acha dividindo quatro angulos rectos pelo numero dos lados do polygono.

Scholio II. Para inscrever hum polygono regular de hum certo numero de lados em huma circumferencia dada, basta dividir a circumferencia em tantas partes iguaes quantos lados o polygono deve ter; porque, sendo iguaes os arcos, as cordas AB, BC, CD, &c. (fig. 158.) serão iguaes; os triangulos ABO, BOC, COD, &c. tambem serão iguaes, porque são equilateros entre si; logo todos os angulos ABC, BCD, CDE, &c. serão iguaes; logo a figura ABCDE &c. será hum polygono regular.

PROPOSIÇÃO III.

PROBLEMA.

Inſcrever hum quadrado em huma circumferencia dada.

Tirem-ſe dois diametros AC, BD (fig. 157.), que ſe cortem em angulos rectos; ajuntem-ſe os extremos A, B, C, D, e a figura ABCD ſerá o quadrado inſcrito. Porque, ſendo iguaes os angulos AOB, BOC, &c. as cordas AB, BC, &c. são iguaes.

Scholio. Como o triangulo BOC he rectangulo e iſoſceles, temos (11. 3.) BC : BO : : $\sqrt{2}$. 1; *logo o lado do quadrado inſcrito eſtá para o raio como a raiz quadrada de 2 eſtá para unidade.*

PROPOSIÇÃO IV.

PROBLEMA

Inſcrever hum hexagono regular e hum triangulo equilatero em huma circumferencia dada.

Supponhamos o problema reſolvido, e ſeja AB (fig. 158.) hum lado do hexagono inſcrito; ſe tirarmos os raios AO, OB, digo que o triangulo AOB ſerá equilatero.

Porque o angulo AOB he a ſexta parte de quatro angulos rectos; aſſim tomando o angulo recto por unidade, teremos AOB $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; os outros dois angulos ABO, BAO, do meſmo triangulo valem juntos $2 - \frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{3}$, e como são iguaes, cada hum delles $= \frac{2}{3}$; logo o triangulo ABO he equilatero; logo o lado do hexagono inſcrito he igual ao raio.

Daqui se segue que para inscrever hum hexagono regular em huma circumferencia dada, se deve levar o raio seis vezes sobre a circumferencia, acabando no ponto em que começára.

Inscrito o hexagono ABCDEF, se ajuntarmos alternativamente os vertices dos angulos, formaremos o triangulo equilatero ACE.

Scholio. A figura ABCO he hum parallelogrammo e até hum losango, porque AB = BC = CO = AO; logo (14. 3.) a somma dos quadrados das diagonaes $\overline{AC}^2 + \overline{BO}^2$, he igual á somma dos quadrados dos lados, que he $4\overline{AB}^2$ ou $4\overline{BO}^2$; tirando de huma e outra parte $\overline{BO}^2$, ficará $\overline{AC}^2 = 3\overline{BO}^2$; logo $\overline{AC}^2 : \overline{BO}^2 :: 3 : 1$, ou $AC : BO :: \sqrt{3} : 1$; logo *o lado do triangulo equilatero inscrito está para o raio como a raiz quadrada de 3 está para a unidade.*

PROPOSIÇÃO V.

PROBLEMA.

Inscrever em hum circulo dado (fig. 159.) hum decagono regular, depois hum pentagono e hum pentedecagono.

Divida-se o raio OA em media e extrema razão no ponto M (prob. 4. liv. 3.), tome-se a corda AB igual ao maior segmento OM, e AB será o lado do decagono regular que se deverá levar dez vezes sobre a circumferencia.

Porque, tirando MB, temos por construcção AO : OM : : OM : AM; ou, por ser AB = OM, AO : AB : : AB : AM; logo os triangulos ABO, AMB, tem hum angulo commum A comprehendido entre lados proporcionaes; logo são semelhantes (20. 3.). O triangulo AOB he isosceles; logo o triangulo AMB tambem he isosceles, e temos AB

= BM; tambem AB = OM; logo MB = OM; logo o triangulo BMO he iſoſceles.

O angulo AMB, externo ao triangulo iſoſceles BMO, he duplo do interno O (20. 1.); ora o angulo AMB = MAB; logo o triangulo OAB he tal que cada angulo da baſe OAB ou OBA he duplo do angulo do vertice O; logo os tres lados do triangulo valem cinco vezes o angulo O, e aſſim o angulo O he a quinta parte de dois angulos rectos, ou a decima de quatro; logo o arco AB he a decima parte da circumferencia, e a corda AB he o lado do decagono regular.

Corollario I. Se ajuntarmos dois a dois os angulos do decagono regular, formaremos o pentagono regular ACEGI.

Corollario II. Sendo ſempre AB o lado do decagono, ſeja AL o lado do hexagono; então o arco BL ſerá, ácerca da circumferencia, $\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$, ou $\frac{1}{15}$; logo a corda BL ſerá o lado do pentedecagono ou polygono regular de 15 lados. Vê-ſe ao meſmo tempo que o arco CL he o terço de CB.

Scholio. Dado hum polygono regular inſcrito, ſe dividirmos os arcos ſubtendidos pelos ſeus lados em duas partes iguaes, e tirarmos as cordas dos ſemi-arcos, eſtes formarão hum novo polygono regular de hum numero de lados duplo. Aſſim he claro que o quadrado póde ſervir para inſcrever ſucceſſivamente os polygonos regulares de 8, 16, 32, &c. lados. Do meſmo modo o hexagono ſervirá para inſcrever os polygonos regulares de 12, 24, 48, &c. lados; o decagono, os polygonos de 20, 40, 80, &c. lados. (1).

(1) Penſava-ſe até agora que eſtes polygonos erão os unicos que ſe podião inſcrever pela geometria elementar,

PROPOSIÇÃO VI.

PROBLEMA.

Sendo dado o polygono regular inscrito ABCD, &c. (fig. 160.) *circunscrever á mesma circumferencia hum polygono semelhante.*

Ao ponto T, meio do arco AB, tire-se a tangente GH, que será parallela a AB (10. 2.); faça-se o mesmo ao meio de cada hum dos outros arcos BC, CD, &c.; estas tangentes formaráõ por suas intersecções o polygono regular circunscrito GHIK, &c. semelhante ao polygono inscrito.

He facil de ver que os tres pontos O, B, H, estão em linha recta, porque os triangulos rectangulos OTH, OHN, tem a hypoténusa commum OH, e o lado OT = ON; logo são iguaes (18. 1.); logo o angulo TOH = HON, e por consequencia a linha OH passa pelo ponto B, meio do arco TN. Pela mesma razão, o ponto I está no prolongamento de OC, &c. Mas, como GH he parallela a AB e HI a BC, o angulo GHI = ABC (28. 1.); do mesmo modo HIK = BCD, &c.; logo os angulos do polygono circunscrito são iguaes aos do polygono inscrito. Além disto, por causa das mesmas parallelas, temos GH : AB :: OH : OB, e HI : BC :: OH : OB; logo GH : AB :: HI : BC.

---

ou, que vale o mesmo, pela resolução das equações do primeiro e do segundo grao; mas hum geometra de Brunswick, chamado Carl. Fred. Gauss provou, em huma Obra intitulada *Disquisitiones Arithmeticæ*, *Lipsiæ*, 1801, que se póde inscrever por semelhantes meios o polygono regular de dezesete lados, e em geral o de $2^n + 1$ lados, com tanto que $2^n + 1$ seja numero inteiro.

Mas AB = BC, logo GH = HI. Pela mesma razão HI = IK, &c.; logo os lados do polygono circunscrito são iguaes entre si; logo o polygono he regular e semelhante ao polygono inscrito.

Corollario I. Reciprocamente, se fosse dado o polygono circunscrito GHIK, &c., e quizessemos por meio delle traçar o polygono inscrito ABC, &c. he claro que bastaria tirar aos vertices dos angulos G, H, I, &c. do polygono dado as linhas OG, OH, &c., que encontrarião a circumferencia nos pontos A, B, C, &c; depois ajuntariamos estes pontos pelas cordas AB, BC, &c. que formarião o polygono inscrito. No mesmo caso, seria tambem possivel ajuntar simplesmente os pontos de contacto T, N, P, &c. pelas cordas TN, NP, &c., o que formaria igualmente hum polygono inscrito semelhante ao circunscrito.

Corollario II. Logo podemos circunscrever a hum circulo dado todos os polygonos regulares que sabemos inscrever no circulo, e reciprocamente.

PROPOSIÇÃO VII.

THEOREMA.

A área de hum polygono regular he igual ao seu perimetro multiplicado pela metade do raio do circulo inscrito.

Seja, por exemplo, o polygono regular GHIK, &c (fig. 160.): o triangulo GOH tem por medida $GH \times \frac{1}{2} OT$, o triangulo OHI tem por medida $HI \times \frac{1}{2} ON$. Mas $ON = OT$; logo os dois triangulos tem por medida $(GH + HI) \times \frac{1}{2} OT$. Continuando assim para os outros triangulos, veremos que a somma de todos os triangulos, ou o polygono inteiro, tem por medida a somma das bases GH, HI, IK, &c., ou o perimetro do polygono, multiplicado por $\frac{1}{2} OT$, metade do raio do circulo inscrito.

Scholio. O raio do circulo inscrito OT não he mais do que a perpendicular abaixada do centro sobre hum dos lados; algumas vezes se chama *apothéma* do polygono.

PROPOSIÇÃO VIII.

THEOREMA.

Os perimetros dos polygonos regulares do mesmo numero de lados estão como os raios dos circulos circumscritos, e tambem como os raios dos circulos inscritos; as suas superficies estão como os quadrados dos mesmos raios.

Seja AB hum lado de hum dos polygonos de que se trata (fig. 161.), O o seu centro; e por consequencia OA o raio do circulo circunscrito, e OD perpendicular sobre AB, o raio do circulo inscrito; seja igualmente *ab* o lado d'outro polygono semelhante, *o* o seu centro, *oa* e *od* os raios dos circulos circunscrito e inscrito: os perimetros dos dois polygonos estão entre si como os lados AB, e *ab*. Mas os angulos A e *a* são iguaes, porque cada hum he metade do angulo do polygono; o mesmo acontece aos angulos B e *b*; logo os triangulos ABO, *abo* são semelhantes, bem como os triangulos rectangulos ADO, *ado*; logo AB: *ab* :: AO : *ao* : : DO: *do*; logo os perimetros dos polygonos estão entre si como os raios AO, *ao*, dos circulos circunscritos, e tambem como os raios DO, *do*, dos circulos inscritos.

As superficies destes mesmos polygonos estão entre si como os quadrados dos lados homologos AB, *ab*; por consequencia tambem estão como os quadrados dos raios dos circulos circunscritos AO, *ao*, ou como os quadrados dos raios dos circulos inscritos OD, *od*.

PROPOSIÇÃO IX.

LEMMA.

Toda a linha curva ou polygona que envolve de hum a outro extremo a linha convexa AMB (fig. 162.) *he mais comprida que a linha envolvida* AMB.

Já dissemos que por linha *convexa* entendemos huma linha curva ou polygona, ou parte curva e parte polygona, tal que huma linha recta não a póde cortar em mais de dois pontos. Se a linha AMB tivesse partes reintrantes ou sinuosidades, ella deixaria de ser convexa, porque he facil de ver que huma linha recta poderia corta-la em mais de dois pontos. Os arcos de circulo são essencialmente convexos; mas a proposição de que se trata agora se estende a huma linha qualquer que encha a condição requerida.

Isto posto, se a linha AMB não for menor que todas as que a envolvem, existirá entre estas huma linha mais curta que todas as outras, a qual será menor que AMB, ou, quando muito, igual a AMB. Seja ACDEB esta linha envolvente; entre as duas linhas tire-se onde se quizer a recta PQ, que não encontre a linha AMB, ou ao menos que a toque sómente. A recta PQ he mais curta que PCDEQ; logo, se á parte PCDEQ substituirmos a linha recta PQ, teremos a linha envolvente APQB mais curta que APDQB. Mas, por hypothese, esta deve ser a mais curta de todas; logo esta hypothese não póde subsistir; logo todas as linhas envolventes são mais compridas que AMB.

Scholio. Demonstrar-se-ha absolutamente da mesma maneira que huma linha convexa e reintrante sobre si mesma AMB, (fig. 163.) he mais curta que toda a linha que a envolvesse de todas as partes, quer a linha envolvente FHG toque AMB em hum ou muitos pontos, quer ella a cerque sem a tocar.

PROPOSIÇÃO X.

LEMMA.

Sendo dadas duas circumferencias concentricas, sempre se póde inscrever na maior hum polygono regular, cujos lados não encontrem a menor, e tambem se póde circunscrever a menor hum polygono regular, cujos lados não encontrem a maior; de maneira que em hum e outro caso os lados do polygono descrito fiquem fechados entre as duas circumferencias.

Sejão CA, CB, (fig. 164.) os raios das duas circumferencias dadas. Ao ponto A tire-se a tangente DE terminada na grande circumferencia em D e E. Inscreva-se na grande circumferencia hum dos polygonos regulares que se podem inscrever pelos problemas precedentes, dividão-se os arcos subtendidos pelos lados em duas partes iguaes, e tirem-se as cordas dos semi-arcos; ter-se-ha hum polygono regular de hum numero de lados duplo. Continue-se a bissecção dos arcos até se chegar a hum arco menor que DBE. Seja MBN este arco, (cujo meio supponho em B); he claro que a corda MN estará mais distante do centro do que DE, e assim o polygono regular de que MN he o lado não poderia encontrar a circumferencia da qual CA he o raio.

Postas as mesmas cousas, ajunte-se CM e CN que encontrem a tangente DE em P e Q; PQ será o lado de hum polygono circunscrito á menor circumferencia, semelhante ao polygono inscrito na maior, da qual MN he o lado. Ora he claro que o polygono circunscrito que tem por lado PQ não póde encontrar a maior circumferencia, porque CP he menor que CM.

Logo, pela mesma construcção, se póde descrever hum polygono regular inscrito na grande circumferencia, e hum polygono semelhante circunscrito á menor;

os quaes terão os seus lados comprehendidos entre as duas circumferencias.

Scholio. Se tivermos dois sectores concentricos FCG, ICH, poderemos do mesmo modo inscrever no maior huma *porção de polygono regular*, ou circunscrever ao menor huma porção de polygono semelhante, de sorte que os contornos dos dois polygonos fiquem comprehendidos entre as duas circumferencias: bastará dividir o arco FBG successivamente em 2, 4, 8, 16, &c. partes, até chegarmos a huma parte menor que DBE.

Chamamos aqui *porção de polygono regular* a figura terminada por huma serie de cordas iguaes inscritas no arco FG de hum a outro extremo. Esta porção tem as propriedades principaes dos polygonos regulares; tem os angulos iguaes, e os lados iguaes, he ao mesmo tempo inscriptivel e circunscriptivel ao circulo; entre tanto ella não faria parte de hum polygono regular propriamente dito, senão em quanto o arco subtendido por hum dos seus lados fosse huma parte aliquota da circumferencia.

PROPOSIÇÃO XI.

THEOREMA.

As circumferencias dos circulos estão como os raios, e as suas superficies como os quadrados dos raios.

Designemos, por brevidade, por *circ.* CA (fig. 165.) a circumferencia, cujo raio he CA; digo que teremos *circ.* CA : *circ.* OB :: CA : OB.

Porque, se não tiver lugar esta proporção, CA será para OB como *circ.* CA está para hum quarto termo maior ou menor que *circ.* OB. Supponhamo-lo menor e seja, se he possivel, CA : OB :: *circ.* CA : *circ.* OD.

Inscreva-se na circumferencia, da qual OB he o raio, hum polygono regular EFGKLE, cujos lados não encontrem a circumferencia, da qual o raio he OD (10.):

inscreva-se hum polygono semelhante MNPSTM na circumferencia, da qual CA he o raio.

Isto posto, como estes polygonos são semelhantes, os seus perimetros MNPSM, EFGKE estão entre si como os raios CA, OB, dos circulos circunscritos (8.), e teremos MNPSM : EFGKE : : CA : OB; mas, por hypothese, CA : OB : : *circ.* CA : *circ.* OD; logo MNPSM : EFGKE : : *circ.* CA : *circ.* OD. Ora esta proporção he impossivel, porque o contorno MNPSM he menor que *circ.* CA (9.), e ao contrario EFGKE he maior que *circ.* OD; logo he impossivel que CA esteja para OB como *circ.* CA está para huma circumferencia menor que *circ.* OB, ou, em termos mais geraes, he impossivel que hum raio esteja para outro raio como a circumferencia do primeiro raio está para huma circumferencia menor do que a circumferencia do segundo raio.

Donde concluo que tambem não póde ser, CA para OB como *circ.* CA está para huma circumferencia menor que *circ.* OB; porque, se assim fora, teriamos, invertendo as razões, OB está para CA, como huma circumferencia maior que *circ.* OB está para *circ.* CA; ou, que he o mesmo, como *circ.* OB está para huma circumferencia menor que *circ.* CA, logo hum raio seria para outro raio como a circumferencia do primeiro raio está para huma circumferencia menor que a circumferencia do segundo raio, o que se demonstrou ser impossivel.

Mas se o quarto termo da proporção CA : OB : : *circ.* CA : X, não póde ser nem menor nem maior que *circ.* OB, deve ser igual a *circ.* OB; logo as circumferencias dos circulos estão entre si como os raios.

Hum raciocinio e huma construcção inteiramente semelhante serviráõ para demonstrar que as superficies dos circulos estão como os quadrados dos seus raios. Não entraremos em mais explicações sobre esta proposição, que he tambem hum corollario da seguinte.

Corollario. Os arcos semelhantes AB, DE, (fig. 166.) estão como os seus raios AC, DO, e os sectores ſemelhantes ACB, DOE, eſtão como os quadrados dos meſmos raios.

Porque, como os arcos são ſemelhantes, o angulo C he igual ao angulo O (def. 3. liv. 3.); ora o angulo C eſtá para quatro angulos rectos como o arco AB eſtá para a circumferencia inteira deſcrita com o raio AC (17. 2.), e o angulo O eſtá para quatro angulos rectos como o arco DE eſtá para a circumferencia deſcrita com o raio OD; logo os arcos AB, DE, eſtão entre ſi como as circumferencias de que fazem parte; eſtas circumferencias eſtão como os raios AC, DO; logo *arco* AB : *arco* DE : : AC : DO.

Pela meſma razão os ſectores ACB, DOE, eſtão como os circulos inteiros, eſtes eſtão como os quadrados dos raios; logo *ſect.* ACB : *ſect.* DOE : : $\overline{AC}^2 : \overline{DO}^2$.

PROPOSIÇÃO XII.

THEOREMA.

A área do circulo he igual ao producto da ſua circumferencia por metade do raio.

Deſignemos por *ſuperf.* CA a ſuperficie do circulo, cujo raio he CA (fig. 167.); digo que ſerá *ſuperf.* CA $=\frac{1}{2}$ CA $\times$ *circ.* CA.

Porque, ſe $\frac{1}{2}$ CA $\times$ *circ.* CA não for a área do circulo do qual CA he o raio, eſta quantidade ſerá a medida de hum circulo maior ou menor. Supponhamos primeiro que he a medida de hum circulo maior, e ſeja, ſe he poſſivel, $\frac{1}{2}$ CA $\times$ *circ.* CA $=$ *ſuperf.* CB.

Ao circulo, cujo raio he CA, circunſcreva-ſe hum polygono regular DEFG, &c., cujos lados não encontrem a circumferencia de que CB he o raio (10.); a ſuperficie deſte polygono ſerá igual ao ſeu contorno DE + EF + FG + &c., multiplicado por $\frac{1}{2}$ AC (7.): mas o contorno do polygono he maior que a circumferencia inſcrita, porque a envolve por todas as partes; logo a ſuperficie do polygono DEFG &c. he maior que $\frac{1}{2}$ AC $\times$ *circ.* AC, que he a medida do circulo do qual CB he o raio; logo o polygono ſeria maior que o circulo. Ora ao contrario he menor, porque nelle ſe contém; logo he impoſſivel que $\frac{1}{2}$ CA $\times$ *circ.* CA ſeja maior que *ſuperf.* CA, ou, em outros termos, he impoſſivel que a circumferencia de hum circulo multiplicada pela metade do ſeu raio ſeja medida de hum circulo maior.

Digo em ſegundo lugar, que o meſmo producto não póde ſer medida de hum circulo menor, e para não mudar de figura, ſupporei que ſe trata do circulo do qual o raio he CB; reſta provar que $\frac{1}{2}$ CB $\times$ *circ.* CB não póde ſer medida de hum circulo menor, por exemplo, do circulo cujo raio he CA. Com effeito, ſeja, ſe he poſſivel, $\frac{1}{2}$ CB $\times$ *circ.* CB $=$ *ſuperf.* CA.

Fazendo a meſma conſtrucção acima, a ſuperficie do polygono DEFG &c. terá por medida (DE + EF + FG + &c.) $\times$ $\frac{1}{2}$ CA; mas o contorno DE + EF + FG + &c. he menor que *circ.* CB que o envolve de todas as partes; logo a área do polygono he menor que $\frac{1}{2}$ CA $\times$ *circ.* CB, e com mais forte razão, menor que $\frac{1}{2}$ CB $\times$ *circ.* CB. Eſta ultima quantidade he, por hypotheſe, a medida do circulo do qual CA he o raio; logo o polygono ſeria menor que o circulo inſcrito, o que he abſurdo; logo he impoſſivel que a circumferencia de hum circulo multiplicada pela metade do ſeu raio ſeja medida de hum circulo menor.

Logo, finalmente, a circumferencia de hum circulo multiplicada pela metade do ſeu raio he a medida deſte meſmo circulo.

Corollario I. A ſuperficie de hum ſector he igual ao arco deſte ſector multiplicado pela metade do raio.

Porque o ſector ACB (fig. 168.) eſtá para o circulo inteiro como o arco AMB eſtá para a circumferencia inteira ABD (17. 2.), ou como AMB $\times$ $\frac{1}{2}$ CA eſtá para ABD $\times \frac{1}{2}$ CA. Mas o circulo inteiro $=$ ABD $\times \frac{1}{2}$ AC ; logo o ſector ACB tem por medida AMB $\times \frac{1}{2}$ AC.

Corollario II. Chamemos ϖ a circumferencia que tem por diametro a unidade ; como as circumferencias eſtão como os raios, ou como os diametros, poderemos fazer eſta proporção : o diametro 1 eſtá para a circumferencia ϖ, como o diametro 2AC eſtá para a circumferencia da qual CA he raio ; de ſorte que teremos $1 : \varpi :: 2CA : circ.\ CA$; logo $circ.\ CA = 2\varpi \times CA$. Multiplicando huma e outra parte por $\frac{1}{2}$ CA, teremos $\frac{1}{2} CA \times circ.\ CA = \varpi \times \overline{CA}^2$, ou $superf.\ CA = \varpi\overline{CA}^2$; logo *a ſuperficie de hum circulo he igual ao producto do quadrado do ſeu raio multiplicado pelo numero conſtante* ϖ, *que repreſenta a circumferencia cujo diametro he* 1, *ou a razão da circumferencia para o diametro.*

Igualmente a ſuperficie do circulo cujo raio he OB ſerá igual a $\varpi \times \overline{OB}^2$: ora $\varpi \times \overline{CA}^2 : \varpi \times \overline{OB}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{OB}^2$; logo *as ſuperficies dos circulos eſtão entre ſi como os quadrados dos ſeus raios*, o que concorda com o theorema precedente.

Scholio. Já diſſemos que o problema da quadratura do circulo conſiſte em achar hum quadrado igual em ſuperficie a hum circulo, cujo raio he conhecido ; ora acabamos de provar que o circulo he equivalente ao rectangulo feito ſobre a circumferencia e a metade do raio, e eſte rectangulo ſe converte em quadrado tomando huma meia proporcional entre as ſuas duas dimensões (pr. 6. liv. 3.) : aſſim o problema da quadratura do circulo ſe reduz a achar a circumferencia, conhecido o raio, e para iſto baſta conhecer a razão da circumferencia para o raio ou para o diametro.

Até agora não ſe tem podido determinar eſta razão ſenão de hum modo approximado ; mas a approximação tem chegado tão longe, que o conhecimento da razão exacta não teria vantagem alguma real sobre o da razão approximada. Portanto, esta questão que occupou muito os geometras, quando erão menos conhecidos os methodos de approximação, está agora desterrada entre as questões ociosas com que só he dado entreter-se áquelles que tem apenas as primeiras noções da geometria.

Archimedes provou que a razão da circumferencia para o diametro fica comprehendida entre $3\frac{10}{70}$ e $3\frac{10}{71}$; assim $3\frac{1}{7}$ ou $\frac{22}{7}$ he o valor já muito approximado do numero que representámos por ϖ, e esta primeira approximação he muito usada pela sua simplicidade. *Metius* achou para o mesmo numero o valor mais approximado $\frac{355}{113}$. Em fim o valor de ϖ, desenvolvido até certa ordem de decimaes, foi achado por outros calculadores 3,1415926535897932, &c., e tiverão a paciencia de prolongar estas decimaes até 127, ou mesmo até 150. He evidente que semelhante approximação equivale á verdade, e não são mais bem conhecidas as raizes das potencias imperfeitas.

Explicar-se-hão nos problemas seguintes dois methodos elementares os mais simplices para conseguir estas approximações.

PROPOSIÇÃO XIII.

PROBLEMA.

Sendo dadas as superficies de hum polygono regular inscrito e de hum polygono semelhante circunscrito, achar as superficies dos polygonos regulares inscrito e circunscrito de hum numero de lados duplo.

Seja AB (fig. 169.) o lado do polygono dado inſcrito, EF parallela a AB, o do polygono ſemelhante circunſcrito, C o centro do circulo; ſe tirarmos a corda AM e as tangentes AP, BQ, a corda AM ſerá o lado do polygono inſcrito de hum numero de lados duplo, e PQ duplo de PM ſerá o do polygono ſemelhante circunſcrito (6.). Iſto poſto, como a meſma conſtrucção terá lugar nos differentes angulos iguaes a ACM, baſta conſiderar o angulo ACM ſó, e os triangulos nelle contidos eſtarão entre ſi como os polygonos inteiros.

Seja A a ſuperficie do polygono inſcrito, do qual AB he hum lado, B a ſuperficie do polygono ſemelhante circunſcrito; A′ a ſuperficie do polygono que tem por lado AM, B′ a ſuperficie do polygono ſemelhante circunſcrito; A e B são conhecidos, trata-ſe de achar A′ e B′.

1.° Os triangulos ACD, ACM, cujo vertice commum he A, eſtão entre ſi como as ſuas baſes CD, CM; mas tambem eſtes triangulos eſtão como os polygonos A e A′ de que fazem parte; logo A : A′ : : CD : CM. Os triangulos CAM, CME, que tem o vertice commum M, eſtão entre ſi como as ſuas baſes CA, CE; eſtes meſmos triangulos eſtão como os polygonos A′ e B de que fazem parte; logo A′ : B : : CA : CE. Mas, por cauſa das parallelas AD, ME, temos CD : CM : : CA : CE; logo A : A′ : : A′ : B; logo o polygono A′, hum dos procurados, he meio proporcional entre os dois polygonos conhecidos A e B, e teremos por conſequencia $A' = \sqrt{A \times B}$.

2.° Por cauſa da altura commum CM, o triangulo CPM eſtá para o triangulo CPE como PM eſtá para PE; mas dividindo a linha CP em duas partes iguaes o angulo MCE, temos (17. 3.) PM : PE : : CM : CE : : CD : CA : : A : A′; logo CPM : CPE : : A : A′, e por conſequencia, CPM : CPM + CPE, ou CME : : A : A + A′. Mas CMPA ou 2CMP e

CME estão entre si como os polygonos B' e B de que fazem parte; logo $B' : B :: 2A : A + A'$. Já determinámos A'; esta nova proporção determinará B', e teremos $B' = \frac{2A \times B}{A + A'}$; logo por meio dos polygonos A e B, he facil achar os polygonos A' e B' que tem duas vezes mais lados.

PROPOSIÇÃO XIV.

PROBLEMA.

Achar a razão approximada da circumferencia para o diametro.

Seja o raio do circulo $= 1$, o lado do quadrado inscrito será $\sqrt{2}$ (3 e); o do quadrado circunscrito he igual ao diametro 2; logo a superficie do quadrado inscrito $= 2$, e a do quadrado circunscrito $= 4$. Se fizermos agora $A = 2$ e $B\ 4$, acharemos pelo problema precedente o octogono inscrito $A' = \sqrt{8} = 2{,}8284271$, e o octogono circunscrito $B' = \frac{16}{2 + \sqrt{8}} = 3{,}3137085$. Conhecendo assim os octogonos inscrito e circunscrito, acharemos por meio delles os polygonos de hum numero de lados duplo; deveremos de novo suppor $A = 2{,}8284271$, $B = 3{,}3137085$, e teremos $A' = \sqrt{(A \times B)} = 3{,}0614674$ e $B' = \frac{2A \times B}{A + A'} = 3{,}1825979$. Depois estes polygonos de 16 lados servirão para conhecer os de 32, e continuaremos assim até que o calculo não dê mais differença entre os polygonos inscrito e circunscrito, ao menos na ordem de decimaes em que paramos, que he a setima neste exemplo. Chegado a este ponto, concluiremos que o circulo he igual ao ultimo resultado, porque o circulo deve sempre estar comprehendido entre o polygono inscrito e o polygono circunſcrito ; logo, ſe eſtes não differirem entre ſi até certa ordem de decimaes, o circulo tambem não ha de differir até a meſma ordem.

Eis-aqui o calculo deſtes polygonos prolongado até não differirem na setima ordem de decimaes.

Numero de lados	Polygono inscrito.	Polygono circunscrito.
4 . . .	2,0000000 . . .	4,0000000.
8 . . .	2,8284271 . . .	3,3137085.
16 . . .	3,0614674 . . .	3,1825979.
32 . . .	3,1214451 . . .	3,1517249.
64 . . .	3,1365485 . . .	3,1441184.
128 . . .	3,1403311 . . .	3,1422236.
256 . . .	3,1412772 . . .	3,1417504.
512 . . .	3,1415138 . . .	3,1416321.
1024 . . .	3,1415729 . . .	3,1416025.
2048 . . .	3,1415877 . . .	3,1415951.
4096 . . .	3,1415914 . . .	4,1515933.
8192 . . .	3,1415923 . . .	3,1415928.
16384 . . .	,1415925 . . .	3,1415927.
32768 . . .	3,1415926 . . .	3,1415926.

D'onde concluo que a ſuperficie do circulo $=$ 3,1415926. Poderia haver duvida na ultima decimal, pelos erros que resultão das partes que ſe deſprezão ; mas o calculo foi feito com mais huma decimal, para eſtarmos ſeguros do reſultado que achámos até a ultima decimal.

Como a ſuperficie do circulo he igual á ſemi-circumferencia multiplicada pelo raio, ſendo o raio 1, a ſemi-circumferencia he 3,1415926 ; ou, ſendo o diametro 1, a circumferencia he 3,1415926 ; logo a razão da circumferencia para o diametro acima notada por $\varpi = 3,1415926$.

PROPOSIÇÃO XV.

LEMMA.

„ *O triangulo* CAB (fig. 170.) *he equivalente ao triangulo isosceles* DCE, *que tem o mesmo angulo* C, *e cujo lado* CE *ou* CD *he meio proporcional entre* CA *e* CB. *De mais, se for o angulo* CAB *recto, a perpendicular* CF, *abaixada sobre a base do triangulo isosceles, será meia proporcional entre o lado* CA *e a semi-somma dos lados* CA, CB.

Porque, 1.° por causa do angulo commum C, o triangulo ABC está para o triangulo isosceles DCE como $AC \times CB$ está para $DC \times CE$, ou $\overline{DC}^2$ (24.3.); logo estes triangulos serão equivalentes, se $\overline{CD}^2 = AC \times CB$, ou se DC for meia proporcional entre AC e CB.

2.° A perpendicular CGF corta em duas partes iguaes o angulo ACB, logo $AG : GB :: AC : CB$ (17. 3.), donde resulta *componendo* $AG : AG + CB$ ou $AB :: AC : AC + CB$: mas AG está para AB como o triangulo ACG está para o triangulo ACB ou 2CDF; além disto se o angulo A recto, os triangulos rectangulos ACG, CDF, são semelhantes, e dão $ACG : CDF :: \overline{AC}^2 : \overline{CF}^2$; logo

$$\overline{AC}^2 : 2\overline{CF}^2 :: AC : AC + CB.$$

Multiplicando a segunda razão por AC, os antecedentes virão a ser iguaes, e teremos por consequencia $2\overline{CF}^2 = AC \times (AC + CB)$, ou $\overline{CF}^2 = AC \times \left(\frac{AC + CB}{2}\right)$; logo 2.° se for o angulo A recto, a perpendicular CF será meia proporcional entre o lado AC e a semi-somma dos lados AC, CB.

PROPOSIÇÃO XVI.

PROBLEMA.

„ *Achar hum circulo que diffira tão pouco quanto se quiser de hum polygono regular dado.*

Seja proposto, por exemplo, o quadrado BMNP, (fig. 171.), abaixe-se do centro C a perpendicular CA sobre o lado MB, e ajunte-se CB.

O circulo descrito com o raio CA está inscrito no quadrado, e o circulo descrito com o raio CB está circunscrito ao mesmo quadrado; o primeiro será menor que o quadrado, o segundo será maior: vamos agora estreitar estes limites.

Tome-se CD e CE, iguaes cada hum á meia proporcional entre CA e CB, ajunte-se ED, e o triangulo isósceles CDE será equivalente ao triangulo CAB (15.); faça-se o mesmo a cada hum dos oito triangulos que compõe o quadrado, formar-se-ha assim hum octogono regular equivalente ao quadrado BMNP. O circulo descrito com o raio CF, meio proporcional entre CA e $\frac{CA + CB}{2}$, estará inscrito no octogono, e o circulo descrito com o raio CD lhe será circunscrito. Assim o primeiro será menor que o quadrado dado, e o segundo maior.

Se convertermos da mesma maneira o triangulo rectangulo CDF em hum triangulo isosceles equivalente, formaremos por este meio hum polygono regular de dezeseis lados, equivalente ao quadrado proposto. O circulo inscrito a este polygono será menor que o quadrado, e o circulo circunscrito será maior.

Podemos continuar assim até que a razão entre o raio do circulo inscrito e o raio do circulo circunscrito diffira da igualdade tão pouco quanto se quiser. Então ambos os circulos se poderão considerar como equivalentes ao quadrado proposto, *Scholio.* A isto se reduz a indagação dos raios successivos. Seja a o raio do circulo inscrito em hum dos polygonos achados, b o raio do circulo circunscrito ao mesmo polygono; sejão a' e b' os raios semelhantes no polygono seguinte que tem hum numero de lados duplo. Segundo o que demonstrámos, b' he meia proporcional entre a e b, e a' meia proporcional entre a e $\frac{a+b}{2}$, de sorte que teremos $b' = \sqrt{a \times b}$, e $a' = \sqrt{\left(a \times \frac{a+b}{2}\right)}$; logo conhecidos os raios a e b de hum polygono, delles se concluem facilmente os raios a' e b' do polygono seguinte; e continuaremos assim, até que a differença entre os dois raios venha a ser insensivel; então ou hum ou outro destes raios será o raio do circulo equivalente ao quadrado ou ao polygono proposto.

Este methodo he facil de praticar em linhas, porque se reduz a achar meias proporcionaes successivas entre linhas conhecidas; mas ainda he mais expedito em numeros, e he hum dos mais commodos que a geometria elementar póde ministrar para achar promptamente, a razão approximada da circumferencia para o diametro. Seja o lado do quadrado $= 2$, o primeiro raio inscrito CA será 1, e o primeiro raio circunscrito CB será $\sqrt{2}$ ou 1,4142136. Fazendo pois $a = 1$, $b = 1,4142136$, acharemos $b' = 1,1892071$, e $a' = 1,0986841$. Estes numeros servirão para calcular os seguintes pela lei de continuação.

Eis-aqui o resultado do calculo feito até sete ou oito algarismos pelas taboas de logarithmos ordinarios:

Raios dos circulos circunscritos.	Raios dos circulos inscritos.
1,4142136	1,0000000.
1,1892071	1,0986841.
1,1430500	1,1210863.
1,1320149	1,1265639.
1,1292862	1,1279257.
1,1286063	1,1282657.

Agora que a primeira metade dos algarifmos he a mefma de ambos os lados, poderemos, em vez dos meios geometricos, tomar os meios arithmeticos que fó differem nas decimaes ulteriores. Defta maneira a operação fe abrevía muito, e os refultados são

1,1284360	1,1283508.
1,1283934	1,1283721.
1,1283827	1,1283774.
1,1283801	1,1283787.
1,1283794	1,1283791.
1,1283792	1,1283792.

Logo, 1,1283792 he, com muito pequena differença, o raio do circulo igual em fuperficie ao quadrado cujo lado he 2. Por efte meio he facil achar a razão da circumferencia para o diametro; porque demonftrámos que a fuperficie do circulo he igual ao quadrado do raio multiplicado pelo numero ϖ; logo, fe dividirmos a fuperficie 4 pelo quadrado de 1,1283792, teremos o valor de ϖ que fe acha efte calculo fer de 3,1415926, &c., como já achámos por outro methodo.

APPENDICE AO LIVRO IV.

DEFINIÇÕES.

„ I. CHama-ſe *maximum* a quantidade maior entre todas as da meſma eſpecie; e *minimum* a menor.

Aſſim o diametro do circulo he hum *maximum* entre todas as linhas que ajuntão dois pontos da circumferencia, e a perpendicular he hum *minimum* entre todas as linhas tiradas de hum ponto dado a huma linha dada.

II. Chamão-ſe figuras *iſoperimetras* as que tem perimetros iguaes.

PROPOSIÇÃO I.

THEOREMA.

Entre todos os triangulos da meſma baſe e do meſmo perimetro, o triangulo maximum *he aquelle no qual os dois lados não determinados são iguaes.*

Seja AC = CB (fig. 172.), e AM + MB = AC + CB; digo que o triangulo iſoſceles ACB he maior que o triangulo AMB que tem a meſma baſe e o meſmo perimetro.

Do ponto C, como centro, e com o raio CA = CB, deſcreva-ſe huma circumferencia que encontre CA prolongado em D; una-ſe DB; e o angulo DBA, inſcrito no ſemi-circulo, ſerá hum angulo recto (15.2.). Prolongue-ſe a perpendicular DB para N, faça-ſe MN = MB; e ajunte-ſe AN. Em fim, dos pontos

M e C abaixe-se MP e CG, perpendiculares sobre DN. Como CB = CD e MN = MB, temos AC + CB = AD, e AM + MB = AM + MN. Mas AC + CB = AM + MB; logo AD = AM + MN; logo AD > AN: ora, se a obliqua AD he maior que a obliqua AN, ella deve estar mais distante da perpendicular AB; logo DB > BN. Logo BG, que he metade de BD (12. 1.) será maior que BP metade de BN. Mas os triangulos ABC, ABM, que tem a mesma base AB, estão entre si como as suas alturas BG, BP; logo, como BG > BP, o triangulo isosceles ABC he maior que o não isosceles ABM da mesma base e do mesmo perimetro.

PROPOSIÇÃO II.

THEOREMA.

Entre todos os polygonos isoperimetros, e do mesmo numero de lados, o polygono maximum *he o que tem os lados iguaes.*

Porque, seja ABCDEF (fig. 173.) o polygono *maximum*; se o lado BC não for igual a DC, faça-se sobre a base BD hum triangulo isosceles BOD que seja isoperimetro a BCD, o triangulo BOD será maior que BCD (pr. 1.), e por consequencia o polygono ABODEF será maior que ABCDEF; logo este não seria o *maximum* entre todos aquelles que tem o mesmo perimetro e o mesmo numero de lados, o que he contra a supposição; logo deve ser BC = DC. Teremos pela mesma razão CD = DE, DE = EF, &c.; logo todos os lados do polygono *maximum* são iguaes entre si.

PROPOSIÇÃO III.

THEOREMA.

De todos os triangulos formados com dois lados dados que fação entre si hum angulo arbitrario, o maximum *he aquelle no qual os dois lados dados fazem hum angulo recto.*

Sejão os dois triangulos BAC, BAD, (fig. 174.) que tem o lado AB commum, e o lado AC = AD: se o angulo BAC for recto, digo que o triangulo BAC será maior que o triangulo BAD, no qual o angulo em A he agudo ou obtuso.

Porque, sendo a mesma a base AB; os dois triangulos BAC, BAD, estão como as suas alturas AC, DE: mas a perpendicular DE he mais curta que a obliqua AD ou sua igual AC; logo o triangulo BAD he mais pequeno que BAC.

PROPOSIÇÃO IV.

THEOREMA.

De todos os polygonos formados com lados dados e o ultimo arbitrario, o maximum *deve ser tal que todos os seus angulos fiquem inscritos em huma semicircumferencia, da qual seja diametro o lado desconhecido.*

Seja ABCDEF o maior dos polygonos formados com os lados dados (fig. 175.) AB, BC, CD, DE, EF, e hum ultimo AF arbitrario; tirem-se as diagonaes AD, DF. Se o angulo ADF não fosse recto, poderiamos, conservando as partes ABCD, DEF, como ellas estão, augmentar o triangulo ADF, e por consequencia o polygono inteiro, fazendo o angulo ADF recto, conforme a proposição precedente; mas este polygono não se póde augmentar, porque se suppõe ter chegado ao seu *maximum*; logo o angulo

ADF he já hum angulo recto. O mesmo acontece aos angulos ABF, ACF, AEF; logo todos os angulos A, B, C, D, E, F do polygono *maximum* estão inscritos em huma semi-circumferencia, da qual o lado indeterminado AF he o diametro.

Scholio. Esta proposição dá lugar a huma questão: a saber, se ha muitas maneiras de formar hum polygono com lados dados e o ultimo desconhecido, que será o diametro da semi-circumferencia na qual estão inscritos os outros lados. Antes de decidir esta questão, devemos notar que, se huma mesma corda AB subtende arcos descritos com differentes raios AC, AD (fig. 176.), o angulo no centro apoiado sobre esta corda será menor no circulo que tiver o raio maior; assim $ACB < ADB$, porque o angulo $ADO = ACD + CAD$ (19.1.); logo $ACD < ADO$, e dobrando em huma e outra parte, teremos $ACB < ADB$.

PROPOSIÇÃO V.

THEOREMA.

Há só hum modo de formar o polygono ABCDEF *com lados dados, e hum ultimo desconhecido que seja o diametro da semi-circumferencia na qual estão inscritos os outros lados.*

Porque, supponhamos que temos achado hum circulo que satisfaça á questão; se tomarmos hum circulo maior, as cordas AB, BC, CD, &c. (fig. 175.) corresponderáõ a angulos centraes menores. Logo a somma destes angulos centraes será menor que dois angulos rectos, e assim os extremos dos lados dados não tenderáõ aos extremos de hum diametro. O inconveniente contrario terá lugar se tomarmos hum circulo menor; logo o polygono de que se trata não póde ser inscrito senão em hum só circulo.

Scholio. Póde-se mudar a arbitrio a ordem dos lados AB, BC, CD, &c., e o diametro do circulo circunscrito será sempre o mesmo, bem como a superficie do polygono; porque, qualquer que ſeja a ordem dos arcos AB, BC, &c., baſta que a ſua ſomma faça a ſemi-circumferencia, e o polygono terá ſempre a meſma ſuperficie, porque ſerá igual ao ſemi-circulo menos os ſegmentos AB, BC, &c. cuja ſomma he ſempre a meſma.

PROPOSIÇÃO VI.

THEOREMA.

De todos os polygonos formados com lados dados, o maximum *he aquelle que ſe póde inſcrever em hum circulo.*

Seja ABCDEFG (fig. 177.) o polygono inſcrito, e *abcdefg* o não inſcriptivel formado com lados iguaes, de ſorte que ſeja AB = *ab*, BC = *bc*, &c.; digo que o polygono inſcrito he maior que o outro.

Tire-ſe o diametro EM; ajunte-ſe AM, MB; ſobre *ab* = AB taça-ſe o triangulo *abm* igual a ABM, e una-ſe *em*.

Em virtude da propoſição IV. o polygono EFGAM he maior que *efgam*, ſalvo ſe eſte poder igualmente ſer inſcrito em huma ſemi-circumferencia da qual ſeja diametro o lado *em*, caſo em que os dois polygonos ſerião iguaes em virtude da propoſição V. Pela meſma razão o polygono EDCBM he maior que *edcbm*, ſalva a meſma excepção, na qual haveria igualdade. Logo o polygono inteiro EFGAMBCDE he maior que *efgambcde*, excepto ſe forem inteiramente iguaes; mas elles não são iguaes, porque hum eſtá inſcrito no circulo e o outro ſe ſuppõe não inſcriptivel; logo o polygono inſcrito he o maior. Tirando de huma e outra parte os triangulos iguaes ABM, *abm*, ficará o polygono inſcrito ABCDEFG maior que o não-inſcriptivel *abcdefg*.

Scholio. Demonſtrar-ſe-ha, como na propoſição V., que ſó ha hum circulo, e por conſequencia hum ſó polygono *maximum*, que ſatisfaça á queſtão, e eſte polygono ſeria ſempre da meſma ſuperficie, de qualquer maneira que ſe mudaſſe a ordem de ſeus lados.

PROPOSIÇÃO VII.

Theorema.

O polygono regular he hum maximum *entre todos os polygonos iſoperimetros e do meſmo numero de lados.*

Porque, ſegundo o theorema II., o polygono *maximum* tem todos os ſeus lados iguaes; e, ſegundo o theorema precedente, elle he inſcriptivel no circulo; logo eſte polygono he regular.

PROPOSIÇÃO VIII.

Lemma.

Dois angulos centraes, medidos em dois circulos differentes, eſtão entre ſi, como os arcos comprehendidos divididos pelos raios.

Aſſim o angulo C (fig. 178.) eſtá para o angulo O como a razão $\frac{AB}{AC}$ eſtá para a razão $\frac{DE}{DO}$.

Com hum raio OF igual a AC deſcreva-ſe o arco FG comprehendido entre os lados OD, OE, prolongados; por cauſa dos raios iguaes AC, OF, teremos primeiro C : O : : AB : FG (17. 2.), ou : : $\frac{AB}{AC} : \frac{FG}{FO}$. Mas os arcos ſemelhantes FG, DE, dão FG : DE : : FO : DO; logo a razão $\frac{FG}{FO}$ he igual á razão $\frac{DE}{DO}$, e temos por conſequencia C : O : : $\frac{AB}{AC} : \frac{DE}{DO}$.

PROPOSIÇÃO IX.

THEOREMA.

De dois polygonos regulares isoperimetros, o maior he o que tem mais lados.

Seja DE (fig. 179.) o semi-lado de hum destes polygonos, O o seu centro, OE o seu apothéma; seja AB o semi-lado do outro polygono, C o seu centro, CB o seu apothéma. Suppomos os centros O e C situados em huma distancia qualquer OC, e os apothémas OE, CB, na direcção OC; assim DOE e ACB serão os semi-angulos centraes dos polygonos, e como estes angulos não são iguaes, as linhas CA, OD, prolongadas se encontrarão em hum ponto F; deste ponto abaixemos sobre OC a perpendicular FG; dos pontos O e C, como centros, descrevão-se os arcos, GI, GH, terminados nos lados OF, CF.

Isto posto, teremos pelo lemma precedente, $O : C :: \frac{GI}{GO} : \frac{GH}{GC}$; mas DE está para o perimetro do primeiro polygono, como o angulo O está para quatro angulos rectos, e AB está para o perimetro do segundo como o angulo C está para quatro angulos rectos; logo, como os perimetros dos polygonos são iguaes, $DE : AB :: O : C$, ou $DE : AB :: \frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG}$. Multiplicando os antecedentes por OG e os consequentes por CG, teremos $DE \times OG : AB \times CG :: GI : GH$. Mas os triangulos semelhantes ODE, OFG dão $OE : OG :: DE : FG$; donde resulta $DE \times OG = OE \times FG$; teremos do mesmo modo $AB \times CG = CB \times FG$; logo $OE \times FG : CB \times FG :: GI : GH$, ou $OE : CB :: GI : GH$. Logo, se mostrarmos que o arco GI he maior que o arco GH, seguir-se-ha que o apothéma OE he maior que CB.

Do outro lado de CF faça-se a figura CKx inteiramente igual á figura CGx, de sorte que seja CK $=$ CG, o angulo HCK $=$ HCG, e o arco Kx $=$ xG; a curva KxG envolverá o arco KHG, e será maior que este arco (9.). Logo Gx, metade da curva, he maior que GH, metade do arco; logo, com mais forte razão, GI he maior GH.

Daqui resulta que o apothéma OE he maior que CB; mas tendo os dois polygonos o mesmo perimetro, estão entre si como os seus apothémas (7.), logo o polygono que tem por semi-lado DE he maior do que o polygono que tem por semi-lado AB: o primeiro tem mais lados, porque o seu angulo central he menor; logo de dois polygonos regulares isoperimetros, o maior he o que tem mais lados.

PROPOSIÇÃO X.

THEOREMA.

O circulo he maior que todo o polygono isoperimetro.

Já está provado que de todos os polygonos isoperimetros e de hum mesmo numero de lados, o polygono regular he o maior; falta só comparar o circulo com hum polygono regular qualquer isoperimetro. Seja AI (fig. 180.) o semi-lado deste polygono, C o seu centro. Seja no circulo isoperimetro o angulo DOE $=$ ACI, e por consequencia o arco DE igual ao semi-lado AI. O polygono P está para o circulo C como o triangulo ACI está para o sector ODE; assim teremos P : C :: $\frac{1}{2}$ AI $\times$ CI : $\frac{1}{2}$ DE $\times$ OE :: CI : OE. Tire-se ao ponto E a tangente EG que encontre OD prolongado em G: os triangulos semelhantes ACI, GOE, darão a proporção CI : OE :: AI ou DE : GE; logo, P :

C : : DE : GE, ou como DE $\times \frac{1}{2}$ OE, que he a medida do ſector DOE, eſtá para GE$\times \frac{1}{2}$ OE, que he a medida do triangulo GOE : ora, o ſector he menor que o triangulo ; logo P he menor que C ; logo o circulo he maior que todo o polygono iſoperimetro. „

LIVRO V.

PLANOS, E ANGULOS SOLIDOS.

DEFINIÇÕES.

I. Huma linha recta he *perpendicular a hum plano*, quando he perpendicular a todas as rectas que passão pelo seu *pé* no mesmo plano (pr. 4.). Reciprocamente o plano he perpendicular á linha.

O *pé* da perpendicular he o ponto em que esta linha encontra o plano.

II. Huma linha he *parallela a hum plano*, quando não póde encontra-lo a qualquer distancia que se prolonguem a linha e o plano.

Reciprocamente o plano he parallelo á linha.

III. Dois *planos* são *parallelos entre si*, quando não podem encontrar-se a qualquer distancia que ambos se prolonguem.

IV. Demonstraremos (pr. 3.) que a intersecção commum de dois planos que se encontrão he huma linha recta: isto posto, o *angulo* ou *inclinação mutua de dois planos* he a quantidade maior ou menor que elles podem estar affastados hum do outro: esta quantidade se mede (pr. 17.) pelo angulo que fazem entre si as duas perpendiculares, tiradas em cada hum destes planos ao mesmo ponto de intersecção commum.

Este angulo póde ser agudo, recto, ou obtuso.

V. Se he recto, os dois *planos* são *perpendiculares* entre si.

VI. *Angulo solido* he o espaço angular comprehendido entre muitos planos que se reunem no mesmo ponto.

Assim o angulo solido S (fig. 199.) he formado pela união dos planos ASB, BSC, CSD, DSA.

São precisos ao menos tres planos para formar hum angulo solido.

PROPOSIÇÃO I.

THEOREMA.

Huma linha recta não póde estar, parte em hum plano, parte fóra.

Porque, conforme a definição do plano, quando huma linha recta tem dois pontos communs com hum plano, está toda nesse plano.

Scholio. Para reconhecer se huma superficie he plana, se deve applicar huma linha recta sobre esta superficie em differentes sentidos, e ver se ella toca a superficie em toda a sua extensão.

PROPOSIÇÃO II.

THEOREMA.

Duas linhas rectas que se cortão estão no mesmo plano, e determinão a sua posição.

Sejão AB, AC (fig. 181.) duas linhas rectas que se cortem em A; podemos imaginar hum plano em que esteja a linha AB; se depois fizermos girar este plano em torno de AB, até que elle passe pelo ponto C, então a linha AC que tem dois dos seus pontos A e C neste plano, estará toda nelle; logo a posição deste plano fica determinada só pela condição de abranger as duas rectas AB, AC.

Corollario I. Logo hum triangulo ABC, ou tres pontos A, B, C, náo em linha recta, determináo a posição de hum plano.

Corollario II. Logo tambem duas parallelas AB, CD (fig. 182.), determinão a posição de hum plano; porque, se tirarmos a secante EF, o plano das duas rectas AE, EF, será o das parallelas AB, CD.

PROPOSIÇÃO III.

THEOREMA.

Se dois planos se cortarem, a sua intersecção commum será huma linha recta.

Porque, se nos pontos communs aos dois planos houvessem tres que não estivessem em linha recta, os dois planos de que se trata, passando cada hum por estes tres pontos, farião hum só e o mesmo plano (2.), o que he contra a supposição.

PROPOSIÇÃO IV.

THEOREMA.

Se huma linha recta AP *for perpendicular a outras duas* PB, PC (fig. 183.), *que se cruzão no seu pé no plano* MN, *ella será perpendicular a huma recta qualquer* PQ *conduzida pelo seu pé no mesmo plano, e deste modo será perpendicular ao plano* MN.

Por hum ponto Q, tomado á vontade sobre PQ, tire-se a recta BC no angulo BPC, de maneira que BQ=QC (probl. 5. liv. 3.), ajunte-se AB, AQ, AC.

Como a base BC está dividida em duas partes iguaes no ponto Q, o triangulo BPC dará (14. 3.)

$$\overline{PC}^2 + \overline{PB}^2 = 2\overline{PQ}^2 + 2\overline{QC}^2 :$$

O triangulo BAC dará igualmente

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = 2\overline{AQ}^2 + 2\overline{QC}^2 .$$

Tirando a primeira igualdade da segunda, e obſervando que os triangulos APC, APB, ambos rectangulos em P, dão $\overline{AC}^2 - \overline{PC}^2 = \overline{AP}^2$, e $\overline{AB}^2 - \overline{PB}^2 = \overline{AP}^2$, teremos,

$$\overline{AP}^2 + \overline{AP}^2 = 2\overline{AQ}^2 - 2\overline{PQ}^2.$$

Logo, tomando as metades, temos $\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 - \overline{PQ}^2$, ou $\overline{AQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2$; logo o triangulo APQ he rectangulo em P (13. 3.); logo AP he perpendicular a PQ.

Scholio. Iſto moſtra, não ſó que he poſſivel que huma linha recta ſeja perpendicular a todas aquellas que paſsão pelo ſeu pé em hum plano, mas que iſto acontece todas as vezes que eſta linha he perpendicular a duas rectas tiradas no plano; o que demonſtra a legitimidade da definição I.

Corollario I. A perpendicular AP he mais curta que huma obliqua qualquer AQ; logo mede a verdadeira diſtancia do ponto A ao plano PQ.

Corollario II. Por hum ponto P dado ſobre hum plano, não ſe póde levantar mais de huma perpendicular a eſte plano; porque, ſe podeſſemos levantar duas perpendiculares pelo meſmo ponto P, conduza-ſe, pela direcção deſtas duas perpendiculares, hum plano cuja interſecção com o plano MN ſeja PQ; então as duas perpendiculares de que ſe trata ſerião perpendiculares á linha PQ, no meſmo ponto e no meſmo plano, o que he impoſſivel.

He igualmente impoſſivel abaixar de hum ponto dado fóra de hum plano duas perpendiculares a eſte plano; porque ſejão AP, AQ, eſtas duas perpendiculares, então o triangulo APQ teria dois angulos rectos APQ, AQP, o que he impoſſivel.

PROPOSIÇÃO V.

THEOREMA.

As obliquas igualmente distantes da perpendicular são iguaes; e, de duas obliquas desigualmente distantes da perpendicular, a que se affasta mais he a mais comprida.

Porque, sendo rectos os angulos APB, APC, APD, (fig. 184.) se suppozermos as distancias PB, PC, PD, iguaes entre si, os triangulos APB, APC, APD, teráo hum angulo igual comprehendido entre lados iguaes; logo seráo iguaes; logo as hypotenusas ou as obliquas AB, AC, AD, seráo iguaes entre si. Da mesma maneira, se a distancia PE for maior que PD ou a sua igual PB, he claro que a obliqua AE será maior que AB ou a sua igual AD.

Corollario. Todas as obliquas iguaes AB, AC, AD, &c., tendem á circumferencia BCD, descrita do pé da perpendicular P como centro; logo, sendo dado hum ponto A fóra de hum plano, se quizermos achar sobre este plano o ponto P no qual cahiria a perpendicular abaixada de A, marcaremos nesse plano tres pontos B, C, D, igualmente distantes do ponto A, e depois procuraremos o centro do circulo que passa por estes pontos; este centro será o ponto procurado P.

Scholio. O angulo ABP he o que se chama *inclinação da obliqua* AB *sobre o plano* MN; he claro que esta inclinação he igual para todas as obliquas AB, AC, AD, &c., que se affastão igualmente da perpendicular; porque todos os triangulos ABP, ACP, ADP, &c., são iguaes entre si.

PROPOSIÇÃO VI.

THEOREMA.

Seja AP (fig. 185.) *huma perpendicular ao plano* MN *e* BC *huma linha ſituada neſte plano; ſe do pé* P *da perpendicular abaixarmos* PD *perpendicular ſobre* BC, *e tirarmos* AD, *digo que* AD *ſerá perpendicular a* BC.

Tome-ſe DB = DC, e tirem-ſe PB, PC, AB, AC: como DB = DC, a obliqua PB = PC; e ácêrca da perpendicular AP, como PB = PC, a obliqua AB = AC (5.); logo a linha AD tem dois dos ſeus pontos A e D igualmente diſtantes dos extremos B e C; logo AD he perpendicular ao meio de BC.

Corollario. Vê-ſe ao meſmo tempo que BC he perpendicular ao plano APD, porque BC he perpendicular ás duas rectas AD, PD.

Scholio. As duas linhas AE, BC, offerecem o exemplo de duas linhas que não ſe encontrão, porque não eſtão ſituadas no meſmo plano. A mais curta diſtancia deſtas linhas he a recta PD, que he perpendicular tanto á linha AP como a linha BC. A diſtancia PD he a mais curta entre eſtas duas linhas; porque, ſe ajuntarmos outros dois pontos, como A e B, teremos AB > AD, AD > PD; logo, com mais forte razão, AB > PD.

As duas linhas AE, CB, ainda que não ſituadas no meſmo plano, ſe conſiderão como fazendo entre ſi hum angulo recto, porque AE e a parallela tirada por hum dos ſeus pontos á linha BC farião entre ſi hum angulo recto. Do meſmo modo a linha AB e a linha PD, que repreſentão duas rectas quaeſquer não ſituadas no meſmo plano, ſe reputão fazer entre ſi o meſmo angulo que faria com AB a parallela a PD, tirada por hum dos pontos de AB.

PROPOSIÇÃO VII.

THEOREMA.

Se a linha AP *for perpendicular ao plano* MN (fig. 186.), *toda a linha* DE *parallela a* AB *ſerá perpendicular ao meſmo plano.*

Pela direcçáo das parallelas AP, DE, conduza-ſe hum plano, cuja interſecçáo com o plano MN ſerá PD; no plano MN conduza-ſe BC, perpendicular a PD, e ajunte-ſe AD.

Conforme o corollario do theorema precedente, BC he perpendicular ao plano APDE; logo o angulo BDE he recto; mas o angulo EDP tambem he recto, porque AP he perpendicular a PD, e DE he parallela a AP; logo a linha DE he perpendicular ás duas rectas DP, DB; logo he perpendicular ao ſeu plano MN.

Corollario I. Reciprocamente, ſe as rectas AP, DE forem perpendiculares aó meſmo plano MN, ellas ſeráo parallelas; porque, ſe o náo foſſem, conduzindo-ſe pelo ponto D huma parallela a AP, eſta parallela ſeria perpendicular ao plano MN; logo poderiamos, por hum meſmo ponto D, levantar duas perpendiculares a hum meſmo plano, o que he impoſſivel (4.).

Corollario II. Duas linhas A e B, parallelas a huma terceira C, ſáo parallelas entre ſi; porque imagine-ſe hum plano perpendicular á linha C, as linhas A e B, parallelas a eſta perpendicular, ſeráo perpendiculares ao meſmo plano; logo, pelo corollario precedente, ſeráo parallelas entre ſi; entende-ſe que as tres linhas náo eſtáo no meſmo plano, porque, ſe eſtiveſſem, já ſabiamos eſta propoſiçáo (26.1.)

PROPOSIÇÃO VIII.

THEOREMA.

Se a linha AB *for parallela a huma recta* CD (fig. 187.) *tirada no plano* MN, *ella será parallela a este plano.*

Porque, se a linha AB, que está no plano ABCD, encontrasse o plano MN, só poderia isto acontecer em algum ponto da linha CD, intersecção commum dos dois planos; ora AB não póde encontrar CD, porque lhe he parallela; logo não encontrará tambem o plano MN; logo he parallela a este plano (def. 2.).

PROPOSIÇÃO IX.

THEOREMA.

Dois planos MN, PQ (fig. 188.), *perpendiculares a huma mesma recta* AB, *são parallelos entre si.*

Porque, se se encontrarem em alguma parte, seja O hum dos seus pontos communs, e ajunte-se OA, OB; a linha AB, perpendicular ao plano MN, he perpendicular á recta OA tirada pelo seu pé neste plano; pela mesma razão, AB he perpendicular a BO; logo OA e OB serião duas perpendiculares abaixadas do mesmo ponto O sobre a mesma linha recta, o que he impossivel; logo os planos MN, PQ, não se podem encontrar; logo são parallelos.

PROPOSIÇÃO X.

THEOREMA.

As intersecções EF, GH (fig. 189.), *de dois planos parallelos* MN, PQ, *por hum terceiro plano* FG, *são parallelas.*

Porque, se as linhas EF, GH, situadas no mesmo plano não forem parallelas, prolongadas hão de encontrar-se; logo os planos MN, PQ, em que ellas estão, tambem se encontrarião; logo não serião parallelos.

PROPOSIÇÃO XI.

THEOREMA.

A linha AB, *perpendicular ao plano* MN (*fig.* 188.), *he perpendicular ao plano* PQ *parallelo a* MN.

Havendo tirado arbitriamente a linha BC no plano PQ; na direcção de AB e BC, conduza-se hum plano ABC, cuja intersecção com o plano MN seja AD, a intersecção AD será parallela a BC (10.); mas a linha AB, perpendicular ao plano MN, he perpendicular á recta AD; logo ella será tambem perpendicular á sua parallela BC; e como a linha AB he perpendicular a toda a linha BC tirada pelo seu pé no plano PQ, segue-se que ella he perpendicular ao plano PQ.

PROPOSIÇÃO XII.

THEOREMA.

As parallelas EG, FH (*fig.* 189.), *comprehendidas entre dois planos parallelos* MN, PQ, *são iguaes.*

Pelas parallelas EG, FH, faça-se passar o plano EGHF, que encontrará os planos parallelos na direcção EF e GH. As intersecções EF, GH, são parallelas entre si, bem como EG, FH; logo a figura EGHF he hum parallelogrammo; logo EG = FH.

Corollario. Daqui se segue que *dois planos parallelos estão por toda a parte em igual distancia*; porque se EG e FH são perpendiculares aos dois planos MN, PQ, serão parallelas entre si (7.); logo são iguaes.

PROPOSIÇÃO XIII.

THEOREMA.

Se dois angulos CAE, DBF, (fig. 190.) *não situados no mesmo plano, tiverem os seus lados parallelos e dirigidos no mesmo sentido, estes angulos serão iguaes, e os planos serão parallelos.*

Tome-se AC = BD, AE = BF, e tirem-se CE, DF, AB, CD, EF. Como AC he igual e parallela a BD, a figura ABCD he hum parallelogrammo (31. 1.); logo CD he igual e parallela a AB. Por huma razão semelhante EF he igual e parallela a AB; logo tambem CD he igual e parallela a EF; logo a figura CEFD he hum parallelogrammo, e por tanto o lado CE he igual e parallelo a DF; logo os triangulos CAE, DBF são equilateros entre si; logo o angulo CAE = DBF.

Em segundo lugar, digo que o plano ACE he parallelo ao plano BDF; porque, supponhamos que o plano parallelo a BDF, tirado pelo ponto A, encontre as linhas CD, EF, em outros pontos differentes de C e E, por exemplo em G e H, então, conforme a proposição XII., as tres linhas AB, GD, FH serão iguaes; mas as tres AB, CD, EF, já o são; logo teremos CD = GD, e FH = EF, o que he absurdo; logo o plano ACE he parallelo a BDF.

Corollario. Se dois planos parallelos MN, PQ forem encontrados por outros dois planos CABD, EABF, os angulos CAE, DBF, formados pelas intersecções dos planos parallelos, serão iguaes; porque a intersecção AC he parallela a BD (10.), e AE a BF; logo o angulo CAE = DBF.

PROPOSIÇÃO XIV.

THEOREMA.

Se tres rectas AB, CD, EF (fig. 190.), *não situadas no mesmo plano, forem iguaes e parallelas, os triangulos* ACE, BDF, *formados de huma e outra parte pelos extremos destas rectas, serão iguaes, e os seus planos parallelos.*

Porque, como AB he igual e parallela a CD, a figura ABDC he hum parallelogrammo; logo o lado AC he igual e parallelo a BD. Pela mesma razão os lados AE, BF são iguaes e parallelos, bem como CE, DF. Logo os dois triangulos CAE, BDF são iguaes; e provaremos, como na proposição precedente, que os planos são parallelos.

PROPOSIÇÃO XV.

THEOREMA.

Duas rectas, comprehendidas entre planos parallelos, são cortadas em partes proporcionaes.

Supponhamos que a linha AB (fig. 191.) encontre os planos parallelos MN, PQ, RS, em A, E, B, e que a linha CD encontre os mesmos planos em C, F, D; digo que teremos AE : EB : : CF : FD.

Tire-se AD que encontre o plano PQ em G, e ajunte-se AC, EG, GF, BD; as interseccões EG, BD, dos planos parallelos PQ, RS, pelo plano ABD, são parallelas (10.); logo AE : EB : : AG : GD : igualmente, porque as interseccões AC, GF são parallelas, temos AG : GD : : CF : DF; logo, por causa da razão commum AG : GD, teremos AE : EB : : CF : DF.

PROPOSIÇÃO XVI.

THEOREMA.

„ *Seja* ABCD *hum quadrilatero* (fig. 192.) *situado, ou não situado, no mesmo plano; se cortarmos os lados oppostos proporcionalmente por duas rectas* EF, GH, *de sorte que seja* AE : EB : : DF : FC, e BG : GC : : AH : HD; *digo que as rectas* EF, GH *se cortarão em hum ponto* M, *de maneira que será* HM : MG : : AE : EB, *e* EM : MF : : AH : HD.

Conduza-se por AD hum plano qualquer A*b*H*c*D que não passe por GH; pelos pontos E, B, C, F, tirem-se a GH as parallelas E*e*, B*b*, C*c*, F*f*, que encontrem este plano em *e*, *b*, *c*, *f*. Por causa das parallelas B*b*, GH, C*c* (15.3.), teremos *b*H : H*c* : : BG : GC : : AH : HD; logo (20. 3.) os triangulos AH*b*, *c*HD são semelhantes. Depois teremos A*e* : *eb* : : AE : EB, e D*f* : *fc* : : DF : FC; logo A*e* : *eb* : : D*f* : *fc*, ou, *componendo*, A*e* : D*f* : : A*b* : D*c*; mas os triangulos semelhantes AH*b*, *c*HD dão A*b* : D*c* : : AH : HD; logo A*e* : D*f* : : AH : HD: mas de serem semelhantes os triangulos AH*b*, *c*HD, se segue que o angulo HA*e* = HD*f*; logo os triangulos AH*e*, DH*f* são semelhantes (20. 3.), e o angulo AH*e* = DH*f*. Segue-se daqui que *e*H*f* he huma linha recta, e que assim as tres parallelas E*e*, GH, F*f* estão situadas em hum mesmo plano, o qual conterá as duas rectas EF, GH; logo *estas se devem cortar em hum ponto* M. Além disto, por causa das parallelas E*e*, MH, F*f*, teremos EM : MF : : *e*H : H*f* : : AH : HD. Por huma construcção semelhante, fazendo passar hum plano por AB, demonstrariamos que HM : MG : : AE : EB. „

PROPOSIÇÃO XVII.

THEOREMA.

O angulo comprehendido entre dois planos MAN, MAP, (fig. 193.) *póde ser medido, conforme a definição, pelo angulo* NAP *que fazem entre si as duas perpendiculares* AN, AP, *tiradas em cada hum destes planos á interſecção commum* AM.

Para demonſtrar a legitimidade deſta medida, cumpre provar 1.° que ella he conſtante, ou que ſeria a meſma em qualquer ponto da interſecção commum que ſe tiraſſem as duas perpendiculares.

Com effeito, ſe tomarmos outro ponto M, e tirarmos MC no plano MN, e MB no plano MP, perpendiculares á interſecção commum AM; como MB e AP são perpendiculares a huma meſma linha AM, ellas ſerão parallelas entre ſi. Pela meſma razão MC he parallela a AN; logo o angulo BMC = PAN (13.); logo he indifferente tirar as perpendiculares ao ponto M ou ao ponto A; o angulo comprehendido ſerá ſempre o meſmo.

2.° Reſta provar que ſe o angulo dos dois planos augmentar ou diminuir em certa razão, o angulo PAN augmentará ou diminuirá na meſma razão.

No plano PAN deſcreva-ſe do centro A e com hum raio arbitrario o arco NDP, do centro M, e com hum raio igual, deſcreva-ſe o arco CEB, tire-ſe AD á vontade; os dois planos PAN, BMC, que são perpendiculares a huma meſma recta MA, ſerão parallelos (9.); logo as interſecções AD, ME, deſtes dois planos por hum terceiro AMD ſerão parallelas; logo o angulo BME ſerá igual a PAD (13.).

Chamemos por hum momento *canto* o angulo formado por dois planos MP, MN; iſto poſto, ſe o angulo DAP foſſe igual a DAN, he claro que o canto DAMP feria igual ao canto DAMN; porque a baſe PAD ſe ajuſtaria ſobre a ſua igual DAN, a altura AM ſeria ſempre a meſma; logo os dois cantos coincidirião hum com o outro. Vê-ſe do meſmo modo que ſe o angulo DAP ſe contiveſſe hum certo numero de vezes exacto no angulo PAN, o canto DAMP ſe conteria outras tantas vezes no canto PAMN. Além diſto da razão em numeros inteiros a huma razão qualquer a concluſão he legitima, e já iſto ſe demonſtrou em huma occaſião inteiramente ſemelhante (17. 2.); logo, qualquer que ſeja a razão do ângulo DAP para o angulo PAN, o canto DAMP eſtará na meſma razão com o canto PAMN; logo o angulo NAP ſe póde tomar por medida do canto PAMN, ou do angulo que fazem entre ſi os dois planos MAP, MAN.

Scholio. Quando dois planos ſe atraveſsão mutuamente, os angulos oppoſtos verticalmente são iguaes, e os angulos adjacentes valem em ſomma dois angulos rectos; logo ſe hum plano for perpendicular a outro, eſte ſerá perpendicular ao primeiro. Igualmente, no encontro dos planos parallelos por hum terceiro plano, exiſtem as meſmas igualdades de angulos e as meſmas propriedades que no encontro de duas linhas parallelas por huma terceira linha.

PROPOSIÇÃO XVIII.

THEOREMA.

Sendo a linha AP (fig. 194.) *perpendicular ao plano* MN, *todo o plano* APB, *conduzido por* AP, *ſerá perpendicular ao plano* MN.

Seja BC a interſecção dos planos AB, MN; ſe no plano MN tirarmos DE perpendicular a BP, a linha AP, que he perpendicular ao plano MN, ſerá perpendicular a cada huma das duas rectas BC, DE: mas o angulo APD, formado pelas duas perpendiculares PA, PD, á interſecção commum BP, mede o angulo dos dois planos AB, MN; logo, como efte angulo he recto, os dois planos são perpendiculares entre fi (def. 5.).

Scholio. Quando tres rectas, como AP, BP, DP, são perpendiculares entre fi, cada huma deftas rectas he perpendicular ao plano das outras duas, e os tres planos são perpendiculares entre fi.

PROPOSIÇÃO XIX.

THEOREMA.

Se o plano AB (fig. 194.) *for perpendicular ao plano* MN, *e no plano* AB *tirarmos a linha* PA *perpendicular á interfecção commum* PB, *digo que* PA *ferá perpendicular ao plano* MN.

Porque, fe no plano MN tirarmos PD perpendicular a PB, o angulo APD ferá recto, porque os planos são perpendiculares entre fi; logo a linha AP he perpendicular ás duas rectas PB, PD; logo he perpendicular ao feu plano MN.

Corollario. Se o plano AB for perpendicular ao plano MN, e por hum ponto P da interfecção commum levantarmos huma perpendicular ao plano MN, digo que efta perpendicular eftará no plano AB; porque, fe não eftiveffe, poderiamos tirar no plano AB huma perpendicular AP á interfecção commum BP, a qual feria ao mefmo tempo perpendicular ao plano MN; logo haveria no mefmo ponto P duas perpendiculares ao plano MN, o que he impoffivel (4.).

PROPOSIÇÃO XX.

THEOREMA.

Se dois planos AB, AD, (fig. 194.) *forem perpendiculares a hum terceiro* MN, *a fua interfecção commum* AP *ferá perpendicular ao terceiro plano.*

Porque, ſe, pelo ponto P levantarmos huma perpendicular ao plano MN, eſta perpendicular deve ao meſmo tempo ficar no plano AB e no plano AD (19.); logo ella he a ſua interſecção commum AP.

PROPOSIÇÃO XXI.

THEOREMA.

Se hum angulo ſolido for formado por tres angulos planos, a ſomma de quaeſquer dois deſtes angulos será maior que o terceiro.

A propoſição ſó ha miſter demonſtração quando o angulo plano que ſe compara á ſomma dos outros dois he maior que cada hum delles. Seja pois o angulo ſolido S (fig. 195.) formado por tres angulos planos ASB, ASC, BSC, e ſupponhamos que o angulo ASB ſeja o maior dos tres; digo que teremos ASB $<$ ASC $+$ BSC.

No plano ASB faça-ſe o angulo BSD $=$ BSC, tire-ſe arbitrariamente a recta ADB, e tomando SC $=$ SD, tirem-ſe AC, BC.

Os dois lados BS, SD, são iguaes aos dois BS, SC, o angulo BSD $=$ BSC; logo os dois triangulos BSD, BSC, são iguaes; logo BD $=$ BC. Mas temos AB $<$ AC $+$ BC; tirando de huma parte BD, e da outra o ſeu igual BC, ficará AD $<$ AC. Os dois lados AS, SD, são iguaes aos dois AS, SC, o terceiro AD he menor que o terceiro AC; logo o angulo ASD $<$ ASC (10, 1.). Ajuntando BSD $=$ BSC, teremos ASD $+$ BSD, ou ASB $<$ ASC $+$ BSC.

PROPOSIÇÃO XXII.

THEOREMA.

A ſomma dos angulos planos que formão hum angulo ſolido he ſempre menor que quatro angulos rectos.

Corte-ſe o angulo ſolido S (fig. 196.) por hum plano qualquer ABCDE ; de hum ponto O tomado neſte plano tirem-ſe a todos os angulos as linhas OA , OB , OC , OD , OE.

A ſomma dos angulos dos triangulos ASB , BSC , &c. formados em torno do vertice S , equivale á ſomma dos angulos de hum igual numero de triangulos AOB , BOC , &c., formados em torno do vertice O. Mas no ponto B os angulos ABO , OBC , juntos , fazem o angulo ABC menor que a ſomma dos angulos ABS , SBC (21.) ; do meſmo modo no ponto C temos $BCO + OCD < BCS + SCD$, e aſſim em todos os angulos do polygono ABCDE. Daqui ſe ſegue que , nos triangulos que tem o vertice em O , a ſomma dos angulos da baſe he menor que a ſomma dos angulos da baſe nos triangulos que tem o vertice em S ; logo , por compenſação , a ſomma dos angulos formados em torno do ponto O he maior que a ſomma dos angulos em torno do ponto S. Mas a ſomma dos angulos em torno do ponto O he igual a quatro angulos rectos (5. 1.) ; logo a ſomma dos angulos planos que formão o angulo ſolido S he menor que quatro angulos rectos.

Scholio. Eſta demonſtração ſuppoem que o angulo ſolido he *convexo* , ou que o plano de huma face prolongado nunca póde cortar o angulo ſolido ; ſe foſſe o contrario , a ſomma dos angulos planos não teria limites , e poderia ter qualquer grandeza.

PROPOSIÇÃO XXIII.

THEOREMA.

Se dois angulos ſolidos forem compoſtos de tres angulos planos iguaes cada hum a cada hum , os planos nos quaes eſtão os angulos iguaes ſerão igualmente inclinados entre ſi.

Seja o angulo $ASC = DTF$ (fig. 197.) , o angulo ASB = DTE, e o angulo BSC = ETF; digo que os dois planos ASC, ASB, terão entre si huma inclinação igual á dos planos DTF, DTE.

Havendo tomado SB arbitrariamente, tire-se BO perpendicular ao plano ASC; do ponto O, em que esta perpendicular encontra o plano, tire-se OA, OC, perpendiculares sobre SA, SC; ajuntem-se AB, BC; tome-se depois TE = SB; tire-se EP perpendicular sobre o plano DTF; do ponto P tire-se PD, PF, perpendiculares sobre TD, TF; em fim ajuntem-se DE, EF.

O triangulo SAB he rectangulo em A, e o triangulo TDE em D (6.), e como o angulo ASB = DTE, temos tambem SBA = TED. Por outra parte SB = TE; logo o triangulo SAB he igual ao triangulo TDE; logo SA = TD, e AB = DE. Demonstrar-se-ha semelhantemente que SC = TF, e BC = EF. Isto posto, o quadrilatero SAOC he igual ao quadrilatero TDPF; porque, pondo o angulo ASC sobre o seu igual DTF, como SA = TD, e SC = TF, o ponto A cahirá em D, e o ponto C em F. Ao mesmo tempo, AO perpendicular a SA, cahirá sobre DP perpendicular a TD, e igualmente OC sobre PF; logo o ponto O cahirá sobre o ponto P, e teremos AO = PD. Mas os triangulos AOB, DPE, são rectangulos em O e P, a hypotenusa AB = DE, e o lado AO = DP; logo estes triangulos são iguaes (18. 1.); logo o angulo OAB = PDE. O angulo OAB he a inclinação dos dois planos ASB, ASC; o angulo PDE he a inclinação dos dois planos DTE, DTF; logo estas duas inclinações são iguaes entre si.

Todavia cumpre advertir que o angulo A do triangulo rectangulo OAB não he propriamente a inclinação dos dois planos ASB, ASC, senão quando a perpendicular BO cahe, a respeito de SA, da mesma parte que SC; se cahisse da outra parte, então o angulo dos dois planos seria obtuso, e junto ao angulo A do triangulo OAB, faria dois angulos rectos. Mas no mesmo caso, o angulo dos dois planos TDE, TDF, seria igualmente obtuso, e, junto ao angulo D do triangulo DPE, faria dois angulos rectos; logo, como o angulo A seria sempre igual a D, concluiriamos do mesmo modo que a inclinação dos dois planos ASB, ASC, he igual á dos dois planos TDE, TDF.

Scholio. Se dois angulos solidos forem compostos de tres angulos planos iguaes, cada hum a cada hum, e ao mesmo tempo os angulos iguaes ou homologos estiverem *dispostos da mesma maneira* nos dois angulos solidos, então estes angulos serão iguaes, e postos hum sobre o outro hão de coincidir. Com effeito já vimos que o quadrilatero SAOC póde ser posto sobre o seu igual TDPF; assim, pondo SA sobre TD, SC cahe sobre TF, e o ponto O sobre o ponto P. Mas, por causa da igualdade dos triangulos AOB, DPE, a perpendicular OB ao plano ASC he igual á perpendicular PE ao plano TDF; de mais estas perpendiculares são dirigidas no mesmo sentido; logo o ponto B ha de cahir sobre o ponto E, a linha SB sobre TE, e os dois angulos solidos coincidirão inteiramente hum com outro.

Esta coincidencia com tudo não tem lugar senão suppondo que os angulos planos iguaes estão *dispostos da mesma maneira* nos dois angulos sólidos; porque, se os angulos planos iguaes estivessem *dispostos em ordem inversa*, ou, que vem a ser o mesmo, se as perpendiculares OB, PE, em vez de serem dirigidas no mesmo sentido ácerca dos planos ASC, DTF, fossem dirigidas em sentidos contrarios, então seria impossivel fazer coincidir os dois angulos solidos hum com outro. Entretanto não seria menos verdade, conforme o theorema, que os planos em que estão os angulos iguaes serião igualmente inclinados entre si, de sorte que os dois angulos sólidos serião iguaes em todas as suas partes constituintes, sem comtudo poderem ser sobrepostos. Esta sorte de igualdade, que não he absoluta ou de sobreposição, merece ser distinta por huma denominação particular; nós a chamaremos *igualdade por symmetria*. Assim os dois angulos sólidos de que se trata, que são formados por tres angulos planos iguaes, cada hum a cada hum, mas dispostos em ordem inversa, se chamaráõ *angulos iguaes por symmetria*, ou simplesmente *angulos symmetricos*.

A mesma observação se applica aos angulos sólidos formados de mais de tres angulos planos; assim hum angulo sólido formado pelos angulos planos A, B, C, D, E, e outro angulo sólido formado pelos mesmos angulos em ordem inversa A, E, D, C, B, podem ser taes que os planos nos quaes estão os angulos iguaes, sejão igualmente inclinados entre si. Estes dois angulos sólidos, que serião iguaes sem ser possivel a sobreposição, se chamaráõ *angulos iguaes por symmetria* ou *angulos symmetricos*.

Nas figuras planas não ha propriamente *igualdade por symmetria*, e aquellas a que se quizesse dar este nome, serião igualdades absolutas ou de sobreposição: a razão he porque se póde inverter huma figura plana, e volta-la indifferentemente debaixo para cima. Não he assim nos sólidos em que a terceira dimensão se póde tomar em dois sentidos differentes.

PROPOSIÇÃO XXIV.

PROBLEMA.

Sendo dados os tres angulos planos que formão hum angulo sólido, achar por huma construcção plana o angulo que fazem entre si dois destes planos.

Seja S (fig. 198.) o angulo sólido proposto, no qual se conhecem os tres angulos planos ASB, ASC, BSC; pede-se o angulo que fazem entre si dois destes planos, por exemplo, os planos ASB, ASC.

Imaginemos que se tenha feito a mesma construcção que no theorema precedente, o angulo OAB seria o angulo procurado. Por tanto trata-se de achar o mesmo angulo por huma construcção plana ou traçada sobre hum plano.

Para isto, faça-se sobre hum plano os angulos B'SA, ASC, B''SC, iguaes aos angulos BSA, ASC, BSC, na figura sólida; tomem-se B'S e B''S iguaes cada huma a BS da figura sólida; dos pontos B' e B'' abaixem-se B'A e B''C perpendiculares sobre SA e SC, as quaes se encontrem em hum ponto O. Do ponto A como centro e com o raio AB' descreva-se a semi-circumferencia B'*b*E; ao ponto O levante-se sobre B'E a perpendicular O*b*, que encontre a circumferencia em *b*; tire-se A*b*, e o angulo EA*b* será a inclinação procurada dos dois planos ASC, ASB no angulo sólido.

Tudo se reduz a provar que o triangulo AO*b* da figura plana he igual ao triangulo AOB da figura sólida. Ora, os dois triangulos B'SA, BSA, são rectangulos em A, os angulos em S são iguaes; logo os angulos em B e B' são tambem iguaes. Mas a hypoténusa SB' he igual á hypoténusa SB; logo estes triangulos são iguaes; logo SA da figura plana he igual a SA da figura sólida, e tambem AB', ou a sua igual A*b* na figura plana, he igual a AB na figura sólida. Demonstra-se-ha do mesmo modo que SC he igual em huma e outra parte; donde se segue que o quadrilátero SAOC he igual em huma e outra figura, e assim AO da figura plana he igual a AO da figura sólida; logo em huma e outra os triangulos rectangulos AO*b*, AOB, tem a hypoténusa igual e hum lado igual; logo são iguaes, e o angulo EA*b*, achado pela construcção plana, he igual á inclinação dos dois planos SAB, SAC, no angulo sólido.

Quando o ponto O cahe entre A e B' na figura plana, o angulo EA*b* vem a ser obtuso, e mede sempre a verdadeira inclinação dos planos. Por isto he que designámos por EA*b*, e não por OA*b*, a inclinação pedida, a fim de que a mesma solução convenha a todos os casos sem excepção.

Scholio. Perguntar-me-ha alguem se, tomando tres angulos planos arbitrariamente, poderemos formar com estes tres angulos planos hum angulo sólido.

Primeiramente, he necessario que a somma dos tres angulos dados seja menor que quatro angulos rectos, sem o que não se póde formar angulo sólido; he necessario mais que, havendo tomado dois angulos arbitrariamente B'SA, ASC, o terceiro CSB'' seja tal que a perpendicular B''C ao lado SC encontre o diametro B'E entre os seus extremos B' e E. Assim os limites de grandeza do angulo CSB'' são os que fazem encaminhar a perpendicular B''C aos pontos B' e E. Destes pontos abaixem-se sobre SC as perpendiculares B'I, EK, que encontrem em I e K a circumferencia descrita com o raio SB'', e os limites do angulo CSB'' serão CSI e CSK.

Mas no triangulo isosceles B'SI, sendo a linha CS prolongada perpendicular á base B'I, temos o angulo $CSI = CSB' = ASC + ASB'$. E no triangulo isosceles ESK, por ser a linha SC perpendicular a EK, temos o angulo $CSK = CSE$. Mas os triangulos iguaes ASE, ASB', dão o angulo $ASE = ASB'$; logo CSE ou $CSK = ASC - ASB'$.

Daqui resulta que o problema será possivel todas as vezes que o terceiro angulo CSB'' for menor que a somma dos outros dois ASC, ASB', e maior que a sua differença: condição que concorda com o theorema XXI.; porque, em virtude deste theorema, deve ser $CSB'' < ASC + ASB'$; e tambem deve ser $ASC < CSB'' + ASB'$ ou $CSB'' > ASC - ASB'$.

PROPOSIÇÃO XXV.

PROBLEMA.

Sendo dados dois dos tres angulos planos que formão hum angulo sólido, com o angulo que os seus planos fazem entre si, achar o terceiro angulo plano.

Sejão ASC, ASB', (fig. 198.) os dois angulos planos dados, e supponhamos por hum momento que CSB'' ſeja o terceiro angulo que ſe procura, então, fazendo a meſma conſtrucção que no problema precedente, o angulo comprehendido entre os planos dos dois primeiros ſeria EAb. Ora, do meſmo modo que ſe determina o angulo EAb por meio de CSB'', ſendo dados os outros dois; ſe póde igualmente determinar CSB'' por meio de EAb, o que reſolverá o problema propoſto.

Havendo tomado arbitrariamente SB', abaixe-ſe ſobre SA a perpendicular indefinida $B'E$, faça-ſe o angulo EAb igual ao angulo dos dois planos dados; do ponto b, em que o lado Ab encontra a circumferencia deſcrita do centro A e com o raio AB', abaixe-ſe ſobre AE a perpendicular bO, e do ponto O abaixe-ſe ſobre SC a perpendicular indefinida OCB'', que ſe terminará em B'', de maneira que $SB''=SB'$; o angulo CSB'' ſerá o terceiro angulo plano pedido.

Porque, ſe formarmos hum angulo ſólido com os tres angulos planos $B'SA$, ASC, CSB'', a inclinação dos planos em que eſtão os angulos dados ASB', ASC, ſerá igual ao angulo dado EAb.

Scholio. Se hum angulo ſólido for *quadruplo*, ou formado por quatro angulos planos (fig. 199.) ASB, BSC, CSD, DSA, o conhecimento deſtes angulos não baſta para determinar as inclinações mutuas dos ſeus planos; porque com os meſmos angulos planos, poderiamos formar huma infinidade de angulos ſólidos. Mas ſe accreſcentarmos huma condição, por exemplo, ſe for dada a inclinação dos dois planos ASB, BSC, então o angulo ſólido fica inteiramente determinado, e podemos achar a inclinação de dois dos ſeus planos quaesquer. Com effeito, imaginemos hum angulo ſólido *triplo* formado pelos angulos planos ASB, BSC, ASC; os dois primeiros angulos são dados, bem como a inclinação dos ſeus planos; logo poderemos determinar, pelo problema que acabamos de reſolver, o terceiro angulo ASC. Depois, ſe conſiderarmos o angulo ſólido triplo formado pelos angulos planos ASC, ASD, DSC, eſtes tres angulos são conhecidos; por tanto o angulo ſólido fica inteiramente determinado. Mas o angulo ſólido quadruplo he formado pela união dos dois angulos ſólidos triplos de que temos fallado; logo, como eſtes angulos parciaes são conhecidos e determinados, o angulo total ſerá igualmente conhecido e determinado.

O angulo dos dois planos ASD, DSC, ſe acharia immediatamente por meio do ſegundo angulo ſólido parcial. Quanto ao angulo dos dois planos BSC, CSD, ſeria neceſſario em hum angulo ſólido parcial procurar o angulo comprehendido entre os dois planos ASC, DSC, e no outro o angulo comprehendido entre os dois planos ASC, BSC; a ſomma deſtes dois angulos ſeria o angulo comprehendido entre os planos BSC, DSC.

Acharemos da meſma maneira que, para determinar hum angulo ſólido quintuplo, he neceſſario conhecermos, além dos cinco angulos planos que o compõe, duas das inclinações mutuas dos ſeus planos. Preciſariamos de tres no angulo ſólido ſextuplo, e aſſim em diante.

LIVRO VI.

POLYEDROS.

DEFINIÇÕES.

I. CHama-ſe *ſolido polyedro*, ou ſimplesmente *polyedro* todo o ſolido terminado por planos ou faces planas. (Eſtes planos são neceſſariamente terminados por linhas rectas.) Chama-ſe em particular *tetraedro* o ſolido que tem quatro faces; *hexaedro* o que tem ſeis; *octaedro* o que tem oito; *dodecaedro* o que tem doze; *icoſaedro* o que tem vinte, &c.

O tetraedro he o mais ſimples dos polyedros; porque são preciſos ao menos tres planos para formar hum angulo ſolido, e eſtes tres planos deixão hum vasio que, para ſer fechado, requer ao menos hum quarto plano.

II. A interſecção commum de duas faces adjacentes d'hum polyedro ſe chama *lado* ou *areſta* do polyedro.

III. Chama-ſe *polyedro regular* aquelle cujas faces são todas polyedros regulares iguaes, e os angulos ſolidos são todos iguaes entre ſi. Eſtes polyedros são cinco. *Veja-ſe o appendice aos livros* VI. e VII.

IV. *Priſma* he hum ſolido comprehendido por muitos planos parallelogrammos, terminados de ambas as partes por dois planos polygonos iguaes e parallelos.

Para conſtruir eſte ſolido, ſeja ABCDE (fig.

200.) hum polygono qualquer; ſe em hum plano parallelo a ABC, tirarmos as linhas FG, GH, HI, &c., iguaes e parallelas aos lados AB, BC, CD, &c. o que formará o polygono FGHIK igual a ABCDE; e ſe ajuntarmos de hum plano a outro os vertices dos angulos homologos pelas rectas AF, BG, CH, &c., as faces ABGF, BCHG, &c. ſeráõ parallelogrammos, e o ſolido aſſim formado ABCDEFGHIK, ſerá hum priſma.

V. Os polygonos iguaes e parallelos ABCDE, FGHIK, ſe chamáo *baſes do priſma*; os outros planos parallelogrammos todos juntos conſtituem o que ſe chama *ſuperficie lateral* ou *convexa do priſma*.

VI. *Altura de hum priſma* he a diſtancia das ſuas duas baſes, ou a perpendicular abaixada de hum ponto da baſe ſuperior ſobre o plano da baſe inferior.

VII. Hum *priſma* he *recto* quando os lados AF, BG, &c. ſão perpendiculares aos planos das baſes; então cada hum delles he igual á altura do priſma. Em qualquer outro caſo o priſma he *obliquo*, e a altura he menor que o lado.

VIII. Hum *priſma* he *triangular*, *quadrangular*, *pentagonal*, *hexagonal*, &c. conforme a baſe he hum triangulo, hum quadrilatero, hum pentagono, hum hexagono, &c.

IX. O priſma que tem por baſe hum parallelogrammo, tem todas as ſuas faces parallelogrammicas; chama-ſe *parallelepipedo* (fig. 206.).

Parallelepipedo rectangulo he o que tem por baſes rectangulos.

X. Entre os parallelepipedos rectangulos ſe diſtingue o *cubo* ou hexaedro regular comprehendido por ſeis quadrados iguaes.

XI. *Pyramide* (fig. 201.) he hum ſólido formado por muitos planos triangulares que partem do meſmo ponto S, e terminados no meſmo plano polygonal ABCDE.

O polygono ABCDE ſe chama *baſe* da pyramide, o ponto S he o *vertice*, e a ſomma dos triangulos ASB, BSC, &c. fórma a *ſuperficie convexa* ou *lateral* da pyramide.

XII. *Altura* da pyramide he a perpendicular abaixada do vertice ſobre o plano da baſe, prolongado ſendo neceſſario.

XIII. A pyramide he *triangular*, *quadrangular*, &c., ſegundo a baſe he hum triangulo, hum quadrilatero, &c.

XIV. Pyramide *regular* he aquella que tem por baſe hum polygono regular, e ao meſmo tempo a perpendicular abaixada do vertice ſobre o plano da baſe, paſſa pelo centro da meſma baſe: eſta linha ſe chama *eixo* da pyramide.

XV. *Diagonal* de hum polyedro he a linha que une os vertices de dois angulos ſólidos não adjacentes.

XVI. Chamarei *polyedros ſymmetricos* a dois polyedros que tem huma baſe commum, e são conſtruidos ſemelhantemente, hum acima do plano da baſe, outro abaixo, com condição que os vertices dos angulos ſólidos homologos eſtejão ſituados em iguaes diſtancias do plano da baſe, ſobre huma meſma recta perpendicular a eſte plano.

Por exemplo, ſe a recta ST (fig. 202.) for perpendicular ao plano ABC, e no ponto O em que ella encontra o plano, eſtiver ella dividida em duas partes iguaes, as duas pyramides SABC, TABC, que tem a baſe commum ABC, ſerão dois polyedros ſymmetricos.

XVII. Duas *pyramides triangulares* são *ſemelhantes*, quando tem duas faces ſemelhantes cada huma a cada huma, ſemelhantemente diſpoſtas, e igualmente inclinadas entre ſi.

Aſſim, ſuppondo os angulos ABC = DEF (fig. 203.), BAC = EDF, ABS = DET, BAS = EDT, ſe a inclinação dos planos ABS, ABC, for igual á de ſeus homologos DTE, DEF, as pyramides SABC, TDEF, serão ſemelhantes.

XVIII. Havendo formado hum triangulo com os vertices de tres angulos tomados sobre huma mesma face ou base de hum polyedro, se póde imaginar que os vertices dos differentes angulos sólidos do polyedro, situados fóra do plano desta base, sejão os vertices de outras tantas pyramides triangulares que tem por base commum o triangulo designado, e cada huma destas pyramides determinará a posição de cada angulo sólido do polyedro a respeito da base. Isto posto:

Dois *polyedros* são *semelhantes* quando, tendo bases semelhantes, os vertices dos angulos sólidos homologos, fóra destas bases, são determinados por pyramides triangulares semelhantes cada huma a cada huma.

XIX. Chamarei *vertices* de hum polyedro os pontos situados nos vertices dos seus differentes angulos sólidos.

,, *N. B.* Todos os polyedros que consideramos são polyedros de angulos salientes ou polyedros *convexos*. Chamaremos assim a aquelles cuja superficie não póde ser encontrada por huma linha recta em mais de dois pontos. Nestas sortes de polyedros o plano de huma face prolongado não póde cortar o sólido; logo he impossivel que o polyedro esteja parte acima do plano de huma face, e parte abaixo; elle está todo da mesma parte desse plano. ,,

PROPOSIÇÃO I.

THEOREMA.

Dois polyedros não podem ter os mesmos vertices e no mesmo numero sem coincidir hum com outro.

Porque, supponhamos hum dos polyedros já construido; se quizermos construir outro que tenha os mesmos vertices e no mesmo numero, será necessario que os planos deste não passem todos pelos mesmos pontos que no primeiro, pois, se passassem, não differiria hum do outro: mas então he claro que alguns dos novos planos cortarião o primeiro polyedro; haveria angulos sólidos acima destes planos, e angulos sólidos abaixo, o que não póde convir a hum polyedro convexo; logo se dois polyedros tiverem os mesmos vertices e no mesmo numero, deverão coincidir necessariamente hum com outro.

Scholio. Sendo dados de posição os pontos (fig. 204.) A, B, C, K, &c., que devem servir de vertices a hum polyedro, he facil descrever o polyedro.

Escolhão-se primeiro tres pontos visinhos D, E, H, taes que o plano DEH passe, se for possivel, por novos pontos K, C, mas deixe todos os outros da mesma parte, todos acima do plano, ou todos abaixo; o plano DEH ou DEHKC, assim determinado, será huma face do sólido. Pela direcção de hum dos seus lados EH, conduza-se hum plano que se faça girar até encontrar hum novo vertice F, ou mais F, I ao mesmo tempo; ter-se-há huma segunda face que será FEH ou FEHI. Continue-se do mesmo modo, fazendo passar planos pelos lados achados até que o sólido fique terminado de todas as partes; este sólido será o polyedro pedido, porque não ha dois que possão ter os mesmos vertices.

PROPOSIÇÃO II.

THEOREMA.

Em dois polyedros symmetricos as faces homologas são iguaes cada huma a cada huma, e a inclinação das duas faces adjacentes em hum dos sólidos he igual á inclinação das faces homologas no outro.

Seja ABCDE (fig. 205.) a base commum aos dois polyedros; sejão M e N os vertices de dois angulos sólidos quaesquer de hum dos polyedros, M' e N' os vertices homologos do outro polyedro; ferá neceffario, fegundo a definição, que as rectas MM', NN', fejão perpendiculares ao plano ABC e eftejão divididas em duas partes iguaes nos pontos *m* e *n* em que ellas encontrão efte plano. Ifto pofto, digo que a diftancia MN he igual a M'N'.

Porque, fe fizermos girar o trapezio *m*M'N'*n* em torno de *mn* até o feu plano fe applicar fobre o plano *m*MN*n*; por caufa dos angulos rectos em *m* e em *n*, o lado *m*M' cahirá fobre o feu igual *m*M, e *n*N' fobre *n*N; logo os dois trapezios coincidirão, e teremos MN = M' N'.

Seja P hum terceiro vertice do polyedro fuperior, e P' o feu homologo no outro, teremos do mefmo modo MP = M'P' e NP = N'P'; logo *o triangulo* MNP *que une tres vertices quaesquer do polyedro fuperior, he igual ao triangulo* M'N'P' *que une os tres vertices homologos do outro polyedro.*

Se entre eftes triangulos confiderarmos fómente aquelles que são formados na fuperficie dos polyedros, podemos já concluir que as fuperficies de dois polyedros são compoftas do mefmo numero de triangulos iguaes cada hum a cada hum.

Agora digo eu que fe alguns triangulos eftiverem no mefmo plano fobre huma fuperficie, e formarem huma mefma face polygona, os triangulos homologos eftarão em hum mefmo plano fobre a outra fuperficie, e formarão huma face polygona igual.

Com effeito, fejão MPN, NPQ, dois triangulos adjacentes que fuppomos no mefmo plano, e fejão M'P'N', N'P'Q', os feus homologos. Temos o angulo MNP = M'N'P', o angulo PNQ = P'N'Q'; e fe ajuntaffemos MQ e M'Q', o triangulo MNQ feria igual a M'N'Q', affim teriamos o angulo MNQ = M'N'Q'. Mas, como MPNQ he hum fó plano, temos o angulo MNQ = MNP + PNQ. Logo teremos tambem M'N'Q' = M'N'P' + P'N'Q'. Ora, fe os tres planos M'N'P', P'N'Q', M'N'Q', não fe confundiffem em hum fó, eftes tres planos formarião hum angulo sólido, e teriamos (20. 5.) o angulo $M'N'Q' < M'N'P' + P'N'Q'$. Logo, como esta condição não tem lugar, os dois triangulos $M'N'P'$, $P'N'Q'$ estão no mesmo plano.

Daqui se segue que cada face, quer triangular, quer polygona, em hum polyedro, corresponde a huma face igual no outro, e assim os dois polyedros ficão comprehendidos debaixo do mesmo numero de planos iguaes cada hum a cada hum.

Resta provar que a inclinação de duas faces adjacentes quaesquer em hum dos polyedros, he igual á inclinação das duas faces homologas no outro.

Sejão MPN, NPQ, dois triangulos formados sobre a aresta commum NP nos planos das duas faces adjacentes; sejão $M'P'N'$, $N'P'Q'$ os seus homologos; podemos imaginar em N hum angulo sólido formado pelos tres $M'N'Q'$, $M'N'P'$, $P'N'Q'$. Ora já demonstrámos que estes angulos planos são iguaes cada hum a cada hum; logo a inclinação dos dois planos MNP, PNQ, he igual á inclinação dos seus homologos $M'N'P'$, $P'N'Q'$ (22. 5.).

Logo, nos polyedros symmetricos, as faces são iguaes cada huma a cada huma, e os planos de duas faces quaesquer adjacentes de hum dos sólidos, tem entre si a mesma inclinação que os planos das duas faces homologas do outro sólido.

Corollario. Como as partes constituintes de hum sólido, angulos, lados, inclinações de faces, são iguaes ás partes constituintes do outro, podemos concluir que *dois polyedros symmetricos são iguaes ainda que se não possão sobrepôr.* Porque, não ha outra differença dos dois sólidos se não a da posição da partes, a qual não he essencial á grandeza das mesmas partes. *Veja-se a nota* VII.

Scholio. Póde-se notar que *os angulos solidos de hum polyedro são os symmetricos dos angulos solidos do outro polyedro*: porque, se o angulo sólido N he formado pelos planos MNP, PNQ, QNR, &c., o feu homologo N' he formado pelos planos M'N'P', P'N'Q', Q'N'R', &c. Eftes eftão difpoftos na mefma ordem que os outros; mas, como os dois angulos fólidos eftão em fituação inverfa hum a refpeito do outro, fegue-fe que a difpofição real dos planos que formão o angulo fólido N' he a inverfa da que tem lugar no angulo homologo N. Além difto as inclinações dos planos confecutivos são iguaes em hum e outro angulo fólido. Logo eftes angulos fólidos são fymmetricos hum do outro. *Veja-fe o Scholio da prop.* XXIII, *liv.* V.

Efta advertencia prova que *hum polyedro qualquer não pode ter mais de hum polyedro fymmetrico.* Porque, fe conftruiffemos fobre outra bafe hum novo polyedro fymmetrico ao polyedro dado, os angulos fólidos defte ferião fempre fymmetricos dos angulos do polyedro dado. Logo ferão iguaes aos do polyedro fymmetrico conftruido fobre a primeira bafe. Além difto, as faces homologas ferião fempre iguaes. Logo os polyedros fymmetricos conftruidos fobre huma ou outra bafe, terão as faces iguaes, e os angulos fólidos iguaes; logo elles coincidirião pela fobreposição, e farião hum fó e o mefmo polyedro.

PROPOSIÇÃO III.

THEOREMA.

Dois prifmas são iguaes quando tem hum angulo fólido comprehendido entre tres planos iguaes cada hum a cada hum, e femelhantemente difpoftos.

Seja a bafe ABCDE igual á bafe *abcde*, (fig. 200.) o parallelogrammo ABGF igual ao parallelogrammo *abgf*, e o parallelogrammo BCHG igual ao parallelogrammo *bchg*; digo que o prifma ABCI ferá igual ao prifma *abci*.

Porque, ponha-fe a bafe ABCDE fobre a fua igual *abcde*, eftas duas bafes coincidirão; mas os tres angulos planos que formão o angulo sólido B são iguaes aos tres angulos planos que formão o angulo sólido b, cada hum a cada hum, a saber, $ABC = abc$, $ABG = abg$, e $GBC = gbc$; de mais estes ângulos estão semelhantemente dispostos; logo os angulos sólidos B e b são iguaes, e por consequencia o lado BG cahirá sobre o seu igual bg. Tambem he claro que, por causa dos parallelogrammos iguaes ABGF, $abgf$, o lado GF ha de cahir sobre o seu igual gf, e semelhantemente GH sobre gh; logo a base superior FGHIK coincidirá inteiramente com a sua igual $fghik$, e os dois sólidos se confundiráõ em hum só; porque teráo os mesmos vertices (1). Logo *dois prismas são iguaes*, &c.

Scholio. Hum prisma fica inteiramente determinado quando se conhece a sua base ABCDE, e a aresta EG he dada de grandeza e de posição. Porque, se pelo ponto G tirarmos GF, igual e parallela a AB, GH igual e parallela a BC, e no plano FGH, parallello a ABC (13, 5.) descrevermos o polygono FGHIK igual a ABCDE, he claro que todos os vertices do prisma ficaráõ determinados. Logo dois prismas construidos com os mesmos dados não podem ser desiguaes; o que confirma a proposição demonstrada.

PROPOSIÇÃO IV.

THEOREMA.

Em todo o parallelepipedo os planos oppostos são iguaes e parallelos.

Segundo a definição deste sólido, as bases ABCD, EFGH (fig. 206.), são parallelogrammos iguaes, e os seus lados são parallelos: resta pois demonstrar que a mesma cousa tem lugar para duas faces lateraes oppostas como AEHD, BFGC. Ora AD he igual e parallela a BC, porque a figura ABCD he hum parallelogrammo; por semelhante razão AE he igual e parallela a BF. Logo o angulo DAE he igual ao angulo CBF (13, 5.), e o plano DAE parallelo a CBF. Logo tambem o parallelogrammo DAEH he igual ao parallelogrammo CBFG. Demonſtrar-ſe-ha do meſmo modo que os parallelogrammos oppoſtos ABFE, DCGH são iguaes e parallelos.

Corollario. Como o parallelepipedo he hum ſólido comprehendido por ſeis planos, dos quaes os oppoſtos são iguaes e parallelos, ſegue-ſe que qualquer face e a ſua oppoſta ſe podem tomar por baſes do parallelepipedo.

Scholio. Sendo dadas tres rectas AB, AE, AD, não ſituadas no meſmo plano, e que fação entre ſi angulos dados, ſe póde ſobre eſtas tres rectas conſtruir hum parallelepipedo; para iſto he neceſſario tirar pelo extremo de cada recta hum plano parallelo ao plano das outras duas; a ſaber, pelo ponto B hum plano parallelo a DAE, pelo ponto D hum plano parallelo a BAE, e pelo ponto E hum plano parallelo a BAD. Os encontros mutuos deſtes planos formarão o parallelepipedo pedido.

PROPOSIÇÃO V.

THEOREMA.

Em todo o parallelepipedo os angulos ſólidos oppoſtos são ſymmetricos hum do outro, e as diagonaes tiradas pelos vertices deſtes angulos ſe cortão mutuamente em duas partes iguaes.

Comparemos, por exemplo, o angulo ſólido A (fig. 206.) com o ſeu oppoſto G; o angulo EAB igual a EFB, tambem he igual a HGC, o angulo DAE = DHE = CGF, e o angulo DAB = DCB = HGF. Logo os tres angulos planos que formão o angulo ſólido A são iguaes aos tres que formão o angulo ſólido G, cada hum a cada hum; além diſto a ſua diſpoſição he differente em hum e outro; logo 1°. os dois angulos ſólidos A e G são ſymmetricos hum do outro (23, 5.).

Em ſegundo lugar, imaginemos duas diagonaes quaeſquer EC, AG, tiradas por vertices oppôſtos. Como AE he igual e parallela a CG, a figura AEGC he hum parallelogrammo; logo as diagonaes EC, AG ſe cortaráõ mutuamente em duas partes iguaes. Demonſtrar-se-ha do meſmo modo que a diagonal EC e outra DF ſe cortaráõ tambem em duas partes iguaes; logo 2.° as quatro diagonaes ſe cortaráõ mutuamente em duas partes iguaes, no meſmo ponto, que ſe póde conſiderar como centro do parallelepipedo.

PROPOSIÇÃO VI.

THEOREMA.

O plano BDHF (fig. 207.), *que paſſa por duas areſtas parallelas oppôſtas* BF, DH, *divide o parallelepipedo* AG *em dois priſmas triangulares* ABDHEF, GHFBCD, *ſymmetricos hum do outro.*

Primeiro, eſtes dois ſólidos são priſmas, porque os triangulos ABD, EFH, que tem os ſeus lados iguaes e parallelos, são iguaes, e ao meſmo tempo as faces lateraes ABFE, ADHE, BDHF, são parallelogrammos; logo o ſólido ABDHEF he hum priſma; o meſmo acontece ao ſólido GHFBCD. Agora digo que eſtes dois priſmas são ſymmetricos hum do outro.

Sobre a baſe ABD faça-ſe o priſma ABDE'F'H', que ſeja o ſymmetrico do priſma ABDEFH. Segundo o que fica demonſtrado (2.), o plano ABF'E' he igual a ABFE, e o plano ADH'E' he igual a ADHE: mas ſe compararmos o priſma GHFBCD com o priſma ABDH'E'F', a baſe GHF he igual a ABD, o parallelogrammo GHDC, que he igual a ABFE, he tambem igual a ABF'E', e o parallelogrammo GFBC, que he igual a ADHE, he tambem igual a ADH'E'. Logo os tres planos que formão o angulo ſólido G, no priſma GHFBCD, são iguaes aos tres planos que formão o angulo ſólido A no prifma ABDH'E'F', cada hum a cada hum; além difto eftão difpoftos femelhantemente. Logo eftes dois prifmas são iguaes (3.), e poderião fer fobrepoftos. Mas hum delles, ABDH'E'F', he fymmetrico do prifma ABDHEF; logo o outro GHFBCD, he tambem o fymmetrico de ABDHEF.

Corollario. Como dois prifmas fymmetricos são iguaes em folidez (pr. 2. cor.), fegue-fe que hum prifma triangular qualquer ABDHEF he metade do parallelepipedo conftruido fobre as tres areftas AB, AD, AE, que fe encaminhão ao mefmo angulo A: feria tambem metade do parallelepipedo conftruido fobre tres outras areftas BA, BD, BF.

PROPOSIÇÃO VII.

THEOREMA.

Se dois parallelepipedos AG, AL (fig. 208. e 209.), *tiverem huma bafe commum* ABCD, *e as fuas bafes fuperiores* EFGH, IKLM, *forem comprehendidas em hum mefmo plano e entre as mefmas parallelas*, EK, KL, *eftes dois parallelepipedos ferão equivalentes entre fi.*

Podem acontecer tres cafos, dos quaes dois eftão reprefentados pelas figuras 208. e 209., e o terceiro teria lugar fe FG fe confundiffe com IM, mas a demonftração he a mefma para todos; digo primeiramente que o prifma triangular AEIDHM he igual ao prifma triangular BFKCGL.

Com effeito, como AE he parallela a BF e HE a GF, o angulo AEI = BFK, HEI = GFK, e HEA = GFB. Deftes feis angulos os tres primeiros formão o angulo fólido E, os outros tres formão o angulo fólido F; logo, como os angulos planos são iguaes cada hum a cada hum e femelhantemente difpoftos, fegue-fe que os angulos fólidos E e F, são iguaes. Agora, fe puzermos o prifma AEM fobre o prifma BFL, e primeiro a bafe AEI fobre a bafe BFK, eftas duas bafes que são iguaes hão de coincidir; e como o angulo sólido E he igual ao angulo sólido F, o lado EH cahirá sobre o seu igual FG. Nada mais he necessario para provar que dois prismas hão de coincidir em toda a sua extensão; porque a base AEI e a aresta EH determinão o prisma AEM, como a base BFK e a aresta FG determinão o prisma BFL (3.) Logo estes prismas são iguaes.

Mas, se do sólido AEL tirarmos o prisma AEM, ficará o parallelepipedo AIL; e, se do mesmo sólido AEL tirarmos o prisma BFL, ficará o parallelepipedo AEG. Logo os dois parallelepipedos AIL, AEG são equivalentes entre si.

PROPOSIÇÃO VIII.

THEOREMA.

Dois parallelepipedos da mesma base, e da mesma altura são equivalentes entre si.

Seja ABCD (fig. 210.) a base commum aos dois parallelepipedos AG, AL; como elles tem a mesma altura, as suas bases superiores EFGH, IKLM estarão no mesmo plano. Demais os lados EF e AB são iguaes e parallelos, como tambem IK e AB; logo EF he igual e parallelo a IK; por huma razão semelhante GF he igual e parallelo a LK. Prolonguem-se os lados EF, HG, bem como LK, IM, atéque huns e outros formem por suas intersecções o parallelogrammo NOPQ, he claro que este parallelogrammo será igual a cada huma das bases EFGH, IKLM. Ora, se imaginarmos hum terceiro parallelepipedo que, com a mesma base inferior ABCD, tenha por base superior NOPQ, este terceiro parallelepipedo seria equivalente ao parallelepipedo AG (7.), porque tendo a mesma base inferior, as bases superiores estão comprehendidas no mesmo plano e entre as parallelas GQ, FN. Pela mesma razão este terceiro parallelepipedo seria equivalente ao parallelepipedo AL. Logo os dois paralle-

M ii

lepipedos AG, AL, que tem a meſma baſe e á meſma altura, são equivalentes entre ſi.

PROPOSIÇÃO IX.

THEOREMA.

Todo o parallelepipedo ſe póde converter em hum parallelepipedo rectangulo equivalente que tenha a meſma altura e huma baſe equivalente.

Seja AG o parallelepipedo propoſto (fig. 210.); dos pontos A, B, C, D, tirem-ſe AI, BK, CL, DM, perpendiculares ao plano da baſe, formar-ſe-ha deſte modo o parallelepipedo AL equivalente ao parallelepipedo AG, e cujas faces lateraes AK, BL, &c. ſerão rectangulos. Logo, ſe a baſe ABCD for hum rectangulo, AL ſerá o parallelepipedo rectangulo equivalente ao parallelepipedo propoſto AG. Mas ſe ABCD (fig. 211.) não for hum rectangulo, tirem-ſe AO e BN perpendiculares ſobre CD, depois OQ e NP perpendiculares ſobre a baſe, ter-ſe-ha o ſólido ABNOIKPQ que ſerá hum parallelepipedo rectangulo. Com effeito, por conſtrucção, a baſe ABON e a ſua oppoſta IKPQ são rectangulos; as faces lateraes tambem são rectangulos; porque as areſtas AI, OQ, &c. são perpendiculares ao plano da baſe; logo o ſólido AP he hum parallelepipedo rectangulo. Mas os dois parallelepipedos AP, AL, podem ſer conſiderados como da meſma baſe ABKI e da meſma altura AO: logo são equivalentes; logo o parallelepipedo AG, que ſe havia convertido em hum parallelepipedo equivalente AL (fig. 210. e 211.), ſe acha de novo convertido em hum parallelepipedo rectangulo equivalente AP, que tem a meſma altura AI, e cuja baſe ABNO he equivalente á baſe ABCD.

PROPOSIÇÃO X.

LEMMA.

Toda a secção NOPQR (fig. 200.), *feita em hum prisma por hum plano parallelo á base* ABCDE, *he igual á mesma base.*

Porque as parallelas AN, BO, CP, &c., comprehendidas entre os planos parallelos ABC, NOP, são iguaes (12, 5.), e assim todas as figuras ABON, BCPO, &c. são parallelogrammos. Daqui se segue que o lado ON he igual a AB, OP a BC, QP a CD, &c. Demais, os lados iguaes são parallelos; logo (13, 5.) o angulo ABC = NOP; o angulo BCD = OPQ, &c. Logo os dois polygonos ABCDE, NOPQR, tem os lados iguaes e os angulos iguaes cada hum a cada hum; logo são iguaes.

PROPOSIÇÃO XI.

THEOREMA.

Dois parallelepipedos rectangulos AG, AL (fig. 212.), *que tem a mesma base* ABCD, *estão entre si como as suas alturas* AE, AI.

Supponhamos primeiro que as alturas AE, AI, estejão entre si como dois numeros inteiros, por exemplo, como 15 está para 8. Divida-se AE em 15 partes iguaes, das quaes AI contenha 8, e pelos pontos de divisão x, y, z, &c., tirem-se planos parallelos á base. Estes planos repartiráõ o sólido AG em 15 parallelepipedos parciaes que serão todos iguaes entre si, porque tem bases iguaes e alturas iguaes; bases iguaes, porque toda a secção, como MIKL, feita em hum prisma parallelamente á sua base ABCD, he igual á esta base (10.); alturas iguaes, porque estas alturas são as mesmas divisões Ax, xy, yz, &c. Ora destes paralellapipedos iguaes, 8 se contém em AL; logo o sólido AG está para o sólido AL como 15 está para 8, ou em geral como a altura AE está para a altura AI.

Em segundo lugar, se a razão de AE para AI não se poder exprimir em numeros, digo que sempre teremos *solid.* AG : *solid.* AL : : AE : AI. Porque, se esta proporção não tem lugar, supponhamos que seja *sol.* AG : *sol.* AL : : AE : AO. Divida-se AE em partes iguaes, cada huma das quaes seja menor que OI, haverá ao menos hum ponto de divisão *m* entre O e I. Seja P o parallelepipedo que tem por base ABCD e por altura A*m*; como as alturas AE, A*m* estão entre si como dois numeros inteiros, teremos *sol.* AG : P : : AE : A*m*. Mas temos, por hypothese, *sol.* AG : *sol.* AL : : AE : AO. Daqui resulta *sol.* AL : P : : AO : A*m*. Mas AO he maior que A*m*; logo para que a proporção tivesse lugar, seria necessario que o sólido AL fosse maior que P; ora pelo contrario, he menor; logo he impossivel que o quarto termo da proporção *sol.* AG : *sol.* AL : : AE : *x*, seja huma linha maior que AI. Por hum semelhante raciocinio demonstrariamos que o quarto termo não póde ser menor que AI; logo he igual a AI; logo os parallelepipedos rectangulos da mesma base estão entre si como as suas alturas.

PROPOSIÇÃO XII.

THEOREMA.

Dois parallelepipedos rectangulos AG, AK (fig. 213.), *que tem a mesma altura* AE, *estão entre si como as suas bases* ABCD, AMNO.

Havendo posto os dois sólidos hum a par do outro, como a figura os representa, prolongue-se o plano ONKL até encontrar o plano DCGH na direcção PQ, ter-se-ha terceiro parallelepipedo AQ, que se poderá comparar com cada hum dos parallelepipedos AG, AK. Os dois sólidos AG, AQ, que tem a mesma base AEHD, estão entre si como as suas alturas AB, AO; igualmente os dois sólidos

AQ, AK, que tem a mesma base AOLE, estão entre si como as suas alturas AD, AM. Assim teremos as duas proporções,

sol. AG : *sol.* AQ : : AB : AO.
sol. AQ : *sol.* AK : : AD : AM.

Multiplicando ordenadamente estas duas proporções, e ommittindo, no resultado, o multiplicador commum *sol.* AQ, teremos,

sol. AG : *sol.* AK : : AB $\times$ AD : AO $\times$ AM.

Mas AB $\times$ AD representa a base ABCD, e AO $\times$ AM representa a base AMNO. Logo dois parallelepipedos rectangulos da mesma altura estão entre si como as suas bases.

PROPOSIÇÃO XIII.

THEOREMA.

Dois parallelepipedos rectangulos quaesquer estão entre si como os productos das suas bases pelas suas alturas, ou como os productos das suas tres dimensões.

Porque, dispondo os dois solidos AG, AZ (fig. 213.), de maneira que as suas superficies tenhão o angulo commum BAE, prolonguem-se os planos necessarios para formar o terceiro parallelepipedo AK da mesma altura com o parallelepipedo AG. Teremos pela proposição precedente,

sol. AG : *sol.* AK : : ABCD : AMNO.

Mas os dois parallelepipedos AK, AZ, que tem a mesma base AMNO, estão entre si como as suas alturas AE, AX; assim temos

sol. AK : *sol.* AZ : : AE : AX.

Multiplicando estas duas proporções ordenadamente, e ommittindo, no resultado, o multiplicador commum *sol.* AK, teremos

sol. AG : *sol.* AZ : : ABCD $\times$ AE : AMNO $\times$ AX.

Em lugar das bases ABCD e AMNO, podemos pôr AB $\times$ AD e AO $\times$ AM, o que dará

sol. AG : *sol.* AZ : : AB $\times$ AD $\times$ AE : AO $\times$ AM $\times$ AX.

Logo dois parallelepipedos rectangulos quaesquer estão entre si, &c.

Scholio. Daqui se segue que podemos tomar por medida de hum parallelepipedo rectangulo o producto da sua base pela sua altura, ou o producto das suas tres dimensões. Sobre este principio he que avaliaremos todos os outros solidos.

Para intelligencia desta medida, lembremo-nos que por producto de duas ou de mais linhas se entende o producto dos numeros que representão estas linhas, e estes numeros dependem da unidade linear que se póde tomar arbitrariamente. Isto posto, o producto das tres dimensões de hum parallelepipedo he hum numero que não significa nada em si mesmo, e que seria differente se tomassemos outra unidade linear. Mas se multiplicarmos da mesma maneira as tres dimensões de outro parallelepipedo, avaliando-as pela mesma unidade linear, os dois productos estarão entre si como os solidos, e darão a idéa de sua grandeza relativa.

A grandeza de hum solido, o seu volume, ou a sua extensão, constituem o que se chama sua *solidez*, e a palavra *solidez* se emprega particularmente para notar a medida de hum solido. Assim dizemos que a solidez de hum parallelepipedo rectangulo he igual ao producto da sua base pela sua altura, ou ao producto das suas tres dimensões.

Sendo iguaes as tres dimensões do cubo, se o lado for 1, a solidez será $1 \times 1 \times 1$, ou 1; se o lado for 2, a solidez será $2 \times 2 \times 2$, ou 8; se o lado for 3, a solidez será $3 \times 3 \times 3$, ou 27, e assim em diante; deste modo sendo os lados dos cubos como os numeros 1, 2, 3, &c., os cubos, ou as suas solidezes são como os numeros 1, 8, 27, &c. Daqui vem que se chama em arithmetica *cubo* de hum numero o producto que resulta de tres factores iguaes a este numero.

Se quizessemos fazer hum cubo duplo de hum cubo dado, deveria o lado do cubo procurado ser para o lado do cubo dado como a raiz cubica de 2 eſtá para a unidade. Ora, acha-ſe facilmente, por huma conſtrucção geometrica, a raiz quadrada de 2, mas não ſe póde achar da meſma maneira a ſua raiz cubica, ao menos pelas ſimplices operações da geometria elementar, que conſiſtem em empregar ſómente linhas rectas, das quaes são conhecidos dois pontos, e circulos que tem raios e centros determinados.

Eſta difficuldade fez célebre entre os antigos geometras o problema da *duplicação do cubo*, bem como o da *triſecção do angulo*, que he quaſi da meſma ordem. Mas ha muito que são conhecidas as ſoluções de que são ſuſceptiveis eſtas ſortes de problemas, as quaes, aindaque menos ſimplices que as conſtrucções da geometria elementar, não são todavia nem menos exactas nem menos rigoroſas.

PROPOSIÇÃO XIV.

THEOREMA.

A ſolidez de hum parallelepipedo, e em geral a ſolidez de hum priſma qualquer, he igual ao producto da ſua baſe pela ſua altura.

Porque, 1.° hum parallelepipedo qualquer he equivalente a hum parallelepipedo rectangulo da meſma altura e de baſe equivalente (9.). Ora a ſolidez deſte he igual á ſua baſe multiplicada pela ſua altura; logo a ſolidez do primeiro he tambem igual ao producto da ſua baſe pela ſua altura.

2.° Todo o priſma triangular he metade de hum parallelepipedo da meſma altura, e de baſe dupla (6.). Ora a ſolidez deſte he igual á ſua baſe multiplicada pela ſua altura; logo a do priſma triangular he igual ao producto da ſua baſe, metade da do parallelepipedo, multiplicada pela ſua altura.

3.° Hum priſma qualquer ſe póde repartir em tantos priſmas triangulares da meſma altura quantos triangulos ſe poderem formar no polygono que lhe ſerve de baſe. Mas a ſolidez de cada priſma triangular he igual á ſua baſe multiplicada pela ſua altura; e, como a altura he a mesma para todos, segue-se que a somma de todos os prismas parciaes será igual á somma de todos os triangulos que lhes servem de bases, multiplicada pela altura commum. Logo a solidez de hum prisma polygonal qualquer he igual ao producto da sua base pela sua altura.

Corollario. Se compararmos dois prismas que tem a mesma altura, os productos das bases pelas alturas estarão como as bases. Logo *dois prismas da mesma altura estão entre si como as suas bases*; por huma razão semelhante *dois prismas da mesma base estão entre si como as suas alturas.*

PROPOSIÇÃO XV.

LEMMA.

Se huma pyramide ABCDE (fig. 214.) *for cortada por hum plano* abd *parallelo á base:*

1.° *Os lados* SA, SB, SC, ... *e a altura* SO, *ficarão divididos proporcionalmente em* a, b, c, ... *e* o;

2.° *A secção* abcde *será hum polygono semelhante á base* ABCDE.

Porque 1.° sendo parallelos os planos ABD, *abd*, as suas intersecções AB, *ab*, por hum terceiro plano SAB, são parallelas (10, 5.); logo os triangulos SAB, *Sab*, são semelhantes, e temos a proporção SA : *Sa* : : SB : *Sb*; teriamos do mesmo modo SB : *Sb* : : SC : *Sc*, e assim por diante. Logo todos os lados SA, SB, SC, &c., estão cortados proporcionalmente em *a*, *b*, *c*, &c. A altura SO está cortada na mesma proporção no ponto *o*; porque BO e *bo* são parallelas, e assim temos SO : *So* : : SB : *Sb*.

2.° Como *ab* he parallela a AB, *bc* a BC, *cd* a CD, &c., o angulo *abc* = ABC, o angulo *bcd* = BCD, e assim em diante. De mais, os triangulos semelhantes SAB, *Sab*, dão AB : *ab* : : SB : *Sb*; e os triangulos semelhantes SBC, *Sbc*, dão SB : *Sb* : : BC : *bc*; logo AB : *ab* : : BC : *bc*; teriamos do mesmo modo BC : *bc* : : CD : *cd*, e assim em diante. Logo os polygonos *abcde*, ABCDE, tem os angulos iguaes cada hum a cada hum, e os lados homologos proporcionaes; logo são ſemelhantes.

Corollario. Sejão SABCDE, SXYZ, duas pyramides que tem o vertice commum, e as baſes no meſmo plano, de ſorte que ellas tenhão a meſma altura: ſe as cortarmos pelo meſmo plano parallelo ao plano das baſes, ſeja *abcde* a ſecção feita em huma pyramide, *xyz* a ſecção feita na outra, digo que *as ſecções*, abcde, xyz, *eſtarão entre ſi como as baſes* ABCDE, XYZ.

Porque, ſendo ſemelhantes os polygonos ABCDE, *abcde*, as ſuas ſuperficies eſtão como os quadrados dos lados homologos AB, *ab*; mas AB : *ab* : : SA : S*a*; logo ABCDE : *abcde* : : $\overline{SA}^2 : \overline{Sa}^2$. Pela meſma razão XYZ : *xyz* : : $\overline{SX}^2 : \overline{Sx}^2$. Mas, como *abcxyz* he hum meſmo plano, temos tambem SA : S*a* : : SX : S*x*; logo ABCDE : *abcde* : : XYZ : *xyz*. Logo as ſecções *abcde*, *xyz*, eſtão entre ſi como as baſes ABCDE, XYZ.

PROPOSIÇÃO XVI.

LEMMA.

Seja SABC (fig. 215.) *huma pyramide triangular da qual* S *he o vertice e* ABC *a baſe; ſe dividirmos os lados* SA, SB, SC, AB, AC, BC, *em duas partes iguaes nos pontos* D, E, F, G, H, I, *e por eſtes pontos tirarmos as linhas* DE, EF, DF, EG, FH, EI, GH; *digo que poderemos conſiderar a pyramide* SABC, *como compoſta de dois priſmas* AGHFDE, EGICFH, *equivalentes entre ſi, e de duas pyramides iguaes* SDEF, EGBI.

Em conſequencia da conſtrucção, ED he parallela a BA, e GE a AS; logo a figura ADEG he hum parallelogrammo. A figura ADFH he outro pela meſma razão; logo as tres rectas AD, GE, HF, são iguaes e parallelas; logo o fólido AGHFDE he hum prifma (14, 5.).

Provaremos femelhantemente que as duas figuras EFCI, CIGH, são parallelogrammos, e affim as tres rectas EF, CI, GH, são iguaes e parallelas; logo o fólido EGICFH he tambem hum prifma. Ora eu digo que eftes dois prifmas triangulares são equivalentes entre fi.

Com effeito, fe formarmos fobre as areftas GI, GE, GH, o parallelepipedo GX, o prifma triangular GEICFH ferá metade defte parallelepipedo (6.); por outra parte, o prifma AGHFDE, he igual tambem á metade do parallelepipedo GX (12), porque tem a mefma altura, e o triangulo AGH, bafe do prifma, he metade do parallelogrammo GICH (2, 3.) bafe do parallelepipedo. Logo os dois prifmas EGICFH, AGHFDE, são equivalentes entre fi.

Tirando eftes dois prifmas da pyramide SABC, ficão as duas pyramides SDEF, EGBI; ora eu digo que eftas duas pyramides são iguaes entre fi.

Com effeito, os lados iguaes, a faber, BE=SE, BG=AG=DE, EG=AD=SD, fazem o triangulo BEG igual ao triangulo ESD. Por huma razão femelhante o triangulo BEI he igual ao triangulo SEF; além difto, a inclinação mutua dos dois planos BEG, BEI, he a mefma que a dos dois planos ESD, SEF, porque BEG faz hum fó plano com ESD, da mefma maneira que BEI com SEF. Logo fe, para effeituarmos a fobrepofição das duas pyramides SDEF, EGBI, pozermos o triangulo EBG fobre o feu igual SDE, o plano BEI deverá cahir fobre o plano SEF; e como os triangulos EBI, SEF, são iguaes e femelhantemente difpoftos, o ponto I cahirá em F, e as duas pyramides SDEF, EGBI, coincidiráõ em huma fó.

Logo a pyramide inteira SABC he compofta de dois prifmas triangulares AGF, GIF, equivalentes entre fi, e de duas pyramides iguaes SDEF, EGBI.

Corollario I. Do vertice S abaixe-fe SO perpendicular fobre o plano ABC, e feja P o ponto em que esta perpendicular encontre o plano DEF paralelo a ABC; como SD $= \frac{1}{2}$ SA, teremos SP $= \frac{1}{2}$ SO (15.), e o triangulo DEF $= \frac{1}{4}$ ABC. Logo a solidez do prisma AGHFDE $= \frac{1}{4}$ ABC $\times \frac{1}{2}$ SO, e a dos dois prismas juntos AGHFDE, EGICFH, $= \frac{1}{4}$ ABC $\times$ SO. Estes dois prismas são menores que a pyramide SABC, porque se contém nella; logo *a solidez de huma pyramide triangular he maior que o quarto do producto da sua base pela sua altura.*

Corollario II. Se tirarmos as rectas DG, DH, teremos huma nova pyramide ADGH, que será igual á pyramide SDEF: porque podemos pôr a base DEF sobre a sua igual AGH, e então os angulos SDE, SDF, sendo iguaes aos angulos DAG, DAH, he claro que DS cahirá sobre AD (25, 5. schol.), e o vertice S sobre o vertice D. Ora a pyramide ADGH he menor que o prisma AGHDEF, porque se contém nelle; logo cada huma das pyramides SDEF, EGBI, he menor que o prisma AGHDEF; logo a pyramide SABC, que he composta de duas pyramides e de dois prismas, he menor que quatro dos mesmos prismas. Ora a solidez de hum destes prismas $= \frac{1}{8}$ ABC $\times$ SO, e o seu quadruplo $= \frac{1}{2}$ ABC $\times$ SO. Logo *a solidez de qualquer pyramide triangular he menor que ametade do producto da sua base pela sua altura.*

PROPOSIÇÃO XVII.

THEOREMA.

A solidez de huma pyramide triangular he igual ao terço do producto da sua base pela sua altura.

Seja SABC huma pyramide triangular qualquer (fig. 215.), ABC a sua base, SO a sua altura; digo que a solidez da pyramide SABC será igual ao terço do producto da superficie ABC pela altura SO;

de ſorte que teremos $SABC = \frac{1}{3}ABC \times SO$ ou $=$ $SO \times \frac{1}{3} ABC$.

Porque, ſe me negarem eſta propoſição, a ſolidez SABC deverá ſer igual ao producto de SO por huma quantidade maior ou menor que $\frac{1}{3}$ ABC.

Seja 1.° eſſa quantidade maior, de ſorte que ſeja $SABC = SO \times (\frac{1}{3} ABC + M)$. Se fizermos a meſma conſtrucção que na precedente propoſição, a pyramide SABC ficará dividida em dois priſmas equivalentes entre ſi AGHFDE, EGICFH, e em duas pyramides iguaes SDEF, EGBI. Ora a ſolidez do priſma AGHFDE he $DFE \times PO$, e a dos dois priſmas he por conſequencia $DFE \times 2PO$, ou $DFE \times SO$. Tirando os dois priſmas da pyramide inteira, o reſto ſerá igual ao dobro da pyramide SDEF, de ſorte que teremos

$$2SDEF = SO \times (\frac{1}{3} ABC + M - DFE).$$

Mas, como SA he dupla de SD, a ſuperficie ABC he quadrupla de DFE (15.), e aſſim $\frac{1}{3} ABC - DFE = \frac{4}{3} DFE - DFE = \frac{1}{3} DFE$; logo

$$2SDEF = SO \times (\frac{1}{3} DFE + M).$$

E por tanto, tomando as metades, teremos

$$SDEF = SP \times (\frac{1}{3} DFE + M).$$

Donde ſe vê que para ter a ſolidez da pyramide SDEF, ſe deverá ajuntar ao terço da ſua baſe a meſma ſuperficie M que já ſe havia ajuntado ao terço da baſe da grande pyramide, e multiplicar o todo pela altura SP da pequena pyramide.

Se dividirmos SD em duas igualmente no ponto K, e pelo ponto K fizermos paſſar o plano KLM parallelo a DEF, que encontre em Q a perpendicular SP, a meſma demonſtração prova que a ſolidez da pyramide SKLM ſerá igual a $SQ \times (\frac{1}{3} KLM + M)$.

Continuando aſſim a formar huma ſerie de pyramides, cujos lados decreſção em razão dupla, e as baſes em razão quadrupla, chegaremos bem depreſſa a huma pyramide $Sabc$, cuja baſe abc ſerá menor que $6M$: ſeja So a altura deſta ultima pyramide, e a ſua ſolidez, deduzida das ſolidezes das pyramides precedentes, ſerá $So \times (\frac{1}{3} abc + M)$. Mas temos $M > \frac{1}{6} abc$, e por conſequencia $\frac{1}{3} abc + M > \frac{1}{2} abc$; logo ſeria neceſſario que a ſolidez da pyramide $Sabc$ foſſe maior que $So \times \frac{1}{2} abc$. Reſultado abſurdo, porque provámos no Corollario II. da propoſição precedente, que a ſolidez de huma pyramide triangular he ſempre menor que a metade do producto da ſua baſe pela ſua altura; logo 1.° he impoſſivel que a ſolidez da pyramide SABC ſeja maior que $SO \times \frac{1}{3} ABC$.

Seja 2.° $SABC = SO \times (\frac{1}{3} ABC - M)$, provaremos, como no primeiro caſo, que a ſolidez da pyramide SDEF, cujas dimenſões são duas vezes menores, he igual a $SP \times (\frac{1}{3} DEF - M)$; e, continuando a ſerie de pyramides cujos lados decreſcem em razão dupla, até hum termo qualquer $Sabc$, teremos do mesmo modo a solidez da ultima pyramide $Sabc = So \times (\frac{1}{3} abc - M)$. Mas formando as bases ABC, DEF, LKM... abc, huma serie decrescente da qual cada termo he o quarto do precedente, chegaremos bem depressa a hum termo abc, igual a 12M; ou que será comprehendido entre 12M e 3M; então sendo M igual ou maior que $\frac{1}{12} abc$, a quantidade $\frac{1}{3} abc - M$ será ou igual a $\frac{1}{4} abc$, ou menor que $\frac{1}{4} abc$; de sorte que a solidez da pyramide $Sabc$ será ou $= So \times \frac{1}{4} abc$, ou $< So \times \frac{1}{4} abc$. Resultado tambem absurdo; porque, segundo o corollario I. da proposição precedente, a solidez de huma pyramide triangular he sempre maior que o quarto do producto da sua base pela sua altura. Logo 2.° a solidez da pyramide SABC não póde ser menor que $SO \times \frac{1}{3} ABC$.

Logo em fim a solidez da pyramide $SABC = SO \times \frac{1}{3} ABC$, ou $= \frac{1}{3} ABC \times SO$, conforme o enunciado do theorema.

Corollario I. Toda a pyramide triangular he o terço do prisma triangular da mesma base e da mesma altura; porque $ABC \times SO$ he a solidez do prisma do qual ABC he a base e SO a altura.

Corollario II. Duas pyramides triangulares da mesma altura estão entre si como as suas bases, e duas pyramides triangulares da mesma base estão entre si como as suas alturas.

PROPOSIÇÃO XVIII.

THEOREMA.

Toda a pyramide SABCDE (fig. 214.) *tem por medida o terço do producto da sua base* ABCDE *pela sua altura* AO.

Porque, fazendo passar os planos SEB, SEC, pelas diagonaes EB, EC, dividiremos a pyramide polygonal SABCDE em muitas pyramides triangulares que terão todas a mesma altura SO. Mas, pelo theorema precedente, cada huma destas pyramides se mede multiplicando cada huma das bases ABE, BCE, CDE, pelo terço da altura SO; logo a somma das pyramides triangulares, ou a pyramide polygonal SABCDE, terá por medida a somma dos triangulos ABE, BCE, CDE, ou o polygono ABCDE, multiplicado por $\frac{1}{3}$ SO. Logo toda a pyramide tem por medida o terço do producto da sua base pela sua altura.

Corollario I. Toda a pyramide he o terço do prisma da mesma base e da mesma altura.

Corollario II. Duas pyramides da mesma altura estão entre si como as suas bases, e duas pyramides da mesma base estão entre si como as suas alturas.

Scholio. Póde-se avaliar a solidez de todo o corpo polyedro, decompondo-o em pyramides, e esta decomposição se póde fazer de muitas maneiras. Huma das mais simplices he fazer passar os planos de divisão pelo vertice de hum mesmo angulo sólido; então teremos tantas pyramides parciaes quantas forem as faces do polyedro, excepto aquellas que fórmão o angulo sólido donde partem os planos de divisão.

PROPOSIÇÃO XIX.

THEOREMA.

Se huma pyramide for cortada por hum plano parallelo á sua base, o tronco restante depois de tirada a pequena pyramide, he igual á somma de tres pyramides que terião por altura commum a altura do tronco, e cujas bases serião a base inferior do tronco, a sua base superior, e huma meia proporcional entre estas duas bases.

Seja SABCDE (fig. 217.) huma pyramide cortada pelo plano *abd* parallelo á base: seja TFGH huma pyramide triangular cuja base e altura sejão iguaes ou equivalentes ás da pyramide SABCDE. Podemos suppôr as duas bases situadas no mesmo plano; e então o plano *abd*, prolongado, determinará na pyramide triangular huma secção *fgh*, situada na mesma altura acima do plano commum das bases. Donde resulta que a secção *fgh* está para a secção *abd* como a base FGH está para a base ABD (15.); e como as bases são equivalentes, as secções tambem o serão. Logo as pyramides S*abcde*, T*fgh*, são equivalentes, porque tem a mesma altura e bases equivalentes. As pyramides inteiras SABCDE, TFGH, são equivalentes pela mesma razão; logo os troncos ABD*dab*, FGH*hfg*, são equivalentes, e por consequencia bastará demonstrar a proposição enunciada, só para o caso do tronco de pyramide triangular.

Seja FGH*hfg* (fig. 218.) hum tronco de pyramide triangular de bases parallelas: pelos tres pontos F, *g*, H, conduza-se o plano F*g*H, que cortará do tronco a pyramide triangular *g*FGH. Esta pyramide tem por base a base inferior FGH do tronco; tambem tem por altura a altura do tronco, porque o vertice *g* está no plano da base superior *fgh*.

Cortada esta pyramide, ficará a pyramide quadrangular *gfh*HF, cujo vertice he *g* e a base *fh*HF. Pelos tres pontos, *f*, *g*, H, conduza-se o plano *fg*H, que repartirá a pyramide quadrangular em duas triangulares *g*F*f*H, *gfh*H. Esta ultima tem por base a base superior *gfh* do tronco, e por altura a altura do tronco, porque o seu vertice H pertence á base inferior. Assim temos já duas das tres pyramides que devem compor o tronco.

Resta considerar a terceira *g*F*f*H: ora, se tirarmos *g*K parallela a *f*F, e imaginarmos huma nova pyramide *f*FHK, cujo vertice he K e a base F*f*H; estas duas pyramides terão a mesma base F*f*H; ellas terão tambem a mesma altura, porque os vertices *g* e K estão situados em huma linha *g*K parallela a F*f*, e por consequencia parallela ao plano da base; logo estas pyramides são equivalentes: mas a pyramide *f*FKH póde ser considerada como tendo o vertice em *f*, e assim terá a mesma altura que o tronco. Quanto á sua base FKH, digo que ella he meia proporcional entre as bases FGH, *fgh*. Com effeito, os triangulos FHK *fgh*, tem hum angulo igual F $=$ *f*, e hum lado igual FK $=$ *fg*; logo temos (24, 3.) FHK : *fgh* : : FH : *fh*. Tambem temos FHG : FHK : : FG : FK ou *fg*. Mas os triangulos semelhantes FGH *fgh*, dão FG : *fg* : : FH : *fh*; logo FGH : FHK : : FHK : *fgh*; e assim a base FHK he meia proporcional entre as duas bases FGH, *fgh*. Logo hum tronco de pyramide triangular, de bases parallelas, equivale a tres pyramides que tem por altura commum a altura do tronco, e cujas bases são a base inferior do tronco, a sua base superior, e huma meia proporcional entre estas duas bases.

PROPOSIÇÃO XX.

THEOREMA.

Se cortarmos hum prisma triangular do qual ABC (fig. 216.) *he a base, por hum plano* DEF *inclinado a esta base, o solido* ABCDEF, *que resulta desta secção, será igual á somma de tres pyramides cujos vertices são* D, E, F, *e a base commum* ABC.

Pelos tres pontos F, A, C, faça-se passar o plano FAC, que cortará do prisma truncado ABCDEF, a pyramide triangular FABC. Esta pyramide tem por base ABC, e por vertice o ponto F.

Depois de separar esta pyramide, ficará a pyramide quadrangular FACDE, da qual F he o vertice, e ACDE a base. Pelos tres pontos F, E, C, tire-se mais hum plano FEC, que dividirá a pyramide quadrangular em duas pyramides triangulares FACE, FCDE.

A pyramide FAEC, que tem por base o triangulo AEC e por vertice o ponto F, he equivalente a huma pyramide EABC, que teria por base AEC e por vertice o ponto B. Porque estas duas pyramides tem a mesma base; tambem tem a mesma altura, porque a linha BF, que he parallela a cada huma das linhas AE, CD, he parallela ao seu plano ACE; logo a pyramide FAEC he equivalente á pyramide EABC, a qual póde ser considerada como tendo por base ABC, e por vertice o ponto E.

A terceira pyramide FCDE, se póde converter primeiro em AFCD; porque estas duas pyramides tem a mesma base FCD, e tambem tem a mesma altura, porque AE he parallela ao plano FCD; logo a pyramide FCDE he equivalente a AFCD. Depois a pyramide AFCD se póde converter em ABCD; porque estas duas pyramides tem a base commum ACD; tambem tem a mesma altura, porque os seus vertices F e B estão situados sobre huma parallela ao plano da base. Logo a pyramide FCDE, equivalente a AFCD, tambem he equivalente a ABCD: ora esta póde ser considerada como tendo por base ABC e por vertice o ponto D.

Logo em fim o prisma truncado ABCDEF he igual á somma de tres pyramides que tem por base commum ABC, e cujos vertices são respectivamente os pontos D, E, F.

Corollario. Se as arestas AE, BF, CD, forem perpendiculares ao plano da base, ellas serão ao mesmo tempo as alturas das tres pyramides que compoem o prisma truncado, de sorte que a solidez do prisma truncado será expresso por $\frac{1}{3}\,ABC \times AE + \frac{1}{3}\,ABC \times BF + \frac{1}{3}\,ABC \times CD$, quantidade que se reduz a $\frac{1}{3}\,ABC \times (AE + BF + CD)$.

PROPOSIÇÃO XXI.

THEOREMA.

Duas pyramides triangulares semelhantes tem as faces homologas semelhantes, e os angulos solidos homologos iguaes.

Segundo a definição, as duas pyramides triangulares SABC, TDEF (fig. 203.), são semelhantes, se os dois triangulos SAB, ABC, são semelhantes aos dois TDE, DEF, e semelhantemente dispostos, quer dizer, se tivermos o angulo ABS = DET, BAS = EDT, ABC = DEF, BAC = EDF, e se além disto a inclinação dos planos SAB, ABC for igual á dos planos TDE, DEF. Isto posto, digo que estas pyramides tem todas as faces semelhantes cada huma a cada huma, e os angulos solidos homologos iguaes.

Tome-se BG = ED, BH = EF, BI = ET, e ajunte-se GH, GI, IH. A pyramide TDEF he igual á pyramide IGBH, porque, tomando os lados GB, BH, iguaes aos lados DE, EF, e o angulo GBH sendo, por hypothese, igual ao angulo DEF, o triangulo GBH he igual a DEF. Logo para effeituar a sobreposição das duas pyramides, podemos pôr a base DEF sobre a sua igual GBH; depois, como o plano DTE he inclinado sobre DEF quanto o plano SAB sobre ABC, he claro que o plano DET cahirá indefinidamente sobre o plano BAS. Mas, por hypothese, o angulo DET = GBI; logo ET cahirá sobre a sua igual BI; e como os quatro pontos D, E, F, T, coincidem com os quatro G, B, H, I, segue-se (1) que a pyramide TDEF coincide com a pyramide IGBH.

Ora, os triangulos iguaes DEF, GBH, dão o angulo BGH = EDF = BAC; logo GH he parallela a AC. Por huma razão semelhante GI he parallela a AS; logo o plano IGH he parallelo a SAC (13, 5.). Daqui se segue que o triangulo IGH, ou o seu igual TDF, he semelhante a SAC (15.), e o triangulo IBH, ou o seu igual TEF, he semelhante a SBC; logo as duas pyramides triangulares semelhantes SABC, TDEF, tem as quatro faces semelhantes cada huma a cada huma: e além disto tem os angulos solidos homologos iguaes.

Porque, já puzemos o angulo solido E sobre o seu homologo B, e poderiamos fazer o mesmo aos outros dois angulos solidos homologos: mas vemos immediatamente que dois angulos solidos homologos são iguaes, por exemplo, os angulos T e S, porque são formados por tres angulos planos iguaes cada hum a cada hum, e semelhantemente dispostos.

Logo duas pyramides triangulares semelhantes tem as faces homologas semelhantes e os angulos solidos homologos iguaes.

Corollario I. Os triangulos semelhantes nas duas pyramides fornecem as proporções AB : DE : : BC :

EF : : AC : DF : : AS : DT : : SB : TE : : SC : TF ; logo *nas pyramides triangulares ſemelhantes, os lados homologos são proporcionaes.*

II. E, como os angulos ſolidos homologos são iguaes, ſegue-ſe que *a inclinação de duas faces quaeſquer de huma pyramide he igual á inclinação das duas faces homologas da pyramide ſemelhante.*

III. Se cortarmos a pyramide triangular SABC por hum plano GIH, parallelo a huma das faces SAC, a pyramide parcial BGIH ſerá ſemelhante á pyramide inteira BASC. Porque os triangulos BGI, BGH, são ſemelhantes aos triangulos BAS, BAC, cada hum a cada hum, e ſemelhantemente diſpoſtos; a inclinação dos ſeus planos he a meſma em ambas as partes; logo as duas pyramides são ſemelhantes.

IV. Em geral, *ſe cortarmos huma pyramide qualquer* SABCDE (fig. 214.) *por hum plano* abcde, *parallelo á baſe, a pyramide parcial* Sabcde *ſerá ſemelhante á pyramide inteira* SABCDE. Porque, as baſes ABCDE, *abcde* são ſemelhantes, e ajuntando AC, *ac*, acabamos de provar que a pyramide triangular SABC he ſemelhante á pyramide *Sabc*; logo o ponto S eſtá determinado ácêrca da baſe ABC como eſtá o ponto S ácêrca da baſe *abc* (def. 18.); logo as duas pyramides SABCDE, *Sabcde*, são ſemelhantes.

Scholio. Em vez dos cinco dados que requer a definição para a ſemelhança de duas pyramides triangulares, poderiamos ſubſtituir outros cinco, ſegundo differentes combinações, e daqui reſultarião outros tantos theoremas entre os quaes ſe diſtingue o ſeguinte: *Duas pyramides triangulares são ſemelhantes quando tem os lados homologos porporcionaes.*

Porque, ſe tivermos as proporções (fig. 203.) AB : DE : : BC : EF : : AC : DF : : AS : DT : : SB : TE : : SC : TF, o que abrange cinco condições; os triangulos ABS, ABC, ſerão ſemelhantes aos triangulos DET, DEF, e ſemelhantemente diſpoſtos. Teremos tambem o triangulo SBC ſemelhante a TEF;

logo os tres angulos planos que formão o angulo solido B serão iguaes aos angulos planos que formão o angulo solido E, cada hum a cada hum; donde se segue que a inclinação dos planos SAB, ABC he igual á dos seus homologos TDE, DEF, e por tanto as duas pyramides são semelhantes.

PROPOSIÇÃO XXII.

THEOREMA.

Dois polyedros semelhantes tem as faces homologas semelhantes, e os angulos solidos homologos iguaes.

Seja ABCDE (fig. 219.) a base de hum polyedro; sejão M e N os vertices de dois angulos solidos, fóra desta base, determinados pelas pyramides triangulares MABC, NABC, cuja base commum he ABC; sejão no outro polyedro, *abcde* a base homologa ou semelhante a ABCDE, *m* e *n* os vertices homologos a M e N, determinados pelas pyramides *mabc*, *nabc*, semelhantes ás pyramides MABC, NABC; digo primeiro que as distancias MN, *mn*, são proporcionaes aos lados homologos AB, *ab*.

Com effeito, sendo semelhantes as pyramides MABC, *mabc*, a inclinação dos planos MAC, BAC he igual á dos planos *mac*, *bac*: igualmente, sendo semelhantes as pyramides NABC, *nabc*, a inclinação dos planos NAC, BAC he igual á dos planos *nac*, *bac*. Logo, se tirarmos as primeiras inclinações das ultimas, ficará a inclinação dos planos NAC, MAC, igual á dos planos *nac*, *mac*. Mas, por causa da semelhança das mesmas pyramides, o triangulo MAC he semelhante a *mac*, e o triangulo NAC he semelhante a *nac*. Logo as duas pyramides triangulares MNAC, *mnac*, tem duas faces semelhantes cada huma a cada huma, semelhantemente dispostas e igualmente inclinadas entre si. Logo estas pyramides são semelhantes (21.), e os seus lados homologos dão a proporção MN : *mn* : : AM : *am*. Além diſto AM : *am* : : AB : *ab*; logo MN : *mn* : : AB : *ab*.

Sejão P e *p* outros dois vertices homologos dos meſmos polyedros, e teremos ſemelhantemente PN : *pn* : : AB : *ab*, PM : *pm* : : AB : *ab*. Logo MN : *mn* : : PN : *pn* : : PM : *pm*. Logo *o triangulo* PNM *que ajunta tres vertices quaeſquer de hum polyedro, he ſemelhante ao triangulo* pnm *que ajunta os tres vertices homologos do outro polyedro.*

Sejão ainda Q e *q* dois vertices homologos, e o triangulo PQN ſerá ſemelhante a *pqn*. Digo mais que a inclinação dos planos PQN, PMN, he igual á dos planos *pqn*, *pmn*.

Porque, ſe ajuntarmos QM, e *qm*, teremos o triangulo QNM ſemelhante a *qnm*, e por conſequencia o angulo QNM igual a *qnm*. Imagine-ſe em N hum angulo ſolido formado pelos tres angulos planos QNM, QNP, PNM, e em *n* hum angulo ſolido formado pelos tres angulos planos *qnm*, *qnp*, *pnm*; como eſtes angulos planos são iguaes cada hum a cada hum, ſegue-ſe que os angulos ſolidos são iguaes. Logo a inclinação dos dois planos PNQ, PNM, he igual á dos ſeus homologos *pnq*, *pnm*. Logo, ſe os dois triangulos PNQ, PNM, eſtiveſſem no meſmo plano, caſo em que ſeria o angulo QNM = QNP + PNM, teriamos tambem o angulo *qnm* = *qnp* + *pnm*, e os dois triangulos *qnp*, *pnm* eſtarião tambem no meſmo plano.

Tudo que fica demonſtrado tem lugar, quaeſquer que ſejão os angulos M, N, P, Q, comparados com os ſeus homologos *m*, *n*, *p*, *q*.

Supponhamos agora que a ſuperficie de hum dos polyedros ſeja repartida em triangulos ABC, ACD, MNP, NPQ, &c., he claro que a ſuperficie do outro polyedro conterá hum igual numero de triangulos *abc*, *acd*, *mnp*, *npq*, &c. ſemelhantes e ſemelhantemente diſpoſtos; e ſe muitos triangulos, como MPN, NPQ, &c., pertencerem a huma mesma face, e estiverem em hum mesmo plano, os seus homologos *mpn*, *npq*, &c. estarão igualmente em hum mesmo plano. Logo toda a face polygona em hum polyedro corresponderá a huma face polygona semelhante no outro polyedro. Logo os dois polyedros estarão comprehendidos debaixo do mesmo numero de planos semelhantes e semelhantemente dispostos. Digo mais que os angulos solidos homologos serão iguaes.

Porque, se o angulo solido N, por exemplo, he formado pelos angulos planos QNP, PNM, MNR, QNR, o angulo solido homologo *n* será formado pelos angulos planos *qnp*, *pnm*, *mnr*, *qnr*. Ora estes angulos planos são iguaes cada hum a cada hum, e a inclinação de dois planos adjacentes he igual á dos seus homologos. Logo os dois angulos solidos são iguaes, porque se podem sobrepôr.

Logo finalmente dois polyedros semelhantes tem as faces homologas semelhantes e os angulos solidos homologos iguaes.

Corollario. Segue-se da demonstração precedente que se, com quatro vertices de hum polyedro, formarmos huma pyramide triangular, e formarmos segunda com os quatro vertices homologos de hum polyedro semelhante, as duas pyramides serão semelhantes; porque terão os lados homologos proporcionaes (21. sch.).

He claro tambem que duas diagonaes homologas (17, 2.), por exemplo, AN, *an*, estão entre si como dois lados homologos AB, *ab*.

PROPOSIÇÃO XXIII.

THEOREMA.

Dois polyedros semelhantes se podem repartir no mesmo numero de pyramides triangulares semelhantes, cada huma a cada huma, e semelhantemente dispostas.

Porque já vimos que as superficies de dois polyedros se podem repartir no mesmo numero de triangulos semelhantes, cada hum a cada hum, e semelhantemente dispostos. Consideremos todos os triangulos de hum polyedro, excepto aquelles que fórmão o angulo sólido A, como as bases de outras tantas pyramides triangulares que tem o vertice em A, estas pyramides juntas comporáõ o polyedro. Reparta-se do mesmo modo o outro polyedro em pyramides que tenhão por vertice commum o vertice do angulo *a* homologo a A. He claro que a pyramide que ajunta os quatro vertices homologos de hum polyedro será semelhante á pyramide que une os quatro vertices homologos do outro polyedro. Logo dois polyedros semelhantes, &c.

PROPOSIÇÃO XXIV.

Theorema.

Duas pyramides semelhantes estão entre si como os cubos dos lados homologos.

Porque, sendo semelhantes estas duas pyramides, (fig. 214.) poderemos pôr a menor sobre a maior de maneira que fiquem tendo o angulo sólido S commum. Então as bases ABCDE, *abcde*, serão parallelas; porque, como as faces homologas são semelhantes (22.), o angulo S*ab* he igual a SAB, e S*bc* a SBC; logo o plano *abc* he parallelo ao plano ABC (13, 5.). Isto posto, seja SO a perpendicular abaixada do vertice S sobre o plano ABC, e seja *o* o ponto em que esta perpendicular encontra o plano *abc*; teremos, segundo o que já demonstrámos (15.), SO : S*o* : : SA : S*a* : : AB : *ab*; e por consequencia

$$\frac{1}{3}\,SO : \frac{1}{3}\,So\,.:\ AB : ab.$$

Mas as bases ABCDE, *abcde*, são figuras semelhantes, e dáo

$$ABCDE : abcde :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$$

Multiplicando esta duas proporções termo por termo, resultará daqui a proporção

$$ABCDE \times \frac{1}{3}SO : abcde \times \frac{1}{3}So :: \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3$$

ora $ABCDE \times \frac{1}{3}SO$ he a solidez da pyramide SABCDE (18.), e $abcde \times \frac{1}{3}So$ he a da pyramide $Sabcde$; logo duas pyramides semelhantes estão entre si como os cubos dos seus lados homologos.

PROPOSIÇÃO XXV.

THEOREMA.

Dois polyedros semelhantes estão entre si como os cubos dos lados homologos.

Porque dois polyedros semelhantes podem ser repartidos no mesmo numero de pyramides triangulares semelhantes cada huma a cada huma (23.). Ora as duas pyramides semelhantes APNM (fig. 219.), *apnm*, estão entre si como os cubos dos lados homologos AM, *am*, ou como os cubos dos lados homologos AB, *ab*. A mesma razão terá lugar entre outras duas pyramides homologas quaesquer; logo a somma de todas as pyramides que compõe hum polyedro, ou o mesmo polyedro, está para o outro polyedro como o cubo de hum lado qualquer do primeiro está para o cubo do lado homologo do segundo.

Scholio geral.

Póde-se representar em termos algebricos, quer dizer, da maneira mais succinta, a recapitulação das principaes proposições deste livro ácerca das solidezes dos polyedros.

Seja B a base de hum prisma, A a sua altura, a solidez do prisma será $B \times A$ ou BA.

Seja B a base de huma pyramide, A a sua altura; a solidez da pyramide será $B \times \frac{1}{3} A$, ou $A \times \frac{1}{3} B$, ou $\frac{1}{3}$ BA.

Seja A a altura de hum tronco de pyramide de bases parallelas, sejão B e B^{I} estas bases; $\sqrt{BB^{I}}$ será a meia proporcional entre ellas, e a solidez do tronco será $\frac{1}{3} A \times (B + B^{I} + \sqrt{BB^{I}})$.

Seja B a base de hum tronco de prisma triangular; A, A^{I}, A^{II} as alturas dos seus tres vertices superiores, a solidez do prisma truncado será $\frac{1}{3} B \times (A + A^{I} + A^{II})$.

Sejão finalmente P e p as solidezes de dois polyedros semelhantes, L e l dois lados homologos destes polyedros, teremos $P : p :: L^{3} : l^{3}$

LIVRO VII.

ESFERA.

DEFINIÇÕES.

I. *Esfera* he hum sólido terminado por huma ſuperficie curva, da qual todos os pontos são igualmente diſtantes de hum ponto *interior* que ſe chama *centro*.

Póde-ſe imaginar que a esfera he produzida pela revolução do ſemi-circulo DAE (fig. 220.) em torno do diametro DE. Porque a ſuperficie deſcrita neſte movimento pela curva DAE, terá todos os ſeus pontos em igual diſtancia do centro C.

II. *Raio da esfera* he huma linha recta tirada do centro a hum ponto da ſuperficie; *diametro* ou *eixo* he huma linha que paſſa pelo centro e termina de huma e outra parte na ſuperficie.

Todos os raios da esfera são iguaes; todos os diametros são iguaes e duplos do raio.

III. Demonſtraremos (pr. 1.) que toda a ſecção da esfera, feita por hum plano, he hum circulo; iſto poſto, chama-ſe *circulo maximo* a ſecção que paſſa pelo centro, e *circulo menor* a que não paſſa.

IV. Hum *plano* he *tangente* á esfera quando tem hum ſó ponto commum com a ſua ſuperficie.

V. *Pólo de hum circulo* da esfera he hum ponto da ſuperficie igualmente diſtante de todos os pontos da circumferencia defte circulo. Moftraremos (pr. 6.) que todo o circulo maximo ou menor fempre tem dois pólos.

VI. *Triangulo esferico* he huma parte da fuperficie da esfera, comprehendida por tres arcos de circulos maximos.

Eftes arcos, que fe chamão *lados* do triangulo, fempre fe fuppõe menores que a femi-circumferencia. Os angulos que os feus planos fazem entre fi são os angulos do triangulo.

VII. Hum triangulo esferico toma o nome de *rectangulo*, *ifosceles*, *equilatero*, nos mefmos cafos que hum triangulo rectilineo.

VIII. *Polygono esferico* he huma parte da fuperficie da esfera terminada por muitos arcos de circulos maximos.

IX. *Fufo* he a parte da fuperficie da esfera comprehendida entre dois femi-circulos maximos, que terminão em hum diametro commum,

X. Chamarei *cunha* ou *unha esferica* a parte do fólido da esfera comprehendida entre os mefmos femi-circulos maximos, e á qual o fufo ferve de bafe.

X. *Pyramide esferica* he a parte do fólido da esfera comprehendida entre os planos de hum angulo fólido que tem o vertice no centro. A *bafe* da pyramide he o polygono esferico, intercepto pelos mefmos planos.

XII. Chama-fe *zona* a parte da fuperficie da esfera comprehendida entre dois planos parallelos que são as fuas *bafes*. Hum deftes planos póde fer tangente á esfera, e então a zona tem fó huma bafe.

XIII. *Segmento esferico* he a porção do fólido da esfera comprehendida entre dois planos parallelos que são as fuas bafes.

Hum deftes planos póde fer tangente á esfera, e então o fegmento esferico tem fó huma bafe.

XIV. *Eixo* ou *altura* de huma zona e de hum fegmento he a diftancia dos dois planos parallelos que são as bafes da zona ou do fegmento.

XV. Em quanto o ſemi-circulo DAE (fig. 220) girando em torno do diametro DE deſcreve a esfera, todo o ſector circular, como DCF ou FCH, deſcreve hum ſólido que ſe chama *ſector esferico*.

PROPOSIÇÃO I.

THEOREMA.

Toda a ſecção da esfera, feita por hum plano, he hum circulo.

Seja AMB (fig. 221.) a ſecção feita por hum plano na esfera cujo centro he C. Do ponto C tire-ſe a perpendicular CO ſobre o plano AMB, e differentes linhas CM, CM, a differentes pontos da curva AMB, que termina a ſecção.

As obliquas CM, CM, CB, são iguaes, porque são raios da esfera, logo eſtão igualmente diſtantes da perpendicular CO (5, 5.); logo todas as linhas OM, OM, OB são iguaes; logo a ſecção AMB he hum circulo que tem por centro o ponto O.

Corollario I. Se a ſecção paſſar pelo centro da esfera, o ſeu raio ſerá o raio da esfera; logo todos os circulos maximos são iguaes entre ſi.

II. Dois circulos maximos ſe cortão em duas partes iguaes; porque a ſua interſecção commum, que paſſa pelo centro, he hum diametro.

III. Todo o circulo maximo divide a esfera e a ſua ſuperficie em duas partes iguaes; porque, ſe depois de ſepararmos os dois hemisferios, os applicarmos ſobre a baſe commum voltando as ſuas convexidades da meſma parte, as duas ſuperficies coincidiraõ huma com outra, pois a não ſer aſſim, haveria pontos mais proximos do centro huns do que os outros.

IV. O centro de hum circulo menor (fig. 221.) e o da esfera eſtão em huma meſma recta perpendicular ao plano do circulo menor.

V. Os circulos menores são tanto mais pequenos quanto mais diſtão do centro da esféra; porque quanto maior for a diſtancia CO, menor ha de ſer a corda AB, diametro do circulo menor AMB.

VI. Por dois pontos dados ſobre a ſuperficie da esfera, ſe póde fazer paſſar hum arco de circulo maximo; porque os dois pontos dados e o centro da esfera são tres pontos que determinão a poſição de hum plano. Entre tanto, ſe os dois pontos dados eſtiveſſem nos extremos de hum diametro, então eſtes dois pontos e o centro eſtarião em linha recta, e haveria huma infinidade de circulos maximos que podeſſem paſſar pelos dois pontos dados.

PROPOSIÇÃO II.

THEOREMA.

Em todo o triangulo esferico ABC (fig. 222.), *hum lado qualquer he menor que a ſomma dos outros dois.*

Seja O o centro da esfera, e tirem-ſe os raios OA, OB, OC. Se imaginarmos os planos AOB, AOC, COB, eſtes planos formaráõ no ponto O hum angulo ſólido; os angulos AOB, AOC, COB, terão por medida os lados AB, AC, BC, do triangulo esferico ABC. Ora cada hum dos tres angulos planos que compõe o angulo ſólido he menor que a ſomma dos outros dois (21, 3.); logo hum lado qualquer do triangulo ABC he menor que a ſomma dos outros dois.

PROPOSIÇÃO III.

THEOREMA.

O caminho mais curto de hum a outro ponto ſobre a ſuperficie da esfera, he o arco de circulo maximo que une os dois pontos dados.

Seja ANB (fig. 223.) o arco de circulo maximo que une os pontos A e B, e ſeja (ſe for poſ-

O

ſivel) M hum ponto da linha mais curta entre A e B. Pelo ponto M tirem-ſe os arcos de circulos maximos MA, MB, e tome-ſe BN = MB.

Segundo o theorema precedente, o arco ANB he mais curto que AM + MB; tirando de huma e outra parte BN = BM, ficará AN < AM. Ora a diſtancia de B até M, quer ella ſe confunda com o arco BM, quer ella ſeja outra qualquer linha, he igual á diſtancia de B até N; porque fazendo girar o plano do circulo maximo BM em torno do diametro que paſſa por B, ſe póde conduzir o ponto M ſobre o ponto N, e então a linha mais curta de M a B, qualquer que ella ſeja, ſe confundirá com a de N a B; logo os dois caminhos de A para B, hum que paſſa por M, outro que paſſa por N, tem huma parte igual de M até B e de N até B. O primeiro caminho he, por hypotheſe, o mais curto; logo a diſtancia de A para M he mais curta que a diſtancia de A para N, o que ſeria abſurdo, porque o arco AM he maior que AN. Logo nenhum ponto da linha mais curta entre A e B póde eſtar fóra do arco ANB; logo eſte arco he a linha mais curta entre os ſeus extremos.

PROPOSIÇÃO IV.

THEOREMA.

A ſomma dos tres lados de hum triangulo eſferico he menor que a circumferencia de hum circulo maximo.

Seja ABC (fig. 224.) hum triangulo esferico qualquer; prolonguem-ſe os lados AB, AC, até ſe encontrarem de novo em D. Os arcos ABD, ACD, ſerão ſemi-circumferencias, porque dois circulos maximos ſe cortão ſempre em duas partes iguaes (1.); mas no triangulo BCD temos o lado BC < BD + CD (2.); ajuntando a huma e outra parte AB +

AC, teremos AB + AC + BC < ABD + ACD, quer dizer menor que huma circumferencia.

PROPOSIÇÃO V.

THEOREMA.

A ſomma dos lados de qualquer polygono esferico he menor que a circumferencia de hum circulo maximo.

Seja, por exemplo, o pentagono ABCDE (fig. 225.): prolonguem-ſe os lados AB, DC, até o ſeu encontro em F; como BC he menor que BF + CF, o contorno do pentagono ABCDE he menor que o do quadrilatero AEDF. Prolonguem-ſe de novo os lados AE, DF, até que ſe encontrem em G, teremos ED < EG + GD; logo o contorno do quadrilatero AEDF he menor que o do triangulo AFG; eſte he menor que a circumferencia de hum circulo maximo; logo *à fortiori* o contorno do polygono ABCDE he menor que a circumferencia.

Scholio. Eſta propoſição he em ſubſtancia a meſma que a XXII. do livro V; porque, ſe O for o centro da esfera, podemos imaginar no ponto O hum angulo ſolido formado pelos angulos planos AOB, BOC, COD, &c., e a ſomma deſtes angulos deve ſer menor que quatro angulos rectos, o que não differe da preſente propoſição. A demonſtração que démos agora he differente da do livro V; ambas ſuppoem que o polygono ABCDE he *convexo*, ou que nenhum lado prolongado corta a figura.

PROPOSIÇÃO VI.

THEOREMA.

Se tirarmos o diametro DE (fig. 220.) *perpendicular ao plano do circulo maximo* AMB, *os extremos* D e E *deste diametro serão os polos do circulo* AMB, *e de todos os circulos menores, como* FNG, *que lhe são parallelos.*

Porque, DC, que he perpendicular ao plano AMB, he perpendicular a todas as rectas CA, CM, CB, &c. tiradas pelo seu pé neste plano; logo todos os arcos DA, DM, DB, &c., são quartos de circumferencia: o mesmo se verifica nos arcos EA, EM, EB, &c. Logo os pontos D e E estão cada hum igualmente distantes de todos os pontos da circumferencia AMB; logo são os pólos desta circumferencia (def. 5.).

Em segundo lugar, o raio DC, perpendicular ao plano AMB, he perpendicular ao seu parallelo FNG; logo passa pelo centro O do circulo FNG (1.); logo se tirarmos as obliquas DF, DN, DG, estas obliquas se affastaráõ igualmente da perpendicular DO, e serão iguaes. Mas sendo iguaes as cordas, os arcos são iguaes; logo todos os arcos DF, DN, DG, &c. são iguaes entre si; logo o ponto D he o pólo do circulo menor FNG, e pela mesma razão o ponto E he o outro pólo.

Corollario I. Todo o arco DM tirado de hum ponto do arco do circulo maximo AMB ao seu pólo he hum quarto de circumferencia, ou, por brevidade, hum *quadrante*, e este *quadrante* faz ao mesmo tempo hum angulo recto com o arco AM. Porque sendo a linha DC perpendicular ao plano AMC, todo o plano DMC que passa pela linha DC he perpendicular ao plano AMC (18. 5.); logo o angulo AMD he recto.

II. Para acharmos o pólo de hum arco dado AM, tiremos o arco indefinido MD perpendicular a AM, tomemos MD igual a hum *quadrante*, e o ponto D ferá hum dos pólos do arco AM; ou tirem-fe aos dois pontos A e M os arcos AD e MD perpendiculares a AM, e o ponto de concurfo D deftes dois arcos ferá o pólo pedido.

III. Reciprocamente, fe a diftancia do ponto D a cada hum dos pontos A e M for igual a hum *quadrante*, digo que o ponto D ferá o pólo do arco AM, e ao mefmo tempo os angulos DAM, AMD, ferão rectos.

Porque, feja C o centro da esfera, e tirem-fe os raios CA, CD, CM; como os angulos ACD, MCD, são rectos, a linha CD he perpendicular ás duas rectas CA, CM; logo ella he perpendicular ao feu plano; logo o ponto D he o pólo do arco AM; e por confequencia os angulos DAM, AMD, são rectos.

Scholio. As propriedades dos pólos dão azo a traçar fobre a fuperficie da esfera arcos de circulo com a mefma facilidade que fobre huma fuperficie plana. He claro, por exemplo, que fazendo girar o arco DF ou qualquer outra linha do mefmo intervallo em torno do ponto D, a extremidade F defcreverá o circulo menor FNG; e, fe fizermos girar o *quadrante* DFA em torno do ponto D, o extremo A defcreverá o arco de circulo maximo AM.

Se quifermos prolongar o arco AM, ou fe forem fómente dados os pontos A e M pelos quaes deve paffar efte arco, determinaremos primeiro o pólo D pela interfecção de dois arcos defcritos dos pontos A e M como centros com hum intervallo igual ao *quadrante*. Achado o pólo D, defcreveremos do ponto D, como centro e com o mefmo intervallo, o arco AM e o feu prolongamento.

Em fim, fe quifermos do ponto P abaixar huma perpendicular fobre o arco dado AM, prolongaremos este arco para S até que o intervallo PS seja igual a hum *quadrante*; depois do pólo S e com o mesmo intervallo descreva-se o arco PM, que será a perpendicular pedida.

PROPOSIÇÃO VII.

THEOREMA.

Todo o plano perpendicular ao extremo de hum raio he tangente á esfera.

Seja FAG (fig. 226.) hum plano perpendicular ao extremo do raio OA; se tomarmos hum ponto qualquer M sobre este plano, e ajuntarmos OM e AM, o angulo OAM será recto, e por tanto a distancia OM será maior que OA. Logo o ponto M fica fóra da esfera; e como o mesmo acontece a todos os outros pontos do plano FAG, segue-se que este plano tem só hum ponto A commum com a superficie da esfera; logo he tangente a esta superficie (def. 4.).

Scholio. Póde-se provar do mesmo modo que duas esferas tem hum só ponto commum, e por consequencia são *tangentes* huma á outra, quando a distancia dos seus centros he igual á somma ou á differença dos seus raios. Neste caso os centros e o ponto de contacto estão em linha recta.

PROPOSIÇÃO VIII.

THEOREMA.

O angulo BAC (fig. 226.) *que fazem entre si dois arcos de circulos maximos* AB, AC, *he igual ao angulo* FAG, *formado pelas tangentes destes arcos ao ponto* A: *por tanto elle tem por medida o arco* DE, *descrito do ponto* A *como pôlo entre os lados* AB, AC, *prolongados, se for necessario.*

Porque, a tangente AF, tirada no plano do arco AB, he perpendicular ao raio AO; a tangente AG, tirada no plano do arco AC, he perpendicular ao mesmo raio AO. Logo o angulo FAG he igual ao angulo dos planos OAB, OAC (17. 5.), que he o dos arcos, AB, AC, e que se nota por BAC.

Igualmente, se o arco AD for igual a hum *quadrante*, bem como AE, as linhas OD, OE, serão perpendiculares a AO, e assim o angulo DOE será igual ao angulo dos planos AOD, AOE. Logo o arco DE he a medida do angulo destes planos, ou a medida do angulo BAC.

Corollario. Os angulos dos triangulos esfericos podem comparar-se entre si por meio dos arcos de circulos maximos descritos dos seus vertices como pólos, e comprehendidos entre os seus lados. Deste modo facilmente se faz hum angulo igual a hum angulo dado.

Scholio. O angulo ACO (fig. 238.) he igual ao seu verticalmente opposto BCN; ou hum ou o outro he sempre o angulo formado pelos dois planos ACB, OCN.

Tambem he claro que no encontro de dois arcos ACB, OCN, os dois angulos adjacentes ACO, OCB, juntos, valem dois angulos rectos.

PROPOSIÇÃO IX.

THEOREMA.

Sendo dado o triangulo ABC, (fig. 227.) *se dos pontos* A, B, C, *como pólos, descrevermos os arcos* EF, FD, DE, *que formem o triangulo* DEF, *reciprocamente os tres pontos* D, E, F *serão os pólos dos lados* BC, AC, AB.

Porque, sendo o ponto A o pólo do arco EF, a distancia AE he hum *quadrante*; sendo o ponto C o pólo do arco DE, a distancia CE he igualmente hum *quadrante*; logo o ponto E dista hum *quadrante* de cada hum dos pontos A e C; logo he o pólo do arco AC (6. cor. 3.). Demonstrar-se-há do mesmo modo que D he pólo do arco BC, e F o do arco AB.

Corollario. Logo podemos descrever ABC por meio de DEF, assim como DEF por meio de ABC.

PROPOSIÇÃO X.

THEOREMA.

Suppóstas as mesmas cousas que no theorema precedente, cada angulo de hum dos triangulos ABC, DEF, *terá por medida a semi-circumferencia menos o lado opposto no outro triangulo.*

Prolonguem-se, se for necessario, os lados AB, AC, até o encontro de EF em G e H; como o ponto A he pólo do arco GH, o angulo A terá por medida o arco GH. Mas o arco EH he hum *quadrante* como GF, porque E he o pólo de AH, e F o pólo de AG; logo EH + GF vale huma semi-circumferencia. Ora EH + GF he o mesmo que EF + GH. Logo o arco GH que mede o angulo A he igual a huma semi-circumferencia menos o lado EF; do mesmo modo o angulo B terá por medida $\frac{1}{2}$ *circ.* — DF, e o angulo C, $\frac{1}{2}$ *circ.* — DE.

Esta propriedade deve ser reciproca entre os dois triangulos, porque se descrevem da mesma maneira, hum por meio do outro. Assim acharemos que os angulos D, E, F, do triangulo DEF, tem respectivamente por medida $\frac{1}{2}$ *circ.* — BC, $\frac{1}{2}$ *circ.* — AC, $\frac{1}{2}$ *circ.* — AB. Com effeito, o angulo D, por exemplo, tem por medida o arco MI; ora MI + BC = MC + BI = $\frac{1}{2}$ *circ.* Logo o arco MI, medida do angulo D, = $\frac{1}{2}$ *circ.* — BC, e assim dos mais.

Scholio. Cumpre notar que além do triangulo DEF (fig. 228.) poderiamos formar outros tres pela intersecção dos tres arcos DE, EF, DF. Mas a proposição actual só tem lugar no triangulo central, que se distingue dos outros tres, porque os dois angulos A e D estão situados da mesma parte de BC (fig. 227.), os dois B e E da mesma parte de AC, e os dois C e F da mesma parte de AB.

Dão-se differentes nomes aos dois triangulos ABC, DEF; nós os chamaremos *triangulos polares.*

PROPOSIÇÃO XI.

LEMMA.

Sendo dado o triangulo ABC (fig. 229.), *se do pólo* A *e com o intervallo* AC *descrevermos o arco de circulo menor* DEC, *se do pólo* B *e com o intervallo* BC *descrevermos igualmente o arco* DFC, *e do ponto* D, *em que os arcos* DEC, DFC *se cortarem, tirarmos os arcos de circulo maximo* AD, AB, *digo que o triangulo* ADB *assim formado terá todas as partes iguaes ás do triangulo* ACB.

Porque, por construcção, o lado AD = AC, DB = BC, AB he commum; logo estes dois triangulos tem os lados iguaes cada hum a cada hum. Agora digo que os angulos oppostos aos lados iguaes são iguaes.

Com effeito, se o centro da esfera se supposer em O, poder-se-ha conceber hum angulo solido formado no ponto O pelos tres angulos planos AOB, AOC, BOC; póde-se imaginar do mesmo modo hum segundo angulo solido formado pelos tres angulos planos AOB, AOD, BOD. E como os lados do triangulo ABC são iguaes aos do triangulo ADB, segue-se que os angulos planos que formão hum destes angulos solidos são iguaes aos angulos planos que formão o outro angulo solido, cada hum a cada hum. Mas neste caso fica demonstrado (23, 5.) que os planos em que estão os angulos iguaes, são igualmente inclinados entre si; logo os angulos do triangulo esferico DAB são iguaes aos do triangulo CAB, a saber, DAB = BAC, DBA = ABC, e ADB = ACB. Logo os lados e os angulos do triangulo ADB são iguaes aos lados e aos angulos do triangulo ACB.

Scholio. A igualdade destes triangulos não he todavia huma igualdade absoluta ou de sobreposição, porque seria impossivel applica-los hum sobre o outro exactamente, salvo se fossem isosceles. A igualdade de que se trata he o que já chamámos igualdade por *symmetria*, e por esta razão chamaremos os triangulos ACB, ADB, *triangulos symmetricos*.

PROPOSIÇÃO XII.

THEOREMA.

Dois triangulos situados sobre a mesma esfera, ou sobre esferas iguaes, são iguaes em todas as suas partes, quando tem hum angulo igual comprehendido entre lados iguaes cada hum a cada hum.

Seja o lado AB = EF (fig. 230.), o lado AC = EG, e o angulo BAC = FEG, o triangulo EFG poderá pôr-se sobre o triangulo ABC ou sobre o seu symmetrico ABD, da mesma maneira que se sobrepõe dois triangulos rectilineos que tem hum angulo igual comprehendido entre lados iguaes. Logo todas as partes do triangulo EFG serão iguaes ás do triangulo ABC ; quer dizer que, além das tres partes que ſuppozemos iguaes , teremos o lado BC = FG ; o angulo ABC = EFG , e o angulo ACB = EGF.

PROPOSIÇÃO XIII.

THEOREMA.

Dois triangulos ſituados ſobre a meſma esfera, ou ſobre esferas iguaes, são iguaes em todas as ſuas partes, quando tem hum lado igual adjacente a dois angulos iguaes cada hum a cada hum.

Porque póde-ſe pôr hum deſtes triangulos ſobre o outro , ou ſobre o ſeu ſymmetrico , como explicámos no caſo ſemelhante dos triangulos rectilineos. *Veja-ſe a prop.* VII. *liv.* I.

PROPOSIÇÃO XIV.

THEOREMA.

Se dois triangulos ſituados ſobre a meſma esfera, ou ſobre esferas iguaes, forem equilateros entre ſi, ſerão tambem equiangulos, e os angulos iguaes ſerão oppoſtos aos lados iguaes.

Iſto he manifeſto pela propoſição XI. , onde ſe vio que com tres lados dados AB , AC , BC (fig. 229.) não ſe póde fazer mais de dois triangulos ACB , ABD , differentes quanto á poſição das partes , mas iguaes quanto á grandeza destas meſmas partes. Logo dois triangulos equilateros entre ſi são ou abſolutamente iguaes , ou pelo menos iguaes por ſymmetria ; em hum e outro caſo são equiangulos , e os angulos iguaes são oppoſtos aos lados iguaes.

PROPOSIÇÃO XV.

THEOREMA.

Em todo o triangulo esferico isósceles os angulos oppostos aos lados iguaes são iguaes; e reciprocamente, se dois angulos de hum triangulo esferico forem iguaes, o triangulo será isósceles.

1.° Seja o lado AB = AC (fig. 231.); digo que teremos o angulo C = B; porque, se do vertice A tirarmos ao ponto D, meio da base, o arco AD, os dois triangulos ABD, ADC, terão os tres lados iguaes cada hum a cada hum; a saber, AD commum, BD = DC, e AB = AC; logo, pelo theorema precedente, estes triangulos terão os angulos iguaes, e será B = C.

2.° Seja o angulo B = C; digo que teremos AC = AB: porque, se o lado AB não for igual a AC, seja AB o maior, tome-se BO = AC, e tire-se OC. Os dois lados BO, BC, são iguaes aos dois AC, BC; o angulo comprehendido pelos primeiros OBC he igual ao angulo comprehendido pelos segundos ACB. Logo os dois triangulos BOC, ACB, tem as outras partes iguaes (12.), e temos o angulo OCB = ABC: mas o angulo ABC, por hypothese, = ACB; logo teriamos OCB = ACB, o que he impossivel; logo não se póde suppôr AB differente de AC; logo os lados AB, AC, oppostos aos angulos iguaes B e C, são iguaes.

Scholio. A mesma demonstração prova que o angulo BAD = DAC, e o angulo BDA = ADC. Logo estes dois ultimos são rectos; logo *o arco tirado do vertice de hum triangulo isósceles ao meio da base he perpendicular a esta base, e divide o angulo do vertice em duas partes iguaes.*

PROPOSIÇÃO XVI.

THEOREMA.

Em hum triangulo esferico ABC (fig. 232.), *se o angulo* A *for maior que o angulo* B, *o lado* BC *opposto ao angulo* A *será maior que o lado* AC *opposto ao angulo* B; *reciprocamente, se o lado* BC *for maior que* AC, *o angulo* A *será maior que o angulo* B.

1.° Seja o angulo $A > B$, faça-se o angulo $BAD = B$, teremos $AD = DB$ (15.). Mas $AD + DC$ he maior que AC; pondo DB em lugar de AD, teremos $DB + DC$ ou $BC > AC$.

2.° Se suppozermos $BC > AC$, digo que o angulo BAC será maior que ABC. Porque, se BAC fosse igual a ABC, teriamos $BC = AC$; e se tivessemos $BAC < ABC$, seguir-se-hia do que fica demonstrado que $BC < AC$; o que he contra a supposição. Logo BAC he maior que ABC.

PROPOSIÇÃO XVII.

THEOREMA.

Se os dois lados AB, AC, (fig. 233.) *do triangulo esferico* ABC *forem iguaes aos dois lados* DE, DF, *do triangulo* DEF *traçado sobre huma esfera igual, se ao mesmo tempo o angulo* A *for maior que o angulo* D, *digo que o terceiro lado* BC *do primeiro triangulo será maior que o terceiro* EF *do segundo.*

A demonstração he absolutamente semelhante á da *prop. X. liv. I.*

PROPOSIÇÃO XVIII.

THEOREMA.

Se dois triangulos traçados ſobre a meſma esfera ou ſobre esferas iguaes forem equiangulos entre ſi, tambem hão de ſer equilateros.

Sejão A e B os dois triangulos dados, P e Q os ſeus triangulos polares. Como os angulos são iguaes nos triangulos A e B, os lados ſerão iguaes nos polares P e Q (10.). Mas de ſerem equilateros os triangulos P e Q, ſegue-ſe que são tambem equiangulos (14.). Emfim, de ſerem iguaes os angulos nos triangulos P e Q, ſe ſegue (10.) que os lados são iguaes nos ſeus polares A e B. Logo os triangulos equiangulos A e B são ao meſmo tempo equilateros entre ſi.

Póde-ſe tambem demonſtrar a meſma propoſição ſem recorrer aos triangulos polares.

Sejão ABC, DEF (fig. 234.) dois triangulos equiangulos entre ſi, de ſorte que ſeja A = D, B = E, C = F; digo que ſerá o lado AB = DE, AC = DF, BC = EF.

Sobre o prolongamento dos lados AB, AC, tome-ſe AG = DE, e AH = DF, tire-ſe GH, e prolonguem-ſe os arcos BC, GH, até ſe encontrarem em I e em K.

Os dois lados AG, AH, são por conſtrucção iguaes aos dois DE, DF; o angulo comprehendido GAH = BAC = EDF; logo (12.) os triangulos AGH, DEF, são iguaes em todas as ſuas partes, e temos o angulo AGH = DEF = ABC, e o angulo AHG = DFE = ACB.

Nos triangulos IBG, GBK, o lado BG he commum, o angulo IGB = GBK; e porque IGB + BGK he igual a dois rectos, bem como GBK + IBG, ſegue-ſe que BGK = IBG. Logo os triangulos IBG, GBK, são iguaes (13.), e temos IG = BK, e IB = GK.

Da mesma maneira, de ser o angulo AHG = ACB, se concluirá que os triangulos ICH, HCK, tem hum lado igual ajacente a dois angulos iguaes; logo são iguaes; logo IH = CK, e HK = IC.

Agora, se dos iguaes BK, IG, tirarmos os iguaes CK, IH, os restos BC, GH, serão iguaes. De mais, o angulo BCA = AHG, e o angulo ABC = AGH. Logo os triangulos ABC, AHG, tem hum lado igual adjacente a dois angulos iguaes; logo são iguaes. Mas o triangulo DEF he igual em todas as suas partes ao triangulo AHG; logo tambem he igual ao triangulo ABC; e teremos AB = DE, AC = DF, BC = EF. Logo, se dois triangulos esfericos forem equiangulos entre si, os lados oppostos aos angulos iguaes serão iguaes.

Scholio. Esta proposição não tem lugar nos triangulos rectilineos, nos quaes não se conclue da igualdade dos angulos mais do que a proporcionalidade dos lados. Mas he facil dar a razão da differença que se acha a este respeito entre os triangulos rectilineos e os triangulos esfericos. Na proposição presente, bem como na prop. XII, XIII, XIV, e XVII, nas quaes se trata da comparação dos triangulos, se diz expressamente que estes triangulos são traçados sobre a mesma esfera, ou sobre esferas iguaes. Ora os arcos semelhantes são proporcionaes aos raios; logo, sobre esferas iguaes, dois triangulos não podem ser semelhantes sem que sejão iguaes. Por tanto, não he para admirar que a igualdade dos angulos traga comsigo a igualdade dos lados.

O contrario aconteceria se os triangulos fossem traçados sobre esferas desiguaes; então, sendo iguaes os angulos, os triangulos serião semelhantes, e os lados homologos estarião entre si como os raios das esferas.

PROPOSIÇÃO XIX.

THEOREMA.

A somma dos angulos de qualquer triangulo esferico he menor que seis e maior que dois angulos rectos.

Porque, 1.° cada angulo de hum triangulo esferico he menor que dois angulos rectos (*vé o scholio abaixo*); logo a somma dos tres angulos he menor que seis angulos rectos.

2.° A medida de cada angulo de hum triangulo esferico he igual á semi-circumferencia menos o lado correspondente do triangulo polar (10.). Logo a somma dos tres angulos tem por medida tres semi-circumferencias menos a somma dos lados do triangulo polar. Ora esta ultima somma he menor que huma semi-circumferencia (4.); logo, tirando-a de tres semi-circumferencias, o resto será maior que huma semi-circumferencia, que he a medida de dois angulos rectos. Logo 2.° a somma dos tres angulos de hum triangulo esferico he maior que dois angulos rectos.

Corollario I. A somma dos angulos de hum triangulo esferico não he constante como a dos triangulos rectilineos; ella varía de dois angulos rectos até seis, sem chegar a hum ou a outro limite. Por isso dois angulos dados não fazem conhecer o terceiro.

Corollario II. Hum triangulo esferico póde ter dois ou tres angulos rectos, dois ou tres angulos obtusos.

Se o triangulo ABC (fig. 235.) for *bi-rectangulo*, quer dizer, se tiver dois angulos rectos B e C, o vertice A será o pólo da base BC (6.); e os lados AB, AC serão *quadrantes*.

Se tambem o angulo A for recto, o triangulo ABC será *tri-rectangulo*, todos os seus angulos serão rectos, e os ſeus lados *quadrantes*. O triangulo tri-rectangulo ſe contém oito vezes na ſuperficie da esfera, cómo ſe vê na figura 236, ſuppondo o arco MN igual a hum *quadrante*.

Scholio. Em tudo o que diſſemos, havemos ſuppoſto, conforme a defin. VI, que os triangulos esfericos ſempre tem os lados menores que a ſemi-circumferencia; então ſegue-ſe que os angulos ſempre são menores que dois angulos rectos. Porque, ſe o lado AB (fig. 224.) for menor que a ſemi-circumferencia, bem como AC, eſtes arcos devem ſer prolongados ambos para ſe encontrarem em D. Ora, os dois angulos ABC, CBD, juntos, valem dois angulos rectos; logo o angulo ABC ſó he menor que dois angulos rectos.

Obſervaremos com tudo que exiſtem triangulos esfericos dos quaes certos lados são maiores que a ſemi-circumferencia, e certos angulos maiores que dois angulos rectos. Porque, ſe prolongarmos o lado AC em huma circumferencia inteira ACE, o que reſta, depois de haver tirado da ſemi-esfera o triangulo ABC, he hum novo triangulo, que tambem ſe póde deſignar por ABC, e cujos lados são AB, BC, AEC. Portanto he claro que o lado AEC he maior que a ſemi-circumferencia AED; mas ao meſmo tempo o angulo oppoſto em B excede a dois angulos rectos na quantidade CBD.

Finalmente, ſe excluimos da definição os triangulos cujos angulos e lados são tão grandes, he porque a ſua reſolução ou a determinação de ſuas partes ſe reduz ſempre á dos triangulos comprehendidos na definição. Com effeito, he facil de vêr que, ſendo conhecidos os angulos e os lados do triangulo ABC, ſe conhecerão immediatamente os angulos e os lados do triangulo que he o reſto da ſemi-esfera.

PROPOSIÇÃO XX.

THEOREMA.

O fuſo AMBNA (fig. 236.) *eſtá para a ſuperficie da esfera, como o angulo* MAN *deſte fuſo eſtá para quatro angulos rectos, ou como o arco* MN *que mede eſte angulo eſtá para a circumferencia.*

Supponhamos primeiro que o arco MN ſeja para a circumferencia MNPQ em huma razão racional, por exemplo, como 5 eſtá para 48. Divida-ſe a circumferencia MNPQ em 48 partes iguaes, das quaes MN conterá 5; ajuntando depois o pólo A e os pontos de divisão por outros tantos quartos de circumferencia, haverá 48 triangulos na ſemi-esfera AMNPQ, que ſerão todos iguaes entre ſi, porque terão todas as ſuas partes iguaes. Logo a esfera inteira conterá 96 deſtes triangulos parciaes, e o fuſo AMBNA conterá 10; logo o fuſo eſtá para a esfera como 10 eſtá para 96, ou como 5 eſtá para 48, quer dizer, como o arco MN eſtá para a circumferencia.

Se o arco MN não for commenſuravel com a circumferencia, provaremos pelo meſmo raciocinio de que já démos tantos exemplos que o fuſo eſtá ſempre para a esfera, como o arco MN eſtá para a circumferencia.

Corollario I. Dois fuſos eſtão entre ſi como os ſeus angulos reſpectivos.

Corollario II. Já vimos que a ſuperficie inteira da esfera he igual a oito triangulos tri-rectangulos (19.). Logo, ſe a área de hum deſtes triangulos ſe tomar por unidade, a ſuperficie da esfera ſerá repreſentada por 8. Iſto poſto, a ſuperficie do fuſo que tem o angulo em A ſerá expreſſa por 2A (ſe o angulo A for avaliado ſervindo o angulo recto de unidade); porque temos 2A : 8 : : A : 4. Logo aqui ha duas unidades differentes; huma para os angulos, que he o angulo recto ; outra para as superficies, que he o triangulo esferico tri-rectangulo, ou aquelle que tem todos os angulos rectos e os lados são quartos de circumferencia.

Scholio. A unha esferica comprehendida pelos planos AMB, ANB, está para a solidez total da esfera como o angulo A está para quatro angulos rectos. Porque, sendo os fusos iguaes, as unhas esfericas serão tambem iguaes. Logo duas unhas esfericas estão entre si como os angulos formados pelos planos que as comprehendem.

PROPOSIÇÃO XXI.

THEOREMA.

Dois triangulos esfericos symmetricos são iguaes em superficie.

Sejão ABC, DEF (fig. 237.) dois triangulos symmetricos, quer dizer, dois triangulos que tem os lados iguaes, AB = DE, AC = DF, BC = EF, e que não obstante não podem ser sobrepostos; digo que a superficie ABC he igual á superficie DEF.

Seja P o pólo do circulo menor que passaria pelos tres pontos A, B, C (1); deste ponto se tirem os tres arcos iguaes (6.) PA, PB, PC; no ponto F faça-se o angulo DFQ = ACP, o arco FQ = CP, e tirem-se DQ, EQ.

Os lados DF, FQ, são iguaes aos lados AC, CP; o angulo DFQ = ACP; logo os dois triangulos DFQ, ACP são iguaes em todas as suas par-

P ii

(1) O circulo que passa pelos tres pontos A, B, C, ou que he circunscrito ao triangulo ABC, não póde deixar de ser hum circulo menor da esfera; porque, se fosse hum circulo maximo, os tres lados AB, BC, AC, estarião no mesmo plano, e o triangulo ABC se reduziria a hum dos seus lados.

tes (12.), logo o lado DQ = AP, e o angulo DQF = APC.

Nos triangulos propoſtos DFE, ABC, os angulos DFE, ACB, oppoſtos aos lados iguaes DE, AB, são iguaes (11.); ſe tirarmos os angulos DFQ, ACP, iguaes por conſtrucção; ficará o angulo QEF igual a PCB. Além diſto os lados QF, FE, são iguaes aos lados PC, CB; logo os dois triangulos FQE, CPB, são iguaes em todas as ſuas partes; logo o lado QE = PB, e o angulo FQE = CPB.

Se notarmos agora que os triangulos DFQ, ACP, que tem os lados iguaes cada hum a cada hum, são ao meſmo tempo iſoſceles, veremos que ſe podem applicar hum ſobre o outro; porque, havendo poſto PA ſobre o ſeu igual QF, o lado PC cahirá ſobre o ſeu igual QD, e aſſim os dois triangulos ſe confundirão em hum ſó; logo são iguaes; logo a ſuperficie DQF = APC. Pela meſma razão a ſuperficie FQE = CPB, e a ſuperficie DQE = APB; logo temos DQF + FQE — DQE = APC + CPB — APB, ou DFE = ABC; logo os dois triangulos ſymmetricos ABC, DEF, são iguaes em ſuperficie.

Scholio. Os pólos P e Q poderião eſtar ſituados dentro dos triangulos ABC, DEF; então deveriamos ſommar os tres triangulos DQF, FQE, DQE, para com elles formar o triangulo DEF, e igualmente deveriamos ſommar os tres triangulos APC, CPB, APB, para formar o triangulo ABC; quanto ao mais, a demonſtração e a concluſão ſerião as meſmas.

PROPOSIÇÃO XXII.

THEOREMA.

Se dois circulos maximos AOB, COD, (fig. 238.) *ſe cortarem como ſe quiſer no hemisferio* AOCBD, *a ſomma dos triangulos oppoſtos* AOC, BOD, *ſerá igual ao fuſo cujo angulo he* BOD.

Porque, prolongando os arcos OB, OD, no outro hemisferio até o seu encontro em N, OBN será huma semi-circumferencia, bem como AOB; tirando de huma e outra parte OB, teremos BN = AO. Por semelhante razão temos DN = CO, e BD = AC; logo os dois triangulos AOC, BDN, tem os tres lados iguaes; além disso a sua posição he tal que elles são symmetricos hum do outro; logo são iguaes em superficie (21.), e a somma dos triangulos AOC, BOD, he equivalente ao fuso OBNDO cujo angulo he BOD.

Scholio. He claro tambem que as duas pyramides esfericas que tem por bases os triangulos AOC, BOD, sommadas, equivalem á unha esferica, cujo angulo he BOD.

PROPOSIÇÃO XXIII.

THEOREMA.

A' superficie de hum triangulo esferico qualquer tem por medida o excesso da somma dos seus tres angulos sobre dois angulos rectos.

Seja ABC (fig. 239.) o triangulo proposto; prolonguem-se os seus lados até encontrarem o circulo maximo DEFG tirado como se quizer fóra do triangulo. Em virtude do theorema precedente, os dois triangulos ADE, AGH, sommados, equivalem ao fuso, do qual A he o angulo, e que tem por medida 2A (20.). Assim teremos ADE + AGH = 2A; semelhantemente BGF + BID = 2B, CIH + CFE = 2C. Mas a somma destes seis triangulos excede a semi-esfera em duas vezes o triangulo ABC, além disto a semi-esfera he representada por 4; logo o dobro do triangulo ABC he igual a 2A + 2B + 2C — 4, e por consequencia ABC = A + B + C — 2. Logo hum triangulo esferico tem por medida a somma dos seus angulos menos dois angulos rectos.

Corollario I. Quantos angulos rectos houver nesta medida, tantos triangulos tri-rectangulos, ou oitavos de esfera, que são a unidade de superficie, conterá o triangulo proposto (20.). Por exemplo, se cada angulo for igual aos $\frac{4}{3}$ de hum angulo recto, então os tres angulos valeráõ 4 angulos rectos, e o triangulo proposto será representado por 4 — 2 ou 2; logo será igual a dois triangulos tri-rectangulos ou ao quarto da superficie da esfera.

Corollario II. O triangulo esferico ABC he equivalente ao fuso cujo angulo he $\frac{A+B+C}{2} - 1$; do mesmo modo a pyramide esferica, cuja base he ABC, equivale á unha esferica, cujo angulo he $\frac{A+B+C}{2} - 1$.

Scholio. Ao mesmo tempo que se compara o triangulo esferico ABC com o triangulo tri-rectangulo, a pyramide esferica que tem por base ABC se compara com a pyramide tri-rectangula, e daqui resulta a mesma proporção. O angulo solido do vertice da pyramide se compara do mesmo modo com o angulo solido do vertice da pyramide tri-rectangula: com effeito, a comparação se estabelece pela coincidencia das partes. Ora, se as bases das pyramides coincidirem, he evidente que as mesmas pyramides concidiráõ, bem como os angulos no vertice. Daqui resultão muitas consequencias.

1.° Duas pyramides triangulares esfericas estão entre si como as suas bases; e como huma pyramide polygonal se póde repartir em muitas pyramides triangulares, segue-se que duas pyramides esfericas quaesquer estão entre si como os polygonos que lhes servem de bases.

2.° Os angulos solidos no vertice das mesmas pyramides eſtão igualmente na proporção das baſes. Logo, para comparar dois angulos ſolidos quaeſquer, ſe devem pôr os ſeus vertices no centro de duas esferas iguaes, e eſtes angulos ſolidos eſtarão entre ſi como os polygonos esfericos interceptos entre os ſeus planos ou faces.

O angulo no vertice da pyramide tri-rectangula he formado por tres planos perpendiculares entre ſi. Eſte angulo, que ſe póde chamar *angulo ſolido recto*, he muito proprio para ſervir de unidade de medida aos outros angulos ſolidos. Iſto poſto, o meſmo numero que dá a área do polygono esferico, dará a medida do angulo ſolido correſpondente. Por exemplo, ſe a área do polygono esferico for $\frac{3}{4}$, iſto he, ſe for os $\frac{3}{4}$ do triangulo tri-rectangulo, o angulo ſolido correſpondente ſerá tambem $\frac{3}{4}$ do angulo ſolido recto.

PROPOSIÇÃO XXIV.

THEOREMA.

A ſuperficie de hum polygono esferico tem por medida a ſomma dos ſeus angulos, menos o producto de dois angulos rectos pelo numero dos lados do polygono menos dois.

Do meſmo vertice A (fig. 240.) tirem-ſe a todos os outros vertices as diagonaes AC, AD; o polygono ABCDE ficará repartido em tantos triangulos menos dois quantos forem os ſeus lados. Mas a ſuperficie de cada triangulo tem por medida a ſomma dos ſeus angulos menos dois angulos rectos, e he claro que a ſomma de todos os angulos dos triangulos he igual á ſomma dos angulos do polygono. Logo a ſuperficie do polygono he igual á ſomma dos ſeus angulos menos tantas vezes dois angulos rectos quantos são os ſeus lados menos dois.

Scholio. Seja S a ſomma dos angulos de hum polygono esferico, n o numero dos seus lados; supondo que o angulo recto he a unidade, a superficie do polygono terá por medida $ſ - 2(n - 2.)$ ou $ſ - 2n + 4$.

PROPOSIÇÃO XXV.

THEOREMA.

„ *Seja* S *o numero dos angulos solidos de hum polyedro*, H *o numero de suas faces*, A *o numero das arestas; digo que será sempre* $S + H = A + 2$.

Tome-se dentro do polyedro hum ponto do qual se tirem linhas rectas aos vertices de todos os seus angulos; imagine-se que do mesmo ponto como centro se descreva huma superficie esferica que seja encontrada por todas estas linhas em outros tantos pontos; ajuntem-se estes pontos por arcos de circulos maximos, de maneira que formem sobre a superficie da esfera polygonos correspondentes e no mesmo numero com as faces do polyedro. Seja ABCDE (fig. 240.) hum destes polygonos, e seja n o numero de seus lados; a sua superficie será $ſ - 2n + 4$, sendo $ſ$ a somma dos angulos A, B, C, D, E. Se avaliarmos semelhantemente a superficie de cada hum dos outros polygonos esfericos, e as sommarmos, concluiremos que a sua somma ou a superficie da esfera representada por 8, he igual á somma de todos os angulos dos polygonos, menos duas vezes o numero dos seus lados, mais 4 tantas vezes quantas forem as faces. Ora, como todos os angulos que se ajustão em torno do mesmo ponto A valem quatro angulos rectos, a somma de todos os angulos dos polygonos he igual a 4 tomado tantas vezes quantos são os angulos sólidos; logo he igual a 4 S. Depois disto, o dobro do numero dos lados AB, BC, CD, &c. he igual ao quadruplo do numero das arestas ou $= 4$ A, porque a mesma aresta serve de lado a duas faces. Logo teremos $8 = 4S - 4A + 4H$;

ou tomando o quarto de cada membro, $2 = S - A + H$; logo $S + H = A + 2$.

Corollario. Daqui se segue que *a somma dos angulos planos que formão os angulos sólidos de hum polyedro, he igual a tantas vezes quatro angulos rectos quantas unidades houver em* $S - 2$, *sendo* S *o numero dos angulos sólidos do polyedro.*

Porque, se considerarmos huma face da qual o numero de lados he n, a somma dos angulos desta face será $2n - 4$ angulos rectos (21, 1.). Mas a somma de todos os $2n$, ou o dobro do numero de lados de todas as faces, $= 4A$, e 4 tomado tantas vezes quantas forem as suas faces $= 4H$; logo a somma dos angulos de todas as faces $= 4A - 4H$. Ora, pelo theorema acima demonstrado, temos $A - H = S - 2$, e por consequencia $4A - 4H = 4(S - 2)$. Logo *a somma dos angulos planos*, &c.

PROPOSIÇÃO XXVI.

THEOREMA.

,, *De todos os triangulos esfericos formados com dois lados dados* CB, CA, (Est.12. fig.15.) *e hum terceiro arbitrario, o maior* ABC *he aquelle no qual o angulo* C *comprehendido pelos lados dados, he igual á somma dos outros dois angulos* A e B.

Prolonguem-se os dois lados AC, AB, até se encontrarem em D, ter-se-ha hum triangulo esferico BCD, no qual o angulo CBD será tambem igual á somma dos outros dois angulos BDC, BCD. Porque $BCD + BCA$ sendo igual a dois angulos rectos, assim como $CBA + CBD$, temos $BCD + BCA = CBA + CBD$. Ajuntando a huma e a outra parte $BDC = BAC$, teremos $BCD + BCA + BDC = CBA + CBD + BAC$. Ora, por hypothese, $BCA = CBA + BAC$; logo $CBD = BCD + BDC$.

Tire-se BI que faça o angulo $CBI = BCD$, e por consequencia $IBD = BDC$; os dois triangulos

IBC, IBD, ferão ifofceles, e teremos $IC = IB = ID$. Logo o ponto I, meio de BC, eftá em igual diftancia dos tres pontos B, C, D. Por femelhante razão o ponto O, meio de AB, eftará igualmente diftante dos tres pontos A, B, C.

Seja agora $CA' = CA$ e o angulo $BCA' > BCA$; fe ajuntarmos A'B, e prolongarmos os arcos A'C, A'B, até fe encontrarem em D', o arco D'CA' ferá huma femi-circumferencia bem como DCA. Logo, como $CA' = CA$, teremos tambem $CD' = CD$. Mas no triangulo CID', temos $CI + ID' > CD'$; logo $ID' > CD - CI$, ou $ID' > ID$.

No triangulo ifofceles CIB, dividamos o angulo do vertice I em dois iguaes pelo arco EIF que ferá perpendicular ao meio de BC. Se tomarmos hum ponto L entre I e E, a diftancia BL, igual a LC, ferá menor que BI; porque póde-fe demonftrar, como na prop. IX., liv. I., que temos $BL + LC < BI + IC$; logo tomando as metades de huma e de outra parte, teremos $BL < BI$. Mas no triangulo D'LC, temos $D'L > D'C - CL$, e com maior razão, $D'L > DC - CI$, ou $D'L > DI$, ou $D'L > BI$, ou $D'L > BL$. Logo fe procurarmos fobre o arco EIF hum ponto igualmente diftante dos tres pontos B, C, D', efte ponto não poderá deixar de eftar no prolongamento de EI para a parte de F. Seja I' o ponto procurado, de forte que tenhamos $D'I' = BI' = CI'$; os triangulos I'CB, I'CD', I'BD', que são ifofceles, dão os angulos iguaes $I'BC = I'CB$, $I'BD' = I'D'B$; $I'CD' = I'D'C$. Mas os angulos $D'BC + CBA'$ valem 2 angulos rectos, affim como $D'CB + BCA'$; logo

$$D'BI' + I'BC + CBA' = 2,$$
$$BCI' - I'CD' + BCA' = 2.$$

Ajuntando as duas fommas e notando que $I'BC = BCI'$ e $D'BI' - I'CD' = BD'I' - I'D'C = CD'B = CA'B$, teremos

$$2I'BC + CBA' + BCA' + CA'B = 4.$$

Logo $CA'B + CBA' + BCA' - 2$ (medida da área do triangulo A'BC) = 2 — 2I'BC; de forte que temos *área* A'BC = 2 — 2 *angulo* I'BC; femelhantemente no triangulo ABC, teriamos *área* ABC = 2 — 2 *angulo* IBC. Ora, demonftrámos que o angulo I'BC he maior que IBC; logo a *área* A'BC he menor que ABC.

A mefma demonftração e a mefma conclusão terião lugar fe, tomando o arco CA' = CA (Eft. 12. fig. 15 a.), fizeffemos o angulo BCA' < BCA. Logo ABC he o maior triangulo entre todos aquelles que tem dois lados dados e o terceiro arbitrario.

Scholio I. O triangulo ABC (fig. 241.), o maior entre todos aquelles que tem dois lados dados CA, CB, póde fer infcrito em hum femicirculo que tenha por diametro a corda do terceiro lado AB; porque, fendo O meio de AB, vimos que as diftancias OC, OB são iguaes; logo a circumferencia do circulo menor defcrita do ponto O como pólo e com o intervallo OB, paffará pelos tres pontos A, B, C. Demais, a linha recta BA he diametro defte circulo menor, porque o centro que deve eftar ao mefmo tempo no plano do circulo menor e no plano do arco do circulo maximo BOA (pr. 1. cor. 4.), fe achará neceffariamente na interfecção deftes dois planos, que he a recta BA, e affim BA ferá hum diametro.

II. No triangulo ABC, fendo o angulo C igual á fomma dos outros dois A e B, fegue-fe que a fomma dos tres angulos he dupla do angulo C. Mas efta fomma he fempre maior que dois angulos rectos (19.); logo o angulo C he maior que hum recto.

III. Se prolongarmos os lados CB, CA, até o feu encontro em E, o triangulo BAE ferá igual ao quarto da fuperficie da esfera. Porque o angulo E = C = ABC + CAB; logo os tres angulos do triangulo BAE equivalem aos quatro ABC, ABE, CAB, BAE, cuja fomma he igual a 4 angulos rectos. Logo a fuperficie do triangulo BAE (24.) =

$4 - 2 = 2$, que he o quarto da ſuperficie da esfera.

IV. O *maximum* não teria lugar ſe a ſomma dos dois lados CA, CB, foſſe igual ou maior que a ſemi-circumferencia de hum circulo maximo. Porque como o triangulo ABC deve ſer inſcrito em hum ſemi-circulo da esfera, deve a ſomma dos dois lados CA, CB, ſer menor que a ſemi-circumferencia de hum circulo da esfera, e por conſequencia menor que a ſemi-circumferencia de hum circulo maximo.

A razão porque não ha *maximum*, quando a ſomma dos dois lados dados he maior que a ſemi-circumferencia de hum circulo maximo, he porque então o triangulo augmenta cada vez mais á medida que he maior o angulo comprehendido pelos lados dados. Em fim, quando eſte angulo for igual a dois rectos, os tres lados eſtarão no meſmo plano, e formarão huma circumferencia inteira; logo o triangulo esferico virá a ſer igual á ſemi-esfera, mas deixará então de ſer triangulo.

PROPOSIÇÃO XXVII.

THEOREMA.

„ *De todos os triangulos esfericos formados com hum lado dado e hum perimetro dado, o maior he aquelle no qual os dois lados não determinados são iguaes.*

Seja AB o lado dado (fig. 242.) commum aos dois triangulos ACB, ADB, e ſeja $AC + CB = AD + DB$; digo que o triangulo iſoſceles ACB, no qual $AC = CB$, he maior que o não-iſoſceles ADB.

Porque, como eſtes triangulos tem a parte commum AOB, baſta moſtrar que o triangulo BOD he menor que AOC. O angulo CBA, igual a CAB, he maior que OAB; aſſim o lado AO he maior que OB (16.); tome-se OI = OB, faça-se OK = OD, e tire-se KI; o triangulo OKI será igual a DOB (12.). Se negarem agora que o triangulo DOB ou o seu igual KOI seja menor que OAC, deverá elle ser igual ou maior; em ambos os casos, como o ponto I está entre os pontos A e O, o ponto K ficará sobre OC prolongado, pois de outra maneira o triangulo OKI se conteria no triangulo CAO, e por consequencia seria menor. Isto posto, sendo CA o mais curto caminho de C para A, temos $CK + KI + IA > CA$. Mas $CK = OD - CO$, $AI = AO - OB$, $KI = BD$; logo $OD - CO + AO - OB + BD > CA$, e reduzindo, $AD - CB + BD > CA$, ou $AD + BD > AC + CB$. Ora esta desigualdade he contraria á hypothese $AD + BD = AC + CB$; logo o ponto K não póde cahir sobre o prolongamento de OC; logo cahe entre O e C, e por consequencia o triangulo KOI, ou o seu igual ODB, he menor que ACO; logo o triangulo isosceles ACB he maior que o não-isosceles ADB da mesma base e do mesmo perimetro.

Scholio. Estas duas ultimas proposições são analogas ás proposições I. e III. do appendice ao livro IV.; portanto dellas se podem deduzir, ácêrca dos polygonos esfericos, as consequencias que tem lugar para os polygonos rectilineos. Eis-aqui as principaes:

1.° *De todos os polygonos esfericos isoperimetros e do mesmo numero de lados, o maior he hum polygono equilatero.*

2.° *De todos os polygonos esfericos formados com lados dados, e o ultimo arbitrario, o maior he aquelle que se póde inscrever em hum semi-circulo que terá por diametro a corda do lado não determinado.* Para que a solução seja possivel, deve a somma dos lados dados ser menor que huma semi-circumferencia de circulo maximo.

3.° *O maior dos polygonos esfericos formados* *com lados dados he aquelle que se póde inscrever em hum circulo da esfera.*

4.° *O maior dos polygonos esfericos que tem o mesmo perimetro e o mesmo numero de lados, he aquelle que tem os angulos e os lados iguaes.*

Todas as proposições de *maximum* ácêrca dos polygonos esfericos se applicão aos angulos solidos dos quaes são medida aquelles polygonos.

APPENDICE AOS LIVROS VI E VII.

POLYEDROS REGULARES.

PROPOSIÇÃO I.

THEOREMA.

„ *NÃo póde haver mais de cinco polyedros regulares.*

Porque definimos *polyedros regulares* aquelles dos quaes todas as faces são polygonos regulares iguaes, e todos os angulos solidos são iguaes entre si. Estas condições só podem ter lugar em hum pequeno numero de casos.

1.° Se as faces forem triangulos equilateros, póde-se formar cada angulo solido do polyedro com tres angulos destes triangulos, ou com quatro, ou com cinco. Daqui nascem tres corpos regulares, que são o tetraedro, o octaedro, e o icosaedro. Com triangulos equilateros não se podem formar mais do que estes, porque seis angulos destes triangulos valem quatro angulos rectos, e não podem formar angulo solido (21, 5.).

2.° Se as faces forem quadrados, se poderão ajuntar os seus angulos tres a tres; e daqui resulta o hexaedro ou cubo.

Quatro angulos de quadrados valem quatro angulos rectos, e não podem formar angulo solido.

3.° Finalmente, se as faces forem pentagonos regulares, se poderão tambem ajuntar os seus angulos tres a tres, e daqui refultará o dodecaedro regular.

Não fe póde hir mais avante; porque tres angulos de hexagonos regulares valem quatro angulos rectos, e tres de heptagonos ainda mais.

Logo não póde haver mais de cinco polyedros regulares formados tres com triangulos equilateros, hum com quadrados, e outro com pentagonos.

Scholio. Na propofição feguinte provaremos que eftes cinco polyedros exiftem realmente; e que podemos determinar todas as fuas dimenfões quando for conhecida huma das fuas faces.

PROPOSIÇÃO II.

PROBLEMA.

„ *Sendo dada huma das faces de hum polyedro regular, ou fómente o feu lado, conftruir o polyedro.*

Efte problema offerece cinco que vão fer refolvidos fucceffivamente.

Conftrucção do tetraedro.

Seja ABC (fig. 243.) o triangulo equilatero que deve fer huma das faces do tetraedro; no ponto O, centro defte triangulo, levante-fe OS perpendicular ao plano ABC; termine-fe efta perpendicular no ponto S, de forte que AS = AB; tiremfe SB, SC, e a pyramide SABC fera o tetraedro pedido.

Porque, por caufa das diftancias iguaes OA, OB, OC, as obliquas SA, SB, SC, fe affaftão igualmente da perpendicular SO e são iguaes. Huma dellas SA = AB; logo as quatro faces da pyramide SABC são triangulos iguaes ao triangulo dado ABC. Além difto, os angulos folidos defta pyramide são iguaes entre fi, porque são formados cada hum com tres angulos planos iguaes. Logo efta pyramide he hum tetraedro regular.

Conftrucção do hexaedro.

Seja ABCD (fig. 244.) hum quadrado dado: fobre a bafe ABCD conftrua-fe hum prifma recto cuja altura AE feja igual ao lado AB. He claro que as faces defte prifma são quadrados iguaes, e que os feus angulos fólidos são iguaes entre fi como formados cada hum com tres angulos rectos; logo o prifma he hum hexaedro regular ou cubo.

Conftrucção do octaedro.

Seja AMB (fig. 245.) hum triangulo equilatero dado: fobre o lado AB defcreva-fe o quadrado ABCD; ao ponto O, centro defte quadrado, levante-fe fobre o feu plano a perpendicular TS, terminada de huma e outra parte em T e S, de maneira que OT=OS=OA; depois una-fe SA, SB, TA, &c., ter-fe-ha hum fólido SABCDT, compofto de duas pyramides quadrangulares SABCD, TABCD, encoftadas na bafe commum ABCD: efte fólido será o octaedro regular pedido.

Com effeito o triangulo AOS he rectangulo em O, bem como o triangulo AOD; os lados AO, OS, OD, são iguaes; logo eftes triangulos são iguaes, e temos AS=AD. Demonftrar-fe-ha do mefmo modo que todos os outros triangulos rectangulos AOT, BOS, COT, &c. são iguaes ao triangulo AOD; logo todos os lados AB, AS, AT, &c. são iguaes entre fi, e por confequencia o fólido SABCDT he comprehendido por oito triangulos iguaes ao triangulo equilatero dado ABM. Digo mais que os angulos fólidos do polyedro são iguaes entre fi, por exemplo, o angulo S he igual ao angulo B.

Porque he claro que o triangulo SAC he igual ao triangulo DAC, e por tanto o angulo ASC he recto; logo a figura SATC he hum quadrado igual ao quadrado ABCD. Mas se compararmos a pyramide BASCT com a pyramide SABCD, a base ASCT da primeira póde pôr-se sobre a base ABCD da segunda; então sendo o ponto O hum centro commum, a altura OB da primeira coincidirá com a altura OS da segunda, e as duas pyramides se confundiráõ em huma só; logo o angulo sólido S he igual ao angulo sólido B; logo o sólido SABCDT he hum octaedro regular.

Scholio. Se tres rectas iguaes AC, BD, ST, forem perpendiculares entre si e se cortarem no meio, os extremos destas rectas serão os vertices de hum octaedro regular.

Construcção do dodecaedro.

Seja ABCDE (fig. 246.) hum pentagono regular dado: sejão ABP, CBP, dois angulos planos iguaes ao angulo ABC: com estes angulos planos forme-se o angulo sólido B, e determine-se pela proposição XXIV, livro V, a inclinação mutua de dois destes planos, inclinação que eu chamo K. Formem-se semelhantemente nos pontos C, D, E, A, angulos sólidos iguaes ao angulo sólido B, e situados da mesma maneira; o plano CBP será o mesmo com o plano BCG, porque são inclinados ambos a mesma quantidade K sobre o plano ABCD. Logo póde-se no plano PBCG descrever o pentagono BCGFP igual ao pentagono ABCDE. Se fizermos o mesmo em cada hum dos outros planos CDI, DEL, &c., teremos huma superficie convexa PFGH, &c. composta de seis pentagonos regulares iguaes e inclinados cada hum sobre o seu adjacente a mesma quantidade K. Seja *pfgh*, &c. huma segunda superficie igual a PFGH, &c., digo que estas duas superficies se podem reunir de maneira que formem huma só superficie convexa continua. Com effeito, o angulo *opf*, por exemplo, se póde ajuntar aos dois angulos OPB, BPF, para fazer hum angulo sólido P igual ao angulo B; e nesta união nada se mudará á inclinação dos planos BPF, BPO, porque efta inclinação he tal qual convem para a formação do angulo fólido. Mas ao mefmo tempo que o angulo fólido P fe fórma, o lado *pf* fe applicará fobre o feu igual PF, e no ponto F fe acharáõ unidos tres angulos planos PFG, *pfe*, *efg*, que formaráõ hum angulo fólido igual a cada hum dos angulos já formados; efta união fe fará fem alterar o eftado do angulo P, nem o da fuperficie *efgh*, &c.; porque os planos PFG, *efp*, já unidos em P, tem entre fi a inclinação conveniente K, bem como os planos *efg*, *efp*. Continuando affim fucceffivamente, fe vê que as duas fuperficies fe ajuftaráõ mutuamente huma com outra para formar huma fó fuperficie continua e reintrante fobre fi mefma. Efta fuperficie ferá a de hum dodecaedro regular, porque ella he compofta de doze pentagonos regulares iguaes, e todos os feus angulos fólidos são iguaes entre fi.

Conftrucção do icofaedro.

Seja ABC (fig. 247.) huma das fuas faces; formemos primeiro hum angulo fólido com cinco planos iguaes ao plano ABC, e igualmente inclinados cada hum fobre o feu adjacente. Para ifto, fobre o lado B'C', igual a BC, faremos o pentagono regular B'C'H'I'D'; no centro defte pentagono levantaremos fobre o feu plano huma perpendicular, que termine em A', de maneira que B'A' = B'C'; tiremos A'C', A'H', A'I', A'D' e o angulo fólido A', formado pelos cinco planos B'A'C', C'A'H', &c., ferá o angulo fólido procurado. Porque as obliquas A'B', A'C', &c. são iguaes, huma dellas A'B' he igual ao lado B'C'; logo todos os triangulos B'A'C', C'A'H', &c. são iguaes entre fi e ao triangulo dado ABC.

He claro além difto que os planos B'A'C', C'A'H', &c. eftão igualmente inclinados cada hum fobre o feu adjacente; porque os angulos fólidos B', C', &c. são iguaes entre fi, porque são formados cada hum com dois angulos de triangulos equilateros e hum de pentagono regular. Chamemos K a inclinação dos dois planos em que estão os angulos iguaes, inclinação que se póde determinar pela proposição XXIV, liv. V; o angulo K será ao mesmo tempo a inclinação de cada plano que compõe o angulo sólido A' sobre o seu adjacente.

Isto posto, se fizermos nos pontos A, B, C, angulos sólidos iguaes cada hum ao angulo A', teremos huma superficie convexa DEFG, &c. composta de dez triangulos equilateros, cada hum dos quaes será inclinado sobre o seu adjacente a quantidade K; e os angulos D, E, F, &c. do seu contorno reuniráõ alternadamente tres e dois angulos de triangulos equilateros. Imaginemos huma segunda superficie igual á superficie DEFG, &c.; estas duas superficies poderáõ ajustar-se mutuamente, ajuntando cada angulo triplo de huma a hum angulo duplo da outra; e, como os planos destes angulos tem já entre si a inclinação K necessaria para formar hum angulo sólido quintuplo igual ao angulo A, esta união nada ha de alterar no estado de cada superficie em particular, e as duas juntas formaráõ huma superficie continua composta de vinte triangulos equilateros. Esta superficie será a do icósaedro regular, porque todos os angulos sólidos são iguaes entre si.

PROPOSIÇÃO III.

PROBLEMA.

„ *Achar a inclinação de duas faces adjacentes de hum polyedro regular.*

Esta inclinação se deduz immediatamente da construcção que démos dos cinco polyedros regulares; ajuntando sómente a proposição XXIV, liv. V, pela qual, sendo dados os tres angulos planos que fórmão hum angulo sólido, se determina o angulo que dois destes planos fazem entre si.

No tetraedro. Cada angulo sólido he formado de tres angulos de triangulos equilateros (fig.243.): logo deve-se procurar pelo problema citado o angulo que dois desses planos fazem entre si, este angulo será a inclinação de duas faces adjacentes do tetraedro.

No hexaedro. O angulo de duas faces adjacentes he recto (fig. 244.).

No octaedro. Forme-se hum angulo sólido (fig. 245.) com dois angulos de triangulos equilateros e hum angulo recto, a inclinação dos dois planos, em que estão os angulos dos triangulos será a de duas faces adjacentes do octaedro.

No dodecaedro. Cada angulo sólido (fig.246.) he formado com tres angulos de pentagonos regulares; assim a inclinação dos planos de dois destes angulos será a de duas faces adjacentes do dodecaedro.

No icosaedro. Forme-se hum angulo sólido (fig. 247.) com dois angulos de triangulos equilateros e hum angulo de pentagono regular, a inclinação dos dois planos em que estão os angulos dos triangulos será a de duas faces adjacentes do icosaedro.

PROPOSIÇÃO IV.

PROBLEMA.

,, *Sendo dado o lado de hum polyedro regular, achar o raio da esfera inscrita e o da esfera circunscrita ao polyedro.*

Primeiro he necessario demonstrar que todo o polyedro póde ser inscrito e circunscrito á esfera.

Seja AB (fig. 248.) o lado commum a duas faces adjacentes, sejão C e E os centros destas duas faces, e CD, ED, as perpendiculares abaixadas destes centros sobre o lado commum AB, as quaes cahirão no ponto D, meio do lado. As duas perpendiculares CD, DE, fazem entre si hum angulo conhecido, que he igual á inclinação de duas faces adjacentes determinada pelo problema precedente. Ora, se no plano CDE, perpendicular a AB, tirarmos sobre CD e ED as perpendiculares indefinidas CO e EO, que se encontrão em O, digo que o ponto O será o centro da esfera inscrita e o da esfera circunscrita, sendo o raio da primeira OC, e o da segunda OA.

Com effeito, como os apothémas CD, DE, são iguaes, e a hypotenusa DO commum, o triangulo rectangulo CDO he igual ao triangulo rectangulo ODE (18, 1.), e a perpendicular OC he igual á perpendicular OE. Mas sendo AB perpendicular ao plano CDE, o plano ABC he perpendicular a CDE (17, 5.) ou CDE a ABC; demais CO, no plano CDE, he perpendicular a CD, intersecção commum dos planos CDE, ABC; logo CO (18, 5.) he perpendicular ao plano ABC. Pela mesma razão EO he perpendicular ao plano ABE; logo as duas perpendiculares CO, EO, tiradas aos planos de duas faces adjacentes pelos centros destas faces, se encontrão em hum mesmo ponto O, e são iguaes. Supponhamos agora que ABC e ABE representem outras duas faces adjacentes quaesquer, o apothéma CD ficará sempre da mesma grandeza, bem como o angulo CDO, metade de CDE; logo o triangulo rectangulo CDO e o seu lado CO serão iguaes em todas as faces do polyedro. Logo, se do ponto O como centro e com o raio OC descrevermos huma esfera, esta esfera tocará todas as faces do polyedro nos seus centros (porque os planos ABC, ABE, serão perpendiculares ao extremo de hum raio), e a esfera estará inscrita no polyedro, ou o polyedro circunscrito á esfera.

Tirem-se OA, OB; porque CA = CB, as duas obliquas OA, OB, que se affastão igualmente da perpendicular, serão iguaes; o mesmo acontecerá a outras duas linhas quaesquer tiradas do centro O aos extremos de hum mesmo lado; logo todas estas linhas são iguaes entre si. Logo se do ponto O como centro e com o raio OA descrevermos huma superficie esferiea, esta superficie passará pelos vertices de todos os angulos sólidos do polyedro, e a esfera será circunscrita ao polyedro, ou o polyedro inscrito na esfera.

Isto posto, a solução do problema proposto não tem já difficuldade, e póde effeituar-se assim:

Sendo dado o lado de huma face do polyedro (fig. 249.), descreva-se esta face, e seja CD o seu apothéma. Procure-se pelo problema precedente a inclinação de duas faces adjacentes do polyedro, e faça-se o angulo CDE igual a esta inclinação. Tome-se DE igual a CD, tirem-se CO e EO perpendiculares a CD e ED; estas duas perpendiculares se encontraráõ em hum ponto O, e CO será o raio da esfera inscrita no polyedro.

Sobre o prolongamento de DC tome-se CA igual ao raio do circulo circunscrito a huma face do polyedro, e OA será o raio da esfera circunscrita ao mesmo polyedro.

Porque os triangulos rectangulos CDO, CAO, da figura 249, são iguaes aos triangulos do mesmo nome na figura 248. Assim em quanto CD e CA são os raios dos circulos inscrito e circunscrito a huma face do polyedro, OC e OA são os raios das esferas inscrita e circunscrita ao mesmo polyedro.

Scholio. Das proposições precedentes se podem tirar muitas consequencias.

1.° Todo o polyedro regular póde ser repartido em tantas pyramides regulares quantas forem as faces do polyedro; o vertice commum destas pyramides será o centro do polyedro, que he ao mesmo tempo o das esferas inscrita e circunscrita.

2.° A solidez de hum polyedro regular he igual á sua superficie multiplicada pelo terço do raio da esfera inscrita.

3.° Dois polyedros regulares do mesmo nome são dois sólidos semelhantes, e as suas dimensões homologas são proporcionaes; logo os raios das esferas inſcritas ou circunſcritas eſtão entre ſi como os lados deſtes polyedros.

4.° Se inſcrevermos hum polyedro regular em huma esfera, os planos tirados do centro ao longo dos differentes lados repartiráõ a ſuperficie da esfera em tantos polygonos iguaes e ſemelhantes quantas são as faces do polyedro.

LIVRO VIII.

OS TRES CORPOS REDONDOS.

DEFINIÇÕES.

I. CHama-ſe *cylindro* o ſolido produzido pela revolução de hum rectangulo ABCD (fig. 250.), que ſe imagina girar em torno do lado immovel AB.

Neſte movimento os lados AD, BC, que ficão ſempre perpendiculares a AB, deſcrevem planos circulares iguaes DHP, CGQ, que ſe chamão *baſes do cylindro*, e o lado CD deſcreve a *ſuperficie convexa*.

A linha immovel AB ſe chama *eixo do cylindro*.

Toda a ſecção KLM, feita no cylindro perpendicularmente ao eixo, he hum circulo igual a cada huma das baſes. Porque, em quanto o rectangulo ABCD gira em torno de AB, a linha IK, perpendicular a AB, deſcreve hum plano circular igual á baſe, e eſte plano he a meſma ſecção feita perpendicularmente ao eixo no ponto I.

Toda a ſecção PQGH, feita na direcção do eixo he hum rectangulo duplo do rectangulo generante ABCD.

II. Chama-ſe *cône* o ſolido produzido pela revolução do triangulo rectangulo SAB (fig. 251.), que ſe imagina girar em torno do lado immovel SA.

Neste movimento o lado AB defcreve hum plano circular BDCE que fe chama *bafe do cône*, e a hypotenufa SB defcreve a *fuperficie convexa.*

O ponto S fe chama *vertice do cône*, SA *eixo* ou *altura*, e SB *lado* ou *apothêma.*

Toda a fecção HKFI, feita perpendicularmente ao eixo, he hum circulo; toda a fecção SDE, feita na direcção do eixo, he hum triangulo ifofceles duplo do triangulo generante SAB.

III. Se do cône SCDB tirarmos, por huma fecção parallela á bafe, o cône SFKH, o folido reftante CBHF fe chama *cône truncado* ou *tronco de cône.* Póde-fe fuppôr que elle he defcrito pela revolução do trapezio ABHG, que tem os angulos A e G rectos, em torno do lado AG. A linha immovel AG fe chama *eixo* ou *altura* do tronco, os circulos BDC, HKF, são *as bafes*, e BH he *o lado.*

IV. Dois cylindros ou dois cônes são *femelhantes* quando os feus eixos eftão entre fi como os diametros das fuas bafes.

V. Se no circulo ACD (fig. 252.) que ferve de bafe a hum cylindro, infcrevermos hum polygono ABCDE, e fobre a bafe ABCDE levantarmos hum prifma recto igual em altura ao cylindro, o prifma fe chama *infcrito no cylindro*, ou o cylindro *circunfcrito ao prifma.*

He claro que as areftas AF, BG, CH, &c. do prifma, que são perpendiculares ao plano da bafe, são comprehendidas na fuperficie convexa do cylindro. Logo o prifma e o cylindro fe tocão na direcção deftas areftas.

VI. Igualmente, fe ABCD (fig. 253.) for hum polygono circunfcrito á bafe de hum cylindro, e fobre a bafe ABCD conftruirmos hum prifma recto igual em altura ao cylindro, o prifma fe chama *circunfcrito ao cylindro* ou o cylindro *infcrito no prifma.*

Sejão M, N, &c. os pontos de contacto dos lados AB, BC, &c., e levantem-se pelos pontos M, N, &c. as perpendiculares MX, NY, &c. ao plano da base; he claro que estas perpendiculares estarão ao mesmo tempo na superficie do cylindro e na do prisma circunscrito; logo serão as suas linhas de contacto.

,, *N. B.* O cylindro, o cône e a esfera são os *tres corpos redondos* de que se trata nos elementos. ,,

---

Lemmas preliminares sobre as superficies.

I.

Huma superficie plana OABCD (fig. 254.) *he menor que outra qualquer superficie* PABCD, *terminada no mesmo contorno* ABCD.

Esta proposição he tão evidente que se póde pôr na classe dos axiomas, porque poderiamos suppôr que o plano he entre as superficies o que a linha recta he entre as linhas: a linha recta he a mais curta entre dois pontos dados, do mesmo modo o plano he a superficie menor entre todas as que têm o mesmo contorno. Sem embargo, como cumpre reduzir os axiomas ao menor numero possivel, eis-aqui hum raciocinio que não deixará duvida alguma ácêrca desta proposição.

Como a superficie he extensão em comprimento e largura, não se póde conceber que huma superficie seja maior que outra, sem que as dimensões da primeira excedão em alguns sentidos ás da segunda; e se acontecer que as dimensões de huma superficie sejão em todos os sentidos menores que as dimensões de outra superficie, he evidente que a primeira superficie será menor que a outra. Ora, em qualquer sentido que se faça passar o plano BPD, que cortará a superficie plana na direcção BD, e a outra superficie na direcção BPD, a linha recta BD será sempre menor que BPD. Logo a superficie plana OABCD he menor que a superficie que a cérca PABCD.

II.

Toda a superficie convexa OABCD (fig. 255.) *he menor que outra qualquer superficie que envolvesse a primeira, estribando-se sobre o mesmo contorno* ABCD.

Repetiremos aqui que entendemos por *superficie convexa* huma superficie que não póde ser encontrada por huma linha em mais de dois pontos: e entretanto he possivel que huma linha recta se applique exactamente em certo sentido, sobre huma superficie convexa: vêm-se exemplos nas superficies do cône e do cylindro. Tambem advertiremos que a denominação de *superficie convexa* não se limita só ás superficies curvas; ella comprehende as superficies *polyedraes* ou compostas de muitos planos, e igualmente as superficies parte curvas, e parte polyedraes.

Isto posto, se a superficie OABCD não for menor que todas aquellas que a envolvem, seja entre estas PABCD a superficie menor que será quando muito igual a OABCD. Por hum ponto qualquer O, faça-se passar hum plano que toque a superficie OABCD sem a cortar: este plano encontrará a superficie PABCD, e a parte que elle destacar, será maior que o plano terminado na mesma superficie. Logo, conservando o resto da superficie PABCD, poderiamos substituir o plano á superficie separada, e teriamos huma nova superficie que envolveria sempre a superficie OABCD, e que seria menor que PABCD. Mas esta he a menor de todas, por hypothese; logo esta hypothese não póde substir. Logo a superficie convexa OABCD he menor que outra qualquer superficie que envolvesse OABCD, e que terminasse no mesmo contorno ABCD.

Scholio. Por hum raciocinio inteiramente semelhante se provará; 1.° Que, se huma superficie convexa, terminada por dois contornos ABC, DEF (fig. 256.), for envolvida por outra superficie qualquer terminada nos mesmos contornos, a superficie envolvida será menor do que a outra.

2.° Que, se huma superficie convexa AB (fig. 257.) for envolvida de todas as partes por outra superficie MN, quer ellas tenhão pontos, linhas, ou planos communs, quer não tenhão ponto algum commum, a superficie envolvida será sempre menor que a superficie envolvente.

Porque entre estas nenhuma póde haver que seja a menor de todas, pois em todos os casos poderiamos conduzir o plano CD tangente á superficie convexa, plano que seria menor que a superficie CMD; e portanto a superficie CND seria menor que MN, o que he contra a hypothese de ser MN a menor de todas. Logo a superficie convexa AB he menor que todas aquellas que a envolvem.

PROPOSIÇÃO I.

THEOREMA.

A solidez de hum cylindro he igual ao producto da sua base pela sua altura.

Seja CA (fig. 258.) o raio da base do cylindro dado, A a sua altura; representemos por *superf.* CA a superficie do circulo do qual CA he o raio; digo que a solidez do cylindro será *superf.* CA $\times$ A. Porque, se *superf.* CA $\times$ A não for a medida do cylindro dado, este producto será medida de hum cylindro maior ou menor. Supponhamos primeiro que ella seja medida de hum cylindro menor, por exemplo, do cylindro do qual CD he o raio da base e A a altura.

Circunscreva-se ao circulo cujo raio he CD, hum polygono regular GHIP, cujos lados não encontrem a circumferencia da qual CA he raio (10. 4.); imagine-se hum prisma recto que tenha por base o polygono GHIP, e por altura A, o qual prisma ficará circunscrito ao cylindro, cujo raio da base he CD. Isto posto, a solidez do prisma he igual (14, 6.) á base GHIP multiplicada pela altura A: a base GHIP he menor que o circulo do qual CA he raio; logo a solidez do prisma he menor que *superf.* CA $\times$ A. Mas *superf.* CA $\times$ A he, por hypothese, a solidez do cylindro inscrito no prisma; logo o prisma seria menor que o cylindro: ora, pelo contrario, o cylindro he menor que o prisma, porque nelle se contém; logo he impossivel que *superf.* CA $\times$ A seja medida do cylindro, do qual o raio da base he CD e A a altura, ou, em termos mais geraes, *o producto da base de hum cylindro pela sua altura não póde medir hum cylindro menor.*

Digo em segundo lugar que este mesmo producto não póde medir hum cylindro maior. Porque, para não multiplicarmos figuras, seja CD o raio da base do cylindro dado, e seja, se he possivel, *superf.* CD $\times$ A a medida de hum cylindro maior, por exemplo, do cylindro, do qual CA he o raio da base, e A a altura.

Se fizermos a mesma construcção que no primeiro caso, o prisma circunscrito ao cylindro dado terá por medida GHIP $\times$ A: a área GHIP he maior que *superf.* CD; logo a solidez do prisma de que se trata he maior que *superf.* CD $\times$ A: logo o prisma seria maior que o cylindro da mesma altura que tem por base *superf.* CA. Ora, ao contrario, o prisma he menor que o cylindro, porque nelle se contém. Logo *he impossivel que a base de hum cylindro multiplicada pela sua altura seja medida de hum cylindro maior.*

Logo finalmente a solidez de hum cylindro he igual ao producto da sua base pela sua altura.

Corollario I. Os cylindros da mesma altura estão entre si como as suas bases, e os cylindros da mesma base estão entre si como as suas alturas.

Corollario II. Os cylindros semelhantes estão como os cubos das alturas, ou como os cubos dos diametros das bases. Porque, as bases estão como os quadrados dos seus diametros; e como os cylindros são semelhantes, os diametros das bases estão como as alturas (def. 4.): logo as bases estão como os quadrados das alturas; logo as bases multiplicadas pelas alturas, ou os mesmos cylindros, estão como os cubos das alturas.

Scholio. Seja R o raio da base de hum cylindro, A a sua altura, a superficie da base será ϖR^2 (12, 4.), e a solidez do cylindro será $\varpi R^2 \times A$, ou $\varpi R^2 A$.

PROPOSIÇÃO II.

LEMMA.

A superficie convexa de hum prisma recto he igual ao perimetro da sua base multiplicado pela sua altura.

Porque esta superficie he igual á somma dos rectangulos AFGB (fig. 252.), BGHC, CHID, &c. de que ella he composta: ora as alturas AF, BG, CH, &c. destes rectangulos são iguaes á altura do prisma; as suas bases AB, BC, CD, &c. juntas, fazem o perimetro da base do prisma. Logo a somma destes rectangulos ou a superficie convexa do prisma he igual ao perimetro da base multiplicada pela altura.

Corollario. Se dois prismas rectos tiverem a mesma altura, as superficies convexas destes prismas estarão entre si como os perimetros das suas bases.

PROPOSIÇÃO III.

LEMMA.

A ſuperficie convexa do cylindro he maior que a ſuperficie convexa de qualquer priſma inſcrito, e menor que a ſuperficie convexa de qualquer priſma circunſcrito.

Porque, a ſuperficie convexa do cylindro e a do priſma inſcrito ABCDEF (fig. 252.) podem ſer conſideradas como do meſmo comprimento, porque toda a ſecção feita em huma e outra parallelamente a AF he igual a AF; e ſe para termos as larguras deſtas ſuperficies as cortarmos por planos parallelos á baſe ou perpendiculares á areſta AF, as ſecções ſerão iguaes, huma á circumferencia da baſe, outra ao contorno do polygono ABCDE, menor que eſta circumferencia. Logo, como em igual comprimento a largura da ſuperficie cylindrica he maior que a da ſuperficie priſmatica, ſegue-ſe que a primeira ſuperficie he maior do que a ſegunda.

Por hum raciocinio inteiramente ſemelhante, ſe provará que a ſuperficie convexa do cylindro (fig. 253.) he menor que a de qualquer priſma circunſcrito BCDKLH.

PROPOSIÇÃO IV.

THEOREMA.

A ſuperficie convexa de hum cylindro he igual á circumferencia da ſua baſe multiplicada pela ſua altura.

Seja CA (fig. 258.) o raio da baſe do cylindro dado, A a ſua altura; ſe repreſentarmos por *circ.* CA a circumferencia da qual CA he o raio, digo que *circ.* CA $\times$ A ſerá a ſuperficie convexa do cylindro. Porque, ſe negarem eſta propoſição, deverá ſer *circ.* CA $\times$ A a ſuperficie de hum cylindro maior ou menor; ſupponhamos primeiro que he a ſuperficie de hum cylindro menor, por exemplo, do cylindro do qual o raio da baſe he CD e A a altura.

Circunſcreva-ſe ao circulo de que CD he raio hum polygono regular GHIP, cujos lados não encontrem a circumferencia de que CA he raio; imagine-ſe hum priſma recto que tenha por altura A e por baſe o polygono GHIP. A ſuperficie convexa deſte priſma ſerá igual ao contorno do polygono GHIP multiplicado pela altura A (2.); eſte contorno he menor que a circumferencia cujo raio he CA; logo a ſuperficie convexa do priſma he menor que *circ.* CA $\times$ A. Mas *circ.* CA $\times$ A he, por hypotheſe, a ſuperficie convexa do cylindro do qual o raio da baſe he CD, o qual cylindro eſtá inſcrito no priſma; logo a ſuperficie convexa do priſma ſeria menor que a do cylindro inſcrito. Ora ao contrario, ella deve ſer maior (3.); logo a hypotheſe de que partimos he abſurda. Logo, 1.° *a circumferencia da baſe de hum cylindro multiplicada pela ſua altura, não póde medir a ſuperficie convexa de hum cylindro menor.*

Digo em ſegundo lugar que eſte meſmo producto não póde medir a ſuperficie de hum cylindro maior. Porque, para não mudar de figura, ſeja CD o raio da baſe do cylindro dado, e ſeja, ſe he poſſivel, *circ.* CD $\times$ A a ſuperficie convexa de hum cylindro, que com a meſma altura, teria por baſe hum circulo maior, por exemplo, o circulo cujo raio he CA. Faremos a meſma conſtrucção que na primeira hypotheſe, e a ſuperficie convexa do priſma ſerá igual ao contorno do polygono GHIP multiplicado pela altura A. Mas eſte contorno he maior que *circ.* CD; logo a ſuperficie do priſma ſeria maior que *circ.* CD $\times$ A, que, por hypotheſe, he a ſuperficie do cylindro da meſma altura do qual o raio da baſe he CA. Logo a ſuperficie do priſma ſeria maior que a do cylindro. Mas ainda no caſo de ſer o priſma inſcrito no cylindro, a ſua ſuperficie ſeria menor que a do cylindro (3.); com mais razão he ella menor quando o priſma não toca o cylindro. Logo não póde ter lugar a ſegunda hypotheſe. Logo, 2.° *a circumferencia da baſe de hum cylindro multiplicada pela ſua altura, não póde ſer medida da ſuperficie de hum cylindro maior.*

Logo finalmente a ſuperficie convexa do cylindro he igual á circumferencia da ſua baſe multiplicada pela ſua altura.

PROPOSIÇÃO V.

THEOREMA.

A ſolidez de hum cône he igual ao producto da ſua baſe pelo terço da ſua altura.

Seja SO (fig. 259.) a altura do cône dado, AO o raio da baſe, ſe notarmos por *ſuperf.* AO a ſuperficie da baſe, digo que a ſolidez do cône será igual á *ſuperf.* AO $\times \frac{1}{3}$ SO.

Com effeito, ſupponhamos 1.° que *ſuperf.* AO $\times \frac{1}{3}$ SO ſeja a ſolidez de hum cône maior, por exemplo, do cône, o qual tem a meſma altura SO, mas cujo raio da baſe OB he maior que OA.

Ao circulo cujo raio he AO circunſcreva-ſe hum polygono regular MNPT que não encontre a circumferencia cujo raio he OB (10, 4.); imagine-ſe huma pyramide que tenha por baſe o polygono e por vertice o ponto S. A ſolidez deſta pyramide (19, 6.) he igual á área do polygono MNPT multiplicada pelo terço da altura SO. Mas o polygono he maior que o circulo inscrito representado por *superf.* AO; logo a pyramide he maior que *superf.* AO $\times \frac{1}{3}$ SO, que, por hypothese, he a medida do cône que tem por vertice S, e da qual o raio da base he OB. Ora, ao contrario, a pyramide he menor que o cône, porque se contém nelle. Logo 1.º he impossivel que a base de hum cône multiplicada pelo terço da sua altura seja medida de hum cône maior.

Digo 2.º que este mesmo producto não póde ser medida de hum cône menor. Porque, para não mudar de figura, seja OB o raio da base do cône dado, e seja, se he possivel, *superf.* OB $\times \frac{1}{3}$ SO a solidez do cône que tem por altura SO e por base o circulo do qual AO he o raio. Far-se-ha a mesma construcção que acima, e a pyramide SMNP, &c. terá por medida a área MNPT multiplicada por $\frac{1}{3}$ SO. Mas a área MNPT he menor que *superf.* OB; logo a pyramide teria huma medida menor que *superf.* OB $\times \frac{1}{3}$ SO, e por consequencia seria menor que o cône do qual AO he o raio da base e SO a altura. Ora, pelo contrario, a pyramide he maior que o cône, porque o cône se contém nella. Logo 2.º he impossivel que a base de hum cône multiplicada pelo terço de sua altura, seja medida de hum cône menor.

Logo em fim a solidez do cône he igual ao producto da sua base pelo terço da sua altura.

Corollario. Hum cône he o terço de hum cylindro da mesma base e da mesma altura; donde se segue, 1.° Que os cônes de alturas iguaes eſtão entre ſi como as ſuas baſes:

2.° Que os cônes de baſes iguaes eſtão entre ſi como as ſuas alturas:

3.° Que os cônes ſemelhantes eſtão como os cubos dos diametros das ſuas baſes, ou como os cubos das ſuas alturas.

Scholio. Seja R o raio da baſe de hum cône, A a ſua altura; a ſolidez do cône ſerá $\varpi R^2 \times \frac{1}{3} A$ ou $\frac{1}{3} \varpi R^2 A$.

PROPOSIÇÃO VI.

THEOREMA.

O cône truncado ADEB (fig. 260.) *do qual os raios das baſes são* OA, DP, *e* PO *a altura, tem por medida* $\frac{1}{3} \varpi . OP . (\overline{AO}^2 + \overline{DP}^2 + AO \times DP)$.

Seja TFGH huma pyramide triangular da meſma altura do cône SAB, e cuja baſe FGH ſeja equivalente á baſe do cône. Podemos ſuppôr que eſtas duas baſes eſtão no meſmo plano; então os vertices S e T eſtarão em iguaes diſtancias do plano das baſes, e o plano EPD prolongado fará na pyramide a ſecção IKL. Ora, eu digo que eſta ſecção IKL he equivalente á baſe DE; porque as baſes AB, DE, eſtão entre ſi como os quadrados dos raios AO, DP (11, 4.), ou como os quadrados das alturas SO, SP; os triangulos FGH, IKL, eſtão entre ſi como os quadrados deſſas meſmas alturas (15, 6.); logo os circulos AB, DE eſtão entre ſi como os triangulos FGH, IKL. Mas, por hypotheſe, o triangulo FGH he equivalente ao circulo AB; logo o triangulo IKL he equivalente ao circulo DE.

Agora a base AB multiplicada por $\frac{1}{3}$ SO he a solidez do cône SAB, e a base FGH multiplicada por $\frac{1}{3}$ SO he a solidez da pyramide TFGH; logo, em razão das bases equivalentes, a solidez da pyramide he igual á do cône. Por huma razão semelhante, a pyramide TIKL he equivalente ao cône SDE; logo o tronco de cône ADEB he equivalente ao tronco de pyramide FGHIKL. Mas a base FGH, equivalente ao circulo cujo raio he AO, tem por medida $\varpi \times \overline{AO}^2$; do mesmo modo a base IKL = $\varpi \times \overline{DP}^2$, e a meia proporcional entre $\varpi \times \overline{AO}^2$ e $\varpi \times \overline{DP}^2$ he $\varpi \times AO \times DP$. Logo a solidez do tronco de pyramide ou a do tronco de cône, tem por medida $\frac{1}{3}$ OP $\times (\varpi \times \overline{AO}^2 + \varpi \times DP^2 + \varpi \times AO \times DP)$ (20, 6.), que he o mesmo que $\frac{1}{3} \varpi \times OP \times (\overline{AO}^2 + \overline{DP}^2 + AO \times DP)$.

PROPOSIÇÃO VII.

THEOREMA.

A superficie convexa de hum cône he iguál á circumferencia da sua base multiplicada pela metade do seu lado.

Seja AO (fig. 259.) o raio da base do cône dado, S o seu vertice, e SA o seu lado; digo que a sua superficie será *circ.* AO $\times \frac{1}{2}$ SA. Porque seja, se he possivel, *circ.* AO $\times \frac{1}{2}$ SA, a superficie de hum cône que tivesse por vertice o ponto S e por base o circulo descrito com o raio OB maior que AO.

Circunscreva-se ao pequeno circulo hum polygono regular MNPT, cujos lados não encontrem a circumferencia da qual OB he raio; e seja SMNPT a pyramide regular, que teria por base o polygono, e por vertice o ponto S. O triangulo SMN, hum dos que compõe a superficie convexa da pyramide, tem por medida a base MN multiplicada pela metade da altura SA, que he ao mesmo tempo o lado do cône dado; de ser esta altura igual em todos os outros triangulos SNP, SPQ, &c., se segue que a superficie convexa da pyramide he igual ao contorno MNPR, &c. multiplicado por $\frac{1}{2}$ SA. Mas o contorno MNPQR, &c., he maior que *circ.* AO; logo a superficie convexa da pyramide he maior que *circ.* AO $\times \frac{1}{2}$ SA, e por consequencia maior que a superficie convexa do cône que com o mesmo vertice S tivesse por base o circulo descrito com o raio OB. Ora, pelo contrario, a superficie convexa do cône he maior que a da pyramide; porque, se encostarmos base á base a pyramide a huma pyramide igual, o cône a outro cône igual, a superficie dos dois cônes envolverá de todas as partes a superficie das duas pyramides; logo a primeira superficie será maior que a segunda (lem. 2.); logo a superficie do cône he maior que a da pyramide que nelle se comprehende. O contrario era consequencia da nossa hypothese; logo esta hypothese não tem lugar; logo 1.° a circumferencia da base de hum cône multiplicada pela metade do seu lado, não póde ser medida da superficie de hum cône maior.

Digo 2.° que o mesmo producto não póde medir a superficie de hum cône menor. Porque seja BO o raio da base do lado dado, e seja, se he possivel, *circ.* BO $\times \frac{1}{2}$ SB a superficie do cône do qual o vertice he S, e AO, menor que OB, o raio da base.

Havendo feito a mesma construcção acima, a superficie da pyramide SMNPT será igual ao contorno MNPT multiplicado por $\frac{1}{2}$ SA. Ora, o contorno MNPT he menor que *circ.* BO, SA he menor que SB; logo por dobrada razão a superficie convexa da pyramide he menor que *circ.* BO $\times \frac{1}{2}$ SB, que, por hypothese, he a superficie do cône, do qual o raio da base he AO; logo a superficie da pyramide seria menor que a do cône inscrito. Ora, pelo contrario, ella he maior; porque encostando base á base a pyramide a huma pyramide igual, o cône a outro cône igual, a superficie das duas pyramides envolverá a superficie dos dois cônes, e por consequencia será maior. Logo 2.° he impossivel que a circumferencia da base de hum cône dado multiplicada pela metade do seu lado, seja medida da superficie de hum cône menor.

Logo emfim a superficie convexa de hum cône he igual á circumferencia da sua báse multiplicada por metade do seu lado.

Scholio. Seja L o lado de hum cône, R o raio da sua base, a circumferencia desta base será $2\varpi R$, e a superficie do cône terá por medida $2\varpi R \times \frac{1}{2} L$, ou ϖRL.

PROPOSIÇÃO VIII.

THEOREMA.

A ſuperficie convexa do tronco de cône ADEB (fig. 261.) *he igual ao ſeu lado* AD *multiplicado pela ſemi-ſomma das circumferencias das ſuas duas baſes* AB, DE.

No plano SAB que paſſa pelo eixo SO, tire-ſe perpendicularmente á SA a linha AF, igual á circumferencia cujo raio he AO; ajunte-ſe SF, e tire-ſe DH parallela a AF.

Os triangulos ſemelhantes SAO, SDC, dão AO : DC : : SA : SD, e os triangulos ſemelhantes SAF, SDH, dão AF : DH : : SA : SD; logo AF : DH : : AO : DC, ou : : *circ.* AO : *circ.* DC (11, 4.). Mas por conſtrucção AF = *circ.* AO; logo DH = *circ.* DC. Iſto poſto, o triangulo SAF, que tem por medida AF $\times \frac{1}{2}$ SA, he igual á ſuperficie do cône SAB que tem por medida *circ.* AO $\times \frac{1}{2}$ SA. Pela meſma razão o triangulo SDH he igual á ſuperficie do cône SDE. Logo a ſuperficie do tronco ADEB he igual á do trapezio ADHF. Eſta tem por medida (7, 3.) AD $\times$ $\left(\frac{AF + DH}{2}\right)$; logo a ſuperficie do tronco de cône ADEB he igual ao ſeu lado AD multiplicado pela ſemi-ſomma das circumferencias das ſuas duas baſes.

Corollario. Pelo ponto I, meio de AD, tire-ſe IKL parallela a AB, e IM parallela a AF, demonſtrar-ſe-ha, como acima, que IM = *circ.* IK. Mas o trapezio ADHF = AD $\times$ IM = AD $\times$ *circ.* IK. Logo tambem ſe póde dizer que a *ſuperficie de hum tronco de cône he igual ao ſeu lado multiplicado pela circumferencia de huma ſecção feita em igual diſtancia das duas baſes.*

Scholio. Se huma linha AD, ſituada toda inteira do meſmo lado da linha OC e no meſmo plano, fizer huma revolução em torno de OC, a ſuperficie deſcrita por AD terá por medida $AD \times \left(\frac{circ.AO + circ.DC}{2}\right)$, ou $AD \times circ.IK$: ſendo as linhas AO, DC, IK, perpendiculares abaixadas dos extremos e do meio da linha AD ſobre o eixo OC.

Porque, ſe prolongarmos AD e OC até o ſeu encontro mutuo em S, he claro que a ſuperficie deſcrita por AD he a de hum cône truncado do qual AO e DC são os raios das baſes, tendo o cône inteiro por vertice o ponto S. Logo eſta ſuperficie terá a medida mencionada.

Eſta medida teria ſempre lugar, ainda quando o ponto D cahiſſe em S, o que daria hum cône inteiro, e tambem quando a linha AD foſſe parallela ao eixo, o que daria hum cylindro. No primeiro caſo DC ſeria nulla, no ſegundo DC ſeria igual a AO e a IK.

PROPOSIÇÃO IX.

LEMMA.

Sejão AB, BC, CD, (fig. 263.) *muitos lados ſucceſſivos de hum polygono regular*, O *o ſeu centro*, *e* OI *o raio do circulo inſcrito; ſe ſuppoſermos que a porção* ABCD, *ſituada toda do meſmo lado do diametro* FG, *faça huma revolução em torno deſte diametro, a ſuperficie deſcrita por* ABCD *terá por medida* $MQ \times circ.\ OI$, *ſendo* MQ *a altura deſta ſuperficie ou a parte do eixo comprehendida entre as perpendiculares extremas* AM, DQ.

Sendo o ponto I meio de AB, e IK perpendicular ao eixo abaixada do ponto I, a ſuperficie deſcrita por AB terá por medida $AB \times circ.\ IK$ (8.). Tire-ſe AX parallela ao eixo, os triangulos ABX, OIK, terão os lados perpendiculares, cada hum a cada hum, a saber OI a AB, IK a AX, e OK a BX; lógo estes triangulos são semelhantes e dão a proporção AB : AX ou MN :: OI : IK, ou :: *circ.* OI : *circ.* IK; logo AB $\times$ *circ.* IK $=$ MN $\times$ *circ.* OI. Donde se vê que a superficie descrita por AB he igual á sua altura MN multiplicada pela circumferencia do circulo inscrito. Do mesmo modo a superficie descrita por BC $=$ NP $\times$ *circ.* OI, a superficie descrita por CD, $=$ PQ $\times$ *circ.* OI. Logo a superficie descrita pela porção de polygono ABCD tem por medida (MN $+$ NP $+$ PQ) $\times$ *circ.* OI, ou MQ $\times$ *circ.* OI; logo he igual á sua altura multiplicada pela circumferencia do circulo inscrito.

Corollario. Se o polygono inteiro for de hum numero de lados par, e o eixo FG passar pelos dois vertices oppostos F e G, a superficie descrita pela revolução do semi-polygono FACG será igual ao seu eixo FG multiplicado pela circumferencia do circulo inscrito. Este eixo FG será ao mesmo tempo o diametro do circulo circunscrito.

PROPOSIÇÃO X.

THEOREMA.

A superficie da esfera he igual ao seu diametro multiplicado pela circumferencia de hum circulo maximo.

Digo 1.° que o diametro de huma esfera, multiplicado pela circumferencia do seu circulo maximo, não póde medir a superficie de huma esfera maior. Porque seja, se he possivel, AB $\times$ *circ.* AC (fig. 264.) a superficie da esfera cujo raio he CD.

Ao circulo, cujo raio he CA, circunscreva-se hum polygono regular de hum numero par de lados que não encontre a circumferencia da qual CD he o raio; sejão M e S dois angulos oppostos deste polygono; e em torno do diametro MS faça-se girar o semi-polygono MPS. A superficie descrita por este polygono tem por medida MS $\times$ *circ.* AC (9.): mas MS he maior que AB; logo a fuperficie defcrita pelo polygono he maior que AB $\times$ *circ.* AC, e por confequencia maior que a fuperficie da esfera da qual o raio he CD. Ora, pelo contrario, a fuperficie da esfera he maior do que a fuperficie defcrita pelo polygono, por que esta he envolvida por aquella por todas as partes. Logo 1.° o diametro de huma esfera multiplicado pela circumferencia do feu circulo maximo não póde medir a fuperficie de huma esfera maior.

Digo 2.° que efte mefmo producto não póde medir a fuperficie de huma esfera menor. Porque féja, fe for poffivel, DE $\times$ *circ.* CD a fuperficie da esfera cujo raio he CA. Faremos a mefma conftrucção que no primeiro cafo, e a fuperficie do fólido gerado pelo polygono ferá igual a MS $\times$ *circ.* AC. Mas MS he menor que DE, e *circ.* AC menor que *circ.* CD; logo por eftas duas razões, a fuperficie do fólido defcrito pelo polygono feria menor que DE $\times$ *circ.* CD, e por confequencia menor que a fuperficie da esfera cujo raio he AC. Ora, ao contrario, a fuperficie defcrita pelo polygono he maior que a fupercie da esfera, cujo raio he AC, porque a primeira fuperficie envolve a fegunda; logo 2.° o diametro de huma esfera multiplicado pela circumferencia do feu circulo maximo, não póde fer medida da fuperficie de huma esfera menor.

Logo a fuperficie da esfera he igual ao feu diametro multiplicado pela circumferencia do feu circulo maximo.

Corollario. A fuperficie do circulo maximo fe mede multiplicando a fua circumferencia pela metade do raio ou o quarto do diametro; logo *a fuperficie da esfera he quadrupla da de hum circulo maximo.*

Scholio. Sendo affim medida a fuperficie da esfera e comparada com fuperficies planas, ferá facil ter o valor abfoluto dos fufos e triangulos esfericos, dos quaes acima determinámos a razão com a fuperficie inteira da esfera.

Primeiramente, o fuso, cujo angulo he A está para a superficie da esfera como o angulo A está para quatro angulos rectos (20, 7.), ou como o arco de circulo maximo que mede o angulo A está para a circumferencia do mesmo circulo maximo. Mas a superficie da esfera he igual a esta circumferencia multiplicada pelo diametro; logo a superficie do fuso he igual ao arco que mede o angulo deste fuso multiplicado pelo diametro.

Em segundo lugar, todo o triangulo esferico he equivalente a hum fuso cujo angulo he igual á metade do excesso da somma dos seus tres angulos sobre dois angulos rectos (23, 7.). Sejão pois P, Q, R, os arcos de circulo maximo que medem os tres angulos do triangulo; seja C a circumferencia de hum circulo maximo, e D o seu diametro; o triangulo esferico será equivalente ao fuso, cujo angulo tem por medida $\frac{P+Q+R-\frac{1}{2}C}{2}$, e por consequencia a sua superficie será $D\times\left(\frac{P+Q+R-\frac{1}{2}C}{2}\right)$.

Por tanto, no caso do triangulo tri-rectangulo, cada hum dos arcos P, Q, R, he igual a $\frac{1}{4}$ C, a sua somma he $\frac{3}{4}$ C, o excesso desta somma sobre $\frac{1}{2}$ C he $\frac{1}{4}$ C, e a metade deste excesso $=\frac{1}{8}$ C; logo a superficie do triangulo tri-rectangulo $=\frac{1}{8}C\times D$, que he a oitava parte da superficie total da esfera.

A medida dos polygonos esfericos se segue immediatamente da medida dos triangulos, e além disto ella fica determinada inteiramente pela prop. XXIV, liv. VII, porque a unidade de medida, que he o triangulo tri-rectangulo, acaba de ser avaliada em superficie plana.

PROPOSIÇÃO XI.

LEMMA.

Suppondo as mesmas cousas que na proposição IX, *se além disso, o ponto* F (fig. 263.), *extremo do eixo, for hum dos vertices do polygono, e tivermos* FK $<$ FO; *digo que a superficie gerada pela porção do polygono* FAI, *composta de muitos lados inteiros* FA *e de hum semi-lado* AI, *he menor que* FK $\times$ circ. OI.

Porque a superficie descrita pela parte FA tem por medida (9.) FM $\times$ *circ.* OI, e a superficie descrita pelo semi-lado AI tem por medida (8.) AI $\times$ ($\frac{1}{2}$ *circ.* AM + $\frac{1}{2}$ *circ.* IK): ora AM he menor que IK, porque FK he menor que FO; logo a superficie descrita por AI he menor que AI $\times$ *circ.* IK, ou o seu igual MK $\times$ *circ.* OI; logo a superficie inteira descrita por FAI he menor que FM $\times$ *circ.* OI + MK $\times$ *circ.* OI, ou FK $\times$ *circ.* OI.

PROPOSIÇÃO XII.

THEOREMA.

A superficie de huma zona esferica qualquer he igual á altura desta zona multiplicada pela circumferencia de hum circulo maximo.

Seja AB (fig. 271.) hum arco menor ou não maior que o quarto de circumferencia, e tire-se BD perpendicular sobre o raio AC; digo que a zona descrita pela revolução do arco AB em torno de AC tem por medida AD $\times$ *circ.* AC.

Porque, supponhamos primeiro que esta zona tenha huma medida maior, e seja, se he possivel, esta medida = DE $\times$ *circ.* AC. Circunscreva-se ao arco AB huma porção de polygono regular B*xyzu* que não encontre o arco descrito com o raio CE, e que ſeja compoſta de muitos lados inteiros *uzyx*, ſeguidos de hum ſemi-lado B*x* (1): iſto poſto, a ſuperficie deſcrita pelo polygono B*xyzu*, girando em torno de D*u*, he menor que D*c* × *circ.* AC (11.), e com mais razão menor que D*u* × *circ.* AD, que, por hypotheſe, he a medida da zona deſcrita por AB. Logo a ſuperficie deſcrita pelo polygono ſeria menor que a ſuperficie deſcrita pelo arco inſcrito; ora, pelo contrario, a primeira ſuperficie he maior que a ſegunda, porque a envolve por todas as partes; logo a hypotheſe de que partimos não póde ſubſiſtir; logo 1.° a medida de huma zona esferica não póde ſer maior que a altura deſta zona multiplicada pela circumferencia do circulo maximo.

Digo em ſegundo lugar que a medida de huma zona esferica não póde ſer menor do que a altura da meſma zona multiplicada pela circumferencia de hum circulo maximo; porque ſupponhamos que ſe trata da zona deſcrita pelo arco FE, e ſeja, ſe he poſſivel, a medida deſta zona = GE × *circ.* AC menor que GE × *circ.* CE. Inſcreva-ſe no arco EF huma porção de polygono regular EMNF, cujos lados não encontrem o arco deſcrito com o raio CA; e abaixe-ſe CI perpendicular ſobre o lado EM. A ſuperficie deſcrita pelo polygono EOE terá por medida EG × *circ.* CI (9.), maior que EG × *circ.* CA, que, por hypotheſe, he medida da zona deſcrita pelo arco FE. Logo a ſuperficie deſcrita pelo polygono FOE ſeria maior que a zona deſcrita pelo arco circunſcrito FE: ora, pelo contrario, a ſegunda ſuperficie he maior do que a primeira, porque a envolve por todas as partes. Logo 2.° a medida de huma zona esferica não póde ſer menor do que a altura deſta zona multiplicada pela circumferencia de hum circulo maximo.

---

(1) Estas duas condições se encherão dividindo o arco AB em hum numero impar de partes iguaes, huma das quaes A*m* seja menor que AT, determinada pela tangente ET tirada pelo ponto E.

Daqui ſe ſegue que a zona deſcrita pelo arco DF (fig. 220.) tem por medida OD × *circ.* DC, ao menos em quanto o arco DF não exceder ao quarto da circumferencia. Mas a esfera inteira, compoſta de duas zonas deſcritas pelos arcos DF, FE, tem por medida DE × *circ.* DC, ou OD × *circ.* DC + OE × *circ.* DC; logo como OD × *circ.* DC he igual á zona deſcrita pelo arco DF, deve ſer OE × *circ.* DC igual á zona deſcrita pelo arco FE maior do que o quarto de circumferencia, logo *toda a zona de huma baſe tem por medida a ſua altura multiplicada pela circumferencia de hum circulo maximo.*

Conſideremos emfim huma zona qualquer deſcrita pela revolução do arco FH em torno do eixo DE, e abaixem-ſe ſobre o eixo as duas perpendiculares FO, HQ. A zona deſcrita pelo arco DF tem por medida DO × *circ.* DC: a zona deſcrita pelo arco DH tem por medida DQ × *circ.* DC: logo a differença deſtas duas zonas, ou a zona deſcrita pelo arco FH, tem por medida (DQ — DO) × *circ.* DC ou OQ × *circ.* DC. Logo toda a zona esferica, de huma ou de duas baſes, tem por medida a altura da meſma zona multiplicada pela circumferencia de hum circulo maximo.

Corollario. Duas zonas eſtão entre ſi como as ſuas alturas, e qualquer zona eſtá para a ſuperficie da esfera como a altura da zona eſtá para o diametro.

PROPOSIÇÃO XIII.

THEOREMA.

Se o triangulo BAC *e o rectangulo* BCEF (fig. 266, e 267.) *da meſma baſe e da meſma altura girarem ſimultaneamente em torno da baſe commum* BC, *o ſolido deſcrito pela revolução do triangulo ſerá o terço do cylindro deſcrito pela revolução do rectangulo.*

Abaixe-se sobre o eixo a perpendicular AD (fig. 266.); o cône descrito pelo triangulo ABD he o terço do cylindro descrito pelo rectangulo AFBD (5.), do mesmo modo o cône descrito pelo triangulo ADC he o terço do cylindro descrito pelo rectangulo ADCE; logo a somma dos dois cônes ou o solido descrito por ABC he o terço da somma dos dois cylindros ou do cylindro descrito pelo rectangulo BCEF.

Se a perpendicular AD (fig. 267.) cahisse fóra do triangulo, então o solido descrito por ABC seria a differença dos cônes descritos por ABD e ACD; mas ao mesmo tempo o cylindro descrito por BCEF seria a differença dos cylindros descritos por AFBD, AECD. Logo o solido descrito pela revolução do triangulo será sempre o terço do cylindro descrito pela revolução do rectangulo, da mesma base e da mesma altura.

Scholio. O circulo, cujo raio he AD, tem por superficie $\varpi \times \overline{AD}^2$; logo $\varpi \times \overline{AD}^2 \times BC$ he a medida do cylindro descrito por BCEF, e $\frac{1}{3} \varpi \times \overline{AD}^2 \times BC$ he a medida do solido descrito pelo triangulo ABC.

PROPOSIÇÃO XIV.

PROBLEMA

Suppondo que o triangulo CAB (fig. 268.) *faz huma revolução em torno da linha* CD, *tirada arbitrariamente fóra do triangulo pelo seu vertice* C, *achar a medida do solido gerado desta maneira.*

Prolongue-se o lado AB até encontrar o eixo CD em D, dos pontos A e B abaixem-se sobre o eixo as perpendiculares AM, BN.

O solido descrito pelo triangulo ADC tem por medida (13.) $\frac{1}{3}\varpi \times \overline{AM}^2 \times CD$; o ſolido deſcrito pelo triangulo CBD tem por medida $\frac{1}{3}\varpi \times \overline{BN}^2 \times CD$; logo a differença deſtes ſolidos ou o ſolido deſcrito por ABC terá por medida $\frac{1}{3}\varpi \times (\overline{AM}^2 - \overline{BN}^2) \times CD$.

Póde-ſe dar a eſta expreſsão outra fórma. Do ponto I, meio de AB, tire-ſe IK perpendicular a CD, e pelo ponto B tire-ſe BO parallela a CD, teremos $AM + BN = 2IK$ (7, 3.) e $AM - BN = AO$; logo $(AM + BN) \times (AM - BN)$, ou $\overline{AM}^2 - \overline{BN}^2 = 2IK \times AO$ (10, 5.). Logo a medida do ſolido de que ſe trata he expreſſa tambem por $\frac{2}{3}\varpi \times IK \times AO \times CD$. Mas ſe abaixarmos CP perpendicular ſobre AB, os triangulos ABO, DCP, ſeráõ ſemelhantes, e daráõ a proporção $AO : CP :: AB : CD$; donde reſulta $AO \times CD = CP \times AB$; por outra parte $CP \times AB$ he o dobro da área do triangulo ABC; aſſim temos $AO \times CD = 2ABC$; logo o ſolido deſcrito pelo triangulo ABC tambem tem por medida $\frac{4}{3}\varpi \times ABC \times KI$, ou, que he o meſmo, $ABC \times \frac{2}{3}$ *circ.* KI; (porque *circ.* $IK = 2\varpi . IK$). Logo *o ſolido deſcrito pela revolução do triangulo* ABC, *tem por medida a área deſte triangulo multiplicada pelos dois terços da circumferencia que deſcreve o ponto* I, *meio da ſua baſe.*

Corollario. Se for o lado $AC = CB$, (fig. 269.) a linha CI ſerá perpendicular a AB, a área ABC ſerá igual a AB $\times \frac{1}{2}$ CI, e a ſolidez $\frac{4}{3}\varpi \times$ ABC $\times$ IK ficará $\frac{2}{3}\varpi \times$ AB $\times$ IK $\times$ CI. Mas os triangulos ABO, CIK, ſão ſemelhantes, e dão a proporção AB : BO ou MN : : CI : IK; logo AB $\times$ IK $=$ MN $\times$ CI; logo o ſolido deſcrito pelo triangulo iſoſceles ABC terá por medida $\frac{2}{3}\varpi \times$ MN $\times \overline{CI}^2$.

Scholio. A demonſtração precedente parece ſuppôr que a linha AB prolongada encontra o eixo; mas os reſultados não ſerião menos verdadeiros, quando a linha AB foſſe parallela ao eixo.

Com effeito, o cylindro deſcrito por AMNB (fig. 270.) tem por medida $\varpi.\ \overline{AM}^2.\ MN$, o cône deſcrito por ACM $= \frac{1}{3}\varpi.\ \overline{AM}^2.\ CM$, e o cône deſcrito por BCN $= \frac{1}{3}\varpi.\ \overline{AM}^2.\ CN$. Ajuntando os dois primeiros ſolidos e tirando da ſomma o terceiro, teremos pelo ſolido deſcrito por ABC, $\varpi.\ \overline{AM}^2.\ (MN + \frac{1}{3}CM - \frac{1}{3}CN)$: e porque $CN - CM = MN$, eſta expreſsão ſe reduz á $\varpi.\ \overline{AM}^2.\ \frac{2}{3}MN$, ou $\frac{2}{3}\varpi.\ \overline{CP}^2.\ MN$, o que ſe ajuſta com os reſultados já achados.

PROPOSIÇÃO XV.

THEOREMA.

Sejão AB, BC, CD (fig. 263.) *muitos lados succeſſivos de hum polygono regular*, O *o ſeu centro, e* OI *o raio do circulo inſcrito; ſe imaginarmos que o ſector polygonal* AOD, *ſituado da meſma parte do diametro* FG, *faça huma revolução em torno deſte diametro, o ſolido deſcrito terá por medida* $\frac{2}{3}\varpi.\overline{OI}^2.MQ$, *ſendo* MQ *a porção do eixo terminada pelas perpendiculares extremas* AM, DQ.

Com effeito, como o polygono he regular, todos os triangulos AOB, BOC, &c. são iguaes e iſoſcéles. Ora, conforme o corollario da propoſição precedente, o ſolido produzido pelo triangulo iſoſceles AOB tem por medida $\frac{2}{3}\varpi.\overline{OI}^2.MN$, o ſolido deſcrito pelo triangulo BOC tem por medida $\frac{2}{3}\varpi.\overline{OI}^2.NP$, e o ſolido deſcrito pelo triangulo COD, tem por medida $\frac{2}{3}\varpi.\overline{OI}^2.PQ$; logo a ſomma deſtes ſolidos, ou o ſolido inteiro deſcrito pelo ſector polygonal AOD, terá por medida $\frac{2}{3}\varpi.\overline{OI}^2.(MN+NP+PQ)$ ou $\frac{2}{3}\varpi.\overline{OI}^2.MQ$.

PROPOSIÇÃO XVI.

THEOREMA.

Todo o sector esferico tem por medida a zona que lhe serve de base multiplicada pelo terço do raio, e a esfera inteira tem por medida a sua superficie multiplicada pelo terço do raio.

Seja ABC (fig. 271.) o sector circular que, na sua revolução em torno de AC, descreve o sector esferico; sendo a zona descrita por AB, AD $\times$ *circ.* AC, ou $2\varpi.$ AC. AD (12.), digo que o sector esferico terá por medida esta zona multiplicada por $\frac{1}{3}$ AC, ou $\frac{2}{3}\varpi.\overline{AC}^2.AD.$

Com effeito, 1.° supponhamos, se he possivel, que esta quantidade $\frac{2}{3}\varpi.\overline{AC}^2.AD$ seja a medida de hum sector esferico maior, por exemplo, do sector esferico descrito pelo sector circular ECF semelhante a ACB.

Inscreva-se no arco EF a porção de polygono regular EMNF do qual os lados não encontrem o arco AB; imagine-se que o sector polygonal ENFC gire em torno de EC ao mesmo tempo que o sector circular ECF. Seja CI o raio do circulo inscrito no polygono, e abaixe-se FG perpendicular sobre EC. O solido descrito pelo sector polygonal terá por medida $\frac{2}{3}\varpi.\times\overline{CI}^2\times EG$ (15.): ora CI he maior que AC, por construcção, e EG he maior que AD; porque, tirando AB, EF, os triangulos EFG, ABD, que são semelhantes, dão a proporção EG : AD : : EF : AB : : CF : CB; logo EG $>$ AD.

Por eſtas duas razões $\frac{2}{3}\varpi \times \overline{CI}^2 \times EG$ he maior que $\frac{2}{3}\varpi \times \overline{CA}^2 \times AD$: a primeira expreſsão he a medida do ſolido deſcrito pelo ſector polygonal, a ſegunda he, por hypotheſe, a do ſector esferico deſcrito pelo ſector circular ECF; logo o ſolido deſcrito pelo ſector polygonal ſeria maior que o ſector esferico deſcrito pelo ſector circular ECF. Ora, pelo contrario, o ſolido de que ſe trata he menor que o ſector esferico, porque nelle ſe contém; logo a hypotheſe de que partimos não póde ſubſiſtir; logo 1.° a zona ou baſe de hum ſector esferico multiplicada pelo terço do raio não póde medir hum ſector esferico maior.

Digo 2.° que o meſmo producto não póde medir hum ſector esferico menor. Porque, ſeja CEF o ſector circular que pela ſua revolução produz o ſector esferico dado, e ſupponhamos, ſe he poſſivel, que $\frac{2}{3}\varpi . \overline{CE}^2 \times EG$ ſeja a medida de hum ſector esferico menor, por exemplo, daquelle que reſulta do ſector circular ACB.

Conſervando a conſtrucção precedente, o ſolido deſcrito pelo ſector polygonal terá por medida $\frac{2}{3}\varpi . \overline{CI}^2 . EG$. Mas CI he menor que CE; logo o ſolido he menor que $\frac{2}{3}\varpi \times \overline{CE}^2 \times EG$, que, por hypotheſe, he medida do ſector esferico deſcrito pelo ſector circular ACB. Logo o ſolido deſcrito pelo ſector polygonal ſeria menor que o ſector esferico deſcrito por ACB; ora, pelo contrario, o ſolido de que ſe trata he maior que o ſector esferico, porque eſte ſe contém no outro. Logo 2.° he impoſſivel que a zona de hum ſector esferico multiplicada pelo terço do raio seja a medida de hum sector esferico menor.

Logo todo o sector esferico tem por medida a zona que lhe serve de base multiplicada pelo terço do raio.

Hum sector circular ACB póde augmentar até vir a ser igual ao semi-circulo; então o sector esferico descrito pela sua revolução he a esfera inteira. Logo *a solidez da esfera he igual á sua superficie multiplicada pelo terço do raio.*

Corollario. Como as superficies das esferas estão como os quadrados dos seus raios, estas superficies multiplicadas pelos raios estão como os cubos dos raios. Logo *as solidezes de duas esferas estão como os cubos dos seus raios, ou como os cubos dos seus diametros.*

Scholio. Seja R o raio de huma esfera, a sua superficie será $4\varpi R^2$, e a sua solidez $4\varpi R^2 \times \frac{1}{3} R$, ou $\frac{4}{3}\varpi R^3$. Se chamarmos D o diametro, teremos $R = \frac{1}{2} D$, e $R^3 = \frac{1}{8} D^3$; logo a solidez se exprimirá tambem por $\frac{4}{3}\varpi \times \frac{1}{8} D^3$, ou $\frac{1}{6}\varpi D^3$.

PROPOSIÇÃO XVII.

THEOREMA.

A superficie da esfera está para a superficie total do cylindro circunscrito (comprehendendo as bases) como 2 para 3. As solidezes destes dois corpos estão entre si na mesma razão.

Seja MPNQ (fig. 272.) o circulo maximo da esfera, ABCD o quadrado circunscrito; se fizermos girar ao mesmo tempo o semi-circulo PMQ e o ſemi-quadrado PADQ em torno do diametro PQ, o ſemi-circulo deſcreverá a esfera, e o ſemi-quadrado deſcreverá o cylindro circunſcrito á esfera.

A altura AD do cylindro he igual ao diametro PQ, a baſe do cylindro he igual ao circulo maximo, porque tem por diametro AB igual a MN; logo a ſuperficie convexa do cylindro (4.) he igual á circumferencia do circulo maximo multiplicada pelo ſeu diametro. Eſta medida he a meſma que a da ſuperficie da esfera (10.): donde ſe ſegue que *a ſuperficie da esfera he igual á ſuperficie convexa do cylindro circunſcrito.*

Mas a ſuperficie da esfera he igual a quatro circulos maximos; logo a ſuperficie convexa do cylindro circunſcrito tambem he igual a quatro circulos maximos; ſe ajuntarmos as duas baſes que valem dois circulos maximos, a ſuperficie total do cylindro circunſcrito ſerá igual a ſeis circulos maximos; logo a ſuperficie da esfera eſtá para a ſuperficie total do cylindro circunſcrito como 4 he para 6, ou como 2 para 3. He o primeiro ponto que ſe tratava de demonſtrar.

Em ſegundo lugar, como a baſe do cylindro circunſcrito he igual a hum circulo maximo, e a ſua altura ao diametrò, a ſolidez do cylindro ſerá igual ao circulo maximo, multiplicado pelo diametro (1.). Mas a ſolidez da esfera he igual a quatro circulos maximos multiplicados pelo terço do raio (16.), o que dá hum circulo maximo multiplicado por $\frac{4}{3}$ do raio ou $\frac{2}{3}$ do diametro; logo a esfera eſtá para o cylindro circunſcrito como 2 eſtá para 3, e por conſequencia as ſolidezes deſtes dois corpos eſtão entre ſi como as ſuas ſuperficies.

Scholio. Se imaginarmos hum polyedro, do qual todas as faces toquem a esfera, eſte polyedro poderá ſer conſiderado como compoſto de pyramides que tem todas por vertice o centro da esfera, e cujas baſes ſeráo as differentes faces do polyedro. Ora he claro que todas eſtas pyramides teráo por altura commum o raio da esfera, de ſorte que cada pyramide ſerá igual á face do polyedro que lhe ſerve de baſe, multiplicada pelo terço do raio: logo o polyedro inteiro ſerá igual á ſua ſuperficie multiplicada pelo terço do raio da esfera inſcrita.

Daqui ſe vê que as ſolidezes dos polyedros circunſcritos á esfera eſtáo entre ſi como as ſuperficies dos meſmos polyedros. Aſſim a propriedade que demonſtrámos no cylindro circunſcrito he commum a huma infinidade de outros corpos.

Poderiamos igualmente notar que as ſuperficies dos polygonos circunſcritos ao circulo eſtáo entre ſi como os ſeus contornos.

PROPOSIÇÁO XVIII.

PROBLEMA.

Suppondo que o ſegmento circular BMD (fig. 273.) *faz huma revolução em torno do diametro* AG, *exterior ao ſegmento, achar o valor do ſolido gerado.*

Abaixem-ſe ſobre o eixo as perpendiculares BE, DF; tire-ſe CI perpendicular ſobre a corda BD, e tirem-ſe os raios CB, CD.

O ſolido deſcrito pelo ſector $BCA = \frac{2}{3}\varpi.\overline{CB}^2.AE$ (16.); o ſolido deſcrito pelo ſector $DCA = \frac{2}{3}\varpi.\overline{CB}^2.AF$; logo a differença deſtes dois ſolidos ou o ſolido deſcrito pelo ſector $DCB = \frac{2}{3}\varpi.\overline{CB}^2.(AF-AE)$

$= \frac{2}{3} \varpi \times \overline{CB}^2 \times EF$. Mas o ſolido deſcrito pelo triangulo iſoſceles DCB tem por medida $\frac{2}{3} \varpi . \overline{CI}^2 . EF$ (14.); logo o ſolido deſcrito pelo ſegmento $BMD = \frac{2}{3} \varpi . EF . (\overline{CB}^2 - \overline{CI}^2)$. Ora, no triangulo rectangulo CBI temos $\overline{CB}^2 - \overline{CI}^2 = \overline{BI}^2 = \frac{1}{4} \overline{BD}^2$; logo o ſolido deſcrito pelo ſegmento BMD terá por medida $\frac{2}{3} \varpi . EF . \frac{1}{4} \overline{BD}^2$, ou $\frac{1}{6} \varpi . \overline{BD}^2 . EF$.

PROPOSIÇÃO XIX.

THEOREMA.

Todo o ſegmento da esfera comprehendido entre dois planos parallelos tem por medida a ſemi-ſomma das ſuas baſes, multiplicada pela ſua altura, mais a ſolidez da esfera que tem por diametro eſta meſma altura.

Sejão BE, DF, (fig. 273.) os raios das baſes do ſegmento, EF a ſua altura; de ſorte que o ſegmento ſeja produzido pela revolução do eſpaço circular BMDFE em torno do eixo EF. O ſolido deſcrito pelo ſegmento BMD (18.) $= \frac{1}{6} \varpi . \overline{BD}^2 . EF$, o tronco de cône deſcrito pelo trapezio BDFE (6.) $= \frac{1}{3} \varpi . EF . (\overline{BE}^2 + \overline{DF}^2 + BE . DF)$; logo o ſegmento da esfera que he a ſomma deſtes dois ſolidos $= \frac{1}{6} \varpi . EF . (2\overline{BE}^2 + 2\overline{DF}^2 + 2BE.DF + \overline{BD}^2)$.

porém se nós tirarmos huma linha BO parallela á EF, teremos $DO = DF - BE$, $\overline{DO}^2 = \overline{DF}^2 - 2DF.BE + \overline{BE}^2$ (9, 3.), e por consequencia $\overline{BD}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{DO}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{DF}^2 - 2DF \times BE + \overline{BE}^2$.

Pondo este valor em lugar de $\overline{BD}^2$ na expressão do segmento, e apagando o que se destróe, teremos por solidez do segmento

$$\frac{1}{6}\varpi . EF . (3\overline{BE}^2 + 3\overline{DF}^2 + \overline{EF}^2);$$

expressão que se decompõe em duas partes; huma $\frac{1}{6}\varpi \times EF \times (3\overline{BE}^2 + 3\overline{DF}^2)$, ou $EF \times \left(\frac{\varpi \overline{BE}^2 + \varpi . \overline{DF}^2}{2}\right)$ he a semi-somma das bases multiplicada pela altura; a outra $\frac{1}{6}\varpi . \overline{EF}^3$ representa a esfera que tem por diametro EF (14, sch.): logo todo o segmento da esfera, &c.

Corollario. Se huma das bases for nulla, o segmento de que se trata virá a ser hum segmento esferico de huma só base; logo *todo o segmento esferico de huma base tem por valor a metade do cylindro da mesma base e da mesma altura, mais a esfera que tem por diametro essa altura.*

Scholio geral.

Seja R o raio da base de hum cylindro, A a sua altura; a solidez do cylindro será $\varpi R^2 \times A$, ou $\varpi . R^2 A$.

Seja R o raio da baſe de hum cône, A a ſua altura, a ſolidez do cône ſerá $\varpi R^2 \times \frac{1}{3} A$, ou $\frac{1}{3} \cdot \varpi R^2 A$.

Sejão R e R′ os raios das baſes de hum cône truncado, A a ſua altura; a ſolidez do tronco de cône ſerá $\frac{1}{3} \varpi A (R^2 + R'^2 + RR')$.

Seja R o raio de huma esfera; a ſua ſolidez ſerá $\frac{4}{3} \varpi R^3$

Seja R o raio de hum ſector esferico, A a altura da zona que lhe ſerve de baſe; a ſolidez do ſector ſerá $\frac{2}{3} \varpi R^2 A$.

Sejão P e Q as duas baſes de hum ſegmento esferico, A ſua altura, a ſolidez deſte ſegmento ſerá $\left(\frac{P+Q}{2}\right) \cdot A + \frac{1}{6} \varpi A^3$.

Se o ſegmento esferico tiver ſó huma baſe P, ſendo a outra nulla, a ſua ſolidez ſerá $\frac{1}{2}$ PA $+ \frac{1}{6} \varpi . A^3$.

Fim dos Elementos de Geometria.

NOTAS
SOBRE OS ELEMENTOS DE GEOMETRIA.

Nota I.

A'cêrca de alguns nomes e definições.

INtroduzimos nesta obra algumas expressões e definições novas que servem para dar á linguagem geometrica mais exacção e clareza. Daremos conta destas mudanças, e proporemos outras, que mais completamente encherião as mesmas vistas.

Na definição ordinaria do *parallelogrammo rectangulo* e do *quadrado* se diz que os angulos destas figuras são rectos; seria mais exacto dizer que os seus angulos são iguaes. Porque, suppôr que os quatro angulos de hum quadrilatero podem ser rectos, e mesmo que os angulos rectos são iguaes entre si, he suppôr proposições que hão mister demonstração. Evitar-se-hia este inconveniente e outros muitos do mesmo genero, se, em vez de pôr as definições, como he costume, á frente de hum livro, se distribuissem, pelo livro adiante, cada huma no lugar em que fica já demonstradó aquillo que ella suppõe.

A palavra *parallelogrammo*, segundo a sua ethymologia, significa *linhas parallelas*; elle convem tanto á figura de quatro lados como á de seis, de oito, &c. cujos oppostos sejão parallelos. A palavra *paral-*

lelepipedo ſignifica, da meſma maneira, *planos parallelos*; ella não deſigna mais o ſólido de ſeis faces do que os de oito, dez, &c., cujas oppoſtas foſſem parallelas. Portanto he manifeſto que as denominações de parallelogrammo e de parallelepipedo que além diſto tem o inconveniente de ſerem muito compridas, deverião ſer bannidas da geometria. Poderiamos ſubſtituir-lhes as de *rhombo* e *rhomboide* que são muito mais commodas, e conſervar o nome de *loſango* ao quadrilatero que tem os lados iguaes.

A palavra *inclinação* deve ſer entendida no meſmo ſentido que a de angulo; ambas indicão a maneira de eſtar de duas linhas ou de dois planos que ſe encontrão, ou que ſe encontrarião ſe foſſem prolongados. A inclinação de duas linhas he nulla quando o angulo he nullo, quer dizer quando as linhas são parallelas ou coincidentes. A inclinação he maxima quando o angulo he maximo, ou quando as duas linhas fazem entre ſi hum angulo muito obtuſo. A qualidade de *pender* ſe toma em diverſo ſentido; huma linha *pende* tanto mais ſobre outra quanto mais ſe affaſta da perpendicular a eſta.

Euclides e outros authores chamão muitas vezes *triangulos iguaes* a triangulos iguaes ſómente em ſuperficie, e *sólidos iguaes* a ſólidos ſómente iguaes em ſolidez. Pareceo-nos mais conveniente chamar a eſtes triangulos ou a eſtes ſólidos *triangulos* ou *sólidos equivalentes*, e reſervar a denominação de *triangulos iguaes*, *solidos iguaes*, para aquelles que podem coincidir pela ſobrepoſição.

He tambem neceſſario diſtinguir nos ſólidos e ſuperficies curvas duas differentes ſortes de igualdade. Com effeito, dois ſólidos, dois angulos ſólidos, dois triangulos ou polygonos esfericos, podem ſer iguaes em todas as ſuas partes conſtituintes, ſem todavia coincidirem pela ſobrepoſição. Eu não ſei que nos livros de elementos ſe tenha feito eſta advertencia, e entretanto, por não fazerem caſo della, certas demonſtrações fundadas na coincidencia das figuras não são exactas. Taes são as demonstrações pelas quaes muitos authores pertendem provar a igualdade dos triangulos esfericos nos mesmos casos e da mesma maneira que a dos triangulos rectilineos; do que vemos hum exemplo evidente, quando Roberto Simson (1), atacando a demonstração da prop. XXVIII, livr. XI, de Euclides, cahe tambem no inconveniente de fundar a sua demonstração em huma coincidencia que não existe. Nós julgámos que deviamos dar hum nome particular a esta igualdade que não traz comsigo a coincidencia; chamamo-la *igualdade por symmetria*; e ás figuras que estão neste caso, chamamos figuras *symmetricas*.

Assim as denominações de figuras *iguaes*, figuras *symmetricas*, figuras *equivalentes*, se referem a cousas differentes e não se devem confundir em huma só denominação.

Nas proposições ácêrca dos polygonos, dos angulos sólidos e dos polyedros, excluimos formalmente os que tem angulos reintrantes. Pois, além de que convem limitar-se nos elementos ás figuras mais simplices, se esta exclusão não tivesse lugar, certas proposições ou não serião verdadeiras, ou precisarião de modificação. Por tanto nos reduzimos á consideração das linhas e das superficies que chamamos *convexas*, e que são taes que huma linha recta não as póde cortar em mais de dois pontos.

Muitas vezes empregámos a expressão *producto de duas ou mais linhas*; pelo que entendemos o producto dos numeros aos quaes estas linhas são iguaes, sendo avaliadas por huma unidade linear arbitraria. Fixado desta maneira o sentido desta palavra, não ha difficuldade em emprega-la. Entender-se-hia do mesmo modo o que quer dizer producto de hu-

---

(1) Veja-se a obra deste author, intitulada *Euclidis elementorum libri sex*, &c. Glasguæ, 1756.

ma ſuperficie por huma linha, de huma ſuperficie por hum ſolido, &c.: baſta haver eſtabelecido huma vez que eſtes productos são ou devem ſer conſiderados como productos de numeros, cada hum da eſpecie que lhe convem. Aſſim o producto de huma ſuperficie por hum ſolido não quer dizer mais do que o producto de hum numero de unidades ſuperficiaes por hum numero de unidades ſólidas.

Muitas vezes no diſcurſo ſe emprega a palavra *angulo* para deſignar o ponto ſituado no ſeu vertice; eſta expreſsão he vicioſa. Seria mais claro e mais exacto deſignar por hum nome particular, como o de *vertices*, os pontos ſituados nos vertices dos angulos de hum polygono e de hum polyedro. Aſſim he que ſe deve entender a denominação de *vertices de hum polyedro* de que fizemos uſo.

Seguimos a definição ordinaria de *figuras rectilineas ſemelhantes*; mas nós obſervaremos que ella contém tres condições ſuperfluas. Porque, para conſtruir hum polygono cujo numero de lados he n, he neceſſario primeiro conhecer hum lado, e depois ter a poſição dos vertices dos angulos ſituados fóra deſſe lado. Ora, o numero deſſes angulos he $n - 2$, e a poſição de cada vertice requer dois dados; donde ſe ſegue que o numero total de dados neceſſarios para conſtruir hum polygono de n lados he $1 + 2n - 4$, ou $2n - 3$. Mas no polygono ſemelhante ha hum lado arbitrario; aſſim o numero de condições para que hum polygono ſeja ſemelhante a hum polygono dado, he $2n - 4$. Ora, a definição ordinaria requer, 1.° que os angulos ſejão iguaes cada hum a cada hum, o que faz n condições; 2.° que os lados homologos ſejão proporcionaes, o que faz $n - 1$ condições. Logo ha ao todo $2n - 1$ condições, o que faz tres de mais. Para obviar a eſte inconveniente, poderiamos decompôr a definição em outras duas, a ſaber:

1.° *Dois triangulos são ſemelhantes, quando tem dois angulos iguaes cada hum a cada hum.*

2.° *Dois polygonos são ſemelhantes, quando em hum e em outro ſe póde formar o meſmo numero de triangulos ſemelhantes cada hum a cada hum e ſemelhantemente diſpoſtos.*

Mas, para que eſta definição não contenha tambem condições ſuperfluas, cumpre que o numero dos triangulos ſeja igual ao numero dos lados do polygono menos dois; o que póde ter lugar de duas maneiras. Podemos tirar de dois angulos homologos diagonaes aos angulos oppoſtos, então todos os triangulos formados em cada polygono terão hum vertice commum, e a ſua ſomma ſerá igual ao polygono; ou tambem podemos ſuppôr que todos os triangulos formados em hum polygono, tem por baſe commum hum lado do polygono, e por vertices os dos differentes angulos oppoſtos a eſta baſe. Em ambos os caſos ſendo $n - 2$ o numero de triangulos formados de huma e outra parte, as condições da ſua ſemelhança ſerão $2n - 4$, e a de-nição nada conterá ſuperfluo. Eſtabelecida eſta nova definição, a antiga virá a ſer hum theorema que ſe poderá demonſtrar immediatamente.

Se a definição das figuras rectilineas ſemelhantes he imperfeita nos livros de elementos, ainda o he mais a dos *ſolidos polyedros ſemelhantes*. Em Euclides, eſta definição depende de hum theorema não demonſtrado; em outros authores, ella tem o inconveniente de ſer muito redundante. Por tanto rejeitámos eſtas definições de ſolidos ſemelhantes, e lhes ſubſtituimos huma fundada nos principios que havemos expoſto. Mas, como ha outras muitas advertencias que fazer a eſte reſpeito, nós lhes deſtinamos huma nota particular.

A definição da *perpendicular a hum plano* ſe póde conſiderar como hum theorema; a da *inclinação de dois planos* ha miſter ſer juſtificada por hum raciocinio; outras muitas eſtão no meſmo caſo. Por iſſo, conſervando eſtas definições, ſegundo o antigo coſtume, tivemos cuidado de citar as propoſições em que ellas se demonstrão; algumas vezes nos contentámos com huma explicação succinta que nos pareceo sufficiente.

O *angulo* formado pelo encontro *de dois planos*, e o *angulo solido* formado pelo encontro de muitos planos no mesmo ponto, são grandezas, cada huma da sua especie, ás quaes conviria talvez dar nomes particulares. Sem isto, he difficil evitar a escuridade e as circumlocuções, quando se falla do arranjo dos planos que compõe a superficie de hum polyedro. E como a theoria destes solidos tem sido até agora pouco cultivada, he menos inconveniente introduzir nella expressões novas, se a natureza das cousas as reclamar.

Eu proporia chamar *canto* o angulo formado por dois planos; *aresta* ou *gume* (1) do canto seria a intersecção commum dos dois planos. O canto se marcaria por quatro letras das quaes as duas medias correspondessem á aresta. Então hum *canto recto* seria o angulo formado por dois planos perpendiculares entre si. Quatro cantos rectos encherião todo o espaço angular solido em torno de huma linha dada. Esta nova denominação não embaraçaria que o canto tivesse por medida o angulo formado pelas duas perpendiculares tiradas em cada hum dos planos a hum mesmo ponto da aresta ou intersecção commum.

Finalmente, poderiamos chamar *angloide* o espaço angular comprehendido entre muitos planos que concorrem no mesmo ponto. O angloide seria designado pela letra do vertice seguida de tantas letras quantas fossem as arestas unidas no vertice; o *an-*

(1) O A. emprega o termo *faite*, que he translato dos edificios, eu me servi de outro translato que he mais conhecido. A quem não agradar esta liberdade, emende o termo *gume*. Tr.

gloide recto seria formado por tres planos perpendiculares entre si; oito angloides rectos encherião todo o espaço angular esferico em torno de hum ponto; e dois angloides rectos encostados por huma face commum, farião hum canto recto.

He necessario hum só dado para determinar o canto; são necessarios muitos para determinar o angloide. Em geral, todo o angloide intercepta, sobre a superficie da esfera descrita de seu vertice como centro, hum polygono esferico; e se chamarmos n o numero de lados do polygono, o numero de dados necessarios para determinar o polygono e o angloide, será $2n - 3$. Quanto ao espaço angular que he a grandeza effectiva de cada angloide, he proporcional á área do polygono esferico intercepto.

NOTA II.

Sobre hum modo de demonstrar analyticamente a prop. XX. *do primeiro livro, e os outros theoremas fundamentaes da Geometria.*

Demonstra-se immediatamente pela sobreposição, e sem proposição alguma preliminar, que *dois triangulos são iguaes, quando tem hum lado igual adjacente a dois angulos iguaes cada hum a cada hum.* Chamemos p o lado de que se trata, A e B os dois angulos adjacentes, C o terceiro angulo. Logo o angulo C deve ficar inteiramente determinado, quando forem conhecidos os angulos A e B com o lado p; porque, se muitos angulos C podessem corresponder aos tres dados A, B, p, haveria outros tantos triangulos differentes que terião hum lado igual adjacente a dois angulos iguaes, o que he impossivel; logo o angulo C deve ser huma função determinada das tres quantidades A, B, p; o que eu exprimo desta maneira, $C = \phi(A, B, p)$.

Seja o angulo recto igual á unidade; então os angulos A, B, C, serão numeros comprehendidos entre o e 2; e como $C = \phi(A, B, p)$, digo que a linha p não deve entrar na função Φ; porque temos visto que C deve ser inteiramente determinado só pelos dados A, B, p, sem outro angulo ou linha qualquer. Mas a linha p he heterogenea com os numeros A, B, C; e se tivessemos huma equação entre A, B, C, p, poderiamos della tirar o valor de p em A, B, C; donde resultaria que p he igual a hum numero, o que he absurdo, logo p, não póde entrar na função Φ, e temos simplesmente $C = \Phi(A, B) \ldots$ (1.)

Esta formula prova que, se dois angulos de hum triangulo forem iguaes a dois angulos de outro triangulo, o terceiro deve ser igual ao terceiro; e, isto posto, he facil chegar ao theorema que temos em vista.

Seja primeiro ABC (fig. 2.) hum triangulo rectangulo em A; do ponto A abaixe-se AD perpendicular sobre a hypotenusa. Os angulos B e D do

---

(1) Huma objecção contra esta demonstração he que, se ella se applicasse, palavra por palavra, aos triangulos esfericos, resultaria que dois angulos conhecidos bastão para determinar o terceiro, o que não tem lugar nestas sortes de triangulos. A resposta he que nos triangulos esfericos, ha hum elemento de mais do que nos triangulos planos, e este elemento he o raio da esfera do qual não se deve fazer abstracção. Seja pois r o raio, então em vez de ser $C = \Phi(A, B, p)$, teremos $C = \Phi(A, B, p, r)$, ou somente $C = \Phi\left(A, B, \frac{p}{r}\right)$ em virtude da lei dos homogeneos. Ora, como a razão $\frac{p}{r}$ he hum numero, assim como A, B, C, nada embaraça que $\frac{p}{r}$ se ache na função Φ, e então não se póde concluir $C = \Phi(A, B)$.

triangulo ABD são iguaes aos angulos B e A do triangulo BAC; logo, ſegundo fica demonſtrado, o terceiro BAD he igual ao terceiro C. Pela meſma razão o angulo DAC = B; logo BAD + DAC, ou BAC = B + C: ora o angulo BAC he recto; logo *os dois angulos agudos de hum triangulo rectangulo valem hum angulo recto.*

Seja depois BAC (fig. 3.) hum triangulo qualquer e BC hum lado que não ſeja menor que cada hum dos outros dois: ſe do angulo oppoſto A abaixarmos a perpendicular AD ſobre BC, eſta perpendicular cahirá dentro do triangulo ABC, e o dividirá em dois triangulos rectangulos BAD, DAC: ora, no triangulo rectangulo BAD, os dois angulos BAD, ABD juntos valem hum angulo recto; no triangulo rectangulo DAC, os dois angulos DAC, ACD, valem tambem hum angulo recto. Logo os quatro juntos, ou ſómente os tres BAC, ABC, ACB, valem em ſomma dois angulos rectos; logo *em todo o triangulo a ſomma dos tres angulos he igual a dois angulos rectos.*

Daqui ſe vê que eſte theorema, conſiderado *a priori*, não depende de hum encadeamento de propoſições, e que ſe deduz immediatamente do principio da homogeneidade, principio que deve ter lugar em toda a relação entre quasquer quantidades. Mas continuemos, e moſtremos que deſta meſma fonte ſe tirão os outros theoremas fundamentaes da geometria.

Conſervemos as meſmas denominações acima, e chamemos m o lado oppoſto ao angulo A, e n o lado oppoſto ao angulo B. A quantidade m deve ſer inteiramente determinada ſó pelas quantidades A, B, p; logo m he huma função de A, B, p, e $\frac{m}{p}$ he outra, de maneira que podemos fazer $\frac{m}{p} = \Psi(A, B, p)$. Mas $\frac{m}{p}$ he hum numero, aſſim como A e B; logo a função Ψ não deve conter a linha p, e temos simplesmente $\frac{m}{p}$ $= \Psi(A, B)$, ou $m = p\,\Psi(A, B)$. Logo temos semelhantemente $n = p\,\Psi(B, A)$.

Seja agora outro triangulo formado com os mesmos angulos A, B, C, aos quaes sejão oppostos os lados m', n', p', respectivamente. Como A e B não mudão, teremos neste novo triangulo $m' = p'\,\Psi(A, B)$, e $n' = p'\,\Psi(B, A)$. Logo $m : m' :: n : n' :: p : p'$. Logo, *nos triangulos equiangulos, os lados oppostos aos angulos iguaes são proporcionaes.*

Já sabemos que a proposição do quadrado da hypotenusa he huma consequencia da proposição dos triangulos equiangulos. Portanto aqui estão tres proposições fundamentaes da Geometria, a dos tres angulos de hum triangulo, a dos triangulos equiangulos, e a do quadrado da hypotenusa, que se deduzem muito simplesmente e muito immediatamente da consideração das funções. Pelo mesmo caminho se podem demonstrar muito succintamente as proposições ácêrca das figuras semelhantes e solidos semelhantes.

Seja ABCDE (fig. 14.) hum polygono qualquer; havendo escolhido hum lado AB, como base, formem-se tantos triangulos ABC, ABD, &c. sobre esta base, quantos são os angulos C, D, E, &c. por fóra. Seja a base AB $= p$, sejão A e B os dois angulos do triangulo ABC adjacentes ao lado AB, sejão A' e B' os dois angulos do triangulo ABD adjacentes ao mesmo lado AB, e assim por diante. A figura ABCDE ficará inteiramente determinada, se for conhecido o lado p com os angulos A, B, A', B', A'', B'', &c., e o numero de dados será ao todo $2n - 3$, sendo n o numero dos lados do polygono. Isto posto, hum lado ou huma linha qualquer x, tirada como se quizer no polygono, será huma função destes dados; e como

$\frac{x}{p}$ deve ser hum numero, poderemos suppôr $\frac{x}{p} = \Psi(A, B, A', B', \&c.)$, ou $x = p\,\Psi(A, B, A', B', \&c.)$, e a função Ψ não conterá p. Se com os mesmos angulos A, B, A', B', &c. e outro lado p', formarmos hum segundo polygono, teremos para a linha x', correspondente ou homologa a x, o valor $x' = p'\,\Psi(A, B, A', B', \&c.)$; logo $x : x' :: p : p'$. Definem-se as figuras construidas desta maneira *figuras semelhantes*; logo *nas figuras semelhantes as linhas homologas são proporcionaes.*

Assim, não sómente os lados homologos, as diagonaes homologas, mas as linhas terminadas da mesma maneira nas duas figuras, estão entre si como outras duas linhas homologas quaesquer.

Chamemos S a superficie do primeiro polygono, esta superficie he homogenea ao quadrado p^2; logo he necessario que $\frac{S}{p^2}$ seja hum numero que só contenha os angulos A, B, A', B', &c., de sorte que teremos $S = p^2\,\Phi(A, B, A', B', \&c.)$. Pela mesma razão, se S' for a superficie do segundo polygono, teremos $S' = p'^2\,\Phi(A, B, A', B', \&c.)$. Logo $S : S' :: p^2 : p'^2$; logo *as superficies das figuras semelhantes estão entre si como os quadrados dos lados homologos.*

Vamos agora aos polyedros. Podemos suppôr que huma face está determinada por meio de hum lado conhecido p e de muitos angulos A, B, C, &c. Cada vertice dos angulos solidos, fóra desta base, será determinado por meio de tres dados, que podemos considerar como outros tantos angulos; de sorte que a determinação inteira do polyedro depende de hum lado p, e de muitos angulos A, B, C, &c., cujo numero varía ſegundo a natureza do polyedro. Iſto poſto, huma linha que une dois vertices, ou, mais geralmente, qualquer linha x tirada de huma maneira determinada no polyedro ſerá huma função dos dados p, A, B, C, &c.; e como $\frac{x}{p}$ deve ſer hum numero, a função igual a $\frac{x}{p}$ ſó conterá os angulos A, B, C, &c., e poderemos ſuppôr $x = p \times \Psi$ (A, B, C, &c.). A ſuperficie do ſolido he homogenea a p^2, aſſim eſta ſuperficie ſe póde repreſentar por $p^2 \Psi$ (A, B, C, &c.); a ſua ſolidez he homogenea a p^3, e ſe póde repreſentar por $p^3 \times \Pi$ (A, B, C, &c.), ſendo as funções deſignadas por Ψ e Π independentes de p.

Conſtrua-ſe outro ſolido com os meſmos angulos A, B, C, &c. e hum lado p' differente de p: chamaremos aos ſolidos conſtruidos deſta maneira *ſolidos ſemelhantes*; e, iſto poſto, a linha que era $p\Phi$ (A, B, C, &c.), ou ſimpleſmente $p\Phi$ em hum ſolido ſerá $p'\Phi$ no outro; a ſuperficie que era $p^2 \Psi$ em hum ſerá $p'^2 \Psi$ no outro, e finalmente a ſolidez que era $p^3 \Pi$ em hum ſerá $p'^3 \Pi$ no outro. Logo 1.° *os ſolidos ſemelhantes tem os lados ou linhas homologas proporcionaes*; 2.° *as ſuas ſuperficies são como os quadrados dos lados homologos*; 3.° *as ſuas ſolidezes são como os cubos deſſes meſmos lados.*

Os meſmos principios ſe applicão facilmente ao circulo. Seja c a circumferencia e s a ſuperficie do circulo cujo raio he r; como não póde haver dois circulos desiguaes descritos com o mesmo raio, as quantidades $\frac{c}{r}$ e $\frac{s}{r^2}$ devem ser funções determinadas de r; mas como estas quantidades são numeros, não devem conter na sua expressão a linha r; e assim teremos $\frac{c}{r} = \alpha$, e $\frac{s}{r^2} = \beta$, sendo α e β numeros constantes. Seja c' a circumferencia e s' a superficie de outro circulo cujo raio he r', teremos tambem $\frac{c'}{r'} = \alpha$, e $\frac{s'}{r'^2} = \beta$. Logo $c : c' :: r : r'$, e $s : s' :: r^2 : r'^2$; logo *as circumferencias dos circulos estão como os raios, e as suas superficies como os quadrados dos raios.*

Consideremos hum sector do qual o raio seja r e A o angulo central; seja x o arco que temine o sector, e y a superficie deste mesmo sector. Como o sector he inteiramente determinado quando se conhece r e A, x e y devem ser funções determinadas de r e de A; logo $\frac{x}{r}$ e $\frac{y}{r^2}$ tambem são funções determinadas. Mas $\frac{x}{r}$ he hum numero, bem como $\frac{y}{r^2}$; logo estas quantidades não devem conter r, e são simplesmente funções de A, de sorte que teremos $\frac{x}{r} = \Phi A$, e $\frac{y}{r^2} = \Psi A$. Sejão x' e y' o arco e a superficie de outro sector que tenha o angulo A e o raio r'; chamaremos a estes dois sectores *sectores semelhantes*; e como o angulo A he igual em ambos, teremos $\frac{x'}{r'} = \Phi A$, e $\frac{y'}{r'^2} = \Psi A$; logo $x : x' :: r : r'$, e $y : y' :: r^2 : r'^2$; logo *os arcos ſemelhantes ou os arcos de ſectores ſemelhantes são proporcionaes aos raios, e os ſectores são proporcionaes aos quadrados dos raios.*

He claro que ſe provaria, da meſma maneira, que as esferas eſtão como os cubos dos ſeus raios.

Em tudo o que fica dito, ſuppomos que as ſuperficies ſe medem pelo producto de duas linhas, e as ſolidezes pelo producto de tres; o que tambem he facil demonſtrar pela analyſe. Consideremos hum rectangulo cujas dimensões ſejão p e q, e a ſua ſuperficie que he huma função de p e q repreſentemo-la por $\Phi(p, q)$. Se conſiderarmos outro rectangulo, cujas dimensões ſejão $p + p'$ e q, he claro que eſte rectangulo he compoſto de outros dois, hum que tem por dimensões p e q, e outro que tem por dimensões p' e q; de ſorte que teremos

$$\Phi(p + p', q) = \Phi(p, q) + \Phi(p', q).$$

Seja $p' = p$, teremos $\Phi(2p, q) = 2\Phi(p, q)$. Seja $p' = 2p$, teremos $\Phi(3p, q) = \Phi(p, q) + \Phi(2p, q) = 3\Phi(p, q)$. Seja $p' = 3p$; teremos $\Phi(4p, q) = \Phi(p, q) + \Phi(3p, q) = 4\Phi(p, q)$. Logo em geral, ſe k for hum numero inteiro qualquer, teremos $\Phi(kp, q) = k\Phi(p, q)$, ou $\frac{\Phi(p, q)}{p} = \frac{\Phi(kp, q)}{kp}$. Daqui reſulta que $\frac{\Phi(p, q)}{p}$ he huma tal função de p, que não varía pondo em lugar de p hum multiplo qualquer kp. Logo eſta função he independente de p, e ſó deve conter q. Mas por huma razão ſemelhante, $\frac{\Phi(p, q)}{q}$ deve ſer independente de q; logo

$\frac{\phi(p, q)}{pq}$ não contém nem p nem q, e assim esta quantidade se deve reduzir a huma constante α. Logo teremos $\phi(p, q) = \alpha pq$; e como nada embaraça que tomemos $\alpha = 1$, teremos $\phi(p, q) = pq$; assim a superficie de hum rectangulo he igual ao producto das suas duas dimensões.

Demonstrar-se-ha, de huma maneira absolutamente semelhante, que a solidez de hum parallelepipedo rectangulo cujas dimensões são p, q, r, he igual ao producto pqr de suas tres dimensões.

Observaremos por fim que a consideração das funções que fornece desta maneira huma demonstração muito simples das proposições fundamentaes da Geometria, já foi empregada com muita vantagem para demonstrar os principios fundamentaes da Mechanica. Vejão-se as Memorias de Turim, tomo II.

NOTA III.

Sobre a approximação da proposição XVI, *liv.* IV.

Huma vez achado o raio excedente e o deficiente que concordem nos primeiros algarismos, se póde acabar o calculo de huma maneira muito pronta por meio de huma fórmula algebrica.

Seja a o raio deficiente e b o excedente, cuja differença he pequena; sejão a' e b' os raios seguintes que se deduzem pelas fórmulas $b' = \sqrt{ab}$, $a' = \sqrt{\left(a . \frac{a+b}{2}\right)}$. O que eu procuro he o ultimo termo da serie a, a', a'', &c. que he ao mesmo tempo o da serie b, b', b'', &c. Chamemos a este ultimo x, e seja $b = a(1 + \omega)$; poderemos suppôr $x = a(1 + P\omega + Q\omega^2 + \&c.)$,

ſendo P e Q coefficientes indeterminados. Ora os valores de $b^{\prime}$ e $a^{\prime}$ dão

$$b^{\prime} = a\left(1 + \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{8}\omega^{2} + \&c.\right);$$

$$a^{\prime} = a\left(1 + \tfrac{1}{4}\omega - \frac{1}{32}\omega^{2} + \&c.\right)$$

E ſe fizermos igualmente $b^{\prime} = a^{\prime}(1 + \omega^{\prime})$, teremos

$$\omega^{\prime} = \tfrac{1}{4}\omega - \frac{5}{32}\omega^{2}\ \&c.$$

Mas o valor de x deve ſer o meſmo, quer a ſerie a, $a^{\prime}$, $a^{\prime\prime}$, &c. comece por a, quer por $a^{\prime}$; logo teremos

$$a(1 + P\omega + Q\omega^{2} + \&c.) = a^{\prime}(1 + P\omega^{\prime} + Q\omega^{\prime 2} + \&c.).$$

Subſtituindo neſta equação os valores de a, e de $\omega^{\prime}$ em a e ω, e comparando os termos ſemelhantes, deduziremos $P = \frac{1}{3}$, e $Q = -\frac{1}{15}$; logo

$$x = a\left(1 + \frac{1}{3}\omega - \frac{1}{15}\omega^{2}\right).$$

Se os raios a e b concordarem na primeira metade dos algariſmos, poderemos rejeitar o termo ω^{2}, e o valor precedente ſe reduzirá a $x = a \times \left(1 + \frac{1}{3}\omega\right) = a + \frac{b - a}{3}$. Aſſim, fazendo $a = 1{,}1282657$, e $b = 1{,}1285063$, deduziremos immediatamente $x = 1{,}1283792$.

Se os raios a e b não concordarem em mais do primeiro terço dos algariſmos, deveremos tomar os tres termos da formula precedente; aſſim fazendo $a = 1{,}1263639$ e $b = 1{,}1320149$, acharemos $x = 1{,}1283791$.

Poderiamos ſuppôr que a e b eſtão ainda menos proximos hum do outro; mas então ſeria neceſſario calcular o valor de x com maior numero de termos.

A approximação da prop. XIV, que he de Jacob Gregory, he susceptivel de semelhantes abreviações. Remetemos á obra deste author, intitulada *Vera circuli & hyperbolæ quadratura*, obra de grande merecimento para o tempo em que appareceo.

NOTA IV.

Na qual se demonstra que a razão da circumferencia para o diametro e o seu quadrado são numeros irracionaes.

Consideremos a serie infinita

$$1+\frac{a}{z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z.(z+1)}+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{a^3}{z.(z+1).(z+2)}+\&c.$$

E supponhamos que Φz representa a somma della. Se puzermos $z+1$ em lugar de z, $\Phi\,(z+1)$ será igualmente a somma da serie

$$1+\frac{a}{z+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{(z+1).(z+2)}+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{a^3}{(z+1).(z+2).(z+3)}+\&c.$$

Tiremos huma destas series da outra, termo por termo, e teremos $\Phi z - \Phi\,(z+1)$ pela somma do resto, que será

$$\frac{a}{z.(z+1)}+\frac{a^2}{z.(z+1).(z+2)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^3}{z.(z+1).(z+2).(z+3)}+\&c.$$

Mas podemos representar este resto debaixo da fórma

$$\frac{a}{z.(z+1)}\cdot\left(1+\frac{a}{z+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{(z+2).(z+3)}+\&c.\right);$$

e então se reduz á $\frac{a}{z.(z+1)}\;\Phi\,(z+2)$.

Logo teremos em geral

$$\Phi z - (\Phi z + 1) = \frac{a}{z.(z+1)} \Phi (z+2).$$

Dividamos esta equação por $\Phi\ (z+1)$; e para simplificar o resultado, seja Ψz huma nova função de z tal que $\Psi z = \frac{a}{z} . \frac{\Phi\ (z+1.)}{\Phi z}$; então poderemos pôr $\frac{a}{z\ \Psi\ z}$ em lugar de $\frac{\Phi z}{\Phi\ (z+1)}$, e $\frac{(z+1)\ \Psi\ (z+1)}{a}$ em lugar de $\frac{\Phi\ (z+2)}{\Phi\ (z+1)}$

Feita a substituição, teremos

$$\Psi z = \frac{a}{z + \Psi\ (z+1)}.$$

Porém, pondo successivamente nesta equação $z+1$, $z+2$, &c., em lugar de z, resultará

$$\Psi\ (z+1) = \frac{a}{z+1+\Psi\ (z+2)},$$

$$\Psi\ (z+2) = \frac{a}{z+2+\Psi\ z+3)}, \text{ \&c.}$$

Logo o valor de Ψz se póde exprimir em fracção continua desta maneira

$$\Psi z = \frac{a}{z} + \frac{a}{z+1+\frac{a}{z+2}+\text{\&c.}}$$

Reciprocamente, esta fracção continua prolongada ao infinito, tem por somma Ψz, ou a sua igual $\frac{a}{z}.\frac{\Phi\ (z+1)}{\Phi\ z}$; e esta somma desenvolvida em series ordinarias, he

$$\frac{a}{z} \cdot \frac{1 + \frac{a}{z+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{(z+1).(z+2)} + \&c.}{1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z.(z+1)} + \&c.}$$

Seja agora $z = \frac{1}{2}$, a fracção continua ficará

$$\cfrac{2a}{1 + \cfrac{4a}{3 + \cfrac{4a}{5 + \&c.}}}$$

na qual os numeradores, excepto o primeiro, são todos iguaes a $4a$, e os denominadores formão a ferie dos numeros impares 1, 3, 5, 7, &c. Logo o valor desta fracção continua se póde tambem exprimir por

$$2a \cdot \frac{1 + \frac{4a}{2.3} + \frac{16a^2}{2.3.4.5} + \frac{64a^3}{2.3\ldots7} + \&c.}{1 + \frac{4a}{2} + \frac{16a^2}{2.3.4} + \frac{64a^3}{2.3\ldots6} + \&c.}$$

Mas estas feries se referem a feries conhecidas, e fabemos que reprefentando por e o numero cujo logarithmo hyperbolico he 1, a exprefsão precedente fe

reduz á $\frac{e^{2\sqrt{a}} - e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}} + e^{-2\sqrt{a}}} . \sqrt{a}$; de forte que teremos

em geral

$$\frac{e^{2\sqrt{a}} - e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}} + e^{-2\sqrt{a}}} . 2\sqrt{a} = \cfrac{4a}{1 + \cfrac{4a}{3 + \cfrac{4a}{5 + \&c.}}}$$

Daqui refultão duas fórmulas principaes, conforme a he pofitivo ou negativo. Seja primeiro $4a = x^2$, teremos

$$\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \&c.}}}$$

Seja ainda $4a = - x^2$, e em virtude da fórmula conhecida

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} = \sqrt{-1}. \text{tang. } x,$$ teremos

$$\text{tang. } x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x}{5 - \cfrac{x}{7 - \&c.}}}}$$

Efta he a fórmula que ha de fervir de bafe á noffa demonftração. Mas primeiro cumpre demonftrar os dois lemmas feguintes.

LEMMA I.

Seja huma fracção contínua prolongada ao infinito.

$$\cfrac{m}{n. + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \&c.}}}$$

no qual todos os numeros m, n, m', n', &c. *são inteiros positivos ou negativos ; se suppozermos que as fracções componentes* $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, &c., *sejão todas menores que a unidade, digo que o valor total da fracção contínua será necessariamente hum numero irracional.*

Primeiramente digo que este valor será menor que a unidade. Com effeito, sem diminuir a generalidade da fracção contínua, podemos suppôr todos os denominadores n, n', n'', &c. positivos: ora, se tomarmos hum só termo da serie proposta, teremos, por hypothese, $\frac{m}{n} < 1$. Se tomarmos os dois primeiros, como $\frac{m'}{n'} < 1$, he claro que $n + \frac{m'}{n'}$, he maior que $n - 1$: mas m he menor que n; e como são ambos inteiros, m será tambem menor do que $n + \frac{m'}{n'}$. Logo o valor que resulta dos dois termos

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n'}}$$

he menor que a unidade. Calculemos tres termos da fracção contínua proposta; e primeiramente, segundo o que temos visto, o valor da parte

$$\cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n''}}$$

será menor que a unidade. Chamemos este valor ω; e he claro que $\frac{m}{n+\omega}$ será tambem menor que a unidade; logo o valor que resulta dos tres termos

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m^{\prime}}{n^{\prime}+\cfrac{m^{\prime\prime}}{n^{\prime\prime}}}}$$

he menor que a unidade. Continuando o mesmo raciocinio, veremos que, qualquer que seja o numero de termos que se calcule da fracção contínua proposta, o valor que resulta he menor que a unidade; logo o valor total desta fracção prolongada ao infinito, tambem he menor do que a unidade. Só poderia ser igual á unidade no caso em que a fracção proposta tivesse a fórma

$$\cfrac{m}{m+1-\cfrac{m^{\prime}}{m^{\prime}+1-\cfrac{m^{\prime\prime}}{m^{\prime\prime}+1-\&c.}}};$$

em todos os mais casos elle he menor.

Isto posto, se negarem que o valor da fracção contínua proposta he igual a hum numero irracional, supponhamos que he igual a hum numero racional, e seja este numero $\frac{B}{A}$, sendo B e A inteiros, teremos por tanto

$$\frac{B}{A}=\cfrac{m}{n+\cfrac{m^{\prime}}{n^{\prime}+\cfrac{m^{\prime\prime}}{n^{\prime\prime}+\&c.}}}$$

Sejão C, D, E, &c. indeterminadas taes que tenhamos

$$\frac{C}{B}=\cfrac{m^{\prime}}{n^{\prime}+\cfrac{m^{\prime\prime}}{n^{\prime\prime}+\cfrac{m^{\prime\prime\prime}}{n^{\prime\prime\prime}+\&c.}}}$$

$$\frac{D}{C}=\cfrac{m^{\prime\prime}}{n^{\prime\prime}+\cfrac{m^{\prime\prime\prime}}{n^{\prime\prime\prime}+\cfrac{m^{\prime\prime\prime\prime}}{n^{\prime\prime\prime\prime}+\&c.}}}$$

e assim ao infinito. Tendo estas differentes fracções contínuas todos os ſeus termos menores que a unidade, os ſeus valores ou ſommas $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, $\frac{E}{D}$, &c. ſeráõ menores que a unidade, ſegundo o que fica demonſtrado, e aſſim teremos $B < A$, $C < B$, $D < C$, &c.; de maneira que a ſerie A, B, C, D, E, &c. he decreſcente ao infinito. Mas o encadeamento das fracções contínuas de que ſe trata, dá

$$\frac{B}{A} = \cfrac{m}{n + \cfrac{C}{B}}\text{; donde reſulta } C = mA - nB,$$

$$\frac{C}{B} = \cfrac{m'}{n' + \cfrac{D}{C}}\text{; donde reſulta } D = m'B - n'C,$$

$$\frac{D}{C} = \cfrac{m''}{n'' + \cfrac{E}{D}}\text{; donde reſulta } E = m''C - n''D,$$

&c. &c.

E como os dois primeiros numeros A e B são inteiros por hypotheſe, ſegue-ſe que todos os outros C, D, E, &c., que até agora eráõ indeterminados, são tambem numeros inteiros. Ora, implica contradição que huma ſerie infinita A, B, C, D, E, &c. ſeja ao meſmo tempo decreſcente e composta de numeros inteiros; porque nenhum dos numeros A, B, C, D, E, &c. póde ſer cifra, pois que a fracção contínua propoſta ſe eſtende ao infinito, e aſſim as ſommas repreſentadas por $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, &c. ſempre devem ſer alguma couſa. Logo a hypotheſe de que a ſomma da fracção contínua propoſta he igual a huma quantidade racional $\frac{B}{A}$, não póde ſubſiſtir; logo eſta ſomma he neceſſariamente hum numero irracional.

LEMMA II.

Postas as mesmas cousas, se as fracções componentes $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, &c. *forem de huma grandeza qualquer no principio da serie, mas depois de certo intervallo, forem constantemente menores que a unidade, digo que a fracção continua proposta, supponde sempre que ella se estenda ao infinito, terá hum valor irracional.*

Porque se, contando de $\frac{m'''}{n'''}$ por exemplo, todas as fracções $\frac{m'''}{n'''}$, $\frac{m''''}{n''''}$, $\frac{m'''''}{n'''''}$ &c. ao infinito, forem menores que a unidade, então, segundo o lemma 1, a fracção contínua

$$\cfrac{m'''}{n''' + \cfrac{m''''}{n'''' + \cfrac{m'''''}{n''''' + \&c.}}}$$

terá hum valor irracional. Chamemos este valor ω, e a fracção contínua proposta ficará

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \omega.}}}$$

Mas, se fizermos successivamente

$$\frac{m''}{n''+\omega} = \omega', \quad \frac{m'}{n'+\omega'} = \omega'', \quad \frac{m}{n+\omega''} = \omega''',$$

he claro que, sendo ω irracional, todas as quantidades ω', ω'', ω''', o devem ser igualmente. Ora, a ultima ω''' he igual á fracção contínua proposta; logo o valor desta he irracional.

Podemos agora, para tornarmos ao nosso assumpto, demonſtrar eſta propoſição geral.

THEOREMA.

Se hum arco for commenſuravel com o raio, a ſua tangente ſerá incommenſuravel com o meſmo raio.

Com effeito, ſeja o raio $=1$, e o arco $x=\frac{m}{n}$, ſendo m e n numeros inteiros, a fórmula acima achada dará, fazendo a ſubſtituição,

$$tang\,\frac{m}{n}=\cfrac{m}{n-\cfrac{m^2}{3n-\cfrac{m^2}{5n-\cfrac{m^2}{7n-\&c.}}}}$$

Ora, eſta fracção contínua eſtá no caſo do lemma II; porque he claro que os denominadores $3n$, $5n$, $7n$, &c. augmentando continuamente, em quanto o numerador m^2 perſiſte da meſma grandeza, as fracções componentes ſerão, ou brevemente virão a ſer, menores que a unidade; logo o valor de $tang\,\frac{m}{n}$ he irracional; logo, *ſe o arco for commenſuravel com o raio, a ſua tangente ſerá incommenſuravel.*

Daqui reſulta, como conſequencia muito immediata, a propoſição que faz o objecto deſta nota. Seja ϖ a ſemi-circumferencia cujo raio he 1; ſe ϖ foſſe racionavel, o arco $\frac{\varpi}{4}$ tambem o ſeria, e por conſequencia a ſua tangente deveria ſer irracional; mas ſabemos, pelo contrario, que a tangente do arco $\frac{\varpi}{4}$ he igual ao raio 1; logo ϖ não póde ſer racional. Logo *a razão da circumferencia para o diametro, he hum numero irraciona.* (1).

He provavel que o numero ϖ não se comprehenda nas irracionaes algebricas, quer dizer, que não possa ser raiz de huma equação algebrica de hum numero finito de termos, que tenha os coefficientes racionaes: mas parece muito difficil demonstrar rigorosamente esta proposição; podemos apenas fazer ver que o quadrado de ϖ he tambem hum numero irracional.

Com effeito, se na fracção contínua que exprime *tang.* x, fizermos $x = \varpi$, porque *tang.* $\varpi = 0$, devemos ter

$$0 = 3 - \cfrac{\varpi^2}{5 - \cfrac{\varpi^2}{7 - \cfrac{\varpi^2}{9 - \&c.}}}$$

Mas se ϖ^2 fosse racional, e tivessemos $\varpi^2 = \frac{m}{n}$ sendo m e n inteiros, daqui resultaria

$$3 = \cfrac{m}{5n - \cfrac{m}{7 - \cfrac{m}{9n - \cfrac{m}{11 - \&c.}}}}$$

Ora, he claro que esta fracção contínua tambem está no caso do lemma II; logo o seu valor he irracional, e não póde ser igual ao numero 3. Logo *o quadrado da razão da circumferencia para o diametro, he hum numero irracional.*

NOTA V.

Na qual se dá a solução analytica de diversos problemas ácerca do triangulo, do quadrilatero inscrito, do parallelepipedo, e da pyramide triangular.

---

(1) Esta proposição foi demonstrada pela primeira vez por Lambert, nas Memorias de Berlim, anno de 1761.

PROBLEMA I.

Sendo dados os tres lados de hum triangulo, achar a sua superficie, o raio do circulo inscrito, e o raio do circulo circunscrito.

Sejão os lados (fig. 3.) BC $= a$, AC $= b$, AB $= c$; se do vertice A abaixarmos a perpendicular AD sobre o lado opposto BC, teremos (12, 3.), $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BD$; logo $BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$. Este valor dá $\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2$

$$\text{ou } \overline{AD}^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2$$

$$= \frac{4a^2 c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2};$$

$$\text{logo } AD = \frac{\sqrt{[4a^2 c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2]}}{2a}$$

Seja S a área do triangulo, teremos $S = \frac{1}{2} BC \times AD$; logo $S = \frac{1}{4} \sqrt{[4a^2 c^2 - (a^2 + c^2 - b^2]} =$

$\frac{1}{4}\sqrt{(2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$.

Esta fórmula ainda se póde reduzir a outra fórma mais cómmoda para o calculo logarithmico; para isto cumpre notar que a quantidade $4a^2 c^2 - (a + c^2 - b^2)^2$ he o producto dos dois fractores $2ac + (a^2 + c^2 - b^2)$ e $2ac - (a^2 + c^2 - b^2)$; o primeiro $= (a+c)^2$

$-b^2=(a+c+b)\ (a+c-b)$; o segundo $=b^2$ $-(a-c)^2=(b+a-c)\ (b-a+c)$; logo teremos $S=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}$.

Finalmente, se fizermos $\frac{a+b+c}{2}=p$, o que dá $a+b+c=2p$, $a+b-c=2p-2c$, $a+c-b=2p-2b$, $b+c-a=2p-2a$, teremos ainda mais simplesmente

$$S=\sqrt{(p.\overline{p-a}.\overline{p-b}.\overline{p-c})}.$$

O que mostra que para ter a superficie de hum triangulo, cujos tres lados são dados, se deve tomar a semi-somma dos tres lados, desta semi-somma tirar successivamente cada lado, o que dará tres restos, multiplicar estes tres restos entre si e pela semi-somma dos lados, e emfim extrahir a raiz quadrada do producto: esta raiz será a área do triangulo.

Seja agora z o raio do circulo circunscrito ao triangulo, e u o raio do circulo inscrito no mesmo triangulo, teremos, segundo a prop. XXXII, liv. III,

$$z=\frac{\frac{1}{4}abc}{S} \text{ e } u=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{S}{p};$$ logo

substituindo o valor achado de S, virá

$$z=\frac{\frac{1}{4}abc}{\sqrt{(p.\overline{p-a}.\overline{p-b}.\overline{p-c})}},\ u=\sqrt{\left(\frac{\overline{p-a}.\overline{p-b}.\overline{p-c}}{p}\right)}$$

PROBLEMA II.

Sendo dados os quatro lados de hum quadrilatero inscrito, achar o raio do circulo, a superficie do quadrilatero e os seus angulos.

Sejão os lados dados (fig. 4.) $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, e as diagonaes incognitas $AC=x$, $BD=y$, teremos, segundo o theor, 33, liv. III, $xy = ac + bd$, e $\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$; donde se tira

$$x = \sqrt{\left(\frac{(ac + bd).(ad + bc)}{ab + cd}\right)}, \; y = \sqrt{\left(\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}\right)}.$$

Mas, segundo o problema precedente, o raio do circulo circunscrito ao triangulo ABC, cujos lados são a, b, x, póde exprimir-se pela formula

$$z = \frac{abx}{\sqrt{[4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - x^2)^2]}}.$$ Subs-

tituindo em lugar de x o valor que achámos, e decompondo o resultado em factores, teremos

$$z = \sqrt{\left[\frac{(ac + bd)(ad + bc)(ab + cd)}{(a+b+c+d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)}\right]}.$$

Isto posto, a área do triangulo ABC $= \frac{\frac{1}{4}abx}{z}$, a do triangulo ADC $= \frac{\frac{1}{4}cdx}{z}$; logo a área do quadrilatero ABCD $= \frac{1}{4} . \frac{(ab + cd)x}{z}$. . . .

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)]}.$$

E se fizermos, por brevidade, $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$, teremos a área ABCD $= \sqrt{(\overline{p-a}.\overline{p-b}.\overline{p-c}.\overline{p-d})}$. Emfim, se quizermos conseguir o ter hum dos angulos, por exemplo, o angulo A, observaremos que o triangulo ABC dá $\cos A = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab}$; ſubſtituindo o valor de x, e reduzindo, teremos

$$\cos A = \frac{a^2 + b - c^2 - d^2}{2ab + 2cd}.$$ Daqui ſe tira

$$\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}; \text{ ou tang.}^2\, \tfrac{1}{2} A = \frac{(c+d)^2 - (a-b)^2}{(a+b)^2 - (c-d)^2}$$

$$= \frac{(a+c+d-b)(b+c+d-a)}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)}.$$ Logo

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left(\frac{\overline{p-a}.\overline{p-b}}{\overline{p-c}.\overline{p-d}}\right)}$$

PROBLEMA III.

No quadrilatero ABDC (fig. 5.) *cujos angulos oppoſtos* B *e* C *são rectos, ſendo dados os dois lados* AB, AC, *com o angulo comprehendido* BAC, *achar os outros dois lados e a diagonal* AD.

Seja AC $= b$, AB $= c$, e o angulo BAC $=$ A; ſe prolongarmos BD e AC até ſe encontrarem em E, o triangulo BAE rectangulo em B, no qual ſe conhece o angulo BAE e o lado AB, dará

$$\text{AE} = \frac{c}{\cos A};$$ logo $$\text{CE} = \frac{c}{\cos A} - b.$$ Depois, o triangulo DCE rectangulo em C, no qual ſe conhece o lado CE e o angulo CDE $=$ A, dará

$CD = CE \cot A = \frac{c - b \cos A}{\text{ſen } A}$. Logo teremos ſemelhantemente $BD = \frac{b - c \cos A}{\text{ſen } A}$.

São eſtes os valores dos dois lados procurados do quadrilatero.

Daqui reſulta a diagonal $AD = \sqrt{(\overline{AC}^2 + \overline{DC}^2)} =$
$$\sqrt{\left\{b^2 + \left(\frac{c - b\cos A}{\text{ſen } A}\right)^2\right\}} = \frac{\sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc\cos A)}}{\text{ſen } A}.$$

Mas pelo triangulo BAC, teriamos $BC = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \cos A)}$. Logo a diagonal AD que ajunta os dois angulos obliquos eſtá para a diagonal BC que ajunta os dois angulos rectos : : 1 : ſen A.

Scholio. A diagonal AD he ao meſmo tempo o diametro do circulo no qual eſtiveſſe inſcrito o quadrilatero ABDC.

Neſte circulo teriamos o angulo $ABC = ADC$, logo abaixando CF perpendicular ſobre AB, os triangulos BFC, ADC são ſemelhantes e dão AD : BC : : AC : FC : : 1 : ſen A; o que concorda com o reſultado precedente.

PROBLEMA IV.

Sendo dadas as tres areſtas de hum parallelepipedo com os angulos que ellas fazem entre ſi, achar a ſolidez do parallelepipedo.

Sejão as areſtas $SA = f$, $SB = g$, $SC = h$ (fig. 6.), e os angulos comprehendidos $ASB = \alpha$, $ASC = \beta$, $BSC = \gamma$. Se do ponto C abaixarmos CO perpendicular ſobre o plano ASB, o triangulo rectangulo CSO dará $CO = CS \,\mathrm{sen}\, CSO = b \,\mathrm{sen}\, CSO$. Demais a ſuperficie do parallelogrammo $ASBP = fg \,\mathrm{sen}\, \alpha$. Logo ſe chamarmos S a ſolidez do parallelepipedo ST, teremos $S = fgh \,\mathrm{sen}\, \alpha \,\mathrm{sen}\, CSO$. Reſta achar $\mathrm{sen}\, CSO$.

Para iſto, do ponto S como centro e com hum raio $= 1$, deſcreva-ſe huma ſuperficie esferica que encontre em D, E, F, G as rectas SA, SB, SC, SO, teremos hum triangulo DEF no qual o arco FG he perpendicular ſobre ED, porque o plano CSO he perpendicular ſobre ASB. Ora o triangulo DEF, no qual temos os tres lados $DE = \alpha$,

$DF = \beta$, $EF = \gamma$, dá $\cos E = \dfrac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\gamma}$,

e $\mathrm{sen}\, E = \dfrac{\sqrt{(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}}{\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\gamma}$.

Depois o triangulo rectangulo EFG dá ſen FG ou $\mathrm{sen}\, CSO = \mathrm{sen}\, E \,\mathrm{sen}\, EF = \mathrm{sen}\,\gamma\,\mathrm{sen}\, E$. Logo $S = fgh \,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\gamma\,\mathrm{sen}\, E$, ou $S = fgh \sqrt{(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}$.

Neſta expreſsão a quantidade debaixo do radical he o producto de dois factores $\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\gamma + \cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma$ e $\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\gamma - \cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma$.

O primeiro $= \cos\beta - \cos(\alpha + \gamma) = 2\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\alpha+\gamma-\beta}{2}$, o ſegundo $= \cos(\alpha - \gamma) - \cos\beta = 2\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$.

Logo a solidez procurada $S = 2fgh\sqrt{(\text{sen}\,\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}}$

$\text{sen}\,\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\,\text{sen}\,\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\,\text{sen}\,\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2})$.

PROBLEMA V.

Dadas as mesmas cousas que no problema precedente, achar a expressão da diagonal que une dois vertices oppostos.

Seja a diagonal da base $SP = z$ e a diagonal procurada $ST = u$, o triangulo ASP no qual cos SAP $=$

$-\cos\alpha$, dará $z^2 = f^2 + g^2 + 2fg\cos\alpha$; igualmente o triangulo TSP no qual cos TPS $=$

$-$ cos CSP, dará $u^2 = z^2 + h^2 + 2hz$ cos CSP. Resta só ter o coseno do angulo CSP ou do arco FH: ora no triangulo esferico EFH, temos cos FH $=$ cos EF cos EH $+$ sen EF sen EH cos E, substituindo os valores $EF = \gamma$ e $\cos E = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\text{sen}\,\alpha\;\text{sen}\,\gamma}$,

virá $\cos FH = \cos\gamma\cos EH + \frac{\text{sen}\,EH}{\text{sen}\,\alpha}(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma)$

$$= \frac{\text{sen}\,EH\cos\beta}{\text{sen}\,\alpha} + \frac{\text{sen}\,(\alpha - EH).\cos\gamma}{\text{sen}\,\alpha} =$$

$\frac{\text{sen}\,EH\cos\beta + \text{sen}\,DH\cos\gamma}{\text{sen}\,\alpha}$. Logo $2hz$ cos FH

ou $2hz$ cos CSP $= 2h\cos\beta.\frac{z\,\text{sen}\,EH}{\text{sen}\,\alpha} + 2h\cos\gamma$.

$\frac{z \text{ sen DH}}{\text{sen } \alpha}$. Mas no triangulo BSP temos BP $=$

$\frac{\text{SP sen BSP}}{\text{sen SBP}}$, e BS $= \frac{\text{SP sen BPS}}{\text{sen SBP}}$, o que dá

$\frac{z \text{ sen EH}}{\text{sen } \alpha} = f$, e $\frac{z \text{ sen DH}}{\text{sen } \alpha} = g$. Logo $2hz$ cos CSP $= 2fh \cos \beta + 2gh \cos \gamma$. Logo finalmente o quadrado da diagonal procurada:

$$u^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg \cos \alpha + 2fh \cos \beta + 2gh \cos \gamma.$$

Corollario. O angulo solido A he formado pelas arestas f, g, h, que fazem entre si duas a duas os angulos $200° - \alpha$ ($180° - \alpha$), $200° - \beta$ ($180° - \beta$), γ; assim basta mudar os signaes de cos α e cos β na expressão de $\overline{SE}^2$ para ter a de $\overline{AM}^2$. Fazendo o mesmo para as outras duas diagonaes, teremos os valores dos seus quadrados da maneira seguinte:

$$\overline{ST}^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg \cos \alpha + 2fh \cos \beta + 2gh \cos \gamma.$$
$$\overline{AM}^2 = f^2 + g^2 + h^2 - 2fg \cos \alpha - 2fh \cos \beta + 2gh \cos \gamma.$$
$$\overline{BN}^2 = f^2 + g^2 + h^2 - 2fg \cos \alpha + 2fh \cos \beta - 2gh \cos \gamma.$$
$$\overline{CP}^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg \cos \alpha - 2fh \cos \beta - 2gh \cos \gamma.$$

Daqui se tira $\overline{ST}^2 + \overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{CP}^2 = 4f^2 + 4g^2 + 4h^2$. Logo *em todo o parallelepipedo, a somma dos quadrados das quatro diagonaes he igual á somma dos quadrados das doze arestas.* Este theorema notavel e analogo ao que tem lugar no parallelogrammo (14, 3, cor.) poderia deduzir-se immediatamente do ultimo. Porque por meio dos parallelogrammos SCTP, ABMN, temos

$$\overline{ST}^2 + \overline{CP}^2 = 2\overline{SC}^2 + 2\overline{SP}^2$$

$$\overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 = 2\overline{BM}^2 + 2\overline{AB}^2 .$$

Sommando estas equações, e notando que SC $= BM$ e $\overline{SP}^2 + \overline{AB}^2 = 2\overline{SA}^2 + 2\overline{SB}^2$, virá $\overline{ST}^2 + \overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{CP}^2 = 4\overline{SA}^2 + 4\overline{SB}^2 + 4\overline{SC}^2$.

PROBLEMA VI.

Sendo dadas as tres arestas que tendem ao mesmo vertice de huma pyramide triangular, e os tres angulos que estas arestas formão entre si, achar a solidez da pyramide.

Seja SABC (fig. 7.) a pyramide triangular proposta, na qual se conhecem as arestas SA $=f$, SB $=g$, SC $=h$, e os angulos comprehendidos ASB $=\alpha$, ASC $=\beta$, BSC $=\gamma$. Se descrevermos sobre as arestas SA, SB, SC, dadas de grandeza e posição, o parallelepipedo ST, a pyramide que he o terço do prisma triangular BSANMC será o sexto do parallelepipedo ST. Logo chamando P a solidez da pyramide, teremos, pelo prob. IV.

$$P = \frac{1}{6} fgh\sqrt{(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}$$

$$\text{ou } P = \frac{1}{3} fgh \sqrt{\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2}\right)}.$$

PROBLEMA VII.

Sendo dados os ſeis lados ou areſtas de huma pyramide triangular, achar a ſua ſolidez.

Se conſervarmos as meſmas denominações do problema precedente, e fizermos $BC = f'$, $CA = g'$, $BA = h'$, teremos $\cos\alpha = \frac{f^2 + g^2 - h'^2}{2fg}$,

$$\cos\beta = \frac{f^2 + h^2 - g'^2}{2fh}, \cos\gamma = \frac{g^2 + h^2 - f'^2}{2gh}.$$

Subſtituindo eſtes valores na fórmula achada, e fazendo, por brevidade, $g^2 + h^2 - f'^2 = F$, $f^2 + h^2 - g'^2 = G$, $f^2 + g^2 - h'^2 = H$, teremos a ſolidez pedida

$$P = \frac{1}{12}\sqrt{(4f^2 g^2 h^2 - f^2 F^2 - g^2 G^2 - h^2 H^2 + FGH)}.$$

Na applicação deſtas fórmulas note-ſe, que f', g', h', deſignão os lados de huma meſma face ou baſe, e f, g, h, as outras tres areſtas que tendem ao vertice, ſendo a ſua diſpoſição tal que f he oppoſta a f', g a g', e h a h'.

Scholio. Seja A a ſomma dos quatro triangulos que compõe a ſuperficie da pyramide, ſeja r o raio da esfera inſcrita; he facil de ver que temos $P = A \times \frac{1}{3} r$; porque podemos conceber a pyramide decompoſta em quatro que tenhão por vertice commum o centro da esfera, e por baſes as differentes faces da pyramide. Logo o raio da esfera inſcrita $r = \frac{3P}{A}$.

PROBLEMA VIII.

Dadas as mesmas cousas que no problema VI *achar o raio da esfera circunscrita á pyramide.*

Seja M (fig. 8.) o centro do circulo circunscrito ao triangulo SAB, MO a perpendicular tirada pelo ponto M sobre o plano SAB; seja igualmente N o centro do circulo circunscrito ao triangulo SAC, NO a perpendicular levantada pelo ponto N sobre o plano SAC. Estas duas perpendiculares, situadas no mesmo plano perpendicular á SA, se encontraráõ em hum ponto O, que será o centro da esfera circunscrita; porque o ponto O, como pertencente á perpendicular MO, está em igual distancia dos tres pontos S, A, B; e este mesmo ponto, como pertencente á perpendicular NO, está em igual distancia dos tres pontos S, A, C: Logo está em igual distancia dos quatro pontos S, A, B, C.

Podemos imaginar que o ponto M he determinado no plano SAB, por meio do quadrilatero SDMH, do qual os dois angulos D e H são rectos, e no qual temos SD $= \frac{1}{2} f$, SH $= \frac{1}{2} g$, e ASB $= \alpha$. Logo teremos (pelo problema III), DM $= \frac{\frac{1}{2}g - \frac{1}{2}f\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$,

semelhantemente teremos DN $= \frac{\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}f\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}$.

Chamemos D o angulo MDN que mede a inclinação dos dois planos SAB, SAC; no triangulo esferico, que tem por lados α, β, γ, D será o angulo opposto ao lado γ, e por tanto teremos

$\cos D = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$, de forte que o angulo D se póde suppôr conhecido.

Isto posto, no quadrilatero OMDN que tem os dois angulos M e N rectos, e no qual se conhecem os dois lados MD, DN, e o angulo comprehendido

MDN $=$ D, teremos pelo problema III, o quadrado da diagonal $\overline{OD}^2 = \frac{\overline{DM}^2 + \overline{DN}^2 - 2DM \times DN \cos D}{\text{sen}^2 D}$.

No triangulo OSD, rectangulo em D, teremos

$\overline{SO}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{SD}^2$; este o valor do quadrado do raio da esfera circumscrita.

Se fizermos a substituição dos valores de DM, DN, e a dos valôres de *cos* D e de *sen* D; para termos immediatamente a expressão do raio SO, por meio dos dados do problema VI, acharemos de resultado:

$$SO = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{\frac{f^2\,\text{sen}^2\gamma + g^2\,\text{sen}^2\beta + h^2\,\text{sen}^2\alpha - 2fg(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma) - 2fh(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma) - 2gh(\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta)}{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\right\}}$$

NOTA VI.

Sobre a mais curta distancia de duas rectas não situadas no mesmo plano.

Sejão AB, CD (Est. 13 fig. 1) duas rectas, não situadas no mesmo plano, das quaes se trata de achar a mais curta distancia.

Na direcção AB façamos passar dois planos perpendiculares entre si que encontrem CD, hum em C, outro em D; dos pontos C e D abaixemos CA e DB perpendiculares sobre AB; no plano ABD tiremos DE parallela e AE perpendicular a AB, o que formará o rectangulo ABDE; no plano CAE ajunte-se CE, e tire-se AI perpendicular a CE; emfim no plano CDE tire-se IK parallela a DE até o encontro de CD em K, faça-se AL $=$ IK, e ajunte-se KL; digo, 1.° que a recta KL he ao mesmo tempo perpendicular ás duas rectas dadas AB, CD; 2.° que esta mesma recta KL he mais curta que outra qualquer que ajuntasse dois pontos das linhas

AB, CD, e por tanto KL, ou a sua igual AI, he a mais curta distancia pedida.

Com effeito, 1.° as tres rectas AB, AC, AE sendo por construcção perpendiculares entre si, huma dellas AB he perpendicular ao plano das outras duas ACE; logo AB he perpendicular a AI; de mais KI he parallela a DE, e DE a AB; logo KI he parallela a AB: e como fizemos AL $=$ KI; segue-se que a figura AIKL he hum rectangulo. Isto posto, o angulo AIK he recto como AIC, logo a recta AI he perpendicular ao plano KIC ou CDE: logo a sua parallela KL he perpendicular ao mesmo plano CDE, e por consequencia he perpendicular a CD. Logo 1.° a recta KL he perpendicular ao mesmo tempo ás duas rectas AB, CD.

2.° Seja M hum ponto qualquer da recta CD; se por este ponto tirarmos MN parallela a DE ou a AB, a distancia do ponto M á recta AB será igual a AN, porque o angulo BAN he recto. Ora temos $AN > AI$; logo AI he a mais curta distancia das linhas dadas AB, CD.

Sejão as perpendiculares $CA = a$, e $DB = AE = b$, teremos $CE = \sqrt{(a^2 + b^2)}$; e porque a área do triangulo ACE se exprime igualmente por $\frac{1}{2} AC \times AE$ e por $\frac{1}{2} CE \times AI$, teremos $AI = \frac{AC \times AE}{CE} = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$.

He a expressão da mais curta distancia das linhas dadas.

Se ao mesmo tempo fizermos a distancia $AB = c$, e chamarmos A o angulo comprehendido entre as duas linhas dadas, quer dizer o angulo CDE, comprehendido entre a linha CD e huma parallela DE á linha AB, o triangulo CDE rectangulo em E dará $\cos CDE = \frac{DE}{CD}$, ou $\cos A = \frac{c}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$;

porque temos $\overline{CD}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{ED}^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Daqui ſe tiraria tambem ſen $A = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$,

e cot $A = \frac{c}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$.

NOTA VII.

Sobre os polyedros ſymmetricos.

Para mais ſimplicidade ſuppozemos na def. 16, liv. VI, que o plano ao qual ſe referem os polyedros ſymmetricos, he o plano de huma face: poderiamos ſuppôr que eſte plano he hum plano qualquer, e então viria a definição a ſer mais geral, ſem haver couſa que mudar na demonſtração da propoſição II, pela qual havemos eſtabelecido as relações mutuas de dois polyedros. Tambem ſe póde fazer huma idéa muito exacta da poſição deſtes dois ſólidos, conſiderando hum dos dois como a imagem do outro formada em hum eſpelho plano, o que fará as vezes do plano de que havemos fallado.

Ainda que dois polyedros ſymmetricos não poſsão em geral ſer ſobrepoſtos, todavia podemos provar, com o ſoccorro de algumas decompoſiçóes, que eſtes polyedros são ſobreponiveis por partes, e por tanto as ſuas ſolidezes são iguaes. Eis-aqui a demonſtração deſta propoſição, huma das mais importantes da theoria dos ſólidos.

LEMMA I.

Seja AOS (fig. 9.) *hum triangulo iſoſceles, no qual ſeja* AO = OS, *ſe pelo ponto* O *tirarmos a* *recta* BOD *perpendicular ſobre o plano* AOS, *e tomarmos de huma e outra parte as diſtancias iguaes* OB = OD, *digo que as pyramides* DAOS, BAOS, *que tem por baſe commum* AOS, *e por vertices os pontos* D e B, *são não ſómente ſymmetricas huma da outra, como reſulta da conſtrucção, mas podem ſer ſobrepoſtas por cauſa da baſe iſoſceles, e que são perfeitamente iguaes.*

Com effeito, he facil de ver que a pyramide AOSB, ou (para a diſtinguir melhor) A'OS'B, póde ſer poſta exactamente ſobre a pyramide AOSD, e primeiramente o triangulo iſoſceles S'OA' póde ſer poſto ſobre o ſeu igual AOS, de maneira, que o ponto S' caia em A, e o ponto A' em S. Neſta ſituação a perpendicular OB cobrirá exactamente a ſua igual OD, e aſſim o ponto B cahirá em D; logo as duas pyramides ſe confundirão em huma ſó; logo são iguaes.

LEMMA II.

Seja ABC (fig. 10.) *hum triangulo qualquer*, O *o centro do circulo circunſcrito a eſte triangulo, de ſorte que ſeja* OA = OB = OC; *ſe pelo ponto* O *levantarmos ao plano do triangulo a perpendicular* TOS, *e tomarmos de huma e outra parte do plano diſtancias iguaes* OS, OT; *digo que as duas pyramides ſymmetricas* SABC, TABC, *terão ſolidezes iguaes.*

Porque, ſegundo o lemma precedente, as pyramides AOBT, BOCT, AOCT, são iguaes reſpectivamente ás pyramides AOBS, BOCS, AOCS; logo a pyramide ABCT, que he a ſomma das tres primeiras, he igual em ſolidez á pyramide ABCS, que he a ſomma das outras tres.

Scholio. Se o ponto O, centro do circulo circunſcrito, eſtiveſſe fóra do triangulo ABC, he facil de ver que a concluſão ſeria ſempre a meſma.

LEMMA III.

Toda a pyramide triangular póde ser inſcrita em huma esfera.

Seja ABC (fig. 11.) a baſe da pyramide propoſta, S o ſeu vertice, SP a altura; ſeja O o centro do circulo circunſcrito ao triangulo ABC; ſe pelo ponto O levantarmos ſobre o plano ABC a perpendicular indefinida OX, cada ponto de OX eſtará em igual diſtancia dos pontos A, B, C; por tanto falta ſó achar ſobre OX hum ponto Z que ſeja igualmente diſtante de A e de S, e eſtando eſte ponto Z em igual diſtancia dos quatro pontos A, B, C, S, ſerá o centro da esfera circunſcrita á pyramide. Ora, a ſolução deſte problema he facil de executar ſobre hum plano.

Debaixo de hum angulo recto fação-ſe as linhas SP, OP, (fig. 12.), iguaes ás linhas do meſmo nome na figura ſólida, prolongue-ſe PO huma quantidade OD igual ao raio AO do circulo circunſcrito, tire-ſe DS, e ſobre o meio de DS levante-ſe a perpendicular indefinida YZ; digo que YZ encontrará a perpendicular OX no ponto procurado Z, de maneira que ZD ou ZS ſerá o raio da esfera circunſcrita, e ZO a diſtancia do ſeu centro ao plano ABC.

Com effeito, temos, por conſtrucção, ZD = ZS, ora como (fig. 11.) OD = OA, temos ZD = ZA = ZB = ZC; logo as quatro diſtancias ZA, ZB, ZC, ZS, são iguaes; logo Z he o centro da esfera circunſcrita.

Corollario. I. A recta YZ perpendicular a DS, e a recta OX perpendicular a DP, ſe encontrarão ſempre, porque fazem entre ſi hum angulo igual a SDP, e não podem encontrar-ſe em mais de hum ponto; logo he ſempre poſſivel circunſcrever huma esfera á pyramide triangular dada, e não ſe póde circunſcrever mais de huma.

Corollario II. A meſma conſtrucção plana, pela qual ſe determina o raio e o centro da esfera circunſcrita á pyramide SABC (fig. 11.) ſervirá para achar o raio e o centro da esfera circunſcrita á pyramide TABC ſymmetrica de SABC; porque os valores de SP, OP, DO, são os meſmos em huma e outra parte. Logo as esferas circunſcritas ás duas pyramides são iguaes, e os ſeus centros eſtão igualmente diſtantes dos planos das faces iguaes.

THEOREMA.

Duas pyramides triangulares ſymmetricas são iguaes em ſolidez.

Sejão as pyramides dadas SABC, TABC (fig. 13.); ſeja Z o centro da esfera circunſcrita á pyramide SABC e Z' o centro da esfera circunſcrita á pyramide TABC; ſupponhamos que o ponto Z eſteja ſituado dentro da pyramide SABC, então o ponto Z' eſtará igualmente ſituado dentro da pyramide TABC.

Iſto poſto, podemos conſiderar a pyramide SABC como compoſta de quatro pyramides ZABC, ZABS, ZBCS, ZACS, cujo vertice commum he Z, e cujas baſes são as quatro faces da pyramide; do meſmo modo ſe póde conſiderar a pyramide TABC como compoſta das quatro pyramides Z'ABC, Z'ABT, Z'BCT, Z'ACT. Ora, em virtude do lemma 11, as pyramides ZABC, Z'ABC, são iguaes em ſolidez; as pyramides ZABS, Z'ABT, tambem eſtão no caſo do meſmo lemma; porque poderiamos pôr as baſes iguaes ABS, ABT, huma ſobre a outra, e então os vertices Z, e Z', centros das esferas circumſcritas, ſerião os extremos de duas perpendiculares iguaes tiradas ao plano da baſe commum pelo centro do circulo circunſcrito a eſta baſe. Logo a ſolidez ZABS = Z'ABT, e ſemelhantemente ZBCS = Z'BCT, ZACS = Z'ACT; logo a pyramide SABC, que he a ſomma das quatro ZABC, ZABS, ZBCS, ZACS, he equivalente á pyramide TABC, que he a ſomma das quatro Z'ABC, Z'ABT, Z'BCT, Z'ACT.

Se os centros Z e Z' eſtiveſſem ſituados fóra das pyramides, então em vez de sommar as quatro pyramides ZABC, ZABS, ZBCS, ZACS, seria necessario tirar huma ou duas da somma das outras, para ter a pyramide SABC; mas como a pyramide TABC se comporia semelhantemente das pyramides Z'ABC, Z'ABT, Z'BCT, Z'ACT, daqui se concluiria sempre que as duas pyramides SABC, TABC, são iguaes em solidez.

THEOREMA.

Dois polyedros symmetricos quaesquer são equivalentes ou iguaes em solidez.

Porque, suppondo a mesma construcção que na prop. 11, podemos conceber hum dos polyedros como composto de tantas pyramides triangulares AMPN (fig. 205.), APNQ &c. cujo vertice commum he A, quantos triangulos MPN, PNQ, &c. houver nas differentes faces do polyedro, excepto as que formão o angulo A. O polyedro symmetrico conterá hum igual numero de pyramides triangulares AM'P'N', AP'N'Q', &c., as quaes são symmetricas ás pyramides AMPN, APNQ, &c. cada huma a cada huma. Logo, como as pyramides triangulares symmetricas são equivalentes, segue-se que os polyedros, compostos do mesmo numero de pyramides iguaes, cada huma a cada huma, são tambem iguaes em solidez.

NOTA VIII.

A'cêrca da proposição XXV, *livro* VII.

Este theorema o qual Euler foi o primeiro que demonstrou nas Memorias de Petersburgo, anno de 1758, offerece muitas consequencias que merecem ser desenvolvidas.

1.° Seja *a* o numero dos triangulos, *b* o numero dos quadrilateros, *c* o numero dos pentagonos, &c. que compoem a ſuperficie de hum polyedro; o numero total das faces ſerá $a + b + c + d +$ &c., e o numero total dos ſeus lados ſerá $3a + 4b + 5c + 6d +$ &c. Eſte numero he duplo do das areſtas, porque a meſma areſta pertence a duas faces, aſſim teremos

$$H = a + b + c + d + \&c.$$
$$2A = 3a + 4b + 5c + 6d + \&c.$$

E como, ſegundo o theorema de que ſe trata, $S + H = A + 2$, daqui ſe tira

$$2S = 4 + a + 2b + 3c + 4d + \&c.$$

A primeira advertencia que eſtes valores offerecem, he que o numero das faces impares $a + c + e +$ &c. he ſempre par.

Façamos, por brevidade, $\omega = b + 2c + 3d +$ &c., e teremos

$$A = \frac{3}{2} H + \tfrac{1}{2} \omega,$$
$$S = 2 + \tfrac{1}{2} H + \tfrac{1}{2} \omega.$$

Aſſim em todo o polyedro temos ſempre $A > \frac{3}{2} H$, e $S > 2 + \frac{1}{2} H$, onde cumpre notar que o ſignal $>$ não exclue a igualdade, porque póde ſer $\omega = 0$.

O numero de todos os angulos planos do polyedro he $2A$, o dos angulos ſolidos he S, de ſorte que o numero medio dos angulos planos que formão cada angulo ſolido, he $\frac{2A}{S}$.

Eſte numero não póde ſer menor que 3, porque são neceſſarios ao menos tres angulos planos para formar hum angulo ſolido; aſſim devemos ter $2A > 3S$, não excluindo o ſignal $>$ a igualdade. Se puzermos em lugar de A e de S os ſeus valores em H e ω, teremos $3H + \omega > 6 + \frac{3}{2}H + \frac{3}{2}\omega$, ou $3H > 12 + \omega$. Tornando a pôr os valores de H e ω em a, b, c, daqui resultará

$$3a + 2b + c > 12 + e + 2f + 3g + \&c.$$

Donde se vê que a, b, c, não podem ser zero ao mesmo tempo; e que portanto não ha polyedro do qual todas as faces tenhão mais de cinco lados.

Como temos $H > 4 + \frac{1}{3}\omega$, a substituição nos valores de S e de A dará $S > 4 + \frac{2}{3}\omega$ e $A > 6 + \omega$. Mas ao mesmo tempo temos $\omega < 3H - 12$; e daqui resulta $S < 2H - 4$, e $A < 3H - 6$, onde devemos lembrarnos que os signaes $>$ e $<$ não excluem a igualdade. Estes limites tem lugar geralmente em todos os polyedros.

2.° Supponhamos $2A > 4S$, o que convem a huma infinidade de polyedros, e particularmente á aquelles dos quaes todos os angulos solidos são formados de quatro planos ou mais, teremos neste caso $H > 8 + \omega$, ou, fazendo a substituição,

$$a > 8 + c + 2d + 3e + \&c.$$

Logo o solido deve ter ao menos oito faces triangulares; o limite $H > 8 + \omega$ dá $S > 6 + \omega$, e $A > 12 + 2\omega$. Mas temos ao mesmo tempo $\omega < H - 8$; e daqui resulta $S < H - 2$, $A < 2H - 4$.

3.° Supponhamos $2A > 5S$, o que abrange entre outros polyedros aquelles dos quaes todos os angulos solidos são ao menos quintuplos, daqui resultará $H > 20 + 3\omega$, ou

$$a > 20 + 2b + 5c + 8d + \&c.$$

E teremos ao mesmo tempo $S > 12 + 2\omega$, e

$A > 30 + 5\omega$; emfim, de ser $\omega < \frac{1}{3}(H - 20)$, se tirão os limites $S < \frac{2}{3}(H - 2)$, $A < \frac{5}{3}(H-2)$.

Não podemos suppôr $2A = 6S$; porque temos em geral $2A + 2\omega + 12 = 6S$; logo não ha polyedro algum que tenha todos os angulos solidos formados de seis angulos planos ou mais; e com effeito o menor valor que teria cada angulo plano, hum por outro, seria o angulo de hum triangulo equilatero e seis destes angulos farião quatro angulos rectos, o que he muito para hum angulo solido.

4.° Consideremos hum polyedro do qual todas as faces sejão triangulares, teremos $\omega = 0$, o que dará $A = \frac{3}{2} H$, e $S = 2 + \frac{1}{2} H$. Supponhamos mais que todos os angulos solidos do polyedro sejão parte quintuplos, parte sextuplos; seja p o numero dos angulos solidos quintuplos, q o dos sextuplos, teremos $S = p + q$ e $2A = 5p + 6q$, o que dá $6S - 2A = p$: mas temos tambem $A = \frac{3}{2} H$, e $S = 2 + \frac{1}{2} H$; logo $p = 6S - 2A = 12$. Logo *se hum polyedro tiver todas as suas faces triangulares, e os seus angulos solidos forem parte quintuplos, parte sextuplos, os angulos solidos quintuplos serão sempre em numero de* 12. Os sextuplos podem ser em qualquer numero; assim deixando q indeterminado, teremos em todos estes solidos $S = 12 + q$, $H = 20 + 2q$, $A = 30 + 3q$.

Terminaremos estas applicações indagando o numero de condições ou dados necessarios para determinar hum polyedro; questão interessante, e que eu penso não ter sido ainda resolvida.

Supponhamos primeiro que o polyedro seja *de* *huma especie determinada*, quer dizer, que se conhece o numero de suas faces, o numero dos seus lados individualmente, e a sua disposição humas a respeito das outras. Portanto são conhecidos os numeros H, S, A, assim como *a*, *b*, *c*, *d*, &c.; falta só ter o numero de dados effectivos, linhas ou angulos, por meio dos quaes se póde construir e determinar o polyedro.

Consideremos huma das faces do polyedro que tomaremos por base. Seja n o numero de seus lados, para determinar esta base serão necessarios $2n-3$ dados. Os angulos solidos fóra da base são $S-n$; o vertice de cada angulo requer tres dados para se determinar; assim a posição de $S-n$ vertices exigiria $3S-3n$ dados, aos quaes ajuntando os $2n-3$ da base, teriamos ao todo $3S-n-3$. Mas este numero he em geral muito grande; elle deve ser diminuido do numero de condições necessarias para que os vertices que correspondem a huma mesma face estejão no mesmo plano. Chamámos n o numero dos lados da base, chamemos do mesmo modo n', n'', &c. os numeros de lados das outras faces. Tres pontos determinão hum plano; assim o que se achar de mais que 3 em cada numero n', n'', &c. dará outras tantas condições para que os differentes vertices estejão situados nos planos das faces ás quaes elles pertencem, e o numero total destas condições será igual á serie $(n'-3)+(n''-3)+(n'''-3)+$ &c. Mas o numero dos termos desta serie he $H-1$, e de mais $n+n'+n''+$ &c. $=2A$: logo a somma da serie será $2A-n-3(H-1)$. Tirando esta somma de $3S-n-3$, ficará $3S-2A+3H-6$, quantidade que, por ser $S+H=A+2$, se reduz a A. Logo *o numero de dados necessarios para determinar hum polyedro, entre os da mesma especie, he igual ao numero das suas arestas*.

Note-se todavia que os dados de que se trata não devem ser tomados ao acaso entre as linhas e os angulos que conftituem os elementos do polyedro; pois, ainda que houveffe tantas equações como incognitas, poderia acontecer que certas relações entre as quantidades conhecidas tornaffem o problema indeterminado. Affim pareceria, pelo theorema que havemos achado, que fó o conhecimento das areftas bafta em geral para determinar hum polyedro; mas ha cafos em que efte conhecimento não bafta. Por exemplo, dado hum prifma não triangular qualquer, poderemos formar huma infinidade de outros prifmas que tenhão areftas iguaes e difpoftas da mefma maneira. Porque, apenas a bafe tem mais de tres lados, podemos, confervando os lados, mudar os angulos, e por efte modo dar á bafe huma infinidade de fórmas differentes; tambem podemos mudar a pofição da arefta longitudinal do prifma relativamente ao plano da bafe; finalmente podemos combinar eftas duas mudanças huma com a outra, e daqui refultará fempre hum prifma cujas areftas ou lados não terão mudado. O que moftra que não baftão fó as areftas nefte cafo para determinar o folido.

Os dados que convem tomar para determinar hum folido, são aquelles que não deixão alguma indeterminação, e que dão abfolutamente fó huma folução. E primeiramente a bafe ABCDE (fig. 14.) ferá determinada, entre outras maneiras, fe for conhecido o lado AB, com os angulos adjacentes BAC, ABC, para o ponto C, os angulos BAD, ABD, para o ponto D, e affim dos mais. Seja M hum ponto do qual fe quer determinar a pofição fóra do plano da bafe; efte ponto ficará determinado, quando, imaginando a pyramide MABC, ou fómente o plano MAB, forem conhecidos os angulos MAB, ABM, e a inclinação do plano MAB fobre a bafe ABC. Se determinarmos por meio de tres dados femelhantes a pofição de cada hum dos vertices do polyedro fóra do plano da bafe, he claro que o polyedro ficará determinado abfolutamente e de huma maneira unica, de forte que dois polyedros conſtruidos com os meſmos dados ſerão neceſſariamente iguaes: entretanto ſerião ſymmetricos hum do outro, ſe foſſem conſtruidos de differentes lados do plano da baſe.

Nem ſempre he neceſſario ter tres dados para determinar cada angulo ſolido do polyedro; porque ſe o ponto M ſe dever achar ſobre hum plano já determinado cuja interſecção com a baſe ſeja FG, baſtará, depois de haver tomado FG arbitrariamente, conhecer os angulos MGF, MFG; portanto ſerá preciſo menos hum dado. Se o ponto M ſe dever achar em dois planos já determinados, ou na ſua interſecção commum MK, que encontre o plano ABC em K, conheceremos já o lado AK, o angulo AKM e a inclinação do plano AKM ſobre a baſe; portanto baſtará que tenhamos por novo dado o angulo MAK. Deſte modo o numero de dados neceſſarios para determinar hum polyedro abſolutamente e de huma maneira unica, ſe reduzirá ſempre ao numero das ſuas areſtas A.

O lado AB e hum numero A — 1 de angulos dados determinão hum polyedro; outro lado arbitrario e os meſmos angulos determinarão hum polyedro ſemelhante. Donde ſe ſegue que *o numero de condições neceſſarias para que dois polyedros da meſma eſpecie ſejão ſemelhantes, he igual ao numero das areſtas menos hum.*

A queſtão que havemos reſolvido ſeria muito mais ſimples ſe não foſſe conhecida a eſpecie do polyedro, mas ſómente o numero dos ſeus angulos ſolidos S. Determinem-ſe então tres vertices arbitrariamente por meio de hum triangulo no qual haverá tres dados; eſte triangulo ſerá conſiderado como a baſe do ſolido, depois os vertices fóra deſta baſe ſerão em numero de S — 3; e exigindo tres dados a determinação de cada hum, he claro que o numero total de dados neceſſarios para determinar o polyedro, ſerá 3 + 3 (S — 3), ou 3S — 6.

Portanto ſerão neceſſarios 3S — 7 condições para que dois polyedros que tem hum igual numero S de angulos solidos sejão semelhantes entre si.

NOTA IX.

Sobre os polyedros regulares. (Veja-se o appendice ao livro VII.).

Na prop. II. daquelle appendice nos empenhámos em demonstrar a existencia dos cinco polyedros regulares, quer dizer, a possibilidade de arranjar hum certo numero de planos iguaes de maneira que daqui resulte hum solido uniforme em toda a sua extensão. Pareceo-nos que em outras obras se suppoem existente este arranjamento, sem o provar sufficientemente, ou não se demonstra, como fez Euclides, senão por figuras complicadas e difficeis de entender.

O problema de determinar a inclinação de duas faces adjacentes do polyedro e o de determinar os raios das esferas inscrita e circunscrita, se reduzem nos problemas III. e IV. a construcções muito simplices: mas não será inutil applicar a estes mesmos problemas o calculo trigonometrico, que além disso fornecerá novas proposições.

Sejão a, b, c, os tres angulos planos que compoem o angulo solido O (fig. 222.), e seja proposto achar a inclinação dos planos em que estão os angulos a e b; descreva-se do centro O o triangulo esferico ABC, no qual se conhecerão os tres lados $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, e procure-se o angulo C comprehendido entre os lados a e b. Ora, pelas formulas conhecidas, temos $\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$.

Esta formula, applicada aos cinco polyedros, vai mostrar-nos a inclinação de duas faces adjacentes em cada hum destes solidos.

No tetraedro, os tres angulos planos que compoem o angulo solido S, (fig. 243.) são angulos de triangulos equilateros; seja pois a semi-circumferencia $= \varpi$, teremos $a = b = c = \frac{1}{3}\varpi$; logo

$$\cos C = \frac{\cos a - \cos^2 a}{\text{ſen}^2 a} = \frac{\cos a(1-\cos a)}{1-\cos^2 a} = \frac{\cos a}{1+\cos a};$$

mas ſabemos que $\cos\frac{1}{3}\varpi = \frac{1}{2}$; logo $\cos C = \frac{1}{3}$.

No hexaedro, ou cubo (fig. 244.), os tres angulos planos que fórmão o angulo ſolido A, são angulos rectos; por tanto $a = b = c = \frac{1}{2}\varpi$, e $\cos a = 0$; logo $\cos C = 0$. Logo o angulo das duas faces adjacentes he recto.

No octaedro, (fig. 245.) ſe fizermos $a = \text{DAS} = \frac{1}{3}\varpi$, $b = \text{DAT} = \frac{1}{3}\varpi$; $c = \text{TAS} = \frac{1}{2}\varpi$, teremos

$$\cos C = \frac{\cos\frac{1}{2}\varpi - \cos^2\frac{1}{3}\varpi}{\text{ſen}^2\frac{1}{3}\varpi}.$$

Ora $\cos\frac{1}{2}\varpi = 0$; $\cos\frac{1}{3}\varpi = \frac{1}{2}$, $\text{ſen}\frac{1}{3}\varpi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$;

logo $\cos C = -\frac{1}{3}$. Donde ſe vê que a inclinação das faces do octaedro e a inclinação das faces do tetraedro são ſupplementos hum do outro.

No dodecaedro (fig. 246.) hum angulo ſolido he formado de tres angulos planos iguaes, cada hum, ao angulo de hum pentagono regular; aſſim, fazendo $a = b = c = \frac{3}{5}\varpi$, teremos $\cos C = \frac{\cos a}{1+\cos a}$

mas $\cos \frac{3}{5} \varpi = - \text{ſen} \frac{1}{10} \varpi = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$, logo

$\cos C = \frac{1 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} = - \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\text{ſen } C = \frac{2}{\sqrt{5}}$, e tang C $= -2$.

No icoſaedro (fig. 247.), devemos fazer $c = C'B'D' = \frac{3}{5} \varpi$, $a = b = C'B'A' = \frac{1}{3} \varpi$, e teremos

$$\cos C = \frac{\cos \frac{3}{5} \varpi - \cos^2 \frac{1}{3} \varpi}{\text{ſen}^2 \frac{1}{3} \varpi} = \frac{\frac{1}{4}(1 - \sqrt{5}) - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{-\sqrt{5}}{3}$$

; logo $\text{ſen } C = \frac{2}{3}$. Taes são as expreſsões ſimpliciſſimas pelas quaes ſe determina a inclinação de duas faces nos cinco polyedros regulares. Mas advertiremos que as poderiamos comprehender debaixo de huma ſó e a meſma formula.

Com effeito, ſeja n o numero de lados de cada face, m o numero de angulos planos que ſe reunem em cada angulo ſolido; ſe do centro O (fig. 248.), e com o raio $= 1$, deſcrevermos huma ſuperficie esferica que encontre em p, q, r, as linhas OA, OC, OD, teremos hum triangulo esferico pqr, no qual ſe conhece o angulo recto r, o angulo $p = \frac{\varpi}{m}$, e o angulo $q = \frac{\varpi}{n}$; portanto teremos, pelas formulas conhecidas, $\cos qr = \frac{\cos p}{\text{ſen } q}$. Mas $\cos qr = \cos COD = \text{ſen } CDO = \text{ſen } \frac{1}{2} C$, notando C o angulo CDE; logo $\text{ſen}\,\frac{1}{2}\,C = \dfrac{\cos\frac{\varpi}{m}}{\text{ſen}\,\frac{\varpi}{n}}$.

Formula geral, que, applicada ſucceſſivamente aos cinco polyedros, daria os meſmos valores de cos C ou de $1 - 2\,\text{ſen}^2\,\frac{1}{2}\,C$ que achamos por outro caminho; para iſto, he neceſſario ſubſtituir, em cada caſo, os valores de m e n, a ſaber

Tetraedro,	Hexaedro,	Octaedro,	Dodecaedro,	Icoſaedro.
$m = 3$,	3,	4,	3,	5.
$n = 3$,	4,	3,	5,	3.

O meſmo triangulo esferico pqr, do qual deduzimos a inclinação de duas faces adjacentes, dá $\cos pq = \cot p \cot q$, ou $\dfrac{CO}{OA} = \cot\dfrac{\varpi}{m}\cot\dfrac{\varpi}{n}$. Logo, ſe chamarmos R o raio da esfera circunſcrita ao polyedro, e r o raio da esfera inſcrita no meſmo polyedro, teremos $\dfrac{R}{r} = \text{tang}\,\dfrac{\varpi}{m}\,\text{tang}\,\dfrac{\varpi}{n}$; além diſto, fazendo o lado AB $= a$, temos $CA = \dfrac{\frac{1}{2}a}{\text{ſen}\,\frac{\varpi}{n}}$; e por conſequencia $R^2 = r^2 + \dfrac{\frac{1}{4}a^2}{\text{ſen}^2\,\frac{\varpi}{n}}$. Eſtas duas equações darão para cada polyedro os valores dos raios R e r das esferas circunſcrita e inſcrita. Temos tambem, ſuppondo C conhecido, $r = \frac{1}{2} a \cot \frac{\varpi}{n} \tang \frac{1}{2} C$, e $R = \frac{1}{2} a \tang \frac{\varpi}{m} \tang \frac{1}{2} C$.

No dodecaedro e icoſaedro, ſe vê que a razão $\frac{R}{r}$ tem o meſmo valor $\tang \frac{\varpi}{3} \tang \frac{\varpi}{5}$. Logo, ſe R for o meſmo para ambos, r ſerá tambem o meſmo; quer dizer que, ſe eſtes dois ſolidos eſtiverem inſcritos na meſma esfera, tambem eſtarão circunſcritos á meſma esfera, e *vice verſa*. A meſma propriedade tem lugar entre o hexaedro e o octaedro, porque o valor de $\frac{R}{r}$ he, para ambos, $\tang \frac{\varpi}{3} \tang \frac{\varpi}{4}$.

Notemos que os polyedros regulares não são os unicos ſolidos que são comprehendidos debaixo de polygonos regulares iguaes; porque, ſe encoſtarmos por huma face commum dois tetraedros regulares iguaes, daqui reſultará hum ſolido comprehendido debaixo de ſeis triangulos iguaes e equilateros. Poderiamos tambem formar outro ſolido com dez triangulos iguaes e equilateros; mas os polyedros regulares são os unicos que tem ao meſmo tempo os angulos ſolidos iguaes.

NOTA X.

Sobre a área do triangulo esferico.

Seja 1 o raio da esfera, ϖ a ſemi-circumferencia de hum circulo maximo; ſejão a, b, c, os tres lados de hum triangulo esferico; A, B, C, os arcos de circulo maximo que medem os angulos oppoſtos. Seja $A + B + C - \varpi = S$; e, ſegundo o que demonſtrámos no texto (23, 7.), a área do triangulo esferico será igual ao arco S multiplicado pelo raio, e por tanto será representado por S. Ora, entre as analogias, chamadas de *Néper*, se acha esta:

$$\operatorname{tang}\frac{A+B}{2} : \cot\frac{C}{2} :: \cos\frac{a-b}{2} : \cos\frac{a+b}{2};$$

tirando daqui o valor de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)$, deduziremos facilmente o de $\operatorname{tang}(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C) = -\cot\frac{1}{2}S$: deste modo teremos

$$\cot\tfrac{1}{2}S = \frac{\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b+\cos C}{\operatorname{sen} C},$$

fórmula muito simples que póde servir para calcular a área de hum triangulo esferico quando forem conhecidos dois lados a, b, e o angulo comprehendido C. Tambem se podem daqui deduzir muitas consequencias notaveis.

1.° Se o angulo C for constante, bem como o producto $\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}$, a área do triangulo esferico representado por S, virá a ser constante. Logo dois triangulos CAB, CDE (fig. 16.), que tem hum angulo igual C, serão equivalentes, se tivermos $\operatorname{tang}\frac{1}{2}CA : \operatorname{tang}\frac{1}{2}CD :: \operatorname{tang}\frac{1}{2}CE : \operatorname{tang}\frac{1}{2}CB$, quer dizer, se as tangentes das metades dos lados que comprehendem o angulo igual, forem reciprocamente proporcionaes.

2.° Para fazer sobre o lado dado CD e com o mesmo angulo C, hum triangulo CDE equivalente ao triangulo dado CAB, se deve determinar CE pela proporção

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}CD : \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}CA :: \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}CB : \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}CE.$$

3.° Para fazer com o angulo do vertice C hum triangulo isosceles CDE equivalente ao triangulo dado CAB, tome-se $\operatorname{tang}\frac{1}{2}CD$, ou $\operatorname{tang}\frac{1}{2}CE$, meia proporcional entre $\operatorname{tang}\frac{1}{2}CA$ e $\operatorname{tang}\frac{1}{2}CB$.

4.° A mesma fórmula $\cot \frac{1}{2} S = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b + \cos C}{\operatorname{sen} C}$

póde servir para demonstrar de hum modo muito simples a proposição XXVI do livro VII, a saber, que de todos os triangulos esfericos formados com dois lados dados a e b, o maior he aquelle no qual o angulo C comprehendido pelos lados dados for igual á somma dos outros dois angulos A e B.

Com o raio (fig. 18.) $OZ = 1$ descreva-se a semi-circumferencia VMZ, faça-se o arco $ZX = C$, e da outra parte do centro tome-se $OP = \cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b$; emfim ajunte-se PX e abaixe-se XY perpendicular sobre PZ.

No triangulo rectangulo PXY temos $\cot P = \frac{PY}{XY} = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b + \cos C}{\operatorname{sen} C}$; logo $P = \frac{1}{2} S$; logo a superficie S será hum *maximum*, se o angulo P o for. Ora, he evidente que, se tirarmos PM tangente á circumferencia, o angulo MPO será o *maximum* dos angulos P, e teremos então $MPO = MOZ - \frac{1}{2}\varpi$. Logo o triangulo esferico, formado com dois lados dados, será hum *maximum* quando tivermos $\frac{1}{2} S = C - \frac{1}{2}\varpi$, ou $C = A + B$, o que concorda com a proposição citada.

Vê-se ao mesmo tempo, por esta construcção, que o *maximum* não teria lugar se o ponto P estivesse dentro do circulo, quer dizer, se tivessemos $\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b < 1$. Condição da qual se tira successivamente $\cot \frac{1}{2} a < \operatorname{tang} \frac{1}{2} b$, $\operatorname{tang}(\frac{1}{2}\varpi - \frac{1}{2} a) < \operatorname{tang} \frac{1}{2} b$, $\frac{1}{2}\varpi - \frac{1}{2} a < \frac{1}{2} b$, e emfim $\varpi < a + b$, o que tambem concorda com o scholio da mesma proposição.

PROBLEMA I.

Achar a superficie de hum triangulo esferico por meio dos seus tres lados.

Para isto, na fórmula

$$\cot \tfrac{1}{2} S = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b + \cos C}{\operatorname{sen} C},$$

devemos substituir os valores de sen C e cos C expressos em a, b, c; ora, temos $\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$,

e $\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b = \frac{1 + \cos a}{\operatorname{sen} a} \cdot \frac{1 + \cos b}{\operatorname{sen} b}$; daqui resulta

$$\cos C + \cot \tfrac{1}{2} a \cot \tfrac{1}{2} b = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}.$$

Depois o valor de cos C dá

$$1 + \cos C = \frac{\cos c - \cos(a+b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{a+b+c}{2} \operatorname{sen} \frac{a+b-c}{2}}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

$$1 - \cos C = \frac{\cos(a-b) - \cos c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{a+c-b}{2} \operatorname{sen} \frac{b+c-a}{2}}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}.$$

Multiplicando estas duas quantidades entre si, e extrahindo a raiz do producto, teremos

$$\operatorname{sen} C = \frac{2\sqrt{\left[\operatorname{sen} \frac{a+b+c}{2} \operatorname{sen} \frac{a+b-c}{2} \operatorname{sen} \frac{a+c-b}{2} \operatorname{sen} \frac{b+c-a}{2}\right]}}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

Logo finalmente

$$\cot \tfrac{1}{2} S = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{2\sqrt{\left[\operatorname{sen} \frac{a+b+c}{2} \operatorname{sen} \frac{a+b-c}{2} \operatorname{sen} \frac{a+c-b}{2} \operatorname{sen} \frac{b+c-a}{2}\right]}}.$$

Esta fórmula resolve o problema proposto, mas podemos alcançar hum resultado ainda mais simples.

Para isto, voltemos á fórmula

$$\cot\tfrac{1}{2}S = \frac{\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b + \cos C}{\operatorname{sen} C},$$

daqui tiraremos primeiro $1 + \cot^2\frac{1}{2}S$, ou

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}S} = \frac{\cot^2\frac{1}{2}a\cot^2\frac{1}{2}b + 2\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b\cos C + 1}{\operatorname{sen}^2 C}.$$

Ora, o valor de $\cos C$ dá $2\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b\cos C$ $= \dfrac{\cos c - \cos a\cos b}{2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b}$; pondo, no numerador, em vez de $\cos c$, $\cos a$, $\cos b$, os seus valores $1-2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}c$, $1-2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a$, $1-2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b$, e reduzindo, teremos

$$2\cot\tfrac{1}{2}a\cot\tfrac{1}{2}b\cos C = \frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a + \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}c}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b} - 2.$$

Temos tambem $\cot^2\frac{1}{2}a\cot^2\frac{1}{2}b = \dfrac{1-\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a}$.

$\dfrac{1-\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b} = \dfrac{1-\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b} + 1$. Logo, substituindo estes valores, teremos $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}S}$

$= \dfrac{1-\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}c}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b\operatorname{sen}^2 C}$, o que dá . . .

$\operatorname{sen}\frac{1}{2}S = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\operatorname{sen} C}{\cos\frac{1}{2}c}$, e, pondo o valor de $\operatorname{sen} C$, temos

$$\text{fen}\,\tfrac{1}{2}\,S = \frac{\sqrt{\left[\text{fen}\frac{a+b+c}{2}\,\text{fen}\frac{a+b-c}{2}\,\text{fen}\frac{a+c-b}{2}\,\text{fen}\frac{b+c-a}{2}\right]}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

Fórmula cómmoda para o calculo logarithmico.

Se multiplicarmos efte valor pelo de $\cot\frac{1}{2}S$, daqui refultará

$$\cot\tfrac{1}{2}S = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

Nova fórmula que tem a vantagem de fer compofta de termos racionaes.

Daqui fe tira tambem $\dfrac{1-\cos\frac{1}{2}S}{\text{fen}\frac{1}{2}S}$, ou

$$\text{tang}\tfrac{1}{4}S = \frac{1-\cos^2\frac{1}{2}a-\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}c+2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\sqrt{\left(\text{fen}\frac{a+b+c}{2}\,\text{fen}\frac{a+b-c}{2}\,\text{fen}\frac{a+c-b}{2}\,\text{fen}\frac{b+c-a}{2}\right)}}.$$

Ora, o numerador defta exprefsão póde tomar a fórma

$(1-\cos^2\frac{1}{2}a)(1-\cos^2\frac{1}{2}b)-(\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b-\cos\frac{1}{2}c)^2$, a qual fe decompõe em dois factores, a faber:

$\text{fen}\,\frac{1}{2}a\,\text{fen}\,\frac{1}{2}b+\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b-\cos\frac{1}{2}c$, e

$\text{fen}\,\frac{1}{2}a\,\text{fen}\,\frac{1}{2}b-\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\cos\frac{1}{2}c$,

eftes fe reduzem finalmente, o primeiro a

$\cos(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b)-\cos\frac{1}{2}c = 2\,\text{fen}\frac{a+c-b}{4}.\,\text{fen}\frac{b+c-a}{4}$, o

fegundo a $\cos\frac{1}{2}c-\cos(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b) = 2\,\text{fen}\frac{a+b+c}{4}.$

$\text{fen}\frac{a+b-c}{4}$. Logo

$$\text{tang}\tfrac{1}{4}S=\frac{4\,\text{ſen}\frac{a+b+c}{4}\,\text{ſen}\frac{a+b-c}{4}\,\text{ſen}\frac{a+c-b}{4}\,\text{ſen}\frac{b+c-a}{4}}{\sqrt{\left[\text{ſen}\frac{a+b+c}{2}\,\text{ſen}\frac{a+b-c}{2}\,\text{ſen}\frac{a+c-b}{2}\,\text{ſen}\frac{b+c-a}{2}\right]}}.$$

Mas temos $\frac{\text{ſen}\frac{1}{2}p}{\sqrt{\text{ſen}\,p}}=\sqrt{\left\{\frac{\text{ſen}^2\frac{1}{2}p}{2\,\text{ſen}\frac{1}{2}p\,\cos\frac{1}{2}p}\right\}}=$ $\sqrt{(\frac{1}{2}\text{tang}\,\frac{1}{2}p)}$; logo finalmente

$$\text{tang}\tfrac{1}{4}S=\sqrt{\left(\text{tang}\frac{a+b+c}{4}\text{tang}\frac{a+b-c}{4}\text{tang}\frac{a+c-b}{4}\text{tang}\frac{b+c-a}{4}\right)}.$$

Eſta elegantiſſima fórmula ſe deve a Simão L'Huillier.

PROBLEMA II.

Sendo dados os tres lados BC $=$ a, AC $=$ b, AC $=$ c, (fig. 19.) *determinar a poſição do ponto* I, *pólo do circulo circunſcrito ao triangulo* ABC.

Seja o angulo ACI $=x$, e o arco AI $=$ CI $=$ BI $=\Phi$; nos triangulos CAI, CBI, teremos pelas formulas conhecidas $\cos x=\frac{\cos\Phi-\cos b\cos\Phi}{\text{ſen}\,b\,\text{ſen}\,\Phi}=$ $\frac{1-\cos b}{\text{ſen}\,b}\cot\Phi=\frac{\text{ſen}\,b}{1+\cos b}\cot\Phi$, $\cos(C-x)=$ $\frac{1-\cos a}{\text{ſen}\,a}\cot\Phi$. Logo $\frac{\cos(C-x)}{\cos x}$, ou $\cos C$ $+\,\text{ſen}\,C\,\text{tang}\,x=\frac{(1+\cos b)(1-\cos a)}{\text{ſen}\,a\,\text{ſen}\,b}$; ſubſtituindo neſta equação os valores de $\cos C$ e $\text{ſen}\,C$ expreſſos em a, b, c, e fazendo, por brevidade, $M=\sqrt{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c)}$, daqui deduziremos

$\tang x = \frac{1 + \cos b - \cos c - \cos a}{M}$, formula que determina o angulo ACI. Advirta-se que os triangulos isosceles ACI, ABI, BCI, dão ACI $= \frac{1}{2}$ (C + A — B); do mesmo modo BCI $= \frac{1}{2}$ (B + C — A), BAI $= \frac{1}{2}$ (A + B — C). Daqui resultão estas notaveis formulas:

$$\tang \tfrac{1}{2}(A + C - B) = \frac{1 + \cos b - \cos a - \cos c}{M},$$

$$\tang \tfrac{1}{2}(B + C - A) = \frac{1 + \cos a - \cos b - \cos c}{M},$$

$$\tang \tfrac{1}{2}(A + B - C) = \frac{1 + \cos c - \cos a - \cos b}{M},$$

ás quaes podemos ajuntar a que dá $\cot \frac{1}{2}$ S, e que póde ter esta fórma

$$\tang \tfrac{1}{2}(A + B + C) = \frac{-1 - \cos a - \cos b - \cos c}{M}.$$

O valor de tang x, que achámos ha pouco, dá $1 + \tang^2 x$ ou $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2(1 + \cos b)(1 - \cos c)(1 - \cos a)}{M^2} =$

$$\frac{16 \cos^2 \frac{1}{2} b \sen^2 \frac{1}{2} c \sen^2 \frac{1}{2} a}{M^2};$$

logo $\frac{1}{\cos x} = \frac{4 \cos \frac{1}{2} b \sen \frac{1}{2} c \sen \frac{1}{2} a}{M}$. Mas da equação $\cos x = \frac{1 - \cos b}{\sen b} \cot \Phi = \tang \frac{1}{2} b \cot \Phi$, se tira $\tang \Phi = \frac{\tang \frac{1}{2} b}{\cos x}$; logo $\tang \Phi = \frac{\sen \frac{1}{2} a \sen \frac{1}{2} b \sen \frac{1}{2} c}{M}$

$$= \frac{2\,\text{fen}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{fen}\,\tfrac{1}{2}b\,\text{fen}\,\tfrac{1}{2}c}{\sqrt{\left(\text{fen}\,\frac{a+b+c}{2}\,\text{fen}\,\frac{a+b-c}{2}\,\text{fen}\,\frac{a+c-b}{2}\,\text{fen}\,\frac{b+c-a}{2}\right)}}.$$

PROBLEMA III.

Determinar fobre a fuperficie da esfera a linha fobre a qual eftão fituados todos os vertices dos triangulos da mefma bafe e da mefma fuperficie.

Seja ABC (fig. 17.) hum dos triangulos esfericos cuja bafe commum he AB $= c$, e a fuperficie dada A + B + C $- \varpi =$ S. Seja IPK huma perpendicular indefinida levantada fobre o meio de AB; tomando IP igual ao *quadrante*, P ferá o pólo do arco AB; e o arco PCD tirado pelos pontos P, C, ferá perpendicular fobre AB. Seja ID $= p$, CD $= q$; os triangulos rectangulos ACD, BCD, nos quaes temos AC $= b$, BC $= a$, AD $= p + \tfrac{1}{2}c$, BD $= p - \tfrac{1}{2}c$, darão $\cos a = \cos q \cos (p - \tfrac{1}{2}c)$, $\cos b = \cos q \cos (p + \tfrac{1}{2}c)$. Mas achámos acima

$$\cot \tfrac{1}{2}\,\text{S} = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{\text{fen}\,a\,\text{fen}\,b\,\text{fen}\,\text{C}};$$

fubftituindo nefta formula os valores $\cos a + \cos b = 2 \cos q \cos p \cos \tfrac{1}{2}c$, $1 - \cos c = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2}c$, $\text{fen}\,b\,\text{fen}\,\text{C} = \text{fen}\,c\,\text{fen}\,\text{B} = 2\,\text{fen}\,\tfrac{1}{2}c \cos \tfrac{1}{2}c\,\text{fen}\,\text{B}$; teremos

$$\cot \tfrac{1}{2}\,\text{S} = \frac{\cos \tfrac{1}{2}c + \cos p \cos q}{\text{fen}\,a\,\text{fen}\,\tfrac{1}{2}c\,\text{fen}\,\text{B}}.$$

Alem difto no triangulo rectangulo BCD, temos tambem fen a fen B $=$ fen q; logo $\cot \tfrac{1}{2}\,\text{S} = \frac{\cos\tfrac{1}{2}c + \cos p \cos q}{\text{fen}\,\tfrac{1}{2}c\,\text{fen}\,q}$, ou $\cos p \cos q = \cot \tfrac{1}{2}\,\text{S}\,\text{fen}\,\tfrac{1}{2}c\,\text{fen}\,q - \cos \tfrac{1}{2}c$; efta he a relação entre p e q, que deve determinar a linha ſobre a qual eſtão ſituados todos os pontos C.

Havendo prolongado IP huma quantidade $PK = x$, tire-ſe KC e ſeja $KC = y$; no triangulo PKC no qual temos $PC = \frac{1}{2}\varpi - q$ e o angulo $KPC = \varpi - p$, o lado KC ſe achará pela formula $\cos KC = \cos KPC \operatorname{ſen} PK \operatorname{ſen} PC + \cos PK \cos PC$, ou

$$\cos y = \operatorname{ſen} q \cos x - \operatorname{ſen} x \cos q \cos p;$$

na qual ſubſtituindo em lugar de $\cos q \cos p$ o ſeu valor $\cot \frac{1}{2} S \operatorname{ſen} \frac{1}{2} c \operatorname{ſen} q - \cos \frac{1}{2} c$, teremos

$$\cos y = \operatorname{ſen} x \cos \tfrac{1}{2} c + \operatorname{ſen} q (\cos x - \operatorname{ſen} x \cot \tfrac{1}{2} S \operatorname{ſen} \tfrac{1}{2} c).$$

Daqui ſe vê que ſe tomarmos $\cos x - \operatorname{ſen} x \cot \frac{1}{2} S \operatorname{ſen} \frac{1}{2} c = 0$, ou $\cot x = \cot \frac{1}{2} S \operatorname{ſen} \frac{1}{2} c$, teremos $\cos y = \operatorname{ſen} x \cos \frac{1}{2} c$, e aſſim o valor de y virá a ſer conſtante.

Logo, ſe depois de tirarmos o arco IP perpendicular ſobre o meio da baſe AB, tomarmos além do pólo a parte PK tal que $\cot PK = \cot \frac{1}{2} S \operatorname{ſen} \frac{1}{2} c$, todos os vertices dos triangulos que tem a meſma baſe c e a meſma ſuperficie S, eſtarão ſituados ſobre o circulo menor deſcrito do ponto K como pólo na diſtancia KC tal que $\cos KC = \operatorname{ſen} PK \cos \frac{1}{2} c$.

Eſte bello theorema ſe deve a *Lexell*. (Veja-ſe o tomo V, parte I. das *Nova Acta Petropolitana.*)

NOTA XI.

A'cérca da propoſição III, *livro* VII.

Eſta propoſição póde ſer demonſtrada mais rigoroſamente, reduzindo-a aos lemmas preliminares, da maneira ſeguinte.

Digo primeiro que a ſuperficie convexa terminada pelas areſtas AF, BG (fig. 252.), e pelos arcos AuB, FxG, não póde ſer menor que o rectangulo ABGF, parte correſpondente da ſuperficie do priſma inſcrito.

Com effeito, ſeja S a ſuperficie convexa de que ſe trata, e ſeja, ſe he poſſivel, o rectangulo ABGF ou $AB \times AF = S + M$, ſendo M huma quantídade poſitiva.

Prolongue-ſe a altura AF do priſma e do cylindro até huma diſtancia AF' igual a n vezes AF, ſendo n hum numero inteiro qualquer; ſe prolongarmos ao meſmo tempo o cylindro e o priſma, he claro que a ſuperficie convexa S' comprehendida entre as areſtas AF', BG' conterá n vezes a ſuperficie S, de ſorte que teremos $S' = nS$, e porque $n \times AF = AF'$, teremos $AB \times AF' = nS + nM = S' + nM$. Ora ſendo n hum numero inteiro arbitrario e M huma ſuperficie dada, podemos tomar n de maneira que ſeja nM maior que o dobro do ſegmento AuB, porque baſta para iſſo que ſe faça $n > \frac{2AuB}{M}$; logo então o rectangulo $AB \times AF'$ ou a ſuperficie plana $ABG'F'$ ſeria maior que a ſuperficie involvente, compoſta da ſuperficie convexa S' e de dois ſegmentos circulares iguaes AuB, $F'x'G'$. Ora, pelo contrario, a ſegunda ſuperficie he maior que a primeira, ſegundo o primeiro lemma preliminar; logo, 1.° não póde ſer $S < ABGF$.

Digo em ſegundo lugar que a meſma ſuperficie convexa S não póde ſer igual á do rectangulo ABGF. Porque ſupponhamos, ſe he poſſivel, que tomando $AE = AB$, a ſuperficie convexa AMK ſeja igual ao rectangulo AFKE; por hum ponto qualquer M do arco AME, tirem-ſe as cordas AM, ME, e levante-ſe MN perpendicular ſobre o plano da baſe. Os tres rectangulos AMNF, MEKN, AEKF, que tem a meſma altura, eſtão entre ſi como as ſuas baſes AM, ME, AE. Ora temos $AM + ME > AE$, logo a ſomma dos rectangulos AMNF, MEKN he maior que o rectangulo AFKE. Eſte he equivalente por hypotheſe á ſuperficie convexa AMK, compoſta das duas ſuperficies parciaes AN, MK. Logo a ſomma dos rectangulos AMNF, MEKN he maior que a fomma das fuperficies convexas correfpondentes AN, MK. Logo ferá neceffario que ao menos hum dos rectangulos AMNF, MEKN, feja maior que a fuperficie convexa correfpondente. Efta confequencia he contraria á primeira parte já demonftrada. Logo, 2.° a fuperficie convexa S não póde fer igual á do rectangulo correfpondente ABGF.

Daqui fe fegue que temos S > ABGF, e que affim a fuperficie convexa do cylindro he maior que a de qualquer prifma infcrito.

Por hum raciocinio abfolutamente femelhante, fe provará que a fuperficie convexa do cylindro he menor que a de qualquer prifma circunfcrito.

NOTA XII.

Sobre a igualdade e femelhança dos polyedros.

A' frente do livro XI. de Euclides fe achão as definições 9 e 10 concebidas defta maneira:

9. Dois folidos são femelhantes, quando são comprehendidos debaixo do mefmo numero de planos femelhantes cada hum a cada hum.

10. Dois folidos são iguaes e femelhantes, quando são comprehendidos debaixo do mefmo numero de planos iguaes e femelhantes cada hum a cada hum.

Sendo o objecto deftas definições hum dos pontos mais difficeis dos elementos de Geometria; nós o examinaremos com alguma miudeza, e difcutiremos ao mefmo tempo as obfervações que a efte refpeito fez Roberto Simfon na fua edição dos elementos, pagina 388 e feg.

Primeiro, notaremos com Roberto Simfon que a definição 10 não he propriamente huma definição, mas fim hum theorema que ha mifter demonftração; porque não he evidente que dois folidos fejão iguaes por iffo fómente que tem faces iguaes; e, fe efta propofição he verdadeira, cumpre demonftra-la, quer pela ſobreposição, quer de outra maneira. Depois, he claro que o vicio da definição 10 he commum á definição 9. Porque, ſe a definição 10 não for demonſtrada, crer-ſe-ha que exiſtem dois ſolidos desiguaes e diſſimilhantes que tem as faces iguaes; mas então, ſegundo a definição 9, hum terceiro ſolido que tiveſſe as faces ſemelhantes ás dos dois primeiros, ſeria ſemelhante a cada hum delles, e portanto ſeria ſemelhante a dois corpos de differente fórma; concluſão que implica contradição, ou pelo menos que não concorda com a idéa que ſe affecta naturalmente á palavra *ſemelhante*.

Muitas propoſições dos livros XI e XII de Euclides ſe fundão nas definições 9 e 10, entre outras a propoſição XXVIII, livro XI, da qual depende a medida dos priſmas e das pyramides. Parece por tanto que ſe podem criminar os elementos de Euclides de conterem hum grandiſſimo numero de propoſições que não eſtão rigoroſamente demonſtradas. Mas ha huma circunſtancia que ſerve para enfraquecer eſte crime, e que eu não devo ommittir.

As figuras de que Euclides demonſtra a igualdade ou a ſemelhança, fundando-ſe nas definições 9 e 10, são taes que os ſeus angulos ſolidos não unem mais de tres angulos planos: ora, ſe dois angulos ſolidos forem compoſtos de tres angulos planos iguaes cada hum a cada hum, eſtá demonſtrado muito claramente em muitos lugares de Euclides que eſſes angulos ſolidos são iguaes. Por outra parte, ſe dois polyedros tiverem as faces iguaes ou ſemelhantes cada huma a cada huma, os angulos ſolidos homologos serão compoſtos do meſmo numero de angulos planos iguaes, cada hum a cada hum. Logo, em quanto os angulos planos não forem mais de tres em cada angulo ſolido, he claro que os angulos ſolidos homologos são iguaes. Mas ſe as faces homologas forem iguaes e os angulos ſolidos homologos iguaes, já não ha dúvida que os ſolidos são iguaes; porque poderão ſer ſobrepoſtos, ou ao menos ſerá hum ſymmetrico do outro.

Por tanto he claro que o enunciado das definições 9 e 10 he verdadeiro e admiſſivel, ao menos no caſo dos angulos ſolidos triplos, que he o unico de que Euclides fez uſo. Deſta maneira deixa de ſer tão grave o crime da inexactidão que ſe poderia imputar a eſte author, ou aos ſeus commentadores, e ſómente recahe ſobre reſtricções e explicações que elle não deu.

Reſta examinar ſe o enunciado da definição 10, que he verdadeiro no caſo dos angulos ſolidos triplos, he verdadeiro em geral. Roberto Simſon affirma que não, e que ſe podem conſtruir dois ſolidos deſiguaes que fiquem comprehendidos debaixo do meſmo número de faces iguaes, cada huma a cada huma. ,, Imagine-,, ſe, diz eſte author, que a hum polyedro qualquer ſe ,, ajuntá huma pyramide, dando-lhe por baſe huma ,, das faces do polyedro; imagine-ſe tambem que em ,, vez de ajuntar a pyramide, ſe corta, formando no ,, polyedro huma cavidade igual á pyramide; haverá ,, deſta maneira dois novos ſolidos que terão faces ,, iguaes cada huma a cada huma; e entretanto eſ-,, tes dois ſolidos serão deſiguaes ,,.

Tal he o exemplo que allega Roberto Simſon para provar a ſua aſſerção; mas notaremos que hum dos ſolidos de que ſe trata contém angulos ſolidos reintrantes: ora, he mais que provavel que Euclides entendeu excluir os corpos irregulares que tem cavidades ou angulos ſolidos reintrantes, e que ſe limitou aos polyedros convexos. Admittindo eſta reſtricção, ſem a qual outras muitas propoſições não ſerião verdadeiras, o exemplo de Roberto Simſon nada conclue contra a definição, ou o theorema de Euclides; nós julgamos pelo contrario, depois de hum profundo exame, que o theorema he muito verdadeiro; mas não parece facil demonſtra-lo.

Como quer que ſeja, deſtas obſervações reſulta que as definições 9 e 10 de Euclides, não ſe podem conſervar taes quaes são. Roberto Simſon ſupprime a definição de ſolidos iguaes, que com effeito ſó deve ter lugar entre os theoremas; e define *sólidos semelhantes* áquelles que são comprehendidos debaixo do mesmo numero de planos semelhantes, e que tem os angulos solidos iguaes cada hum a cada hum. Esta definição he verdadeira, mas tem o inconveniente de conter muitas condições superfluas. Supprimindo a condição dos angulos solidos iguaes, cahiriamos no enunciado de Euclides que he defeituoso por suppôr a demonstração do theorema sobre os polyedros iguaes. Para evitarmos todo o embaraço, julgámos conveniente dividir a definição dos solidos semelhantes em duas partes: primeiro definimos as pyramides triangulares semelhantes, depois definimos *solidos semelhantes* áquelles que tem bases semelhantes, e cujos vertices homologos fóra das bases são determinados por pyramides triangulares semelhantes cada huma a cada huma.

Esta definição requer para as bases, suppondo-as triangulares, duas condições, e para cada vertice fóra das bases, tres condições; de sorte que se S for o numero dos angulos solidos de cada polyedro, a semelhança desses polyedros exigirá $2 + 3 (S-3)$ angulos iguaes em huma e outra parte, ou $3S - 7$ condições; e nenhuma destas condições he superflua ou comprehendida nas outras. Porque nós consideraremos aqui dois polyedros como tendo simplesmente o mesmo numero de vertices ou de angulos solidos; então são necessarias rigorosamente, e sem ommittir nenhuma, as $3S - 7$ condições para que os dois solidos sejão semelhantes; mas se primeiramente suppozessemos que são *da mesma especie* ambos, quer dizer, que tem igual numero de faces, e que essas faces comparadas cada huma a cada huma tem igual numero de lados, esta supposição abrangeria algumas condições no caso que houvesse faces de mais de tres lados, e essas condições diminuirião outras tantas no numero $3S - 7$, de sorte que, em vez de $3S - 7$ condições, bastarião $A - 1$; a este respeito veja-se a nota VIII. Isto mostra donde vem a difficuldade de estabelecer huma boa definição de solidos semelhantes; e he de se poderem considerar como da mesma especie, ou sómente como tendo hum igual numero de angulos solidos. Neste ultimo caso está removida toda a difficuldade, e as $3S - 7$ condições que a definição comprehende, se devem encher todas para que os solidos sejão semelhantes, e daqui se concluirá com mais forte razão que elles são da mesma especie. Em summa, sendo completa a nossa definição, nos deduzimos della como theorema a definição de Roberto Simson.

Fica portanto manifesto que se póde dispensar nos elementos o theorema ácêrca da igualdade dos polyedros; mas como este theorema he por si mesmo interessante, seria para desejar que se descobrisse huma demonstração geral.

F I M.

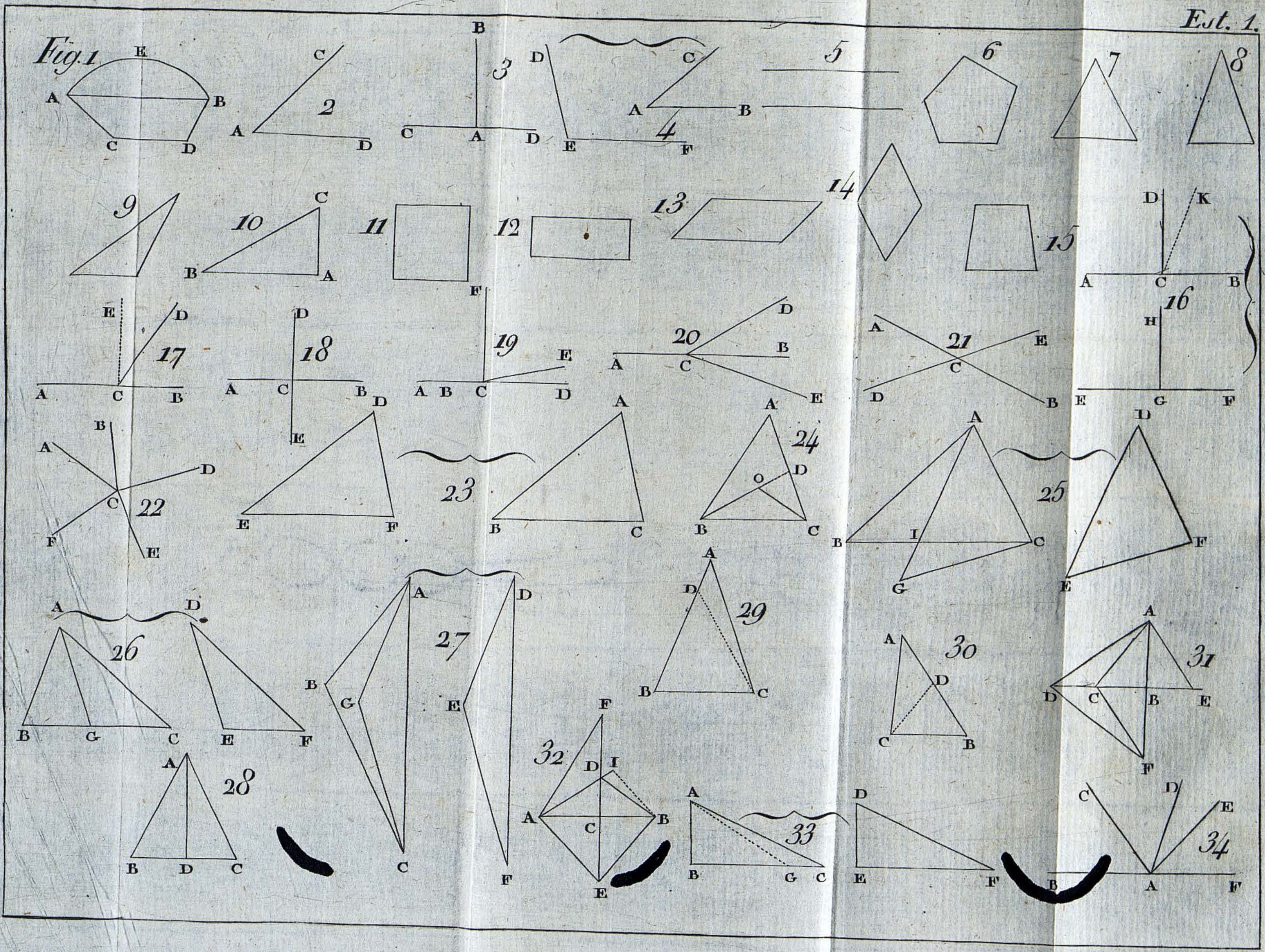
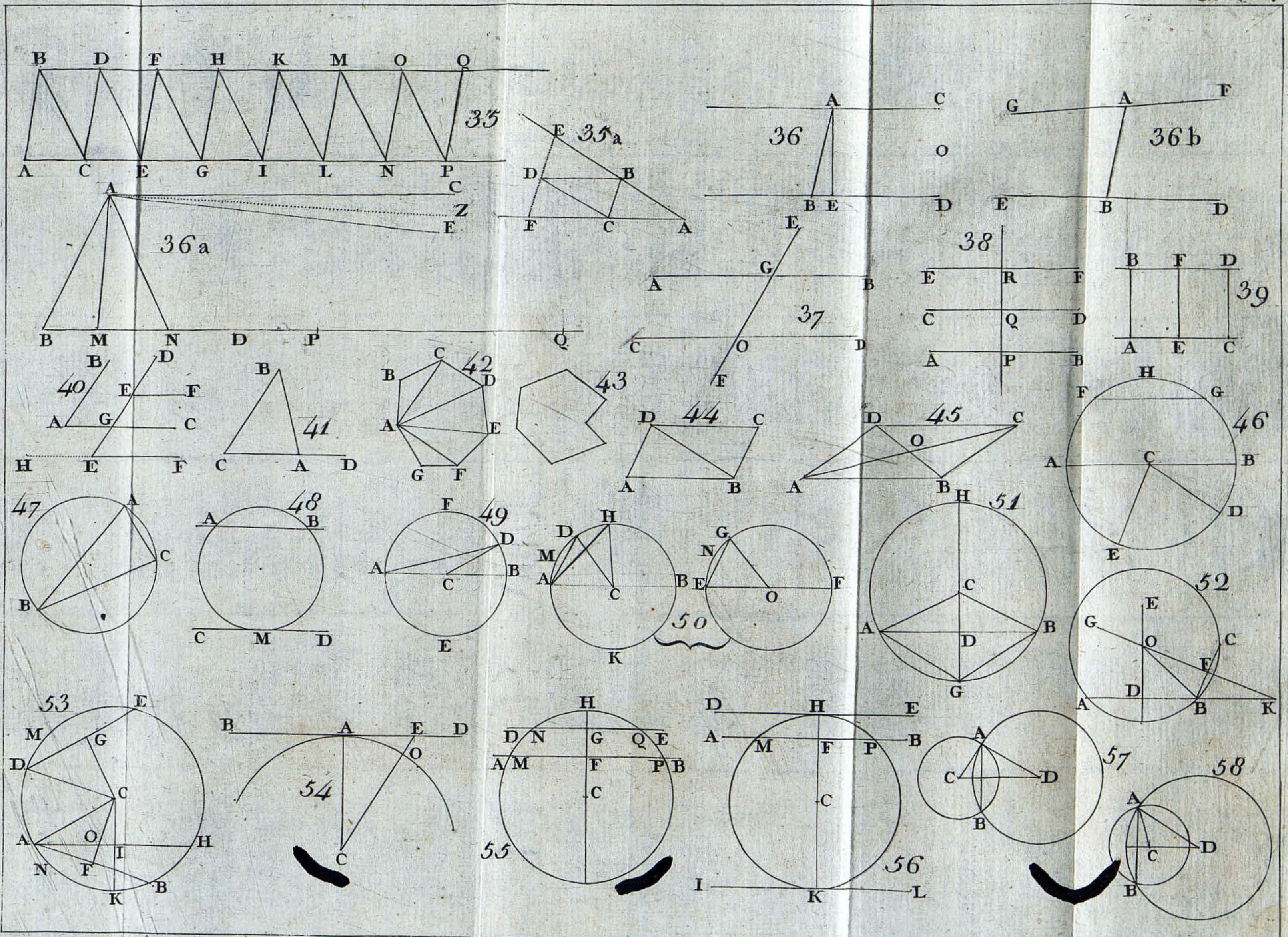
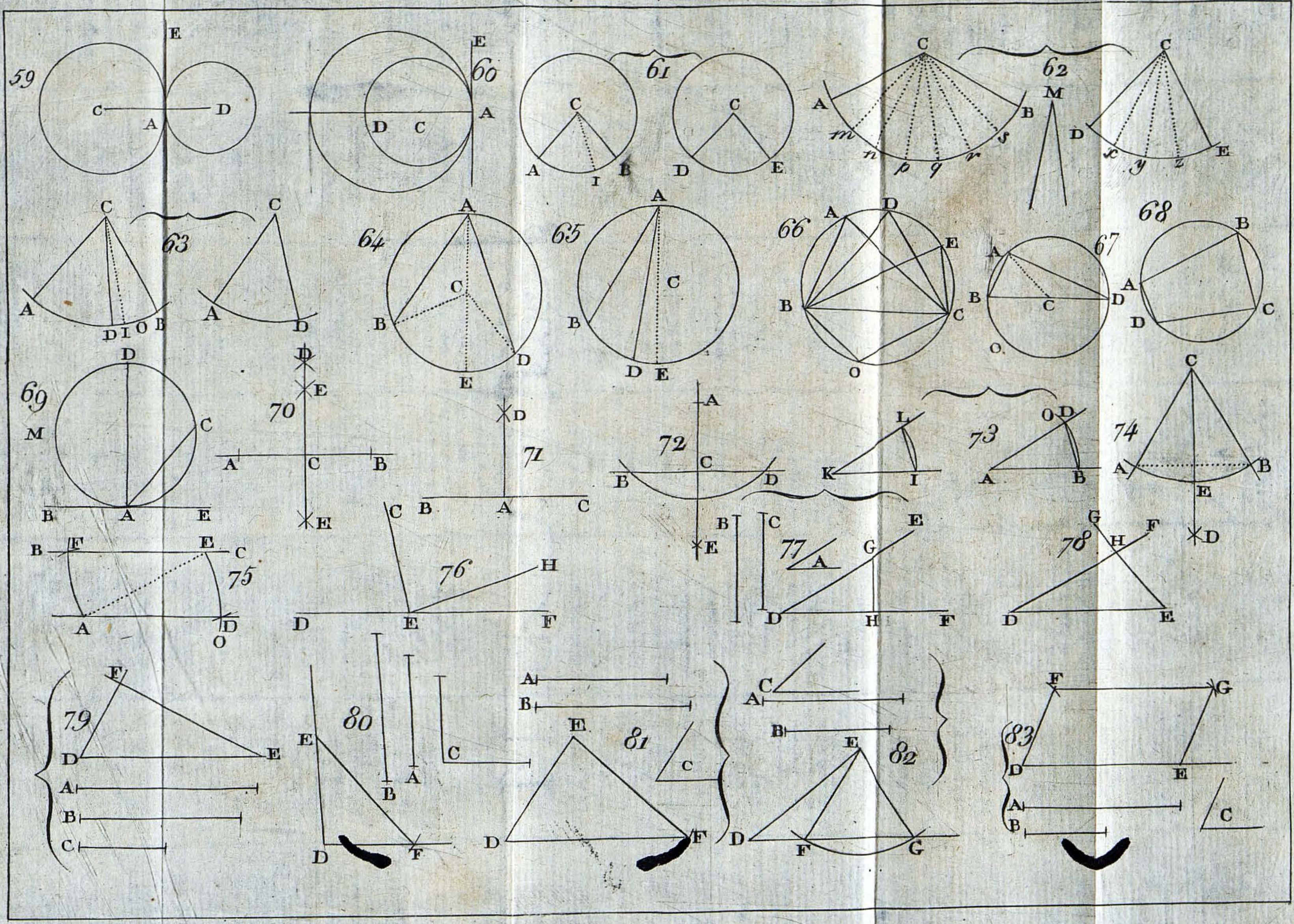


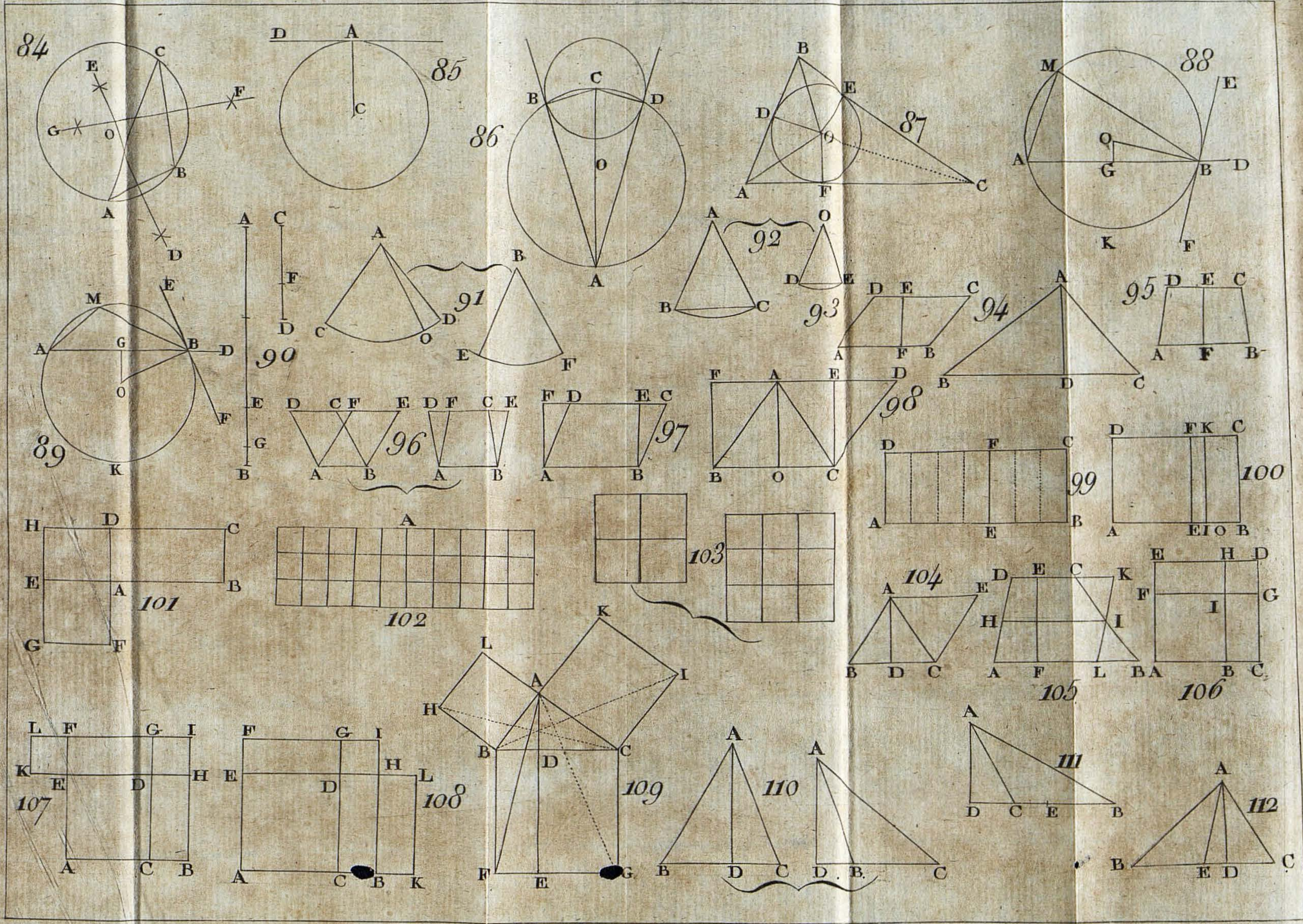
Fig. 1
E A B C D
2
C A D
3
B C A D
4
D C A B E F
5
6
7
8
9
10
C B A
11
12
13
14
15
16
D K A C B
H E G F
17
E D A C B
18
D A C B E
19
F E A B C D
20
D B A C E
21
A E C D B
22
B A D C F E
23
D E F A B C
24
A O D B C
25
A B I C G D F E
26
A D B G C E F
27
A D B G E C F
28
A B D C
29
A D B C
30
A D C B
31
A D C B E F
32
F D I A B C E
33
A B G C D E F
34
C D E B A F

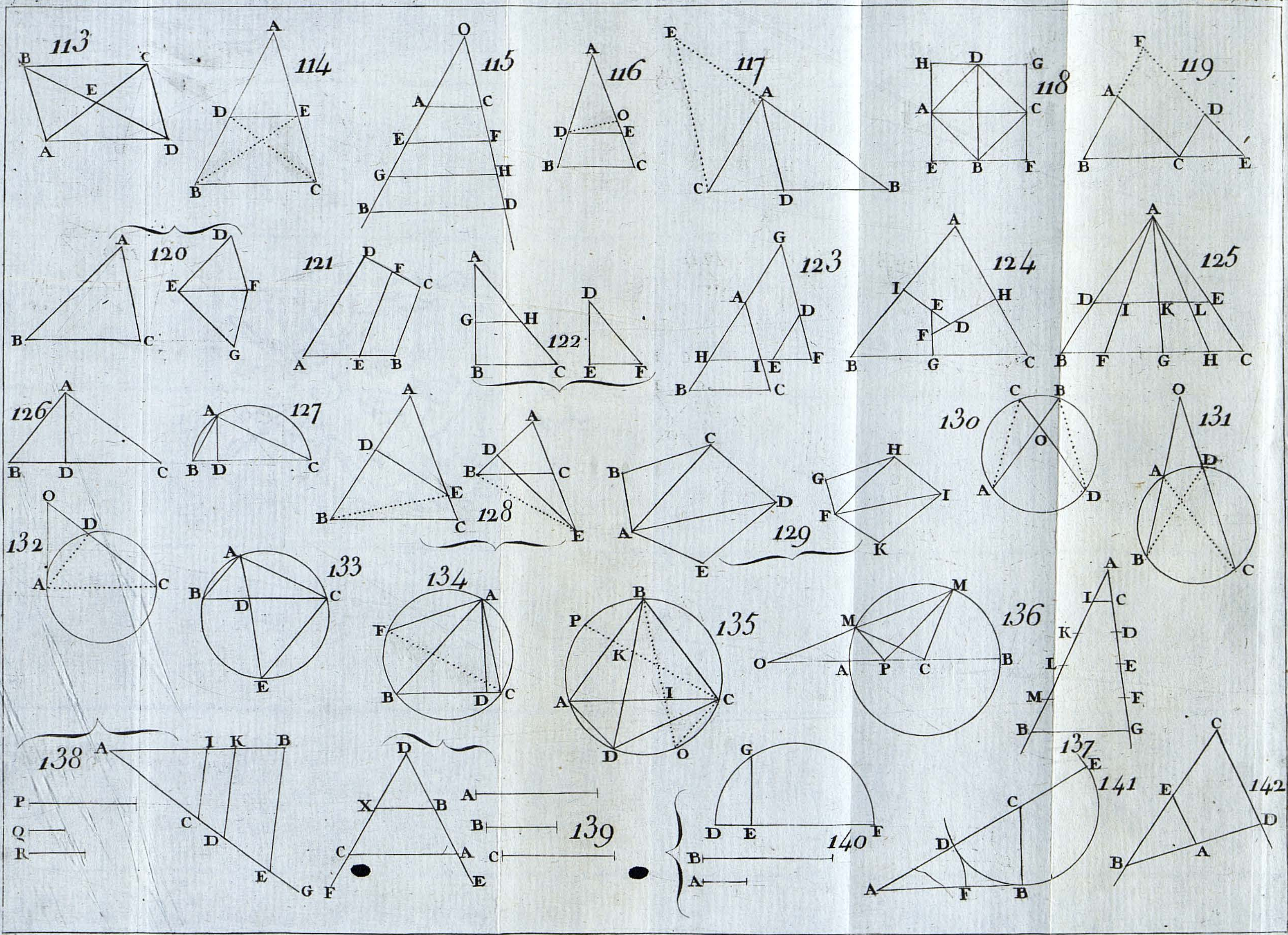
Est. 2.

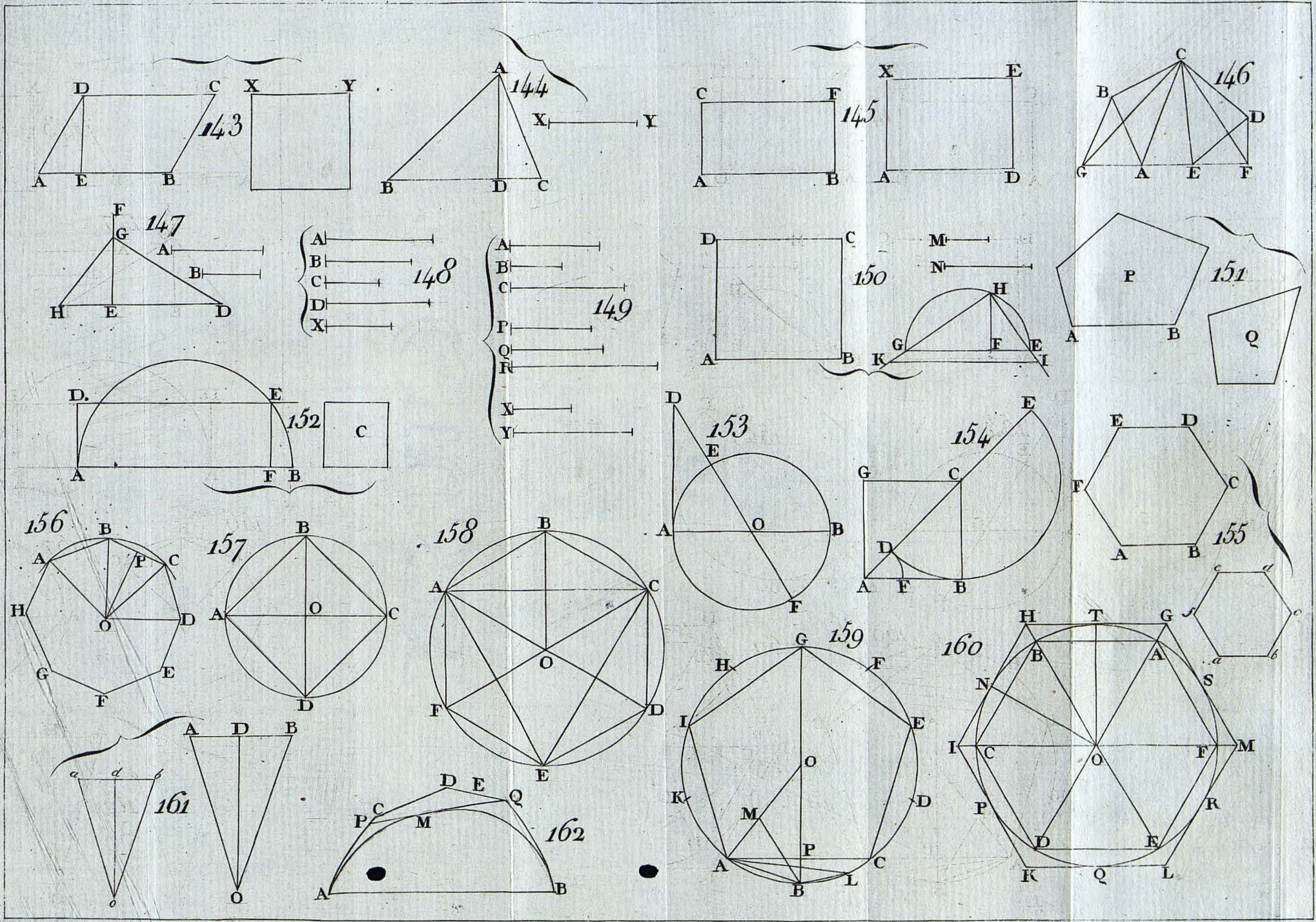

35
35 a
36
36 b
36 a
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58

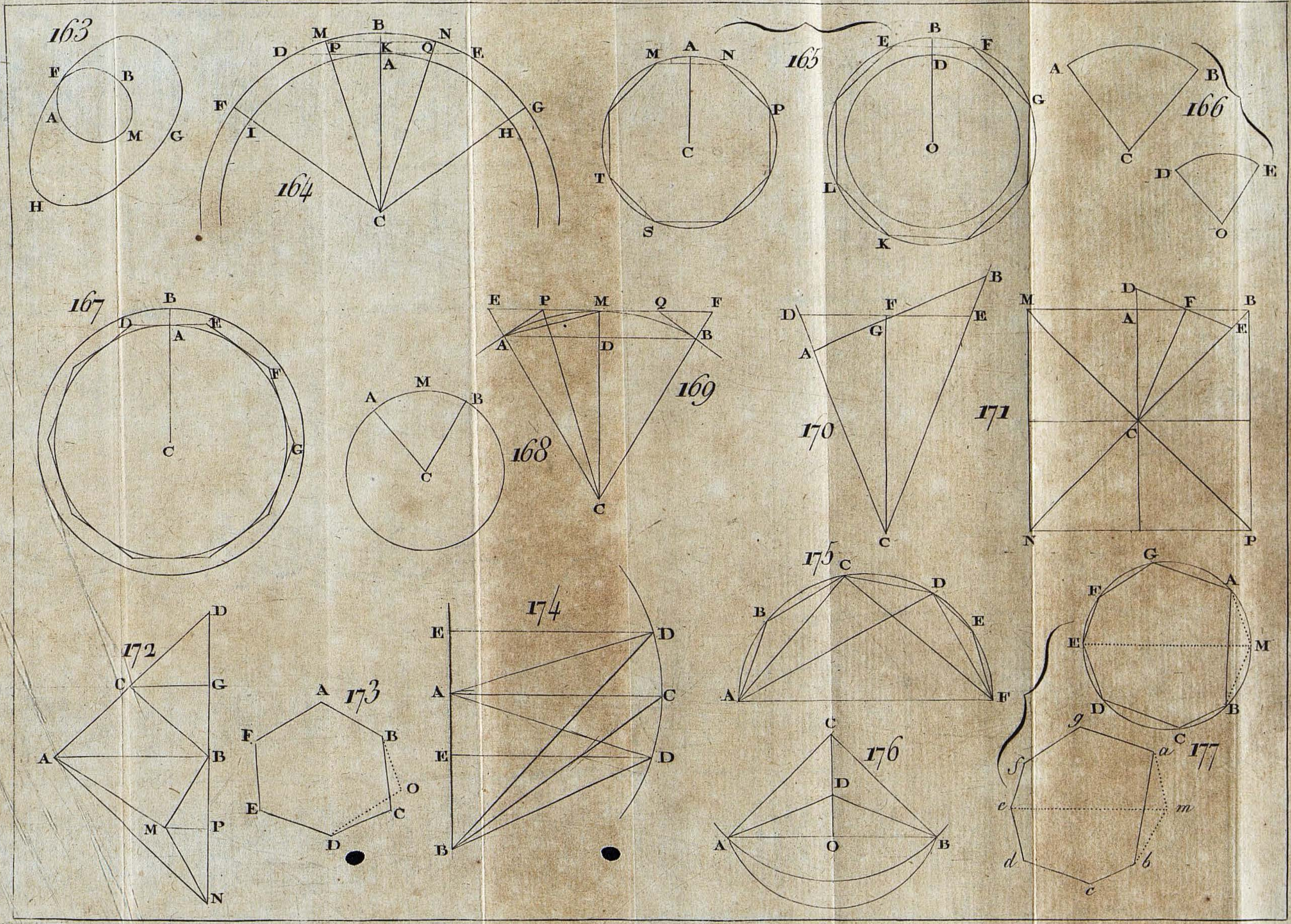
Est 3

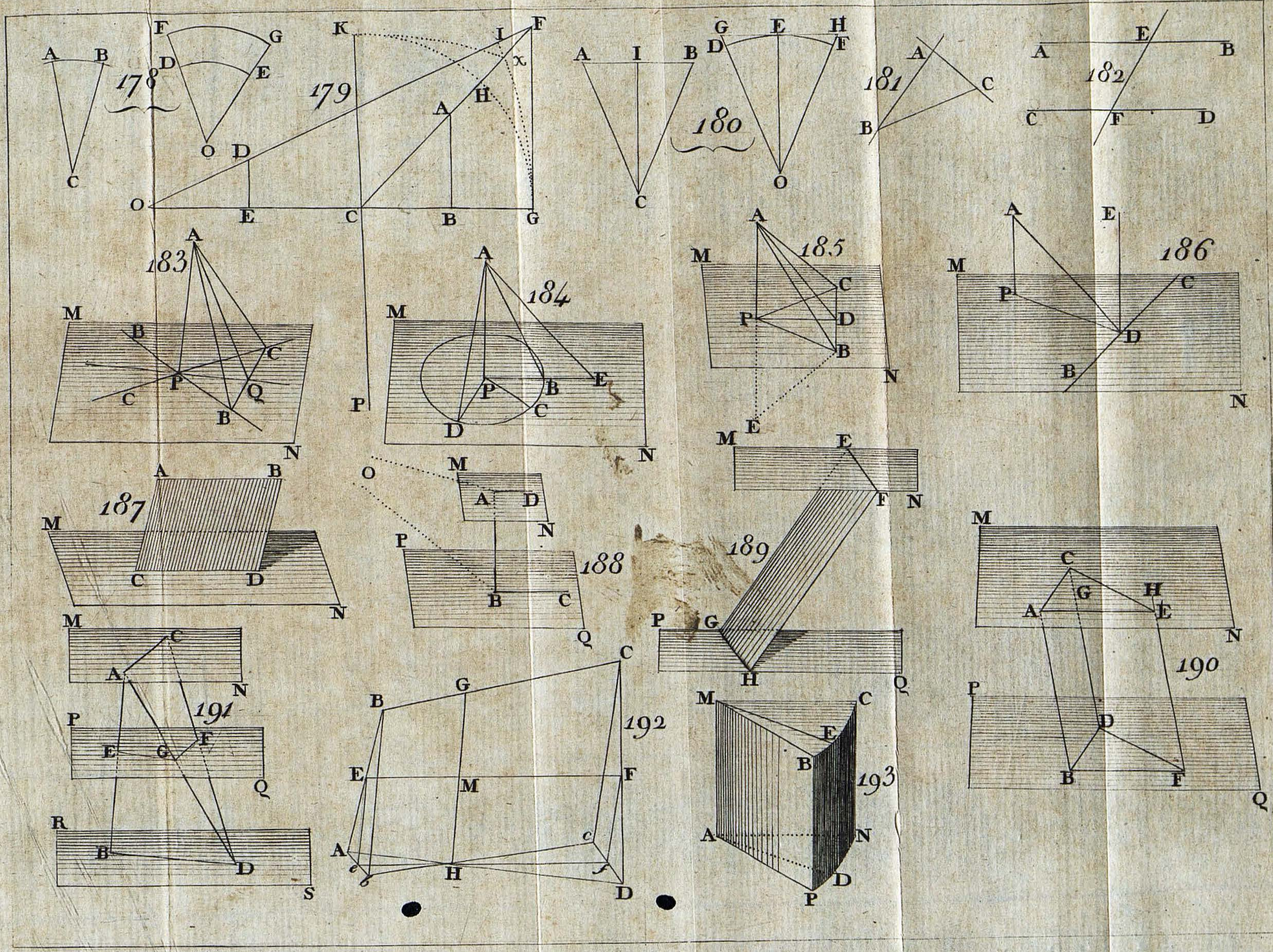

59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83

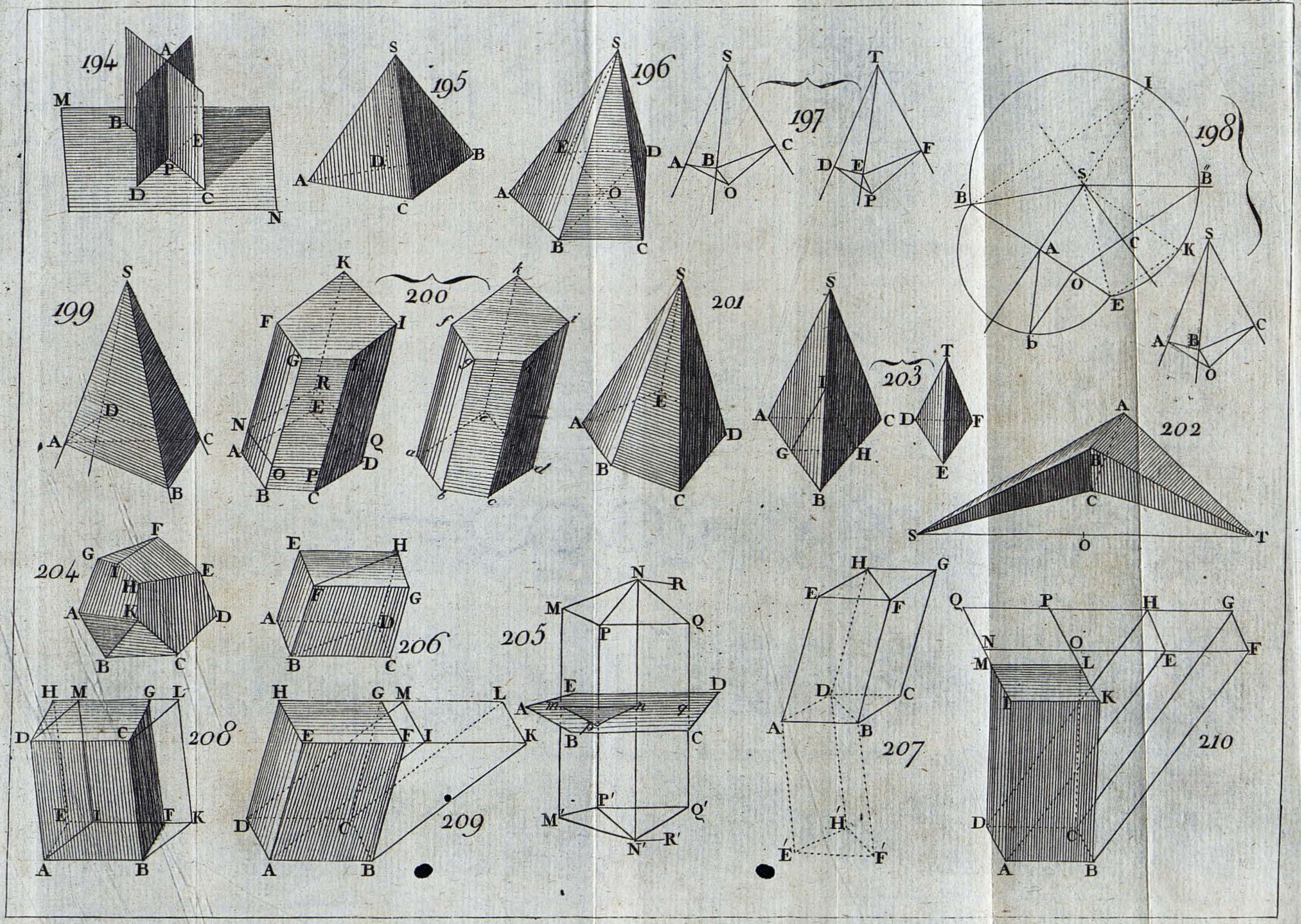

84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112

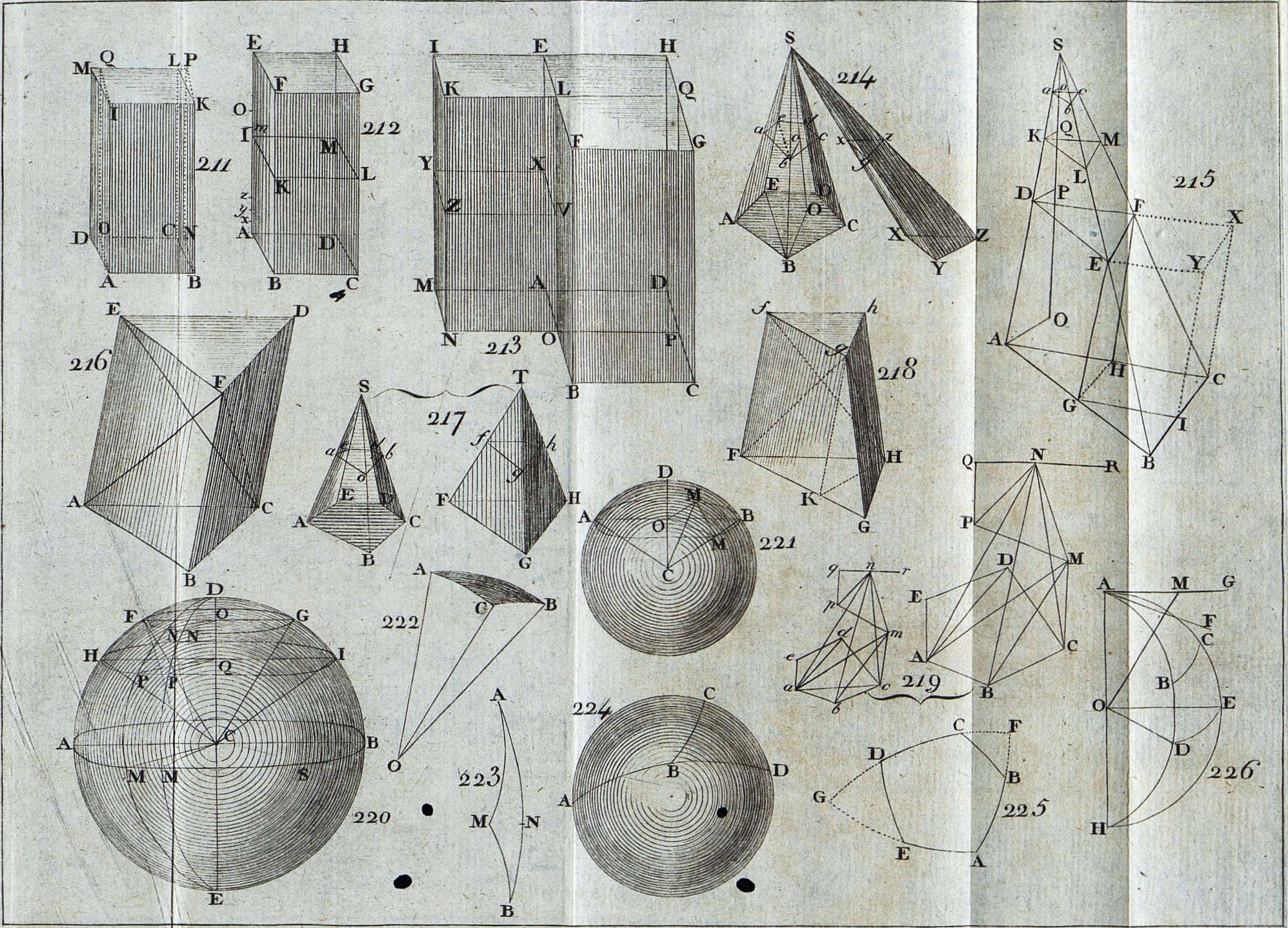

113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142

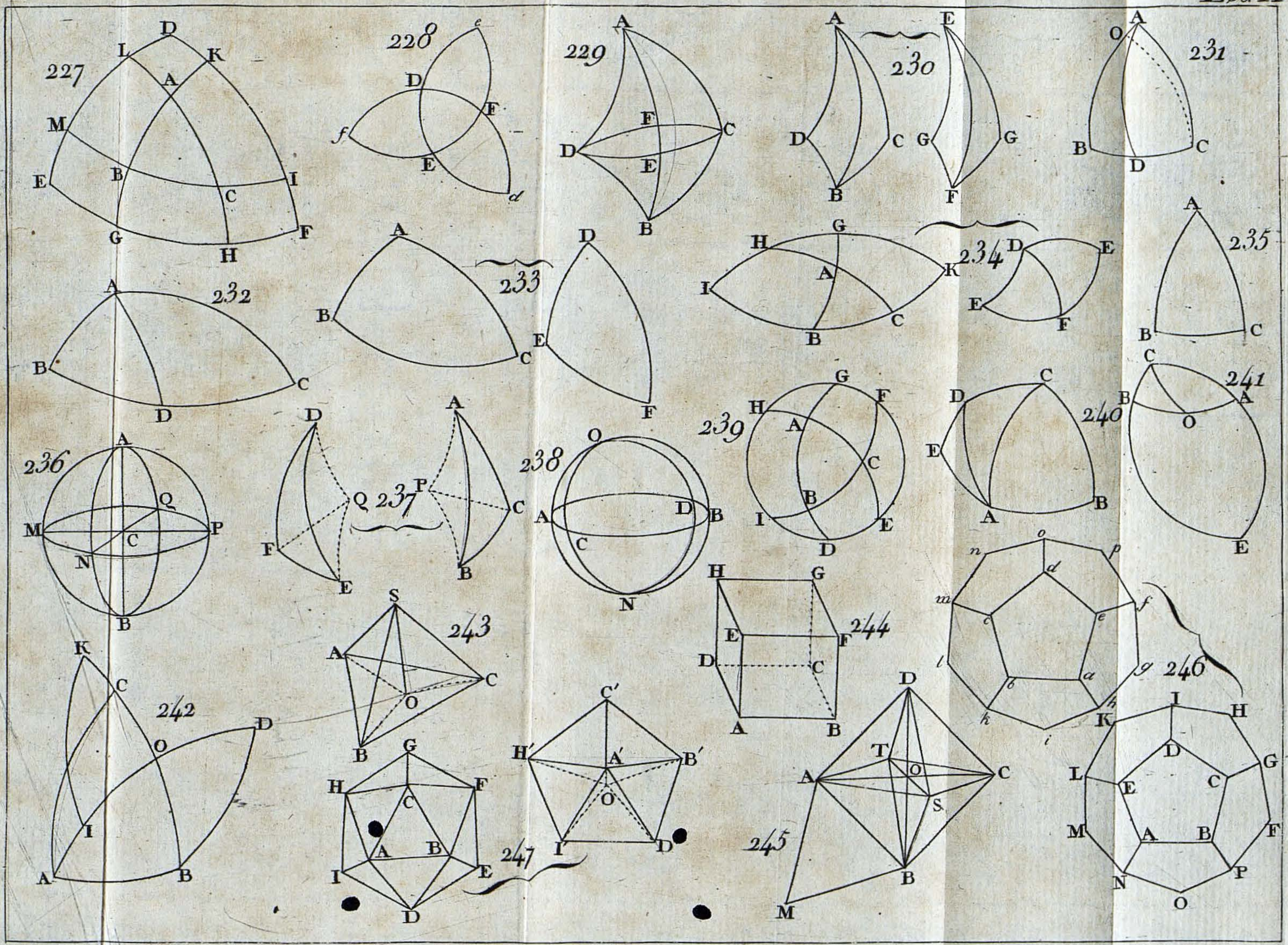

143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162

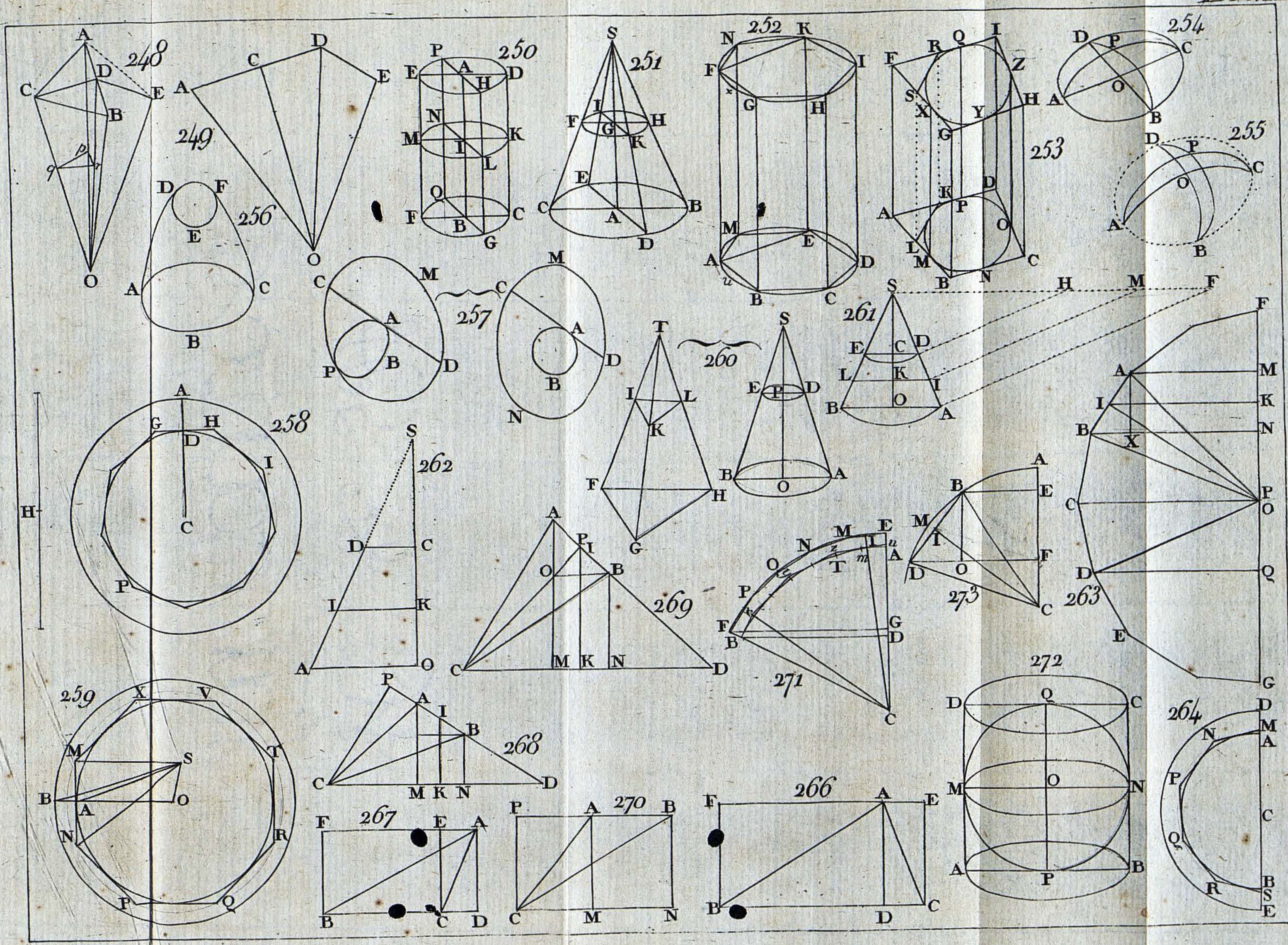

163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177


178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193


194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210


211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226


227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247


248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
266
267
268
269
270
271
272
273

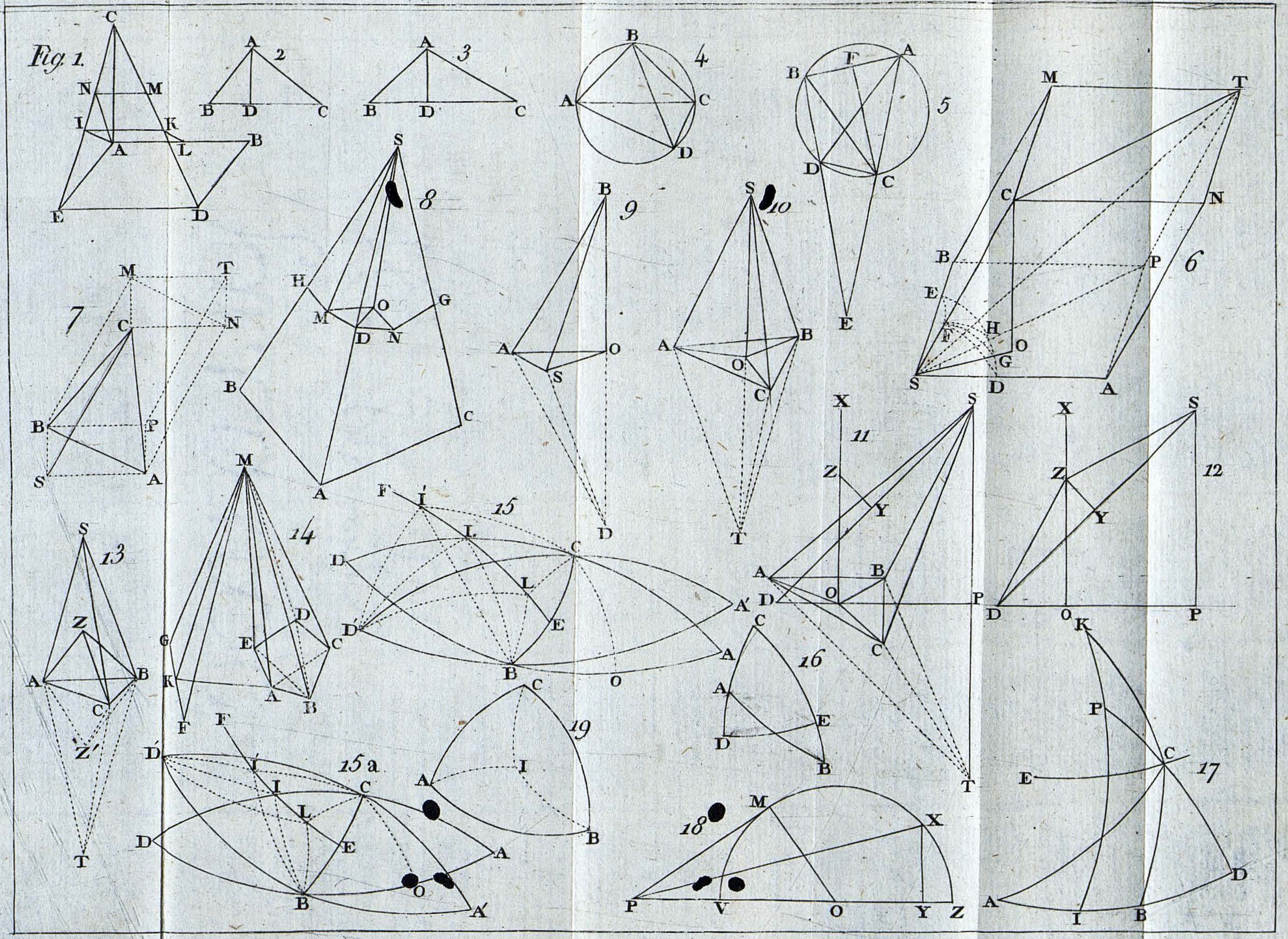


Fig. 1.
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
15 a
16
17
18
19